

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**Análise do desempenho de gráficos de controle
com regras suplementares de decisão**

Bruna Stéfany Costa

Itajubá, dezembro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Bruna Stéfany Costa

Análise do desempenho de gráficos de controle
com regras suplementares de decisão

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Ciências em Engenharia de Produção.

Área de Concentração: Modelagem, otimização e controle.

Orientador: Antônio Fernando Branco Costa, Dr.

Itajubá, dezembro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Bruna Stéfany Costa

Análise do desempenho de gráficos de controle
com regras suplementares de decisão

Tese aprovada por banca examinadora em 20 de outubro de 2023, conferindo à autora o título de Doutora em Ciências em Engenharia de Produção.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Fernando Branco Costa, Dr. (Orientador)

Prof. Carlos Henrique Pereira Mello, Dr. (UNIFEI)

Prof. Pedro Paulo Balestrassi, Dr. (UNIFEI)

Prof. Roberto da Costa Quinino, Dr. (UFMG)

Prof. Rogério Santana Peruchi, Dr. (UFPB)

Itajubá, dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me sustentar dia a dia.

Aos meus pais, Paulo e Maria, pelo apoio e carinho constantes.

Aos meus amigos e familiares, por ansiarem pelo meu sucesso.

Ao meu orientador, Prof. Branco, pela paciência e pelos ensinamentos.

À Helibras e aos meus gestores, pelo suporte.

Ao corpo docente e discente da Pós-Graduação, pela agregação de conhecimento.

Aos meus colegas da disciplina de Processos Estocástico, pelo entusiasmo e pontapé inicial.

À UNIFEI.

RESUMO

Os objetivos mais importantes das empresas industriais e não industriais se referem a custo, tempo e qualidade. Por um lado, os gráficos de controle representam uma importante ferramenta de qualidade, mostrando se o processo está em controle ou fora de controle. Por outro lado, as cadeias de Markov podem ser usadas em conjunto com os gráficos de controle, modelando o processo em análise. Desta maneira, a presente pesquisa possui o objetivo de analisar o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão por meio da comparação do número médio de amostras até o sinal. Para tal, o processo da literatura sob investigação foi analisado e modelado através de uma cadeia de Markov. Na sequência, o número médio de amostras até o sinal foi calculado para cenários distintos. Os gráficos de controle analisados se referem a um gráfico de índice de capacidade com regra suplementar de decisão, um gráfico de \bar{X} com regra suplementar de decisão e um gráfico de \bar{X} com regra básica de decisão. Os resultados obtidos permitiram a condução de duas análises distintas. A primeira análise mostrou que, em se tratando de deslocamentos da média, a complexidade de cálculo advinda da introdução do índice de capacidade nem sempre produz os melhores resultados. A segunda análise mostrou que, em se tratando de deslocamentos da média, a complexidade de cálculo advinda da introdução da regra suplementar de decisão em geral produz os melhores resultados. Em alguns casos o gráfico de índice de capacidade com regra suplementar de decisão foi o gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados e em outros casos o gráfico de \bar{X} com regra suplementar de decisão foi o gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados. Por fim, os resultados reafirmaram que o gráfico de controle de \bar{X} não apresenta bom desempenho em se tratando de pequenos deslocamentos na média.

Palavras-chave: Gráficos de controle, Cadeias de Markov, Regras suplementares de decisão.

ABSTRACT

The most important objectives of industrial and non-industrial companies are related to cost, time and quality. On the one hand, the control charts represents an important quality tool, showing if the process is in control or out of control. On the other hand, the Markov chains can be used with the control charts, modeling the process under analysis. Thus, this research aims to analyze the performance of control charts with supplementary signaling rules through the comparison of the average run length. To do so, the process of literature under investigation was analyzed and modeled through a Markov chain. Following that, the average run length was calculated for distinct scenarios. The control charts under analysis refer to a capability index chart with supplementary signaling rule, a \bar{X} chart with supplementary signaling rule and a \bar{X} chart with basic signaling rule. The results obtained allowed the conduction of two distinct analysis. The first analysis demonstrated that, when it comes to mean shifts, the calculation complexity resulted from the introduction of the capability index does not always generate the best results. The second analysis demonstrated that, when it comes to mean shifts, the calculation complexity resulted from the introduction of the supplementary signaling rule does in general generate the best results. In some cases the capability index chart with supplementary signaling rule was the chart with the best performance among the three under analysis and in other cases the \bar{X} chart with supplementary signaling rule was the chart with the best performance among the three under analysis. Finally, the results reassured that the \bar{X} control chart does not display good performance when it comes to small mean shifts.

Key words: *Control charts, Markov chains, Supplementary signaling rules.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de um processo	21
Figura 2 - Causas aleatórias e atribuíveis de variação.....	23
Figura 3 - Representação de um gráfico de controle	24
Figura 4 - Melhoria de processo usando gráfico de controle	26
Figura 5 - Escolha do gráfico de controle baseada no tipo de dado	29
Figura 6 - Zonas na distribuição normal.....	31
Figura 7 - Cadeia de Markov para o exemplo do clima	39
Figura 8 - Classificação da pesquisa	51
Figura 9 - Limites de controle internos e externos do artigo.....	55
Figura 10 - Regiões e limites de controle do artigo.....	57
Figura 11 - Cadeia de Markov do artigo.....	58
Figura 12 - Estados da cadeia de Markov do artigo	59
Figura 13 - Representação do estado 1 da cadeia de Markov do artigo	60
Figura 14 - Representação do estado 3 da cadeia de Markov do artigo	61
Figura 15 - Representação do estado 4 da cadeia de Markov do artigo	61
Figura 16 - Representação do estado 5 da cadeia de Markov do artigo	62
Figura 17 - Primeira representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo.....	63
Figura 18 - Segunda representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo.....	63
Figura 19 - Terceira representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo	64
Figura 20 - Quarta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo.....	64
Figura 21 - Representação do estado 2 da cadeia de Markov do artigo	65
Figura 22 - Quinta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo.....	66
Figura 23 - Sexta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo.....	66
Figura 24 - Sétima representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo	67
Figura 25 - Matriz \mathbf{P} do artigo.....	71
Figura 26 - Dados de entrada do Solver para o artigo	72
Figura 27 - Dados de saída do Solver para o artigo.....	72
Figura 28 - Matriz $\mathbf{I} - \mathbf{Q} - \mathbf{1}$ do artigo.....	73
Figura 29 - $\mathbf{NMA0}$ do artigo	74
Figura 30 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $\mathbf{m} = \mathbf{h} = \mathbf{3}$	86
Figura 31 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $\mathbf{m} = \mathbf{3}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{2}$	87
Figura 32 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $\mathbf{m} = \mathbf{h} = \mathbf{4}$	87
Figura 33 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $\mathbf{m} = \mathbf{4}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{3}$	88
Figura 34 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $\mathbf{m} = \mathbf{4}$ e $\mathbf{h} = \mathbf{2}$	88
Figura 35 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{1}$	91
Figura 36 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{2}$	92
Figura 37 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{3}$	93
Figura 38 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{4}$	94
Figura 39 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{5}$	95
Figura 40 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{6}$	96
Figura 41 - NMA dos gráficos de controle de \mathbf{X} EDMG e \mathbf{X} para $\mathbf{n} = \mathbf{7}$	97

Figura 42 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e X para $n = 8$	98
Figura 43 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e X para $n = 9$	99
Figura 44 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e X para $n = 10$	100
Figura 45 - Gráfico Cpk EDMG para o exemplo real.....	103
Figura 46 - Gráfico X EDMG para o exemplo real	103
Figura 47 - Primeiro passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver	111
Figura 48 - Segundo passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver	111
Figura 49 - Terceiro passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver	112
Figura 50 - Quarto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver...	112
Figura 51 - Quinto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver visão planilha	113
Figura 52 - Quinto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver visão Solver.....	113
Figura 53 - Sexto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver.....	114

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estados para $m = h = 3$	59
Tabela 2 - Estados para $m = 3$ e $h = 2$	67
Tabela 3 - Estados para $m = h = 4$	68
Tabela 4 - Estados para $m = 4$ e $h = 3$	68
Tabela 5 - Estados para $m = 4$ e $h = 2$	69
Tabela 6 - NMA para $n = 5$ e $m = h = 3$	75
Tabela 7 - NMA para $n = 5$ e $m = 3$ e $h = 2$	76
Tabela 8 - NMA para $n = 5$ e $m = h = 4$	77
Tabela 9 - NMA para $n = 5$ e $m = 4$ e $h = 3$	78
Tabela 10 - NMA para $n = 5$ e $m = 4$ e $h = 2$	79
Tabela 11 - NMA para $n = 10$ e $m = h = 3$	81
Tabela 12 - NMA para $n = 10$ e $m = 3$ e $h = 2$	82
Tabela 13 - NMA para $n = 10$ e $m = h = 4$	83
Tabela 14 - NMA para $n = 10$ e $m = 4$ e $h = 3$	84
Tabela 15 - NMA para $n = 10$ e $m = 4$ e $h = 2$	85
Tabela 16 - Melhora do desempenho do gráfico de X com inclusão do EDMG para $n = 5$..	90
Tabela 17 - Melhora do desempenho do gráfico de X com inclusão do EDMG para $n = 10$	90
Tabela 18 - Valores de X , \bar{X} e Cpk para o exemplo real	102

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A	Região de ação
C	Região de controle
CEP	Controle estatístico de processo
CUSUM	Gráfico de controle das somas acumuladas
EDM	Estado dependente múltiplo
EDMG	Estado dependente múltiplo generalizado
EWMA	Gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente
GRG	Gradiente Reduzido Generalizado
LIC	Limite inferior de controle
LSC	Limite superior de controle
NMA	Número médio de amostras até o sinal
W	Região de advertência

LISTA DE SÍMBOLOS

C_{pk}	Índice de capacidade
δ	Deslocamento da média expresso em unidade de desvio padrão
f_{ii}	Probabilidade do processo retornar ao estado i dado que o processo partiu deste estado
I	Matriz identidade
k_1	Parâmetro de abertura externo
k_2	Parâmetro de abertura interno
LIC_1	Limite inferior de controle externo
LIC_2	Limite inferior de controle interno
LSC_1	Limite superior de controle externo
LSC_2	Limite superior de controle interno
μ	Média
MS	Estatística de monitoramento do gráfico de controle
m e h	Caso o ponto da estatística de monitoramento atual caia nas regiões de advertência, o estado do processo é decidido pelos m pontos anteriores. Caso menos que h pontos tenham caído na região de controle, o processo é declarado fora de controle. Caso contrário, o processo é declarado em controle.
n	Tamanho da amostra
NMA_0	NMA para processo em controle
NMA_1	NMA para processo fora de controle
p	Probabilidade que qualquer ponto exceda os limites de controle
P	Matriz das probabilidades de transição
p_{ij}	Probabilidade de transição do estado i para o estado j em 1 passo
$p_{ij}(n)$	Probabilidade de transição do estado i para o estado j em n passos
$p_{ij}(u, t)$	Probabilidade de transição do estado i para o estado j na qual u e t são instantes de tempo
$p(0), S, \pi$	Vetor da distribuição inicial de probabilidades de estados
Q	Matriz das probabilidades de transição sem os elementos associados ao estado absorvente
σ	Desvio padrão

σ^2	Variância
\bar{X}	X-barra
X_t	Característica de interesse mensurável em um instante de tempo t
X_u	Característica de interesse mensurável em um instante de tempo u
$\{X_t\}$ e $\{X_u\}$	Processos estocásticos

“Porque eu, o Senhor, teu Deus, te tomo pela tua mão direita e te digo:

Não temas, que eu te ajudo.”

Isaiás 41.13

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
1.1. Contexto e Justificativas	16
1.2. Objetivo e Hipóteses de Pesquisa	17
1.3. Delimitações	18
1.4. Estrutura do Trabalho	19
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1. Gráficos de Controle	20
2.1.1. Qualidade	20
2.1.2. Controle Estatístico de Processo	20
2.1.3. Controle Estatístico de Processo e Variação	22
2.1.4. Gráficos de Controle	24
2.1.5. Fases de Aplicação dos Gráficos de Controle	27
2.1.6. Classificação dos Gráficos de Controle	28
2.1.7. Regras de Sinalização	30
2.1.8. Número Médio de Amostras até o Sinal	31
2.2. Cadeias de Markov	33
2.2.1. Processo Estocástico e Processo de Markov	33
2.2.2. Categorias de Processos de Markov	34
2.2.3. Processos de Markov de Tempo Discreto	34
2.2.4. Matriz de Transição de Probabilidades	35
2.2.5. Cadeias de Markov	36
2.2.6. Classificação das Cadeias de Markov	37
2.2.7. Exemplo Envolvendo o Clima como uma Cadeia de Markov	37
2.2.8. Processos de Markov de Tempo Contínuo	40
2.3. Gráficos de Controle e Cadeias de Markov	41
3. MÉTODO DE PESQUISA	50
3.1. Classificação da Pesquisa	50
3.2. Condução da Pesquisa	51
4. RESULTADOS	54
4.1. Selecionar o artigo	54
4.2. Desenhar a cadeia de Markov	58

4.3.	Definir os estados da cadeia de Markov	59
4.4.	Definir os parâmetros da cadeia de Markov	69
4.5.	Construir a matriz P	70
4.6.	Calcular o vetor de probabilidades iniciais.....	71
4.7.	Construir a matriz $I - Q - \mathbf{1}$	73
4.8.	Calcular o NMA regras suplementares e regra básica	74
4.9.	Comparar o NMA regras suplementares e regra básica.....	75
4.10.	Aplicação em exemplo real	101
5.	CONCLUSÕES.....	104
5.1.	Considerações Finais	104
5.2.	Contribuições do Trabalho.....	105
5.3.	Sugestões para Trabalhos Futuros	105
6.	REFERÊNCIAS	106
7.	APÊNDICE	111

1. INTRODUÇÃO

1.1.Contexto e Justificativas

Os objetivos mais importantes das empresas industriais e não industriais se referem a custo, tempo e qualidade. As estratégias adotadas possuem um importante papel na competitividade dos negócios, uma vez que conectam os indicadores de desempenho aos objetivos corporativos (Lotfi *et al.*, 2022; Muller *et al.*, 2013; Okoshi *et al.*, 2019).

Neste contexto, o monitoramento de processos possui fundamental importância, pois fornece informações necessárias para a tomada de decisão capaz de melhorar processos e desempenhos. A identificação da trajetória, dos impactos, das falhas e dos desdobramentos cria uma base sólida para o processo de tomada de decisão (Montgomery, 2016; Premarathna *et al.*, 2016; Young *et al.*, 2019).

Para tal, o controle estatístico de processo (CEP) representa uma importante ferramenta de qualidade usada na prevenção e na detecção de defeitos e de problemas nos processos analisados. O CEP objetiva monitorar um produto ou um serviço durante o processo de produção, identificando as saídas não conformes, para posterior eliminação da causa raiz e estabilização do processo, prevenindo futuras variações (Montgomery, 2016; Oprime e Mendes, 2017; Reynolds *et al.*, 2021).

Uma das ferramentas mais usadas no CEP se refere aos gráficos de controle. Estes gráficos são considerados gráficos de tendência que mostram como certo indicador varia no tempo, com limites de controle. Estes limites de controle permitem a visualização da variabilidade natural do processo. Assim, o gráfico de controle mostra se o processo está em controle ou se existe algo anormal, que precisará ser estudado e tratado (Băncescu, 2016; Flegner *et al.*, 2020; Montgomery, 2016).

Existem inúmeras pesquisas recentes sobre o uso dos gráficos de controle, mostrando sua relevância e aplicabilidade nos mais diversos contextos. Originalmente os gráficos de controle foram aplicados no ambiente industrial voltado para o produto. Entretanto, os princípios são

gerais e atualmente os gráficos de controle são usados em outros ambientes, como o não industrial e os serviços (Fontalvo-Herrera *et al.*, 2022).

Em complemento, as cadeias de Markov podem ser usadas em conjunto com os gráficos de controle, modelando o processo em análise. Assim, as cadeias de Markov permitem a definição dos estados do processo bem como o cálculo das probabilidades iniciais e de transição de cada estado, informações úteis na análise de desempenho dos gráficos de controle (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

Várias regras de decisão podem ser usadas simultaneamente em um gráfico de controle para determinar se um processo está em controle ou fora de controle. A regra básica de decisão para a detecção de padrões não aleatórios se refere a um ou mais pontos fora dos limites de controle (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016).

Em adição, as regras suplementares de decisão podem ser usadas com o propósito de aumentar a sensibilidade dos gráficos de controle para pequenas alterações no processo de maneira que seja possível responder mais rapidamente às variações de causas especiais. Conseqüentemente, o uso de regras suplementares de decisão pode permitir que pequenas alterações no processo sejam detectadas mais rapidamente que o critério usual de violação dos limites de controle de 3 *Sigma* (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016).

Sendo assim, é preciso estar atento ao desempenho dos gráficos de controle pois, além de deixar a análise mais complicada, o uso de regras suplementares de decisão pode gerar muitos alarmes falsos. O número médio de amostras até o sinal (NMA) é um dos indicadores mais usados na comparação do desempenho dos gráficos de controle (Balamurali e Jeyadurga, 2019; Montgomery, 2016; Sunthornwat *et al.*, 2017).

1.2. Objetivo e Hipóteses de Pesquisa

Portanto, o objetivo geral da presente pesquisa é analisar o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão. A primeira análise decorre da comparação de um gráfico de controle com regra suplementar de decisão que altera a métrica de \bar{X} por um índice de capacidade e um gráfico de controle com regra suplementar de decisão que mantém a métrica de \bar{X} . Já a segunda análise decorre da comparação de dois gráficos de controle com

regras suplementares de decisão (que usam as métricas de índice de capacidade e de \bar{X}) e um gráfico de controle com regra básica de decisão que usa a métrica de \bar{X} .

Desta maneira, a primeira análise permite entender se a substituição da métrica de \bar{X} pelo índice de capacidade melhora o desempenho do gráfico de controle. Ou seja, se a complexidade adicionada ao modelo pela introdução do índice de capacidade é vantajosa. A segunda análise permite entender se o uso da regra suplementar de decisão melhora o desempenho do gráfico de controle. Ou seja, se a complexidade adicionada ao modelo pela introdução da regra suplementar de decisão é vantajosa. Neste propósito, o desempenho dos gráficos de controle será mensurado através do NMA.

Este objetivo geral está diretamente relacionado com as hipóteses de pesquisa:

$H0_1$ - a substituição da métrica de \bar{X} pelo índice de capacidade melhora o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão.

$H0_2$ - a implementação de regras suplementares de decisão melhora o desempenho de gráficos de controle.

Em complemento, os objetivos específicos são:

- Apresentar o uso das regras suplementares de decisão nos gráficos de controle;
- Apresentar o uso das cadeias de Markov na modelagem de processos;
- Apresentar as etapas do cálculo do NMA.

1.3.Delimitações

A presente pesquisa possui as seguintes delimitações:

- A modelagem de processos pelas cadeias de Markov faz uso de um modelo estacionário, simples e específico, que considera o processo constante até o instante em que ocorre uma perturbação, gerando um “salto”;
- Os resultados obtidos pelo processo modelado são resultados teóricos;

- O desempenho dos gráficos de controle é medido através de 1 única métrica, o NMA.

1.4.Estrutura do Trabalho

A presente pesquisa está dividida em 5 capítulos. O capítulo 1 apresenta a introdução, abordando o contexto e as justificativas, o objetivo e as hipóteses de pesquisa e as delimitações. O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, com os principais conceitos ligados a (1) gráficos de controle e (2) cadeias de Markov. O capítulo 3 apresenta o método de pesquisa, a saber, modelagem e simulação. O capítulo 4 apresenta os resultados, com posterior aceitação ou rejeição das hipóteses de pesquisa. Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões, com as considerações finais e as contribuições do trabalho, atestando que o uso de regras suplementares de decisão leva a desempenhos superiores dos gráficos de controle.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Gráficos de Controle

2.1.1. Qualidade

A qualidade se tornou um dos fatores de decisão mais importantes para os consumidores na seleção de produtos e serviços. Conseqüentemente, entender e melhorar a qualidade são fatores fundamentais para empresas que almejam atingir níveis superiores de sucesso, crescimento e competitividade. Existe um substancial retorno sobre o investimento derivado da melhoria da qualidade e do emprego da qualidade como parte da estratégia global da empresa (Montgomery, 2016).

A definição tradicional de qualidade se baseia na premissa de que produtos e serviços devem atender as exigências dos usuários, ou seja, qualidade significa adequação ao uso. Uma definição moderna apresenta qualidade como inversamente proporcional à variabilidade. Portanto, a melhoria da qualidade se refere à redução da variabilidade de processos e produtos. Como variabilidade excessiva geralmente resulta em desperdício, a melhoria da qualidade também pode ser descrita como a redução de desperdício. Esta definição é suficientemente flexível para a aplicação efetiva tanto na indústria manufatureira quanto na indústria de serviço (Montgomery, 2016).

2.1.2. Controle Estatístico de Processo

Os processos podem ser definidos como sistemas com um conjunto de variáveis de entrada e um conjunto de variáveis de saída. A figura 01 demonstra um processo, que possui variáveis de entrada controláveis (descritas como x_1 , x_2 e x_p) e variáveis de entrada incontroláveis ou difíceis de controlar (descritas como z_1 , z_2 e z_p). O processo transforma as entradas (como matéria-prima, componentes, submontagens ou informação) em saídas (produtos ou serviços) que possuem várias características de qualidade. A variável de saída y representa uma característica de qualidade, ou seja, uma medida da qualidade do produto ou do processo (Montgomery, 2016).

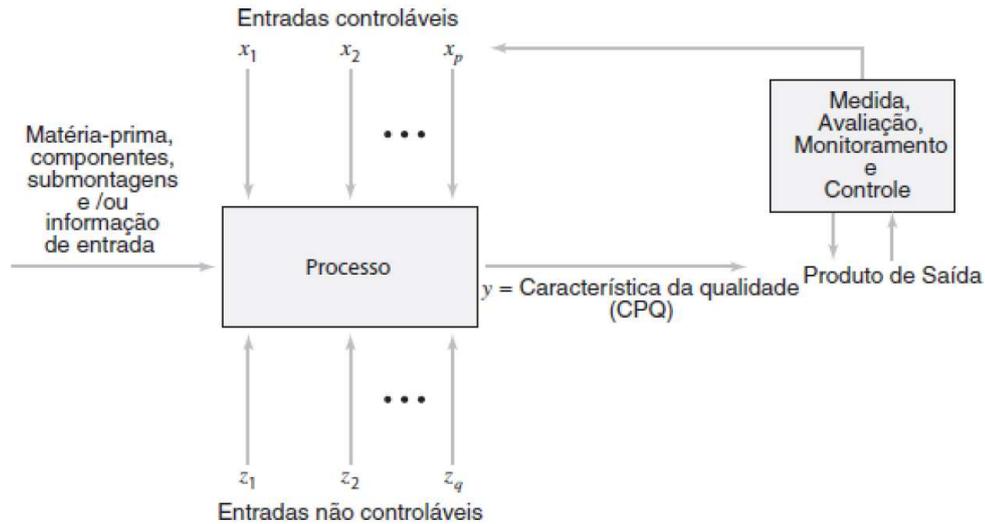


Figura 1 - Representação de um processo

Fonte: Montgomery (2016)

Produtos e serviços que atendem ou excedem as expectativas dos consumidores geralmente resultam de processos capazes de operar com pouca variabilidade. Assim, o controle estatístico de processo (CEP) representa uma coleção poderosa de ferramentas de resolução de problemas úteis no alcance da estabilidade dos processos e na melhoria da capacidade através da redução da variabilidade (Oprime e Mendes, 2017; Reynolds *et al.*, 2021).

Neste contexto, controle se refere a um fenômeno cujo comportamento futuro pode ser predito, dentro de determinados limites, por meio da experiência passada. Sendo assim, esta predição implica que é possível estabelecer a probabilidade do fenômeno observado cair dentro dos limites considerados (Shewhart, 1931).

As 7 principais ferramentas do CEP são (Montgomery, 2016):

1. Histograma ou diagrama de ramo-e-folhas;
2. Folha de controle;
3. Gráfico de Pareto;
4. Diagrama de causa-e-efeito;
5. Diagrama de concentração de defeito;
6. Diagrama de dispersão;
7. Gráfico de controle.

Os elementos de um programa de CEP bem-sucedido são: (1) liderança gerencial, (2) abordagem de equipe, com foco em aplicações orientadas pelo projeto, (3) educação dos empregados em todos os níveis, (4) ênfase na redução da variabilidade, (5) avaliação do sucesso em termos quantitativos e econômicos, (6) um mecanismo para comunicar os resultados de sucesso por toda a empresa (Montgomery, 2016).

2.1.3. Controle Estatístico de Processo e Variação

As teorias que sustentam o CEP foram desenvolvidas no final da década de 1920 pelo Dr. Walter Andrew Shewhart enquanto trabalhava na *Western Electric and Bell Laboratories*. Posteriormente, estas teorias foram internacionalmente popularizadas por William Edwards Deming (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016).

O CEP permite entender as variações nos dados medidos ao longo do tempo. De maneira geral, todos os processos medidos ao longo do tempo irão variar, e entender esta variação é crucial tanto para entender o processo quanto para avaliar os esforços de melhoria. Ademais, embora todos os processos sofram variação, se um processo se encontra estável, a variação é previsível e pode ser descrita por uma distribuição estatística conhecida (Premarathna *et al.*, 2016; Young *et al.*, 2019).

Esta variabilidade inerente ou natural dos processos reflete o efeito cumulativo de muitas causas pequenas, essencialmente inevitáveis. No CEP, esta variabilidade natural é chamada de variação de causas aleatórias. Um processo de opera apenas com variação de causa aleatória é dito processo em controle (Costa *et al.*, 2008; Lei e Mackenzie, 2020; Montgomery, 2016; Williams, 2018).

Por outro lado, outros tipos de variabilidade podem estar presentes no processo ocasionalmente. Esta variabilidade normalmente resulta de 3 fontes: (1) máquinas indevidamente ajustadas ou controladas, (2) erros de operação, (3) matérias-primas defeituosas. Esta variabilidade é grande em comparação com a variabilidade natural e geralmente representa um nível inaceitável de desempenho do processo. No CEP, estas fontes de variabilidade são chamadas de variação de causas atribuíveis. Um processo de opera com variação de causa atribuível é dito processo fora de controle (Costa *et al.*, 2008; Lei e Mackenzie, 2020; Montgomery, 2016; Williams, 2018).

A figura 02 mostra estas causas de variabilidade. Até o momento t_1 , o processo está em controle, apresentando apenas variação de causas aleatórias. Como consequência, média e desvio padrão estão em seus valores de controle, por exemplo, μ_0 e σ_0 . No momento t_1 acontece uma causa atribuível, gerando uma deslocação da média do processo para um novo valor $\mu_1 > \mu_0$ (alteração na média). No momento t_2 acontece outra causa atribuível, gerando uma deslocação do desvio padrão do processo para um novo valor $\sigma_1 > \sigma_0$ (alteração no desvio padrão). No momento t_3 acontece outra causa atribuível, agora gerando deslocação tanto da média quanto do desvio padrão do processo (alteração na média e no desvio padrão). Assim, a partir do momento t_1 o processo está fora de controle, pois apresenta causas atribuíveis de variação (Montgomery, 2016).

