Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Relação entre a Dinâmica Quântica e as Dimensões de Correlação da Medida Espectral

Débora Ferreira Ricardo

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen
Coorientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 10 de março de 2018

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Relação entre a Dinâmica Quântica e as Dimensões de Correlação da Medida Espectral

Débora Ferreira Ricardo

Orientadora: Profª. Drª. Mariza Stefanello Simsen
Coorientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
10 de março de 2018

Dedico este trabalho a minha avó, Divina Marta Martins (in memoriam).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e Nossa Senhora Aparecida, por todas as bençãos recebidas e pela proteção de todos os dias. *"Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam"*. Salmo 23:4

Aos meus pais, Denise e Marcos, às irmãs Beatriz e Iara(nosso anjo) pela união, motivação, carinho e amor incondicional.

Aos grandes incentivadores deste projeto Gilson e Selma.

Ao meu namorado, Felipe, pelo carinho e ensinamentos de física no dia a dia, mesmo quando nem eu queria aprender.

Aos colegas do mestrado e principalmente aos amigos, Joel e Marcela, que tenho como irmãos.

À minha orientadora, Mariza Stefanello Simsen, pelo empenho, ensinamentos, conselhos, paciência e principalmente pela pessoa amiga que se tornou. Não poderei seguir em frente sem me espelhar nesse exemplo de profissional.

Ao coorientador, César Rogério de Oliveira, pela oportunidade deste trabalho conjunto e pela disponibilidade para me orientar quando necessário.

Aos professores Jacson, Luis Fernando, Antonio, Bráulio e Denis(grande amigo), pelo conhecimento transmitido, conversas prazerosas e por me mostrarem que eu não estava sozinha durante esta caminhada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda."

Paulo Freire

Resumo

Nesta dissertação apresentamos a demonstração rigorosa de que os expoentes de decaimento das probabilidades de retorno são iguais às dimensões de correlação da medida espectral. Para isso, nos concentramos no estudo das relações entre o grupo de evolução unitário gerado por um operador autoadjunto definido em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e as propriedades da medida espectral desse operador autoadjunto.

Palavras–chave: Medida Espectral, Probabilidade de Retorno, Dimensão de Correlação.

Abstract

In this dissertation we present the rigorous demonstration that the decay exponents of the return probabilities are equal to the correlation dimensions of the spectral measure. For this, we focus on the study of the relations between the unitary evolution group generated by a self-adjoint operator defined in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ and the properties of the spectral measure of that self-adjoint operator.

Keywords: Espectral Measure, Return Probability, Correlation Dimension.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos operadores autoadjuntos e suas respectivas aplicações em espaços de Hilbert, $\mathcal{H}$, vem ganhando grande destaque tanto na Física quanto na Matemática, em especial na análise funcional. Parte desta teoria se dedica ao estudo de modelos físicos que descrevem a evolução temporal de um estado quântico em um instante de tempo t.

Para melhor entender este trabalho, destacamos alguns postulados da mecânica quântica:

1. Em um sistema físico, os estados desse sistema são representados por elementos normalizados ξ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, separável e complexo.

2. Os observáveis físicos, por exemplo, energia, posição ou momento, são representados por operadores autoadjuntos $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Geralmente esses operadores não são contínuos e são definidos apenas em um subconjunto denso de $\mathcal{H}$, (ver Proposição 3.1.10).

3. O valor esperado do operador T no estado ξ é dado por $\mathcal{E}_\xi^T = \langle \xi, T\xi \rangle$ e os valores esperados estão relacionados com o espectro de T.

4. A evolução temporal de um sistema quântico é dada pela solução da equação de Schrödinger
$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\xi(t) = H\xi(t) \\ \xi(0) = \xi \in \operatorname{dom} T \end{cases},$$

onde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ é a constante de Planck. A saber, $\xi(t) = e^{\frac{-itH}{\hbar}}$.

A equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial que descreve como o estado quântico de um sistema físico evolui com o tempo. Na mecânica quântica, a equação de Schrödinger é análoga a segunda lei de Newton, ou seja, é a equação que descreve a dinâmica de um sistema físico.

Neste trabalho, estamos interessados em analisar o comportamento do observável quando o tempo é grande, isto é, $t \to \infty$ e o operador autoadjunto em estudo é a Hamiltoniana H.

A Hamiltoniana é o operador cujo observável correspondente é a energia total do sistema. O conjunto dos possíveis valores de energia formam um espectro deste operador.

É interessante ressaltar que, em uma abordagem matemática, qualquer operador autoadjunto pode ser decomposto usando suas medidas espectrais, inclusive a Hamiltoniana. Por esse motivo faz-se necessário o estudo aprofundado da teoria espectral, visto que diferentes subespaços espectrais de um operador autoadjunto T fornece diferentes comportamentos do grupo de evolução unitário, como veremos com os conceitos da probabilidade de retorno quântico.

Assim, uma pergunta natural surge neste contexto. Qual é a relação entre uma propriedade espectral de um operador autoadjunto e a dinâmica do grupo de evolução unitário gerado por esse operador ?

A evolução de uma função (função de onda) ψ é descrita pela solução $\psi(t) = e^{-itT}\psi$ da equação de Schöringer temporal

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t) = T\psi(t) \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases},$$

onde T é o operador autoadjunto (no nosso caso, a Hamiltoniana H).

A relação entre e^{-itT}, que chamamos de grupo de evolução unitário temporal, e as propriedades espectrais são estabelecidas pela teoria espectral através da igualdade

$$\langle \psi, f(t)\psi \rangle = \int_{\sigma(T)} f(x)\; d\mu_\psi(x),$$

em que μ_ψ é a medida espectral de T com respeito a ψ, f é uma função de Borel mensurável e limitada sobre $\mathbb{R}$ e $\sigma(T)$ é o espectro do operador autoadjunto.

Como o espectro é a união dos suportes de todas as medidas espectrais (há casos em que o suporte de uma única medida já da todo o espectro), então podemos mostrar que cada tipo espectral está relacionado a um comportamento quando $(t \to \infty)$. E esses tipos espectrais são dados pelas decomposições das medidas e do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Um conceito importante para essa dissertação é a probabilidade de retorno. Essa probabilidade se relaciona com o Teorema Espectral e é dada por,

$$p_\xi(t) := |\langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle|^2,$$

e de forma geral

$$p_{\eta,\xi}(t) := |\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle|^2,$$

com condição inicial ξ, no tempo t, (veja [7]).

Note então a relação crucial entre essas quantidades e o Teorema Espectral,

$$\begin{aligned} p_\xi(t) &= |\langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle|^2 \\ &= \Big| \int_{\sigma(T)} e^{-itT} \quad d\mu_\xi(x) \Big|^2 \\ &= |\widehat{\mu}_\xi(t)|^2, \end{aligned}$$

onde $\widehat{\mu}_\xi(t) = \displaystyle\int_{\sigma(T)} e^{-itT} \quad d\mu_\xi(x)$ é chamada de transformada de Fourier da medida μ_ξ.

Logo, o comportamento da probabilidade de retorno e os valores esperados de operadores teste estão naturalmente relacionados às medidas espetrais de T através da igualdade

$$|\langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle| = |\widehat{\mu}_\xi(t)| = \int_{\sigma(T)} |e^{-it\lambda} \quad d\mu_\xi(\lambda)|.$$

Sendo assim, o principal objetivo dessa dissertação é estudar as relações existentes entre a dinâmica do grupo de evolução unitário gerado por um operador autoadjunto, e^{-itT}, e algumas propriedades de suas respectivas medidas espectrais.

Em particular, neste trabalho demonstramos de forma rigorosa, baseado em [1], que os expoentes de decaimento das probabilidades de retorno são iguais às dimensões de correlação da medida espectral, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{\log \langle p_\xi\rangle(t)}{\log(t)} = -D_2^+$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\log \langle p_\xi \rangle(t)}{\log(t)} = -D_2^-,$$

onde a função de correlação é dada por $\langle p_\xi \rangle(t) := \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p_\xi(s)\ ds$, e D_2^-, D_2^+ são respectivamente as dimensões de correlação inferior e superior, dadas na Definição 5.2.10.

A motivação para a realização deste trabalho foi baseado no artigo [4]. Nesse artigo os autores mostraram de forma analítica que, para o espectro de conjuntos de Cantor (singular contínuo ou absolutamente contínuo), a função de correlação $\langle p_\xi \rangle(t)$ é aproximadamente $T^{-\delta}$, sendo δ a dimensão de correlação de uma medida μ, que denotamos por D_2, ou seja,

$$\langle p_\xi \rangle(t) \sim T^{-\delta}.$$

Uma demonstração alternativa desse resultado é dado em [3] usando-se transformadas Wavelet. Nesse artigo, da-se uma nova definição para dimensão fractal como comportamento de pequena escala da q-energia de transformadas wavelet. Esta é uma generalização de abordagens multi-fractais. Com esta definição particular, foi mostrado que a dimensão de correlação da medida espectral determina o comportamento da evolução temporal gerada por um operador autoadjunto limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Um ponto interessante apresentado, é que os expoentes de decaimento das probabilidades de retorno são definidos de forma puramente dinâmica, enquanto às dimensões de correlação são definidas de forma puramente teórica para uma medida, mas quando aplicados as medidas espectrais associadas a Hamiltoniana H, ocorre o encontro desses conceitos, aparentemente tão distintos.

Em seguida apresentamos como a dissertação está estruturada.

No Capítulo 2 fazemos uma revisão bibliográfica baseada nas referências [7, 8, 11, 12], apresentando alguns dos principais resultados de Medida e Integração e Análise Funcional.

Já no Capítulo 3, apresentamos os conceitos de operadores adjunto e autoadjunto e introduzimos de maneira sucinta alguns conceitos essenciais para a teoria espectral. Inicialmente definimos o que é uma resolução da identidade e suas propriedades. Como consequência enunciamos o conhecido Teorema Espectral, não demonstrado aqui por razões técnicas. Para facilitar o entendimento desses conteúdos, na sequência são apresentadas algumas aplicações do Teorema Espectral. Para finalizar este capítulo apresentamos na Seção 3.4 a decomposição de um operador autoadjunto em partes discreta e essencial e na Seção 3.5 apresentamos a decomposição de um operador autoadjunto em parte pontual, absolutamente contínuo e singular contínuo.

O Capítulo 4 apresenta resultados mais sofisticados e aprofundados atráves da relação entre os conceitos de probabilidade de retorno, dos operadores teste e das medidas espectrais de um operador autoadjunto. Destacamos neste capítulo, os Lemas de Riemann-Lebesgue, Wiener e o Teorema de RAGE baseado em [7].

Finalmente no Capítulo 5 fazemos uma extensão do Capítulo 4, estudando de forma detalhada o artigo *Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra* [1]. É nesse capítulo que conseguimos alcançar o nosso objetivo, que é a demonstração do Teorema 5.2.13.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Apresentamos neste capítulo uma coletânea de conceitos e resultados sobre Medida e Integração e Análise Funcional, necessários para o entendimento da dissertação, (veja [7, 8, 11, 12]). Em todo o trabalho denotaremos por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ o corpo dos números reais e complexos, respectivamente. Quando não houver a necessidade de especificar o corpo, usaremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ denotarão o conjunto dos números naturais e inteiros, respectivamente.

2.1 Medida e Integração

Nesta seção apresentaremos resultados importantes sobre Medida e Integração, onde supomos que os leitores tenham conhecimento de Álgebra Linear e Topologia geral. Para mais detalhes e demonstrações dos resultados aqui apresentados, indicamos [12].

Definição 2.1.1. *Uma coleção $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-álgebra em X se $\mathfrak{M}$ satisfaz:*

(i) $X \in \mathfrak{M}$.

(ii) *Se $M \in \mathfrak{M}$, então $M^c \in \mathfrak{M}$, onde M é um subconjunto de $\mathfrak{M}$ e M^c o seu complementar.*

(iii) *Se $M_j \in \mathfrak{M}$ e $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ então $M \in \mathfrak{M}$.*

Definição 2.1.2. *Se $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra em X, então X é dito um espaço mensurável, e cada elemento $M \in \mathfrak{M}$ é chamado de conjunto mensurável em X.*

Pode-se denotar um espaço mensurável como $(X, \mathfrak{M})$, porém na maioria das vezes usaremos somente X para denotar um espaço mensurável.

Definição 2.1.3. *Seja X um espaço mensurável. Se E é um conjunto mensurável em X e se*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in E \\ 0 & se \quad x \notin E \end{cases},$$

então χ_E é uma função mensurável que chamamos de função característica de E.

Para definirmos uma σ-álgebra de Borel, devemos nos lembrar que:
Se $\mathcal{F}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de X, existe uma menor σ-álgebra $\mathfrak{M}^*$ em X tal que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$, onde $\mathfrak{M}^*$ é dita σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$.

Diante disso,

Definição 2.1.4. *Se X é um espaço topológico, existe uma menor σ-álgebra, $\mathcal{B}$ em X, tal que todo conjunto aberto em X pertence a $\mathcal{B}$. Dessa forma, $\mathcal{B}$ é dito ser uma σ-álgebra de Borel e seus elementos são chamados de borelianos(em $\mathbb{R}$, os conjuntos abertos e fechados são borelianos).*

Definição 2.1.5. *Seja $\mathfrak{M}$ uma σ-álgebra em X. Uma medida positiva μ definida em $\mathfrak{M}$, é uma função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ que é contavelmente aditiva, isto é, se $(M_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos então $\mu(\sum_{j=1}^{\infty} M_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j)$.*

Denotamos um espaço de medida pela trinca $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, ou seja, um espaço de medida é um espaço mensurável que possui uma medida positiva definida na σ-álgebra $\mathfrak{M}$.

Teorema 2.1.6. *(**Convergência Monótona**) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis em X, e suponha que*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty$, $\forall x \in X$.

(b) $f_n(x) \to f(x)$ *quando* $n \to \infty$, $\forall x \in X$.

Então f é uma função mensurável, e

$$\int_X f_n \quad d\mu \to \int_X f \quad d\mu,$$

quando $n \to \infty$.

Lema 2.1.7. ***(Lema de Fatou)*** *Se $f_n : X \to [0, \infty]$ é uma função mensurável, para todo inteiro n, então*

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n \right) \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.1.8. ***(Convergência Dominada)*** *Suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis complexas em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

exista para cada $x \in X$. Suponha também que exista $g \in L^1(X)$ (onde $L^1(X)$ é o conjunto das funções mensuráveis $g \in X$ em que $\int |g| \, d\mu < \infty$) tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(X)$ e vale as seguintes:

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$

Definição 2.1.9. **(i)** *Um conjunto E em um espaço topológico é dito σ-compacto se E é a união contável de conjuntos compactos.*

(ii) *Um conjunto E em um espaço de medida, com medida μ, é dito σ-finito se E é a união contável de conjuntos E_j com medida finita, isto é, $\mu(E_j) < \infty$.*

Definição 2.1.10. *Se p e q são números reais positivos tal que $p + q = pq$, ou de forma equivalente*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

então dizemos que p e q é um par de expoentes conjugados.

Definição 2.1.11. *Se* $0 < p < \infty$ *e se* f *é uma função mensurável complexa em* X, *definimos*

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

E se $p = \infty$ *temos*

$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess}|f|.$$

Definição 2.1.12. *Seja* p *e* q *expoentes conjugados,* $1 \leq p \leq \infty$, *temos:*

(i) *(**Desigualdade de Hölder**) Se* $f \in L^p(\mu)$ *e* $g \in L^q(\mu)$, *então* $fg \in L^1(\mu)$, *e assim*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(i) *(**Desigualdade de Minkowski**) Se* $f \in L^p(\mu)$ *e* $g \in L^p(\mu)$, *então* $f + g \in L^p(\mu)$, *e assim*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Definição 2.1.13. *Seja* μ *uma medida positiva na* σ*-álgebra* $\mathfrak{M}$ *e* λ *uma medida qualquer(positiva ou finita) em* $\mathfrak{M}$, *então*

(i) *Dizemos que* λ *é absolutamente contínua em relação a* μ, *e denotamos* $\lambda \ll \mu$, *se* $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$, $\forall E \in \mathfrak{M}$.

(ii) *Dizemos que* λ *está concentrada em* M, *se* $\lambda(E) = \lambda(E \cap M)$, $\forall E \in \mathfrak{M}$, *isto é, se* $E \subset M^c$ *então* $\lambda(E) = 0$.

(iii) *Suponha que* λ_1 *e* λ_2 *são medidas em* $\mathfrak{M}$, *dizemos que* λ_1 *e* λ_2 *são mutualmente singulares, e denotamos por* $\lambda_1 \perp \lambda_2$, *se existe* $M \in \mathfrak{M}$ *em que* λ_1 *está concentrada em* M *e* λ_2 *está concentrado em* M^c.

Definição 2.1.14. *Sejam* μ, λ, λ_1 *e* λ_2 *medidas na* σ*-álgebra* $\mathfrak{M}$, *com* μ *positiva, então*

(i) *Se* λ *está concentrada em* M, *então* $|\lambda|$ *também está concentrado em* M.

(ii) *Se* $\lambda_1 \perp \lambda_2$, *então* $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(iii) *Se* $\lambda_1 \perp \lambda$ *e* $\lambda_2 \perp \lambda$, *então* $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \lambda$.

(iv) *Se* $\lambda_1 \ll \mu$ *e* $\lambda_2 \ll \mu$, *então* $(\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$.

(v) *Se* $\lambda \ll \mu$, *então* $|\lambda| \ll \mu$.

(vi) *Se* $\lambda_1 \ll \mu$ *e* $\lambda_2 \perp \mu$, *então* $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(vii) *Se* $\lambda \ll \mu$ *e* $\lambda \perp \mu$, *então* $\lambda = 0$.

Definição 2.1.15. *(**Teorema de Radon-Nikodym**) Seja* μ *uma medida positiva e* σ*-finita na* σ*-álgebra* $\mathfrak{M}$ *em* X *e seja* λ *uma medida complexa em* $\mathfrak{M}$, *então*

(i) *Existe um único par de medidas complexas* λ_a *e* λ_s *em* $\mathfrak{M}$ *tal que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Se λ *é positiva e finita, então* $\lambda_a \perp \lambda_s$.

(ii) *Existe um único* $h \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \; d\mu, \quad \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Definição 2.1.16. *Para cada função* $f \in X \times Y$ *e para cada* $x \in X$, *pode-se associar uma função* f_x *definida em* Y *e dada por* $f_x(y) = f(x,y)$. *De forma similar, se* $y \in Y$, *a função* f^y *é definida em* X *e dada por* $f^y(x) = f(x,y)$.

Definição 2.1.17. *(**Teorema de Fubini**) Sejam* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathfrak{N}, \lambda)$ *espaços de medida* σ*-finitos, e seja* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *uma função* $(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N})$*-mensurável.*

(i) *Se* $0 \leq f \leq \infty$, *e se*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \; d\lambda, \qquad \psi(y) = \int_X f^y \; d\mu \qquad (x \in X, y \in Y), \tag{2.1}$$

então φ *é* $\mathfrak{M}$*-mensurável,* ψ *é* $\mathfrak{N}$*-mensurável e*

$$\int_X \varphi \; d\mu = \int_{X \times Y} f \; d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi \; d\lambda. \tag{2.2}$$

(ii) *Se* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *e se*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x \; d\lambda \quad e \quad \int_X \varphi^* \; d\mu < \infty,$$

então $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

(iii) *Se* $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, *então* $f_x \in L^1(\lambda)$ *para* x $\lambda - q.t.p.$ *e* $f^y \in L^1(\mu)$ *para* y $\mu - q.t.p.$. *E as funções* φ *e* ψ *definidas em* (2.1) *são mensuráveis a* $L^1(\mu)$ *e a* $L^1(\lambda)$ *respectivamente e* (2.2) *vale.*

2.2 Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos um resumo sobre Análise Funcional, onde supomos que os leitores tenham conhecimento de Álgebra Linear, Medida e Integração e Topologia geral. Na maioria das vezes X, Y, Z entre outros, denotarão espaços vetoriais e ξ, η, ζ entre outros, denotarão seus elementos. $\mathcal{N}, \mathcal{B}$, e $\mathcal{H}$ denotarão os espaços normado, de Banach e de Hilbert, respectivamente. Para mais detalhes e demonstrações aqui apresentadas indicamos [7, 8]

Definição 2.2.1. *Uma norma em um espaço vetorial* X *sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *é uma aplicação* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *que satisfaz*

(i) $\|\xi\| \geq 0$, *para todo* $\xi \in X$, *e* $\|\xi\| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$, *para todo* $\xi \in X$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$.

(iii) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, *para todos* $\xi, \eta \in X$.

Logo, um espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de *espaço normado*, e denotamos por $(X, \|\cdot\|)$.

Consequentemente, um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$ é convergente.

Definição 2.2.2. *Um produto interno no espaço vetorial* X *é um função de* $X \times X \to \mathbb{F}$, $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$, *de maneira que para quaisquer* $\xi, \eta, \zeta \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{F}$ *as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\langle \alpha\xi + \eta, \zeta \rangle = \overline{\alpha}\langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$.

(ii) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$.

(iii) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ *e* $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

Um espaço vetorial X com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *espaço produto interno* e geralmente é denotado por $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Com isso temos que um *espaço de Hilbert* é um espaço produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno, a saber $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

Os espaços de Hilbert formam a classe mais importante de Espaços de Banach, e além disso, constituem exemplos importantes de espaços reflexivos. Em um espaço de Hilbert, valem as desigualdades:

Proposição 2.2.3. *Seja* X *um espaço com produto interno. Então para* $\xi, \eta \in X$ *temos*

(i) ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)***

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \, \|\eta\|,$$

onde $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$.

(ii) ***(Desigualdade Triangular)***

$$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|.$$

Teorema 2.2.4. *Seja* $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *um operador linear. Então as seguintes são equivalentes:*

(i) $\sup\limits_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| < \infty$, *ou seja, a bola unitária é limitada.*

(ii) *Existe* $C > 0$ *tal que* $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1$.

(iii) T *é uniformemente contínuo.*

(iv) T *é contínuo.*

(v) T *é contínuo em* 0.

Definição 2.2.5. *Um operador linear contínuo é também chamado de limitado, e o conjunto dos operadores limitados de* $\mathcal{N}_1$ *em* $\mathcal{N}_2$ *será denotado por* $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Note que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial com as operações pontuais e

$$\|T\| := \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{N}_1 \\ \|\xi\| \leq 1}} \|T\xi\|$$

é uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Proposição 2.2.6. *Se $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é um operador linear e $\dim \mathcal{N}_1 < \infty$, então T é um operador limitado.*

Teorema 2.2.7. *Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado e $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, então $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é Banach.*

Definição 2.2.8. *Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(\mathcal{N}, \mathbb{F})$ será denotado por $\mathcal{N}^*$ e chamado de espaço dual de $\mathcal{N}$. Cada elemento de $\mathcal{N}^*$ é chamado de funcional linear contínuo em $\mathcal{N}$.*

Teorema 2.2.9. ***(Princípio da Limitação Uniforme)*** *Toda família $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de operadores em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ que é pontualmente limitada, ou seja, para cada $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se*

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha \xi\| < \infty,$$

é uniformemente limitada, isto é,

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| < \infty.$$

Corolário 2.2.10. ***(Teorema de Banach-Steinhaus)*** *Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ de modo que, para todo $\xi \in \mathcal{B}$, existe o limite*

$$T\xi := \lim_{n \to \infty} T_n \xi.$$

Então $\sup_n \|T_n\| < \infty$ e T é um operador em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$.

Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Uma *base ortonormal* de $\mathcal{H}$ é um conjunto ortonormal total, ou seja, onde $\overline{\mathrm{Lin}\left(\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}\right)} = \mathcal{H}$. Diante disso, dois fatos importantes seguem:

(i) (***Desigualdade de Bessel***) Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então para cada $\xi \in \mathcal{H}$ temos

$$\|\xi\|^2 \geq \sum_{\alpha\in J} |\langle \xi_\alpha, \xi\rangle|^2.$$

(ii) (***Identidade de Parseval***) Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma base ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então para cada $\xi \in \mathcal{H}$ temos

$$\|\xi\|^2 = \sum_{\alpha\in J} |\langle \xi_\alpha, \xi\rangle|^2.$$

Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é dito *separável* se possui uma base ortonormal contável.

Teorema 2.2.11. *(**Teorema da Representação de Riesz**) Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ seu dual. A aplicação $\gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, $\gamma(\xi) = f_\xi$, para cada $\xi \in \mathcal{H}$, dada por*

$$\gamma(\xi)(\eta) = f_\xi(\eta) = \langle \xi, \eta\rangle, \ \forall \eta \in \mathcal{H},$$

é uma isometria antilinear e sobrejetora em $\mathcal{H}^*$.

