

Marcos Rogério de Souza

**Uma abordagem de campos para o efeito  
Aharonov-Bohm**

Brasil

2019



Marcos Rogério de Souza

**Uma abordagem de campos para o efeito  
Aharonov-Bohm**

Trabalho de dissertação apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física - Área de concentração: Física Teórica

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Instituto de Física e Química

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Fabrício Augusto Barone Rangel

Brasil

2019

Marcos Rogério de Souza

## **Uma abordagem de campos para o efeito Aharonov-Bohm**

Trabalho de dissertação apresentado ao Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física - Área de concentração: Física Teórica

Trabalho aprovado. Brasil, 29 de março de 2019:

---

**Fabício Augusto Barone Rangel**  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Brasil  
2019

*Este trabalho é dedicado ao meu pai, Rogério, que deixou a maior herança que um pai pode deixar para um filho - o caráter.*



# Agradecimentos

Agradeço à minha família, em especial minha mãe Cristina e minha irmã Patrícia, pelo apoio incondicional em todos estes anos em que estive em Itajubá aprendendo física;

À minha namorada Daniele, pois sabemos que não é fácil aturar um pós-graduando;

Aos meus amigos, pelo companheirismo, pelas risadas nos momentos de desespero e pelas discussões metafísicas na sala da pós;

Ao meu orientador Fabrício, por me proporcionar este grande desafio;

E à CAPES, pelo suporte financeiro que me permitiu dedicação exclusiva ao programa.



*“Estude com afinco o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada,  
irreverente e original possível.”  
(Richard Feynman)*



# Resumo

Neste trabalho de dissertação propomos uma interpretação para o efeito Aharonov-Bohm em termos da interação entre os campos eletromagnéticos. Nesta proposta, o campo gerado pela função de onda carregada interage com o campo de Aharonov-Bohm, produzido por uma fonte externa. Inicialmente, apresentamos uma revisão sobre a interpretação usual do efeito, bem como uma proposta de interpretação em termos de campos por abordagens semiclássicas. Então, apresentamos uma formulação lagrangeana de uma teoria não-relativística de campo que descreve a interação entre uma partícula quântica carregada e o campo eletromagnético clássico, incluindo fontes externas. Determinamos então os campos eletromagnéticos gerados pelo campo não relativístico e sua energia de interação com a fonte externa. Para o rotor quântico, mostramos que a mudança no espectro de energia de uma partícula carregada devido à presença do potencial de Aharonov-Bohm pode ser interpretada como a energia de interação do sistema. Para os casos de espalhamento, mostramos que é possível obter a mudança de fase das partículas como consequência da evolução temporal do sistema. Por fim, mostramos que na presença de materiais lineares e isotrópicos, o efeito depende da permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio.

**Palavras-chave:** efeito aharonov bohm. mecânica quântica. teoria de campos.



# Abstract

In this thesis we propose an interpretation for the Aharonov-Bohm effect in terms of the interaction between electromagnetic fields. In this proposal, the field generated by the charged wave function interacts with the Aharonov-Bohm field, produced by an external source. First, we present a review on the usual interpretation of the effect, as well as a proposal to interpret it in terms of fields by using semiclassical approaches. Then we present a Lagrangian formulation for a non-relativistic field theory that describes the interaction between a charged quantum particle and the classical electromagnetic field, including external sources. Thus, we determine the electromagnetic fields generated by the non-relativistic field and its interaction energy with the external source. For the quantum rotor, we show that the change in the energy spectrum of a charged particle due to the presence of the Aharonov-Bohm potential can be interpreted as due to the interaction energy of the system. For the scattering cases, we show that it is possible to obtain the phase changes of the particles as a consequence of the time evolution of the system. Finally, we show that in the presence of linear and isotropic materials, the effect depends on the electric permittivity and the magnetic permeability of the material medium.

**Keywords:** aharonov bohm effect. quantum mechanics. field theory.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Partícula restrita a mover-se sobre um anel de raio $R$ (rotor quântico).	26
Figura 2 – Uma partícula se move sobre o anel externo (raio $R$ ), com momentum angular $n\hbar\hat{z}$ . Internamente à este anel, um solenoide de raio $a$ e comprimento infinito é ligado, produzindo um campo magnético em seu interior.	29
Figura 3 – $a$ : dispositivo de separação do feixe. $b$ : região de interferência.	31
Figura 4 – Deslocamento do padrão de interferência devido à ação do potencial vetor magnético sobre as funções de onda. O feixe atravessa um dispositivo de interferência (por exemplo, uma fenda dupla) e as partículas difratadas são capturadas em uma superfície de detecção. Em vermelho, o padrão de interferência esperado para um experimento usual de fenda dupla. Em verde, o padrão deslocado devido à diferença de fase $\Delta g$ .	33
Figura 5 – Um feixe de partículas é dividido em dois feixes representados pelas funções de onda $\Psi_1$ e $\Psi_2$ ( $a$ ). Os feixes são redirecionados pelos dispositivos $b_1$ e $b_2$ para dentro de dois tubos metálicos, um mantido a um potencial nulo, enquanto é ativado no outro um potencial elétrico no intervalo $t_1 \rightarrow t_2$ . Os feixes são novamente redirecionados pelos dispositivos $c_1$ e $c_2$ e a diferença de fase entre eles é medida em $d$ .	34
Figura 6 – Partícula movendo-se próxima a um solenoide de raio $a$ .	36
Figura 7 – Duas partículas carregadas se movendo sobre fios de comprimento $L \rightarrow \infty$ próximas a um solenoide com campo magnético interno $\frac{\Phi}{\pi a^2}\hat{z}$ .	71
Figura 8 – Duas partículas se movem sobre fios retilíneos longos, internas a tubos condutores. Durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ , é aplicada uma diferença de potencial entre as camadas de um dos tubos, gerando um campo elétrico entre elas.	75
Figura 9 – Caminho de integração. A curva $C$ fechada é composta por uma seção sobre o eixo real, de $-r$ à $r$ , e uma seção $C_\theta$ formada por uma semi-circunferência de raio $r$ .	92



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>O EFEITO AHARONOV-BOHM</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>A função de onda na presença de potenciais eletromagnéticos</b>	<b>21</b>
2.1.1	Equação de Schrödinger	21
2.1.2	Mudança de fase na função de onda	24
<b>2.2</b>	<b>Efeito Aharonov-Bohm magnético: estado ligado</b>	<b>26</b>
2.2.1	O rotor quântico	26
2.2.2	Rotor quântico na presença de um solenoide: tratamento padrão	28
<b>2.3</b>	<b>Efeito Aharonov-Bohm magnético: estado de espalhamento</b>	<b>31</b>
<b>2.4</b>	<b>Efeito Aharonov Bohm elétrico</b>	<b>33</b>
<b>2.5</b>	<b>Interpretação semiclássica em termos de campos magnéticos</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>CAMPO ELETROMAGNÉTICO DE UMA PARTÍCULA QUÂN- TICA CARREGADA</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Campo de Maxwell</b>	<b>39</b>
3.1.1	Densidade lagrangeana do campo eletromagnético	39
3.1.2	Equações de Maxwell	42
<b>3.2</b>	<b>Campo de Schrödinger</b>	<b>44</b>
3.2.1	Densidade Lagrangeana de Schrödinger	44
3.2.2	Densidade Lagrangeana de Schrödinger na presença de um campo eletro- magnético	46
<b>3.3</b>	<b>Campo gerado por uma partícula quântica carregada</b>	<b>49</b>
3.3.1	Lagrangeana de interação	49
3.3.2	Função de Green	50
3.3.3	Hamiltoniana	52
<b>4</b>	<b>INTERPRETAÇÃO DO EFEITO AHARONOV-BOHM EM TER- MOS DA INTERAÇÃO DOS CAMPOS</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Rotor quântico na presença do potencial de Aharonov-Bohm</b>	<b>55</b>
4.1.1	Corrente de Matéria na presença do campo de Araronov-Bohm	56
4.1.2	Função de Green para o rotor quântico	57
4.1.3	Campo magnético gerado pelo rotor quântico	60
4.1.4	Espectro de energia	63
<b>4.2</b>	<b>Estado de espalhamento na presença do potencial de Aharonov-Bohm</b>	<b>66</b>
4.2.1	Campo magnético gerado por uma partícula em um fio retilíneo	66

4.2.2	Mudança de fase . . . . .	70
4.3	<b>Efeito Aharonov-Bohm elétrico . . . . .</b>	<b>74</b>
4.4	<b>Cálculo por correntes . . . . .</b>	<b>77</b>
4.5	<b>Efeito Aharonov-Bohm em meios materiais lineares . . . . .</b>	<b>80</b>
4.6	<b>Fonte do campo de Aharonov-Bohm . . . . .</b>	<b>82</b>
5	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>85</b>
A	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>87</b>
A.1	<b>Cálculos de campos magnéticos utilizados neste trabalho . . . . .</b>	<b>87</b>
A.2	<b>Representações da função Delta de Dirac . . . . .</b>	<b>88</b>
A.3	<b>Funções Modificadas de Bessel e algumas propriedades . . . . .</b>	<b>89</b>
A.4	<b>Solução da equação modificada de Bessel . . . . .</b>	<b>89</b>
A.5	<b>Integrais úteis . . . . .</b>	<b>91</b>
A.6	<b>Cálculo da integral de <math>\tilde{G}_0(\omega, k, s; R, R)</math> pelo teorema dos resíduos . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>95</b>

# 1 Introdução

Em 1948, Ehrenberg e Siday estudavam a construção de uma lente magnética para um espectrômetro beta; essencialmente, um método de desviar partículas beta fazendo-as passar através de campos magnéticos uniformes [1]. Utilizando uma analogia ótico-mecânica, mostraram, através de cálculos teóricos, que o potencial vetor magnético poderia se comportar como um componente de um “índice de refração” da lente magnética, alterando o comportamento de um feixe de elétrons passando através da lente [2]. Entretanto, a dependência explícita do potencial vetor magnético levou à constatação de um efeito curioso: se dois feixes de elétrons passassem pelos lados opostos de uma região fechada com campo magnético interno (por exemplo, um solenoide), haveria uma diferença de fase observável entre os dois feixes, mesmo que os elétrons estivessem em uma região de campo magnético nulo. Isso ocorria pois, embora o campo magnético fosse nulo nas regiões onde as partículas estavam, o potencial vetor magnético não era.

Na época, este fenômeno não obteve atenção suficiente da comunidade científica, sendo tratado por alguns colegas de Ehrenberg e Siday como um provável erro ainda não identificado. Foi só em 1959 que este efeito ganhou notoriedade com a publicação do celebrado artigo “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory” [3], onde Y. Aharonov e D. Bohm deduzem o mesmo efeito de maneira independente e com argumentos mais profundos. Estendendo a análise para casos mais gerais, propuseram configurações do efeito envolvendo a ação de potenciais elétricos e magnéticos sobre partículas carregadas em regiões de campos nulos. Desde então, este fenômeno ficou conhecido como *Efeito Aharonov-Bohm*<sup>1</sup>.

Desde a consolidação do eletromagnetismo clássico, os potenciais eletromagnéticos sempre foram interpretados como campos matemáticos desprovidos de significado físico, servindo apenas como funções auxiliares usadas para efetuar cálculos. Com a descoberta do efeito Aharonov-Bohm, esta interpretação passou a ser questionada: seriam os potenciais eletromagnéticos as quantidades físicas fundamentais do eletromagnetismo, e não apenas campos auxiliares?

Muitos experimentos foram realizados desde então [5][6][7][8], comprovando o efeito. O impacto conceitual trazido por estas descobertas foi muito forte, o que motivou uma série de trabalhos propondo uma interpretação para o efeito em termos dos campos, ao invés dos potenciais [9][10][11][12]. Em geral, estes trabalhos recorrem à abordagens semiclássicas para a explicação dos fenômenos, utilizando conceitos como forças de reação. Embora

---

<sup>1</sup> Em 1962, em outra publicação sobre o tema [4], Aharonov e Bohm reconheceram o pioneirismo dos trabalhos de Ehrenberg e Siday, e atualmente o fenômeno é tratado em alguns textos como efeito Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm.

consigam obter os mesmos resultados, estas abordagens assumem uma série de hipóteses e idealizações, muitas delas pela necessidade técnica de tornar os cálculos possíveis de serem feitos. Além disso, as técnicas utilizadas são particulares de cada problema, não havendo um formalismo único para explicar as diversas configurações do efeito.

Neste trabalho, propomos uma interpretação alternativa, mostrando que o efeito Aharonov-Bohm pode ser visto, exclusivamente, como uma consequência da interação entre os campos eletromagnéticos gerados pela partícula e pela fonte externa que gera um campo de Aharonov-Bohm, o que introduz uma energia de interação no sistema. Além disso, propomos que a mudança de fase nas partículas seja proveniente da evolução temporal do sistema, em contraponto à interpretação de fase geométrica usualmente empregada [13][14]. Para atestar a validade desta proposta, revisitamos as principais configurações do efeito à luz desta interpretação, obtendo resultados compatíveis com os que vem sendo apresentados na literatura nos últimos 60 anos.

Como já mencionado, a interpretação do efeito Aharonov-Bohm em termos da interação dos campos eletromagnéticos gerado por partículas já foi considerada em outros trabalhos na literatura. Nessa dissertação usamos uma abordagem de teoria de campo, na qual consideramos não partículas, mas o campo de Schrödinger (não relativístico) minimamente acoplado ao campo de calibre.

As discussões apresentadas neste trabalho seguem a seguinte estrutura:

No capítulo 2, apresentamos uma rápida revisão de alguns conceitos básicos de mecânica quântica<sup>2</sup> necessários para a compreensão deste trabalho, como a equação de Schrödinger e o operador de evolução temporal. Apresentamos a *equação modificada de Schrödinger*, que leva em consideração a atuação dos potenciais eletromagnéticos sobre partículas carregadas. Então, apresentamos as configurações tradicionais do efeito Aharonov-Bohm, reproduzindo os cálculos convencionais (em termos de potenciais) conhecidos na literatura [15][13][16][3][17], a saber: a quebra de degenerescência do espectro de energia do rotor quântico e as diferenças de fase induzidas em feixes de partículas carregadas, devido à presença do campo de Aharonov-Bohm (efeito AB magnético) e as diferenças de fase provocadas devido à presença de tubos condutores carregados (efeito AB elétrico). Depois, discutimos a interpretação semiclassical de Boyer para o efeito AB magnético [9].

No capítulo 3, apresentamos o formalismo lagrangeano do eletromagnetismo, introduzindo a lagrangeana de Maxwell e algumas de suas propriedades. Neste contexto, deduzimos as equações de Maxwell como equações de movimento de Euler-Lagrange através do tensor de campo  $F^{\mu\nu}$ . De modo semelhante, tratamos a lagrangeana de Schrödinger, cujas equações de movimento levam à equação de Schrödinger.

<sup>2</sup> Neste trabalho, utilizamos a interpretação de Copenhague, usualmente apresentada nos livros texto das disciplinas de Mecânica Quântica

---

Impondo sobre a lagrangeana de Schrödinger um acoplamento mínimo com o campo eletromagnético (substituindo as derivadas ordinárias por derivadas covariantes), obtemos uma lagrangeana cujas equações de movimento levam à equação modificada de Schrödinger (equação de Schrödinger na presença de campos eletromagnéticos). Somando esta lagrangeana à de Maxwell, obtemos uma lagrangeana total, onde notamos uma corrente intrínseca proveniente do campo de Schrödinger (partículas quânticas), além de possíveis correntes externas, e um termo de potencial adicional para o campo eletromagnético (ou seja, um termo quadrático no campo de calibre). Ainda neste capítulo, obtemos a hamiltoniana total do sistema, que pode ser separada em termos de auto-energia e energias de interação, que podem ser escritas em termos dos campos eletromagnéticos do sistema. A hamiltoniana de interação apresentada é o cerne da interpretação para o efeito Aharonov-Bohm apresentada nessa dissertação.

No capítulo 4, voltamos aos problemas discutidos no capítulo 2, desta vez recorrendo à uma abordagem de campos, através do formalismo apresentado no capítulo 3. Utilizando funções de Green, calculamos os potenciais eletromagnéticos gerados pelo campo de Schrödinger (partículas quânticas carregadas). Por questões técnicas, utilizamos representações das funções de Green no espaço de Fourier, levando à soluções em termos de funções de Bessel modificadas. Buscamos investigar as configurações do efeito AB da forma mais fiel possível, impondo o mínimo de modificações e condições aos sistemas. Uma dessas modificações foi a substituição de feixes de partículas (descritos por estados de espalhamento tridimensionais) por partículas se propagando sobre fios retilíneos infinitos. Os campos obtidos são utilizados para determinar a energia de interação entre as partículas. Como será mostrado, esta energia de interação explica a mudança no espectro de energia do rotor quântico na presença do potencial de Aharonov-Bohm, bem como as diferenças de fase observadas nas demais configurações. Os resultados obtidos concordam com aqueles apresentados no capítulo 2 e bem conhecidos na literatura.

Ao final do capítulo 4, é feita uma breve discussão sobre o efeito AB na presença de meios materiais. Por simplicidade, consideramos meios lineares e isotrópicos. Vemos que a modificação causada pela presença destes materiais é bastante simples, introduzindo um fator multiplicativo na energia de interação (e consequentemente nas mudanças de fase), cuja natureza está associada às características elétrica e/ou magnética do material.

Por fim, apresentamos as conclusões extraídas deste trabalho assim com alguns comentários finais. Identidades matemáticas e outros resultados úteis não apresentados no corpo principal do trabalho são discutidos no apêndices.



## 2 O Efeito Aharonov-Bohm

Como discutido na introdução, o efeito Aharonov-Bohm deu surgimento à uma questão conceitual muito forte: seriam os potenciais (e não os campos) eletromagnéticos os verdadeiros entes físicos primordiais da teoria eletromagnética? Os potenciais sempre foram vistos como funções auxiliares, e grandezas físicas mensuráveis não deveriam depender explicitamente deles. Tal interpretação é reforçada pela invariância de calibre que estes apresentam. Entretanto, no regime quântico, estas funções auxiliares produzem efeitos nas partículas, mesmo em regiões em que os campos são nulos. Esses efeitos tem sido interpretados nas últimas décadas como consequência do acoplamento mínimo entre a partícula e os potenciais, na equação de Schrödinger [3][4], e por fases geométricas introduzidas nessas funções de onda devido à presença dos potenciais [14].

Neste capítulo, exploraremos esta interpretação através de uma revisão dos resultados mais relevantes obtidos acerca do efeito Aharonov-Bohm até o momento. A abordagem apresentada aqui é comumente encontrada em livros de mecânica quântica [15][13] e em artigos de revisão sobre o assunto [18][19][20].

Apresentamos aqui também uma conhecida proposta de explicação semiclássica para o efeito Aharonov-Bohm em termos dos campos eletromagnéticos, desenvolvida por Boyer[9].

### 2.1 A função de onda na presença de potenciais eletromagnéticos

#### 2.1.1 Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger, utilizada para descrever a dinâmica de um sistema de partículas em mecânica quântica, pode ser construída no espaço de configurações através da quantização canônica da função hamiltoniana clássica para um sistema de partículas. Neste sentido, é também possível descrever a dinâmica de um sistema quântico submetido a um campo eletromagnético, quantizando a correspondente hamiltoniana clássica.

Nessa seção faremos uma breve revisão de alguns aspectos da Equação de Schrödinger para sistemas compostos de uma única partícula.

A hamiltoniana para uma partícula clássica de massa  $m$  é escrita, em termos de sua posição  $\mathbf{r}$  e seu *momentum canonicamente conjugado*  $\Pi$ , como

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} + V(\mathbf{r}; t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}; t), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{p}$  é o momentum linear da partícula e  $V(\mathbf{r}; t)$  sua energia potencial. É importante

ressaltar neste momento que, embora o momentum canonicamente conjugado neste caso seja o próprio momentum linear da partícula, isto nem sempre é verdade, como veremos logo mais.

Através da quantização canônica, convertemos as variáveis dinâmicas em operadores ( $H \rightarrow \hat{H}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}$ ):

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{R}}; t). \quad (2.2)$$

A equação de Schrödinger para um vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$  é postulada como uma equação diferencial para a variável temporal:

$$\begin{aligned} \hat{H} |\Psi(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle, \\ \left( \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{R}}; t) \right) |\Psi(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle; \end{aligned} \quad (2.3)$$

para expressarmos esta equação em termos das coordenadas espaciais e da função de onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , aplicamos à ambos os lados da equação o vetor dual  $\langle \mathbf{r} |$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \left( \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{R}}; t) \right) |\Psi(t)\rangle &= \langle \mathbf{r} | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle, \\ \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}; t) \right) \langle \mathbf{r} | \Psi(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r} | \Psi(t)\rangle, \\ \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}; t) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde foram usadas as relações:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} |\mathbf{r}\rangle &= i\hbar \nabla |\mathbf{r}\rangle, \\ \langle \mathbf{r} | \hat{\mathbf{P}} &= -i\hbar \nabla \langle \mathbf{r} |. \end{aligned} \quad (2.5)$$

No caso em que o potencial não depende do tempo,  $V(\mathbf{r}; t) = V(\mathbf{r})$ , a equação (2.4) é separável nas variáveis espaciais e na variável temporal. Nesse caso, sob a condição de que o vetor de onda possa ser expresso em auto-estados de energia  $E$ , e que a hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo, ou seja,

$$\hat{H} |\Psi(t)\rangle = E |\Psi(t)\rangle, \quad (2.6)$$

e expressando a função de onda de forma separável,  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})f(t)$ , podemos obter a Equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

e a solução da parte temporal, neste caso, é imediata, obtida comparando-se a equação (2.7) com a equação (2.4):

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar}, \quad (2.8)$$

portanto, a função de onda total pode ser expressa na forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.9)$$

Em muitos casos, é conveniente definir um *operador de evolução temporal*,  $\hat{U}(t_2, t_1)$ , que leva o vetor de estado de um instante de tempo  $t_1$  a um instante  $t_2$ :

$$|\Psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1) |\Psi(t_1)\rangle. \quad (2.10)$$

Aplicando esta definição na equação (2.3):

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \\ \hat{H}\hat{U}(t, t_0) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0), \end{aligned} \quad (2.11)$$

levando às soluções

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right], \quad \text{se } \hat{H} \text{ é independente do tempo}, \quad (2.12a)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right], \quad \text{se } [\hat{H}(t_1), \hat{H}(t_2)] = 0, t_1 \neq t_2; \quad (2.12b)$$

A terceira solução, quando  $[\hat{H}(t_1), \hat{H}(t_2)] \neq 0$ , que pode ser escrita em termos de uma série de Dyson<sup>1</sup>, não será discutida neste trabalho. Isso nos sugere definir uma função escalar  $\mathcal{U}(t)$ :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} Et \right], & \text{se } E \text{ independe do tempo}, \\ \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int^t dt' E(t') \right] & \text{se } E \text{ depende do tempo}, \end{cases} \quad (2.13)$$

de modo que a função de onda possa ser expressa na forma<sup>2</sup>

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})\mathcal{U}(t). \quad (2.14)$$

<sup>1</sup> Uma discussão detalhada sobre as soluções do operador de evolução temporal é apresentada na referência [15], seção 2.1.