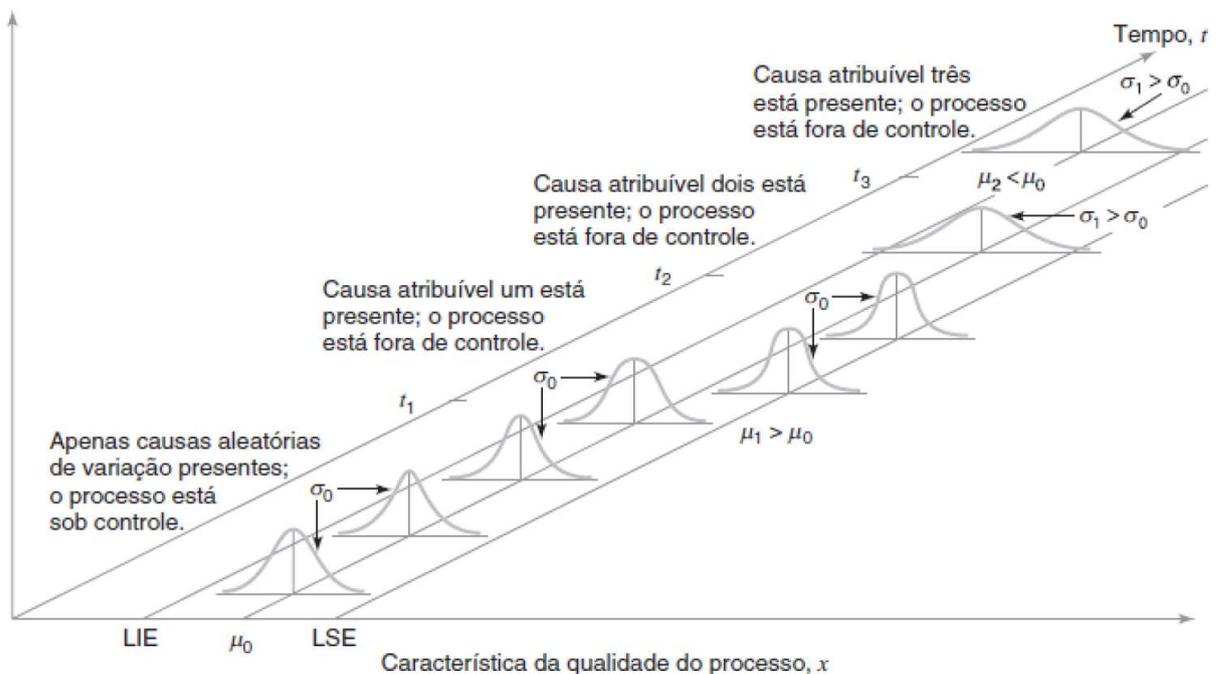


Figura 2 - Causas aleatórias e atribuíveis de variação

Fonte: Montgomery (2016)

Portanto, um dos principais objetivos do controle estatístico de processo é rapidamente detectar a presença de variação de causas especiais de maneira que o processo seja investigado e as ações corretivas sejam tomadas antes que muitas unidades não conformes sejam produzidas. O gráfico de controle é uma ferramenta amplamente usada para este propósito (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016).

2.1.4. Gráficos de Controle

A figura 03 apresenta um típico gráfico de controle. Ele é uma exibição gráfica de uma característica de qualidade que foi medida ou computada de uma amostra *versus* o número da amostra ou o tempo. O gráfico contém uma linha central que representa o valor médio da característica de qualidade correspondente ao processo em controle. As outras duas linhas horizontais são o limite superior de controle (LSC) e o limite inferior de controle (LIC). Eles são escolhidos de maneira que, se o processo está em controle, quase todos os pontos das amostras cairão entre eles. Sendo assim, LSC e LIC representam o intervalo aceitável de variação para a característica de qualidade, indicando o que é processo estável e o que é processo instável (Băncescu, 2016; Flegner *et al.*, 2020).

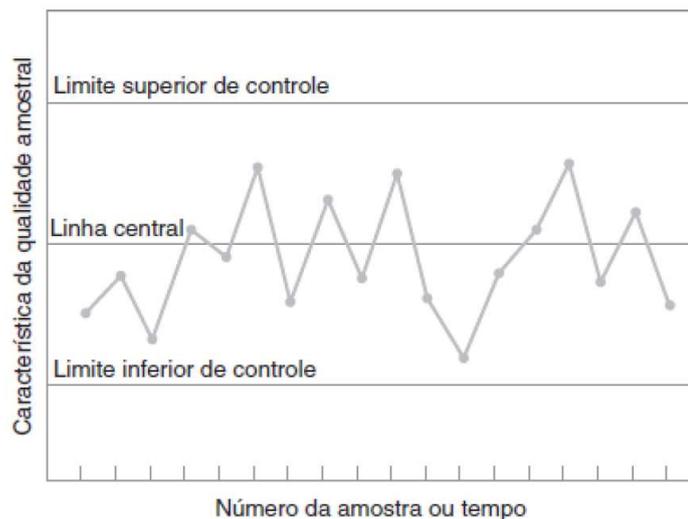


Figura 3 - Representação de um gráfico de controle

Fonte: Montgomery (2016)

A distância entre a linha central e os limites de controle é geralmente escolhida como sendo igual a 3 *Sigma* do desvio padrão da característica de qualidade para os dois lados. Como consequência, a probabilidade de que os valores estejam dentro dos limites é de aproximadamente 99,73% (regra dos 3 *Sigma*) (Băncescu, 2016; Flegner *et al.*, 2020).

Os limites de controle são escolhidos de maneira que, se o processo está em controle, praticamente todos os pontos da amostra cairão neste intervalo. Neste caso, nenhuma ação é necessária. Entretanto, um ponto caindo além dos limites de controle é interpretado como

evidência de que o processo está fora de controle, sendo necessárias investigação e ação corretiva para encontrar e eliminar as causas (Băncescu, 2016; Flegner *et al.*, 2020).

A equação 01 mostra o modelo geral de um gráfico de controle no qual w é uma estatística da amostra que mede alguma característica de qualidade de interesse (Montgomery, 2016).

$$\begin{aligned}LSC &= \mu_w + L\sigma_w \\ \text{Linha central} &= \mu_w \\ LIC &= \mu_w - L\sigma_w\end{aligned}\tag{01}$$

Na qual:

- μ_w é a média de w ;
- σ_w é o desvio padrão de w ;
- L é a distância entre os limites de controle e a linha central, expressa em unidades do desvio padrão.

Esta teoria geral dos gráficos de controle foi inicialmente proposta por Walter A. Shewhart e os gráficos desenvolvidos de acordo com estes princípios são geralmente chamados de gráficos de controle de Shewhart (Montgomery, 2016; Shewhart, 1931).

A atividade de melhoria do processo usando gráficos de controle é detalhada na figura 04. Importante mencionar que os gráficos de controle detectam apenas variação de causas atribuíveis. Posteriormente, operadores, engenheiros e gestores deverão tomar as ações necessárias para eliminá-las. As causas raiz devem ser encontradas e tratadas, de forma que as soluções sejam reais e duradouras. O desenvolvimento de um sistema efetivo para ações corretivas é componente essencial de uma efetiva implementação do controle estatístico de processo (Montgomery, 2016).

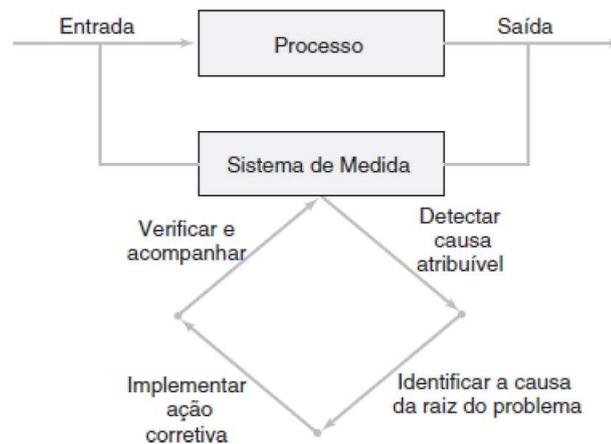


Figura 4 - Melhoria de processo usando gráfico de controle

Fonte: Montgomery (2016)

Em muitas aplicações, os gráficos de controle são usados para vigilância do processo em controle. Contudo, o uso mais importante de um gráfico de controle é para melhoria do processo. Isto porque, de maneira geral, a maioria dos processos não opera em um estado de controle estatístico e o uso rotineiro e atencioso de gráficos de controle permitirá a identificação de causas especiais de variação. Uma vez eliminadas, a variabilidade será reduzida e o processo será melhorado (Montgomery, 2016).

A popularidade do uso dos gráficos de controle baseia-se em 5 razões básicas (Montgomery, 2016):

1. **Os gráficos de controle melhoram a produtividade:** um programa bem-sucedido de gráfico de controle é capaz de reduzir a sucata e o retrabalho, conseqüentemente aumentando a produtividade, reduzindo o custo e ampliando a capacidade de produção (medida em número de peças boas por hora);
2. **Os gráficos de controle previnem os defeitos:** eles eficazmente ajudam a manter o processo em controle, dentro da filosofia de “faça certo da primeira vez”;
3. **Os gráficos de controle evitam ajustes desnecessários do processo:** eles são capazes de segregar um ruído de fundo e uma variação anormal, prevenindo reações e ajustes desnecessários ao ruído de fundo que deterioram o desempenho do processo, dentro da filosofia de “se não está quebrado, não conserte”;

4. **Os gráficos de controle apresentam informações de diagnóstico:** o padrão dos pontos em um gráfico de controle é capaz de exibir informações de valor para diagnóstico para operadores ou engenheiros, permitindo a implementação de mudanças no processo a fim de melhorar seu desempenho;
5. **Os gráficos de controle apresentam informações de capacidade do processo:** eles exibem informações sobre o valor de inúmeros parâmetros importantes do processo, bem como sua estabilidade ao longo do tempo, permitindo que a capacidade do processo seja estimada e usada pelos planejadores do produto e do processo.

2.1.5. Fases de Aplicação dos Gráficos de Controle

O monitoramento de processos envolve duas fases. Na fase I, o analista coleta uma amostra de um dado ordenado no tempo do processo de interesse. Esta fase I possui o objetivo de entender o processo. Portanto, o analista deve verificar resultados incomuns e surpreendentes (Vicentin *et al.*, 2018; Woodall e Montgomery, 2014).

Nesta fase, os limites de controle são determinados pelos dados do processo e os gráficos de controle são estabelecidos usando parâmetros estatísticos estimados. Sendo assim, esta fase permite: (1) entender a variação do processo ao longo do tempo, (2) avaliar a estabilidade do processo, (3) modelar o desempenho do processo em controle (Vicentin *et al.*, 2018; Woodall e Montgomery, 2014).

Na sequência, o método de monitoramento é implementado com dados coletados sucessivamente ao longo do tempo na fase II, com o intuito de detectar mudanças no processo do modelo considerado em controle. O monitoramento constante da variabilidade do processo usando gráficos de controle é capaz de assegurar altos níveis de qualidade e baixos níveis de itens não conformes (Vicentin *et al.*, 2018; Woodall e Montgomery, 2014).

Normalmente, os gráficos de controle são bastante eficazes na fase I, uma vez que são de fácil construção e interpretação e têm significado físico direto, além de serem eficazes na detecção de mudanças grandes, contínuas nos parâmetros do processo, valores atípicos, erros de medida, erros de registro e/ou transmissão de dados. Por outro lado, os gráficos de controle

são menos eficazes na fase II, uma vez que não são muito sensíveis a mudanças pequenas e moderadas no processo (Vicentin *et al.*, 2018; Woodall e Montgomery, 2014).

2.1.6. Classificação dos Gráficos de Controle

Os gráficos de controle podem ser classificados em dois tipos. Caso a característica de qualidade possa ser mensurada e expressa como um número em uma escala contínua de medida, ela é geralmente chamada de variável. Nestes casos, o conveniente é descrever a característica de qualidade com (1) uma medida de tendência central e (2) uma medida de variabilidade (Balamurali e Jeyadurga, 2019; Montgomery, 2016).

Os gráficos de controle para tendência central e variabilidade são coletivamente chamados de gráficos de controle por variáveis. O gráfico de \bar{X} é o gráfico mais usado para controlar a tendência central, ao passo que gráficos baseados na amplitude da amostra ou desvio padrão da amostra são usados para controlar a variabilidade do processo (Montgomery, 2016).

Por outro lado, muitas características de qualidade não podem ser medidas em uma escala contínua ou mesmo em uma escala quantitativa. Nestes casos, o conveniente é julgar cada unidade de produto como conforme ou não conforme dependendo se possui ou não possui certos atributos, ou mesmo contar o número de não conformidades (defeitos) presentes em uma unidade de produto (Balamurali e Jeyadurga, 2019; Montgomery, 2016).

Os gráficos de controle para tais características de qualidade são chamados de gráficos de controle por atributos. Para este tipo de gráfico de controle apenas um gráfico é necessário para entender o desempenho do processo ao longo do tempo. Os gráficos mais usados são o gráfico P, o gráfico C e o gráfico U (Montgomery, 2016).

A figura 05 mostra a escolha do gráfico de controle baseada no tipo de dado.

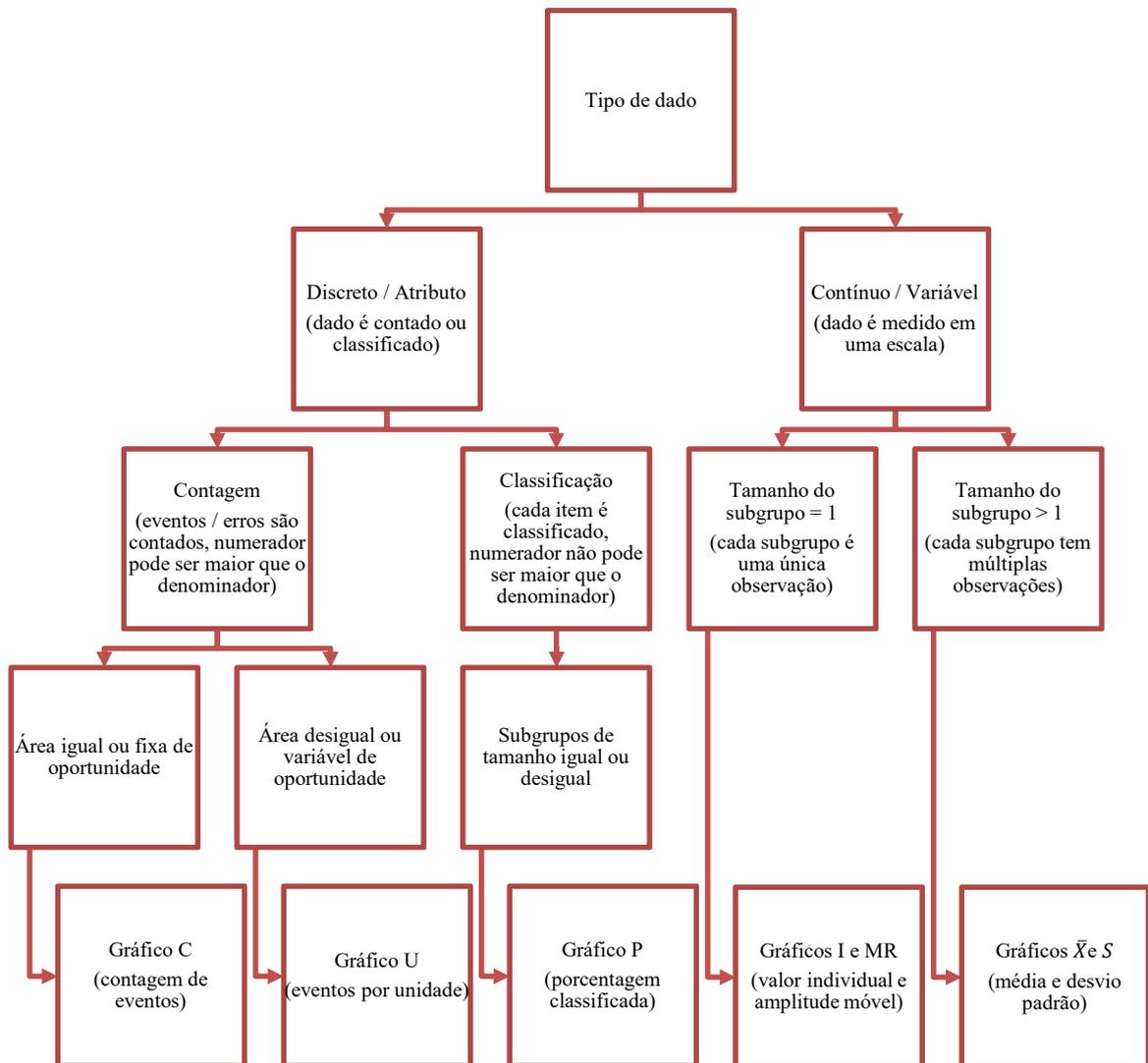


Figura 5 - Escolha do gráfico de controle baseada no tipo de dado

Fonte: adaptado de Gupta e Kaplan (2017)

Importante mencionar que, em muitas aplicações, o analista terá que escolher entre usar um gráfico de controle por variável ou usar um gráfico de controle por atributo. Em alguns casos a escolha será clara. Em outros casos a escolha não será óbvia e o analista deverá levar em consideração inúmeros fatores (Montgomery, 2016).

Os gráficos de controle por atributo possuem a vantagem que inúmeras características de qualidade podem ser consideradas conjuntamente e a unidade será classificada como não

conforme caso não atenda as especificações de uma destas características. Mensurações caras e demoradas muitas vezes podem ser evitadas por meio da inspeção por atributos (Montgomery, 2016).

Já os gráficos de controle por variáveis fornecem uma quantidade maior de informações úteis a respeito do desempenho do processo em comparação com os gráficos por atributo. Em complemento, a vantagem mais relevante dos gráficos de controle por variáveis é que eles geralmente fornecem um indicativo de um problema pendente e permitem à equipe tomar ações corretivas antes que uma unidade defeituosa seja produzida (Montgomery, 2016).

2.1.7. Regras de Sinalização

A identificação da variação de causa especial em um gráfico de controle se baseia no padrão dos dados em torno dos limites de controle. Inúmeras regras podem ser aplicadas simultaneamente a um gráfico de controle para determinar se um processo está fora de controle. A regra básica de decisão se refere a 1 ou mais pontos fora dos limites de controle. As regras suplementares de decisão ocasionalmente são usadas com o intuito de aumentar a sensibilidade dos gráficos de controle para pequenas alterações no processo de maneira que seja possível responder mais rapidamente às variações de causas especiais. Algumas das regras suplementares de decisão mais usadas são (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016):

1. 2 de 3 pontos consecutivos fora dos limites de alerta de 2 *Sigma* (marrom claro e marrom escuro na figura 06), mas ainda dentro dos limites de controle;
2. 4 de 5 pontos consecutivos além dos limites de 1 *Sigma* (marrom escuro na figura 06);
3. 8 pontos consecutivos de um mesmo lado da linha central;
4. 6 pontos consecutivos em uma sequência sempre crescente ou decrescente;
5. 15 pontos consecutivos na zona 1 *Sigma* (marrom escuro na figura 06) acima e abaixo da linha central;
6. 14 pontos consecutivos alternando para cima e para baixo;
7. 8 pontos consecutivos nos dois lados da linha central, mas nenhum na zona 1 *Sigma* (marrom escuro na figura 06) acima e abaixo da linha central;
8. Um padrão não usual ou não aleatório nos dados;
9. 1 ou mais pontos próximos a um limite de alerta ou de controle.

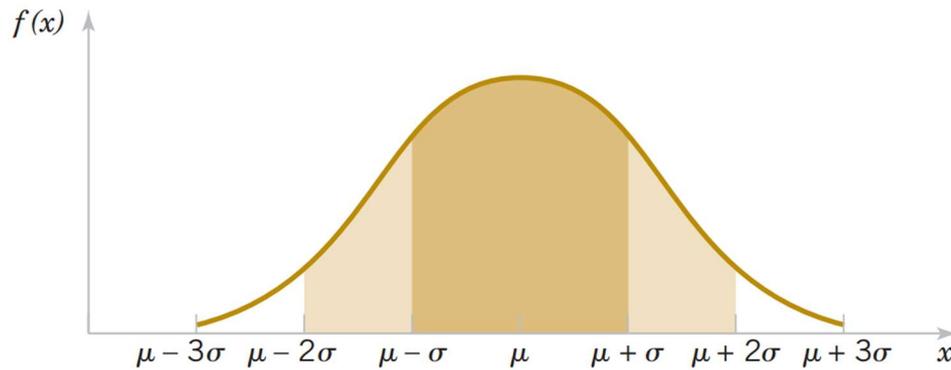


Figura 6 - Zonas na distribuição normal

Fonte: adaptado de UFSC (2023)

Embora a aplicação de regras suplementares de decisão para a detecção de causas especiais aumente o poder do gráfico de controle em detectar mudanças reais no processo, ela também aumenta a probabilidade de achar falso-positivo. Em linhas gerais, a escolha das regras de decisão deve ser feita levando-se em consideração a importância relativa de não detectar verdadeiros positivos *versus* detectar falsos positivos. Dada a gama de regras de decisão à disposição, quando se inicia uma iniciativa de melhoria é importante decidir no início qual conjunto de regras será usado na identificação de causas especiais de variação (Gupta e Kaplan, 2017; Montgomery, 2016).

2.1.8. Número Médio de Amostras até o Sinal

O desempenho dos gráficos de controle na fase II depende dos parâmetros estatísticos estimados e, conseqüentemente, dos limites de controle estabelecidos. Esta variação no desempenho dos gráficos de controle se torna cada vez menor à medida que mais dados são coletados e as estimativas se tornam mais acuradas (Goedhart *et al.*, 2020).

Neste sentido, o número médio de amostras até o sinal (NMA) é um dos indicadores mais usados na comparação da eficiência dos gráficos de controle. O NMA se refere ao número médio de pontos que será plotado antes de um ponto indicar uma condição fora de controle (Balamurali e Jeyadurga, 2019; Montgomery, 2016).

O NMA pode ser calculado pela equação 02, para todos os gráficos de controle de Shewhart, caso as observações do processo não sejam correlacionadas (Montgomery, 2016).

$$NMA = \frac{1}{p} \quad (02)$$

Sendo uma geométrica na qual p é a probabilidade que qualquer ponto exceda os limites de controle.

O NMA é aplicado em 2 estados (Montgomery, 2016):

- Processo em controle, chamado NMA_0 ;
- Processo fora de controle, chamado NMA_1 .

De maneira que, em um gráfico de controle eficiente, NMA_0 deve ser o maior valor possível ao passo que NMA_1 deve ser o menor valor possível (Sunthornwat *et al.*, 2017).

Para um gráfico de \bar{X} com limites de 3 *Sigma*, $p = 0,0027$ é a probabilidade que um único ponto caia fora dos limites quando o processo está em controle. Conseqüentemente, $NMA_0 = 1/0,0027 = 370,4$. Ou seja, mesmo o processo permanecendo em controle, um sinal de processo fora de controle será gerado a cada 370 amostras, em média. Em outras palavras, um alarme falso será gerado a cada 370 amostras, em média (Goedhart *et al.*, 2020).

Com o processo em controle, α representa este risco (probabilidade) de erroneamente considerar o processo fora de controle (alarme falso). A consequência de ordem prática associada a este erro tipo I se refere a intervir no processo na hora errada, quando ele não possui causas especiais, acarretando um custo (como de interrupção do processo e de mão de obra), além de um risco de desajustar um processo que estava ajustado (Costa *et al.*, 2008).

Uma vez que o processo é considerado em controle quando \bar{X} cai dentro dos limites do gráfico e fora de controle quando \bar{X} cai fora dos limites do gráfico, a probabilidade de alarme falso é dada por (Costa *et al.*, 2008):

$$\alpha = Pr[\bar{X} > LSC_{\bar{X}} \text{ ou } \bar{X} < LIC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0]$$

2.2.Cadeias de Markov

2.2.1. Processo Estocástico e Processo de Markov

Um processo estocástico pode ser definido como uma coleção indexada de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, na qual o parâmetro t pertence a um dado conjunto T . Este conjunto T é geralmente formado por números inteiros não negativos e X_t representa uma característica de interesse mensurável em um instante de tempo t . A notação 03 define um processo estocástico sobre um dado espaço de probabilidade. Os valores assumidos pela variável aleatória X_t são denominados estados e o conjunto de todos os valores possíveis se refere ao espaço de estado do processo (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$\{X_t; t \in T\} \quad (03)$$

Sendo assim, um processo estocástico é chamado um processo de Markov quando, para qualquer tempo $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$, a distribuição condicional de X_t para os valores de $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ depende apenas de X_{t_n} . A equação 04 apresenta a definição caso X_t assumam valores discretos. Já a equação 05 apresenta a definição caso X_t assumam valores contínuos (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$P(X_t = x | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_t = x | X_{t_n}) \quad (04)$$

$$P(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_t \leq x | X_{t_n}) \quad (05)$$

Nas quais:

- t_0, t_1, \dots, t_{n-1} representam o passado;
- t_n representa o presente;
- t representa o futuro.

Ou seja, um processo estocástico é um processo de Markov se ele possui a propriedade de que as probabilidades associadas com o processo num dado instante do futuro dependem somente

do estado presente, sendo independentes dos eventos passado. Assim, os processos de Markov são caracterizados pela “falta de memória” (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

Em complemento, a noção de estado é fundamental no estudo dos processos de Markov. Propriedades em comum entre indivíduos ou objetos caracterizam os estados. Podem ser considerados exemplos de indivíduos e objetivos que possuem propriedades em comum (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002):

- População que migra de um estado para outro, podendo encontrar-se: população ociosa, população empregada;
- Máquinas em uma linha de produção, podendo encontrar-se: máquina funcionando, máquina parada em reparo; máquina parada aguardando reparo.

A importância dos processos de Markov reflete a necessidade de quantificação de eventos que possuem certo grau de incerteza, no intuito de “prever o futuro”. Então, modelos matemáticos probabilísticos são gerados para apoiar o processo de tomada de decisão. Existem inúmeros sistemas dinâmicos que podem ser modelados como processos de Markov, desde a avaliação de equipamentos em operação em uma linha de produção até o estudo de sistemas móveis de comunicação e a análise da evolução de sistemas sociais ao longo do tempo.

2.2.2. Categorias de Processos de Markov

Existem duas categorias de processos de Markov: (1) processos de tempo discreto - t assume apenas valores inteiros não negativos, ou seja, $t = 0, 1, 2, \dots$; (2) processos de tempo contínuo - t é contínuo, ou seja, $t \in [0, \infty)$. Em ambos os casos, os estados são caracterizados por números inteiros não negativos que refletem os valores que a variável aleatória X pode assumir (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

2.2.3. Processos de Markov de Tempo Discreto

Em se tratando de processos de tempo discreto, diz-se que um processo de Markov está completamente mapeado se forem conhecidas (1) as probabilidades de transição e (2) a distribuição inicial de probabilidades dos estados. Quando um estado sucede outro, o processo

de Markov deu um passo. Caso o número de passos seja igual a zero, a situação se refere ao presente. Caso o número de passos seja igual a um, a situação se refere a um possível estado no próximo passo, e assim por diante (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

A probabilidade de transição do estado i para o estado j , em 1 passo, denotada por p_{ij} , é a probabilidade de um objeto que se encontra no estado i ser encontrado no estado j após um intervalo de tempo fixo predeterminado. Para n passos no futuro, $p_{ij}(n)$ é a probabilidade de um objeto ir do estado i para o estado j em n passos. Já a probabilidade do estado i tomada no instante n é igual à probabilidade de um objeto ocupar o estado i após um número finito n de passos. A equação 06 generaliza o cálculo da probabilidade de estado no instante n para $M + 1$ estados (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p_i(n) = P(X_n = i), \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (06)$$

Já o instante inicial possui a distribuição inicial de probabilidades de estados, representada por um vetor linha $p(0)$. Este vetor está representado em 07 e é composto pelas probabilidades $p_i(n), i = 0, 1, 2, \dots, M$ (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p(0) = [p_0(0) \quad p_1(0) \quad p_2(0) \quad \dots \quad p_M(0)] \quad (07)$$

2.2.4. Matriz de Transição de Probabilidades

As probabilidades de transição podem ser representadas em forma de matriz, a matriz de probabilidades de transição, \mathbf{P}^n , no intuito de simplificação. Considerando $S = \{0, 1, \dots, M\}$ o conjunto finito de estados e (i, j) o par de estados para o qual $(i, j) \in S \times S$ e associando-se a cada par (i, j) um número real $p_{ij}(n)$, de forma que sejam satisfeitas as propriedades 08 e 09 (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002):

$$0 \leq p_{ij}(n) \leq 1 \text{ para } \forall (i, j) \in S \times S \quad (08)$$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(n) = 1 \text{ para } \forall i \in S \quad (09)$$

A matriz \mathbf{P}^n está representada em 10 (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) & \cdots & p_{0M}(n) \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) & \cdots & p_{1M}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{M0}(n) & p_{M1}(n) & \cdots & p_{MM}(n) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Com base no teorema da probabilidade total e no cálculo da probabilidade de transição para n passos, apresentado na equação 11, o cálculo da probabilidade do estado j em n passos é feito através da equação 12 (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad (11)$$

$$p_j(n) = P(X_n = j) = \sum_i p_i(0) p_{ij}(n) \quad (12)$$

Desta maneira, a matriz de probabilidades de transição \mathbf{P}^n está relacionada com a distribuição inicial de probabilidades e com o vetor de probabilidades de estados para n passos, como demonstra a equação 13 ((Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p(n) = p(0)P^n \quad (13)$$

2.2.5. Cadeias de Markov

Um processo de Markov pode ser representado de forma visual por meio de um grafo composto por nós, que são os estados, e arcos direcionados que representam a transição entre os estados. Este grafo é chamado de diagrama de transição (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

Sendo assim, a sequência $\{X_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ é chamada de cadeia de Markov homogênea de tempo discreto, com espaço de estados $S = \{0, 1, \dots, M\}$ e matriz de probabilidades de transição P se, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, a condição $P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij}$ é satisfeita para todo $(i, j) \in S \times S$ (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

Importante mencionar que a análise das cadeias de Markov pela matriz de probabilidades de transição deve ser feita com cautela, já que nem todos os processos de Markov de tempo discreto se comportam de forma semelhante à medida que o número de passos aumenta (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

2.2.6. Classificação das Cadeias de Markov

Em se tratando da classificação das cadeias de Markov, os estados de um processo de Markov podem ser classificados em transitório e recorrente. Esta divisão se refere à probabilidade do processo retornar a um estado considerando que o processo partiu deste estado. Seja f_{ii} a probabilidade do processo retornar ao estado i dado que o processo partiu deste estado (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002):

- O estado i é chamado de recorrente se, partindo do estado i , o processo retorna ao estado i com probabilidade $f_{ii} = 1$.
- O estado i é chamado de transitório ou não recorrente se, partindo do estado i , existe uma probabilidade positiva do processo não retornar para este estado, ou seja, $f_{ii} < 1$.
- O estado absorvente é um tipo especial de estado recorrente. Um estado i é chamado de absorvente se $p_{ii} = 1$.