Este é um importante resultado de Análise Funcional que diz que cada elemento de $\mathcal{H}^*$ é identificado com um único $\xi \in \mathcal{H}$ via f_ξ e $\|f_\xi\| = \|\xi\|$. Note que através deste teorema pode-se provar que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Teorema 2.2.12. *(**Teorema da Aplicação Aberta**) Se $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e $\operatorname{img} T = \mathcal{B}_2$, então T é uma aplicação aberta.*

Corolário 2.2.13. *Se $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é uma bijeção entre $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, então T^{-1} também é uma aplicação linear contínua, isto é, $T^{-1} \in B(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.*

Definição 2.2.14. *O gráfico de um operador linear $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é o subespaço vetorial $\mathcal{G}(T) = \{(\xi, T\xi) : \xi \in \operatorname{dom} T\}$ de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.*

Definição 2.2.15. *Um operador linear $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é fechado se para toda sequência $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$ convergente, $\xi_n \to \xi \in \mathcal{N}_1$, com $(T\xi_n) \subset \mathcal{N}_2$ também convergente, $T\xi_n \to \eta$, tenha-se $\xi \in \operatorname{dom} T$ e $\eta = T\xi$. Em outras palavras, T é fechado se, e somente se, $\mathcal{G}(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.*

Teorema 2.2.16. *(**Teorema do Gráfico Fechado**) Se $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ é um operador linear, então T é contínuo se, e somente se, T é fechado.*

Note que os operadores T, para os quais $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é o gráfico de uma extensão linear $\overline{T}$ de T, são chamados de operadores fecháveis e $\overline{T}$ é seu fecho.

Definição 2.2.17. *Um operador linear $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é compacto, se a imagem $T(M)$, de todo subconjunto limitado $M \subset \mathcal{N}_1$, é precompacto em $\mathcal{N}_2$. O conjunto desses operadores compactos é denotado por $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.*

De forma equivalente, $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ linear é compacto se $(T\xi_n)$ possui subsequência convergente em $\mathcal{N}_2$ para toda sequência limitada $(\xi_n) \subset \mathcal{N}_1$.

Proposição 2.2.18. *Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ espaços normados e T, S operadores lineares entre espaços normados. Então*

(i) *$B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um subespaço vetorial de $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.*

(ii) *Se T é compacto e S limitado, então TS e ST são operadores compactos.*

Definição 2.2.19. *Um operador $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é dito ser de posto finito se* $\dim \operatorname{img} T < \infty$*. O espaço vetorial dos operadores de posto finito entre esses espaços será denotado $B_f(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.*

Proposição 2.2.20. *Todo operador de posto finito é compacto. Em particular $\mathcal{N}^* = B_0(\mathcal{N}, \mathbb{F})$.*

Teorema 2.2.21. *$B_0(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é um subespaço fechado de $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Portanto $B_0(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é um espaço de Banach.*

Corolário 2.2.22. *Se $(T_n) \subset B_f(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ e $(T_n) \to (T)$ em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$, então o operador T é compacto.*

Definição 2.2.23. *Seja (T_n) uma sequência de operadores em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $T : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ linear. Então*

(i) T_n *converge uniformemente, ou em norma, para* T *se*

$$\|T_n - T\| \to 0.$$

Denotamos essa convergência por $T_n \to T$ *ou* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

(ii) T_n *converge fortemente para* T *se*

$$\|T_n\xi - T\xi\|_{\mathcal{N}_2} \to 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Denotamos essa convergência por $s - \lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ *ou* $T_n \xrightarrow{s} T$.

(iii) T_n *converge fracamente para* T *se*

$$|f(T_n\xi) - f(T\xi)| \to 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1, \forall f \in \mathcal{N}_2^*.$$

Denotamos essa convergência por $w - \lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ *ou* $T_n \xrightarrow{w} T$.

Proposição 2.2.24. *Se* $(T_n) \subset B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ *converge fortemente para* $T : \mathcal{B} \to \mathcal{N}$, *então* $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$.

Proposição 2.2.25. *Seja* $T \in B_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. *Se* $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ *em* $\mathcal{H}_1$, *então* $T\xi_n \to T\xi$, *isto é, o operador compacto leva sequências fracamente convergentes em fortemente convergentes.*

Teorema 2.2.26. *Um operador* $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *é compacto se, e somente se, existe uma sequência de operadores de posto finito* $(T_n) \subset B_f(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *com* T *convergindo em* $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Corolário 2.2.27. *Seja* $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. *Então* T *é compacto se, e somente se, o adjunto de Hilbert* T^* *é compacto.*

Proposição 2.2.28. *Seja* $T \in B(\mathcal{H})$ *um operador linear. Então* T *é compacto se, e somente se,* $(T\xi_n)$ *converge em* $\mathcal{H}$, *para toda* (ξ_n) *fracamente convergente.*

Proposição 2.2.29. *Seja* $S_n, S \in B(\mathcal{H})$ *com* $S_n \xrightarrow{s} S$. *Se* T *é um operador compacto, então* $TS_n \to TS$ *e* $S_nT \to ST$ *em norma para* $B(\mathcal{H})$.

O espectro é uma generalização do conjunto dos autovalores de operadores lineares (veja [7]). A questão espectral está diretamente relacionada à solubilidade e unicidade de soluções de equações lineares em espaços de Banach e especialmente ao aparato matemático da mecânica quântica. A partir de agora denotaremos por I o operador identidade.

Definição 2.2.30. *Seja $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador linear no espaço complexo de Banach $\mathcal{B} \neq \{0\}$. O conjunto resolvente de T, denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais os operadores resolventes de T em λ,*

$$R_\lambda(T) : \mathcal{B} \to \operatorname{dom} T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$$

existe e é limitada, isto é, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$.

Definição 2.2.31. *O Espectro de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.*

Note que:

(i) Se $T \in B(\mathcal{B})$ e $(T - \lambda I)$ é injetor com $\operatorname{img}(T - \lambda I) = \mathcal{B}$, então pelo Teorema da Aplicação Aberta, $R_\lambda(T) = (T - \lambda I) \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) Todo autovalor λ de T (isto é, $\exists \xi \neq 0$ com $T\xi = \lambda\xi$) pertence ao espectro de T. Podemos denotar $R_\lambda = R_\lambda(T)$.

Proposição 2.2.32. *Se $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$, então T é um operador fechado.*

Proposição 2.2.33. *Sejam $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ e $S : \operatorname{dom} S \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ operadores lineares. Então para qualquer $z, s \in \rho(T)$ temos:*

(i) ***Primeira identidade do resolvente***

$$R_z(T) - R_s(T) = (z - s) R_z(T) R_s(T).$$

Além disso, $R_z(T)$ comuta com $R_s(T)$.

(ii) ***Segunda identidade do resolvente***

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T) R_\lambda(S).$$

(iii) ***Terceira identidade do resolvente***

$$R_z(T) - R_z(S) = (I + (z - z_0)R_z(T))\,[R_{z_0}(T) - R_{z_0}(S)]\,(I + (z - z_0)R_z(S)).$$

Corolário 2.2.34. *$\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{C}$.*

Corolário 2.2.35. *A aplicação $\rho(T) \to B(\mathcal{B})$ dada por $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ é contínua e uniformemente holomorfa, isto é, possui derivada em $B(\mathcal{B})$ definida pelo limite*

$$\frac{dR_\lambda(T)}{d\lambda} := \lim_{h \to 0} \frac{R_{\lambda+h}(T) - R_\lambda(T)}{h} = R_\lambda(T)^2,$$

para todo λ numa vizinhança de cada ponto $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Corolário 2.2.36. *Se $\rho(T)$ e $\sigma(T)$ são não vazios, então*

$$\|R_\lambda(T)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}, \quad \forall \lambda \in \rho(T).$$

Corolário 2.2.37. *Seja $T \in B(\mathcal{B})$. Se $|\lambda| > \|T\|$, então $\lambda \in \rho(T)$ e $\|R_\lambda(T)\| \to 0$, quando $|\lambda| \to \infty$.*

Corolário 2.2.38. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Definição 2.2.39. *O raio espectral de um operador limitado $T \in B(\mathcal{B})$ é*

$$r_\sigma(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Teorema 2.2.40. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então*

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

Agora apresentaremos um resultado para operadores compactos. Note que a definição de operador autoadjunto somente será dada no próximo capítulo, (veja 3.1.4).

O Teorema Espectral para operadores $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ compactos afirma que:

Teorema 2.2.41. *Seja T um operador autoadjunto e compacto em $\mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$ o conjunto de autovalores de T e P_j a projeção ortogonal sobre $N(T_{\lambda_j}), \forall j$. Então*

$$T = \sum_j \lambda_j P_j,$$

onde essa série converge em norma para $B(\mathcal{H})$.

Neste capítulo ainda é interessante relembrar que, dois elementos ξ, η em um espaço produto interno X são ortogonais se $\langle \xi, \eta \rangle = 0$, e denotamos $\xi \perp \eta$. Se E, F são subconjuntos de X, então $E \perp F$ indica que $\xi \perp \eta$ sempre que $\xi \in E$ e $\eta \in F$; se, além disso, E e F forem subespaços vetoriais, diz-se que eles são ortogonais. Ainda, denota-se por $E^{\perp}$ o conjunto de todos os vetores de X ortogonais a E, ou seja, $E^{\perp} = \{\xi \in X : \langle \xi, \eta \rangle = 0, \ \forall \eta \in E\}$.

Definição 2.2.42. *Um espaço vetorial X é a soma direta de dois de seus subespaços X_1, X_2, o que se denota por*

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

se todo $\xi \in X$ possui uma representação única

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in X_1, \ \xi_2 \in X_2.$$

Teorema 2.2.43. ***(Projeção Ortogonal)*** *Se E é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}.$$

Por isso $E^{\perp}$ é chamado de complemento ortogonal do subespaço E em $\mathcal{H}$.

Definição 2.2.44. *Para funções $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de uma função como*

$$(\mathcal{F}\psi)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixt} \psi(x) \ dx.$$

A transformada de Fourier pode ser vista como um operador linear limitado $\mathcal{F} : L^1(R^n) \cap L^2(R^n) \to L^2(R^n)$. Como $L^1(R^n) \cap L^2(R^n)$ é denso em $L^2(R^n)$, $\mathcal{F}$ possui uma única extensão para todo $L^2(R^n)$ e tem-se

Teorema 2.2.45. ***(Teorema de Plancherel)*** *A transformada de Fourier $\mathcal{F} = \widehat{\ }: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 2.2.46. *Para medidas μ positivas e finitas em $\mathbb{R}$, definimos a transformada de Fourier de uma medida como*

$$(\mathcal{F}\mu)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \ d\mu(x).$$

Usualmente existem duas notações para a transformada de Fourier, a saber, $(\mathcal{F}\mu)(t) = \widehat{\mu}$

Definição 2.2.47. *Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$, o suporte dessa medida é dado pelo conjunto*

$$\operatorname{supp}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} : \mu(V) > 0,\ \forall V\},$$

sendo V uma vizinhança de x.

Capítulo 3

O Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos

Neste capítulo apresentamos os conceitos de operador adjunto e autoadjunto para operadores lineares não necessariamente contínuos. Apresentaremos também o Teorema Espectral para operadores autoadjuntos e algumas de suas consequências e aplicações (veja [7]). A partir de agora os espaços de Hilbert serão supostos separáveis e complexos. Usaremos a notação $A \sqsubseteq B$ para indicar que A é um subconjunto denso de B e I é o operador identidade.

3.1 Operador Adjunto

Definição 3.1.1. *Um operador linear* $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é simétrico se*

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle$$

para todo $\xi, \eta \in \operatorname{dom} T$*. Então* T *é hermitiano se, é simétrico e* $\operatorname{dom} T$ *é denso em* $\mathcal{H}$*.*

Seja $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ e defina $\operatorname{dom} T^*$ como o espaço vetorial formado pelos elementos $\eta \in \mathcal{H}_2$, tal que o funcional linear $\xi \mapsto \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \xi \in \operatorname{dom} T$, pode ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}_1$, ou seja $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle$, para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$.

Definição 3.1.2. *O adjunto de T é o operador T^* com domínio* $\operatorname{dom} T^*$ *definido acima, e para $\eta \in \operatorname{dom} T^*$, $T^*\eta = \zeta$. Assim,*

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T,\ \forall \eta \in \operatorname{dom} T^*.$$

Observações:

(i) É essencial que $\operatorname{dom} T$ seja denso em $\mathcal{H}$ para T^* estar bem definido.

(ii) T^* é um operador linear.

(iii) Se S e T são operadores lineares e $z \in \mathbb{C}$ então $(S + zT)^* = S^* + \overline{z}T^*$.

(iv) Dados dois operadores R, S, então $S \subset R$ indica que R é uma extensão de S. Um operador $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é hermitiano se, e somente se $T \subset T^*$.

Proposição 3.1.3. *Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $T^{**} = T$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Assim $\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle$, para todo $\xi \in \mathcal{H}_1$, e para todo $\eta \in \mathcal{H}_2$.*

Demonstração. Para T um operador limitado temos que $\operatorname{dom} T^* = \mathcal{H}_2$. Pelo Teorema de Riesz para cada $\xi_2 \in \mathcal{H}_2$ temos $f_{T^*\xi_2} \in \mathcal{H}_1^*$ e

$$\begin{aligned}
\|T^*\xi_2\| &= \|f_{T^*\xi_2}\| \\
&= \sup_{\|\xi_1\|=1} |f_{T^*\xi_2}(\xi_1)| \\
&= \sup_{\|\xi_1\|=1} |\langle T^*\xi_2, \xi_1 \rangle| \\
&= \sup_{\|\xi_1\|=1} |\langle \xi_2, T\xi_1 \rangle| \\
&\leq \|T\|\|\xi_2\|,
\end{aligned}$$

assim $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Agora da definição de operador adjunto temos que

$$\langle T^*\xi_2, \xi_1 \rangle = \langle \xi_2, T\xi_1 \rangle, \ \ \forall \xi_1 \in \mathcal{H}_1, \forall \xi_2 \in \mathcal{H}_2,$$

e assim $T^{**} = T$. Desse modo, $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$. Portanto,

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

■

Definição 3.1.4. (i) *Um operador linear* $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é autoadjunto se* $T = T^*$.

(ii) *Um operador linear limitado* $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *é unitário se* $\operatorname{img} T = \mathcal{H}_2$*, ou seja, é bijetor e* $T^* = T^{-1}$.

Lema 3.1.5. $\mathcal{G}(T^*) = (J\mathcal{G}(T))^\perp$ *em* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*, com* $J(\xi, \eta) = (-\eta, \xi)$ *um operador unitário.*

Demonstração. Pelas relações de equivalência temos que

$$\begin{aligned}
(\eta, \phi) \in \mathcal{G}(T^*) &\Leftrightarrow \langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \phi\rangle, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow \langle (-T\xi, \xi), (\eta, \phi)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow \langle J(\xi, T\xi), (\eta, \phi)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0, \ \forall \xi \in \operatorname{dom} T \\
&\Leftrightarrow (\eta, \phi) \in (J\mathcal{G}(T))^\perp.
\end{aligned}$$

Portanto segue a afirmação. ■

Corolário 3.1.6. (i) *Seja* $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear. Então* T^* *é um operador fechado, em particular, todo operador autoadjunto é fechado.*

(ii) *Todo operador hermitiano é fechável e seu fecho é hermitiano.*

Demonstração. (i) Temos que $\mathcal{G}(T^*)$ é um subespaço fechado, pois é o complemento ortogonal de um conjunto pelo Lema 3.1.5. Segue assim que T^* é um operador fechado.
(ii) Por hipótese T é hermitiano, então $T \subset T^*$ e como T^* é um operador fechado por (i), segue que T é fechável. Agora vamos mostrar que $\overline{T}$ é hermitiano. Como $\operatorname{dom} T$ é denso em $\mathcal{H}$, basta mostrar que $\overline{T}$ é simétrico.

Sejam $\xi, \zeta \in \operatorname{dom} \overline{T}$, e tome $(\xi_n), (\zeta_n) \subset \operatorname{dom} T$ com $\xi_n \to \xi$, $\zeta_n \to \zeta$ e $T\xi_n \to \overline{T}\xi$, $T\zeta_n \to \overline{T}\zeta$. Temos então

$$\begin{aligned}
\langle \overline{T}\zeta, \xi\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} T\zeta_n, \lim_{n\to\infty} \xi_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle T\zeta_n, \xi_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \zeta_n, T\xi_n\rangle = \langle \zeta, \overline{T}\xi\rangle.
\end{aligned}$$

Segue assim que $\overline{T}$ é hermitiano. ■

Corolário 3.1.7. **(i)** *Seja* $T : \mathrm{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear. Então* T *é fechável se, e somente se,* $\mathrm{dom}\, T^*$ *é denso em* $\mathcal{H}$*. Neste caso,*

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \overline{J\mathcal{G}(T)} \oplus \mathcal{G}(T^*) = \overline{\mathcal{G}(T)} \oplus J\mathcal{G}(T^*)$$

e

$$T^{**} = \overline{T}.$$

(ii) *Se* T *é fechável, então* $(\overline{T})^* = T^*$.

Demonstração. (i) Como J é únitário e $J^2 = -I$, se T é fechável, então $\overline{\mathcal{G}(T)}$ e $\overline{J\mathcal{G}(T)}$ são subespaços fechados e

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &= J\overline{\mathcal{G}(T)} \oplus (J\overline{\mathcal{G}(T)})^{\perp} \\ &= \overline{J\mathcal{G}(T)} \oplus \mathcal{G}(T^*) \\ &= \overline{\mathcal{G}(T)} \oplus J\mathcal{G}(T^*). \end{aligned}$$

Seja $\zeta \in (\mathrm{dom}\, T^*)^{\perp}$. Assim $\langle \xi, \zeta \rangle = 0 = \langle T^*\xi, 0 \rangle$, $\forall \xi \in \mathrm{dom}\, T^*$, isto é o mesmo que $\langle \xi, \zeta \rangle + \langle -T^*\xi, 0 \rangle = 0$, para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T^*$. Isso implica que $\langle (0,\zeta), (-T^*\xi, \xi) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0$, para todo $\xi \in \mathrm{dom}\, T^*$. E assim $(0, \zeta) \in (J\mathcal{G}(T^*))^{\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)}$. Logo $\overline{T}(0) = \zeta = 0$. Portanto $(\mathrm{dom}\, T^*)^{\perp} = \{0\}$, e assim $\mathrm{dom}\, T^*$ é denso em $\mathcal{H}$.

Reciprocamente, se $\mathrm{dom}\, T^*$ é denso em $\mathcal{H}$, os mesmos argumentos mostram que nenhum $\zeta \neq 0$ satisfaz $(0, \zeta) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$. Isso mostra que $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é gráfico de algum operador e portanto T é fechável. Além disso, usando o Lema 3.1.5, se T é fechável, T^{**} está bem definido e $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = J\mathcal{G}(T^*) \oplus \mathcal{G}(T^{**})$. E como $G(T^{**}) = (J\mathcal{G}(T^*))^{\perp} = \overline{G(T)}$ e assim $T^{**} = \overline{T}$.

(ii) Pelo Corolário 3.1.6(i) temos que $T^* = \overline{T^*}$ e por (i) desse corolário segue que

$$T^* \;=\; \overline{T^*} = T^{***} = (\overline{T})^*.$$

■

Definição 3.1.8. *Um operador hermitiano* T *é essencialmente autoadjunto se* $\overline{T}$ *é auto-adjunto.*

Note que se T, S são operadores lineares e $S \subset T$ temos $T^* \subset S^*$, então se T é um operador hermitiano segue que $\overline{T} = T^{**} \subset T^*$.

Além disso, se A é uma extensão auto-adjunta do operador hermitiano T, isto é, $T \subset A$, então $A = A^* \subset T^*$, consequentemente T^* é uma extensão de todas as extensões auto-adjuntas de T. Agora se T é essencialmente autoadjunto com $T \subset A$, temos

$$A \subset T^* \Rightarrow \overline{T} = T^{**} \subset A \Rightarrow A \subset \overline{T}^* = \overline{T},$$

de modo que, $\overline{T} = A$.

Teorema 3.1.9. *Seja T um operador hermitiano. Então*

(i) *T^* é uma extensão de todas as extensões auto-adjuntas de T.*

(ii) *Se T é essencialmente autoadjunto, então T possui apenas uma extensão auto-adjunta.*

(iii) *T é essencialmente autoadjunto se, e somente se, T^* é hermitiano, e neste caso $\overline{T} = T^{**} = T^*$.*

Demonstração. Diante do que já foi discutido acima, vamos demonstrar apenas (iii).

Se T é essencialmente autoadjunto, então $T^* = \overline{T}^* = \overline{T} = T^{**}$ e T^* é autoadjunto, assim $\overline{T} = T^{**} = T^*$. Logo T^* é hermitiano.

Agora assuma que T^* é hermitiano, temos assim que $T^* = \overline{T}^*$ e como $\overline{T}$ é hermitiano temos que $\overline{T} \subset \overline{T}^* = T^* \subset T^{**} = \overline{T}$, e desse modo $\overline{T} = \overline{T}^*$. Logo T é essencialmente autoadjunto. ■

Proposição 3.1.10. ***(Hellinger - Toeplitz)*** *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear com*

$$\langle T\eta, \xi \rangle = \langle \eta, T\xi \rangle,$$

para todo $\eta, \xi \in \mathcal{H}$. Então $T \in B(\mathcal{H})$ e é autoadjunto.

Demonstração. Suponha que T não é limitado, então existe uma sequência (ξ_n) em $\mathcal{H}$ com $\|\xi_n\| = 1$ para todo n, de forma que $\|T\xi_n\| \to \infty$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada n, o funcional linear $f_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, dado por $f_n(\xi) = \langle T\xi_n, \xi \rangle = \langle \xi_n, T\xi \rangle$

é limitado já que

$$|f_n(\xi)| \leq \|T\xi_n\|\|\xi\|, \; \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Novamente por Cauchy-Schwarz tem-se que

$$|f_n(\xi)| = |\langle \xi_n, T\xi \rangle| \leq \|\xi_n\|\|T\xi\| = \|T\xi\|.$$

Segue então que para cada $\xi \in \mathcal{H}$ a sequência $\{f_n(\xi)\}$ é limitada e pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe uma constante $c > 0$ de modo que $\|f_n\| \leq c$, para todo n.

Assim,

$$\begin{aligned} \|T\xi_n\|^2 &= \langle T\xi_n, T\xi_n \rangle \\ &= f_n(T\xi_n) \leq \|f_n\|\|T\xi_n\| \\ &\leq c\|T\xi_n\|. \end{aligned}$$

Logo $\|T\xi_n\| \leq c$, para todo n, o que contradiz o fato de $\|T\xi_n\| \to \infty$. Portanto T é limitado e segue diretamente da definição que T é autoadjunto. ∎

Os seguintes resultados são importantes ferramentas usadas para garantir que um operador hermitiano possua extensão(ões) auto-adjunta(s). Suas demonstrações podem ser encontradas em [7].

Teorema 3.1.11. *Se $\mathcal{H}$ tem uma base ortonormal de autovetores de um operador simétrico, $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, então T é essencialmente autoadjunto e $\sigma(\overline{T})$ é o fecho do conjunto dos autovalores de T.*

Definição 3.1.12. *Seja T um operador hermitiano. Os subespaços lineares fechados $K_\pm(T) := N(T^* \pm iI) = (\mathrm{img}(T \mp iI))^\perp$ são os subespaços de deficiência de T e os números inteiros, dados respectivamente por suas dimensões,*

$$n_+(T) := \dim N(T^* + iI) = \dim(\mathrm{img}\ (T - iI))^\perp,$$

e

$$n_-(T) := \dim N(T^* - iI) = \dim(\mathrm{img}\ (T + iI))^\perp,$$

são os índices dos subespaços de deficiência.

Teorema 3.1.13. *(**Teorema de Von Neumann**) Seja T um operador hermitiano com* $\text{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H}$ *e $\overline{T}$ seu fecho. Então,*

(i) *T é um operador essencialmente autoadjunto se, e somente se, $n_+ = n_- = 0$.*

(ii) *T possui uma extensão auto-adjunta se, e somente se, $n_+ = n_-$.*

Proposição 3.1.14. *(**Proposição de Von Neumann**) Se T é um operador hermitiano e existe uma conjugação, isto é, uma isometria $\mathcal{C} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ antilinear com $\mathcal{C}^2 = I$, tal que $\mathcal{C}(\text{dom}\, T) \subset (\text{dom}\, T)$ e $\mathcal{C}$ comuta com T, então T tem uma extensão auto-adjunta.*

Teorema 3.1.15. *Seja T um operador hermitiano fechado. Então T é autoadjunto se, e somente se, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Neste caso, para $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, temos*

$$\|R_z(T)\| \leq \frac{1}{|\text{Im}\, z|},$$

e

$$R_z(T)^* = R_{\overline{z}}(T),$$

onde $Im\ z$ é a parte imaginária de z. Por outro lado, se $0 \neq y \in \mathbb{R}$, então $\|TR_{iy}(T)\| \leq 1$.

Exemplo 3.1.16. ***Operador de Schrödinger***

Considere $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e Δ o Laplaciano usual. O domínio do operador é $\text{dom}\, H = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \sqsubseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$(H\psi)(x) = -(\Delta\psi)(x) + V(x)\psi(x), \quad \psi \in \text{dom}\, H,$$

isto é, $H = -\Delta + V$ é hermitiano e possui extensão auto-adjunta. De fato, $\text{dom}\, H$ *é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e aplicando a Proposição 3.1.14 com $\mathcal{C}$ sendo uma conjugação complexa, segue o resultado. Aqui V é chamado de potencial e $-\Delta$ representa a energia cinética quântica. Estas extensões auto-adjuntas são candidatas ao operador de energia quântica. Note que $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é uma requisito mínimo para V_ψ ser um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n)$, com $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 3.1.17. ***Operador Multiplicação***

Seja μ um medida de Borel positiva sobre um espaço métrico X obedecendo $\mu(E) < \infty$

para todo conjunto de Borel limitado $E \subset X$. Fixe um conjunto de Borel E e seja $\varphi : E \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Defina o operador multiplicação por φ como o operador linear

$$\text{dom } \mathcal{M}_\varphi := \left\{\psi \in L^2_\mu(E) : (\varphi\psi) \in L^2_\mu(E)\right\},$$

$$(\mathcal{M}_\varphi\psi)(x) := \varphi(x)\psi(x), \qquad \psi \in \text{dom } \mathcal{M}_\varphi.$$

Um exemplo muito importante de um operador multiplicação é a energia potencial $\mathcal{M}_V$, com $V : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, que geralmente será denotado simplesmente por V. A energia mecânica total é $H = H_0 + V$, com $H_0 = -\Delta$ denotando a energia cinética quântica. Esse H é comumente referido como o operador de Schrödinger padrão.

