

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Controle de Ciclos Limites em Sistemas de  
Controle Lineares em Malha Fechada**

**Fábio de Oliveira Brondani**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

ITAJUBÁ, 22 DE MARÇO DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Controle de Ciclos Limites em Sistemas de Controle Lineares em Malha Fechada

**Fábio de Oliveira Brondaní**

**Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática

**Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias**

ITAJUBÁ – MG

22 DE MARÇO DE 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Controle de Ciclos Limites em Sistemas de Controle Lineares em Malha Fechada

**Fábio de Oliveira Brondaní**

Dissertação aprovada por banca examinadora em 22 de março de 2016, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática.

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa, IBILCE – UNESP

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello, UNIFEI

Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga (Orientador), UNIFEI

ITAJUBÁ – MG

22 DE MARÇO DE 2016

*Aos meus pais, Ângelo (in memoriam) e Janete, e minha irmã Roberta, as pessoas mais especiais da minha vida.*

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, o criador de tudo e de todos, mestre dos mestres, por ter me proporcionado a vida, o bem mais precioso que tenho. Agradeço por ter me acompanhado sempre em toda minha trajetória até aqui, sendo sempre um porto seguro, um conforto e também um amigo de todas as horas.

Agradeço a toda minha família, principalmente aqueles que estiveram ao meu lado me apoiando tanto nos momentos felizes, quanto nos momentos de dificuldades. Com toda certeza, o apoio e o carinho de todos ajudaram-me a superar a distância e também os obstáculos pelos quais passei. De maneira especial aos meus pais, Ângelo e Janete, que através de seu amor e dedicação ensinaram-me a ser uma pessoa com princípios, que através da sabedoria, conseguiram educar-me e estimular-me para que sempre buscasse algo a mais em relação ao meu aperfeiçoamento profissional. Também de modo especial a minha avó Silverina, que através de suas orações sempre me deu forças para que pudesse continuar com os meus objetivos. E a minha irmã Roberta, que mesmo distante estava sempre torcendo para que obtivesse êxito em meus estudos.

Agradeço o meu orientador, Denis de Carvalho Braga, por acompanhar-me durante a realização desse trabalho. Sou grato por todos os ensinamentos transmitidos e também por sua paciência e disponibilidade, não medindo esforços para que este trabalho pudesse ser concluído de maneira satisfatória. Sem dúvidas, seu conhecimento e sua dedicação levaram-me a um aprendizado verdadeiro.

Agradeço aos professores da UNIFEI pelos ensinamentos transmitidos e por contribuírem na minha formação pessoal e profissional.

Agradeço aos meus professores da UFSM que sempre incentivaram-me a seguir meus

estudos e também aos professores do Curso de Especialização em Matemática Aplicada e Computacional da UCS, pelos conhecimentos transmitidos e também pela disponibilidade de cada um para comigo.

Agradeço a todos os meus amigos do Rio Grande do Sul e também aos meus ex-colegas de trabalho, que sempre me enviaram palavras de carinho e de apoio. Muito obrigado pela amizade e também por contribuírem para a conclusão de mais uma etapa em minha vida. A amizade de todos vocês é muito importante para mim.

Agradeço aos meus colegas mais próximos pelo companheirismo durante o curso. Obrigado pelo auxílio nos estudos, pela ajuda durante a realização das listas e dos trabalhos propostos, pelos risos e também pelos desabafos. Muito obrigado pela amizade!

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para que esse trabalho pudesse ser realizado, meu muito obrigado!

*“A persistência é o menor caminho do êxito”.*

*Charles Chaplin*

# Resumo

Considere um sistema de controle linear autônomo, completamente controlável,

$$x' = Ax + Bu,$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$  e  $n \times 1$ , respectivamente. É sabido da teoria de controle que dados  $n \in \mathbb{N}$  números simétricos com respeito ao eixo real do plano complexo, existe uma matriz  $F$ ,  $1 \times n$ , tal que a matriz  $H = A + BF$  tem estes números como autovalores.

Utilizando este resultado, com os números  $\lambda_1 = i\omega_0$ ,  $\lambda_2 = -i\omega_0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ , sendo  $\omega_0$  um número real positivo e  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , para  $i = 3, \dots, n$ , a proposta deste trabalho é encontrar uma família a quatro parâmetros de realimentações estáticas de estado da forma

$$(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4 \mapsto u = Fx + \mathcal{K}(x, \mu)$$

com  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  o vetor de parâmetros, tal que seja possível determinar precisamente o número e a estabilidade dos ciclos limites que surgem no retrato de fase de cada sistema de controle linear autônomo em malha fechada

$$x' = Hx + BK(x, \mu),$$

em decorrência de bifurcações de Hopf de codimensões um e dois.

**Palavras-chave:** Sistema de Controle Linear, Bifurcação de Hopf, Ciclo Limite.

# Abstract

Let

$$x' = Ax + Bu,$$

be a autonomous linear control system, totally controllable, where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $A$  and  $B$  matrices  $n \times n$  and  $n \times 1$ , respectively. It is known from control theory that given  $n \in \mathbb{N}$  numbers symmetrical with respect to the real axis of the complex plane, there is a matrix  $F$ ,  $1 \times n$ , such that the matrix  $H = A + BF$  has these numbers as eigenvalues.

Using this result, with the numbers  $\lambda_1 = i\omega_0$ ,  $\lambda_2 = -i\omega_0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ , where  $\omega_0$  is a positive real number and  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , for  $i = 3, \dots, n$ , the purpose of this study is to find a four-parameter family of static state feedback of the form

$$(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4 \mapsto u = Fx + \mathcal{K}(x, \mu)$$

where  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  is the parameter vector, such that it is possible to precisely determine the number and stability of limit cycles arising in the phase portrait of each closed-loop control system

$$x' = Hx + BK(x, \mu),$$

due to codimension one and two Hopf bifurcations.

**Keywords:** Linear Control System, Hopf Bifurcation, Limit Cycle.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Aspectos Históricos . . . . .	1
1.2 Problema Abordado Neste Trabalho . . . . .	3
1.3 Revisão de Literatura . . . . .	3
1.4 Conteúdo dos Capítulos . . . . .	5
<b>2 Controlabilidade em Sistemas de Controle Lineares</b>	<b>6</b>
2.1 Sistemas de Controle Lineares . . . . .	7
2.2 Sistemas de Controle Lineares Autônomos . . . . .	11
2.3 Forma Normal dos Sistemas Autônomos . . . . .	19
2.4 Estabilidade . . . . .	28
2.5 Estabilização . . . . .	37
<b>3 Controle de Ciclos Limites Via Teoria de Controle e Bifurcações de Hopf de Codimensões Um e Dois</b>	<b>50</b>

3.1	Bifurcação de Hopf e o Método da Projeção . . . . .	51
3.1.1	A Forma Normal da Bifurcação de Hopf . . . . .	51
3.1.2	Variedades Centrais em Sistemas Dinâmicos Contínuos . . . . .	54
3.1.3	Método da Projeção . . . . .	55
3.2	Hipóteses Iniciais sobre o par $(A, B)$ . . . . .	70
3.3	Análise Linear de Bifurcações de Hopf Controláveis . . . . .	71
3.4	Bifurcações de Hopf no Sistema (3.28) . . . . .	73
3.5	Aplicações . . . . .	103
	<b>Conclusões</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>114</b>

# Lista de Figuras

3.1	Diagrama de bifurcação associado com (3.28) quando $\mu_0 > 0$ e $\mu_3 < 0$ . . . . .	96
-----	--	----

# Capítulo 1

## Introdução

No presente capítulo, será apresentada a ideia geral desta dissertação. Na Seção 1.1, serão abordados alguns fatos históricos, fonte de motivação para este trabalho. Já na Seção 1.2, será apresentado o problema o qual essa dissertação pretende responder, bem como onde foram encontrados recursos para a solução deste problema. A Seção 1.3 consiste em uma pequena revisão de literatura, onde estarão elencadas as principais referências utilizadas nessa pesquisa, juntamente com um pequeno resumo sobre cada uma. E, para concluir, na Seção 1.4 será apresentada a estrutura desta dissertação através da explanação dos conteúdos que serão desenvolvidos em cada capítulo.

### 1.1 Aspectos Históricos

É conhecido na literatura, no que se diz respeito à *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias* (EDO's), que as soluções de um sistema diferencial autônomo podem ser pontos singulares ou de equilíbrio, imagens biunívocas de um intervalo da reta ou órbitas periódicas. E, quando uma órbita periódica for isolada no conjunto de todas as órbitas periódicas do sistema apresentado, tem-se então um ciclo limite. A ideia inicial sobre ciclos limites, se deu através dos estudos de equações diferenciais no plano, realizados por Poincaré, entre os anos de 1880 e 1890. Após isso, muitos pesquisadores tem se dedicado a esse ramo da *Teoria Qualitativa das EDO's*, ramo considerado difícil, mas,

ao mesmo tempo, fascinante. Exemplos disto, são os estudos realizados por van der Pol, Liénard e Andronov, no final da década de 1920, nos quais provaram que uma trajetória fechada de um modelo de oscilação contínua ocorrida em um circuito tubular à vácuo era um ciclo limite, no sentido em que foi definido por Poincaré. A partir daí, com o surgimento da definição de ciclos limites, passou-se a estudar a existência ou não, a unicidade, bem como o número máximo e outras propriedades que estes possuem. Atualmente, o estudo de ciclos limites está presente em muitas áreas da ciência, dentre elas a Economia, a Biologia e a Engenharia.

Já a *Teoria Matemática de Controle* ou simplesmente *Teoria de Controle*, largamente aplicada na área de engenharia, trata basicamente do estudo sobre o comportamento dos sistemas dinâmicos. É aqui que surgem os conceitos de malha aberta e malha fechada (ou realimentação), conceitos estes utilizados para controlar o comportamento dinâmico de um sistema.

Historicamente, as ideias sobre sistemas de controle estão presentes desde a Grécia Antiga. Mas a *Teoria de Controle* tem como marco inicial, a publicação do trabalho *On Governors* de James C. Maxwell, em 1868, no qual há análises de modelos dinâmicos de reguladores centrífugos. Um regulador centrífugo é um dispositivo que controla a velocidade de rotação de uma máquina de forma a manter a velocidade constante, independente da carga mecânica ou das condições de operação. Por exemplo, pode-se citar as máquinas a vapor, onde se regula a admissão de vapor nos cilindros.

A partir da publicação desse estudo houve um maior interesse, por parte da comunidade científica, pelo tema na época. Assim, Edward Routh em 1877 e Adolf Hurwitz em 1895 generalizaram, de maneira independente, os resultados de Maxwell referentes à estabilidade de polinômios, visto que os resultados apresentados por Maxwell eram um tanto limitados, pois apresentavam condições necessárias e suficientes para a estabilidade de polinômios de grau 4, no máximo. Essa generalização ficou conhecida como *Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz*.

No final do ano de 1903, os irmãos Wright fizeram seus primeiros voos de teste bem sucedidos, uma grande aplicação da teoria de controle. Mas, com o avanço da teoria de

sistemas dinâmicos, surgiu a oportunidade de desenvolver uma nova abordagem para os sistemas de controle lineares. Com isso, nas décadas de 1960 e 1970 houve um grande desenvolvimento de uma teoria estrutural dos sistemas de controle. Nesta teoria, tornou-se importante os conceitos de *controlabilidade* e *observabilidade*, introduzidos por Rudolf E. Kalman. A partir daí surge um maior número de aplicações desta teoria, como o lançamento de foguetes e satélites, o desenvolvimento da robótica, bem como a modalidade de piloto automático nos aviões em geral.

## 1.2 Problema Abordado Neste Trabalho

O presente trabalho tem por finalidade responder a seguinte pergunta:

*É possível construir uma classe de equações diferenciais na qual seja possível controlar o número e a estabilidade dos ciclos limites que surgem no retrato de fase de cada membro da classe?*

Respostas para esta pergunta foram dadas em [1], [2] e [16] utilizando teoria de controle. Aqui será utilizada a abordagem fornecida em [2], modificando apenas uma hipótese.

## 1.3 Revisão de Literatura

Nas referências [9] e [19] encontram-se as principais definições e resultados preliminares, os quais permitem ter uma ideia geral sobre o que é e como se aplica a *Teoria de Controle*. Como, no contexto desta dissertação, um sistema de controle é um caso particular de equação diferencial, alguns conceitos da *Teoria Qualitativa das EDO's* são empregados. Tais conceitos podem ser encontrados em [14] ou, ainda, em [4], no qual se baseia parte do artigo [2].

Já o estudo de bifurcações de Hopf possui uma vasta literatura como, por exemplo, [5] e [8]. No que se refere às aplicações da teoria de bifurcações de Hopf a sistemas de controle, pode-se citar, no caso de codimensão um, o controle de bifurcações de Hopf de codimensão um, estudadas em [16] e [17]. E, no caso de bifurcações de codimensão dois,

há o estudo de bifurcações de Hopf nos casos de Bautin [1] e Bogdanov-Takens [3] os quais desenvolvem o estudo em sistemas planares.

Vale ressaltar que existe um número significativo de artigos que estudam sistemas de controle juntamente com a teoria de bifurcações. Por exemplo, no artigo [1], dado um sistema não linear no plano, cuja parte linear do campo de vetores, calculada no equilíbrio, tem autovalores complexos com partes reais nulas, busca-se encontrar maneiras de controlar as bifurcações de Hopf de codimensão um e de Bautin, usando as funções multilineares simétricas que aparecem na expansão em série de Taylor do campo de vetores próxima ao equilíbrio. A realimentação estática de estado (ou lei de controle) empregada nesse estudo, depende de dois parâmetros de bifurcação e quatro parâmetros de controle, onde é possível estabelecer critérios tanto para a estabilidade do ponto de equilíbrio, como para a estabilidade dos ciclos limites.

Já [16] tem como objetivo encontrar condições para controlar a ocorrência de bifurcações de Hopf de codimensão um em sistemas de controle não lineares, cuja parte linear na forma de Jordan real tem um bloco com dois autovalores complexos com partes reais nulas e os demais blocos com autovalores com partes reais negativas. Sem assumir a hipótese de controlabilidade, é empregado o *Teorema da Variedade Central* para restringir a dinâmica a uma variedade bidimensional e projetar realimentações estáticas de estado as quais permitem identificar a estabilidade e a direção da solução periódica que surge.

Por fim, em [2], o qual é o artigo base desta dissertação, encontram-se os resultados que permitem garantir a existência de bifurcações de Hopf de codimensão um e dois em sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada. Para isto é construída uma família a quatro parâmetros de realimentações estáticas de estado tal que, a variação de seus parâmetros, determina o número e a estabilidade dos ciclos limites que surgem no retrato de fase da correspondente família de sistemas de controle lineares em malha fechada.

## 1.4 Conteúdo dos Capítulos

Para uma melhor estrutura desta dissertação, no Capítulo 2 serão abordados os conceitos e os principais resultados associados com a *Teoria de Controle Linear* e a *Controlabilidade* apresentados por Kalman, tendo como objetivo o estudo dos sistemas de controle em malha fechada. Tais resultados darão suporte ao estudo de controle de ciclos limites que virá no capítulo posterior.

Já no Capítulo 3, aplicando os conceitos sobre controlabilidade, modificando uma hipótese de [2] e construindo uma família a quatro parâmetros de sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada (simplesmente uma família a quatro parâmetros de equações diferenciais ordinárias), será abordado o estudo sobre a existência de bifurcações de Hopf de codimensões um e dois na tal família. Neste capítulo estarão os teoremas que garantem a existência de bifurcações de Hopf de codimensão um e dois, bem como resultados os quais permitirão analisar a estabilidade dos ciclos limites em questão. Duas aplicações estarão neste capítulo, as quais permitirão um melhor entendimento sobre a teoria estudada até então. A dissertação é finalizada com as principais considerações em Conclusões.

# Capítulo 2

## Controlabilidade em Sistemas de Controle Lineares

Neste capítulo, serão apresentadas definições e resultados referentes à Teoria de Controle Linear, de modo particular, a controlabilidade. A Seção 2.1, trata das definições e resultados iniciais sobre o assunto. Já a partir da Seção 2.2, o interesse estará voltado apenas para sistemas de controle lineares autônomos ou invariantes no tempo e dar-se-á condições suficientes para definir quando tal sistema é dito ser **completamente controlável**. Na Seção 2.3, dedicada à forma normal dos sistemas autônomos, será apresentada uma versão do *Teorema da Decomposição de Kalman*. E, nas duas últimas seções do capítulo, estarão as condições necessárias para que se possa avaliar quando um sistema de controle linear autônomo pode ser estabilizado e, ainda, alguns métodos de estabilização. Cabe ressaltar aqui, que os resultados apresentados nesse capítulo encontram-se em [9], porém as demonstrações de certos teoremas sofreram algumas modificações, a fim de evitar o uso do conceito de observabilidade.

## 2.1 Sistemas de Controle Lineares

Neste trabalho, um sistema de controle linear é um sistema da forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2.1)$$

com o parâmetro  $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$  chamado de tempo,  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  a entrada de controle ou vetor de controle e  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$  a saída de controle ou vetor de saída. Cabe ressaltar ainda que, a menos de que se afirme o contrário, as funções

$$A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n} \quad B : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$$

neste contexto de estudo, serão consideradas contínuas. Aqui, a notação  $\mathbb{R}^{n,m}$  denota o espaço vetorial de todas as matrizes reais com  $n$  linhas e  $m$  colunas. Os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^{1,n}$  e  $\mathbb{R}^{n,1}$  são identificados com o próprio  $\mathbb{R}^n$ .

Observe que a ação das variáveis de controle sobre a dinâmica do sistema ocorre unicamente na primeira equação do sistema (2.1). Sendo assim, não é necessário considerar a equação  $y = C(t)x$ . Com isso, a notação  $(A, B)$  será utilizada para representar um sistema de controle linear descrito no sistema (2.1) ou, mais precisamente, a primeira equação em (2.1).

Considere agora a seguinte definição.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz fundamental para o sistema linear*

$$x' = A(t)x, \quad (2.2)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ . A função matricial

$$\begin{aligned} \Phi_A : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbb{R}^{n,n} \\ (t, s) &\mapsto \Phi_A(t, s) := \phi(t)\phi^{-1}(s) \end{aligned}$$

é denominada *matriz de transição do sistema linear (2.2)*.

As propriedades de  $\phi$  e, portanto, de  $\Phi_A$  podem ser encontradas em [14].

Como vetores de controle admissíveis serão considerados as funções

$$u \in L^p([t_0, t_1], \mathbb{R}^m),$$

isto é, as funções pertencentes ao espaço vetorial de todas as classes de equivalências de funções  $v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lebesgue mensuráveis (que diferem apenas em um conjunto de medida nula) tais que

$$\int_{[t_0, t_1]} \|v(t)\|^p dt < \infty.$$

Aqui os casos de interesse são apenas  $p = 1$  e  $p = 2$ . Assim, uma solução em  $[t_0, t_1]$  do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(\bar{t}_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

com  $\bar{t}_0 \in [t_0, t_1]$ , é uma função absolutamente contínua

$$\begin{aligned} \varphi : [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x = \varphi(t) \end{aligned}$$

que satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t (A(s)x(s) + B(s)u(s)) ds,$$

ou, equivalentemente, satisfaz a equação diferencial ordinária em (2.3) quase em toda parte e a condição inicial. Os espaços  $L^p$  e o conceito de função absolutamente contínua podem ser estudados em [11], Capítulo 3 e página 120, respectivamente.

A solução do Problema de Cauchy anterior é tratada no seguinte teorema, cuja demonstração é dada em [9].

**Teorema 2.1.1.** *A solução  $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  do Problema de Cauchy (2.3), com*

$$u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m), \quad \bar{t}_0 \in [t_0, t_1],$$

*é da forma*

$$\varphi(t) = \Phi_A(t, \bar{t}_0)x_0 + \int_{\bar{t}_0}^t \Phi_A(t, s)B(s)u(s)ds.$$

O teorema anterior ainda é válido para  $u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ , pois, como o intervalo  $[t_0, t_1]$  é compacto, resulta da *Desigualdade de Hölder* que  $L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^m) \subset L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ .

Com essas preliminares torna-se possível definir quando um sistema de controle linear é controlável.

**Definição 2.1.2.** *O par  $(A, B)$  é dito controlável em  $[t_0, t_1]$ , quando para todo par de estados  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe um vetor de controle  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  de forma que a solução  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  do Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*satisfaz também a condição de contorno  $x(t_1) = x_1$ .*

Quando a função  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  controla a evolução do estado  $x$  a partir do estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  até o estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , através da dinâmica de  $x' = A(t)x + B(t)u$ , conforme a **Definição 2.1.2**, a notação utilizada se dará da seguinte forma

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1).$$

Note que, pelo **Teorema 2.1.1**, um controle  $u$  satisfaz

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$$

se, e somente se,

$$x_1 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

O seguinte resultado é imediato a partir da **Definição 2.1.2** e mostra que o conceito de controlabilidade pode ser definido de outras formas.

**Teorema 2.1.2.** *São equivalentes as seguintes afirmações:*

- a. *O par  $(A, B)$  é controlável em  $[t_0, t_1]$ ;*
- b. *Para todo  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma função  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  satisfazendo*

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1);$$

**c.** Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma função  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$  satisfazendo

$$(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, 0).$$

**Demonstração.** Note que as implicações **(a)**  $\Rightarrow$  **(b)** e **(a)**  $\Rightarrow$  **(c)** são imediatas, pois valem para todo  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ , em particular, para  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ .

**(b)**  $\Rightarrow$  **(a)**. Tome  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários. Então,  $x_1 - \Phi_A(t_1, t_0)x_0 \in \mathbb{R}^n$  e, por **(b)**, existe  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ , tal que

$$(t_0, 0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1 - \Phi_A(t_1, t_0)x_0),$$

ou seja,

$$x_1 - \Phi_A(t_1, t_0)x_0 = \Phi_A(t_1, t_0)0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

Mas daí,

$$x_1 - \Phi_A(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds,$$

isto é,

$$x_1 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

e, portanto,  $(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$ , o que implica que o par  $(A, B)$  é controlável em  $[t_0, t_1]$ .

**(c)**  $\Rightarrow$  **(a)**. Escolha  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  arbitrários. Logo,  $x_0 - \Phi_A(t_1, t_0)^{-1}x_1 \in \mathbb{R}^n$  e, por **(c)**, existe  $u \in L^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ , tal que

$$(t_0, x_0 - \Phi_A(t_1, t_0)^{-1}x_1) \xrightarrow{u} (t_1, 0),$$

isto é,

$$0 = \Phi_A(t_1, t_0)(x_0 - \Phi_A(t_1, t_0)^{-1}x_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

Mas então,  $(t_0, x_0) \xrightarrow{u} (t_1, x_1)$ , pois

$$0 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 - x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds,$$

e

$$x_1 = \Phi_A(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_1, s)B(s)u(s)ds.$$

Logo, o teorema está provado. ■

A propriedade apresentada no item **(c)** do **Teorema 2.1.2** é chamada de controlabilidade ao zero.

## 2.2 Sistemas de Controle Lineares Autônomos

**Definição 2.2.1.** *Um sistema de controle linear  $(A, B)$  é dito ser um sistema de controle linear autônomo ou um sistema de controle linear invariante no tempo, quando as matrizes  $A$  e  $B$  forem constantes.*

Como, neste caso,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  é uma matriz constante, uma matriz fundamental  $\phi$  com a propriedade  $\phi(0) = E$ , sendo  $E$  a matriz identidade, é  $\phi(t) = e^{tA}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

A matriz  $W_T$ , definida por

$$W_T := \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} ds, \quad (2.4)$$

sendo  $T$  um número real positivo, desempenha um papel importante no estudo da controlabilidade de um sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$ . Esta matriz é real, pois  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$ , e é simétrica, visto que  $(W_T)^* = W_T$ . Aqui  $R^*$  denota a transposta da matriz  $R$ . Note que a simetria decorre de

$$(e^{sA})^* = e^{sA^*}, \quad (e^{-sA} B B^* e^{-sA^*})^* = e^{-sA} B B^* e^{-sA^*}, \quad \forall s \in [0, T].$$

Além disto, como para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \langle x, W_T x \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} ds \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle x, e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle B^* e^{-sA^*} x, B^* e^{-sA^*} x \rangle ds \\ &= \int_0^T \|B^* e^{-sA^*} x\|^2 ds \geq 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

pois o integrando é não negativo, segue que  $W_T$  é positiva semidefinida, conforme a definição a seguir.

**Definição 2.2.2.** *Uma matriz simétrica  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$  é denominada:*

- a. Positiva definida, quando  $\langle x, Rx \rangle > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ;
- b. Positiva semidefinida, quando  $\langle x, Rx \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

- c. Negativa definida, quando  $-R$  for positiva definida,
- d. Negativa semidefinida, quando  $-R$  for positiva semidefinida,

sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .

A notação utilizada no caso (a) é  $R > 0$ , no caso (b) é  $R \geq 0$ , no caso (c) é  $R < 0$  e, por último,  $R \leq 0$  é empregada no caso (d).

É fácil mostrar que os autovalores de uma matriz real simétrica positiva semidefinida são sempre reais e não negativos.

**Lema 2.2.1.** *Uma matriz simétrica  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$  é positiva definida se, e somente se, for positiva semidefinida e não singular.*

**Demonstração.** Ver a seção de *Operadores AutoAdjuntos* em [10]. ■

No restante deste trabalho, o polinômio característico  $p_D$  da uma matriz  $D \in \mathbb{R}^{n,n}$  é calculado da seguinte forma

$$p_D(\lambda) = \det(\lambda E - D) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \lambda^i,$$

com  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. O par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ ;
- b. O par  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$  para algum  $T > 0$ ;
- c. A matriz  $W_T$  é não singular para algum  $T > 0$ ;
- d. A matriz  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ ;
- e.  $\text{Po}(M) = n$ , sendo  $M = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$  a matriz de controlabilidade e  $\text{Po}(M)$  o posto da matriz  $M$ .

