Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Bi-tangências, inflexões e pontos duplos de curvas planas

Matheus dos Santos Barnabé

Orientador: Prof. Dr. Fabio Scalco Dias
Coorientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischter

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 20 de fevereiro de 2018

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Bi-tangências, inflexões e pontos duplos de curvas planas

Matheus dos Santos Barnabé

Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias
Coorientador: Prof. Dr. Rick Antônio Rischter

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Geometria e Topologia

Itajubá – MG
20 de fevereiro de 2018

Agradecimentos

Agradeço aos professores do PMAT pela dedicação e empenho que demonstraram durante o curso, também agradeço aos colegas de curso pela amizade e cumplicidade.

Um agradecimento especial para o Prof. Dr. Fábio Scalco Dias e ao Prof. Dr. Rick Antônio Rischter por terem me dado forças e acreditado em mim para que eu conduzisse a dissertação e o curso, como um todo, até o seu fim.

Outro agradecimento especial para o Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello e ao Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes pela excelente condução, administração e coordenação do PMAT.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de mestrado.

"A ciência nunca resolve um problema
sem criar pelo menos outros dez."
(George Bernard Shaw)

Resumo

O objetivo desta dissertação é um estudo de uma relação entre os números de bi-tangências, inflexões e pontos duplos de curvas planas. Dentre os resultados principais, provaremos a fórmula de Fabricius-Bjerre para curvas suaves e fechadas no plano e apresentaremos uma fórmula análoga para curvas fechadas na esfera. Obtemos também, para uma classe de curvas de plano, uma extensão dessa relação estabelecida por Fabricius-Bjerre. Por último, exibiremos uma fórmula que relaciona inflexões, bi-tangências e o número Milnor de um germe de curva plana.

Palavras–chave: Bi-tangências, Inflexões, Pontos Duplos, Curvas Planas, Fabricius-Bjerre.

Abstract

The objective of this dissertation is a study of a relation between the numbers of bi-tangencies, inflections and double points of the plane curves. Among the main results, we will prove the Fabricius-Bjerre formula for smooth and closed curves in the plane and present an analogous formula for closed curves in the sphere. We also obtain, for a class of plane curves, an extension of the relation established by Fabricius-Bjerre. Lastly, we will show a formula that relates inflections, bi-tangencies and the number of Milnor of the plane curve germ.

Keywords: Bitangency, Inflections, Double Points, Plane Curves, Fabricius-Bjerre.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O estudo de curvas foi o grande precursor da história da geometria diferencial. De fato, noções como retas tangentes à curvas já faziam parte do conhecimento dos gregos (Euclides, Arquimedes, Apolônio). Foi no século XVII, com Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), que se deu a criação do método das coordenadas. O estudo diferencial, propriamente dito, deu-se somente após a descoberta dos algoritmos do cálculo infinitesimal, fruto dos trabalhos de Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727).

Atualmente, a geometria diferencial de cuvas e superfícies tem dois aspectos. Primeiro, que pode ser chamado de geometria diferencial clássica, teve início como os primórdios do cálculo. A grosso modo, a geometria diferencial clássica é o estudo das propriedades locais das curvas e superfícies. Por propriedades locais entendemos aquelas propriedades que dependem apenas do comportamento da curva ou superfície nas proximidades de um ponto. O outro aspecto é a chamada geometria diferencial global. Estuda-se aqui a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo.

Nesta dissertação exploraremos estes dois aspectos da geometria diferencial de curvas no plano $\mathbb{R}^2$.

O espírito deste trabalho foi inspirado no artigo de Fabricius-Bjerre [11] de 1962. Neste, o autor descreve uma alegante relação entre os números de bi-tangências (retas tangentes à curva em exatamente dois pontos), pontos duplos (auto-interseções da curva) e inflexões (pontos onde a curvatura se anula) de uma curva $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$. Outras demonstrações para este resultado podem ser encontradas em [14] ou em [2]. Para um resumo destas demonstrações veja [16] ou [9].

Fabricius-Bjerre estendeu seu próprio teorema para curvas $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ com cúspides dos tipos c_1 e c_2 em 1977 no artigo [12]. Informalmente, a vizinhança de uma curva em um ponto de cúspide é composta de dois arcos convexos sem pontos comuns, temos: uma cúspide do tipo c_1, sendo quando os arcos convexos situam-se em lados opostos da reta tangente no ponto de cúspide; uma cúspide do tipo c_2, quando os arcos convexos encontra-se no mesmo lado da reta tangente.

Em 1987, Joel Weiner em [19] obteve uma fórmula análoga a demonstrada por Fabricius-Bjerre para curvas fechadas na esfera. Neste artigo o autor adaptou a prova original, feita em [11], para que fosse efetiva a curvas fechadas esféricas (imersões do círculo na esfera). A novidade foram os pares antipodais de $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$, que são os pares $\{p, \overline{p}\}$ tais que p e $\overline{p}$ são pontos antipodais e estão em $\gamma(\mathbb{S}^1)$, que passaram a fazer parte da fórmula.

Já em 2011, Fabio Dias e Luis Mello em [7] obtiveram uma fórmula, análoga a de Fabricius-Bjerre, para uma classe de curvas $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto. Este resultado foi obtido a partir da construção de um campo $F_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conveniente e o estudo de seu índice. O que ocorre é o fato dos pontos singulares do campo F_γ possuírem uma relação com a geometria da curva γ.

Após três anos, em [8], os autores, Fabio Dias, Raúl Oset Sinha e Maria Ruas, obtiveram uma extensão do resultado encontrado em [7], incluindo agora cúspides dos tipos c_1 e c_2. Além disso, neste artigo [8], é iniciado um estudo algébrico de curvas planas, obtendo, para uma certa classe de germes de curvas $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, uma fórmula envolvendo o número de Milnor, as inflexões e as bi-tangências.

Neste trabalho temos o texto organizado da seguinte forma.

Começaremos o Capítulo 1 dando definições formais para os termos citados (bi-tangência, ponto duplo e inflexão) e também para um conjunto $\mathcal{G}$ de curvas suaves $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ para as quais a fórmula de Fabricius-Bjerre é verdadeira. Após isso, iremos apresentar duas demostrações para o Teorema de Fabricius-Bjerre, uma mais intuitiva e outra mais formal. A primeira prova a ser apresentada está contida no artigo [11], a segunda pode ser encontrada em [16].

O Capítulo 2 é baseado no artigo [19] e visa apresentar uma relação entre as bi-tangências, pontos duplos, inflexões e pontos antipodais de uma curva fechada na esfera.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos artigos [7] e [8]. Neste capítulo temos o principal resultado desta dissertação, o teorema que nos permite relacionar objetos geométricos de uma classe de curvas planas, cujo o domínio é um intervalo aberto da reta real, por meio de uma equação. Tal teorema é semelhante ao de Fabricius-Bjerre para curvas fechadas, todavia, para curvas partindo de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, temos mais casos.

O Capítulo 4 explora o artigo [8]. O objetivo deste último capítulo é relacionar o número de Milnor com o número de inflexões e bi-tangências de um germe de curva plana.

Capítulo 1

A Fórmula de Fabricius-Bjerre

O presente capítulo tem como principal objetivo expor a demonstração dada por Fabricius-Bjerre em [11]. Além disso, temos presentes aqui as descrições dos objetos geométricos estudados. Usamos o livro [5] como base para conceitos como retas tangentes e curvaturas, os quais iremos utilizar para fazermos as definições necessárias.

1.1 Definições

Nesta seção iremos formalizar o conceito de bi-tangências, pontos duplos e inflexões, os quais são os termos presentes no Teorema de Fabricius-Bjerre que enunciaremos na seção seguinte.

Durante toda essa dissertação, denotaremos o círculo de raio 1 por $\mathbb{S}^1$ e diremos que a curva $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ é suave quando $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Definição 1.1. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave, diremos que $u \in \mathbb{S}^1$ é uma* **inflexão** *se a curvatura de γ em u é nula, ou seja, $\det(\gamma'(u), \gamma''(u)) = 0$. Ver Figura 1.1.*

Definição 1.2. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave com uma inflexão $u \in \mathbb{S}^1$. Quando ocorrer de $\gamma'(u)$ não ser múltiplo de $\gamma'''(u)$, isto é, $\det(\gamma'(u), \gamma'''(u)) \neq 0$, diremos que u é uma inflexão* **ordinária**.

Definição 1.3. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Considere $u, v \in \mathbb{S}^1$ dois pontos distintos, denotados por (u, v) ou (v, u). Quando a reta tangente de γ em u coincidir com*

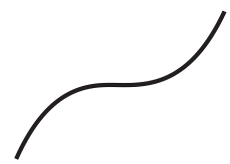


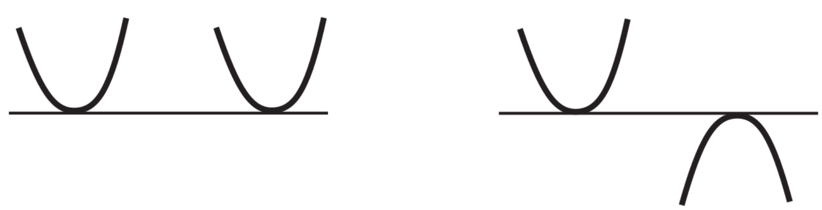
Figura 1.1: Inflexão.

a reta tangente de γ em v diremos que (u, v) é uma **bi-tangência**. *(De modo similar, podemos definir tri-tangências.)*

Definição 1.4. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave com (u, v) uma bi-tangência. Se u e v não são pontos de inflexão, diremos que a bi-tangência é* **regular**.

Observe que a definição de bi-tangência regular permite dois casos na Definição 1.3, que serão as bi-tangências de mesmo lado e de lados opostos. Como definidas a seguir.

Definição 1.5. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave com (u, v) uma bi-tangência regular. Se existirem vizinhanças em $\gamma(\mathbb{S}^1)$ dos pontos $\gamma(u)$ e $\gamma(v)$ ambas do mesmo lado da reta tangente dada por $\gamma'(u)$ teremos então uma* **bi-tangência de mesmo lado**, *caso contrário, teremos uma* **bi-tangência de lados opostos**. *Os dois casos estão ilustrados na Figura 1.2.*



(a) Bi-tangência de mesmo lado. (b) Bi-tangência de lados opostos.

Figura 1.2: Bi-tangências.

Definição 1.6. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva suave. Um* **ponto duplo** *é um par de pontos distintos $u, v \in \mathbb{S}^1$, denotados por (u, v) ou (v, u), tais que $\gamma(u) = \gamma(v)$. Ver Figura 1.3. (Semelhantemente, definimos a noção de ponto tripo.)*

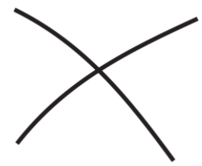


Figura 1.3: Ponto Duplo.

Definição 1.7. *Seja* $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *uma curva suave com um ponto duplo* (u, v)*. Diremos que* (u, v) *é um ponto duplo* **transversal** *quando* $\gamma'(u)$ *não for um múltiplo de* $\gamma'(v)$*, ou seja,* $\det(\gamma'(u), \gamma'(v)) \neq 0$*.*

Com essas definições preliminares feitas, vamos definir o conjunto das curvas $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ para as quais o Teorema de Fabricius-Bjerre é verdadeiro.

Definição 1.8. *Definimos* $\mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ *como o conjunto formado por todas as curvas* $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ *tais que suas bi-tangências são regulares, não existem tri-tangências, os pontos duplos são transversais, não existem pontos triplos e as inflexões são ordinárias.*

Usando técnicas de transversalidade, é possível mostrar que $\mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ é residual em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ com a topologia de Whitney $\mathcal{C}^\infty$. Chamaremos as curvas $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ de **genéricas**. Ainda, como $\mathbb{S}^1$ é compacto temos que os pontos de bi-tangências, pontos duplos e inflexões são finitos.

Segue agora uma importante observação acerca das quantidades dos objetos em questão.

Observação 1.9. *Nas Definições 1.3 e 1.6 o par* (u, v)*, que representa respectivamente, uma bi-tangência ou o ponto duplo da curva* γ*, não é ordenado. De fato, estamos tratando de pontos* $u, v \in \mathbb{S}^1$ *distintos, que é o mesmo que pontos* $v, u \in \mathbb{S}^1$ *distintos. Este par seria ordenado se considerássemos* $(u, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$*.*

Antes de enunciarmos o Teorema de Fabricius-Bjerre precisamos dizer o que representarão as quantidades t_s, t_o, d e i, que nele serão relacionadas por intermédio de uma fórmula. Isto está feito a seguir para uma curva suave $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ qualquer.

1 - Denotaremos por t_s a quantidade de retas tangentes à curva γ nas bi-tangências de mesmo lado. Assim,

$$t_s = \#\{\text{bi-tangências de mesmo lado de } \gamma\}.$$

2 - De modo similar ao anterior, t_o representa a quantidade de retas tangentes à curva γ nas bi-tangências de lados opostos. Isto é,

$$t_o = \#\{\text{bi-tangências de lados opostos de } \gamma\}.$$

3 - Definimos d como a quantidade de pontos duplos da curva γ, ou seja,

$$d = \#\{\text{pontos duplos de } \gamma\}.$$

4 - Por fim, seja i a quantidade de inflexões presentes em γ. Isto é,

$$i = \#\{\text{inflexões de } \gamma\}.$$

1.2 Teoremas de Fabricius-Bjerre

Com as definições e observações da seção anterior, estamos em condição de enunciar o Teorema de Fabricius-Bjerre.

Teorema 1.10. [Fabricius-Bjerre] *Seja $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Então os números t_s, t_o, d e i satisfazem a seguinte relação*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2}. \tag{1.1}$$

A equação (1.1) é devida a Fabricius-Bjerre, e como dito anteriormente, pode ser encontrada em [11]. Na subseção seguinte daremos a prova apresentada no artigo citado. Mas antes, vamos enunciar a extensão para este mesmo teorema dada em [12].

Teorema 1.11. [Fabricius-Bjerre] *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ uma curva genérica. Então os números t_s, t_o, d, i, c_1 (cúspides do tipo c_1) e c_2 (cúspides do tipo c_2) satisfazem a seguinte relação*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2} + c_1 + \frac{c_2}{2}.$$

Uma demonstração para o Teorema 1.11 pode ser encontrada em [12], e é extremamente semelhante a que será feita nesta dissertação para o Teorema 1.10, apenas adicionando uma nova parte, que corresponde as cúspides.

1.2.1 A demonstração de Fabricius-Bjerre

Considere $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ como uma curva orientada. Seja $u \in \mathbb{S}^1$ e p a reta tangente à γ em $\gamma(u)$. Considere $p+$ sendo a semi-tangente positiva e $p-$ a semi-tangente negativa em $\gamma(u)$ como na Figura 1.4.

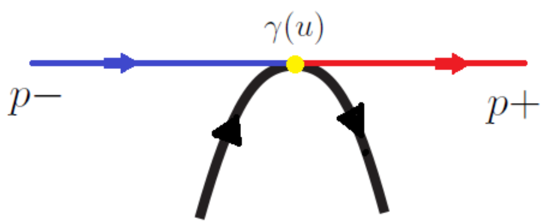


Figura 1.4: Semi-tangentes positivas e negativas.

Sem perda de generalidade, fixe um ponto p_0 na curva, p_0+ será sua semi-tangente positiva e p_0- sua semi-tangente negativa. Daremos uma volta completa em γ, percorrendo, com as tangentes (consequentemente com $p+$ e $p-$), todos os seus pontos, até voltarmos em p_0.

Note que a quantidade de pontos nas interseções de $p+$ e $p-$ com a curva γ não se alteram, exceto quando passamos em um dos pontos de uma bi-tangência, um ponto duplo, ou uma inflexão.

Diremos que $p+$ ou $p-$ ganhou (perdeu) um ponto, quando a quantidade de pontos na interseção de $p+$ ou $p-$ com a curva aumentar (diminuir) ao passar por uma bi-tangência, um ponto duplo, ou uma inflexão.

A ideia da prova é contabilizar essas perdas e ganhos enquanto as retas tangentes percorrem γ. Ao final, obteremos uma relação entre essas alternâncias, baseada no fato que a quantidade total de pontos em $(p_0+) \cap (\gamma(\mathbb{S}^1))$ e $(p_0-) \cap (\gamma(\mathbb{S}^1))$ permanece inalterada.

Comecemos estudando a bi-tangência de mesmo lado. Como a curva γ está orientada, temos três casos a considerar, os quais exibimos na Figura 1.5.

