UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espaço Hilbert de Reprodução sobre $\mathbb{R}^q$ Admitindo Núcleo Gaussiano

JOÃO PAULO SOARES DE LIMA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro / 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOÃO PAULO SOARES DE LIMA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Espaço Hilbert de Reprodução sobre $\mathbb{R}^q$ Admitindo Núcleo Gaussiano

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Área de Concentração: **Análise Funcional**

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro / 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espaço Hilbert de Reprodução sobre $\mathbb{R}^q$ Admitindo Núcleo Gaussiano

Dissertação aprovada por banca examinadora em 23 fevereiro de 2017, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Banca examinadora:
Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira - Orientador
Profa. Dra. Thaís Jordão - ICMC/USP
Profa. Dra. Mariza Stefanello Simsen - UNIFEI
DEFESA: Dia 23 de fevereiro de 2017 às 14h.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Fevereiro / 2017

Aos meus heróis da vida real,

João Soares e Regina Mendes, dedico.

E quando tudo parecia não dar certo,
com sua doce voz ela repetia em meu ouvido:
– Surgem no horizonte
dias mais tranquilos e noites mais amenas!

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar por não permitir que eu desistisse do desafio de concluir este trabalho.

A minha família e, em especial aos meus pais, por sua sabedoria, generosidade e sinceras orações.

Ao Prof. Claudemir Oliveira expresso meu profundo respeito e admiração por ser um homem possuidor de um coração gigante. Agradeço-o, sobretudo, pela confiança em mim depositada.

Aos meus grandes amigos: Fernando Custódio, Francisco de Assis, Estevão Henrique e Brener Souza. A vocês a palavra conclusiva é 'gratidão'.

A minha companheira Daniela, pelo carinho. Você, de várias maneiras, suavizou esses dois anos difíceis da minha vida.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo valiozo apoio financeiro.

Muito obrigado!

João

Resumo

Os trabalhos de Aronszajn a respeito de espaços Hilbert de reprodução são amplamente conhecidos, chegando a 4.582 citações. Seu resultado mais conhecido estabelece uma correspondência biunívoca entre espaços Hilbert de funções e núcleos positivos definidos. Esta dissertação apresenta um estudo deste assunto quando o domínio das funções em questão é um subconjunto de $\mathbb{R}^q$, em que a partir de um núcleo positivo definido, estudamos a construção do espaço Hilbert de reprodução de funções admitindo como gerador um núcleo de Gauss q-dimensional. A interligação destes espaços com espaços de polinômios também é estudada.

Palavras-chave e frases: Espaço Hilbert de reprodução - Núcleo positivo definido
Núcleo de reprodução - Núcleo gaussiano

Abstract

One of Aronszajn's works about Reproducing Kernel Hilbert Space(RKHS) is widely known in Functional Analysis, reaching actually to 4.582 citations. His main result ensures that RKHS are in a one to one correspondence with positive definite kernels. This dissertation approaches this subject when the input space is a subset of $\mathbb{R}^q$ and the kernel considered is of gaussian type. The relation among theses spaces and certain polynomial spaces is also studied.

Keywords and phrases: Reproducing kernel Hilbert space - Gaussian kernel Positive definite kernel - Reproducing kernel

Índice

Capítulo 1

Introdução

A teoria de núcleos de reprodução é relativamente nova. Os primeiros estudos datam do início do século XX. Contribuíram nessa fundamentação J. Mercer, G. Szëgo, S. Bergman, S. Bochner e E.H. Moore. A título de curiosidade, a família de núcleos positivos definidos, conceito-chave dessa investigação, foi introduzida por Mercer. No entanto, a formalização teórica do assunto é devido a N. Aronszajn feita por volta de 1950([4, 25]).

Núcleos de reprodução e espaços Hilbert associados a eles aparecem em muitas áreas do conhecimento. Sua teoria tem emergido como uma importante ferramenta para resolução de problemas tanto de ordem teórica quanto algorítmica. Por exemplo, em Teoria da Aproximação, Probabilidade e Estatística, Teoria da Representação de Grupos, Análise Complexa, decaimento dos autovalores dos operadores integrais gerados por núcleos de reprodução. O livro [16] e as referências de lá confirmam esses dados e, mais especificamente os artigos [22, 28] trazem aplicação da teoria em contextos esféricos.

Para uma compreensão mais específica sobre a motivação do nosso estudo, considere um conjunto não vazio, digamos X. Este trabalho, fundamenta-se em dois objetos principais, um espaço de funções $\mathcal{H}_X$ como sendo um espaço Hilbert, cujos elementos são funções da forma $f : X \to \mathbb{R}$ e uma função $K : X \times X \to \mathbb{R}$, conhecida mais comumente como núcleo sobre X. A interdependência entre esses dois objetos pode ser descrita como segue.

- Dado um espaço Hilbert de funções $\mathcal{H}_X$, obter o único núcleo K que reproduza, num certo sentido, os elementos de $\mathcal{H}_X$.
- Dado um núcleo K, obter $\mathcal{H}_X$ admitindo K como o núcleo de reprodução dos seus elementos.

O primeiro item acima é conhecidamente uma questão de fácil solução, enquanto que a resolução do segundo é baseada fortemente na completacão algébrica do espaço vetorial real gerado por $\{K(x,\cdot) : x \in X\}$ munido com um produto interno dependendo diretamente de K. O espaço resultante dessa completação é o espaço procurado $\mathcal{H}_X$ ([4, 9, 25]).

Este trabalho é um misto dos itens expostos na página anterior quando X é um subconjunto de $\mathbb{R}^q$ $(q \geq 1)$. Nesta investigação, consideramos como K, a função que na literatura é conhecida como núcleo de Gauss sobre $\mathbb{R}^q$([29]), o mesmo que aparece nos estudos probabilísticos. Dividimos a pesquisa em duas partes quase que independentes. A princípio estudamos todo o aparato teórico envolvendo espaço Hilbert de funções e núcleos de reprodução e, em seguida, utilizamos deste estudo para construir o espaço Hilbert de funções admitindo um núcleo gaussiano. Assim, torna-se imprescindível, em importância teórica e prática a compreensão da estrutura de espaços Hilbert de reprodução gerados por tais núcleos.

A dissertação compõe-se de três capítulos, além desta introdução. O capítulo seguinte é dedicado à abordagem de conceitos preliminares. Portanto, aí estudaremos propriedades das matrizes de Gram, polinômios multivariáveis, espaço Hilbert, teorema da completação para espaço pré-Hilbert, núcleos positivos definidos e núcleos condicionalmente negativos definidos. Nesse capítulo, então, discorremos sobre definições, exemplos e propriedades sobre os assuntos acima elencados.

O terceiro capítulo é composto por 4 seções ao longo das quais estudaremos cuidadosamente espaços Hilbert sobre $J \subset \mathbb{R}$ admitindo como gerador um núcleo gaussiano unidimensional. Ao longo do capítulo são estudados a expansão em série do núcleo, a construção do espaço $\mathcal{H}_J$, se bem que a interligação desse espaço com polinômios reais restritos a J.

O Capítulo 4 lida com a extensão dos resultados do Capítulo 3 ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^q$ – Isto é, estudaremos os espaços Hilbert sobre $E \subset \mathbb{R}^q$ admitindo uma função gaussiana multidimensional como núcleo de reprodução e sua ligação com espaços de polinômios multi-variáveis.

Para finalizar, frisamos que o tema proposto é amplamente discutido e a maioria das propriedades estão acompanhadas de provas, inclusive muitos dos resultados preliminares do próximo capítulo.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

O presente capítulo é dedicado ao estudo dos conceitos preliminares para o desenvolvimento da dissertação. Muitas das propriedades aqui estudadas serão diretamente aplicadas na abordagem do assunto central do trabalho, enquanto outras serão listadas por questão de completude ou porque lançarão luz no entendimento do tema principal do trabalho.

A maioria das provas será exibida integralmente, as outras serão substituídas por uma referência adequada. Entre as referências básicas para os tópicos teóricos que aqui introduzimos, indicamos ([3, 10, 16, 18, 20, 23, 27, 30]).

2.1 Lema de Schur

Recordamos o Lema de Schur e alguns resultados sobre matrizes que estão diretamente envolvidos com esse lema. Faz parte desse estudo o conhecido produto de Hadamard para matrizes. Esse lema é essencial para obter propriedades para núcleos positivos definidos. As referências básicas para esta parte do estudo são [16, 23].

Para tanto, denotamos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado pelas matrizes de ordem m por n com entradas reais. Aproveitamos para formalizar o conceito de matriz simétrica.

Definição 2.1.1 *Seja $A = (A_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Escrevemos A^t para a matriz obtida de A via transposição. Formalmente, $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. A matriz A é simétrica quando $m = n$ e $A = A^t$.*

Introduzimos a seguir a família de matrizes com as quais lidaremos na seção posterior e noutros lugares.

Definição 2.1.2 *Seja A uma matriz de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é semi-positiva definida quando*

$$uAu^t \geq 0, \quad u \in M_{1\times n}(\mathbb{R}).$$

De modo mais explícito, a forma quadrática associada à matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ aparecendo na definição acima se expressa como

$$uAu^t = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_j A_{jk} u_k, \quad u \in M_{1\times n}(\mathbb{R}).$$

Adicionalmente, observamos que

$$uAu^t = u\left(\frac{A+A^t}{2}\right)u^t, \quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), u \in M_{1\times n}(\mathbb{R}).$$

Consequentemente, não há perda de generalidade quando assumimos que a matriz da forma quadrática da definição acima é também simétrica.

O lema abaixo é um resultado técnico da teoria de matrizes mostrando que aquelas que se encaixam na definição precedente decompõem-se num produto de outras duas matrizes.

Lema 2.1.1 *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, a matriz A é semi-positiva definida e simétrica se e somente se $A = QQ^t$, para alguma $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Primeiramente, assuma que $uAu^t \geq 0$, $u \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é simétrica. Então, existem $P, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, sendo D diagonal tais que $A = PDP^t$([23]). Em consequência, as matrizes A e D têm os mesmos autovalores. No entanto, se λ é um autovalor de A associado ao autovetor $v^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, então

$$vAv^t = v\lambda v^t = \lambda\|v\|^2.$$

Agora, se A é semi-positiva definida, então $vAv^t \geq 0$. Como v é não nulo, vemos que λ é não negativo. Denotando os n autovalores distintos de A por $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, segue que $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Portanto, a afirmação do lema ocorre para $Q = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$. Reciprocamente, se $A = QQ^t$, então $uAu^t = (uQ)(uQ)^t = \|uQ\|^2$, $u \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, terminando a prova do lema. ■

Definição 2.1.3 *Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. O produto de Hadamard das matrizes A e B é a matriz $A\circ B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, onde $(A\circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$.*

O resultado a seguir é conhecido como Lema de Schur, objetivo final desta seção.

Lema 2.1.2 *Sejam A e B elementos de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se A e B são semi-positivas definidas, então $A\circ B$ é semi-positiva definida.*

Demonstração: Suponha que A e B sejam matrizes satisfazendo a hipótese do enunciado. Pelo Lema 2.1.1, existem matrizes E e F tais que $A = EE^t$, $B = FF^t$. Logo, para $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$(A\circ B)_{jk} = (EE^t)_{jk}(FF^t)_{jk} = \sum_{\mu=1}^{n} E_{j\mu}E_{k\mu}\sum_{\nu=1}^{n} F_{j\nu}F_{k\nu} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}(E_{j\mu}F_{j\nu})(E_{k\mu}F_{k\nu}) = L_jL_k^t,$$

onde $L_j \in M_{1\times n^2}(\mathbb{R})$ e é definida como

$$L_j := \left[\begin{array}{cccccccccc} E_{j1}F_{j1} & E_{j1}F_{j2} & \cdots & E_{j1}F_{jn} & E_{j2}F_{j1} & \cdots & E_{j2}F_{jn} & \cdots & E_{jn}F_{j1} & E_{jn}F_{j2} & \cdots & E_{jn}F_{jn}\end{array}\right].$$

Segue que $A\circ B = CC^t$, onde $C := \left[\begin{array}{cccc} L_1 & L_2 & \cdots & L_n\end{array}\right]^t \in M_{n\times n^2}(\mathbb{R})$. Portanto,

$$u(A\circ B)u^t = uCC^tu^t = uC(uC)^t = \|uC\|^2,$$

terminando a prova. ■

2.2 Núcleo positivo definido

Aqui estudamos a família de funções centrais para o desenvolvimento da proposta da dissertação, os chamados núcleos positivos definidos. As consultas para esta parte do trabalho foram feitas em [10, 16] e referências indicadas por eles. Iniciamos introduzindo a definição formal dessa classe de núcleos para o contexto real. Usamos a letra X para indicar um conjunto não vazio e, não necessariamente com alguma estrutura algébrica.

Definição 2.2.1 *Um núcleo real sobre X é uma função $K : X\times X \to \mathbb{R}$. Um núcleo K sobre X é positivo definido quando*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i K(x_i,x_j)\lambda_j \geq 0,$$

para quaisquer inteiro positivo n, $x_1,\ldots,x_n \in X$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Para a leitura não se tornar cansativa, daqui por diante dispensaremos a formalidade de sempre dizer que são quaisquer n, $x_1,\ldots,x_n \in X$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, em muitos lugares.

O conceito acima relaciona-se às propriedades da matriz de Gram.

Definição 2.2.2 *Seja $K : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função. As matrizes dependentes de uma quantidade finita de pontos arbitrários em X dada por*

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mapsto [K(x_j, x_k)] \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

é chamada matriz de Gram associada a K.

Recordando a Definição 2.1.2, dizer que K é um núcleo positivo definido sobre X equivale a dizer que a matriz de Gram associada a K é semi-positiva definida.

Vejamos a seguir exemplos de núcleos positivos definidos. Exemplos adicionais são encontrados abundantemente na literatura [4, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 24].

Exemplo 2.2.1 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. A função $K : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(x, y) = f(x)f(y), \quad x, y \in X$$

é um núcleo positivo definido.

O exemplo acima pode ser extendido à soma de uma quantidade finita de parcelas de funções da forma $(x, y) \in X \times X \mapsto f(x)f(y) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.2 *Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço Hilbert e $\Phi : X \to \mathcal{H}$ uma função. O núcleo*

$$K : X \times X \to \mathbb{C}$$

dado por

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_{\mathcal{H}}, \quad x, y \in X,$$

é positivo definido sobre X.

Verificação: Um cálculo direto revela que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i K(x_i, x_j)\lambda_j = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(x_i), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi(x_j) \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(x_i) \right\|^2.$$

Assim, a afirmação do exemplo segue. ■

O exemplo a seguir é um caso particular do exemplo anterior, onde $L^2([-1, 1])$ refere-se ao espaço vetorial real das classes de funções Lebesgue-mensuráveis que são de quadrado-integráveis em relação a medida linear dx.

Exemplo 2.2.3 *Sejam $X=[0,1]$ e uma função $\Phi : X \to L^2([-1,1])$ tal que para cada $x \in X$, $\Phi(x) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é definida como*

$$\Phi(x)(t) = \cos(tx), \quad t \in [-1,1].$$

Segue que

$$K(x,y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(tx)\cos(ty)\,dt, \quad x,y \in X,$$

onde

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} + \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}, & \text{se} \quad x \neq y \\ 1 + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x}, & \text{se} \quad x = y, x \neq 0 \\ 2, & \text{se} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

O Exemplo 2.2.3 se enquadra numa classe de núcleos específicos que dependem de um produto interno sobre um espaço de funções. Essa estrutura facilita a verificação da positividade definida do núcleo, enquanto que checar isso via a Definição 2.2.1 usando a última expressão de K é uma tarefa demasiadamente difícil e, por vezes, impossível.

Algumas propriedades para núcleos positivos definidos estão no próximo resultado, onde as operações de funções que nele aparecem são as usuais.

Teorema 2.2.1 *Seja (K_l) uma sequência de núcleos, onde $K_l : X \times X \to \mathbb{R}$, $l = 1, \ldots$. As seguintes propriedades valem:*

(1) *Se $K_1, \ldots, K_m$ são positivas definidas, então $c_1K_1 + \cdots + c_mK_m$ também o é, sempre que $c_1, \ldots, c_m$ são constantes reais não negativas.*

(2) *Se cada K_l é positivo definido sobre X e (K_l) converge pontualmente para K, então K é um núcleo positivo definido sobre X.*

(3) *Se K_1 e K_2 são positivos definidos sobre X, então K_1K_2 também o é.*

Demonstração: Desde que **(1)** e **(2)** são de verificação imediata, provamos a última afirmação do teorema.