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Não há o que fazer.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Suponha que o par  $(A, B)$  seja controlável em  $[0, T]$ , para algum  $T > 0$ , e que  $W_T$  seja singular. Se  $W_T$  é singular, então existe  $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $W_T x_1 = 0$ . Desta forma, de (2.5), vem que

$$\langle x_1, W_T x_1 \rangle = \int_0^T \|B^* e^{-sA} x_1\|^2 ds = 0.$$

Da igualdade anterior, segue que

$$B^* e^{-sA} x_1 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Como  $(A, B)$  é controlável em  $[0, T]$ , existe  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  tal que

$$(0, x_1) \xrightarrow{u} (T, 0),$$

ou seja,

$$0 = e^{TA} \left( x_1 + \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds \right),$$

e, assim,

$$x_1 = - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|x_1\|^2 &= \langle x_1, x_1 \rangle \\ &= \left\langle x_1, - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds \right\rangle \\ &= - \int_0^T \langle x_1, e^{-sA} B u(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^T \langle B^* e^{-sA} x_1, u(s) \rangle ds = 0, \end{aligned}$$

o que implica que  $x_1 = 0$ , ou seja, uma contradição. Portanto,  $W_T$  é não singular para  $T > 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d). Seja  $T > 0$  como em (c) e tome  $\tilde{T} > 0$  arbitrário. Da igualdade

$$\langle x_1, W_{\tilde{T}} x_1 \rangle = \int_0^{\tilde{T}} \|B^* e^{-sA} x_1\|^2 ds, \quad (2.6)$$

segue que para  $\langle x_1, W_{\tilde{T}}x_1 \rangle = 0$  deve ocorrer

$$a(s) = B^* e^{-sA^*} x_1 = 0, \quad \forall s \in [0, \tilde{T}].$$

Derivando  $a(s)$   $k$  vezes, em relação a  $s$  e calculando em  $s = 0$ , obtém-se

$$a^{(k)}(0) = (-1)^k B^* (A^*)^k x_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Com isso, multiplicando a igualdade anterior por  $t^k/k!$ , segue que

$$B^* \frac{(-1)^k t^k}{k!} (A^*)^k x_1 = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad \text{e} \quad t \in [0, T].$$

Assim, tem-se

$$\langle x_1, W_T x_1 \rangle = \int_0^T \|B^* e^{-sA^*} x_1\|^2 ds = \int_0^T \left\| \sum_{k=0}^{\infty} B^* \frac{(-1)^k s^k}{k!} (A^*)^k x_1 \right\|^2 ds = 0,$$

ou seja,

$$x_1 = 0.$$

Logo,  $T > 0$  tal como no item (c) implica em  $x_1 = 0$ . Assim, de (2.6),  $W_{\tilde{T}}$  é positiva definida e, portanto, não singular. Como  $\tilde{T} > 0$  é arbitrário, resulta que  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a). Decorre do **Lema 2.2.1** que o item (d) é equivalente a  $W_T$  ser positiva definida. Utilizando este fato, tome  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  e defina a função  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  como

$$u(t) = B e^{sA^*} W_T^{-1} x_1, \quad t \in [0, T],$$

a qual está bem definida pelo fato de  $W_T$  ser não singular. Assim,

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{-sA} 0 + \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} W_T^{-1} x_1 ds \\ &= \left( \int_0^T e^{-sA} B B^* e^{-sA^*} ds \right) W_T^{-1} x_1 \\ &= 0 + W_T W_T^{-1} x_1 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$(0, 0) \xrightarrow{u} (T, x_1).$$

Portanto, do **Teorema 2.1.2**, segue que o par  $(A, B)$  é controlável para todo  $T > 0$ .

(d)  $\Rightarrow$  (e). Suponha que  $W_T > 0$ , mas que o posto da matriz  $M = (B|AB|\cdots|A^{n-1}B)$  é menor do que  $n$ , ou seja,  $\text{Po}(M) < n$ . Então, existe  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tal que

$$v^* A^i B = 0,$$

para todo  $0 \leq i \leq n - 1$ .

Seja  $p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^k$  o polinômio característico de  $A$ . Pelo *Teorema de Cayley-Hamilton* (ver [6]), tem-se que  $p_A(A) = 0$ , ou seja,

$$p_A(A) = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0,$$

isto é,

$$A^n = - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

Assim, para  $m > n$ , tem-se

$$A^m = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(m)} A^k = 0,$$

sendo que para cada  $k = 1, \dots, n - 1$ ,  $\alpha_k^{(m)}$  é obtido como em função dos números  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Definindo

$$\alpha_k(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{t^j \alpha_k^{(j)}}{j!},$$

pode-se escrever

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k,$$

uma vez que  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ . Logo,

$$v^* e^{tA} B = 0,$$

para todo  $t$ , ou seja,

$$\langle v^*, v^* W_T \rangle = 0,$$

o que é uma contradição, visto que  $W_T$  é não singular e  $v \neq 0$ . Portanto,  $\text{Po}(M) = n$ .

(e)  $\Rightarrow$  (d). Suponha que  $\text{Po}(M) = n$ , mas que  $W_T$  seja singular para algum  $T$ . Então, existe  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , tal que

$$\langle v^*, v^* W_T \rangle = 0,$$

ou seja,

$$v^* e^{tA} B = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Sendo assim, considerando  $t = 0$ , obtém-se

$$v^* B = 0.$$

Agora, calculando a  $j$ -ésima derivada de  $v^* e^{tA} B = 0$ , em relação a  $t$ , aplicada em  $t = 0$ , tem-se

$$v^* A^j B = 0, \quad j > 0.$$

Desta forma,

$$v^* (B | AB | \cdots | A^{n-1} B) = 0,$$

ou seja,  $\text{Po}(M) < n$ , contrariando a hipótese. Portanto,  $W_T$  é não singular para todo  $T > 0$ . ■

A propriedade apresentada no item (e) do teorema anterior, é conhecida como *Critério de Kalman*.

**Definição 2.2.3.** *Um sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$ , para o qual o Critério de Kalman é satisfeito, é chamado de sistema de controle linear autônomo completamente controlável.*

Sendo assim, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.1.** *Considere o sistema*

$$x' = Ax + Bu,$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O produto  $AB$  é dado por

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$\text{Po}(B|AB) = \text{Po} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Portanto, pelo **Teorema 2.2.1**, tem-se que este sistema de controle é (completamente) controlável.

O lema a seguir, permitirá analisar a questão da controlabilidade quando se tem perturbações em um sistema de controle linear autônomo completamente controlável.

**Lema 2.2.2.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear autônomo completamente controlável. Então, para toda matriz  $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ , o par  $(A + BF, B)$  também é completamente controlável.*

**Demonstração.** Seja  $F \in \mathbb{R}^{m,n}$ . Do fato do par  $(A, B)$  ser completamente controlável, segue que

$$\text{Po}(B|AB|\dots|A^{n-1}B) = n.$$

Mas, note que

$$(B|(A + BF)B|\dots|(A + BF)^{n-1}B) = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)Q$$

sendo  $Q = E + N \in \mathbb{R}^{nm, nm}$ , com  $N$  uma matriz nilpotente, ou seja,  $N^k = 0$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Pode-se calcular, de maneira recursiva, a matriz  $Q$ , conforme os passos a seguir.

Para  $n = 2$ , tem-se

$$(B|(A + BF)B) = (B|AB + BFB) = (B|AB) \begin{pmatrix} E & FB \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Já para  $n = 3$ , segue que

$$(B|(A + BF)B|(A + BF)^2B), \quad (2.7)$$

mas,

$$(A + BF)^2 = A^2 + ABF + BF(A + BF),$$

que, multiplicado à direita por  $B$ , resulta em

$$(A + BF)^2B = A^2B + ABFB + BF(A + BF)B.$$

Assim, (2.7) pode ser representada por

$$\begin{aligned} (B|(A + BF)B|(A + BF)^2B) &= (B|AB + BF|A^2B + ABFB + BF(A + BF)B) \\ &= (B|AB|A^2B) \begin{pmatrix} E & FB & F(A + FB)B \\ 0 & E & FB \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Generalizando esse processo, obtém-se a seguinte expressão,

$$(A + BF)^k = A^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i BF(A + BF)^{k-i-1}. \quad (2.8)$$

De fato, por indução segue que para  $k = 1$

$$A + BF = A + \sum_{i=0}^0 A^i BF(A + BF)^{1-i-1} = A + BF.$$

Supondo válido (2.8) para  $k$  arbitrário, será mostrado que continua válido para  $k + 1$ . De

fato,

$$\begin{aligned}
(A + BF)^{k+1} &= (A + BF)^k(A + BF) \\
&= \left( A^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i BF(A + BF)^{k-i-1} \right) (A + BF) \\
&= A^k(A + BF) + \left( \sum_{i=0}^{k-1} A^i BF(A + BF)^{k-i-1} \right) (A + BF) \\
&= A^{k+1} + A^k BF + (BF(A + BF)^{k-1} + ABF(A + BF)^{k-2} + \\
&\quad A^2 BF(A + BF)^{k-3} + \dots + A^{k-1} BF) (A + BF) \\
&= A^{k+1} + A^k BF + BF(A + BF)^k + ABF(A + BF)^{k-1} + \\
&\quad A^2 BF(A + BF)^{k-2} + \dots + A^{k-1} BF(A + BF),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(A + BF)^{k+1} = A^{k+1} + \sum_{i=0}^k A^i BF(A + BF)^{k-i}.$$

Logo, (2.8) vale para todo  $k \in \mathbb{N}$  e multiplicando à direita por  $B$ , obtém-se

$$(A + BF)^k B = A^k B + \sum_{i=0}^{k-1} A^i BF(A + BF)^{k-i-1} B,$$

o qual é o termo geral que permite calcular a matriz  $Q$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Da forma com que  $Q$  foi construída, tem-se que ela é triangular superior, cujos termos da diagonal principal são todos iguais a  $E$ . Logo,  $Q$  é não singular e, portanto,

$$\text{Po}(B|(A + BF)B| \dots |(A + BF)^{n-1}B) = \text{Po}(MQ) = \text{Po}(M) = n,$$

mostrando que o par  $(A + BF, B)$  é completamente controlável. ■

## 2.3 Forma Normal dos Sistemas Autônomos

Conhecida também como *Forma Normal de Kalman*, é obtida a partir de uma propriedade que os sistemas de controle lineares autônomos possuem, a qual permite reescrever o sistema em uma forma especial. Sendo assim, seja

$$x' = Ax + Bu, \tag{2.9}$$

um sistema de controle linear autônomo e considere  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz não singular. Fazendo

$$y = Px,$$

segue que,

$$y' = Px'. \quad (2.10)$$

Desta forma, substituindo (2.9) em (2.10), obtém-se

$$\begin{aligned} y' &= P(Ax + Bu) \\ &= PAx + PBu \\ &= PAP^{-1}y + PBu. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que

$$y' = \tilde{A}y + \tilde{B}u,$$

sendo  $\tilde{A} = PAP^{-1}$  e  $\tilde{B} = PB$ .

Disto segue a seguinte definição.

**Definição 2.3.1.** *Os sistemas de controle lineares autônomos  $(A, B)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  são ditos ser linearmente equivalentes, se existir  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , não singular, tal que  $\tilde{A} = PAP^{-1}$  e  $\tilde{B} = PB$ .*

Note que ser linearmente equivalente, segundo a definição anterior, é uma relação de equivalência.

**Teorema 2.3.1.** *Se  $(A, B)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  são sistemas de controle lineares autônomos linearmente equivalentes, então*

$$\text{Po}(M) = \text{Po}(\tilde{M}),$$

com  $M = (B|AB|\cdots|A^{n-1}B)$  e  $\tilde{M} = (\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\cdots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B})$ .

**Demonstração.** Como  $(A, B)$  e  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  são sistemas de controle lineares autônomos linearmente equivalentes, da **Definição 2.3.1**, segue que existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , não singular, tal que  $\tilde{A} = PAP^{-1}$  e  $\tilde{B} = PB$ . Desta forma, como  $\tilde{M} = (\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\cdots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B})$ , segue que

$$\tilde{B} = PB,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{B} &= PAP^{-1}PB = PAB, \\
\tilde{A}^2\tilde{B} &= \tilde{A}\tilde{A}\tilde{B} = PAP^{-1}PAB = PA^2B, \\
&\vdots \\
\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} &= \tilde{A}^{n-2}\tilde{A}\tilde{B} = PA^{n-2}P^{-1}PAB = PA^{n-1}B.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tilde{A}^k\tilde{B} = PA^k B, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= (PB|PAB|\dots|PA^{n-1}B) \\
&= P(B|AB|\dots|A^{n-1}B) \\
&= PM.
\end{aligned}$$

Logo

$$\text{Po}(\tilde{M}) = \text{Po}(PM) = \text{Po}(M).$$

■

**Lema 2.3.1.** *A imagem de  $M$ , denotada por  $\text{Img}(M)$ , é o menor subespaço de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$ -invariante, que contém o subespaço  $\text{Img}(B)$ .*

**Demonstração.** Seja

$$M : \mathbb{R}^{nm} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto Mx,$$

e

$$B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto Bx.$$

Se  $y \in \text{Img}(M)$ , então existe  $x \in \mathbb{R}^{nm}$  tal que

$$y = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)x.$$

Mas,

$$Ay = (AB|A^2B|\dots|A^n B)x \in \text{Img}(M),$$

isto é,  $A(\text{Img}(M)) \subset \text{Img}(M)$ , já que, pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*, segue que

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0E,$$

e

$$A^n B = -a_{n-1}A^{n-1}B - \dots - a_1AB - a_0B.$$

Tome agora  $y \in \text{Img}(B)$ . Então, existe  $x \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\begin{aligned} y &= Bx \\ &= (B|AB|\dots|A^{n-1}B)(x, 0, \dots, 0)^* \in \text{Img}(M), \end{aligned}$$

com  $0 \in \mathbb{R}^{1,m}$ , ou seja,  $\text{Img}(B) \subset \text{Img}(M)$ .

Resta mostrar ainda que  $\text{Img}(M)$  é o menor subespaço  $A$ -invariante que contém  $\text{Img}(B)$ . Para isso, seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um subespaço  $A$ -invariante qualquer que contém  $\text{Img}(B)$ . Assim,  $B \in S$ , significando que cada uma de suas colunas está em  $S$ , e

$$AB, \dots, A^{n-1}B \in S,$$

pois  $S$  é  $A$ -invariante. Logo,  $M \in S$  e como  $\text{Img}(M)$  é o subespaço do  $\mathbb{R}^n$  gerado pelas colunas de  $M$ , resulta que

$$\text{Img}(B) \subset \text{Img}(M) \subset S.$$

■

**Teorema 2.3.2.** *Se o  $\text{Po}(M) = r < n$ , então o par  $(A, B)$  é linearmente equivalente ao par*

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{array} \right) \right).$$

*Mais ainda, o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é controlável e  $\text{Po}(\tilde{M}_1) = r$ , sendo*

$$\tilde{M}_1 = (\tilde{B}_1|\tilde{A}_{11}\tilde{B}_1|\dots|\tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1).$$

**Demonstração.** Se o  $\text{Po}(M) = r < n$ , então existem  $r$  colunas linearmente independentes da matriz  $M$ . Sejam  $v_1, \dots, v_r$  estas colunas. Então,  $\{v_1, \dots, v_r\}$  é uma base do subespaço  $\text{Img}(M)$ . Logo, existem vetores  $v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$

é uma base do  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo **Lema 2.3.1**,  $Av_j \in \text{Img}(M)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , pois é  $A$ -invariante. Assim, existem escalares  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , com alguns nulos, tais que

$$\begin{aligned} Av_1 &= \alpha_{1,1}v_1 + \dots + \alpha_{r,1}v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n, \\ &\vdots \\ Av_r &= \alpha_{1,r}v_1 + \dots + \alpha_{r,r}v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n, \\ Av_{r+1} &= \alpha_{1,r+1}v_1 + \dots + \alpha_{r,r+1}v_r + \alpha_{r+1,r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_{n,r+1}v_n, \\ &\vdots \\ Av_n &= \alpha_{1,n}v_1 + \dots + \alpha_{r,n}v_r + \alpha_{n,r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_{n,n}v_n. \end{aligned}$$

Com isso, considere a matriz não singular

$$P^{-1} = (v_1 | \dots | v_r | v_{r+1} | \dots | v_n).$$

Como  $\tilde{A} = PAP^{-1}$ , então  $AP^{-1} = P^{-1}\tilde{A}$ . Neste sentido,

$$\begin{aligned} AP^{-1} &= (Av_1 | \dots | Av_r | Av_{r+1} | \dots | Av_n) \\ &= (v_1 | \dots | v_r | v_{r+1} | \dots | v_n) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r,1} & \dots & \alpha_{r,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sendo  $\tilde{A}_{11}$ , uma matriz  $r \times r$ . Da mesma forma, cada coluna da matriz  $B$ , isto é,  $Be_i$ , sendo  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , um elemento da base canônica do  $\mathbb{R}^m$ , é combinação linear de  $v_i$ ,

$i = 1, \dots, r$ , pois  $B \in \text{Img}(M)$ . Então, existem escalares  $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , com alguns nulos tais que

$$\begin{aligned} Be_1 &= \beta_{1,1}v_1 + \dots + \beta_{r,1}v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n, \\ &\vdots \\ Be_m &= \beta_{1,m}v_1 + \dots + \beta_{r,m}v_r + 0v_{r+1} + \dots + 0v_n. \end{aligned}$$

ou seja,

$$B = (v_1 | \dots | v_r | v_{r+1} | \dots | v_n) \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{r,1} & \dots & \beta_{r,m} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

com  $\tilde{B}_1$ , uma matriz  $r \times m$ . Agora, resta mostrar que  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é controlável e que  $\text{Po}(\tilde{M}) = r$ . Para isto, basta observar que  $\text{Po}(M) = r$  e

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^{r-1}\tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}^r\tilde{B}_1 & \dots & \tilde{A}_{11}^n\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas, pelo *Teorema de Cayley-Hamilton*, para cada  $j \geq r$ ,  $\tilde{A}_{11}^j$  é combinação linear de  $\tilde{A}_{11}^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Assim, segue que

$$\text{Po}(\tilde{B}_1 | \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 | \dots | \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1) = r,$$

e, como consequência,  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é controlável. ■

Ainda neste sentido de controlabilidade, segue uma aplicação de controlabilidade e estratégias de controle ótimas. Esta aplicação é dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear autônomo e  $T > 0$ . Defina a matriz*

$$V_T := \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds. \quad (2.11)$$

*As seguintes afirmações são verdadeiras:*

**a.** *A entrada de controle  $\bar{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$  definida por*

$$\bar{u}(t) := -B^* e^{(T-t)A^*} V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1), \quad t \in [0, T],$$

*satisfaz a propriedade*

$$(0, x_0) \xrightarrow{u} (T, x_1). \quad (2.12)$$

**b.** *Dentre todas as entradas de controle  $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$  que satisfazem (2.12),  $\bar{u}$  é aquela que minimiza o funcional quadrático*

$$J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt,$$

*e o valor atingido por  $J$  é*

$$J(\bar{u}) = \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt = \langle V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1), (e^{TA} x_0 - x_1) \rangle. \quad (2.13)$$

### Demonstração.

**a.** Considere o produto interno definido no espaço  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ ,

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_0^T \langle u(s), v(s) \rangle ds, \quad \forall u, v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2 &= \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^T \|B^* e^{(T-t)A^*} V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1)\|^2 dt \\ &= \int_0^T \langle B^* e^{(T-t)A^*} V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1), B^* e^{(T-t)A^*} V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1) \rangle dt \\ &= \left\langle \int_0^T e^{(T-t)A} B B^* e^{(T-t)A^*} V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1) dt, V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1) \right\rangle \\ &= \langle V_T V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1), V_T^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1) \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt = \langle V_T^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1), (e^{TA}x_0 - x_1) \rangle < \infty, \quad (2.14)$$

o que mostra que  $\bar{u} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ .

Recorde que a matriz de transição de um sistema de controle linear autônomo é dada por  $\Phi_A(t, s) = e^{(t-s)A}$ . Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}B\bar{u}(t)dt \\ &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}B(-B^*e^{(T-t)A^*}V_T^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1))dt \\ &= e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}BB^*e^{(T-t)A^*}V_T^{-1}(-e^{TA}x_0 + x_1)dt \\ &= e^{TA}x_0 + \left( \int_0^T e^{(T-t)A}BB^*e^{(T-t)A^*} dt \right) V_T^{-1}(-e^{TA}x_0 + x_1) \\ &= e^{TA}x_0 + V_T V_T^{-1}(-e^{TA}x_0 + x_1) \\ &= e^{TA}x_0 - e^{TA}x_0 + x_1 \\ &= x_1. \end{aligned}$$

b. Sendo  $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$  um controle qualquer satisfazendo (2.12), então resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u(s), \bar{u}(s) \rangle ds &= - \int_0^T \langle u(s), B^*e^{(T-t)A^*}V_T^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1) \rangle ds \\ &= - \left\langle \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(s)ds, V_T^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1) \right\rangle \\ &= \langle (e^{TA}x_0 - x_1), V_T^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1) \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Portanto, de (2.14) e (2.15), obtém-se que

$$\int_0^T \langle u(s), \bar{u}(s) \rangle ds = \int_0^T \langle \bar{u}(s), \bar{u}(s) \rangle ds. \quad (2.16)$$

Mas, (2.16) equivale a

$$\langle u, \bar{u} \rangle_2 = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2.$$

Porém,

$$\begin{aligned}\langle u - \bar{u}, u - \bar{u} \rangle_2 &= \langle u, u \rangle_2 - 2 \langle u, \bar{u} \rangle_2 + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2 \\ &= \langle u, u \rangle_2 - 2 \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2 + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2 \\ &= \langle u, u \rangle_2 - \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle_2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(t)\|^2 dt &= \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt + \int_0^T \|u(t) - \bar{u}(t)\|^2 dt \\ &\geq \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt,\end{aligned}$$

o que implica que  $J(u) \geq J(\bar{u})$ , com o valor de  $J(\bar{u})$  dado em (2.14). ■

Cabe ressaltar aqui, que o resultado apresentado no **Teorema 2.3.3** permite a seguinte interpretação:

*A estratégia de controle ótima  $\bar{u}$  dada em (2.11) é solução do problema de controle ótimo*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u) = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt, \\ \text{s.a.} \\ u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m), \\ x' = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \\ x(T) = x_1. \end{array} \right.$$

**Exemplo 2.3.1.** *Seja*

$$x' = Ax + Bu,$$

*o sistema de controle linear autônomo do Exemplo 2.2.1. Tome  $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ ,  $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2})$  e  $T = 2\pi$ . Assim, como*

$$e^{sA} = \begin{pmatrix} \cos(s) & \text{sen}(s) \\ -\text{sen}(s) & \cos(s) \end{pmatrix},$$

resulta que

$$V_T = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Com isso, tem-se que a estratégia de controle ótima  $\bar{u}$  é dada por

$$\bar{u}(t) = \left( \frac{\sin(t)x_{0,1} - \sin(t)x_{1,1} + \cos(t)x_{1,2}}{\pi}, -\frac{\cos(t)x_{0,2} + \sin(t)x_{1,1} - \cos(t)x_{1,2}}{\pi} \right)$$

para todo  $t \in [0, 2\pi]$ . E, ainda,

$$J(\bar{u}) = \frac{(x_{0,1} - x_{1,1})^2 + x_{1,1}^2 + (x_{0,2} - x_{1,2})^2 + x_{1,2}^2}{\pi}.$$

## 2.4 Estabilidade

Aqui, serão apresentados alguns resultados no que se diz respeito ao comportamento de soluções em longos períodos de tempo. De modo específico, será estudado o método de Lyapunov dando sentido ao que será feito na seção seguinte, que enfatizará a estabilização de sistemas de controle. Alguns conceitos, resultados e notações foram retirados de [14].

Seja  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ , no aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ .

Dada uma condição inicial  $x \in \Delta$ , a solução máxima única do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (2.17)$$

definida no intervalo maximal  $I \subset \mathbb{R}$ , com  $0 \in I$ , será denotada por  $\varphi : I \rightarrow \Delta$ . Se  $\bar{x} \in \Delta$  é tal que  $f(\bar{x}) = 0$ , então  $\bar{x}$  é chamado de **ponto singular** ou **ponto de equilíbrio** do campo vetorial  $f$ . Observe que um ponto de equilíbrio é uma solução constante do sistema autônomo  $x' = f(x)$  e, ainda, mediante uma translação do ponto de equilíbrio, não há perda de generalidade em supor que  $\bar{x} = 0$ .

Quando  $f(x) = Ax$ , para todo  $x \in \Delta = \mathbb{R}^n$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , é sabido que a solução  $\varphi$  de (2.17) é da forma  $\varphi(t) = e^{tA}x$ ,  $\forall t \in I = \mathbb{R}$ . Neste caso, se ocorrer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é chamado de **atrator** do sistema linear autônomo  $x' = Ax$ .

As próximas definições serão utilizadas no restante da seção.

**Definição 2.4.1.** *Seja  $\varphi$  uma solução da equação diferencial em (2.17), definida para  $t \geq 0$ . Diz-se que  $\varphi$  é estável se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que se  $\psi$  é outra solução da equação diferencial em (2.17) e*

$$|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta,$$

*então  $\psi$  está definida para todo  $t \geq 0$  e*

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon,$$

*para todo  $t \geq 0$ . Se além disso, existir  $\delta_1$  tal que*

$$|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1,$$

*implicar que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0,$$

*diz-se que  $\varphi$  é assintoticamente estável.*

O teorema a seguir trata da estabilidade do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  de  $x' = Ax$ .

**Teorema 2.4.1.** *Considere o sistema*

$$x' = Ax,$$

*com  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. *O ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável;*
- b. *O ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é um atrator;*
- c.  *$\max \{\operatorname{Re}(\lambda_i) : i = 1, \dots, n\} < 0$ , sendo cada  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um autovalor de  $A$ .*

**Demonstração.** Ver [14]. ■

**Definição 2.4.2.** *Uma função  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U \subset \Delta$  uma vizinhança qualquer do ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$ , é denominada uma função de Lyapunov para o sistema autônomo  $x' = f(x)$  quando satisfaz:*

- a.  $V$  é diferenciável em  $U$ ;
- b.  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$ , para todo  $x \in U \setminus \{0\}$ ;
- c.  $\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$ , para todo  $x \in U$ .

Diz-se ainda que  $V$  é uma função de Lyapunov estrita para o sistema autônomo  $x' = f(x)$  quando, além de (a) e (b), for satisfeita a seguinte propriedade:

- d.  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in U \setminus \{0\}$ .

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $V$  uma função de Lyapunov estrita em  $U$  para o sistema autônomo  $x' = f(x)$ , sendo  $U$  uma vizinhança de  $0 \in \Delta$ . Então, o ponto de equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável.*

**Demonstração.** Ver [14]. ■

Antes de seguir, considere a seguinte definição.

**Definição 2.4.3.** *Uma matriz  $R \in \mathbb{R}^{n,n}$  em que todos os autovalores possuem partes reais negativas é denominada matriz estável. A matriz  $R$  também é conhecida como matriz Hurwitz.*

Com isso, é possível apresentar o seguinte lema, o qual apresentará a solução de uma equação matricial que é fundamental para a formulação do *Critério de Lyapunov* no contexto da teoria de sistemas de controle lineares autônomos.

