

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de um modelo epidemiológico do tipo SIRS
com taxa de incidência não linear**

Karine Gonçalves da Fonseca

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES.

ITAJUBÁ, 13 DE SETEMBRO DE 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudo de um modelo epidemiológico do tipo SIRS
com taxa de incidência não linear**

Karine Gonçalves da Fonseca

Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ, 13 DE SETEMBRO DE 2017

Aos meus pais, por todo amor e por me deixarem trilhar meus caminhos.

Agradecimentos

A Deus por iluminar meu caminho, me dar forças para seguir sempre em frente e colocar pessoas tão especiais a meu lado, sem as quais certamente não teria dado conta!

A meus pais, Imaculada e Ismael, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade. Obrigada pelo amor incondicional!

À minha irmã Kálita pelo apoio, em especial no primeiro ano do curso, incentivo e ajuda na realização deste trabalho. Obrigada por me ouvir e por estar junto de mim no último ano do mestrado. E ao meu irmão Kaleb sou grata pelas orações.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos Fernandes por sua dedicação, paciência, apoio ao longo desta jornada e pela escolha do tema que muito me agradou.

Aos professores do PMAT que ministraram disciplinas na minha turma. Em especial, ao professor Denis, por se disponibilizar a me ajudar com tamanha boa vontade e ao professor Bráulio pelos valiosos conselhos.

A meu amigo Coutinho, o qual já está pronto para ser um excelente orientador, por estar a disposição para me ajudar tanto a entender, contas e teoremas, e também pelas valiosas sugestões quanto a escrita deste texto. O nome dele deveria estar como meu coorientador. E ao meu amigo Marco Antônio por usar sua inteligência infinita para sanar minhas infinitas dúvidas.

Ao meu namorado Luis, pelo apoio, por me ajudar com os cálculos na minha dissertação, com opinião e por me fazer acreditar que sou capaz.

A minha amiga/irmã Mariele por ter ouvido e ido me alegrar com sua presença, e a dos seus dois lindos filhos, todas as vezes que fui à Formiga. E a minha amiga/irmã Mariana, por me alegrar com suas mensagens diárias e pelas orações por mim.

As minhas amigas da graduação Fernanda, Hoyama e Thais pelo apoio à distância e por confiarem em meu trabalho.

A turma do mestrado 2015. Em especial, a Eveline, Marco, Marcos, Michele e Raquel por sempre ajudar com minhas dúvidas, pelas conversas e pelos passeios. Obrigada pela prontidão e ensinamentos. Um agradecimento especial também a dois alunos do bacharelado, meu grande amigo Matheus Cassiano e ao Ronísio. E ainda, aos meus amigos Dairo e Andrelucio.

Ao pessoal da igreja, em especial, Ester, Pamela, Tiago, Rose e ao maestro Josué por suas orações e preocupação com meu bem estar.

Ao Danilo, por sua edificante companhia durante o almoço, os quais foram de muito aprendizado, e pelo tempo que dedicou aos estudos semanais que realizávamos.

À banca pelas valiosas sugestões e trabalho dedicado a avaliação do presente estudo.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o mestrado.

E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para esta dissertação tornar-se realidade, o meu MUITO OBRIGADA.

Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do sol.

Eclesiastes 3:1

Resumo

O objetivo principal deste trabalho foi explorar a dinâmica de um modelo epidemiológico com a taxa de incidência não linear $\beta SI^p/(1+\alpha I^q)$. Além de estudar o modelo com a taxa de incidência geral, estudou-se dois casos com p e q fixos ($p = 1$ e $q = 2$, incidência não monótona; $p = q = 2$, incidência saturada). A existência e a estabilidade dos múltiplos equilíbrios endêmicos do modelo epidemiológico foram analisadas. Mostra-se que o número de indivíduos infecciosos tende a zero à medida que o tempo evolui ou existe uma região do gráfico de tal forma que a doença será persistente se a posição inicial estiver nessa região e a doença desaparecerá se a posição inicial estiver fora desta região. A existência de ciclos limite também é discutida. A teoria da bifurcação local foi aplicada para explorar o comportamento dinâmico do modelo. As formas normais do modelo foram obtidas para diferentes tipos de bifurcações, incluindo as bifurcações de Hopf e Bogdanov-Takens as quais somente não ocorrem quando a taxa de incidência é não monótona. O primeiro coeficiente de Liapunov foi calculado para determinar as bifurcações de Hopf.

Palavras-chave: Epidemiologia, taxa de incidência não linear, bifurcações.

Abstract

The main objective of this work was to explore the dynamics of an epidemiological model with the nonlinear incidence rate $\beta SI^p/(1 + \alpha I^q)$. In addition to study the model with a general incidence rate, we studied two cases with fixed p and q ($p = 1$ and $q = 2$ non-monotonic incidence; $p = q = 2$ saturated incidence). The existence and stability of multiple endemic equilibria of the epidemiological model were analyzed. It was shown that the number of infectious individuals tends to zero as time evolves or there is a region of the graph such that the disease will be persistent if the initial position is in that region and the disease will disappear if the initial position is outside this region. The existence of limit cycles was also discussed. The local bifurcation theory was applied to explore the dynamic behavior of the model. Normal forms of the model were obtained for different types of bifurcations, including Hopf and Bogdanov-Takens bifurcations, which only do not occur when the incidence rate is non-monotonic. The first Lyapunov coefficient was calculated to determine the Hopf bifurcations.