Assuma, então, que K_1 e K_2 são núcleos positivos definidos sobre X. Então, as seguintes matrizes dependentes de uma quantidade arbitrária de pontos

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mapsto (K_\mu(x_i, x_j)) \in \mathbb{R} \quad \mu = 1,2$$

são semi-positiva definidas. Pelo Lema 2.1.2, a matriz

$$(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mapsto (K_1(x_i,x_j)K_2(x_i,x_j)) \in \mathbb{R}$$

é semi-positiva definida, finalizando a prova. ■

O corolário a seguir terá uso decisivo na seção seguinte.

Corolário 2.2.1 *Seja t um escalar real não negativo. Se $K : X \times X \to \mathbb{R}$ é um núcleo positivo definido, então $(x,y) \in X \times X \mapsto e^{tK(x,y)} \in \mathbb{R}$ também o é.*

Demonstração: Suponha que K seja como na hipótese do corolário. Logo,

$$e^{tK(x,y)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} K^{\nu}(x,y) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{t^{\nu}}{\nu!} K^{\nu}(x,y), \quad x,y \in X.$$

Pelo teorema anterior, o núcleo exponencial do corolário é positivo definido sobre X. ■

Exemplo 2.2.4 *O sistema $\{\cos(k\pi x) : k = 0,1,\ldots\}$ é ortonormal relativo ao produto interno usual de $L^2([-1,1])$. Então,*

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k\pi x)\cos(k\pi y), \quad x,y \in [-1,1],$$

é um núcleo positivo definido sobre X.

Verificação: Pelo Exemplo 2.2.1 para cada inteiro positivo k, o núcleo

$$(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \mapsto \frac{1}{k^2} \cos(k\pi x)\cos(k\pi y)$$

é positivo definido. Portanto, pelo Teorema 2.2.1, o núcleo K dado pela soma do exemplo é positivo definido sobre $[-1,1]$. ■

Este é o ponto em que chamamos a atenção para o aspecto de K, mostrando que núcleos positivos definidos podem ser dados por séries. Justamente, exemplos interessantes de núcleos positivos definidos estão entre aqueles expressos desta forma. Esse é o tipo de núcleo que lidaremos no desenvolvimento das partes principais da dissertação. Conforme veremos, núcleos gaussianos sobre $\mathbb{R}^q$ são dados por séries absolutamente convergentes.

2.3 Núcleo condicionalmente negativo definido

Nesta seção, mostramos a interligação estreita entre as famílias de núcleo positivo definido e núcleo condionalmente negativo definido por meio de um resultado devido a Schoenberg.

Definição 2.3.1 *Um núcleo real $\mathcal{N}$ sobre X é condicionalmente negativo definido quando*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mathcal{N}(x_i,x_j)\lambda_j \leq 0,$$

para quaisquer inteiro positivo n, $x_1,\ldots,x_n \in X$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0$.

Um exemplo de núcleo que se encaixa na definição acima é o quadrado da norma induzida por um produto interno. A terminologia pré-Hilbert usada daqui por diante refere-se a um espaço vetorial munido de produto interno.

Exemplo 2.3.1 *Seja $(\mathcal{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbert. A função $\mathcal{N}:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ dada por $\mathcal{N}(x,y) = \|x-y\|^2$, $x,y \in \mathcal{V}$ é um núcleo condicionalmente negativo definido.*

Verificação: Sejam $x_1,\ldots,x_n \in X$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$. Então,

$$\sum_{j,k=1}^{n}\lambda_j\mathcal{N}(x_j,x_k)\lambda_k = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\|x_j\|^2\right) - 2\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_jx_j\|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\|x_k\|^2\right).$$

Agora está claro que se $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0$, então $\mathcal{N}$ é condicionalmente negativo definido. ■

Agora estamos prontos para enunciar e provar o resultado mais importante que descreve a conexão entre as duas famílias de núcleos estudados nas seções anterior e nesta. Trata-se de um teorema de 1938 devido a Schoenberg([26]). Para uma investigação pormenorizada deste teorema contendo desdobramentos teóricos, o leitor é convidado a consultar os livros [7, p. 41] e [8, p. 73].

Teorema 2.3.1 *O núcleo $\mathcal{N}: X\times X \to \mathbb{R}$ é condicionalmente negativo definido se e somente se $(x,y)\in X\times X \mapsto K_t(x,y) = e^{-t\mathcal{N}(x,y)} \in \mathbb{R}$ é um núcleo positivo definido para todo número real não negativo t.*

Demonstração: Fixamos $x_0 \in X$ e consideramos o núcleo $\psi: X\times X\to\mathbb{R}$ definido por

$$\psi(x,y) = -\mathcal{N}(x,y) + \mathcal{N}(x,x_0) + \mathcal{N}(x_0,y) - \mathcal{N}(x_0,x_0), \quad x,y \in X.$$

Sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $x_1,\ldots,x_n \in X$. Definindo $\lambda_0 = -\sum_{j=1}^{n}\lambda_j$, vemos que

$$\sum_{i,j=0}^{n}\lambda_i\mathcal{N}(x_i,x_j)\lambda_j = \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\mathcal{N}(x_i,x_j)\lambda_j + \lambda_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{N}(x_i,x_0) + \lambda_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{N}(x_0,x_i) + \lambda_0^2\mathcal{N}(x_0,x_0).$$

Agora, usando a definição de λ_0, chegamos à igualdade

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i \mathcal{N}(x_i,x_j)\lambda_j = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i \psi(x_i,x_j)\lambda_j.$$

Desse modo, se $\mathcal{N}$ é condicionalmente negativo definido sobre X, então o núcleo ψ é positivo definido sobre X. Como $e^{-t\mathcal{N}(x,y)} = e^{t\psi(x,y)}e^{-t\mathcal{N}(x,x_0)}e^{-t\mathcal{N}(y,x_0)}e^{t\mathcal{N}(x_0,x_0)}$, $x,y \in X$ e $t \geq 0$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i K_t(x_i,y_j)\lambda_j = e^{t\mathcal{N}(x_0,x_0)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_i e^{-t\mathcal{N}(x_i,x_0)}\right)\left(\lambda_j e^{-t\mathcal{N}(x_j,x_0)}\right)e^{t\psi(x_i,x_j)}.$$

Pelo Corolário 2.2.1, o núcleo $(x,y) \in X \times X \mapsto e^{t\psi(x,y)}$ é positivo definido para todo $t \geq 0$.
Para provar a afirmação recíproca, seja $\mathcal{N} : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função tal K_t é um núcleo positivo definido sobre X. Primeiro, notamos que os núcleos

$$(x,y) \in X \times X \mapsto \frac{1-K_t(x,y)}{t} \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

são condicionalmente negativos definidos. Assim, o núcleo

$$\mathcal{N}(x,y) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1-e^{-t\mathcal{N}(x,y)}}{t}, \quad x,y \in X$$

é condicionalmente negativo definido. ■

2.4 Polinômios multivariáveis

Nesta seção, descrevemos propriedades básicas dos espaços de polinômios em várias variáveis reais, uma vez que as usaremos na parte final do trabalho.

Para um inteiro positivo q, escrevemos $\mathbb{R}^q$ para o espaço vetorial usual constituído das q-uplas de números reais $x = (x_1,\ldots,x_q)$. No caso $q = 1$, denotamos $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ e o chamamos de corpo dos números reais em relação às operações usuais. O produto interno usual de $\mathbb{R}^q$ será escrito como

$$\langle x,y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_qy_q, \quad x,y \in \mathbb{R}^q,$$

enquanto que a norma induzida por este produto interno sobre $\mathbb{R}^q$ será denotada por $\|\cdot\|$. Os q

vetores canônicos de $\mathbb{R}^q$ serão representados como

$$e_i := (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0), \quad i = 1,\ldots,q.$$

Quando lidamos com funções multivariáveis, a notação multi-índices facilita a descrição de fórmulas envolvendo-os. O termo *multi-índice* refere-se a uma q-upla de inteiros não negativos da forma

$$\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_q) \in \mathbb{Z}_+^q.$$

Aproveitando o contexto, a *norma do multi-índice* α é

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_q$$

e o *fatorial* de α é

$$\alpha! := \alpha_1!\ldots\alpha_q!.$$

Os *monômios* com coordenadas reais são denotados e definidos como

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1}\ldots x_q^{\alpha_q}, \quad x \in \mathbb{R}^q.$$

Uma aplicação das notações acima está no lema a seguir.

Lema 2.4.1 *Se $x,y \in \mathbb{R}^q$, então*

$$\langle x,y\rangle^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Demonstração: Inicialmente, mostremos por indução sobre q que

$$\left(\sum_{j=1}^{q} x_j\right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{2.1}$$

Para isso, fixe um inteiro não negativo m. Claramente (2.1) vale para $q = 1$. Suponhamos, então, que para algum $q > 1$,

$$\left(\sum_{j=1}^{q-1} x_j\right)^\mu = \sum_{|\widehat{\alpha}|=\mu} \frac{\mu!}{\widehat{\alpha}!} \widehat{x}^{\widehat{\alpha}}, \quad \mu = 0,1,\ldots,$$

onde $\widehat{x} := (x_1, \ldots, x_{q-1})$ e $\widehat{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1})$. Segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{q} x_j\right)^m = \left(\sum_{j=1}^{q-1} x_j + x_q\right)^m = \sum_{\mu=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ \mu \end{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{q-1} x_j\right)^{\mu} x_q^{m-\mu}.$$

A hipótese indutiva revela que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{q} x_j\right)^m &= \sum_{\mu=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ \mu \end{pmatrix} \sum_{|\widehat{\alpha}|=\mu} \frac{\mu!}{\widehat{\alpha}!} \widehat{x}^{\widehat{\alpha}} x_q^{m-\mu} \\
&= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{|\widehat{\alpha}|=\mu} \frac{m!}{\mu!\,(m-\mu)!} \frac{\mu!}{\widehat{\alpha}!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{q-1}^{\alpha_{q-1}} x_q^{m-\mu} \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^{\alpha},
\end{aligned}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, m-\mu)$. Usando a fórmula acima, obtemos

$$\langle x, y\rangle^m = \left(\sum_{j=1}^{q} x_j y_j\right)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (x_1 y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_q y_q)^{\alpha_q} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^{\alpha} y^{\alpha},$$

completando a prova do lema. ■

Especificamente, usando $y = (1, \ldots, 1)$ no lema anterior, obtemos

$$(x_1 + \cdots + x_q)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^q,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^q$$

que é um elemento genuíno de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^q)$, o *espaço vetorial dos polinômios* na variável x de $\mathbb{R}^q$. Qualquer elemento deste espaço pode ser representado na forma

$$p(x) := \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha x^{\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^q, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^q,$$

onde n é um inteiro não negativo. A quantidade de monômios distintos x^{α} é dada por([21, p. 66])

$$N(\alpha, q) = \begin{pmatrix} |\alpha| + q - 1 \\ q - 1 \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = 0, 1, \ldots.$$

2.5 A medida da esfera unitária de $\mathbb{R}^q$

Nesta seção, estudamos algumas aproximações assintóticas envolvendo a medida usual de esferas reais $(q-1)$-dimensionais quando $q > 1$.

Nas notações da seção anterior e recordando a estrutura euclidiana do espaço $\mathbb{R}^q$ com seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, a *esfera unitária* de dimensão $q-1$ em $\mathbb{R}^q$ é simplesmente

$$S^{q-1} := \{x \in \mathbb{R}^q : \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Denotamos por ν_q a única medida positiva de Borel sobre S^{q-1} normalizada por

$$\nu_q(S^{q-1}) = \int_{S^{q-1}} d\nu_q(x) = \frac{2(\sqrt{\pi})^q}{\Gamma(q/2)},$$

onde Γ denota a *função gama* definida pela integral([1], p. 255)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \tag{2.2}$$

Em particular, notamos que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Aproveitamos a definição de Γ para recordar a *fórmula de duplicação de Legendre* para Γ como sendo([10, p. 291])

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad x > 0. \tag{2.3}$$

O lema a seguir é o ingrediente fundamental no estudo de comportamento assintótico de sequências envolvendo o conceito de fatorial de um número inteiro positivo.

Lema 2.5.1 (Lema de Batir) *Se $n \in \mathbb{Z}_+$, então*

$$\frac{n^{n+1}\sqrt{2\pi}}{e^n\sqrt{n-s}} \le n! \le \frac{n^{n+1}\sqrt{2\pi}}{e^n\sqrt{n-t}},$$

onde as constantes $s = 1 - 2\pi e^{-2}$ e $t = 1/6$ são as melhores possíveis.

Demonstração: É encontrada em [5]. ■

A versão do lema anterior para números reais é conhecida na literatura como *fórmula de Stirling*, fornecendo o comportamento assintótico de Γ quando seu argumento é suficientemente grande.

Lema 2.5.2 (Fórmula de Stirling) *A contra parte do Lema de Batir quando x é um escalar real positivo é dada pelo limite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}} = 1.$$

Demonstração: Consulte [3, p. 18]. ■

Finalizamos a seção com um lema técnico, envolvendo uma estimativa inferior e superior para o quociente entre funções gama aplicadas a argumentos cujas dimensões diferem por uma unidade.

Lema 2.5.3 *Se $\mathfrak{c} \in (0,1)$, então existe um número real positivo x_0 tal que*

$$\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{2x-1}{2e}}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{(2x-1)/2} \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{2x-1}{2}\right)} \leq \frac{1+\mathfrak{c}}{1-\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{2x-1}{2e}}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{(2x-1)/2},$$

para todo $x \geq x_0$.

Demonstração: Assuma que $\mathfrak{c} \in (0,1)$. Pelo lema anterior, existe um número real positivo u_0 tal que

$$(1-\mathfrak{c})\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x \leq \Gamma(x) \leq (1+\mathfrak{c})\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad x \geq u_0.$$

Em consequência, se $x \geq \text{máx}\{u_0, 1/2\}$, então

$$(1-\mathfrak{c})\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{2}}}\left(\frac{2x-1}{2e}\right)^{\frac{2x-1}{2}} \leq \Gamma\left(\frac{2x-1}{2}\right) \leq (1+\mathfrak{c})\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x-1}{2}}}\left(\frac{2x-1}{2e}\right)^{\frac{2x-1}{2}}.$$

Combinando as duas estimativas acima, seguida de manipulação algébrica, obtemos

$$\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x}}\left(\frac{2e}{2x-1}\right)^{(2x-1)/2}\left(\frac{x}{e}\right)^x \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{2x-1}{2}\right)} \leq \frac{1+\mathfrak{c}}{1-\mathfrak{c}}\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x}}\left(\frac{2e}{2x-1}\right)^{(2x-1)/2}\left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

implicando nas desigualdades da afirmação do lema. ■

Pelo Lema 2.5.3, para $\mathfrak{c} \in (0,1)$, existe um inteiro $q_0 \geq 2$ tal que

$$\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{q-1}{2e}}\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{q-1}{2}} \leq \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)} \leq \frac{1+\mathfrak{c}}{1-\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{q-1}{2e}}\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{q-1}{2}}, \quad q \geq q_0.$$

Como

$$\sqrt{2} \leq \left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{\frac{q-1}{2}} \leq \sqrt{e}, \quad q = 2,3,\cdots,$$

$$\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{q-1}{e}} \leq \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)} \leq \frac{1+\mathfrak{c}}{1-\mathfrak{c}}\sqrt{\frac{q-1}{2}}, \quad q \geq q_0.$$

2.6 Teorema da completação para pré-Hilbert

Nesta seção, apresentamos resultados que garantem a completação de espaços normados e mais geralmente, de espaços pré-Hilbert. Em caso de necessidade, as referências [10, 18, 23, 27] trazem uma exposição completa desse assunto.

Denotamos por $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, cujas normas são indicadas, respectivamente, por $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$. Recordamos que um espaço vetorial normado $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ é um espaço de Banach quando suas sequências de Cauchy são convergentes para pontos de $\mathcal{V}$.