Os estados recorrentes e transitórios podem existir em uma mesma cadeia de Markov. Em adição, só é possível sair de um estado absorvente quando o processo for reiniciado, de maneira que o processo comece novamente em qualquer outro estado que não seja absorvente (Çinlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

2.2.7. Exemplo Envolvendo o Clima como uma Cadeia de Markov

O tempo na cidade de *Centerville* pode mudar rapidamente de um dia para o outro. Entretanto, as chances de tempo seco (sem chuvas) amanhã são levemente maiores caso esteja seco hoje do que se chover hoje. Particularmente, a probabilidade de tempo seco amanhã é de 0,8 caso hoje esteja seco, porém é de apenas 0,6 caso amanhã chova. Estas probabilidades não mudam,

caso as informações sobre o tempo antes de hoje sejam levadas em consideração (Hillier e Lieberman, 2006).

Assim, a evolução do tempo dia a dia em *Centerville* é um processo estocástico. Começando em certo dia inicial (chamado de dia 0), o tempo é observado em cada dia t , para $t = 0, 1, 2, \dots$. O estado do sistema no dia t pode ser (Hillier e Lieberman, 2006):

- Estado 0 = dia t é seco;
Ou então
- Estado 1 = dia t com chuva.

Portanto, para $t = 0, 1, 2, \dots$, a variável aleatória X assume os valores (Hillier e Lieberman, 2006):

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{se o dia } t \text{ estiver seco} \\ 1 & \text{se no dia } t \text{ estiver chovendo} \end{cases}$$

O processo estocástico $\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ fornece uma representação matemática de como o estado do tempo em *Centerville* evolui ao longo do tempo (Hillier e Lieberman, 2006).

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 0\} = 0,8$$

$$P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 1\} = 0,6$$

Os estado 0 e 1 são mutuamente exclusivos e os únicos estados possíveis, de maneira que as probabilidades dos dois estados devam ter uma soma igual a 1. Assim, o processo estocástico possui a propriedade markoviana, de maneira que o processo seja uma cadeia de Markov (Hillier e Lieberman, 2006).

As probabilidades de transição (em uma etapa) são (Hillier e Lieberman, 2006):

$$p_{00} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 0\} = 0,8$$

$$p_{10} = P\{X_{t+1} = 0 | X_t = 1\} = 0,6$$

Para todo $t = 1, 2, \dots$, de forma que estas sejam as probabilidades de transição estacionárias. Em adição (Hillier e Lieberman, 2006):

$$\begin{aligned} p_{00} + p_{01} &= 1 & \text{de modo que} & & p_{01} &= 1 - 0,8 = 0,2 \\ p_{10} + p_{11} &= 1 & \text{de modo que} & & p_{11} &= 1 - 0,6 = 0,4 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de transição fica (Hillier e Lieberman, 2006):

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Uma vez que o estado 0 significa que o dia está seco e o estado 1 significa que o dia está chuvoso, as probabilidades de transição fornecem a probabilidade do estado de como se encontrará o tempo amanhã, dado o estado do tempo hoje (Hillier e Lieberman, 2006).

O diagrama de transição de estados da figura 07 representa graficamente as informações dadas pela matriz de transição. Os dois nós (círculos) representam os dois estados possíveis para o tempo e as setas indicam as possíveis transições (inclusive a volta para o mesmo estado) de um dia para o outro. Cada uma das probabilidades de transição é mostrada próxima à seta correspondente (Hillier e Lieberman, 2006).

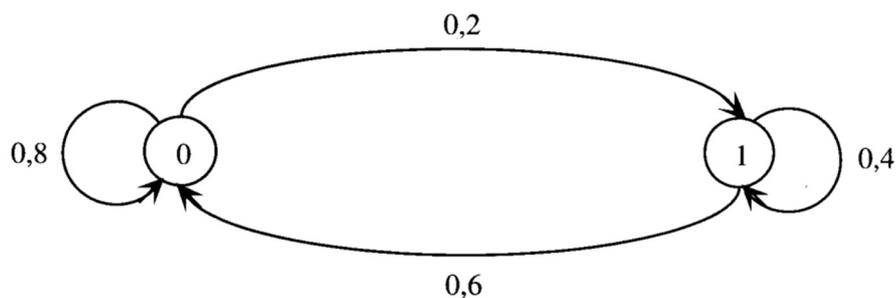


Figura 7 - Cadeia de Markov para o exemplo do clima

Fonte: Hillier e Lieberman (2006)

As matrizes de transição em n etapas são calculadas a partir da matriz de transição em uma etapa P . A matriz de transição em duas etapas é (Hillier e Lieberman, 2006):

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P} \times \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,72 & 0,28 \end{bmatrix}$$

Assim, se o tempo estiver no estado 0 (seco) em dado dia, a probabilidade de estar no estado 0 após 2 dias é 0,76 e a probabilidade de estar no estado 1 (chuva) é 0,24. Por outro lado, se o tempo estiver no estado 1 em dado dia, a probabilidade de estar no estado 0 após 2 dias é 0,72 e a probabilidade de estar no estado 1 é 0,28 (Hillier e Lieberman, 2006).

As probabilidades do estado do tempo daqui a 3, 4 e 5 dias também podem ser lidas da mesma forma que as matrizes de transição em 3, 4 e 5 etapas (Hillier e Lieberman, 2006).

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}^3 = \mathbf{P} \times \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,72 & 0,28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(4)} = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P} \times \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,752 & 0,248 \\ 0,744 & 0,256 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,749 & 0,251 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(5)} = \mathbf{P}^5 = \mathbf{P} \times \mathbf{P}^4 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,749 & 0,251 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Interessante mencionar que a matriz de transição em 5 etapas tem a característica que as 2 linhas possuem entradas idênticas. Isto reflete o fato de que a probabilidade do tempo estar em dado estado é, essencialmente, independente do estado do tempo 5 dias antes (Hillier e Lieberman, 2006).

2.2.8. Processos de Markov de Tempo Contínuo

Os processos de Markov de tempo contínuo são similares aos processos de Markov de tempo discreto, com a exceção que as transições entre os estados podem acontecer em qualquer instante de tempo. O conjunto que compreende o espaço de estados do processo é discreto, podendo ser finito ou infinito (Çınlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

A equação 14 mostra a probabilidade condicional referente à probabilidade de transição $p_{ij}(u, t)$ (Çınlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p_{ij}(u, t) = P(X(t) = j | X(u) = i) \quad (14)$$

Na qual:

- i e j são estados;
- u e t são instantes de tempo, tal que $0 \leq u \leq t$;
- $X(u)$ e $X(t)$ são variáveis aleatórias discretas que possuem os números dos estados nos tempos u e t , respectivamente.

As cadeias de Markov $\{X_t; t \geq 0\}$ são chamadas de cadeias tempo-homogêneas caso as probabilidades de transição $p_{ij}(u, t)$ dependam unicamente da diferença de tempos $t - u$ (Çınlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

A equação 15 mostra a probabilidade do processo ser encontrado no estado j no instante de tempo t . Já a equação 16 mostra o somatório referente à $P(X(t) = j)$ (Çınlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

$$p_j(t) = P(X(t) = j) \quad (15)$$

$$\sum_i P(X(t) = j | X(u) = i) P(X(u) = i) \quad (16)$$

Um processo de Markov está completamente definido se estão especificadas (1) as probabilidades de transição e (2) o vetor inicial de probabilidades dos estados $p(0)$ para $M + 1$ estados. Quanto à classificação das cadeias, a mesma classificação para processos discretos aplica-se para processos contínuos (Çınlar, 2013; Papoulis e Pillai, 2002).

2.3. Gráficos de Controle e Cadeias de Markov

Tanto gráficos de controle quanto cadeias de Markov têm sido consistentemente usados em pesquisas ao longo dos anos. Os gráficos de controle com regras suplementares de decisão são usados no intuito de aumentar a sensibilidade dos gráficos em se tratando de alterações no processo. Já as cadeias de Markov são usadas na modelagem dos processos.

O artigo de Perdikis, Psarakis, Castagliola, Rakitzis e Maravelakis apresenta um gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA) fase II não paramétrico modificado baseado na estatística *Sign*. O gráfico de controle EWMA é uma ferramenta eficiente para monitorar alterações em um processo independente das distribuições das observações. Estudos recentes têm demonstrado que, para gráficos de controle não paramétricos, devido à natureza discreta das estatísticas usadas (como a estatística *Sign*), é impossível computar de maneira acurada as propriedades do NMA usando cadeias de Markov ou métodos de equações integrais. Uma transformação contínua da estatística *Sign*, combinada com o método de cadeia de Markov clássico, é usada na determinação das propriedades do NMA para gráficos em controle e fora de controle (Perdikis *et al.*, 2023).

O artigo de Aslam, Bantan e Khan apresenta o uso do gráfico de controle de \bar{X} com amostragem estado dependente múltiplo (EDM) com indeterminação. A amostragem EDM usa as informações dos subgrupos anteriores no caso de indecisão na primeira amostra. Como resultado, o uso do EDM aumentou o poder do gráfico de controle para detectar pequenas alterações no processo, podendo ser usado em processos complexos nos quais a incerteza está presente no registro dos dados (Aslam *et al.*, 2019a).

O artigo de Albassam e Aslam apresenta o uso do gráfico de controle de np com EDM usado no monitoramento do número de itens defeituosos em processos de produção ou agências de serviço ao consumidor. Os coeficientes dos limites de controle foram determinados pelo uso de algoritmos. O gráfico de controle proposto foi capaz de detectar alterações mais rapidamente que os gráficos existentes, sendo uma adição eficiente em se tratando de gráficos com observações incertas e vagas (Albassam e Aslam, 2020).

O artigo de Bakir e Reynolds apresenta um processo não paramétrico desenvolvido para o problema de detecção rápida de qualquer alteração na média de uma sequência de observações a partir de um valor de controle específico. O procedimento proposto é baseado em uma estatística de Wilcoxon na qual o ranqueamento está presente dentro dos grupos. Uma regra de decisão de somas acumuladas é usada em conjunto com a estatística Wilcoxon. Usando a abordagem da cadeia de Markov, o NMA pode ser calculado exatamente para qualquer distribuição na qual a distribuição da estatística de ranqueamento Wilcoxon é conhecida. Assim, o procedimento possui o mesmo NMA para qualquer distribuição contínua simétrica (Bakir e Reynolds, 1979).

O artigo de Xiang apresenta um modelo para a otimização conjunta do controle do processo e da manutenção do processo. As informações obtidas no curso do CEP mostram a necessidade de possíveis ações de manutenção, afetando os cronogramas de manutenção preventiva. As ações de manutenção preventiva podem prever um processo de produção de deterioração adicional e melhorar a qualidade do produto em conjunto com o CEP. O modelo proposto é desenvolvido para um processo de produção que deteriora segundo uma cadeia de Markov de tempo discreto. A formulação da deterioração do processo com intervenções de manutenção, formulada como uma cadeia de Markov, fornece um avanço em desenhar uma solução algorítmica eficiente e obter resultados analíticos. A análise de sensibilidade posterior indica a inter-relação entre o CEP e as ações de manutenção. Os resultados numéricos indicam que a redução de custos potencial pode ser alcançada por meio das políticas integradas propostas no artigo (Xiang, 2013).

O artigo de Wan apresenta um modelo integrado de CEP e manutenção que aplica um gráfico de controle de \bar{X} com esquema intervalo de amostragem variável e EDM. A abordagem da cadeia de Markov é usada para modelar o processo. O artigo analisa não apenas as mudanças no processo, mas também as falhas de equipamento em dois estados, em controle e fora de controle. A investigação mostrou que o modelo integrado é sensível a pequenas mudanças no processo e mais efetivo em custo que os gráficos que não adotam a política de estado dependente múltiplo (Wan, 2020).

O artigo de Amin e Ncube apresenta um gráfico de controle que modifica os intervalos entre as amostras dependendo do que é observado nos dados. As propriedades do intervalo de amostragem variável combinadas com o esquema de somas acumuladas de Shewhart são avaliados usando a abordagem da cadeia de Markov. Os resultados mostram que o esquema proposto é consideravelmente mais eficiente que os gráficos de somas acumuladas de Shewhart e de somas acumuladas padrão (Amin e Ncube, 1991).

O artigo de Quintero-Arteaga, Peñabaena-Niebles, Vélez e Jubiz-Díaz apresenta um gráfico de controle de \bar{X} de variáveis sintéticas paramétricas para dados autocorrelacionados de primeira ordem AR(1) seguindo um processo gaussiano. O *design* estatístico do gráfico proposto foi desenhado segundo uma abordagem de cadeia de Markov de tempo discreto e um modelo matemático de programação não linear usando um algoritmo genético, no intuito de obter os valores dos parâmetros que minimizam o NMA do estado fora de controle. Uma

análise de sensibilidade foi conduzida para examinar o comportamento dos NMA em se tratando de mudanças nos parâmetros. Em adição, uma análise de desempenho foi conduzida para comparar o gráfico proposto com outros gráficos. Os resultados indicam que o gráfico de \bar{X} do artigo é mais rápido na detecção de pequenas alterações na média do processo considerando a autocorrelação dos dados (Quintero-Arteaga *et al.*, 2022).

O artigo de Shawky, Aslam e Khan apresenta o uso de um gráfico de controle para o monitoramento da média usando a distribuição gama para as estatísticas e usando o EDM para a amostragem. O desempenho do gráfico de controle proposto foi considerado superior que o dos gráficos existentes em termos do NMA para ambientes incertos, com rápido sinal para os processos fora de controle. Sendo assim, o gráfico proposto pode ser usado na indústria com o intuito de reduzir a quantidade de produtos não conformes (Shawky *et al.*, 2020).

O artigo de Aldosari, Aslam e Jun apresenta o uso de um novo gráfico de controle por atributo usando amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo. Pelo estudo comparativo, o gráfico de controle possui um desempenho melhor que os gráficos existentes em termos do NMA, sendo mais sensível na detecção de pequenos deslocamentos, podendo ser aplicado na indústria para um melhor monitoramento dos processos (Aldosari *et al.*, 2017).

O artigo de Carot, Sagbas e Sanz apresenta um novo gráfico de controle de capacidade baseado nas distribuições Q-quadrado, ω e φ , capaz de monitorar a média, a variabilidade e o desvio dos limites de especificação ao mesmo tempo. Assim, o gráfico pode ser trabalhado junto com o gráfico $\bar{X} - R$, fornecendo julgamentos em se tratando da habilidade do processo de atender os requisitos. O gráfico proposto foi capaz de monitorar eficientemente processos capazes mas instáveis, detectando variação no nível da capacidade (Carot *et al.*, 2013).

O artigo de Aslam, Shafqat, Rao, Malela-Majika e Shongwe apresenta um novo gráfico de controle para a distribuição Birnbaum-Saunders baseado na amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo. Sendo assim, o gráfico proposto se refere a uma generalização dos gráficos baseados em amostragem única, amostragem repetitiva e EDM. O gráfico de controle proposto foi considerado eficiente na redução do NMA, recomendado quando a gestão está interessada em monitorar o número de itens não conformes (Aslam *et al.*, 2020a).

O artigo de Brook e Evans apresenta que o método clássico de estudo de um esquema de controle de somas acumuladas do tipo de intervalo de decisão leva em consideração uma sequência de testes, determinando o número médio de amostras para os componentes e, assim, estudando o NMA do esquema. Por outro lado, o artigo considera uma abordagem diferente na qual a operacionalização do esquema leva em consideração uma cadeia de Markov. A matriz de probabilidades de transição para esta cadeia é obtida e, então, as propriedades da matriz são usadas para determinar não apenas o NMA, mas também a distribuição e as probabilidades do NMA (Brook e Evans, 1972).

O artigo de Oh e Weiß apresenta um novo gráfico de controle individual com regra suplementar de decisão com dependência serial. O desempenho do gráfico é estudado na presença de autocorrelação positiva causada por um processo autoregressivo discreto de primeira ordem. O NMA é computado de maneira exata e eficiente através de uma cadeia de Markov finita. O gráfico de controle proposto pode ser usado na descoberta de deslocamentos conjuntos da média do processo e da estrutura de autocorrelação (Oh e Weiß, 2020).

O artigo de Aslam, Yen, Chang, Al-Marshadi e Jun apresenta um novo gráfico de controle usando EDM baseado no índice de desempenho de vida C_L para os casos em que a vida de um produto segue a distribuição exponencial ou a distribuição de Weibull. Os parâmetros ótimos são determinados pela minimização do número médio de amostra ao mesmo tempo em que satisfaz os riscos do produtor e os riscos do consumidor para os níveis de qualidade correspondentes. O gráfico proposto foi capaz de reduzir significativamente o tamanho da amostra, podendo reduzir os custos dos testes de vida (Aslam *et al.*, 2019b).

O artigo de Gan apresenta um método numérico acurado baseado em uma equação integral para o cálculo do NMA de gráficos de controle de somas acumuladas (CUSUM) sob deslocamento linear. Valores de NMA de gráficos de controle CUSUM são apresentados. Em complemento, um procedimento estes gráficos de controle otimizados também é apresentado. Os parâmetros ótimos do gráfico de controle que o artigo expõe facilitam o desenho de um gráfico de controle CUSUM (Gan, 1992).

O artigo de VanBrackle e Reynolds apresenta gráficos de controle EWMA e CUSUM para a média de processos nos quais as observações são correlacionadas. O NMA em controle e fora de controle são avaliados numericamente usando uma abordagem de equação integral e uma

abordagem de cadeia de Markov. Os resultados numéricos mostram que a correlação pode ter um efeito significativo nas propriedades destes gráficos de controle. Adicionalmente, tabelas são apresentadas com o intuito de ajudar a estruturação destes gráficos de controle quando as observações seguem um modelo específico (Vanbrackle e Reynolds, 1997).

O artigo de Sim, Kang e Xie apresenta que geralmente assume-se que apenas uma única causa atribuível resulta em um processo fora de controle. Assim, o artigo considera duas causas atribuíveis ocorrendo paralelamente e adota a abordagem da cadeia de Markov para investigar as propriedades estatísticas do gráfico de controle de \bar{X} . Os autores também propõem um procedimento para calcular o tamanho ótimo de amostra (Sim *et al.*, 2004).

O artigo de Aslam, Rao, Al-Marshadi, Ahmad e Jun apresenta um gráfico de controle C_{pk} usando o desvio absoluto da média para analisar um processo industrial. Inúmeros estudos de simulação foram realizados com o intuito de avaliar o desempenho do gráfico proposto considerando condições de assimetria baixa, moderada e alta e a característica de processo seguindo a distribuição de Weibull, log-normal e gama. Assim, o gráfico foi considerado efetivo na rápida detecção de processos fora de controle, com os valores do NMA aumentando da assimetria baixa para a assimetria alta (Aslam *et al.*, 2019c).

O artigo de Morita, Arizono, Nakase e Takemoto apresenta o gráfico de controle usando o índice de capacidade C_{pm} , chamado de índice Taguchi, baseado no conceito de perda de qualidade. O artigo avalia o custo operacional que abarca o custo de amostragem, o custo da amostra e a perda de qualidade decorrente da falha em detectar um estado fora de controle. O gráfico proposto é considerado capaz de contribuir para o ambiente industrial real com um gerenciamento mais restrito da qualidade (Morita *et al.*, 2009).

O artigo de Dobi e Zempléni apresenta um novo gráfico de controle para aplicação no setor de cuidado médico, para o monitoramento da característica de qualidade de um paciente. A abordagem da cadeia de Markov foi adotada, fomentando o desenvolvimento de um método no qual o tamanho do deslocamento (a degradação da saúde do paciente), o efeito do reparo (tratamento) e o intervalo entre as amostras (visitas) são variáveis. O custo médio do protocolo, determinado pelo intervalo entre amostra e pelo limite de controle, é estimado

usando a distribuição estacionária da cadeia de Markov. O gráfico permitiu a identificação de parâmetros ótimos diferentes dos parâmetros médicos originais (Dobi e Zempléni, 2019).

O artigo de Champ e Woodall apresenta um método simples e eficiente, usando cadeias de Markov, para obter o exato NMA dos gráficos de controle com regras suplementares de decisão. A comparação dos NMA é feita entre o gráfico de controle com regra suplementar de decisão, o gráfico de controle com regra básica de decisão e o gráfico de controle CUSUM (Champ e Woodall, 1987).

O artigo de Xu e Peng apresenta uma nova abordagem para definir gráficos de controle usando índices de capacidade, no intuito de monitorar o desempenho de processos não normais em controle. O gráfico proposto detecta deslocamentos tanto na média quanto na variância, combinando as funcionalidades dos gráficos de \bar{X} e s . Em adição, este gráfico demonstrou um desempenho superior que o gráfico de $\bar{X} - s$ em vários casos. Os algoritmos propostos são considerados de fácil implementação na prática (Xu e Peng, 2018).

O artigo de Aldosari, Aslam, Khan, Ahmad e Jun apresenta um novo gráfico de controle de variância quando a característica de qualidade de interesse segue uma distribuição normal usando a amostragem repetitiva de EDM e quando a variância da população é conhecida. O uso desta amostragem combina as vantagens dos dois esquemas de amostragem. O gráfico foi considerado eficiente em detectar processos fora de controle para diferentes níveis de deslocamento em comparação com os gráficos existentes (Aldosari *et al.*, 2018).

O artigo de Crosier apresenta os procedimentos de desenho e o NMA para dois gráficos de controle CUSUM. O primeiro procedimento reduz cada observação multivariada a um escalar e então forma uma soma acumulada dos escalares. Já o segundo procedimento forma um vetor de somas acumuladas diretamente das observações. Estes dois procedimentos são comparados entre si e com o gráfico multivariado de Shewhart. Como resultado, a resposta inicial rápida apresentada pelos gráficos de controle de CUSUM é mostrada (Crosier, 1988).

O artigo de Aslam, Balamurali, Jeyadurga e Raza apresenta o uso de um novo gráfico de controle de np baseado na amostragem repetitiva de estado dependente múltiplo para o monitoramento da vida de produtos. O artigo assumiu que a vida dos produtos segue a distribuição de Weibull, a distribuição gama ou a distribuição de Pareto de segundo tipo com

parâmetro de forma conhecido. O gráfico se baseia em dois pares de limites de controle que usam informações dos subgrupos passados em certas condições em adição às informações das amostras correntes. O gráfico proposto mostrou um desempenho superior ao gráfico de amostragem simples em termos do NMA (Aslam *et al.*, 2020b).

O artigo de Bischak e Silver apresenta um processo monitorado através de um gráfico de controle. Após o processo ser declarado fora de controle e as causas atribuíveis serem determinadas, o processo passa por melhoria que resulta em uma alteração da causa atribuível. Um estimador Bayesiano é desenvolvido levando em consideração a taxa da causa atribuível. O procedimento de estimação faz uso da técnica de Monte Carlo em conjunto com a técnica de cadeia de Markov. Por fim, os autores mostram que os resultados dependem tanto dos dados quanto dos parâmetros das distribuições (Bischak e Silver, 2004).

O artigo de Mim, Khoo, Saha e Khaw apresenta um gráfico de controle usando a mediana com o objetivo de melhorar a velocidade do gráfico de controle em detectar pequenas e moderadas alterações na média. Os critérios do NMA e desvio padrão do NMA são usados como medidas de desempenho, para os casos com e sem erros de medição. O método da cadeia de Markov é usado para calcular o NMA em controle e fora de controle. A análise de desempenho mostra que o gráfico de controle possui desempenho superior para todos os deslocamentos, muito embora o gráfico de controle de EWMA desempenhe melhor em se tratando de pequenas alterações (Mim *et al.*, 2023).

O artigo de Ottenstreuer, Weiß e Knoth apresenta um modelo de Markov oculto de Poisson para a modelagem do processo, investigando um gráfico individual de Shewhart, um gráfico de CUSUM padrão e dois tipos diferentes de gráficos de CUSUM com razão de verossimilhança logarítmica. A avaliação de desempenho incluiu vários cenários fora de controle e diferentes níveis de dependência dentro do modelo de Markov oculto. Como resultado, o gráfico de CUSUM padrão apresentou o melhor desempenho geral, ao passo que o desempenho dos outros gráficos dependia fortemente do cenário fora de contexto e do nível de autocorrelação (Ottenstreuer *et al.*, 2020).

Por fim, o artigo de Klein apresenta os valores de NMA calculados para dois gráficos de controle de \bar{X} e então compara com os valores do gráfico padrão de Shewhart. Estes dois gráficos de controle são baseados em regras suplementares de decisão e podem ser

implementados de maneira simples. Por um lado, o primeiro gráfico de controle utiliza a regra de decisão de 2 de 2 pontos consecutivos além de um limite de controle especial para declarar o processo fora de controle. Por outro lado, o segundo gráfico de controle utiliza a regra de decisão de 2 de 3 pontos consecutivos além de um limite de controle diferente para declarar o processo fora de controle. Os resultados mostram que os dois gráficos de controle possuem desempenho superior, ou seja, NMA inferior que o gráfico de controle padrão de Shewhart para alterações no processo na casa de 2,6 desvios padrão da média (Klein, 2000).

3. MÉTODO DE PESQUISA

3.1. Classificação da Pesquisa

Miguel *et al.* (2010) sugerem a classificação da pesquisa quanto à sua natureza, seu objetivo, sua abordagem e seu método. Quanto à natureza, a presente pesquisa classifica-se como aplicada, de maneira que os resultados sejam utilizados na resolução de problemas práticos. A análise do desempenho dos gráficos de controle com regras suplementares de decisão é capaz de subsidiar futuras decisões gerenciais relacionadas aos processos.

Quanto ao objetivo, a pesquisa classifica-se como exploratória, proporcionando maior familiaridade com o problema, no intuito de torná-lo explícito ou construir hipóteses. Neste sentido, a análise do desempenho dos gráficos de controle permite entender e mensurar o ganho de desempenho com a inclusão de regras suplementares de decisão.

Quanto à abordagem, a pesquisa classifica-se como quantitativa, já que as informações serão traduzidas em números para posterior análise. Sendo assim, o desempenho dos gráficos de controle será calculado quantitativamente, através do NMA, subsidiando as apreciações referentes ao ganho de desempenho com a inclusão de regras suplementares de decisão.

Quanto ao método, a pesquisa classifica-se como modelagem e simulação, permitindo experimentar um sistema real através de um modelo. Neste sentido, as cadeias de Markov serão usadas na modelagem do processo, para definição dos estados e mensuração das probabilidades iniciais e de transição, informações necessárias para o cálculo do NMA.

Resumidamente, a figura 08 apresenta a classificação desta pesquisa.