Keywords: Epidemiology, nonlinear incidence rate, bifurcations.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Resultados Preliminares	6
2.1 Resultados Diversos	6
2.2 Resultados de EDO	7
2.3 Bifurcações	12
2.3.1 Sela-nó	13
2.3.2 Hopf	14
2.3.3 Bogdanov-Takens	15
3 Modelo com $p = 1$ e $q = 2$	18
3.1 Equilíbrios do modelo	19
3.2 Análise Qualitativa	21
3.3 Discussão dos Resultados	29

4	Modelo com $p = q = 2$	31
4.1	Pontos de Equilíbrio	32
4.2	Análise Qualitativa	33
4.3	Bifurcação Bogdanov-Takens	54
4.4	Discussão dos Resultados	61
5	Modelo com $p > 0$ e $q \geq 0$	63
5.1	Equilíbrios	64
5.2	Análise Qualitativa	68
5.3	Bifurcação	73
5.3.1	Bifurcação de Hopf	73
5.3.2	Bifurcação de Bogdanov-Takens	77
5.4	Discussão dos Resultados	81

Lista de Figuras

1.1	Fluxograma do modelo estudado.	4
2.1	Plano traço-determinante.	9
2.2	Diagrama da bifurcação Bogdanov-Takens.	17
3.1	Função da taxa de incidência não monótona g	18
4.1	Função r_1	35
4.2	Retratos de fase do sistema (4.3): (a) quando a doença desaparece e (b) quando a doença oscila entre a persistência e a extinção de acordo com a posição inicial.	40
4.3	Posição da variedade estável e da variedade instável de P_1	41
4.4	Retrato de fase do sistema (4.3) com um ciclo limite instável.	45
4.5	Divisão de ciclo limite semi-estável de um campo vetorial rodado.	49
4.6	Divisão dos ciclos C_1 e C_2	51

Capítulo 1

Introdução

A ocorrência de surtos tem sido observada em muitas doenças infecciosas, tais como varíola, gripes, sarampo, entre outras, como pode ser visto em [3]. Os modelos matemáticos epidemiológicos têm como objetivo compreender melhor todo o processo de propagação e transmissão de uma doença para assim, poder propor medidas que levem a um decréscimo na transmissão da mesma. De fato, como afirma Hethcote em [3], esses modelos são usados para ajudar em programas de detecção e controle, planejamento, prevenção e tratamento de doenças.

Um modelo epidêmico clássico é o modelo SIR, subdivisão desenvolvida pela primeira vez por Kermack e McKendrick em 1927, conforme [1], onde a população hospedeira é dividida em três classes distintas: os susceptíveis S , os infectados I e os recuperados R . Essa divisão é apropriada para algumas doenças infecciosas que confere imunidade longa ou permanente como catapora, varíola, sarampo, entre outras. Contudo, algumas doenças e influenzas fazem com que os indivíduos removidos ou recuperados voltem ao estado de susceptível, neste caso temos o chamado modelo SIRS. Vale observar que as siglas para modelos de epidemiologia são frequentemente baseados nos padrões de fluxo entre os classes em que a população é dividida.

Além da distinção básica entre doenças que a recuperação confere imunidade permanente contra a reinfecção e as cuja recuperação confere somente imunidade temporária, é possível uma estrutura compartimental mais complicada. Por exemplo, existem modelos

do tipo SEIR, com um período exposto E entre ser infectado e tornar-se infeccioso, ou ainda, modelos do tipo SITR, onde T é o compartimento dos indivíduos em tratamento. Existem também doenças que são transmitidas não diretamente de humano para humano, mas por vetores, agentes (geralmente insetos) que são infectados por seres humanos e que, então, transmitem a doença aos humanos, como por exemplo a malária.

A taxa de incidência em um modelo epidemiológico é o número de novos infectados por unidade de tempo. Nos modelos clássicos presentes na literatura epidemiológica, a taxa de incidência assumida foi proporcional ao produto do número de susceptíveis e infecciosos. Essa taxa é denominada incidência de ação em massa ou incidência bilinear, a qual aumenta com o aumento do número de susceptíveis e infecciosos. O que muitas vezes é chamado de modelo de epidemia de Kermack-McKendrick é, na verdade, um caso especial do modelo geral apresentado em [7].

Conforme [1], a taxa de incidência bilinear é bastante irrealista, exceto possivelmente nos estágios iniciais de uma epidemia em uma população de tamanho moderado. É mais realista assumir uma taxa de incidência que seja uma função não estritamente crescente em pelo menos uma das variáveis, já que com o passar do tempo, provavelmente, a população começará a se prevenir da infecção. Ao alterar a suposição que a taxa de incidência seja bilinear, o sistema pode exibir alguns comportamentos qualitativamente diferentes que poderiam ser epidemiologicamente importantes. Em particular, trabalharemos com uma taxa de incidência não linear a qual não é estritamente crescente na variável I .

A fim de incorporar os efeitos das mudanças comportamentais, em [9] introduziram uma taxa de incidência não linear da forma

$$g(I)S = \frac{\beta I^p S}{1 + \alpha I^q} \quad (1.1)$$

sendo que βI^p mede a força da infecção da doença, $1/(1 + \alpha I^q)$ descreve os efeitos inibitórios pela mudança de comportamento dos indivíduos susceptíveis quando o número de indivíduos infectados cresce. Os termos β e p são constantes positivas, e q e α são constantes não negativas. Note que a taxa de incidência bilinear βSI é um caso especial de (1.1) com $p = 1$ e $\alpha = 0$ ou $q = 0$.

Segundo [15], a função não linear $g(I)$ dada pela equação (1.1) inclui três tipos:

- (i) Função de incidência ilimitada: $p > q$. A título de exemplo, esse caso foi estudado por Hethcote e Levin em [4] tomando $p = q + 1$.
- (ii) Função de incidência não monótona: $p < q$. O caso com $p = 1$ e $q = 2$ foi estudado por Xião e Ruan em [16] e estudaremos no Capítulo 3.
- (iii) Função de incidência saturada: $p = q$. Estudada por Ruan e Wang em [11] o caso com $p = q = 2$ o qual analisaremos no Capítulo 4.

Neste trabalho, estudaremos o comportamento qualitativo de um modelo epidemiológico do tipo SIRS (Susceptível - Infectado - Recuperado - Susceptível) com taxa de incidência não linear dada por (1.1). O modelo analisado é determinístico, isto é, o comportamento da população é determinado completamente pelas hipóteses assumidas na formulação do modelo, o qual irá descrever o comportamento da doença após a mesma ter se estabelecido na população.

A população será dividida em três compartimentos distintos: susceptíveis S , infectados I e recuperados R . Os indivíduos susceptíveis são os que estão aptos a contrair a doença no instante t , os infectados são os que além de possuírem a doença podem transmiti-la e os recuperados são os que tiveram a infecção e estão com imunidade temporária. O modelo estudado será dado por um sistema de equações diferenciais já que a taxa de transferência de uma classe para outra será expressa como derivada de cada classe em função do tempo.