A seguir estão elencadas alternativas equivalentes ao conceito de continuidade de operadores lineares entre espaços vetoriais normados. Antes, porém, para cada operador linear

$$T : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}}) \to (\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$$

definimos o número não negativo

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| \,:\, \|x\| \leq 1\}.$$

Em consequência, a desigualdade $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, $x \in \mathcal{V}$ vale. Quando $\|T\|$ for menor que um escalar real, dizemos que T é um *operador limitado*. A proposição a seguir revela que a noção de continuidade no contexto de Análise Funcional difere do conceito mais geral de função contínua da topologia. Isto ocorre devido a estrura algébrica linear decorrendo em nosso favor.

Proposição 2.6.1 *Seja* $T : (\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}}) \to (\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ *um operador linear. São equivalentes:*
(1) T *é limitado.*
(2) *Existe um escalar real* c *tal que* $\|T(x)\| \leq c\|x\|$, $x \in \mathcal{V}$.
(3) T *é uniformemente contínuo.*
(4) T *é contínuo.*
(5) T *é contínuo em* $0 \in \mathcal{V}$.

Demonstração: Assuma que T é limitado, digamos por uma constante real c. Segue que $\|T(x)\| \leq c\|x\|$, $x \in \mathcal{V}$. Assim, a implicação de **(1)** para **(2)** vale.

Dando sequência, suponha que a desigualdade em **(2)** vale e seja $\varepsilon > 0$. Então,

$$\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon,$$

sempre que $\|x-y\| < \varepsilon/c$. Portanto, o operador linear T é uniformemente contínuo.
Como as implicações de **(3)** para **(4)** e de **(4)** para **(5)** são diretas, suponha que o operador T é não limitado. Então, podemos construir uma sequência $(x_n) \subset V$ de elementos de normas menores que 1 tal que $\|T(x_n)\| \geq n$, $n = 1, 2, \ldots$. Então,

$$\frac{\|x_n\|}{\|T(x_n)\|} \leq \frac{1}{\|T(x_n)\|} \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Desse modo, a sequência $(x_n/\|T(x_n)\|)$ converge a 0, mas

$$\left\| T\left(\frac{x_n}{\|T(x_n)\|} \right) \right\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

mostrando que T não é contínuo em $0 \in \mathcal{V}$. Portanto, as afirmações do teorema são equivalentes. ■

As equivalências acima levam-nos a considerar o espaço vetorial normado $B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, formado pelos operadores lineares limitados de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{W}$. Quando $\mathcal{W}$ for um espaço de Banach, $(B(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \|\cdot\|)$ também o será ([20], p.154).

Proposição 2.6.2 *Seja $\mathcal{M}$ um subespaço denso em $\mathcal{V}$. Se $T \in B(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ e $\mathcal{W}$ é completo, a menos de isomorfismo existe um único $\overline{T} \in B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ tal que*

$$\overline{T}(x) = T(x), x \in \mathcal{M} \quad e \quad \|\overline{T}\| = \|T\|.$$

Demonstração: Fixe $x \in \mathcal{V}$ e use a densidade de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{V}$ para exibir uma sequência $(x_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Desse modo,

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| \leq \|T\| \|x_m - x_n\|, \quad T \in B(\mathcal{M}, \mathcal{W}).$$

Sendo $(T(x_n))$ uma sequência de Cauchy no espaço completo $\mathcal{W}$, existe um único limite $\overline{T}(x) \in \mathcal{W}$ satisfazendo

$$\overline{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Como $\overline{T}(x)$ depende apenas de x, e não da sequência (x_n) escolhida, o limite $\overline{T}(x)$ está bem definido. Além disso, claramente $\overline{T}$ é linear e $\overline{T}(x) = T(x)$, $x \in \mathcal{M}$. Em adição, usando a continuidade uniforme da norma

$$\|\overline{T}(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} T(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T\|\|x\|, \quad x \in \mathcal{V},$$

mostrando que $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. Para a desigualdade oposta, notamos que

$$\|T\| = \sup\left\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathcal{M}\right\} \leq \sup\left\{\|\overline{T}(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathcal{V}\right\} = \|\overline{T}\|.$$

Assim, a prova está concluída. ■

Agora estamos prontos para enunciar e provar o teorema que trata da completação de espaços vetoriais normados.

Teorema 2.6.1 *Seja* $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ *um espaço vetorial normado. Então, existem um espaço vetorial normado* $(\mathcal{W}_{sc_\sim}, \|\cdot\|_{sc_\sim})$ *e um subespaço* $\mathcal{V}_0$ *de* $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ *satisfazendo:*
(1) *O espaço* $\mathcal{V}$ *é isometricamente isomorfo a* $\mathcal{V}_0$*.*
(2) *O espaço* $\mathcal{V}_0$ *é denso em* $(\mathcal{W}_{sc_\sim}, \|\cdot\|_{sc_\sim})$*.*
(3) *O espaço* $(\mathcal{W}_{sc_\sim}, \|\cdot\|_{sc_\sim})$ *é completo.*
(4) *O espaço* $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ *é único a menos de isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Primeiramente considere $\mathcal{W}_{sc}$ como sendo o conjunto das sequências (x_n) que são de Cauchy em $\mathcal{V}$. O conjunto $\mathcal{W}_{sc}$ é obviamente um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ relativa às operações usuais para sequências. Para cada (x_n) de $\mathcal{W}_{sc}$,

$$|\|x_m\|_{\mathcal{V}} - \|x_n\|_{\mathcal{V}}| \leq \|x_m - x_n\|_{\mathcal{V}}, \quad m, n = 1, \ldots,$$

revelando que $(\|(x_n)\|_{\mathcal{V}})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Defina, então, a aplicação

$$(x_n) \in \mathcal{W}_{sc} \longmapsto \|(x_n)\|_{sc} \in \mathbb{R},$$

onde

$$\|(x_n)\|_{sc} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathcal{V}}. \tag{2.4}$$

O único impedimento para que $\|\cdot\|_{sc}$ seja norma sobre o espaço vetorial $\mathcal{W}_{sc}$ reside no fato que $\|(x_n)\|_{sc} = 0$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathcal{V}} = 0$, visto que esse limite pode ser nulo sem que (x_n) o seja. Levantamos essa inconsistência definindo uma relação de equivalência " $\sim$ " entre os elementos de $\mathcal{W}_{sc}$. Para isso, sejam $(x_n),(y_n) \in \mathcal{W}_{sc}$. Diremos que

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_{\mathcal{V}} = 0.$$

Considere $\mathcal{W}_{sc_\sim} = \{[(x_n)] : (x_n) \in \mathcal{W}_{sc}\}$, o conjunto das classes segundo a relação "$\sim$". Então, esse conjunto munido das operações usuais de soma de classes e produto de classe por escalar torna $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Consequentemente, a aplicação não negativa

$$[(x_n)] \in \mathcal{W}_{sc_\sim} \longmapsto \|[(x_n)]\|_{sc_\sim} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathcal{V}} \tag{2.5}$$

agora é uma norma em $\mathcal{W}_{sc_\sim}$, uma vez $[(x_n)]$ tais que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathcal{V}} = 0$, identifica-se com o elemento nulo $[(0)] \in \mathcal{W}_{sc_\sim}$. Seguindo, notamos que $\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}_0 := \{[(x)] \in \mathcal{W}_{sc_\sim} : x \in \mathcal{V}\}$ dada por

$$\varphi(x) = [(x)], \quad x \in \mathcal{V},$$

é uma transformação linear sobrejetora. Como a injetividade e a limitação são consequências das igualdades

$$\|\varphi(x)\|_{sc_\sim} = \|[(x)]\|_{sc_\sim} = \lim_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{V}} = \|x\|_{\mathcal{V}}, \quad x \in \mathcal{V},$$

o item **(1)** do teorema está provado.

Seguindo, fixe $[(x_n)] \in \mathcal{W}_{sc_\sim}$. Como (x_n) é sequência de Cauchy em $\mathcal{V}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{V}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Então, a classe $[(x_{n_\varepsilon})]$ é um elemento de $\mathcal{V}_0$ e

$$\|[(x_n)] - [(x_{n_\varepsilon})]\|_{sc_\sim} = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon,$$

mostrando que a bola de $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ centrada em $[(x_n)]$ e raio ε tem interseção não vazia com $\mathcal{V}_0$. Portanto, $\overline{\mathcal{V}_0} = \mathcal{W}_{sc_\sim}$, provando **(2)**.

Para provar a completitude de $(\mathcal{W}_{sc_\sim}, \|\cdot\|_{sc_\sim})$ afirmada em **(3)**, seja $([x]_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}_{sc_\sim}$, onde $[x]_n = [(x_{n1}, x_{n2}, \ldots)]$, $n \in \mathbb{N}$. Pela densidade de $\mathcal{V}_0$ em $\mathcal{W}_{sc_\sim}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $[(y_n, y_n, \ldots)] \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$\|[x]_n - [(y_n, y_n, \ldots)]\|_{sc_\sim} = \|[(x_{nj})] - [(y_n, y_n, \ldots)]\|_{sc_\sim} < \frac{1}{n}.$$

Considere $[(y_m)] \in \mathcal{W}_{sc_\sim}$, onde a sequência $(y_m) \in \mathcal{W}_{sc}$ foi construída pelo processo acima - Ou seja,

$$(y_m) = (y_1, y_2, \ldots).$$

Mostremos que $([x]_n)$ converge para $[(y_m)]$. De fato, a última desigualdade implica que

$$\begin{aligned}
\|[x]_n - [(y_m)]\|_{sc\sim} &\leq \|[x]_n - [(y_n, y_n, \ldots)]\|_{sc\sim} + \|[(y_n, y_n, \ldots)] - [(y_m)]\|_{sc\sim} \\
&< \frac{1}{n} + \|[(y_n, y_n, \ldots)] - [(y_m)]\|_{sc\sim}, \quad n = 1, \ldots.
\end{aligned}$$

Usando a definição da norma quociente dada em (2.5), vemos que

$$\|[x]_n - [(y_m)]\|_{sc\sim} < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \|y_n - y_m\|_{\mathcal{V}}, \quad n = 1, \ldots.$$

Para estimar $\|y_n - y_m\|_{\mathcal{V}}$, assuma momentaneamente que m está fixado. Usando (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|_{\mathcal{V}} &= \lim_{n\to\infty} \|y_n - y_m\|_{\mathcal{V}} \\
&= \|[(y_n, y_n, \ldots)] - [(y_m, y_m, \ldots)]\|_{sc\sim} \\
&\leq \|[x]_n - [(y_n, y_n, \ldots)]\|_{sc\sim} + \|[x]_m - [(y_m, y_m, \ldots)]\|_{sc\sim} + \|[x]_m - [x]_n\|_{sc\sim} \\
&< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|[x]_m - [x]_n\|_{sc\sim}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|[x]_n - [(y_m)]\|_{sc\sim} \leq \frac{2}{n} + \lim_{m\to\infty} \|[x]_m - [x]_n\|_{sc\sim}.$$

Finalmente, usando o fato que $([x]_n)$ é sequência de Cauchy em $\mathcal{W}_{sc\sim}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|[x]_n - [(y_m)]\|_{sc\sim} = 0,$$

concluindo a prova de **(3)**.

Para provar o último item, assuma que existe outro espaço vetorial normado $(\mathcal{W}_{sc_c}, \|\cdot\|_{sc_c})$, para o qual $\mathcal{V}$ é isometricamente isomorfo à $\mathcal{W}_{sc_0}$, subespaço denso de $\mathcal{W}_{sc_c}$. Sejam, então, $\varphi \in B(\mathcal{V}, \mathcal{V}_0)$ e $\psi \in B(\mathcal{V}, \mathcal{W}_{sc_0})$ isomorfismos isométricos. Logo $\psi \circ \varphi^{-1} \in B(\mathcal{V}_0, \mathcal{W}_{sc_0})$ e $\varphi \circ \psi^{-1} \in B(\mathcal{W}_{sc_0}, \mathcal{V}_0)$ são isomorfismos isométricos tais que

$$(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) = I_{\mathcal{W}_{sc_0}} \quad \text{e} \quad (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) = I_{\mathcal{V}_0}.$$

Como $\overline{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{W}_{sc\sim}$ e $\overline{\mathcal{W}}_{sc_0} = \mathcal{W}_{sc_c}$, pela Proposição 2.6.2, existem isomorfismos $\overline{(\psi \circ \varphi^{-1})} \in$

$B(\mathcal{W}_{sc_\sim}, \mathcal{W}_{sc_c})$ e $\overline{(\varphi\circ\psi^{-1})} \in B(\mathcal{W}_{sc_c}, \mathcal{W}_{sc_\sim})$ que são extensões de $\psi\circ\varphi^{-1}$ e $\varphi\circ\psi^{-1}$, respectivamente. Em consequência,

$$\overline{(\psi\circ\varphi^{-1})}\circ\overline{(\varphi\circ\psi^{-1})} = I_{\mathcal{W}_{sc_c}} \quad \text{e} \quad \overline{(\varphi\circ\psi^{-1})}\circ\overline{(\psi\circ\varphi^{-1})} = I_{\mathcal{W}_{sc_\sim}}.$$

Portanto, os espaços $\mathcal{W}_{sc_c}$ e $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ são isometricamente isomorfos. ■

Como todo espaço pré-Hilbert é um espaço normado, o teorema precedente pode ser aplicado a estes. Antes porém, listamos observações sobre o teorema anterior e sua prova. A aplicação φ é *isomorfismo isométrico* devido sua injetividade - Ou seja, o espaço vetorial $\mathcal{V}$ é isometricamente isomorfo a $\varphi(\mathcal{V})$, subespaço denso em $\mathcal{W}_{sc_\sim}$ na topologia da norma.

Fechamos a seção citando e provando o resultado fundamental para o restante deste trabalho.

Teorema 2.6.2 *Seja $(\mathcal{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}})$ um espaço pré-Hilbert. Então, existe um espaço Hilbert denotado por $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ satisfazendo:*
(1) *Existe um mergulho isométrico $\mathcal{J} : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ que preserva produto interno.*
(2) *A imagem $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ é densa em $\mathcal{H}$.*
(3) *O espaço $\mathcal{H}$ é único a menos de isomorfismo isométrico.*

Demonstração: Uma vez que $\mathcal{V}$ é um espaço normado, o teorema anterior garante a existência de um espaço de Banach $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ e um mergulho isométrico $I : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ tal que a imagem $I(\mathcal{V})$ é densa em $\mathcal{H}$, onde $I(x) = [(x,x,\ldots)]$, $x \in X$. Para definir um produto interno em $\mathcal{H}$ compatível a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, consideremos a série

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_{\mathcal{V}},$$

onde (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em $\mathcal{V}$. Segue que $(\|x_n\|_{\mathcal{V}})$ e $(\|y_n\|_{\mathcal{V}})$ são convergentes e limitadas, implicando que existe uma contante C tal que para m e n suficientemente grandes

$$|\langle x_m, y_m\rangle_{\mathcal{V}} - \langle x_n, y_n\rangle_{\mathcal{V}}| = |\langle x_m, y_m - y_n\rangle_{\mathcal{V}} - \langle x_n - x_m, y_n\rangle_{\mathcal{V}}| \leq C(\|y_m - y_n\|_{\mathcal{V}} + \|x_n - x_m\|_{\mathcal{V}}).$$

Desse modo, a sequência $(\langle x_n, y_n\rangle_{\mathcal{V}})$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, mostrando que o limite anterior é convergente. Dando continuidade, recordamos que os elementos de $\mathcal{H}$ são classes de equivalências segundo a relação $'\sim'$. Sejam, então, (x_n), (y_n), (u_n) e (v_n) sequências de Cauchy em $\mathcal{V}$ tais que $(u_n) \sim (x_n)$ e $(v_n) \sim (y_n)$. Logo,

$$|\langle x_n, y_n\rangle_{\mathcal{V}} - \langle u_n, v_n\rangle_{\mathcal{V}}| = |\langle x_n, y_n - v_n\rangle_{\mathcal{V}} - \langle x_n - u_n, v_n\rangle_{\mathcal{V}}| \leq \|x_n\|_{\mathcal{V}}\|y_n - v_n\|_{\mathcal{V}} + \|x_n - u_n\|_{\mathcal{V}}\|v_n\|_{\mathcal{V}},$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle_{\mathcal{V}} = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n \rangle_{\mathcal{V}}.$$

Consequentemente, definimos sem ambiguidade, a forma convergente

$$\langle [(x_n)], [(y_n)] \rangle_{\mathcal{H}} := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle_{\mathcal{V}}, \quad [(x_n)], [(y_n)] \in \mathcal{H}$$

que, sem dificuldade, verifica-se ser um produto interno sobre $\mathcal{H}$. Em adição,

$$\langle [(x)], [(y)] \rangle_{\mathcal{H}} = \langle I(x), I(y) \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \langle I(x)_n, I(y)_n \rangle_{\mathcal{V}} = \lim_{n\to\infty} \langle x, y \rangle_{\mathcal{V}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{V}}, \quad x, y \in \mathcal{V}.$$

Portanto, as propriedades **(1)** e **(2)** estão provadas.
Como a unicidade de $\mathcal{H}$ também é consequência do Teorema 2.6.1, o item **(3)** também está provado, finalizando a prova do teorema. ■

2.7 Espaço Hilbert de funções

Nesta seção, estudamos espaço Hilbert de funções, conceito fundamental para este trabalho. Adicionalmente, provamos a equação de reprodução para estes tipos de espaço. Boas referências para este assunto são [4, 15, 16] entre outras.