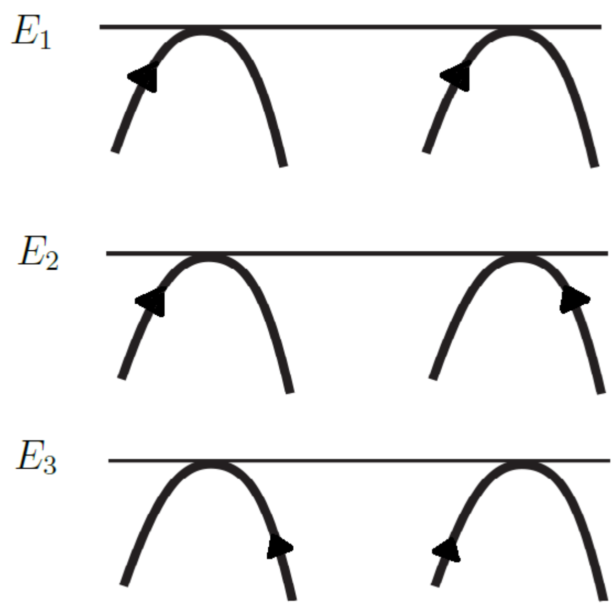
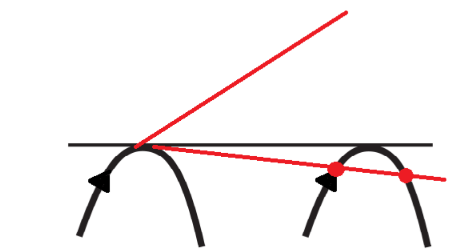


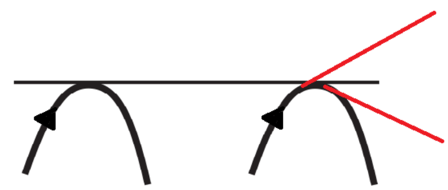
Figura 1.5: Tipos de bi-tangência do mesmo lado.

Veja que, no caso denotado por E_1, temos que $p+$ ganha dois pontos e $p-$ perde dois pontos. Para que fique claro, vamos explicitar os pontos ganhos na Figura 1.6, e perdidos na Figura 1.7 do caso E_1.

Já no caso E_2, $p+$ ganha quatro pontos e $p-$ não se altera. No último caso, E_3, $p-$ perde quatro pontos e $p+$ não se altera. Chamaremos a quantidade de bi-tangências do tipo E_1 de t_1, do tipo E_2 de t_2 e do tipo E_3 de t_3.

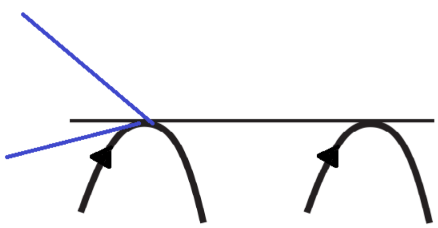


(a) Olhando $p+$ imediatamente antes e depois do primeiro ponto da bi-tangência. Aqui ganhamos dois pontos.

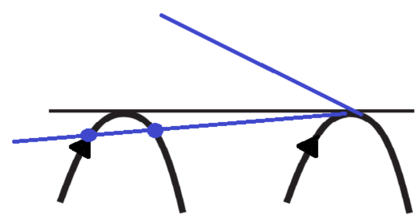


(b) Olhando $p+$ imediatamente antes e depois do segundo ponto da bi-tangência. Aqui nada ocorre.

Figura 1.6: Pontos ganhos por $p+$ no caso E_1.



(a) Olhando $p-$ imediatamente antes e depois do primeiro ponto da bi-tangência. Aqui nada ocorre.



(b) Olhando $p-$ imediatamente antes e depois do segundo ponto da bi-tangência. Aqui perdemos dois pontos.

Figura 1.7: Pontos perdidos por $p-$ no caso E_1.

O caso para bi-tangências de lados opostos, ver Figura 1.8, é similar às bi-tangências de mesmo lado e apresentamos apenas o resultado final.

Em I_1, $p+$ perde dois pontos e $p-$ ganha dois pontos. No caso I_2, $p+$ perde quatro pontos e $p-$ não se altera. No último caso, $p-$ ganha quatro pontos e $p+$ não se altera. Chamaremos a quantidade de bi-tangências do tipo I_1 de s_1, do tipo I_2 de s_2 e do tipo I_3 de s_3.

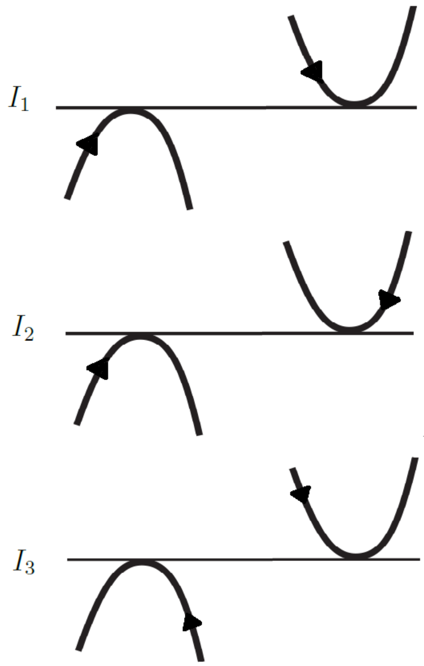


Figura 1.8: Estudo da bi-tangência de lados opostos.

Este estudo para os pontos duplos e inflexões é mais simples. Em resumo, quando $p+$ passa por um ponto duplo perde dois pontos e ao mesmo tempo $p-$ ganha dois pontos, e na inflexão um ponto é perdido em $p+$ e um é ganho em $p-$.

Explicitando o que foi obtido em uma tabela, temos:

	t_s			t_o				
	t_1	t_2	t_3	s_1	s_2	s_3	d	i
p_+	2	4	0	-2	-4	0	-2	-1
p_-	-2	0	-4	2	0	4	2	1

Tabela 1.1: Pontos ganhos e perdidos por $p+$ e $p-$.

Agora, usamos que a quantidade de pontos no conjunto interseção de p_0+ com a curva (e também de p_0- com a curva) não se altera. Então a soma das quantidades obtidas, tanto para $p+$ quanto para $p-$, deve ser zero. Isto nos dá as duas seguintes equações

$$2t_1 + 4t_2 = 2s_1 + 4s_2 + 2d + i \quad \text{e} \quad 2t_1 + 4t_3 = 2s_1 + 4s_3 + 2d + i, \tag{1.2}$$

a primeira referente $p+$ e a segunda referente a $p-$.

Somando as duas equações em (1.2), dividindo por quatro, usando que t_s é a quantidade total de bi-tangências de mesmo lado $(t_1 + t_2 + t_3)$ e t_0 é a quantidade total de bi-tangências de lados opostos $(s_1 + s_2 + s_3)$, como feito abaixo:

$$4(t_1 + t_2 + t_3) = 4(s_1 + s_2 + s_3) + 4d + 2i$$

$$\Rightarrow t_s - t_o = d + \frac{i}{2}.$$

Obtemos (1.1) e, assim, terminamos a demonstração. ■

A seguir exibimos dois exemplos de curvas que satisfazem o Teorema 1.10. No primeiro exemplo apenas verificaremos que o teorema é válido, já no segundo, o usaremos para obter a quantidade de inflexões presente na curva.

Exemplo 1.12. *Apresentamos neste exemplo o conhecido nó* **Trefoil**. *Este nó é o exemplo mais simples de um nó não trivial. O nó Trefoil pode ser obtido dando um nó em uma corda e juntando as suas extremidades.*

Na Figura 1.9 apresentamos duas possíveis projeções no plano do nó Trefoil. É fácil ver que nas duas curvas temos

$$t_s = 3, \quad t_o = 0, \quad d = 3 \ \text{e} \quad i = 0.$$

Figura 1.9: Curva Trefoil.

Claramente o Teorema 1.10 é válido como mostrado abaixo:

$$3 = 3 - 0 = 3 + \frac{0}{2} = 3.$$

Exemplo 1.13. *A* **Leminiscata** *é a curva algébrica do quarto grau da equação cartesiana:*

$$(u^2 + v^2)^2 = 2a(u^2 - v^2),$$

ela tem a forma similar ao símbolo de infinito (∞). Veja Figura 1.10.

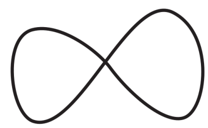


Figura 1.10: Curva Leminiscata.

Nesta curva é fácil ver que

$$t_s = 2, \quad t_o = 0 \ e \quad d = 1.$$

Todavia, não é tão simples saber quantas inflexões temos presente na Leminiscata. Assim, podemos aplicar o Teorema 1.10 para obter essa quantidade. Seguindo que

$$i = 2(t_s - t_o - d) = 2(2 - 0 - 1) = 2,$$

e portanto, o número de inflexões da curva Leminiscata é 2.

1.3 Uma demonstração alternativa

Esta seção é baseada na tese de Daniel Dreibelbis [9]. A ideia aqui é obter uma fórmula para relacionar pontos duplos e bi-tangências entre duas curvas planas, e então, aplicar essa fórmula para uma curva γ e uma translação de si mesma.

Sejam $\gamma, \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ duas curvas suaves e fechadas no plano. Considere $n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o campo de vetores normais de γ, isto é, n associa para cada $p \in \mathbb{S}^1$ o vetor unitário que faz 90º em sentido anti-horário com $\gamma'(p)$. De modo análogo, seja $m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o campo de vetores normais de ψ.

Vamos agora dar a noção de bi-tangência e ponto duplo para o caso em que temos duas curvas. Uma bi-tangência é um par de pontos $(u, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tal que a reta tangente de γ em u coincide com a reta tangente de ψ em v. Do mesmo modo que anteriormente, a bi-tangência pode ocorrer de dois modos, uma bi-tangência de mesmo lado ou de lados opostos. Um ponto duplo é um par $(u, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, tal que $\gamma(u) = \psi(v)$, isto é, uma interseção entre as duas curvas.

Proposição 1.14. *Para uma escolha genérica de duas curvas suaves e fechadas $\gamma, \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, nós temos um número finito de bi-tangências e pontos duplos.*

Demonstração. Defina a aplicação $\phi_{\gamma,\psi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ por

$$\phi_{\gamma,\psi}(u, v) = (n(u), m(v), \gamma(u) - \psi(v)).$$

Vamos considerar $\phi_{\gamma,\psi}$ como um elemento da família de aplicações

$$\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2,$$

definido por

$$\Phi(u, v, \gamma, \psi) = (n_\gamma(u), m_\psi(v), \gamma(u) - \psi(v)).$$

A aplicação Φ é uma submersão. Segue do Teorema da Transversalidade de Thom (ver [13]), que para escolhas genéricas de γ e ψ, a subvariedade bidimensional $\phi_{\gamma,\psi}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ será transversal a toda subvariedade suave.

Defina agora os subconjuntos W_1 e W_2 de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ como

$$W_1 = \{(n, m, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 : n \cdot v = m \cdot v = 0\} \text{ e}$$
$$W_2 = \{(n, m, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 : v = 0\}.$$

Temos que W_1 e W_2 são duas variedades bidimensionais. Como $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ tem dimensão 4, $\phi_{\gamma,\psi}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ intersecta W_1 e W_2 em pontos isolados. Ainda, a interseção com W_1 nos dá as bi-tangências e a interseção com W_2 nos dá os pontos duplos. Assim, o conjunto de bi-tangências e pontos duplos é isolado em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ compacto, portanto é finito. $\blacksquare$

Proposição 1.15. *Para duas curvas suaves e fechadas $\gamma, \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ genéricas, todas as interseções são transversais e nenhum dos pontos de uma bi-tangência é uma inflexão.*

Demonstração. O subconjunto W de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ definido por

$$W = \{(n, m, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 : n = \pm m \text{ e } v = 0\}$$

é uma subvariedade de dimensão um. Sendo $\phi = \phi_{\gamma,\psi}$ da proposição anterior, vemos que W intersecta $\phi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ exatamente nos pares (u, v) que são bi-tangências e pontos duplos ao mesmo tempo, isto é, são exatamente os pontos de interseção entre γ e ψ que não são transversais. Mas, $\phi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ e W são transversais pela demonstração da Proposição 1.14. Portanto, analisando suas dimensões, não se tocam. Assim, γ e ψ são transversais. Isto nos dá que bi-tangências e pontos duplos não ocorrem ao mesmo tempo.

O subconjunto A de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ definido por

$$A = \{(p, q) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 : p \text{ é uma inflexão de } \gamma \text{ ou } q \text{ é uma inflexão de } \psi\},$$

pode ser visto como união de dois conjuntos, o primeiro sendo formado pelos pontos de inflexão de γ cartesiano com $\mathbb{S}^1$ e o segundo, $\mathbb{S}^1$ cartesiano com os pontos de inflexão de ψ, é um dimensional. Logo, temos que $\phi(A) \subset \phi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ não intersecta W_1, visto que suas dimensões não somam 4. Portanto, nenhum ponto de inflexão faz parte de uma bi-tangência. ■

Para as próximas proposições vamos precisar de uma função auxiliar $F_{\gamma,\psi}$. Sejam $\gamma, \psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ duas curvas suaves e fechadas defina $F = F_{\gamma,\psi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ por

$$F(u, v) = (n(u) \cdot (\gamma(u) - \psi(v)), m(v) \cdot (\gamma(u) - \psi(v))). \tag{1.3}$$

Não é difícil ver que $F(u, v) = 0$ se, e somente se, (u, v) é uma bi-tangência ou um ponto duplo. Calculando a matriz Jacobiana de F usando que $n(u) \cdot \gamma'(u) = 0$ e $m(v) \cdot \psi'(v) = 0$, temos

$$J(F(u, v)) = \begin{bmatrix} n'(u) \cdot (\gamma(u) - \psi(v)) & n(u) \cdot \psi'(v) \\ m(v) \cdot \gamma'(u) & m'(v) \cdot (\gamma(u) - \psi(v)) \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Em um ponto duplo, segue que

$$\det(J(F(u,v))) = -(n(u)\cdot\psi'(v))(m(v)\cdot\gamma'(u)) \neq 0, \tag{1.5}$$

pela transversalidade das intersecções. Além disso, o sinal do determinante em (1.5) é negativo, visto que os produtos internos dentre os parentes possuem sinais opostos. Para ver isso note que, enquanto um é um produto interno entre dois vetores que formam um ângulo menor do que 90º, o outro é um produto interno de dois vetores cujo ângulo entre si é maior do que 90º.

Por outro lado, em uma bi-tangência, sabemos que $\gamma'(u)$ e $\psi'(v)$ são múltiplos de $(\gamma(u)-\psi(v))$, logo

$$\det(J(F(u,v))) = (n'(u)\cdot(\gamma(u)-\psi(v))(m'(v)\cdot(\gamma(u)-\psi(v))) \neq 0, \tag{1.6}$$

visto que na bi-tangência a curvatura não se anula. Analisando mais detalhadamente esse determinante, usamos novamente que $\gamma'(u)$ e $\psi'(v)$ são múltiplos de $(\gamma(u)-\psi(v))$ e que $n'(u)\cdot\gamma'(u)$ é a curvatura de γ em u e $m'(v)\cdot\psi'(v)$ é a curvatura de ψ em v, obtendo que o sinal do determinante em (1.6) é positivo em caso de uma bi-tangência do mesmo lado e negativo em um caso de bi-tangência de lados opostos.

O próximo teorema relaciona o índice de F com a característica de Euler da superfície $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Falaremos mais sobre o índice na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Teorema 1.16. [Halpern] *Sejam $\gamma:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2$ e $\psi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2$ duas curvas planas, fechadas, suaves e genéricas. Então*

$$O - S + D = 0, \tag{1.7}$$

onde O é o número de bi-tangências de lados opostas, S o número de bi-tangências de mesmo lado e D o número de pontos duplos.

Demonstração. Defina $F:\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^2$ como em (1.3). Pelos resultados anteriores temos que os zeros de F são transversais. Note que, sendo o par ordenado $(u,v)\in\mathbb{S}^2$ um zero de F, o par ordenado $(v,u)\neq(u,v)$ também é um zero de F. Além disso, o valor $\det(J(F(u,v)))$ é negativo em um ponto duplo ou uma bi-tangência de lados opostos e é positivo sobre uma bi-tangência de mesmo lado. Portanto, o índice de F é $2(-D-O+S)$, ou seja,

$$\operatorname{ind}(F) = 2(-D - O + S).$$

Agora usamos que a característica de Euler é 0 para o toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, obtendo

$$0 = \operatorname{ind}(F) = 2(-D - O + S),$$

concluindo o teorema, pois a característica de Euler é igual ao índice de F (Teorema de Poincaré-Hopf). ■

Teorema 1.10. [Fabricius-Bjerre] *Seja $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Então os números t_s, t_o, d e i satisfazem a seguinte relação*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2}.$$

Demonstração. Fixe um vetor $v \in \mathbb{S}^1$ que não seja tangente a nenhum ponto de inflexão de γ e defina $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ $(t \in \mathbb{R})$ por

$$\gamma_t(v) = \gamma(v) + tv.$$

A ideia é usar o Teorema 1.16 para γ e γ_t para algum t suficientemente pequeno. Para isso vamos estudar três casos.