Observe que: dom $\mathcal{M}_\varphi$ é denso em $L^2_\mu(E)$ e $\mathcal{M}_\varphi{}^* = \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$.
De fato, seja $\phi \in (\text{dom } \mathcal{M}_\varphi)^\perp$ e $E_n := |\varphi|^{-1}([0, n))$, que é mensurável. Se $\phi_n = \chi_{E_n}\phi$, então $\phi_n \in \text{dom } \mathcal{M}_\varphi$ e

$$0 = \langle \phi, \phi_n \rangle = \int_{E_n} |\phi|^2 \, d\mu,$$

para $\phi_n = 0$ $\mu - q.t.p.$. Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{E_n} |\phi|^2 \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |\phi|^2 \, d\mu = 0$$

e então $\phi = 0$, segue assim que $\mathcal{M}_\varphi$ é denso em $L^2_\mu(E)$.

Portanto, o operador autoadjunto $\mathcal{M}_\varphi{}^*$ está bem definido e se $f \in \text{dom } \mathcal{M}_\varphi{}^*$, existe $g \in L^2_\mu(E)$ com

$$\int_E \overline{\overline{\varphi} f}\psi \, d\mu = \int_E \overline{f}\varphi\psi \, d\mu = \langle f, \mathcal{M}_\varphi\psi \rangle = \langle g, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \text{dom } \mathcal{M}_\varphi.$$

O objetivo agora é verificar que $\mathcal{M}_{\overline{\varphi}} f \in L^2_\mu(E)$. Defina $f_n = \chi_{E_n} f \in \text{dom } \mathcal{M}_{\overline{\varphi}} = \text{dom } \mathcal{M}_\varphi$, e então

$$\int_E \left(\overline{\varphi} f_n - \mathcal{M}_\varphi{}^* f_n\right)\psi \, d\mu = 0,$$

e tomando ψ convenientemente, obtém-se

$$\int_{E_n} |\overline{\varphi} f - \mathcal{M}_\varphi{}^* f|\psi \, d\mu = 0,$$

de modo que para $\mu - q.t.p$ em E_n, temos

$$\int_E (\overline{\varphi} f_n - \mathcal{M}_\varphi{}^* f_n)\, \psi \; d\mu = 0$$

e

$$(\mathcal{M}_\varphi{}^* f)\,(x) = \overline{\varphi(x)} f(x).$$

Assim sendo,

$$f \in \operatorname{dom} \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}, \quad \mathcal{M}_{\overline{\varphi}} f = g = \mathcal{M}_\varphi{}^* f,$$

e $\mathcal{M}_{\overline{\varphi}} = \mathcal{M}_\varphi{}^*$.

Destacamos ainda que, $\mathcal{M}_\varphi$ é autoadjunto se, e somente se φ é uma função real.

Definição 3.1.18. *Seja T um operador linear em $\mathcal{H}$. Uma sequência $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$, é uma sequência de Weyl para T em $z \in \mathbb{C}$ se*

$$\|\xi_n\| = 1, \ \forall n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} (T - zId)\, \xi_n = 0.$$

Corolário 3.1.19. *Seja $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Então $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, existe uma sequência de Weyl para T em λ.*

3.2 Teorema Espectral

No Capítulo 2, Teorema 2.2.41, apresentamos o Teorema Espectral para o caso particular de operadores compactos e autoadjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Nesta seção apresentamos a versão mais geral do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Esse teorema fornece uma descrição completa de tais operadores. Além disso, ele é um análogo, em espaços de Hilbert de dimensão infinita, do fato de que matrizes hermitianas em dimensão finita podem ser diagonalizadas.

3.2.1 Resolução da Identidade

Usaremos a notação Proj($\mathcal{H}$) para o conjunto dos operadores de projeção ortogonal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e denotaremos por $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Para conjuntos Λ_j dois a dois disjuntos o símbolo $\sum\limits_{j=1} \Lambda_j$ indicará sua união.

Definição 3.2.1. *Uma resolução da identidade (ou família espectral) em $\mathcal{H}$ é uma aplicação*

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow Proj(\mathcal{H})$$

que satisfaz

(i) $P(\mathbb{R}) = I$, onde I denota o operador identidade em $\mathcal{H}$.

(ii) Se $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$, com $\Lambda_j \in \mathcal{A}$, para todo j, então temos

$$P(\Lambda) = s - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(\Lambda_j).$$

Dada uma resolução da identidade P, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ podemos associar uma medida de Borel positiva e finita μ_ξ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{A} \ni \Lambda \mapsto \mu_\xi(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\xi \rangle.$$

Note que $\mu_\xi(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)P(\Lambda)\xi \rangle = \|P(\Lambda)\xi\|^2$, $\mu_\xi(\mathbb{R}) = \|\xi\|^2$ e μ_ξ é regular.

Também, para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, podemos associar uma medida de Borel complexa $\mu_{\xi,\eta}$ dada por

$$\mu_{\xi,\eta}(\Lambda) := \langle \xi, P(\Lambda)\eta \rangle.$$

Segue por polarização que

$$\mu_{\xi,\eta}(\Lambda) = \frac{1}{4}[\mu_{\xi+\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi-\eta}(\Lambda) + i(\mu_{\xi-i\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi+i\eta}(\Lambda))].$$

Além disso, $\mu_\xi = \mu_{\xi,\xi}$ e $|\mu_{\xi,\eta}(\Lambda)| \leq \|\xi\|\|\eta\|$.

Definição 3.2.2. *μ_ξ e $\mu_{\xi,\eta}$ são chamadas de medidas espectrais da resolução da identidade P associada com ξ e ao par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, respectivamente.*

Com tais medidas espectrais podemos integrar funções e assim definir a integral com respeito a resolução de identidade P. Para uma função mensurável simples $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Lambda_j}$, definimos

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ dP(t) = \int f\ dP := \sum_{j=1}^{n} a_j P(\Lambda_j).$$

Note que $P(\chi_\Lambda) = P(\Lambda)$, o que nos motiva a manter a mesma notação P para resolução da identidade e para as integrais. Além disso, a aplicação $f \mapsto P(f)$ é linear e satisfaz

$$\langle \xi, P(f)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\mu_\xi(t).$$

Como

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) = \|f\|^2_{L^2_{\mu_\xi}} \leq \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2\right) \|\xi\|^2,$$

segue que a aplicação linear P: funções simples $\to B(\mathcal{H})$ é contínua.

Assim, como o conjunto das funções simples com a norma da convergência uniforme é denso no conjunto das funções borelianas limitadas, que denotamos por $B^\infty(\mathbb{R})$, existe uma única extensão de P a um operador linear limitado (que continuaremos denotando por P) $P : B^\infty(\mathbb{R}) \to B(\mathcal{H})$. Em particular valem, para toda $f \in B^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \xi, P(f)\eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\mu_{\xi,\eta}(t)$$

e

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) \leq \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2\right) \|\xi\|^2.$$

Sendo assim, considerando primeiramente as funções simples e depois tomando limites, obtemos as seguintes propriedades:

Propriedade 3.2.3. *Para $f, g \in B^\infty(\mathbb{R})$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ temos*

1. $d\mu_{P(g)\xi, P(f)\eta} = \overline{g} f d\mu_{\xi,\eta}(t)$.
2. $\langle P(g)\xi, P(f)\eta \rangle = \int \overline{g(t)} f(t) d\mu_{\xi,\eta}(t)$.
3. $P(fg) = P(f)P(g) = P(g)P(f)$.
4. $P(\overline{f}) = P(f)^*$ *(e portanto para funções f a valores reais, o operador $P(f)$ é limitado e autoadjunto).*

5. $P(f)^*P(f) = P(|f|^2) = P(f)P(f)^*$.

6. $P(1) = 1$ (*1 denota a função constante :* $1(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$) *e se* f *é invertível com* $f^{-1} \in B^\infty(\mathbb{R})$, *então* $P(f^{-1}) = P(f)^{-1}$.

Lema 3.2.4. *Se* P *é uma resolução da identidade, considere a aplicação* $P : B^\infty(\mathbb{R}) \to B(\mathcal{H})$. *Se* $(f_n) \subset B^\infty(\mathbb{R})$ *com* $(\|f_n\|_\infty)$ *uma sequência limitada e* $f_n \to f$ *pontualmente, então* $f \in B^\infty(\mathbb{R})$ *e* $s - \lim\limits_{n\to\infty} P(f_n) = P(f)$.

Demonstração. Uma verificação direta mostra que $f \in B^\infty(\mathbb{R})$, pois $|f(x)| = |\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| < c$. Se $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|P(f_n)\xi - P(f)\xi\|^2 &= \|(P(f_n) - P(f))\xi\|^2 \\ &= \|P(f_n - f)\xi\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|^2 \ d\mu_\xi(t) \to 0\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada. Note que, se $f_n \to f$ na norma de $B^\infty(\mathbb{R})$, isto é, converge uniformemente, o resultado é imediato. ■

Agora, vamos estender a aplicação P para funções de Borel não limitadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boreliana seja

$$\text{dom } f := \{\xi \in \mathcal{H} : f \in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})\} = \{\xi \in \mathcal{H} : \int |f|^2 d\mu_\xi < \infty\},$$

que é um subespaço vetorial de $\mathcal{H}$.

Seja $\Lambda_n = \Lambda_n(f) := \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq n\}$ e $f_n := f\chi_{\Lambda_n}$. Para $\xi \in \text{dom } f$ tem-se $f_n \to f$ em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ pelo Teorema da Convergência Dominada. Daí temos que (f_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$. Como $(f_n) \in B^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|P(f_n)\xi\|^2 = \int |f_n|^2 \ d\mu_\xi = \|f_n\|^2_{L^2_{\mu_\xi}}, \tag{3.1}$$

concluímos que $(P(f_n)\xi)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$ que converge a um vetor $P(f)\xi$. Definimos assim $P(f)\xi = \lim(P(f_n)\xi)$ com $\text{dom } P(f) = \text{dom } f$.

Ainda continuaremos usando a notação $P(f) := \int f \ dP$ e fazendo $n \to \infty$ em (3.1) temos

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int |f|^2 d\mu_\xi = \|f\|^2_{L^2_{\mu_\xi}}.$$

Lema 3.2.5. *Para cada função de Borel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *temos que* dom $f \sqsubseteq \mathcal{H}$. *Assim* $P(f)^*$ *está bem definido.*

Demonstração. Seja Λ_n como acima. Se $\xi \in \mathcal{H}$, considerando $\xi_n = P(\Lambda_n)\xi$ tem-se que $\mu_{\xi_n} = \chi_{\Lambda_n}\mu_\xi$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_{\xi_n}(t) = \int_{\Lambda_n} |f(t)|^2 \, d\mu_\xi(t) \leq n^2 \|\xi\|^2 < \infty,$$

e então $\xi_n \in \text{dom } f$.

Como $\chi_{\Lambda_n} \to 1$ em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$, e

$$\|\xi - \xi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |1 - \chi_{\Lambda_n}(t)|^2 \, d\mu_\xi,$$

obtemos que $\xi_n \to \xi$ em $\mathcal{H}$ pelo Teorema da Convergência Dominada. Isso mostra que dom f é denso em $\mathcal{H}$ e segue o resultado. ■

Definição 3.2.6. *Um operador linear* $T : \text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é normal se* dom $T =$ dom T^* *e* $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$, *para todo* $\xi \in \text{dom } T$.

Valem as seguintes propriedades para P:

Proposição 3.2.7. *Seja* P *uma resolução da identidade.*

(a) *Para toda função de Borel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o operador* $P(f)$ *é normal, fechado e* $P(f)^* = P(\overline{f})$.

(b) *Para toda função de Borel a valores reais* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *o operador* $P(f)$ *é autoadjunto.*

(c) *Se* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *são funções de Borel e* $a, b \in \mathbb{C}$ *então* $aP(f) + bP(g) \subset P(af + bg)$, *com* dom $(aP(f) + bP(g)) =$ dom $P(f) \cap$ dom $P(g)$.

(d) *Se* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *são funções de Borel então* $P(f)P(g) \subset P(fg)$, *com* dom $(P(f)P(g)) =$ dom $P(g) \cap$ dom $P(fg)$. *Note que se* dom $P(g) \supset$ dom $P(fg)$ *então* $P(f)P(g) = P(fg) = P(gf) = P(g)P(f)$ *com domínio* dom $P(fg)$.

Lema 3.2.8. *Um vetor* $\xi \in \text{dom } P(f)$ *se, e somente se,*

$$\|P(f)\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 d\mu_\xi(t) < \infty.$$

3.2.2 O Teorema Espectral

Dada uma resolução da identidade P e $\xi \in \mathcal{H}$, denote

$$\mathcal{H}_\xi := \{P(f)\xi : f \in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})\}$$

que é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$.

Definição 3.2.9. *$\mathcal{H}_\xi$ é chamado o subespaço cíclico gerado por ξ para P, e se $\mathcal{H}_\xi = \mathcal{H}$, dizemos que ξ é um vetor cíclico para P.*

Dado $\xi \in \mathcal{H}$ e P, considere o operador

$$U_\xi : \mathcal{H}_\xi \to L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R}), \quad U_\xi(P(f)\xi) := f.$$

Como

$$\|U_\xi(P(f)\xi)\|^2_{L^2_{\mu_\xi}} = \int |f|^2 \, d\mu_\xi = \|(P(f)\xi)\|^2,$$

segue que U_ξ é um operador unitário.

Além disso, para $\eta \in \mathcal{H}_\xi$ existe $g \in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ com $\eta = P(g)\xi$ e como $P(f)P(g) \subset P(fg)$ pela Proposição 3.2.7, segue que

$$\begin{aligned} (U_\xi P(f) U_\xi^{-1})g &= U_\xi P(f)P(g)\xi \\ &= U_\xi P(fg)\xi = fg = \mathcal{M}_f g, \end{aligned}$$

ou seja, $U_\xi P(f) U_\xi^{-1} = \mathcal{M}_f$, e $P(f)$ é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação $\mathcal{M}_f$ agindo em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ (veja exemplo 3.1.17). Concluí-se que:

Teorema 3.2.10. *Se a resolução da identidade P possui um vetor cíclico $\xi \in \mathcal{H}$, então existe um operador unitário $U_\xi : \mathcal{H} \to L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ tal que $U_\xi P(f) U_\xi^{-1} = \mathcal{M}_f$. Além disso, $U_\xi(\xi) = 1$ é um vetor cíclico para P em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$.*

E se não há vetor cíclico para P? Neste caso, definimos

Definição 3.2.11. *Uma família maximal ortogonal de vetores $\{\xi_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{H}$ com $\mathcal{H}_{\xi_j} \perp \mathcal{H}_{\xi_k}$, se $j \neq k$, é dita uma base espectral para P.*

Fazendo uso do Lema de Zorn e como a soma direta de operadores unitários é unitário e a soma direta de operadores de multiplicação é um operador de multiplicação, demonstra-se que:

Teorema 3.2.12. *Para cada resolução da identidade P, em um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, existe uma base espectral contável $(\xi_j)_{j=1}^N$, com $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $\|\xi_j\| = \dfrac{1}{2^j}$ tal que $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{H}_{\xi_j}$ e o operador unitário*

$$U := \bigoplus_{j=1}^{N} U_{\xi_j} : \mathcal{H} \to \bigoplus_{j=1}^{N} L^2_{\mu_{\xi_j}}(\mathbb{R}),$$

satisfaz

$$UP(f)U^{-1} = \widehat{\mathcal{M}}_f,$$

com $\widehat{\mathcal{M}}_f = \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{M}_f$ um operador de multiplicação agindo em $\bigoplus_{j=1}^{N} L^2_{\mu_{\xi_j}}(\mathbb{R})$, para toda função de Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Seja P uma resolução da identidade em $\mathcal{H}$. Dentre todos os operadores autoadjuntos definidos via $P(f)$, há um que se destaca, quando $f(t) = t$, a saber

$$T := \int_{\mathbb{R}} t \; dP(t).$$

O Teorema Espectral afirma que essa relação é bijetora.

Teorema 3.2.13. *(**Teorema Espectral**) A cada operador autoadjunto $T : \mathrm{dom}\; T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ corresponde uma única resolução da identidade P^T em $\mathcal{H}$, tal que*

$$T = \int t \; dP^T(t).$$

Assim, cada operador autoadjunto T é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação $\mathcal{M}_h$, $h(t) = t$ atuando em $L^2_\mu(\mathbb{R} \times \{1, 2, 3, ..., N\})$, com μ uma medida de probabilidade e

$$\mathrm{dom}\; T = \left\{ \xi \in \mathcal{H} : \int t^2 \; d\mu^T_\xi(t) < \infty \right\},$$

onde $\mu^T_{\xi,\eta}$ são as medidas espectrais da resolução da identidade P^T.

Definição 3.2.14. *As medidas espectrais* $\mu^T_{\xi,\eta}$ *definidas através de* P^T *são ditas as medidas espectrais de* T*. Além disso,* T *é dito ter espectro simples se* P^T *tem espectro simples, ou seja, possui um vetor cíclico.*

Essa estrutura de T como um operador de multiplicação é chamada de representação espectral. Basicamente, ao mudar o operador autoadjunto, o que muda na representação espectral são as medidas espectrais μ^T_ξ, de modo que elas carregam as informações fundamentais sobre T.

O Teorema Espectral permite definir funções mensuráveis de T por meio de $f(T) := P^T(f)$, onde P^T é chamado de resolução da identidade de T.

Proposição 3.2.15. *Seja* P *uma resolução da identidade em* $\mathcal{H}$*. Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *é o polinômio* $f(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$*,* $a_j \in \mathbb{C}$*, para todo* j*, então*

$$P(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j,$$

onde $T := P(h)$ *com* $h(t) = t$*.*

Dado um operador autoadjunto T, a proposição acima valida a notação

$$f(T) = P^T(f),$$

para funções de Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Para conjuntos de Borel $\Lambda \subset \mathbb{R}$ tem-se $P^T(\Lambda) = \chi_\Lambda(T)$, e tais operadores são projeções ortogonais chamadas de projeções espectrais de T.

Note que, se T é limitado e $f(T)$ pode ser definido por séries de potência convergentes, então essa definição por séries coincide com a dada pelo Teorema Espectral, uma vez que as somas das séries parciais são os mesmos operadores em ambas as abordagens.

Também é importante ressaltar que funções mensuráveis $f(t)$ são aproximadas por funções simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Lambda_j}(t)$, enquanto que operadores normais $f(T)$ são aproximados pelas correspondentes combinações lineares de projeções $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Lambda_j}(T)$.

Exemplo 3.2.16. Seja T um operador autoadjunto compacto e $\{\lambda_j\}$ o conjunto de seus autovalores. Seja $d_j = \dim N(T - \lambda_j I) < \infty$, a multiplicidade correspondente e escolha uma base ortonormal $\left\{\xi_j^{k_j}\right\}_{k_j=1}^{d_j}$ de $N(T - \lambda_j I)$. A partir do que foi discutido até aqui, é encontrado para ξ_j^k, $k = 1, \ldots, d_j$, a medida espectral

$$\mu_{\xi_j^k}^T = \delta_{\lambda_j},$$

onde δ_{λ_j} é a medida de Dirac em λ_j.

Teorema 3.2.17. *Se T é um operador autoadjunto, então seu espectro é o suporte da resolução da identidade P^T, isto é,*

$$\sigma(T) = \{t \in \mathbb{R} : P^T(t - \varepsilon, t + \varepsilon) = \chi_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)}(T) \neq 0, \forall \varepsilon > 0\}.$$

Além disso, $P^T(\sigma(T)) = \chi_{\sigma(T)}(T) = I$ e $P^T(\rho(T) \cap \mathbb{R}) = 0$ (que também será simplesmente denotado por $P^T(\rho(T)) = 0$).

Demonstração. Se $P^T(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$, então existe uma sequência normalizada (ξ_j) com $\xi_j \in P^T\left(t_0 - \dfrac{1}{j}, t_0 + \dfrac{1}{j}\right)\mathcal{H}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Daí $P^T\left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right)\xi_j = \xi_j$ e uma vez que

$$\mu_{\xi_j}(\Lambda) = \left\langle \xi_j, P^T(\Lambda) P^T\left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right)\xi_j \right\rangle,$$

segue que $\mu_{\xi_j}\left(\mathbb{R} \setminus \left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right)\right) = 0$. Então, pelo Lema 3.2.8,

$$\|(T - t_0 I)\xi_j\|^2 = \int_{\left(t_0 - \frac{1}{j}, t_0 + \frac{1}{j}\right)} (t - t_0)^2 \, d\mu_{\xi_j}(t) \leq \frac{1}{j^2}\|\xi_j\|^2 = \frac{1}{j^2} \to 0,$$

quando $j \to \infty$. Isto é, (ξ_j) é uma sequência de Weyl para T em t_0, e portanto $t_0 \in \sigma(T)$ pelo Corolário 3.1.19

Por outro lado, assuma agora que para $t_0 \in \mathbb{R}$ existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que a projeção $P^T(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) = 0$. Então $\mu_\xi((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) = 0, \ \forall \xi \in \mathcal{H}$. Se (ξ_j) é uma sequência normalizada em $\mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned}
\|(T - t_0 I)\xi_j\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 \, d\mu_{\xi_j}(t) \\
&= \int_{\mathbb{R} \setminus (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)} (t - t_0)^2 \, d\mu_{\xi_j}(t) \geq \varepsilon_0^2 \|\xi_j\|^2 = \varepsilon_0^2.
\end{aligned}$$

Portanto, não existe uma sequência de Weyl para T em t_0, consequentemente $t_0 \in \rho(T)$.

Já que $\rho(T) \cap \mathbb{R}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$, este pode ser escrito com uma união contável de intervalos disjuntos

$$\rho(T) \cap \mathbb{R} = \sum_j (a_j, b_j),$$

e, como discutido, $P^T(a_j, b_j) = 0,\ \forall j$, uma vez que $P^T(\rho(T)) = 0$. Finalmente, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$ e $P^T(\mathbb{R}) = I$, e segue imediatamente que $P^T(\sigma(T)) = I$. ∎

Além disso, valem os seguintes resultados:

Lema 3.2.18. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) *Se Λ é um conjunto de Borel limitado em $\mathbb{R}$, então* $\operatorname{img} \chi_\Lambda(T) \subset \operatorname{dom} T$.

(ii) *Se $\int_{\mathbb{R}} t \, d\mu_\xi^T(t) \geq 0$ para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$, então $\mu_\xi^T(-\infty, 0) = 0, \forall \xi \in \operatorname{dom} T$.*

Corolário 3.2.19. *Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$. Então*

(i) *Para cada função de Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, temos*

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f \, dP^T := P^T(\chi_{\sigma(T)} f).$$

Particularmente, para $\xi \in \operatorname{dom} f(T)$, tem-se $\langle \xi, f(T)\xi \rangle = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_\xi^T$.

(ii) *Um número real $t_0 \in \rho(T)$ se, e somente se, existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que*

$$\mu_\xi^T (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) = 0,\ \forall \xi \in \ \operatorname{dom} T.$$

Corolário 3.2.20. ***(Cálculo Funcional)*** *Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$. Então existe uma única aplicação linear $B^\infty(\mathbb{R}) \to B(\mathcal{H}), f \mapsto f(T)$, de modo que os itens abaixo são satisfeitos:*

(i) $fg \mapsto f(T)g(T) = g(T)f(T)$.

(ii) $\overline{f}(T) = f(T)^*$.

(iii) $\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$.

(iv) *Se* $z \in \rho(T)$, *então* $\dfrac{1}{t-z} \mapsto R_z(T)$ *e*

$$\langle \xi, R_z(T)\xi\rangle = \int_{\sigma(T)} \frac{1}{t-z}\, d\mu_\xi^T(t).$$

(v) *Se o suporte* $(f) \cap \sigma(T) = \emptyset$, *então* $f(T) = 0$.

(vi) *Se* f_n *é uma sequência limitada em* $B^\infty(\mathbb{R})$ *e* $f_n \to f$ *pontualmente, então* $s - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(T) = f(T)$.

Além disso,

(i) *Se* $f \geq 0$ *então* $f(T) \geq 0$ *(assim, se* $f \geq g$ *então* $f(T) \geq g(T)$*).*

(ii) *Se* $T\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$ *e* f *é contínuo, então* $f(T)\xi_\lambda = f(\lambda)\xi_\lambda$.