Definição 2.7.1 *Um espaço Hilbert de funções sobre X é um espaço Hilbert $(\mathcal{H}_X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ constituído por funções $f : X \to \mathbb{R}$, onde para cada $x \in X$, existe uma constante c_x tal que*

$$|f(x)| \leq c_x \|f\|, \quad f \in \mathcal{H}_X.$$

A definição acima significa que se $f, g \in \mathcal{H}_X$ e $\|f - g\|$ é pequena, então $|f(x) - g(x)|$ é pequeno para todo $x \in X$. Naturalmente, o inverso dessa propriedade não ocorre, necessariamente.

O exemplo a seguir mostra que os espaços $L^2(X)$ não são exemplos de $\mathcal{H}_X$.

Exemplo 2.7.1 *O espaço Hilbert usual $L^2([a,b])$ não é um espaço Hilbert de funções sobre o intervalo $[a,b]$. De fato, seja $k \in [a,b]$ e considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} c, & se\; x = k \\ f(x), & se\; x \neq k, \end{cases}$$

onde $f \in L^2([a,b])$ é uma função não definida apenas em k. Uma vez que f e g só diferem em *um ponto, a função g é L^2-integrável e $\|f-g\|_2 = 0$. No entanto, podemos arbitrar valores para c impedindo que g satisfaça a Definição 2.7.1.*

O teorema a seguir é conhecido na literatura por Propriedade de Reprodução ([4],[16]). Aqui usamos o termo Equação de Reprodução.

Na seções 3.2 e 4.2 serão construídos exemplos de espaços Hilbert de funções para determinados X.

Teorema 2.7.1 (Equação de Reprodução) *Se $x \in X$, então existe uma única função $K_x \in \mathcal{H}_X$ satisfazendo*

$$f(x) = \langle f, K_x \rangle, \quad f \in \mathcal{H}_X.$$

Demonstração: Fixemos x em X e defina $\delta_x : \mathcal{H}_X \to \mathbb{R}$ como sendo o funcional linear pontual

$$\delta_x(f) := f(x), \quad f \in \mathcal{H}_X.$$

A definição de $\mathcal{H}_X$ revela que δ_x é contínuo. Caso δ_x seja identicamente nulo, a igualdade do teorema ocorre para $K_x = 0$. Assuma, então, que δ_x seja não nulo. Logo, o núcleo

$$\mathrm{Ker}(\delta_x) = \{f \in \mathcal{H}_X : \delta_x(f) = 0\}$$

é um subespaço fechado e próprio de $\mathcal{H}_X$. Segue que o complemento ortogonal $\mathrm{Ker}(\delta_x)^{\perp}$ é não trivial e podemos escolher f_0 não nulo em $\mathrm{Ker}(\delta_x)^{\perp}$ de norma unitária. Consequentemente, $ff_0(x) - f(x)f_0 \in \mathrm{Ker}(\delta_x)$, $f \in \mathcal{H}_X$ e $0 = \langle ff_0(x) - f(x)f_0, f_0 \rangle = f_0(x)\langle f, f_0 \rangle - f(x)$, $f \in \mathcal{H}_X$. Equivalentemente,

$$f(x) = \langle f, f_0(x) f_0 \rangle, \quad f \in \mathcal{H}_X.$$

Assim, a igualdade do teorema ocorre escolhendo $K_x = f_0(x) f_0 \in \mathcal{H}_X$. Como a unicidade de K_x é de verificação imediata, a correspondência $x \in X \mapsto K_x \in \mathcal{H}_X$ é, de fato, uma função que satisfaz a igualdade preconizada na afirmação do teorema. ■

2.8 Núcleo de reprodução

Estudamos aqui propriedades adicionais com respeito a K_x mencionada na seção anterior. A partir desta função definimos um núcleo com propriedade reprodutiva das funções de um espaço Hilbert de funções. Aproveitamos o contexto para mostrar que tal núcleo é positivo definido.

O último teorema da seção anterior motiva a definição da função $K : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$K(x,y) := K_x(y),\, x,y \in X,$$

onde a notação K_x enfatiza que a variável x está fixada. A terminologia *núcleo de reprodução* é frequentemente usada para K no sentido do Teorema 2.7.1.

A seguir está um exemplo interessante de espaço Hilbert de funções. O espaço vetorial complexo $\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$ é constituído pelos *polinômios trigonométricos* gerado pelo conjunto ortonormal $\{e^{ikx} : k = -n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ em relação ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f,g \in \mathcal{P}t_n([-\pi,\pi]).$$

Desse modo, um elemento $f \in \mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$ é da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx, \quad x \in [-\pi,\pi],\, a_k, b_k \in \mathbb{C}, \tag{2.6}$$

onde os coeficientes dessa soma são dados pelas expressões

$$a_0 = 2\langle f,1\rangle_t, \quad a_k = \frac{\langle f,\cos_k\rangle_t}{\langle \cos_k,\cos_k\rangle_t}, \quad b_k = \frac{\langle f,\operatorname{sen}_k\rangle_t}{\langle \operatorname{sen}_k,\operatorname{sen}_k\rangle_t}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Exemplo 2.8.1 (Núcleo de Dirichlet) *O espaço* $(\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi]), \langle\cdot,\cdot\rangle_t)$ *admite o núcleo de reprodução*

$$\mathcal{D}(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})(x-y)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-y)}, \quad x,y \in [-\pi,\pi].$$

Em adição, o espaço $\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$ *é espaço Hilbert de funções sobre* $[-\pi,\pi]$

Verificação: Fixemos $y \in [-\pi,\pi]$ e suponha que $\mathcal{D}$ seja o núcleo de reprodução que estamos buscando para $\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$. Como a função $x \in [-\pi,\pi] \mapsto \mathcal{D}_y(x) = \mathcal{D}(x,y)$ é um elemento de $\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$,

$$\mathcal{D}_y(x) = \langle \mathcal{D}_y, 1\rangle_t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \mathcal{D}_y,\cos_k\rangle_t}{\langle \cos_k,\cos_k\rangle_t}\cos kx + \frac{\langle \mathcal{D}_y,\operatorname{sen}_k\rangle_t}{\langle \operatorname{sen}_k,\operatorname{sen}_k\rangle_t}\operatorname{sen} kx, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

A hipótese sobre $\mathcal{D}$ juntamente com as igualdades $\langle \cos_k,\cos_k\rangle_t = \langle \operatorname{sen}_k,\operatorname{sen}_k\rangle_t = 2^{-1}$, revelam que

$$\mathcal{D}_y(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ky \cos kx + \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kx = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k(y-x),\, x \in [-\pi,\pi].$$

Como $2\cos k(y-x) = e^{ik(y-x)} + e^{-ik(y-x)}$, $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\mathcal{D}_y(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(y-x)} = e^{-in(y-x)}\,\frac{1-e^{i(2n+1)(y-x)}}{1-e^{i(y-x)}} = \frac{e^{i(x-y)(n+\frac{1}{2})} - e^{-i(x-y)(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{1}{2}(x-y)} - e^{-\frac{1}{2}(x-y)}}.$$

O quociente dos números complexos da última igualdade acima equivalem à expressão de $\mathcal{D}$ como no exemplo. Para terminar a averiguação do exemplo, resta mostrar que $\mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$ é um espaço Hilbert de funções sobre $[-\pi,\pi]$. De fato, fixemos $f \in \mathcal{P}t_n([-\pi,\pi])$ e usamos desigualdade de Cauchy-Schwarz para ver que

$$|f(x)|^2 = |\langle f, \mathcal{D}_x\rangle_t|^2 \leq \langle f, f\rangle_t \langle \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_x\rangle_t, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Pela Definição 2.7.1, a verificação está terminada. ■

Neste momento, chamamos a atenção do leitor para um fato desejável e de fácil demonstração tratando sobre a unicidade do núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_X$.

Teorema 2.8.1 *O núcleo de reprodução associado a $\mathcal{H}_X$ é unicamente determinado.*

Demonstração: Assuma que $\mathcal{H}_X$ admita $K : X \times X \to \mathbb{R}$ e $F : X \times X \to \mathbb{R}$ como núcleos de reprodução. Então,

$$\|K_x - F_x\|^2 \;=\; \langle K_x - F_x, K_x\rangle - \langle K_x - F_x, F_x\rangle, \quad x \in X.$$

Devido a equação de reprodução de K e F, a norma $\|K_x - F_x\|$ é nula para cada $x \in X$, mostrando que $K = F$. ■

Devido a unicidade acima, a notação $\mathcal{H}_X$ será, de agora em diante, substituída por $\mathcal{H}_X(K)$, significando que este é um *espaço Hilbert de reprodução de funções* sobre X (EHR_X) admitindo K como núcleo de reprodução. A referência [2] constroe espaços $\mathcal{H}_X$ que não são $\mathcal{H}_X(K)$.

Elencamos abaixo propriedades elementares, porém muito úteis, de um núcleo positivo definido.

Teorema 2.8.2 *As seguintes propriedades são válidas para o núcleo K associado a $\mathcal{H}_X(K)$:*
(1) $K(x,y) = \langle K_x, K_y\rangle$, $x,y \in X$.
(2) $K(x,y) = K(y,x)$, $x,y \in X$.
(3) $K(x,x) \geq 0$, $x \in X$.
(4) $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$, $x,y \in X$.
(5) *Se* $K(x_0,x_0) = 0$, *para algum* $x_0 \in X$, *então* $\operatorname{Ker}\delta_{x_0} = \mathcal{H}_X(K)$.

Demonstração: O primeiro item é consequência do Teorema 2.7.1 e da definição de K, enquanto que **(2)** vem de **(1)** e da simetria do produto interno de $\mathcal{H}_X(K)$.
A afirmação em **(3)** vale devido ao primeiro item e à definição de produto interno.
Para provar **(4)**, usamos **(1)** e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtendo

$$|K(x,y)|^2 = |\langle K_x, K_y\rangle|^2 \leq \langle K_x, K_x\rangle\langle K_y, K_y\rangle = K(x,x)K(y,y), \quad x,y \in X,$$

que é a desigualdade do enunciado.
Para a prova do último item, suponha que $K(x_0,x_0) = 0$, para algum $x_0 \in X$. Devido a propriedade reprodutiva $f(x_0) = \langle f, K_{x_0}\rangle$, $f \in \mathcal{H}_X(K)$. No entanto, de **(4)**, $K_{x_0}(y) = 0$, $y \in X$, implicando que $f(x_0) = 0$, $f \in \mathcal{H}_X(K)$. Portanto, a prova do teorema está terminada. ■

O próximo resultado confirma outra propriedade básica desejável para o núcleo advindo de espaços de reprodução.

Proposição 2.8.1 *O núcleo de reprodução de $\mathcal{H}_X(K)$ é positivo definido sobre X.*

Demonstração: Com auxílio do teorema anterior vemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_{x_i}\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i K_{x_i}, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j K_{x_j}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\langle K_{x_i}, K_{x_j}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j K(x_i,x_j).$$

Assim, o núcleo K é positivo definido sobre X. ■

2.9 Construção de $\mathcal{H}_X(K)$ a partir de K

O que fizemos nas últimas seções pode ser resumido como segue. A partir de um EHR_X, construímos um núcleo K que reproduz os elementos de EHR_X. Investigamos, agora, o caminho inverso – Ou seja, a partir de um certo núcleo $K : X \times X \to \mathbb{R}$, construir $\mathcal{H}_X(K)$ admitindo K como seu único núcleo de reprodução.

Os resultados teóricos sobre EHR_X são bem estabelecidos na literatura ([2, 4, 16, 25]). Especialmente, a referência [4] com mais de 4.500 citações estabelece que os espaços EHR_X e núcleos positivos definidos sobre X estão em correspondência biunívoca.

Teorema 2.9.1 (Teorema de Moore-Aronszajn) *Um núcleo $K : X \times X \to \mathbb{R}$ é positivo definido se e somente se ele gera um único $\mathcal{H}_X(K)$ tal que:*
(1) *$K_x \in \mathcal{H}_X(K)$, $x \in X$.*
(2) *$f(x) = \langle f, K_x\rangle$, $f \in \mathcal{H}_X(K)$, $x \in X$.*

Que a condição é necessária sobre $\mathcal{H}_X(K)$ para que K seja positivo definido sobre X, no teorema acima, foi provada na Proposição 2.8.1. Provamos, na sequência, que a condição sobre K no Teorema de Moore-Aronszajn é, de fato, suficiente para se obter $\mathcal{H}_X(K)$. Em resumo, se K é um núcleo positivo definido sobre X, então um produto interno dependente de K é definido no espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{K_x := K(x,\cdot) \,:\, x \in X\}$ denotado por

$$\mathcal{V}_X = [\{K_x := K(x,\cdot) \,:\, x \in X\}]. \tag{2.7}$$

A completação de $\mathcal{V}_X$ com respeito a tal produto interno é o único EHR_X admitindo K como núcleo de reprodução.

Teorema 2.9.2 *Seja $K : X \times X \to \mathbb{R}$ um núcleo positivo definido. Valem:*
(1) *O núcleo K gera um espaço pré-Hilbert.*
(2) *A menos de isomorfismo isométrico existe único $\mathcal{H}_X(EHR_X)$ e um mergulho isométrico $\mathcal{J} : \mathcal{V}_X \to \mathcal{H}_X$ tal que a imagem $\mathcal{J}(\mathcal{V}_X)$ é densa em $\mathcal{H}_X$.*

Demonstração: Primeiramente, sejam $f_{a,x}, f_{b,y} \in \mathcal{V}_X$, onde

$$f_{a,x} = \sum_{j=1}^{m} a_j K_{x_j}, \quad f_{b,y} = \sum_{k=1}^{n} b_k K_{y_k}, \quad a_j, b_k \in \mathbb{R}.$$

Então, sobre $\mathcal{V}_X$ definimos a forma bilinear $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{V}_X} : \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle f_{a,x}, f_{b,y} \rangle_{\mathcal{V}_X} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k K(x_j, y_k) = \sum_{j=1}^{m} a_j f_{b,y}(x_j) = \sum_{k=1}^{n} b_k f_{a,x}(y_k).$$

Como $f_{a,x}$ e $f_{b,y}$ não tem representação única, mostremos que a forma acima está bem definida. Assuma, então, que as funções $f_{a,x}$ e $f_{b,y}$ sejam também representadas por

$$f_{a,x} = \sum_{j=1}^{m'} a'_j K_{x'_j}, \quad f_{b,y} = \sum_{k=1}^{n'} b'_k K_{y'_k}, \quad a'_j, b'_k \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\langle f_{a,x}, f_{b,y} \rangle_{\mathcal{V}_X} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n'} a_j b'_k K(x_j, y'_k) = \sum_{k=1}^{n'} b'_k f_{a,x}(y'_k) = \sum_{j=1}^{m'} \sum_{k=1}^{n'} a'_j b'_k K(x'_j, y'_k) = \langle f_{a',x'}, f_{b',y'} \rangle_{\mathcal{V}_X}.$$

Em particular, para cada $x \in X$,

$$\langle f_{a,x}, K_x \rangle_{\mathcal{V}_X} = \sum_{j=1}^{m} a_j K(x_j, x) = f_{a,x}(x),$$

mostrando que as propriedades **(1)** e **(2)** do Teorema 2.9.1 valem para $(\mathcal{V}_X, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}_X})$. Mostremos agora que, de fato, a forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}_X}$ é um produto interno. A bilinearidade dessa forma é óbvia, enquanto a simetria segue do item **(2)** do Teorema 2.8.2. Como K é positivo definido sobre X, para cada $f_{a,x} \in \mathcal{V}_X$, a constante $\langle f_{a,x}, f_{a,x}\rangle_{\mathcal{V}_X}$ é não negativa. Finalmente, assuma que $\langle f_{a,x}, f_{a,x}\rangle_{\mathcal{V}_X} = 0$. Então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|f_{a,x}(x)|^2 = \left|\sum_{j=1}^{m} a_j K(x_j, x)\right|^2 = |\langle f_{a,x}, K_x\rangle_{\mathcal{V}_X}|^2 \leq \langle f_{a,x}, f_{a,x}\rangle_{\mathcal{V}_X} \langle K_x, K_x\rangle_{\mathcal{V}_X} = 0, \quad x \in X,$$

implicando que $f_{a,x}$ é identicamente nula. Assim, a forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}_X}$ é um produto interno sobre $\mathcal{V}_X$, provando o primeiro item.