1 - $u \in \mathbb{S}^1$ não é ponto de inflexão de γ e v é tangente a γ em u.

Neste caso, aparace uma bi-tangência do mesmo lado e um ponto duplo quando olhamos γ e γ_{t_1} para t_1 pequeno.

2 - $u \in \mathbb{S}^1$ não é ponto de inflexão de γ e v não é tangente a γ em u.

Neste caso não aparecem bi-tangências nem pontos duplos quando olhamos γ e γ_t.

3 - Por último, $u \in \mathbb{S}^1$ é ponto de inflexão.

Aqui aparece uma bi-tangência de lado oposto quando olhamos γ e γ_{t_2} para t_2 pequeno.

Note também que as bi-tangências e pontos duplos originais de γ aparecem em quantidade dobrada quando olhamos o par γ e γ_t.

Por fim, tome t_0 suficientemente pequeno para que todas as observações anteriores sejam válidas simultaneamente. Com isso,

$$\begin{aligned} O &= 2t_o + i, \\ S &= 2t_s + \text{ quantidade de vezes que ocorre o caso 1,} \\ D &= 2d + \text{ quantidade de vezes que ocorre o caso 1.} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Agora usamos o Teorema 1.16 com os valores O, S e D obtidos em (1.8), derivando que

$$2t_o + i - 2t_s + 2d = 0,$$

isto implica em

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2},$$

concluindo assim o teorema. ∎

Mais detalhes das demonstrações feitas nesta seção podem ser encontradas em [9], onde também temos outras demonstrações para o Teorema 1.10.

Com esta última demonstração feita finalizamos este presente capítulo.

Capítulo 2

A Fórmula de Fabricius-Bjerre na Esfera

Neste capítulo iremos apresentar uma versão da fórmula de Fabricius-Bjerre para curvas fechadas na esfera $\mathbb{S}^2$. Para tal, usaremos conceitos, como geodésica, curvatura geodésica, que podem ser encontrados em [5]. A demonstração em si, será muito semelhante a dada por Fabricius-Bjerre, trocando as retas tangentes por geodésicas, e pode ser encontrada em [19].

2.1 A fórmula na esfera

Considere $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ uma curva esférica fechada e suave. A ideia aqui é obter uma fórmula análoga à de Fabricius-Bjerre para γ. O resultado final é apresentado na Tabela 2.1, onde a é o número de pares antipodais de γ.

Curva no plano	Curva na esfera
$t_s - t_o = d + \frac{i}{2}$	$t_s - t_o = d + \frac{i}{2} - a$

Tabela 2.1: Fórmula no plano e na esfera.

Daremos a seguir os conceitos de bi-tangência, ponto duplo, par antipodal e inflexão na esfera.

Uma **bi-tangência**, neste caso, é um grande circulo l que é tangente a $\gamma(\mathbb{S}^1)$ em precisamente dois pontos. Assumimos que nenhum desses pontos fazem parte de um ponto duplo e também não são inflexões. Dividiremos as bi-tangências em dois casos, de **mesmo lado** e de **lados opostos**, de forma análoga a feita no Capítulo 1.

A noção de **ponto duplo** é análoga a dada no Capítulo 1. Excluiremos curvas com pontos tripos.

Na esfera, diremos que u é uma **inflexão ordinária** quando a curvatura geodésica k_g de γ se anular em u, mas $(k_g)'(u) \neq 0$.

Por fim, dois pontos na esfera são antipodais se o segmento que os une é um diâmetro. Para todo $p \in \mathbb{S}^2$, seja $\overline{p}$ sua antípoda. Assim p e $\overline{p}$ são chamados antipodais. Se existirem $u, v \in \mathbb{S}^1$ com $\gamma(u) = p$ e $\gamma(v) = \overline{p}$, então $\{p, \overline{p}\}$ será chamado **par antipodal** de γ. Note que, como conjunto, temos $\{p, \overline{p}\} = \{\overline{p}, p\}$. Assumiremos que u e v não fazem parte de nenhum ponto duplo ou bi-tangência de γ;

Com os conceitos acima podemos definir o conjunto $\mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)$, de forma similar à Definição 1.8 do Capítulo 1. As curvas $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)$ serão chamadas de curvas **genéricas,** como em [19].

Teorema 2.1. [Weiner] *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ uma curva fechada e genérica na esfera. Então,*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2} - a, \tag{2.1}$$

onde t_s representa a quantidade de bi-tangências de mesmo lado, t_o quantidade de bi-tangências de lados opostos, d quantidade de pontos duplos, i quantidade de inflexões e a quantidade de pares antipodais de γ.

Demonstração. A prova é semelhante à dada por Fabricius-Bjerre, mas neste caso usaremos a semi-geodésica positiva e a semi-geodésica negativa como "retas" tangentes.

Seja $u \in \mathbb{S}^1$, considere $p = \gamma(u)$ e seja $v = \gamma'(u)$ o vetor unitário tangente a $\gamma(\mathbb{S}^1)$ em u. Denote por l_u^+, respectivamente l_u^-, o segmento geodésico de comprimento π saindo de p na direção v, respectivamente $-v$.

Para cada $u \in \mathbb{S}^1$ seja $N^+(u)$ $(N^-(u))$ o número de pontos em $\gamma(\mathbb{S}^1) \bigcap l_u^+$ $(\gamma(\mathbb{S}^1) \bigcap l_u^-)$. Faça então

$$N(u) := N^+(u) - N^-(u) \quad (u \in \mathbb{S}^1).$$

Note que quando u percorre $\mathbb{S}^1$ as mudanças de valores $N(u)$ ocorrem quando u passa um por um ponto duplo, uma bi-tangência ou uma inflexão do mesmo modo que no caso planar. O que ocorre de novo é o caso em que $\gamma(u)$ faz parte de um par $\{p, \overline{p}\}$ antipodal de γ.

Sejam $u, v \in \mathbb{S}^1$ tais que $\{p = \gamma(u), \overline{p} = \gamma(v)\}$ seja um par antipodal. Vamos verificar o que acontece com os valores $N(u)$ neste caso. Para isso, tome uma vizinhança V de $\overline{p}$ suficientemente pequena. Agora considere $\overline{\gamma}(x) := \overline{\gamma(x)}, \forall x \in V$. Assim, podemos ver que quando passamos por p com as semi-geodésicas de γ a semi-geodésica negativa irá perder um ponto e a positiva irá ganhar um ponto. Lembre que temos um par antipodal. Logo, o comportamento apresentado é o oposto ao de um ponto duplo, disto segue a equação dada em (2.1) e o teorema está provado. ■

Corolário 2.2. *Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ uma curva esférica fechada. Se $\gamma(\mathbb{S}^1) \subset H$ com H um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^2$. Então,*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Basta ver que $a = 0$ na equação (2.1), pois não temos pares de pontos antipodais. ■

2.2 Aplicações

Seja $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ uma curva suave fechada no espaço. Nós vamos supor que α tem curvatura k estritamente positiva. Seja τ a torção de α. Vamos considerar α parametrizada pelo comprimento de arco e definir $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ por $\gamma(u) = \alpha'(u)$. A curva γ assim definida é chamada de **indicatriz tangente** de α.

Aplicaremos o Teorema 2.1 para γ e obteremos uma fórmula para α. Para tal, vamos estudar a interpretação de cada termo na equação (2.1) em relação a curva α.

1- Pontos Duplos

Um ponto duplo (u, v) em γ, isto é, $\gamma(u) = \gamma(v)$, é equivalente a curva α ter o mesmo vetor tangente em $\alpha(u)$ e $\alpha(v)$. Diremos que tais pontos são **tangentes diretamente paralelas**.

2- Par Antipodal

Um par $\{p, \overline{p}\}$ antipodal de γ corresponde a um par de pontos em $\alpha(\mathbb{S}^1)$ com vetores tangentes em direção oposta. Chamaremos esses pontos de **tangentes opostamente paralelas**.

3- Ponto de inflexão

Seja $u \in \mathbb{S}^1$ e $k_g(u)$ a curvatura geodésica de γ em u. Então,

$$\begin{aligned} k_g(u) &= \frac{\gamma(u) \cdot \big(\gamma'(u) \times \gamma''(u)\big)}{||\gamma'(u)||^3} \\ &= \frac{\alpha'(u) \cdot \big(\alpha''(u) \times \alpha'''(u)\big)}{\big(|1|\, ||\alpha''(u)||\, \sin(\pi/2)\big)^3} \\ &= \frac{\det\big(\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u)\big)}{||\alpha'(u) \times \alpha''(u)||^2} \frac{||\alpha'(u)||^3}{||\alpha'(u) \times \alpha''(u)||} \\ &= \frac{\tau(u)}{k(u)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Segue de (2.3) que $u \in \mathbb{S}^1$ é uma inflexão de γ se, e somente se, $\tau(u) = 0$ e $\tau'(u) \neq 0$. Um ponto $u \in \mathbb{S}^1$ com $\tau(u) = 0$ e $\tau'(u) \neq 0$ será chamado de **vértice** de α.

4- Bi-tangência

Suponha que o grande círculo l é uma bi-tangência de γ nos pontos $\gamma(u)$ e $\gamma(v)$, $u, v \in \mathbb{S}^1$. Neste caso, usando a regra da mão direita, temos que

$$\gamma(u) \times \gamma'(u) = \pm\gamma(v) \times \gamma'(v).$$

Assim, a binormal indicatriz $\beta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ dada por

$$\beta(z) = \frac{\gamma(z) \times \gamma'(z)}{||\gamma(z) \times \gamma'(z)||},$$

é tal que $\beta(u) = \pm\beta(v)$.

Seja $\vartheta(z)$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, o plano osculador a $\alpha(\mathbb{S}^1)$ em $\alpha(z)$. Neste caso, $\vartheta(u)$ é paralelo a $\vartheta(v)$.

4.1- Se l representa uma bi-tangência do mesmo lado, veja l como o equador de $\mathbb{S}^2$ e considere o hemisfério norte como o hemisfério que contém vizinhanças de $\gamma(u)$ e $\gamma(v)$, que estão do mesmo lado para vizinhanças suficientemente pequenas. Seja N o polo norte. Então,

$$(\alpha(z) \cdot N)' = \gamma(z) \cdot N > 0,$$

para pontos z em vizinhanças suficientemente pequenas de u ou v. Isto é equivalente a curva α transpor dois planos osculadores paralelos $\vartheta(u)$ e $\vartheta(v)$ indo nas mesmas direções dadas por $\beta(u)$ e $\beta(v)$, respectivamente. Neste caso diremos que $\alpha(u)$ e $\alpha(v)$ possuem **planos osculadores concordantes**.

4.2- Ocorrendo uma bi-tangência de lados opostos escolhemos como polo norte qualquer um dos polos dados quando l é um hemisfério de $\mathbb{S}^2$, e para vizinhas suficientemente pequenas U de $\gamma(u)$ e V de $\gamma(v)$, teremos

$$(\alpha(z) \cdot N)' = \gamma(z) \cdot N, z \in U \text{ e } (\alpha(z) \cdot N)' = \gamma(z) \cdot N, z \in V,$$

com sinais opostos. Isto é equivalente a curva α transpor dois planos osculadores paralelos $\vartheta(u)$ e $\vartheta(v)$, um indo na direção dada pela binormal indicatriz e o outro indo em direção oposta a dada pela binormal indicatriz. Neste caso diremos que temos **planos osculadores discordantes**.

Com esse estudo feito podemos aplicar o Teorema 2.1 em α como segue.

Teorema 2.3. *Seja $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ uma curva espacial parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura k positiva e $\gamma = \alpha' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ genérica. Então,*

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2} - a,$$

onde t_s representa a quantidade de planos osculadores concordante, t_o quantidade de planos osculadores discordantes, d a quantidade de tangentes diretamente paralelas, i quantidade de vértices e a quantidade de tangentes opostamente paralelas de α.

Capítulo 3

Fórmula Geométrica

Este capítulo é baseado nos artigos [7] e [8] e contém o Teorema 3.23, principal resultado desta dissertação, o qual apresenta fórmulas, para uma certa classe de curvas planas, envolvendo bi-tangências, pontos duplos e inflexões.

Para o desenvolvimento deste capítulo iniciaremos com a definição da aplicação $F_\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$F_\gamma(u,v) = \left(\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2} \right),$$

onde $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$. Em seguida, calcularemos o índice em cada ponto singular do campo F_γ e chegaremos na seguinte expressão

$$\operatorname{ind}(F_\gamma) = 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2,$$

onde os termos d, t_o, t_s e i são os mesmos definidos no Capítulo 1 e os termos c_1 e c_2 são respectivamente o número de cúspides do primeiro e do segundo tipo a serem definidas.

Por fim, calcularemos o índice do campo F_γ, para $\gamma(u) = (a_k u^k, b_m u^m), a_k b_m \neq 0, 0 < k < m$, fazendo uso da fórmula de Bendixson

$$\operatorname{ind}_p(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2},$$

onde e representa o número de setores elípticos e h o número de setores hiperbólicos numa vizinhança do ponto de equilíbrio p, para mais detalhes ver, por exemplo, [3]. Combinando estes resultados obteremos o Teorema 3.23.

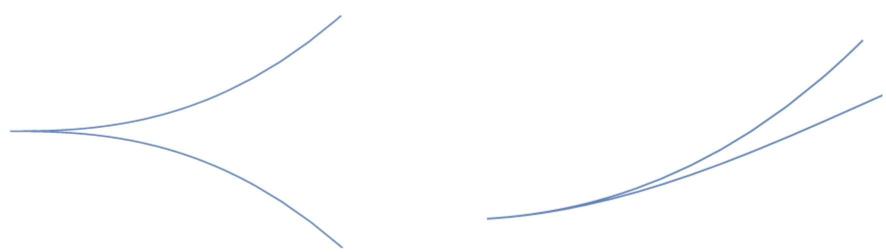
3.1 Definições e resultados preliminares

Esta seção visa definir cúspide do primeiro, cúspide do segundo tipo, o campo F_γ e relacionar seus zeros com os objetos geométricos estudados.

Definição 3.1. *Seja* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *uma curva suave,* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo aberto. Uma* **cúspide** *de* γ *é uma ponto* $u \in I$ *singular tal que: em uma vizinhança de* $\gamma(u)$ *a curva* γ *possui dois ramos, para os quais as retas tangentes em* $\gamma(u)$ *são coincidentes.*

Neste trabalho dividiremos os pontos de cúspides em dois tipos. Sabendo que uma vizinhança da curva em um ponto de cúspide $\gamma(u)$ é composta de dois arcos convexos sem pontos comuns, temos: uma cúspide do tipo c_1 ou **cúspide do primeiro tipo**, sendo quando os arcos convexos situam-se em lados opostos da reta tangente no ponto de cúspide; uma cúspide do tipo c_2 ou **cúspide do segundo tipo**, quando os arcos convexos encontra-se no mesmo lado da reta tangente.

A Figura 3.1 ilustra os dois tipos de cúspides mencionados.



(a) Cúspide do primeiro tipo (c_1), $\gamma(u) = (u^2, u^3)$.

(b) Cúspide do segundo tipo (c_2), $\gamma(u) = (u^2, u^4 + u^5)$.

Figura 3.1: Cúspides.

Por simplicidade, a quantidade de cúspides do tipo c_1 será denotada por c_1. O uso da mesma notação para esses dois objetos não nós trará nenhuma confusão, visto que sempre estará claro se estamos falando da cúspide ou de sua quantidade. Do mesmo modo, a quantidade de cúspides do tipo c_2 será dada por c_2.

Definição 3.2. *Definimos o conjunto $\mathcal{G}(I, R^2)$ como sendo o conjunto de todas as curvas $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ suaves, com as seguintes condições:*

(i) A curva γ apresenta um número finito de pontos duplos, que são todos transversais e não há pontos tripos;

(ii) A curva γ tem um número finito de bi-tangências, sendo todas regulares (não fazem parte de inflexões) e não possui tri-tangências;

(iii) A curva γ apresenta um número finito de pontos de inflexões, que são ordinários e nenhum deles é uma cúspide;

(iv) A curva γ tem um número finito de cúspides c_1 e c_2.

A Definição 3.2 dada aqui se assemelha, com a Definição 1.8 do Capítulo 1, todavia, como perdemos a compacidade do domínio, precisamos colocar a condição dos números t_s, t_o, d, i, c_1 e c_2 serem finitos como hipótese. Temos que $\mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$ é residual em $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ com a topologia de Whitney $\mathcal{C}^\infty$. Chamaremos as curvas $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$ de curvas **genéricas**.

Para cada curva $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$ iremos associar uma função $F_\gamma : I \times I \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F_\gamma(u, v) = \left(\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2} \right). \tag{3.1}$$

Pode não parecer claro, mas a função F_γ está bem definida quando $u = v$. Além disso, os zeros de F_γ estão relacionados com propriedades geométricas da curva γ, como mostra a proposição que segue.