Proposição 3.2.21. *Seja* T *um operador autoadjunto e* $\chi_\Lambda(T) = P^T(\Lambda)$. *Então*

(i) $T \geq \beta I$, *isto é,* $\langle \xi, T\xi\rangle \geq \beta\|\xi\|^2$, *para todo* $\xi \in \mathrm{dom}\, T$ *se, e somente se,* $\chi_\Lambda(T) = 0$ *para qualquer conjunto de Borel* $\Lambda \subset (-\infty, \beta)$. *De forma similar,* $\langle \xi, T\xi\rangle \leq \gamma\|\xi\|^2$.

(ii) $T \in B(\mathcal{H})$ *se, e somente se, existem* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *de modo que* $\chi_\Lambda(T) = 0$, *para qualquer conjunto de Borel* $\Lambda \subset ((-\infty, \beta) \cup (\gamma, \infty))$ *(isto é,* $\chi_{[\beta,\gamma]}(T) = I$*).*

(iii) $T \in B(\mathcal{H})$ *se, somente se,* $\sigma(T)$ *é um conjunto limitado em* $\mathbb{R}$.

(iv) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função de Borel, então* $\chi_\Lambda(f(T)) = \chi_{f^{-1}(\Lambda)}(T)$ *para qualquer conjunto de Borel* $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

3.2.3 Exemplos

1. **Operador de Multiplicação**

   Considere o operador autoadjunto $\mathcal{M}_\varphi$, para $\varphi : E \to \mathbb{R}$, atuando em $L^2_\mu(E)$, definido anteriormente. Vamos verificar que a aplicação

$$\mathcal{A} \ni \Lambda \mapsto P(\Lambda) := \chi_{\varphi^{-1}(\Lambda)}$$

é uma resolução da identidade.

Uma vez que as funções características podem assumir valores reais 1 ou 0, segue que $P(\Lambda)$ é um operador autoadjunto e $P(\Lambda)^2 = P(\Lambda)$, i.e., eles são projeções ortogonais atuando em $L^2_\mu(E)$. Como $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = E$, $\chi_E(x) = Id, \forall x \in E$, segue que $P(\mathbb{R}) = I$. De fato, para todo $\psi \in L^2_\mu(E)$,

$$\|P(\mathbb{R})\psi - \psi)\|^2 = \int_E |\chi_E(x) - Id|^2 |\psi(x)|^2 d\mu(x) = 0.$$

Agora, se $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$ e devido à convergencia pontual, $\sum_{j=1}^n \chi_{\varphi^{-1}(\Lambda_j}(x) \to \chi_{\varphi^{-1}(\Lambda)}(x)$, quando $n \to \infty$, para qualquer $\psi \in {}^2_\mu(E)$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^n P(\Lambda_j)\psi - P(\Lambda)\psi \right\|^2 = \int_E \left| \sum_{j=1}^n \chi_{\varphi^{-1}(\Lambda_j}(x) - \chi_{\varphi^{-1}(\Lambda)}(x) \right|^2 |\psi(x)|^2 d\mu(x)$$

que desaparece quando $n \to \infty$ pelo Teorema da Convergência Dominada.

Consequentemente,

$$\sum_{j=1}^n P(\Lambda_j)\psi \to P(\Lambda)\psi$$

e então P é uma resolução da identidade. Para uma função Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ temos o operador normal $f(\mathcal{M}_\varphi) = \mathcal{M}_{f\circ\varphi}$.

Operador Posição. No caso particular $E = \mathbb{R}$ com $d\mu = dx$ (i.e., a medida de Lebesgue), temos o operador posição $q(x) = \mathcal{M}_x$ atuando em $L^2(\mathbb{R})$. Então a construção acima leva à resolução da identidade $\mathcal{A} \ni \Lambda \mapsto P^q(\Lambda) = \chi_\Lambda$, de modo que

$$\langle \psi, P^q(\Lambda)\psi \rangle = \int_\Lambda |\psi(x)|^2 dx, \qquad \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

e

$$\langle \psi, q\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x|\psi(x)|^2 dx, \qquad \psi \in \text{ dom } q.$$

Consequentemente, a medida espectral do operador posição é

$$d\mu_\psi(x) = |\psi(x)|^2 dx.$$

Observe que eles são absolutamente contínuos com respeito à medida de Lebesgue, para $|\psi(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Vale observar que, na verdade,

$$\text{dom } q = \left\{\psi : q \in L^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R})\right\} = \left\{\psi : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty\right\}.$$

Dada uma função Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ temos o operador normal $f(q) = \mathcal{M}_{f(x)}$. Tal construção generaliza de uma só vez as componentes do operador posição em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Operador Momento. Um operador momento em $L^2(\mathbb{R})$, aqui denotado por $\mathcal{P}$, é dado por dom $\mathcal{P} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{H}^1(\hat{\mathbb{R}})$,

$$(\mathcal{F}\mathcal{P}\mathcal{F}^{-1})\hat{\psi}(p) = p\hat{\psi}(p), \qquad (P\psi)(x) = (\mathcal{F}^{-1}p\mathcal{F})\psi(x).$$

Assim, baseado na contrução acima do operador posição, a resolução espectral do momento é $P^{\mathcal{P}}(\Lambda)\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\chi_\Lambda(p)\hat{\psi}(p)$, e para a medida espectral considere

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi, P^{\mathcal{P}}(\Lambda)\psi \right\rangle &= \left\langle \psi, \mathcal{F}^{-1}\chi_\Lambda(p)\hat{\psi}(p) \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{\psi}(p), \chi_\Lambda(p)\hat{\psi}(p) \right\rangle \\
&= \int_\Lambda |\hat{\psi}(p)|^2 dp,
\end{aligned}$$

de modo que suas medidas espectrais são $d\mu_\psi(p) = |\hat{\psi}(p)|^2 dp$, absolutamente contínuo com respeito a medida de Lebesgue. Para uma função Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ temos o operador normal $f(\mathcal{P}) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}_{f(p)}\mathcal{F}$.

Operador Energia Cinética. A Hamiltoniana livre H_0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$ é

$$(H_0\psi)(x) := -\Delta\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{M}_{p^2}\hat{\psi}(p)\right](x), \qquad \psi \in \text{ dom } H_0,$$

dom $H_0 = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, H_0 é unitariamente equivalente ao operador multiplicação pela função $\varphi(p) = p^2$ em $L^2(\hat{\mathbb{R}}^n)$. Assim, sua resolução da identidade é

$$\mathcal{A} \ni \Lambda \mapsto P^{H_0}(\Lambda) = \mathcal{F}^{-1}\chi_{\varphi^{-1}(\Lambda)}\mathcal{F}.$$

Observe a expressão simples $\phi^{-1}(\Lambda) = \{p \in \hat{\mathcal{R}}^n : p^2 \in \Lambda\}$. A partir dessa expressão e da identidade de Parseval, encontramos a medida espectral

$$\mu_\psi(\Lambda) = \left\langle \psi, P^{H_0}(\Lambda)\psi \right\rangle = \int_{p^2\in\Lambda} |\hat{\psi}(p)|^2 dp,$$

que também são absolutamente contínuas com respeito a medida de Lebesgue e apenas conjuntos de Borel $\Lambda \subset [0,\infty)$ podem ter medidas espectrais não nula.

Por simplicidade considere $n = 1$. Se $\psi \in \mathrm{dom}\ H_0$ escreva

$$\begin{aligned} \langle \psi, H_0\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} p^2|\hat{\psi}(p)|^2 dp \\ &= \int_{-\infty}^{0} p^2|\hat{\psi}(p)|^2 dp + \int_0^\infty p^2|\hat{\psi}(p)|^2 dp, \end{aligned}$$

e introduzindo a variável $t = p^2$(por exemplo, $p = -\sqrt{t}$ e $p = \sqrt{t}$, na primeira e na segunda integral, respectivamente) temos

$$\langle \psi, H_0\psi\rangle = \int_0^\infty t\left(|\hat{\psi}(-\sqrt{t})|^2 + |\hat{\psi}(\sqrt{t})|^2\right)\frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Se $\hat{\psi}$ é uma função ímpar ou par tem-se

$$\langle \psi, H_0\psi\rangle = \int_0^\infty t|\hat{\psi}(\sqrt{t})|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Introduza o espaço de Hilbert L_+(resp.L_-) de funções $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de modo que $\hat{\psi}$ sejam funções pares (resp. ímpares), ambas com produto interno

$$[\phi, \psi] := \int_0^\infty \overline{\hat{\phi}(\sqrt{t})}\hat{\psi}(\sqrt{t})\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

e em cada um desses subspaços H_0 torna-se o operador multiplicação $\mathcal{M}_h,\ h(t) = t$. Uma vez que toda função $\hat{\psi} = \hat{\psi}_+ \oplus \hat{\psi}_-$, com função par $\hat{\psi}_+$, função ímpar $\hat{\psi}_-$ e (usando a mesma mudança de variável acima),

$$\|\psi\|^2 = \|\hat{\psi}\|^2 = \int_0^\infty \left|\hat{\psi}_-(\sqrt{t})\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty \left|\hat{\psi}_+(\sqrt{t})\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

a soma direta $L_+ \oplus L_-$ é isomorfo para $L^2(\mathbb{R})$ e o espaço onde H_0 atua como $\mathcal{M}_h$ foi explicitado.

Por outro lado, para $\psi \in$ dom $f(H_0)$, em $L_\pm$ tem-se

$$\langle \psi, f(H_0)\psi\rangle = \int_0^\infty f(t)\left|\hat{\psi}(\sqrt{t})\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Considerando $f = \chi_\Lambda$, encontramos a medida espectral de H_0 em ψ pode ser escrita na forma (pode considerar $t \in \mathbb{R}$)

$$d\mu_\psi^{H_0(t)}(t) = \chi_{(0,\infty)}(t) \left|\hat{\psi}(\sqrt{t})\right|^2 \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

que são claramente absolutamente contínuas com respeito a medida de Lebesgue. Observe que a presença de dois subespaços nessa decomposição, indica que o espectro de H_0 não é simples.

2. **Operador Puramente Pontual**

O que vamos estudar agora está relacionado com o operador autoadjunto compacto estudado anteriormente e com o operador padrão de Schrödinger $H = - \triangle + V$.

Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$ e $(\xi_j)_j$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ composta por autovetores de T com respectivos autovalores λ_j, isto é, $T\xi j = \lambda_j \xi_j,\ \|\xi_j\| = 1$. Tais operadores são chamados de Operadores Pontuais Puros.

Suponha que $\lambda_j \neq \lambda_k$ quando $j \neq k$(i.e, os autovalores são simples), e denote por P_j a projeção ortogonal no subespaço unidimensional gerado por ξ_j. Para um conjunto de Borel $\Lambda \subset \mathbb{R}$, a função

$$P^T(\Lambda) = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} P_j$$

define uma resolução da identidade de T.

Cada $\xi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como $\xi = \sum_j a_j \xi_j$ com $\|\xi\|^2 = \sum_j |a_j|^2$, de modo que $P_j \xi = a_j \xi_j$ e se $\xi \in \operatorname{dom} T$ segue que

$$T\xi = \sum_j \lambda_j a_j \xi_j = \sum_j \lambda_j P_j \xi.$$

Diante disso temos

$$T = \sum_j \lambda_j P_j = \int_{\mathbb{R}} t\ dP^T(t).$$

Para uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ temos

$$f(T) = \sum_j f(\lambda_j) P_j, \qquad f(T)\xi = \sum_j f(\lambda_j) a_j \xi_j$$

e

$$\xi \in dom\ f(T) \Leftrightarrow \sum_j |f(\lambda_j)|^2 |a_j|^2 < \infty.$$

As medidas espectrais são

$$\mu_\xi^T(\Lambda) = \langle \xi, P^T(\Lambda)\xi \rangle = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} |a_j|^2 \delta_{\lambda_j} = \sum_j |a_j|^2 \delta_{\lambda_j}(\Lambda),$$

com $\delta_{\lambda_j}(\Lambda)$ a medida de Dirac de λ_j. Portanto

$$\mu_\xi^T(\Lambda) = \sum_j |a_j|^2 \delta_{\lambda_j}.$$

E para os autovetores ξ_j temos $\mu_{\xi_j}^T = \delta_{\lambda_j}$. Tais medidas espectrais não são absolutamente contínuas com respeito a medida de Lebesgue (elas são chamadas de medidas puramente pontuais).

3.3 Aplicações do Teorema Espectral

3.3.1 Interpretação Quântica das Medidas Espectrais

Dado um operador autoadjunto T representando um observável quântico e $\Lambda \in \mathcal{A}$, de acordo com os postulados da mecânica quântica, para $\xi \in \text{dom}\, T \subset \mathcal{H}$ temos que

- $\langle \xi, T\xi \rangle$ representa o valor esperado de T no estado ξ.
- $\langle \xi, \chi_\Lambda(T)\xi \rangle$ representa o probabilidade de uma medida de T resultar em um valor que está em Λ.

Pelo Teorema Espectral tais quantidades são descritas em termos de medidas espectrais de T em ξ, ou seja,

$$\langle \xi, \chi_\Lambda(T)\xi \rangle = \mu_\xi^T(\Lambda)$$

e

$$\langle \xi, T\xi \rangle = \int_{\sigma(T)} t\ d\mu_\xi^T(t).$$

Note que como $\mu_\eta^T(\mathbb{R} \setminus \sigma(T)) = 0, \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}$, os valores das medidas de T resultam em valores no espectro de T.

Se T tem espectro pontual puro, considere (ξ_j) uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ composta por autovetores de T correspondentes aos autovalores λ_j, ou seja, $T\xi_j = \lambda_j \xi_j, \quad \|\xi_j\| = 1$.

Se $\xi \in \text{dom } T,\ \|\xi_j\| = 1$, temos $\xi = \sum_j a_j \xi_j$ e $1 = \|\xi_j\|^2 = \sum_j |a_j|^2$. Além disso,

$$\begin{aligned} T\xi &= \sum_j T(a_j \xi_j) \\ &= \sum_j a_j T\xi_j = \sum_j a_j \lambda_j \xi_j. \end{aligned}$$

A medida espectral é

$$\mu_\xi^T = \sum_j |a_j|^2 \delta_{\lambda_j}.$$

Se $\lambda_k \in \Lambda$ e $\lambda_j \notin \Lambda$ para $j \neq k$, então a probabilidade de uma medida de T resultar em um valor que está em Λ é

$$\langle \xi, \chi_\Lambda(T)\xi \rangle = \mu_\xi^T(\Lambda) = \sum_j |a_j|^2 \delta_{\lambda_j}(\Lambda) = |a_k|^2.$$

Em geral,

$$\langle \xi, f(T)\xi \rangle = \sum_j f(\lambda_j)|a_j|^2,$$

é o valor esperado de $f(T)$.

3.3.2 Evolução Temporal

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T : \text{dom } T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Considere também a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\xi(t) = T\xi(t) \\ \xi(0) = \xi \in \text{dom } T \end{cases},$$

onde $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ é a constante de Planck. Para nós $\hbar = 1$.

Definição 3.3.1. *Uma aplicação $G : \mathbb{R} \to B(\mathcal{H})$ é um grupo de evolução unitário a um parâmetro em $\mathcal{H}$, ou simplesmente um grupo de evolução unitário, se $G(t)$ é um operador unitário em $\mathcal{H}$ e $G(t+s) = G(t) + G(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Um grupo de evolução unitário agindo em $\mathcal{H}$ é fortemente contínuo se

$$\lim_{t\to t_0}\langle G(t)\xi,\eta\rangle = \langle G(t_0)\xi,\eta\rangle,$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e para todo $\xi,\eta \in \mathcal{H}$.

Lema 3.3.2. *Se T é um operador autoadjunto então ele não admite extensão simétrica própria.*

Demonstração. Seja S simétrico e extensão de T, assim

$$T = T^*, \quad S \subset S^*, \quad T \subset S.$$

Isso implica que $S^* \subset T^*$. Sendo assim, $S \subset S^* \subset T^* = T \subset S$. Logo $S = S^* = T$, ou seja, $S = T$. ■

Teorema 3.3.3. *Seja $T : \mathrm{dom}\, T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto e, para cada $t \in \mathbb{R}$, considere a função $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f_t(\lambda) = e^{-it\lambda}$ e o correspondente operador*

$$P(f_t) = f_t(T) = U(t) = e^{-itT}.$$

Então

(i) *$\mathbb{R} \ni t \to U(t)$ é um grupo de evolução unitário a um parâmetro fortemente contínuo.*

(ii) *Para $\xi_0 \in \mathcal{H}$, o limite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{(U(t)\xi_0 - \xi_0)}{t}$$

existe se, e somente se, $\xi_0 \in \mathrm{dom}\, T$ e neste caso,

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\xi_0 - \xi_0}{t} = -iT\xi_0.$$

(iii) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, $U(t)\mathrm{dom}\, T = \mathrm{dom}\, T$, $TU(t) = U(t)T$ e, se $\xi(t) = U(t)\xi_0$, $\xi_0 \in \mathrm{dom}\, T$, então $i\dfrac{d}{dt}\xi(t) = T\xi(t)$.*

Demonstração.

(i) Como f_t é limitada, pela Propriedade 3.2.3 tem-se que $P(f_t)$ é limitado, $P(f_t)^* = P(\overline{f_t})$ e $P(f_t)P(f_s) = P(f_t f_s)$. Assim

$$\text{dom } P(f_t) = \mathcal{H}, \quad P(f_t)^* = P(f_{-t})$$

e como $f_t(\lambda)f_s(\lambda) = e^{-it\lambda}e^{-is\lambda} = e^{-i(t+s)\lambda}$, segue a propriedade de grupo a um parâmetro

$$e^{-itT}e^{-isT} = P(f_t)P(f_s) = P(f_t f_s) = e^{-i(t+s)T}.$$

Agora, $e^{-itT}(e^{-itT})^* = e^{-itT}e^{itT} = e^{0T} = I$. Portanto, $U(t)$ é unitário para todo $t \in \mathbb{R}$ e $t \to U(t)$ é fortemente contínuo pelo Lema 3.2.4. Note que:

1. $U(t)$ é um grupo comutativo.
2. $\|U(t)\xi\|^2 = \int |f_t(\lambda)|^2 \, d\mu_\xi(\lambda) = \int_{\sigma(T)} d\mu_\xi(\lambda) = \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$.

(ii) Se $\xi_0 \in \text{dom } T$, então

$$\left\| \frac{U(t)\xi_0 - \xi_0}{t} + iT\xi_0 \right\|^2 = \int |\underbrace{\frac{e^{-it\lambda} - 1}{t} + i\lambda}_{\zeta(t)}|^2 d\mu_{\xi_0}(\lambda).$$

Note que $\dfrac{e^{-it\lambda} - 1}{t} \to -i\lambda$ e dado $\varepsilon > 0$, $|\zeta(t)| \leq (\lambda + \varepsilon) + \lambda$ se $|t|$ é suficientemente pequeno. Assim

$$|\zeta(t)| \leq 2\lambda + \varepsilon \ \in L^2_{\mu_{\xi_0}}(\mathbb{R}),$$

pois $\xi_0 \in \text{dom } T$ (dom $P(f) = \{\zeta \in \mathcal{H} : f \in L^2_{\mu_\xi}\}$).

Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e obter

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(t)\xi_0 - \xi_0}{t} = -iT\xi_0.$$

Logo, o limite existe.

Por outro lado, suponha que para $\xi_0 \in \mathcal{H}$ exista

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(t)\xi_0 - \xi_0}{t} = -iS\xi_0,$$

esse S é linear e para ξ_0 e η_0 em seu domínio (ou seja, limite existe) temos

$$\left\langle \frac{1}{t}(U(t) - I)\xi_0, \eta_0 \right\rangle = \left\langle \xi_0, \frac{1}{t}(U(-t) - I)\eta_0 \right\rangle = -\left\langle \xi_0, \frac{1}{-t}(U(-t) - I)\eta_0 \right\rangle.$$

Tomando $t \to 0$ obtém-se,

$$\langle -iS(\xi_0), \eta_0 \rangle \;=\; -\langle \xi_0, -iS(\eta_0) \rangle \, .$$

Isso implica que,

$$i\,\langle S(\xi_0), \eta_0 \rangle \;=\; i\,\langle \xi_0, S(\eta_0) \rangle \, .$$

Logo,

$$\langle S(\xi_0), \eta_0 \rangle \;=\; \langle \xi_0, S(\eta_0) \rangle \qquad \xi_0, \eta_0 \in \text{dom } S.$$

Portanto, S é simétrico. Mas como dom $T \subset$ dom S e $T \subset S$, pelo Lema 3.3.2 $T = S$ e assim $\xi_0 \in$ dom T.

(iii) Se $\xi_0 \in$ dom T temos para todo $s \in \mathbb{R}$ que

$$\frac{(U(t)-I)}{t}(U(s)\xi_0) = U(s)\frac{(U(t)-I)}{t}\xi_0$$

e para $t \to 0$ obtemos

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{U(t)-I}{t}\right)(U(s)\xi_0) = U(s)(-iT\xi_0),$$

de forma que $U(s)\xi_0 \in$ dom T. Assim, $U(s)$dom $T \subset$ dom T, $\;\forall s \in \mathbb{R}$.

Por outro lado se $\xi_0 \in$ dom T, então $\xi_0 = U(s)U(-s)\xi_0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, desse modo dom $T \subset U(s)$dom T. E sendo assim, $U(s)$dom $T =$ dom T para todo $s \in \mathbb{R}$.

Note também que por (ii) desse teorema temos,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{U(t)-I}{t}\right)(U(s)\xi_0) = iT(U(s)\xi_0)$$

e concluímos que $TU(s) = U(s)T$. E se $\xi(t) = U(t)\xi_0$, $\;\xi_0 \in$ dom T temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(h)-I}{h}(U(t)\xi_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h} = -iT\xi(t) = \frac{d}{dt}\xi(t).$$

■

Observações:

(i) Para $\xi_0 \in \operatorname{dom} T$, seja $\xi_t = e^{-iTt}\xi_0 = U(t)$ a solução da Equação de Schrödinger com condição inicial ξ_0. Suponha que $V(t)\xi_0$ também seja solução desse problema, temos então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0\right\|^2 &= \frac{d}{dt}\left\langle U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0, U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}(U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0), U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0 \right\rangle \\
&+ \left\langle U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0, \frac{d}{dt}(U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{i}TU(t)\xi_0 - \frac{1}{i}TV(t)\xi_0, U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0 \right\rangle \\
&+ \left\langle U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0, \frac{1}{i}TU(t)\xi_0 - \frac{1}{i}(t)\xi_0) \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, $\left\|U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0\right\|^2 = c$, sendo c uma constante. Como em $t = 0$ essa expressão se anula, obtemos

$$\left\|U(t)\xi_0 - V(t)\xi_0\right\|^2 = 0.$$

Diante disso, $U(t)\xi_0 = V(t)\xi_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que demonstra a unicidade da solução da Equação de Schrödinger.

(ii) O operador $T\xi_0 = \dfrac{1}{i}\lim \dfrac{(U(t) - I)}{t}\xi_0$ leva o nome de gerador infinitesimal de $U(t)$. Assim, vale a seguinte recíproca:

Teorema 3.3.4. ***(Teorema de Stone)*** *Se $t \to U(t)$ é um grupo de evolução unitário a um parâmetro fortemente contínuo em $\mathcal{H}$, então existe $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ autoadjunto em que $U(t) = e^{-iTt}$.*

Conclui-se então que, se $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é autoadjunto, então $\xi(t) := e^{-itT}\xi$ é a única solução da equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}\xi(t) = T\xi(t) \\ \xi(0) = \xi \end{cases} .$$

3.4 Espectro Discreto e Essencial

Seja $T : \text{dom } T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Se E é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ e P_E seu projetor ortogonal, temos

$$\mathcal{H} = E \oplus E^{\perp}, \quad I = P_E + P_{E^{\perp}}.$$

Agora, se $A : \text{dom } A \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear, então

$$\text{dom } A = P_E(\text{dom } A) + P_{E^{\perp}}(\text{dom } A).$$

Se $P_E(\text{dom } A) \subset \text{dom } A$ então $P_{E^{\perp}}(\text{dom } A) = (I - P_E)\text{dom } A \subset \text{dom } A$ e dessa forma

$$A(\text{dom } A) = AP_E(\text{dom } A) + AP_{E^{\perp}}(\text{dom } A),$$

ou seja, $A\xi = AP_E\xi + AP_{E^{\perp}}\xi$, para todo $\xi \in \text{dom } A$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.4.1. *O subespaço fechado E reduz o operador A, se*

$$P_E(\text{dom } A) \subset \text{dom } A, \quad AP_E(\text{dom } A) \subset E \quad e \quad AP_{E^{\perp}}(\text{dom } A) \subset E^{\perp}.$$

Nesse caso $A_E := A|_E = AP_E$ e $A_{E^{\perp}} := A|_{E^{\perp}} = AP_{E^{\perp}}$ estão bem definidos.

O próximo teorema descreve propriedades importantes de subespaços que reduzem um operador autoadjunto.