<sup>2</sup> Essa expressão só é válida se a função de onda for separável em suas coordenadas espaciais e temporais. Para os casos discutidos neste trabalho, esta condição sempre é satisfeita.

Agora, vamos analisar o caso de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético. Neste caso, o momentum canonicamente conjugado  $\Pi$  não será apenas o momentum linear da partícula, mas conterá um termo associado ao momento do campo magnético definido pelo potencial vetor  $\mathbf{A}$ :

$$\Pi = \mathbf{p} - q\mathbf{A}, \quad (2.15)$$

além disso, a ação de um campo elétrico  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , introduz uma energia potencial  $V = q\varphi$ . Então, a função hamiltoniana clássica para esta partícula será

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} + V = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi. \quad (2.16)$$

Os mesmos procedimentos de quantização canônica podem ser aplicados à esse caso, levando à equação de Schrödinger modificada:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.17)$$

e à correspondente equação independente do tempo:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

### 2.1.2 Mudança de fase na função de onda

Consideremos agora a seguinte situação: uma partícula, descrita pela função de onda  $\Psi$ , é submetida à ação de um potencial elétrico  $\varphi(t)$ , função apenas do tempo na região em que a partícula se encontra (por exemplo, uma partícula confinada em uma Gaiola de Faraday, em cujo interior o campo elétrico é nulo e o potencial é independente da posição). Vamos propor uma solução da forma

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iS_t/\hbar}, \quad (2.19)$$

sendo  $\Psi_0$  a solução da equação de Schrödinger na ausência do potencial  $\varphi$ , e  $S_t$  uma fase a ser determinada. Substituindo esta proposta na equação (2.17) com  $\mathbf{A} = 0$ , teremos

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + q\varphi(t) \right] \Psi_0 e^{-iS_t/\hbar} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi_0 e^{-iS_t/\hbar} \right),$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_0 - i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right) e^{-iS_t/\hbar} + \Psi_0 q\varphi(t) e^{-iS_t/\hbar} = \Psi_0 \hbar \frac{\partial S_t}{\partial t} e^{-iS_t/\hbar},$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{q\varphi(t)}{\hbar},$$

$$S_t = \frac{q}{\hbar} \int dt \varphi(t). \quad (2.20)$$

Agora, consideremos um cenário no qual a partícula está contida em uma região cujo campo magnético é nulo, porém, o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é não-nulo, e varia apenas com as coordenadas espaciais. Propomos então uma solução em termos de uma fase  $S_{\mathbf{r}}$ :

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iS_{\mathbf{r}}/\hbar}. \quad (2.21)$$

Semelhante ao que foi feito na equação (2.20), substituindo esta solução na equação (2.17), e usando as relações:

$$\nabla e^{-iS_{\mathbf{r}}/\hbar} = -\frac{i}{\hbar} \nabla S_{\mathbf{r}} e^{-iS_{\mathbf{r}}/\hbar}, \quad (2.22a)$$

$$\nabla^2 e^{-iS_{\mathbf{r}}/\hbar} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \nabla^2 S_{\mathbf{r}} - \frac{i}{\hbar} (\nabla S_{\mathbf{r}})^2 \right] e^{-iS_{\mathbf{r}}/\hbar}, \quad (2.22b)$$

obtemos

$$\begin{aligned} & i\hbar\Psi_0\nabla^2 S_{\mathbf{r}} + \Psi_0(\nabla S_{\mathbf{r}})^2 + 2i\hbar\nabla\Psi_0 \cdot \nabla S_{\mathbf{r}} \\ & + 2q\mathbf{A} \cdot (i\hbar\nabla\Psi_0 + \Psi_0\nabla S_{\mathbf{r}}) + q^2 A^2 \Psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A solução desta equação não é imediata como a equação (2.20). Entretanto, podemos fazer a seguinte reflexão: se a fase introduzida na função de onda pela atuação de um potencial  $\varphi(t)$  é proporcional à integral deste potencial na variável temporal, é razoável supor que a fase introduzida pela atuação de um potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  seja proporcional à integral deste campo vetorial através da curva percorrida pela partícula. Como estamos considerando o campo magnético nulo nessa região ( $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ), a integral não deverá depender deste caminho<sup>3</sup>. Então, vamos propor a seguinte solução:

$$S_{\mathbf{r}} = \lambda \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad \lambda \text{ constante}, \quad (2.24)$$

de onde extraímos as seguintes relações:

$$\nabla S_{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{A}, \quad (2.25a)$$

$$\nabla^2 S_{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{gauge de Coulomb}), \quad (2.25b)$$

o que leva a equação (2.23) em uma equação algébrica para  $\lambda$ :

$$\Psi_0 A^2 (\lambda + q)^2 + 2i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_0 (\lambda + q) = 0, \quad (2.26)$$

cuja solução é  $\lambda = -q$ .

<sup>3</sup> Para que essa afirmativa seja verdadeira, devemos impor também que a partícula reside em um espaço *simplesmente conexo*.

Se considerarmos uma situação onde a partícula se encontre em uma região de campo eletromagnético nulo, mas com potenciais  $\varphi(t)$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  não nulos, podemos juntar  $S_t$  e  $S_r$  em um único termo, e a função de onda sofrerá uma mudança de fase dada por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t)e^{ig(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.27)$$

onde

$$g(\mathbf{r}, t) = -\frac{q}{\hbar} \int^{\mathbf{r}, t} (\varphi(t')dt' - \mathbf{A}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'); \quad (2.28)$$

este efeito pode ser também interpretado como um caso particular de fase geométrica[14].

## 2.2 Efeito Aharonov-Bohm magnético: estado ligado

### 2.2.1 O rotor quântico

Consideremos um anel de raio  $R$ , cujo eixo de simetria é o eixo  $z$  e que por simplicidade, fixaremos no plano  $xy$ . Sobre este anel, uma partícula de massa  $m$  move-se restrita apenas ao vínculo  $\rho = R$ , em um sistema de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z = 0)$ .

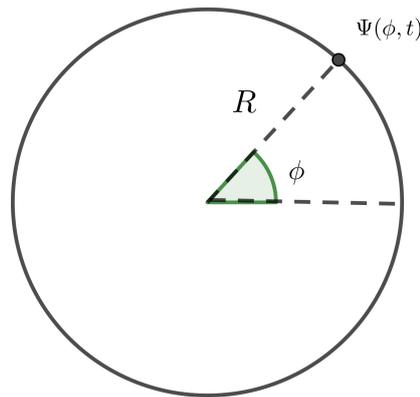


Figura 1 – Partícula restrita a mover-se sobre um anel de raio  $R$  (rotor quântico).

Denotemos por  $\psi(\phi)$  a solução espacial da função de onda que representa esta partícula. A equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula será

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2 \psi(\phi)}{\partial \phi^2} = E\psi(\phi). \quad (2.29)$$

Propondo uma solução  $\psi(\phi) \propto \exp(\beta\phi)$ , a equação (2.29) leva à seguinte equação característica:

$$\beta^2 = -\frac{2mR^2E}{\hbar^2},$$

$$\beta = \pm in; \quad n = R\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (2.30)$$

Uma vez que a energia  $E$  é toda proveniente do termo cinético da equação de Schrödinger, garantimos que  $n$  é real positivo. Com isso, obtemos a solução geral

$$\psi(\phi) = Be^{in\phi} + B'e^{-in\phi}, \quad (2.31)$$

com  $B$  e  $B'$  constantes. Como  $\phi = 0$  e  $\phi = 2\pi$  representam o mesmo ponto no plano, a função de onda deve ser a mesma nestes dois casos. O mesmo vale para a derivada da função de onda, o que leva às condições de contorno periódicas:

$$\psi(0) = \psi(2\pi) \rightarrow B + B' = Be^{2\pi in} + B'e^{-2\pi in}, \quad (2.32a)$$

$$\left. \frac{d\psi(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=0} = \left. \frac{d\psi(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=2\pi} \rightarrow B - B' = Be^{2\pi in} - B'e^{-2\pi in}, \quad (2.32b)$$

de onde obtemos:

$$B = Be^{2\pi in}, \quad (2.33a)$$

$$B' = B'e^{-2\pi in}; \quad (2.33b)$$

estas condições só são satisfeitas se  $n$  for um número *inteiro*.

Para compreendermos o significado físico dos sinais nas exponenciais da solução (2.31), é conveniente escrever a função de onda como  $\psi(\phi) = \psi^+(\phi) + \psi^-(\phi)$ , onde

$$\psi^+(\phi) = Be^{in\phi}, \quad (2.34a)$$

$$\psi^-(\phi) = B'e^{-in\phi}. \quad (2.34b)$$

Medindo o valor do momentum angular na direção de  $z$  em ambos os estados (expresso na base de coordenadas  $|\phi\rangle$ ):

$$\langle \phi | \hat{L}_z | \psi^+ \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \psi^+(\phi) = n\hbar \psi^+(\phi), \quad (2.35)$$

$$\langle \phi | \hat{L}_z | \psi^- \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \psi^-(\phi) = -n\hbar \psi^-(\phi),$$

vemos que  $\psi^+$  e  $\psi^-$  representam autoestados de momentum angular com autovalores  $n\hbar$  e  $-n\hbar$ , respectivamente. Se permitirmos que  $n$  admita valores negativos ( $n = \pm R\sqrt{2mE/\hbar^2}$ ), podemos simplificar a solução (2.31):

$$\psi(\phi) = Ae^{in\phi}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...). \quad (2.36)$$

O fator  $A$  pode ser obtido através da condição de normalização da função de onda:

$$\int_0^{2\pi} d\phi R |\psi(\phi)|^2 = 1;$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}, \quad (2.37)$$

e portanto a solução para a função de onda normalizada é dada por

$$\psi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{in\phi}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots) \quad (2.38)$$

Com isso, podemos determinar as funções densidade de probabilidade e densidade de corrente de probabilidade para a função de onda  $\Psi(\phi; t) = \psi(\phi)e^{iEt/\hbar}$ :

$$\varrho = |\Psi|^2 = \frac{1}{2\pi R}, \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \phi} - \Psi^* \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) = \frac{n\hbar}{2m\pi R^2} \hat{\phi}. \quad (2.39b)$$

A energia da partícula pode ser obtida através da equação (2.30):

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2mR^2}. \quad (2.40)$$

O espectro de energia apresenta degenerescência associada ao sinal de  $n$ . Como este sinal indica o sentido do momentum angular da partícula, esta degenerescência é esperada, uma vez que a energia deve depender apenas do valor absoluto do momentum angular, analogamente à energia de rotação clássica. Isto se torna evidente quando expressamos a energia em termos do momentum angular  $L_z = n\hbar$ :

$$E_{L_z} = \frac{L_z^2}{2mR^2}. \quad (2.41)$$

## 2.2.2 Rotor quântico na presença de um solenoide: tratamento padrão

Na eletrodinâmica de Maxwell um solenoide cilíndrico infinitamente longo de raio  $a$ , tendo como  $\hat{z}$  seu eixo de simetria, tem seu campo magnético dado por

$$\mathbf{B}_{sol} = \begin{cases} \frac{\Phi}{\pi a^2} \hat{z}, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases} \quad (2.42)$$

onde  $\Phi$  é o fluxo magnético produzido pelo solenoide em seu interior (figura 2).

Embora o campo magnético seja nulo fora do solenoide, o potencial vetor não é:

$$\mathbf{A}_{sol} = \begin{cases} \frac{\Phi \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \rho < a, \\ \frac{\Phi}{2\pi \rho} \hat{\phi}, & \rho > a, \end{cases} \quad (2.43)$$

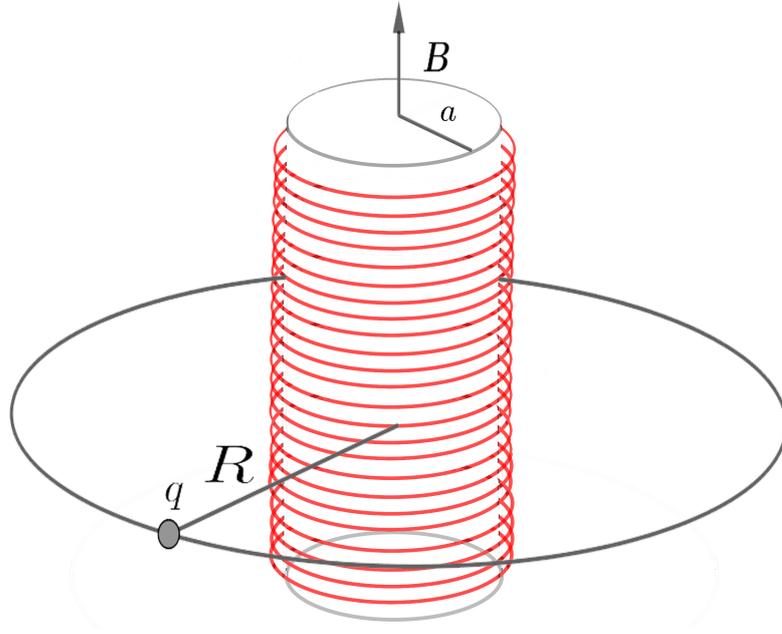


Figura 2 – Uma partícula se move sobre o anel externo (raio  $R$ ), com momentum angular  $n\hbar\hat{z}$ . Internamente à este anel, um solenoide de raio  $a$  e comprimento infinito é ligado, produzindo um campo magnético em seu interior.

este potencial vetor é contínuo em  $\rho = a$  e satisfaz a equação (2.42) ( $\mathbf{B}_{sol} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}$ ).

Consideremos agora a seguinte situação: no centro do rotor quântico, introduzimos um solenoide cilíndrico de raio  $a < R$ , conforme figura 2. Nesta situação, a equação de Schrödinger é modificada devido à presença do potencial vetor magnético produzido pelo solenoide em seu exterior, onde a partícula se encontra. Portanto, usando a equação (2.18), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \nabla^2 + q^2 \mathbf{A}_{sol}^2 + 2i\hbar q \mathbf{A}_{sol} \cdot \nabla \right] \psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{i\hbar q \Phi}{2m\pi R^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{q^2 \Phi^2}{8\pi^2 R^2 m} \psi &= E\psi. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Definindo os fatores

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \\ \beta &= \frac{2mR^2 E}{\hbar^2} - \alpha^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

a equação (2.44) pode ser reduzida:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} - 2i\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \beta \psi = 0. \quad (2.46)$$

De forma semelhante ao que foi feito na seção 2.2.1, propomos uma solução do tipo

$\psi \propto \exp(\lambda\phi)$ , obtendo a equação

$$\lambda^2 - 2i\alpha\lambda + \beta = 0;$$

$$\lambda = in, \quad n = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \pm R\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \quad (2.47)$$

Aqui também as condições de contorno periódicas restringem  $n$  à valores inteiros e a solução para  $\psi$  (normalizada) será

$$\psi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{in\phi}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3\dots). \quad (2.48)$$

Embora esta solução seja idêntica à solução (2.31), é importante observar que o número quântico  $n$ , embora assuma valores inteiros, é escrito em termos da energia do sistema de maneira diferente nos dois casos. Expressando a solução explicitamente em termos de  $E$  e  $\Phi$ , temos que

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp \left[ i \left( \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \pm R\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right) \phi \right]. \quad (2.49)$$

Podemos também escrever a energia do sistema em termos de  $n$  a partir da equação(2.47):

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2. \quad (2.50)$$

Note que o operador de momentum angular na direção  $\hat{z}$  tem como autovalores  $n\hbar$ , como não poderia deixar de ser, tanto no caso onde o solenoide está presente como no caso onde não há solenoide. Poderemos medir o momentum angular  $L_{z(sol)}$  em termos de sua dependência com o fluxo magnético do solenoide e da energia correspondente do sistema. Se compararmos esta medida ao momentum angular  $L_z$  sem a presença do solenoide (denotando a energia da partícula sem a presença do solenoide como  $E_l$ ), temos que

$$L_z = \left( \pm R\sqrt{\frac{2mE_l}{\hbar^2}} \right) \hbar, \quad (2.51a)$$

$$L_{z(sol)} = \left( \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \pm R\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right) \hbar. \quad (2.51b)$$

É importante notar que, além de modificar o espectro de energia da partícula, a presença do solenoide quebra a degenerescência observada no rotor livre ( $E_n \neq E_{-n}$ ). Isso também pode ser observado pelo fato de que a energia não mais dependerá apenas do módulo do momentum angular, mas também de seu sentido (e do sinal de  $\Phi$ ), como segue

$$E_{L_{z(sol)}} = \frac{1}{2mR} \left( L_{z(sol)}^2 - \frac{q\Phi L_{z(sol)}}{\pi} + \frac{q^2\Phi^2}{4\pi^2} \right). \quad (2.52)$$

## 2.3 Efeito Aharonov-Bohm magnético: estado de espalhamento

Vamos abordar nessa seção a configuração mais conhecida e amplamente discutida do efeito Aharonov-Bohm: a mudança de fase de partículas carregadas na presença de um solenoide cilíndrico e infinitamente longo, que produz em seu interior um campo magnético uniforme.

Nas configurações típicas referentes ao Efeito Aharonov-Bohm, um feixe de partículas carregadas (em geral, elétrons) é dividido em duas partes através de algum processo de separação, usualmente, em um experimento de dupla fenda. Os dois feixes resultantes viajam por lados opostos à um solenoide cilíndrico infinito de raio  $a$  com um campo magnético como o da equação (2.42). Após passarem pelo solenoide, os feixes são novamente aproximados de modo a interferirem entre si (figura 3).

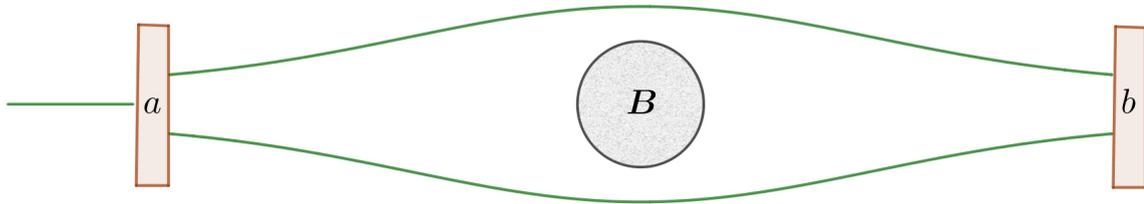


Figura 3 –  $a$ : dispositivo de separação do feixe.  $b$ : região de interferência.

Os feixes são divididos de tal forma que a função de onda total possa ser dividida como uma soma de duas funções de ondas,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , correspondentes aos feixes que passam pelo caminho superior e pelo caminho inferior, respectivamente:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (2.53)$$

Durante toda a trajetória ao redor do solenoide, as partículas sofrem a ação do potencial vetor (2.43). Essa ação introduzirá uma fase em cada uma das funções de onda, de modo que

$$\Psi = \Psi_1 e^{ig_1} + \Psi_2 e^{ig_2}. \quad (2.54)$$

A fase introduzida por esse solenoide em cada função de onda será, segundo a equação (2.28):

$$\begin{aligned} g &= \frac{q}{\hbar} \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{A}_{sol} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \cdot (\mp \hat{\phi}) \rho d\rho d\phi \\ &= \mp \frac{q\Phi}{2\hbar}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde os sinais  $-$  e  $+$  correspondem respectivamente às funções  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ ,  $\mathbf{r}_a$  é a posição inicial das partículas (no dispositivo de separação) e  $\mathbf{r}_b$  é a posição final (no detector). As fases introduzidas em cada partícula são então:

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{q\Phi}{2\hbar}, \\ g_2 &= +\frac{q\Phi}{2\hbar} \end{aligned} \quad (2.56)$$

e a diferença de fase entre as partículas:

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{q\Phi}{\hbar}. \quad (2.57)$$

Para entendermos os efeitos dessa diferença de fase nos resultados experimentais, vamos analisar sua implicação nos padrões de interferência. Iniciamos com o caso onde não há solenoide e, por simplicidade, vamos descrever ambos os feixes como ondas planas:

$$\Psi_1 = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}, \quad (2.58a)$$

$$\Psi_2 = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}; \quad (2.58b)$$

podemos determinar o padrão de interferência através da função densidade de probabilidade da função de onda total:

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^* \\ &= 2A^2 + A^2e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} + A^2e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)} \\ &= 2A^2\left[1 + \cos\left(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\right)\right] \\ &= A^2\cos^2\left(\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

o que leva a um padrão de interferência do tipo cossenoidal, dependente apenas dos diferentes caminhos tomados pelos feixes 1 e 2.

Sobre a influência do solenoide, as funções de onda mudam:

$$\Psi_1 = Ae^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1+g_1]}, \quad (2.60a)$$

$$\Psi_2 = Ae^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2+g_2]}; \quad (2.60b)$$

bem como a função densidade de probabilidade:

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + A^2e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+\Delta g]} + A^2e^{-i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+\Delta g]} \\ &= A^2\cos^2\left(\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{2} + \frac{\Delta g}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Vemos então que o efeito da diferença de fase produzida pelo solenoide é um *deslocamento no padrão de interferência*. Embora isto tenha sido ilustrado com um exemplo simples de onda planas, este resultado pode ser generalizado para funções de onda mais complicadas, como, por exemplo, pacotes gaussianos tridimensionais.