O segundo item é consequência do Teorema 2.6.2. ■

Capítulo 3

Espaço Hilbert de Reprodução Admitindo Núcleo Gaussiano Unidimensional

Este é o capítulo dedicado ao estudo pormenorizado a respeito da construção do espaço Hilbert de reprodução sobre um subconjunto da reta, partindo dos denominados núcleos gaussianos sobre a reta. Embora muitos dos resultados que abodaremos têm contraparte no contexto complexo, a exemplo do capítulo anterior, adotamos o contexto real. A referência básica é [29].

Neste capítulo, a notação mais geral X que empregamos até agora será substituída por J denotando um subconjunto de $\mathbb{R}$, cujo interior é não vazio.

3.1 Núcleo gaussiano sobre $\mathbb{R}$

A partir desta seção, particularizamos a investigação previamente realizada a respeito de espaços de reprodução e seus núcleos associados, agora para a classe dos chamados núcleos gaussianos reais, objetivo central desse trabalho. Iniciamos com o caso unidimensional.

Para facilitar a escrita, usaremos frequentemente o espaço Hilbert formado pelas sequências reais de quadrado-somáveis que denotamos simplesmente por $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ - Ou seja,

$$\ell^2 := \left\{ (a_j) \,:\, a_j \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \|(a_j)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty \right\},$$

onde

$$\langle (a_j), (c_j) \rangle_2 := \sum_{j=0}^{\infty} a_j c_j, \quad (a_j), (c_j) \in \ell^2.$$

Lembramos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ está bem definido devido a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Introduzimos a seguir funções de Gauss sobre J.

Definição 3.1.1 *A sequência gaussiana sobre J associada à covariância $\sigma > 0$ é (φ_j), onde o termo geral é*

$$\varphi_j(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} x^j, \quad x \in J,\ j = 0, 1, \ldots.$$

Para o lema a seguir, consideramos a forma

$$\langle f_a, f_b \rangle_{\mathcal{G}} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2j} j!}{2^j} a_j b_j, \tag{3.1}$$

onde

$$f_a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j, \quad f_b = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varphi_j, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

e tais que

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j} j!}{2^j}} a_j \right), \left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j} j!}{2^j}} b_j \right) \in \ell^2.$$

Lema 3.1.1 *A sequência gaussiana (φ_j) é ortogonal em relação a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$.*

Demonstração: A prova consiste em expressar cada φ_j como uma série da forma

$$\varphi_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{\mu k} \varphi_k, \quad \mu = 0, 1, \ldots,$$

onde $\delta_{\mu k}$ é a função delta de Kronecker. Agora, é fácil ver que, de fato,

$$\langle \varphi_\mu, \varphi_\nu \rangle_{\mathcal{G}} = \frac{\sigma^{2\mu} \mu!}{2^\mu} \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \ldots,$$

provando o lema. ■

Observamos que, no lema acima, a sequência (φ_j) pode ser redefinida de modo que a expressão 'ortogonal' possa ser substituída por 'ortonormal'.

Dando continuidade, a definição de núcleo gaussiano sobre a reta está a seguir.

Definição 3.1.2 *A função radial $\mathcal{G} : J \times J \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\mathcal{G}(x, y) = e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}}, \quad x, y \in J$$

é chamada núcleo gaussiano sobre $\mathbb{R}$ associado à covariância $\sigma > 0$.

A positividade definida do núcleo $\mathcal{G}$ sobre J é garantida pelo Teorema 2.3.1.

Na sequência, usando expansão de Maclaurin para a função exponencial aplicada em $2xy/\sigma^2$, expressamos $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{\sigma^{2j} j!} \left(e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} x^j \right) \left(e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} y^j \right), \quad x,y \in J.$$

Em termos da sequência gaussiana, obtemos

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{\sigma^{2j} j!} \varphi_j(x)\varphi_j(y), \quad x,y \in J, \tag{3.2}$$

sem problemas de somabilidade.

3.2 Espaço Hilbert de reprodução gerado por $\mathcal{G}$

Estudamos, nesta seção, a natureza dos elementos de um espaço Hilbert de funções admitindo núcleos de reprodução do tipo $\mathcal{G}$.

Teorema 3.2.1 *O espaço Hilbert de reprodução sobre J admitindo $\mathcal{G}$ como núcleo de reprodução é*

$$\mathcal{H}_J(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j : \left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j} j!}{2^j}} a_j \right) \in \ell^2 \right\},$$

cujo produto interno é (3.1).

Demonstração: Denotamos por $\mathcal{H}_0$ o conjunto do enunciado do teorema. Devido a natureza das funções de $\mathcal{H}_0$, usamos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar, simultaneamente, que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ está bem definida sobre $\mathcal{H}_0$ e que este conjunto é um espaço vetorial real em relação as operações usuais de soma de funções e produto de função por escalar real. Como as demais propriedades de produto interno para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ são imediatas sobre $\mathcal{H}_0$, a estrutura $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{G}})$ é, de fato, um espaço pré-Hilbert. Para provar que este é um espaço Hilbert, consideramos a aplicação $\psi : \mathcal{H}_0 \to \ell^2$ dada por

$$\psi(f_a) = \left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j} j!}{2^j}} a_j \right), \quad f_a \in \mathcal{H}_0.$$

Imediatamente, notamos que ψ é uma transformação linear isométrica, uma vez que

$$\langle \psi(f_a), \psi(f_b) \rangle_2 = \langle f_a, f_b \rangle_{\mathcal{G}}, \quad f_a, f_b \in \mathcal{H}_0.$$

Mostremos, agora, que $\psi(\mathcal{H}_0)$ é um espaço Hilbert em relação ao produto interno $\langle\psi(\cdot),\psi(\cdot)\rangle_2$. Para tanto, seja $(\psi(f_{a(n)}))$ uma sequência de Cauchy em $\psi(H_0)$, onde

$$\psi(f_{a(n)}) = \left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}}\,a_{jn}\right) \in \ell^2, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que para todo inteiro não negativo j

$$\left|\sqrt{\frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}}(a_{jm} - a_{jn})\right| \leq \|\psi(f_{a(n)}) - \psi(f_{a(m)})\|_2 < \varepsilon, \quad m,n \geq N.$$

Por conseguinte, existe uma sequência (b_j) em $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{jn} = b_j$, $j = 0,1,\ldots$ e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}(a_{jm} - b_j)^2 < \infty, \quad m \geq N,$$

implicando em

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}}\,b_j\right) \in \ell^2.$$

Logo,

$$f_b = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\varphi_j \in \mathcal{H}_0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi(f_{a(n)}) - \psi(f_b)\|_2 = 0,$$

mostrando que $(\psi(\mathcal{H}_0),\langle\psi(\cdot),\psi(\cdot)\rangle_2)$ é um espaço Hilbert. Desde que $\psi(\mathcal{H}_0)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}_0$, a estrutura $(\mathcal{H}_0,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{G}})$ é um espaço Hilbert. Para verificar a equação de reprodução, fixemos $x \in J$ e escremos a expansão de $\mathcal{G}$ dada em (3.2) na forma

$$\mathcal{G}_x = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2^j}{\sigma^{2j}j!}\varphi_j(x)\right)\varphi_j.$$

Os coeficientes da expansão $\mathcal{G}_x$ são tais que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}\left(\frac{2^j}{\sigma^{2j}j!}\varphi_j(x)\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{\sigma^{2j}j!}\varphi_j(x)^2 = \mathcal{G}(x,x) = 1.$$

Assim, para cada $x \in J$, a função $\mathcal{G}_x$ pertence a $\mathcal{H}_0$. Finalmente, se $f_a \in \mathcal{H}_0$, então

$$\langle f_a,\mathcal{G}_x\rangle_{\mathcal{G}} = \langle\psi(f_a),\psi(\mathcal{G}_x)\rangle_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}a_j\frac{2^j}{\sigma^{2j}j!}\varphi_j(x) = f_a(x), \quad x \in J.$$

Portanto, a unicidade do EHR_J garantida pelo Teorema 2.9.1, mostra que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_J(\mathcal{G})$. ■

Uma vez que $\mathcal{G}$ é um núcleo positivo definido sobre J, seguindo os passos da prova do Teorema 2.9.2, vemos que a completação do espaço pré-Hilbert

$$\left[\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{\sigma^{2j}j!}\varphi_j(x)\varphi_j : x\in J\right\}\right]$$

em relação ao produto interno (3.1) também é $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$. No entanto, essa via de construção é mais trabalhosa. A técnica usada na prova anterior para construir $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ difere dos trabalhos de Moore-Aronszajn ou dos trabalhos de outros pesquisadores que preferem o caminho exibido pelo Teorema 2.9.2. Na verdade, acreditamos que essa é uma propriedade específica para espaços pré-Hilbert de funções admitindo núcleos gaussianos. No entanto, não sabemos de referências abordando tais completações.

3.3 O espaço $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ e polinômios sobre J

Nesta seção, estudamos a interação entre o espaço vetorial real dos polinômios com coeficientes reais e $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$. Especificamente, mostramos que a interseção entre estes espaços é composta apenas pelo polinômio nulo.

Iniciamos investigando propriedades da sequência (s_i) nos três lemas técnicos a seguir, onde

$$s_i := \begin{cases} \frac{1}{\sigma^i (i/2)!}, & \text{se } i \text{ é par} \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Lema 3.3.1 *Seja* (s_i) *a sequência* (3.3). *Se* j *é um inteiro maior que* $\sigma^{-2}-1$, *então*

$$s_{2(j+k)} \leq \frac{s_{2j}}{\sigma^2(j+1)}, \quad k=1,\ldots.$$

Demonstração: Primeiramente, notamos que

$$s_{2(j+1)} = \frac{s_{2j}}{\sigma^2(j+1)}, \quad j=0,1,\ldots.$$

Seguindo, se j é um inteiro tal que $j\geq\sigma^{-2}-1$, então a subsequência $(s_{2(j+k)})_{k=0}^{\infty}$ é decrescente. Consequetemente,

$$s_{2(j+k)} \leq s_{2(j+1)} = \frac{s_{2j}}{\sigma^2(j+1)}, \quad k=1,\ldots,$$

provando a desigualdade do lema. ■

Consideramos a sequência $(A_k(s,a))$, cujo termo geral é o produto entre de (s_i) com pontos $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ que variam em $\mathbb{R}^{n+1}$ – Ou seja,

$$A_k(s,a) := \sum_{0\leq j\leq n,\, i\geq 0,\, i+j=k} s_i a_j, \quad k=0,1,\dots.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
A_0(s,a) &= s_0 a_0,\\
A_1(s,a) &= a_0 s_1 + a_1 s_0,\\
A_2(s,a) &= s_2 a_0 + s_1 a_1 + s_0 a_2,\\
&\vdots\\
A_{n-1}(s,a) &= s_{n-1}a_0 + s_{n-2}a_1 + \cdots + s_1 a_{n-2} + s_0 a_{n-1},\\
A_k(s,a) &= s_k a_0 + s_{k-1}a_1 + \cdots + s_{k-n+1}a_{n-1} + s_{k-n}a_n, \quad k=n,\dots.
\end{aligned}$$

Lema 3.3.2 *Seja m um inteiro positivo. Se $a_0,a_1,\dots,a_{2m}$ são escalares reais com sinais mistos e $a_{2m}\neq 0$, então*

$$|a_0 s_{2m+2j} + a_1 s_{2m+2j-1} + \cdots + a_{2m-1}s_{2j+1}| \leq \frac{|a_{2m}|}{2} s_{2j}, \quad j \geq \textit{máx}\{\sigma^{-2}-1, d_m - 1\},$$

onde

$$d_m := \frac{2(|a_0| + \cdots + |a_{2(m-1)}|)}{\sigma^2 |a_{2m}|}.$$

Demonstração: Sejam $a_0,a_1,\dots,a_{2m}$ escalares reais com sinais mistos tais que a_{2m} seja não nulo. Fixemos $j\in\{0,1,\dots\}$ e consideramos a constante

$$M_{2(m+j)} := |a_0 s_{2m+2j} + a_1 s_{2m+2j-1} + \cdots + a_{2m-1} s_{2j+1}|.$$

Como $s_{2(m+j-\mu)-1} = 0,\ \mu = 0,1,\dots,m-1$,

$$M_{2(m+j)} = \left| a_0 s_{2(m+j)} + a_2 s_{2(m+j-1)} + \cdots + a_{2(m-1)} s_{2(j+1)} \right|.$$

Pelo Lema 3.3.1,

$$s_{2(\nu+j)} \leq \frac{s_{2j}}{\sigma^2(j+1)}, \quad \nu = 1,\dots,m, \quad j \geq \sigma^{-2}-1,$$

levando à estimativa

$$M_{2(m+j)} \leq \left(|a_0| + |a_2| + \cdots + |a_{2(m-1)}|\right) \frac{s_{2j}}{\sigma^2(j+1)}, \quad j \geq \sigma^{-2} - 1.$$

Em consequência,

$$M_{2(m+j)} \leq \frac{1}{2}|a_{2m}|s_{2j}, \quad j \geq \text{máx}\{\sigma^{-2} - 1, d_m - 1\},$$

onde d_m é a constante do enunciado. Portanto, a desigualdade do lema vale. ■

A versão do lema anterior quando $a_{2m+1} \neq 0$ é o assunto tratado no próximo resultado.

Lema 3.3.3 *Seja m um inteiro não negativo. Se $a_0, a_1, \ldots, a_{2m+1}$ são escalares reais com sinais mistos e $a_{2m+1} \neq 0$, então*

$$|a_0 s_{2j+2m+1} + a_1 s_{2j+2m} + \cdots + a_{2m-1} s_{2j+2}| \leq \frac{|a_{2m+1}|}{2} s_{2j}, \quad j \geq \textit{máx}\{\sigma^{-2} - 1, d_{m+1} - 1\},$$

onde

$$d_{m+1} := \frac{2(|a_1| + \cdots + |a_{2m-1}|)}{\sigma^2 |a_{2m+1}|}.$$

Escrevemos $\mathcal{P}(J)$ para denotar o espaço vetorial real constituído pelos polinômios sobre a reta, restritos ao domínio J.

Lema 3.3.4 *Se p é um elemento de $\mathcal{P}(J)$ da forma $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, então*

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s,a)\varphi_k.$$

Demonstração: Seja $p \in \mathcal{P}(J)$ como na hipótese do lema. Usando a expansão de Maclaurin da função exponencial aplicada ao argumento x^2/σ^2, obtemos

$$p(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} p(x) e^{\frac{x^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{\sigma^{2i} i!} x^{2i+j}, \quad x \in J.$$

Introduzindo a sequência (s_i) na expansão acima, obtemos

$$p(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} s_i a_j x^{i+j}, \quad x \in J.$$

Ao reordenar essa soma de acordo com a ordem crescente da potência de x, o coeficiente de cada x^k é precisamente $A_k(s,a)$. Portanto, a igualdade da afirmação do lema segue. ■

Consideramos duas classes de polinômios de $\mathcal{P}(J)$. Denotamos por $\mathcal{P}_+(J)$, o subconjunto de $\mathcal{P}(J)$ formado pelos polinômios com coeficientes não negativos e $\mathcal{P}_-(J) = -\mathcal{P}_+(J)$.