Consideramos o seguinte modelo SIRS cujo fluxograma pode ser visto na Figura 1.1

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - mS - \frac{\beta I^p}{1 + \alpha I^q} S + \nu R, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I^p}{1 + \alpha I^q} S - (m + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo

$A > 0$ a taxa de recrutamento da população;

$m > 0$ a taxa de morte natural da população;

$\mu > 0$ a taxa natural de recuperação de indivíduos infectados;

$\nu \geq 0$ a taxa com que os indivíduos recuperados perdem a imunidade;
 $\alpha \geq 0$ o parâmetro de medida dos efeitos psicológicos ou inibitórios;
 $\beta > 0$ a constante de proporcionalidade.

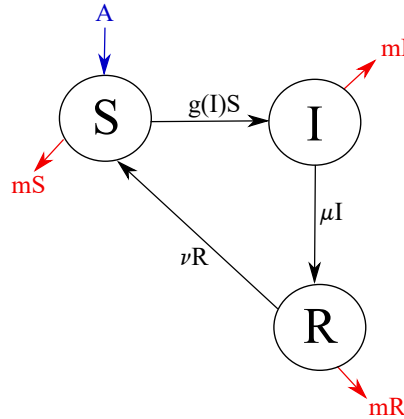


Figura 1.1: Fluxograma do modelo estudado.

Analisaremos o modelo (1.2) com taxa de incidência não linear: para os parâmetros $p > 0$ e $q \geq 0$, $p = q = 2$ e, por fim, com $p = 1$ e $q = 2$ baseadas nos artigos [5], [11] e [16], respectivamente. Como estamos trabalhando com populações, o interesse do estudo é nas soluções deste sistema diferencial no primeiro octante:

$$\mathbb{R}_+^3 = \{S, I, R \in \mathbb{R} : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}.$$

Somando as três equações em (1.2) e denotando o número da população total por $N(t)$, ou seja,

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t), \quad (1.3)$$

obtemos

$$\frac{dN}{dt} = A - mN$$

e assim, $N(t)$ tende para uma constante $N_0 = A/m$ quando t tende ao infinito.

Conforme é adotado em [9], assumimos que a população está em equilíbrio e investigamos o comportamento do sistema no plano $S + I + R = N_0$. Assim, N_0 representa o

equilíbrio populacional na ausência da doença. Logo, basta estudar o sistema reduzido

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I^p}{1 + \alpha I^q} \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - (m + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R, \end{cases} \quad (1.4)$$

já que podemos obter S usando que a população é suposta constante.

É possível mostrar que D é um conjunto positivamente invariante para o sistema (1.2)

$$D = \left\{ (I, R) \mid I \geq 0, R \geq 0, I + R \leq \frac{A}{m} \right\}. \quad (1.5)$$

Começaremos apresentando alguns resultados preliminares, no Capítulo 2, os quais serão utilizados no decorrer da dissertação, no Capítulo 3 analisaremos o caso em que $p = 1$ e $q = 2$, o caso para $p = q = 2$ será abordado no Capítulo 4 e, por fim, será analisado o caso com $p > 0$ e $q \geq 0$ arbitrários no Capítulo 5.

No intuito de descrever o comportamento qualitativo do modelo, analisaremos a existência de pontos de equilíbrio e de ciclos limite no sistema (1.4), utilizando o critério de Dulac descartaremos a existência de ciclos limite sob certas hipóteses e, também, estudaremos as possíveis bifurcações que podem ocorrer no sistema. Sempre teremos um ponto de equilíbrio que chamaremos de equilíbrio trivial, que é o caso onde a população está livre da doença e poderemos ter um ou mais pontos de equilíbrio que chamaremos de endêmico ou positivo. Também encontraremos o número de reprodução básica \mathcal{R}_0 , o qual define um limiar no qual o curso da infecção muda entre o desaparecimento e a persistência.

Neste trabalho o software *Wolfram Mathematica* 11 foi utilizado para obter determinadas expressões, sem o cálculo ter sido realizado manualmente, e somente para verificar outras. Em geral, salvo quando os cálculos foram bem simples ou muito complicados, buscou-se detalhar como as expressões foram encontradas. O software *Inkscape* 0.91 foi utilizado para confeccionar a maioria das figuras e o *Pplane* para fazer os retrato de fase.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos, de forma sucinta, alguns resultados fundamentais da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que se aplicam no estudo de sistemas não lineares do tipo $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Estamos interessados no que se refere à estabilidade dos pontos de equilíbrio de tais sistemas, obtidos resolvendo-se a equação $x' = F(x) = 0$, na existência de ciclos limites e em algumas bifurcações que podem ocorrer. Neste sentido, na primeira seção apresentamos alguns resultados gerais, na segunda seção damos algumas definições e relembramos resultados importantes em equações diferenciais ordinárias, como o Teorema de Hartman-Grobman e o Critério de Dulac, sendo este último relativo especificamente ao caso de sistemas planares, isto é, considerando-se $x \in \mathbb{R}^2$ e na terceira seção apresentamos as condições e formas normais para ocorrência das bifurcações do tipo sela-nó, Hopf e Bogdanov-Takens.

2.1 Resultados Diversos

Teorema 2.1.1 (Teorema da Função Implícita). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto e considere*

$$\begin{aligned} f : \quad A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

uma função de classe \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Suponha que $(a, b) \in A$ é tal que $f(a, b) = 0$ e que a sub-matriz $\partial f / \partial y$ do jacobiano é inversível. Então, existe uma vizinhança B de a em \mathbb{R}^m

e uma única função $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$, de mesma classe de diferenciabilidade que a função f , tal que $g(a) = b$ e

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in B.$$

Teorema 2.1.2 (Green). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, com interior não vazio, cuja fronteira é imagem de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechada, simples (sem auto-intersecção), C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K . Nestas condições,*

$$\oint_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

2.2 Resultados de EDO

Boa parte dos resultados apresentados nesta seção foram embasados nas referências [10] e [14].

Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um **campo vetorial** de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, em Δ é uma aplicação $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial F associamos a equação diferencial ordinária

$$x' = F(x). \tag{2.1}$$

A equação diferencial (2.1) é chamada de **autônoma** pois ela é independente da variável temporal t . As soluções da equação (2.1) são aplicações diferenciáveis $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)),$$

para todo $t \in J$ onde representamos por $\varphi(t, y)$ a solução do sistema (2.1) por y , isto é, $\varphi(0, y) = y$. Também dizemos que o conjunto $\gamma_y = \{\varphi(t, y) : t \in J\} \subseteq \Delta$, isto é, a imagem da solução de (2.1) por y , é a **órbita** de F por y . A decomposição de Δ em órbitas de F é chamada de **retrato de fase** de F .

Um **ponto de equilíbrio**, ou **ponto singular**, do campo vetorial F é um ponto $x_0 \in \Delta$ no qual $F(x_0) = 0$ e um **ponto regular** é um ponto $x_0 \in \Delta$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

Definição 2.2.1. Dizemos que x_0 é um **ponto de equilíbrio estável** para F se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq \Delta \cap U$ e $\varphi(t, x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$. E dizemos que x_0 é um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável** se, além de ser estável, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$, para qualquer $x \in W$. Se x_0 não é um ponto de equilíbrio estável, dizemos que ele é um **ponto instável**.

Definição 2.2.2. Considere o sistema de equações diferenciais de classe C^1 no plano

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

associado ao campo vetorial $F = (f(x, y), g(x, y))$ e seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de F . Dizemos que

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

é a linearização do campo vetorial F em p . Esta matriz é chamada de **Matriz Jacobiana**.

Definição 2.2.3. Um ponto singular p de um campo vetorial F de classe C^k , $k \geq 1$, chama-se **hiperbólico** se todos os autovalores da matriz Jacobiana $DF(p)$ têm parte real diferente de zero.

Definição 2.2.4. Seja p um ponto de equilíbrio de um campo vetorial $F = (f(x, y), g(x, y))$ de classe C^k , $k \geq 1$. Então p é denominado **degenerado**, se o determinante de $DF(p)$ é nulo.

Uma vez que estivermos analisando um sistema autônomo bidimensional de equações diferenciais, a abordagem natural encontrar os pontos de equilíbrio e calcular as respectivas linearizações para determinar, em cada caso, a estabilidade. Assim, conforme [12], analisando o traço e o determinante da matriz Jacobiana calculada no ponto de equilíbrio da equação (2.1), $A = DF(p)$, é possível classificar a estabilidade do ponto singular:

- Se $\det(A) < 0$, o ponto de equilíbrio é do tipo sela;

- Se $\det(A) > 0$, então precisamos avaliar o sinal do traço para sabermos a estabilidade do ponto singular: $\text{tr}A < 0$, então o equilíbrio é atrator ou estável, se $\text{tr}(A) > 0$, então o ponto de equilíbrio será repulsor ou instável, e se $\text{tr}(A) = 0$ temos um centro no caso linear.

Um resumo visual baseado na figura apresentada em [12] (pag. 64) de todos os diferentes tipos de sistema lineares pode ser analisado na Figura 2.1 onde o plano do traço e determinante é apresentado.

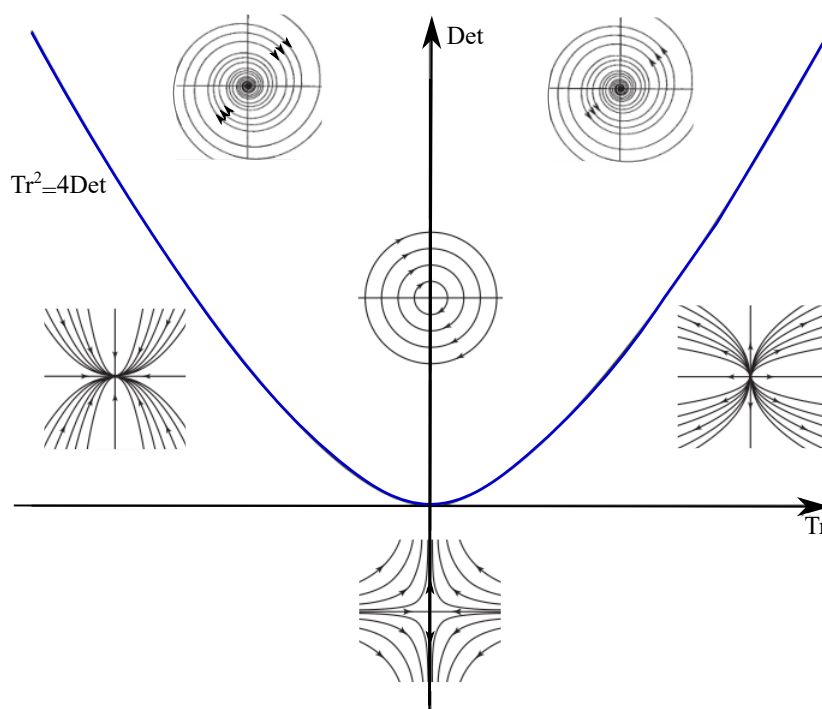


Figura 2.1: Plano traço-determinante.

Dois campos vetoriais serão considerados como equivalentes se seus retratos de fase são qualitativamente semelhantes, isto é, se um retrato de fase pode ser obtido a partir do outro por uma transformação contínua. Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 2.2.5. *Sejam Δ_1 e Δ_2 abertos em \mathbb{R}^n e considere $F_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais, os quais geram os fluxos $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que F_1 é **topologicamente conjugado** (res-*

pectivamente, C^r -conjugado) a F_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)),$$

para todo $(t, x) \in D_1$.

O teorema que apresentamos a seguir garante que existe uma vizinhança W de um ponto hiperbólico $x_0 \in \mathbb{R}^n$, na qual o sistema não linear (2.1) é topologicamente conjugado com a parte linear $A = D\mathbf{F}(x_0)$ numa vizinhança V da origem.