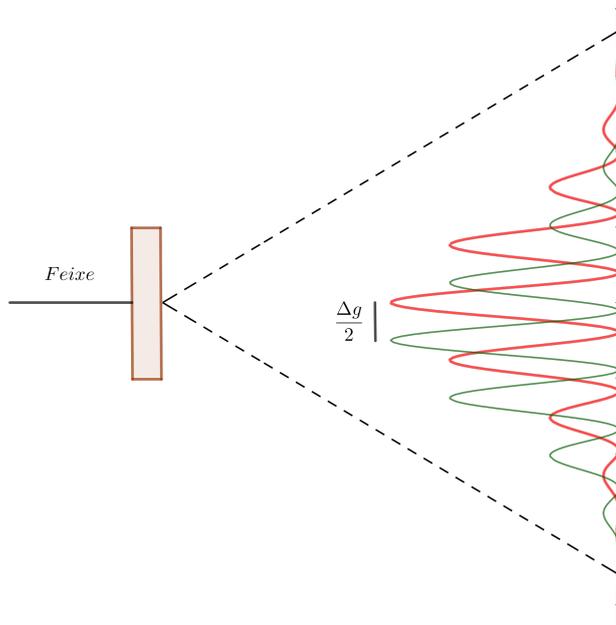


Figura 4 – Deslocamento do padrão de interferência devido à ação do potencial vetor magnético sobre as funções de onda. O feixe atravessa um dispositivo de interferência (por exemplo, uma fenda dupla) e as partículas difratadas são capturadas em uma superfície de detecção. Em vermelho, o padrão de interferência esperado para um experimento usual de fenda dupla. Em verde, o padrão deslocado devido à diferença de fase  $\Delta g$ .

## 2.4 Efeito Aharonov Bohm elétrico

Outro problema apresentado por Aharonov e Bohm, embora não tão discutido na literatura quanto o anterior, é a mudança de fase em uma partícula devido à atuação de um potencial elétrico dependente do tempo. Nesta configuração, o feixe de partículas é dividido em dois, e cada um dos feixes resultantes é direcionado de modo a passar por dentro de um tubo metálico. Em um dos tubos, é ativado um potencial em um instante  $t_1$ , que perdura em um valor constante  $\varphi$  até um instante  $t_2$  :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ \varphi, & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases} \quad (2.62)$$

enquanto o outro tubo é mantido a um potencial nulo (uma forma de produzir este potencial é utilizar uma bateria para provocar uma diferença de potencial entre a casca interna e a externa de um cilindro).

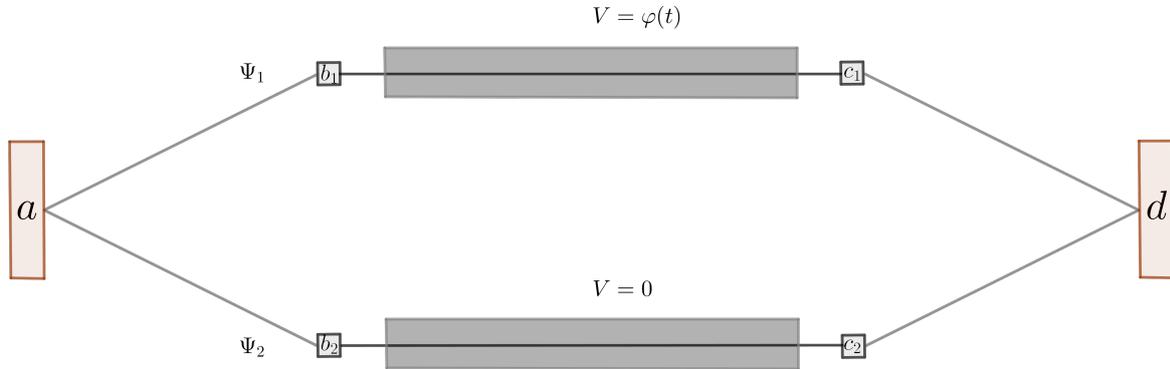


Figura 5 – Um feixe de partículas é dividido em dois feixes representados pelas funções de onda  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  (a). Os feixes são redirecionados pelos dispositivos  $b_1$  e  $b_2$  para dentro de dois tubos metálicos, um mantido a um potencial nulo, enquanto é ativado no outro um potencial elétrico no intervalo  $t_1 \rightarrow t_2$ . Os feixes são novamente redirecionados pelos dispositivos  $c_1$  e  $c_2$  e a diferença de fase entre eles é medida em  $d$ .

Um feixe de partículas carregadas, representado pela função de onda  $\Psi_1$ , sofrerá uma adição de fase conforme a equação (2.28):

$$g_1 = -\frac{q}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \varphi dt = -\frac{q\varphi(t_2 - t_1)}{\hbar}, \quad (2.63)$$

enquanto o outro feixe não experimenta nenhuma mudança de fase ( $g_2 = 0$ ). Desta forma, os dois feixes apresentarão, ao final do processo, uma diferença de fase relativa

$$\Delta g = \frac{q\varphi(t_2 - t_1)}{\hbar}. \quad (2.64)$$

A mesma análise feita para o caso do efeito AB magnético pode ser utilizada aqui: o efeito mensurável desta diferença de fase será um deslocamento no padrão de interferência. Por questões práticas, experimentos desse tipo são mais difíceis de serem executados do que aquele abordado na seção 2.3. Um destes problemas é que, como o potencial é dependente do tempo, diferentes partículas do feixe experimentarão diferentes mudanças de fase, uma vez que o fluxo de partículas para dentro e para fora do tubo continua durante o intervalo  $t_1 \rightarrow t_2$ . Outro problema a ser levado em conta é que os feixes poderiam induzir uma densidade de cargas na superfície interna do tubo, o que poderia prejudicar o controle do potencial.

## 2.5 Interpretação semiclássica em termos de campos magnéticos

Nesta seção, discutiremos uma possível explicação semiclássica apresentada por Timothy H. Boyer [9] para justificar a diferença de fase calculada na seção 2.3.

Para gerar o campo magnético uniforme dentro do solenoide ( $\mathbf{B}_{sol} = \Phi/\pi a^2$ ), existe uma densidade de corrente superficial:

$$\mathbf{K}_{sol} = \frac{B}{\mu_0} \hat{\phi} = \frac{\Phi}{\pi a^2 \mu_0} \hat{\phi}. \quad (2.65)$$

O momento de dipolo por unidade de comprimento do solenoide pode ser calculado:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{K}_{sol}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi a^2 \hat{\rho} \times \hat{\phi} \frac{\Phi}{\pi a^2 \mu_0} \\ &= \frac{\Phi}{\mu_0} \hat{z}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

O campo magnético gerado por uma partícula de carga  $q$ , passando pela origem à uma velocidade  $\mathbf{v}$ , é dado por:<sup>4</sup>

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}; \quad (2.67)$$

então, o campo magnético gerado por uma partícula situada em  $x = x_p$ ,  $y = y_p$  e  $z = 0$ , movendo-se a uma velocidade  $\mathbf{v} = v_0 \hat{\mathbf{y}}$  será

$$\mathbf{B}_p = \frac{\mu_0 q v_0}{4\pi} \left[ \frac{z \hat{\mathbf{x}} - (x - x_p) \hat{\mathbf{z}}}{\left( (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + z^2 \right)^{3/2}} \right]. \quad (2.68)$$

<sup>4</sup> Este resultado pode ser obtido determinando-se o campo elétrico gerado pela partícula em seu próprio referencial, e efetuando uma transformação de Lorentz para um referencial que se move à uma velocidade  $-\mathbf{v}$  com relação à partícula, tomando  $|\mathbf{v}| \ll c$ . O campo magnético então surge naturalmente como consequência da transformação.

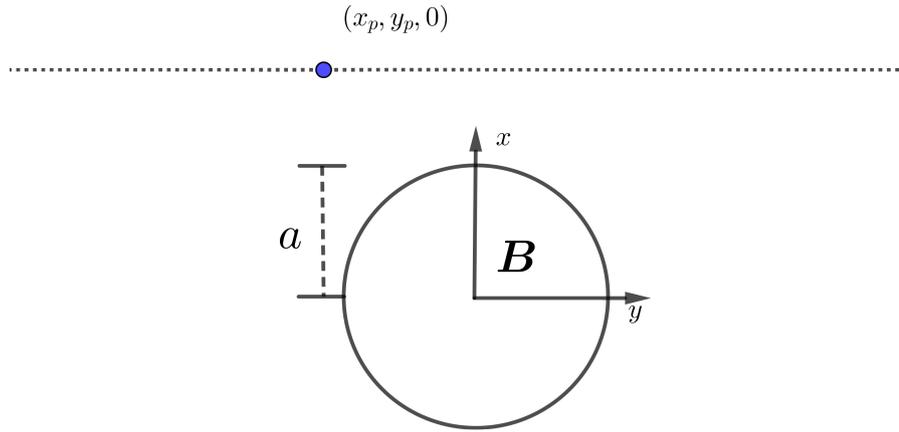


Figura 6 – Partícula movendo-se próxima a um solenoide de raio  $a$ .

O campo magnético da partícula produzirá uma força sobre o solenoide, devido ao momento de dipolo deste:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_M &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla (\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{M}) \\
 &= \frac{qv_0\Phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \nabla \left[ \frac{-(x-x_p)\hat{\mathbf{z}}}{((x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{qv_0\Phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \left( -\frac{1}{((x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2)^{3/2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \frac{(x-x_p)(2x-2x_p)}{((x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{x}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{(x-x_p)(2y-2y_p)}{((x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{3}{2} \frac{3(x-x_p)z}{((x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{z}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Por simplicidade, consideraremos o solenoide com um raio muito pequeno, de modo que a interação possa ser obtida aproximando-se o campo magnético da partícula pelo seu valor no eixo de simetria do solenoide ( $x = y = 0$ ). Dessa forma podemos escrever

$$\mathbf{F}_M = \frac{qv_0\Phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[ \left( -\frac{1}{(x_p^2 + y_p^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3x_p^2}{(x_p^2 + y_p^2 + z^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{3x_py_p}{(x_p^2 + y_p^2 + z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{y}} \right]. \tag{2.70}$$

Para o nosso propósito atual, precisamos apenas da componente  $y$  da força:

$$\begin{aligned} F_{M(y)} &= \frac{qv_0\Phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{3x_p y_p}{(x_p^2 + y_p^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{qv_0\Phi x_p y_p}{(x_p^2 + y_p^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Pela terceira lei de Newton, o solenoide deve exercer sobre a partícula uma força de reação  $F_R = -F_{M(y)}$  na direção  $y$ . Essa força deve provocar uma modificação na velocidade da partícula:

$$\Delta v_y = \int_{-\infty}^t dt' \dot{v}_y = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t dt' F_R(t') = -\frac{qv_0\Phi}{\pi m} \int_{-\infty}^{y_p} \frac{dy}{v(t')} \frac{x_p y}{(x_p^2 + y^2)^2}. \quad (2.72)$$

Considerando um regime em que a variação na velocidade seja pequena se comparada com a velocidade absoluta da partícula ( $\Delta v \ll v_0$ ), podemos aproximar  $v(t') \approx v_0$  no denominador do integrando, obtendo

$$\begin{aligned} \Delta v_y &= -\frac{q\Phi}{\pi m} \int_{-\infty}^{y_p} dy \frac{x_p y}{(x_p^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{q\Phi x_p}{2\pi(x_p^2 + y_p^2)}; \end{aligned} \quad (2.73)$$

como consequência, teremos um deslocamento  $\Delta y$  da partícula no decorrer do processo de espalhamento:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \Delta v_y(t) \\ &= \frac{q\Phi}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} dy_p \frac{x_p}{x_p^2 + y_p^2} \\ &= \frac{q\Phi}{2mv_0} \text{sgn}(x_p), \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde  $\text{sgn}(x_p)$  é a função sinal. Assim, partículas que movem-se de lados opostos do solenoide, com a mesma velocidade, sofrerão deslocamentos em sentidos diferentes:

$$\begin{aligned} \Delta y^{(+)} &= \frac{q\Phi}{2mv_0}, \\ \Delta y^{(-)} &= -\frac{q\Phi}{2mv_0}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Até o momento, toda a análise foi feita considerando uma partícula clássica. Para entendermos como essa abordagem pode ser usada para obter a diferença de fase do efeito AB, vamos considerar uma função de onda do tipo  $\Psi = f(x, z, t) \exp(ip_y y/\hbar)$ , onde nos

interessa explicitar apenas sua dependência em  $y$ . Duas partículas idênticas deslocando-se cada uma por um lado do solenoide, sofrerão diferentes deslocamentos em suas fases:

$$\Psi_1 = f_1(x, z, t) \exp\left(i \frac{p_y(y + \Delta y^{(+)})}{\hbar}\right), \quad (2.76a)$$

$$\Psi_2 = f_2(x, z, t) \exp\left(i \frac{p_y(y + \Delta y^{(-)})}{\hbar}\right), \quad (2.76b)$$

portanto, a diferença de fase entre as duas partículas será

$$\Delta g = \frac{p_y(\Delta y^{(+)} + \Delta y^{(-)})}{\hbar} = \frac{mv_0(\Delta y^{(+)} + \Delta y^{(-)})}{\hbar} = \frac{q\Phi}{\hbar}, \quad (2.77)$$

que é a mesma diferença calculada na equação (2.57).

## 3 Campo eletromagnético de uma partícula quântica carregada

No eletromagnetismo clássico (teoria de Maxwell), podemos obter os campos eletromagnéticos presentes em uma região conhecendo as fontes (distribuições de cargas e correntes) do sistema. As relações entre os campos elétricos, magnéticos e estas fontes são sintetizadas através das ilustres equações de Maxwell. Tais equações, construídas pelos trabalhos experimentais de vários cientistas, podem ser também extraídas de primeiros princípios através do formalismo lagrangeano.

Entretanto, quando lidamos com fontes quânticas (partículas carregadas descritas por funções de onda), a teoria de Maxwell não é eficiente em descrever os campos eletromagnéticos. Um dos problemas surge do fato de as distribuições de cargas e correntes não serem localizadas: uma partícula carregada, por exemplo, é descrita no regime clássico por um conjunto de coordenadas  $q(t)$ , enquanto no regime quântico é descrita por uma função de onda  $\Psi(q, t)$ , um campo que assume valores diferentes para cada valor da coordenada  $q$ . Esta diferença evidencia a necessidade de um formalismo próprio para o tratamento deste problema, que leve em conta o caráter quântico dos sistemas.

Neste capítulo, buscamos resolver este problema construindo uma teoria lagrangeana que seja capaz de descrever a interação entre o campo de Schrödinger (que descreve as partículas no regime quântico) e os campos de Maxwell. Para isso, revisamos o formalismo analítico destes dois campos, expondo suas características mais relevantes. Então, através de um regime de acoplamento mínimo, propomos uma lagrangeana total para o sistema, onde ambos os potenciais eletromagnéticos e a função de onda são variáveis dinâmicas. Mostramos que o acoplamento mínimo leva naturalmente à um termo de corrente na teoria, acrescido de um potencial  $V_{\mu\nu}$ . É justamente nesse potencial que reside a diferença entre a teoria apresentada aqui e a teoria clássica de Maxwell.

Por fim, investigamos a hamiltoniana desta teoria, o que é essencial para a interpretação do efeito Aharonov-Bohm proposta neste trabalho, que será discutida no capítulo 4.

### 3.1 Campo de Maxwell

#### 3.1.1 Densidade lagrangeana do campo eletromagnético

O desenvolvimento da teoria eletromagnética, em sua formulação mais clássica, recorre à uma abordagem bastante empírica, de modo que as equações de Maxwell

nos apresentam campos elétricos e magnéticos como agentes que atuam sobre sistemas físicos, conferindo dinâmica à estes. Em suma, estes campos eram usualmente tomados como agentes externos à um sistema de partículas. Entretanto, a construção de uma teoria de campo para o eletromagnetismo. Desde então, campos físicos (e não apenas eletromagnéticos), passaram a serem vistos como agentes dotados de dinâmica própria (e não apenas agentes mediadores), uma abordagem que, posteriormente, mostrou-se essencial para o desenvolvimento de teorias mais modernas como a Teoria Quântica de Campos.

Com o avanço da mecânica analítica, conceitos como o *princípio da mínima ação*, anteriormente associados aos corpos, passaram também a ser utilizados para descrever o comportamento dos campos. Nos dias de hoje sabemos do grande potencial da abordagem analítica para a descrição de teorias de campos.

Nessa seção fazemos uma breve revisão sobre a abordagem analítica do eletromagnetismo clássico, cujas variáveis dinâmicas são as componentes de um 4-vetor de Minkowski, chamado *potencial quadri-vetor*  $A^\mu$ ,

$$A^\mu \doteq \left[ \frac{\varphi(\mathbf{r})}{c}, \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right], \quad (3.1)$$

onde  $\varphi(\mathbf{r})$  é o potencial elétrico,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é o potencial vetor magnético e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Também é conveniente definir o *quadri-vetor de corrente*  $J^\mu$ , que compõe em uma mesma grandeza a densidade volumétrica de cargas  $\rho(\mathbf{r})$  e a densidade volumétrica de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ :

$$J^\mu \doteq [c\rho(\mathbf{r}), \mathbf{J}(\mathbf{r})]. \quad (3.2)$$

Podemos expressar os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$  em termos dos potenciais:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

As equações (3.1) e (3.3) nos sugerem que é possível expressar o campo eletromagnético em uma notação covariante. Para isso, utilizamos um tensor de rank 2, antissimétrico, denominado *tensor de campo eletromagnético*, que sintetiza a equação (3.3) em um único termo:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.4)$$

Aplicando a definição (3.1) e utilizando a equação (3.3), podemos escrever explicitamente o tensor de campo em coordenadas cartesianas:

$$F^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A ação que descreve os campos eletromagnéticos deve ser invariante de Lorentz e de calibre, podendo ser escrita na forma

$$\mathcal{S}_M = \int dt L(A^\mu, \partial_\nu A^\mu; t) \quad , \quad (3.6)$$

onde  $L(A^\mu, \partial_\nu A^\mu; t)$  é a lagrangeana do campo eletromagnético. Quando estudamos um sistema de partículas, descrito pelas coordenadas generalizadas  $q_i$  e velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ , construímos a lagrangeana total do como a soma das lagrangeanas associadas a cada par  $(q_i, \dot{q}_i)$  no espaço de configurações (supondo que não hajam termos de acoplamento entre diferentes coordenadas e velocidades). Entretanto, em uma teoria de campos, onde a cada ponto do espaço associamos um valor para o campo ( $X \rightarrow A^\mu(X)$ ), devemos substituir a soma discreta por uma integração em todo o espaço. Podemos então construir, por analogia, a ação do campo eletromagnético:

$$\begin{aligned} L = \sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i) &\rightarrow L = \int d^3x \mathcal{L}_M(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) \\ &\Rightarrow \mathcal{S}_M = \int d^4x \mathcal{L}_M \quad ; \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde propomos a *densidade lagrangeana*  $\mathcal{L}_M$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \quad (3.8)$$

Para justificar esta proposta, expressemos  $\mathcal{L}_M$  em termos de  $A^\mu$ . Da equação (3.4), expandimos o termo  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2\mu_0} \left( \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu \right) - J_\mu A^\mu. \quad (3.9)$$

Uma propriedade importante da densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_M$  é sua invariância sob a transformação de calibre, isto é, dada uma função escalar  $\Lambda(X)$ , a teoria deve ser invariante pela transformação

$$A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda, \quad (3.10)$$

desde que seja imposta a condição de que a corrente satisfaça a equação da continuidade, ou seja,

$$\partial^\mu J_\mu = 0. \quad (3.11)$$

Aplicando a transformação (3.10) à equação (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_M &= -\frac{1}{2\mu_0} \left[ \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \right] \\ &\quad - J_\mu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \left( \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu \right) - J_\mu A^\mu - J_\mu \partial^\mu \Lambda. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Calculando a contribuição do último termo para a ação total, vemos que esta é nula:

$$\int d^4x J_\mu \partial^\mu \Lambda = \int d^4x \partial^\mu (J_\mu \Lambda) - \int d^4x \Lambda (\partial^\mu J_\mu) = 0, \quad (3.13)$$

onde a integral de  $\Lambda (\partial^\mu J_\mu)$  se anula devido à equação da continuidade (3.11), e a integral de  $\partial^\mu (J_\mu \Lambda)$  se anula pelo teorema da divergência<sup>1</sup>. Assim,

$$\bar{\mathcal{L}}_M = -\frac{1}{2\mu_0} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu) - J_\mu A^\mu = \mathcal{L}_M. \quad (3.14)$$

Por meio de uma integração por partes, podemos modificar o segundo termo da equação (3.9):

$$\int d^4x \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu = \int d^4x \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) - \int d^4x A^\nu (\partial^\mu \partial_\nu) A_\mu; \quad (3.15)$$

o primeiro termo do lado direito da equação (3.15) se anula pelo teorema da divergência. No segundo termo, podemos trocar a ordem das derivadas parciais de modo a obter uma densidade lagrangeana equivalente à equação (3.9),

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2\mu_0} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2\mu_0} A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - J_\mu A^\mu. \quad (3.16)$$

Por fim, fixamos o calibre de Lorenz ( $\partial^\mu A_\mu = 0$ ), obtendo

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2\mu_0} (\partial^\mu A^\nu)^2 - J_\mu A^\mu. \quad (3.17)$$

Nesta forma, a densidade lagrangeana possui uma similaridade mais evidente com a função lagrangeana para partículas não relativísticas sob a ação de uma força externa  $F$

$$L = \frac{1}{2} m \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + Fq \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_M = -\frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right)^2 - J_\mu A^\mu. \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Equações de Maxwell

Assim como em um sistema de partículas, a minimização da ação do campo eletromagnético em relação às variáveis dinâmicas  $A^\mu$  também leva às equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\beta} = 0. \quad (3.19)$$

Vamos separar a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_M$  em uma parte livre e um termo de interação (corrente), como segue,

$$\mathcal{L}_{M_L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{L}_{M_I} = -J_\mu A^\mu,$$

<sup>1</sup> Como em toda teoria de campo, consideramos que as fontes e os campos sejam nulos no infinito.

aplicando a equação de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{ML}}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{ML}}{\partial A_\beta} &= -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\lambda \left( \frac{\partial (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\lambda \left( 2F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\lambda \left[ 2F^{\mu\nu} \left( \frac{\partial (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} \partial_\lambda [2F^{\mu\nu} (\eta_\mu^\lambda \eta_\nu^\beta - \eta_\nu^\lambda \eta_\mu^\beta)] \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_\lambda F^{\lambda\beta}; \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{MI}}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{MI}}{\partial A_\beta} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{MI}}{\partial A_\beta} \\
&= J^\mu \eta_\mu^\beta \\
&= J^\beta. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Somando as equações (3.21) e (3.22), obtemos a equação dinâmica do campo eletromagnético

$$\partial_\lambda F^{\lambda\beta} = \mu_0 J^\beta. \tag{3.23}$$

Analisando a equação de movimento termo à termo, obtemos as equações de Maxwell não-homogêneas. A primeira equação não homogênea é obtida ao fixarmos  $\lambda = 0$  em (3.23) e levarmos em conta que  $F^{00} = 0$ , como segue,

$$\begin{aligned}
\partial_i F^{i0} &= \mu_0 J^0 \\
\partial_i (\partial^i A^0 + \partial^0 A^i) &= \mu_0 c \rho \\
-\nabla^2 \frac{\varphi}{c} - \frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \mu_0 c \rho \\
-\nabla \left( \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

A segunda equação não homogênea é obtida tomando  $\lambda = j$  em (3.23),

$$\begin{aligned}\partial_i F^{ij} + \partial_0 F^{0j} &= \mu_0 J^j \\ \partial_i (\partial^i A^j - \partial^j A^i) - \partial_0 (\partial^0 A^j - \partial^j A^0) &= \mu_0 J^j \\ \partial_i \partial^i A^j - \partial_i (\partial^j A^i) + \partial_0 \partial^0 A^j - \partial_0 (\partial^j A^0) &= \mu_0 J^j \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère}).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Nota-se que a equação de movimento (3.23) nos dá apenas as equações de Maxwell não homogêneas. as equações não homogêneas são uma decorrência imediata da definição do tensor  $F^{\mu\nu}$  em termos dos potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  e dos campos eletromagnéticos<sup>2</sup>. Isso pode ser visto através da equação (3.3):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \nabla \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday});\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o magnetismo}).\end{aligned}\tag{3.27}$$

## 3.2 Campo de Schrödinger

### 3.2.1 Densidade Lagrangeana de Schrödinger

Na Mecânica Quântica, a dinâmica de sistemas de partículas é descrita por uma função de onda  $\Psi$ , solução da equação de Schrödinger, com a presença de potenciais e, possivelmente, de condições de contorno. Temos então uma teoria de campo, onde a variável dinâmica é a função de onda. Sabemos que a formulação analítica é um poderoso instrumento no tratamento tanto de sistemas de partículas como de campos<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Uma maneira alternativa de obter as equações de Maxwell homogêneas é definindo um tensor dual  $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ . Ver, por exemplo, referência [21], seção 11.9.