Teorema 3.4.2. *Seja T um operador autoadjunto e $E \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado de $\mathcal{H}$.*

(i) *Se E reduz T, então T_E e $T_{E^{\perp}}$ são operadores autoadjuntos e escrevemos $T = T_E \oplus T_{E^{\perp}}$.*

(ii) *Para qualquer conjunto de Borel $\Lambda \in \mathcal{A}$ o subespaço* img $\chi_\Lambda(T)$ *reduz T.*

(iii) *E reduz T se, e somente se, $P_E\chi_{(a,b)}(T) = \chi_{(a,b)}(T)P_E$, para todo intervalo aberto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$.*

Seja T um operador autoadjunto, E um subespaço fechado que reduz T e P_E a projeção ortogonal em E. Então as restrições

$$T_E = T|_E := TP_E : \text{dom } T \cap E \to E$$

e

$$T_{E^\perp} = T|_{E^\perp} := TP_{E^\perp} : \operatorname{dom} T \cap E^\perp \to E^\perp,$$

estão bem definidas e são operadores autoadjuntos. Além disso, $T = T_E \bigoplus T_{E^\perp}$ e vale:

Proposição 3.4.3. *Seja T um operador autoadjunto e E um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ que reduz T. Então*

$$\sigma(T) = \sigma(T_E) \cup \sigma(T_{E^\perp}).$$

Demonstração. Se $\xi \in \operatorname{dom} T$ e $t \in \mathbb{R}$ temos então

$$\|(T - tI)\xi\|^2 = \|(T_E - tI)P_E\xi\|^2 + \|(T_{E^\perp} - tI)P_{E^\perp}\xi\|^2. \tag{3.2}$$

Se $t \in \sigma(T_E)$ existe uma sequência de Weyl $(\xi_j^E) \subset \operatorname{dom} T_E \subset E$ para T_E em t, e como $P_{E^\perp}\xi_j^E = 0$ para todo j, segue que essa sequência é uma sequência de Weyl para T em t. Isso implica que $t \in \sigma(T)$. De forma similar tem-se que $\sigma(T_{E^\perp}) \subset \sigma(T)$. Portanto, segue que

$$\sigma(T_E) \cup \sigma(T_{E^\perp}) \subset \sigma(T). \tag{3.3}$$

Agora, se $t \in \sigma(T)$ e (ξ_j) é uma sequência de Weyl para T em t, então

$$\begin{aligned} 1 &= \|\xi_j\|^2 \\ &= \|P_E\xi_j + P_{E^\perp}\xi_j\|^2 \\ &= \langle P_E\xi_j + P_{E^\perp}\xi_j, P_E\xi_j + P_{E^\perp}\xi_j\rangle \\ &= \|P_E\xi_j\|^2 + \|P_{E^\perp}\xi_j\|^2. \end{aligned}$$

Assim, para cada j, $\dfrac{1}{2} \leq \max\ \{\|P_E\xi_j\|^2, \|P_{E^\perp}\xi_j\|^2\} \leq 1$, e portanto existe uma subsequência de vetores não nulos de $(P_E\xi_j)$ ou de $(P_{E^\perp}\xi_j)$. Digamos então que $P_E\xi_{j_k} \neq 0$ e $\|P_E\xi_{j_k}\| \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall k$.

Normalizando essa sequência , tome $\eta_k = \dfrac{P_E\xi_{j_k}}{\|P_E\xi_{j_k}\|}$. Daí usando (3.2) temos

$$2\|(T - tI)\xi_{j_k}\|^2 \geq \left\|(T - tI)\frac{\xi_{j_k}}{\|\xi_{j_k}\|}\right\|^2 = \|(T_E - tI)\eta_k\|^2.$$

Assim (η_k) é uma sequência de Weyl para T_E em t, e isso implica que $t \in \sigma(T_E)$.

Portanto,

$$\sigma(T) \subset \sigma(T_E) \cup \sigma(T_{E^\perp}). \tag{3.4}$$

Logo, por (3.3) e (3.4) segue o resultado. ■

As projeções espectrais $\chi_\Lambda(T)$ podem ser usadas para introduzir decomposições espectrais de T, e o interesse em tais decomposições, reside no fato que, elas ajudam a entender melhor o espectro e o comportamento da evolução temporal $e^{-itT}\xi$ que depende fortemente do tipo espectral.

Teorema 3.4.4. *Seja T um operador autoadjunto, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *λ é um autovalor de T, isto é, existe $0 \neq \xi_\lambda \in \mathcal{H}$ tal que $T\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$.*

(ii) *A medida espectral de T em λ é $\mu_{\xi_\lambda} = \|\xi_\lambda\|^2\delta_\lambda$.*

(iii) *$\chi_{\{\lambda\}}(T) \neq 0$, e portanto existe $\xi_\lambda \neq 0$ obedecendo $\chi_{\{\lambda\}}(T)\xi_\lambda = \xi_\lambda$. Além disso, $\operatorname{img} \chi_{\{\lambda\}}(T) = \left\{\xi \in \mathcal{H} : \chi_{\{\lambda\}}(T)\xi = \xi\right\}$ é o auto-espaço correspondendo ao autovalor λ.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que $(i) \Rightarrow (ii)$

Se vale (i) então λ é autovalor de T e existe $\xi_\lambda \neq 0$ com $T\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$, logo $\lambda \in \sigma(T)$. Assim,

$$0 = \|T\xi_\lambda - \lambda\xi_\lambda\|^2 = \int_{\sigma(T)} |t-\lambda|^2 \, d\mu_{\xi_\lambda}(t)$$

e portanto $\mu_{\xi_\lambda} = c\,\delta_\lambda$ para algum $c \geq 0$.

Como $\mu_{\xi_\lambda}(\sigma(T)) = \|\xi_\lambda\|^2 = c\delta_\lambda(\sigma(T)) = c$, (ii) segue.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Se (ii) vale temos,

$$\begin{aligned} \|T\xi_\lambda - \lambda\xi_\lambda\|^2 &= \int_{\sigma(T)} |t-\lambda|^2 \, d\mu_{\xi_\lambda} = \int_{\sigma(T)} |t-\lambda|^2 \|\xi_\lambda\|^2 \, d\delta_\lambda(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e consequentemente

$$T\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que (ii) vale, então temos que

$$0 \neq \|\xi_\lambda\|^2 = \mu_{\xi_\lambda}(\{\lambda\}) = \langle \xi_\lambda, \chi_{\{\lambda\}}(T)\xi_\lambda \rangle = \|\chi_{\{\lambda\}}(T)\xi_\lambda\|^2.$$

Portanto $\chi_{\{\lambda\}}(T) \neq 0$, e como esse operador é uma projeção, existe $\xi_\lambda \neq 0$ tal que $\chi_{\{\lambda\}}(T)\xi_\lambda = \xi_\lambda$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Se a projeção $\chi_{\{\lambda\}}(T) \neq 0$, existe $0 \neq \eta$ com

$$\chi_{\{\lambda\}}(T)\eta = \eta. \tag{3.5}$$

Sendo assim, de (3.5),

$$\begin{aligned} \mu_\eta(\mathbb{R}) &= \|\eta\|^2 = \langle \eta, \eta \rangle \\ &= \langle \eta, \chi_{\{\lambda\}}(T)\eta \rangle = \mu_\eta(\{\lambda\}). \end{aligned}$$

Portanto, temos $\mu_\eta(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}) = 0$, o que implica que $\mu_\eta = c\, \delta_\lambda$, e (ii) segue. ■

Corolário 3.4.5. *Seja T um operador autoadjunto. Se λ é um ponto isolado do $\sigma(T)$, então λ é um autovalor de T.*

Demonstração. Suponha que λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. Pelo Teorema 3.2.17 temos

$$0 \neq \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon}(T) = \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda}(T) + \chi_{\{\lambda\}}(T) + \chi_{(\lambda,\lambda+\varepsilon}(T)$$

e como $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda)}(T) = 0$ e $\chi_{(\lambda,\lambda+\varepsilon)}(T) = 0$ pois estão no resolvente, segue que $\chi_{\{\lambda\}}(T) \neq 0$. E finalmente pelo Teorema 3.4.4 λ é autovalor de T. ■

Definição 3.4.6. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) *O espectro essencial de T, é o conjunto $\sigma_{ess}(T)$ dos pontos de acumulação de $\sigma(T)$ junto com os autovalores de T de multiplicidade infinita.*

(ii) *O espectro discreto de T, é o conjunto $\sigma_d(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_{ess}(T)$, ou seja, é o conjunto dos autovalores isolados de T, cada um com multiplicidade finita.*

(iii) *Se* $\sigma_d(T) = \emptyset$, *então* T *é dito ter espectro essencial puro; se* $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$ *então* T *é dito ter espectro discreto puro.*

O espectro essencial pode ser caracterizado via sequências de Weyl.

Teorema 3.4.7. *Seja* T *um operador autoadjunto, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.

(ii) *Existe uma sequência normalizada* $(\xi_n) \subset \mathrm{dom}\, T$, *(isto é,* $\|\xi_n\| = 1$, *para todo* n*) tal que* $w - \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$ *e* $(T - \lambda I)\,\xi_n \to 0$, *quando* $n \to \infty$. *Essa sequência é chamada uma "sequência de Weyl singular" para* T *em* λ.

(iii) *Para todo* $\varepsilon > 0$, $\dim \mathrm{img}\, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(T) = \infty$.

Corolário 3.4.8. *Se* T *é um operador autoadjunto, então* $\sigma_{ess}(T)$ *é um subconjunto fechado de* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Se $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$, então existe ε_0 com $\dim \mathrm{img}\, \chi_{(\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)}(T) < \infty$, assim para cada $t \in (\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0)$ podemos escolher $\varepsilon_t > 0$ tal que

$$(t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \subset (\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0).$$

Como

$$\dim \mathrm{img}\, \chi_{(t-\varepsilon_t,t+\varepsilon_t)}(T) \leq \dim \mathrm{img}\, \chi_{(\lambda-\varepsilon_0,\lambda+\varepsilon_0)}(T) < \infty,$$

segue que $t \notin \sigma_{ess}(T)$, isto é, $\mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(T)$ é um conjunto aberto. ■

3.5 Espectro Pontual, Absolutamente Contínuo e Singular Contínuo

Seja l a medida de Lebesgue sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$. Lembre-se que se μ é uma medida de Borel em $\mathbb{R}$, podemos decompor μ de forma única como

$$\mu = \mu_p + \mu_c,$$

onde μ_c representa a parte contínua de μ, ou seja, $\mu_c(\{t\}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e μ_p representa a parte pontual de μ, isto é, existe um conjunto contável Ω tal que $\mu_p(\mathbb{R}\backslash\Omega) = 0$.

Note que $\mu_p \perp l$ e pelo Teorema de Radon-Nycodym, $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$, sendo $\mu_{ac} \ll l$ e $\mu_{sc} \perp l$. Diante disso, temos a decomposição

$$\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_{sc}.$$

Nesta seção iremos considerar sempre $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ou simplismente T um operador autoadjunto no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e $\mu_\xi = \mu_\xi^T$ a medida espectral de T em $\xi \in \mathcal{H}$.

Definição 3.5.1. *O subespaço pontual de T é $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(T) \subset \mathcal{H}$ formado pelo fecho do subespaço vetorial gerado pelos autovetores de T. Seu complemento ortogonal é $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c(T) := \mathcal{H}_p(T)^\perp$ é o subespaço contínuo de T. P_p^T e P_c^T denotam as respectivas projeções ortogonais.*

Teorema 3.5.2. *Seja T um operador autoadjunto, então*

(i) *Existe um conjunto contável $\Lambda \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{H}_p(T) = \{\xi \in \mathcal{H} : \mu_\xi(\mathbb{R}\backslash\Lambda) = 0\}.$$

Podemos tomar Λ como o conjunto dos autovalores de T.

(ii) *$\mathcal{H}_c(T) = \{\xi \in \mathcal{H} : \mu_\xi(\{t\}) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$, isto é, a função $t \mapsto \|\chi_{(-\infty,t]}(T)\xi\|$ é contínua.*

(iii) *$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_c(T)$ e ambos $\mathcal{H}_p(T)$ e $\mathcal{H}_c(T)$ reduzem T.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \{\lambda_j\}_j$ o conjunto dos autovalores de T, isto é, $T\xi_j = \lambda_j\xi_j$, $\|\xi_j\| = 1,\ \xi_j \in \operatorname{dom} T,\ \forall j$. Desse modo Λ é contável.

(i) Se $\xi \in \mathcal{H}_p(T)$ então $\xi = \sum_j a_j\xi_j$ e $\sum |a_j|^2 = \|\xi\|^2$. Assim, $\chi_\Lambda(T)\xi = \xi$ e $\mu_\xi(\mathbb{R} \setminus \Lambda) = 0$. Agora, se para $\xi \in \mathcal{H}$ existe um conjunto contável $\Omega = \{t_j\},\ t_j \neq t_k$ se $j \neq k$ com $\mu_\xi(\mathbb{R} \setminus \Omega) = 0$ temos, $\xi = \chi_\Omega(T)\xi = \sum_j \chi_{\{t_j\}}(T)\xi$.

Pelo Teorema 3.4.4, para cada t_j tal que $\chi_{\{t_j\}}(T)\xi \neq 0$, o vetor $\chi_{\{t_j\}}(T)\xi$ é um autovetor de T com autovalor t_j, logo $t_j \in \Lambda$ e consequentemente $\xi \in \mathcal{H}_p(T)$.

(ii) Pela definição de $\mathcal{H}_c(T)$ temos que $\mathcal{H}_c(T)$ não contém autovetores de T, logo se $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ segue que $\chi_{\{t\}}(T)\xi = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mu_\xi(\{t\}) = \langle \xi, \chi_{\{t\}}(T)\xi \rangle = 0.$$

Por outro lado, se $\mu_\xi(\{t\}) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, então se $T\eta = \lambda\eta$ segue

$$\begin{aligned}
\langle \eta, \xi \rangle &= \langle \chi_{\{\lambda\}}(T)\eta, \xi \rangle \\
&= \langle \eta, \chi_{\{\lambda\}}(T)\xi \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\xi \in \mathcal{H}_p(T)^\perp = \mathcal{H}_c(T)$.

(iii) Por definição já sabemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_c(T)$ pois $\mathcal{H}_p(T)$ é fechado.
Se $\xi \in \mathcal{H}$, temos $P_p^T\xi \in \mathcal{H}_p(T)$ e por (i) segue $\chi_\Lambda(T)P_p^T\xi = P_p^T\xi$.
Assim, para qualquer conjunto de Borel $\Omega \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\chi_\Omega(T)P_p^T\xi &= \chi_\Omega(T)\chi_\Lambda(T)P_p^T(\xi) \\
&= \chi_\Lambda(T)\chi_\Omega(T)P_p^T\xi \in \mathcal{H}(T).
\end{aligned}$$

Isso implica que $\chi_\Omega(T)P_p^T = P_p^T\chi_\Omega(T)P_p^T$.
Segue que

$$P_p^T\chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T)P_p^T,\ \forall \Omega \in \mathcal{A}.$$

Então pelo Teorema 3.4.2, $\mathcal{H}_p(T)$ reduz T, e como $P_c^T = I - P_p^T$ segue que $\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_p(T)^\perp$ também reduz T. ■

Diante disso temos $T = T_p \oplus T_c$ em que $T_p = TP_p^T$ e $T_c = TP_c^T$.

Definição 3.5.3. *O espectro pontual de T é $\sigma_p(T) := \sigma(T_p)$, e o espectro contínuo de T é $\sigma_c(T) := \sigma(T_c)$.*

Note que T_c não possui autovalores e pela Proposição 3.4.3, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Esses conjuntos não são necessariamente disjuntos.

Definição 3.5.4. *Seja T um operador autoadjunto, então*

(i) *O subespaço singular de T é*

$$\mathcal{H}_s(T) := \{\xi \in \mathcal{H} : \mu_\xi \perp l\}.$$

Logo, $\mathcal{H}_p(T) \subset \mathcal{H}_s(T)$.

(ii) *O subespaço absolutamente contínuo de T é*

$$\mathcal{H}_{ac}(T) := \{\xi \in \mathcal{H} : \mu_\xi \ll l\}.$$

Logo, $\mathcal{H}_{ac}(T) \subset \mathcal{H}_c(T)$.

(iii) *O subespaço singular contínuo de T, denotado por $\mathcal{H}_{sc}(T)$, é o conjunto dos $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\mu_\xi(\mathbb{R}|\Omega) = 0$ para algum conjunto de Borel $\Omega \subset \mathbb{R}$ com $l(\Omega) = 0$ e $\mu_\xi(\Lambda) = 0$ para todo conjunto contável $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Portanto $\mu_\xi \perp l$.*
Logo, $\mathcal{H}_{sc}(T) \subset \mathcal{H}_c(T) \cap \mathcal{H}_s(T)$.

Lema 3.5.5. *$\mathcal{H}_s(T), \mathcal{H}_{ac}(T)$ e $\mathcal{H}_{sc}(T)$ são subespaços vetoriais fechados de $\mathcal{H}$. As respectivas projeções ortogonais são P_s^T, P_{ac}^T e P_{sc}^T.*

Demonstração. Se $\xi, \eta \in \mathcal{H}_s(T)$ então existem conjuntos de Borel Ω_ξ e Ω_η com $l(\Omega_\xi) = 0 = l(\Omega_\eta)$ e $\chi_{\Omega_\xi}(T)\xi = \xi,\ \chi_{\Omega_\eta}(T)\eta = \eta$. Assim, para qualquer $a, b \in \mathbb{C},\ \chi_{\Omega_\xi \cup \Omega_\eta}(T)(a\xi + b\eta) = a\xi + b\eta$ e então $(a\xi + b\eta) \in \mathcal{H}_s(T)$; e $\mathcal{H}_s(T)$ é um subespaço vetorial.

Tomando uma sequência $(\xi_j) \in \mathcal{H}_s(T)$ com $\xi_j \to \xi$, existem conjuntos de Borel $\Omega_j \in \mathcal{A}$ com $l(\Omega_j) = 0$ e $\chi_{\Omega_j}(T)\xi_j = \xi_j,\ \forall j$. Tome $\Omega = \cup_j \Omega_j$ e note que $l(\Omega) = 0$ e $\chi_\Omega(T)\xi = \lim\limits_{j\to\infty} \chi_\Omega(T)\xi_j = \lim\limits_{j\to\infty} \xi_j = \xi$. Logo $\xi \in \mathcal{H}_s(T)$ e $\mathcal{H}_s(T)$ é um subespaço vetorial fechado.

Para mostrar que $\mathcal{H}_{sc}(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$ basta proceder de maneira similar a feita acima.

Finalmente mostraremos que $\mathcal{H}_{ac}(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$.
Se $\xi, \eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$, então para $a \in \mathbb{C}$ temos $\mu_{a\xi} = |a|^2 \mu_\xi \ll l$, e $a\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$. Agora , para todo $\Omega \in \mathcal{A}$ temos

$$\langle (\xi + \eta), \chi_{(\Omega)}(T)(\xi + \eta) \rangle = \mu_\xi(\Omega) + \mu_\eta(\Omega) + \mu_{\eta,\xi}(\Omega) + \mu_{\xi,\eta}(\Omega).$$

Como $|\mu_{\xi,\eta}(\Omega)| \leq \|\xi\|\|\chi_\Omega(T)\eta\| = \|\xi\|\mu_\eta(\Omega)^{\frac{1}{2}}$, segue que $l(\Omega) = 0$ então, $\mu_{\xi,\eta}(\Omega) = 0$. Assim $\mu_{\xi+\eta}(\Omega) = 0$ e então $(\xi + \eta) \in \mathcal{H}_{ac}(T)$. Portanto $\mathcal{H}_{ac}(T)$ é um subespaço vetorial.

Agora, suponha que $(\xi_j) \subset \mathcal{H}_{ac}(T)$ com $\xi_j \to \xi$, e seja $\Omega \in \mathcal{A}$. Segue que

$$\begin{aligned} |\mu_{\xi_j}(\Omega) - \mu_\xi(\Omega)| &= |\langle \xi_j, \chi_\Omega(T)\xi_j \rangle - \langle \xi, \chi_\Omega(T)\xi \rangle| \\ &= |\langle (\xi_j - \xi), \chi_\Omega(T)\xi_j \rangle + \langle \xi, \chi_\Omega(T)(\xi_j - \xi) \rangle| \\ &\leq \|\xi_j - \xi\|(\|\xi_j\| + \|\xi\|) \to 0, \end{aligned}$$

quando $j \to \infty$ e consequentemente $\mu_{\xi_j}(\Omega) \to \mu_\xi(\Omega)$. Se $l(\Omega) = 0$, então $\mu_\xi(\Omega) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu_{\xi_j}(\Omega) = 0$ e $\mu_\xi \ll l$. Portanto, $\mathcal{H}_{ac}(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$. ■

Teorema 3.5.6. *Seja T um operador autoadjunto, então*

(i) $\mathcal{H}_s(T) = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

(ii) $\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_{ac}(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

(iii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{ac}(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$.

(iv) *Cada um desses subespaços, isto é, $\mathcal{H}_k(T)$, $k \in \{p, s, c, ac, sc\}$, reduz o operador T. Denotamos as correspondentes projeções ortogonais por P_k^T e definimos as restrições auto-adjuntas $T_k = TP_k^T$.*

Demonstração. Inicialmente, lembre que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_c(T)$ e que toda medida pode ser escrita de forma única como $\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_{sc}$. Assim, como $\mathcal{H}_{sc}(T) \subset \mathcal{H}_c(T)$ e $\mathcal{H}_{ac}(T) \subset \mathcal{H}_c(T)$, temos $\mathcal{H}_p(T) \perp \mathcal{H}_{ac}(T)$ e $\mathcal{H}_p(T) \perp \mathcal{H}_{sc}(T)$.

Se $\xi \in \mathcal{H}_{sc}(T)$ existe um conjunto de medida (de Lebesgue) zero, $\Lambda \subset \mathbb{R}$, com $\chi_\Lambda(T)\xi = \xi$, e assim se $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ temos $\chi_\Lambda(T)\eta = 0$ e

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \chi_\Lambda(T)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \chi_\Lambda(T)\eta \rangle = 0.$$

Então $\mathcal{H}_{sc}(T) \perp \mathcal{H}_{ac}(T)$.

Agora mostraremos de fato, $(i), (ii), (iii)$ e (iv).

(i) Se $\xi \in \mathcal{H}_s(T) \cap \mathcal{H}_p(T)^\perp$, então $\mu_\xi \perp l$ e $\mu_\xi(\Lambda) = 0$ para todo conjunto contável

$\Lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, devido a decomposição das medidas apresentadas acima, μ_ξ é uma medida puramente singular contínua e $\xi \in \mathcal{H}_{sc}(T)$, daí segue (i).

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}_c(T) \cap \mathcal{H}_{ac}(T)^\perp$, então a parte pontual de μ_ξ é zero e $\mu_\xi \perp l$. Portanto, μ_ξ é uma medida singular contínua e $\xi \in \mathcal{H}_{sc}(T)$, daí segue (ii).

(iii) Segue diretamente das definições de $\mathcal{H}_p(T)$ e $\mathcal{H}_c(T)$ e de (ii).

(iv) Sabemos que $\mathcal{H}_p(T)$ reduz T. Então é suficiente mostrar que $\mathcal{H}_s(T)$ reduz T, e esse fato segue de forma similiar a demonstração do Teorema 3.5.2, basta usar $l(\Lambda) = 0$ e não um conjunto contável. ■

Diante disso, podemos decompor T como

$$T = T_p \oplus T_{ac} \oplus T_{sc}.$$

Definição 3.5.7. *O espectro absolutamente contínuo de T é $\sigma_{ac}(T) := \sigma(T_{ac})$ e o espectro singular contínuo de T é $\sigma_{sc}(T) := \sigma(T_{sc})$.*

Assim,

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T) = \sigma(T).$$

Dizemos que

(i) O operador T tem espectro pontual puro se, $\sigma_{ac}(T) = \emptyset = \sigma_{sc}(T)$.

(ii) O operador T tem espectro absolutamente contínuo puro se, $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{sc}(T)$.

(iii) O operador T tem espectro singular contínuo puro se, $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{ac}(T)$.

Proposição 3.5.8. *Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$.*

(i) *Se $\xi \in \mathcal{H}_k(T)$, $k \in \{p, s, c, ac, sc\}$, e $\eta \in \mathcal{H}$, então*

$$|\mu_{\xi,\eta}(\Lambda)|^2 \leq \mu_\xi(\Lambda)\mu_{P_k^T\eta}(\Lambda), \ \forall \Lambda \in \mathcal{A}.$$

(ii) *Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ e $\eta \in \mathcal{H}$, então $\mu_{\xi,\eta} \ll l$.*

(iii) *Se $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ e $\eta \in \mathcal{H}$, então $\mu_{\xi,\eta}$ é uma medida contínua.*

Demonstração. Note que (ii) e (iii) seguem do item (i), basta observar que, em (ii) como $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ então $\mu_\xi \ll l$ e em (iii) como $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ então $\mu_\xi(\{t\}) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$. Provaremos então (i).

Tendo em vista que $\chi_\Lambda(T)^2 = \chi_\Lambda(T)$ e $(P_k^T)^2 = P_k^T$, são operadores autoadjuntos, temos $P_k^T \chi_\Lambda(T) = \chi_\Lambda(T) P_k^T$ e como por hipótese $P_k^T \xi = \xi$ segue que

$$\begin{aligned}
|\mu_{\xi,\eta}(\Lambda)| &= |\langle \chi_\Lambda(T)\xi, \eta\rangle| \\
&= |\langle \chi_\Lambda(T)^2 P_k^T \xi, \eta\rangle| \\
&= |\langle \chi_\Lambda(T) P_k^T \xi, \chi_\Lambda(T)\eta\rangle| \\
&= |\langle \chi_\Lambda(T)\xi, P_k^T \chi_\Lambda(T)\eta\rangle| \\
&\leq \|\chi_\Lambda(T)\xi\| \, \|\chi_\Lambda(T) P_k^T \eta\| \\
&= (\mu_\xi(\Lambda)\mu_{P_k^T\eta}(\Lambda))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Espectro e Dinâmica Quântica

Diferentes subespaços espectrais de um operador autoadjunto T fornecem diferentes comportamentos do grupo de evolução unitário e^{-itT}, como veremos com os conceitos da probabilidade de retorno quântico. Nossa principal motivação é quando T corresponde ao operador de Schrödinger, pois os conceitos físicos relacionados com os da probabilidade de retorno e os operadores teste são utilizados para investigar esses comportamentos.