Teorema 2.2.1 (Hartman-Grobman). *Sejam $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de 0 em \mathbb{R}^n tais que $F|_W$ é topologicamente conjugado a $DF(p)|_V$.*

Definição 2.2.6. *Sejam $F : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ definido no aberto Δ e $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a órbita de F passando por p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_-(p) = -\infty$ e $\omega_+(p) = +\infty$, definimos os conjuntos α -limite e ω -limite de p por*

$$\begin{aligned} \omega(p) &= \{ q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty \}, \\ \alpha(p) &= \{ q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty \}. \end{aligned}$$

Definição 2.2.7. *Sejam Δ um aberto de \mathbb{R}^2 e $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica γ chama-se **ciclo limite** se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de F que intercepta V .*

Proposição 2.2.2. *Com as notações da definição acima, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limite (diminuindo V se necessário):*

- (i) *Estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- (ii) *Instável, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- (iii) *Semi-estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Ext } \gamma$; e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Int } \gamma$, ou o contrário.*

Segue agora um resultado que, sob hipóteses simples, estabelece o comportamento assintótico das órbitas de campos vetoriais no plano.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma órbita de f , definida para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma^+(p)$ esteja contida num compacto $K \subset \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que o campo F possui um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:*

- (a) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*
- (b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e de equilíbrio então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tendendo a um desses pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \pm\infty$.*
- (c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto de equilíbrio.*

Antes de apresentarmos os próximos resultados, relembremos que

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \operatorname{tr}(DF),$$

ou seja, o traço da matriz Jacobiana de F , é a divergência do campo $F = (f_1, f_2)$, que define uma função $\operatorname{div} F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.

A seguir temos um corolário (ver [10] e [14], pag. 216 e pag. 112, respectivamente) que trata sobre a estabilidade de um ciclo limite obtido diretamente da derivada da transformação de Poincaré.

Corolário 2.2.4. *Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $F = (f_1, f_2) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Seja γ uma órbita periódica de F de período T . Então, a órbita periódica $\gamma(t)$ é um ciclo limite estável se*

$$\int_0^T \operatorname{div} F(\gamma(t)) dt < 0$$

e um ciclo limite instável se

$$\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt > 0.$$

A órbita periódica γ pode ser um ciclo limite estável, instável ou semi-estável se esta integral for zero.

Em geral, não é possível determinar se um dado sistema de equações diferenciais possui órbitas periódicas ou não. Porém, existem alguns critérios que nos permitem descartar a existência de órbitas periódicas em sistemas planares. Segue um desses critérios.

Teorema 2.2.5 (Critério de Dulac). *Seja $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 , Δ aberto e simplesmente conexo em \mathbb{R}^2 . Se existir uma função $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que, ou $\text{div}(HF) < 0$ em Δ , ou $\text{div}(HF) > 0$ em Δ , então (2.1) não possui órbita fechada em Δ . Se N é uma região anular em Δ na qual $\text{div}(HF)$ não muda de sinal, então existe no máximo um ciclo limite do sistema (2.1) em N .*

Este último teorema pode ser encontrado em [10] (pag. 265). Se existir a função H do teorema anterior a mesma será chamada de função de Dulac.

2.3 Bifurcações

Num sistema de equações diferenciais ordinárias dependente de parâmetros, a estrutura qualitativa do fluxo pode ser vir a ser alterada ao variar seus parâmetros. Em particular, pontos de equilíbrio podem ser criados ou destruídos, ou terem sua estabilidade alterada. Bifurcações são estas alterações qualitativas na dinâmica do sistema e os pontos de bifurcações são os valores dos parâmetros no qual elas ocorrem. Isto é, uma mudança do tipo topológico do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico é chamada de bifurcação.

Nesta última seção vamos apresentar os resultados utilizados para garantir a ocorrência de bifurcações no sistema estudado. Estaremos interessados em nas bifurcações do tipo sela-nó, Hopf e Bogdanov-Takens.

A codimensão de uma bifurcação é o número mínimo de parâmetros que devem ser variados para identificá-la, conforme [8]. Uma definição mais formal de codimensão será apresentada no Capítulo 4. As bifurcações sela-nó e Hopf são de codimensão um, ou seja, é necessário variar um parâmetro do sistema, já a bifurcação Bogdanov-Takens é de codimensão 2.

2.3.1 Sela-nó

Para estudar essa bifurcação a referência utilizada foi [6]. Nessa bifurcação os pontos equilíbrios de um campo vetorial são criados ou destruídos. Como os pontos de equilíbrio ocorrem na interseção entre isóclinas horizontais e verticais de um campo vetorial pode-se esperar uma bifurcação sela-nó quando as mesmas forem tangentes. Ela ocorre, genericamente, quando a linearização do campo avaliada em um dos pontos de equilíbrio tem determinante nulo. O determinante ser nulo implica que um dos autovalores é nulo. Pode-se esperar uma bifurcação sela-nó quando a isóclina horizontal e vertical de um campo vetorial são tangentes.

É possível definir degenerescência em termos apropriados da primeira e segunda derivada, mas isto será mais fácil se primeiro colocarmos a equação numa forma padrão. Podemos assumir, por uma translação e mudança linear de variáveis, que

- o ponto de equilíbrio está na origem;
- o eixo x é o autoespaço para o autovalor 0;
- o eixo y é o autoespaço para o autovalor λ .

Então o sistema de equações diferenciais pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = 0 + P(x, y), \\ y' = \lambda y + Q(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são termos de pelo menos ordem 2. O sistema que puder ser escrito na forma dada em (2.2) possui uma bifurcação sela-nó.

Em particular,

$$P(x, y) = p_{2,0}x^2 + p_{1,1}xy + p_{0,2}y^2 + O((x, y)^3).$$

Ser genérico significa que o coeficiente $p_{2,0}$ e λ não são nulos. Temos duas condições de não degenerescência:

- (i) O autovalor 0 é um autovalor simples, ou seja, tem multiplicidade 1, o outro autovalor é não nulo;
- (ii) O coeficiente $p_{2,0}$ de x^2 na expansão em Taylor de x' é diferente de zero.

2.3.2 Hopf

Este tipo de bifurcação ocorre quando um ponto de equilíbrio (x_0, y_0) tem a linearização com um par de autovalores imaginário puro, ou seja, $\text{tr}DF(x_0, y_0) = 0$. Segue o teorema sobre bifurcação de Hopf, onde A é o parâmetro de bifurcação, cuja demonstração pode ser encontrada em [2] (pag. 227).