<sup>3</sup> É importante ressaltar que estamos lidando aqui apenas com campos não quantizados, ou seja, funções de onda. Dizemos então que temos uma teoria em primeira quantização.

Portanto, analogamente ao que foi feito para o campo eletromagnético na seção 3.1, vamos então relembrar a formulação analítica para o campo de Schrödinger. Para simplificar, consideramos apenas sistemas quânticos compostos de uma única partícula.

A ação de Schrödinger  $\mathcal{S}_S$  pode ser escrita como a integral

$$\mathcal{S}_S = \int d^4x \mathcal{L}_S, \quad (3.28)$$

onde a *Densidade Lagrangeana de Schrödinger* é definida como sendo a Lagrangeana de Schrödinger

$$\mathcal{L}_S = i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi - V\Psi^*\Psi, \quad (3.29)$$

sendo  $V = V(\mathbf{r}; t)$  o potencial externo.

Usando a equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\lambda \left( \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\lambda\Psi^*)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial\Psi^*} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial\Psi^*/\partial t} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\mathcal{L}_S}{\nabla\Psi^*} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}_S}{\partial\Psi^*} = 0; \quad (3.30)$$

obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi + i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = V\Psi, \quad (3.31)$$

que é a equação de Schrödinger.

Se tomarmos o complexo conjugado da equação (3.29) e aplicarmos a equação de Euler-Lagrange com respeito ao campo  $\Psi^*$ , obtemos o complexo conjugado da equação (3.31):

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi^* - i\hbar \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = V\Psi^*. \quad (3.32)$$

As equações (3.31) e (3.32) são totalmente equivalentes.

Multiplicando a equação (3.31) por  $\Psi^*$  e subtraindo da equação (3.32) multiplicada por  $\Psi$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi \nabla^2\Psi^* - \Psi^* \nabla^2\Psi \right) - i\hbar \left( \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^*\Psi) + \frac{i\hbar}{2m} \nabla \cdot (\Psi \nabla\Psi^* - \Psi^* \nabla\Psi) &= 0; \end{aligned} \quad (3.33)$$

Definimos agora a função *densidade de probabilidade*:

$$\varrho = \Psi^*\Psi, \quad (3.34)$$

e a *densidade de corrente de probabilidade*:

$$\mathbf{j}_0 = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla\Psi^* - \Psi^* \nabla\Psi), \quad (3.35)$$

o que nos permite reescrever a equação (3.33) na forma de uma equação de continuidade

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0. \quad (3.36)$$

### 3.2.2 Densidade Lagrangeana de Schrödinger na presença de um campo eletromagnético

É conhecido da mecânica clássica que a hamiltoniana de uma partícula carregada com carga elétrica  $q$  submetida a um campo eletromagnético externo é dada por

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\varphi, \quad (3.37)$$

que difere da hamiltoniana para a partícula livre pela transformação  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A}$  e pelo acréscimo de um termo de potencial  $q\varphi$ , onde  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor magnético e  $\varphi$  é o potencial eletrostático.

Fazemos agora a quantização canônica do momentum linear e da posição, o que torna os potenciais vetor e escalar também operadores,  $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{R}}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\hat{\mathbf{R}}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi(\hat{\mathbf{R}}, t)$ .

Levando em conta que, na base de posições

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

$$\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t},$$

podemos ver da versão quantizada da equação (3.37) que basta tomarmos as substituições

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} = -i\hbar\left(\nabla - \frac{iq\mathbf{A}}{\hbar}\right), \quad (3.38)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq\varphi}{\hbar}\right), \quad (3.39)$$

para obter a equação de Schrödinger de uma partícula quântica carregada na presença de um campo eletromagnético externo.

As substituições (3.38) e (3.39) também podem ser usadas para encontrar a ação de uma partícula quântica carregada na presença de um campo eletromagnético externo. Para encontrar essa ação, efetuamos uma integração por partes na ação (3.28) de modo a escrever uma lagrangeana equivalente à (3.29)

$$\mathcal{L}_S \Rightarrow i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\Psi^*(-i\hbar\nabla)^2\Psi - V\Psi^*\Psi. \quad (3.40)$$

Aplicando as substituições (3.38) e (3.39) à densidade lagrangeana (3.40), construímos a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_{SM}$  de uma partícula quântica de carga  $q$  na presença de um campo eletromagnético externo descrito pelos potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  (além de, possivelmente, um potencial externo  $V$ ) :

$$\mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq\varphi}{\hbar}\right)\Psi - \frac{1}{2m}\Psi^*\left[-i\hbar\left(\nabla - \frac{iq\mathbf{A}}{\hbar}\right)\right]^2\Psi - V\Psi^*\Psi. \quad (3.41)$$

Expandindo os termos da equação (3.41), após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - q\varphi\Psi^*\Psi + \frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi - \frac{iq\hbar}{m}\mathbf{A}\cdot(\Psi^*\nabla\Psi) - \frac{iq\hbar}{2m}\Psi^*\Psi\nabla\cdot\mathbf{A} \\ - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi - V\Psi^*\Psi, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Uma integração por partes nos permite escrever

$$\Psi^*\Psi\nabla\cdot\mathbf{A} \Rightarrow -\nabla(\Psi^*\Psi)\cdot\mathbf{A} = -(\Psi^*\nabla\Psi)\cdot\mathbf{A} - (\Psi\nabla\Psi^*)\cdot\mathbf{A},$$

e a lagrangeana (3.42) torna-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - q\varphi\Psi^*\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^*\cdot\nabla\Psi - \frac{iq\hbar}{m}\mathbf{A}\cdot(\Psi^*\nabla\Psi) \\ + \frac{iq\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi)\cdot\mathbf{A} + \frac{iq\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^*)\cdot\mathbf{A} - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi - V\Psi^*\Psi, \\ \mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - q\varphi\Psi^*\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^*\cdot\nabla\Psi - \frac{iq\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*)\cdot\mathbf{A} \\ - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi - V\Psi^*\Psi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Novamente, obtemos a equação dinâmica do sistema através das equações de Euler-Lagrange. Teremos as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{SM}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)} = 0; \\ \frac{\partial\mathcal{L}_{SM}}{\partial(\nabla\Psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi + \frac{iq\hbar}{2m}\mathbf{A}\Psi \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{SM}}{\partial\Psi^*} = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} - q\varphi\Psi - \frac{iq\hbar}{2m}\nabla\Psi\cdot\mathbf{A} - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi - V\Psi;$$

e a equação de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{SM}}{\partial\Psi^*/\partial t}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\mathcal{L}_{SM}}{\nabla\Psi^*}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}_{SM}}{\partial\Psi^*} = 0; \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{iq\hbar}{2m}\nabla(\mathbf{A}\Psi) - i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + q\varphi\Psi + \frac{iq\hbar}{2m}\nabla\Psi\cdot\mathbf{A} + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi + V\Psi = 0; \end{aligned} \quad (3.45)$$

reorganizando os termos, obtemos a equação de Schrödinger para uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)\Psi + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2\Psi = V\Psi. \quad (3.46)$$

que pode também ser obtida diretamente da equação de Schrödinger (3.31) através das transformações (3.38) e (3.39).

É importante ressaltar que o potencial  $V$  é usualmente utilizado para descrever potenciais conservativos que não sejam de origem eletromagnética. De certa forma, é possível descrever a dinâmica de uma partícula submetida a um campo elétrico introduzindo um potencial  $V = q\varphi$ , ao invés de efetuar a transformação (3.39). Entretanto, o mesmo não pode ser feito para descrever uma interação magnética que, em geral, não é conservativa. Desta forma, é conveniente utilizar estas transformações para lidar com as interações eletromagnéticas e descrever outros tipos de interações através do potencial externo  $V$ .

Multiplicando a equação (3.45) por  $\Psi^*$  e o seu complexo conjugado por  $\Psi$ , obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\nabla^2\Psi + \frac{iq\hbar}{2m}\Psi^*\nabla(\mathbf{A}\Psi) - i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + q\varphi\Psi^*\Psi + \frac{iq\hbar}{2m}\Psi^*\nabla\Psi \cdot \mathbf{A} \\ & + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi + V\Psi^*\Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\nabla^2\Psi^* - \frac{iq\hbar}{2m}\Psi\nabla(\mathbf{A}\Psi^*) + i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + q\varphi\Psi\Psi^* - \frac{iq\hbar}{2m}\Psi\nabla\Psi^* \cdot \mathbf{A} \\ & + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\Psi^*\Psi + V\Psi^*\Psi = 0; \end{aligned} \quad (3.48)$$

subtraindo a equação (3.47) da equação (3.48),

$$\begin{aligned} & i\hbar\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}(\Psi\nabla^2\Psi^* - \Psi^*\nabla^2\Psi) - \frac{iq\hbar}{2m}(\Psi\nabla(\mathbf{A}\Psi^*) + \mathbf{A}\Psi^*\nabla\Psi) \\ & - \frac{iq\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla(\mathbf{A}\Psi) + \mathbf{A}\Psi\nabla\Psi^*) = 0 \\ & i\hbar(\Psi^*\Psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot (\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) - \frac{iq\hbar}{2m}\nabla(\mathbf{A}\Psi^*\Psi) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) + \nabla \cdot \left[\frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) - \frac{q}{m}\mathbf{A}\Psi^*\Psi\right] = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) + \nabla \cdot \left[\frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi\left(\nabla + \frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\right)\Psi^* - \Psi^*\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\right)\right]\right] = 0; \end{aligned} \quad (3.49)$$

definindo a densidade de corrente  $\mathbf{j}_c$ :

$$\mathbf{j}_c = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi\left(\nabla + \frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\right)\Psi^* - \Psi^*\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar}\mathbf{A}\right)\Psi\right], \quad (3.50)$$

e utilizando a definição (3.34), obtemos uma equação da continuidade para a função de onda da partícula na presença de campos eletromagnéticos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0. \quad (3.51)$$

### 3.3 Campo gerado por uma partícula quântica carregada

#### 3.3.1 Lagrangeana de interação

Inicialmente, reescrevemos a equação (3.43) em termos das definições (3.34) e (3.35):

$$\mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - q\varphi\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_0 - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\rho. \quad (3.52)$$

Definimos agora a quantidade

$$J^\mu \doteq q[c\rho, \mathbf{j}_0]. \quad (3.53)$$

que não pode ser classificada como um quadrivetor, pois não se transforma em um “boost” de acordo as matrizes de Lorentz. Mesmo assim, por abuso de linguagem, vamos nos referir a essa quantidade como quadrivetor e definir  $J_\mu = J^\nu\eta_{\nu\mu}$ . Isso acontece pois estamos lidando com uma teoria com dois campos onde um deles é não relativístico (campo de Schrödinger) e o outro é relativístico (eletromagnético).

Podemos então escrever a equação (3.52) usando a notação de soma implícita,

$$\mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - A_0 J^0 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi - A_i J^i - \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2\rho. \quad (3.54)$$

Usando a matriz  $\eta$  de Minkowski, podemos escrever que

$$\mathbf{A}^2 = A^\mu(\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0})A^\nu \quad (3.55)$$

Substituindo (3.55) em (3.54) temos que

$$\mathcal{L}_{SM} = i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi - A_\mu J^\mu - \frac{q^2}{2m}\rho A^\mu(\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0})A^\nu. \quad (3.56)$$

Definindo o termo de potencial

$$V_{\mu\nu} = -\frac{q^2}{m}\rho(\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}), \quad (3.57)$$

e a lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_I = -A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}A^\mu V_{\mu\nu} A^\nu, \quad (3.58)$$

podemos escrever que  $\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I$ , e a lagrangeana total do sistema se torna

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\Psi^* \cdot \nabla\Psi - A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}A^\mu V_{\mu\nu} A^\nu. \quad (3.59)$$

Note que os termos quadráticos no campo eletromagnético  $A^\mu$  da lagrangeana (3.59) contém a parte de Maxwell e uma parte do tipo potencial,  $A^\mu V_{\mu\nu} A^\nu$ . Essa característica é decorrência do fato de que existem derivadas covariantes de segunda ordem no campo de Schrödinger na lagrangeana. Situação parecida ocorre com o campo de Klein-Gordon (que é um campo relativístico).

Vamos estabelecer a equação dinâmica para o campo eletromagnético. Isso pode ser feito com as equações de Euler-Lagrange para  $A^\mu$ ,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda A_\beta)} &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_\lambda F^{\lambda\beta} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} (\partial_\lambda \partial^\lambda A^\beta - \partial_\lambda \partial^\beta A^\lambda), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} &= -J^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} V_{\mu\nu} A^\nu + \frac{1}{2} A^\mu V_{\mu\nu} \eta^{\beta\nu} \\ &= -J^\beta + \frac{1}{2} (V_\alpha^\beta + V_\alpha^\beta) A^\alpha \\ &= -J^\beta + V_\alpha^\beta A^\alpha. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Fixando o gauge de Lorenz, temos que o último termo da equação (3.60) se anula ( $\partial_\lambda \partial^\beta A^\lambda = \partial^\beta \partial_\lambda A^\lambda = 0$ ). Levando em conta que  $\partial_\lambda \partial^\lambda A^\beta = \partial_\lambda \partial^\lambda \eta^\beta_\alpha A^\alpha$ , chegamos à equação de movimento

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \eta^\beta_\alpha A^\alpha + \mu_0 V_\alpha^\beta A^\alpha = \mu_0 J^\beta. \quad (3.62)$$

Note a presença do termo de potencial, que não existe na teoria de Maxwell simples.

A equação de Euler-Lagrange para a função de onda leva novamente à equação (3.46). Se a solução da função de onda for conhecida, podemos usar (3.53) e a equação (3.62) para determinar o campo eletromagnético.

### 3.3.2 Função de Green

Nessa ação estudamos a função de Green da equação (3.62). Para isso, reescrevemos essa equação na forma

$$M^\beta_\alpha A^\alpha = \mu_0 J^\beta, \quad (3.63)$$

onde definimos

$$M^\beta_\alpha = \partial_\lambda \partial^\lambda \eta^\beta_\alpha + \mu_0 V_\alpha^\beta. \quad (3.64)$$

A solução particular da equação acima pode ser obtida com a integração

$$A^\alpha(x) = \int d^4y G^{\alpha\rho}(x, y) \mu_0 J_\rho(y), \quad (3.65)$$

onde  $G^{\alpha\rho}(x, y)$  é a função de Green, que obedece à equação

$$M^\beta_\alpha(x)G^{\alpha\rho}(x, y) = \eta^{\beta\rho}\delta^4(x - y); \quad (3.66)$$

Se aplicarmos o operador  $M^\beta_\alpha(x)$  à ambos os lados da equação (3.65), levando em conta a equação (3.66), recuperamos a equação (3.63), o que garante a validade da solução proposta.

Devido à presença do termo  $V^\beta_\alpha$ , resolver a equação diferencial (3.66) não é uma tarefa trivial.

Começamos por definir a  $G_{(0)}^\alpha{}_\rho$ , que satisfaz à equação

$$\partial_\lambda \partial^\lambda G_{(0)}^\alpha{}_\rho(x, y) = \eta^{\beta\rho}\delta^4(x - y); \quad (3.67)$$

A função de Green definida em (3.66) satisfaz a equação recursiva

$$G^\alpha{}_\rho(x, y) = G_{(0)}^\alpha{}_\rho(x, y) - \int d^4z G^\alpha{}_\sigma(x, z) \mu_0 V^\sigma{}_\gamma(z) G_{(0)}^\gamma{}_\rho(z, y), \quad (3.68)$$

o que pode ser verificado aplicando-se o operador  $M^\beta_\alpha(x)$  em ambos os lados de (3.68), o que recupera a equação (3.66).

Por simplicidade de notação, vamos definir a função  $G_0$  tal que

$$G_{(0)}^\alpha{}_\rho(x, y) = \eta^\alpha{}_\rho G_0(x, y), \quad (3.69)$$

$$\partial_\lambda \partial^\lambda G_0(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (3.70)$$

Note que  $G_0(x, y)$  é a função de Green é bem conhecida na literatura.

Propomos agora uma solução para  $G^\alpha{}_\rho$  na forma

$$G^\alpha{}_\rho(x, y) = \eta^\alpha{}_\rho G_1(x, y) + (\eta^\alpha{}_\rho - \eta^\alpha{}_0 \eta_{\rho 0}) G_2(x, y), \quad (3.71)$$

onde  $G_1(x, y)$  e  $G_2(x, y)$  são funções a serem determinadas.

O integrando da equação (3.68) pode ser escrito em termos de  $G_0$ ,  $G_1$  e  $G_2$ , para isso substituímos (3.71), (3.69) e (3.57) no integrando de (3.68),

$$\begin{aligned} & -\frac{q^2}{m} \rho(z) G^\alpha{}_\sigma(x, z) (\eta^\sigma{}_\gamma - \eta^\sigma{}_0 \eta_{\gamma 0}) G_{(0)}^\gamma{}_\rho(z, y) = \\ & -\frac{q^2}{m} \rho(z) \left[ \eta^\alpha{}_\sigma G_1(x, y) + (\eta^\alpha{}_\sigma - \eta^\alpha{}_0 \eta_{\sigma 0}) G_2(x, z) \right] (\eta^\alpha{}_\rho - \eta^\alpha{}_0 \eta_{\rho 0}) \eta^\gamma{}_\rho G_0(z, y) \\ & = -\frac{q^2}{m} \rho(z) (\eta^\alpha{}_\rho - \eta^\alpha{}_0 \eta_{\rho 0}) (G_1(x, y) + G_2(x, z)) G_0(z, y). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Substituindo (3.72) e (3.71) em (3.68) temos que

$$\begin{aligned} \eta^\alpha_\rho G_1(x, y) + (\eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta_{\rho 0}) G_2(x, y) &= \eta^\alpha_\rho G_0(x, y) \\ - \int d^4 z \frac{q^2 \mu_0}{m} \varrho(z) (\eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta_{\rho 0}) & (G_1(x, z) + G_2(x, z)) G_0(z, y), \end{aligned} \quad (3.73)$$

Agora comparamos os coeficientes de  $\eta^\alpha_\rho$  e  $(\eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta_{\rho 0})$ , o que nos leva as relações

$$G_1(x, y) = G_0(x, y), \quad (3.74)$$

$$G_2(x, y) = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \int d^4 z (G_1(x, z) + G_2(x, z)) \varrho(z) G_0(z, y). \quad (3.75)$$

Substituindo (3.74) em (3.75) temos que

$$G_2(x, y) = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \int d^4 z (G_0(x, z) + G_2(x, z)) \varrho(z) G_0(z, y). \quad (3.76)$$

Com o uso de (3.71), (3.74) e (3.76), obtemos finalmente

$$G^\alpha_\rho(x, y) = \eta^\alpha_\rho G_0(x, y) - \frac{q^2 \mu_0}{m} (\eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta_{\rho 0}) \int d^4 z (G_0(x, z) + G_2(x, z)) \varrho(z) G_0(z, y). \quad (3.77)$$

Note que para encontrar a função de Green (3.77) temos que resolver a equação integral recursiva para  $G_2(x, y)$ , (3.76).

### 3.3.3 Hamiltoniana

Nessa seção consideramos a hamiltoniana total do sistema, cuja lagrangeana é dada por (3.59). O termo cinético do campo de calibre pode ser escrito em termos dos campos eletromagnéticos

$$-\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4\mu_0} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right). \quad (3.78)$$

Como discutido na seção 3.1, através de uma integração por partes e fixando o gauge de Lorenz, podemos escrever

$$\begin{aligned} -\frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4\mu_0} &\rightarrow \frac{1}{2\mu_0} A_\nu \partial^\mu \partial_\mu A^\nu \\ &= \frac{1}{2\mu_0} A_\beta \partial^\lambda \partial_\lambda \eta^\beta_\alpha A^\alpha. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Multiplicando a equação (3.62) por  $A_\beta$  e levando em conta as equações (3.79) e (3.78), podemos expressar o termo  $A_\beta J^\beta$  em termos dos campos eletromagnéticos

$$A_\beta J^\beta = \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) + A^\alpha V_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (3.80)$$

Para obtermos a energia do sistema descrito pela densidade lagrangeana (3.59), determinamos sua densidade hamiltoniana através de uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \partial_0 A^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\lambda)} + \partial_0 \Psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)} - \mathcal{L}. \quad (3.81)$$

onde usamos o fato de que  $\partial \mathcal{L} / \partial(\partial_0 \Psi^*) = 0$ , o que pode ser constatado da lagrangeana (3.59).