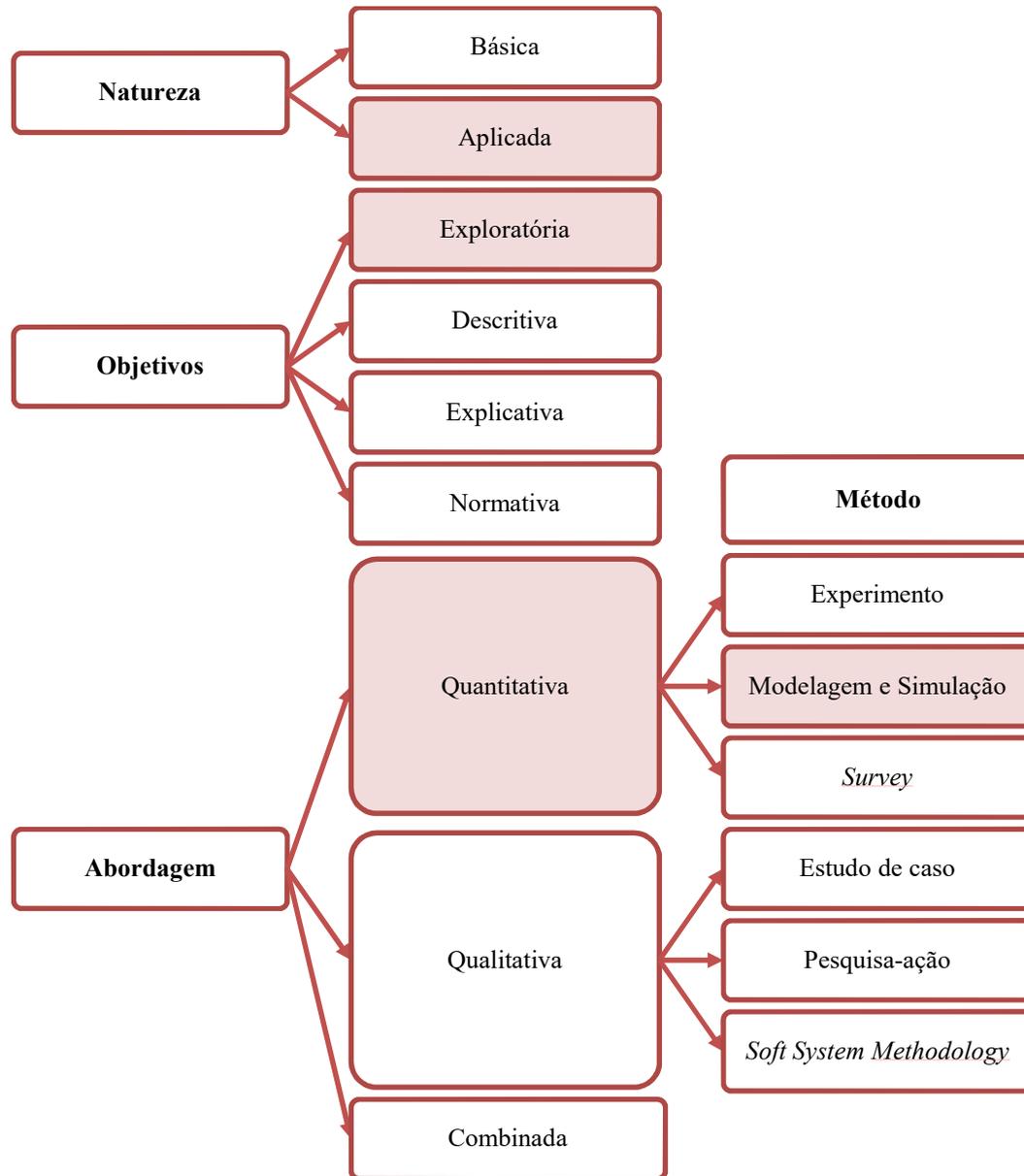


Figura 8 - Classificação da pesquisa

Fonte: adaptado de Miguel *et al.* (2010)

3.2. Condução da Pesquisa

Sendo assim, a presente pesquisa utilizará um artigo publicado recentemente que faz uso de gráfico de controle com regra suplementar de decisão. Em primeiro lugar, o gráfico de controle com regra suplementar de decisão que altera a métrica de \bar{X} por um índice de capacidade será comparado com o gráfico de controle com regra suplementar de decisão que mantém a métrica de \bar{X} . Em segundo lugar, os dois gráficos de controle com regras suplementares de decisão (que usam as métricas de índice de capacidade e de \bar{X}) serão

comparados com o gráfico de controle com regra básica de decisão que usa a métrica de \bar{X} . Os valores do NMA serão comparados, analisando a afirmativa que o uso de regras suplementares de decisão aumenta o desempenho dos gráficos de controle na prática.

Adaptado de Costa e Costa (2022), a pesquisa seguirá os passos:

1. **Selecionar o artigo:** o artigo cumpre a premissa de ser uma pesquisa recente, de forma que as conclusões decorrentes sejam atuais e relevantes, úteis na área de Gestão da Qualidade. Em complemento, a regra suplementar de decisão usada pelos autores do artigo será apresentada de maneira detalhada, sendo aplicada em um gráfico de controle que altera a métrica de \bar{X} por um índice de capacidade;
2. **Desenhar a cadeia de Markov:** mostrando todas as possíveis transições do processo, levando em consideração que as amostras podem cair em três regiões distintas: região de controle (C), região de advertência (W) e região de ação (A);
3. **Definir os estados da cadeia de Markov:** apresentando os estados transitórios e o estado absorvente, que representa o estado referente ao alarme. Em complemento, cada um dos estados será detalhado e ilustrado;
4. **Definir os parâmetros da cadeia de Markov:** em se tratando dos parâmetros de abertura, do tamanho da amostra e dos deslocamentos da média;
5. **Construir a matriz P :** construir a matriz de probabilidades de transição com base nas setas e nos estados da cadeia de Markov, expressando numericamente o processo em termos de lógica de transição entre os estados;
6. **Calcular o vetor de probabilidades iniciais:** com o uso do Solver, no qual o objetivo é maximizar o vetor de probabilidades iniciais, sujeito às restrições (1) a soma da multiplicação de cada probabilidade inicial por cada probabilidade de transição é igual a 0 e (2) a soma das probabilidades iniciais é igual a 1;
7. **Construir a matriz $(I - Q)^{-1}$:** gerando o número esperado total de visitas para cada estado através da soma de cada linha da matriz;

8. **Calcular o NMA regras suplementares e regra básica:** por meio do somatório da multiplicação do número esperado total de visitas para cada estado pela probabilidade inicial de cada estado. Os gráficos de controle que fazem uso de regras suplementares de decisão se tratam dos gráficos com as métricas de índice de capacidade e \bar{X} . Já o gráfico de controle que faz uso da regra básica de decisão se trata do gráfico de \bar{X} ;
9. **Comparar o NMA regras suplementares e regra básica:** através dos valores obtidos e dos gráficos gerados, na lógica de “quanto menor, melhor”. Em complemento, os percentuais de melhora do desempenho do gráfico de \bar{X} com a inclusão da regra suplementar de decisão serão apresentados.

Assim, as cadeias de Markov serão usadas para a modelagem do processo em análise. Pelas suas propriedades, as cadeias de Markov permitem o cálculo do número esperado de visitas aos estados transientes, demonstrado na equação 17. A partir deste valor, a análise de desempenho dos gráficos de controle é conduzida (Çinlar, 2013).

$$S'(I - Q)^{-1} \quad (17)$$

Na qual:

- S é o vetor de probabilidades iniciais;
- I é a matriz identidade;
- Q é a matriz de transição sem os elementos associados ao estado absorvente.

4. RESULTADOS

Os 9 passos da pesquisa estão descritos na sequência, de maneira que as análises apresentadas permitam a aceitação ou a rejeição das hipóteses de pesquisa.

$H0_1$ - a substituição da métrica de \bar{X} pelo índice de capacidade melhora o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão.

$H0_2$ - a implementação de regras suplementares de decisão melhora o desempenho de gráficos de controle.

4.1. Selecionar o artigo

O artigo selecionado se refere ao “*A variable control chart based on process capability index under generalized multiple dependent state sampling*”, de G. Srinivasa Rao, Muhammad Ali Raza, Muhammad Aslam, Ali Hussein Al-Marshadi e Chi-Hyuck Jun, publicado na IEEE Access em 2019. Uma vez que se trata de uma pesquisa recente, as conclusões decorrentes serão atuais e relevantes, úteis na área de Gestão da Qualidade. Em complemento, o artigo foi escolhido também porque apresenta as tabelas com os valores de NMA permitindo comparação, possui explicação detalhada da regra suplementar de decisão permitindo replicação e foi publicado em uma revista reconhecida na área em questão.

O gráfico de controle proposto por Rao *et al.* (2019) combina o uso do índice de capacidade de processo, como a estatística de monitoramento, com a amostragem por estado dependente múltiplo generalizado (EDMG), como a regra suplementar de decisão. A estatística de monitoramento do gráfico C_{pk} é o índice C_{pk} apresentado na equação 18.

$$\hat{C}_{pk} = \min \left\{ \frac{LSE - \bar{X}}{3S}, \frac{\bar{X} - LIE}{3S} \right\} \quad (18)$$

Tanto a média quanto o desvio padrão são obtidos da amostra. A equação 19 mostra o cálculo da média, ao passo que a equação 20 mostra o cálculo do desvio padrão.

$$\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i \quad (19)$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n - 1) \quad (20)$$

Nas quais n se refere ao tamanho da amostra.

Na equação 18, LSE é o limite superior de especificação e LIE é o limite inferior de especificação. Os gráficos de controle C_{pk} e \bar{X} que fazem uso da regra suplementar de decisão EDMG possuem limites de controle internos e externos:

- LIC_2 é o limite inferior de controle interno;
- LSC_2 é o limite superior de controle interno;
- LIC_1 é o limite inferior de controle externo;
- LSC_1 é o limite superior de controle externo.

Que podem ser visualizados na figura 09.



Figura 9 - Limites de controle internos e externos do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

As equações 21 a 24 apresentam estes limites de controle internos e externos.

$$LIC_1 = E(MS) - k_1\sqrt{Var(MS)} \quad (21)$$

$$LSC_1 = E(MS) + k_1\sqrt{Var(MS)} \quad (22)$$

$$LIC_2 = E(MS) - k_2\sqrt{Var(MS)} \quad (23)$$

$$LSC_2 = E(MS) + k_2\sqrt{Var(MS)} \quad (24)$$

Nas quais MS se refere à estatística de monitoramento do gráfico de controle. Para o gráfico C_{pk} , $E(MS) = E(\hat{C}_{pk})$ e $Var(MS) = Var(\hat{C}_{pk})$. Já para o gráfico \bar{X} , $E(MS) = E(\bar{X}) = \mu_0$ e $Var(MS) = Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$, sendo μ_0 e σ^2 a média e a variância do processo em controle.

Os parâmetros de abertura k_1 e k_2 são ajustados para a obtenção do NMA_0 desejado, neste caso, 370,4. Rao *et al.* (2019) obtiveram os valores de k_1 e k_2 e NMA_1 através de simulação. O acréscimo ou decréscimo da média é expresso em unidade de σ e representado por δ . A equação 25 apresenta a média do processo fora de controle, μ_1 .

$$\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma \quad (25)$$

Sem perder generalização, adotando $\mu_0 = 0$ e $\sigma = 1$.

Em adição, o artigo considera o caso simétrico no qual $LIC = -LSC$. Sendo assim, o processo é declarado em controle caso a restrição 26 seja verdadeira e declarado fora de controle caso as restrições 27 ou 28 sejam verdadeiras.

$$LIC_2 \leq MS \leq LSC_2 \quad (26)$$

$$MS > LSC_1 \quad (27)$$

$$MS < LIC_1 \quad (28)$$

Caso o ponto da estatística de monitoramento atual caia nas regiões de advertência descritas pelas restrições 29 e 30, o estado do processo é decidido pelos m pontos anteriores. Caso

menos que h pontos tenham caído na região de controle, entre LIC_2 e LSC_2 , o processo é declarado fora de controle. Caso contrário, o processo é declarado em controle.

$$LIC_1 \leq MS \leq LIC_2 \quad (29)$$

$$LSC_2 \leq MS \leq LSC_1 \quad (30)$$

Por fim, a figura 10 apresenta:

- Região de controle (C), apresentada em verde, delimitada pelos limites internos de controle, caso a amostra caia nesta região o processo é declarado em controle;
- Região de advertência (W), apresentada em amarelo, delimitada pelos limites internos e externos de controle, caso a amostra caia nesta região as m amostras anteriores deverão ser analisadas para determinação se o processo está em controle ou fora de controle;
- Região de ação (A), apresentada em vermelho, delimitada pelos limites externos de controle, caso a amostra caia nesta região o processo é declarado fora de controle.

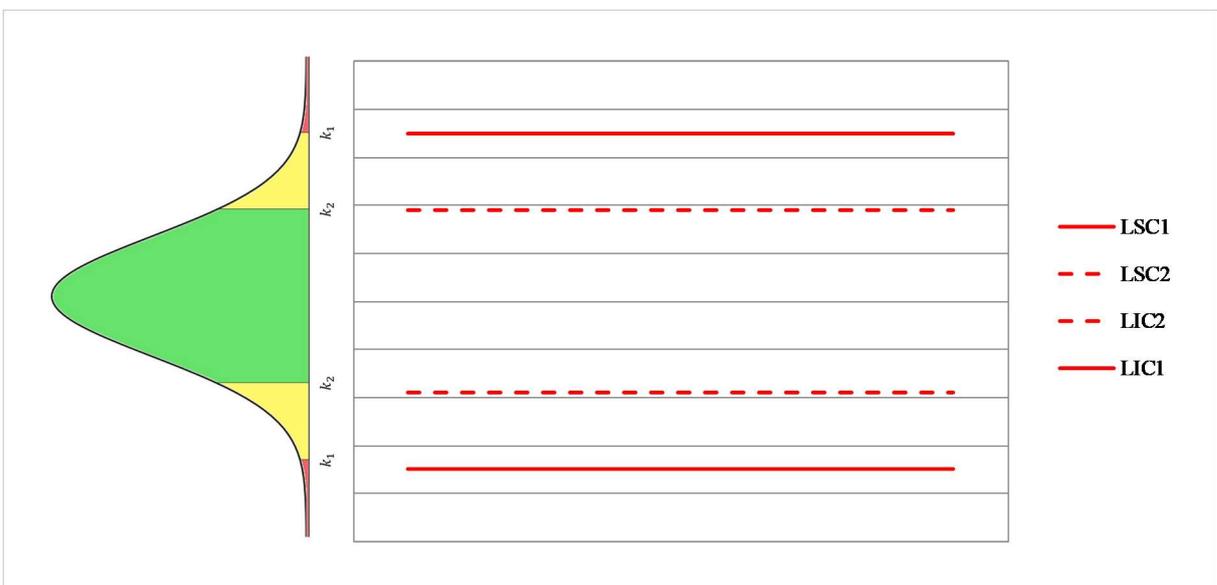


Figura 10 - Regiões e limites de controle do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

4.2. Desenhar a cadeia de Markov

Uma vez que o gráfico de controle proposto por Rao *et al.* (2019) é usado para monitoramento da média de processos, seu desempenho será comparado com dois gráficos:

- Gráfico \bar{X} com EDMG: substitui a métrica do C_{pk} pelo \bar{X} mas mantém a regra suplementar de decisão EDMG. Como consequência, este gráfico possui 2 pares de limites de controle;
- Gráfico \bar{X} : substitui (1) a métrica do C_{pk} pelo \bar{X} e (2) a regra suplementar de decisão EDMG pela regra básica de decisão. Como consequência, este gráfico possui 1 par de limites de controle.

Para o gráfico de \bar{X} com EDMG, a cadeia de Markov é função de m e h . O primeiro caso analisado foi $n = 5$ e $m = h = 3$, ou seja, os estados são definidos pela posição dos pontos das quatro últimas amostras. A figura 11 representa a cadeia de Markov com os estados definidos pela sequência (a, b, c, d) , na qual a é a posição da amostra do terceiro ponto antes do último ponto, b é a posição do segundo ponto antes do último ponto, c é a posição do primeiro ponto antes do último ponto, d é a posição do último ponto.

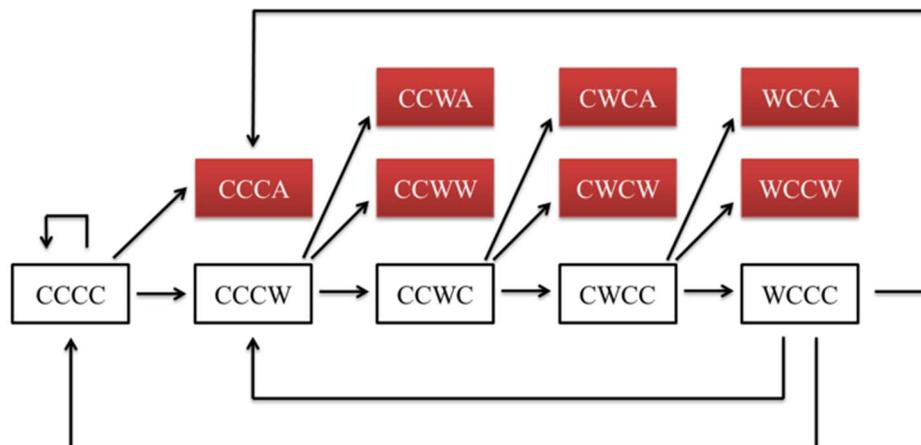


Figura 11 - Cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

Por exemplo, (C, W, C, A) indica que o último ponto caiu na região de ação (representada por A), o terceiro ponto antes do último ponto caiu na região de controle (representada por C), o

segundo ponto antes do último ponto caiu na região de advertência (representada por W) e o primeiro ponto antes do último ponto caiu na região de controle (C).

4.3. Definir os estados da cadeia de Markov

Como resultado, a figura 12 mostra que, para $m = h = 3$, a Cadeia de Markov possui cinco estados transitórios (na cor branca, se referindo às amostras que caem nas regiões de controle e de advertência) e um estado absorvente (na cor vermelha, se referindo às amostras que caem na região de ação).

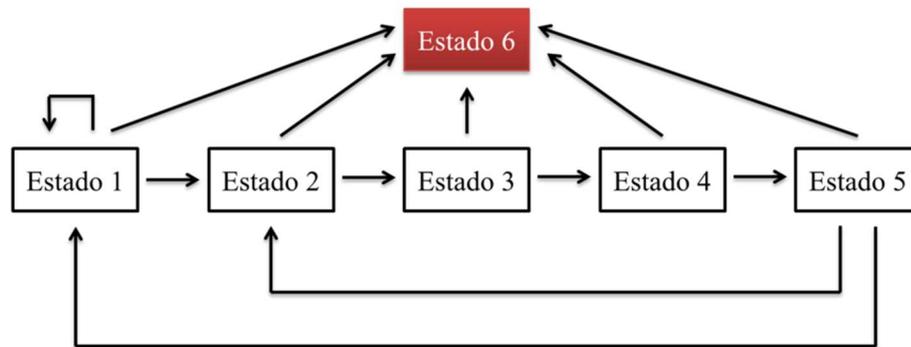


Figura 12 - Estados da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

A tabela 01 detalha os estados para $m = h = 3$.

Tabela 1 - Estados para $m = h = 3$

Sequência das Amostras	Estados
CCCC	Estado 1
CCCW	Estado 2
CCWC	Estado 3
CWCC	Estado 4
WCCC	Estado 5
CCCA, CCWA, CCWW, CWCA, CWCW, WCCA, WCCW	Estado 6

Fonte: autoria própria (2023)

Em primeiro lugar, tem-se o cenário em que a última amostra caiu na região de controle (C). Neste caso, não há necessidade de analisar as três amostras anteriores. Para esta cadeia de

Markov, existem quatro sequências de amostras que resultam na classificação da amostra como pertencente à região de controle.

- Sequência das amostras: CCCC

A última amostra caiu na região de controle (C), bem como as três amostras anteriores. Como consequência, têm-se o estado 1, demonstrado na figura 13.

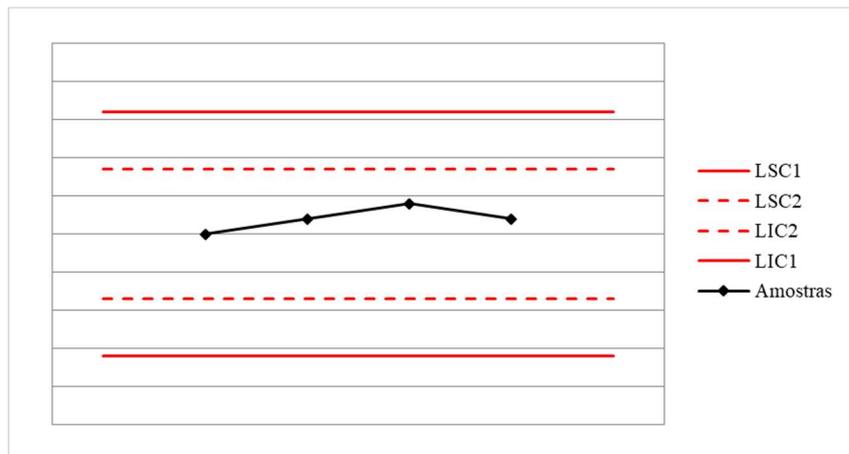


Figura 13 - Representação do estado 1 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CCWC

A última amostra caiu na região de controle (C), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, têm-se o estado 3, demonstrado na figura 14.

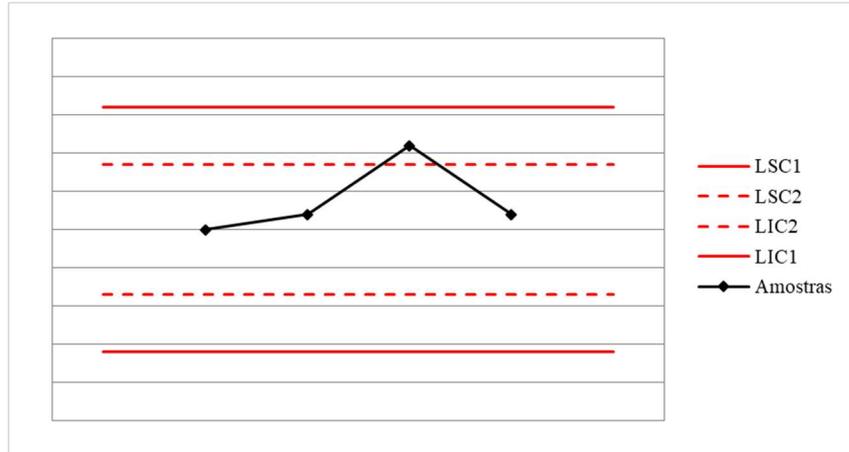


Figura 14 - Representação do estado 3 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CWCC

A última amostra caiu na região de controle (C), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, têm-se o estado 4, demonstrado na figura 15.

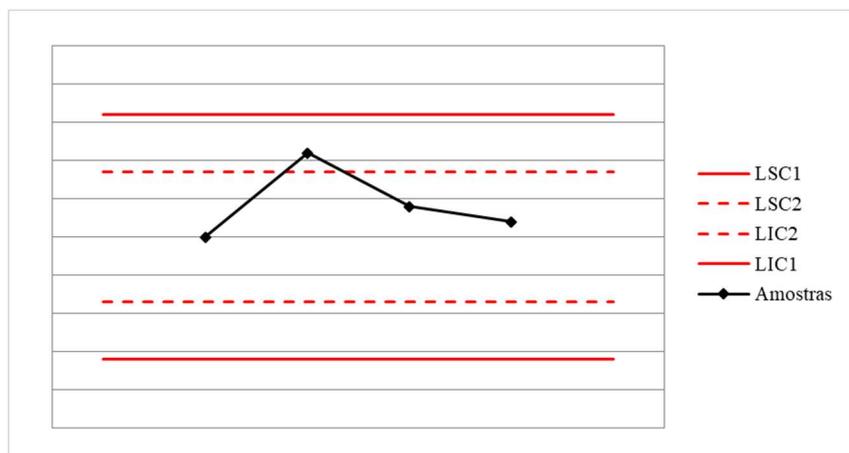


Figura 15 - Representação do estado 4 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: WCCC

A última amostra caiu na região de controle (C), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de

controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W). Como consequência, têm-se o estado 5, demonstrado na figura 16.

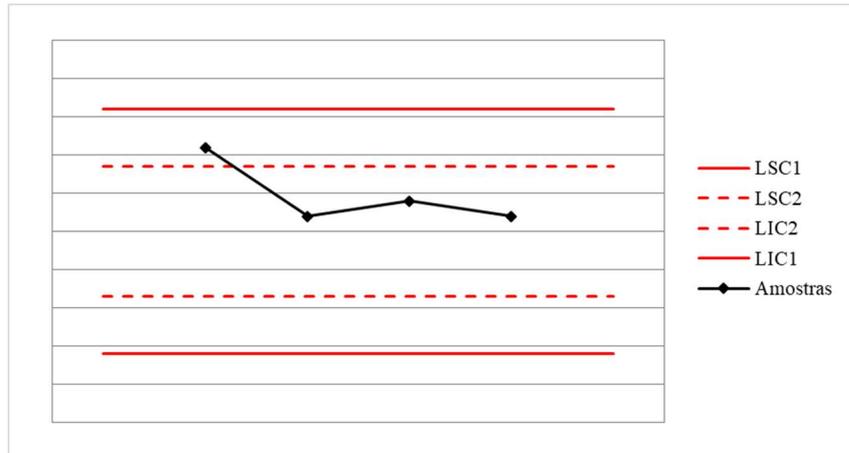


Figura 16 - Representação do estado 5 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

Em segundo lugar, tem-se o cenário em que a última amostra caiu na região de ação (A). Neste caso, não há necessidade de analisar as três amostras anteriores. Para esta cadeia de Markov, existem quatro sequências de amostras que resultam na classificação da amostra como pertencente à região de ação.

- Sequência das amostras: CCCA

A última amostra caiu na região de ação (A), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, têm-se o estado 6 em sua primeira representação, demonstrado na figura 17.

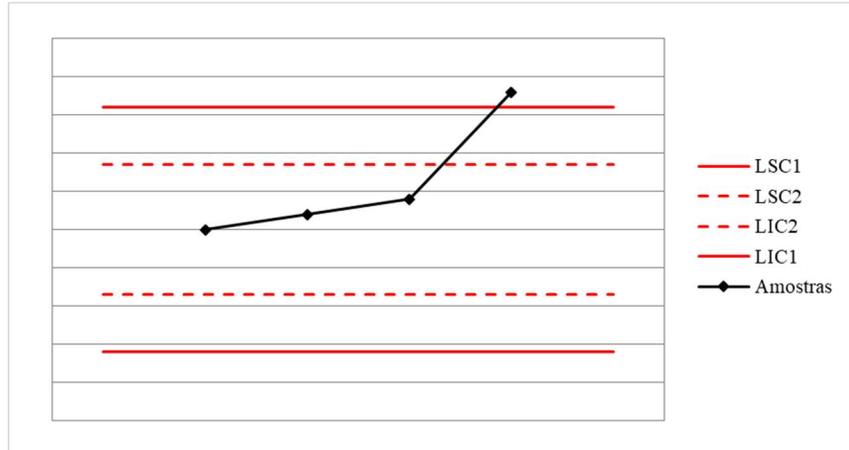


Figura 17 - Primeira representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CCWA

A última amostra caiu na região de ação (A), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, têm-se o estado 6 em sua segunda representação, demonstrado na figura 18.

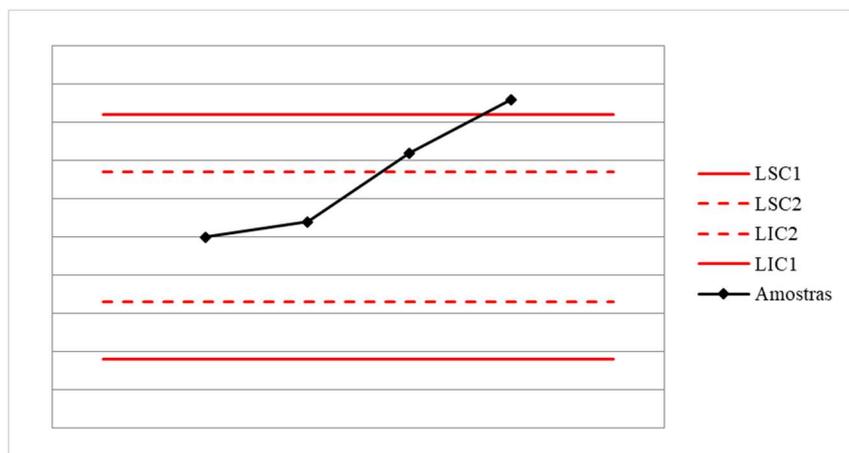


Figura 18 - Segunda representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CWCA

A última amostra caiu na região de ação (A), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C).

Como consequência, têm-se o estado 6 em sua terceira representação, demonstrado na figura 19.