**Lema 2.4.1.** *Sejam  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m,m}$  e  $W \in \mathbb{R}^{n,m}$ . Se  $U$  e  $V$  são matrizes estáveis, então a única solução da equação matricial*

$$UX + XV + W = 0,$$

com  $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ , é a matriz estável  $X$  definida por

$$X := \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt.$$

**Demonstração.**

**Existência.** Da Proposição 10, pág. 63, de [14] e da hipótese, segue que existem constantes reais  $c_1, c_2 \geq 1$  e  $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ , tais que

$$\|e^{tU}\| \leq c_1 e^{-\beta_1 t} \quad \text{e} \quad \|e^{tV}\| \leq c_2 e^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando  $c = \max\{c_1, c_2\}$  e  $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$  segue que

$$\|e^{tU}\| \leq c e^{-\beta t} \quad \text{e} \quad \|e^{tV}\| \leq c e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, para  $T > 0$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T e^{tU} W e^{tV} dt \right\| &\leq \int_0^T \|e^{tU} W e^{tV}\| dt \\ &\leq \int_0^T \|e^{tU}\| \|W\| \|e^{tV}\| dt \\ &\leq \int_0^T c^2 e^{-2\beta t} \|W\| dt \\ &= \left[ -\|W\| \frac{c^2}{2\beta} e^{-2\beta t} \right]_0^T \\ &= \|W\| \frac{c^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta T}). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $T \rightarrow \infty$  na expressão anterior, resulta que  $X$  é convergente pelo *Crítério da Comparação*. Segue ainda que,

$$\begin{aligned} e^{TU} W e^{TV} - W &= \int_0^T \frac{d}{dt} (e^{tU} W e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W V e^{tV}) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV} + e^{tU} W e^{tV} V) dt \\ &= \int_0^T (U e^{tU} W e^{tV}) dt + \int_0^T (e^{tU} W e^{tV} V) dt \\ &= U \left( \int_0^T U e^{tU} W e^{tV} dt \right) + \left( \int_0^T e^{tU} W e^{tV} V dt \right) V. \end{aligned}$$

Novamente, tomando o limite quando  $T \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|e^{TU} W e^{TV} - W\| = \left\| \lim_{T \rightarrow \infty} e^{TU} W e^{TV} - W \right\|.$$

Mas,

$$0 \leq \|e^{tU} W e^{tV}\| \leq \|e^{tU}\| \|W\| \|e^{tV}\| \leq c^2 e^{-2\beta t} \|W\|,$$

o que implica, pelo *Teorema do Confronto* e pelas propriedades da norma, que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|e^{tU} W e^{tV}\| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (e^{tU} W e^{tV} - W) = -W,$$

concluindo que

$$X = \int_0^\infty e^{tU} W e^{tV} dt,$$

é solução da equação  $-W = UX + XV$  e provando a existência de solução.

**Unicidade.** Suponha que  $X_1$  e  $X_2$  sejam soluções de

$$UX + XV + W = 0.$$

Definindo  $\hat{X} = X_1 - X_2$ , segue que

$$UX_1 + X_1V + W - (UX_2 + X_2V + W) = 0,$$

ou seja,

$$(UX_1 - UX_2) + (X_1V - X_2V) = 0,$$

ou ainda,

$$U(X_1 - X_2) + (X_1 - X_2)V = 0,$$

sendo possível concluir que  $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n,m}$  é solução de

$$U\hat{X} + \hat{X}V = 0. \tag{2.18}$$

Assim, de (2.18),

$$\frac{d}{dt}(e^{tU} \hat{X} e^{tV}) = U e^{tU} \hat{X} e^{tV} + e^{tU} \hat{X} V e^{tV} = e^{tU} (U\hat{X} + \hat{X}V) e^{tV} = 0,$$

o que permite concluir que  $e^{tU} \hat{X} e^{tV} = C$ , sendo  $C \in \mathbb{R}^{n,m}$  uma matriz constante. Em particular, em  $t = 0$ , tem-se que  $C = \hat{X}$  e

$$e^{tU} \hat{X} e^{tV} = \hat{X}, \quad \forall t \geq 0.$$

Por outro lado,

$$0 \leq \|e^{tU} \hat{X} e^{tV}\| \leq c^2 e^{-2\beta t} \|\hat{X}\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando o limite quando  $t \rightarrow \infty$ , obtém-se que  $\hat{X} = 0$ , ou seja,

$$\hat{X} = X_1 - X_2 = 0,$$

implicando que  $X_1 = X_2$  e provando a unicidade da solução. ■

Agora, no teorema que segue, será apresentada uma equação matricial, a qual fornece uma forma equivalente de definir a estabilidade de uma matriz.

**Teorema 2.4.3.** *Dada uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , são equivalentes as seguintes afirmações:*

- a.  *$A$  é uma matriz estável;*
- b. *Existe uma matriz positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  tal que*

$$A^*P + PA = -E. \tag{2.19}$$

**Demonstração.**

(a)  $\implies$  (b). Se a matriz  $A$  é estável, a existência da matriz  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  segue diretamente do **Lema 2.4.1**, considerando as seguintes modificações:  $U = A^*$ ,  $V = A$  e  $X = P$ . Mas, resta ainda, mostrar que  $P$  é positiva definida. De fato, se  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , então

$$\begin{aligned} \langle x, Px \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^\infty e^{tA^*} E e^{tA} dt \right) x \right\rangle \\ &= \left\langle x, \left( \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \|e^{tA} x\|^2 dt > 0. \end{aligned}$$

(b)  $\implies$  (a). Agora, seja  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz positiva definida a qual satisfaz (2.19).

Defina

$$V(x) = \langle x, Px \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, tem-se que  $V \in \mathbb{C}^\infty$  e satisfaz  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0$ , para todo  $x \neq 0$ , mostrando (a) e (b) da **Definição 2.4.2**. Além disto,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \\
&= \frac{d}{dt} \langle \varphi(t), P\varphi(t) \rangle \\
&= \langle \varphi'(t), P\varphi(t) \rangle + \langle \varphi(t), P\varphi'(t) \rangle \\
&= \langle Ae^{tA}x, Pe^{tA}x \rangle + \langle e^{tA}x, PAe^{tA}x \rangle \\
&= \langle e^{tA}x, A^*Pe^{tA}x \rangle + \langle e^{tA}x, PAe^{tA}x \rangle \\
&= \langle e^{tA}x, (A^*P + PA)e^{tA}x \rangle
\end{aligned} \tag{2.20}$$

e da **Definição 2.4.2**, segue que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \left. \frac{d}{dt}V(\varphi(t)) \right|_{t=0} \\
&= \langle x, (A^*P + PA)x \rangle \\
&= \langle x, -Ex \rangle \\
&= -\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Logo,  $\dot{V}(x) < 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e, portanto,  $V$  é uma função de Lyapunov estrita segundo a **Definição 2.4.2**. Com isso, do **Teorema 2.4.2**, segue que o equilíbrio  $\bar{x} = 0$  é assintoticamente estável. E, do **Teorema 2.4.1**, pode-se concluir que  $A$  possui todos seus autovalores com partes reais negativas. Portanto,  $A$  é estável o que conclui a demonstração. ■

**Teorema 2.4.4.** *Sejam  $A, X, W \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$  matrizes satisfazendo:*

- a.  $AX + XA^* = -W$ ;
- b.  $W - BB^*$  é positiva semidefinida;
- c. O par  $(A, B)$  é controlável.

*Então, a matriz  $A$  é estável se, e somente se,  $X$  for positiva definida.*

**Demonstração.**

( $\implies$ ). Seja  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  uma matriz estável. Do **Lema 2.4.1**, tomando  $U = A$  e  $V = A^*$ , segue que a única solução de  $AX + XA^* = -W$  é

$$X = \int_0^\infty e^{tA} W e^{tA^*} dt.$$

Desta forma, para  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se

$$\begin{aligned} \langle x, Xx \rangle &= \left\langle x, \left( \int_0^\infty e^{tA} W e^{tA^*} dt \right) x \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle x, e^{tA} W e^{tA^*} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \langle e^{tA^*} x, W e^{tA^*} x \rangle dt \\ &\geq \int_0^\infty \langle e^{tA^*} x, B B^* e^{tA^*} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \langle B^* e^{tA^*} x, B^* e^{tA^*} x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \|B^* e^{tA^*} x\|^2 dt \geq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Suponha que exista  $x \neq 0$  tal que

$$B^* e^{tA^*} x = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Derivando a expressão anterior em relação ao parâmetro  $t$  vem que

$$B^* (A^*)^k e^{tA^*} x = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad k = 1 \dots, n-1, \tag{2.22}$$

e, calculando em  $t = 0$ ,

$$(B^* |B^* A^*| \dots |B^* (A^*)^{n-1}|) x = M^* x = 0, \tag{2.23}$$

sendo  $M^* = (B |AB| \dots |A^{n-1} B)^*$ . Mas, aplicando o *Teorema do Núcleo e da Imagem* em  $M^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ , resulta que

$$\text{Po}(B |AB| \dots |A^{n-1} B) = \text{Po}(B |AB| \dots |A^{n-1} B)^* < n,$$

contrariando a hipótese do par  $(A, B)$  ser controlável. Logo,

$$\int_0^\infty \|B^* e^{tA^*} x\|^2 dt > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e de (2.21) resulta que  $X$  é positiva definida.

( $\Leftarrow$ ). Suponha agora que  $X > 0$  e defina

$$V(x) = \langle x, Xx \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Basta mostrar que  $V$  é uma função de Lyapunov estrita do sistema  $x' = A^*x$  e, assim,  $A^*$  é uma matriz estável e, portanto,  $A$  também é uma matriz estável.

Resulta que  $V \in \mathcal{C}^\infty$ ,  $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , o que mostra que  $V$  satisfaz (a) e (b) da **Definição 2.4.2**. Além disto, fazendo as substituições  $A^* \rightarrow A$ ,  $X \rightarrow P$  em (2.20), calculando em  $t = 0$  e utilizando a equação  $AX + XA^* = -W$ , segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle x, (AX + XA^*)x \rangle \\ &= \langle x, -Wx \rangle \\ &= -\langle x, Wx \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

pois, por hipótese,  $W - BB^* \geq 0$ , o que implica que  $W$  também é positiva semidefinida.

Seja agora  $\varphi(t) = e^{tA^*}x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = A^*x, \\ x(0) = x, \end{cases}$$

tal que

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = -\langle \varphi(t), W\varphi(t) \rangle = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \varphi(t), (W - BB^*)\varphi(t) \rangle &= \langle \varphi(t), W\varphi(t) \rangle - \langle \varphi(t), BB^*\varphi(t) \rangle \\ &= -\langle B^*\varphi(t), B^*\varphi(t) \rangle \\ &= -\langle B^*e^{tA^*}x, B^*e^{tA^*}x \rangle \\ &= -\|B^*e^{tA^*}x\|^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,  $B^*e^{tA^*}x = 0$ ,  $\forall t \geq 0$  e, repetindo o procedimento (2.22), resulta de

$$(B|AB| \cdots |A^{n-1}B)^*x = 0,$$

que  $x = 0$ , pois o par  $(A, B)$  é controlável por hipótese. Portanto,  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , mostrando que  $V$  satisfaz o item (d) da **Definição 2.4.2**. ■

## 2.5 Estabilização

Nessa seção, o principal objetivo é definir como e quando um sistema de controle linear autônomo pode se tornar estável. A forma mais comum de realizar esse estudo é obter a entrada de controle através do vetor de estado ou de saída, dando sentido então à realimentação estática de estado ou de saída. Será mostrado que no caso dos sistemas de controle lineares autônomos, esse estudo está diretamente relacionado com os autovalores da matriz  $A$  do sistema.

Sendo assim, sejam  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,m}$  e considere o sistema de controle

$$x' = Ax + Bu, \quad (2.24)$$

também chamado na literatura de sistema de controle (linear autônomo) em malha aberta. Suponha que a entrada de controle  $u$  do sistema é obtida através do vetor de estado  $x$ , pela seguinte função linear

$$u = Fx, \quad (2.25)$$

com  $F \in \mathbb{R}^{m,n}$  chamada de matriz de realimentação. Uma função da forma (2.25) é um caso particular em teoria de controle de um objeto conhecido como realimentação estática de estado. Neste contexto, em geral, uma realimentação estática de estado é uma função

$$u = \mathcal{F}(x),$$

com  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , em  $\mathbb{R}^n$ .

Substituindo (2.25) em (2.24), segue

$$x' = Ax + BFx,$$

ou seja,

$$x' = (A + BF)x. \quad (2.26)$$

O sistema de controle linear autônomo (2.24) na forma (2.26) é conhecido como sistema de controle (linear autônomo) em malha fechada.

Com isso, tem-se a seguinte definição.

**Definição 2.5.1.** O par  $(A, B)$  é denominado estabilizável, quando existir  $F \in \mathbb{R}^{m,n}$  tal que a matriz  $A + BF \in \mathbb{R}^{n,n}$  é estável.

Desta forma o sistema (2.24), quando escrito em malha fechada, toma a forma  $(A + BF, B)$ . Do **Lema 2.2.2** a controlabilidade de  $(A + BF, B)$  resulta da controlabilidade de  $(A, B)$ . Com isso, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $(A, B)$  um sistema autônomo controlável. Então,  $(A, B)$  é estabilizável pela matriz de realimentação*

$$F := -B^*W_T^{-1}, \quad (2.27)$$

com  $T > 0$ .

**Demonstração.** Da **Definição 2.5.1**, basta mostrar que a matriz  $A + BF$  é estável, com  $F$  tal como em (2.27). Tendo isto em conta, a demonstração desse teorema segue do **Teorema 2.4.4** considerando as substituições

$$(A + BF, B) \rightarrow (A, B) \quad \text{e} \quad W_T \rightarrow X.$$

Por construção,  $W_T$  é positiva semidefinida e, mais ainda, o **Teorema 2.2.1** garante que  $W_T$  é positiva definida. Do **Lema 2.2.2**, segue que o par  $(A + BF, B)$  é controlável, se o par  $(A, B)$  também o for. Sendo assim, resta mostrar ainda que a matriz  $W$  em

$$(A + BF)W_T + W_T(A + BF)^* = -W$$

é tal que  $W - BB^*$  é positiva semidefinida. De fato,

$$\begin{aligned} (A + BF)W_T + W_T(A + BF)^* &= AW_T + BFW_T + W_T(A^* + F^*B^*) \\ &= AW_T + B(-B^*W_T^{-1})W_T + W_TA^* + W_T(-W_T^{-1}B)B^* \\ &= AW_T - BB^* + W_TA^* - BB^* \\ &= AW_T + W_TA^* - 2BB^* \\ &= -\int_0^T \frac{d}{dt} (e^{-tA}BB^*e^{-tA^*}) dt - 2BB^* \\ &= -e^{-TA}BB^*e^{-TA^*} - BB^* = -W. \end{aligned}$$

Com isso, chega-se a seguinte identidade

$$W - BB^* = e^{-TA}BB^*e^{-TA^*}$$

concluindo que  $W - BB^*$  é positiva semidefinida. ■

Observe que no **Teorema 2.5.1** tem-se a garantia de que sistemas de controle lineares autônomos controláveis são estabilizáveis através de uma realimentação estática de estado. Mas a recíproca não é verdadeira, isto é, o fato do par  $(A, B)$  ser estabilizável, não implica que  $(A, B)$  seja controlável. Para isso, basta considerar o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.5.1.** *Seja*

$$x' = Ax + Bu, \tag{2.28}$$

um sistema de controle linear autônomo com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que (2.28) está na forma normal de Kalman. Da **Definição 2.5.1** segue que o sistema (2.28) é estabilizável por  $F = (f_0, f_1) \in \mathbb{R}^2$  com  $f_0 < -1$  e  $f_1$  arbitrário. Mas note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resultando que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\text{Po}(M) = 1$  e, portanto, pelo **Teorema 2.2.1** segue que o par  $(A, B)$  não é controlável.

Afim de esclarecer a observação anterior, o próximo teorema ajudará no que diz respeito à investigação de condições suficientes para garantir a controlabilidade de sistemas estabilizáveis.

**Teorema 2.5.2.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear autônomo. Então,  $(A, B)$  é controlável se, e somente se,  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  são ambos estabilizáveis.*

**Demonstração.**

( $\implies$ ) Se o par  $(A, B)$  é controlável, então o par  $(-A, -B)$  é controlável. De fato, basta considerar que  $W_T$ ,  $T > 0$ , tal como em (2.4), é não singular e o resultado segue de forma análoga ao **Teorema 2.2.1**. Assim, a estabilização de  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  decorre diretamente do **Teorema 2.5.1**.

( $\impliedby$ ) Considere agora que os pares  $(A, B)$  e  $(-A, -B)$  são estabilizáveis. Pelo **Teorema 2.3.2**, segue que os pares  $(\pm A, \pm B)$  podem ser escritos nas seguintes formas normais

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

sendo que os pares  $(\pm A_{11}, \pm B_1)$  são controláveis. Da **Definição 2.5.1** os sistemas

$$\left( \pm \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

são estabilizáveis, quando existirem matrizes da forma  $F^+ = (F_1^+, F_2^+)$  e  $F^- = (F_1^-, F_2^-)$  tais que

$$\begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1^+ & A_{12} + B_1 F_2^+ \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

e

$$- \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1^- & A_{12} + B_1 F_2^- \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

forem matrizes estáveis. Note que a matriz  $F$  garante a existência de autovalores com partes reais negativas. Do *Lema do Complemento de Schur* [18], tem-se que dadas as matrizes  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  e  $D_{22}$ ,  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $q \times p$  e  $q \times q$ , respectivamente, e considerando  $D_{11}$  uma matriz não singular, então

$$\det \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \det(D_{11}) \det(D_{22} - D_{21} D_{11}^{-1} D_{12}).$$

Assim, os autovalores de (2.29) são determinados, da seguinte maneira

$$\det \left( \left( \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 F_1^+ & A_{12} + B_1 F_2^+ \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \right) \right),$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda E - (A_{11} + B_1 F_1^+) & -(A_{12} + B_1 F_2^+) \\ 0 & \lambda E - A_{22} \end{pmatrix},$$

e, os autovalores de (2.30), são determinados por

$$\det \begin{pmatrix} \lambda E + A_{11} + B_1 F_1^- & A_{12} + B_1 F_2^- \\ 0 & \lambda E + A_{22} \end{pmatrix}.$$

Utilizando o *Lema do Complemento de Schur* descrito anteriormente, segue que os autovalores de (2.29) e (2.30) são encontrados, respectivamente, através dos seguintes polinômios característicos

$$\det(\lambda E - A_{22}) \det(\lambda E - (A_{11} + B_1 F_1^+)),$$

e

$$\det(\lambda E + A_{22}) \det(\lambda E + A_{11} + B_1 F_1^-).$$

Desta forma, pode-se concluir que as matrizes  $(A_{11} + B_1 F_1^+)$  e  $-(A_{11} + B_1 F_1^-)$  têm autovalores com partes reais negativas, devido a  $F_1^+$  e  $F_1^-$ , respectivamente. O mesmo não ocorre com  $A_{22}$ , pois  $A_{22}$  e  $-A_{22}$  não podem ter simultaneamente autovalores com partes reais negativas. Logo, do **Teorema 2.3.2**, existe uma matriz  $P$ , não singular, tal que

$$A = P^{-1} A_{11} P, \quad B = P^{-1} B_1.$$

Portanto, a controlabilidade de  $(A, B)$  segue da controlabilidade de  $(A_{11}, B_1)$  garantida pelo teorema citado anteriormente. ■

Esclarecida a questão de que todo sistema de controle linear autônomo controlável pode ser estabilizado por uma estratégia de controle do tipo realimentação estática de

estado (2.25), o propósito a partir de agora é escolher a posição no plano complexo dos autovalores da matriz do sistema

$$x' = (A + BF)x.$$

Nesses dois resultados que seguirão, será tratado apenas o caso no qual  $m = 1$ , isto é,  $B \in \mathbb{R}^n$ . Segue, então, o primeiro resultado, que é do tipo forma normal.

**Lema 2.5.1.** *Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. *O par  $(A, B)$  é controlável;*
- b. *Existe  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , não singular, tal que o par  $(A, B)$  nas coordenadas  $y = Px$  tem a forma  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ , com*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Os números  $a_1, \dots, a_{n-1}$  são os coeficientes do polinômio característico  $p$  de  $A$ , ou seja,  $p(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i$ .

**Demonstração.**

(a)  $\Rightarrow$  (b). Deve-se encontrar uma base  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  para o  $\mathbb{R}^n$ , de modo que a matriz  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ , definida por

$$Pw_k = e_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.32)$$

satisfaça:

- i.  $PB = e_n$ ;
- ii.  $PAP^{-1}e_1 = -a_0e_n$ ;

iii.  $PAP^{-1}e_{k+1} = e_k - a_k e_n, \quad 1 \leq k < n,$

sendo  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

Defina  $w_k$  da seguinte maneira

$$w_n = B, \quad w_k = Aw_{k+1} + a_k B, \quad 1 \leq k < n. \quad (2.33)$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} w_{n-1} &= Aw_n + a_{n-1}B = AB + a_{n-1}B, \\ w_{n-2} &= Aw_{n-1} + a_{n-2}B = A(AB + a_{n-1}B) + a_{n-2}B = A^2 + a_{n-1}AB + a_{n-2}B, \\ &\vdots \\ w_1 &= Aw_2 + a_1B = A^{n-1}B + a_{n-1}A^{n-2}B + a_{n-2}A^{n-3}B + \dots + a_1B. \end{aligned}$$

Assim, de forma recursiva, conclui-se que

$$w_k = A^{n-k}B + \sum_{j=1}^{n-k} a_{n-j}A^{n-k-j}B, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.34)$$

Como o par  $(A, B)$  é controlável, segue que  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  são linearmente independentes. Da mesma maneira,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  também são, visto que formam uma base para o  $\mathbb{R}^n$ , a qual o termo geral é dado por (2.34). Do *Teorema de Cayley-Hamilton*,  $p(A) = 0$ .

Com isso, tem-se

$$PB = Pw_n = e_n,$$

o que prova o item (i). Ainda

$$\begin{aligned} Aw_1 &= A(A^{n-1}B + a_{n-1}A^{n-2}B + a_{n-2}A^{n-3}B + \dots + a_1B) - a_0B \\ &= A^nB + a_{n-1}A^{n-1}B + a_{n-2}A^{n-2}B + \dots + a_1AB - a_0B \\ &= \left( A^nB + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}A^{n-j}B \right) - a_0B \\ &= \left( A^n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}A^{n-j} \right) B - a_0B \\ &= p(A)B - a_0B \\ &= -a_0B. \end{aligned}$$

Mas,  $B = w_n$  e assim,

$$Aw_1 = -a_0w_n.$$

De (2.32), como  $P$  é inversível, segue que  $w_k = P^{-1}e_k, \forall k = 1, \dots, n$ . Logo,

$$AP^{-1}e_1 = -a_0P^{-1}e_n,$$

o que implica em

$$PAP^{-1}e_1 = -a_0e_n,$$

provando (ii). E, por fim, utilizando (2.33), obtém-se que

$$Aw_{k+1} = w_k - a_kB,$$

logo,

$$\begin{aligned} AP^{-1}e_{k+1} &= P^{-1}e_k - a_kw_n \\ &= P^{-1}e_k - a_kP^{-1}e_n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$AP^{-1}e_{k+1} = P^{-1}(e_k - a_k e_n),$$

o que implica em

$$PAP^{-1}e_{k+1} = e_k - a_k e_n,$$

provando (iii) e completando a prova.

(b)  $\Rightarrow$  (a). Considere o par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  tal como em (b). Logo, vem que  $\text{Po}(\tilde{M}) = n$ , pois

$$\tilde{M} = (\tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\dots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-3} \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

sendo que para cada  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\alpha_i$  é obtido como em função dos coeficientes  $a_1, \dots, a_{n-1}$ . Portanto, do *Crítério de Kalman*, segue que esse par é controlável. Assim, pelo **Teorema 2.3.1**, obtém-se que  $(A, B)$  também é controlável, completando a demonstração. ■

Agora, no próximo teorema, ficará esclarecido o principal resultado, conhecido como alocação de raízes do polinômio característico de um sistema de controle linear autônomo em malha fechada.

**Teorema 2.5.3.** *Seja  $(A, B)$  um sistema de controle linear controlável e  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  números complexos dados, com  $r + 2(s-r) = n$  e  $r, s, n \in \mathbb{N}$ . Então, existe  $F \in \mathbb{R}^n$  tal que o polinômio característico de  $A + BF$  possui como raízes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$ .*

**Demonstração.** Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  as componentes da matriz  $F \in \mathbb{R}^n$ . O **Lema 2.5.1**, afirma que existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n,n}$  não singular tal que

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB, \quad \tilde{F} = FP^{-1},$$

com o par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  como em (2.31) e  $\tilde{F} = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-1})$ . Assim,

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \tilde{f}_0 - a_0 & \tilde{f}_1 - a_1 & \tilde{f}_2 - a_2 & \cdots & \tilde{f}_{n-2} - a_{n-2} & \tilde{f}_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix},$$

sendo  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1$  os coeficientes do polinômio característico  $p$  de  $A$ . Portanto, o polinômio característico  $\tilde{p}$  de  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$  satisfaz

$$\tilde{p}(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{f}_i - a_i) r^i.$$

Com  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  é possível construir um polinômio

$$p_\lambda(r) = r^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i r^i,$$

com  $\alpha_i$  obtido a partir destes números, para  $i = 0, \dots, n-1$ . Assim, comparando os polinômios  $\tilde{p}$  e  $p_\lambda$  resulta que as componentes da matriz  $\tilde{F}$  são determinados por

$$\tilde{f}_i = a_i + \alpha_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

e, portanto,  $F = \tilde{F}P$ , o que completa a demonstração. ■

Com o intuito de mostrar a importância destes dois últimos resultados, no que se refere à estabilização de sistemas de controle, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.5.2.** *Seja*

$$x' = Ax + Bu,$$

um sistema de controle linear com  $A$  e  $B$  como no **Exemplo 2.2.1**. Como  $A$  e  $B$  já estão na forma do **Lema 2.5.1**, não é necessário determinar a matriz  $P$ . Assim, considerando a matriz de realimentação  $F = (f_0, f_1) \in \mathbb{R}^2$ , tem-se

$$A + BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (f_0, f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_0 - 1 & f_1 \end{pmatrix}.$$

Determinando o polinômio característico de  $A + BF$ , segue

$$\det(\lambda E - (A + BF)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 - f_0 & \lambda - f_1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\lambda^2 - f_1 \lambda + (1 - f_0). \quad (2.35)$$

Agora, escolhendo  $\lambda_{1,2} = -1$  como autovalores, obtém-se o seguinte polinômio característico

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1. \quad (2.36)$$

Igualando (2.35) e (2.36), tem-se

$$\lambda^2 - f_1\lambda + (1 - f_0) = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Desta forma, é possível determinar os valores de  $f_0$  e  $f_1$ , encontrando assim a matriz de realimentação, isto é,

$$1 - f_0 = 1 \Rightarrow f_0 = 0,$$

e

$$-f_1 = 2 \Rightarrow f_1 = -2.$$

Portanto, a matriz de realimentação  $F$  é

$$F = (0, -2).$$

O próximo teorema, análogo ao **Teorema 2.5.3**, fornece uma fórmula explícita para o cálculo da matriz  $F \in \mathbb{R}^n$ , a partir dos números  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , simétricos com respeito ao eixo real no plano complexo.