Os dois primeiros termos da equação acima são dados por

$$\begin{aligned} \partial_0 \Psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Psi)} &= \partial_t \Psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \Psi)} \\ &= i\hbar \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \end{aligned} \quad (3.82a)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 A^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\lambda)} &= -\frac{\partial_0}{2\mu_0} \left[ \partial \left( \frac{\partial_\mu A_\nu}{\partial(\partial_0 A^\lambda)} \right) \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial \left( \frac{\partial^\mu A^\nu}{\partial(\partial_0 A^\lambda)} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial_0}{2\mu_0} \left( \partial^\mu A^\nu \eta_{\nu\lambda} \eta_\mu^0 + \partial_\mu A_\nu \eta^{0\mu} \eta_\lambda^\nu \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda, \end{aligned} \quad (3.82b)$$

Podemos agora encontrar a densidade de hamiltoniana do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda + \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4\mu_0} - \frac{1}{2} A^\mu V_{\mu\nu} A^\nu + A_\mu J^\mu \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda + \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) + \frac{1}{2} A^\mu V_{\mu\nu} A^\nu \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda + \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \frac{q^2}{m} \varrho \mathbf{A}^2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

com a correspondente hamiltoniana

$$H = \int d^3x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \int d^3x \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda + \int d^3x \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \int d^3x \frac{q^2}{m} \varrho \mathbf{A}^2. \quad (3.84)$$



## 4 Interpretação do Efeito Aharonov-Bohm em termos da interação dos campos

Como discutido no capítulo anterior, é possível descrever os campos eletromagnéticos produzidos por uma partícula carregada em um regime quântico. De um modo geral, as equações de movimento para  $\Psi$  e  $A^\mu$  devem ser solucionadas simultaneamente, o que em geral não é simples.

Entretanto, quando a partícula se encontra em uma região de campos nulos (como é o caso do efeito Aharonov-Bohm), os potenciais apenas introduzem uma fase na função de onda (como discutido no capítulo 2). Como consequência, podemos utilizar as funções de onda obtidas na ausência de potenciais como funções prescritas nas equações de movimento para  $A^\mu$ . Utilizando este fato, revisitamos os problemas abordados no capítulo 2, agora através de uma nova interpretação: calculamos os campos gerados pelas partículas e suas interações com os campos das fontes externas.

Para o rotor quântico, utilizamos a função de onda de uma partícula restrita à mover-se sobre um anel, reproduzindo exatamente a mesma configuração descrita na seção 2.2. Para os casos de espalhamento, substituímos os feixes de partícula por partículas restritas a moverem-se sobre fios retilíneos infinitos. Tal modificação não prejudica a interpretação do efeito, e tem por única finalidade facilitar o cálculo de  $A^\mu$ .

Apresentamos ainda, neste capítulo, uma outra maneira de obter as energias de interação na teoria proposta, utilizando os potenciais e correntes envolvidos. Por fim, discutimos acerca das modificações causadas no efeito Aharonov-Bohm, quando na presença de meios materiais lineares.

### 4.1 Rotor quântico na presença do potencial de Aharonov-Bohm

Nessa seção fazemos uma análise sobre a influência do potencial de Aharonov-Bohm na dinâmica de uma partícula quântica carregada restrita a se mover sobre um anel de raio  $R$  (que consiste na versão mais simples do rotor quântico bidimensional). Procedemos a análise de forma alternativa aquela apresentada na seção 2.2, com uma abordagem de campos.

### 4.1.1 Corrente de Matéria na presença do campo de Araronov-Bohm

É um resultado conhecido da literatura [13], e revisado no capítulo 2, que as autofunções do rotor quântico bidimensional de raio  $R$  são

$$\psi_n(\phi) = \sqrt{\sigma} e^{in\phi} \quad , \quad \sigma = 1/2\pi R \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1)$$

É importante destacar que essas são também autofunções da projeção do momento angular na direção  $z$ .

Se formos associar uma densidade de carga para essas auto-funções, devemos garantir que esta seja definida apenas ao longo do círculo onde a função de onda está definida. Dessa forma, temos a densidade de cargas dada por

$$\varrho(\mathbf{r}) = |\psi|^2 \delta(\rho - R) \delta(z) \quad \Rightarrow \quad \varrho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z). \quad (4.2)$$

Note que, ao integrarmos  $\varrho(\mathbf{r})$  em todo o espaço obtemos o valor 1, como se espera de uma densidade de cargas,

$$\int d^3\mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) = \int d\rho d\theta dz \rho \frac{1}{2\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z) = 1. \quad (4.3)$$

É importante ressaltar também que a densidade de carga (4.2) tem o mesmo valor para todas as autofunções, ou seja, não depende de  $n$ .

De forma semelhante, temos a densidade de corrente

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) - \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})] \delta(\rho - R) \delta(z) \hat{\phi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \frac{n\hbar}{2m\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z) \hat{\phi}. \quad (4.4)$$

Com as equações (4.2) e (4.4) pode-se mostrar a validade da equação da continuidade.

Quando temos a presença de um potencial externo do tipo Aharonov-Bohm, ou seja

$$\mathbf{A}_{AB}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\Phi \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \rho < a, \\ \frac{\Phi}{2\pi \rho} \hat{\phi}, & \rho > a, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$= \frac{\Phi}{2\pi \rho} \left[ \frac{\rho^2}{a^2} \Theta(a - \rho) + \Theta(\rho - a) \right] \hat{\phi} \quad (4.6)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heaviside, já vimos no capítulo 2 que a função de onda não é modificada e, portanto, a densidade de carga (4.2) também não. Já a densidade de corrente é modificada de acordo com (3.50),

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) - \frac{q}{m} \mathbf{A}_{AB}(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Usando (4.6) e (4.2) e levando em conta que  $R > a$ , obtemos

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) - \frac{q\Phi}{(2\pi)^2 m R^2} \delta(\rho - R) \delta(z) \hat{\phi} \quad (4.8)$$

e podemos mostrar que o divergente do ultimo termo do lado direito da equação acima é nulo. Essa é uma característica especial do potencial de Aharonov-Bohm (4.6).

#### 4.1.2 Função de Green para o rotor quântico

Nesse ponto relembremos que a a densidade de carga correspondente à uma função de onde tem um papel duplo, agindo como fonte de campo e também como potencial externo. Isso faz com que a função de Green do campo de calibre seja também dependente da densidade de carga. Nessa seção vamos determinar qual é a função de Green do campo de calibre na presença de um rotor quântico.

Primeiramente, determinamos a função de Green livre,  $G_0$ , em coordenadas cilíndricas. Da equação (3.70), temos

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G_0(X, X') = \delta^4(X - X'), \quad (4.9)$$

Podemos expressar o lado direito da equação acima em uma forma separável, em coordenadas cilíndricas (apêndice A.2),

$$\begin{aligned} \delta^4(X - X') &= \frac{1}{c\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \delta(t - t') \\ &= \frac{1}{c\rho} \delta(\rho - \rho') \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')}; \end{aligned} \quad (4.10)$$

propomos também uma expansão semelhante para a função  $G_0$ ,

$$G_0(X, X') = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \tilde{G}_0(\rho, \rho'), \quad (4.11)$$

onde a função  $\tilde{G}_0(\rho, \rho')$  deve ser determinada (de fato,  $\tilde{G}_0$  deve depender dos parâmetros  $s$ ,  $\omega$  e  $k$ , que estão sendo omitidos no argumento por simplicidade de notação).

Aplicando o operador de D'Alembert (lado esquerdo da eq. (4.9)), obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G_0(X, X') &= \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G_0(X, X') \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left[ -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + \frac{s^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] \tilde{G}_0(\rho, \rho'). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definindo  $\lambda^2 = k^2 - \frac{\omega}{c^2}$  e comparando a equação (4.12) com a equação (4.10), obtemos a equação diferencial

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{G}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \quad (4.13)$$

Esta é a *equação diferencial de Bessel*[22]; como as integrações na equação (4.11) varrem todos os valores de  $k$  e  $\omega$ , o parâmetro  $\lambda = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$  pode assumir tanto valores reais como imaginários. Neste caso, a solução será dada em termos das *funções modificadas de Bessel*<sup>1</sup>,  $I_s(\lambda\rho)$  e  $K_s(\lambda\rho)$ :

$$\tilde{G}_0(\rho, \rho') = \frac{1}{c} \left[ I_s(\lambda\rho') K_s(\lambda\rho) \Theta(\rho - \rho') + I_s(\lambda\rho) K_s(\lambda\rho') \Theta(\rho' - \rho) \right], \quad (4.14)$$

onde  $\Theta(\rho - \rho')$  é a função degrau de Heaviside.

Agora, vamos determinar a função  $G_2(X, X')$  definida na equação (3.76). Para isso, precisaremos da densidade de probabilidade dada pela equação (4.2) assim como a função de Green livre (4.14). Um dos termos a ser calculado é dado por

$$\begin{aligned} \int d^4 X'' G_0(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') &= \int d(ct'') \int dz'' d\phi'' d\rho'' \rho'' \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \\ &\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t'')} e^{is(\phi-\phi'')} e^{ik(z-z'')} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho'') \sigma \delta(\rho'' - R) \delta(z'') \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \\ &\times \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega'(t''-t')} e^{is'(\phi''-\phi')} e^{ik'(z''-z')} \tilde{G}_0(\omega', k', s'; \rho'', \rho'). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utilizando as identidades do apêndice A.2 e a equação (A.25), integrando em  $\rho''$ ,  $\omega'$ ,  $t''$ ,  $z''$ ,  $\phi''$ , e somando em  $s'$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int d^4 X'' G_0(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') &= \frac{c}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{ikz} e^{-ik'z'} e^{is(\phi-\phi')} \\ &\times \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho'). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vamos agora propor uma expansão para  $G_2$ , semelhante ao que foi proposto para  $G_0$ , com a diferença de que a função  $\tilde{G}_2$  deva depender também de  $z$ , ou seja

$$G_2(X, X') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, \rho', z, z'), \quad (4.17)$$

sendo  $\tilde{G}_2$  uma função a ser determinada.

<sup>1</sup> Uma discussão mais detalhada sobre essa solução é apresentada no apêndice A.4

Podemos determinar o outro termo da equação (3.76) de maneira idêntica ao que foi feito nas equações (4.15) e (4.16), como segue

$$\begin{aligned}
& \int d^4 X'' G_2(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') = \int d(ct'') \int dz'' d\phi'' d\rho'' \rho'' \int \frac{d\omega}{2\pi} \\
& \times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t'')} e^{is(\phi-\phi'')} \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, \rho'', z, z'') \sigma \delta(\rho'' - R) \delta(z'') \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \\
& \times \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega'(t''-t')} e^{is'(\phi''-\phi')} e^{ik'(z''-z')} \tilde{G}_0(\omega', k', s'; \rho'', \rho') \\
& = \frac{c}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{-ik'z'} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho'). \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.16) e (4.18) na equação (3.76), obtemos

$$\begin{aligned}
G_2(X, X') &= -\frac{q^2 \mu_0 c}{m} \frac{c}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \left[ \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') + \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right]. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Comparando os integrandos das equações (4.17) e (4.19), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2(\omega, s; \rho, \rho', z, z') &= -\frac{q^2 \mu_0 c}{m} \frac{c}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \left[ \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right. \\
& \left. + \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right], \quad (4.20)
\end{aligned}$$

que é uma equação recursiva em  $\tilde{G}_2(\omega, s; \rho, \rho', z, z')$ . Para resolvê-la, tomamos em ambos os lados  $\rho' = R$  e  $z' = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) &= -\frac{q^2 \mu_0 c}{m} \frac{c}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \left[ \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R) \right. \\
& \left. + \tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R) \right], \quad (4.21)
\end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) \left[ 1 + \frac{q^2 \mu_0 c}{m} \frac{c}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R) \right] =$$

$$= -\frac{q^2 \mu_0 c}{m} \frac{c}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R). \quad (4.22)$$

A integral presente em ambos os lados da equação (4.22) deve ser tratada com cautela. Ela é uma integral divergente e necessita ser regularizada, o que é feito no em detalhes apêndice A.6, onde obtemos o resultado

$$\int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R) \rightarrow 0, \quad (4.23)$$

o que fornece  $\tilde{G}_2(\omega, s; \rho, R, z, 0) = 0$ . Substituindo esse resultado na equação (4.19) determinamos  $G_2(X, X')$ :

$$G_2(X, X') = -\frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} e^{i(kz - k'z')} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho'). \quad (4.24)$$

Note que a função (4.24) não exibe invariância de translação na coordenada  $z$ , como esperado da simetria do sistema.

Agora podemos, enfim, substituir funções  $G_0$  e  $G_2$  (equações (4.11) e (4.24)) na equação (3.71) e obter a função de Green  $G^\alpha_\rho(X, Y)$  (lembrando que  $G_1(X, Y) = G_0(X, Y)$ ):

$$G^\alpha_\rho(X, Y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \left\{ \eta^\alpha_\rho e^{-ikz'} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') \right. \\ \left. - \frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} (\eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta_{\rho 0}) \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right\}, \quad (4.25)$$

onde  $\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho')$  é dado em termos das funções modificadas de Bessel pela equação (4.14).

O primeiro termo entre colchetes na função (4.25) nada mais é do que a função de Green para o campo de Maxwell (sem a contribuição de potencial). O segundo termo é uma contribuição oriunda do termo de potencial na lagrangeana para o campo de calibre.

### 4.1.3 Campo magnético gerado pelo rotor quântico

Para determinar o campo eletromagnético produzido pela partícula, utilizamos a função de Green (4.25) na equação (3.65), manipulando os índices de maneira conveniente

( $G^\alpha \rightarrow G^{\alpha\rho}$ ), para encontrar o potencial  $A^\alpha$ :

$$\begin{aligned}
A^\alpha(\mathbf{r}, t) = & \mu_0 \int (cdt') dz' d\phi' d\rho' \rho' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \left\{ \eta^{\alpha\rho} e^{-ikz'} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') - \frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} (\eta^{\alpha\rho} - \eta^{\alpha_0} \eta^{\rho_0}) \right. \\
& \left. \times \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right\} J_\rho(t', \rho', \phi', z'). \quad (4.26)
\end{aligned}$$

A fonte externa,  $J_\rho \doteq q[c\varrho, -\mathbf{j}_0]$ , para este problema é construída dada pelas equações (4.2) e (4.4), ou seja,

$$J_\rho \doteq \delta(\rho - R) \delta(z) \left[ \frac{qc}{2\pi}, -\frac{qn\hbar}{2m\pi R} \hat{\phi} \right]. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.26) e tomando as componentes espaciais do potencial ( $\alpha = i = 1, 2, 3$ ), teremos

$$\begin{aligned}
A^i(\mathbf{r}, t) = & \mu_0 \int (cdt') dz' d\phi' d\rho' \rho' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \left\{ -e^{-ikz'} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') + \frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right\} \\
& \times J^i(t', \rho', \phi', z'); \quad (4.28)
\end{aligned}$$

que podem ser escritas em notação vetorial  $\mathbf{A}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \mu_0 \int (cdt') dz' d\phi' d\rho' \rho' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \left\{ e^{-ikz'} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') - \frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} \int \frac{dk'}{2\pi} e^{-ik'z'} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, \rho') \right\} \\
& \times \delta(\rho' - R) \delta(z') \left( \frac{qn\hbar}{2m\pi R^2} \hat{\phi}' \right). \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Integrando em  $\rho'$  e  $z'$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \frac{qn\hbar\mu_0 c}{2m\pi R} \int dt' d\phi' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\
& \times \left\{ \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, R) - \frac{q^2 \mu_0 c}{2\pi m} \int \frac{dk'}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, R) \tilde{G}_0(\omega, k', s; R, R) \right\} \hat{\phi}'. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Novamente, temos no segundo termo entre chaves, a integral (4.23), que se anula após a regularização, e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{qn\hbar\mu_0c}{2m\pi R} \int dt' d\phi' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, R) \\ &\quad \times (-\sin \phi' \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{y}}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Integrando em  $\phi'$ , usando as identidades (A.26) e (A.27),

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{qn\hbar\mu_0c}{2m\pi R} \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\phi} \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, R) \\ &\quad \times \left[ \frac{i}{2} (\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}) \hat{\mathbf{y}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

As funções de Bessel são simétricas com respeito ao sinal de  $s$  quando este assume valores inteiros ( $K_s(x) = K_{-s}(x)$  e  $I_s(x) = I_{-s}(x)$ ), e portanto  $\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho_1, \rho_2) = \tilde{G}_0(\omega, k, -s; \rho_1, \rho_2)$ . Então, ao efetuarmos a soma em  $s$ , obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{qn\hbar\mu_0c}{2m\pi R} \int dt' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(k, \omega, 1; \rho, R) \left[ -\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \hat{\mathbf{x}} + \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (4.33)$$

onde o termo entre colchetes é  $-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} = \hat{\phi}$ . Integrando em  $t'$ , a exponencial leva a um fator  $\delta(\omega)$ . Então, a integração em  $\omega$  leva à  $\omega = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{qn\hbar\mu_0c}{2m\pi R} \hat{\phi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(k, 0, 1; \rho, R) \\ &= \frac{qn\hbar\mu_0c}{2m\pi R} \hat{\phi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \left[ I_1(|k|R) K_1(|k|\rho) \Theta(\rho - R) + I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) \Theta(R - \rho) \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

De forma totalmente semelhante, podemos calcular a componente temporal do campo de calibre como

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{r}, t) &= \frac{q\mu_0c^2}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{G}_0(k, 0, 0; \rho, R) \\ &= \frac{q\mu_0c}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \left[ I_0(|k|R) K_0(|k|\rho) \Theta(\rho - R) + I_0(|k|\rho) K_0(|k|R) \Theta(R - \rho) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

É importante ressaltar que o segundo termo entre colchetes na equação (4.30) acabou por não contribuir para o potencial (4.34). Esse termo é decorrente da presença de um potencial para o campo de calibre em sua equação de movimento. Nesse caso específico,

o campo de calibre acaba sendo obtido apenas com a função de Green livre, na ausência do potencial. A mesma conclusão é obtida para a componente zero do campo de calibre. Essa característica é uma peculiaridade do rotor quântico, não sendo válida, de um modo geral, para outras funções de onda. Podemos dizer então que o campo de calibre produzido pela corrente gerada pelo rotor quântico é exatamente o mesmo que teríamos encontrado na teoria de Maxwell, onde o campo de calibre não tem a presença do potencial  $V^{\mu\nu}$  em sua equação dinâmica.

Tomando o rotacional de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , obtemos o campo magnético gerado pelo rotor:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{(ROT)} &= \nabla \times \left[ \frac{qn\hbar\mu_0}{2m\pi R} \hat{\phi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) \right] \\
&= \frac{qn\hbar\mu_0}{2m\pi R} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \left\{ -ik \left[ K_1(|k|\rho) I_1(|k|R) \Theta(\rho - a) + I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) \Theta(a - \rho) \right] \hat{\rho} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \left[ \left( K_1(|k|\rho) I_1(|k|R) + \rho \left( K_0(|k|\rho) - \frac{K_1(|k|\rho)}{|k|\rho} \right) |k| I_1(|k|R) \right) \Theta(\rho - a) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) + \rho \left( I_0(|k|\rho) - \frac{I_1(|k|\rho)}{|k|\rho} \right) |k| K_1(|k|R) \right) \Theta(a - \rho) \right] \hat{z} \right\}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

#### 4.1.4 Espectro de energia

Até o momento calculamos o campo eletromagnético produzido pelo rotor quântico na presença de um potencial externo de Aharonov-Bohm (4.6). Mostramos que esse campo é o mesmo que teríamos obtido sem a presença do potencial externo, e é definido em todo o espaço, inclusive na região onde existe campo eletromagnético não nulo, no interior do solenoide. Dessa forma, pode surgir uma interação entre o rotor e o campo de Aharonov-Bohm, intermediada pelo campo eletromagnético. Nosso objetivo nessa seção é encontrar essa energia de interação.

Podemos resumir o sistema como sendo composto por dois elementos: o potencial de Aharonov-Bohm (4.6) e a fonte externa produzida pelo rotor (4.27). O potencial vetor correspondente é então dado pela soma do potencial vetor do rotor quântico,  $A_{(ROT)}^\mu(x)$ , calculado na seção anterior, com o potencial de Aharonov-Bohm (4.6). Isso faz com que os campos eletromagnéticos também possam ser escritos em termos de duas contribuições,

uma oriunda do rotor e outra do potencial de Aharonov-Bohm,

$$\frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_{(ROT)}^2 - \frac{B_{(ROT)}^2}{\mu_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_{AB}^2 - \frac{B_{AB}^2}{\mu_0} \right) + \epsilon_0 \mathbf{E}_{(ROT)} \cdot \mathbf{E}_{AB} - \frac{\mathbf{B}_{(ROT)} \cdot \mathbf{B}_{AB}}{\mu_0}; \quad (4.37a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda = \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A_{(ROT)}^\lambda \partial^0 A_{(ROT)\lambda} + \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A_{AB}^\lambda \partial^0 A_{AB\lambda} + \frac{2}{\mu_0} \partial_0 A_{(ROT)}^\lambda \partial^0 A_{AB\lambda}; \quad (4.37b)$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}_{(ROT)}^2 + \mathbf{A}_{AB}^2 + 2\mathbf{A}_{(ROT)} \cdot \mathbf{A}_{AB} \quad (4.37c)$$

e a hamiltoniana (3.84) pode ser separada em três partes:

$$H_0 = \int d^3x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi, \quad (4.38a)$$

$$H_1 = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_{(ROT)}^2 - \frac{B_{(ROT)}^2}{\mu_0} + \epsilon_0 E_{AB}^2 - \frac{B_{AB}^2}{\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \partial_0 A_{(ROT)}^\lambda \partial^0 A_{(ROT)\lambda} + \partial_0 A_{AB}^\lambda \partial^0 A_{AB\lambda} \right) - \frac{q^2}{m} \varrho (\mathbf{A}_{(ROT)}^2 + \mathbf{A}_{AB}^2) \right], \quad (4.38b)$$

$$H_{int} = \int d^3x \left[ \epsilon_0 \mathbf{E}_{(ROT)} \cdot \mathbf{E}_{AB} - \frac{\mathbf{B}_{(ROT)} \cdot \mathbf{B}_{AB}}{\mu_0} - \frac{2}{\mu_0} \partial_0 A_{(ROT)}^\lambda \partial^0 A_{AB\lambda} - \frac{2q^2}{m} (\mathbf{A}_{(ROT)} \cdot \mathbf{A}_{AB}) \right]. \quad (4.38c)$$

Os campos de calibre envolvidos são estacionários, ou seja, não dependem do tempo.