Teorema 2.3.1. *Suponha que*

$$x' = f(x, y, A), \quad y' = g(x, y, A)$$

com $f(0, 0, A) = g(0, 0, A) = 0$ e que a matriz Jacobiana avaliada na origem quando $A = 0$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

para algum $\omega \neq 0$. Então se

$$f_{Ax} + g_{Ay} \neq 0 \quad e \quad \kappa \neq 0$$

onde κ é uma constante definida a seguir, uma curva soluções periódicas na origem bifurca em $A < 0$ se $\kappa(f_{Ax} + g_{Ay}) > 0$ ou $A > 0$ se $\kappa(f_{Ax} + g_{Ay}) < 0$. A origem é estável para $A > 0$ (resp. $A < 0$) e instável para $A < 0$ (resp. $A > 0$) se $f_{Ax} + g_{Ay} < 0$ (resp. > 0) enquanto as soluções periódicas são estáveis (resp. instável) se a origem é instável (resp. estável) do lado de $A = 0$ para os quais as soluções periódicas existem. A amplitude das órbitas periódicas cresce como $|A|^{\frac{1}{2}}$ enquanto o período delas tende para $\frac{2\pi}{|\omega|}$ conforme $|A|$ tende para zero. A bifurcação é supercrítica se órbitas periódicas que bifurcam são estáveis, do contrário é chamada subcrítica.

A condição de não degenerescência, $\kappa \neq 0$, é um tipo usual de condição para uma bifurcação, envolvendo as derivadas parciais do campo vetorial $(f(x, y, A), g(x, y, A))$ avaliadas em $(0, 0, 0)$. Mais explicitamente

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{16} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right] \\ & + \frac{1}{16\omega} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

A constante κ é também conhecida como primeiro coeficiente de Liapunov, o qual foi calculado para determinar os tipos de bifurcações Hopf que o modelo sofre se $\kappa < 0$ a bifurcação de Hopf será chamada supercrítica e, se $\kappa > 0$ a bifurcação de Hopf será subcrítica.

2.3.3 Bogdanov-Takens

Para o estudo da bifurcação de Bogdanov-Takens precisamos analisar a variação de dois parâmetros já que somente com a variação de um parâmetro a mesma não pode ser verificada, ao contrário dos dois tipos citados anteriormente. A referência utilizada foi [8].

Teorema 2.3.2 (Forma normal topológica para a bifurcação de Bogdanov-Takens). *Qualquer sistema genérico planar*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2$$

tendo, em $\alpha = 0$, um equilíbrio que exibe a bifurcação de Bogdanov-Takens, é localmente topologicamente equivalente a alguma das duas formas normais próximo a esse ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \beta_1 + \beta_2\theta_1 + \theta_1^2 \pm \theta_1\theta_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Qualquer equilíbrio do sistema (2.3) está localizado no eixo horizontal, $\theta_2 = 0$, e satisfaz a equação

$$\theta_1^2 + \beta_2\theta_1 + \beta_1 = 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ter entre zero e duas raízes reais. Quando o discriminante dessa parábola for nulo

$$SN = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\} \quad (2.5)$$

teremos a curva da bifurcação sela-nó. Ao longo da curva SN o sistema (2.3) tem um equilíbrio com autovalor nulo. Se $\beta_2 \neq 0$, então a bifurcação sela-nó é não-degenerada e cruza SN da direita para a esquerda implicando no aparecimento de dois pontos de equilíbrio.

O eixo vertical $\beta_1 = 0$ é uma reta na qual a linearização em um dos pontos de equilíbrio possui um par de autovalores com soma nula: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A curva

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\} \quad (2.6)$$

corresponde a uma bifurcação de Hopf ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$).

O sistema (2.3) possui uma bifurcação homoclínica de sela conforme está descrito no Lema 2.3.1.

Lema 2.3.1. *Existe uma única curva suave P correspondente a uma bifurcação homoclínica de sela no sistema (2.3) que é originado em $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ e tem a seguinte representação local:*

$$P = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 + \frac{6}{25}\beta_2^2 = 0, \beta_2 < 0 \right\}. \quad (2.7)$$

Além do mais, quando $\|\beta\|$ é pequeno, o sistema (2.3) tem um ciclo hiperbólico estável para valores de parâmetros dentro da região limitada pela curva da bifurcação de Hopf H e pela curva de bifurcação homoclínica P , e não existem ciclos fora desta região.

O diagrama de bifurcação do sistema (2.3) é apresentado na Figura 2.2 a qual foi baseada em [8] (pag. 322). Nesta figura, SN_+ e SN_- representam as curvas da bifurcação Sela-nó com $\beta_2 > 0$ e $\beta_2 < 0$, respectivamente.

Essa bifurcação será analisada por último em cada um dos sistemas onde ocorre devido a sua complexidade. A ocorrência da mesma será verificada nos sistemas estudados nos capítulos 4 e 5.

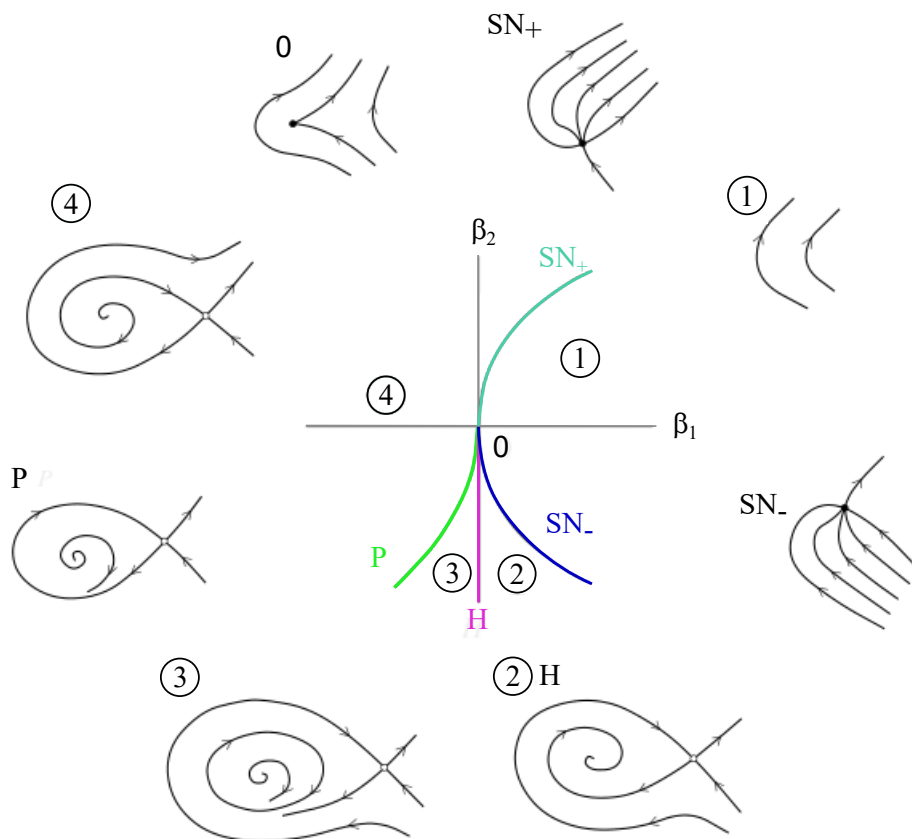


Figura 2.2: Diagrama da bifurcação Bogdanov-Takens.