Teorema 3.3.1 *As seguintes propriedades ocorrem:*
(1) $\mathcal{P}_+(J) \cap \mathcal{H}_J(\mathcal{G}) = \{0\}$.
(2) $\mathcal{P}_-(J) \cap \mathcal{H}_J(\mathcal{G}) = \{0\}$.

Demonstração: Fixemos um inteiro não negativo n e consideremos um polinômio não nulo p de grau n em $\mathcal{P}(J)$, digamos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Pelo lema precedente,

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s,a)\varphi_k.$$

Para ver que p não pertence a $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$, provemos que

$$\left(\sqrt{\frac{k!\,\sigma^{2k}}{2^k}}\,A_k(s,a)\right) \notin \ell^2,$$

independentemente do ponto não nulo $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Primeiro, assuma que $p \in \mathcal{P}_+(J)$. Então, cada parcela de $A_k(s,a)$ é não negativa, implicando em $A_k(s,a) \geq a_n s_{k-n}$, $k \geq n$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\sigma^{2k}}{2^k} A_k(s,a)^2 &\geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!\sigma^{2k}}{2^k} A_k(s,a)^2 \\
&\geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!\sigma^{2k}}{2^k} a_n^2 s_{k-n}^2 \\
&= a_n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!\sigma^{2(n+k)}}{2^{(n+k)}} s_k^2.
\end{aligned}$$

Como $s_{2j+1} = 0$, $j = 0, 1, \ldots$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\sigma^{2k}}{2^k} A_k(s,a)^2 \geq \frac{a_n^2 \sigma^{2n}}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)!}{4^k} \sigma^{4k} s_{2k}^2.$$

Desde que $\sigma^{4k} s_{2k}^2 = 1/k!^2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\sigma^{2k}}{2^k} A_k(s,a)^2 \geq \frac{a_n^2 \sigma^{2n}}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)!}{4^k k!^2}. \tag{3.4}$$

Para uma estimativa inferior do termo geral da última série, recorremos ao Lema 2.5.1 para justificar a desigualdade

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+2k)!}{4^k k!^2} &\geq \frac{1}{e^n\sqrt{2\pi}}\frac{(n+2k)^{2k+n+1}}{4^k k^{2k+2}}\frac{k-t}{\sqrt{n+2k-s}} \\
&= \frac{1}{e^n\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{n}{2k}\right)^{2k}\left(2+\frac{n}{k}\right)\frac{(n+2k)^n}{\sqrt{n+2k-s}}\left(1-\frac{t}{k}\right).
\end{aligned}
$$

Segue que para $n \geq 1$,

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{1}{e^n\sqrt{2\pi}}\left(2+\frac{n}{k}\right)^{2k}\left(2+\frac{n}{k}\right)\frac{(n+2k)^n}{\sqrt{n+2k-s}}\left(1-\frac{t}{k}\right) = \infty,
$$

implicando em

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{(n+2k)!}{4^k k!^2} = \infty, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}
$$

Por outro lado, quando $n = 0$, manipulando algebricamente a expressão

$$
\frac{(2k)!\sqrt{k}}{4^k k!^2},
$$

auxiliado, uma vez mais, pelo Lema 2.5.1, vemos que

$$
\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{2k-s}}\left(1-\frac{t}{k}\right) \leq \frac{(2k)!\sqrt{k}}{4^k k!^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{2k-t}}\left(1-\frac{s}{k}\right).
$$

Por conseguinte, obtemos a Fórmula de Wallis ([3, p. 20])

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(2k)!}{4^k k!^2}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{3.6}
$$

Como a série de termo geral $1/\sqrt{k}$ é divergente, pelo teste da comparação no limite, a série de termo geral

$$
\frac{(2k)!}{4^k k!^2}
$$

também diverge. Das duas análises acima a respeito do termo geral da série em questão, em ambos os casos para n, a série à direita da desigualdade (3.4) é divergente. Portanto, o polinômio p não pertence a $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$, provando o item **(1)**.

Se $p \in \mathcal{P}_-(J)$, então o polinômio não nulo $-p$ não pertence a $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ e, tampouco p o pertence. Portanto, o segundo item do teorema também está provado. ■

O subconjunto de $\mathcal{P}(J)$, cujos polinômios tem coeficientes com sinais mistos será denotado por $\mathcal{P}_\pm(J)$. De outra forma, $\mathcal{P}_\pm(J) = \mathcal{P}_+(J) + \mathcal{P}_-(J)$.

Teorema 3.3.2 *As seguintes propriedades ocorrem:*
(1) $\mathcal{P}_\pm(J) \cap \mathcal{H}_J(\mathcal{G}) = \{0\}$.
(2) $\mathcal{P}(J) \cap \mathcal{H}_J(\mathcal{G}) = \{0\}$.

Demonstração: Suponhamos que p é um polinômio não nulo de grau n em $\mathcal{P}_\pm(J)$, digamos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Pelo Lema 3.3.4,

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s,a)\varphi_k.$$

Mostremos que a sequência

$$\left(\sqrt{\frac{k!\,\sigma^{2k}}{2^k}}A_k(s,a)\right),$$

não pertence a ℓ^2, quaisquer que sejam os pontos não nulos $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Primeiramente, assuma que $n = 2m$, para algum inteiro não negativo m e mostremos que a subsequência

$$\left(\sqrt{\frac{(2m+2j)!\,\sigma^{4(m+j)}}{4^{(m+j)}}}A_{2(m+j)}(s,a)\right), \quad j = 0, 1, \ldots$$

não pertence a ℓ^2, para todo ponto não nulo $(a_0, a_1, \ldots, a_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Fixando, momentaneamente, um índice j em $\{0, 1, \ldots\}$ e notemos que

$$A_{2(m+j)}(s,a) = a_0 s_{2m+2j} + a_1 s_{2m+2j-1} + \cdots + a_{2m-1} s_{2j+1} + a_{2m} s_{2j}.$$

Desde que o caso $m = 0$ segue do teorema anterior, consideremos os casos em que m é um inteiro positivo. Como $s_{2(m+j-\mu)-1} = 0$, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$A_{2(m+j)}(s,a) = a_0 s_{2(m+j)} + a_2 s_{2(m+j-1)} + \cdots + a_{2(m-1)} s_{2(j+1)} + a_{2m} s_{2j}.$$

Como $M_{2(m+j)} = |a_{2m} s_{2j} - A_{2(m+j)}(s,a)| \geq |a_{2m}| s_{2j} - |A_{2(m+j)}(s,a)|$, pelo lema anterior,

$$|A_{2(m+j)}(s,a)| \geq |a_{2m}| s_{2j} - M_{2(m+j)} \geq \frac{1}{2}|a_{2m}| s_{2j}, \quad j \geq \text{máx}\{\sigma^{-2} - 1, d_m - 1\}.$$

Segue que

$$4\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2m+2j)!\,\sigma^{4(m+j)}}{4^{(m+j)}} A_{2(m+j)}(s,a)^2 \geq \frac{\sigma^{4m} a_{2m}^2}{4^m} \sum_{j \geq \text{máx}\{\sigma^{-2}-1, d_m-1\}} \frac{(2m+2j)!}{4^j}\sigma^{4j} s_{2j}^2.$$

A última soma recai no mesmo tipo de série que analisamos na prova do item **(1)** do Teorema 3.3.1 para o caso em que $2m \neq 0$, onde mostramos que esta diverge. Portanto, o polinômio p não pertence a $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$. Uma adaptação da prova anterior usando o Lema 3.3.3 mostra que este também é o caso quando n é ímpar.
Como $\mathcal{P}(J) = \mathcal{P}_+(J) \cup \mathcal{P}_-(J) \cup \mathcal{P}_\pm(J)$, pelo Teorema 3.3.1 e o primeiro item deste, o item **(2)** também está provado. ■

3.4 Famílias de funções particulares de $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$

Como o título sugere, nesta seção, lidaremos com duas famílias de funções. A primeira pertencente ao $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ e a segunda pertencente ao $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$, mas não é Lebesgue integrável sobre a reta.

Iniciamos definindo as famílias de funções acima mencionadas. Para escalares reais t e r, definimos as funções $f_t : J \to \mathbb{R}$ como

$$f_t(x) = e^{-t\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad x \in J$$

e $h_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h_r(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2^j}{j!}} \frac{1}{(j+1)^{r/2}\sigma^j} \varphi_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Especialmente, o Teorema 3.4.1 mostra que a exponencial que aparece na definição da sequência gaussiana (φ_j)(Veja a Definição 3.1.1), também é um elemento de $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$, cuja norma é 1.

Teorema 3.4.1 *A função f_t pertence a $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ se e somente se $0 < t < 2$. Em adição, a norma de f_t em $\mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ é dada por*

$$\|f_t\|_{\mathcal{G}}^2 = \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}, \quad t \in (0,2).$$

Demonstração: Considere a função f_t. Então, a expansão de Maclaurin da exponencial aplicada em $(1-t)x^2/\sigma^2$ nos conduz às igualdades

$$f_t(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-t)^j}{\sigma^{2j} j!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)\varphi_j(x), \quad x \in J,$$

onde

$$a_j(t) := (1-t)^{j/2} s_j, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{3.7}$$

Usando o produto interno (3.1), vemos que

$$\|f_t\|_{\mathcal{G}}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2j} j!}{2^j} a_j(t)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2j} j!}{2^j} (1-t)^j s_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{4^j j!^2} (t-1)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t),$$

onde

$$c_j(t) := \frac{(2j)!}{4^j j!^2} (t-1)^{2j}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{3.8}$$

Então,

$$\lim_{j \to \infty} \frac{c_{j+1}(t)}{c_j(t)} = (t-1)^2.$$

Pelo teste da razão, a série de termo geral $c_j(t)$ converge quando $t \in (0,2)$ e diverge para $t \notin (0,2)$. Por outro lado, quando $t = 0$ ou $t = 2$, obtemos $c_j(0) = c_j(2)$, $j = 0, 1, \ldots$, recaindo no caso da prova do primeiro item do Teorema 3.3.1 para $n = 0$, onde o limite

$$\lim_{j \to \infty} c_j(0) = \lim_{j \to \infty} c_j(2)$$

é um escalar não nulo. Assim, a função $f_t \in \mathcal{H}_J(\mathcal{G})$ se e somente se $t \in (0,2)$.
Para calcular a norma de cada f_t, consideramos a série da função arco seno dada por ([1, p. 81])

$$\text{arcsen} u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{(2j+1) 4^j j!^2} u^{2j+1}, \quad |u| \leq 1,$$

cuja derivada é

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{4^j j!^2} u^{2j}, \quad |u| < 1.$$

Segue que

$$\frac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j)!}{4^j j!^2} (t-1)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t), \quad t \in (0,2).$$

Portanto,

$$\|f_t\|_{\mathcal{G}}^2 = \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}, \quad t \in (0,2),$$

finalizando a prova do teorema. ■

Como é usual, a notação $L^1(\mathbb{R})$ é o conjunto das classes de funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Lebesgue mensuráveis e

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty.$$

O resultado abaixo mostra que uma função pode estar em $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$, sem ser Lebesgue integrável.

Teorema 3.4.2 *A família* (h_r) *pertente a* $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ *se e somente se* $r \in (1,\infty)$. *Em adição, se* $r \in (1,3/2])$, *então* $h_r \notin L^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: A primeira afirmação segue do fato que a sequência

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j}j!}{2^j}}\sqrt{\frac{2^j}{j!}}\frac{1}{(j+1)^{r/2}\sigma^j}\right)$$

é de quadrado somável se e somente se $r \in (1,\infty)$.
Para provar a segunda afirmação do teorema, suponha que $r \in (1,3/2]$. Temos que

$$\|h_r\|_1 \geq \int_0^\infty |h_r(x)|dx = \int_0^\infty e^{-x^2/\sigma^2}\sum_{j=0}^\infty \sqrt{\frac{2^j}{j!}}\frac{1}{(j+1)^{r/2}\sigma^j}x^j dx.$$

Como o integrando pode ser expresso como uma sequência não decrescente de funções mensuráveis, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\|h_r\|_1 \geq \sum_{j=1}^\infty \sqrt{\frac{2^{j-1}}{(j-1)!}}\frac{1}{j^{r/2}\sigma^{j-1}}\int_0^\infty x^{j-1}e^{-x^2/\sigma^2}dx.$$

Usando a definição gama dada em (2.2), obtemos

$$\int_0^\infty x^{j-1}e^{-x^2/\sigma^2}dx = \frac{\sigma^j}{2}\Gamma\left(\frac{j}{2}\right), \quad j = 1,2,\ldots.$$

Então,

$$\|h_r\|_1 \geq \frac{\sigma}{2}\sum_{j=1}^\infty \sqrt{\frac{2^{j-1}}{(j-1)!}}\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)\frac{1}{j^{r/2}} = \frac{\sigma}{2}\sum_{j=0}^\infty \sqrt{\frac{2^j}{j!}}\frac{1}{(j+1)^{r/2}}\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right).$$

Usando a fórmula de duplicação (2.3), obtemos

$$j! = \Gamma(j+1) = \frac{2^j}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right), \quad j = 0,1,\ldots.$$

Equivalentemente,

$$\frac{2^j}{j!} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)}, \quad j = 0,1,\ldots.$$

Segue que

$$\|h_r\|_1 \geq \frac{\sqrt[4]{\pi}\sigma}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)}}\frac{1}{(j+1)^{r/2}}.$$

Pelo Lema 2.5.3, existe $0 < \mathfrak{c} < 1$ e um inteiro j_0 tal que

$$\|h_r\|_1 \geq \sqrt{\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}}\frac{\sqrt[4]{\pi}\sigma}{2}\sum_{j=j_0}^{\infty}\sqrt[4]{\frac{2}{j+1}}\frac{1}{(j+1)^{r/2}} = \sqrt{\frac{1-\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}}\frac{\sqrt[4]{2\pi}\sigma}{2}\sum_{j=j_0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{(2r+1)/4}}.$$

No entanto, a última série diverge quando $r \in (1,3/2]$. Portanto, a prova do teorema está concluída. ∎

Capítulo 4

Espaço Hilbert de Reprodução Admitindo Núcleo Gaussiano Multidimensional

Nesta capítulo, estudamos a construção do espaço Hilbert de reprodução sobre subconjutos reais q-dimensionais, usando ainda núcleos gaussianos. Novamente a referência básica aqui é [29]. A notação mais geral X que usamos para introduzir os conceito fundamentais sobre o assunto no Capítulo 2 será, agora, substituído pela letra E denotando um subconjunto de $\mathbb{R}^q (q > 1)$, cujo interior é não vazio. Consequentemente, as notações multi-índices introduzidas na Seção 2.4 serão também usadas daqui por diante.

4.1 Núcleo gaussiano sobre $\mathbb{R}^q$

O objetivo desta seção é extender os resultados obtidos na Seção 3.1 quando o núcleo em questão for definido em várias variáveis reais.

Definição 4.1.1 *A sequência gaussiana sobre E associada à covariância* σ *é o conjunto* (φ_α) *constituído pelas funções*

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} x^\alpha, \quad x \in E, \alpha \in \mathbb{Z}_+^q, |\alpha| = 0, 1, \ldots.$$

Nesse contexto multi-índices, consideramos a forma

$$\langle F_A, F_B \rangle_G := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\sigma^{|2\alpha|} \alpha!}{2^{|\alpha|}} A_\alpha B_\alpha, \tag{4.1}$$

onde F_A e F_B são dadas pelas séries multivariáveis

$$F_A = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha \varphi_\alpha, \quad F_B = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha \varphi_\alpha, \quad A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{R}$$

e satisfazendo

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha!}{(2/\sigma^2)^{|\alpha|}}} A_\alpha\right), \left(\sqrt{\frac{\alpha!}{(2/\sigma^2)^{|\alpha|}}} B_\alpha\right) \in \ell^2.$$

Lema 4.1.1 *A sequência gaussiana* (φ_α) *é ortogonal em relação à forma* $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$.