O termo  $H_0$  corresponde exatamente à energia do rotor quântico obtida pela equação de Shchrödinger na ausência do campo externo de Aharonov-Bohm

$$H_0 = E_n^{(0)} = \frac{n^2 \hbar^2}{2mR^2} \quad (4.39)$$

O termo  $H_1$  contém inúmeras contribuições produzidas exclusivamente pelos campos de Aharonov-Bohm e contribuições geradas exclusivamente pelo rotor, que estão associadas, respectivamente, com a auto-energia da fonte que gera o campo de Aharonov-Bohm e com a auto-energia eletromagnética do rotor quântico. Esses fatores são divergentes, não contribuem para a energia de interação do sistema e serão desconsiderados de agora em diante. Um fator presente em  $H_1$  está associado com a interação entre o potencial de Aharonov-Bohm e o rotor, a saber

$$\Delta H = \int d^3x - \frac{q^2}{m} \varrho \mathbf{A}_{AB}^2 \quad (4.40)$$

Já o termo  $H_{int}$  é composto de contribuições de interação entre os campos de Aharonov-Bohm e do rotor. Desta forma, a energia total da partícula será

$$\hat{H}_{(ROT)} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \Delta H. \quad (4.41)$$

Para encontrar (4.40) usamos o fato de que

$$\mathbf{A}_{AB} = \frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{\rho}{a^2} \Theta(a - \rho) + \frac{1}{\rho} \Theta(\rho - a) \right] \hat{\phi}, \quad (4.42)$$

e a equação (4.2), obtemos

$$\Delta H = - \frac{q^2 \Phi^2}{(2\pi)^2 m R^2}. \quad (4.43)$$

Temos portanto uma contribuição com o mesmo valor constante para todos os estados  $n$ . Isso caracteriza apenas um deslocamento global nos níveis de energia e não contribui para as energias de transição entre os diferentes níveis  $n$ . Podemos então desconsiderar esse fator, e a energia do rotor quântico fica dada por

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + E_{int} \\ &= \frac{n^2 \hbar^2}{2mR^2} - \int d^3x \frac{B_{(ROT)} \cdot B_{AB}}{\mu_0} - \frac{2q}{m} \int d^3x \varrho \mathbf{A}_{(ROT)} \cdot \mathbf{A}_{AB}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $\mathbf{A}_{(ROT)}$  é o potencial gerado pelo rotor (4.34) e  $\mathbf{A}_{AB}$ , o potencial de Aharonov-Bohm, cujo respectivo campo magnético é

$$B_{AB} = \frac{\Phi}{\pi a^2} \Theta(a - \rho) \hat{z}. \quad (4.45)$$

Calculando a contribuição do acoplamento entre os potenciais,

$$\begin{aligned} \frac{2q}{m} \int d^3x \varrho \mathbf{A}_{(ROT)} \cdot \mathbf{A}_{AB} &= \frac{q^2 n \hbar \mu_0 \Phi}{2\pi^2 m^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} dk dz d\phi d\rho \delta(z) \delta(\rho - R) e^{ikz} \\ &\quad \times \left[ I_1(|k|R) K_1(|k|\rho) \Theta(\rho - R) + I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) \Theta(R - \rho) \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{\rho}{a^2} \Theta(a - \rho) + \frac{1}{\rho} \Theta(\rho - a) \right] \\ &= \frac{q^2 n \hbar \mu_0 \Phi}{\pi m^2 R} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ I_1(|k|R) K_1(|k|R) \right]}_0 \\ &\quad \times \left[ \frac{R}{a^2} \Theta(a - R) + \frac{1}{R} \Theta(R - a) \right]; \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde calculamos a última integral no apêndice com regularização.

Sendo assim, a única contribuição da energia de interação vem do termo de acoplamento entre os campos. Usando (4.45) e (4.36) obtemos

$$\int d^3x \frac{B_{(ROT)} \cdot B_{AB}}{\mu_0} = \frac{qn\hbar}{2m\pi R} \frac{\Phi}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^a dz d\phi d\rho \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \\ \times \left[ I_1(|k|\rho) K_1(|k|R) + \rho \left( I_0(|k|\rho) - \frac{I_1(|k|\rho)}{|k|\rho} \right) |k| K_1(|k|R) \right]. \quad (4.47)$$

Integrando em  $\rho$ ,  $\phi$ , e identificando uma representação de  $\delta(k)$  na integração em  $z$ :

$$\int d^3x \frac{B_{(ROT)} \cdot B_{AB}}{\mu_0} = \frac{qn\hbar}{mRa} \frac{\Phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} I_1(|k|R) K_1(|k|a) \\ = \frac{qn\hbar}{mRa} \frac{\Phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k) I_1(|k|R) K_1(|k|a) \\ = \frac{qn\hbar}{mRa} \frac{\Phi}{\pi} \cdot \frac{a}{2R} \\ = \frac{qn\hbar\Phi}{2\pi mR^2}. \quad (4.48)$$

Substituindo (4.48) na equação (4.44), obtemos o espectro de energia

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2mR^2} - \frac{qn\hbar\Phi}{2\pi mR^2}, \quad (4.49)$$

que, completando quadrados, pode ser reescrito como

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2 - \frac{q^2\Phi^2}{8\pi^2 mR^2}, \quad (4.50)$$

que é a mesma energia encontrada pelo cálculo convencional descrito na seção 2.2 (equação (2.50)), a menos de um fator que não depende de  $n$  e apenas redefine o zero de energia, não alterando as transições entre os níveis.

## 4.2 Estado de espalhamento na presença do potencial de Aharonov-Bohm

Nesta seção, estudaremos os efeitos de mudança de fase provocados na função de onda de uma partícula devido à presença de um solenoide. Na proposta apresentada a seguir, modelamos este efeito considerando partículas carregadas movendo-se sobre fios retilíneos muito longos, dispostas em lados opostos deste solenoide.

### 4.2.1 Campo magnético gerado por uma partícula em um fio retilíneo

Consideremos uma partícula de massa  $m$  restrita a mover-se sobre um fio retilíneo de comprimento  $L \rightarrow \infty$ , coincidente com o eixo  $z$  do sistema de coordenadas cartesianas.

A equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula será

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} = E\psi(z), \quad (4.51)$$

levando à solução (já normalizada)

$$\psi(z) = \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{L}}, \quad (4.52)$$

com  $k_z = \pm\sqrt{2mE/\hbar^2}$  e momentum linear  $\mathbf{P} = \hbar k_z \hat{\mathbf{z}}$ . Neste caso, temos as densidades lineares de probabilidade e de corrente de probabilidade

$$\varrho = \frac{1}{L}, \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k_z}{mL} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.53b)$$

através das quais podemos escrever

$$J_\rho \doteq \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \left[ \frac{qc}{L}, -\frac{q\hbar k_z}{mL} \hat{\mathbf{z}} \right], \quad (4.54)$$

o fator  $\delta(\rho)/2\pi\rho$  é introduzido para garantir que a integração da densidade de cargas em todo o espaço corresponda à carga total, e o fluxo da densidade de corrente elétrica através de uma superfície (digamos, uma circunferência de raio arbitrário  $\mathcal{R}$ , transversal ao fio) corresponda à corrente elétrica total

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dz d\phi d\rho \rho \cdot \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \frac{J_0}{c} &= q, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} d\phi d\rho \rho \cdot \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{q\hbar k_z}{mL}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

A função de Green livre  $G_0(X, X'')$  para esta partícula é a mesma obtida na seção 4.1 (equação (4.11)). Como o fio é infinito (apresentando uma simetria na coordenada  $z$ ), esperamos que a função  $G_2(X, X'')$  possua uma expansão semelhante

$$G_2(X, X') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, \rho'). \quad (4.56)$$

onde  $\tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, \rho')$  é uma função a ser determinada.

Calculando os termos da equação (3.76)

$$\begin{aligned} \int d^4 X'' G_0(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') &= \int d(ct'') \int dz'' d\phi'' d\rho'' \rho'' \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \\ &\times \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t'')} e^{is(\phi-\phi'')} e^{ik(z-z'')} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho'') \frac{1}{L} \delta(\rho'') \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} \\ &\times \sum_{s'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega'(t''-t')} e^{is'(\phi''-\phi')} e^{ik'(z''-z')} \tilde{G}_0(\omega', k', s'; \rho'', \rho'). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Utilizando as identidades do apêndice A.2 e a equação (A.25), integrando em  $\rho''$ ,  $\omega'$ ,  $t''$ ,  $k'$ ,  $z''$ ,  $\phi''$ , e somando em  $s'$ , obtemos

$$\int d^4 X'' G_0(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') = \frac{c}{L} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(z-z')} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho'). \quad (4.58)$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\int d^4 X'' G_2(X, X'') \varrho(X'') G_0(X'', X') = \frac{c}{L} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(z-z')} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho'); \quad (4.59)$$

Substituindo (4.59) e (4.58) na equação (3.76),

$$G_2(X, X') = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} e^{ik(z-z')} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \left[ \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') + \tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') \right], \quad (4.60)$$

Usando a representação de Fourier (4.56) no lado esquerdo de (4.60), pode-se mostrar que

$$\tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, \rho') = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \left[ \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') + \tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') \right]. \quad (4.61)$$

Tomando  $\rho' = 0$  na equação acima e efetuando algumas manipulações simples temos que

$$\tilde{G}_2(\omega, k, s; \rho, 0) = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \frac{\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, 0)}{1 + \frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, 0)} \quad (4.62)$$

A função  $\tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, 0)$  se anula por regularização (A.36), e a equação (4.62) é nula; substituindo em (4.61) e usando o resultado em (4.56) obtemos finalmente

$$G_2(X, X') = -\frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho'). \quad (4.63)$$

A função de Green do sistema fica dada por

$$G^\alpha_\rho(X, Y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \left[ \eta^\alpha_\rho \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') \right. \\ \left. - \left( \eta^\alpha_\rho - \eta^\alpha_0 \eta^0_\rho \right) \frac{q^2 \mu_0}{m} \frac{c}{L} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') \right] \quad (4.64)$$

Com este resultado, podemos calcular o potencial gerado pela partícula, com o uso da equação (3.65)

$$A^\alpha(\rho, \phi, z, t) = \mu_0 \int (cdt') dz' d\phi' d\rho' \rho' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \left[ \eta_\rho^\alpha \tilde{G}_0(k, \omega, s; \rho, \rho') - \left( \eta_\rho^\alpha - \eta_{\rho_0}^\alpha \eta_\rho^0 \right) \frac{q^2 \mu_0 c}{m L} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') \right] J_\rho(\rho, \phi, z, t), \quad (4.65)$$

sendo a corrente  $J_\rho$  dada por (4.54). A parte espacial será dada por

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z, t) = \frac{q\hbar k_z \mu_0 c}{2\pi m L} \hat{z} \int dt' dz' d\phi' d\rho' \rho' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(z-z')} \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')} \\ \times \left[ \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') - \frac{q^2 \mu_0 c}{m L} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, 0) \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, \rho') \right] \frac{\delta(\rho')}{\rho'}. \quad (4.66)$$

Integrando nas coordenadas espaciais e temporal (usando a identidade (A.25) para a integração em  $\phi'$ ), obtemos os fatores  $\delta_{s,0}$ ,  $\delta(k)$  e  $\delta(\omega)$  e avaliamos o integrando em  $\rho' = 0$ , por conta da função delta de Dirac. Integramos então em  $\omega$  e efetuamos algumas manipulações simples

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z, t) = \frac{\mu_0 q k_z \hbar c}{2\pi m L} \hat{z} \int dk e^{ikz} \delta(k) \left[ \tilde{G}_0(0, k, 0; \rho, 0) \right. \\ \left. - \frac{q^2 \mu_0 c}{m L} \tilde{G}_0(0, k, 0; \rho, 0) \tilde{G}_0(0, k, 0; 0, 0) \right] \\ = \frac{\mu_0 q k_z \hbar c}{2\pi m L} \hat{z} \int dk e^{ikz} \delta(k) \tilde{G}_0(0, k, 0; \rho, 0) \left[ 1 - \frac{q^2 \mu_0 c}{m L} \tilde{G}_0(0, k, 0; 0, 0) \right] \quad (4.67)$$

Novamente, da equação (A.36), temos  $\tilde{G}_0(0, k, s; 0, 0) \rightarrow 0$ . Usando então a equação (4.14),

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z, t) = \frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L} \hat{z} \int dk e^{ikz} \delta(k) I_0(0) K_0(|k|\rho) \\ = \frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L} \hat{z} \lim_{k \rightarrow 0} e^{ikz} I_0(0) K_0(|k|\rho). \quad (4.68)$$

Usando o fato de que  $I_0(0) K_0(|k|\rho) \sim \ln(2) - \gamma - \ln(|k|\rho) + \mathcal{O}(|k|\rho((|k|\rho)^2))$ , podemos escrever

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z, t) = -\frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L} \hat{z} \lim_{k \rightarrow 0} e^{ikz} \ln(|k|\rho); \quad (4.69)$$

onde descartamos uma contribuição que não depende do espaço (e do tempo) e, portanto, não contribui para os campos eletromagnéticos. Dessa forma, o campo magnético será

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L} \hat{\phi} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{ikz}}{\rho} \\ &= \frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L \rho} \hat{\phi},\end{aligned}\quad (4.70)$$

ou em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q k_z \hbar}{2\pi m L (x^2 + y^2)} (-y\hat{x} + x\hat{y}). \quad (4.71)$$

### 4.2.2 Mudança de fase

Consideremos agora a seguinte situação: seja o potencial de Aharonov-Bohm, com eixo de simetria sendo  $z$ , e dois fios retilíneos perpendiculares ao eixo  $z$  e paralelos um ao outro, dispostos um de cada lado do eixo  $z$  à uma distância  $d$  deste e paralelos ao eixo  $x$ . Vamos tomar o comprimento de cada fio como sendo  $L$  e no final das contas tomaremos o limite de fios infinitos,  $L \rightarrow \infty$ . Sobre cada fio, move-se uma partícula quântica de carga  $q$  e momentum linear  $\mathbf{P} = \hbar k_x \hat{x}$ , cujas funções de onda são

$$\Psi_1(x, t) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{L}} \psi_1(t), \quad (4.72a)$$

$$\Psi_2(x, t) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{L}} \psi_2(t), \quad (4.72b)$$

sendo  $E = \hbar^2 k_x^2 / 2m$  a energia de cada uma das partículas. Este esquema pode ser visualizado na figura 7.

Nosso objetivo é encontrar a energia de interação de cada uma das partículas com o campo de Aharonov-Bohm. Ressaltamos que não vamos considerar a energia de interação de uma partícula com a outra.

Para cada uma das partículas podemos proceder de forma totalmente similar ao que fizemos para obter as equações (4.38c), (4.38b) e (4.38a), com a única modificação no subscrito ( $ROT$ ), que deve ser substituído por  $+$  ou  $-$ , no caso das partículas 1 e 2, respectivamente. Em resumo, temos as contribuições

$$E_{\pm} = \int d^3x \left[ -\frac{\mathbf{B}_{\pm} \cdot \mathbf{B}_{AB}}{\mu_0} - \frac{2q^2}{m} \mathbf{A}_{\pm} \cdot \mathbf{A}_{AB} - \frac{q^2}{m} \rho_{\pm} \mathbf{A}_{AB}^2 \right] + \int d^3x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi_{\pm}^* \cdot \nabla \Psi_{\pm}. \quad (4.73)$$

Para encontrar a primeira contribuição de (4.73) devemos obter o campo magnético produzido por cada uma das partículas. Promovendo na equação (4.71) a seguinte

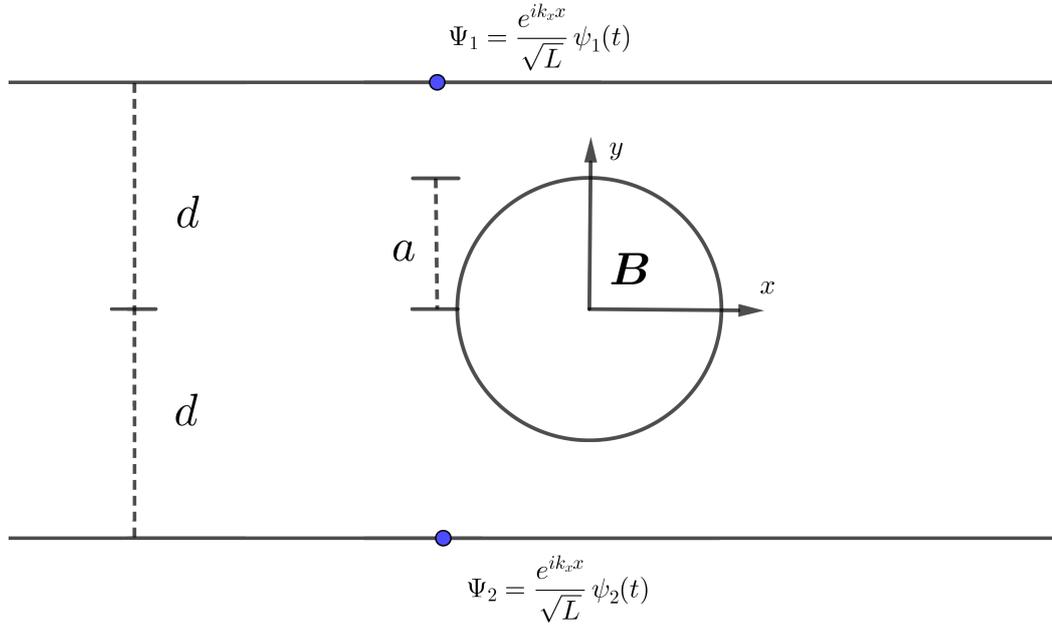


Figura 7 – Duas partículas carregadas se movendo sobre fios de comprimento  $L \rightarrow \infty$  próximas a um solenoide com campo magnético interno  $\frac{\Phi}{\pi a^2} \hat{z}$ .

transformação:

$$z, \hat{z} \rightarrow x, \hat{x}$$

$$x, \hat{x} \rightarrow -z, -\hat{z}$$

$$y \rightarrow y - d \quad (\text{Partícula 1}) \quad (4.74)$$

$$y \rightarrow y + d \quad (\text{Partícula 2})$$

$$k_z \rightarrow k_x$$

obtemos os campos magnéticos das duas partículas

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_+ = \frac{\mu_0 q k_x \hbar}{2\pi m L} \left[ \frac{(y-d)\hat{z} - z\hat{y}}{z^2 + (y-d)^2} \right], \quad (4.75a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_- = \frac{\mu_0 q k_x \hbar}{2\pi m L} \left[ \frac{(y+d)\hat{z} - z\hat{y}}{z^2 + (y+d)^2} \right]. \quad (4.75b)$$

Podemos agora encontrar a primeira contribuição de (4.73) de cada uma das

partículas,

$$\begin{aligned}
\Delta_{B\pm} &= -\frac{1}{\mu_0} \int d^3x \mathbf{B}_{\pm} \cdot \mathbf{B}_{AB} \\
&= -\frac{qk_x \Phi \hbar}{2\pi^2 m a^2 L} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a/2}^{a/2} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy dz \left[ \frac{y \mp d}{z^2 + (y \mp d)^2} \right] \\
&= \pm \frac{qk_x \Phi \hbar}{2\pi m a^2 L} \int_{a/2}^{a/2} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{d \mp y} \right), \tag{4.76}
\end{aligned}$$

onde  $\operatorname{sgn}(1/d \mp y)$  é a função sinal. Como  $d > y$  em toda a região de integração, a função sinal é positiva para ambos os casos, e a integral restante é a área de um círculo de raio  $a$ . Portanto, as energias de interação para cada partícula são dadas por

$$\Delta_{B\pm} = \pm \frac{qk_x \Phi \hbar}{2mL}, \tag{4.77}$$

A segunda contribuição de (4.73) é determinada pelos seus respectivos potenciais vetores,

$$\mathbf{A}_{\pm} = -\frac{\mu_0 q k_x \hbar \hat{\mathbf{x}}}{2\pi m L} \lim_{k \rightarrow 0} e^{ikx} \ln \left( |k| \sqrt{z^2 + (y \mp d)^2} \right). \tag{4.78}$$

Devemos também escrever o potencial de Aharonov-Bohm em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A}_{AB} = -\frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{y}{a^2} \Theta(a - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{y}{x^2 + y^2} \Theta(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \right]; \tag{4.79}$$

o que nos permite calcular a segunda contribuição de (4.73),

$$\begin{aligned}
-\frac{2q^2}{m} \int d^3x \varrho \mathbf{A}_{\pm} \cdot \mathbf{A}_{AB} &= -\frac{2\mu_0 q^3 k_x \hbar \Phi}{(2\pi)^2 m^2 L^2} \lim_{k \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz e^{ikx} \ln \left( |k| \sqrt{z^2 + (y \mp d)^2} \right) \\
&\quad \times \left[ \frac{y}{a^2} \Theta(a - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{y}{x^2 + y^2} \Theta(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \right] \delta(z) \delta(y \mp d) \\
&= -\frac{2\mu_0 q^3 k_x \hbar \Phi}{(2\pi)^2 m^2 L^2} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \ln \left( |k| |z| \right) \\
&\quad \times \left[ \mp \frac{d}{a^2} \Theta(a - \sqrt{x^2 + y^2}) \mp \frac{d}{x^2 + d^2} \Theta(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \right] \\
&= \mp \frac{2\mu_0 q^3 k_x \hbar \Phi}{(2\pi)^2 m^2 L^2} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} e^{-d|k|} \ln \left( |k| |z| \right) \cdot \pi \\
&= \mp \frac{\mu_0 q^3 k_x \hbar \Phi}{2\pi m^2 L^2} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} e^{-d|k|} \ln \left( |k| |z| \right) \\
&= \frac{\Omega^{\pm}}{L^2}, \tag{4.80}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\Omega^\pm = \mp \frac{\mu_0 q^3 k_x \hbar \Phi}{2\pi m^2}. \quad (4.81)$$

A terceira contribuição em (4.73) tem o mesmo valor para ambas as partículas, ou seja

$$\delta = \int d^3x -\frac{q^2}{m} \varrho_\pm \mathbf{A}_{AB}^2. \quad (4.82)$$

Algo semelhante ocorre para a última contribuição em (4.73), que divergente e corresponde à auto energia de cada partícula. Podemos mostrar que  $\delta_+ = \delta_-$ , onde

$$\int d^3x \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi_\pm^* \cdot \nabla \Psi_\pm = \hbar^2 k_x^2 / 2m = E \quad (4.83)$$

Levando em conta os resultados (4.77) (4.80) (4.82) e (4.83), podemos escrever o lado direito de (4.73) como

$$E_\pm = \Delta_{B\pm} + \frac{\Omega^\pm}{L^2} + \delta + E. \quad (4.84)$$

A aplicação do operador de evolução temporal em ambas as partículas, em um intervalo de tempo  $t_i \rightarrow t_f$ , altera suas fases, o que pode ser obtido com a equação (4.84)

$$\begin{aligned} U(t_f, t_i) \Psi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_x x - \frac{i}{\hbar} E(t_f - t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \Delta_{B+} + \frac{\Omega^+}{L^2} + \delta \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_x x - \frac{i}{\hbar} E \Delta t - \frac{i}{\hbar} \frac{q k_x \Phi \hbar}{2mL} \Delta t - \frac{i}{\hbar} \frac{\Omega^+}{L^2} \Delta t - \frac{i}{\hbar} \delta \Delta t \right), \end{aligned} \quad (4.85a)$$

$$\begin{aligned} U(t_f, t_i) \Psi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_x x - \frac{i}{\hbar} E(t_f - t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \Delta_{B-} + \frac{\Omega^-}{L^2} + \delta \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_x x - \frac{i}{\hbar} E \Delta t + \frac{i}{\hbar} \frac{q k_x \Phi \hbar}{2mL} \Delta t - \frac{i}{\hbar} \frac{\Omega^-}{L^2} \Delta t - \frac{i}{\hbar} \delta \Delta t \right), \end{aligned} \quad (4.85b)$$

onde  $\Delta t = t_f - t_i$ . Assim, temos mudanças de fase  $g_1$  e  $g_2$  provocadas nas partículas 1 e 2, devido à presença do solenoide:

$$g_1 = -\frac{q k_x \Phi}{2mL} \Delta t - \frac{\Omega^+}{\hbar L^2} \Delta t - \frac{\delta}{\hbar} \Delta t, \quad (4.86a)$$

$$g_2 = +\frac{q k_x \Phi}{2mL} \Delta t - \frac{\Omega^-}{\hbar L^2} \Delta t - \frac{\delta}{\hbar} \Delta t. \quad (4.86b)$$

Se considerarmos que as partículas percorrem, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , todo o comprimento  $L$  do fio, à uma velocidade média  $|\mathbf{P}|/m = \hbar k_x / m$ , teremos

$$\Delta t = \frac{mL}{\hbar k_x}, \quad (4.87)$$

e podemos escrever

$$g_1 = -\frac{q\Phi}{2\hbar} - \frac{\Omega^+ m}{\hbar^2 k_x L} - \frac{\delta m L}{\hbar^2 k_x}, \quad (4.88a)$$

$$g_2 = +\frac{q\Phi}{2\hbar} - \frac{\Omega^- m}{\hbar^2 k_x L} - \frac{\delta m L}{\hbar^2 k_x}. \quad (4.88b)$$

A diferença de fase entre as partículas será então

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{q\Phi}{2\hbar} + \frac{(\Omega^+ - \Omega^-)m}{\hbar^2 k_x L} \quad (4.89)$$

Os termos proporcionais à  $\Omega$  vão à 0 quando  $L \rightarrow \infty$ . Assim, a mudança de fase total se reduz à

$$\Delta g = \frac{q\Phi}{\hbar}, \quad (4.90)$$

que é exatamente o mesmo valor obtido na seção 2.3, equação (2.57).