4.1 Probabilidade de Retorno

Nessa seção apresentaremos os conceitos de probabilidade de retorno e os operadores teste, baseado em [7]. Além disso vamos discutir dois importantes resultados sobre medidas de Borel em $\mathbb{R}$, são eles: Lema de Riemann-Lebesgue de 1900 e Lema de Wiener de 1935.

Seja T : dom $T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto, $\eta, \xi \in \mathcal{H}$ e suas respectivas medidas espectrais $\mu_\xi = \mu_\xi^T, \mu_{\xi,\eta} = \mu_{\xi,\eta}^T$. Considere, sem perda de generalidade, a equação de Schrödinger

$$\begin{cases} i\dfrac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t) \\ \xi(0) = \xi \in \text{dom } T \end{cases}$$

com tempo inicial $t_0 = 0$, $\xi(t) = e^{-itT}\xi$ a solução dessa equação.

As principais quantidades consideradas, para estudar o comportamento da dinâmica

$e^{-itT}\xi$ são:

(i) ***Probabilidade de retorno*** com condição inicial ξ, no tempo t,

$$p_\xi(t) := |\langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle|^2,$$

e de forma geral

$$p_{\eta,\xi}(t) := |\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle|^2.$$

(ii) ***Probabilidade de retorno médio*** no tempo $t \neq 0$,

$$\langle p_\xi\rangle(t) := \frac{1}{t}\int_0^t p_\xi(s)\ ds,$$

e de forma geral

$$\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) := \frac{1}{t}\int_0^t p_{\eta,\xi}(s)\ ds.$$

(iii) ***Probabilidade de retorno total*** no estado inicial ξ,

$$\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)\ dt,$$

e de forma geral

$$\int_{\mathbb{R}} p_{\eta,\xi}(t)\ dt.$$

(iv) Um ***Operador teste*** é um operador autoadjunto não-limitado $A \geq 0$ com espectro discreto puro positivo e tal que $e^{-itT}\text{dom } A \subset \text{dom } A,\ \forall t \in \mathbb{R}$. O ***valor esperado*** de A no estado ξ e tempo t é dado por

$$\mathcal{E}_A^\xi(t) := \langle e^{-itT}\xi, Ae^{-itT}\xi\rangle.$$

(v) A ***média temporal*** para A é

$$\langle \mathcal{E}_A^\xi\rangle(t) := \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{E}^\xi(s)\ ds.$$

Pelo Teorema Espectral segue a importante relação,

$$\begin{aligned} p_\xi(t) &= |\langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle|^2 \\ &= \Big|\int_{\sigma(T)} e^{-itx}\ d\mu_\xi(x)\Big|^2 \\ &= |\widehat{\mu}_\xi(t)|^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\widehat{\mu}_\xi(t) = \displaystyle\int_{\sigma(T)} e^{-it\lambda}\, d\mu_\xi(\lambda)$ é chamada de Transformada de Fourier da medida μ_ξ.

Logo, o comportamento da probabilidade de retorno e os valores esperados de operadores teste estão naturalmente relacionados com as medidas espetrais de T.

Apresentamos agora dois resultados gerais sobre medidas de Borel em $\mathbb{R}$, a saber, o Lema de Riemann-Lebesgue e o Lema de Wiener.

Lema 4.1.1. ***(Lema de Riemann-Lebesgue)*** *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f}$ denota sua transformada de Fourier, então $\widehat{f}$ é contínua e $\displaystyle\lim_{|p|\to\infty} \widehat{f}(p) = 0$.*

Demonstração. Lembre que a transformada de Fourier, dada por $\widehat{f}(p) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} f(x)\, dx$, é contínua. Para uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$, denote $f_h(t) = f(t+h)$. Ainda, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tem-se que $\|\phi_h - \phi\|_1 \to 0$ quando $h \to 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $L^1(\mathbb{R})$, dado $\varepsilon > 0$ tome $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\|f - \phi\|_1 < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f_h - \phi_h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_h(x) - \phi_h(x)|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - \phi(x+h)|\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y) - \phi(y)|\, dy \\ &= \|f - \phi\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando agora um $|h|$ suficientemente pequeno tal que $\|\phi_h - \phi\|_1 < \varepsilon$ teremos

$$\begin{aligned} \|f_h - f\|_1 &= \|f_h - \phi_h + \phi_h - \phi + \phi - f\|_1 \\ &\le \|f_h - \phi_h\|_1 + \|\phi_h - \phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ quando $h \to 0$, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Note que este resultado vale para todo $L^q(\mathbb{R}), 1 \le q < \infty$.

Assim, para $p \neq 0$ temos

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} f(x)\, dx \tag{4.2}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+\frac{\pi}{p})p} f(x)\, dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} f(x - \frac{\pi}{p})\, dx \tag{4.3}$$

e por (4.2) e (4.3) temos

$$\begin{aligned}
2\left(\sqrt{2\pi}\, |\widehat{f}(p)|\right) &= |2(\sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(p))| \\
&= |\sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(p) + \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(p)| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} f(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} f(x - \frac{\pi}{p})\, dx \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{-ixp} \left(f(x) - f(x - \frac{\pi}{p}) \right)\, dx \Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x - \frac{\pi}{p})|\, dx \\
&= \left\| f(x) - f(x - \frac{\pi}{p}) \right\|_1 \to 0,
\end{aligned}$$

quando $|p| \to \infty$. ■

Lema 4.1.2. *(**Lema de Wiener**) Se μ é uma medida de Borel finita (real ou complexa) sobre $\mathbb{R}$ e $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{\lambda\}) \neq 0\}$ então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\widehat{\mu}(s)|^2\, ds = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\mu(\{\lambda\})|^2.$$

Demonstração. Como μ é uma medida de Borel finita, temos que Λ é um conjunto contável. Então pela transformada de Borel dessa medida, $\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu(x)$. Pelo Teorema de Fubini e $\overline{\mu}$ sendo o complexo conjugado de μ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t |\widehat{\mu}(s)|^2\, ds &= \frac{1}{t} \int_0^t \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\, d\mu(x) \Big|^2\, ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isu}\, d\mu(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-isv}\, d\overline{\mu}(v) \right)\, ds \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u-v)s}\, d\mu(u)\, d\overline{\mu}(v) \right)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(u, v, t)\, d\mu(u)\, d\overline{\mu}(v),
\end{aligned}$$

onde

$$g(u, v, t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad u = v \\ -i\dfrac{1 - e^{-i(u-v)t}}{t(u-v)} & \text{se} \quad u \neq v \end{cases}.$$

Como $\lim\limits_{t\to\infty} g(u,v,t) = \chi_{\{u\}}(v)$ e essa função é dominada pela função constante $1 \in L^1_{\mu\times\overline{\mu}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^1 |\widehat{\mu}(s)|^2\, ds &= \lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(u,v,t)\ d\mu(u)\ d\overline{\mu}(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to\infty} g(u,v,t)\ d\mu(u)\ d\overline{\mu}(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{u\}}(v)\ d\mu(u)\ d\overline{\mu}(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{v\})\ d\overline{\mu}(v)\\
&= \sum_{v\in\Lambda} |\mu\{v\}|^2.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.1.3. *Se $\xi,\eta\in\mathcal{H}$, então existe $g\in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})\cap L^1_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle = \int_{\sigma(T)} e^{-itx} g(x)\ \ d\mu_\xi(x).$$

Além disso, $\|g\|_{L^2_{\mu_\xi}} \leq \|\eta\|$.

Demonstração. Seja $\mathcal{H}_\xi$ o subespaço cíclico gerado por ξ, onde $\mathcal{H}_\xi$ reduz T e é unitariamente equivalente a $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$. Temos que $T|_{\mathcal{H}_\xi}$ é representado pelo operador de multiplicação $\mathcal{M}_h,\ h(x)=x$. O vetor ξ é representado em $L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ pela função constante $1(x)=1$ e o grupo de evolução unitário e^{-itT} é representado por $\mathcal{M}_{e^{-itx}}$.

Se P_ξ é o operador de projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_\xi$, então para $\eta\in\mathcal{H}$, o vetor $P_\xi\eta$ é representado por uma função $\overline{g}\in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$, e então $\|g\|_{L^2_{\mu_\xi}}(\mathbb{R})\leq\eta$. Assim, como $e^{-itT}\xi\in\mathcal{H}_\xi$ temos

$$\begin{aligned}
\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle &= \langle P_\xi\eta, e^{-itT}\xi\rangle\\
&= \langle \overline{g(x)}, e^{-itx}1\rangle_{L^2_{\mu_\xi}}\\
&= \int_{\sigma(T)} g(x)e^{-itx}\ d\mu_\xi(x).
\end{aligned}$$

Tomando $t=0$ em ambos os lados da igualdade, segue que

$$\langle \eta,\xi\rangle = \int_{\sigma(T)} g(x)\ d\mu_\xi(x) < \infty.$$

Logo, $g \in L^1_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$. ■

Agora apresentaremos alguns resultados que mostram como o tipo espectral de T influencia no comportamento das probabilidades de retorno.

Teorema 4.1.4. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) *Para qualquer $\xi \in \mathcal{H}$ o limite*

$$\mathfrak{X}_\xi := \lim_{t\to\infty} \langle p_\xi \rangle(t)$$

existe. Além disso, $\mathfrak{X}_\xi = 0$ se, e somente se, $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$.

(ii) *Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ então $\lim_{t\to\infty} p_\xi(t) = 0$.*

Demonstração. (i) Por (4.1) e pelo Lema de Wiener

$$\langle p_\xi \rangle(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p_\xi(s)\ ds = \frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{\mu}_\xi(s)|^2\ ds = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\mu_\xi(\{\lambda\})|^2.$$

Além disso, note que $\mathfrak{X}_\xi = 0$ se, e somente se, μ_ξ é uma medida contínua, ou seja, $\mu_\xi \in \mathcal{H}_c(T)$.

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ então $\mu_\xi \ll l$. Assim, existe $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, com $\dfrac{d\mu_\xi}{dl} = f$ por Radon-Nikodym. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\ d\mu_\xi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\ dx \\ &= \widehat{f}(t). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$, e pelo Lema de Riemann Lebesgue temos

$$\lim_{t\to\infty} \langle \xi, e^{-itT}\xi\rangle = \lim_{t\to\infty} \widehat{f}(t) = 0.$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty} |\langle \xi, e^{-etT}\xi\rangle|^2 = 0 = \lim_{t\to\infty} p_\xi(T)$. ■

De forma geral, tem-se

Corolário 4.1.5. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) *$\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ se, e somente se, $\lim_{t\to\infty} \langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) = 0$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$.*

(ii) *Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$, então $\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\xi}(t) = 0$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Em outras palavras,*

$$w - \lim_{t\to\infty} e^{-itT}\xi = 0.$$

Demonstração. (i) Se $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ então pela Proposição 3.5.8, $\mu_{\xi,\eta}$ é uma medida contínua para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Pelo Lema de Wiener temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \langle p_{\eta,\xi}(t)\rangle &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_{\eta,\xi}(s)\ ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{\mu}_{\eta,\xi}(s)|^2\ ds \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} |\mu_{\eta,\xi}(\{\lambda\})|^2
\end{aligned}$$

e (i) segue.

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ então $\mu_{\xi,\eta} \ll l$ e assim $d\mu_{\xi,\eta} = f(x)\ dx,\ f \in L^1(\mathbb{R})$. Logo, pelo Lema 4.1.3

$$\begin{aligned}
\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(x)\ d\mu_\xi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(x) f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Considerando $t = 0$ segue que

$$\langle \eta, \xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\ d(x) < \infty$$

e $fg \in L^1(\mathbb{R})$. Assim pelo Lema de Riemann-Lebesgue

$$\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(x) f(x)\ dx \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Portanto,

$$p_{\eta,\xi}(t) = |\langle \eta, e^{-itx}\xi\rangle|^2 \to 0 \ \text{ quando } t \ \to \infty.$$

■

Corolário 4.1.6. *Seja T um operador autoadjunto. Então $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ se, e somente se,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds = 0,$$

para todo $\eta \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Sabemos que

$$\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) = \frac{1}{t}\int_0^t p_{\eta,\xi}(s)\; ds = \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle|^2 \; ds.$$

Assim, por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds &\leq \frac{1}{t}\left(\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle|^2 \; ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t 1 \; ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\left(\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle|^2 \; ds\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle|^2 \; ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds \leq \left(\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \; \forall \eta \in \mathcal{H}. \tag{4.4}$$

Se $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$, pelo Corolário 4.1.5 $\lim\limits_{t\to\infty}\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$ e por (4.4) temos que $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds = 0$.

Reciprocamente, se $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds = 0$, como

$$\begin{aligned} \langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle||\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle|\|\eta\|\|e^{-isT}\xi\| \; ds \\ &= \|\eta\|\|\xi\|\frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\xi\rangle| \; ds, \end{aligned}$$

segue que $\lim\limits_{t\to\infty}\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) = 0$ e assim $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ pelo Corolário 4.1.5. ■

Portanto, sobre a evolução temporal $e^{-itT}\xi$, qualquer estado η, e em particular o estado inicial ξ, não é mais atingido em média temporal e $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$, e para elementos de $\mathcal{H}_{ac}(T)$ a média temporal não é necessária. Para elementos $\xi \in \mathcal{H}_p(T)$ temos $\mathfrak{X}_\xi > 0$ e o estado inicial não é "esquecido".

4.2 O Teorema RAGE

Um importante resultado no estudo do comportamento da dinâmica dos valores esperados dos operadores teste é o Teorema RAGE. O termo RAGE vem das iniciais de D.Ruelle, W.O.Amrein, V.Georgescu e V.Enss.

Teorema 4.2.1. *(**Teorema RAGE**) Seja T um operador autoadjunto em $\mathcal{H}$.*

(i) *$\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ se, e somente se, para qualquer operador compacto $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left\|Ke^{-isT}\xi\right\|^2 ds = 0.$$

(ii) *Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$, então para qualquer operador compacto $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,*

$$\lim_{t\to\infty} Ke^{-itT}\xi = 0.$$

Demonstração. Note primeiramente que, se $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é compacto, então ele é o limite em $B(\mathcal{H})$ de operadores de posto finito. Sendo assim, é suficiente considerar operadores de posto 1, que são

$$K\xi = \langle \eta, \xi\rangle\zeta$$

para algum $\eta, \zeta \in \mathcal{H}$. Neste caso temos,

$$\|Ke^{-itT}\xi\| = \|\langle\eta, e^{-itT}\xi\rangle\zeta\| = \|\zeta\||\langle\eta, e^{-itT}\xi\rangle|.$$

Isso implica que

$$\left\|Ke^{-itT}\xi\right\|^2 = \|\zeta\|^2\left|\langle\eta, e^{-itT}\xi\rangle\right|^2. \tag{4.5}$$

(i) Por (4.5) temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left\|Ke^{-isT}\xi\right\|^2 ds &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|\zeta\|^2\left|\langle\eta, e^{-isT}\xi\rangle\right|^2 ds \\ &= \|\zeta\|^2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left|\langle\eta, e^{-isT}\xi\rangle\right|^2 ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pelo Corolário 4.1.5 e por (4.6), $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ se, e somente se, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left|\langle\eta, e^{-isT}\xi\rangle\right|^2 ds = 0.$ Mas isso ocorre se, e somente se, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left\|Ke^{-isT}\xi\right\|^2 ds = 0.$

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ pelo Corolário 4.1.5 temos

$$\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\xi}(t) = \lim_{t\to\infty} \left|\langle\eta, e^{-isT}\xi\rangle\right|^2 = 0.$$

Sendo assim,

$$\lim_{t\to\infty} Ke^{-isT}\xi \quad = \quad \lim_{t\to\infty}\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle\zeta = 0.$$

■

Note que as projeções em subespaços vetoriais de dimensão finita de $\mathcal{H}$ são operadores compactos importantes. Assim os elementos de $\mathcal{H}_c(T)$ podem ser interpretados como aqueles que "escapam", em média temporal, de qualquer subespaço de dimensão finita, e a média não é necessária no caso de $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$.

Corolário 4.2.2. *Seja T um operador autoadjunto e A um operador teste. Se $P_c(T)\xi \neq 0$, então*

(i) *A função $t \mapsto \mathcal{E}_A^\xi(t)$ é não-limitada.*

(ii) $\lim_{|t|\to\infty} \langle \mathcal{E}_A^\xi\rangle(t) = \infty$.

Demonstração. Note que (i) é consequência de (ii). Isto é, se vale (ii) então

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_0^t \mathcal{E}_A^\xi(s)\ ds = \infty.$$

Se $t \mapsto \mathcal{E}_A^\xi(t)$ fosse limitada teríamos que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \mathcal{E}_A^\xi(s)\ ds \leq \dfrac{1}{t}.c.t = c$ e assim (ii) não valeria. Sendo assim, é suficiente mostrar (ii).

(ii) Sejam $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...$ os autovalores de A e Q_N a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial gerado pelos autovetores de A associados com os autovalores $\leq \lambda_N$. Como A possui espectro discreto puro temos $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$. Então Q_N tem posto finito, logo é um operador compacto, e $Q_N A = AQ_N$.

Denote $\xi_c = P_c\xi$ e $\xi_p = P_p\xi$, por hipótese $\xi_c \neq 0$. Também denote $\xi(t) = e^{-itT}\xi$ e similarmente $\xi_c(t) = e^{-itT}\xi_c,\ \xi_p(t) = e^{-itT}\xi_p$.

Temos assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_A^\xi(t) &= \langle e^{-itT}\xi, Ae^{-itT}\xi\rangle = \langle \xi(t), A\xi(t)\rangle \\
&= \langle (I-Q_N+Q_N)\xi(t), A(I-Q_N+Q_N)\xi(t)\rangle \\
&= \langle (I-Q_N)\xi(t)+Q_N\xi(t), A(I-Q_N)\xi(t)+AQ_N\xi(t)\rangle \\
&= \langle (I-Q_N)\xi(t), A(I-Q_N)\xi(t)\rangle + \langle (I-Q_N)\xi(t), AQ_N\xi(t)\rangle \\
&+ \langle Q_N\xi(t), A(I-Q_N)\xi(t)\rangle + \langle Q_N\xi(t), AQ_N\xi(t)\rangle \\
&= \langle Q_N\xi(t), AQ_N\xi(t)\rangle + \langle (I-Q_N)\xi(t), A(I-Q_N)\xi(t)\rangle \\
&\geq \langle (I-Q_N)\xi(t), A(I-Q_N)\xi(t)\rangle \geq \lambda_N \|(I-Q_N)\xi(t)\|^2 \\
&= \lambda_N \|\xi(t)-Q_N\xi(t)\|^2 = \lambda_N\left(\|\xi(t)\|^2 - \|Q_N\xi(t)\|^2\right) \\
&= \lambda_N\left(1-\|Q_N\xi_c(t)\|^2 - \|Q_N\xi_p(t)\|^2\right) \\
&\geq \lambda_N\left(1-\|Q_N\xi_c(t)\|^2 - \|\xi_p\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Agora pelo Teorema RAGE temos

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|Q_N\xi_c(s)\|^2\, ds = 0. \tag{4.7}
$$

E como $\mathcal{E}_A^\xi(t) \geq \lambda_N\left(1-\|Q_N\xi_c(t)\|^2 - \|\xi_p\|^2\right)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_A^\xi(t)\rangle &= \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{E}^\xi(s)\, ds \\
&\geq \frac{\lambda_N}{t}\int_0^t \left(1-\|Q_N\xi_c(t)\|^2 - \|\xi_p\|^2\right)\, ds \\
&= \lambda_N\left(1-\frac{1}{t}\int_0^t \|Q_N\xi_c(s)\|^2 ds - \|\xi_p\|^2\right) \\
&= \lambda_N\left(1-\|\xi_p\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to\infty}\inf\langle \mathcal{E}_A^\xi(t)\rangle \geq \lambda_N\left(1-\|\xi_p\|^2\right) = \lambda_N\|\xi_c\|^2. \tag{4.8}
$$

Portanto como $\lambda_j \to \infty$ quando $j\to\infty$, e por (4.7) e (4.8), segue (ii). ■

Corolário 4.2.3. *Se* $P_{ac}(T)\xi \neq 0$, *então* $\lim\limits_{|t|\to\infty} \mathcal{E}_A^\xi(t) = \infty$.

Demonstração. Segue imediatamente do Corolário 4.2.2. ■

4.3 Decaimento da Probabilidade de Retorno

Nesta seção vamos apresentar caracterizações de subespaços contínuos de um operador autoadjunto T, em termos da taxa de decaimento da probabilidade de retorno para zero quando $|t| \to \infty$. Aqui denotaremos l a medida de Lebesgue, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier.

Lema 4.3.1. *Sejam T um operador autoadjunto, $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ e $\eta \in \mathcal{H}$. Então:*

(i) $\langle \eta, e^{-itT}\xi \rangle = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{d_{\mu_{\eta,\xi}}}{dl}\right)(t)$, *e assim*

$$p_{\eta,\xi}(t) = 2\pi \left| \mathcal{F}\left(\frac{d_{\mu_{\eta,\xi}}}{dl}\right)(t)\right|^2.$$

(ii) *Para Lebesgue q.t.p* $\left|\frac{d_{\mu_{\eta,\xi}}}{dl}\right|^2 \leq \frac{d_{\mu_\eta}}{dl}\frac{d_{\mu_\xi}}{dl}$, *com* $\frac{d_{\mu_\eta}}{dl} = 0$ *se* $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)^\perp$.

Demonstração. (i) Como $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ então $\mu_{\eta,\xi} \ll l$. Assim,

$$\langle \eta, e^{-itT}\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_{\eta,\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, \frac{d\mu_{\eta,\xi}}{dl}(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{d_{\mu_{\eta,\xi}}}{dl}\right)(t).$$

Além disso,

$$p_{\eta,\xi}(t) = |\langle \eta, e^{-itT}\xi\rangle|^2 = \sqrt{2\pi}\left|\mathcal{F}\left(\frac{d_{\mu_{\eta,\xi}}}{dl}\right)(t)\right|^2.$$

(ii) Se $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)^\perp$, então $\mu_{\eta,\xi} = 0$, logo $\frac{d_{\mu_\eta}}{dl} = 0$. Assim é possível assumir que $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$. Por Cauchy-Schwarz, para todo conjunto de Borel $\Lambda \in \mathcal{A}$ temos

$$\begin{aligned} |\mu_{\eta,\xi}(\Lambda)|^2 &= |\langle \eta, \chi_\Lambda(T)\xi\rangle|^2 = |\langle \chi_\Lambda(T)\eta, \chi_\Lambda(T)\xi\rangle|^2 \\ &\leq \|\chi_\Lambda(T)\eta\|^2 \|\chi_\Lambda(T)\xi\|^2 = \langle \eta, \chi_\Lambda(T)\eta\rangle\langle \xi, \chi_\Lambda(T)\xi\rangle = \mu_\eta(\Lambda)\mu_\xi(\Lambda). \end{aligned}$$

Agora tomando $\Lambda = J_x$, isto é, um intervalo aberto contendo x temos

$$\left|\frac{\mu_{\eta,\xi}(J_x)}{l(J_x)}\right|^2 \leq \frac{\mu_\eta(J_x)}{l(J_x)}\frac{\mu_\xi(J_x)}{l(J_x)},$$

e para $l(J_x) \to 0$ verifica-se que para $l - q.t.p$

$$\left|\frac{d\mu_{\eta,\xi}}{dl(J_x)}\right|^2 \leq \frac{d\mu_\eta}{dl}\frac{d\mu_\xi}{dl},$$

desde que as funções envolvidas sejam absolutamente contínuas. ■

Lema 4.3.2. *Sejam $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Se a função $t \mapsto s(t) = \langle \eta, e^{-itT}\xi \rangle$ é um elemento de $L^2(\mathbb{R})$, então $\mu_{\eta,\xi} \ll l$.*

Demonstração. Assuma que $s \in L^2(\mathbb{R})$. Então para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a função $s(t)\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ e a aplicação linear $\psi \mapsto L(\psi) := \int_{\mathbb{R}} \psi(t)s(t)\ dt$ é limitada se $|L(\psi)| \leq \|s\|_2 \|\psi\|_2$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $\overline{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi}(t)\psi(t)\ dt = \langle \phi, \psi \rangle = L(\psi)$$

e por Fubini

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\ d\mu_{\eta,\xi}(x) \right) dt \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(x)\ d\mu_{\eta,\xi}(x) \\ &= \sqrt{2\pi} \langle \eta, \widehat{\psi}(t)\xi \rangle. \end{aligned}$$

Dado um intervalo limitado $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tome uma sequência $0 \leq \widehat{\psi}_n \in C_0^\infty(\widehat{\mathbb{R}})$ de forma que $\widehat{\psi}_n \uparrow \chi_{(a,b)}$. Assim, pelo Lema 3.2.4 e pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\mu_{\eta,\xi}((a,b)) &= \sqrt{2\pi}\langle \eta, \chi_{(a,b)}(T)\xi \rangle = \sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} \langle \eta, \widehat{\psi}_n(T)\xi \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} L(\psi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi}(t)\psi_n(t)\ dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\overline{\phi_n}}(t)\widehat{\psi_n}(t)\ dt = \int_{(a,b)} \widehat{\overline{\phi_n}}(t). \end{aligned}$$

Como isso vale para todo intervalo limitado (a, b) e $\mu_{\eta,\xi}$ é finito, segue que $\widehat{\overline{\phi}} \in L^1(\mathbb{R})$ e $\dfrac{d\mu_{\eta,\xi}}{dl} = \widehat{\overline{\phi}}$. Logo, $\mu_{\eta,\xi} \ll l$. ■

Teorema 4.3.3. *Seja T um operador autoadjunto. Então $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ se, e somente se, existe um conjunto denso $E(\xi) \sqsubseteq \mathcal{H}$ tal que a função $t \mapsto p_{\eta,\xi}(t)$ seja um elemento de $L^1(\mathbb{R})$ para todo $\eta \in E(\xi)$.*

Demonstração. Suponha que exista o conjunto $E(\xi)$. Então pelo Lema 4.3.2, $\mu_{\eta,\xi} \ll l$ para cada $\eta \in E(\xi)$. Assim, para qualquer $\Lambda \in \mathcal{A}$ temos

$$\begin{aligned} \mu_{\eta,\xi}(\Lambda) &= \langle \eta, \chi_\Lambda(T)\xi \rangle \\ &= \langle \eta, \chi_\Lambda(T)P_{ac}(T)\xi \rangle + \langle \eta, \chi_\Lambda(T)P_p(T)\xi \rangle + \langle \eta, \chi_\Lambda(T)P_{sc}(T)\xi \rangle \end{aligned}$$

e como $\mu_{\eta,\xi} \ll l$ segue pela Proposição 3.5.8 que

$$\langle \eta, \chi_\Lambda(T)P_p(T)\xi\rangle = \langle \eta, \chi_\Lambda(T)P_{sc}(T)\xi\rangle = 0, \ \forall \eta \in E(\xi).$$

Assim, como $E(\xi)$ é denso em $\mathcal{H}$ e $P_p\xi = 0 = P_{sc}\xi$ temos $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$.