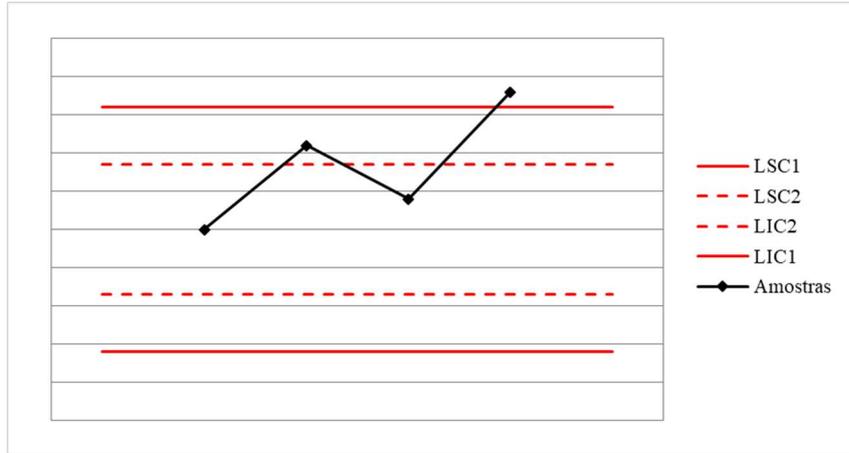


Figura 19 - Terceira representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: WCCA

A última amostra caiu na região de ação (A), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W). Como consequência, têm-se o estado 6 em sua quarta representação, demonstrado na figura 20.

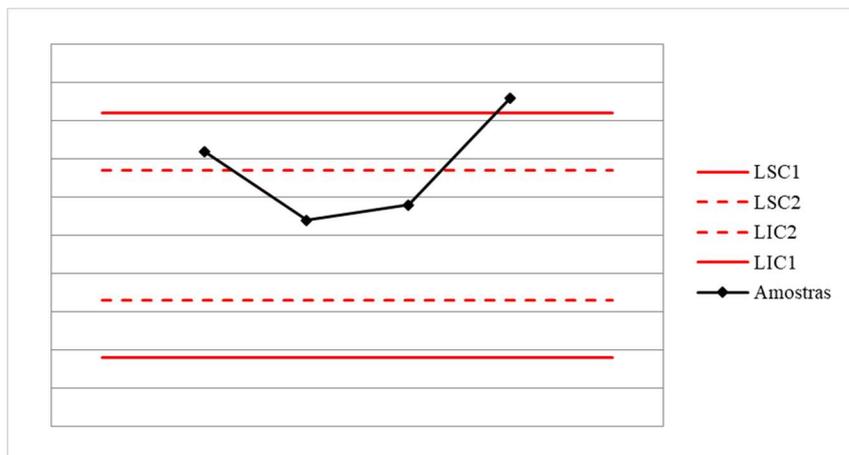


Figura 20 - Quarta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

Em terceiro lugar, temos o cenário em que a última amostra caiu na região de advertência (A). Neste caso, há necessidade de analisar as três amostras anteriores. Para a combinação $m = h = 3$, considera-se que a amostra caiu na região de controle (C) se as três amostras anteriores ($m = 3$) caíram na região de controle ($h = 3$) e considera-se que a amostra caiu na região de ação se menos que três amostras anteriores ($m = 3$) caíram na região de controle ($h = 3$). Para esta cadeia de Markov, existem quatro sequências de amostras que demandam análise.

- Sequência das amostras: CCCW

A última amostra caiu na região de advertência (W), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, considera-se que a amostra caiu na região de controle e têm-se o estado 2, demonstrado na figura 21.

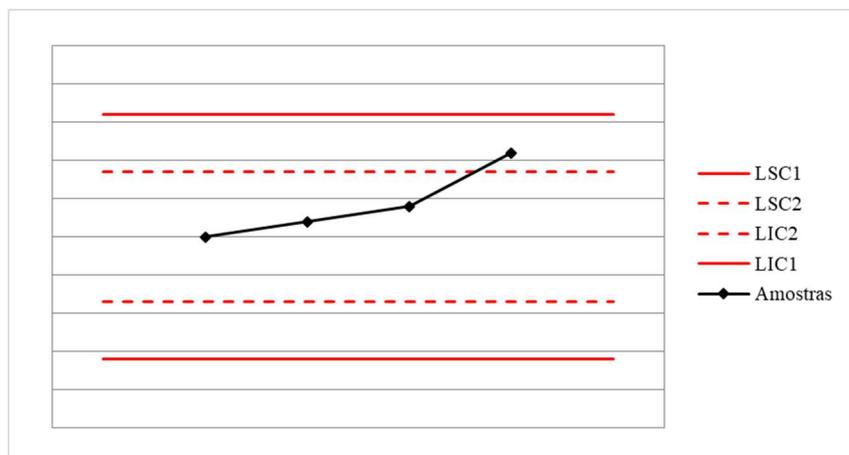


Figura 21 - Representação do estado 2 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CCWW

A última amostra caiu na região de advertência (W), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, considera-se que a amostra caiu na região de ação e têm-se o estado 6 em sua quinta representação, demonstrado na figura 22.

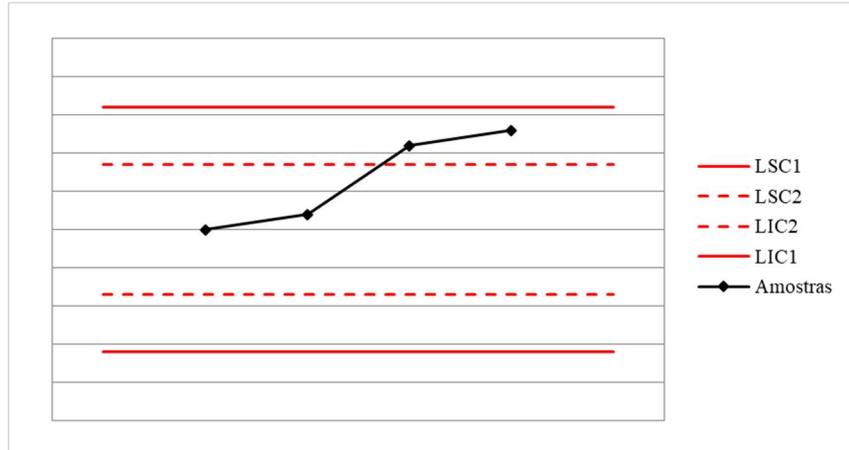


Figura 22 - Quinta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: CWCW

A última amostra caiu na região de advertência (W), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C). Como consequência, considera-se que a amostra caiu na região de ação e têm-se o estado 6 em sua sexta representação, demonstrado na figura 23.

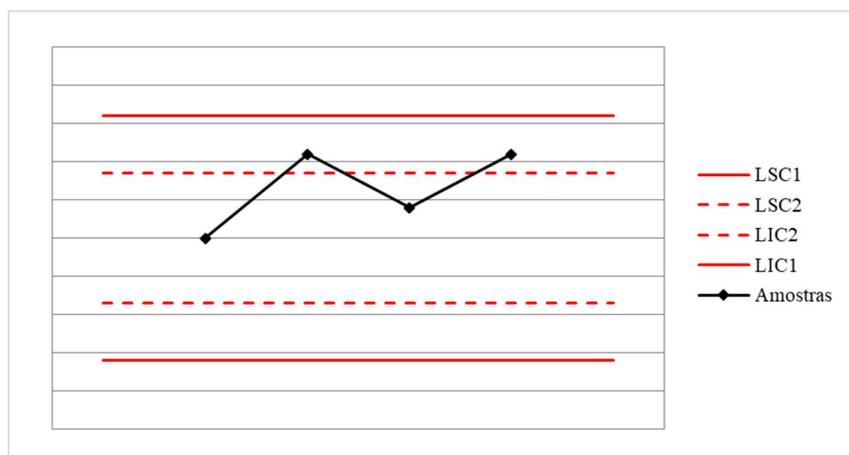


Figura 23 - Sexta representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

- Sequência das amostras: WCCW

A última amostra caiu na região de advertência (W), a primeira amostra antes da última amostra caiu na região de controle (C), a segunda amostra antes da última amostra caiu na

região de controle (C) e a terceira amostra antes da última amostra caiu na região de advertência (W). Como consequência, considera-se que a amostra caiu na região de ação e têm-se o estado 6 em sua sétima representação, demonstrado na figura 24.

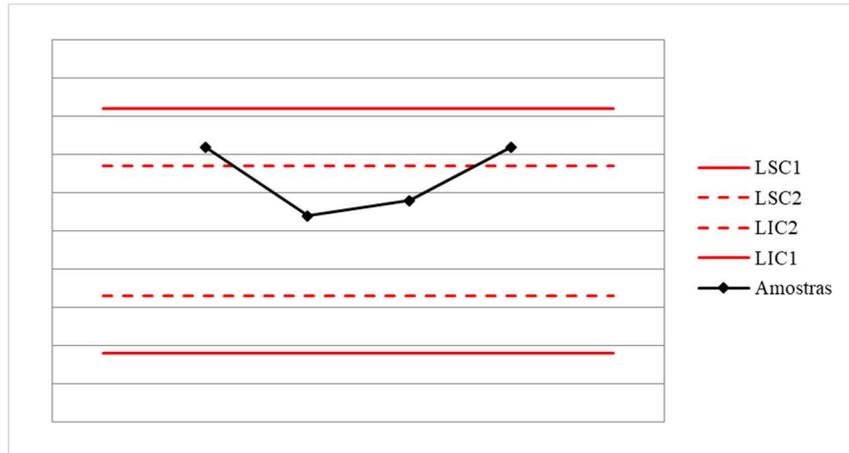


Figura 24 - Sétima representação do estado 6 da cadeia de Markov do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

As tabelas 02 a 05 mostram os estados de cada uma das demais combinações de m e h . A tabela 02 é da combinação $m = 3$ e $h = 2$, a tabela 03 é da combinação $m = h = 4$, a tabela 04 é da combinação $m = 4$ e $h = 3$, a tabela 05 é da combinação $m = 4$ e $h = 2$.

Tabela 2 - Estados para $m = 3$ e $h = 2$

Sequência das Amostras	Estados
CCCC	Estado 1
CCCW	Estado 2
CCWW	Estado 3
CCWC	Estado 4
CWWC	Estado 5
CWCW	Estado 6
CWCC	Estado 7
WWCC	Estado 8
WCWC	Estado 9
WCCW	Estado 10
WCCC	Estado 11
CCCA, CCWA, CWWA, CWWW, WWCA, WWCW, CWCA, WCWA, WCWW, WCCA	Estado 12

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 3 - Estados para $m = h = 4$

Sequência das Amostras	Estados
CCCCC	Estado 1
CCCCW	Estado 2
CCCWC	Estado 3
CCWCC	Estado 4
CWCCC	Estado 5
WCCCC	Estado 6
CCCCA, CCCWA, CCCWW, CCWCA, CCWCW, CWCCA, CWCCW, WCCCA, WCCCW	Estado 7

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 4 - Estados para $m = 4$ e $h = 3$

Sequência das Amostras	Estados
CCCCC	Estado 1
CCCCW	Estado 2
CCCWW	Estado 3
CCCWC	Estado 4
CCWWC	Estado 5
CCWCW	Estado 6
CCWCC	Estado 7
CWWCC	Estado 8
CWCWC	Estado 9
CWCCW	Estado 10
CWCCC	Estado 11
WWCCC	Estado 12
WCWCC	Estado 13
WCCWC	Estado 14
WCCCW	Estado 15
WCCCC	Estado 16
CCCCA, CCWWA, CCWWW, CWWCA, CWWCW, WWCCA, WWCCW, CCCWA, CCWCA, CWCWA, CWCWW, CWCCA, WCWCA, WCWCW, WCCWA, WCCWW, WCCCA	Estado 17

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 5 - Estados para $m = 4$ e $h = 2$

Sequência das Amostras	Estados
CCCCC	Estado 1
CCCCW	Estado 2
CCCWW	Estado 3
CCCWC	Estado 4
CCWWW	Estado 5
CCWWC	Estado 6
CCWCW	Estado 7
CCWCC	Estado 8
CWWWC	Estado 9
CWWCW	Estado 10
CWWCC	Estado 11
CWCWW	Estado 12
CWCWC	Estado 13
CWCCW	Estado 14
CWCCC	Estado 15
WWWCC	Estado 16
WWCWC	Estado 17
WWCCW	Estado 18
WWCCC	Estado 19
WCWWC	Estado 20
WCWCW	Estado 21
WCWCC	Estado 22
WCCWW	Estado 23
WCCWC	Estado 24
WCCCW	Estado 25
WCCCC	Estado 26
CCCCA, CCWWA, CWWWA, CWWW, WWWCA, WWWCW, WWCWA, WWCWW, CCCWA, CWWCA, WWCCA, WCWWA, WCWWW, CWCWA, WCWCA, CWCCA, WCCWA, CCWCA, WCCCA	Estado 27

Fonte: autoria própria (2023)

4.4. Definir os parâmetros da cadeia de Markov

Os parâmetros de abertura considerados se referem a $k_1 = 3,10$ e $k_2 = 2,36$, que resultam no $NMA_0 = 370,4$ quando o processo está em controle. Estes valores foram calculados por meio de função Atingir meta do *software* Excel. Adicionalmente, este primeiro caso considera $n = 5$ para o tamanho da amostra. O deslocamento δ varia de acordo com as faixas definidas no artigo de Rao *et al.* (2019), indo de 0 a 3.

Importante mencionar que os valores usados para k_1 e k_2 se referem a uma das possíveis combinações. Outras combinações que também resultam no $NMA_0 = 370,4$ quando o processo está em controle são:

- $k_1 = 3,50$ e $k_2 = 2,18$
- $k_1 = 3,60$ e $k_2 = 2,17$
- $k_1 = 3,70$ e $k_2 = 2,161$
- $k_1 = 3,80$ e $k_2 = 2,156$
- $k_1 = 3,90$ e $k_2 = 2,15$

4.5. Construir a matriz P

Com base nas setas da cadeia de Markov da figura 11 e nos estados da cadeia de Markov da figura 12 e da tabela 01, a matriz de probabilidades de transição está representada em 31 e 32.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & p_{16} \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & 0 & p_{26} \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} & 0 & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 1 - p_1 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 1 - p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 1 - p_1 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Sendo assim:

- $p_1 = p_{11} = p_{23} = p_{34} = p_{51} = P[LIC_2 \leq MS \leq LSC_2];$
- $p_2 = p_{12} = p_{52} = P[LIC_1 \leq MS \leq LIC_2] + P[LSC_2 \leq MS \leq LSC_1];$
- $p_3 = p_{16} = p_{56} = P[MS > LSC_1] + P[MS < LIC_1];$
- $p_{26} = 1 - p_{23};$
- $p_{36} = 1 - p_{34};$
- $p_{46} = 1 - p_{45}.$

Como resultado, a matriz \mathbf{P} com as probabilidades pode ser observada na figura 25. Estas probabilidades foram calculadas com base nos parâmetros de k_1 , k_2 e n .

\mathbf{P}	1	2	3	4	5	6
1	0,9816	0,0165	0	0	0	0,0019
2	0	0	0,9816	0	0	0,0184
3	0	0	0	0,9816	0	0,0184
4	0	0	0	0	0,9816	0,0184
5	0,9816	0,0165	0	0	0	0,0019
6	0	0	0	0	0	1

Figura 25 - Matriz \mathbf{P} do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

4.6. Calcular o vetor de probabilidades iniciais

O vetor de probabilidades iniciais π foi calculado através da equação 33 com o uso do Solver.

$$\pi \mathbf{P} = \pi \quad (33)$$

Na equação, a matriz \mathbf{P} representa a matriz calculada no passo anterior, com as probabilidades do estado 6 (estado absorvente) sendo somadas ao estado 1 (início do processo). Assim, a matriz vai de 6x6 para 5x5.

A figura 26 mostra os dados de entrada do Solver, na qual cada linha corresponde a um estado diferente. A última linha é igual a 1, de maneira que a soma das probabilidades do vetor π seja igual a 1. Em complemento, os valores iniciais do vetor são definidos como 0, para que o algoritmo Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) inicie neste ponto.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0	0	0	0

0,0165	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,9835
-0,0165	1	0	0	-0,0165
0	-0,9816	1	0	0
0	0	-0,9816	1	0
0	0	0	-0,9816	1
1	1	1	1	1

Figura 26 - Dados de entrada do Solver para o artigo

Fonte: autoria própria (2023)

Ao usar o Solver, têm-se o objetivo:

Max vetor π

Sujeito a: Soma da multiplicação de cada probabilidade inicial por cada probabilidade de transição = 0

Soma das probabilidades iniciais = 1

$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5 \geq 0$

Então, a figura 27 mostra os dados de saída do Solver, apresentando o vetor π .

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0,93896	0,01569	0,0154	0,01512	0,01484

0,0165	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,9835
-0,0165	1	0	0	-0,0165
0	-0,9816	1	0	0
0	0	-0,9816	1	0
0	0	0	-0,9816	1
1	1	1	1	1

Figura 27 - Dados de saída do Solver para o artigo

Fonte: autoria própria (2023)

4.7. Construir a matriz $(I - Q)^{-1}$

A matriz I é uma matriz identidade, 5x5 para este exemplo. Já a matriz Q é igual à matriz P com a última linha e a última coluna removidas (indo de 6x6 para 5x5). A matriz Q está representada em 34, a matriz $(I - Q)$ está representada em 35 e a matriz $(I - Q)^{-1}$ está representada em 36.

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} 1 - p_1 & -p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p_1 \\ -p_1 & -p_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{1 - p_1 - p_1^3 p_2} \begin{bmatrix} 1 - p_1^3 p_2 & p_2 & p_1 p_2 & p_1^2 p_2 & p_1^3 p_2 \\ p_1^4 & 1 - p_1 & p_1 - p_1^2 & p_1^2 - p_1^3 & p_1^3 - p_1^4 \\ p_1^3 & p_1^2 p_2 & 1 - p_1 & p_1 - p_1^2 & p_1^2 - p_1^3 \\ p_1^2 & p_1 p_2 & p_1^2 p_2 & 1 - p_1 & p_1 - p_1^2 \\ p_1 & p_2 & p_1 p_2 & p_1^2 p_2 & 1 - p_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Como resultado, a matriz $(I - Q)^{-1}$ com seus valores pode ser observada na figura 28.

$(I-Q)^{-1}$	1	2	3	4	5
1	348,281	5,82195	5,71487	5,60977	5,5066
2	328,471	6,5066	6,38694	6,26947	6,15417
3	334,625	5,60977	6,5066	6,38694	6,26947
4	340,895	5,71487	5,60977	6,5066	6,38694
5	347,281	5,82195	5,71487	5,60977	6,5066

Figura 28 - Matriz $(I - Q)^{-1}$ do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

A soma de cada linha gera o número esperado total de visitas para cada estado.

4.8. Calcular o NMA regras suplementares e regra básica

Por fim, o somatório da multiplicação do número esperado total de visitas para cada estado pela probabilidade inicial de cada estado gera o valor do NMA. A figura 29 mostra o NMA para este caso de $n = 5$ e $m = h = 3$.

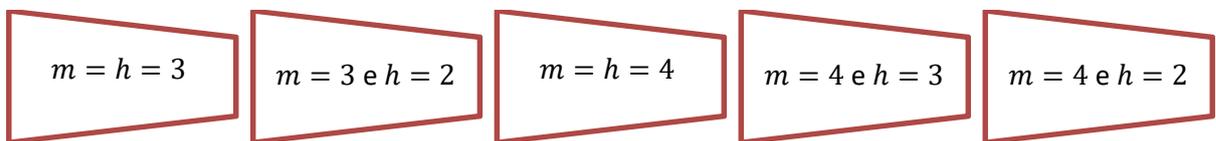
	Σ visitas	π
1	370,935	0,93896
2	353,788	0,01569
3	359,398	0,0154
4	365,113	0,01512
5	370,935	0,01484

$$\text{NMA} = \boxed{370,40}$$

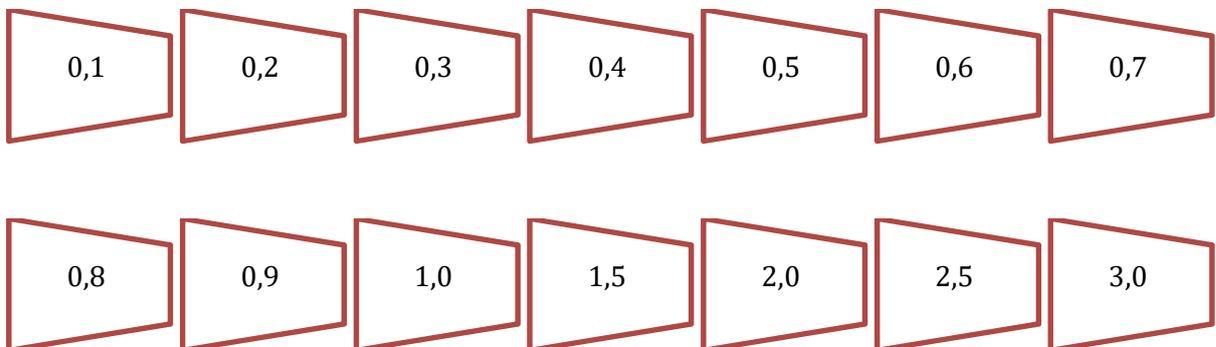
Figura 29 - NMA_0 do artigo

Fonte: autoria própria (2023)

Os cálculos descritos até o momento foram repetidos para diferentes combinações de m e h :



E para diferentes deslocamentos ($\Delta\sqrt{n}$):



Já o cálculo do NMA para o gráfico de \bar{X} é através das equações 37 e 38, para diferentes combinações de n , m e k e deslocamento. Este gráfico possui apenas 1 par de limites de controle, com $k = 3$, de maneira que $NMA_0 = 370,4$.

$$NMA_1 = 1/(1 - \beta) \quad (37)$$

$$\beta = 1 - p(X < k - \delta\sqrt{n}) - p(-k - \delta\sqrt{n}) \quad (38)$$

4.9. Comparar o NMA regras suplementares e regra básica

As tabelas 06 a 10 mostram os valores do NMA para os três gráficos de controle em análise, C_{pk} EDMG, \bar{X} EDMG e \bar{X} . A tabela 06 é da combinação $m = h = 3$, a tabela 07 é da combinação $m = 3$ e $h = 2$, a tabela 08 é da combinação $m = h = 4$, a tabela 09 é da combinação $m = 4$ e $h = 3$, a tabela 10 é da combinação $m = 4$ e $h = 2$.

Tabela 6 - NMA para $n = 5$ e $m = h = 3$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 5,5707$ $k_2 = 3,8828$ $m = 3, h = 3$	$k_1 = 3,10$ $k_2 = 2,36$ $m = 3, h = 3$	$k = 3,00$ N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,01	370,40	370,40
0,1	278,83	351,40	352,93
0,2	212,64	303,21	308,43
0,3	163,97	243,90	253,14
0,4	127,74	187,80	200,08
0,5	100,46	141,33	155,22
0,6	79,71	105,43	119,67
0,7	63,76	78,65	92,32
0,8	51,41	59,01	71,55
0,9	41,75	44,66	55,83
1,0	34,16	34,18	43,89
1,5	13,91	10,90	14,97
2,0	6,72	4,79	6,30
2,5	3,83	2,72	3,24
3,0	2,52	1,85	2,00

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 7 - NMA para $n = 5$ e $m = 3$ e $h = 2$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 5,7263$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 1,7355$	$k_2 = 1,82$	
	$m = 3, h = 2$	$m = 3, h = 2$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,01	370,40	370,40
0,1	264,41	351,61	352,93
0,2	186,52	303,73	308,43
0,3	130,10	244,40	253,14
0,4	90,04	187,85	200,08
0,5	62,17	140,73	155,22
0,6	43,08	104,20	119,67
0,7	30,14	76,97	92,32
0,8	21,38	57,07	71,55
0,9	15,45	42,68	55,83
1,0	11,39	32,29	43,89
1,5	3,47	10,03	14,97
2,0	1,75	4,55	6,30
2,5	1,25	2,72	3,24
3,0	1,09	1,91	2,00

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 8 - NMA para $n = 5$ e $m = h = 4$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 5,6231$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 4,3735$	$k_2 = 2,40$	
	$m = 4, h = 4$	$m = 4, h = 4$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,00	370,40	370,40
0,1	285,25	351,27	352,93
0,2	222,52	302,79	308,43
0,3	175,48	243,22	253,14
0,4	139,79	186,98	200,08
0,5	112,38	140,51	155,22
0,6	91,13	104,69	119,67
0,7	74,48	78,03	92,32
0,8	61,33	58,51	71,55
0,9	50,85	44,28	55,83
1,0	42,44	33,90	43,89
1,5	18,80	10,90	14,97
2,0	9,54	4,83	6,30
2,5	5,50	2,75	3,24
3,0	3,56	1,86	2,00

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 9 - NMA para $n = 5$ e $m = 4$ e $h = 3$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 5,3922$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 3,2858$	$k_2 = 1,91$	
	$m = 4, h = 3$	$m = 4, h = 3$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,01	370,40	370,40
0,1	276,39	351,23	352,93
0,2	209,31	302,51	308,43
0,3	160,61	242,34	253,14
0,4	124,70	185,28	200,08
0,5	97,84	138,00	155,22
0,6	77,45	101,58	119,67
0,7	61,77	74,63	92,32
0,8	49,57	55,10	71,55
0,9	39,98	41,06	55,83
1,0	32,38	31,01	43,89
1,5	11,92	9,72	14,97
2,0	5,06	4,51	6,30
2,5	2,68	2,73	3,24
3,0	1,77	1,91	2,00

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 10 - NMA para $n = 5$ e $m = 4$ e $h = 2$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 5,3922$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 3,2858$	$k_2 = 1,52$	
	$m = 4, h = 2$	$m = 4, h = 2$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,01	370,40	370,40
0,1	274,19	351,80	352,93
0,2	206,17	304,30	308,43
0,3	157,35	245,20	253,14
0,4	121,84	188,62	200,08
0,5	95,65	141,26	155,22
0,6	76,06	104,42	119,67
0,7	61,21	76,90	92,32
0,8	47,82	56,81	71,55
0,9	38,98	42,30	55,83
1,0	32,03	31,88	43,89
1,5	11,19	9,92	14,97
2,0	4,88	4,66	6,30
2,5	2,10	2,86	3,24
3,0	1,58	1,99	2,00

Fonte: autoria própria (2023)

A comparação dos gráficos de controle de C_{pk} EDMG e \bar{X} EDMG, que usam a regra suplementar de decisão EDMG (primeira análise), mostra que:

- Para a combinação $m = h = 3$, a partir do deslocamento 1,5 o gráfico de \bar{X} EDMG possui o melhor desempenho;
- Para a combinação $m = 3$ e $h = 2$, o gráfico de C_{pk} EDMG possui desempenho superior em todos os deslocamentos considerados;
- Para a combinação $m = h = 4$, a partir do deslocamento 0,8 o gráfico de \bar{X} EDMG possui o melhor desempenho;
- Para a combinação $m = 4$ e $h = 3$, a partir do deslocamento 1,0 o gráfico de \bar{X} EDMG possui o melhor desempenho;
- Para a combinação $m = 4$ e $h = 2$, a partir do deslocamento 1,0 o gráfico de \bar{X} EDMG possui o melhor desempenho.

Já a comparação dos gráficos de controle de C_{pk} EDMG, \bar{X} EDMG e \bar{X} , que altera a métrica do gráfico e o uso da regra suplementar de decisão EDMG (segunda análise), mostra que:

- Para a combinação $m = h = 3$, o gráfico de \bar{X} possui desempenho superior ao C_{pk} EDMG a partir do deslocamento 2,0;
- Para a combinação $m = 3$ e $h = 2$, o gráfico de \bar{X} possui desempenhos inferiores em todos os deslocamentos considerados;
- Para a combinação $m = h = 4$, o gráfico de \bar{X} possui desempenho superior ao C_{pk} EDMG a partir do deslocamento 2,0;
- Para a combinação $m = 4$ e $h = 3$, o gráfico de \bar{X} possui desempenhos inferiores em todos os deslocamentos considerados;
- Para a combinação $m = 4$ e $h = 2$, o gráfico de \bar{X} possui desempenhos inferiores em todos os deslocamentos considerados.