Alguns pontos importantes devem ser observados. Note que a mudança de fase (4.90) não depende do módulo do momento.

O segundo ponto é o fato de que somente o fator (4.77) contribui para a mudança de fase (4.90), que é uma contribuição da energia de interação de cada partícula com o campo de Aharonov-Bohm onde se leva em conta apenas os campos magnéticos. Os fatores que dependem do potencial vetor de Aharonov-Bohm, (4.80) e (4.82), acabam por não contribuir para a mudança de fase (4.90).

Isso nos permite interpretar o efeito como sendo decorrente da interação entre cada uma das partículas com o campo de Aharonov-Bohm. Mesmo que esse último não produza campo algum na região onde as partículas estão, as partículas produzem campo magnético não nulo na região interna ao solenoide, originando uma energia de interação de origem eletromagnética.

### 4.3 Efeito Aharonov-Bohm elétrico

Nesta seção, utilizamos o método alternativo em termos da energia de interação para descrever o efeito Aharonov-Bohm elétrico. Para este fim, modelamos o problema como duas partículas restritas a moverem-se sobre fios retilíneos de comprimento  $L \rightarrow \infty$ , paralelos entre si. Disponos estes fios de modo que sejam paralelos ao eixo  $z$  do sistema de coordenadas e suas funções de onda sejam dadas por

$$\Psi_1(z, t) = \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{L}} \psi_1(t), \quad (4.91a)$$

$$\Psi_2(z, t) = \frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{L}} \psi_2(t), \quad (4.91b)$$

de modo semelhante às equações (4.72a) e (4.72b). Ao redor de cada fio, é colocado um tubo cilíndrico feito de um material condutor, de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ .

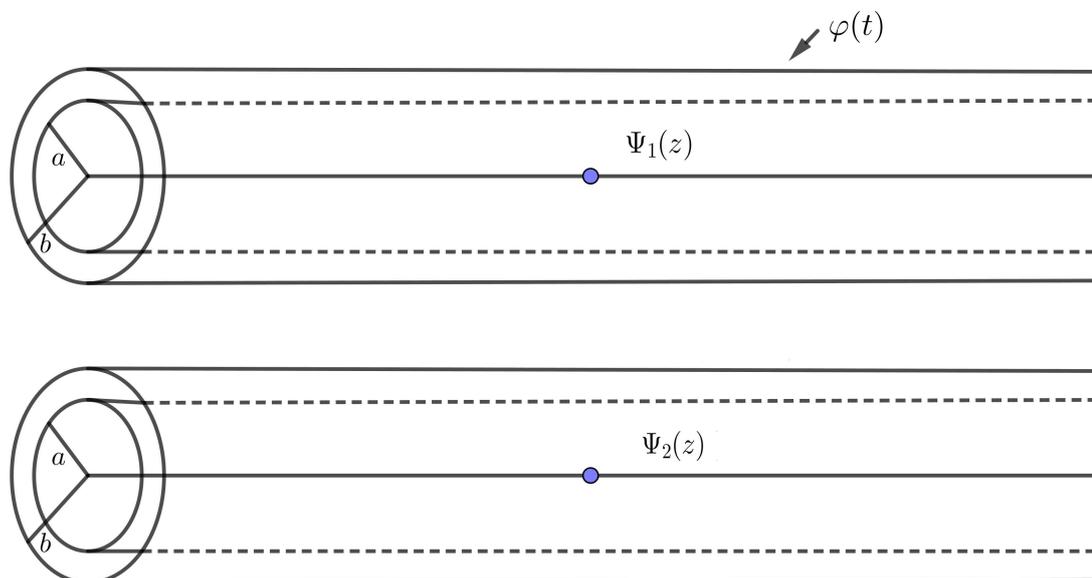


Figura 8 – Duas partículas se movem sobre fios retilíneos longos, internas a tubos condutores. Durante um intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , é aplicada uma diferença de potencial entre as camadas de um dos tubos, gerando um campo elétrico entre elas.

Em um dado instante  $t_1$ , o tubo ao redor da partícula 1 é carregado com cargas  $+Q$  e  $-Q$  em suas camadas interna e externa, respectivamente. Desse modo, considerando que o fio 1 esteja sobre o eixo  $z$ , é produzido neste intervalo de tempo, um campo elétrico entre as placas interna e externa:

$$\mathbf{E}_{tubo} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L \rho} \hat{\rho}, \quad a < \rho < b, \quad (4.92)$$

cujo potencial associado é

$$\phi(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \rho + \text{constante}, \quad a < \rho < b. \quad (4.93)$$

Queremos manter a partícula 2 em uma região de potencial nulo. Para isso, fixamos  $\phi(b) = 0$ , e a expressão para o potencial fica

$$\phi(\rho) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\rho}{b}, \quad (4.94)$$

e o potencial no interior do tubo será o potencial da camada interna,

$$\phi(\rho < a) = \phi_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.95)$$

No instante  $t_2$ , este potencial é desligado. Assim, no interior do tubo (onde o fio se encontra), teremos um potencial  $\varphi(t)$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \varphi_0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2. \end{cases} \quad (4.96)$$

O potencial  $\phi_p(\rho) = cA^0$  gerado pela partícula 1 pode ser obtido da equação (3.65) e da densidade de corrente (4.54):

$$\phi_p(\rho) = \mu_0 \int d^4y G^{0\rho}(x, y) J_\rho(y). \quad (4.97)$$

Note pela equação (3.71) que  $G^{0\rho}(x, y)$  é a própria função de Green livre, que satisfaz as equações clássicas do eletromagnetismo. Sendo assim, o potencial elétrico da partícula é idêntico ao potencial clássico de um fio infinito carregado com densidade linear de cargas  $q/L$ , gerando um campo elétrico

$$\mathbf{E}_p = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L \rho} \hat{\rho}. \quad (4.98)$$

Calculamos então a energia de interação entre a partícula e o tubo

$$\begin{aligned} E_{int} &= \int d^3x \epsilon_0 \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_{tubo} \\ &= \frac{qQ}{(2\pi)^2 \epsilon_0 L^2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz d\phi d\rho \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= q\varphi_0; \end{aligned} \quad (4.99)$$

Atuando com o operador de evolução temporal na partícula 1, para  $t > t_2$ ,

$$\begin{aligned} U(t, 0)\Psi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_z z - \frac{i}{\hbar} Et - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_{int} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_z z - \frac{i}{\hbar} Et - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} dt' q\varphi_0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \left( ik_z z - \frac{i}{\hbar} Et - \frac{iq\varphi_0}{\hbar} (t_2 - t_1) \right), \end{aligned} \quad (4.100)$$

ou seja, a interação entre os campos elétricos introduz uma fase  $g_1$  na partícula 1,

$$g_1 = k_z z - \frac{E(t_2 - t_1)}{\hbar} - \frac{q\varphi_0(t_2 - t_1)}{\hbar}. \quad (4.101)$$

Como a segunda partícula permanece a um potencial nulo em todo o processo, a partícula 2 não sofre mudança de fase,

$$g_2 = k_z z - \frac{E(t_2 - t_1)}{\hbar}, \quad (4.102)$$

portanto, a diferença de fase entre as partículas ao final do processo é

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{q\varphi_0(t_2 - t_1)}{\hbar}, \quad (4.103)$$

resultado igual ao encontrado na seção 2.4, equação (2.64).

## 4.4 Cálculo por correntes

Uma outra maneira de calcular as energias de interação investigadas nas seções precedentes é através das correntes. Substituindo a relação (3.79) na densidade hamiltoniana (3.83) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda - A_\mu \underbrace{\left( \frac{\partial^\lambda \partial_\lambda \eta^\mu{}_\nu}{2\mu_0} - \frac{V_{\mu\nu}}{2} \right)}_{J^\mu/2} A^\nu + A_\mu J^\mu \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi^* \cdot \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0} \partial_0 A^\lambda \partial^0 A_\lambda + \frac{1}{2} A_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Vamos tomar a corrente como sendo composta por duas partes; uma dada pelo campo de Schrödinger livre (3.53),  $J_\psi^\mu$ , e outra dada por uma fonte que gera o potencial de Aharonov-Bohm (4.42),  $J_{AB}^\mu$ ,

$$J^\mu = J_\psi^\mu + J_{AB}^\mu. \quad (4.105)$$

Com isso, pela equação (3.65), temos que o potencial deve ser dado pela contribuição de dois termos,

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A_\psi^\mu(x) + A_{AB}^\mu(x) \\ A_\psi^\mu(x) &= \int d^4 y G^{\alpha\rho}(x, y) \mu_0 J_{\rho(\psi)}(y) \\ A_{AB}^\mu(x) &= \int d^4 y G^{\alpha\rho}(x, y) \mu_0 J_{\rho(AB)}(y), \end{aligned} \quad (4.106)$$

portanto,

$$A_\mu J^\mu = A_{(\psi)\mu} J_{(\psi)}^\mu + A_{(AB)\mu} J_{(AB)}^\mu + A_{(\psi)\mu} J_{(AB)}^\mu + A_{(AB)\mu} J_{(\psi)}^\mu, \quad (4.107)$$

Considerando que as correntes  $J_\psi^\mu$  e  $J_{AB}^\mu$  são independentes do tempo, os potenciais (4.106) também serão. Das equações (4.104) (4.107) podemos então escrever a energia de interação

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x A_{(\psi)\mu} J_{AB}^\mu + \frac{1}{2} \int d^3x A_{(AB)\mu} J_{(\psi)}^\mu. \quad (4.108)$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned} \mu_0 J_{(\psi)}^\beta &= \left( \eta^\beta_\alpha \partial_\lambda \partial^\lambda + \mu_0 V_\alpha^\beta \right) A_{(\psi)}^\beta \\ \mu_0 J_{AB}^\beta &= \left( \eta^\beta_\alpha \partial_\lambda \partial^\lambda + \mu_0 V_\alpha^\beta \right) A_{AB}^\beta, \end{aligned} \quad (4.109)$$

podemos reescrever

$$A_{(\psi)\mu} J_{AB}^\mu = A_{(\psi)\mu} \left( \frac{\partial^\lambda \partial_\lambda \eta^\mu_\nu}{\mu_0} + V_{\mu\nu} \right) A_{AB}^\nu; \quad (4.110)$$

Levando em conta que  $V_{\mu\nu}$  é uma função e não um operador diferencial, que exhibe a simetria  $V_{\mu\nu} = V_{\nu\mu}$  e considerando que os potenciais e correntes não dependem do tempo, temos que

$$\begin{aligned} \int d^3x A_{(\psi)\mu} J_{AB}^\mu &= \int d^3x A_{(\psi)}^\mu \left( \frac{\partial^\lambda \partial_\lambda \eta_{\mu\nu}}{\mu_0} + V_{\mu\nu} \right) A_{AB}^\nu \\ &= \int d^3x A_{AB}^\nu \left( \frac{\partial^\lambda \partial_\lambda \eta_{\mu\nu}}{\mu_0} + V_{\mu\nu} \right) A_{(\psi)}^\mu \\ &= \int d^3x A_{AB}^\nu J_{(\psi)\nu}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

onde fizemos duas integrações por partes e usamos a equação (4.109). Assim, é possível reescrever a energia de interação (4.108) utilizando apenas a corrente da função de onda e do potencial de Aharonov-Bohm,

$$H_{int} = \int d^3x A_{(AB)\mu} J_{(\psi)}^\mu. \quad (4.112)$$

Para o caso do rotor quântico, usando o potencial de Aharonov-Bohm e a corrente (4.27),

$$\begin{aligned} E_{int} &= - \int d^3x \mathbf{A}_{AB} \cdot \mathbf{J}_{(ROT)} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} dz d\phi d\rho \frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{\rho}{a^2} \Theta(a - \rho) + \frac{1}{\rho} \Theta(\rho - a) \right] \frac{qn\hbar}{2m\pi R^2} \delta(\rho - R) \delta(z) \\ &= - \frac{qn\hbar\Phi}{2m\pi R^2}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

que é a mesma expressão da equação (4.48).

Para o caso de espalhamento, utilizando a corrente (4.53b) (trocando  $k_z \rightarrow k_x$  e  $\hat{z} \rightarrow \hat{x}$ , e fazendo o deslocamento  $y = \pm d$ ):

$$\mathbf{J}_{\pm} = -\frac{q\hbar k_x}{mL} \delta(y \pm d) \delta(z) \hat{x}, \quad (4.114)$$

a energia de interação será

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\int d^3x \mathbf{A}_{AB} \cdot \mathbf{J}_{\pm} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz \frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a^2} \Theta(a - \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Theta(\sqrt{x^2 + y^2} - a) \right] \\ &\quad \times \frac{q\hbar k_x}{mL} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \delta(y \pm d) \delta(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{a^2} \Theta(a - \sqrt{x^2 + d^2}) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} \Theta(\sqrt{x^2 + d^2} - a) \right] \\ &\quad \times \frac{q\hbar k_x}{mL} \frac{\pm d}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

como  $d > a$ ,  $\sqrt{x^2 + d^2} > a$  para todo  $x$ , temos  $\Theta(a - \sqrt{x^2 + d^2}) = 0$  e  $\Theta(\sqrt{x^2 + d^2} - a) = 1$ :

$$\begin{aligned} E_{int} &= \pm \frac{q\hbar k_x \Phi d}{2\pi m L} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + d^2} \\ &= \pm \frac{q\hbar k_x \Phi d \pi}{2\pi m L d} \\ &= \pm \frac{q\hbar k_x \Phi}{2mL}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

que corresponde à expressão (4.77).

Para o efeito AB elétrico, temos apenas a componente 0 do campo de calibre. Devemos considerar a energia de interação entre os instantes  $t_1 + \epsilon$  e  $t_2 - \epsilon$ , e depois tomar o limite  $\epsilon = 0$ . Neste intervalo, o potencial entre os cascas cilíndricas é constante no tempo. Além disso, o potencial  $A_{(\psi)}^0$  da função de onda é também independente do tempo e o termo com derivadas temporais na equação (4.104) será nulo. Com isto, podemos utilizar novamente a corrente (4.54) e o potencial gerado pelo tubo

$$\phi_{tubo} = \begin{cases} \phi_0, & \rho \leq a \\ -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\rho}{b}, & a \leq \rho \leq b \\ 0, & \rho \geq b \end{cases} \quad (4.117)$$

para calcular a energia de interação

$$\begin{aligned}
E_{int} &= \int d^3x A_{tubo}^0 J_{(ROT)}^0 \\
&= \int_{L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dz d\phi d\rho \rho \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \frac{qc}{L} \frac{\phi_{tubo}}{c} \\
&= \int_0^a d\rho \delta(\rho) q \phi_0 - \int_a^b d\rho \delta(\rho) q \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\rho}{b}, \\
&= q\phi_0,
\end{aligned} \tag{4.118}$$

resultado igual ao obtido na equação (4.99).

É interessante notar, observando as funções  $\Theta$ , que quando calculamos a energia de interação pelo acoplamento dos campos, a integração é feita dentro do solenoide, ou seja, na região em que o campo do solenoide é não nulo. O mesmo vale para o efeito elétrico, em que a integração é feita entre as cascas do tubo, onde há campo elétrico. Já quando calculamos a energia pela integração de  $A_\mu J^\mu$ , a integral se anula dentro do solenoide, contribuindo apenas para  $\rho > a$ ; para o caso elétrico, a integração é feita no interior do tubo, onde o campo elétrico da fonte externa é nulo. Em outras palavras, quando utilizamos o acoplamento entre os campos, o campo externo ao solenoide não contribui (pois é nulo), bem como o campo elétrico dos tubos só contribui entre as cascas, pois no interior do tubo também é nulo. Quando efetuamos os cálculos através dos potenciais, a situação se inverte: a integração é feita apenas nas regiões onde os campos externos são nulos, que é onde a partícula se encontra. Neste contexto, podemos interpretar o efeito Aharonov-Bohm de duas maneiras distintas: através do acoplamento entre os campos, ou através da interação direta entre os potenciais de Aharonov-Bohm e a partícula.

## 4.5 Efeito Aharonov-Bohm em meios materiais lineares

Nas discussões anteriores, exploramos configurações do efeito AB em situações onde o campo eletromagnético externo existe em uma região de vácuo. Nesta seção, discutimos brevemente como o efeito se manifesta quando temos a presença de meios materiais. Os resultados apresentados aqui são particularizados para meios lineares e isotrópicos, mas o tratamento pode ser estendido para materiais de natureza mais complexa.

Vamos considerar materiais dielétricos e magnéticos nos quais campos de deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e campos magnéticos  $\mathbf{H}$  se relacionem aos campos elétrico  $\mathbf{E}$  e de

indução magnética<sup>2</sup>  $\mathbf{B}$  através das seguintes relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (4.119a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (4.119b)$$

onde  $\epsilon$  é a *permissividade elétrica* do meio, e  $\mu$  a *permeabilidade magnética*. Neste caso, as densidades de energia referentes aos campos é modificada pela presença do material:

$$\epsilon_0 E^2 \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \epsilon E^2, \quad (4.120a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} B^2 \rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} B^2. \quad (4.120b)$$

Por outro lado, os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  gerados por uma distribuição de cargas e correntes no vácuo, se relacionam aos campos  $\bar{\mathbf{E}}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  no interior de meios materiais, produzidos pelas mesmas distribuições, através das equações

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}, \quad (4.121a)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu_r \mathbf{B}, \quad (4.121b)$$

onde  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  é a permissividade relativa e  $\mu_r = \mu/\mu_0$  a permeabilidade relativa do meio.

A energia de interação entre o campo da partícula e o campo externo, desconsiderando os termos de derivadas temporais e de contribuição do potencial vetor (que, como mostrado, não afeta nenhum dos casos estudados), passa a ser

$$E_{int} = \int d^3x \left( \epsilon \bar{\mathbf{E}}_\psi \cdot \bar{\mathbf{E}}_{AB} - \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{B}}_\psi \cdot \bar{\mathbf{B}}_{AB} \right), \quad (4.122)$$

onde a integração é feita na região de interação e o subíndice  $\psi$  indica o campo gerado pela função de onda.. Consideremos, para o caso magnético, que a região interna ao solenoide seja completamente preenchida com um material magnético de permeabilidade  $\mu$ , e para o caso elétrico, que a região entre as cascas interna e externa do tubo esteja preenchida com um material dielétrico de permissividade  $\epsilon$ . A modificação que estes materiais provocam na energia de interação pode ser expressa em termos da energia de interação no vácuo de maneira simples

$$\int d^3x \epsilon \bar{\mathbf{E}}_\psi \cdot \bar{\mathbf{E}}_{AB} - \int d^3x \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{B}}_\psi \cdot \bar{\mathbf{B}}_{AB} = \frac{1}{\epsilon_r} \int d^3x \epsilon_0 \mathbf{E}_\psi \cdot \mathbf{E}_{AB} - \mu_r \int d^3x \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_\psi \cdot \mathbf{B}_{AB}. \quad (4.123)$$

<sup>2</sup> Embora o campo  $\mathbf{B}$  seja frequentemente chamado de "campo magnético" esta denominação é, por questões históricas, atribuída de fato ao vetor  $\mathbf{H}$ , e a distinção entre as nomenclaturas, embora mera convenção, se faz importante quando discute-se o eletromagnetismo em meios materiais.