**Teorema 2.5.4.** *Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , números simétricos com respeito ao eixo real no plano complexo e*

$$p_\lambda(r) = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2) \cdots (r - \lambda_n). \quad (2.37)$$

*Se o sistema de controle linear autônomo  $(A, B)$  é controlável, então a matriz*

$$F = -e_n M^{-1} p_\lambda(A), \quad (2.38)$$

*é tal que os autovalores de  $A + BF$  são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , sendo  $e_n$  o  $n$ -ésimo elemento da base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $M = (B|AB|\cdots|A^{n-1}B)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , números simétricos com respeito ao eixo real no plano complexo e

$$p_\lambda(r) = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2) \cdots (r - \lambda_n),$$

isto é,

$$p_\lambda(r) = r^n + \alpha_{n-1}r^{n-1} + \cdots + \alpha_2r^2 + \alpha_1r + \alpha_0.$$

sendo  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  obtidos a partir de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Como o par  $(A, B)$  é controlável, do **Teorema 2.5.3**, existe uma matriz  $F \in \mathbb{R}^n$  tal que o polinômio característico de  $A + BF$  possui como raízes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Assim, pelo *Teorema de Cayley–Hamilton*,

$$p_\lambda(A + BF) = (A + BF)^n + \alpha_{n-1}(A + BF)^{n-1} + \dots + \alpha_2(A + BF)^2 + \alpha_1(A + BF) + \alpha_0 E = 0.$$

De (2.8) tem-se que

$$(A + BF)^k = A^k + \sum_{i=0}^{k-1} A^i BF(A + BF)^{k-i-1},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim, segue que

$$\begin{aligned} p_\lambda(A + BF) &= \left( A^n + \sum_{i=0}^{n-1} A^i BF(A + BF)^{n-i-1} \right) + \\ &\quad \alpha_{n-1} \left( A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} A^i BF(A + BF)^{n-i-2} \right) + \dots + \\ &\quad \alpha_2(A^2 + ABF + BFA + (BF)^2) + \alpha_1(A + BF) + \alpha_0 E \\ &= (A^n + BF(A + BF)^{n-1} + ABF(A + BF)^{n-2} + \dots + A^{n-2}BF(A + BF) \\ &\quad + A^{n-1}BF) + \alpha_{n-1}(A^{n-1} + BF(A + BF)^{n-2} + ABF(A + BF)^{n-3} + \dots \\ &\quad + A^{n-3}BF(A + BF) + A^{n-2}BF) + \dots + \alpha_2(A^2 + BF(A + BF) + ABF) \\ &\quad + \alpha_1(A + BF) + \alpha_0 E \\ &= (A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_2A^2 + \alpha_0 E) + [(BF(A + BF)^{n-1} + ABF \\ &\quad (A + BF)^{n-2} + \dots + A^{n-2}BF(A + BF) + A^{n-1}BF) + \alpha_{n-1}(BF \\ &\quad (A + BF)^{n-2} + ABF(A + BF)^{n-3} + \dots + A^{n-3}BF(A + BF) + \\ &\quad A^{n-2}BF) + \dots + \alpha_2(BF(A + BF) + ABF) + \alpha_1BF] \\ &= p_\lambda(A) + ML(F) = 0, \end{aligned}$$

com

$$L(F) = \begin{pmatrix} F(A + BF)^{n-1} + \alpha_{n-1}F(A + BF)^{n-2} + \dots + \alpha_2F(A + BF) + \alpha_1F \\ F(A + BF)^{n-2} + \alpha_{n-1}F(A + BF)^{n-3} + \dots + \alpha_2F \\ \vdots \\ F(A + BF) + \alpha_{n-1}F \\ F \end{pmatrix}$$

Assim, como  $M$  é não singular, pois o par  $(A, B)$  é controlável, resulta que  $L(F) = -M^{-1}p_\lambda(A)$  e multiplicando à esquerda por  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ , obtém-se

$$F = -e_n M^{-1} p_\lambda(A),$$

o que conclui a demonstração. ■

A expressão (2.38) é conhecida na literatura como *Fórmula de Ackermann*.

**Exemplo 2.5.3.** *Considerando novamente o sistema de controle do Exemplo 2.5.2,*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$p_\lambda(r) = r^2 + 2r + 1,$$

pois,  $\lambda_{1,2} = -1$ . Assim, empregando a *Fórmula de Ackermann*, segue que

$$F = -e_2 M^{-1} p_\lambda(A) = -(0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -(0, 2) = (0, -2),$$

concordando com o resultado do **Exemplo 2.5.2**.

## Capítulo 3

# Controle de Ciclos Limites Via Teoria de Controle e Bifurcações de Hopf de Codimensões Um e Dois

No presente capítulo, será desenvolvido o estudo sobre o controle de ciclos limites, via teoria de controle desenvolvida no capítulo anterior, e bifurcações de Hopf de codimensões um e dois. Considerando as hipóteses iniciais apresentadas, uma família a quatro parâmetros de realimentações estáticas será construída e com isso, será feita a análise dos ciclos limites a partir do sistema de controle linear autônomo em malha fechada. Por fim, os teoremas e as proposições darão uma ideia geral sobre a existência, bem como a estabilidade dos ciclos limites, os quais dependerão das quantidades de parâmetros que serão fixados. Após a apresentação desses resultados, a última seção do capítulo contará com duas aplicações da teoria estudada, para exemplificar os resultados obtidos.

## 3.1 Bifurcação de Hopf e o Método da Projeção

### 3.1.1 A Forma Normal da Bifurcação de Hopf

Considere o seguinte sistema autônomo, o qual depende apenas de um único parâmetro

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (3.1)$$

O campo vetorial associado com este sistema é  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$F(x_1, x_2) = (\alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)),$$

o qual possui um único equilíbrio em  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . A parte linear deste campo vetorial é dada por

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & \alpha - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, calculando no ponto de equilíbrio,

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

De (3.2) vem que  $DF(0, 0)$  possui autovalores complexos da forma  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ . Defina então a variável complexa  $z = x_1 + ix_2$ . Derivando  $z$  com respeito ao parâmetro  $t$ , resulta que  $z' = x_1' + ix_2'$  e de

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = x_1^2 + x_2^2$$

e (3.1), vem que

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3.3)$$

Usando a representação polar dos números complexos,  $z = re^{i\theta}$ , com  $r \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , e derivando em relação ao parâmetro  $t$ , a seguinte expressão é obtida

$$z' = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}.$$

Logo, substituindo (3.3) na expressão anterior com  $r^2 = z\bar{z}$ , segue que

$$r' + ir\theta' = r(\alpha - r^2) + ir,$$

ou seja,

$$\begin{cases} r' = r(\alpha - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Como o sistema (3.4) é desacoplado, pode-se analisar as bifurcações através dele. Assim, é possível observar que para  $\alpha > 0$ , tem-se  $r_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$  é um ponto de equilíbrio da primeira equação. E ainda que  $r_0(\alpha)$  descreve um ciclo limite percorrido no sentido anti-horário, pois  $\theta' > 0$ . Desta forma, a origem é um foco atrator quando  $\alpha < 0$  e repulsor quando  $\alpha > 0$ . Para  $\alpha = 0$  tem-se um foco atrator *fraco*, ou seja, localmente equivalente a um foco hiperbólico. Observa-se que todas as órbitas tanto as internas quanto as externas, excetuando a origem, tendem ao ciclo limite quanto  $t \rightarrow \infty$ . Logo, este ciclo limite é estável.

O surgimento de um ciclo limite para  $\alpha > 0$  e a mudança de estabilidade do foco, a partir da mudança do parâmetro  $\alpha$ , recebe o nome de Bifurcação de Hopf (Supercrítica).

É possível analisar também o sistema que tem termos não lineares com sinais opostos ao do sistema (3.1), ou seja,

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x'_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (3.5)$$

De forma análoga, os procedimentos aplicados em (3.1) são aplicados em (3.5). Sendo assim, chega-se ao seguinte sistema desacoplado

$$\begin{cases} r' = r(\alpha + r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

A análise do sistema é feita exatamente da mesma forma que o anterior. Pode-se observar, neste caso, que há o surgimento de um ciclo limite instável, mudando a estabilidade do foco conforme as mudanças no parâmetro  $\alpha$ , ou seja, tem-se uma Bifurcação de Hopf (Subcrítica).

**Definição 3.1.1.** *Os sistemas (3.1) e (3.5) ou, equivalentemente, (3.4) e (3.6) são chamados de formas normais da Bifurcação de Hopf de codimensão um.*

Agora, adicionando alguns termos de ordem superior aos sistemas (3.1) e (3.5) e, ainda, reescrevendo na forma vetorial, tem-se

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + s(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (3.7)$$

sendo  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $s = \pm 1$ . Neste trabalho,  $O(\|x\|^m)$  denota uma função com expansão em série de Taylor na variável  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  iniciando nos termos de ordem  $m \in \mathbb{N}$  ou superior. Considerando isto, tem-se o seguinte lema.

**Lema 3.1.1.** *O sistema (3.7) é localmente topologicamente equivalente, em torno da origem, ao sistema (3.1) quando  $s = -1$ .*

**Demonstração.** A prova desse lema pode ser encontrada em [8]. ■

De igual modo, é possível mostrar, mediante o uso de coordenadas polares, que o sistema

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 - x_2 + \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) + s x_1(x_1^2 + x_2^2)^2, \\ x'_2 = x_1 + \alpha x_2 + \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) + s x_2(x_1^2 + x_2^2)^2, \end{cases} \quad (3.8)$$

com  $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$  e  $s = \pm 1$ , pode ter nenhum, um ou dois ciclos limites. Em particular, os ciclos limites podem ser hiperbólicos ou não hiperbólicos.

**Definição 3.1.2.** *O sistema (3.8) é chamado de forma normal da Bifurcação de Hopf de codimensão dois ou de Bautin.*

**Lema 3.1.2.** *O sistema*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + s(x_1^2 + x_2^2)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^6),$$

*é localmente topologicamente equivalente, em torno da origem, ao sistema (3.8), com  $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$  e  $s = \pm 1$ .*

A prova do lema anterior e maiores informações sobre a bifurcação de Bautin podem ser encontradas em [8].

### 3.1.2 Variedades Centrais em Sistemas Dinâmicos Contínuos

Considere novamente o sistema (dinâmico contínuo) apresentado na Seção 2.4,

$$x' = f(x), \quad (3.9)$$

com  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$  e  $f \in \mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ , no aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ .

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os autovalores associados à matriz Jacobiana  $H$  de (3.9), calculada no ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$ , isto é,  $H = Df(0)$ . Suponha ainda que o sistema (3.9) seja não hiperbólico, ou seja, existem autovalores com partes reais nulas. Desta forma, defina  $n_+$  como sendo o número de autovalores com  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  (incluindo suas multiplicidades),  $n_0$  o número dos autovalores com  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  e  $n_-$  como sendo o número dos autovalores com  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Defina  $E^c$  o autoespaço linear generalizado de  $H$ , gerado pelos autovetores (generalizados) associados com os  $n_0$  autovalores sobre o eixo imaginário, os quais são definidos como autovalores críticos. E, por fim, seja  $\varphi_t$  o fluxo associado com (3.9). Considerando estas afirmações tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.1** (Teorema da Variedade Central). *Existe uma variedade invariante  $n_0$ -dimensional definida localmente  $W^c$ , de classe  $\mathcal{C}^k$ , que é tangente a  $E^c$  em  $x_0 = 0$ . Além disso, existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0 = 0$  tal que se  $\varphi_t(x) \in U$  para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ), então  $\varphi_t(x) \rightarrow W^c$  para  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).*

Para mais informações ver [8].

**Definição 3.1.3.** *A variedade  $W^c$  é chamada variedade central local.*

Na sua base de autovetores, o sistema (3.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} u' = Bu + g(u, v), \\ v' = Cv + h(u, v), \end{cases} \quad (3.10)$$

sendo  $u \in \mathbb{R}^{n_0}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ ,  $B$  uma matriz  $n_0 \times n_0$ ,  $C$  uma matriz  $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$  e  $g$  e  $h$  funções que possuem expansões em séries de Taylor começando pelo menos nos termos quadráticos. A variedade central  $W^c$  pode ser representada, localmente, como um gráfico de uma função  $\mathcal{C}^k$ ,

$$W^c = \{(u, v) : v = V(u)\},$$

com  $V : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$  e, devido à propriedade da tangência de  $W^c$ ,  $V(u) = O(\|u\|^2)$ . Baseando nisto, há o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.2** (Princípio da Redução). *O sistema (3.10) é localmente topologicamente equivalente, próximo à origem, ao sistema*

$$\begin{cases} u' = Bu + g(u, V(u)), \\ v' = Cv. \end{cases} \quad (3.11)$$

Observe que as equações diferenciais nas variáveis  $u$  e  $v$  são desacopladas. Assim, a primeira equação de (3.11) é a equação de restrição de (3.10) à variedade central, termo este que será usado no decorrer do texto.

### 3.1.3 Método da Projeção

Seja  $E$  um espaço vetorial e  $F_1, F_2$  subespaços vetoriais de  $E$ , tais que  $E = F_1 \oplus F_2$ .

**Definição 3.1.4.** *Seja  $P : E \rightarrow E$  um operador linear,  $E = F_1 \oplus F_2$ . Define-se a projeção de  $E$  sobre  $F_1$  paralelamente a  $F_2$  como sendo  $Pw = u$ , com  $w \in E$  escrito de maneira única,  $w = u + v$ , com  $u \in F_1$  e  $v \in F_2$ .*

O operador  $P : E \rightarrow E$  é idempotente, ou seja,  $P^2 = P$ .

Escreva o sistema (3.9) na forma

$$x' = Hx + F(x). \quad (3.12)$$

O Método da Projeção, tal como apresentado em [8], ficará claro através da aplicação ao estudo da Bifurcação de Hopf.

### Aplicação do Método da Projeção à Bifurcação de Hopf

No caso em que ocorrem bifurcações de Hopf, sabe-se que  $H$  possui dois autovalores complexos conjugados com partes reais nulas, ou seja,  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , com  $\omega_0 > 0$  e nenhum

outro autovalor com parte real nula. Seja  $q \in \mathbb{C}^n$  um autovetor complexo associado a  $\lambda_1 = i\omega_0$ , ou seja,

$$Hq = i\omega_0q, \quad H\bar{q} = -i\omega_0\bar{q}.$$

Seja também  $p \in \mathbb{C}^n$ , um autovetor adjunto tal que

$$H^*p = -i\omega_0p, \quad H^*\bar{p} = i\omega_0\bar{p},$$

e ainda, considere que  $p$  e  $q$  satisfazem a condição da normalização, ou seja,

$$\langle p, q \rangle = 1,$$

sendo o produto interno o usual em  $\mathbb{C}^n$ , isto é, sendo  $p = (p_1, \dots, p_n)$  e  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , então

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i.$$

Observe que este produto interno definido pelo somatório é linear com respeito ao segundo argumento. Aqui, o espaço  $E^c$  é bidimensional e gerado por  $\{\operatorname{Re}(q), \operatorname{Im}(q)\}$ . Sendo assim, o autoespaço  $E^{su}$  é  $(n-2)$ -dimensional, o qual envolve todos os demais autovetores (generalizados) de  $H$ .

Sendo assim, tem-se a seguinte afirmação.

**Afirmação 3.1.1.**  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ .

**Demonstração.** De fato, considerando  $\lambda_2 = -i\omega_0$ , tem-se que  $\bar{q} = \frac{1}{\lambda_2} H\bar{q}$ , pois  $\omega_0 > 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{q} \rangle &= \left\langle p, \frac{1}{\lambda_2} H\bar{q} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2} \langle p, H\bar{q} \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2} \langle H^*p, \bar{q} \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_2} \langle \lambda_2 p, \bar{q} \rangle \\ &= \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} \langle p, \bar{q} \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2} \langle p, \bar{q} \rangle \iff \left(1 - \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_2}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0 \implies \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

■

Considere agora a seguinte definição.

**Definição 3.1.5.** *Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ . O autoespaço generalizado correspondente a  $\lambda$  é o subconjunto definido por*

$$J_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : (H - \lambda I)^k v = 0\}$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Com isso, é possível enunciar e provar o seguinte lema.

**Lema 3.1.3.** *Seja  $E^{su}$  o autoespaço linear  $(n - 2)$ -dimensional de  $H$  gerado por todos os autovetores (generalizados) associados com os autovalores com partes reais não nulas. Então,  $y \in E^{su}$  se, e somente se,  $\langle p, y \rangle = 0$ .*

**Demonstração.** ( $\implies$ ) Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_l$ , os autovalores reais de  $H$  e  $b_1, \bar{b}_1, b_2, \bar{b}_2, \dots, b_m, \bar{b}_m$  os autovalores complexos de  $H$ , diferentes de  $\lambda_1$  e  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$ . Seja também  $E_{a_i}$  o autoespaço generalizado correspondente a  $a_i$  e  $E_{b_j, \bar{b}_j}$  o autoespaço generalizado correspondente a  $b_j, \bar{b}_j$ . Sendo assim, tem-se que

$$E^{su} = E_{a_1} \oplus E_{a_2} \oplus \dots \oplus E_{a_l} \oplus E_{b_1, \bar{b}_1} \oplus E_{b_2, \bar{b}_2} \oplus \dots \oplus E_{b_m, \bar{b}_m}.$$

Do fato de  $E_{a_i}$  serem espaços generalizados, segue da **Definição 3.1.5** que, para cada  $i$ , existe um  $k_{a_i} \in \mathbb{N}$  tal que se  $y \in E_{a_i}$ , então

$$(H - a_i I_n)^{k_{a_i}} y = 0.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, (H - a_i I_n)^{k_{a_i}} y \rangle = \langle (H^* - \bar{a}_i I_n)^{k_{a_i}} p, y \rangle \\ &= \langle (\lambda_2 - \bar{a}_i)^{k_{a_i}} p, y \rangle \\ &= (\lambda_1 - a_i)^{k_{a_i}} \langle p, y \rangle, \end{aligned}$$

observando que  $\lambda_1 \neq a_i$ , segue que  $(\lambda_1 - a_i)^{k_{a_i}} \neq 0$  e, portanto,

$$\langle p, y \rangle = 0.$$

De maneira análoga, como  $E_{b_j, \bar{b}_j}$  são espaços generalizados, da **Definição 3.1.5** segue que, para cada  $j$ , existe  $k_{b_j} \in \mathbb{N}$  tal que se  $y \in E_{b_j, \bar{b}_j}$ , então

$$(H - b_j I_n)^{k_{b_j}} (H - \bar{b}_j I_n)^{k_{b_j}} y = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle p, (H - b_j I_n)^{k_{b_j}} (H - \bar{b}_j I_n)^{k_{b_j}} y \right\rangle = \left\langle (H^* - \bar{b}_j I_n)^{k_{b_j}} p, (H - \bar{b}_j I_n)^{k_{b_j}} y \right\rangle \\ &= \left\langle (H^* - b_j I_n)^{k_{b_j}} (H^* - \bar{b}_j I_n)^{k_{b_j}} p, y \right\rangle \\ &= \left\langle (\lambda_2 - b_j)^{k_{b_j}} (\lambda_2 - \bar{b}_j)^{k_{b_j}} p, y \right\rangle \\ &= (\lambda_1 - \bar{b}_j)^{k_{b_j}} (\lambda_1 - b_j)^{k_{b_j}} \langle p, y \rangle, \end{aligned}$$

e como  $\lambda_1 \neq \bar{b}_j$  e  $\lambda_1 \neq b_j$ , resulta que  $(\lambda_1 - \bar{b}_j)^{k_{b_j}} (\lambda_1 - b_j)^{k_{b_j}} \neq 0$  e com isso,  $\langle p, y \rangle = 0$ .

Desta forma, para todo  $y \in E^{su}$ , pode-se escrever

$$y = \sum_{i=1}^l y_{a_i} + \sum_{j=1}^m y_{b_j}$$

com  $y_{a_i} \in E_{a_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$  e  $y_{b_j} \in E_{b_j, \bar{b}_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle p, y \rangle &= \langle p, y_{a_1} + \dots + y_{a_l} + y_{b_1} + \dots + y_{b_m} \rangle \\ &= \langle p, y_{a_1} \rangle + \dots + \langle p, y_{a_l} \rangle + \langle p, y_{b_1} \rangle + \dots + \langle p, y_{b_m} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

provando a implicação.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $y \in \mathbb{R}^n$ , sendo  $\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^{su}$  tal que  $\langle p, y \rangle = 0$ . Assim, pode-se escrever

$$y = y_c + y_{su},$$

sendo  $y_c \in E^c$  e  $y_{su} \in E^{su}$ . Como  $E^c$  é gerado por  $q$  e  $\bar{q}$  e  $y_c \in \mathbb{R}^n$ , segue que

$$y_c = \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q},$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$y = \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q} + y_{su}.$$

Mas, da hipótese, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 = \langle p, y \rangle &= \langle p, y_c + y_{su} \rangle \\ &= \langle p, y_c \rangle + \langle p, y_{su} \rangle \\ &= \langle p, \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q} \rangle + \langle p, y_{su} \rangle \\ &= \langle p, \alpha q \rangle + \langle p, \bar{\alpha} \bar{q} \rangle + \langle p, y_{su} \rangle \\ &= \alpha \langle p, q \rangle + \bar{\alpha} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, y_{su} \rangle. \end{aligned}$$

Mas, note que, da implicação anterior  $\langle p, y_{su} \rangle = 0$ . Ainda, tem-se que  $\langle p, q \rangle = 1$  e, da **Afirmção 3.1.1**,  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ . Disto, segue que  $\alpha = 0$  e, portanto,  $y_c = 0$ , completando a prova do lema. ■

Observe que  $y \in \mathbb{R}^n$  e o autovetor  $p$ , como foi definido, pertence a  $\mathbb{C}^n$ . Logo, a condição deste lema implica duas restrições a  $y$  (tanto a parte real quanto a imaginária de  $\langle p, y \rangle$  se anulam). Considerando o lema anterior e a normalização de  $p$  e  $q$ , é possível decompor  $x \in \mathbb{R}^n$  em

$$x = zq + \bar{z}\bar{q} + y,$$

com  $z \in \mathbb{C}$ ,  $zq + \bar{z}\bar{q} \in E^c$  e  $y \in E^{su}$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \langle p, x \rangle &= \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} + y \rangle \\ &= \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, y \rangle \\ &= z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle \\ &= z, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z = \langle p, x \rangle.$$

Com isso, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} z = \langle p, x \rangle, \\ y = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Note que (3.13) permite definir dois operadores lineares,

$$P_c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto P_c x = \langle p, x \rangle q + \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}$$

e

$$P_{su} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto P_{su} x = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}.$$

Da forma como foram construídos, esses operadores são projeções sobre  $E^c$  e  $E^{su}$ , respectivamente, conforme **Definição 3.1.4**. Logo,

$$P_c^2 = P_c, \quad P_{su}^2 = P_{su}, \quad P_c P_{su} = P_{su} P_c = 0.$$

De fato, da **Afirmção 3.1.1**, da normalização  $\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = 1$  e de  $\langle \bar{p}, q \rangle = 0$ , segue que  $P_c q = q$  e  $P_c \bar{q} = \bar{q}$  e, portanto,

$$\begin{aligned} P_c^2 x &= P_c (P_c x) \\ &= P_c (\langle p, x \rangle q + \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}) \\ &= \langle p, x \rangle P_c q + \langle \bar{p}, x \rangle P_c \bar{q} \\ &= P_c x, \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . As outras três igualdades restantes seguem do lema anterior.