Proposição 3.3. *Seja $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$ e F_γ como em (3.1). Então F_γ está bem definida em $u = v$ e vale zero se, e somente se:*

- *(u, v) é um ponto duplo ou uma bi-tangência, se $u \neq v$; ou*
- *u é uma inflexão ou uma cúspide, se $u = v$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente o caso $u \neq v$. Se estivermos em uma bi-tangência ou ponto duplo, é fácil ver que F_γ irá se anular em (u, v). Reciprocamente, se $F_\gamma(u,v) = (0,0)$, então $\gamma(u) = \gamma(v)$, nos dando um ponto duplo, ou $\gamma'(u)$ e $\gamma'(v)$ são ambos múltiplos de $\gamma(u) - \gamma(v)$, nos dando uma bi-tangência.

Para o caso $u = v$, vamos explicitar o valor $F_\gamma(u,u)$. Considere,

$$f_1(u,v) = \frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2} \quad \text{e} \quad f_2(u,v) = \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}.$$

Expandindo γ em série de Taylor em torno de v, temos

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{(n)}(v)(u-v)^{(n)}}{n!} \\ &= \gamma(v) + \gamma'(v)(u-v) + \frac{\gamma''(v)(u-v)^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma^{(1+n)}(v)(u-v)^{(1+n)}}{(1+n)!}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) na expressão de f_2 segue que

$$\begin{aligned} f_2(u,v) &= \det\left(\frac{\gamma'(v)}{(u-v)}, \frac{\gamma(u)-\gamma(v)}{(u-v)}\right) \\ &= \det\left(\frac{\gamma'(v)}{(u-v)}, \gamma'(v) + \frac{\gamma''(v)(u-v)}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma^{(1+n)}(v)(u-v)^n}{(1+n)!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\det(\gamma'(v), \gamma''(v)) + (u-v)\det\left(\gamma'(v), \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma^{(1+n)}(v)(u-v)^{(n-2)}}{(1+n)!}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Também temos a seguinte igualdade entre f_1 e f_2:

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= -\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(v) - \gamma(u))}{(v-u)^2} \\ &= -f_2(v,u). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo, tomando $u = v$ e usando (3.3) juntamente com (3.4) obtemos

$$F_\gamma(u,u) = \frac{1}{2}\Big(-\det(\gamma'(u), \gamma''(u)), \det(\gamma'(u), \gamma''(u))\Big).$$

Desta última igualdade segue que $f_1(u,u) = f_2(u,u) = 0$ se, e somente se, $\det(\gamma'(u), \gamma''(u)) = 0$, isto é, se u é um ponto de inflexão ou uma cúspide. ∎

Vamos exibir dois exemplos relacionados com a Proposição 3.3. Neles poderemos ver a relação dos zeros de F_γ com os objetos geométricos estudados.

Exemplo 3.4. *Considere* $\gamma(u) = (u^2, u^3)$*, ver Figura 3.2. Calculando* F_γ *temos,*

$$\begin{aligned} F_\gamma(u,v) &= \left(\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}\right) \\ &= \left(\frac{\det((2u, 3u^2), (u^2 - v^2, u^3 - v^3))}{(u-v)^2}, \frac{\det((2v, 3v^2), (u^2 - v^2, u^3 - v^3))}{(u-v)^2}\right) \\ &= (-u(u+2v), v(2u+v)). \end{aligned}$$

Neste caso, é fácil ver que $F_\gamma(u,v) = (0,0)$ *somente quando* $u = v = 0$*, ou seja, sobre a cúspide.*

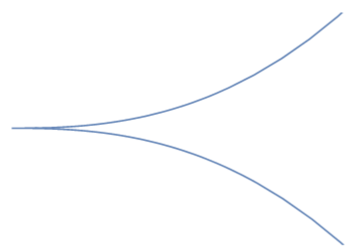


Figura 3.2: Curva $\gamma(u) = (u^2, u^3)$.

Exemplo 3.5. *Neste exemplo, além de estudar os zeros do campo* F_γ*, iremos ver um método que usa o determinante para distinguir os dois tipos de bi-tangências estudadas.*

Considere aqui $\gamma(u) = (u^2 - 4u, u^5 + u^4 - 4u^3 - 2u^2 + 3u)$*, ver Figura 3.3.*

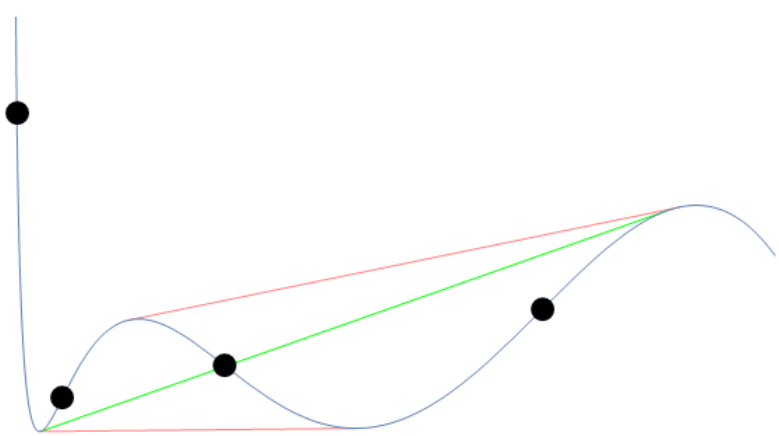


Figura 3.3: Curva $\gamma(u) = (u^2 - 4u, u^5 + u^4 - 4u^3 - 2u^2 + 3u)$.

Após alguns cálculos,

$$F_\gamma(u,v) = (-5-3u^4+u^3(14-6v)-16v+4v^2+4v^3-4u^2(-4-2v+v^2)-2u(16-8v-3v^2+v^3),$$

$$5+2u^3(-2+v)+32v-16v^2-14v^3+3v^4+u^2(-4-6v+4v^2)+2u(8-8v-4v^2+3v^3).$$

Estudando $F_\gamma(u,v) = (0,0)$ *temos um total de dez pares* (u,v) *que zeram* F_γ. *Destes, quatro são inflexões, especificamente:* $u = v = -0.09766, -1.33179, 1$ *e* 2.56279. *De fato,*

$$\det(\gamma'(-0.09766), \gamma''(-0.09766)) = 0,$$

$$\det(\gamma'(-1.33179), \gamma''(-1.33179)) = 0,$$

$$\det(\gamma'(1), \gamma''(1)) = 0,$$

$$\det(\gamma'(2.56279), \gamma''(2.56279)) = 0.$$

Os outros seis pares correspondem a três bi-tangências. Estes pares são:

$(-1.74248, 0.44769)$, $(-0.68310, 1.27836)$ *(duas bi-tangências de mesmo lado) e* $(-1.70599, 1.2586)$ *(bi-tangência de lados opostos).*

Os sinais da curvatura da curva γ *em cada ponto do par de bi-tangência pode nos dizer qual o seu tipo. Se tivermos o mesmo sinal, é uma bi-tangência de mesmo lado, e se, em cada ponto do par em questão obtivermos um sinal diferente para a curvatura, então temos uma bi-tangência de lados opostos. No nosso caso,*

$$\det(\gamma'(-1.74248), \gamma''(-1.74248)),\ \ \det(\gamma'(0.44769), \gamma''(0.44769)) > 0,$$

$$\det(\gamma'(-0.68310), \gamma''(-0.68310)),\ \ \det(\gamma'(1.27836), \gamma''(1.27836)) < 0,$$

$$\det(\gamma'(-1.70599), \gamma''(-1.70599)) > 0 \ \textit{e}\ \det(\gamma'(1.2586), \gamma''(1.2586)) < 0.$$

3.2 O índice de F_γ e propriedades geométricas de γ

Queremos, com esta seção definir, o índice de um campo de vetores contínuo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e verificar que o índice de F_γ, que estamos utilizando, é dado exatamente pelas propriedades geométricas relacionadas com os números d, t_o, t_s, i, c_1 e c_2.

Definição 3.6. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua e $\mathbb{S}_\epsilon$ uma curva de Jordan que não contem zeros de f. Definimos o sentido anti-horário como a orientação positiva de $\mathbb{S}_\epsilon$. Considere $(\frac{f}{\|f\|}) : \mathbb{S}_\epsilon \to \mathbb{S}^1$ e tome um ponto q em $\mathbb{S}_\epsilon$. Quando q percorre uma volta completa, no sentido positivo, em $\mathbb{S}_\epsilon$, o vetor $(\frac{f}{\|f\|})(q)$ percorrerá uma número inteiro de voltas em $\mathbb{S}^1$, tal número é chamado* **grau da aplicação** *$(\frac{f}{\|f\|})$.*

Exemplo 3.7. *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(u,v) = (-u,v)$. Seja $\mathbb{S}_\epsilon = \mathbb{S}^1$ e $q = (1,1)$. Não é difícil notar que quando o ponto q percorre uma volta, em sentido positivo, em $\mathbb{S}^1$, o vetor $f(q) = (\frac{f}{\|f\|})(q)$ também dá uma volta em $\mathbb{S}^1$, mas em sentido contrário. Então, nesse caso, o grau da aplicação f é -1.*

Definição 3.8. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua e p um ponto isolado em $f^{-1}(0)$. Escolha uma bola B_ϵ centrada em p com $f^{-1}(0) \bigcap \overline{B}_\epsilon = p$ e seja $\mathbb{S}_\epsilon$ sua fronteira. O* **índice de** f **em** p, *$ind_p(f)$, é definido como o grau da aplicação $(\frac{f}{\|f\|}) : \mathbb{S}_\epsilon \to \mathbb{S}^1$, a orientação é dada em sentido anti-horário. Se $f^{-1}(0)$ é um conjunto finito, definiremos o* **índice** *de f, $ind(f)$, por*

$$ind(f) = \sum_{\{p : f(p) = 0\}} ind_p(f).$$

Usaremos essa última definição para obter o índice do campo F_γ, que será a soma dos índices em seus zeros, que pela Proposição 3.3, sabemos quais são.

Exemplo 3.9. *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(u,v) = (-u,v)$. Seja $\mathbb{S}_\epsilon = \mathbb{S}^1$ e $q = (1,1)$. Já sabemos que o grau da aplicação f é -1. Como a origem é o único zero de f, segue que*

$$ind(f) = -1.$$

Veja que essa não é a única maneira de se calcular o índice de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Podemos, por exemplo, utilizar a fórmula de Bendixson

$$\mathrm{ind}_p(f) = 1 + \frac{e-h}{2}, \tag{3.5}$$

para obter o índice num ponto de equilíbrio p. Em (3.5), obtida em [3], e é o número de setores elípticos e h é o número setores de hiperbólicos. Como exemplo, na Figura 3.4 esboçamos um retrato de fase com exatamente 2 setores hiperbólicos e 2 setores elípticos.

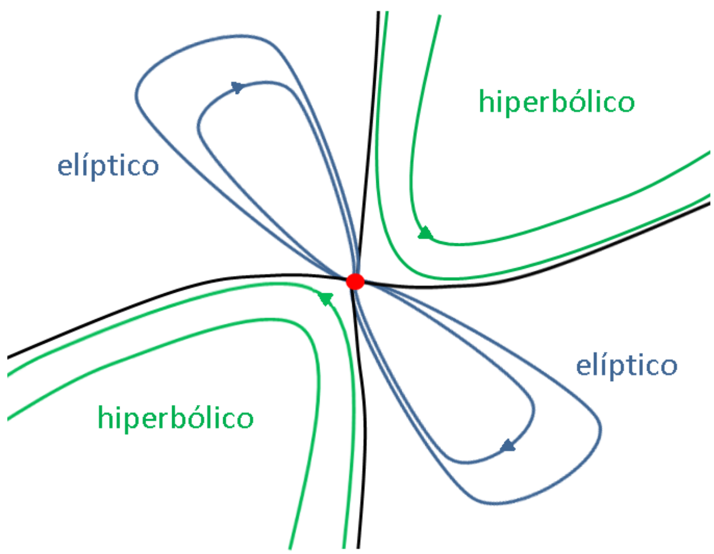


Figura 3.4: Setores elípticos e hiperbólicos.

Podemos aplicar a fórmula de Bendixson no Exemplo 3.9 usando que o número de setores hiperbólicos é igual a 4 e não há setores elípticos (ver Figura 3.5), assim

$$\mathrm{ind}(f) = \mathrm{ind}_0(f) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-4}{2} = 1 - 2 = -1.$$

A proposição a seguir mostra que os pontos duplos, bi-tangências e inflexões são pontos ordinários de F_γ, ou seja, o determinante da matriz Jacobiana de F_γ é diferente de zero nestes pontos. Sabendo disso, usaremos o sinal desse determinante para obter o índice do campo F_γ sobre cada um desses pontos mencionados.

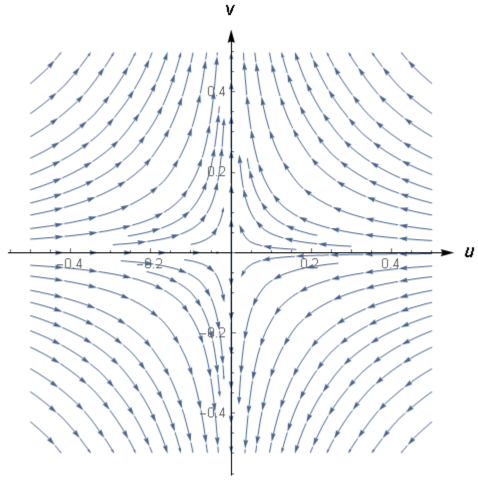


Figura 3.5: Campo de vetores para $f(u,v) = (-u,v)$.

Proposição 3.10. *Considere $\gamma \in \mathcal{G}(I,\mathbb{R}^2)$. Então, o índice $ind_p(F_\gamma)$ é:*

- -1 *em um ponto duplo, uma bi-tangência de lados opostos ou uma inflexão;*
- 1 *em uma bi-tangência de mesmo lado.*

Demonstração. A matriz Jacobiana de F_γ sobre um zero tem a seguinte expressão

$$J(F_\gamma)(u,v) = \frac{1}{(u-v)^2}\begin{pmatrix} \det(\gamma''(u), \gamma(u)-\gamma(v)) & \det(\gamma'(u), -\gamma'(v)) \\ \det(\gamma'(v), \gamma'(u)) & \det(\gamma''(v), \gamma(u)-\gamma(v)) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Se (u,v) é um ponto duplo, então o determinante da matriz em (3.6) é

$$-\left(\frac{\det(\gamma'(v), \gamma'(u))}{(u-v)^2}\right)^2,$$

o qual não é zero pela transversalidade do ponto duplo. Usando que o índice sobre um zero ordinário é -1 se o sinal do determinando é negativo e é 1 se esse sinal é positivo, temos que sobre um ponto duplo o índice de F_γ é -1.

Se (u,v) é uma bi-tangência, temos que o determinante da matriz em (3.6) é

$$\frac{\det(\gamma''(u), \gamma(u)-\gamma(v))\det(\gamma''(v), \gamma(u)-\gamma(v))}{(u-v)^4},$$

usando que $(\gamma(u)-\gamma(v))$ é um múltiplo não nulo de $\gamma'(u)$, $(\gamma(u)-\gamma(v)) = \alpha\gamma'(u)$, mas também é múltiplo não nulo de $\gamma'(v)$, $(\gamma(u)-\gamma(v)) = \beta\gamma'(v)$, e denotando por $k_{\gamma(u)}$ e $k_{\gamma(v)}$ as curvaturas de γ em u e v respectivamente, temos que

$$\det(\gamma''(u), \alpha\gamma'(u)) \det(\gamma''(v), \beta\gamma'(v)) = \alpha k_{\gamma(u)} \beta k_{\gamma(v)},$$

que é um valor não nulo, pois a regularidade das bi-tangências (nem u, nem v são inflexões) implica que as curvaturas são não nulas, e é positivo se a bi-tangência é do mesmo lado (índice 1) e negativo se a bi-tangência é de lado opostos (índice -1).

No caso em que $u = v$ é um ponto de inflexão, temos

$$J(F_\gamma(u,u)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\det(\gamma'(u), \gamma'''(u)) & 0 \\ 0 & \det(\gamma'(v), \gamma'''(v)) \end{pmatrix}.$$

Mas então, o determinante da matriz Jacobiana sobre um ponto de inflexão é

$$-\frac{1}{4}(\det(\gamma'(u), \gamma'''(u)))^2,$$

e a condição do ponto de inflexão ser ordinário nos dá que este valor é não nulo, portanto negativo (índice -1). Concluindo essa demonstração. ■

A próxima proposição nos dá o índice do campo F_γ sobre pontos de cúspides c_1 e c_2. Como esses zeros de F_γ não são ordinários, vamos utilizar a fórmula de Bendixson para esse cálculo.