As modificações nos resultados obtidos anteriormente é imediata: para o caso do rotor quântico, modificamos a equação (4.48) e obtemos o espectro de energia:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n - \frac{q\Phi\mu_r}{2\pi\hbar} \right)^2 - \frac{q^2\Phi^2\mu_r^2}{8\pi^2mR^2}; \quad (4.124)$$

e para o caso de espalhamento, modificamos as energias de interação(4.77) e obtemos a diferença de fase

$$\Delta g = \frac{q\Phi\mu_r}{\hbar}. \quad (4.125)$$

Para o caso elétrico, modificando a equação (4.99), obtemos a diferença de fase

$$\Delta g = \frac{q\varphi_0(t_2 - t_1)}{\hbar\epsilon_r}. \quad (4.126)$$

Vamos verificar a compatibilidade destes resultados com os obtidos através dos métodos convencionais. Para o efeito AB magnético, devemos fazer a modificação  $\mathbf{B}_{sol} \rightarrow \mu_r\mathbf{B}_{sol}$ , o que é equivalente a mudar o fluxo magnético dentro do solenoide:

$$\Phi \rightarrow \Phi\mu_r, \quad (4.127)$$

o que também modifica o potencial vetor. Aplicando esta modificação nas equações (2.50) e (2.57), obtemos resultados compatíveis com as equações (4.124) e (4.125).

No caso elétrico, a modificação  $\mathbf{E}_{tubo} \rightarrow \mathbf{E}_{tubo}/\epsilon_r$  altera o potencial no interior do tubo:

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{\epsilon_r}\varphi; \quad (4.128)$$

e a aplicação dessa modificação na equação (2.64) leva a um resultado equivalente à equação (4.126).

## 4.6 Fonte do campo de Aharonov-Bohm

Até o momento usamos o campo de Aharonov-Bohm sem nos preocuparmos em especificar qual seria a corrente que produz esse campo. Fizemos menção à essa corrente em (4.105), mas na ocasião, não precisamos especificar qual seria sua forma.

Sabemos que na eletrodinâmica de Maxwell essa corrente é dada por um solenoide infinitamente longo (uma densidade superficial de corrente fluindo ao longo de um cilindro perpendicularmente ao seu eixo), mas quando temos o acoplamento do campo de Schrödinger, a equação de movimento do campo de calibre é alterada em comparação com a eletrodinâmica de Maxwell. Essa corrente pode ser facilmente obtida ao substituirmos (4.42) em (3.62), o que leva ao resultado

$$\mathbf{J}_{AB} = \left[ \frac{\Phi}{\mu_0\pi a^2} \delta(\rho - a) - \frac{q^2\Phi}{(2\pi)^2 m R^3} \delta(z) \delta(\rho - R) \right] \hat{\phi}. \quad (4.129)$$

O primeiro termo em (4.129) é exatamente a corrente associada à um solenoide. O segundo termo vem do potencial da equação (3.62). Podemos ver, então, que o potencial de Aharonov-Bohm não é gerado por um solenoide na teoria do campo não relativístico carregado.



## 5 Conclusão

Nesta dissertação, mostramos que o efeito Aharonov-Bohm pode ser interpretado como decorrente da interação de campos eletromagnéticos, sem a necessidade de recorrer a uma interpretação física dos potenciais.

Apresentamos uma teoria quântica não-relativística de acoplamento mínimo entre o campo de Maxwell e o campo de Schrödinger, através da qual é possível tratar o eletromagnetismo em um regime onde partículas quânticas (não relativísticas) são fontes de campos. Resolvendo as equações de movimento desta teoria, pudemos determinar os campos gerados por essas fontes.

Mostramos que a energia de interação entre uma partícula quântica e uma fonte externa pode ser descrita em termos do acoplamento entre seus campos eletromagnéticos. Verificamos que os termos de acoplamento entre os potenciais vetores (que deveriam contribuir para essa energia de interação) são todos nulos para as configurações estudadas. Não há, portanto, contribuição destes termos.

Calculando as energias de interação entre os campos, pudemos verificar que a interação entre o potencial de Aharonov-Bohm e um rotor quântico levam à adição de um termo na energia da partícula, condizente com o espectro de energia obtido pelos cálculos convencionais do efeito AB (a menos de um termo constante que não depende dos números quânticos e não afeta as energias de transição entre os níveis).

Estudando a dinâmica de duas partículas carregadas viajando por lados opostos ao potencial de Aharonov-Bohm, verificamos que a diferença de fase entre elas é causada pela evolução temporal das mesmas, devido à interação de seus campos magnéticos com o campo magnético de Aharonov-Bohm. Um procedimento semelhante foi realizado com partículas que viajam sobre fios retilíneos internos a tubos condutores, onde uma diferença de potencial é produzida durante um intervalo de tempo. Também neste caso a diferença de fase entre as duas partículas é causada pela evolução temporal do sistema. Novamente, os resultados obtidos concordam com a interpretação convencional.

Finalmente, mostramos que a presença de meios materiais nas regiões de campo externo (no interior do solenoide, para o caso magnético e do tubo, para o caso elétrico), modifica os resultados obtidos de maneira simples quando lidamos com materiais lineares e isotrópicos, introduzindo fatores multiplicativos (permissividade e permeabilidade relativas) nas energias e mudanças de fase. Entretanto, mais estudos podem ser feitos futuramente, considerando meios materiais com relações constitutivas mais complexas.

Com esses resultados concluímos que o efeito Aharonov-Bohm, nas suas versões

mais populares (efeito magnético de espalhamento, efeito magnético de estado ligado e efeito elétrico) podem ser compreendidos exclusivamente pela interação de campos eletromagnéticos.

Mostramos também que o potencial de Aharonov-Bohm, na teoria de calibre do campo não relativístico, não é produzido pela corrente externa de um solenóide infinito.

Como perspectiva futura, consideramos ser factível e relevante verificar se podemos fazer uma análise semelhante para o efeito Aharonov-Casher.

# A Apêndices

## A.1 Cálculos de campos magnéticos utilizados neste trabalho

- **Campo magnético de um solenoide infinito de raio  $a$  concêntrico ao eixo  $z$**

O potencial vetor

$$\mathbf{A}_{sol} = \begin{cases} \frac{\Phi\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} & \rho < a, \\ \frac{\Phi}{2\pi\rho} \hat{\phi}, & \rho > a, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

pode ser reescrito utilizando funções degrau de Heaviside:

$$\mathbf{A}_{sol} = \frac{\Phi}{2\pi} \left[ \frac{\rho}{a^2} \Theta(a - \rho) + \frac{1}{\rho} \Theta(\rho - a) \right] \hat{\phi}; \quad (\text{A.2})$$

o cálculo do campo magnético  $\mathbf{B}_{sol} = \nabla \times \mathbf{A}_{sol}$  leva à

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{sol} &= \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \right] \right\} \hat{z} \\ &= \frac{\Phi}{2\pi\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\rho^2}{a^2} \Theta(a - \rho) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} \Theta(\rho - a) \right\} \hat{z} \\ &= \frac{\Phi}{2\pi\rho} \left\{ \frac{2\rho}{a^2} \Theta(a - \rho) - \frac{\rho^2}{a^2} \delta(\rho - a) + \delta(\rho - a) \right\} \hat{z} \\ &= \frac{\Phi}{\pi a^2} \Theta(a - \rho) \hat{z}; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

portanto,

$$\mathbf{B}_{sol} = \begin{cases} \frac{\Phi}{\pi a^2} \hat{z}, & \rho < a \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

- **Campo magnético gerado por uma partícula à velocidade  $v$**

O campo elétrico gerado por uma partícula pontual de carga  $q$ , centrada na origem, é

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{r}}{r^2} \quad (\text{A.5})$$

e seu campo magnético  $\mathbf{B}$  é nulo. Entretanto, o campo magnético  $\mathbf{B}'$  originado por essa partícula, para um observador à uma velocidade  $-\mathbf{v}$  é <sup>1</sup>

$$\mathbf{B}' = \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.6})$$

A transformação acima deve também levar em conta as transformações das coordenadas  $x, y, z \rightarrow x', y', z'$ . Entretanto, no limite não relativístico ( $v \ll c$ ), temos  $\gamma \approx 1$ , e o campo magnético observado pelo referencial móvel, quando este passa pela origem, é

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Esta situação é equivalente à observação de uma partícula à velocidade  $\mathbf{v}$ , passando pela origem de um referencial em repouso, levando ao mesmo campo magnético.

## A.2 Representações da função Delta de Dirac

- **Representação separável:**

$$\text{Coord. cartesianas:} \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (\text{A.8a})$$

$$\text{Coord. cilíndricas:} \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho')\delta(\phi - \phi')\delta(z - z') \quad (\text{A.8b})$$

$$\text{Coord. esféricas:} \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r \sin \theta} \delta(r - r')\delta(\phi - \phi')\delta(\theta - \theta') \quad (\text{A.8c})$$

$$\text{Minkowski:} \quad \delta^4(X - X') = \frac{1}{c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (\text{A.8d})$$

- **Representação integral:**

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{\pm ik(x-x')} \quad (\text{A.9})$$

onde subentende-se que a integração é feita no intervalo  $k = (-\infty, \infty)$ . Para uma delta de Dirac tridimensional, podemos utilizar uma interpretação semelhante:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (\text{A.10})$$

onde a integração é feita sobre todo o espaço euclidiano de  $\mathbf{k}$ .

- **Representação de soma**

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is(\phi-\phi')}, \quad (\text{A.11})$$

onde  $\phi$  e  $\phi'$  são coordenadas azimutais que assumem valores entre 0 e  $2\pi$ .

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, referência [21], seção 11.10, com a ressalva de que as contas aqui estão sendo feitas no SI, enquanto no livro são utilizadas unidades gaussianas.

## A.3 Funções Modificadas de Bessel e algumas propriedades

- Expressões em termos de séries infinitas

$$I_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+s}, \quad (\text{A.12a})$$

$$K_s(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-s}(x) - I_s(x)}{\text{sen } s\pi}, \quad (\text{A.12b})$$

no caso de  $K_s(x)$ , para  $s = n$  inteiro, toma-se o limite  $s \rightarrow n$ . Ainda, para  $s$  inteiro, temos

$$I_s(x) = I_{-s}(x), \quad (\text{A.13})$$

$$K_s(x) = K_{-s}(x).$$

- Limites assintóticos ( $x \rightarrow 0$ )

$$I_s(x) \approx \left(\frac{1}{2}x\right)^s \Gamma^{-1}(s+1), \quad (s \neq -1, -2, -3\dots) \quad (\text{A.14a})$$

$$K_s(x) \approx \Gamma(s) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-s}, \quad (\Re s > 0) \quad (\text{A.14b})$$

$$K_0(x) \approx -\ln(x) \quad (\text{A.14c})$$

- Limites assintóticos ( $x \rightarrow \infty$ )

$$I_s(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x + e^x \cdot O\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}, \quad (\text{A.15a})$$

$$K_s(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + e^{-x} \cdot O\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}. \quad (\text{A.15b})$$

## A.4 Solução da equação modificada de Bessel

Considere a equação diferencial

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') = -\frac{1}{c} \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}, \quad (\text{A.16})$$

onde definimos  $\lambda = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$ . Impomos que a função  $\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho')$  deva se anular para  $\rho \rightarrow \infty$ , e ser convergente para  $\rho \rightarrow 0$ . Assim, fixando  $\rho'$ , a função deve ser proporcional à  $K_s(\lambda\rho)$  para  $\rho > \rho'$  e à  $I_s(\lambda\rho)$  para  $\rho < \rho'$ :

$$\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') = U_s(\lambda\rho') K_s(\lambda\rho) \Theta(\rho - \rho') + V_s(\lambda\rho') I_s(\lambda\rho) \Theta(\rho' - \rho); \quad (\text{A.17})$$

as funções  $U_s$  e  $V_s$  podem ser determinadas impondo-se que a função  $\tilde{G}_0$  seja invariante por uma troca de argumentos, ou seja,  $\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') = \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho', \rho)$ , o que leva à

$$\begin{aligned} U_s(\lambda\rho') &= \alpha I_s(\lambda\rho'), \\ V_s(\lambda\rho') &= \alpha K_s(\lambda\rho'), \end{aligned} \tag{A.18}$$

e a constante  $\alpha$  deve ser determinada. Reescrevemos então a função  $\tilde{G}_0$ :

$$\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') = \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') K_s(\lambda\rho) \Theta(\rho - \rho') + K_s(\lambda\rho') I_s(\lambda\rho) \Theta(\rho' - \rho) \right]. \tag{A.19}$$

Temos as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') &= \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') K_s(\lambda\rho) - K_s(\lambda\rho') I_s(\lambda\rho) \right] \delta(\rho - \rho') \\ &+ \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} K_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho - \rho') + K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} I_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho' - \rho) \right] \\ &= \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} K_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho - \rho') + K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} I_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho' - \rho) \right], \end{aligned} \tag{A.20a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') &= \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} K_s(\lambda\rho) \right) - K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} I_s(\lambda\rho) \right) \right] \delta(\rho - \rho') \\ &+ \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d^2}{d\rho^2} K_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho - \rho') + K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d^2}{d\rho^2} I_s(\lambda\rho) \right) \Theta(\rho' - \rho) \right]; \end{aligned} \tag{A.20b}$$

aplicando estes resultados na equação diferencial,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right] \tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') &= \\ &= \alpha I_s(\lambda\rho') \Theta(\rho - \rho') \left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right] K_s(\lambda\rho) \\ &+ \alpha K_s(\lambda\rho') \Theta(\rho' - \rho) \left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left( \lambda^2 + \frac{s^2}{\rho^2} \right) \right] I_s(\lambda\rho) \\ &+ \alpha \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} K_s(\lambda\rho) \right) - K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\rho} I_s(\lambda\rho) \right) \right] \delta(\rho - \rho') \\ &= \alpha \lambda \left[ I_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\lambda\rho} K_s(\lambda\rho) \right) - K_s(\lambda\rho') \left( \frac{d}{d\lambda\rho} I_s(\lambda\rho) \right) \right] \delta(\rho - \rho'); \end{aligned} \tag{A.21}$$

o termo entre colchetes, avaliado no polo da delta de Dirac ( $\rho' = \rho$ ), pode ser identificado como o Wronskiano da equação diferencial:

$$W(\lambda\rho) = I_s(\lambda\rho) \left( \frac{d}{d\lambda\rho} K_s(\lambda\rho) \right) - K_s(\lambda\rho) \left( \frac{d}{d\lambda\rho} I_s(\lambda\rho) \right); \quad (\text{A.22})$$

calculando o valor particular  $W(1) = -1$ , para todo  $s$ , podemos calcular o valor de  $W(\lambda\rho)$ :

$$\begin{aligned} W(\lambda\rho) &= W(1) \exp \left[ - \int_1^{\lambda\rho} d\rho' \frac{1}{\rho'} \right] \\ &= - \exp \left[ \ln \left( \frac{1}{\lambda\rho} \right) \right] \\ &= - \frac{1}{\lambda\rho}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo este resultado na equação (A.21) e comparando com o lado direito da equação (A.16), determinamos  $\alpha = 1/c$ , e a solução final é

$$\tilde{G}_0(\omega, k, s; \rho, \rho') = \frac{1}{c} \left[ I_s(\lambda\rho') K_s(\lambda\rho) \Theta(\rho - \rho') + K_s(\lambda\rho') I_s(\lambda\rho) \Theta(\rho' - \rho) \right]. \quad (\text{A.24})$$

## A.5 Integrais úteis

Sendo  $s$  e  $s'$  números inteiros e  $\delta_{s,s'}$  a delta de Kronecker:

$$\bullet \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(s-s')\phi} = 2\pi \delta_{s,s'} \quad (\text{A.25})$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-is\phi} \cos \phi = \frac{1}{2} (\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}) \quad (\text{A.26})$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-is\phi} \sin \phi = -\frac{i}{2} (\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}) \quad (\text{A.27})$$

## A.6 Cálculo da integral de $\tilde{G}_0(\omega, k, s; R, R)$ pelo teorema dos resíduos

Vamos calcular a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k, s; R, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi c} K_s(\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} R) I_s(\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} R). \quad (\text{A.28})$$

Deslocando os polos (fazendo  $k \rightarrow k - i\delta$ , com  $\delta \rightarrow 0$ ), podemos efetuar esta integral, fechando um arco de circunferência no plano inferior do plano complexo (Figura 9).

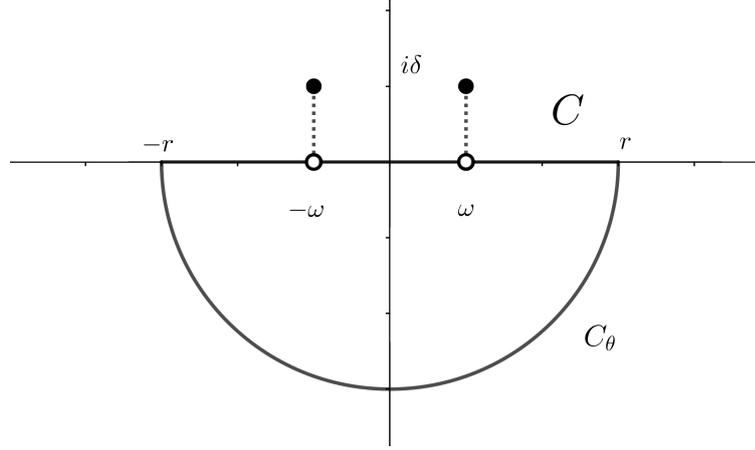


Figura 9 – Caminho de integração. A curva  $C$  fechada é composta por uma seção sobre o eixo real, de  $-r$  à  $r$ , e uma seção  $C_\theta$  formada por uma semi-circunferência de raio  $r$ .

A integral (A.28), avaliada no setor  $-r \leq k \leq r$ , pode ser expressa em termos das integrais no plano complexo:

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r \frac{dk}{2\pi c} K_s\left(\sqrt{(k-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(k-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) = \\ & = \int_C \frac{dz}{2\pi c} K_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) \\ & - \int_{C_\theta} \frac{dz}{2\pi c} K_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Como não há polos no interior da curva, a integral sobre  $C$  é nula. Para a integração sobre a curva  $C_\theta$ , escrevemos  $z$  em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta}, \\ dz &= i d\theta r e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

e teremos a integral

$$\begin{aligned} & \int_{C_\theta} dz K_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(z-i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) = \\ & = i \int_0^{-\pi} d\theta r e^{i\theta} K_s\left(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right); \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

expandindo o integrando para  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_0^{-\pi} d\theta r e^{i\theta} K_s\left(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) I_s\left(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}\right) \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_0^{-\pi} d\theta r e^{i\theta} \left[ \frac{1}{2} \frac{\text{csgn}(e^{i\theta}) e^{-i\theta}}{Rr} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\ & = i \int_0^{-\pi} d\theta \frac{\text{csgn}(e^{i\theta})}{R} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

com  $csgn(x)$  sendo a função sinal complexo:

$$csgn = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re} x > 0, \text{ ou } \operatorname{Re} x = 0 \text{ e } \operatorname{Im} x > 0, \\ -1, & \operatorname{Re} x < 0, \text{ ou } \operatorname{Re} x = 0 \text{ e } \operatorname{Im} x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Portanto, a integral sobre o eixo real, no limite  $r \rightarrow \infty$ , se anula:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi c} K_s(\sqrt{(k - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) I_s(\sqrt{(k - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) = \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{dk}{2\pi c} K_s(\sqrt{(k - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) I_s(\sqrt{(k - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) \\ & = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi c} \int_0^{-\pi} d\theta \, r e^{i\theta} K_s(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) I_s(\sqrt{(r e^{i\theta} - i\delta)^2 - \omega^2/c^2 R}) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Se construirmos a curva  $C_\theta$  no semiplano superior, o resultado será o mesmo, pois os resíduos de  $i\delta \pm \omega$  são nulos. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k, s; R, R) = 0. \quad (\text{A.35})$$

O resultado acima foi obtido para  $R > 0$ , no entanto, podemos considerar o limite  $R \rightarrow 0$  na equação acima e tomar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{G}_0(\omega, k, s; 0, 0) = 0. \quad (\text{A.36})$$



# Referências

- [1] BJ Hiley. The early history of the aharonov-bohm effect. *arXiv preprint arXiv:1304.4736*, 2013.
- [2] W Ehrenberg and R E Siday. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 62(1):8–21, jan 1949.
- [3] Yakir Aharonov and David Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485, 1959.
- [4] Y. Aharonov and D. Bohm. Further discussion of the role of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 130:1625–1632, May 1963.
- [5] Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yutaka Sugita, and Hideo Fujiwara. Observation of aharonov-bohm effect by electron holography. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1443–1446, May 1982.
- [6] R. G. Chambers. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, 5:3–5, Jul 1960.
- [7] Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano, and Hiroji Yamada. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Phys. Rev. Lett.*, 56:792–795, Feb 1986.
- [8] Jörg Schelter, Patrik Recher, and Björn Trauzettel. The aharonov–bohm effect in graphene rings. *Solid State Communications*, 152(15):1411–1419, 2012.
- [9] Timothy H Boyer. Semiclassical explanation of the matteucci–pozzi and aharonov–bohm phase shifts. *Foundations of Physics*, 32(1):41–49, 2002.
- [10] G Spavieri and G Cavalleri. Interpretation of the aharonov-bohm and the aharonov-casher effects in terms of classical electromagnetic fields. *Europhysics Letters (EPL)*, 18(4):301–306, feb 1992.
- [11] Lev Vaidman. Role of potentials in the aharonov-bohm effect. *Phys. Rev. A*, 86:040101, Oct 2012.
- [12] Timothy H Boyer. Does the aharonov–bohm effect exist? *Foundations of Physics*, 30(6):893–905, 2000.

- 
- [13] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson international edition. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [14] Michael Victor Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 392(1802):45–57, 1984.
- [15] J.J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Jim Smith, 2 edition, 2011.
- [16] Bjørn Felsager. *Geometry, particles, and fields*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] H Fearn. The aharonov-bohm effect revisited. *Quantum and Semiclassical Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, 7(3):205–209, jun 1995.
- [18] Timothy H Boyer. Classical electromagnetic interaction of a point charge and a magnetic moment: considerations related to the aharonov–bohm phase shift. *Foundations of Physics*, 32(1):1–39, 2002.
- [19] Donald H Kobe. Aharonov-bohm effect revisited. *Annals of physics*, 123(2):381–410, 1979.
- [20] D E Dugdale. A bound state model of the electric aharonov-bohm effect. *European Journal of Physics*, 15(2):65–70, mar 1994.
- [21] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 3 edition, 1998.
- [22] George Arfken and Hans Hermann Weber. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Elsevier, 2007.