O escalar  $z$  e o vetor  $y$  em (3.13) podem ser vistos como novas coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ . Assim, derivando estas coordenadas em relação ao parâmetro  $t$  vem que

$$\begin{aligned} z' &= \langle p, x' \rangle \\ &= \langle p, Hx + F(x) \rangle \\ &= \langle p, H(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, H(zq) \rangle + \langle p, H(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, z(Hq) \rangle + \langle p, \bar{z}(H\bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= \langle p, i\omega_0 zq \rangle + \langle p, \bar{z}(-i\omega_0 \bar{q}) \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= i\omega_0 z \langle p, q \rangle + (-i\omega_0 \bar{z}) \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \\ &= i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle. \end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned}
y' &= x' - z'q - \bar{z}'\bar{q} \\
&= Hx + F(x) - (i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle) q - (-i\omega_0 z - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle) \bar{q} \\
&= H(zq + \bar{z}\bar{q} + y) + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - i\omega_0 zq - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q + i\omega_0 z\bar{q} - \\
&\quad \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \\
&= i\omega_0 zq - i\omega_0 \bar{z}\bar{q} + Hy + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - i\omega_0 zq - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q + i\omega_0 z\bar{q} - \\
&\quad \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} \\
&= Hy + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$y' = Hy + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}.$$

Logo, das igualdades anteriores, obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} z' = i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle, \\ y' = Hy + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (3.14)$$

O sistema (3.14) é  $(n + 2)$ -dimensional, devido as duas restrições reais impostas em  $y$ . Fazendo expansão em série de Taylor em  $z$ ,  $\bar{z}$  e  $y$ , em torno da origem e até os termos de ordem 3, segue que

$$\begin{aligned}
z' &= i\omega_0 z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} z^2 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} z\bar{z} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} z^2 \bar{z} + \\
&\quad \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{(z,y)=(0,0)} y_i \right) z + \\
&\quad \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{(z,y)=(0,0)} y_i \right) \bar{z} + O(|z|^4),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y' = Hy + \frac{1}{2} & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \Big|_{z=0} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} q - \right. \\
& \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} \bar{q} \Big) z^2 + \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \Big|_{z=0} - \right. \\
& \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} q - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} \bar{q} \Big) z\bar{z} + \\
& \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \Big|_{z=0} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} q - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0} \bar{q} \right) \bar{z}^2
\end{aligned}$$

isto é, de forma simplificada, o sistema (3.14) pode ser reescrito como

$$\begin{cases}
z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + \\
\quad O(|z|^4), \\
y' = Hy + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),
\end{cases} \quad (3.15)$$

sendo que  $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}$  e  $G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^n$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Com isso, de forma geral, obtém-se

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \Big|_{z=0}, \quad i+j \geq 2, \\
\bar{G}_{10,i} &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial z} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{(z,y)=(0,0)}, \quad i = 1, \dots, n, \\
\bar{G}_{01,i} &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \bar{z}} \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \Big|_{(z,y)=(0,0)}, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

e

$$H_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} F(zq + \bar{z}\bar{q}) \Big|_{z=0}, \quad i+j = 2.$$

Agora, a variedade central é representada localmente por

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (3.16)$$

com  $\langle p, w_{ij} \rangle = 0$ , isto é,  $w_{ij} \in E^{su}$ . Note que, derivando (3.16), em relação a  $z$ , obtém-se

$$y' = w_{20}zz' + w_{11}(\bar{z}z' + z\bar{z}') + w_{02}\bar{z}\bar{z}' + O(|z|^2). \quad (3.17)$$

Sendo assim, substituindo (3.17) na segunda equação de (3.15) e utilizando também a primeira equação segue que

$$Mw_{20}z + Nw_{11} + Tw_{02}\bar{z} = H \left( \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z}^2 \right) + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

sendo,

$$M = i\omega_0z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + O(|z|^4),$$

$$N = \left( i\omega_0z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{20}z^2\bar{z} + G_{11}z\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^3 + \langle G_{10}, y \rangle z\bar{z} + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z}^2 + O(|z|^4) \right) \bar{z} + \left( -i\omega_0\bar{z} + \frac{1}{2}G_{20}\bar{z}^2 + G_{11}\bar{z}z + \frac{1}{2}G_{02}z^2 + \frac{1}{2}G_{21}\bar{z}^2z + \langle G_{10}, y \rangle \bar{z} + \langle G_{01}, y \rangle z + O(|z|^4) \right) z,$$

$$T = -i\omega_0\bar{z} + \frac{1}{2}G_{20}\bar{z}^2 + G_{11}\bar{z}z + \frac{1}{2}G_{02}z^2 + \frac{1}{2}G_{21}\bar{z}^2z + \langle G_{10}, y \rangle \bar{z} + \langle G_{01}, y \rangle z + O(|z|^4).$$

Levando em consideração que a equação da variedade central é expressa até termos quadráticos, tem-se que

$$(i\omega_0w_{20})z^2 + (-i\omega_0w_{02})\bar{z}^2 = \frac{1}{2}(Hw_{20} + H_{20})z^2 + (Hw_{11} + H_{11})z\bar{z} + \frac{1}{2}(Hw_{02} + H_{02})\bar{z}^2 + O(|z|^3).$$

Assim, igualando termo a termo,

$$i\omega_0w_{20} = \frac{1}{2}(Hw_{20} + H_{20}),$$

ou seja,

$$(2i\omega_0E - H)w_{20} = H_{20}.$$

Da mesma forma,

$$0 = Hw_{11} + H_{11},$$

isto é,

$$-Hw_{11} = H_{11}.$$

E, por fim,

$$-i\omega_0 w_{02} = \frac{1}{2}(Hw_{02} + H_{02}),$$

o que implica

$$(-2i\omega_0 E - H)w_{02} = H_{02}.$$

Assim os vetores  $w_{20}$ ,  $w_{11}$  e  $w_{02}$  podem ser encontrados a partir das seguintes equações lineares

$$\begin{cases} (2i\omega_0 E - H)w_{20} = H_{20}, \\ -Hw_{11} = H_{11}, \\ (-2i\omega_0 E - H)w_{02} = H_{02}, \end{cases}$$

sendo que estas equações possuem uma única solução, visto que as matrizes em seus membros esquerdos são não singulares, uma vez que  $0$  e  $\pm 2i\omega_0$  não são autovalores de  $H$ .

Sendo assim,

$$\begin{cases} w_{20} = (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20}, \\ w_{11} = -H^{-1}H_{11}, \\ w_{02} = (-2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{02}. \end{cases}$$

Com isso, pode-se escrever a equação de restrição até termos cúbicos como

$$z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, y \rangle z + \langle G_{01}, y \rangle \bar{z} + O(|z|^4),$$

e levando em conta (3.16), segue que

$$\begin{aligned}
z' &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \left\langle G_{10}, \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z} \right\rangle z + \\
&\quad \left\langle G_{01}, \frac{1}{2}w_{20}z^2 + w_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}w_{02}\bar{z} \right\rangle \bar{z} + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}\langle G_{10}, w_{20} \rangle z^3 + \langle G_{10}, w_{11} \rangle z^2\bar{z} + \\
&\quad \frac{1}{2}\langle G_{10}, w_{02} \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2}\langle G_{01}, w_{20} \rangle z^2\bar{z} + \langle G_{01}, w_{11} \rangle z\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\langle G_{01}, w_{02} \rangle \bar{z}^2 + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}\langle G_{10}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20} \rangle z^3 + \\
&\quad \langle G_{10}, -H^{-1}H_{11} \rangle z^2\bar{z} + \frac{1}{2}\langle G_{10}, (-2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{02} \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2}\langle G_{01}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20} \rangle \\
&\quad z^2\bar{z} + \langle G_{01}, -H^{-1}H_{11} \rangle z\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\langle G_{01}, (-2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{02} \rangle \bar{z}^2 + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + \langle G_{10}, -H^{-1}H_{11} \rangle z^2\bar{z} + \\
&\quad \frac{1}{2}\langle G_{01}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20} \rangle z^2\bar{z} + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \left( \frac{1}{2}G_{21} + \langle G_{10}, -H^{-1}H_{11} \rangle + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}\langle G_{01}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20} \rangle \right) z^2\bar{z} + O(|z|^4).
\end{aligned}$$

Portanto, a restrição da equação diferencial (3.14) à variedade central representada por (3.16) é dada por

$$\begin{aligned}
z' &= i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, -H^{-1}H_{11} \rangle + \\
&\quad \langle G_{01}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}H_{20} \rangle) z^2\bar{z} + O(|z|^4).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Cabe ressaltar ainda que, o algoritmo utilizado para a obtenção de (3.18) fornece, diretamente, a forma complexa adequada para o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov.

Os coeficientes  $G_{01}$ ,  $G_{10}$ ,  $G_{20}$ ,  $G_{11}$ ,  $G_{02}$ ,  $H_{20}$  e  $H_{11}$  que aparecem em (3.18), podem ser determinados a partir da expansão em série de Taylor na variável  $x$ , em torno de  $x = 0$  e até os termos de ordem 3, da função  $F$  em (3.12), isto é,

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + O(\|x\|^4),$$

sendo  $B$  e  $C$  funções multilineares simétricas calculadas da seguinte forma

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} F_i(0) x_j y_k, \quad C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} F_i(0) x_j y_k z_l,$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Assim,

$$\begin{aligned} F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) &= \frac{1}{2} B(zq + \bar{z}\bar{q} + y, zq + \bar{z}\bar{q} + y, zq + \bar{z}\bar{q} + y) + \\ &\quad \frac{1}{6} C(zq + \bar{z}\bar{q} + y, zq + \bar{z}\bar{q} + y, zq + \bar{z}\bar{q} + y) \\ &= \frac{1}{2} (B(q, q)z^2 + 2B(q, \bar{q})z\bar{z} + B(q, y)z + B(\bar{q}, y)\bar{z} + B(\bar{q}, \bar{q})\bar{z}^2 + \\ &\quad B(y, y)) + \frac{1}{6} (C(q, q, q)z^3 + C(q, q, \bar{q})z^2\bar{z} + O(|z|^4)) + O(|z|^4). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} z' = i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle &= i\omega_0 + \frac{1}{2} (\langle p, B(q, q) \rangle z^2 + 2 \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \\ &\quad \langle p, B(q, y) \rangle z + \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle \bar{z} + \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \\ &\quad \langle p, B(y, y) \rangle) + \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle z^2\bar{z} + O(|z|^4). \end{aligned}$$

Note que,

$$\langle G_{10}, y \rangle = \langle p, B(q, y) \rangle,$$

e

$$\langle G_{01}, y \rangle = \langle p, B(\bar{q}, y) \rangle.$$

Assim, a primeira equação de (3.18) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (G_{21} - 2 \langle p, B(q, H^{-1} H_{11}) \rangle + \\ \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - H)^{-1} H_{20}) \rangle) z^2\bar{z} + O(|z|^4), \end{aligned} \quad (3.19)$$

e, ainda, verifica-se que

$$G_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad (3.20)$$

$$G_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad (3.21)$$

$$G_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad (3.22)$$

$$G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad (3.23)$$

e

$$\begin{cases} H_{20} = B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q}, \\ H_{11} = B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q}, \end{cases} \quad (3.24)$$

pois,

$$y' = Hy + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}.$$

Considere agora as seguintes afirmações.

**Afirmação 3.1.2.**  $H^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q$ .

**Demonstração.** Como  $Hq = i\omega_0q$ , então

$$HH^{-1}q = i\omega_0H^{-1}q,$$

isto é,

$$q = i\omega_0H^{-1}q.$$

Portanto,

$$H^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q. \quad \blacksquare$$

**Afirmação 3.1.3.**  $H^{-1}\bar{q} = -\frac{1}{i\omega_0}\bar{q}$ .

**Demonstração.** De fato, tem-se que  $H\bar{q} = -i\omega_0\bar{q}$ , assim

$$HH^{-1}\bar{q} = -i\omega_0H^{-1}\bar{q},$$

ou seja,

$$\bar{q} = -i\omega_0H^{-1}\bar{q},$$

o que mostra a identidade.  $\blacksquare$

**Afirmação 3.1.4.**  $(2i\omega_0E - H)^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q$ .

**Demonstração.** Considerando  $Hq = i\omega_0q$  e adicionando  $i\omega_0q$  em ambos os lados, segue que

$$\begin{aligned} i\omega_0q + Hq &= i\omega_0q + i\omega_0q \\ i\omega_0q + Hq &= 2i\omega_0q \\ i\omega_0q &= (2i\omega_0E - H)q. \end{aligned}$$

Logo,

$$(2i\omega_0E - H)^{-1}i\omega_0q = q,$$

o que resulta na igualdade. ■

**Afirmção 3.1.5.**  $(2i\omega_0E - H)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{i\omega_0}\bar{q}$ .

**Demonstração.** Do fato de que  $H\bar{q} = -i\omega_0\bar{q}$  e adicionando  $2i\omega_0q$  em ambos os lados da igualdade, obtém-se

$$\begin{aligned} 2i\omega_0\bar{q} + H\bar{q} &= -i\omega_0\bar{q} + 2i\omega_0\bar{q} \\ 2i\omega_0\bar{q} + i\omega_0\bar{q} &= 2i\omega_0\bar{q} - H\bar{q} \\ 3i\omega_0\bar{q} &= (2i\omega_0E - H)\bar{q}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$(2i\omega_0E - H)^{-1}3i\omega_0\bar{q} = \bar{q},$$

resultando na afirmação. ■

Desta forma, substituindo (3.20) à (3.24) em (3.19), segue

$$\begin{aligned} z' &= i\omega_0z + \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle z^2 + \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - \\ &\quad 2 \langle p, B(q, H^{-1}(B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q})) \rangle) + \\ &\quad \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0E - H)^{-1}(B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q})) \rangle) z^2\bar{z} + O(|z|^4) \\ &= i\omega_0z + \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle z^2 + \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - \\ &\quad 2 \langle p, B(q, H^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle) + 2 \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \langle p, H^{-1}q \rangle + 2 \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \langle p, H^{-1}\bar{q} \rangle + \\ &\quad \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0E - H)^{-1}B(q, q)) \rangle - \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0E - H)^{-1}q) \rangle - \\ &\quad \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0E - H)^{-1}\bar{q}) \rangle) z^2\bar{z} + O(|z|^4). \end{aligned}$$

Utilizando as afirmações anteriores, tem-se

$$\begin{aligned}
z' &= i\omega_0 z + \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle z^2 + \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - \\
&\quad 2 \langle p, B(q, H^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + 2 \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle \frac{-1}{i\omega_0} \langle p, q \rangle + 2 \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \frac{-1}{i\omega_0} \langle p, \bar{q} \rangle + \\
&\quad \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}B(q, q)) \rangle - \langle p, B(q, q) \rangle \frac{-1}{i\omega_0} \langle p, B(\bar{q}, q) \rangle - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \\
&\quad \frac{1}{3i\omega_0} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle) z^2 \bar{z} + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle z^2 + \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - \\
&\quad 2 \langle p, B(q, H^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle - \frac{2}{i\omega_0} \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}B(q, q)) \rangle + \\
&\quad \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(\bar{q}, q) \rangle - \frac{1}{3i\omega_0} \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle) z^2 \bar{z} + O(|z|^4) \\
&= i\omega_0 z + \frac{1}{2} \langle p, B(q, q) \rangle z^2 + \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle z\bar{z} + \frac{1}{2} \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle \bar{z}^2 + \frac{1}{2} (\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - \\
&\quad 2 \langle p, B(q, H^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}B(q, q)) \rangle + \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \\
&\quad \langle p, B(\bar{q}, q) \rangle - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega_0} |\langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle|^2) z^2 \bar{z} + O(|z|^4).
\end{aligned}$$

Definindo

$$g_{20} := \langle p, B(q, q) \rangle,$$

$$g_{11} := \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{02} := \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

e

$$\begin{aligned}
g_{21} &:= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, H^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 E - H)^{-1}B(q, q)) \rangle + \\
&\quad \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(\bar{q}, q) \rangle - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega_0} |\langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle|^2,
\end{aligned}$$

a primeira equação de (3.19), pode ser representada por

$$z' = i\omega_0 z + \frac{1}{2} g_{20} z^2 + g_{11} z\bar{z} + \frac{1}{2} g_{02} \bar{z}^2 + g_{21} z^2 \bar{z} + O(|z|^4).$$

## 3.2 Hipóteses Iniciais sobre o par $(A, B)$

Considere novamente o seguinte sistema de controle linear autônomo

$$x' = Ax + Bu, \quad (3.25)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}$  a entrada de controle. Seja  $\mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^n$  a classe de pares  $(A, B)$  que satisfazem as exigências a seguir:

**E1.** O par  $(A, B)$  é controlável.

Escolha  $n$  números  $\lambda_1 = i\omega_0$ ,  $\lambda_2 = -i\omega_0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , com  $\omega_0 > 0$ ,  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$  simétricos em relação ao eixo real do plano complexo e  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ , para  $i = 3, \dots, n$ . Do **Teorema 2.5.4**, existe  $F \in \mathbb{R}^n$  tal que a matriz  $H = A + BF$  possui estes números como autovalores. Sejam  $q \in \mathbb{C}^n$  um autovetor associado com o autovalor  $\lambda_1 = i\omega_0$  e, ainda,  $p \in \mathbb{C}^n$  um autovetor adjunto associado com o autovalor  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , isto é,

$$Hq = i\omega_0 q, \quad H^*p = -i\omega_0 p;$$

**E2.**  $B \notin \{y \in \mathbb{C}^n : \langle p, y \rangle = 0\}$ , sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  o produto interno usual em  $\mathbb{C}^n$ ;

**E3.** O autovetor  $p \in \mathbb{C}^n$  está normalizado em relação a  $B \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $\langle p, B \rangle = 1$ ;

**E4.** O autovetor  $q \in \mathbb{C}^n$  está normalizado em relação ao autovetor  $p \in \mathbb{C}^n$ , ou seja,  $\langle p, q \rangle = 1$ .

A partir das hipóteses e para  $x \in \mathbb{R}^n$ , defina  $w = \langle p, x \rangle$  e a família a quatro parâmetros de realimentações estáticas de estado,

$$(w, \bar{w}, \mu) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow u = Fx + K(w, \bar{w}, \mu),$$

com  $F \in \mathbb{R}^n$ , tal como na hipótese **E1**,  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^4$  o vetor de controle e

$$\begin{aligned} K : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, \bar{w}, \mu) &\longmapsto K(w, \bar{w}, \mu) = 2\text{Re}(w)(\mu_0\mu_1 + \mu_2 w \bar{w} + \mu_3 w^2 \bar{w}^2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Desta forma, usando a família a quatro parâmetros de realimentações estáticas de estado (3.26), há a seguinte classe de famílias a quatro parâmetros de sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada

$$\{x' = Hx + BK(w, \bar{w}, \mu) : (A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B}\}. \quad (3.27)$$

### 3.3 Análise Linear de Bifurcações de Hopf Controláveis

Dado o par  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B}$ , sua correspondente família a quatro parâmetros de sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada pode ser escrita como

$$x' = F(x, \mu), \quad (3.28)$$

com

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \mu) &\longmapsto F(x, \mu) = Hx + BK(w, \bar{w}, \mu). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para prosseguir, considere as seguintes definições.

**Definição 3.3.1.** *Um ponto de equilíbrio para (3.28) é um ponto  $(x_*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  tal que  $F(x_*, \mu^*) = 0$ .*

**Definição 3.3.2.** *Um ponto de Hopf de codimensão um é um ponto de equilíbrio  $(x_*, \mu^*)$  tal que a parte linear do campo de vetores apresentado em (3.29), calculada no equilíbrio, possui autovalores  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ , com  $\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\eta(\mu)$ ,  $\gamma(\mu^*) = 0$  e  $\eta(\mu^*) = \omega_0 > 0$ , não havendo outros autovalores com partes reais nulas e, ainda, o primeiro coeficiente de Lyapunov, denotado por  $l_1(\mu^*)$ , é não nulo.*

**Definição 3.3.3.** *Um ponto de Hopf transversal de codimensão um é um ponto de Hopf de codimensão um para o qual a condição de transversalidade é satisfeita, ou seja,  $\partial_{\mu_1} \gamma(\mu^*) \neq 0$ , sendo*

$$\partial_{\mu_1} \gamma(\mu^*) = \frac{\partial}{\partial \mu_1} \gamma(\mu^*).$$

Note que uma forma simples de calcular a derivada  $\partial_{\mu_1}\gamma(\mu^*)$  é apresentada a seguir. Mas antes, observe que

$$H(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu)$$

$$\partial_{\mu_1}H(\mu)q(\mu) + H(\mu)\partial_{\mu_1}q(\mu) = \partial_{\mu_1}\lambda(\mu)q(\mu) + \lambda(\mu)\partial_{\mu_1}q(\mu).$$

Aplicando em  $\mu^*$ , segue que

$$\partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) + H(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*) = \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*)q(\mu^*) + \lambda(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*)$$

$$\partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) + H(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*) = \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*)q(\mu^*) + i\omega_0\partial_{\mu_1}q(\mu^*)$$

$$\partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*)q(\mu^*) = i\omega_0\partial_{\mu_1}q(\mu^*) - H(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*)$$

e tomando o produto interno (em  $\mathbb{C}^n$ ) com  $p(\mu^*)$  e, ainda, empregando as hipóteses **E1** e **E4**, vem que

$$\begin{aligned} \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*)q(\mu^*) \rangle &= \langle p(\mu^*), i\omega_0\partial_{\mu_1}q(\mu^*) - H(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle \\ \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*) &= i\omega_0 \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle - \langle p(\mu^*), H(\mu^*)\partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle, \\ \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*) &= i\omega_0 \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle - \langle H^*(\mu^*)p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle, \\ \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*) &= i\omega_0 \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle - \langle -i\omega_0p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle, \\ \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle - \partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*) &= i\omega_0 \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle - i\omega_0 \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}q(\mu^*) \rangle = 0. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\partial_{\mu_1}\lambda(\mu^*) = \langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle. \quad (3.30)$$

Logo,

$$\partial_{\mu_1}\gamma(\mu^*) = \operatorname{Re} (\langle p(\mu^*), \partial_{\mu_1}H(\mu^*)q(\mu^*) \rangle). \quad (3.31)$$

Pode-se conhecer alguns resultados sobre os membros da classe (3.27) através da seguinte proposição.

**Proposição 3.3.1.** *Para cada par  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B}$ , considere o campo vetorial apresentado em (3.29). As seguintes afirmações são verdadeiras:*

**a.** *O campo vetorial (3.29) é suave;*

b. O ponto  $(0, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de equilíbrio de (3.28) para todo  $\mu \in \mathbb{R}^4$ ;

c.  $DF(0, \mu^0) = H$ , sendo

$$\mu^0 = (\mu_0, 0, \mu_2, \mu_3).$$

**Demonstração.**

a. Como  $K$  é uma função suave e  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é linear, segue que (3.29) é suave.

b. Substituição direta em (3.28).

c. Sendo  $H = (h_{i,j})$ , tem-se que

$$F_i(x, \mu) = h_{i,1}x_1 + h_{i,2}x_2 + \cdots + h_{i,j}x_j + \cdots + h_{i,n}x_n + b_i K(w, \bar{w}, \mu).$$

Derivando  $F_i(x, \mu)$  em relação a  $x_j$  segue

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, \mu) = \frac{\partial}{\partial x_j}(h_{i,j}x_j) + b_j \frac{\partial}{\partial x_j} K(w, \bar{w}, \mu).$$

Aplicando em  $(0, \mu^0)$ , obtém-se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0, \mu^0) = h_{i,j}.$$

completando a prova. ■

### 3.4 Bifurcações de Hopf no Sistema (3.28)

Considere o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ , assumindo que  $\mu_0 \neq 0$ . Sendo assim, será realizado um estudo, no contexto das bifurcações de Hopf, utilizando o Método da Projeção. Veja alguns resultados na Seção 3.1.

Seja  $E^c$  o autoespaço generalizado gerado por  $\{\operatorname{Re}(q), \operatorname{Im}(q)\}$  e  $E^{su}$  o autoespaço generalizado gerado pelos autovetores associados aos demais autovalores de  $H$ , com  $H$  como na **Proposição 3.3.1**, ou seja,  $H = DF(0, \mu^0)$ . No **Lema 3.1.3** provou-se que  $y \in E^{su}$  se, e somente se,  $\langle p, y \rangle = 0$ , e assim, qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrito como

$$x = wq + \bar{w}\bar{q} + y,$$

com  $wq + \bar{w}\bar{q} \in E^c$  e  $y \in E^{su}$ , visto que  $\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^{su}$ . Desta forma, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} w = \langle p, x \rangle, \\ y = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Diferenciando (3.32) com respeito a  $t$  e, usando o fato de que  $w = \langle p, x \rangle$  e  $\langle p, B \rangle = 1$ , segue que

$$\begin{aligned} w' &= \langle p, x' \rangle = \langle p, F(x, \mu) \rangle \\ &= \langle p, Hx + BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle \\ &= \langle p, Hx \rangle + \langle p, BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle \\ &= \langle p, H(wq + \bar{w}\bar{q} + y) \rangle + K(w, \bar{w}, \mu) \langle p, B \rangle \\ &= \langle p, wHq \rangle + \langle p, \bar{w}H\bar{q} \rangle + \langle p, y \rangle + K(w, \bar{w}, \mu) \\ &= \langle p, i\omega_0 wq \rangle + \langle p, -i\omega_0 \bar{w}\bar{q} \rangle + K(w, \bar{w}, \mu) \\ &= i\omega_0 w \langle p, q \rangle + (-i\omega_0 \bar{w}) \langle p, \bar{q} \rangle + K(w, \bar{w}, \mu) \\ &= i\omega_0 w + K(w, \bar{w}, \mu). \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} y' &= x' - \langle p, x' \rangle q - \langle \bar{p}, x' \rangle \bar{q} \\ &= Hx + BK(w, \bar{w}, \mu) - \langle p, Hx + BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle q - \langle \bar{p}, Hx + BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle \bar{q} \\ &= H(wq + \bar{w}\bar{q} + y) + BK(w, \bar{w}, \mu) - \langle p, H(wq + \bar{w}\bar{q} + y) \rangle q - \langle p, BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle q - \\ &\quad \langle \bar{p}, H(wq + \bar{w}\bar{q} + y) \rangle \bar{q} - \langle \bar{p}, BK(w, \bar{w}, \mu) \rangle \bar{q} \\ &= i\omega_0 wq - i\omega_0 \bar{w}\bar{q} + Hy + BK(w, \bar{w}, \mu) - i\omega_0 wq - K(w, \bar{w}, \mu)q + i\omega_0 \bar{w}\bar{q} - K(w, \bar{w}, \mu)\bar{q} \\ &= Hy + BK(w, \bar{w}, \mu) - K(w, \bar{w}, \mu)q - K(w, \bar{w}, \mu)\bar{q} \\ &= Hy + (B - q - \bar{q})K(w, \bar{w}, \mu) \\ &= Hy - (B - 2\text{Re}(q))K(w, \bar{w}, \mu), \end{aligned}$$

ou seja, as seguintes equações diferenciais ordinárias são obtidas

$$\omega' = i\omega_0 w + K(w, \bar{w}, \mu), \quad (3.33)$$

$$y' = Hy - (B - 2\operatorname{Re}(q))K(w, \bar{w}, \mu). \quad (3.34)$$

Claramente percebe-se que a equação diferencial na variável  $w \in \mathbb{C}$  em (3.33) não depende de  $y \in E^{su}$ . Ainda tem-se o seguinte.

**Afirmção 3.4.1.** *A equação diferencial ordinária (3.33) é suave.*

**Demonstração.** Segue do Método da Projeção e da **Proposição 3.3.1**. ■

**Afirmção 3.4.2.** *O ponto  $(0, \mu^0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de equilíbrio de (3.33).*

**Demonstração.** Substituição direta em (3.33). ■

Desta forma, para estudar a ocorrência de bifurcações de Hopf, é suficiente estudar a equação (3.33). Observe ainda que o vetor  $B \in \mathbb{R}^n$  pode ser escolhido de modo que  $B = 2\operatorname{Re}(q)$  e, neste caso, (3.33) e (3.34) são desacopladas. Considere agora, a seguinte mudança de variável

$$w = re^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Logo,

$$w' = r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta}.$$

Observando que  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$  e substituindo em (3.33), resulta que

$$r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta} = i\omega_0 r e^{i\theta} + 2\operatorname{Re}(r e^{i\theta})(\mu_0 \mu_1 + \mu_2(r e^{i\theta} r e^{-i\theta}) + \mu_3(r^2 e^{i2\theta} r^2 e^{-2i\theta}))$$

$$r'e^{i\theta} + ir\theta'e^{i\theta} = i\omega_0 r e^{i\theta} + 2r\cos(\theta)(\mu_0 \mu_1 + \mu_2 r^2 + \mu_3 r^4).$$

Definindo  $G$  por  $G(r) = \mu_0 \mu_1 + \mu_2 r^2 + \mu_3 r^4$ , segue que

$$(r' + ir\theta')e^{i\theta} = i\omega_0 r e^{i\theta} + 2r\cos(\theta)G(r)$$

$$r' + ir\theta' = i\omega_0 r + 2r\cos(\theta)G(r)e^{-i\theta}$$

$$r' + ir\theta' = i\omega_0 r + 2r\cos(\theta)(\cos(\theta) - i\operatorname{sen}(\theta))G(r)$$

$$r' + ir\theta' = i\omega_0 r + 2r\cos^2(\theta)G(r) - i2r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)G(r)$$

$$r' + ir\theta' = 2r\cos^2(\theta)G(r) + ir(\omega_0 - 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)G(r)),$$

e decompondo as partes reais e imaginárias, resulta que

$$\begin{cases} r' = 2r\cos^2(\theta)G(r), \\ \theta' = \omega_0 - 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)G(r). \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} r' = (1 + \cos(2\theta))rG(r), \\ \theta' = \omega_0 - \text{sen}(2\theta)G(r). \end{cases} \quad (3.35)$$

Portanto, associado a (3.35), tem-se o seguinte Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = S(r, \theta, \mu) = \frac{(1 + \cos(2\theta))rG(r)}{\omega_0 - \text{sen}(2\theta)G(r)}, \\ r(0, \mu) = \epsilon, \end{cases} \quad (3.36)$$

para  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon \geq 0$ , suficientemente pequeno.