Suponha agora que $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ e seja $E(\xi)$ como definido acima, isto é, o vetor η de modo que $t \mapsto p_{\eta,\xi}(t)$ seja um elemento de $L^1(\mathbb{R})$. Vamos mostrar que $E(\xi)$ é denso em $\mathcal{H}$. Se $\eta \in \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T)$, então $p_{\eta,\xi}(t) = 0$, para todo t. Assim é suficiente considerar $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ e verificar o resultado para η em um subconjunto denso de $\mathcal{H}_{ac}(T)$.

Pelo Lema 4.3.1(i) e Teorema 2.2.45, temos $p_{\eta,\xi} \in L^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\dfrac{d\mu_{\eta,\xi}}{dl} \in L^2(\mathbb{R})$. Para cada vetor $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$ existe $M = M(\eta) < \infty$ tal que, para $l - q.t.p.$ temos

$$0 \leq \frac{d\mu_\eta}{dl}(x) \leq M,$$

assim, pelo Lema 4.3.1(ii),

$$\left\| \frac{d\mu_{\eta,\xi}}{dl} \right\|_2^2 \leq M(\eta) \left\| \frac{d\mu_\xi}{dl} \right\|_1 < \infty.$$

Uma vez que η é denso em $\mathcal{H}_{ac}(T)$, o resultado segue. ■

Como consequência desses resultados, a seguir apresentamos dois importantes corolários para a caracterização dos subespaços contínuos em termos da taxa de decaimento das probabilidades de retorno.

Corolário 4.3.4. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) $\mathcal{H}_{ac}(T) = \overline{\{\xi \in \mathcal{H} : p_\xi(t) \in L^1(\mathbb{R})\}}$.

(ii) *Se existe $c, \varepsilon > 0$ tal que para $|t|$ grande,*

$$p_\xi(t) \leq \frac{c}{|t|^{1+\varepsilon}},$$

então $\xi \in \mathcal{H}_{ac}(T)$.

Demonstração. (i) Pelo Lema 4.3.2, o conjunto $\Omega = \{\xi \in \mathcal{H} : p_\xi(t) \in L^1(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{H}_{ac}(T)$, e se $\mathcal{H}_{ac}(T)$ é um subespaço fechado, $\overline{\Omega} \subset \mathcal{H}_{ac}(T)$. Então pelo Teorema 4.3.3, $\eta \in \mathcal{H}_{ac}(T)$

com a derivada de Radon-Nikodym $\dfrac{d_{\mu_\eta}}{dl} \in \Omega$. Mas como esse conjunto é denso em $\mathcal{H}_{ac}(T)$, segue que $\overline{\Omega} = \mathcal{H}_{ac}(T)$.

(ii) Se neste caso a função dada $t \mapsto p_\xi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ o resultado segue imediatamente de (i) desse corolário. ■

Corolário 4.3.5. *Seja T um operador autoadjunto.*

(i) $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$ *com* $P_{sc}(T)\xi \neq 0$ *se, e somente se,* $\mathfrak{X}_\xi = 0$ *e existe um conjunto aberto* $\emptyset \neq X(\xi) \subset \mathcal{H}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} p_{\eta,\xi}(t)\ dt = \infty,$$

para todo $\eta \in X$.

(ii) *Se* $0 \neq \xi \in \mathcal{H}_{sc}(T)$*, então* $\mathfrak{X}_\xi = 0$ *e* $\int_{\mathbb{R}} p_\xi(t)\ dt = \infty$.

Demonstração. (i) Pelo Teorema 4.1.4 temos que $\mathfrak{X}_\xi = 0$ se, e somente se, $\xi \in \mathcal{H}_c(T)$. Como existe um conjunto aberto $X(\xi)$ pelo Teorema 4.3.3, segue o resultado.

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}_{sc}(T)$ então $p_\xi \notin L^1(\mathbb{R})$ pelo Corolário 4.3.4. Logo segue (ii). ■

Note que se $\xi \in \mathcal{H}_p(T)$, então $\int_{\mathcal{H}} p_\xi(t)\ dt = \infty$ mas $\mathfrak{X}_\xi \neq 0$. Isso é claro para autovetores, e um caso geral segue do Corolário 4.3.4(i).

Observe que existem variações da dinâmica de acordo com o tipo espectral, a saber, pontual, absolutamente contínuo ou singular contínuo. A maioria dos resultados apresentados aqui foram qualitativos, no sentido de anulamento da probabilidade de retorno ou crescimento dos valores esperados dos operadores teste.

Enquanto isso, na Seção 4.3, foram apresentados alguns resultados quantitativos, no sentido de apresentar taxas de crescimento e decaimento da probabilidade de retorno.

Capítulo 5

Probabilidade de Retorno e as Dimensões de Correlação da Medida Espectral

Neste capítulo veremos, baseado no artigo [1], como certos coeficientes de correlação da medida espectral estão relacionados com o comportamento da probabilidade de retorno fornecendo resultados mais quantitativos. Aqui, usaremos C para denotar diferentes constantes positivas.

5.1 Medidas Uniformemente Localmente α-dimensionais

Uma maneira de obter estimativas quantitativas na dinâmica é assumir hipóteses específicas nas medidas espectrais. Nesta seção veremos algumas consequências na dinâmica assumindo que as medidas espectrais são uniformemente localmente α-dimensionais.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, denotaremos $B_\varepsilon(x) = \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Definição 5.1.1. *Sejam $0 \leq \alpha \leq 1$ e μ uma medida de Borel positiva e finita sobre $\mathbb{R}$.*

(i) *μ é dita localmente $\alpha - dimensional$ em x_0 se:*

$$\exists\, C < +\infty \text{ tal que } \forall \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1 \text{ tem-se } \mu\left(B_\varepsilon\left(x_0\right)\right) \leq C\varepsilon^\alpha.$$

(ii) *μ é dita uniformemente localmente $\alpha-dimensional(L.U.\alpha)$ se:*

$\exists\ C < +\infty$ e $0 < \varepsilon_0 < 1$ tal que, para x $\mu - q.t.p.$, $\forall\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, tem-se $\mu\left(B_\varepsilon\left(x\right)\right) \leq C\varepsilon^\alpha$.

Observações:

(i) Toda medida μ positiva e finita é $L.U.0$. De fato, se μ é positiva finita então $\exists\ C > 0$ tal que $\mu(A) \leq C$, $\forall\ A \in \mathcal{A}$. Assim para $\varepsilon_0 \in (0,1)$ temos para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\mu(B_\varepsilon(x)) \leq C = C.\varepsilon^0$ e o resultado segue.

(ii) Uma medida μ que tem uma componente pontual pura em x_0 possui um expoente local igual a 0 em x_0.

(iii) Se $\mu \ll l$ com derivada de Radon-Nykodym f limitada então μ é L.U.1. Observe que isso vale em particular para a medida de Lebesgue l. De fato, existe $0 < C < \infty$ tal que

$$|f(x)| \leq C,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tome $0 < \varepsilon_0 < 1$ então para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, temos

$$\begin{aligned}\mu(B_\varepsilon(x)) &= \int_{B_\varepsilon(x)} f(x)\ dx \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} |f(x)|\ dx \leq C\int_{B_\varepsilon(x)} dx = C\varepsilon\end{aligned}$$

e o resultado segue.

(iv) Uma medida que é localmente α-dimensional em x_0, é localmente β-dimensional em x_0 para qualquer $0 \leq \beta \leq \alpha$. De fato, se μ é localmente α-dimensional existe $C < \infty$ tal que para todo $0 < \varepsilon < 1$, $\mu(B_\varepsilon(x_0)) \leq C\varepsilon^\alpha$. Assim, se $0 \leq \beta \leq \alpha$ então para todo $0 < \varepsilon < 1$ temos $\mu(B_\varepsilon(x)) \leq C\varepsilon^\alpha \leq C\varepsilon^\beta$.

Em [13], Strichartz demonstrou o seguinte resultado, (veja também [5, 7]):

Teorema 5.1.2. *Se μ é uma medida finita em $\mathbb{R}$ que é $L.U.\alpha$, então existe uma constante $C_\mu > 0$, dependendo somente de μ, tal que, para toda $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$,*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs} f(x)\ d\mu(x)\right|^2 ds \leq C_\mu \frac{\|f\|_2^2}{t^\alpha}, \tag{5.1}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Se denotarmos por $\widehat{\mu}$ a transformada de Fourier de uma medida μ, note que o lado esquerdo de (5.1) pode ser escrito como $\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{f\mu}(s)|^2\, ds$, ou seja, a média temporal da transformada de Fourier da medida $f\mu$.

Como $1 \le ee^{\frac{-s^2}{t^2}}$ para $0 \le s \le t$ e $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{f\mu}(s)|^2\, ds &\le \frac{1}{t}\int_0^t e.e^{\frac{-s^2}{t^2}}|\widehat{f\mu}(s)|^2 ds \le \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}|\widehat{f\mu}(s)|^2 ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}f(x)d\mu(x)\right|^2 ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}f(x)d\mu(x)\right)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iys}f(y)d\mu(y)\right)}\right] ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}f(x)d\mu(x)\right)\left(\int e^{iys}\overline{f(y)}d\mu(y)\right)\right] ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}e^{-ixs}e^{iys}d\mu(x)d\mu(y)\right) ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}e^{-i(x-y)s}d\mu(x)d\mu(y)\right) ds \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}e^{-i(x-y)s}ds\right) d\mu(x)d\mu(y) \\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}-i(x-y)s}dt\right) d\mu(x)d\mu(y).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Como para $a > 0, b \in \mathbb{R}$ temos $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+ibx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-b^2}{4a}}$, segue de (5.2) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{f\mu}(s)|^2\, ds &\le \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}\left(\sqrt{\pi}\ t\ e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}}\right) d\mu(x)d\mu(y) \\
&= e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)\overline{f(y)}e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(x)d\mu(y) \\
&\le e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)||\overline{f(y)}|e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(x)d\mu(y) \\
&= e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)|e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{8}}|f(y)|e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{8}} d\mu(x)d\mu(y) := I
\end{aligned} \tag{5.3}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
I &\le e\sqrt{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(y)|^2 e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}}\ d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(y)d\mu(x).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Portanto de (5.3) e (5.4) obtemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{f\mu}(s)|^2\, ds \le e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(y)d\mu(x). \tag{5.5}$$

Agora para uma segunda estimativa, fixe x e tome

$$\Omega_n = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{n}{t} \le |x-y| \le \frac{n+1}{t} \right\}.$$

Então para $t > 1$ temos $l(\Omega_n) \le \dfrac{1}{t} < 1$. Como μ é $L.U.\alpha$, existe uma constante C_1 tal que $\mu(\Omega_n) \le C_1 \dfrac{1}{t^\alpha}$.

Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega_n} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(y) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{4}} \int_{\Omega_n} d\mu(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{4}} \mu(\Omega_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{4}} C_1 t^{-\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Chamando $C_2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{4}}\, C_1$, segue de (5.5) e (5.6) que para todo $t > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{f\mu}(s)|^2\, ds &\le e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, C_2\, t^{-\alpha}\, d\mu(x) \\
&= e\sqrt{\pi}\, C_2\, t^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu(x) = C\, \|f\|_2^2\, t^{-\alpha},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

O Teorema 5.1.2 pode ser usado para estudar o comportamento da dinâmica gerada por um operador autoadjunto T, agindo em $\mathcal{H}$, como discutido no capítulo anterior. Agora denotaremos as correspondentes medidas espectrais simplismente por μ_ξ, para $\xi \in \mathcal{H}$.

Corolário 5.1.3. *Se a medida espectral μ_ξ é absolutamente contínua com respeito a uma medida μ que é $L.U.\alpha$, com $\dfrac{d\mu_\xi}{d\mu} = f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$, então a probabilidade de retorno médio satisfaz,*

$$\langle p_\xi \rangle (t) \le \frac{C}{t^\alpha}$$

para algum $C > 0$ e para todo $t > 0$.

Demonstração. Note primeiramente que,

$$p_\xi(t) = \left|\left\langle \xi, e^{-itT}\xi\right\rangle\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu_\xi(x)\right|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) d\mu\right|^2.$$

E como $\langle p_\xi\rangle(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t p_\xi(s)\, ds$, segue do Teorema 5.1.2 que

$$\begin{aligned}\langle p_\xi\rangle(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t p_\xi(s) ds = \frac{1}{t}\int_0^t \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) d\mu\right|^2 ds \\ &\leq C_\mu \frac{\|f\|_2^2}{t^\alpha} = \frac{C}{t^\alpha},\end{aligned}$$

para $C = C_\mu \|f\|_2^2$. ■

Corolário 5.1.4. *Se μ_ξ é L.U.α, então existe uma constante $C = C(\xi) > 0$ tal que $\forall \eta \in \mathcal{H}, \|\eta\| = 1$ temos*

$$\langle p_{\xi,\eta}\rangle(t) \leq \frac{C}{t^\alpha},$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Pelo Lema 4.1.3, para cada $\eta \in \mathcal{H}$ existe $g \in L^2_{\mu_\xi}(\mathbb{R}) \cap L^1_{\mu_\xi}(\mathbb{R})$ de modo que $\|g\|_{L^2_{\mu_\xi}} \leq \|\eta\| = 1$ e

$$\left\langle \eta, e^{-itT}\xi\right\rangle = \int_{\sigma(t)} e^{-itx} g(x)\, d\mu_\xi(x).$$

E consequentemente,

$$\left|\left\langle \eta, e^{-itT}\xi\right\rangle\right|^2 = \left|\int_{\sigma(t)} e^{-itx} g(x)\, d\mu_\xi(x)\right|^2.$$

Então, pelo Teorema 5.1.2

$$\begin{aligned}\langle p_{\eta,\xi}\rangle(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t p_{\eta,\xi}(s) ds = \frac{1}{t}\int_0^t \left|\left\langle \eta, e^{-isT}\xi\right\rangle\right|^2 ds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \left|\int_{\sigma(t)} e^{-isx} g(x)\, d\mu_\xi(x)\right|^2 ds \leq C_\mu \frac{\|f\|_2^2}{t^\alpha} = \frac{C}{t^\alpha},\end{aligned}$$

para $C = C_\mu \|f\|_2^2$. ■

Observe que se $\alpha > 0$, então o Corolário 5.1.4 fornece uma descrição mais detalhada do limite $\mathfrak{X}_\xi = 0$ no Teorema 4.1.4(i) do capítulo anterior. Além disso, no caso em que a medida espectral é pontual pura temos $\alpha = 0$, e então o Corolário 5.1.4 é consistente pelo fato do não "anulamento"da probabilidade de retorno.

Lema 5.1.5. *Assuma que μ_ξ é L.U.α e seja $\xi(t) = e^{-itT}\xi$. Então existe $C = C(\xi) > 0$ de modo que para qualquer projeção ortogonal P_F em um subespaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$, de dimensão N, temos*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|P_F\xi(s)\|^2 ds \leq \frac{CN}{t^\alpha},\ \forall t > 0.$$

Demonstração. Seja $\{\eta_1, \ldots, \eta_N\}$ uma base ortonormal do subespaço img P_F, de modo que $P_F(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \langle n_j, \cdot\rangle\, n_j$. Então,

$$\|P_F\xi(t)\|^2 = \langle \xi(t), P_F\xi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{N} |\langle \eta_j, \xi(t)\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{N} p_{\eta_j,\xi}(t).$$

Logo, pelo Corolário 5.1.4

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t \|P_F\xi(s)\|^2\ ds &= \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{j=1}^{N} p_{\eta_j,\xi}(s)\ ds = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t}\int_0^t p_{\eta_j,\xi}(s)\ ds \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \frac{C}{t^\alpha} = \frac{CN}{t^\alpha}.\end{aligned}$$

■

Corolário 5.1.6. *Seja T um operador autoadjunto gerador do grupo de evolução temporal unitário, e A um operador teste com autovalores $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$. Se μ_ξ é L.U.α, então existe uma constante $C = C(\xi) > 0$ tal que*

$$\left\langle \mathcal{E}_A^\xi \right\rangle (t) \geq \frac{1}{2}\lambda(Ct^\alpha), \quad \forall t > 1,$$

aqui $\lambda(Ct^\alpha) := \lambda_{[Ct^\alpha]}$, em que $[Ct^\alpha]$ indica a parte inteira de λ.

Demonstração. Seja Q_N a projeção ortogonal no subespaço gerado pelos autovetores de A associados aos autovalores $\leq \lambda_N$. Como A possui espectro discreto, Q_N é uma projeção em um subespaço de dimensão finita; para simplificar a notação, assuma que N é essa dimensão. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_A^\xi(t) &= \langle \xi(t), A\xi(t)\rangle \\
&= \langle (I - Q_N + Q_N)\xi(t), A(I - Q_N + Q_N)\xi(t)\rangle \\
&= \langle Q_N\xi(t), AQ_N\xi(t)\rangle + \langle (I - Q_N)\xi(t), A(I - Q_N)\xi(t)\rangle \\
&\geq \lambda_N \|(I - Q_N)\xi(t)\|^2 \\
&= \lambda_N \left[1 - \|Q_N\xi(t)\|^2\right].
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_A^\xi\rangle(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{E}_A^\xi(s)\ ds \\
&\geq \frac{1}{t}\int_0^t \lambda_N \left[1 - \|Q_N\xi(s)\|^2\right]\ ds \\
&= \frac{1}{t}\left[\int_0^t \lambda_N - \int_0^t \|Q_N\xi(s)\|^2\ ds\right] \\
&= \lambda_N - \frac{1}{t}\int_0^t \|Q_N\xi(s)\|^2\ ds \geq \lambda_N - \frac{CN}{t^\alpha}\lambda_N \\
&= \left(1 - \frac{CN}{t^\alpha}\right)\lambda_N = \left(1 - \frac{CN}{t^\alpha}\right)\lambda(N), \quad \forall N.
\end{aligned}$$

Tomando $N = \left[\dfrac{t^\alpha}{2C}\right]$, e chamando $\dfrac{1}{2C} = C$, segue o resultado. ■

Exemplo 5.1.7. *Uma aplicação típica dos resultados acima para operadores autoadjuntos tem forte ligação com as Hamiltonianas $H : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ e o operador teste $A = M$, o segundo momento do operador posição, isto é, se $(e_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ é uma base canônica de $l^2(\mathbb{Z})$, então*

$$M(\cdot) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2\langle e_j, \cdot\rangle e_j.$$

Assuma $\|\xi\| = 1$. Um valor grande de $M(\xi)$ significa que o vetor ξ é propagado para grandes valores de $|j|$ em $\mathbb{Z}$. Os autovalores de M são os quadrados dos inteiros e, exceto o autovalor nulo que é simples, todos possuem multiplicidade 2. Neste caso, para $s > 0$, $\lambda(s) = [s]^2$, e para uma condição inicial $\xi \in l^2$ a medida espectral correspondente é L.U.α, e o Corolário 5.1.6 implica que

$$\langle \mathcal{E}_M^\xi(t)\rangle \geq Ct^{2\alpha}.$$

Esse é um valor quantitativo, no caso da medida espectral ser L.U.α, do transporte de propriedades de ξ sobre $\mathbb{Z}$ quando $t \to \infty$.

5.2 Dimensão de Correlação de uma Medida

Nesta seção definimos os expoentes locais de uma medida e suas dimensões de Hausdorff e de correlação. O objetivo é demonstrar de forma rigorosa que os expoentes de decaimento das probabilidades de retorno são iguais às dimensões de correlação da medida espectral.

Definição 5.2.1. ***(Expoentes Locais)***
Considere uma medida de Borel positiva e finita μ em $\mathbb{R}$ e $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. O expoente local inferior e o expoente local superior de μ são definidos respectivamente como,

$$\gamma^-(x) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon}$$

e

$$\gamma^+(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon},$$

onde $B_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}$ é uma bola aberta de centro x e raio $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Lema 5.2.2. *Seja μ uma medida de Borel positiva e finita. Então $\gamma^-, \gamma^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis. Em particular para qualquer α, os conjuntos $\{x \mid \gamma^-(x) \geq \alpha\}$ e $\{x \mid \gamma^+(x) \geq \alpha\}$ são μ mensuráveis.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que o limite na definição de $\gamma^-(x)$ não muda se a variável contínua ε for substituída por qualquer sequência $\{\varepsilon_n\}$ com $\varepsilon_n \searrow 0$ e $\dfrac{\log \varepsilon_{n+1}}{\log \varepsilon_n} \to 1$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\varepsilon_n < 1$, para todo n. Se $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n$ temos $B_{\varepsilon_{n+1}}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_n}(x)$, logo

$$\log \mu\left(B_{\varepsilon_{n+1}}(x)\right) \leq \log \mu\left(B_\varepsilon(x)\right) \leq \log \mu\left(B_{\varepsilon_n}(x)\right)$$

e

$$\log\,\varepsilon_{n+1} \le \log\,\varepsilon \le \log\,\varepsilon_n < 0,$$

donde

$$\frac{\log\,\mu\left(B_{\varepsilon_n}(x)\right)}{\log\,\varepsilon_n} \le \frac{\log\,\mu\left(B_{\varepsilon}(x)\right)}{\log\,\varepsilon} \le \frac{\log\,\mu\left(B_{\varepsilon_{n+1}}(x)\right)}{\log\,\varepsilon_{n+1}},$$

e o resultado segue.

Assim pelos argumentos padrões de teoria da medida segue que γ^- é mensurável. Um análogo segue para γ^+. ■

Lema 5.2.3. *Para x $\mu - q.t.p.$ temos*

$$0 \le \gamma^-(x) \le \gamma^+(x) \le 1.$$

Demonstração. De fato, segue diretamente por definição que $\gamma^-(x) \le \gamma^+(x)$. Agora pelo Teorema de Radon-Nykodym temos que

$$\mu = \mu^a + \mu^s,$$

onde $\mu^a \ll l$ e $\mu^s \perp l$. Assim

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu^a(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon} = cf(x) > 0,$$

para $x \in \mathbb{R}$ $\mu^a - q.t.p.$, em que f é a derivada de Radon-Nykodym de μ^a, e

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu^s(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon} = \infty,$$

para $x \in \mathbb{R}$ $\mu^s - q.t.p.$, (veja [6]).

Sendo assim,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon} \ge 0,$$

para $x \in \mathbb{R}$ $\mu - q.t.p$ e o conjunto

$$E = \left\{x : 0 < \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(B_\varepsilon(r))}{\varepsilon}\right\}$$

tem medida μ positiva.

Fixe uma sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\xi_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, e defina para cada $n \in \mathbb{N}$, um conjunto

$$E_n = \left\{ x \in E : \frac{\varepsilon}{n} < \mu(B_\varepsilon(r)), \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_n \right\}.$$

Note que assim, $E = \cup_n E_n$ e $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ....$

Agora tomando $x \in E$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\varepsilon}{n} < \mu(B_\varepsilon(x))$. Isso implica que

$$\log \frac{\varepsilon}{n} < \log \mu(B_\varepsilon(x)).$$

E assim,

$$\frac{\log \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon} \leq \frac{\log \frac{\varepsilon}{n}}{\log \varepsilon} = 1 - \frac{\log n}{\log \varepsilon}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\gamma^+(x) \leq 1$.