Proposição 3.11. *Considere $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$. Então, o índice $ind_p(F_\gamma)$ é:*

- -2 *sobre uma cúspide c_1;*
- -1 *sobre uma cúspide c_2.*

Demonstração. Os índices para as cúspides serão obtidos usando a fórmula de Bendixson

$$\text{ind}_p(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2}.$$

A cúspide c_1 é localmente dada pela curva $\gamma(u) = (u^2, u^3)$, portanto o campo F_γ associado a γ é dado por

$$F_\gamma(u,v) = (-u(u+2v), v(2u+v)),$$

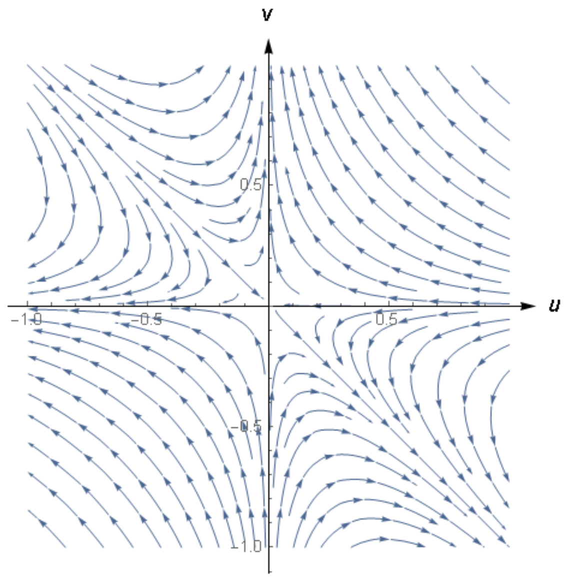


Figura 3.6: Campo F_γ para $\gamma(u) = (u^2, u^3)$.

que está representado na Figura 3.6. É fácil ver que temos 6 setores hiperbólicos e nenhum setor elíptico, de onde vem que o índice neste caso é -2, como feito abaixo

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-6}{2} = -2.$$

A cúspide c_2 é localmente dada por $\gamma(u) = (u^2, u^4 + u^5)$, com isso o campo F_γ tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned} F_\gamma(u,v) &= (-u(3u^3 + 4uv(1+v) + 2v^2(1+v) + u^2(2+6v)), \\ &\qquad v(2u^3 + 2uv(2+3v) + v^2(2+3v) + u^2(2+4v))), \end{aligned}$$

e está ilustrado na Figura 3.7. Neste caso o campo F_γ tem 4 setores hiperbólicos e nenhum elíptico. Logo, aplicando a fórmula de Bendixson,

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-4}{2} = -1.$$

Portanto o índice é -1. O que termina a demonstração.

■

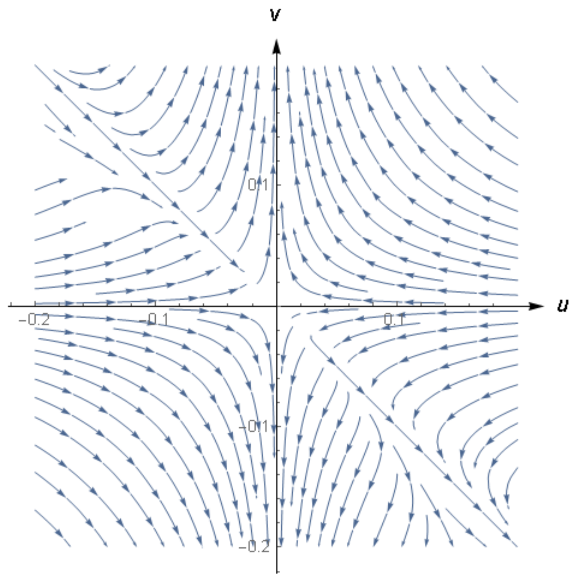


Figura 3.7: Campo F_γ para $\gamma(u) = (u^2, u^4 + u^5)$.

Com as Proposições 3.10 e 3.11 demonstradas, podemos relacionar o índice de F_γ com os objetos geométricos estudados como segue

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(F_\gamma) &= \sum_{\{p:F_\gamma(p)=0\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) \\
&= \sum_{\{\text{ p.d. }\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) + \sum_{\{\text{ b.l.o. }\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) + \sum_{\{\text{ b.m.l.}\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) + \sum_{\{\text{ p.i }\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) \\
&\quad + \sum_{\{\mathrm{c}_1\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) + \sum_{\{\mathrm{c}_2\}} \operatorname{ind}_p(F_\gamma) \\
&= 2\left(d(-1) + t_o(-1) + t_s(1)\right) + i(-1) + c_1(-2) + c_2(-1) \\
&= 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2.
\end{aligned}$$

As abreviações utilizadas são: p.d, ponto duplo; b.l.o., bi-tangência de lados opostos; b.m.l., bi-tangência de mesmo lado; p.i., ponto de inflexão; c_1, cúspide do primeiro tipo e c_2 cúspide do segundo tipo. Com isto, concluímos o seguinte resultado.

Proposição 3.12. *Considere $\gamma \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$. Então*

$$ind(F_\gamma) = 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2. \tag{3.7}$$

3.3 O índice de F_γ para $\gamma(u) = (a_k b^k, b_m u^m)$

O objetivo desta seção é calcular o índice de F_γ para uma curva γ particular dada por

$$\gamma(u) = (a_k u^k, b_m u^m) \tag{3.8}$$

com $0 < k < m$ e $a_k b_m \neq 0$.

Faremos este estudo de acordo com a paridade dos graus k e m como segue:

$$(k, m) = \begin{cases} \text{(par, par);} \\ \text{(par, ímpar);} \\ \text{(ímpar, par);} \\ \text{(ímpar, ímpar).} \end{cases}$$

Dada um curva γ como em (3.8), o campo F_γ tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned} F_\gamma(u,v) \quad &= \frac{a_k b_m}{(u-v)^2}\Bigg((k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m, \\ &\qquad -(m-k)v^{k+m-1} - mv^{m-1}u^k + kv^{k-1}u^m\Bigg). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Uma outra escrita deste campo F_γ é dada por

$$\begin{aligned} F_\gamma(u,v) \quad &= a_k b_m \Bigg(\sum_{j=1}^{k} j(k-m)u^{m+k-(j+2)}v^{j-1} + \sum_{j=k+1}^{m-1} k(j-m)u^{m+k-(j+2)}v^{j-1}, \\ &\qquad - \sum_{j=1}^{k} j(k-m)v^{m+k-(j+2)}u^{j-1} - \sum_{j=k+1}^{m-1} k(j-m)v^{m+k-(j+2)}u^{j-1}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Observação 3.13. *No caso $(k,m) = $ (par, par), o campo F_γ é nulo sobre a reta $u = -v$. Afim de eliminarmos esses zeros, consideraremos um novo campo para esse caso em específico, a saber $F_\gamma/(u+v)^2$. Por simplicidade, este no campo de vetores será denotado também por F_γ.*

Proposição 3.14. *Considere* γ *como em* (3.8) *e* F_γ *como em (3.9). Então* F_γ *tem a origem como zero isolado.*

Demonstração. Consideremos $F_\gamma(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$. Então, para γ como em (3.8), temos

$$f_1(u,v) = a_k b_m \left(\frac{(k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m}{(u-v)^2} \right)$$

e,

$$f_2(u,v) = a_k b_m \left(\frac{(m-k)v^{k+m-1} - mv^{m-1}u^k + kv^{k-1}u^m}{(u-v)^2} \right).$$

Assim, é fácil ver que $(0,0)$ é um zero de F_γ.

Vamos procurar agora zeros de F_γ diferentes da origem. Como os numeradores de f_1 e de f_2 são polinômios homogêneos, vale que: se (u,v) é um zero de F_γ, então (tu,tv), $t \in \mathbb{R}$, também é um zero de F_γ.

Suponha $(u,v) \neq (0,0)$ com $F_\gamma(u,v) = (0,0)$ e defina $x = v/u$. Então,

$$\begin{aligned} f_1(u,v) = 0 \quad &\Leftrightarrow \left(\frac{(k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m}{(u-v)^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow u^{k+m-1} \left(\frac{(k-m) + mu^{m-1}(\frac{v}{u})^k - ku^{k-1}(\frac{v}{u})^m}{(u-v)^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{(k-m) + m(x)^k - k(x)^m}{(1-x)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} f_2(u,v) = 0 \quad &\Leftrightarrow \left(\frac{(m-k)v^{k+m-1} - mv^{m-1}u^k + kv^{k-1}u^m}{(u-v)^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow u^{k+m-1} \left(\frac{(m-k)(\frac{v}{u})^{k+m-1} - m(\frac{v}{u})^{m-1} + k(\frac{v}{u})^{k-1}}{(u-v)^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^{-k+1} \left(\frac{(m-k)(x)^{k+m-1} - m(x)^{m-1} + k(x)^{k-1}}{(1-x)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Com isso, $F_\gamma(u,v) = (0,0)$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{-kx^m + mx^k + (k-m)}{(1-x)^2} = 0, \\ \\ \dfrac{(m-k)x^m - mx^{m-k} + k}{(1-x)^2} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Defina p_1 como sendo o polinômio no numerador da primeira equação do sistema em (3.11), isto é,

$$p_1(x) = -kx^m + mx^k + (k-m).$$

Fazendo uso da regra dos sinais de Descartes, temos que p_1 possui no máximo duas raízes positivas (contando as multiplicidades). Como ocorre,

$$p_1(1) = -k + m + (k-m) = 0 \;\text{ e }\; p_1'(1) = -km + mk = 0,$$

obtemos que 1 é raiz de multiplicidade 2 de p_1. Todavia, o termo $(1-x)^2$ aparece no denominador de f_1. Segue que o sistema em (3.11) não possuí raízes positivas.

Agora vamos verificar se o sistema em (3.11) possui raízes negativas. Para tal, vamos fazer a substituição $x \to -x$, obtendo

$$\begin{cases} g_1(x) = \dfrac{-k(-x)^m + m(-x)^k + (k-m)}{(1+x)^2} = 0, \\ \\ g_2(x) = \dfrac{(m-k)(-x)^m - m(-x)^{m-k} + k}{(1+x)^2} = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Defina p_1 como sendo o polinômio no numerador de g_1 e p_2 o polinômio do numerador de g_2. Dividiremos esse estudo, para raízes negativas, em quatro casos, de acordo as as paridades de k e m.

Caso 1: $(k, m) = (\text{ímpar, par})$.

Aqui, $p_1(x) = -kx^m - mx^k + (k-m)$ é um polinômio com todos os coeficientes negativos. Pela regra dos sinais de Descartes, concluímos que o sistema em (3.12) não possui raízes.

Caso 2: $(k, m) = (\text{par, par})$.

Agora, $p_1(x) = -kx^m + mx^k + (k-m)$ tem duas permutações de sinal em seus coeficientes. Portanto, tem no máximo duas raízes positivas, e como vale

$$p_1(1) = -k + m + (k-m) = 0 \text{ e } p_1'(1) = -km + mk = 0,$$

obtemos que 1 é raiz de multiplicidade 2 de p_1. Note que 1 também é uma raiz de multiplicidade 2 de p_2. Isto quer dizer que o termo $(u+v)^2$ aparece nos numeradores de f_1 e f_2. Mas lembrando da Observação 3.13, vemos que o sistema em (3.12) não possui raízes. Pois, neste caso, temos mais um termo nos denominadores de g_1 e g_2, que é $(1-x)^2$.

Caso 3: $(k, m) =$ (par, ímpar).

Nesse caso $p_1(x) = kx^m + mx^k + (k-m)$ tem no máximo uma raiz $x_0 > 0$. Como

$$p_1(0) = (k-m) < 0 \text{ e } p_1(1) = k + m + (k-m) = 2k > 0,$$

segue que $x_0 \in (0,1)$.

Vamos verificar que esse valor x_0 não é raiz de

$$p_2(x) = -(m-k)x^m + m(x)^{m-k} + k.$$

É fácil ver que $p_2(0) = k > 0$, e também que

$$p_2'(x) = -(m-k)mx^{m-1} + m(m-k)x^{m-k-1} = (-m(m-k)x^k + m(m-k))x^{m-k-1} > 0$$

para $0 < x < 1$. Isto quer dizer que p_2 é positiva e crescente no intervalo estudado, portanto não tem uma raiz $x_0 \in (0,1)$. Logo, neste caso, o sistema em (3.12) não possui raízes.

Caso 4: $(k, m) =$ (ímpar, ímpar).

Aqui, $p_2(x) = -(m-k)x^m - mx^{m-k} + k$ tem no máximo uma raiz $x_0 > 0$. Como

$$p_2(0) = k > 0 \text{ e } p_2(1) = -(m-k) - m + k = -2(m-k) < 0,$$

segue que $x_0 \in (0,1)$. Entretanto, $p_1(0) = (k-m) < 0$ e

$$p_1'(x) = kmx^{m-1} - mkx^{k-1} = (kmx^{m-k} - km)x^{k-1} < 0,$$

para $0 < x < 1$. Portanto o sistema em (3.12) não possui raízes.

E a proposição está provada. ■

Considere $H_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H_1(u,v) = (v,u)$ e $H_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H_2(u,v) = (-v,-u)$, que são, respectivamente, as reflexões em torno das retas dadas pelas equações $u = v$ e $u = -v$. Essas duas aplicações nos mostrarão simetrias que o campo F_γ em (3.9) satisfaz. Utilizando-se destas simetrias, temos um melhor entendimento do esboço do retrato de fases do campo F_γ.

Lema 3.15. *Considere $H_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H_1(u,v) = (v,u)$, $H_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H_2(u,v) = (-v,-u)$ e F_γ como em (3.9). Então:*

(i) $H_1(F_\gamma(u,v)) = -F_\gamma(H_1(u,v))$;

(ii) se k e m tem paridades opostas, então $H_2(F_\gamma(u,v)) = F_\gamma(H_2(u,v))$;

(iii) se k e m tem as mesmas paridades, então $H_2(F_\gamma(u,v)) = -F_\gamma(H_2(u,v))$.

Demonstração. Consideremos $F_\gamma(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$. Assim,

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= a_k b_m \left(\frac{(k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m}{(u-v)^2} \right), \\ f_2(u,v) &= a_k b_m \left(\frac{(m-k)v^{k+m-1} - mv^{m-1}u^k + kv^{k-1}u^m}{(u-v)^2} \right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

O item (i) é provado abaixo.

$$\begin{aligned} -F_\gamma(H_1(u,v)) &= -F_\gamma(v,u) \\ &= -(f_1(v,u), f_2(v,u)) \\ &= -(-f_2(u,v), -f_1(u,v)) \\ &= (f_2(u,v), f_1(u,v)) \\ &= H_1(F_\gamma(u,v)); \end{aligned}$$

Agora fazemos uso das paridades de k e m, obtendo os itens (ii) e (iii) como segue.

(ii) $$\begin{aligned} F_\gamma(H_2(u,v)) &= F_\gamma(H_1(-u,-v)) \\ &= -H_1(F_\gamma(-u,-v)) \\ &= -H_1(F_\gamma(u,v)) \\ &= H_2(F_\gamma(u,v)). \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} -F_\gamma(H_2(u,v)) &= -F_\gamma(H_1(-u,-v)) \\ &= H_1(F_\gamma(-u,-v)) \\ &= -H_1(F_\gamma(u,v)) \\ &= H_2(F_\gamma(u,v)). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.16. *Considere $\gamma(u)$ como em (3.8) e F_γ como em (3.9). Então o índice de F_γ, ind(F_γ), é*

- -1, *se k e m tem a mesma paridade;*
- -2, *se k é par e m é impar;*
- 0, *se k é ímpar e m é par.*

Demonstração. Para calcular o índice do campo F_γ em (3.9) usaremos a fórmula de Bendixson. Como o sinal do termo $a_k b_m$ não altera a quantidade desses setores, vamos supor $a_k b_m > 0$.

Considere $F_\gamma(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$. Como $k < m$, a expressão em (3.10) nos dá que f_1 é sempre negativa no primeiro quadrante do plano uv e f_2 é sempre positiva neste mesmo quadrante, isto nos dá um setor hiperbólico no primeiro quadrante. Usando os itens (ii) e (iii) do Lema 3.15, obtemos outro setor hiperbólico no terceiro quadrante.

Para analisar os setores no segundo e quarto quadrante vamos estudar os sinas de f_1 e f_2 na região

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < -u < v\}$$

e usar o Lema 3.15. A Figura 3.8 ilustra o que temos até o presente momento.