Com o intuito de ampliar a comparação entre os gráficos de controle, os passos de 2 a 9 foram replicados para $n = 10$. As tabelas 11 a 15 mostram os valores do NMA para os três gráficos de controle em análise, C_{pk} EDMG, \bar{X} EDMG e \bar{X} . A tabela 11 é da combinação $m = h = 3$, a tabela 12 é da combinação $m = 3$ e $h = 2$, a tabela 13 é da combinação $m = h = 4$, a tabela 14 é da combinação $m = 4$ e $h = 3$, a tabela 15 é da combinação $m = 4$ e $h = 2$.

Tabela 11 - NMA para $n = 10$ e $m = h = 3$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 4,4499$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 3,4838$	$k_2 = 2,36$	
	$m = 3, h = 3$	$m = 3, h = 3$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,00	370,40	370,40
0,1	250,62	351,40	342,59
0,2	172,60	303,21	299,39
0,3	120,70	243,90	245,72
0,4	85,62	187,80	194,22
0,5	61,55	141,33	150,68
0,6	44,84	105,43	116,16
0,7	33,09	78,65	89,62
0,8	24,74	59,01	69,46
0,9	18,75	44,66	54,19
1,0	14,41	34,18	42,61
1,5	4,82	10,90	14,53
2,0	2,34	4,79	6,12
2,5	1,54	2,72	3,15
3,0	1,22	1,85	1,94

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 12 - NMA para $n = 10$ e $m = 3$ e $h = 2$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 4,1956$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 3,4306$	$k_2 = 1,82$	
	$m = 3, h = 2$	$m = 3, h = 2$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,02	370,40	370,40
0,1	225,81	351,61	342,59
0,2	142,27	303,73	299,39
0,3	92,36	244,40	245,72
0,4	61,66	187,85	194,22
0,5	42,24	140,73	150,68
0,6	29,62	104,20	116,16
0,7	21,22	76,97	89,62
0,8	15,49	57,08	69,46
0,9	11,51	42,68	54,19
1,0	8,69	32,29	42,61
1,5	2,76	10,03	14,53
2,0	1,44	4,55	6,12
2,5	1,11	2,72	3,15
3,0	1,03	1,91	1,94

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 13 - NMA para $n = 10$ e $m = h = 4$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 4,6009$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 2,8239$	$k_2 = 2,40$	
	$m = 4, h = 4$	$m = 4, h = 4$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,02	370,40	370,40
0,1	214,88	351,27	342,59
0,2	126,71	302,79	299,39
0,3	76,20	243,22	245,72
0,4	46,95	186,98	194,22
0,5	29,76	140,51	150,68
0,6	19,48	104,69	116,16
0,7	13,20	78,03	89,62
0,8	9,28	58,51	69,46
0,9	6,76	44,28	54,19
1,0	5,11	33,91	42,61
1,5	2,00	10,90	14,53
2,0	1,31	4,83	6,12
2,5	1,09	2,75	3,15
3,0	1,02	1,86	1,94

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 14 - NMA para $n = 10$ e $m = 4$ e $h = 3$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 3,9897$	$k_1 = 3,10$	$k = 3,00$
	$k_2 = 2,6442$	$k_2 = 1,91$	
	$m = 4, h = 3$	$m = 4, h = 3$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,04	370,40	370,40
0,1	207,85	351,23	342,59
0,2	119,77	302,51	299,39
0,3	70,44	242,34	245,72
0,4	41,94	185,28	194,22
0,5	25,19	138,00	150,68
0,6	15,32	101,58	116,16
0,7	9,55	74,63	89,62
0,8	6,19	55,10	69,46
0,9	4,22	41,06	54,19
1,0	3,05	31,01	42,61
1,5	1,29	9,72	14,53
2,0	1,05	4,51	6,12
2,5	1,00	2,73	3,15
3,0	1,00	1,91	1,94

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 15 - NMA para $n = 10$ e $m = 4$ e $h = 2$

Deslocamento	C_{pk} EDMG	\bar{X} EDMG	\bar{X}
	$k_1 = 4, 1077$	$k_1 = 3, 10$	$k = 3, 00$
	$k_2 = 1, 5403$	$k_2 = 1, 52$	
	$m = 4, h = 2$	$m = 4, h = 2$	N/A
	NMA_1	NMA_1	NMA_1
0,0	370,03	370,40	370,40
0,1	206,65	351,80	342,59
0,2	107,53	304,30	299,39
0,3	52,63	245,20	245,72
0,4	25,01	188,62	194,22
0,5	12,24	141,26	150,68
0,6	6,50	104,42	116,16
0,7	3,84	76,90	89,62
0,8	2,53	56,81	69,46
0,9	1,86	42,30	54,19
1,0	1,49	31,88	42,61
1,5	1,03	9,92	14,53
2,0	1,00	4,66	6,12
2,5	1,00	2,86	3,15
3,0	1,00	1,99	1,94

Fonte: autoria própria (2023)

A comparação dos gráficos de controle de C_{pk} EDMG e \bar{X} EDMG, que usam a regra suplementar de decisão EDMG (primeira análise), mostra que:

- Para as combinações $m = h = 3$, $m = 3$ e $h = 2$, $m = h = 4$, $m = 4$ e $h = 3$ e $m = 4$ e $h = 2$, o gráfico de C_{pk} EDMG possui desempenho superior em todos os deslocamentos considerados.

Já a comparação dos gráficos de controle de C_{pk} EDMG, \bar{X} EDMG e \bar{X} , que altera a métrica do gráfico e o uso da regra suplementar de decisão EDMG (segunda análise), mostra que:

- Para as combinações $m = h = 3$, $m = 3$ e $h = 2$, $m = h = 4$, $m = 4$ e $h = 3$ e $m = 4$ e $h = 2$, o gráfico de \bar{X} possui desempenho inferior em todos os deslocamentos considerados.

As figuras 30 a 34 agregam os desempenhos dos gráficos de controle para $n = 5$ e $n = 10$, permitindo uma análise de caráter global. A figura 30 é da combinação $m = h = 3$, a figura 31 é da combinação $m = 3$ e $h = 2$, a figura 32 é da combinação $m = h = 4$, a figura 33 é da combinação $m = 4$ e $h = 3$, a figura 34 é da combinação $m = 4$ e $h = 2$.

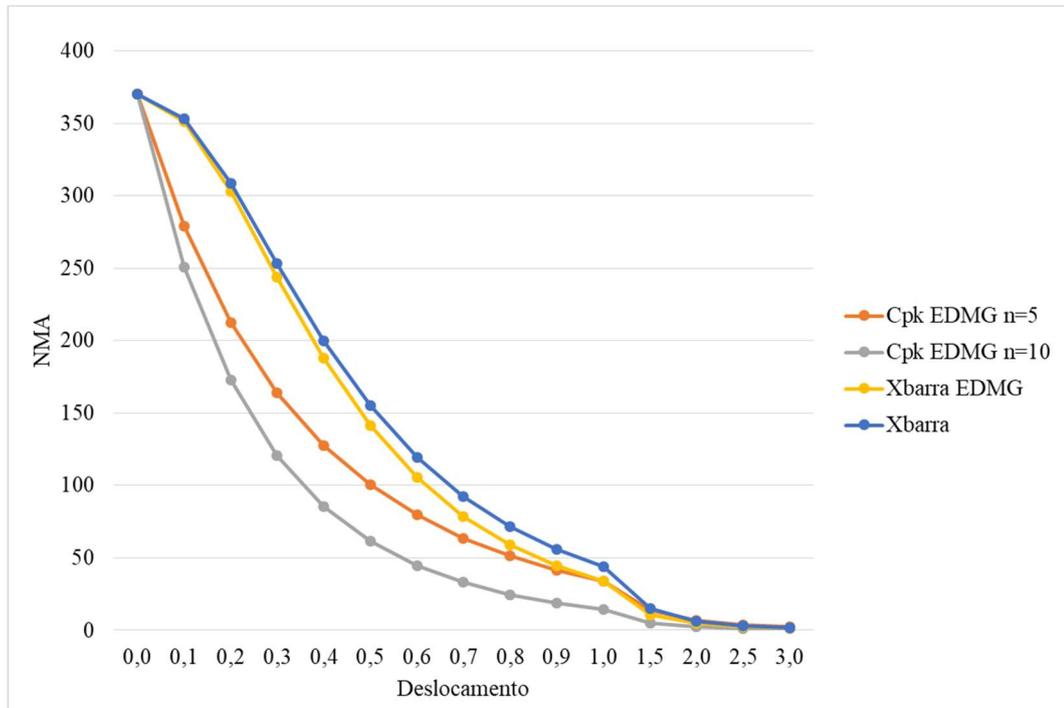


Figura 30 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $m = h = 3$

Fonte: autoria própria (2023)

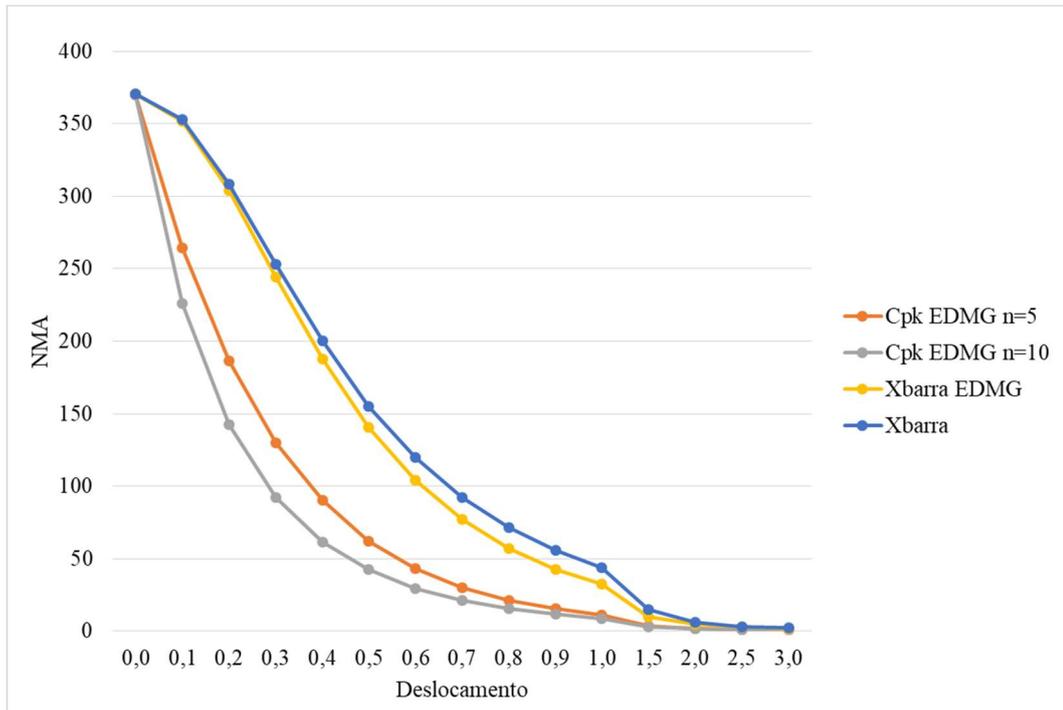


Figura 31 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $m = 3$ e $h = 2$

Fonte: autoria própria (2023)

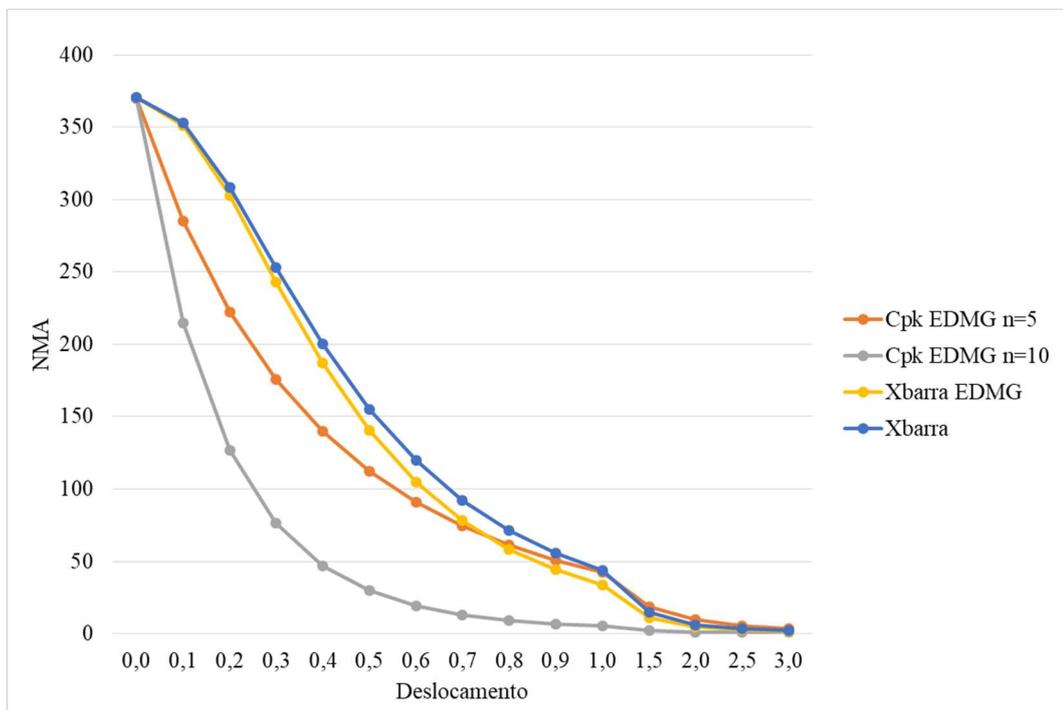


Figura 32 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $m = h = 4$

Fonte: autoria própria (2023)

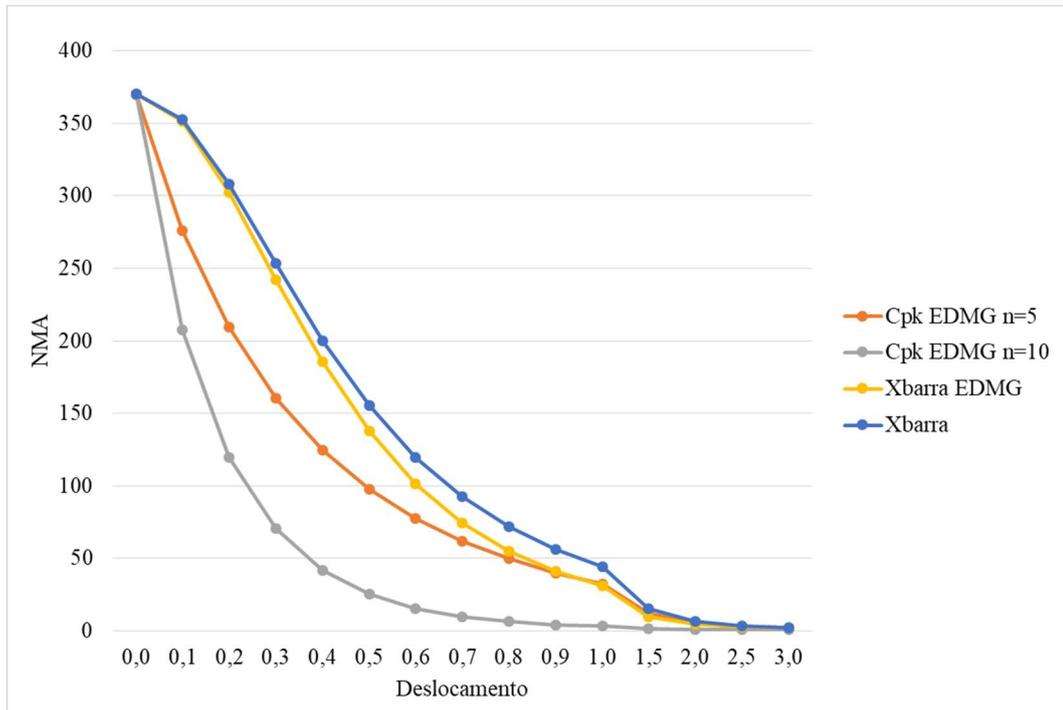


Figura 33 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $m = 4$ e $h = 3$

Fonte: autoria própria (2023)

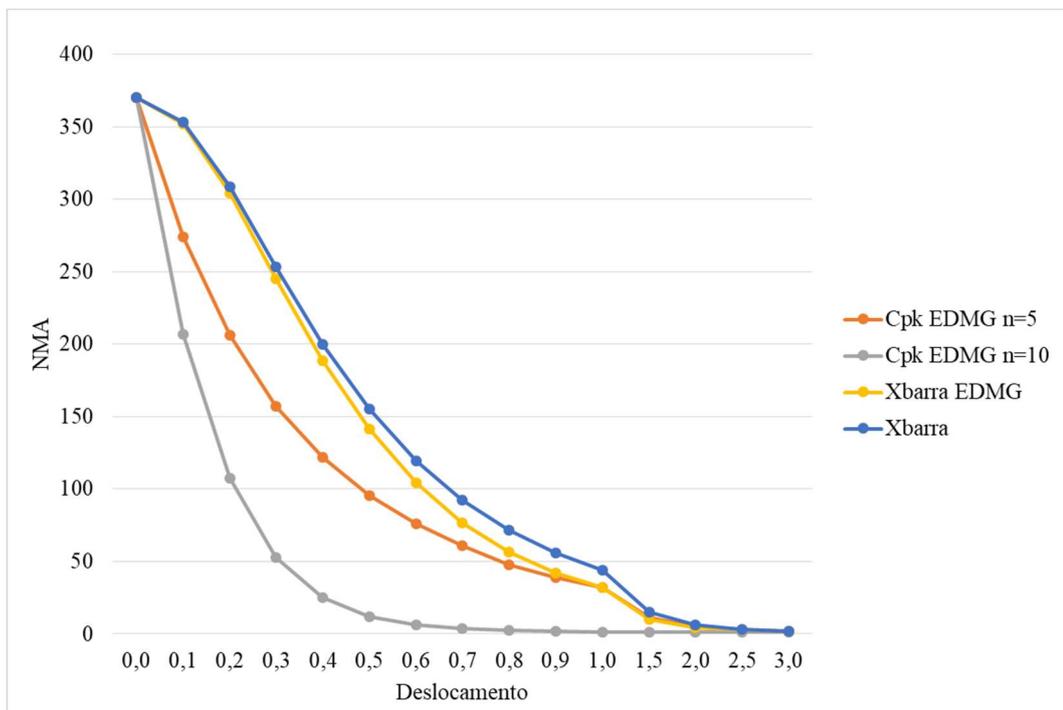


Figura 34 - NMA dos gráficos analisados para a combinação $m = 4$ e $h = 2$

Fonte: autoria própria (2023)

Em se tratando da primeira análise, para deslocamentos da média, a substituição do gráfico de \bar{X} EDMG pelo gráfico de C_{pk} EDMG nem sempre é a melhor alternativa, vide os resultados obtidos para $n = 5$. Caso as combinações em análise sejam $n = 5$ e $m = 3$ e $h = 2$ ou qualquer combinação referente a $n = 10$, o gráfico de C_{pk} EDMG deve ser escolhido, pois possui o melhor desempenho em todos os deslocamentos considerados. Entretanto, caso outras combinações estejam em análise, o desempenho do gráfico de \bar{X} EDMG supera o desempenho do gráfico de C_{pk} EDMG a partir de deslocamentos de 1,0 em média. Portanto, a complexidade de cálculo trazida pela introdução do índice de capacidade nem sempre produz os melhores resultados.

Em se tratando da segunda análise, para deslocamentos da média, o uso de regras suplementares de decisão em geral resulta em gráficos de controle com desempenho superior. Portanto, a complexidade de cálculo trazida pela introdução da regra suplementar de decisão em geral produz os melhores resultados, sendo em alguns casos o gráfico de C_{pk} EDMG o gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados e em outros casos o gráfico de \bar{X} EDMG o gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados.

Os dois casos nos quais o gráfico de \bar{X} superou o gráfico de C_{pk} EDMG consideram grandes deslocamentos da média (a partir de 2,0), o que confirma o conceito que o gráfico de \bar{X} não possui bom desempenho em se tratando de pequenos deslocamentos. Entretanto, caso a regra suplementar de decisão EDMG seja aplicada em conjunto com o gráfico de \bar{X} , seu desempenho melhora consideravelmente, como mostram as tabelas 16 e 17.

Tabela 16 - Melhora do desempenho do gráfico de \bar{X} com inclusão do EDMG para $n = 5$

Deslocamento	$m = h = 3$	$m = 3$ e $h = 2$	$m = h = 4$	$m = 4$ e $h = 3$	$m = 4$ e $h = 2$
0,0	0%	0%	0%	0%	0%
0,1	0%	0%	0%	0%	0%
0,2	2%	2%	2%	2%	1%
0,3	4%	3%	4%	4%	3%
0,4	6%	6%	7%	7%	6%
0,5	9%	9%	9%	11%	9%
0,6	12%	13%	13%	15%	13%
0,7	15%	17%	15%	19%	17%
0,8	18%	20%	18%	23%	21%
0,9	20%	24%	21%	26%	24%
1,0	22%	26%	23%	29%	27%
1,5	27%	33%	27%	35%	34%
2,0	24%	28%	23%	28%	26%
2,5	16%	16%	15%	16%	12%
3,0	8%	5%	7%	4%	0%

Fonte: autoria própria (2023)

Tabela 17 - Melhora do desempenho do gráfico de \bar{X} com inclusão do EDMG para $n = 10$

Deslocamento	$m = h = 3$	$m = 3$ e $h = 2$	$m = h = 4$	$m = 4$ e $h = 3$	$m = 4$ e $h = 2$
0,0	0%	0%	0%	0%	0%
0,1	0%	0%	0%	0%	0%
0,2	2%	2%	2%	2%	1%
0,3	4%	3%	4%	4%	3%
0,4	6%	6%	7%	7%	6%
0,5	9%	9%	9%	11%	9%
0,6	12%	13%	13%	15%	13%
0,7	15%	17%	15%	19%	17%
0,8	18%	20%	18%	23%	21%
0,9	20%	24%	21%	26%	24%
1,0	22%	26%	23%	29%	27%
1,5	27%	33%	27%	35%	34%
2,0	24%	28%	23%	28%	26%
2,5	16%	16%	15%	16%	12%
3,0	8%	5%	7%	4%	0%

Fonte: autoria própria (2023)

O artigo de Rao *et al.* (2019) apresenta os valores de NMA do gráfico de C_{pk} EDMG apenas para $n = 5$ e $n = 10$. Para uma análise complementar, o desempenho do gráfico de \bar{X} EDMG foi verificando considerando o intervalo de $n = 1$ até $n = 10$. As figuras 35 a 44 demonstram os valores de NMA resultantes, para as combinações de $m = h = 3$, $m = 3$ e $h = 2$, $m = h = 4$, $m = 4$ e $h = 3$, $m = 4$ e $h = 2$. A figura 35 é do $n = 1$, a figura 36 é do $n = 2$, a figura 37 é do $n = 3$, a figura 38 é do $n = 4$, a figura 39 é do $n = 5$, a figura 40 é do $n = 6$, a figura 41 é do $n = 7$, a figura 42 é do $n = 8$, a figura 43 é do $n = 9$, a figura 44 é do $n = 10$.

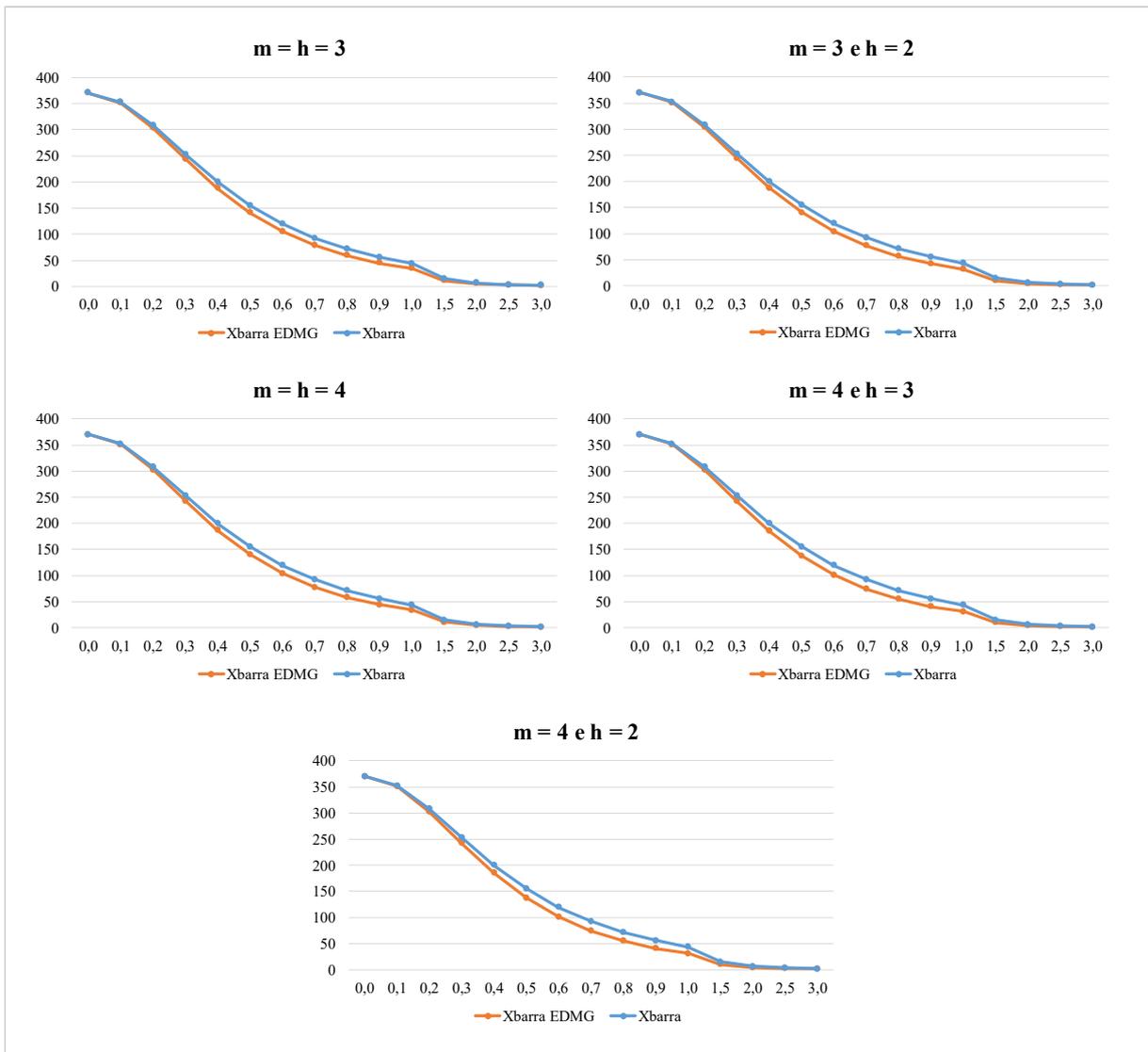


Figura 35 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 1$

Fonte: autoria própria (2023)