Logo, $\gamma^+(x) \leq 1$ para $x \in \mathbb{R}$ $\mu - q.t.p.$ Portanto,

$$0 \leq \gamma^-(x) \leq \gamma^+(x) \leq 1.$$

■

Definição 5.2.4. *Considere um conjunto $Z \subset X$, sendo X um espaço métrico. Definimos a $\alpha-$ medida de Hausdorff de Z ($\alpha \geq 0$ um numéro real) como*

$$m_H(Z, \alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_G \left\{ \sum_{U\in G} (\text{diam } U)^\alpha : Z \subset \bigcup_{U\in G} U, \ \text{diam } U \leq \varepsilon \right\},$$

em que G percorre todas as coleções contáveis de conjuntos abertos de diâmetro menor ou igual que ε cobrindo Z.

A função $m_H(Z, \alpha)$ tem a seguinte propriedade (veja [9, 10, 14]):

Propriedade 5.2.5. *Existe um valor α_H tal que*

$$m_H(Z, \alpha) = \infty, \ \text{para} \ \ \alpha < \alpha_H$$

e

$$m_H(Z, \alpha) = 0, \ \text{para} \ \ \alpha > \alpha_H.$$

Definição 5.2.6. ***(Dimensão de Hausdorff de um conjunto)***

A quantidade

$$\begin{aligned} \dim_H Z &= \alpha_H = \inf\{\alpha : m_H(Z,\alpha) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha : m_H(Z,\alpha) = \infty\} \end{aligned}$$

é chamada dimensão de Hausdorff do conjunto Z.

Definição 5.2.7. ***(Dimensão de Hausdorff de uma medida)***

Se μ é uma medida de probabilidade em um espaço métrico X, isto é, $\mu(X) = 1$, então a dimensão de Hausdorff de μ é

$$\dim_H(\mu) = \inf\{\dim_H(Z) : Z \subset X,\ \mu(Z) = 1\}.$$

Proposição 5.2.8. *Sejam μ uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável com $\mu(\Lambda) > 0$. Suponha que para todo $x \in \Lambda$, temos*

$$a \leq \gamma^-(x) \leq \gamma^+(x) \leq b,$$

onde a e b são duas constantes independentes de x. Então

$$a \leq \dim_H(\Lambda) \leq b. \tag{5.7}$$

Demonstração. Para $U \subset \mathbb{R}$, seja $R(U,\varepsilon) = \{B_\rho(x) : x \in U, \rho \leq \varepsilon\}$ e defina

$$\alpha(U,\mu) = \inf\left\{\alpha : \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{k\subset R(U,\varepsilon)} \sum_{A\in k} (\mu(A))^\alpha = 0\right\},$$

onde k é uma cobertura de U. Se U é mensurável e $\mu(U) > 0$, então $\alpha(U,\mu) = 1$.

Fixe $U \subset \mathbb{R}$ com $\mu(U) > 0$. Suponha que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall x \in U$ e $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, tenhamos

$$a \leq \frac{\log\, \mu(B_\varepsilon(x))}{\log \varepsilon} \leq b.$$

Seja $\alpha > 1$, além disso, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ e $\varepsilon_2 > 0$ dados. Como $\alpha(U,\mu) = 1$, existe uma cobertura $k \subset R(U,\varepsilon_1)$ de U que satisfaz

$$\sum_{A\in k} (\mu(A))^\alpha \leq \varepsilon_2. \tag{5.8}$$

Nossa hipótese garante que para $A \in R(U, \varepsilon_0)$ tenhamos

$$(\text{diam } A)^b \leq 2^b(\mu(A)).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\sum_{A\in k}(\text{diam } A)^{\alpha b} &\leq \sum_{A\in k}\left[2^b(\mu(A))\right]^{\alpha}\\ &= \sum_{A\in k}2^{\alpha b}(\mu(A))^{\alpha} = 2^{\alpha b}\sum_{A\in k}(\mu(A))^{\alpha}\end{aligned}$$

e por (5.8) temos

$$\sum_{A\in k}(\text{diam } A)^{\alpha b} \leq 2^{\alpha b}\varepsilon_2. \tag{5.9}$$

Logo, pela definição de dimensão de Hausdorff,

$$\dim_H(U) \leq \alpha b. \tag{5.10}$$

Note que a definição de dimensão de Hausdorff não se altera se nos restringirmos a sub-coberturas de $R(U, \varepsilon)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\sum_{A\in k}(\text{diam } A)^{b} &\geq 2^a\sum_{A\in k}(\mu(A))\\ &= 2^a\mu(U),\ \forall A \in R(U,\varepsilon).\end{aligned}$$

E assim

$$\sum_{A\in k}(\text{diam } A)^{b} \geq 2^a(\mu(U)),$$

para toda cobertura $k \subset R(U, \varepsilon_0)$ de U, o que prova que $\dim_H(U) \geq a$.

Agora, fixe $\varepsilon > 0$ e tome $\delta_n \searrow 0$. Considere

$$\Lambda_k = \left\{x \in \Lambda :\ \forall n \leq k,\ a - \varepsilon \leq \frac{\log\ \mu(B_{\delta_n}(x))}{\log \delta_n} \leq b + \varepsilon\right\}.$$

Como $x \mapsto \mu(B_\varepsilon(x))$ é uma função mensurável, os conjuntos Λ_k são mensuráveis e $\mu(\Lambda_k) \nearrow \mu(\Lambda)$, para todo k. Assim se $k \nearrow \infty$ temos que $\varepsilon \searrow 0$. Logo, $\dim_H(U) \leq b$. Portanto,

$$a \leq \dim_H(\Lambda) \leq b.$$

■

Corolário 5.2.9. *Seja μ uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$. Assuma que para x $\mu-q.t.p.$ $a \leq \gamma^-(x) \leq \gamma^+(x) \leq b$. Então*

$$a \leq \dim_H(\mu) \leq b.$$

Demonstração. Seja $Z \subset \mathbb{R}$ com $\mu(Z) = 1$. Por hipótese, $a \leq \gamma^-(x) \leq \gamma^+(x) \leq b$, para $x \in Z$ $q.t.p.$ e pela Proposição 5.2.8 temos que $a \leq \dim_H(Z) \leq b$. Então isso implica que $a \leq \inf\{\dim_H(Z) : Z \subset H,\ \mu(Z) = 1\} \leq b$. Portanto,

$$a \leq \dim_H(\mu) \leq b.$$

■

Note que se tomarmos $a = \mu - \inf \text{ ess } \gamma^-(x)$ e $b = \mu - \sup \text{ ess } \gamma^+(x)$ temos pelo corolário anterior que

$$\mu - \inf \text{ ess } \gamma^-(x) \leq \dim_H(\mu) \leq \mu - \sup \text{ ess } \gamma^+(x).$$

E além disso, se $\gamma^-(x) = \gamma^+(x) = a$ para x $\mu - q.t.p$ temos que $\dim_H(\mu) = a$.

Agora vamos apresentar um exemplo surpreendente de uma medida tal que, o maior α tal que ela é $L.U.\alpha$ é menor do que qualquer expoente local $\gamma^-(x)$.

Considere a medida absolutamente contínua μ definida em $(0, 1]$ como segue:

$$d\mu = \nu x^{\nu-1}dx, \text{ para } \nu \in (0, \frac{1}{2}) \text{ fixo.}$$

Então para x $\mu - q.t.p.$ temos $\gamma^-(x) = \gamma^+(x) = 1$, mas o supremo sobre todos os α tal que μ é $L.U.\alpha$ é menor que ν. Isto é, para todo $x_0 \in (0, 1]$, existe ε_0 suficientemente pequeno e uma constante $\widetilde{c} = \dfrac{\nu^2}{x_0^{1-\nu}}$ tal que, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\mu(B_\varepsilon(x_0)) \leq \widetilde{c}\varepsilon$, mas não se pode esperar encontrar ε_0 e $\widetilde{c}$ uniforme em x. De fato, seja $\alpha_0 = \nu + \delta$ para algum $\delta > 0$, e assuma que existe $c > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ e para x $\mu - q.t.p.$ temos,

$$\mu(B_\varepsilon(x)) < c\varepsilon^{\alpha_0}. \tag{5.11}$$

E para qualquer $0 < x_0 < 1/2 \inf(\varepsilon_0, (\frac{c}{2\nu})^\delta)$ e $1/2 \inf(\varepsilon_0, (\frac{c}{2\nu})^\delta) < \varepsilon < \inf(\varepsilon_0, (\frac{c}{2\nu})^\delta)$, tem-se $\mu(B_\varepsilon(x)) > c\varepsilon^{\alpha_0}$, uma contradição com (5.11).

Considere agora as dimensões de correlação de uma medida μ definidas como segue.

Definição 5.2.10. *Seja μ uma medida de Borel positiva e finita em $\mathbb{R}$ e defina*

$$\gamma_2(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \mu\left(\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}, \omega + \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) d\mu(\omega).$$

Então,

$$D_2^- = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \gamma_2(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}$$

é chamada dimensão de correlação inferior de μ, e

$$D_2^+ = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \gamma_2(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}$$

é chamada dimensão de correlação superior de μ.

Se $D_2^+ = D_2^- = D_2$, então D_2 é chamada dimensão de correlação de μ.

Observações:

(i) Note que D_2^- e D_2^+ permanecem inalterados se substituímos $\left(\omega - \frac{\varepsilon}{2}, \omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ por $B_\varepsilon(\omega)$ na definição de $\gamma_2(\varepsilon)$.

(ii) É importante ressaltar que existe uma família de dimensões D_q, $q \geq 0$, porém neste trabalho estamos interessados no caso em que $q = 2$. Em [2], os autores apresentam uma definição geral para essas dimensões. Veja também [9].

Em [4], os autores inferiram que

$$\gamma_2(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_2} \;\Leftrightarrow \langle p_\xi \rangle(t) \sim t^{-D_2},$$

onde D_2 é associado com μ_ξ. Isso é confirmado por alguns cálculos numéricos. A seguir apresentamos uma prova deste fato, baseado no artigo [1], (veja 5.2.13).

Proposição 5.2.11. *Se μ é uma medida de Borel positiva e finita em $\mathbb{R}$, então*

$$D_2^- \leq \mu - inf.ess\ \gamma^-(x).$$

Demonstração. Para η fixado tal que $D_2^- > \eta > 0$, pela definição de dimensão de correlação inferior de μ temos que $D_2^- = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \gamma_2(\varepsilon)}{\log \varepsilon} > \eta$. Assim da definição de $\gamma_2(\varepsilon)$ segue que existe $\varepsilon(\eta) > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon(\eta)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3\eta}{4}}} d\mu(x) \leq \varepsilon^{\frac{\eta}{4}}. \tag{5.12}$$

Disso temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3\eta}{4}}}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)d\mu(x) &= \int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3\eta}{4}}}d\mu(x)\right)d\varepsilon\\ &\leq \int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{1}{\varepsilon}\,\varepsilon^{\frac{\eta}{4}}d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{\varepsilon^{\frac{\eta}{4}}}{\varepsilon}\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon(\eta)}\varepsilon^{\frac{\eta}{4}-1}\,d\varepsilon < \infty.\end{aligned}$$

Logo para x $\mu - q.t.p.$ temos

$$\int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3\eta}{4}}}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} < \infty. \tag{5.13}$$

Agora assuma que, para algum x, $D_2^- - 2\eta > \gamma^-(x)$, então pela definição de $\gamma^-(x)$, existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \searrow 0$ tal que $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2}$ e

$$\mu(B_{\varepsilon_n}(x)) > \varepsilon_n^{\gamma^-(x)+\frac{\eta}{2}} > \varepsilon_n^{D_2^- - \frac{3\eta}{2}}. \tag{5.14}$$

Então como $\varepsilon \mapsto \mu(B_\varepsilon(x))$ é uma função não decrescente de ε temos, $\mu(B_\varepsilon(x)) > \varepsilon^{D_2^- - \eta}$ pelo menos no intervalo $\left[\varepsilon_n, \varepsilon_n'\right] = \left[\varepsilon_n, \varepsilon_n^{1-\frac{\eta}{2}}\right]$.

Seja N o menor inteiro tal que $\varepsilon_N < \varepsilon(\eta)$ e $\varepsilon_N^{1-\frac{\eta}{2}} > 2\varepsilon_N$. Então para todo $n > N$, $A_n := [\varepsilon_n, 2\varepsilon_n] \subset \left[\varepsilon_n, \varepsilon_n^{1-\frac{\eta}{2}}\right]$, e esses A_n são todos disjuntos. Sendo assim, voltando em (5.13) temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\varepsilon(\eta)}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3}{4}\eta}}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} &\geq \int_0^{\varepsilon(N)}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3}{4}\eta}}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\\ &\geq \sum_{n>N}\int_{A_n}\frac{\mu(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon^{D_2^- - \frac{3}{4}\eta}}\,\frac{1}{\varepsilon}\,d\varepsilon\\ &> \sum_{n>N}\frac{1}{2\varepsilon_n}\,\frac{\varepsilon_n^{D_2^- - \eta}}{(2\varepsilon_n)^{D_2^- - \frac{3}{4}\eta}}\mu(A_n)\\ &= \sum_{n>N}(2\varepsilon_n)^{-1}\frac{\varepsilon_n^{D_2^- - \eta}}{(2\varepsilon_n)^{D_2^- - \frac{3}{4}\eta}}\varepsilon_n = +\infty.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Sendo assim por (5.13) e (5.15) temos que para x $\mu - q.t.p.$, $\gamma^-(x) \geq D_2^- - 2\eta$. Como isso vale para todo $\eta > 0$ temos

$$D_2^- \leq \mu - \inf\operatorname{ess}\,\gamma^-(x).$$

$\blacksquare$

Observação:

Com os mesmos argumentos da demonstração da proposição anterior, demonstra-se que para todo conjunto de Borel $S \subset \mathbb{R}$ com $\mu(S) > 0$ tem-se

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \int_S \mu(B_\varepsilon(x))\ d\mu(x)}{\log \varepsilon} \leq \mu - \inf_{x \in S} \text{ess}\ \{\gamma^-(x)\}.$$

Lema 5.2.12. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \text{dom}\ T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Para $\xi \in \text{dom}\ T$ e $\varepsilon > 0$, seja*

$$A(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} |F_{\mu_\xi}(x + i\varepsilon)|^2 dx, \tag{5.16}$$

onde $F_{\mu_\xi}(z)$ é a transformada de Borel de μ_ξ, dada por $F_{\mu_\xi}(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\xi(y)}{y - z}$. Então:

$$(i)\ A(\varepsilon) = 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{(y-x)^2 + \varepsilon^2}\ d\mu_\xi(y) d\mu_\xi(x). \tag{5.17}$$

$$(ii)\ A(\frac{1}{t}) = 4\pi \int_0^\infty e^{-\frac{s}{t}}\ p_\xi(s)\ ds. \tag{5.18}$$

Demonstração. Para demonstrar (i) basta desenvolver (5.16) e usar a fórmula de Cauchy.

(ii) Considere $\varepsilon = \dfrac{1}{t}$, usando que $p_\xi(t) = |\widehat{\mu}_\xi(t)|^2$ (veja (4.1)) temos

$$\begin{aligned}
4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} p_\xi(s)\ ds &= 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} |\widehat{\mu}_\xi(s)|^2\ ds \\
&= 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\ d\mu_\xi(x) \right|^2\ ds \\
&= 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\ d\mu_\xi(x) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-isy}\ d\mu_\xi(y)} \right]\ ds \\
&= 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\ d\mu_\xi(x) \int_{\mathbb{R}} e^{isy}\ d\mu_\xi(y) \right]\ ds \\
&= 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-isx+isy}\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y)\ ds \\
&= 4\pi \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty e^{-[i(x-y)+\varepsilon]s}\ ds \right)\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y) \\
&= 4\pi \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon + i(x-y)}\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y). \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever essa última integral como

$$4\pi \left[\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-y)^2}\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y) - i \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{x-y}{\varepsilon^2 + (x-y)^2}\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y) \right].$$

Mas como a expressão de partida é real, a parte imaginária é zero. Portanto por (5.17)

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^\infty e^{-s\varepsilon} p_\xi(s)\ ds &= 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^2 + (x-y)^2}\ d\mu_\xi(x) d\mu_\xi(y) \\ &= A(\varepsilon). \end{aligned}$$

e (ii) segue. ■

Teorema 5.2.13. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathrm{dom}\ T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador autoadjunto. Para $\xi \in \mathrm{dom}\ T$ sejam D_2^- e D_2^+ as dimensões de correlação inferior e superior da medida μ_ξ, temos*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log \langle p_\xi \rangle (t)}{\log(t)} = -D_2^+ \tag{5.20}$$

e

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \langle p_\xi \rangle (t)}{\log(t)} = -D_2^- \tag{5.21}$$

Demonstração. Considere

$$c^- = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \langle p_\xi \rangle (1/\varepsilon)}{\log\ \varepsilon} \ \text{ e } \ c^+ = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \langle p_\xi \rangle (1/\varepsilon)}{\log\ \varepsilon}.$$

Queremos mostrar que $c^- = -D_2^+$ e $c^+ = -D_2^-$. Para isso mostraremos primeiramente que, $c^+ \geq -D_2^-$ e $c^- \geq -D_2^+$. Em seguida mostraremos que, $c^+ \leq -D_2^-$ e $c^- \leq -D_2^+$.

(i) Para todo $\nu > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{\mu_\xi}(s)|^2\ ds &\leq \frac{1}{t}\int_0^t e.e^{\frac{-s^2}{t^2}}\ |\widehat{\mu_\xi}(s)|^2 ds\\
&\leq \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}}\ |\widehat{\mu_\xi}(s)|^2\ ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}\ d\mu_\xi(x)\right|^2 ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}\ d\mu_\xi(x)\right)\left(\overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-iys}\ d\mu_\xi(y)}\right)\right]\ ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixs}\ d\mu_\xi(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{iys}\ d\mu_\xi(y)\right)\right] ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-ixs}e^{iys} d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\right)\ ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-i(x-y)s} d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\right)\ ds\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}} e^{-i(x-y)s}\ ds\right)\ d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-s^2}{t^2}-i(x-y)s}\ ds\right)\ d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\\
&= \frac{e}{t}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left(\sqrt{\pi}\ t\ e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}}\right)\ d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\\
&= e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}}\ d\mu_\xi(x)\ d\mu_\xi(y)\\
&= e\sqrt{\pi}\int_{|x-y|<t^{-(1-\nu)}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu(x)d\mu(y) + \int_{|x-y|\geq t^{-(1-\nu)}} e^{\frac{-(x-y)^2t^2}{4}} d\mu_\xi(x)d\mu_\xi(y)\\
&\leq e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mu_\xi(B_{2t^{-(1-\nu)}}(x))d\mu_\xi(x) + e^{\frac{-t^{2\nu}}{4}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\widehat{\mu_\xi}(s)|^2\ ds \leq e\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mu_\xi(B_{2t^{-(1-\nu)}}(x))\ d\mu_\xi(x) + e^{\frac{-t^{2\nu}}{4}}. \tag{5.22}$$

Por (4.1), $|\widehat{\mu_\xi}(t)|^2 = p_\xi(t)$ e pela definição de γ_2 segue da equação (5.22) que

$$\frac{1}{t}\int_0^t p_\xi(s)\ ds \leq e\sqrt{\pi}\ \gamma_2(2t^{-(1-\nu)}) + e^{\frac{-t^{2\nu}}{4}}$$

e daí

$$\langle p_\xi\rangle(t) \leq 2e\sqrt{\pi}\ \gamma_2(2t^{-(1-\nu)}).$$

Assim

$$\log \langle p_\xi \rangle (1/\varepsilon) \leq \log\ (2e\sqrt{\pi}\ \gamma_2(2(1/\varepsilon)^{-(1-\nu)}))$$

e

$$\frac{\log \langle p_\xi \rangle (1/\varepsilon)}{\log(\varepsilon)} \geq \frac{\log\ (2e\sqrt{\pi}\ \gamma_2(2\varepsilon^{-(1-\nu)}))}{\log \varepsilon}.$$

Portanto

$$\frac{\log \langle p_\xi \rangle (1/\varepsilon)}{\log(\varepsilon)} \geq -\frac{\log\ (2e\sqrt{\pi}\ \gamma_2(2(1/\varepsilon^{1-\nu}))}{\log 1/\varepsilon}$$

e obtemos $c^+ \geq -D_2^-$. De forma análoga $c^- \geq -D_2^+$.

(ii) Pelo Lema 5.2.12,

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) &= 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x)}{(y-x)^2+\varepsilon^2} \\
&= 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|y-x|<\varepsilon} \frac{d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x)}{(y-x)^2+\varepsilon^2} + \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x)}{(y-x)^2+\varepsilon^2} \right) \\
&\geq 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \int_{|y-x|<\varepsilon} \frac{d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x)}{(y-x)^2+\varepsilon^2} \\
&\geq 4\pi\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \int_{|y-x|<\varepsilon} \frac{d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x)}{2\varepsilon^2} \\
&= \frac{4\pi\varepsilon}{2\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y-x|<\varepsilon} d\mu_\xi(y)d\mu_\xi(x) \\
&= \frac{2\pi}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mu_\xi(B_\varepsilon(x))\ d\mu_\xi(y) \\
&= \frac{2\pi}{\varepsilon} \gamma_2(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Logo

$$A(\varepsilon) \geq \frac{2\pi}{\varepsilon}\gamma_2(\varepsilon). \tag{5.23}$$

Ainda pelo Lema 5.2.12, sabemos que $A(\frac{1}{t}) = 4\pi \int_0^\infty e^{-\frac{s}{t}}\ p_\xi(s)\ ds$ e pela desigualdade (5.23) temos

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{t}}\ \gamma_2(\frac{1}{t}) \leq A(\frac{1}{t}).$$

Logo,

$$2\pi\ \gamma_2(\frac{1}{t}) \leq \frac{1}{t}A(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t}4\pi\ \int_0^\infty e^{-\frac{s}{t}}\ p_\xi(s)\ ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\gamma_2(\frac{1}{t}) &\leq \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{t}}\,p_\xi(s)\;ds \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{t}\int_0^{t^{1+\nu}} e^{-\frac{s}{t}}\,p_\xi(s)\;ds}_{<t^\nu\langle p_\xi\rangle(t^{1+\nu})} + \underbrace{\frac{1}{t}\int_{t^{1+\nu}}^\infty e^{-\frac{s}{t}}\,p_\xi(s)\;ds}_{<t^{-n}\text{ no infinito },\forall n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Assim, para alguma constante a temos que: Para todo $\nu > 0$, existe $t(\nu) < \infty$ tal que para todo $t > t(\nu)$

$$\gamma_2(\frac{1}{t}) \;\leq\; at^\nu\langle p_\xi\rangle(t^{1+\nu}).$$

Disto segue que, $-D_2^- \geq c^+$ e analogamente $-D_2^+ \geq c^-$. ■

Segue desse teorema e de um cálculo explicito de $\widehat{\mu}$, que $D_2^- = D_2^+ = 2\nu$ (veja [5]). Enquanto que μ ess.inf $\gamma^-(x)$ é igual a 1 para qualquer $\nu > 0$. Isso mostra que, na Proposição 5.2.8, em geral, não se pode ter uma igualdade.

Portanto no Teorema 5.2.13 demonstramos de forma rigorosa que os expoentes de decaimento das probabilidades de retorno são iguais às dimensões de correlação da medida espectral.

Referências Bibliográficas

[1] BARBAROUX, J.M.; COMBES, J. M.; MONTCHO, R. *Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra*, J. Math. Anal. Appl., **213**, p. 698 - 722, 1997.

[2] HENTSCHEL, H.G.E.; PROCACCIA, I. *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica, **8D**, p. 435 - 444, 1983.

[3] HOLSCHNEIDER, M., *Fractal wavelet dimensions and localization*, Comm. Math. Phys., **160**, p. 457 - 473, 1994.

[4] KETZMERICK, R.; PETSCHEL, G.; GEISEL, T., *Slow decay of temporal correlations in quantum systems with Cantor spectra*, Physical Review Letters, **69**, p. 695 - 698, 1992.

[5] LAST, Y., *Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra*, Journal of Functional Analysis, **142**, p.406 - 445, 1996.

[6] MATTILA, P.; MORAN, M.; REY, J.M., *Dimension of a measure*, Studia Mathematica, **142** p. 219 - 233, 2000.

[7] de OLIVEIRA, C.R., *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin, 1 ed., 2009.

[8] de OLIVEIRA, C.R., *Introdução a análise funcional*, Projeto Euclides-Impa, 1 ed., 2010.

[9] PESIN, Y. B., *On rigorous mathematical definitions of correlation dimension and generalized spectrum for dimensions*, J. Statist. Phys., **71**, p. 529 - 547, 1993.

[10] ROGERS, C. A., *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.

[11] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, New York: McGraw-Hill, 3 ed., 1964.

[12] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill, 3 ed., 1987.

[13] STRICHARTZ, R. S., *Fourier asymptotics of fractal measures*, Journal Functional Analysis, **89**, p.154 - 187, 1990.

[14] YOUNG, L. S., *Dimension, entropy and Lyapunov exponents*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **2**, p.109 - 124, 1982.