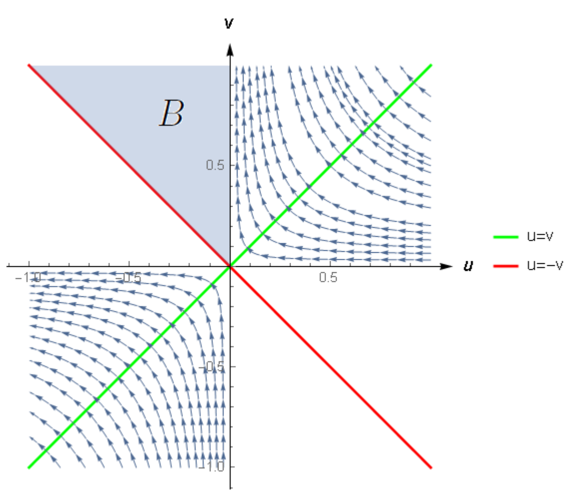


Figura 3.8: Setores no primeiro e terceiro quadrantes de F_γ e a região B.

Caso 1: $(k, m) = $ (ímpar, par).

Aqui temos,

$$f_1(u,v)(u-v)^2 = \overbrace{(k-m)u^{k+m-1}}^{<0} + \overbrace{mu^{m-1}v^k}^{<0} - \overbrace{ku^{k-1}v^m}^{>0} < 0$$

$$f_2(u,v)(u-v)^2 = \overbrace{(m-k)v^{k+m-1}}^{>0} - \overbrace{mv^{m-1}u^k}^{<0} + \overbrace{kv^{k-1}u^m}^{>0} > 0,$$

para pares $(u, v) \in B$.

Para pares (u, v) que satisfazem $0 < v < -u$, usamos o item (ii) do Lema 3.15. Obtendo assim, $f_1 < 0$ e $f_2 > 0$ para esses pares. Isto nos dá um setor parabólico no segundo quadrante do plano uv. Já para pontos no quarto quadrante, usamos o item (i) do Lema 3.15. De onde concluímos que temos um setor parabólico nesse quadrante. Todavia, setores parabólicos não contribuem com o índice.

Com este estudo dos sinais de f_1 e f_2, podemos esboçar o retrato de fases do campo F_γ como na Figura 3.9.

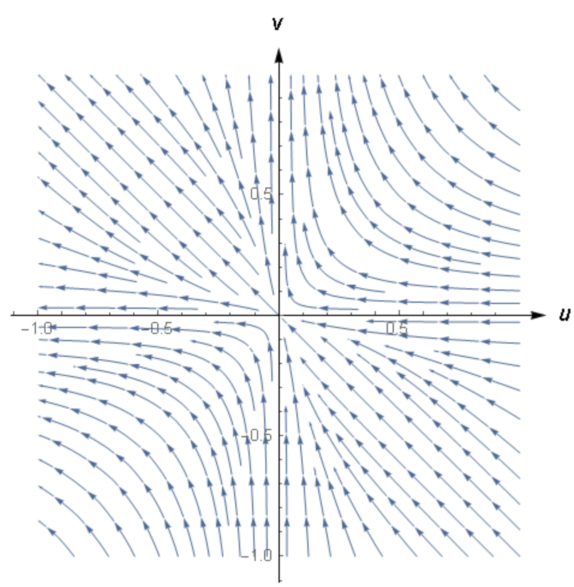


Figura 3.9: Caso 1: k é ímpar e m é par.

Portanto,

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-2}{2} = 0,$$

e o índice neste caso é 0.

Caso 2: $(k, m) = (\text{par}, \text{par})$.

Basta estudar os sinais de f_1 e f_2 na seção

$$\Sigma = \{(u, 1) : (u, 1) \subset B\} = \{(u, 1) : 0 < -u < 1\},$$

pois, para $v_0 > 0$, esses sinais serão os mesmos em

$$\Sigma_{v_0} = \{(u, v_0) : (u, v_0) \subset B\} = \{(u, 1) : 0 < -u < v_0\}$$

e a união dos conjuntos Σ_{v_0} para todos os $v_0 > 0$ é a região B.

Para ver, que de fato, esses sinais são os mesmos defina:

$$g_1(u, v) = (k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m,$$

$$g_2(u, v) = (m - k)v^{k+m-1} - mv^{m-1}u^k + kv^{k-1}u^m.$$

Então,

$$\begin{aligned} g_1(u, v_0) &= (k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v_0^k - ku^{k-1}v_0^m \\ &= v_0^{k+m-1}((k - m)(\tfrac{u}{v_0})^{k+m-1} + m(\tfrac{u}{v_0})^{m-1} - k(\tfrac{u}{v_0})^{k-1}) \\ &= v_0^{k+m-1}((k - m)(y)^{k+m-1} + m(y)^{m-1} - k(y)^{k-1}) \\ &= v_0^{k+m-1}g_1(y, 1), \end{aligned}$$

com $y = \frac{u}{v_0}$ satisfazendo $0 < -y < 1$, pois $0 < -u < v_0$ e $v_0 > 0$.

Visto que $v_0^{k+m-1} > 0$ e $((u + v)(u - v))^2 > 0$, concluímos que basta estudar o sinal de f_1 sobre pontos de Σ. De modo similar, basta estudar o sinal de f_2 sobre pontos de Σ.

Defina agora, para $0 < -u < 1$,

$$p_1(u) = (k - m)u^m + mu^{m-k} - k \quad \text{e} \quad p_2(u) = ku^m - mu^k + (m - k).$$

Note que, para pontos $u \in (-1, 0)$, $p_1(u) = 0$ ($p_2(u) = 0$) é equivalente à $g_1(u, 1) = 0$ ($g_2(u, 1) = 0$).

Pela regra dos sinais de Descartes, temos no máximo duas raízes negativas para p_1 e p_2. Como $u = -1$ é raiz de multiplicidade 2, em ambos polinômios, e não pertence ao domínio estudado, obtemos que p_1 e p_2 não possuem zeros no intervalo $(-1, 0)$. Além disso, por continuidade, esse sinal é o mesmo que para $u = 0$ ($p_1(0) = -k < 0$ e $p_2(0) = (m-k) > 0$).

Portanto, f_1 e f_2 não tem o seu sinal alterado para pares $(u, v) \in \Sigma$. Especificamente,

$$f_1(u, 1)((u + 1)(u - 1))^2 = u^{k-1}(p_1(u)) > 0,$$

$$f_2(u, 1)((u + 1)(u - 1))^2 = p_2(u) > 0.$$

Fazendo uso do Lema 3.15, temos setores hiperbólicos no segundo e quarto quadrante (Ver Figura 3.10). Nesse caso,

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e - h}{2} = 1 + \frac{0 - 4}{2} = -1.$$

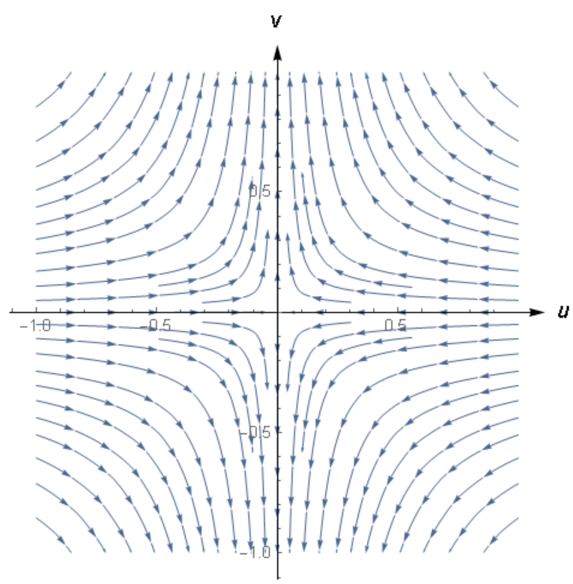


Figura 3.10: Caso 2: k e m são ambos pares.

Caso 3: $(k, m) = $ (ímpar, ímpar).

Novamente, basta estudar os sinais de f_1 e f_2 para pares (u, v) em

$$\Sigma = \{(u, 1) : (u, 1) \subset B\} = \{(u, 1) : 0 < -u < 1\}.$$

Veja que, se considerarmos o polinômio

$$p_1(u) = (k - m)u^m + mu^{m-k} - k,$$

a regra dos sinais de Descartes diz que temos no máximo uma raiz negativa. Ainda, como esse polinômio é negativo para $u = 0$ ($p_1(0) = -k < 0$) e positivo para $u = -1$

$(p_1(-1) = -(k-m)+m-k = 2(m-k) > 0)$, sabemos que há, de fato, uma raiz u_0, que está entre -1 e 0. Assim, f_1 muda de sinal em Σ.

Já se olharmos para

$$p_2(u) = ku^m - mu^k + (m-k),$$

vemos que este é positivo para $u = -1$ e para $u = 0$ $(p_2(-1) = -k+m+(m-k) = 2(m-k) > 0,\ p_2(0) = (m-k) > 0)$. E a derivada de p_2,

$$p_2'(u) = kmu^{m-1} - mku^{k-1} = kmu^{k-1}(u^{m-k} - 1),$$

é negativa para $u \in (-1,0)$, logo p_2 é decrescente, mas positiva para $u \in (-1,0)$. Portanto, f_2 é negativa para pares $(u,v) \in \Sigma$.

Pelo Lema 3.15, temos em cada um dos segundo e quarto quadrantes do plano uv um setor hiperbólico e dois parabólicos (Ver Figura 3.11). Com isso,

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-4}{2} = -1.$$

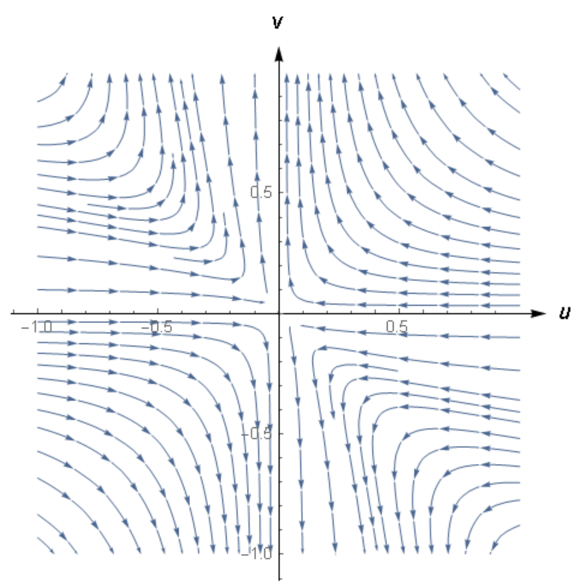


Figura 3.11: Caso 3: k e m são ambos ímpares.

Caso 4: $(k,m) = (\text{par}, \text{ímpar})$.

Como em casos anteriores, vamos analisar os sinais de f_1 e f_2 na seção

$$\Sigma = \{(u,1) : (u,1) \subset B\} = \{(u,1) : 0 < -u < 1\}.$$

Para pares $(u, v) \in \Sigma$, temos que f_1 é positiva, como indica o cálculo que segue:

$$\begin{aligned} f_1(u,v)(u-v)^2 &= (k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1} - ku^{k-1} \\ &= \overbrace{ku^{k-1}(u^m-1)}^{>0} - \overbrace{mu^{m-1}(u^k-1)}^{<0} > 0. \end{aligned}$$

Considerando

$$p_2(u) = ku^m - mu^k + (m-k)$$

e aplicando a regra dos sinais de Descartes, temos que p_2 tem no máximo uma raiz negativa.

Visto que,

$$p_2(-1) = -k - m + (m-k) = -2k < 0 \ \text{ e } \ p_2(0) = (m-k) > 0,$$

podemos afirmar que para algum $u_0 \in (-1, 0)$, temos $p_2(u_0) = 0$.

Portanto, f_2 muda de sinal sobre Σ. Isso dá a existência de um setor hiperbólico em B. Agora, pelo Lema 3.15, segue que o segundo e o quarto quadrantes do plano uv possuem juntos 4 setores hiperbólicos (Ver Figura 3.12).

Calculando o índice, obtemos

$$\text{ind}_0(F_\gamma) = 1 + \frac{e-h}{2} = 1 + \frac{0-6}{2} = -2.$$

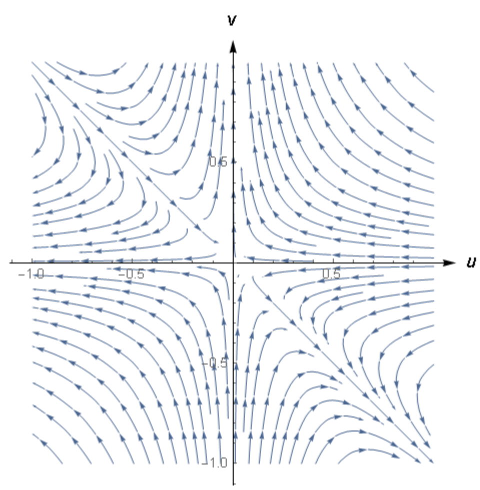


Figura 3.12: Caso 4: k é par e m é ímpar.

Tendo o índice do campo F_γ sido calculado em todos os casos dados pelas paridades de k e m, este teorema está concluído. ∎

3.4 Uma fórmula análoga à de Fabricius-Bjerre

Na seção final deste capítulo queremos obter uma equação similar a fórmula de Fabricius-Bjerre, para curvas $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ que sejam deformações genéricas de γ como em (3.8). Para tal, iremos relacionar o Teorema 3.16 e a Proposição 3.12.

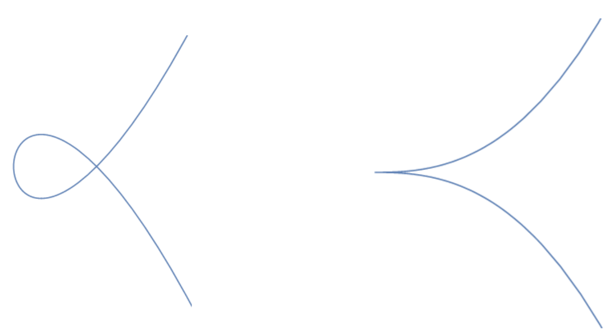
Definição 3.17. *Diremos que* $\overline{\gamma} \in \mathcal{G}(I, \mathbb{R}^2)$ *é uma* **deformação genérica** *de* γ *como em* (3.8) *se:*

(i) Existe uma homotopia $H : I \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *entre as curvas* γ *e* $\overline{\gamma}$ *com* $H_0 = H(u,0) = \gamma(u)$ *e* $H_1 = H(u,1) = \overline{\gamma}(u), \forall u \in I$*, que satisfaça (ii) abaixo:*

(ii) Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ *contendo todos os zeros dos campos* F_{H_s}*, isto é,* $\{(u,v) : F_{H_s}(u,v) = (0,0),\ s \in [0,1]\} \subset K$.

A seguir temos dois exemplos de curvas $\overline{\gamma}$ que são deformações genéricas de γ como em (3.8).

Exemplo 3.18. *Vamos verificar que* $\alpha(u) = (u^2, u^3 - u)$ *é uma deformação genérica de* $\gamma(u) = (u^2, u^3)$*. Ambas curvas estão ilustradas na Figura 3.13*



(a) Curva $(u^2, u^3 - u)$. (b) Curva (u^2, u^3).

Figura 3.13: Uma deformação genérica de (u^2, u^3).

Considere a homotopia $H : I \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$H(u,s) = (1-s)\gamma(u) + s\alpha(u).$$

Temos, após alguns cálculos, que o campo F_{H_s} *tem a seguinte expressão*

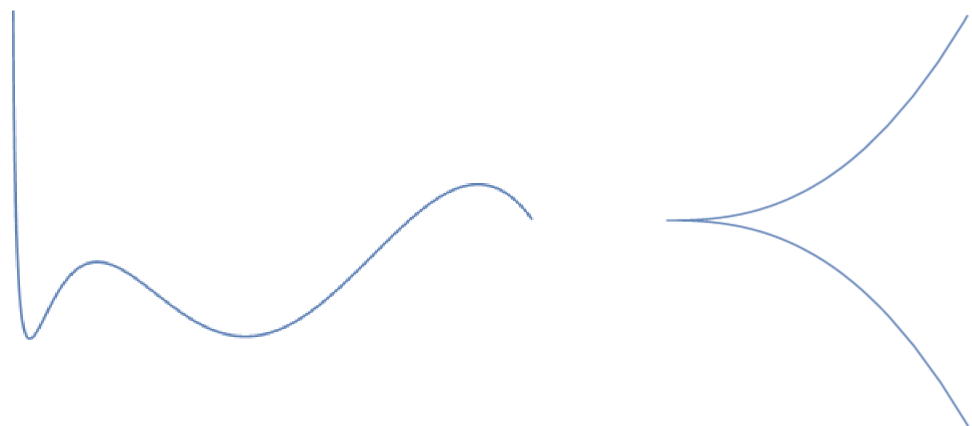
$$F_{H_s}(u,v) = (-s - u(u+2v), s + v(2u+v))$$

e seus zeros são dados por:

$$(u,v)=(-\sqrt{s},\sqrt{s})\ \ e\ \ (u,v)=(\sqrt{s},-\sqrt{s}).$$

Portanto, $B_2=\{(u,v):||(u,v)||\leq 2\}$ *contém todos os zeros de* F_{H_s} *para* $s\in[0,1]$. *Logo,* $\overline{\gamma}=\alpha$ *é uma deformação genérica de* $\gamma(u)=(u^2,u^3)$.