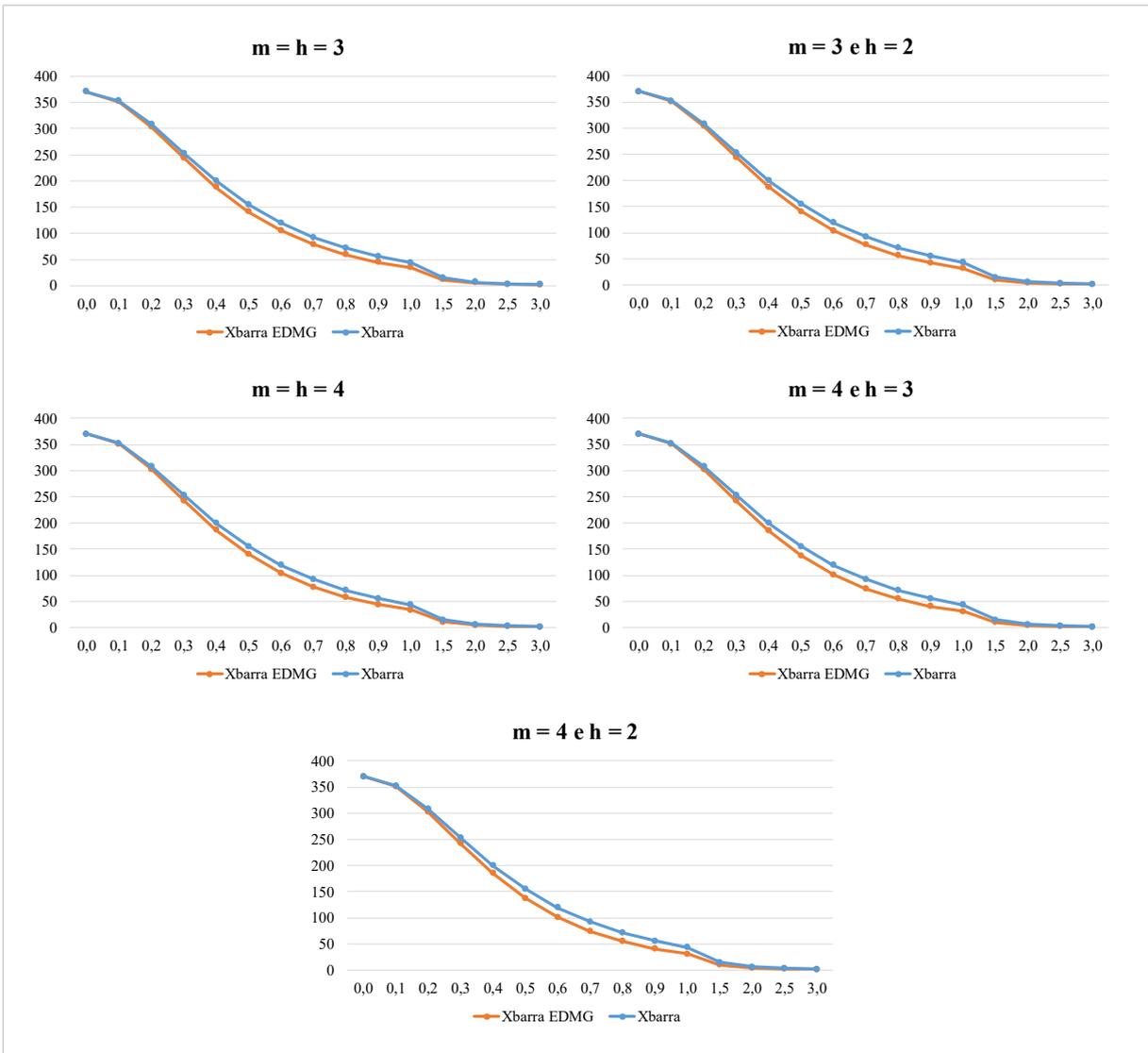


Figura 36 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 2$

Fonte: autoria própria (2023)

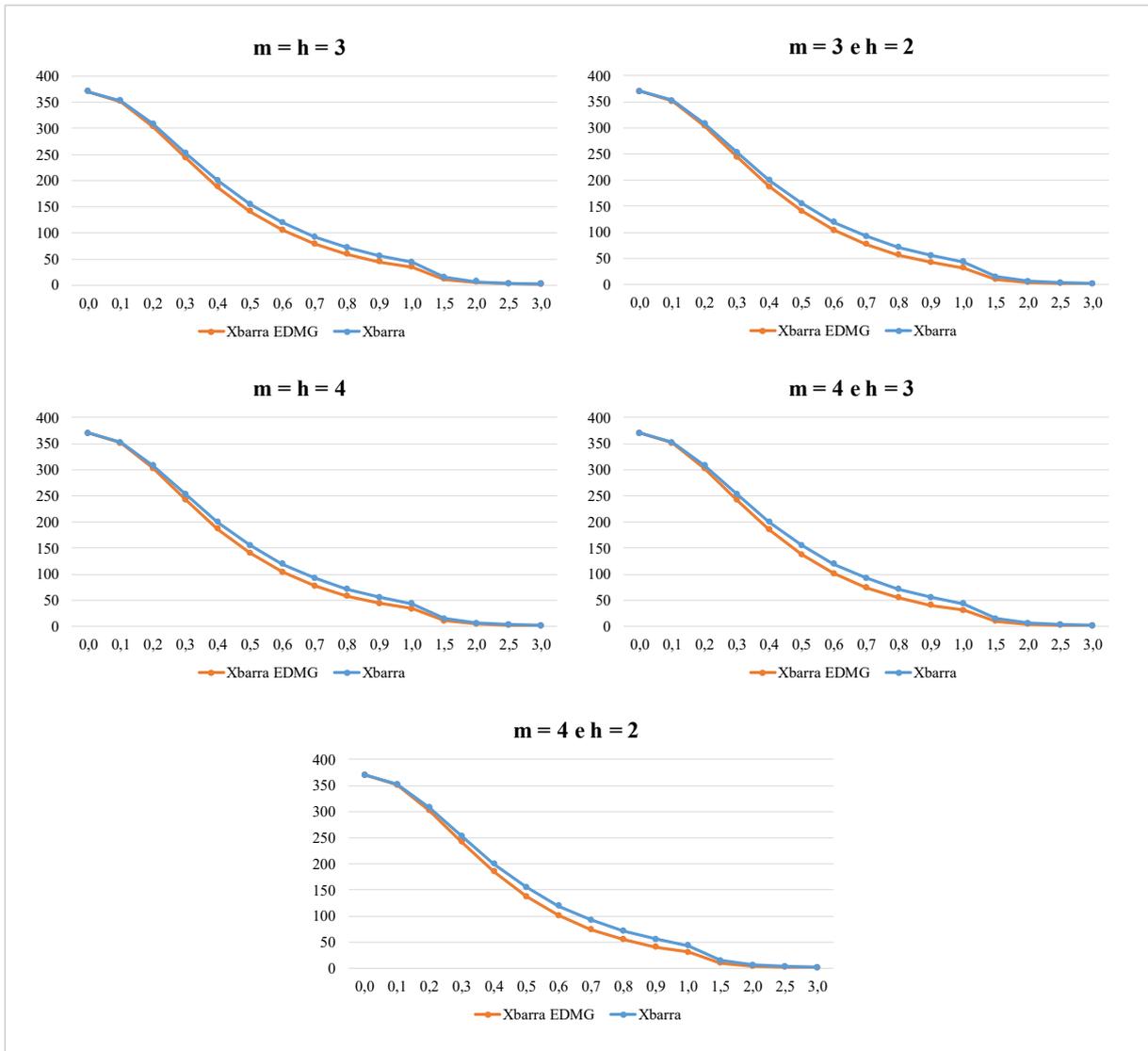


Figura 37 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 3$

Fonte: autoria própria (2023)

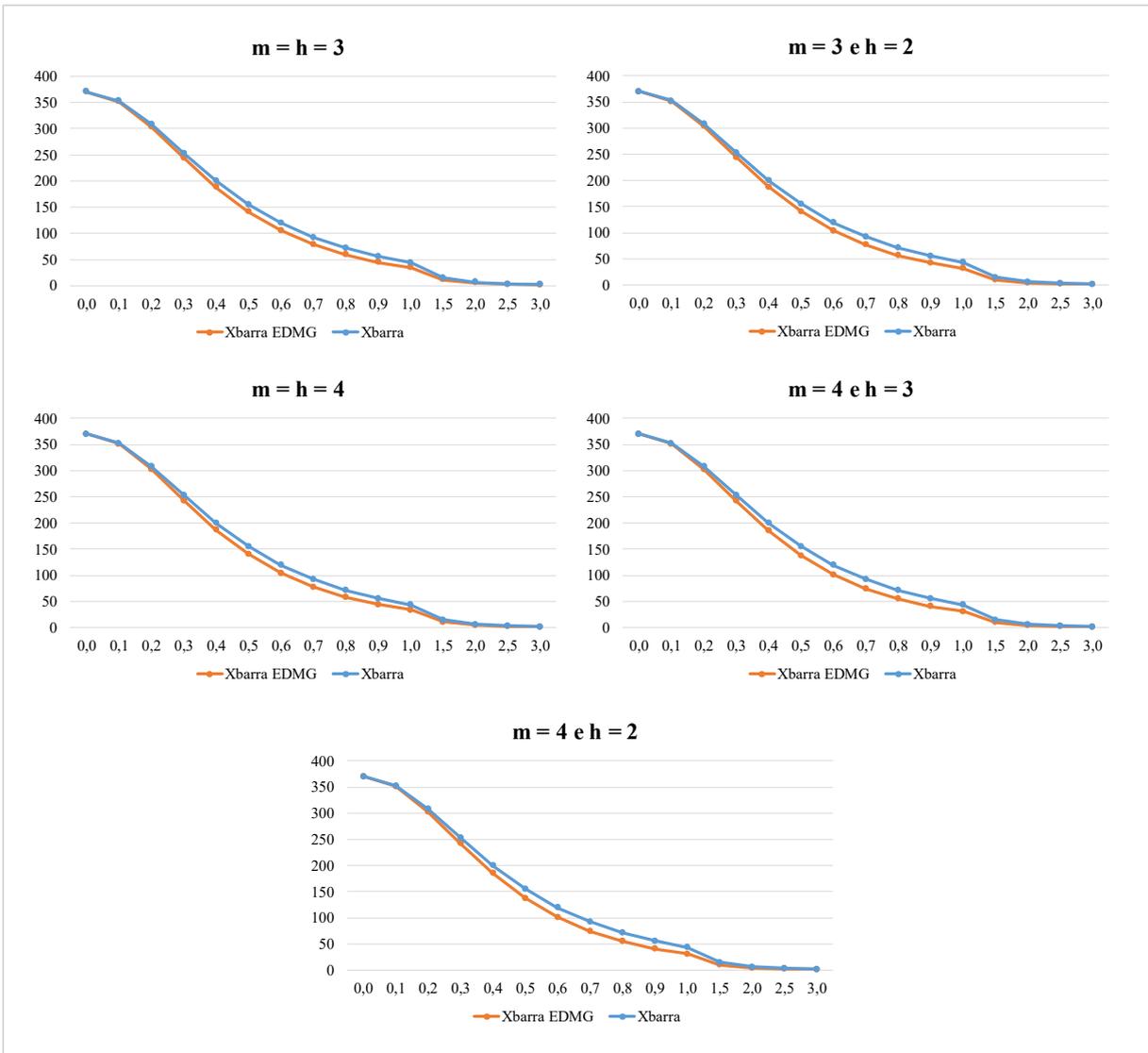


Figura 38 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 4$

Fonte: autoria própria (2023)

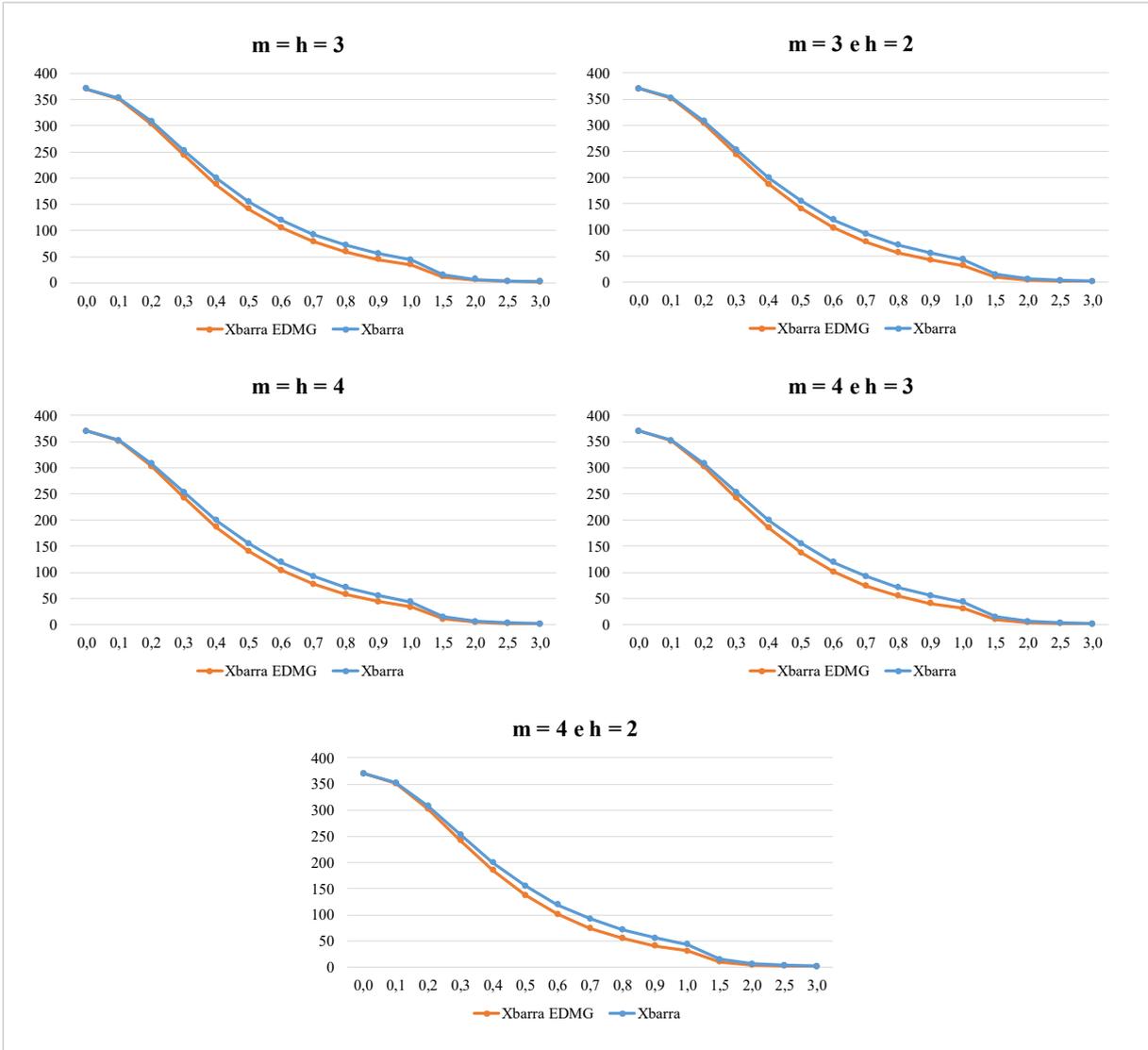


Figura 39 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 5$

Fonte: autoria própria (2023)

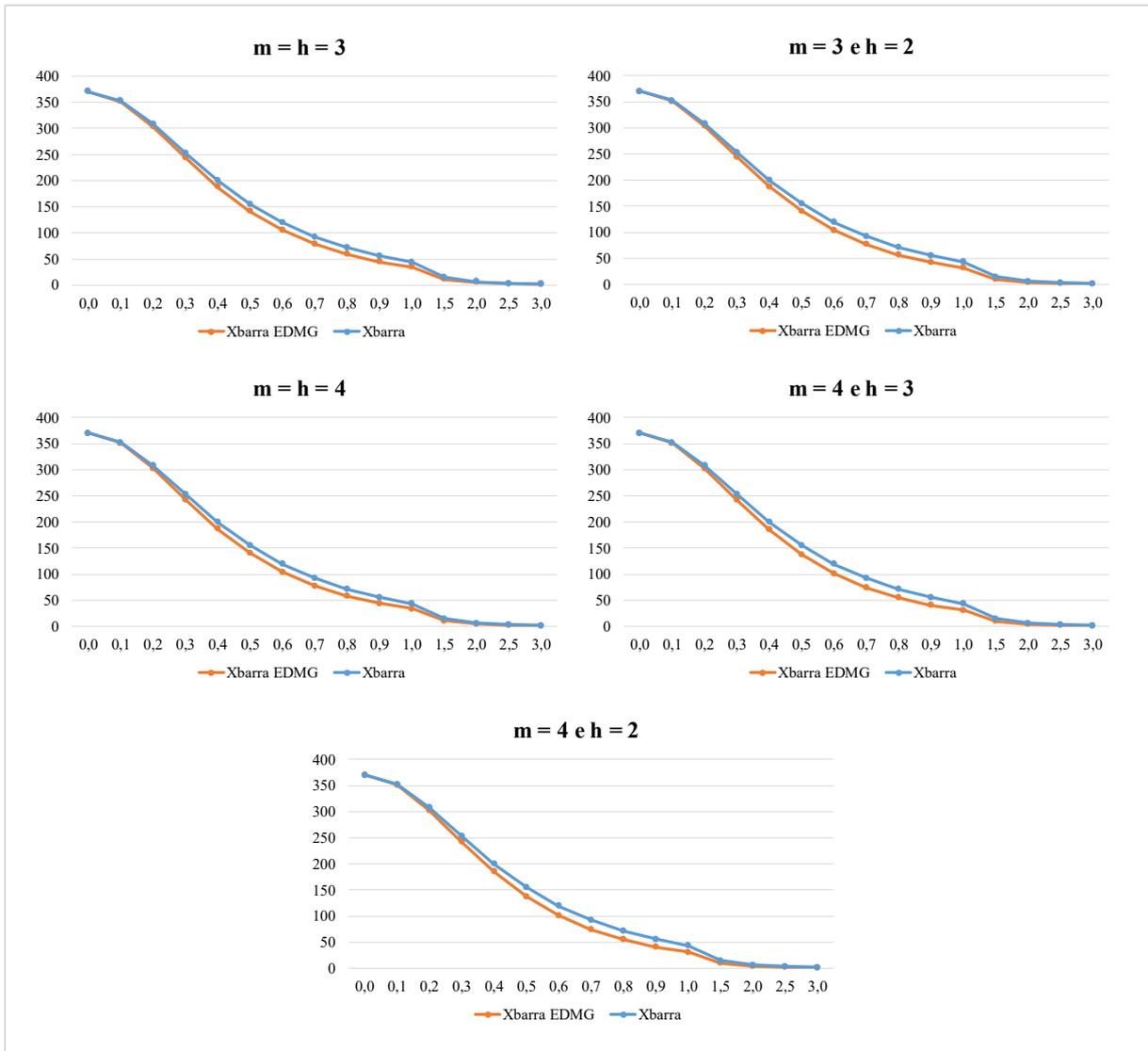


Figura 40 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 6$

Fonte: autoria própria (2023)

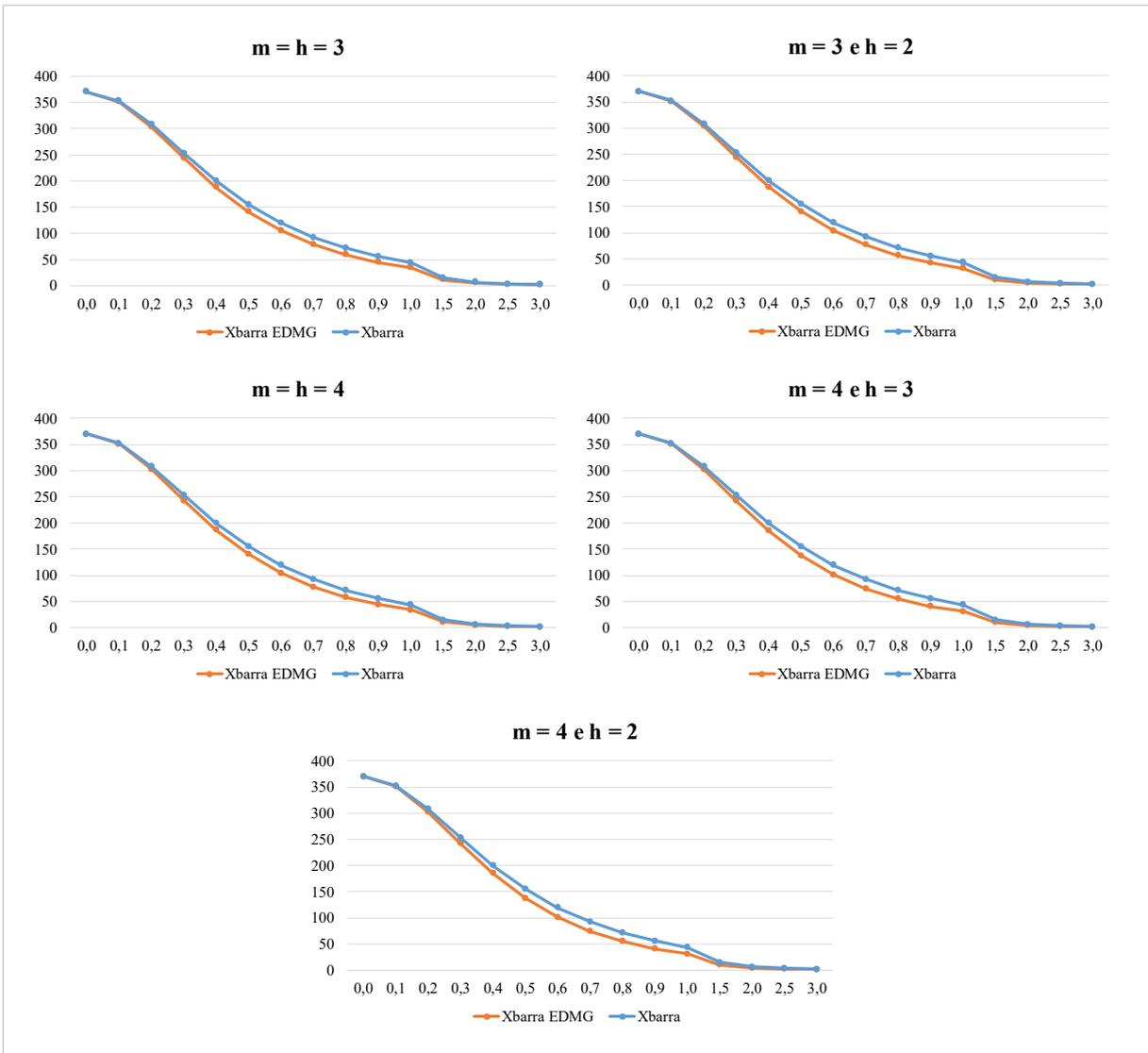


Figura 41 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 7$

Fonte: autoria própria (2023)

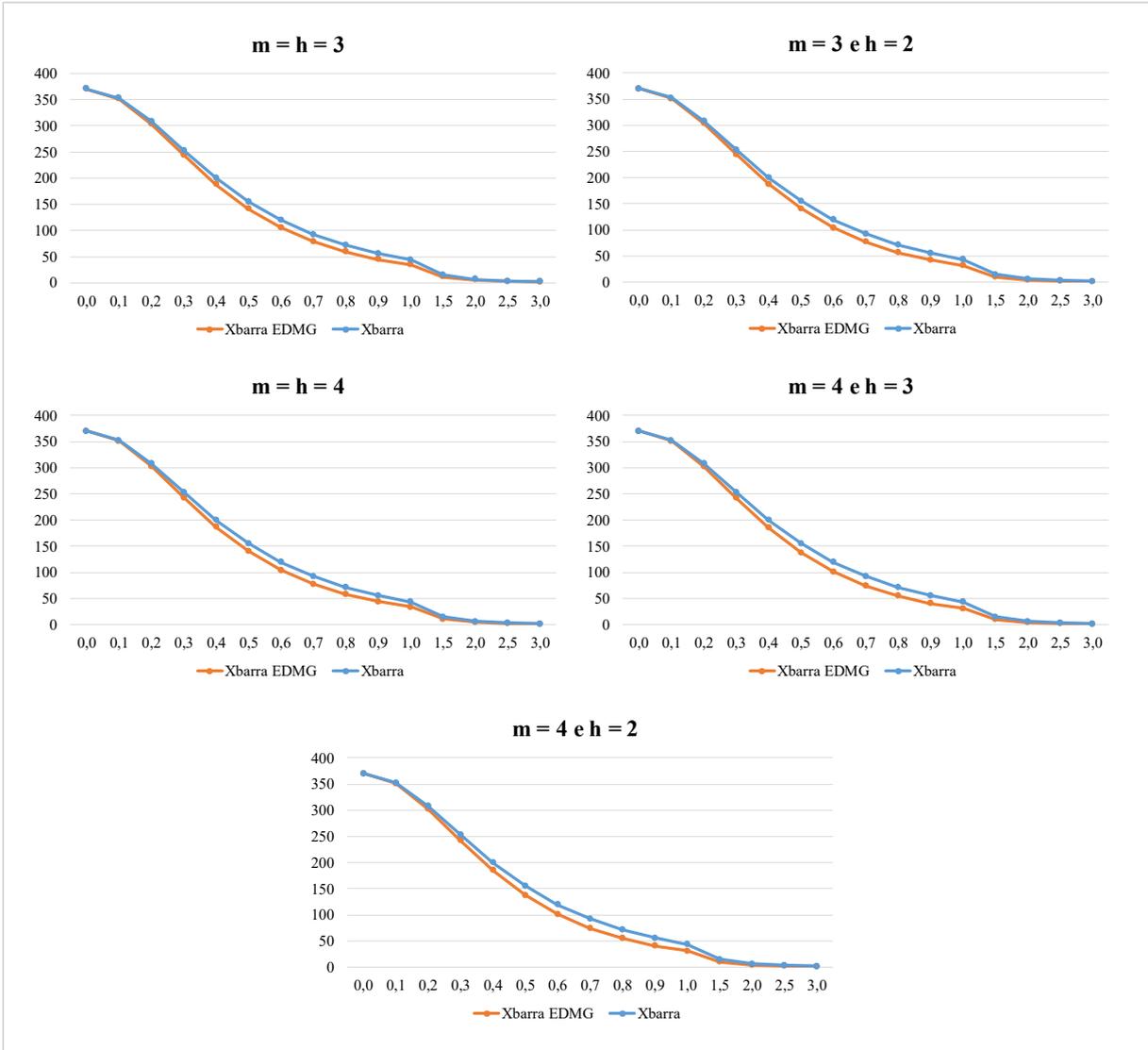


Figura 42 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 8$

Fonte: autoria própria (2023)

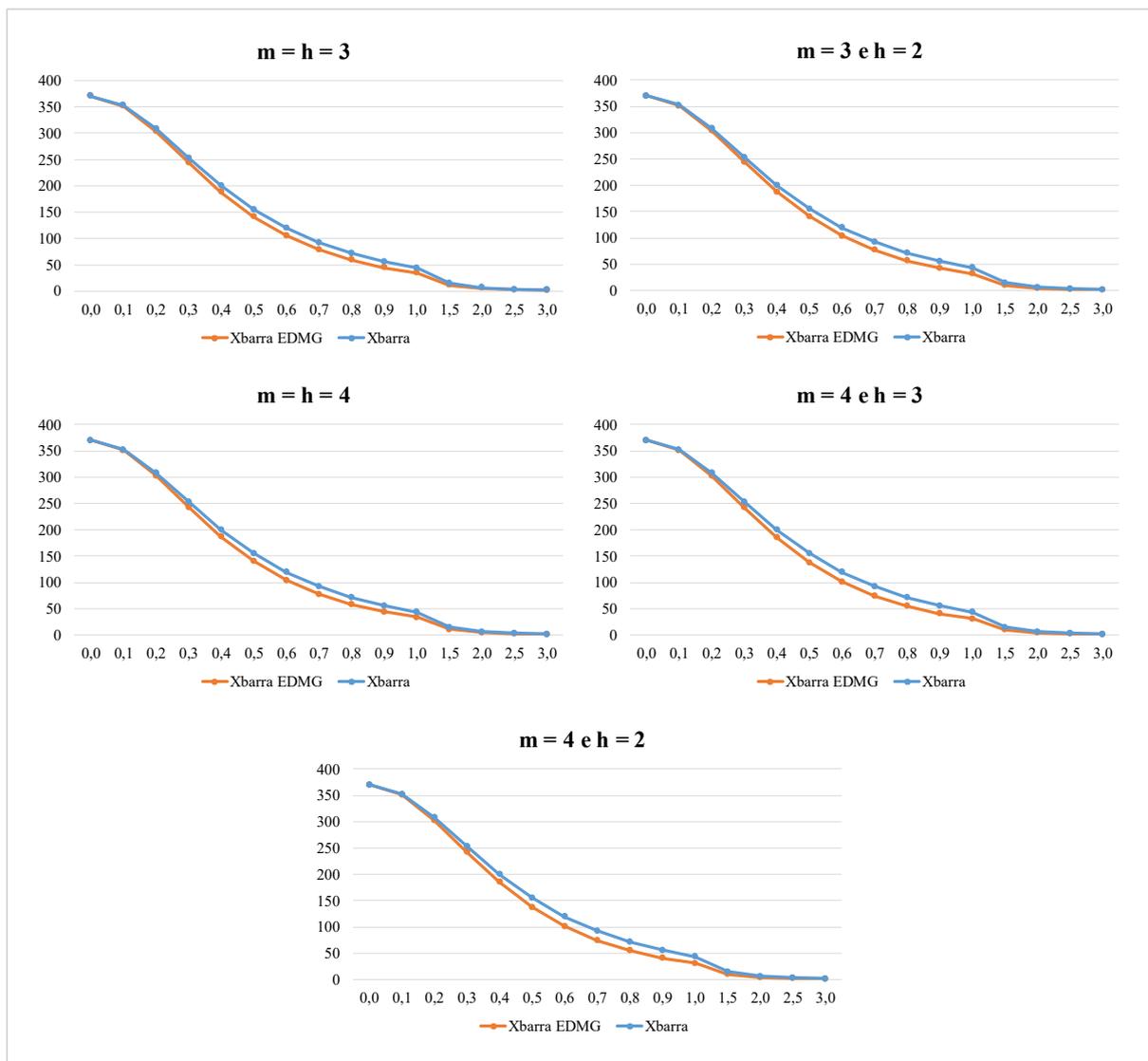


Figura 44 - NMA dos gráficos de controle de \bar{X} EDMG e \bar{X} para $n = 10$

Fonte: autoria própria (2023)

Estas figuras corroboram com os resultados da segunda análise apresentados anteriormente, reforçando que a complexidade de cálculo trazida pela introdução da regra suplementar de decisão produz os melhores resultados. Comparando-se unicamente os gráficos de \bar{X} EDMG e \bar{X} , o gráfico com a regra suplementar de decisão EDMG possui desempenho superior em todos os cenários considerados.