Seja  $(\theta, \epsilon, \mu) \mapsto \rho(\theta, \epsilon, \mu)$  a solução de (3.36), satisfazendo  $\rho(0, \epsilon, \mu) = \epsilon$ . Da **Afirmção 3.4.1** é possível tomar a expansão em série de Taylor da função  $\rho$  na variável  $\epsilon$ , em torno de  $\epsilon = 0$  e até os termos de ordem 5,

$$\rho(\theta, \epsilon, \mu) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} \rho_k(\theta, \mu) \epsilon^k + O_\rho(\theta, \epsilon^6, \mu). \quad (3.37)$$

Os termos da sequência finita  $\{\rho_k(\theta, \mu) : k = 1, \dots, 5\}$  são calculados através de um processo recursivo envolvendo expansão em série de Taylor da função  $(r, \theta, \mu) \mapsto S(r, \theta, \mu)$ , na variável  $r$ , em torno de  $r = 0$  e até os termos de ordem 5 e, ainda, substituindo (3.37) em (3.36). Fazendo isso, obtém-se

$$S(r, \theta, \mu) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} R_k(\theta, \mu) r^k + O_S(r^6, \theta, \mu), \quad (3.38)$$

com

$$\begin{aligned}
 R_1(\theta, \mu) &= \frac{2\mu_1\mu_0 \cos^2(\theta)}{\omega_0 - \mu_1\mu_0 \sin(2\theta)}, \\
 R_2(\theta, \mu) &= 0, \\
 R_3(\theta, \mu) &= \frac{12\omega_0\mu_2 \cos^2(\theta)}{(\omega_0 - \mu_1\mu_0 \sin(2\theta))^2}, \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_4(\theta, \mu) &= 0, \\
 R_5(\theta, \mu) &= \frac{240\omega_0 \cos^2(\theta) ((\mu_2^2 - \mu_1\mu_0\mu_3) \sin(2\theta) + \mu_3\omega_0)}{(\omega_0 - \mu_1\mu_0 \sin(2\theta))^3},
 \end{aligned}$$

e, assim, sucessivamente. Para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , as funções  $(\theta, \mu) \mapsto \rho_k(\theta, \mu)$  são soluções dos seguintes Problemas de Cauchy

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \rho_1(\theta, \mu) &= R_1(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu), \\
 \rho_1(0, \mu) &= 1, \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \rho_2(\theta, \mu) &= R_1(\theta, \mu) \rho_2(\theta, \mu) + R_2(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^2, \\
 \rho_2(0, \mu) &= 0, \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \rho_3(\theta, \mu) &= R_1(\theta, \mu) \rho_3(\theta, \mu) + 3R_2(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu) \rho_2(\theta, \mu) + \\
 &\quad R_3(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^3, \\
 \rho_3(0, \mu) &= 0, \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \rho_4(\theta, \mu) &= R_1(\theta, \mu) \rho_4(\theta, \mu) + R_2(\theta, \mu) (4\rho_1(\theta, \mu) \rho_3(\theta, \mu) + \\
 &\quad 3\rho_2(\theta, \mu)^2) + 6R_3(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^2 \rho_2(\theta, \mu) + \\
 &\quad R_4(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^4, \\
 \rho_4(0, \mu) &= 0, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \rho_5(\theta, \mu) &= R_1(\theta, \mu) \rho_5(\theta, \mu) + 5R_2(\theta, \mu) (\rho_1(\theta, \mu) \rho_4(\theta, \mu) + \\
 &\quad 2\rho_2(\theta, \mu) \rho_3(\theta, \mu)) + 5R_3(\theta, \mu) (2\rho_1(\theta, \mu) \rho_3(\theta, \mu) + \\
 &\quad 3\rho_2(\theta, \mu)^2) \rho_1(\theta, \mu) + 10R_4(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^3 \rho_2(\theta, \mu) + \\
 &\quad R_5(\theta, \mu) \rho_1(\theta, \mu)^5, \\
 \rho_5(0, \mu) &= 0. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Observe que  $\rho_k(\theta, \mu) = \partial_\epsilon^k \rho(\theta, \epsilon, \mu)$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , sendo

$$\partial_\epsilon^k \rho(\theta, \epsilon, \mu) := \frac{\partial^k}{\partial \epsilon^k} \rho(\theta, \epsilon, \mu),$$

notação esta que será utilizada no decorrer deste trabalho.

Para  $\mu = (0, 0, 0, 0)$ , todas as soluções de (3.33), excetuando a origem, são periódicas de período  $2\pi/\omega_0$ . Assim, a partir de (3.36) é possível construir uma família de aplicações de Poincaré, chamada aqui simplesmente de aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ \epsilon &\longmapsto \mathcal{P}_\mu(\epsilon) = \rho(2\pi, \epsilon, \mu), \end{aligned} \tag{3.45}$$

com  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < c\}$ ,  $c > 0$  e  $\|\mu\|$  suficientemente pequenos.

Seja

$$\delta(\epsilon, \mu) = \mathcal{P}_\mu(\epsilon) - \epsilon,$$

isto é,

$$\delta(\epsilon, \mu) = \rho(2\pi, \epsilon, \mu) - \epsilon, \tag{3.46}$$

a família de funções separações.

Como  $(0, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^4$  é ponto de equilíbrio de (3.33), segue que

$$\delta(0, \mu) = \mathcal{P}_\mu(0) - 0 = 0.$$

Usando expansão em série de Taylor na variável  $\epsilon$ , em torno de  $\epsilon = 0$  e até os termos de ordem 5, resulta que

$$\begin{aligned} \delta(\epsilon, \mu) &= \delta(0, \mu) + \partial_\epsilon \delta(0, \mu) \epsilon + \frac{1}{2!} \partial_\epsilon^2 \delta(0, \mu) \epsilon^2 + \frac{1}{3!} \partial_\epsilon^3 \delta(0, \mu) \epsilon^3 + \frac{1}{4!} \partial_\epsilon^4 \delta(0, \mu) \epsilon^4 + \\ &\quad \frac{1}{5!} \partial_\epsilon^5 \delta(0, \mu) \epsilon^5 + O_\delta(\epsilon^6, \mu), \end{aligned}$$

com  $\delta_1(\mu) = \rho_1(2\pi, \mu) - 1$  e  $\delta_k(\mu) = \rho_k(2\pi, \mu)$ , para  $k = 2, \dots, 5$ . Note que a expansão em série de Taylor realizada anteriormente, foi feita também através da **Afirmção 3.4.1**. Com o objetivo de aplicar o *Teorema da Função Implícita*, é mais apropriado escrever a função  $\delta(\epsilon, \mu)$  como  $(\epsilon, \mu) \mapsto \delta(\epsilon, \mu) = \epsilon \Delta(\epsilon, \mu)$ , sendo que a função  $(\epsilon, \mu) \mapsto \Delta(\epsilon, \mu)$  está definida no mesmo domínio de  $\delta(\epsilon, \mu)$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon, \mu) = & \partial_\epsilon \delta(0, \mu) + \frac{1}{2!} \partial_\epsilon^2 \delta(0, \mu) \epsilon + \frac{1}{3!} \partial_\epsilon^3 \delta(0, \mu) \epsilon^2 + \frac{1}{4!} \partial_\epsilon^4 \delta(0, \mu) \epsilon^3 + \\ & \frac{1}{5!} \partial_\epsilon^5 \delta(0, \mu) \epsilon^4 + O_\delta(\epsilon^5, \mu). \end{aligned} \quad (3.47)$$

As propriedades da função  $(\epsilon, \mu) \mapsto \Delta(\epsilon, \mu)$  são obtidas através das soluções dos Problemas de Cauchy (3.40) a (3.44), as quais envolvem tempo e expressões complexas (no sentido de complicadas). Assim, uma maneira de evitar este problema, é utilizar a dependência diferenciável das soluções de uma equação diferencial com respeito aos parâmetros [14] e um *software* como o Mathematica [13]. Desta forma, as relações obtidas são as seguintes

$$\Delta(0, \mu^0) = \rho_1(2\pi, \mu^0) - 1 = 0, \quad (3.48)$$

$$\partial_\epsilon \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{2} \rho_2(2\pi, \mu^0) = 0, \quad (3.49)$$

$$\partial_{\mu_1} \Delta(0, \mu^0) = \frac{\partial}{\partial \mu_1} \rho_1(2\pi, \mu^0) = \frac{2\pi \mu_0}{\omega_0}, \quad (3.50)$$

$$\partial_\epsilon^2 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{3} \rho_3(2\pi, \mu^0) = \frac{4\pi \mu_2}{\omega_0}, \quad (3.51)$$

$$\partial_{\epsilon \mu_1}^2 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \rho_2(2\pi, \mu^0) = 0, \quad (3.52)$$

$$\partial_{\mu_1}^2 \Delta(0, \mu^0) = \frac{\partial^2}{\partial \mu_1^2} \rho_1(2\pi, \mu^0) = \frac{4\pi^2 \mu_0^2}{\omega_0^2}, \quad (3.53)$$

$$\partial_\epsilon^3 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{4} \rho_4(2\pi, \mu^0) = 0, \quad (3.54)$$

$$\partial_{\epsilon \mu_1}^3 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \rho_3(2\pi, \mu^0) = \frac{16\pi^2 \mu_0 \mu_2}{\omega_0^2}, \quad (3.55)$$

$$\partial_{\epsilon \mu_1 \mu_1}^3 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu_1^2} \rho_2(2\pi, \mu^0) = 0, \quad (3.56)$$

$$\partial_{\mu_1}^3 \Delta(0, \mu^0) = \frac{\partial^3}{\partial \mu_1^3} \rho_1(2\pi, \mu^0) = \frac{\pi(6 + 8\pi^2) \mu_0^3}{\omega_0^3}, \quad (3.57)$$

$$\partial_\epsilon^4 \Delta(0, \mu^0) = \frac{1}{5} \rho_4(2\pi, \mu^0) = \frac{48\pi(3\pi \mu_2^2 + \omega_0 \mu_3)}{\omega_0^2}. \quad (3.58)$$

**Definição 3.4.1.** Os números reais da forma

$$l_j(\mu^0) = \frac{1}{(2j+1)!} \rho_{2j+1}(2\pi, \mu^0),$$

$j \geq 1$ , são chamados de Coeficientes de Lyapunov.

O próximo lema, permitirá definir a função

$$(\epsilon, \mu^0) \mapsto \mu = \Phi(\epsilon, \mu^0) = \mu^0 + (0, \phi(\epsilon, \mu^0), 0, 0),$$

sendo  $(\epsilon, \mu^0) \mapsto \mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^0)$ .

**Lema 3.4.1.** *Seja*

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto D(x, y), \end{aligned} \tag{3.59}$$

uma função suave, com  $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ . Suponha que para  $(0, y^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ , sendo  $y^0 = (y_0, 0, y_2, y_3)$ , a função (3.59) satisfaz as seguintes exigências:

**A1.**  $D(0, y^0) = 0$ ,

**A2.**  $\partial_x D(0, y^0) = 0$ ,

**A3.**  $\partial_{y_1} D(0, y^0) \neq 0$ ,

**A4.**  $\partial_x^2 D(0, y^0) \neq 0$ .

Então, existe uma única função suave

$$(x, y^0) \longmapsto y_1 = \phi(x, y^0), \tag{3.60}$$

tal que  $y = \Phi(x, y^0) = y^0 + (0, \phi(x, y^0), 0, 0)$  e  $D(x, \Phi(x, y^0)) = 0$ . Além disso, a função  $(x, y^0) \longmapsto y_1 = \phi(x, y^0)$  tem a seguinte representação

$$\phi(x, y^0) = \frac{1}{2!} \phi_2(y^0) x^2 + O_\phi(|x|^3, \|y^0\|), \tag{3.61}$$

com

$$\phi_2(y^0) = -\frac{\partial_x^2 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)}. \tag{3.62}$$

**Demonstração.** De **A3** e do *Teorema da Função Implícita*, fica garantida a existência e a unicidade da função

$$(x, y^0) \mapsto y_1 = \phi(x, y^0),$$

tal que

$$D(x, y_0, \phi(x, y_0, 0, y_2, y_3), y_2, y_3) \equiv 0.$$

Logo, a função

$$(x, y^0) \mapsto y = \Phi(x, y^0) = y^0 + (0, \phi(x, y^0), 0, 0),$$

está bem definida. Mais ainda, (3.60) é suave e assim, derivando  $D$  com respeito a  $x$ , segue que

$$\partial_x D(x, y) = \partial_x D(x, y) + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) = 0 \quad (3.63)$$

e, em particular,

$$\partial_x D(0, y^0) + \partial_{y_1} D(0, y^0) \partial_x \phi(0, y^0) = 0.$$

Assim, de **A2** e **A3**, conclui-se que  $\partial_x \phi(0, y^0) = 0$ . Derivando (3.63) novamente com respeito a  $x$ , tem-se

$$\begin{aligned} \partial_x^2 D(x, y) &= \partial_x (\partial_x D(x, y) + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)) \\ &= (\partial_x^2 D(x, y) + \partial_{x y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)) + \\ &\quad (\partial_{x y_1}^2 D(x, y) + \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)) \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) \\ &= \partial_x^2 D(x, y) + 2 \partial_{x y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{y_1}^2 D(x, y) (\partial_x \phi(x, y^0))^2 + \\ &\quad \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, em  $(0, y^0)$ , vem que

$$\begin{aligned} \partial_x^2 D(0, y^0) + 2 \partial_{x y_1}^2 D(0, y^0) \partial_x \phi(0, y^0) + \partial_{y_1}^2 D(0, y^0) (\partial_x \phi(0, y^0))^2 + \\ \partial_{y_1} D(0, y^0) \partial_x^2 \phi(0, y^0) = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Fazendo a expansão em série de Taylor na variável  $x$ , em torno de  $x = 0$ , até os termos de ordem 2 da função  $\phi(x, y^0)$  obtém-se,

$$\phi(x, y^0) = \phi(0, y^0) + \partial_x \phi(0, y^0) x + \frac{1}{2!} \partial_x^2 \phi(0, y^0) x^2 + O_\phi(|x|^3, \|y^0\|).$$

Como  $\phi(0, y^0) = 0$  e  $\partial_x \phi(0, y^0) = 0$ , tem-se

$$\phi(x, y^0) = \frac{1}{2!} \partial_x^2 \phi(0, y^0) x^2 + O_\phi(|x|^3, \|y^0\|).$$

Mas, de (3.64), resulta que

$$\partial_x^2 D(0, y^0) + \partial_{y_1} D(0, y^0) \partial_x^2 \phi(0, y^0) = 0,$$

ou seja,

$$\partial_x^2 \phi(0, y^0) = -\frac{\partial_x^2 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)}.$$

Definindo

$$\phi_2(y^0) := \partial_x^2 \phi(0, y^0),$$

o resultado segue. ■

Neste capítulo, por simplicidade, não serão fornecidos os domínios das funções obtidas através da aplicação do *Teorema da Função Implícita*.

O próximo resultado decorre diretamente do lema anterior.

**Proposição 3.4.1.** *Se  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_2 \neq 0$ , existe uma única função  $(\epsilon, \mu^0) \mapsto \mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^0)$  tal que  $\mu = \Phi(\epsilon, \mu^0) = \mu^0 + (0, \phi(\epsilon, \mu^0), 0, 0)$  e*

$$\mu_1 = \frac{1}{2!} \phi_2(\mu^0) \epsilon^2 + O_\phi(\epsilon^3, \|\mu^0\|), \quad (3.65)$$

$$\phi_2(\mu^0) = -\frac{\omega_0}{\pi \mu_0} l_1(\mu^0) = -\frac{2\mu_2}{\mu_0}, \quad (3.66)$$

$$l_1(\mu^0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \mu_2. \quad (3.67)$$

**Demonstração.** Considere  $D = \Delta$  e  $(x, y) = (\epsilon, \mu)$  no **Lema 3.4.1**. Note ainda que, **A1** até **A4** são satisfeitas, respectivamente, por (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) se  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_2 \neq 0$ . Assim, (3.65) segue. Da **Definição 3.4.1** e de (3.51) resulta que

$$l_1(\mu^0) = \frac{1}{3!} \rho_3(2\pi, \mu^0) = \frac{12\pi\mu_2}{6\omega_0} = \frac{2\pi\mu_2}{\omega_0}.$$

E de (3.62),

$$\phi_2(\mu^0) = \frac{\partial_\epsilon^2 \Delta(0, \mu^0)}{\partial_{\mu_1}^2 \Delta(0, \mu^0)} = -\frac{\omega_0 2\pi\mu_2}{\pi\mu_0\omega_0} = -\frac{2\mu_2}{\mu_0},$$

provando a proposição. ■

Agora, será mostrado que  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão um de (3.29).

**Teorema 3.4.1.** *Para todo par  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B}$  considere o campo de vetores (3.29). As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a. *Se  $\mu_2 \neq 0$ , então o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf de codimensão um.*
- b. *Se  $\mu_2 \neq 0$  e  $\mu_0 \neq 0$ , então o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão um.*

**Demonstração.**

a. Da **Proposição 3.3.1**, item (b), tem-se que  $(0, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de equilíbrio de (3.29), para todo  $\mu$ . Do item (c) da mesma proposição, segue que  $DF(0, \mu^0) = H$ , ou seja, a parte linear de (3.29), avaliada em  $(0, \mu^0)$  é a matriz  $H$ , que por **E1** possui dois autovalores  $\lambda = \lambda_1$  e  $\bar{\lambda}$ , com  $\lambda = i\omega_0$ ,  $\omega_0 > 0$ . Já pela **Proposição 3.4.1**, tem-se que

$$l_1(\mu^0) = \frac{2\pi\mu_2}{\omega_0}.$$

Como, por hipótese,  $\mu_2 \neq 0$ , segue que  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf de codimensão um.

b. Pelo item (a), tem-se que  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf de codimensão um. Assim, basta mostrar que a condição de transversalidade

$$\partial_{\mu_1} \gamma(\mu^0) \neq 0.$$

se verifica.

Note que, de (3.30), vem que

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1} \lambda(\mu^0) &= \partial_{\mu_1} \gamma(\mu^0) + i \partial_{\mu_1} \eta(\mu^0) \\ &= \langle p, \partial_{\mu_1} DF(0, \mu^0) q \rangle. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Derivando (3.29) com respeito a  $\mu_1$ , segue

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu_1}(F(x, \mu)) &= \partial_{\mu_1}(Hx + BK(w, \bar{w}, \mu)) \\
&= B\partial_{\mu_1}(K(w, \bar{w}, \mu)) \\
&= B\partial_{\mu_1}(2\operatorname{Re}(w)(\mu_0\mu_1 + \mu_2w\bar{w} + \mu_3w^2\bar{w}^2)) \\
&= 2\mu_0\operatorname{Re}(w)B.
\end{aligned}$$

Como  $w = \langle p, x \rangle$  e  $\bar{w} = \langle \bar{p}, x \rangle$ , definindo  $a := \mu_0(p + \bar{p})$ , então

$$\partial_{\mu_1}(F(x, \mu)) = \langle a, x \rangle B.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
D(\partial_{\mu_1}F(x, \mu))e_j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial_{\mu_1}F(x, \mu))_i e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle a, x \rangle B)_i e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n a_k x_k B_i \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^n a_j B_i e_i \\
&= a_j B,
\end{aligned}$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . De modo análogo a **Afirmação**

**3.1.1**, onde provou-se que  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ , segue que  $\langle \bar{p}, q \rangle = 0$ , sendo assim,

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu_1} DF(x, \mu)q &= \sum_{j=1}^n \partial_{\mu_1} DF(x, \mu)(q_j e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n q_j (\partial_{\mu_1} DF(x, \mu) e_j) \\
&= \left( \sum_{j=1}^n q_j a_j \right) B \\
&= \langle a, q \rangle B \\
&= \langle \mu_0(p + \bar{p}), q \rangle B \\
&= \mu_0(\langle p, q \rangle + \langle \bar{p}, q \rangle) B \\
&= \mu_0 B.
\end{aligned}$$

De (3.68) e de **E3** juntamente com resultados anteriores, tem-se

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu_1} \gamma(\mu^0) &= \operatorname{Re}(\langle p, \mu_0 B \rangle) \\
&= \operatorname{Re}(\mu_0 \langle p, B \rangle) \\
&= \mu_0.
\end{aligned}$$

Assim, como  $\mu_0 \neq 0$ , segue que o ponto de Hopf de codimensão um,  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ , é transversal e, portanto, o item **(b)** segue. ■

Sabe-se que o primeiro coeficiente de Lyapunov,  $l_1(\mu^0)$ , fornece a estabilidade da órbita periódica. Resulta de (3.65), que o único ponto fixo da aplicação de Poincaré (ou família de aplicações de Poincaré) é

$$\epsilon = \sqrt{-\frac{\mu_0}{\mu_2} \mu_1 + O_\epsilon(|\mu_1|, \|\mu^0\|^2)}, \quad (3.69)$$

dependendo dos sinais de  $\mu_0 \neq 0$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2 \neq 0$ . Este resultado é consequência da aplicação do *Teorema da Função Implícita* à função  $G$  definida a partir de (3.65) e dada por

$$G(\epsilon, \eta) = \epsilon^2 - \eta^2 - O_\phi(\epsilon^3, \|\mu^0\|^2),$$

com

$$\eta = \sqrt{\frac{2!}{\phi_2(\mu^0)} \mu_1} = \sqrt{-\frac{\mu_0}{\mu_2} \mu_1}.$$

Contudo, aqui é mais fácil estudar a estabilidade de uma órbita periódica analisando  $\mu$  em termos do ponto fixo  $\epsilon$ , isto é,  $\mu = \Phi(\epsilon, \mu^0)$ . Desta forma, a estabilidade do ponto fixo é conhecida através da derivada, com respeito a  $\epsilon$ , da aplicação de Poincaré, calculada em  $\mu = \Phi(\epsilon, \mu^0)$ . Como

$$\mathcal{P}(\epsilon, \mu) = \epsilon + \delta(\epsilon, \mu),$$

e

$$\delta(\epsilon, \mu) = \epsilon \Delta(\epsilon, \mu),$$

tem-se que

$$\mathcal{P}(\epsilon, \mu) = \epsilon + \epsilon \Delta(\epsilon, \mu).$$

Derivando com respeito a  $\epsilon$ ,

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \mu) = 1 + \Delta(\epsilon, \mu) + \epsilon \partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \mu),$$

e calculando em  $\mu = \Phi(\epsilon, \mu^0)$ , segue que

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) + \epsilon \partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)).$$

Mas, como  $\Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) \equiv 0$ , então

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 - \epsilon \partial_{\mu_1} \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \mu^0). \quad (3.70)$$

Assim, da expansão em série de Taylor das funções  $\partial_{\mu_1} \Delta(\epsilon, \phi(\epsilon, \mu^0))$  e  $\partial_\epsilon \phi(\epsilon, \mu^0)$ , em torno de  $\epsilon = 0$ , até termos de ordem 2, resulta que

$$\partial_{\mu_1} \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = \partial_{\mu_1} \Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) + \partial_{\mu_1}^2 \Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) \epsilon + O_\Delta(\epsilon^2, \|\mu^0\|),$$

e

$$\partial_\epsilon \phi(\epsilon, \mu^0) = \partial_\epsilon \phi(0, \mu^0) + \partial_\epsilon^2 \phi(0, \mu^0) \epsilon + O_\phi(\epsilon^2, \|\mu^0\|).$$

Mas, pelo **Lema 3.4.1**,  $\partial_\epsilon \phi(0, \mu^0) = 0$ . Assim, segue que

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 - \epsilon (\partial_{\mu_1} \Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) \partial_\epsilon^2 \phi(0, \mu^0) \epsilon) + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|).$$

Como  $\partial_{\mu_1}\Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) = \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0}$ , por (3.50) e  $\partial_\epsilon^2\phi(0, \mu^0) = -\frac{2\mu_2}{\mu_0}$ , por (3.66), obtém-se

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) &= 1 - \epsilon \left( \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0} \left( -\frac{2\mu_2}{\mu_0} \right) \epsilon \right) + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|) \\ &= 1 + \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0} \frac{2\mu_2}{\mu_0} \epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|) \\ &= 1 + \frac{4\pi\mu_2}{\omega_0} \epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|).\end{aligned}$$

Mas de (3.67),

$$\mu_2 = \frac{l_1(\mu^0)\omega_0}{2\pi}.$$

Portanto,

$$\partial_\epsilon\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + 2l_1(\mu^0)\epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|). \quad (3.71)$$

**Proposição 3.4.2.** *Considere a equação diferencial ordinária (3.28).*

- a. *Se  $\mu_2 < 0$ , então, localmente, existe uma única órbita periódica estável, no retrato de fase do sistema (3.28) restrito à variedade central e sua continuação, próxima ao ponto de equilíbrio. Se  $\mu_0 > 0$ , a órbita periódica existe para  $\mu_1 > 0$  e se  $\mu_0 < 0$  a órbita periódica existe para  $\mu_1 < 0$ .*
- b. *Se  $\mu_2 > 0$ , então, localmente, existe uma única órbita periódica instável, no retrato de fase do sistema (3.28) restrito à variedade central e sua continuação, próxima ao ponto de equilíbrio. Se  $\mu_0 > 0$ , a órbita periódica existe para  $\mu_1 < 0$  e se  $\mu_0 < 0$  a órbita periódica existe para  $\mu_1 > 0$ .*

**Demonstração.**

- a. Pela **Proposição 3.4.1**, existe uma única função  $(\epsilon, \mu^0) \mapsto \Phi(\epsilon, \mu^0)$  tal que

$$\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = \epsilon$$

para todo  $\mu^0 \in \mathbb{R}^4$ , com  $\|\mu^0\|$  suficientemente pequeno. Logo, existe uma única órbita periódica de (3.28) devido a (3.69). Agora se  $\mu_2 < 0$ , então  $l_1(\mu^0) < 0$  e de (3.71) resulta que  $|\partial_\epsilon\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0))| < 1$ , mostrando que a única órbita periódica é estável. De (3.65) e (3.66), se  $\mu_0 > 0$ , então  $\phi_2(\mu^0) > 0$  e  $\mu_1 > 0$ . Por outro lado, se  $\mu_0 < 0$ , então  $\phi_2(\mu^0) < 0$

e  $\mu_1 < 0$ .