Capítulo 3

Modelo com $p = 1$ e $q = 2$

Baseado em [16] vamos estudar, neste capítulo, o modelo (1.4) com a seguinte taxa de incidência

$$g(I) = \frac{\beta I}{1 + \alpha I^2}, \quad (3.1)$$

onde βI expressa a força da doença e $1/(1 + \alpha I^2)$ descreve os efeitos inibitórios ou psicológicos causados pela mudança de comportamento dos indivíduos. É possível observar que a taxa de incidência é crescente quando a quantidade de infectados é pequena e decrescente quando I é grande, como pode ser visto na Figura 3.1. Com isso, é possível perceber que a taxa de incidência possibilita analisar os efeitos “psicológicos” ou inibitórios, já que o aumento da quantidade de pessoas infectadas influencia na redução do encontro entre susceptíveis e infectados, seja por prevenção por parte dos indivíduos susceptíveis, ou por isolamento dos infectados.

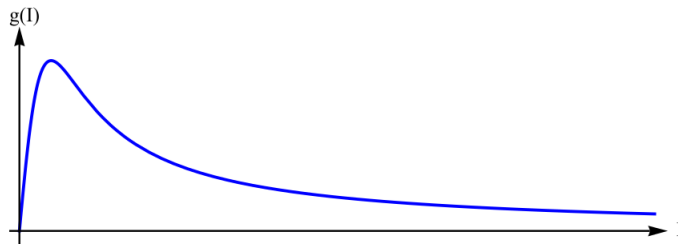


Figura 3.1: Função da taxa de incidência não monótona g .

3.1 Equilíbrios do modelo

Com a taxa de incidência (3.1) o modelo (1.4) ficará da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I}{1 + \alpha I^2} \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - (m + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R. \end{cases} \quad (3.2)$$

Deste modo, para determinar os pontos equilíbrio do modelo (1.2), precisamos resolver seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \left[\frac{\beta}{1 + \alpha I^2} \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - (m + \mu) \right] I = 0, \\ \mu I - (m + \nu)R = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Temos que $I = 0$ satisfaz a primeira equação, e isto implica, pela segunda equação, que $R = 0$. Assim, independente dos valores dos parâmetros, sempre temos o ponto de equilíbrio $E_0 = (0, 0)$ o qual é o ponto de equilíbrio trivial, pois nesse caso temos que toda a população é de susceptíveis e, por conseguinte, $S = A/m$.

Vamos agora analisar quando o primeiro fator da primeira equação do sistema (3.3) for nulo e desta maneira encontraremos o ponto de equilíbrio positivo do sistema. Então, substituindo R pela expressão encontrada através da segunda equação do sistema (3.3) teremos

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1 + \alpha I^2} \left(\frac{A}{m} - I - \frac{\mu I}{m + \nu} \right) - (m + \mu) &= 0, \\ \frac{\beta A}{m} - \beta \left(1 + \frac{\mu}{m + \nu} \right) I - (m + \mu)(1 + \alpha I^2) &= 0, \\ \beta A - \beta \left(m + \frac{\mu m}{m + \nu} \right) I - m(m + \mu)(1 + \alpha I^2) &= 0, \\ \alpha m(m + \mu)I^2 + \beta \left(m + \frac{\mu m}{m + \nu} \right) I - \beta A + m(m + \mu) &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, para determinar o ponto de equilíbrio positivo vamos analisar a equação a seguir

$$\alpha m(m + \mu)I^2 + \beta \left(m + \mu - \frac{\nu \mu}{m + \nu} \right) I + m(m + \mu) - \beta A = 0 \quad (3.4)$$

a qual foi obtida somando e subtraindo μ no coeficiente do termo de grau um na expressão anterior.

Note que a equação (3.4) é equivalente a

$$\alpha I^2 + \frac{\beta}{m} \left(1 - \frac{\nu\mu}{(m+\mu)(m+\nu)} \right) I + 1 - \frac{\beta A}{m(m+\mu)} = 0,$$

donde vemos que, supondo $\alpha \neq 0$, tanto o coeficiente do termo de grau dois quanto o de grau um são positivos e, daí, o sinal do termo independente é que irá determinar a existência do ponto de equilíbrio positivo. Defina

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta A}{m(m+\mu)}, \quad (3.5)$$

o qual é o chamado **número de reprodução básica**.

Para determinar o coeficiente do termo independente, basta observar o valor de \mathcal{R}_0 . Recordemos que o produto das raízes de uma equação do segundo grau é dado pela razão entre o coeficiente do termo independente e o termo de grau dois e que a soma das raízes é dada pelo simétrico da razão entre o coeficiente do termo de grau um e o termo de grau dois. Note que a soma das raízes sempre será negativa e, então, ou ambas serão negativas ou terão sinais opostos.