Exemplo 3.19. *Vamos verificar que* $\alpha(u)=(u^2-4u,u^5+u^4-4u^3-2u^2+3u)$ *é uma deformação genérica de* $\gamma(u)=(u^2,u^5)$, *essas curvas duas curvas estão ilustradas na Figura 3.14.*



(a) Curva $(u^2-4u,u^5+u^4-4u^3-2u^2+3u)$. (b) Curva (u^2,u^5).

Figura 3.14: Uma deformação genérica de (u^2,u^5).

Para tal, considere $H:I\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$ *dada por*

$$H(u,s)=(1-s)\gamma(u)+s\alpha(u).$$

Construindo o campo $F_{H_s}=(f_{s_1},f_{s_2})$, *obtemos*

$$\begin{gathered}f_{s_1}(u,v)=4s^2(-2+3u^2+2u(-4+v)-4v+v^2)-u(3u^3+6u^2v+4uv^2+2v^3)+\\ s(3+14u^3+4v^3+2uv(4+3v)+u^2(4+8v))\\ f_{s_2}(u,v)=-4s^2(-2+u^2+2u(-2+v)-8v+3v^2)+v(2u^3+4u^2v+6uv^2+3v^3)-\\ s(3+4u^3+6u^2v+4v^2+14v^3+8uv(1+v))\end{gathered}$$

e analisando seus zeros, para $0 \leq s \leq 1$, *temos que o par* (u, v) *com maior norma tal que* $F_{H_s}(u, v) = (0, 0)$ *é o par* $(2.56279, 2.56279)$ *e ocorre para* $s = 1$. *Portanto, o conjunto* $B_4 = \{(u, v) : ||(u, v)|| \leq 4\}$ *contém todos os pares* (u, v) *tais que* $F_{H_s}(u, v) = (0, 0)$. *A Figura 3.15 ilustra esse fato, nela os pontos no interior de* B_4 *são os zeros de* F_{H_s} *para* $s_j = {}^{j}/_{20}$ *com* $0 \leq j \leq 20$.

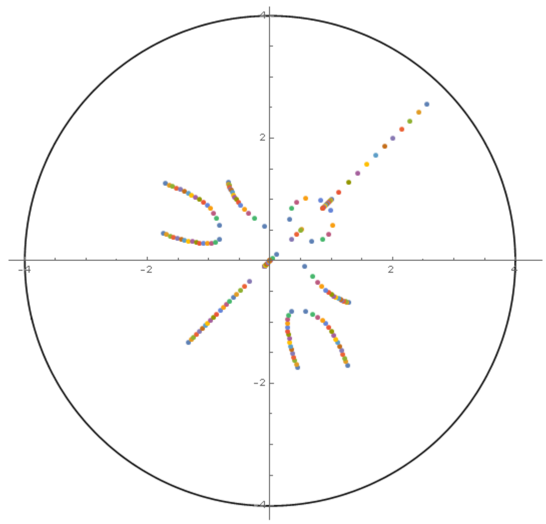


Figura 3.15: Os zeros se mantém no compacto B_4.

Com isto, obtemos que $\overline{\gamma} = \alpha$ *é uma deformação genérica de* γ, *o que finaliza esse exemplo.*

O próximo exemplo nos dá um caso particular em que o item (ii) da Definição 3.17 não ocorre.

Exemplo 3.20. *Considere a homotopia* H, *entre as curvas* $\alpha(u) = (u, u^3)$ *e* $\gamma(u) = (u^2, u^3)$, *dada por*

$$H(s, u) = ((1 - s)u + su^2, u^3).$$

Os pontos de inflexões u *de cada curva* H_s *são calculados por*

$$0 = \det(H_s'(u), H_s''(u)) = 6u(1 - s + su).$$

Portanto são: $u = 0$ *e* $u = (s-1)/s$. *Logo, não existe nenhum compacto* $K \subset \mathbb{R}^2$ *contendo os pares* $((s-1)/s, (s-1)/s)$, *que são um zeros de* F_{H_s}, *quando* $s \to 0$. *Assim, o segundo item da Definição 3.17 não ocorre.*

Visando obter uma relação entre os índices $\text{ind}(F_\gamma)$ e $\text{ind}(F_{\overline{\gamma}})$, vamos enunciar uma proposição que nos dá uma circunstância para a qual o índice de dois campos homotópicos é o mesmo.

Proposição 3.21. *Sejam M e N duas variedades orientadas de dimensão n sem fronteira. Assuma que os campos $X, Y : M \to N$ são homotópicos. Então, ind$(X) =$ ind(Y).*

Uma demonstração para a Proposição 3.21 pode ser encontrada em [15].

O seguinte lema prova que o índice de F_γ é igual ao índice de $F_{\overline{\gamma}}$. Nele usamos a compactificação de Bendixson, identificando o plano $\mathbb{R}^2$ com a esfera $\mathbb{S}^2$ sem o polo norte $p = (0,0,1)$. Para mais detalhes veja [10]. Denotaremos a compactificação de Bendixson do campo vetorial X por $s(X)$. Assim, $s(X)$ é o campo induzido na esfera por X. Observe que, o comportamento das órbitas de X perto do infinito é determinado pelo comportamento de $s(X)$ perto de p. O ponto p é chamado de ponto crítico no infinito de $s(X)$. Os pontos críticos de $s(X)$ que estão em $\mathbb{S}^2 - \{p\}$ são chamados de pontos críticos finitos de X ou $s(X)$. Como o índice de $s(X)$, $\text{ind}(s(X))$, é a soma dos índices $s(X)$ em seus pontos críticos, temos

$$\text{ind}(s(X)) = \text{ind}(X) + \text{ind}_p(s(X)). \tag{3.14}$$

Lema 3.22. *Considere γ como em* (3.8) *e $\overline{\gamma}$ uma deformação genérica de γ. Então*

$$ind(F_\gamma) = ind(F_{\overline{\gamma}}). \tag{3.15}$$

Demonstração. Consideremos γ como em (3.8) e $\overline{\gamma}$ uma deformação genérica de γ. É fácil notar que a homotopia entre as curvas γ e $\overline{\gamma}$ induz uma homotopia entre os campos F_γ e $F_{\overline{\gamma}}$.

Considere $s(F_\gamma) : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $s(F_{\overline{\gamma}}) : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ a compactificação de Bendixson dos campos F_γ e $F_{\overline{\gamma}}$, respectivamente. Pela Proposição 3.21, temos

$$\text{ind}(s(F_\gamma)) = \text{ind}(s(F_{\overline{\gamma}})). \tag{3.16}$$

Usando (3.16) e (3.14), obtemos

$$\text{ind}(s(F_\gamma)) + \text{ind}_p(s(F_\gamma)) = \text{ind}(s(F_{\overline{\gamma}})) + \text{ind}_p(s(F_{\overline{\gamma}})). \tag{3.17}$$

Para obter a igualdade em (3.15), falta ver que pontos críticos no infinito não ocorrem. Mas isso segue do item (ii) da Definição 3.17. Portanto $\mathrm{ind}_p(s(F_\gamma)) = \mathrm{ind}_p(s(F_{\overline{\gamma}})) = 0$ em (3.17), o que conclui a demonstração deste Lema. ■

O Lema 3.22 nos permite relacionar o resultado do Teorema 3.16 juntamente com o resultado da Proposição 3.12, obtendo os três casos que seguem.

Caso 1: k e m tem a mesma paridade.

$$-1 = 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2 \Leftrightarrow t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i - 1 + c_2}{2}.$$

Caso 2: k é par e m é ímpar.

$$-2 = 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2 \Leftrightarrow t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2} - 1.$$

Caso 3: k é impar e m é par.

$$0 = 2(-d - t_o + t_s - c_1) - i - c_2 \Leftrightarrow t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2}.$$

Feito isso, temos demonstrado o último teorema deste capítulo e principal resultado desta dissertação.

Teorema 3.23. *Seja $\gamma(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ uma curva plana com $0 < k < m$ e $a_k b_m \neq 0$. Para qualquer deformação genérica de γ vale:*

(i) Se k e m tem a mesma paridade, então:

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i - 1 + c_2}{2};$$

(ii) Se k é par e m é ímpar, então:

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2} - 1;$$

(iii) Se k é impar e m é par, então:

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2}.$$

Para finalizar o presente capítulo daremos um exemplo e três corolários diretos relacionados ao Teorema 3.23.

Exemplo 3.24. *Vamos aplicar o segundo caso exposto no Teorema 3.23 para a curva* $\overline{\gamma}(u) = (u^2-4u, u^5+u^4-4u^3-2u^2+3u)$*, que é uma deformação genérica de* $\gamma(u) = (u^2, u^5)$*, com a intenção de obter a quantidade de pontos duplos de* $\overline{\gamma}$*.*

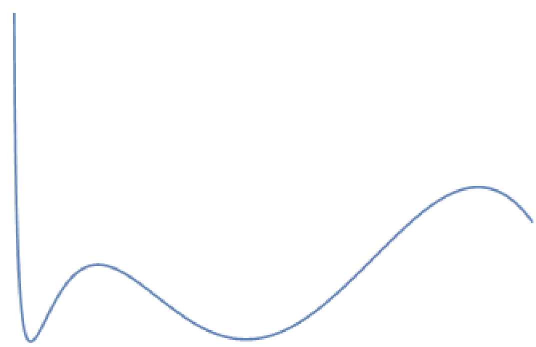


Figura 3.16: Curva $\overline{\gamma}(u) = (u^2 - 4u, u^5 + u^4 - 4u^3 - 2u^2 + 3u)$.

Lembrando que no Exemplo 3.5 obtemos $t_s = 2$, $t_0 = 1$ *e* $i = 4$ *e* $\overline{\gamma'}(u) = 0$ *não ocorre, isto é,* $c_1 = c_2 = 0$*. Temos*

$$d = 2 - 1 - \frac{4}{2} + 1 = 0,$$

assim, a curva $\overline{\gamma}$ *não possui auto-interseções. O que condiz com o Exemplo 3.5, no qual não encontramos zeros do campo* $F_{\overline{\gamma}}$ *relacionados a pontos duplos nem cúspides.*

Corolário 3.25. *Qualquer deformação genérica de* $\gamma(u) = (u^2, u^3)$ *possui: ou um ponto duplo, ou duas inflexões.*

Corolário 3.26. *Considere* γ *como em* (3.8)*. Então, para qualquer deformação genérica* $\overline{\gamma}$ *de* γ*, que não tenha cúspides, é válida uma das duas seguintes afirmações:*

(i) Se k *e* m *tem a mesma paridade, então* $\overline{\gamma}$ *tem um número ímpar de inflexões;*

(ii) Se k *e* m *tem a paridades opostas, então* $\overline{\gamma}$ *tem um número par de inflexões.*

Corolário 3.27. *Considere* γ *como em* (3.8)*. Então para qualquer deformação genérica* $\overline{\gamma}$ *de* γ*, que não tenha cúspides nem pontos duplos, vale:*

(i) Se k *e* m *tem a mesma paridade, então* $i = 2(t_s - t_o) + 1$*;*

(ii) Se k *é par e* m *é ímpar, então* $i = 2(t_s - t_o + 1)$*;*

(iii) Se k *é impar e* m *é par, então* $i = 2(t_s - t_o)$*.*

No próximo capítulo vamos tratar de uma fórmula algébrica para germes de curvas planas.

Capítulo 4

Uma Fórmula Algébrica

A principal referência deste capítulo é a parte final do artigo [8]. Todavia, as referências [13], [17] e [18] são de extrema importância para o conhecimento de alguns conceitos que assumiremos conhecidos, tais como: germes e o número de Milnor.

Neste capítulo usaremos o campo de vetores F_γ,

$$F_\gamma(u,v) = \left(\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2} \right),$$

para γ o germe da curva plana irredutível,

$$\gamma(u) = \left(\sum_{i=k}^{l} a_i u^i, \sum_{j=m}^{n} b_j u^j \right).$$

O objetivo aqui é obter uma fórmula relacionando as inflexões, bi-tangências e o número de Milnor de γ.

4.1 Definições iniciais

Considere

$$\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0), \gamma(u) = ((\gamma_1(u)), \gamma_2(u)), \tag{4.1}$$

um germe de curva plana irredutível, complexo, de curva plana. Definimos o campo $F_\gamma : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ por

$$F_\gamma(u,v) = \left(\frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det(\gamma'(v), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2} \right). \tag{4.2}$$

Definição 4.1. *Seja γ como definido em (4.1) e F_γ como em (4.2). Definimos os números*

$$\vartheta := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{< F_\gamma(u,v) >}, \quad \tilde{\vartheta} := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u,v]}{< F_\gamma(u,v) >},$$

$$I := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}}{< \det((\gamma'(u), \gamma''(u)) >}, \quad \tilde{I} := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u]}{< \det(\gamma'(u), \gamma''(u)) >},$$

$$\delta := \frac{1}{2} dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{< \frac{\gamma_1(u)-\gamma_1(v)}{u-v}, \frac{\gamma_2(u)-\gamma_2(v)}{u-v} >} \quad e \quad \tilde{\delta} := \frac{1}{2} dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u,v]}{< \frac{\gamma_1(u)-\gamma_1(v)}{u-v}, \frac{\gamma_2(u)-\gamma_2(v)}{u-v} >}.$$

Os números I e δ representam o número de inflexões e pontos duplos, respectivamente, de uma deformação de γ. Definindo T como o número de bi-tangências de uma deformação de γ, temos, pela Proposição 3.3 do Capítulo 3, que

$$\vartheta = 2T + 2\delta + I. \tag{4.3}$$

Similarmente, $\tilde{I}$ e $\tilde{\delta}$ representam, respectivamente, as quantidades globais de inflexões e pontos duplos de uma deformação de γ. Tomando $\tilde{T}$ como T mais o número de bi-tangências da curva antes da deformação e usando a Proposição 3.3 do Capítulo 3, temos

$$\tilde{\vartheta} = 2\tilde{T} + 2\tilde{\delta} + \tilde{I}. \tag{4.4}$$

As seguintes considerações se fazem úteis no cálculo dos números apresentados na Definição 4.1.

Suponha que tenhamos n polinômios homogêneos $F_1, \ldots, F_n$ de grau, respectivamente, $d_1, \ldots, d_n$ nas variáveis complexas $x_0, \ldots, x_n$. Defina, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \ldots, x_n) &= F_i(1, x_1, \ldots, x_n), \\ \overline{F}_i(x_1, \ldots, x_n) &= F_i(0, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em $\mathbb{P}^n$ temos o espaço afim $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ definido por $x_0 = 1$, e as soluções das equações afins

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

são precisamente as soluções de $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ que estão em $\mathbb{C}^n$.

Já as soluções não nulas de

$$\overline{F}_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = \overline{F}_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

são chamadas de soluções no infinito de $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$.

Teorema 4.2. [Teorema de Bézout] *Assuma que os $f_1, \ldots, f_n$ definidas como em (4.5), não possuem fator em comum e que não ocorrem soluções no infinito, como descrito anteriormente. Então, temos $d_1 \cdots d_n$ soluções de $f_1 = 0, \cdots, f_n = 0$ (contando as multiplicidades) e*

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{< f_1, \ldots, f_n >} = d_1 \cdots d_n$$

como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Com o Teorema de Bézout temos um método para ajudar no cálculo dos números $\tilde{\vartheta}, \tilde{I}$ e $\tilde{\delta}$. Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em [6].

Para definir a multiplicidade local de uma solução de um sistema de equações, usamos o anel local em vez do anel polinomial, mas a ideia é muito parecida. Considere $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ germe de aplicação holomorfa na origem. A multiplicidade do germe f na origem é dada por

$$\mu_0[f] = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{< f >},$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ é o anel de germes em 0 de funções suaves a valores complexos sobre C^n e $< f >$ é o ideal gerado pelas componentes de f. Dizemos que f é um germe de aplicação finito se $\mu_0 < \infty$. Sabe-se que a multiplicidade de f é o número de pré-imagens de um valor regular de f próximo de 0.

Observação 4.3.

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{< f_1, \ldots, f_n >} = \sum_{p \in f^{-1}(0)} dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}}{< f_1, \ldots, f_n >}$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ é finito. Portanto, a dimensão do anel de quociente $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/ < f_1, \ldots, f_n >$ é o número de pontos de $f_1 = \cdots = f_n = 0$ contados com as multiplicidades. Por outro lado, a dimensão de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,p}/ < f_1, \ldots, f_n >$ é a multiplicidade de p.