**b.** A demonstração é análoga ao item **(a)** observando os sinais dos parâmetros  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . ■

Segue da **Proposição 3.4.2** que em uma vizinhança de um ponto de Hopf transversal de codimensão um,  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ , com  $l_1(\mu^0) = \frac{2\pi\mu_2}{\omega_0} \neq 0$ ,  $\omega_0 > 0$ , o comportamento dinâmico da equação diferencial (3.28), restrita à variedade central e sua continuação, é localmente topologicamente equivalente a seguinte forma normal complexa

$$w' = (\alpha + i\eta)w + \sigma_1 w |w|^2,$$

sendo que  $\alpha$ ,  $\eta$  e  $\sigma_1$  são continuações de  $0$ ,  $\omega_0$  e do primeiro coeficiente de Lyapunov em  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ . O sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov determina a estabilidade da família de órbitas periódicas que aparece (ou desaparece) a partir de  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ .

Agora será considerado o caso em que  $l_1(\mu^0) = 0$ ,  $\mu^0 \in \mathbb{R}^4$ . Considerando esta hipótese, há a possibilidade de ocorrer bifurcações de Hopf de codimensão dois.

Antes de seguir, considere as seguintes definições.

**Definição 3.4.2.** Um ponto de Hopf de codimensão dois de (3.28) é um ponto de equilíbrio de (3.28), o qual agora será denotado por  $(x_{**}, \mu^{**}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ , que satisfaz as mesmas condições da **Definição 3.3.2**, exceto que  $l_1(\mu^{**}) = 0$  e, com uma condição adicional de que o segundo coeficiente de Lyapunov é não-nulo, ou seja,  $l_2(\mu^{**}) \neq 0$ .

**Definição 3.4.3.** Um ponto de Hopf transversal de codimensão dois ocorre se os conjuntos  $\gamma^{-1}(0)$  e  $l_1^{-1}(0)$  tem intersecção transversal ou, equivalentemente, se a aplicação  $\mu \mapsto (\gamma(\mu), l_1(\mu))$  é regular em  $\mu = \mu^{**}$ .

Cabe ressaltar que, o estudo das bifurcações de Hopf de codimensão dois, resulta da aplicação de Poincaré e também do lema a seguir.

**Lema 3.4.2.** Suponha que a função suave (3.59) satisfaça as propriedades **A1** até **A4** para  $y^0 = (y_0, 0, y_2, y_3)$  e ainda

**A5.**  $\partial_{xy_1}^2 D(0, y^0) = 0$ ;

**A6.**  $\partial_x^3 D(0, y^0) = 0$ .

Então, a única função suave  $(x, y^0) \mapsto y_1 = \phi(x, y^0)$ , tal que  $y = \Phi(x, y^0) = y^0 + (0, \phi(x, y^0), 0, 0)$  e  $D(x, \Phi(x, y^0)) \equiv 0$ , tem a seguinte representação

$$\phi(x, y^0) = \frac{1}{2!} \phi_2(y^0) x^2 + \frac{1}{4!} \phi_4(y^0) x^4 + O_\phi(|x|^5, \|y^0\|), \quad (3.72)$$

com  $\phi_2(y^0)$  tal como em (3.62) e

$$\phi_4(y^0) = -\frac{3\partial_{y_1}^2 D(0, y^0) \partial_x^2 D(0, y^0)^2}{\partial_{y_1} D(0, y^0)^3} + \frac{6\partial_x^2 D(0, y^0) \partial_{xy_1}^3 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)^2} - \frac{\partial_x^4 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)}. \quad (3.73)$$

**Demonstração.** Segue do **Lema 3.4.1**, a existência e unicidade da função  $(x, y^0) \mapsto y_1 = \phi(x, y^0)$  e que

$$\partial_x^2 D(x, y) + 2\partial_{xy_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) = 0.$$

Derivando a expressão anterior em relação a  $x$ , vem que

$$\begin{aligned} \partial_x^3 D(x, y) &= \partial_x^3 D(x, y) + \partial_{xy_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + 2(\partial_{xy_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + \\ &\quad \partial_{xy_1 y_1}^3 D(x, y) \partial \phi(x, y^0)^2 + \partial_{xy_1}^2 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0)) + \partial_{xy_1 y_1}^3 D(x, y) \\ &\quad \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^3 + 2\partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) \\ &\quad \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{xy_1}^2 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \\ &\quad \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x^3 \phi(x, y^0) = 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

e aplicando em  $(0, y^0)$  e utilizando as hipóteses do lema, e ainda levando em conta o fato de que  $\partial_x \phi(0, y^0) = 0$ , tem-se

$$\partial_{y_1} D(0, y^0) \partial_x^3 \phi(0, y^0) = 0,$$

ou seja,

$$\partial_x^3 \phi(0, y^0) = 0.$$

Derivando (3.74), com respeito a  $x$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\partial_x^4 D(x, y) &= \partial_x^4 D(x, y) + \partial_{xxx y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{xxx y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{xx y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{xx y_1}^3 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + 2(\partial_{xx y_1}^4 D(x, y) \\
&\quad \partial_x \phi(x, y^0) + \partial_{xx y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{xx y_1}^3 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0)) + \\
&\quad 2(\partial_{xx y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{x y_1 y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^3 + \\
&\quad 2\partial_{x y_1 y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0)) + 2(\partial_{xx y_1}^3 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{x y_1 y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{x y_1}^2 D(x, y) \partial_x^3 \phi(x, y^0)) + \\
&\quad \partial_{xx y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 + \partial_{x y_1 y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^3 + \\
&\quad 2\partial_{x y_1 y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{x y_1 y_1 y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^3 + \\
&\quad \partial_{y_1}^4 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^4 + 3\partial_{y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \\
&\quad 2(\partial_{x y_1 y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0)^2 + \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^3 \phi(x, y^0)) + \\
&\quad \partial_{xx y_1}^3 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{x y_1 y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{x y_1}^2 D(x, y) \partial_x^3 \phi(x, y^0) + \partial_{x y_1 y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{y_1}^3 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0)^2 \partial_x^2 \phi(x, y^0) + \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x^2 \phi(x, y^0)^2 + \\
&\quad \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^3 \phi(x, y^0) + \partial_{x y_1}^2 D(x, y) \partial_x^3 \phi(x, y^0) + \\
&\quad \partial_{y_1}^2 D(x, y) \partial_x \phi(x, y^0) \partial_x^3 \phi(x, y^0) + \partial_{y_1} D(x, y) \partial_x^4 \phi(x, y^0) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando em  $(0, y^0)$  e utilizando as hipóteses do lema, vem que

$$\partial_x^4 D(0, y^0) + 6\partial_{xx y_1}^3 D(0, y^0) \partial_x^2 \phi(0, y^0) + 3\partial_{y_1}^2 D(0, y^0) \partial_x^2 \phi(0, y^0)^2 + \partial_{y_1} D(0, y^0) \partial_x^4 \phi(0, y^0) = 0.$$

Como  $\partial_x^2 \phi(0, y^0) = -\frac{\partial_x^2 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)}$ , segue que

$$\partial_x^4 \phi(0, y^0) = -\frac{3\partial_{y_1}^2 D(0, y^0) \partial_x^2 D(0, y^0)^2}{\partial_{y_1} D(0, y^0)^3} + \frac{6\partial_x^2 D(0, y^0) \partial_{xx y_1}^3 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)^2} - \frac{\partial_x^4 D(0, y^0)}{\partial_{y_1} D(0, y^0)}.$$

Fazendo expansão em série de Taylor na variável  $x$  da função  $\phi$  em torno de  $x = 0$ , até

termos de ordem 4, resulta que

$$\begin{aligned}\phi(x, y^0) &= \phi(0, y^0) + \partial_x \phi(0, y^0)x + \frac{1}{2!} \partial_x^2 \phi(0, y^0)x^2 + \frac{1}{3!} \partial_x^3 \phi(0, y^0)x^3 + \\ &\quad \frac{1}{4!} \partial_x^4 \phi(0, y^0)x^4 + O_\phi(|x|^5, \|y^0\|).\end{aligned}$$

Pelo fato de  $\phi(0, y^0) = 0$ ,  $\partial_x \phi(0, y^0) = 0$  e  $\partial_x^3 \phi(0, y^0) = 0$ , obtém-se

$$\phi(x, y^0) = \frac{1}{2!} \partial_x^2 \phi(0, y^0)x^2 + \frac{1}{4!} \partial_x^4 \phi(0, y^0)x^4 + O_\phi(|x|^5, \|y^0\|).$$

Como  $\partial_x^2 \phi(0, y^0) = \phi_2(y^0)$  e definindo  $\partial_x^4 \phi(0, y^0) = \phi_4(y^0)$ , o resultado segue. ■

**Proposição 3.4.3.** *Se  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$ , a função  $(\epsilon, \mu^0) \mapsto \mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^0)$  tem a seguinte representação*

$$\mu_1 = \frac{1}{2!} \phi_2(\mu^0)\epsilon^2 + \frac{1}{4!} \phi_4(\mu^0)\epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|), \quad (3.75)$$

onde  $\phi_2(\mu^0)$  é dado em (3.66) e

$$\phi_4(\mu^0) = -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} (2l_2(\mu^0) - 3l_1(\mu^0)^2) = -\frac{24\mu_3}{\mu_0}, \quad (3.76)$$

$$l_2(\mu^0) = \frac{2\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2}. \quad (3.77)$$

**Demonstração.** Considerando  $D = \Delta$  e  $(x, y) = (\epsilon, \mu)$  no lema anterior, tem-se que as propriedades **A1** até **A4** já foram verificadas na **Proposição 3.4.1**. Resta verificar **A5** e **A6**. De (3.52) e (3.54), respectivamente, essas propriedades são verificadas. Logo, as propriedades **A1** até **A6** são satisfeitas e, com isso, (3.75) segue. Da **Definição 3.4.2**, tem-se

$$l_2(\mu^0) = \frac{1}{5!} \rho(2\pi, \mu^0) = \frac{1}{120} \frac{240\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2} = \frac{2\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2}.$$

Resta mostrar que  $\phi_4(\mu^0) = -\frac{24\mu_3}{\mu_0}$ . De fato,

$$\phi_4(\mu^0) = -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} (2l_2(\mu^0) - 3l_1(\mu^0)^2),$$

e de (3.67), segue que

$$\begin{aligned}
\phi_4(\mu^0) &= -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} \left[ 2 \left( \frac{2\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2} \right) - 3 \left( \frac{4\pi^2\mu_2^2}{\omega_0^2} \right) \right] \\
&= -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} \left[ \frac{4\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2} - \frac{12\pi^2\mu_2^2}{\omega_0^2} \right] \\
&= -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} \left[ \frac{12\pi^2\mu_2^2 + 4\pi\omega_0\mu_3 - 12\pi^2\mu_2^2}{\omega_0^2} \right] \\
&= -\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0} \frac{4\pi\omega_0\mu_3}{\omega_0^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_4(\mu^0) = -\frac{24\mu_3}{\mu_0}.$$

■

Considere a equação (3.70). Fazendo a expansão em série de Taylor na variável  $\epsilon$ , em torno de  $\epsilon = 0$ , até os termos de ordem 2, da função  $\partial_{\mu_1}\Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0))$  e até os termos de ordem 3 da função  $\partial_\epsilon\phi(\epsilon, \mu^0)$  e, ainda, levando em conta (3.75), resulta que

$$\partial_\epsilon\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 - \epsilon\alpha(\epsilon, \mu^0)\beta(\epsilon, \mu^0),$$

com,

$$\begin{aligned}
\alpha(\epsilon, \mu^0) &= \partial_{\mu_1}\Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) + (\partial_{\epsilon\mu_1}^2\Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) + \partial_{\mu_1}^2\Delta(0, \Phi(0, \mu^0))\partial_\epsilon\phi(0, \mu^0))\epsilon + \\
&\quad \frac{1}{2!} (\partial_{\epsilon\epsilon\mu_1}^3\Delta(0, \Phi(0, \mu^0)) + \partial_{\epsilon\mu_1\mu_1}^3\Delta(0, \Phi(0, \mu^0))\partial_\epsilon\phi(0, \mu^0) + \\
&\quad \partial_{\mu_1}^2\Delta(0, \Phi(0, \mu^0))\partial_\epsilon^2\phi(0, \mu^0))\epsilon^2 + O_\Delta(\epsilon^3, \|\mu^0\|),
\end{aligned}$$

e

$$\beta(\epsilon, \mu^0) = \phi_2(\mu^0)\epsilon + \frac{1}{3!}\phi_4(\mu^0)\epsilon^3 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|).$$

Assim, de (3.50), (3.52), (3.53), (3.55), (3.56), (3.66) e (3.76) obtém-se

$$\partial_\epsilon\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 - \epsilon\nu(\epsilon, \mu^0)\tau(\epsilon, \mu^0),$$

sendo,

$$\nu(\epsilon, \mu^0) = \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0} + \frac{1}{2!} \left( \frac{16\pi^2\mu_0\mu_2}{\omega_0^2} + \frac{4\pi^2\mu_0^2}{\omega_0^2} \left( -\frac{\omega_0}{\pi\mu_0} l_1(\mu^0) \right) \right) \epsilon^2 + O_\Delta(\epsilon^3, \|\mu^0\|),$$

e,

$$\tau(\epsilon, \mu^0) = -\frac{\omega_0}{\pi\mu_0}l_1(\mu^0)\epsilon - \frac{1}{3!}\frac{6\omega_0}{\pi\mu_0}(2l_2(\mu^0) - 3l_1(\mu^0)^2)\epsilon^3 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|).$$

Logo,

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + 2l_1(\mu^0)\epsilon^2 + 2(2l_2(\mu^0) - 3l_1(\mu^0)^2)\epsilon^4 + \zeta(\epsilon, \mu^0)\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, \|\mu^0\|),$$

com,

$$\zeta(\epsilon, \mu^0) = \frac{8\pi^2\mu_0\mu_2}{\omega_0^2} \frac{\omega_0}{\pi\mu_0} l_1(\mu^0) - \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0} l_1(\mu^0) \frac{\omega_0}{\pi\mu_0} l_1(\mu^0)$$

Portanto,

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + 2l_1(\mu^0)\epsilon^2 + 4l_2(\mu^0)\epsilon^4 - 6l_1(\mu^0)^2\epsilon^4 + 4l_1(\mu^0)^2\epsilon^4 - 2l_1(\mu^0)^2\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, \|\mu^0\|),$$

ou seja,

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + 2l_1(\mu^0)\epsilon^2 + 4(l_2(\mu^0) - l_1(\mu^0)^2)\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, \|\mu^0\|). \quad (3.78)$$

No teorema que segue, será provado que  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão dois de (3.29).

**Teorema 3.4.2.** *Para cada par  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathcal{B}$  considere o campo vetorial (3.29). Se os parâmetros  $\mu_0$  e  $\mu_3$  forem não nulos, então  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão dois de (3.29), sendo*

$$\mu^1 = (\mu_0, 0, 0, \mu_3).$$

**Demonstração.** Para mostrar que  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf de codimensão dois conforme **Definição 3.4.2**, basta analisar a prova do item (a) do **Teorema 3.4.1**, com os seguintes cuidados: como  $\mu_2 = 0$ , então  $l_1(\mu^1) = 0$  e de (3.77) segue que  $l_2(\mu^1) = \frac{2\pi\mu_3}{\omega_0} \neq 0$ , ou seja, o segundo coeficiente de Lyapunov é não nulo para  $\mu_3 \neq 0$ . E da condição de transversalidade, segue que

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{\mu_1} \gamma(\mu^1) & \partial_{\mu_2} \gamma(\mu^1) \\ \partial_{\mu_1} l_1(\mu^1) & \partial_{\mu_2} l_2(\mu^1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ \partial_{\mu_1} l_1(\mu^1) & \frac{2\pi}{\omega_0} \end{pmatrix} = \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0}.$$

Como  $\mu_0 \neq 0$ , a condição de transversalidade é satisfeita. Portanto,  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão dois, provando o teorema. ■

Considerando  $\mu = \mu^1$ , o primeiro coeficiente de Lyapunov é nulo e, assim, a estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é dada através do sinal do segundo coeficiente de Lyapunov. Nesse sentido, tem-se a seguinte proposição.

**Proposição 3.4.4.** *Suponha que  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$  em  $\mu = \mu^1$ .*

- a. *A equação diferencial (3.28) não possui ciclos limites;*
- b. *Se  $\mu_3 < 0$ , então aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é um contração e, portanto, o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  do sistema (3.28), restrito à variedade central e sua continuação, é assintoticamente estável;*
- c. *Se  $\mu_3 > 0$ , então aplicação de Poincaré  $\mathcal{P}$  é um expansão e, portanto, o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  do sistema (3.28), restrito à variedade central e sua continuação, é instável.*

**Demonstração.**

a. Sendo  $w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$ , com  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ , então a equação diferencial (3.33) é reescrita, nas coordenadas  $w_1$  e  $w_2$ , como

$$\begin{cases} w_1' = g_1(w_1, w_2) = -\omega_0 w_2 + 2\mu_3 w_1 (w_1^2 + w_2^2)^2, \\ w_2' = g_2(w_1, w_2) = \omega_0 w_1. \end{cases}$$

Pelo *Crítério de Bendixson* [14], o sistema (3.28), restrito à variedade central e sua continuação, não possui soluções periódicas, pois

$$\frac{\partial}{\partial w_1} g_1(w_1, w_2) + \frac{\partial}{\partial w_2} g_2(w_1, w_2) = 2\mu_3 (w_1^2 + w_2^2) (5w_1^2 + w_2^2) > 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

b. Como  $\mu = \mu^1$ , de (3.78) e do fato de que  $l_1(\mu^1) = 0$ , segue que

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^1)) = 1 + 4l_2(\mu^1)\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, \|\mu^1\|),$$

com

$$l_2(\mu^1) = \frac{2\pi\mu_3}{\omega_0}.$$

Neste caso, sabe-se que  $\omega_0 > 0$ , então o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov depende apenas de  $\mu_3$ . Assim, se  $\mu_3 < 0$ , então  $l_2(\mu^1) < 0$  e

$$|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^1))| < 1,$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, ou seja,  $\mathcal{P}$  é uma contração. Logo, o ponto de equilíbrio  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  do sistema (3.28), restrito à variedade central e sua continuação, é assintoticamente estável.

c. Se  $\mu_3 > 0$ , então  $l_2(\mu^1) > 0$  e

$$|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^1))| > 1,$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, ou seja,  $\mathcal{P}$  é uma expansão. ■

Em uma vizinhança de um ponto de Hopf transversal de codimensão dois  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$ , com  $l_2(\mu^1) = \frac{2\pi\mu_3}{\omega_0} \neq 0$ , com  $\omega_0 > 0$ , o comportamento dinâmico da equação diferencial (3.28), restrita à variedade central e sua continuação, é localmente topologicamente equivalente a seguinte forma normal complexa

$$w' = (\beta_0\beta_1 + i)w + \beta_2 w|w|^2 + sw|w|^4, \quad (3.79)$$

sendo  $\beta_0\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros de desdobramentos e  $s = \text{sign}(l_2(\mu^1)) = \pm 1$ .

Na Figura 3.1,  $C_{NH}$  é a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas associada com uma bifurcação de Hopf de codimensão dois ou bifurcação de Bautin (ver [8]). Uma aproximação dessa curva, pode ser obtida assumindo a ocorrência de uma bifurcação de Hopf de codimensão dois, ou seja, assumindo  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$  e usando (3.75) e (3.78). Note que, a existência da curva de órbitas periódicas não hiperbólicas segue de

$$|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0))| = 1.$$

A equação (3.78) pode ser reescrita como

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0)) = 1 + 2\epsilon^2 \Psi(\epsilon, \mu^0),$$

com

$$\Psi(\epsilon, \mu^0) = l_1(\mu^0) + 2(l_2(\mu^0) - l_1(\mu^0)^2)\epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|). \quad (3.80)$$

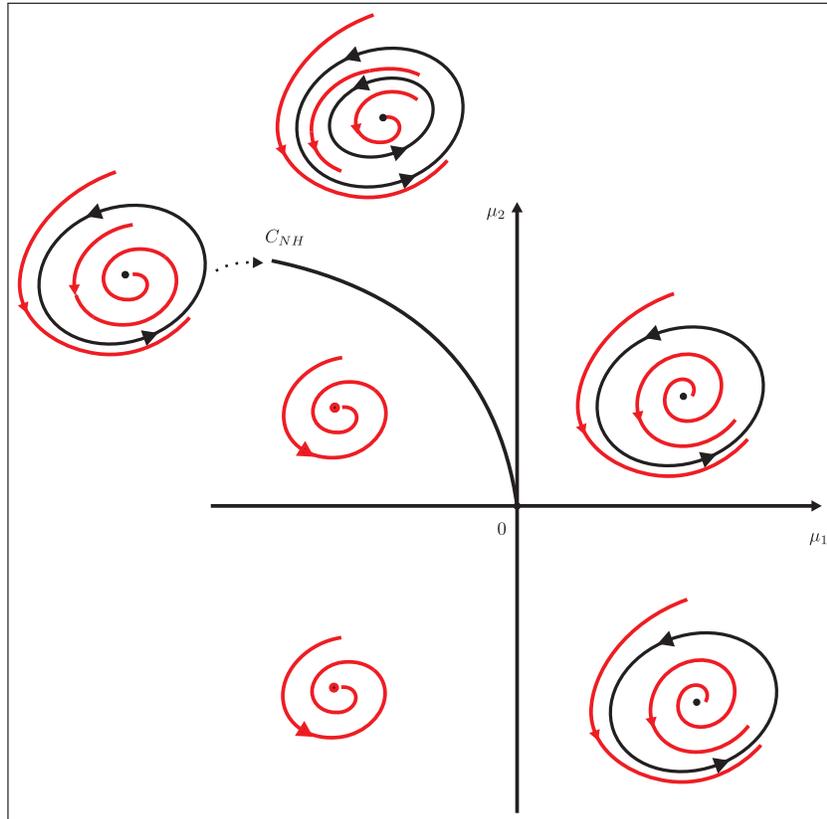


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação associado com (3.28) quando  $\mu_0 > 0$  e  $\mu_3 < 0$ .

Da condição  $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \mu^0))| = 1$  é suficiente estudar o conjunto  $\Psi^{-1}(0)$  para entender a curva  $C_{NH}$ .

É necessário ressaltar que a função  $\Psi(\epsilon, \mu^0)$  possui as seguintes propriedades.

**Afirmção 3.4.3.**  $\Psi(0, \mu^1) = 0$ .

**Demonstração.** De fato, como  $\mu^1 = (\mu_0, 0, 0, \mu_3)$ , com  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$ , segue que  $l_1(\mu^1) = 0$  e, como  $\epsilon = 0$ , a igualdade segue. ■

**Afirmção 3.4.4.**  $\partial_\epsilon \Psi(0, \mu^1) = 0$ .

**Demonstração.** Derivando  $\Psi(\epsilon, \mu^0)$ , em relação a  $\epsilon$ , tem-se

$$\partial_\epsilon \Psi(\epsilon, \mu^0) = 4(l_2(\mu^0) - l_1(\mu^0)^2)\epsilon + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^2, \|\mu^0\|).$$

Assim, aplicando em  $(0, \mu^1)$ , o resultado segue. ■

**Afirmação 3.4.5.**  $\partial_{\mu_2}\Psi(0, \mu^1) = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , sendo  $\omega_0 > 0$ .

**Demonstração.** Derivando  $\Psi(\epsilon, \mu^0)$ , em relação a  $\mu_2$ , resulta que

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_2}\Psi(\epsilon, \mu^0) &= \frac{\partial}{\partial \mu_2} \left[ \frac{2\pi\mu_2}{\omega_0} + \left( \frac{12\pi^2\mu_2^2 + 4\pi\omega_0\mu_3}{\omega_0^2} - \frac{4\pi^2\mu_2^2}{\omega_0^2} \right) \epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, \|\mu^0\|) \right] \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{16\pi^2\mu_2}{\omega_0^2} + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^2, \|\mu^0\|).\end{aligned}$$

Desta forma, aplicando em  $(0, \mu^1)$ , a igualdade é satisfeita. ■

**Afirmação 3.4.6.**  $\partial_{\epsilon}^2\Psi(0, \mu^1) = \frac{8\pi\mu_3}{\omega_0}$ , com  $\omega_0 > 0$  e  $\mu_3 \neq 0$ .

**Demonstração.** Derivando  $\Psi(\epsilon, \mu^0)$  duas vezes em relação a  $\epsilon$ , obtém-se

$$\partial_{\epsilon}^2\Psi(\epsilon, \mu^0) = 4(l_2(\mu^0) - l_1(\mu^0)^2) + O_{\mathcal{P}}(\epsilon, \|\mu^0\|).$$

Logo, em  $(0, \mu^1)$ , há a seguinte igualdade

$$\partial_{\epsilon}^2\Psi(0, \mu^1) = 4(l_2(\mu^1) - l_1(\mu^1)^2) = 4 \left( \frac{2\pi(3\pi\mu_2^2 + \omega_0\mu_3)}{\omega_0^2} \right) = \frac{8\pi\mu_3}{\omega_0}.$$
■

Estas afirmações serão utilizadas na demonstração da seguinte proposição associada com a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas.

**Proposição 3.4.5.** *Se  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$ , a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas de (3.28), tem a seguinte representação*

$$\Gamma(\epsilon, \mu^1) = \left( \frac{\mu_3}{\mu_0}\epsilon^4, -2\mu_3\epsilon^2 \right) + O_{\Gamma}(\epsilon^5, \|\mu^1\|), \quad (3.81)$$

como curva parametrizada por  $\epsilon$  ou localmente como gráfico de função

$$\mu_1 = \Lambda(\mu_2, \mu^1) = \frac{1}{4\mu_0\mu_3}\mu_2^2 + O_{\mu_1}(|\mu_2|^3, \|\mu^1\|). \quad (3.82)$$

**Demonstração.** Suponha que  $\mu_0 \neq 0$  e  $\mu_3 \neq 0$  e que o equilíbrio  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^4$  é um ponto de Hopf transversal de codimensão dois. É suficiente mostrar a existência da curva  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \Gamma(\epsilon, \mu^1)$  no plano dos parâmetros  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$  satisfazendo:

- C1.**  $\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = \epsilon$ ;
- C2.**  $\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = 1$ ;
- C3.**  $\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) \neq 0$ ;
- C4.**  $\partial_{\mu_1} \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) \neq 0$ ;
- C5.** A curva  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \Gamma(\epsilon, \mu^1)$  pode ser localmente representada próxima ao ponto  $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$  por (3.81) ou (3.82).