Por fim, os resultados apresentados nesta seção permitem a análise das hipóteses de pesquisa.

$H0_1$ - a substituição da métrica de \bar{X} pelo índice de capacidade melhora o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão.

A primeira análise mostra que a complexidade de cálculo trazida pela introdução do índice de capacidade nem sempre produz os melhores resultados. Portanto, a hipótese $H0_1$ é rejeitada.

$H0_2$ - a implementação de regras suplementares de decisão melhora o desempenho de gráficos de controle.

A segunda análise mostra que a complexidade de cálculo trazida pela introdução da regra suplementar de decisão em geral produz os melhores resultados. Portanto, a hipótese $H0_2$ é aceita.

4.10. Aplicação em exemplo real

Suponha que uma empresa fornecedora de dutos está enfrentando perdas consideráveis devido à produção de itens defeituosos. O diâmetro dos dutos tem sido a causa da rejeição. Como as especificações são justas, pequenas alterações na média do processo levam à produção de dutos com diâmetros além das especificações. Desta maneira, qualquer mudança deve ser detectada o mais rápido possível. Dados históricos mostram que o desvio padrão dos diâmetros é próximo de 0,0010 polegada (Costa e Rahim, 2004).

A tabela 18 apresenta o diâmetro X de 25 amostras com 5 dutos cada; os dados das 15 primeiras amostras foram simulados considerando a média do processo livre de alterações, já os dados das 10 últimas amostras foram simulados com um aumento na média do processo de um desvio padrão (Costa e Rahim, 2004).

Tabela 18 - Valores de X , \bar{X} e \hat{C}_{pk} para o exemplo real

#	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	\bar{X}	\hat{C}_{pk}
1	0.7472	0.7500	0.7506	0.7503	0.7496	0.7496	0.2564
2	0.7514	0.7500	0.7509	0.7511	0.7500	0.7507	0.4133
3	0.7488	0.7512	0.7509	0.7502	0.7498	0.7502	0.4754
4	0.7497	0.7514	0.7488	0.7509	0.7508	0.7503	0.3818
5	0.7490	0.7488	0.7503	0.7502	0.7496	0.7496	0.5448
6	0.7498	0.7496	0.7503	0.7494	0.7485	0.7495	0.5285
7	0.7494	0.7498	0.7501	0.7507	0.7501	0.7500	0.9673
8	0.7488	0.7501	0.7509	0.7491	0.7503	0.7498	0.5337
9	0.7502	0.7515	0.7487	0.7500	0.7498	0.7500	0.4947
10	0.7495	0.7501	0.7504	0.7498	0.7499	0.7500	1.4422
11	0.7496	0.7492	0.7499	0.7484	0.7479	0.7490	0.1918
12	0.7510	0.7516	0.7493	0.7485	0.7493	0.7499	0.3716
13	0.7508	0.7481	0.7516	0.7496	0.7491	0.7498	0.3183
14	0.7511	0.7505	0.7496	0.7502	0.7514	0.7506	0.4498
15	0.7506	0.7503	0.7502	0.7501	0.7486	0.7500	0.6218
16	0.7512	0.7509	0.7503	0.7533	0.7507	0.7513	0.0638
17	0.7520	0.7508	0.7513	0.7502	0.7517	0.7512	0.1387
18	0.7516	0.7513	0.7517	0.7494	0.7515	0.7511	0.1474
19	0.7498	0.7513	0.7499	0.7523	0.7520	0.7511	0.1296
20	0.7498	0.7508	0.7508	0.7497	0.7484	0.7499	0.4803
21	0.7519	0.7510	0.7513	0.7512	0.7484	0.7507	0.1833
22	0.7490	0.7511	0.7498	0.7513	0.7522	0.7507	0.2048
23	0.7494	0.7500	0.7505	0.7502	0.7509	0.7502	0.7541
24	0.7504	0.7518	0.7491	0.7510	0.7529	0.7511	0.1046
25	0.7517	0.7515	0.7495	0.7513	0.7497	0.7507	0.2388

Fonte: Costa e Rahim (2004)

As figuras 45 e 46 mostram, respectivamente, os gráficos de C_{pk} e \bar{X} com a regra suplementar de decisão EDMG $(m, h) = (3, 2)$. Nos dois gráficos a amostra 18 sinaliza a alteração na média. Por um lado, o gráfico de C_{pk} sinaliza na décima oitava amostra pois as amostras 16 e 17 estão entre os limites inferiores de controle LIC_1 e LIC_2 . Por outro lado, o gráfico de \bar{X} sinaliza na décima oitava amostra pois as amostras 16 e 17 estão entre os limites superiores de controle LSC_1 e LSC_2 (Costa e Rahim, 2004).

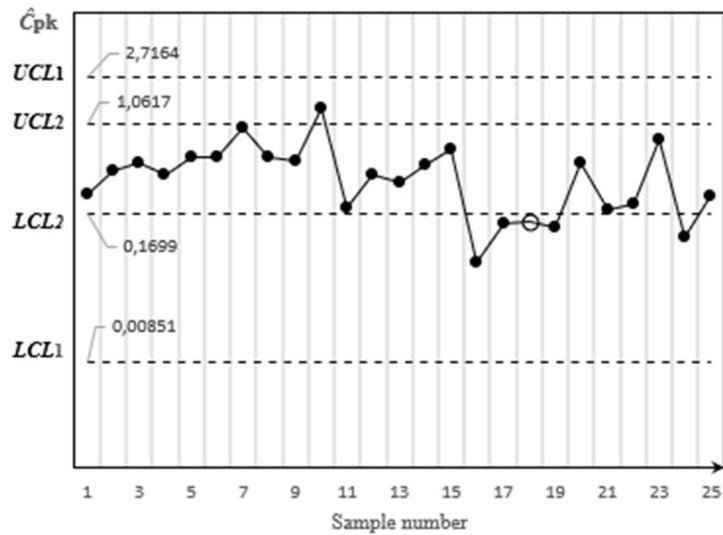


Figura 45 - Gráfico C_{pk} EDMG para o exemplo real

Fonte: Costa e Rahim (2004)

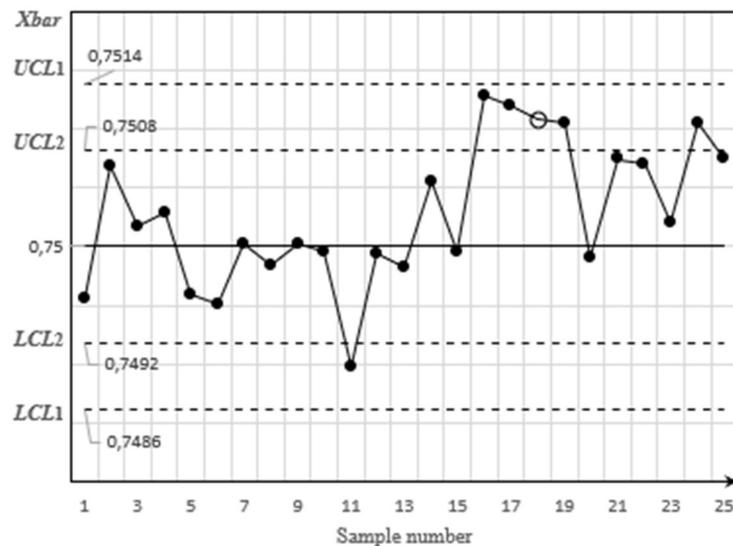


Figura 46 - Gráfico \bar{X} EDMG para o exemplo real

Fonte: Costa e Rahim (2004)

Como resultado, os dois gráficos podem ser considerados como ferramentas úteis para o monitoramento de processos sujeitos a distúrbios moderados. Dependendo dos parâmetros, um gráfico pode ser visto como mais eficiente que o outro. Neste exemplo real, os dois gráficos apresentaram o mesmo desempenho para a regra suplementar de decisão $(m, h) = (3, 2)$ (Costa e Rahim, 2004).

5. CONCLUSÕES

5.1. Considerações Finais

Os gráficos de controle e as cadeias de Markov são abordados em inúmeras pesquisas antigas e recentes. Por um lado, os gráficos de controle permitem a visualização da variabilidade natural do processo, mostrando se o processo está em controle ou fora de controle. Por outro lado, as cadeias de Markov permitem a modelagem dos processos em análise. Em adição, as regras suplementares de decisão podem ser usadas nos gráficos de controle com o propósito de aumentar a sensibilidade para pequenas alterações no processo.

Neste contexto, o presente trabalho analisou o desempenho de gráficos de controle com regras suplementares de decisão, através do NMA, por meio de duas análises. A primeira análise aborda a comparação de um gráfico de controle com regra suplementar de decisão que altera a métrica de \bar{X} por um índice de capacidade (C_{pk} EDMG) e um gráfico de controle com regra suplementar de decisão que mantém a métrica de \bar{X} (\bar{X} EDMG). A segunda análise aborda a comparação destes dois gráficos de controle com regras suplementares de decisão e um gráfico de controle com regra básica de decisão que usa a métrica de \bar{X} (gráfico de \bar{X}).

A primeira análise mostrou que, em se tratando de deslocamentos da média, a substituição do gráfico de \bar{X} EDMG pelo gráfico de C_{pk} EDMG nem sempre é a melhor alternativa. Caso as combinações em análise sejam $n = 5$ e $m = 3$ e $h = 2$ ou qualquer combinação referente a $n = 10$, o gráfico de C_{pk} EDMG deve ser escolhido, pois possui o melhor desempenho em todos os deslocamentos considerados. Entretanto, caso outras combinações estejam em análise, o desempenho do gráfico de \bar{X} EDMG supera o desempenho do gráfico de C_{pk} EDMG a partir de deslocamentos de 1,0 em média. Portanto, a complexidade de cálculo advinda da introdução do índice de capacidade nem sempre produz os melhores resultados.

A segunda análise mostrou que, em se tratando de deslocamentos da média, o uso de regras suplementares de decisão em geral resulta em gráficos de controle com desempenho superior. Portanto, a complexidade de cálculo advinda da introdução da regra suplementar de decisão em geral produz os melhores resultados, sendo em alguns casos o gráfico de C_{pk} EDMG o

gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados e em outros casos o gráfico de \bar{X} EDMG o gráfico com o melhor desempenho entre os três analisados.

Os dois casos nos quais o gráfico de \bar{X} superou o gráficos de C_{pk} EDMG consideram grandes deslocamentos da média (a partir de 2,0), o que confirma o conceito que o gráfico de \bar{X} não possui bom desempenho em se tratando de pequenos deslocamentos. Entretanto, caso a regra suplementar de decisão EDMG seja aplicada em conjunto com o gráfico de \bar{X} , seu desempenho melhora consideravelmente.

5.2. Contribuições do Trabalho

O presente trabalho contribui tanto com a teoria quanto com a prática ao apresentar:

- Inúmeros artigos antigos e recentes usando os gráficos de controle e as cadeias de Markov;
- Inúmeros artigos antigos e recentes usando regras suplementares de decisão;
- Guia detalhado para o cálculo do NMA;
- A superioridade dos gráficos de controle com regras suplementares de decisão;
- A necessidade de cautela ao ponderar a substituição da métrica de \bar{X} pelo índice de capacidade em se tratando de gráficos de controle com regras suplementares de decisão para a análise de deslocamentos na média;
- Exemplo real usando a regra suplementar de decisão EDMG em dois gráficos de controle.

5.3. Sugestões para Trabalhos Futuros

Por fim, as análises e conclusões do presente trabalho podem ser enriquecidas em trabalhos futuros, ao contemplar enfoques distintos de determinados aspectos, como:

- Analisar artigos com outras regras suplementares de decisão;
- Realizar análise comparativa de desempenho usando simulação e cadeias de Markov;
- Analisar gráficos de controle de CUSUM e de EWMA com regras suplementares de decisão para detecção de pequenos deslocamentos na média.

6. REFERÊNCIAS

- ALBASSAM, M.; ASLAM, M. Monitoring Non-Conforming Products Using Multiple Dependent State Sampling Under Indeterminacy - An Application to Juice Industry. **IEEE Access**, v. 8, p. 172.379-172.386, 2020.
- ALDOSARI, M. S.; ASLAM, M.; JUN, C. A New Attribute Control Chart Using Multiple Dependent State Repetitive Sampling. **IEEE Access**, v. 5, p. 6.192-6.197, 2017.
- ALDOSARI, M. S.; ASLAM, M.; KHAN, N.; AHMAD, L.; JUN, C. A New S2 Control Chart using Multiple Dependent State Repetitive Sampling. **IEEE Access**, v. 6, p. 49.224-49.236, 2018.
- AMIN, R. W.; NCUBE, M. M. Variable Sampling Interval Combined Shewhart-Cumulative Score Quality Control Procedure. **Applied Statistics**, v. 40, p. 1-12, 1991.
- ASLAM, M.; BALAMURALI, S.; JEYADURGA, P.; RAZA, M. A. Monitoring number of non-conforming items based on multiple dependent state repetitive sampling under truncated life tests. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 2020, p. 1-19, 2020b.
- ASLAM, M.; BANTAN, R. A. R.; KHAN, N. Design of X-Bar Control Chart Using Multiple Dependent State Sampling Under Indeterminacy Environment. **IEEE Access**, v. 7, p. 152.233-152.242, 2019a.
- ASLAM, M.; RAO, G.; AL-MARSHADI, A.; AHMAD, L.; JUN, C. Control Charts Monitoring Process Capability Index Using Median Absolute Deviation for Some Popular Distributions. **Processes**, v. 7, p. 287, 2019c.
- ASLAM, M.; SHAFQAT, A.; RAO, G. S.; MALELA-MAJIKA, J.; SHONGWE, S. C. Multiple Dependent State Repetitive Sampling-Based Control Chart for Birnbaum–Saunders Distribution. **Journal of Mathematics**, v. 2020, p. 1-11, 2020a.
- ASLAM, M.; YEN, C.; CHANG, C.; AL-MARSHADI, A. H.; JUN, C. A Multiple Dependent State Repetitive Sampling Plan Based on Performance Index for Lifetime Data with Type II Censoring. **IEEE Access**, v. 7, p. 49.377-49.391, 2019b.
- BAKIR, S. T.; REYNOLDS, M. R. A Nonparametric Procedure for Process Control Based on Within-Group Ranking. **Technometrics**, v. 21, p. 175-183, 1979.
- BALAMURALI, S.; JEYADURGA, P. Economic design of an attribute control chart for monitoring mean life based on multiple deferred state sampling. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, v. 35, n. 03, p. 893-907, 2019.
- BĂNCESCU, M. Controlling Project Schedule Progress, Using Control Charts. **Cybernetics and Systems**, v. 47, n. 07, p. 602-615, 2016.
- BISCHAK, D. P.; SILVER, E. A. Estimating the out-of-control rate from control chart data in the presence of multiple causes and process improvement. **International Journal of Production Research**, v. 42, p. 5.217-5.233, 2004.

BROOK, D.; EVANS, D. A. An approach to the probability distribution of CUSUM run length. **Biometrika**, v. 59, p. 539-549, 1972.

CAROT, M. T.; SAGBAS, A.; SANZ, J. M. A New Approach for Measurement of The Efficiency of Cpm and Cpmk Control Charts. **International Journal for Quality Research**, v. 7, p. 605-622, 2013.

CHAMP, C. W.; WOODALL, W. H. Exact Results for Shewhart Control Charts With Supplementary Runs Rules. **Technometrics**, v. 29, p. 393-399, 1987.

ÇINLAR, E. **Introduction to Stochastic Processes**. 1 ed. Nova York: Dover Publications, 2013.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2 ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

COSTA, A. F. B.; RAHIM, M. A. Joint X bar and R charts with two stage samplings. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 20, p. 699-708, 2004.

COSTA, B. S.; COSTA, A. F. B. Comparing the Performance of C_{pk} and \bar{X} Control Charts With the Generalized Multiple Dependent State Sampling Supplementary Signaling Rule. **IEEE Access**, v. 10, p. 2006-2012, 2022.

CROSIER, R. B. Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes. **Technometrics**, v. 30, p. 291-303, 1988.

DOBI, B.; ZEMPLÉNI, A. Markov chain-based cost-optimal control charts for health care data. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 2019, p. 1-17, 2019.

FLEIGNER, P.; KAČUR, J.; DURDÁN, M.; LACIAK, M. Statistical Process Control Charts Applied to Rock Disintegration Quality Improvement. **Applied Sciences**, v. 10, n. 8343, p. 8343, 2020.

FONTALVO-HERRERA, T. J.; HERRERA, R.; ZAMBRANO, J. Three-phase method to assess the logistics service using Six Sigma metrics, Hotelling's T-square control chart and a principal component capacity indicator. **International Journal of Productivity and Quality Management**, v. 35, p. 17-39, 2022.

GAN, F. F. CUSUM Control Charts Under Linear Drift. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 41, p. 71-84, 1992.

GOEDHART, R.; SCHOONHOVEN, M.; DOES, R. J. M. M. Nonparametric control of the conditional performance in statistical process monitoring. **Journal of Quality Technology**, v. 52, n. 04, p. 355-369, 2020.

GUPTA, M.; KAPLAN, H. C. Using Statistical Process Control to Drive Improvement in Neonatal Care. **Clinics in Perinatology**, v. 44, n. 03, p. 627-644, 2017.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

KLEIN, M. Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 32, p. 427-431, 2000.

LEI, X.; MACKENZIE, C. A. Distinguishing between common cause variation and special cause variation in a manufacturing system: A simulation of decision making for different types of variation. **International Journal of Production Economics**, v. 220, p. 1-12, 2020.

LOTFI, R.; YADEGARI, Z.; HOSSEINI, S. H.; KHAMENEH, A. H.; TIRKOLAEI, E. B.; WEBER, G. A robust time-cost-quality-energy-environment trade-off with resource-constrained in project management: A case study for a bridge construction project. **Journal of Industrial and Management Optimization**, v. 18, p. 375-396, 2022.

MIGUEL, P. A. C.; FLEURY, A.; MELLO, C. H. P.; NAKANO, D. N.; TURRIONI, J. B.; HO, L. L.; MORABITO, R.; MARTINS, R. A.; PUREZA, V. **Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações**. 1 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MIM, F. N.; KHOO, M. B. C.; SAHA, S.; KHAW, K. W. A side-sensitive group runs median control chart with measurement errors. **Communications in Statistics**, v. 52, p. 1.660-1.678, 2023.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MORITA, M.; ARIZONO, I.; NAKASE, I.; TAKEMOTO, I. Economical operation of the Cpm control chart for monitoring process capability index. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 43, p. 304-311, 2009.

MÜLLER, E.; POLLER, R.; HOPF, H.; KRONES, M. Enabling Energy Management for Planning Energy-Efficient Factories. **Procedia**, v. 7, p. 622-627, 2013.

OH, J.; WEIß, C. H. On the Individuals Chart with Supplementary Runs Rules under Serial Dependence. **Methodology and Computing in Applied Probability**, v. 22, p. 1.257-1.273, 2020.

OKOSHI, C. Y.; LIMA, E. P.; COSTA, S. E. G. Performance cause and effect studies: Analyzing high performance manufacturing companies. **International Journal of Production Economics**, v. 210, p. 27-41, 2019.

OPRIME, P. C.; MENDES, G. H. S. The X-bar control chart with restriction of the capability indices. **International Journal of Quality & Reliability Management**, v. 34, n. 01, p. 38-52, 2017.

OTTENSTREUER, S.; WEIß, C. H.; KNOTH, S. Control charts for monitoring a Poisson hidden Markov process. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 2020, p. 1-18, 2020.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. 4 ed. Nova York: McGraw-Hill Education, 2002.

PERDIKIS, T.; PSARAKIS, S.; CASTAGLIOLA, P.; RAKITZIS, A. C.; MARAVELAKIS, P. E. The EWMA sign chart revisited: performance and alternatives without and with ties. **Journal of Applied Statistics**, v. 50, p. 170-194, 2023.

PREMARATHNA, N.; GODFREY, A. J. R.; GOVINDARAJU, K. Decomposition of stock market trade-offs using Shewhart methodology. **International Journal of Quality & Reliability Management**, v. 33, n. 09, p. 1311-1331, 2016.

QUINTERO-ARTEAGA, C.; PEÑABAENA-NIEBLES, R.; VÉLEZ, J. I.; JUBIZ-DIAZ, M. Statistical design of an adaptive synthetic \bar{X} control chart for autocorrelated processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 38, p. 2.475-2.500, 2022.

RAO, G.S.; RAZA, M. A.; ASLAM, M.; AL-MARSHADI, A. H.; JUN, C. A variable control chart based on process capability index under generalized multiple dependent state sampling. **IEEE Access**, v. 7, p. 34.031-34.044, 2019.

REYNOLDS, M. S.; SPENCER, S. P.; DUNAWAY, A.; BUCKINGHAM, D.; BARTMAN, T. Scientific Approach to Assess if Change Led to Improvement - Methods for Statistical Process Control Analysis in Quality Improvement. **Journal of Emergency Nursing**, v. 47, n. 01, p. 198-205, 2021.

SHAWKY, A. I.; ASLAM, M.; KHAN, K. Multiple Dependent State Sampling-Based Chart Using Belief Statistic under Neutrosophic Statistics. **Journal of Mathematics**, v. 2020, p. 1-14, 2020.

SHEWHART, W. A. **Economic Control of Quality of Manufactured Product**. 1 ed. Nova York: David van Nostrand Company, 1931.

SIM, S. B.; KANG, C. W.; XIE, M. On Variable Sample Size \bar{X} Chart for Processes with Double Assignable Causes. **International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering**, v. 11, p. 47-58, 2004.

SUNTHORNWAT, R.; AREEPONG, Y.; SUKPARUNGSEE, S. Average run length of the long-memory autoregressive fractionally integrated moving average process of the exponential weighted moving average control chart. **Cogent Mathematics**, v. 04, n. 01, 2017.

UFSC. **Distribuição Normal (Gaussiana)**. Disponível em: <<https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/normal.html>>. Acesso em: 24 dez. 2023.

VANBRACKLE, L. N.; REYNOLDS, M. R. EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation. **Communications in Statistics**, v. 26, p. 979-1.008, 1997.

VICENTIN, D. S.; SILVA, B. B.; PICCIRILLO, I.; BUENO, F. C.; OPRIME, P. C. Monitoring process control chart with finite mixture probability distribution. **International Journal of Quality and Reliability Management**, v. 35, n. 02, p. 335-353, 2018.

WAN, Q. Economic-statistical design of integrated model of VSI control chart and maintenance incorporating multiple dependent state sampling. **IEEE Access**, v. 8, p. 87.609-87.620, 2020.

WILLIAMS, E. Understanding Variation - Part 2: The Control Chart. **Current Problems in Pediatric and Adolescent Health Care**, v. 48, n. 08, p. 202-205, 2018.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Some Current Directions in the Theory and Application of Statistical Process Monitoring. **Journal of Quality Technology**, v. 46, n. 01, p. 78-94, 2014.

XIANG, Y. Joint optimization of \bar{X} control chart and preventive maintenance policies: A discrete-time Markov chain approach. **European Journal of Operational Research**, v. 229, p. 382-390, 2013.

XU, J.; PENG, C. Parametric bootstrap process capability index control charts for both mean and dispersion. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 2018, p. 1-19, 2018.

YOUNG, T. M.; KHALIUKOVA, O.; ANDRÉ, N.; PETUTSCHNIGG, A.; RIALS, T. G.; CHEN, C. Detecting special-cause variation 'events' from process data signatures. **Journal of Applied Statistics**, v. 46, n. 16, p. 3032-3043, 2019.

7. APÊNDICE

Passos para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais π com o uso do Solver.

1. Criar o vetor π que receberá os valores como resultado do processamento do Solver. Os valores destas células são definidos como 0, para que o GRG inicie neste ponto.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0	0	0	0

Figura 47 - Primeiro passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver

Fonte: autoria própria (2023)

2. Recuperar a matriz \mathbf{P} já calculada, somando-se as probabilidade do estado 6 (estado absorvente) no estado 1 (estado transitório que inicia a cadeia de Markov). Sendo assim, a matriz 6x6 transforma-se em uma matriz 5x5.

\mathbf{P}	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	0,9835	0,0165	0	0	0
π_2	0,0184	0	0,9816	0	0
π_3	0,0184	0	0	0,9816	0
π_4	0,0184	0	0	0	0,9816
π_5	0,9835	0,0165	0	0	0

Figura 48 - Segundo passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver

Fonte: autoria própria (2023)

3. Através da equação 33, montar a estrutura de cálculo do vetor π . Ou seja, o vetor de probabilidades iniciais multiplicado pela matriz \mathbf{P} ajustada resulta no próprio vetor de probabilidades iniciais.

$$\pi \mathbf{P} = \pi \quad (33)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0,9835 & 0,0165 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0184 & 0 & 0,9816 & 0 & 0 \\ 0,0184 & 0 & 0 & 0,9816 & 0 \\ 0,0184 & 0 & 0 & 0 & 0,9816 \\ 0,9835 & 0,0165 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \hline \end{array}$$

$$0,9835\pi_1 + 0,0184\pi_2 + 0,0184\pi_3 + 0,0184\pi_4 + 0,9835\pi_5 = \pi_1$$

$$0,0165\pi_1 + 0,0165\pi_5 = \pi_2$$

$$0,9816\pi_2 = \pi_3$$

$$0,9816\pi_3 = \pi_4$$

$$0,9816\pi_4 = \pi_5$$

Figura 49 - Terceiro passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver

Fonte: autoria própria (2023)

4. Inserir 6 equações no Solver. As 5 primeiras equações se referem àquelas criadas no terceiro passo, ajustando de maneira que sejam igualadas a 0. Para que cada linha corresponda a um estado diferente, as equações são montadas por coluna: a primeira equação é visualizada na primeira coluna, a segunda equação é visualizada na segunda coluna, e assim por diante. A sexta equação soma as probabilidades do vetor π para que seja igual a 1.

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0	0	0	0	0
0,0165	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,9835
-0,0165	1	0	0	-0,0165
0	-0,9816	1	0	0
0	0	-0,9816	1	0
0	0	0	-0,9816	1
1	1	1	1	1

Figura 50 - Quarto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver

Fonte: autoria própria (2023)

5. Resolver o Solver considerando os seguintes parâmetros:

- O objetivo é maximizar o vetor π ;
- As 5 primeiras restrições estabelecem que as equações criadas no terceiro passo sejam iguais a 0;
- A sexta restrição estabelece que a soma do vetor π seja igual a 1.

	A	B	C	D	E	F	G
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							
50							
51							
52							
53							
54							

> To Solver:

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	
	0,0165	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,9835	0
	-0,0165	1	0	0	-0,0165	0
	0	-0,9816	1	0	0	0
	0	0	-0,9816	1	0	0
	0	0	0	-0,9816	1	0
	1	1	1	1	1	0

Figura 51 - Quinto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver visão planilha

Fonte: autoria própria (2023)

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Mín. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

\$G\$48 = 0
 \$G\$49 = 0
 \$G\$50 = 0
 \$G\$51 = 0
 \$G\$52 = 0
 \$G\$53 = 1

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução
 Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Fechar

Figura 52 - Quinto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver visão Solver

Fonte: autoria própria (2023)

6. Têm-se, então, o vetor π .

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
0,93896	0,01569	0,0154	0,01512	0,01484
0,0165	-0,0184	-0,0184	-0,0184	-0,9835
-0,0165	1	0	0	-0,0165
0	-0,9816	1	0	0
0	0	-0,9816	1	0
0	0	0	-0,9816	1
1	1	1	1	1

Figura 53 - Sexto passo para o cálculo do vetor de probabilidades iniciais com o Solver

Fonte: autoria própria (2023)