Demonstração: Primeiramente, observamos que

$$\varphi_\mu = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} \delta_{\mu\beta}\varphi_\beta, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+^q,$$

onde

$$\delta_{\mu\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \beta \\ 0, & \text{se } \mu \neq \beta. \end{cases}$$

Pela definição de $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$, temos que

$$\langle \varphi_\mu, \varphi_\nu \rangle_G = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!}{2^{|\alpha|}} \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\alpha} = \frac{\sigma^{|2\nu|}\nu!}{2^{|\nu|}} \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^q,$$

finalizando a prova. ■

Na sequência está a definição da família de núcleos sobre $\mathbb{R}^q$ que usaremos daqui por diante.

Definição 4.1.2 *A função* $G : E \times E \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$G(x,y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}}, \quad x, y \in E$$

é chamada núcleo gaussiano de base radial sobre $\mathbb{R}^q$ *associado à covariância* $\sigma > 0$.

Oportunamente, chamamos a atenção para a positividade definida de G, conforme o Teorema 2.3.1.

O próximo resultado exibe a expansão de G a partir da sequência gaussiana.

Proposição 4.1.1 *O núcleo gaussiano pode ser representado pela soma*

$$G(x,y) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y), \quad x, y \in E.$$

Demonstração: Como $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$, $x,y \in E$, usando expansão de Maclaurin para a função exponencial aplicada em $2\langle x,y\rangle/\sigma^2$ e em seguida o Lema 2.4.1, chegamos à expansão condensada

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sigma^{2k} k!} \langle x,y\rangle^k \\
&= e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sigma^{2k} k!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha,
\end{aligned}$$

implicando na igualdade da afirmação da proposição. ∎

4.2 O espaço de reprodução gerado por G

Nesta seção, investigamos propriedades para o espaço Hilbert de reprodução de funções admitindo núcleo gaussiano sobre E.

O teorema abaixo revela como são os elementos que constituem o espaço $\mathcal{H}_E(G)$.

Teorema 4.2.1 *O espaço Hilbert de reprodução sobre E admitindo o núcleo G é*

$$\mathcal{H}_E(G) = \left\{ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha \varphi_\alpha : \left(\sqrt{\frac{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!}{2^{|\alpha|}}} A_\alpha \right) \in \ell^2 \right\},$$

cujo produto interno é (4.1).

Demonstração: A prova é similar a prova do Teorema 3.2.1 e por isso será omitida. ∎

Chamamos a atenção apenas em relação à equação de reprodução para $\mathcal{H}_E(G)$. Para tanto, fixemos $x \in E$ e pela proposição anterior

$$G_x = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left(\frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha(x) \right) \varphi_\alpha.$$

Consequentemente,

$$\|G_x\|_G^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!}{2^{|\alpha|}} \left(\frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha(x) \right)^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha^2(x) = G(x,x) = 1,$$

mostrando que $G_x \in \mathcal{H}_E(G)$. Finalmente, se $F_A \in \mathcal{H}_E(G)$, então

$$\langle F_A, G_x \rangle_G = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!}{2^{|\alpha|}} A_\alpha \frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha(x) = F_A(x), \quad x \in E.$$

Novamente, observamos que a positividade definida do núcleo G sobre E nos fornece um caminho natural para obter $\mathcal{H}_E(G)$, usando a teoria de Moore-Aronszajn via completação do espaço vetorial

$$\left[\left\{ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{2^{|\alpha|}}{\sigma^{|2\alpha|}\alpha!} \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha \, : \, x \in E \right\} \right]$$

em relação ao produto interno (4.1). Entretanto, essa via de construção é por demais trabalhosa, tornando-a inviável.

4.3 O espaço $\mathcal{H}_E(G)$ e polinômios sobre E

Nesta seção, estudamos a interligação entre o espaço vetorial real dos polinômios com coeficientes reais, restritos a E e o espaço $\mathcal{H}_E(G)$. Especificamente, mostramos que a interseção entre estes espaços é composta apenas pelo polinômio nulo. A bibliografia [29] que seguimos, até agora, não trata covenientemente este assunto. No artigo, o autor apenas menciona os casos, mas não os prova. Entretanto, o leitor notará que as provas construídas aqui não são triviais.

Como pretendemos adaptar a Seção 3.3 para multi-índices, consideremos a sequência (s_γ) dependendo de $\gamma \in \mathbb{Z}_+^q$ definida como

$$s_\gamma := \begin{cases} \frac{1}{\sigma^{|\gamma|}(\gamma/2)!}, & \text{se } \gamma_j \text{ são pares} \\ 0, & \text{se algum } \gamma_j \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Definimos a seguir a sequência $(B_\alpha(s,a))$, cujo termo geral é o produto de elementos de (s_γ) com o conjunto de pontos reais $\{a_\delta \, : \, |\delta| = 0, 1, \ldots, n\}$ – Ou seja,

$$B_\alpha(s,a) := \sum_{0 \leq |\delta| \leq n, \, |\gamma| \geq 0, \, \gamma+\delta=\alpha} s_\gamma a_\delta, \quad |\alpha| \geq 0.$$

Escrevemos $\mathcal{P}(E)$ para denotar o espaço vetorial real dos polinômios de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^q)$, restritos ao conjunto-domínio E.

Lema 4.3.1 *Se $P \in \mathcal{P}(E)$ tem a forma $P(x) = \sum_{|\delta|=0}^{n} a_\delta x^\delta$, então*

$$P = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha(s,a)\varphi_\alpha.$$

Demonstração: Assuma que $P \in \mathcal{P}(E)$ seja expresso como na hipótese do lema. Pelo Lema 2.4.1, chegamos à expansão

$$e^{\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2k}k!}\langle x,x\rangle^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{\sigma^{2|\gamma|}\gamma!}x^{2\gamma} = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{|2\gamma|}\gamma!}x^{2\gamma}, \quad x \in E$$

e, por consequência

$$P(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} \sum_{|\delta|=0}^{n} a_\delta x^\delta e^{\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty}\sum_{|\delta|=0}^{n} \frac{a_\delta}{\sigma^{|2\gamma|}\gamma!} x^{2\gamma+\delta} e^{\frac{-\|x\|^2}{\sigma^2}}, \quad x \in E.$$

Recorrendo à sequência (s_γ), obtemos

$$P(x) = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty}\sum_{|\delta|=0}^{n} s_\gamma a_\delta x^{\gamma+\delta} e^{\frac{-\|x\|^2}{\sigma^2}} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\left(\sum_{0\le|\delta|\le n,\, |\gamma|\ge 0,\, \gamma+\delta=\alpha} s_\gamma a_\delta\right) x^\alpha e^{\frac{-\|x\|^2}{\sigma^2}}, \quad x \in E,$$

provando a afirmação do lema. ■

Até o final desta seção usaremos três subconjuntos de $\mathcal{P}(E)$. Denotamos por $\mathcal{P}_+(E)$, o subconjunto de $\mathcal{P}(E)$ formado pelos polinômios com coeficientes não negativos, o subconjunto $\mathcal{P}_-(E) = -\mathcal{P}_+(E)$ e $\mathcal{P}_\pm(E) = \mathcal{P}_+(E) + \mathcal{P}_-(E)$.

Teorema 4.3.1 *As seguintes propriedades ocorrem:*
(1) $\mathcal{P}_+(E) \cap \mathcal{H}_E(G) = \{0\}$.
(2) $\mathcal{P}_-(E) \cap \mathcal{H}_E(G) = \{0\}$.

Demonstração: Para provar o primeiro item do teorema, sejam n um inteiro não negativo e P um polinômio não nulo em $\mathcal{P}_+(E)$ dado pela soma $P(x) = \sum_{|\gamma|=0}^{n} a_\delta x^\delta$. Pelo Lema 4.3.1,

$$P = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha(s,a)\varphi_\alpha.$$

Mostremos que $P \notin \mathcal{H}_E(G)$, independentemente do conjunto $\{a_\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : 0 \le |\delta| \le n\}$.

Como os coeficientes de P são não negativos,

$$\|P\|_G^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\alpha!\sigma^{|2\alpha|}}{2^{|\alpha|}} B_\alpha(s,a)^2 \geq a_n(m)^2 \sum_{|\alpha|=n}^{\infty} \frac{\alpha!\sigma^{|2\alpha|}}{2^{|\alpha|}} s_{\alpha-\delta}^2 = a_n(m)^2 \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\delta)!\sigma^{2(|\alpha|+n)}}{2^{|\alpha|+n}} s_\alpha^2,$$

onde $a_n(\mathfrak{m}) = \text{mín}\{a_\beta : |\beta| = n\}$ e $|\delta| = n$. Como $s_\alpha = 0$ quando, pelo menos, um α_j é ímpar,

$$\|P\|_G^2 \geq \frac{a_n(\mathfrak{m})^2\sigma^{2n}}{2^n} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+\delta)!}{4^{|\alpha|}} s_{2\alpha}^2 \sigma^{4|\alpha|} = \frac{a_n(\mathfrak{m})^2\sigma^{2n}}{2^n} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+\delta)!}{4^{|\alpha|}\alpha!^2}$$

e, consequentemente

$$\|P\|_G^2 \geq \frac{a_n(\mathfrak{m})^2\sigma^{2n}}{2^n} \prod_{j=1}^{q} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{(2\alpha_j+\delta_j)!}{4^{\alpha_j}\alpha_j!^2}. \tag{4.3}$$

Voltando em (3.5), vemos que

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{(2\alpha+\delta)!}{4^{|\alpha|}\alpha!^2} = \lim_{|\alpha|\to\infty} \prod_{j=1}^{q} \frac{(2\alpha_j+\delta_j)!}{4^{\alpha_j}\alpha_j!^2} = \infty,$$

sempre que $\delta_j \geq 1$, $j = 1,\ldots,q$, implicando que $P \notin \mathcal{H}_E(G)$, nesses casos. Também, quando $\delta = (0,\ldots,0)$, por (3.6)

$$\lim_{\alpha_j\to\infty} \frac{\frac{(2\alpha_j)!}{4^{\alpha_j}\alpha_j!^2}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad j = 1,\ldots,q$$

e, pelo teste de comparação no limite, o polinômio P também não pertence a $\mathcal{H}_E(G)$ em tais casos. Finalmente, quando δ não se enquadra em um dos dois casos detalhados acima, um misto das duas provas acima revela que, também, nesses casos $\|P\|_G = \infty$. Como **(2)** decorre do primeiro item, a prova está finalizada. ■

A seguir desenvolvemos as versões multi-índices para os lemas 3.3.1 e 3.3.2. Consideremos

$$\alpha_{\mathfrak{m}} := \text{mín}\{\alpha_j : j = 1,\ldots,q\}.$$

Lema 4.3.2 *Seja* (s_γ) *a sequência* (4.2). *Se* $\alpha_{\mathfrak{m}} \geq \sigma^{-2} - 1$, *então*

$$s_{2(\alpha+\beta)} \leq \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2(\alpha_{\mathfrak{m}}+1)} \leq \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2}, \quad \beta_j \geq 1,\, j = 1,\ldots,q.$$

Demonstração: Primeiramente, usamos a definição de (s_γ) para ver que

$$s_{2(\alpha+\beta)} = \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\sigma^{2(\alpha_j+\beta_j)}(\alpha_j+\beta_j)!}.$$

Se $\alpha_j \geq \alpha_\mathfrak{m} \geq \sigma^{-2} - 1$ e $\beta_j \geq 1, \ldots,\ j = 1, \ldots, q$, então pelo Lema 3.3.1

$$s_{2(\alpha+\beta)} \leq \left(\prod_{j=1}^{q} s_{2\alpha_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\sigma^2(\alpha_j+1)} \right) \leq \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{\alpha_j+1}.$$

A definição de $\alpha_\mathfrak{m}$ completa a prova. ■

Para o próximo lema, dados $\{a_{2\delta} \in \mathbb{R} : 0 \leq |\delta| \leq m\}$, definimos

$$D_m(q) := \frac{2(|A_0| + \cdots + |A_{2(m-1)}|)}{\sigma^2 |\mathcal{A}_{2m}|},$$

onde

$$A_{2k} := \text{máx}\{a_{2\delta} : |\delta| = k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

enquanto que

$$\mathcal{A}_{2m} := \text{mín}\{a_{2\delta} : |\delta| = m\}.$$

Lema 4.3.3 *Sejam m um inteiro positivo e $\{a_{2\delta} \in \mathbb{R} : 0 \leq |\delta| \leq m\}$. Se $\mathcal{A}_{2m}$ é o menor elemento de $\{a_{2\delta} : |\delta| = m\}$, então*

$$\left| \sum_{0 \leq |\delta| \leq 2m-1,\, \gamma+\delta = 2(\alpha+\beta)} s_\gamma a_\delta \right| \leq \frac{|\mathcal{A}_{2m}|}{2} s_{2\alpha},$$

sempre que

$$\alpha_\mathfrak{m} \geq \textit{máx}\{\sigma^{-2} - 1, D_m(q) - 1\}, \quad \beta_j - \delta_j \geq 1, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{4.4}$$

Demonstração: Iniciamos a prova fixando multi-índices α, β tais que

$$\alpha_\mathfrak{m} \geq \sigma^{-2} - 1, \quad \beta_j - \delta_j \geq 1, \quad j = 1, \ldots, q, \quad 0 \leq |\delta| \leq 2m.$$

Mostremos que

$$M_{2(\alpha+\beta)} := \left| \sum_{0 \leq |\delta| \leq 2m-1,\, \gamma+\delta = 2(\alpha+\beta)} s_\gamma a_\delta \right|$$

é majorada conforme a afirmação do lema. A definição de (s_γ), leva-nos a igualdade

$$M_{2(\alpha+\beta)} = \left| \sum_{0\leq|\delta|\leq 2m-2,\, 2\gamma+\delta=2(\alpha+\beta)} s_{2\gamma} a_\delta \right|$$

e, usando as constantes A_{2k}, chegamos a desigualdade

$$M_{2(\alpha+\beta)} \leq \left| A_0 \sum_{|\delta|=0,\gamma=\alpha+\beta} s_{2\gamma} + A_2 \sum_{|\delta|=1,\gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} + \cdots + A_{2m-2} \sum_{|\delta|=m-1,\gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} \right|.$$

Como $\alpha_j \geq \sigma^{-2} - 1$ e $\beta_j - \delta_j \geq 1$, pelo Lema 4.3.2,

$$s_{2(\alpha+\beta-\delta)} \leq \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2(\alpha_m + 1)}, \quad 0 \leq |\delta| \leq m-1$$

e, então

$$M_{2(\alpha+\beta)} \leq \left| A_0 \sum_{|\delta|=0,\gamma=\alpha+\beta} + A_2 \sum_{|\delta|=1,\gamma+\delta=\alpha+\beta} + \cdots + A_{2m-2} \sum_{|\delta|=m-1,\gamma+\delta=\alpha+\beta} \right| \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2(\alpha_m+1)}.$$

Como

$$\sum_{\gamma+\zeta=\alpha+\beta} \leq \sum_{\gamma=\alpha+\beta}, \quad |\zeta| = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$M_{2(\alpha+\beta)} \leq (|A_0| + |A_2| + \cdots + |A_{2m-2}|) \frac{s_{2\alpha}}{\sigma^2(\alpha_m+1)} \sum_{\gamma=\alpha+\beta} 1, \quad \alpha_j \geq \sigma^2 - 1.$$

Dessa forma, a desigualdade $M_{2(\alpha+\beta)} \leq 2^{-1} |\mathcal{A}_{2m}| s_{2\alpha}$ ocorre se se somente se

$$D_m(q) \leq \frac{(\alpha_m + 1)}{\sum_{\gamma=\alpha+\beta} 1} \leq \alpha_m + 1, \quad \alpha_m \geq \sigma^{-2} - 1.$$

Como $\alpha_j \geq \alpha_m$, $j = 1, \ldots, q$, a desigualdade do lema vale sempre que

$$\alpha_j \geq \text{máx}\{\sigma^{-2} - 1, D_m(q) - 1\}, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Assim, a prova do lema está finalizada. ∎

De fato, o lema anterior é uma extensão do Lema 3.3.2, uma vez que $D_m(1) = d_m$ e as demais identificações também valem. Adicionalmente, vemos que a desigualdade do lema ocorre, usando $\alpha_m \geq \text{máx}\{\sigma^{-2}, D_m(q)\}$ em vez de $\alpha_m \geq \text{máx}\{\sigma^{-2} - 1, D_m(q) - 1\}$.