Se a aplicação de Poincaré

$$(\epsilon, \mu) \mapsto \mathcal{P}(\epsilon, \mu) = \epsilon(1 + \Delta(\epsilon, \mu)),$$

é vista como um sistema dinâmico discreto, então **C1** até **C4** garantem a existência de uma bifurcação genérica do tipo sela-nó para  $\mu = \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ .

Considere agora a função (3.80). Das **Afirmações 3.4.3 a 3.4.6**, verificou-se que  $\Psi$  tem as seguintes propriedades:

- B1.**  $\Psi(0, \mu^1) = 0$ ;
- B2.**  $\partial_\epsilon \Psi(0, \mu^1) = 0$ ;
- B3.**  $\partial_{\mu_2} \Psi(0, \mu^1) = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ;
- B4.**  $\partial_\epsilon^2 \Psi(0, \mu^1) = \frac{8\pi\mu_3}{\omega_0}$ .

Assim, é possível observar que  $\Psi(\epsilon, \mu^1)$  satisfaz as propriedades do **Lema 3.4.1** e, com isso, existe uma função suave  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \psi(\epsilon, \mu^1)$  tal que

$$\Psi(\epsilon, \mu_0, \phi(\epsilon, \mu_0, 0, 0, \mu_3), \psi(\epsilon, \mu_0, 0, 0, \mu_3), \mu_3) \equiv 0, \quad (3.83)$$

e, portanto, a função  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \Gamma(\epsilon, \mu^1)$  está bem definida, com

$$\Gamma(\epsilon, \mu^1) = \Phi(\epsilon, \mu^0) = \mu^1 + (0, \phi(\epsilon, \mu_0, 0, \psi(\epsilon, \mu^1), \mu_3), \psi(\epsilon, \mu^1), 0). \quad (3.84)$$

Além disso,  $\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^0)) = \epsilon$  por (3.84) e  $\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^0)) = 1$ , por (3.83). Logo, **C1** e **C2** estão provadas.

Ainda do **Lema 3.4.1**, a função  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \mu_2 = \psi(\epsilon, \mu^1)$  possui a seguinte representação,

$$\mu_2 = \psi(\epsilon, \mu^1) = \frac{1}{2!} \psi_2(\mu^1) \epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3, \|\mu^1\|), \quad (3.85)$$

sendo

$$\psi_2(\mu^1) := -\frac{\partial_\epsilon \psi(0, \mu^1)}{\partial_{\mu_2} \psi(0, \mu^1)} = -\frac{\frac{8\pi\mu_3}{\omega_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = -4\mu_3. \quad (3.86)$$

Portanto,

$$\mu_2 = \psi(\epsilon, \mu^1) = \frac{1}{2}(-4\mu_3)\epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3, \|\mu^1\|),$$

ou seja,

$$\mu_2 = \psi(\epsilon, \mu^1) = -2\mu_3\epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3, \|\mu^1\|). \quad (3.87)$$

Da mesma forma, de (3.75) segue que

$$\mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^0) = \frac{1}{2!} \phi_2(\mu^0) \epsilon^2 + \frac{1}{4!} \phi_4(\mu^0) \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|).$$

Desta forma, calculando  $\phi_2(\mu^0)$  para  $\mu_2$  dado em (3.87) vem que

$$\begin{aligned} \phi_2(\mu^1) &= -\frac{2\mu_2}{\mu_0} = -\frac{2(-2\mu_3\epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3, \|\mu^1\|))}{\mu_0} \\ &= \frac{4\mu_3}{\mu_0} + O_{\phi_2}(\epsilon^3, \|\mu^1\|). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^1) &= \frac{1}{2!} \left( \frac{4\mu_3}{\mu_0} + O_{\phi_2}(\epsilon^3, \|\mu^1\|) \right) \epsilon^2 + \frac{1}{4!} \left( -\frac{24\mu_3}{\mu_0} \right) \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^1\|) \\ &= \frac{2\mu_3}{\mu_0} \epsilon^2 - \frac{\mu_3}{\mu_0} \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^1\|), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mu_1 = \phi(\epsilon, \mu^1) = \frac{\mu_3}{\mu_0} \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^6, \|\mu^1\|). \quad (3.88)$$

Com isso, a curva  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ , pode ser parametrizada por  $\epsilon$  como em (3.81) e, portanto, **C5** é verificada.

Considere agora a função  $(\epsilon, \mu^0) \mapsto K(\epsilon, \mu^0) = \mu_2 - \psi(\epsilon, \mu^1)$ , ou seja,

$$K(\epsilon, \mu^0) = \mu_2 - \frac{1}{2!} \psi_2(\mu^1) \epsilon^2 - O_\psi(\epsilon^3, \|\mu^1\|).$$

Note que

$$\begin{aligned} K(0, \mu^0) &= 0, \\ \partial_\epsilon K(0, \mu^0) &= 0, \\ \partial_\epsilon^2 K(0, \mu^0) &= -\frac{1}{2}\psi_2(\mu^1) = 2\mu_3, \\ \partial_{\mu_2} K(0, \mu^0) &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo *Teorema da Função Implícita*,

$$\epsilon^2 = -\frac{\partial_{\mu_2} K(0, \mu^0)}{\partial_\epsilon^2 K(0, \mu^0)} \mu_2 + O_G(|\mu_2|^2, \|\mu^1\|),$$

ou seja,

$$\epsilon^2 = -\frac{1}{2\mu_3} \mu_2 + O_G(|\mu_2|^2, \|\mu^1\|). \quad (3.89)$$

Assim, por (3.75), a curva  $(\epsilon, \mu^1) \mapsto \Gamma(\epsilon, \mu^1)$  pode ser localmente representada por um gráfico de uma função do tipo (3.82), ou seja,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2!} \phi_2(\mu^0) \epsilon^2 + \frac{1}{4!} \phi_4(\mu^0) \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2\mu_2}{\mu_0} \right) \left( -\frac{1}{2\mu_3} \mu_2 + O_G(|\mu_2|^2, \|\mu^1\|) \right) + \\ &\quad \frac{1}{4!} \left( -\frac{24\mu_3}{\mu_0} \right) \left( -\frac{1}{2\mu_3} \mu_2 + O_G(|\mu_2|^2, \|\mu^1\|) \right)^2 + O_\phi(\epsilon^5, \|\mu^0\|) \\ &= \frac{1}{2\mu_0\mu_3} \mu_2^2 - \frac{1}{4\mu_0\mu_3} \mu_2^2 + O_{\mu_1}(|\mu_2|^3, \|\mu^1\|) \\ &= \frac{1}{4\mu_0\mu_3} \mu_2^2 + O_{\mu_1}(|\mu_2|^3, \|\mu^1\|). \end{aligned}$$

Agora, para demonstrar os itens **C3** e **C4**, é necessário calcular a derivada segunda, com respeito a  $\epsilon$ , da aplicação de Poincaré, avaliada em  $\mu = \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ . Assim, segue que

$$\partial_\epsilon^2(\mathcal{P}(\epsilon, \mu)) = \partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \mu) + \partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \mu) + \epsilon \partial_\epsilon^2 \Delta(\epsilon, \mu),$$

ou seja,

$$\partial_\epsilon^2(\mathcal{P}(\epsilon, \mu)) = 2\partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \mu) + \epsilon \partial_\epsilon^2 \Delta(\epsilon, \mu).$$

Aplicando em  $\mu = \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ , obtém-se

$$\partial_\epsilon^2(\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1))) = 2\partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) + \epsilon \partial_\epsilon^2 \Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)). \quad (3.90)$$

Agora, a derivada com respeito a  $\mu_1$ , da aplicação de Poincaré, é dada por

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_1}(\mathcal{P}(\epsilon, \mu)) &= \partial_{\mu_1}\epsilon + \partial_{\mu_1}(\epsilon\Delta(\epsilon, \mu)) \\ &= \epsilon\partial_{\mu_1}\Delta(\epsilon, \mu),\end{aligned}$$

e, calculada em  $\mu = \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ , segue que

$$\partial_{\mu_1}(\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1))) = \epsilon\partial_{\mu_1}\Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)). \quad (3.91)$$

Levando em conta (3.47) e fazendo a expansão em série de Taylor de cada função  $(\theta, \mu) \mapsto \rho_k(\theta, \mu)$  (e suas respectivas derivadas com respeito a  $\mu_1$ ) para  $k = 1, \dots, 5$ , e calculando em  $\mu = \Gamma(\epsilon, \mu^1)$ , segue que

$$\partial_{\epsilon}^2\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = \chi_0(\mu^1) + \chi_1(\mu^1)\epsilon + \frac{1}{2!}\chi_2(\mu^1)\epsilon^2 + \frac{1}{3!}\chi_3(\mu^1)\epsilon^3 + O_{\chi}(\epsilon^4, \|\mu^1\|),$$

e

$$\partial_{\mu_1}^2\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = \xi(\mu^1)\epsilon + O_{\xi}(\epsilon^2, \|\mu^1\|),$$

com

$$\chi_0(\mu^1) = \rho_2(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\chi_1(\mu^1) = \rho_3(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\chi_2(\mu^1) = \rho_4(2\pi, \mu^1) - 4\mu_3\partial_{\mu_2}\rho_2(2\pi, \mu^1) - \frac{\mu_2}{\mu_0}\partial_{\mu_1}\rho_2(2\pi, \mu^1),$$

$$\chi_3(\mu^1) = \rho_5(2\pi, \mu^1) - 12\mu_3\partial_{\mu_2}\rho_3(2\pi, \mu^1) - 6\frac{\mu_2}{\mu_0}\partial_{\mu_1}\rho_3(2\pi, \mu^1),$$

e

$$\xi_1(\mu^1) = \partial_{\mu^1}\rho_1(2\pi\mu^1).$$

Usando as relações (3.48) até (3.58) e também o fato da dependência diferenciável das soluções com respeito aos parâmetros, obtém-se

$$\partial_{\mu_1}\rho_1(2\pi, \mu^1) = \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0},$$

$$\rho_2(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\partial_{\mu_1}\rho_2(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\partial_{\mu_2} \rho_2(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\rho_3(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\partial_{\mu_1} \rho_3(2\pi, \mu^1) = 0,$$

$$\partial_{\mu_2} \rho_3(2\pi, \mu^1) = \frac{12\pi}{\omega_0},$$

e

$$\rho_5(2\pi, \mu^1) = \frac{240\pi\mu_3}{\omega_0}.$$

Sendo assim, segue que  $\chi_0(\mu^1) = 0$ ,  $\chi_1(\mu^1) = 0$ ,  $\chi_2(\mu^1) = 0$  e

$$\begin{aligned} \chi_3(\mu^1) &= \rho_5(2\pi, \mu^1) - 12\mu_3 \partial_{\mu_2} \rho_3(2\pi, \mu^1) \\ &= \frac{240\pi\mu_3}{\omega_0} - 12\mu_3 \frac{12\pi}{\omega_0} \\ &= \frac{240\pi\mu_3}{\omega_0} - \frac{144\pi\mu_3}{\omega_0} \\ &= \frac{96\pi\mu_3}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = \frac{16\pi\mu_3}{\omega_0} \epsilon^3 + O_\chi(\epsilon^4, \|\mu^1\|).$$

Da mesma forma,

$$\partial_{\mu_1}^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) = \frac{2\pi\mu_0}{\omega_0} \epsilon + O_\xi(\epsilon^2, \|\mu^1\|).$$

Para  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeno, segue que

$$\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) \neq 0,$$

e

$$\partial_{\mu_1}^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon, \mu^1)) \neq 0,$$

completando a prova da proposição. ■

### 3.5 Aplicações

Dois exemplos serão apresentados nesta seção, os quais darão uma ideia de como os resultados apresentados até aqui podem ser utilizados. O primeiro exemplo trata de uma família de sistemas de controle em malha fechada em  $\mathbb{R}^3$  e, o segundo, de uma família de sistemas de controle em malha fechada em  $\mathbb{R}^4$ .

**Exemplo 3.5.1.** *Considere o seguinte sistema de controle linear autônomo*

$$x' = Ax + Bu, \quad (3.92)$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Primeiramente, observe que o par  $(A, B)$  é controlável. Esta afirmação segue do **Teorema 2.2.1**, pois como

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e

$$A^2B = AAB \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 6 \\ 28 \end{pmatrix},$$

resulta que,

$$M = (B|AB|A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 32 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 28 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{Po}(M) = 3.$$

Escolhendo  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  e  $\lambda_3 = -1$  como autovalores, tem-se o seguinte polinômio característico

$$p_\lambda(r) = (r - i)(r + i)(r + 1),$$

isto é,

$$p_\lambda(r) = r^3 + r^2 + r + 1.$$

Do **Teorema 2.5.4** segue que a matriz  $F \in \mathbb{R}^3$  é calculada como

$$F = -e_3 M^{-1} p_\lambda(A).$$

Mas,

$$p_\lambda(A) = A^3 + A^2 + A + E.$$

Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 25 \\ 1 & 1 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 25 \\ 1 & 1 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 57 & 135 \\ 7 & 11 & 25 \\ 37 & 49 & 119 \end{pmatrix},$$

obtem-se que

$$p_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 43 & 57 & 135 \\ 7 & 11 & 25 \\ 37 & 49 & 119 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 11 & 25 \\ 1 & 1 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$p_\lambda(A) = \begin{pmatrix} 52 & 69 & 165 \\ 9 & 13 & 30 \\ 45 & 60 & 145 \end{pmatrix}.$$

A matriz inversa de  $M$  é dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} F &= -(0, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52 & 69 & 165 \\ 9 & 13 & 30 \\ 45 & 60 & 145 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 52 & 69 & 165 \\ 9 & 13 & 30 \\ 45 & 60 & 145 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F = (-1, -2, -5).$$

Como  $H = A + BF$ , tem-se

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1, -2, -5) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se observar que  $H$  é uma matriz diagonal por blocos, assim seus autovalores são  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  e  $\lambda_3 = -1$ . Como o interesse está apenas nos autovalores complexos com partes reais nulas, segue que os autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $p$  e  $q$ , são escolhidos como

$$p = (1, -i, 0),$$

e

$$q = \left( \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, 0 \right).$$

Com estas escolhas a hipótese **E3** é satisfeita, pois

$$\langle p, B \rangle = \langle (1, -i, 0), (1, 0, 1) \rangle = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Além disto,

$$\langle p, q \rangle = \left\langle (1, -i, 0), \left( \frac{1}{2}, \frac{-i}{2}, 0 \right) \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

Sendo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , então  $w = \langle p, x \rangle = \langle (1, -i, 0), (x_1, x_2, x_3) \rangle = x_1 + ix_2$ . Assim, considerando (3.26), resulta que a realimentação estática de estado  $K$  é dada por

$$\begin{aligned} K(w, \bar{w}, \mu) &= 2x_1(\mu_0\mu_1 + \mu_2(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + \mu_3(x_1 + ix_2)^2(x_1 - ix_2)^2) \\ &= 2x_1(\mu_0\mu_1 + \mu_2(x_1^2 + x_2^2) + \mu_3(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$K(w, \bar{w}, \mu) = 2\mu_0\mu_1x_1 + 2\mu_2(x_1^3 + x_1x_2^2) + 2\mu_3(x_1^5 + 2x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4).$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} K(w, \bar{w}, \mu),$$

isto é,

$$\begin{cases} x'_1 = 2\mu_0\mu_1x_1 - x_2 + 2\mu_2(x_1^3 + x_1x_2^2) + 2\mu_3(x_1^5 + 2x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4), \\ x'_2 = x_1, \\ x'_3 = 2\mu_0\mu_1x_1 - x_3 + 2\mu_2(x_1^3 + x_1x_2^2) + 2\mu_3(x_1^5 + 2x_1^3x_2^2 + x_1x_2^4), \end{cases}$$

que é um membro da classe (3.27) para  $n = 3$ .

Para o ponto de Hopf  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ , com  $\mu^0 = (\mu_0, 0, \mu_2, \mu_3)$ , tem-se de (3.67) que o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_1(\mu^0) = 2\pi\mu_2,$$

visto que  $\omega_0 = 1$ . Desta forma, se  $\mu_2 \neq 0$ , a estabilidade do ponto de Hopf é determinada e, aplicando a **Proposição 3.4.2** dá-se o estudo das órbitas periódicas próximas ao ponto de Hopf, isto é, se  $\mu_2 < 0$ , então, localmente, existe uma órbita periódica estável, no retrato de fase do sistema (3.92) restrito à variedade central e sua continuação, próxima ao equilíbrio e, se  $\mu_2 > 0$ , então a órbita periódica existente, é instável. Já pelo **Teorema 3.4.2**, considerando o ponto de Hopf  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$ , com  $\mu^1 = (\mu_0, 0, 0, \mu_3)$ , o segundo coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_2(\mu^1) = 2\pi\mu_3.$$

Se  $\mu_3 \neq 0$ , a estabilidade do ponto de Hopf, bem como as propriedades da órbita periódica próxima a este ponto, são dadas através da **Proposição 3.4.4**, ou seja, considerando  $\mu_3 < 0$ , então, próximo ao equilíbrio, existe uma órbita periódica estável, no retrato de fase do sistema (3.92) restrito à variedade central e sua continuação, e, caso  $\mu_3 > 0$ , a órbita periódica existente é instável.

**Exemplo 3.5.2.** Considere agora o sistema linear de controle em malha fechada em  $\mathbb{R}^4$

$$x' = Ax + Bu$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Do Teorema 2.2.1 segue que o par  $(A, B)$  é controlável, pois

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

e

$$A^3B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -14 & -23 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{Po}(M) = 4.$$

Escolhendo como autovalores  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ ,  $\lambda_3 = -1 + i$  e  $\lambda_4 = -1 - i$ , segue que o polinômio característico é representado por

$$\begin{aligned} p_\lambda(r) &= (r - i)(r + i)(r - (-1 + i))(r - (-1 - i)) \\ &= (r^2 + 1)(r^2 + 2r + 4), \end{aligned}$$

isto é,

$$p_\lambda(r) = r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 2.$$

Calculando  $p_\lambda(r)$ , em  $r = A$ , segue que

$$p_\lambda(A) = A^4 + 2A^3 + 3A^2 + 2A + 2E,$$

mas

$$A^2 = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 3 & -14 \\ 6 & 8 & -8 & 9 \\ 7 & 7 & -4 & 9 \\ 8 & 8 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -34 & -36 & 24 & -45 \\ 9 & 5 & -8 & 10 \\ 15 & 15 & -17 & 20 \\ 24 & 27 & -23 & 33 \end{pmatrix},$$

e

$$A^4 = \begin{pmatrix} -69 & -65 & 76 & -90 \\ 4 & 2 & -23 & 6 \\ 16 & 9 & -28 & 19 \\ 41 & 33 & -46 & 51 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_\lambda(A) = \begin{pmatrix} -165 & -178 & 125 & -222 \\ 44 & 40 & -61 & 57 \\ 71 & 66 & -74 & 92 \\ 115 & 117 & -95 & 153 \end{pmatrix}.$$

A matriz inversa de  $M$  é dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & \frac{27}{5} & -\frac{53}{5} & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, pelo **Teorema 2.5.4**, obtém-se

$$\begin{aligned} F &= -(0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & \frac{27}{5} & -\frac{53}{5} & 10 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -165 & -178 & 125 & -222 \\ 44 & 40 & -61 & 57 \\ 71 & 66 & -74 & 92 \\ 115 & 117 & -95 & 153 \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -1\right) \begin{pmatrix} -165 & -178 & 125 & -222 \\ 44 & 40 & -61 & 57 \\ 71 & 66 & -74 & 92 \\ 115 & 117 & -95 & 153 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F = (-1, -1, -2, -2).$$

Como  $H = A + BF$ , segue que

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1, -1, -2, -2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz  $H$  são

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_3 = -1 + i \quad e \quad \lambda_4 = -1 - i.$$

Os autovetores escolhidos e associados com  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ , de forma que satisfaçam as hipóteses **E3** e **E4**, são os seguintes

$$p = (-1, 0, 1 + i, -1 - i),$$

e

$$q = \left( -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 0 \right).$$

Considerando  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  vem que  $w = \langle p, x \rangle = -x_1 + (1 - i)x_3 - (1 - i)x_4$ .

Portanto, de (3.26) resulta que  $K$  é dada por

$$\begin{aligned} K(w, \bar{w}, \mu) &= 2(-x_1 + x_3 - x_4)(\mu_0\mu_1 + \mu_2(-x_1 + (1 - i)x_3 - (1 - i)x_4) \\ &\quad (-x_1 + (1 + i)x_3 - (1 + i)x_4) + \mu_3(-x_1 + (1 - i)x_3 - (1 - i)x_4)^2 \\ &\quad (-x_1 + (1 + i)x_3 - (1 + i)x_4)^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} K(w, \bar{w}, \mu) &= 2(-x_1 + x_3 - x_4)(\mu_0\mu_1 + \mu_2(x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_3^2 - 4x_3x_4 + 2x_4^2) + \\ &\quad \mu_3(x_1^4 - 4x_1^3x_3 + 4x_1^3x_4 + 8x_1^2x_3^2 - 16x_1^2x_3x_4 + 8x_1^2x_4^2 - 8x_1x_3^3 + 24x_1x_3^2x_4 - \\ &\quad 24x_1x_3x_4^2 + 8x_1x_4^3 + 4x_3^4 - 16x_3^3x_4 + 24x_3^2x_4^2 - 16x_3x_4^3 + 4x_4^4)). \end{aligned}$$

Definindo

$$P(x) = x_1^2 - 2x_1(x_3 - x_4) + 2(x_3 - x_4)^2,$$

e

$$Q(x) = -x_1 + x_3 - x_4,$$

obtém-se a seguinte família a quatro parâmetros de realimentações estáticas de estado

$$(x, \mu) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mapsto u = K(x) = 2Q(x)(\mu_0\mu_1 + \mu_2P(x) + \mu_3P(x)^2) \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o sistema de controle linear em malha fechada

$$\begin{aligned} x' &= Hx + BK(x) \\ &= Hx + 2\mu_0\mu_1Q(x)B + 2Q(x)P(x)(\mu_2 + \mu_3P(x))B, \end{aligned}$$

é um membro da classe (3.27) para  $n = 4$ .

Note que, assim como no exemplo anterior, todos os resultados estudados podem ser aplicados. Como o interesse está apenas em autovalores com partes reais nulas, vem que,  $\omega_0 = 1$ . Assim, para o ponto de Hopf  $(0, \mu^0) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$  tem-se de (3.67) que o primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_1(\mu^0) = 2\pi\mu_2.$$

Logo, considerando  $\mu_2 \neq 0$ , é possível determinar a estabilidade do ponto de Hopf e, através da **Proposição 3.4.2**, dá-se o estudo das órbitas periódicas próximas ao ponto de Hopf. Já pelo **Teorema 3.4.2**, considerando o ponto de Hopf  $(0, \mu^1) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ , o segundo coeficiente de Lyapunov é

$$l_2(\mu^1) = 2\pi\mu_3.$$

Desta forma, considerando  $\mu_3 \neq 0$ , da **Proposição 3.4.4** é possível determinar a estabilidade bem como as propriedades das órbitas periódicas próximas ao equilíbrio.

# Conclusões

Nesta dissertação foi estudado o controle de ciclos limites em sistemas de controle lineares em malha fechada. Após um estudo inicial sobre a teoria de controle (linear), foi possível mostrar alguns resultados que permitem verificar a existência de ciclos limites em sistemas de controle lineares autônomos em malha fechada que surgem em decorrência de bifurcações de Hopf de codimensões um e dois estudados em [2]. Isto fica claro, com as demonstrações dos **Teoremas 3.4.1** e **3.4.2**. Além de identificar a existência destes ciclos limites, foi possível realizar um estudo sobre suas estabilidades, com a demonstração das proposições que seguem os teoremas citados acima.

Além disso, ainda dos **Teoremas 3.4.1** e **3.4.2** e de suas proposições pode-se verificar que, conforme for os parâmetros tomados na família de realimentações estáticas de estado, o retrato de fase da correspondente família de sistemas de controle lineares em malha fechada pode ter nenhum, um ou dois ciclos limites, como pode ser visualizado na Figura 3.1. Ressalta-se também que no caso em que há um único ciclo limite não, necessariamente, este precisa ser hiperbólico, bastando para isto tomar valores apropriados dos parâmetros em  $C_{NH}$ , conforme **Proposição 3.4.5**.

Como trabalhos futuros, deseja-se aprofundar ainda mais nos conceitos referentes à teoria de controle, principalmente no que diz respeito ao estudo de Problemas Inversos.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. C. Braga, L. F. Mello, C. Roşoreanu, M. Sterpu, *Control of planar Bautin bifurcation*, *Nonlinear Dynamics*, **62** (2010), 989-1000.
- [2] D. C. Braga, L. F. Mello, C. Roşoreanu, M. Sterpu, *Controllable Hopf Bifurcations of Codimensions One and Two in Linear Control Systems*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21** (2011), 2665-2678.
- [3] F. A. Carrillo, F. Verduzco, *Control of the planar Takens–Bogdanov bifurcation with applications*, *Acta Applicandae Mathematicae*, **105** (2009), 199-225.
- [4] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer–Verlag, 2006.
- [5] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, 1981.
- [6] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1970.
- [7] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2<sup>nd</sup> Edition, Elsevier, 2004.
- [8] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, 1998.
- [9] A. C. G. Leitão, J. Baumeister, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 1<sup>a</sup> Edição, IMPA, 2014.

- [10] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 8ª Edição, IMPA, 2014.
- [11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, 1987.
- [12] R. J. Santos, *Álgebra Linear e Aplicações*, Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2002.
- [13] Software **Mathematica 10**: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [14] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979.
- [15] J. Sotomayor, L. F. Mello, D. C. Braga, *Bifurcation analysis of the Watt governor system*, Computational & Applied Mathematics, **26** (2007), 19-44.
- [16] F. Verduzco, J. Alvarez, *Hopf bifurcation control: A new approach*, Systems & Control Letters, **55** (2006), 437-451.
- [17] G. Wen, D. Xu, *Control algorithm for creation of Hopf bifurcations in continuous-time systems of arbitrary dimension*, Physics Letters A, **337** (2005), 93-100.
- [18] F. Zhang, *The Schur Complement and its Applications*, Springer, 2005.
- [19] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and Optimal Control*, 1<sup>st</sup> Edition, Prentice Hall, 1996.