Considere $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e cada f_i um de um polinômio homogêneo tal que 0 é isolado em $f^{-1}(0)$. Sabemos que $\mu_0[f] = \Pi_{i=1}^n d_i$, onde d_i é o grau de cada f_i. Mas também, qualquer função holomorfa $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ pode ser escrita como $f_i = g_i + G_i$, onde g_i é o polinômio homogêneo de menor grau possível em f_i. Assim, qualquer aplicação suave $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ pode ser escrita como $f = g + G$. Também é sabido que $\mu_0[f] = \mu_0[g]$ se 0 é isolado em $g^{-1}(0)$. Para mais detalhes pode-se consultar, por exemplo, [1].

Estas ferramentas, para o calculo de dimensões, serão utilizadas mais adiante na Proposição 4.5.

4.2 Resultados preliminares

Afim de obtermos uma relação entre o número de Milnor, as inflexões e as bi-tangências para determinados tipos de germes, precisamos de resultados intermediários, que serão feitos nessa seção. A Proposição 4.4 nos dirá que os zeros do campo F_α, para curvas $\alpha(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ especificas, é isolado. Esse fato será utilizado na Proposição 4.5 para obtermos uma relação entre o número de inflexões de uma curva e os zeros do campo dado por ela.

Proposição 4.4. *Seja* $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ *um germe do tipo*

$$\alpha(u) = (a_k u^k, b_m u^m), \tag{4.6}$$

onde $0 < k < m$ *e* $a_k b_m \neq 0$ *com* k *e* m *coprimos. Então* F_α *tem a origem como zero isolado.*

Demonstração. Primeiramente vamos explicitar a expressão de F_α,

$$\begin{aligned} F_\alpha(u,v) &= \left(\tfrac{\det(\alpha'(u), \alpha(u)-\alpha(v))}{(u-v)^2}, \tfrac{\det(\alpha'(v), \alpha(u)-\alpha(v))}{(u-v)^2} \right) \\ &= a_k b_m \left(\tfrac{(k-m)u^{k+m-1} + m u^{m-1} v^k - k u^{k-1} v^m}{(u-v)^2}, \tfrac{(m-k)v^{k+m-1} - m v^{m-1} u^k + k v^{k-1} u^m}{(u-v)^2} \right) \end{aligned}$$

E para $u = v = 0$, vale então $F_\alpha(0,0) = (0,0)$, isto é, a origem é um zero de F_α.

Note que, se $(u,v) \neq (0,0)$ é um zero de F_α, então (tu,tv), $t \in \mathbb{C}$, também é zero de F_α. Vamos agora verificar que F_α não possui zeros diferentes da origem. Suponha $F_\alpha(u,v) = (0,0)$ com $(u,v) \neq (0,0)$ e defina $x = v/u$. Portanto

$$F_\alpha(u,v) = (0,0) \Leftrightarrow F_\alpha(1,x) = (0,0).$$

Assim, $F_\alpha(u,v) = (0,0)$ é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-kx^m + mx^k + (k-m)}{(1-x)^2} = 0, \\ \\ \dfrac{(m-k)x^m - mx^{m-k} + k}{(1-x)^2} = 0. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Suponha que existe um $z \in \mathbb{C}$, não nulo, satisfazendo o sistema em (4.7). Na primeira equação obtemos:

$$z^m = \frac{mz^k + (k-m)}{k}.$$

Usando esse valor na segunda equação, segue

$$\begin{aligned} (m-k)\left(\frac{mz^k+(k-m)}{k}\right) - m\left(\frac{mz^k+(k-m)}{k}\right)\left(\frac{1}{z^k}\right) + k = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(m-k)m}{k}\left(z^k + \frac{(k-m)}{m} + \frac{-m}{(m-k)} + \frac{1}{z^k} + \frac{k^2}{(m-k)m}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(z^k + \frac{1}{z^k} + \frac{(k-m)(m-k) - m^2 + k^2}{m(m-k)}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(z^k + \frac{1}{z^k} + \frac{-2m(m-k)}{m(m-k)}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow z^k\left(z^k + \frac{1}{z^k} - 2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(z^k - 1\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $z^k = 1$, isto é, as raízes k-ésimas de 1, que são

$$z_N = \cos\left(\frac{2N\pi}{k}\right) + i\sin\left(\frac{2N\pi}{k}\right) = e^{i\frac{2\pi N}{k}}, 0 \leq N \leq k-1.$$

Voltando com esses valores de z para a primeira equação do sistema em (4.7),

$$-ke^{i\frac{2\pi Nm}{k}} + me^{i2\pi N} + (k-m) = 0 \Leftrightarrow -ke^{i\frac{2\pi Nm}{k}} + m + (k-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -ke^{i\frac{2\pi Nm}{k}} + k = 0 \Leftrightarrow -e^{i\frac{2\pi Nm}{k}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi Nm}{k}} = 1$$

$$\Leftrightarrow z_N^m = 1, 0 \leq N \leq k-1.$$

Mas isto significa que se $z \in \mathbb{C}$, não nulo, satisfaz o sistema em (4.7), então $z^m = 1$ e $z^k = 1$. Considerando l o menor inteiro positivo tal que $z^l = 1$, temos que k e m são múltiplos de l, e como k e m são coprimos (por hipótese), segue que $l = 1$ e também, $z = 1$.

Neste momento usamos a regra dos sinais de Descartes e vemos que cada polinômio no numerador das equações do sistema em (4.7) tem na máximo duas raízes positivas. Como $z = 1$ tem multiplicidade 2 e os dois polinômios em (4.7) estão divididos por $(1-x)^2$, $z = 1$ não pode satisfazer o sistema em questão, nos dando um absurdo. Essa contradição veio do fato de assumirmos que F_α tem zeros diferentes da origem. Portanto, isto não ocorre e a origem é o único zero, concluindo a demonstração. ∎

Proposição 4.5. *Seja $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe do tipo*

$$\gamma(u) = \left(\sum_{i=k}^{l} a_i u^i, \sum_{j=m}^{n} b_j u^j \right)$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ e $1 \leq k < m$. Então:

i) Se k e m são coprimos, vale $\vartheta = I^2$,

ii) Se l e n são coprimos, vale $\tilde{\vartheta} = \tilde{I}^2$.

Demonstração. Para o item (i) iremos considerar os comentários feitos na Seção 4.1, procurando então o polinômio homogêneo de menor grau que aparece em cada entrada de F_γ. Definindo f como abaixo

$$f(u,v) = \frac{\det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v))}{(u-v)^2},$$

notamos que o termo procurado homogêneo de menor grau depende dos termos iniciais de γ, ou seja, podemos considerar γ como em (4.6) da Proposição 4.4, e obter

$$\begin{aligned} f(u,v)(u-v)^2 &= \det(\gamma'(u), \gamma(u) - \gamma(v)) \\ &= \det\Big(\big(a_k k u^{k-1}, b_m m u^{m-1}\big), \big(a_k(u^k - v^k), b_m(u^m - v^m)\big) \Big) \\ &= a_k k u^{k-1} b_m (u^m - v^m) - b_m m u^{m-1} a_k (u^k - v^k). \end{aligned}$$

Assim, o grau do polinômio homogêneo f é $k-1+m-2=k+m-3$. Lembrando que $F_\gamma(u,v)=(f(u,v),-f(v,u))$, segue

$$\vartheta = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{< F_\gamma(u,v) >} = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{< f(u,v),-f(v,u) >} = (k+m-3)(k+m-3) = (k+m-3)^2.$$

Agora estudemos o valor de I, para isso vamos exibir a expressão de $\det(\gamma'(u),\gamma''(u))$

$$\begin{aligned}\det\big(\gamma'(u),\gamma''(u)\big) &= \det\Big(\big(a_k k u^{k-1}, b_m m u^{m-1}\big),\big(a_k k(k-1)u^{k-2}, b_m m(m-1)u^{m-2}\big)\Big)\\ &= a_k k u^{k-1} b_m m(m-1)u^{m-2} - b_m m u^{m-1} a_k k(k-1)u^{k-2}.\end{aligned}$$

De onde segue que $\det(\gamma'(u),\gamma''(u))$ tem grau $k-1+m-2=k+m-3$, e portanto

$$I = dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}}{< \det((\gamma'(u),\gamma''(u)) >} = k+m-3.$$

O que conclui a primeira parte.

Para a demonstração do item (ii) vamos utilizar o Teorema de Bézout e considerar novamente

$$\gamma(u) = \left(\sum_{i=k}^{l} a_i u^i, \sum_{j=m}^{n} b_j u^j\right).$$

Veja, que nesse caso, usando a linearidade do determinante nas duas entradas, vemos que f é uma soma de polinômios homogêneos com graus de $j=k+m-3$ até $j=l+n-3$. Chamando cada um desses polinômios de P_j, temos:

$$F_\gamma(u,v) = (P_{k+m-3}(u,v)+\cdots+P_{l+n-3}(u,v), -P_{k+m-3}(v,u)-\cdots-P_{l+n-3}(v,u)).$$

Homogeneizando os polinômios P_j, para que todos tenham o mesmo grau $l+n-3$, definimos F_1 e F_2 da seguinte maneira:

$$F_1(w,u,v) = w^{l+n-k-m}P_{k+m-3}(u,v)+\cdots+w^0P_{l+n-3}(u,v),$$

$$F_2(w,u,v) = -w^{l+n-k-m}P_{k+m-3}(v,u)-\cdots-w^0P_{l+n-3}(v,u).$$

Defina também,

$$\begin{aligned} f_i(u,v) &= F_i(1,u,v),\\ \overline{F}_i(u,v) &= F_i(0,u,v),\end{aligned} \tag{4.8}$$

$i = 1, 2$, (compare (4.8) com (4.5)).

Note que $\overline{F}_1(u,v) = P_{l+n-3}(u,v)$ e $\overline{F}_2(u,v) = -P_{l+n-3}(v,u)$, e mais, $F_\gamma(u,v) = (P_{l+n-3}(u,v), -P_{l+n-3}(v,u))$ é o campo para $\gamma(u) = (a_l u^l, b_n u^n)$. Mas, pela Proposição 4.5, F_γ para $\gamma(u) = (a_l u^l, b_n u^n)$ tem a origem como zero isolado. Isto quer dizer que não temos soluções no infinito. Podemos então utilizar o Teorema de Bézout, obtendo

$$\tilde{\vartheta} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u,v]}{< F_\gamma(u,v) >} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u,v]}{< f_1(u,v), f_2(u,v) >} = (l+n-3)(l+n-3) = (l+n-3)^2.$$

Por outro lado,

$$\tilde{I} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u]}{< \det((\gamma'(u), \gamma''(u)) >} = l + n - 3.$$

Isto finaliza esta demonstração. ∎

4.3 A fórmula Algébrica

Antes de enunciarmos o teorema central desse capítulo, precisamos definir o número de Milnor μ. Para isso, tome um germe $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$, e defina

$$\mu := dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}{< \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y} >}.$$

O valor μ é chamado de **número de Milnor**, mas para calcularmos utilizaremos a fórmula

$$\mu = 2\delta - r + 1,$$

para curvas planares (ver [18] ou [4]), onde r é o número de ramos da curva em questão. Em nosso caso, o número de ramos r dos germes estudados é 1, o que nos dá

$$\mu = 2\delta. \tag{4.9}$$

De forma similar, temos

$$\tilde{\mu} = 2\tilde{\delta}. \tag{4.10}$$

para $\tilde{\mu}$ sendo o **número global de Milnor**, que é dado pela soma dos números locais de Milnor sobre todos os pontos críticos de G.

Apresentamos agora o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.6. *Seja* $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ *um germe do tipo*

$$\gamma(u) = \left(\sum_{i=k}^{l} a_i u^i, \sum_{j=m}^{n} b_j u^j \right)$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ *e* $1 \leq k < m$. *Então:*

i) Se k *e* m *são coprimos, vale* $\mu = I(I-1) - 2T$,

ii) Se l *e* n *são coprimos, vale* $\tilde{\mu} = \tilde{I}(\tilde{I}-1) - 2\tilde{T}$.

Demonstração. Faremos as demonstrações dos itens (i) e (ii) simultaneamente. Primeiramente as expressões em (4.4) e (4.3), nos dão

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2T + 2\delta + I, \\ \tilde{\vartheta} &= 2\tilde{T} + 2\tilde{\delta} + \tilde{I}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora usemos que

$$\begin{aligned} \vartheta = I^2 \quad &\text{e} \quad \mu = 2\delta, \\ \tilde{\vartheta} = \tilde{I}^2 \quad &\text{e} \quad \tilde{\mu} = 2\tilde{\delta}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

pela Proposição 4.5 e pelas equações (4.9) e (4.10).

Com isso obtemos

$$\begin{aligned} \mu &= 2\delta = \vartheta - 2T - I = I^2 - I - 2T = I(I-1) - 2T, \\ \tilde{\mu} &= 2\tilde{\delta} = \tilde{\vartheta} - 2\tilde{T} - \tilde{I} = \tilde{I}^2 - \tilde{I} - 2\tilde{T} = \tilde{I}(\tilde{I}-1) - 2\tilde{T}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

O que conclui a demonstração. ■

A partir no Teorema 4.6, obtemos uma relação entre o número de Milnor, as de inflexões e bi-tangências para determinados tipos de germes.

Para finalizar este capítulo, adicionamos duas tabelas para $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe dado por

$$\gamma(u) = \left(\sum_{i=k}^{l} a_i u^i, \sum_{j=m}^{n} b_j u^j \right), \tag{4.14}$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ e $1 \leq k < m$, k e m coprimos e também l e n coprimos.

Tabela 4.1: Invariantes locais.

$\delta =$	$1/2(k-1)(m-1)$
$\mu =$	$(k-1)(m-1)$
$I =$	$(k+m-3)$
$T =$	$1/2\Big((k+m-3)(k+m-4)-(k-1)(m-1)\Big)$
$\vartheta =$	$(k+m-3)^2$

Tabela 4.2: Invariantes globais.

$\tilde{\delta} =$	$1/2(l-1)(n-1)$
$\tilde{\mu} =$	$(l-1)(n-1)$
$\tilde{I} =$	$(l+n-3)$
$\tilde{T} =$	$1/2\Big((l+n-3)(l+n-4)-(l-1)(n-1)\Big)$
$\tilde{\vartheta} =$	$(l+n-3)^2$

A Tabela 4.1 contem os invariantes locais δ, μ, I, T e ϑ e a Tabela 4.2 contem os invariantes globais $\tilde{\delta}, \tilde{\mu}, \tilde{I}, , \tilde{T}$ e $\tilde{\vartheta}$ para γ como em (4.14).

Conclusões

Neste trabalho, tivemos como objetivo explorar a fórmula de Fabricius-Bjerre de 1962 e algumas variações da mesma. Para tal, utilizamos principalmente os artigos [11] e [12] para curvas $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, o artigo [19] para curvas $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ e os artigos [7] e [8] para curvas $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ e germes $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$.

Referências Bibliográficas

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade e A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps, Volume I*, Monographs in Mathematics, **82**, Birkhuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[2] T. F. Banchoff, *Global geometry of polygons. I: The theorem of Fabricius Bjerre*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974) 237-241.

[3] I. Bendixson, *Sur les courbes definies par des equations differentielles*, Acta Math. **24** (1913) 14-22.

[4] R.O. Buchweitz e G.-M. Greuel, *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980) 241-281.

[5] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 6ed., Rio de Janeiro, SBM, 2014.

[6] D. A. Cox, J. Little e D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **185**, Spriger-Verlag, New York, 1998.

[7] F. S. Dias e L. F. Mello, *Geometry of plane curves*, Bull. Sci. Math. **135** (2011) 333-334.

[8] F. S. Dias, R. Oset Sinha e M. A. S. Ruas, *A formula relating inflections, bitangencies and the Milnor number of a plane curve*, Bull. Amer. Math. Soc. **142** (2014) 2353-2368.

[9] D. Dreibelbis, *A Bitangency Theorem for Surfaces in Euclidean Four-Space*, Ph.D. Thesis, Brown University, 1998.

[10] F. Dumortier, J. Llibre e J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Spriger-Verlag, Berlin, 2006.

[11] Fr. Fabricius-Bjerre, *On the double tangents of plane closed curves*, Math. Scand. **11** (1962) 113-116.

[12] Fr. Fabricius-Bjerre, *A relation between the mumbers of singular points and singular lines of a plane closed curve*. Math. Scand. **40** (1977) 20-24.

[13] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes, **25**, Pitman, 1979.

[14] B. Halpern, *Global theorems for closed plane curves*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970) 96-100.

[15] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, New York, 1976.

[16] B. Jablonska, *Surfaces associated to a space curve. A new proof of Fabricius-Bjerre's Formula*, Ph.D. Thesis, Universidade Técnica de Berlim, 2012.

[17] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[18] J. W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, **61**, Princeton University Press, 1968.

[19] J. L. Weiner, *A spherical Fabricius-Bjerre formula with applications to closed space curves*, Math. Scand. **61** (1987) 286-291.