Lema 4.3.4 *Sejam m um inteiro positivo e $\{a_{2\delta} \in \mathbb{R} : 0 \leq |\delta| \leq m\}$. Se $\mathcal{A}_{2m}$ é o menor elemento* *de* $\{a_{2\delta} : |\delta| = m\}$, *então*

$$\left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma|\geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta} \right| \geq \frac{|\mathcal{A}_{2m} s_{2\alpha}|}{\sigma^2},$$

sempre que (4.4) *ocorrer.*

Demonstração: Suponhamos que α e β são multi-índices e $\mathcal{A}_{2m}$ como na hipótese. Segue que

$$\left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma|\geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta} \right| \geq |\mathcal{A}_{2m}| \left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma|\geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} \right|.$$

Usando o Lema 4.3.2, vemos que

$$\left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma|\geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta} \right| \geq \frac{|\mathcal{A}_{2m} s_{2\alpha}|}{\sigma^2} \left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma|\geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} 1 \right|,$$

implicando na desigualdade da afirmação do lema. ■

Agora, estamos prontos para enunciarmos e provarmos o último teorema desta seção.

Teorema 4.3.2 *As seguintes propriedades ocorrem:*
(1) $\mathcal{P}_{\pm}(E) \cap \mathcal{H}_E(G) = \{0\}$.
(2) $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{H}_E(G) = \{0\}$.

Demonstração: Suponhamos que P é um polinômio não nulo de grau n em $\mathcal{P}_{\pm}(E)$. Pelo Lema 4.3.1,

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B_\alpha(s,a)\varphi_\alpha(x), \quad x \in E.$$

Mostremos que

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha!\sigma^{|2\alpha|}}{2^{|\alpha|}}} B_\alpha(s,a) \right) \notin \ell^2,$$

qualquer que seja o conjunto $\{a_\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 0 \leq |\delta| \leq n\}$. Quando $n = 0$, pelo Teorema 4.3.1, o polinômio não nulo $P(x) = a_{(0,0,\ldots,0)}$ não é um elemento de $\mathcal{H}_E(G)$. Assumimos, então, que $n = 2m$, para algum inteiro positivo m e mostremos que a subsequência

$$\left(\sqrt{\frac{(2\alpha+2\beta)!\,\sigma^{|4(\alpha+\beta)|}}{4^{|\alpha+\beta|}}} B_{2(\alpha+\beta)}(s,a) \right) \notin \ell^2, \quad |\alpha| \geq 0,$$

onde $\beta_j - \delta_j \geq 1,\ j = 1, \ldots, q$. Fixemos, momentaneamente, o multi-índice α de módulo não negativo e usamos a definição de (s_γ) para vermos que

$$B_{2(\alpha+\beta)}(s,a) = \sum_{0 \leq |\delta| \leq 2m,\, |\gamma| \geq 0,\, \gamma+\delta=2(\alpha+\beta)} s_\gamma a_\delta = \sum_{0 \leq |\delta| \leq m,\, |\gamma| \geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta}.$$

Logo, nas notações do lema anterior

$$\begin{aligned} M_{2(\alpha+\beta)} &= \left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma| \geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta} - B_{2(\alpha+\beta)}(s,a) \right| \\ &\geq \left| \sum_{|\delta|=m,\, |\gamma| \geq 0,\, \gamma+\delta=\alpha+\beta} s_{2\gamma} a_{2\delta} \right| - \left| B_{2(\alpha+\beta)}(s,a) \right|. \end{aligned}$$

Desta desigualdade e dos lemas 4.3.3 e 4.3.4, inferimos que

$$\left| B_{2(\alpha+\beta)}(s,a) \right| \geq \frac{|\mathcal{A}_{2m} s_{2\alpha}|}{\sigma^2} - M_{2(\alpha+\beta)} \geq |\mathcal{A}_{2m} s_{2\alpha}| \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right),$$

sempre que $\alpha_m \geq \text{máx}\{\sigma^{-2} - 1, D_m(q) - 1\}$. Segue que

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(2\alpha + 2\beta)!\sigma^{4|\alpha+\beta|}}{4^{|\alpha+\beta|}} B_{2(\alpha+\beta)}(s,a)^2 \geq C \sum_{\alpha_m \geq \text{máx}\{\sigma^{-2}-1, D_m(q)-1\}} \frac{(2\alpha+2\beta)!}{4^{|\alpha|}} \sigma^{4|\alpha|} s_{2\alpha}^2,$$

onde

$$C = \left(2 - \sigma^2\right)^2 \frac{\sigma^{4(|\beta|-1)} \mathcal{A}_{2m}^2}{4^{(|\beta|+1)}}.$$

Agora, o restante desta demostração segue os passos do final da prova do item **(1)** do Teorema 4.3.1. O caso em que n é um inteiro ímpar é tratado de modo similar.

O item **(2)** é consequência da decomposição $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_+(E) \cup \mathcal{P}_-(E) \cup \mathcal{P}_\pm(E)$. Portanto, a prova está concluída. ■

4.4 Famílias de funções particulares de $\mathcal{H}_E(G)$

Nesta seção, mostramos que há duas famílias de funções que possuem ou não interseção com $\mathcal{H}_E(G)$. Portanto, o assunto aqui abordado é a versão multi-variável da Seção 3.4.

Para escalares reais t e r, definimos funções $F_t : J \to \mathbb{R}$ e $H_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sendo

$$F_t(x) = e^{-t\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}}, \quad x \in E \quad \text{e} \quad H_r(x) = \left(\prod_{j=2}^{q} e^{-x_j^2/\sigma^2} \right) h_r(x_1), \quad x \in \mathbb{R}^q,$$

onde as funções h_r foram definidas no parágrafo anterior ao Teorema 3.4.1.

Em particular, o teorema a seguir mostra que

$$\left\| e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{\sigma^2}} \right\|_G = 1, \quad \sigma > 0.$$

Teorema 4.4.1 *Se $t \in (0,2)$, então F_t pertence a $\mathcal{H}_E(G)$ e*

$$\|F_t\|_G^2 = \frac{1}{\sqrt{t^q(2-t)^q}}.$$

Demonstração: Inicialmente, fixamos t em $\mathbb{R}$ e expressamos F_t na forma

$$F_t(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} \prod_{j=1}^{q} e^{\frac{(1-t)}{\sigma^2}x_j^2} = e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} \prod_{j=1}^{q} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{(1-t)^{\alpha_j}}{\sigma^{2\alpha_j}\alpha_j!} x_j^{2\alpha_j} = e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} \prod_{j=1}^{q} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} a_{\alpha_j}(t) x_j^{\alpha_j}, \quad x \in E,$$

onde $(a_j(t))$ é a sequência definida em (3.7). Equivalentemente,

$$F_t(x) = \sum_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_q\}=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{q} a_{\alpha_j}(t) \right) e^{-\frac{\|x\|^2}{\sigma^2}} x^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)}, \quad x \in E.$$

Recordando a definição de $c_j(t)$ como em (3.8), obtemos

$$\|F_t\|_G^2 = \sum_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_q\}=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\sigma^{2\alpha_j}\alpha_j!}{2^{\alpha_j}} a_{\alpha_j}(t)^2 \right) = \prod_{j=1}^{q} \sum_{\beta_j=0}^{\infty} c_{\beta_j}(t).$$

Pelo Teorema 3.4.1, se $t \in (0,2)$, então cada fator do produtório acima é absolutamente convergente e

$$\sum_{\beta_j=0}^{\infty} c_{\beta_j}(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}, \quad j = 1, \ldots, q,$$

implicando na afirmação do teorema. ■

Consideramos $L^1(\mathbb{R}^q)$, o conjunto das classes de funções $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ que são Lebesgue mensuráveis sobre $\mathbb{R}^q$ tais que

$$\|F\|_1 = \int_{\mathbb{R}^q} |F(x)| dx < \infty.$$

Finalizamos esta dissertação com o teorema a seguir.

Teorema 4.4.2 *As seguintes propriedades valem:*

(1) $\left(\prod_{j=2}^{q} e^{-x_j^2/\sigma^2} \right) \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}^q}(G)$.

(2) *O espaço Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^q}(G)$ não está contido em $L^1(\mathbb{R}^q)$.*

Demonstração: Suponha que $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j$ é uma função de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ – Ou seja,

$$\left(\sqrt{\frac{\sigma^{2j} j!}{2^j}}\, a_j\right) \in \ell^2.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}^q$, a função

$$F(x) = \left(\prod_{j=2}^{q} e^{-x_j^2/\sigma^2}\right) f(x_1) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_j \varphi_\alpha(x),\ \alpha = (j,0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}_+^q$$

é um elemento de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^q}(G)$. Assim, o item **(1)** está provado.

Para provar **(2)**, consideramos a função H_r do início desta seção. Pelo Teorema 3.4.2, para cada $r \in (1,\infty)$, a função h_r pertence a $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$. Então, pelo primeiro item do teorema $H_r \in \mathcal{H}_E(G)$, $r \in (1,\infty)$. Mostremos, entretanto, que $H_r \notin L^1(\mathbb{R}^q)$, quando $r \in (1,3/2]$. De fato, primeiramente notamos que as integrais

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/\sigma^2} dx_j = \sigma\sqrt{\pi}, \quad j = 2,3,\cdots,$$

juntamente com o Teorema de Fubini-Tonelli([20, p. 67]) implicam em

$$\int_{\mathbb{R}^{q-1}} \left(\prod_{j=2}^{q} e^{-x_j^2/\sigma^2}\right) dx_2 dx_3 \ldots dx_q = \prod_{j=2}^{q} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/\sigma^2} dx_j = \prod_{j=2}^{q} \sigma\sqrt{\pi} = (\sigma\sqrt{\pi})^{q-1}.$$

Integrando iteradamente, obtemos

$$\|H_r\|_1 = \int_{\mathbb{R}^q} \left| \prod_{j=2}^{q} e^{-x_j^2/\sigma^2} h_r(x_1) \right| dx_1 dx_2 \ldots dx_q = (\sigma\sqrt{\pi})^{q-1} \|h_r\|_1.$$

Novamente, pelo Teorema 3.4.2, a norma $\|H_r\|_1$ é infinita quando $r \in (1,3/2]$. ■

Bibliografia

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.

[2] D. Alpay and T. M. Mills. A family of Hilbert spaces which are not reproducing kernel Hilbert spaces. J. Anal. Appl. v. 1(2003), no. 2, p. 107-111.

[3] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy. *Special functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 71. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] N. Aronszajn. Theory of Reproducing Kernels, Transactions of the American Mathematical Society, v. 68(1950), no. 3, p. 337– 404.

[5] N. Batir. Sharp inequalites for factorial n, Proyecciones 2008. **27**(1): p. 97–102.

[6] S. Bergman. *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Published by the American Mathematical Society, 1950.

[7] C. Berg, J.P.R. Christensen and P. Ressel. *Harmonic analysis on semigroups: Theory of positive definite and related functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[8] C. Berg and G. Forst. *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[9] A. Berlinet and C. Thomas-Agnan. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*, With a preface by Persi Diaconis, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.

[10] T.M. Bisgaard and S. Sásvari. *Characteristic Functions and Moment Sequences: Positive Definiteness in Probability*. Nova Science Pub Incorporated, 2000.

[11] J. Buescu. Positive integral operators in unbounded domains, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 296(2004), no. 1, p. 244–255.

[12] J. Buescu, A.C. Paixão, F. Garcia and I. Lourtie. Positive-definiteness, integral equations and Fourier transforms, *J. Integral Equations Appl.*, v. 16(2004), no. 1, p. 33–52.

[13] J. Buescu, J. and A.C. Paixão. Positive definite matrices and differentiable reproducing kernel inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 320 (2006), p. 279–292.

[14] J. Buescu and A.C. Paixão. Inequalities for differentiable reproducing kernels and an application to positive integral operators, *J. Inequal. Appl.*, 2006 (2006), p. 1–9.

[15] C. Carmeli, E. De Vito and A. Toigo. Vector valued reproducing kernel Hilbert spaces of integrable functions and Mercer theorem, *Analysis and Applications*, v. 4(2006), no. 4, p. 377–408.

[16] W. Cheney and W. Light. *A course in approximation theory.* Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101. Americam Mathematical Socity, Providence, RI, p. 259, 2009.

[17] F. Cucker and S. Smale. On the mathematical foundations of learning, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, v. 39(2001), no. 1, p. 1–49.

[18] J.B. Conway. *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 96, 2nd ed., Springer, 1990.

[19] W.F. Donoghue. *Distributions and Fourier transforms*, Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1969.

[20] G.B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience publication, John Wiley and Sons, 2nd ed., New York, 1999.

[21] H. Groemer. *Geometric aplications of Fourrier series and spherical harmonics. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge University Press, 1996.

[22] T. Jordão and V.A. Menegatto. Weighted Fourier-Laplace transforms in reproducing kernel Hilbert spaces on the sphere. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 411(2014), p. 732-741.

[23] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1985.

[24] J. Mercer. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, Phil, Trans. Royal Soc. A 209(1909), p. 415-446.

[25] S. Saitoh. *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189, Longman Scientific and Technical, Harlow, copublished in the United States with John Wilwy and Sons, Inc., New York, 1988.

[26] I.J. Schoenberg. Metric spaces and positive definite functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 44(1938), p. 522–536.

[27] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, Wilwy Classics Library. John and Sons, Inc. New York, 1989.

[28] V.A. Menegatto and A.P. Peron. *Positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl., v. 254(2001), no. 1, p. 219-232.

[29] H. Q. Minh. Some properties of gaussian reproducing kernel hilbert spaces and their implications for function approximation and learning theory, Constr. Approx., v. 32(2010): p. 307–338.

[30] E.D. Rainville. *Special Functions.* The Macmillan Co., New York, 1960.

Índice

Símbolos e Notações

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^q$	Espaço euclidiano real q-dimensional
X	Um conjunto arbitrário com interior não vazio de $\mathbb{R}^q$
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$\mathcal{H}_X$	Espaço Hilbert de funções reais sobre X
J	Subconjunto de $\mathbb{R}$, cujo interior é não vazio
E	Subconjunto de $\mathbb{R}^q$, cujo interior é não vazio
K	Núcleo positivo definido sobre X
$\mathcal{N}$	Núcleo condicionalmente negativo definido sobre X
$\mathcal{H}_X(K)$	Espaço Hilbert de funções reais sobre X admitindo o núcleo de reprodução K
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno de $\mathbb{R}^q$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$	Produto interno do espaço pré-Hilbert $\mathcal{V}$
$\| \cdot \|_{\mathcal{V}}$	Norma sobre um espaço vetorial $\mathcal{V}$
$\mathbb{P}(\mathbb{R}^q)$	Espaço de polinômios em q variáveis reais
$\mathbb{P}(J)$	Espaço de polinômios em $\mathbb{P}(\mathbb{R}^q)$ restritos ao domínio J
$\mathbb{P}(E)$	Espaço de polinômios em $\mathbb{P}(\mathbb{R}^q)$ restritos ao domínio E
S^{q-1}	Esfera unitária de $\mathbb{R}^q$
$d\nu_q$	Elemento infenitesimal da medida de Borel sobre S^{q-1}
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos inteiros não negativos
α	Multi-índice com q coordenadas em $\mathbb{Z}_+$
$N(\alpha, q)$	Quantidade de monômios distintos da forma x^α, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^q$
$\delta_{j,k}$	Função delta de Kronecker
$L^1(J)$	Espaço vetorial real das funções Lebesgue-integráveis sobre J
$L^1(E)$	Espaço vetorial real das funções Lebesque-integráveis sobre E
$\mathcal{G}$	Função gaussiana de domínio J
G	Função gaussiana de domínio E
e_j	j-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^q$