Com isso, se $\mathcal{R}_0 < 1$, o termo independente será maior do que zero e, assim, o produto das raízes tem sinal positivo, o que implica que ambas as raízes são negativas; se $\mathcal{R}_0 = 1$, uma raiz será 0 e a outra será negativa; se $\mathcal{R}_0 > 1$, o produto das raízes será negativo, logo temos raízes de sinais opostos. Pela equação (3.4), temos que

- (i) se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então não existe ponto de equilíbrio positivo;
- (ii) se $\mathcal{R}_0 > 1$, então existe um único ponto de equilíbrio positivo $E^* = (I^*, R^*)$ ou ponto de equilíbrio endêmico, sendo

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{-\beta \left(m + \mu - \frac{\nu\mu}{m+\nu} \right) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha m(m+\mu)}, \\ R^* &= \frac{\mu}{m+\nu} I^*, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde

$$\Delta = \beta \left(m + \mu - \frac{\nu\mu}{m+\nu} \right)^2 - 4\alpha m^2(m+\mu)^2(1 - \mathcal{R}_0).$$

Temos que I^* é a raiz positiva da equação (3.4) e R^* é obtido a partir da segunda equação do sistema (1.2). Logo, podemos determinar a expressão para S^* a qual é dada por

$$S^* = \frac{1}{m} \left[A - \left(m + \mu - \frac{\nu\mu}{m + \nu} \right) I^* \right].$$

Vamos agora, analisar o caso quando $\alpha = 0$. Dessa forma a partir da equação (3.4), obtemos

$$I^* = -\frac{(m + \nu)(-A\beta + m^2 + \mu m)}{\beta m(\mu + m + \nu)}$$

e com isso, a existência do equilíbrio positivo será determinado pelo mesmo número de reprodução básica \mathcal{R}_0 em (3.5). Então, não é necessário analisar o caso para $\alpha = 0$ separadamente pois os resultados obtidos serão o mesmo. Portanto, vimos que sempre teremos o ponto de equilíbrio trivial e de acordo com a escolha dos parâmetros, de maneira tal que $\mathcal{R}_0 > 1$, teremos ainda o ponto de equilíbrio endêmico. Na próxima seção analisaremos a estabilidade em cada um dos casos, quando temos somente o ponto de equilíbrio trivial, ou livre da doença, e quando além do trivial temos ainda o ponto de equilíbrio endêmico.

3.2 Análise Qualitativa

Para analisar o comportamento qualitativo do sistema (3.2) começaremos com um resultado que nos garante que não existem órbitas periódicas neste sistema.

Teorema 3.2.1. *O sistema (3.2) não tem órbita periódica.*

Demonstração. Considere o sistema (3.2) para $I > 0$ e $R > 0$, já que somente estamos interessados em estudar o sistema no primeiro quadrante. Seja $F = (f_1, f_2)$ o campo vetorial (3.2) onde f_1 e f_2 denotam o lado direito das equações deste sistema

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I}{1 + \alpha I^2} \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - (m + \mu)I := f_1(I, R), \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R := f_2(I, R). \end{cases}$$

Tome a função de Dulac

$$H(I, R) = \frac{1 + \alpha I^2}{\beta I}.$$

Temos que o produto entre a função de Dulac H e as componentes do campo vetorial F será

$$Hf_1 = \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - \frac{(m + \mu)}{\beta} (1 + \alpha I^2),$$

$$Hf_2 = \frac{(1 + \alpha I^2)\mu I}{\beta} - (m + \nu) \frac{(1 + \alpha I^2)}{\beta I} R.$$

Desta forma,

$$\frac{\partial(Hf_1)}{\partial I} + \frac{\partial(Hf_2)}{\partial R} = -1 - \frac{2\alpha(m + \mu)}{\beta} I - \frac{1 + \alpha I^2}{\beta I} (m + \nu) < 0.$$

Logo, pelo Critério de Dulac, o sistema (3.2) não possui órbitas periódicas. ■

Agora faremos uma mudança de variáveis e reescalonamento no tempo do sistema (3.2) da seguinte forma

$$x = \frac{\beta}{m + \nu} I, \quad y = \frac{\beta}{m + \nu} R, \quad \tau = (m + \nu)t.$$

Com isso, os cálculos no estudo dos pontos de equilíbrio E_0 e E^* serão simplificados. O sistema obtido será

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{1 + ax^2} (B - x - y) - nx, \\ \frac{dy}{d\tau} = bx - y, \end{cases} \quad (3.7)$$

sendo

$$a = \frac{\alpha(m + \nu)^2}{\beta^2}, \quad B = \frac{A\beta}{m(m + \nu)}, \quad n = \frac{m + \mu}{m + \nu}, \quad b = \frac{\mu}{m + \nu}.$$

Sabemos que x e y são positivos, visto que I e R são positivos. Os pontos de equilíbrio do sistema (3.7) são $(0, 0)$ e (x^*, y^*) onde x^* e y^* são dados por

$$x^* = \frac{-(1 + b) + \sqrt{(1 + b)^2 - 4na(n - B)}}{2na}, \quad y^* = bx^*.$$

Note que o ponto de equilíbrio trivial $(0, 0)$ do sistema (3.7) corresponde ao ponto de equilíbrio E_0 do modelo (3.2), já que $x = y = 0$ implica que $I = R = 0$ e segue que $S = A/m$. O ponto de equilíbrio endêmico (x^*, y^*) do sistema (3.7) corresponde ao ponto de equilíbrio endêmico E^* do modelo (3.2) se, e somente se, $n - B < 0$ já que essa desigualdade ser satisfeita é necessário para que $x^* > 0$.

Inicialmente vamos estudar a estabilidade e o tipo topológico da origem. Para isso utilizaremos o seguinte resultado encontrado em [10] (pag. 150).

Teorema 3.2.2. *Seja a origem um ponto singular isolado do campo vetorial $(f_1(x, y), y + f_2(x, y))$, onde f_1 e f_2 são funções analíticas numa vizinhança da origem, com suas expansões em série de Taylor em torno de $(0, 0)$ começando com termos no mínimo quadráticos nas variáveis x e y . Seja $y = \phi(x)$ uma solução da equação $y + f_2(x, y) = 0$ em uma vizinhança da origem e seja a expansão da função $\psi(x) = f_1(x, \phi(x))$ numa vizinhança de $x = 0$ que tem a forma $\psi(x) = a_r x^r + \dots$ onde $r \geq 2$ e $a_r \neq 0$. Então:*

- (i) *para r ímpar e $a_r > 0$, a origem é um nó;*
- (ii) *para r ímpar e $a_r < 0$, a origem é uma sela topológica;*
- (iii) *par, a origem é uma sela-nó, isto é, o ponto singular é formado pela união de dois setores hiperbólicos com um setor parabólico.*

O Teorema 3.2.2 será utilizado na demonstração do segundo item do teorema a seguir que analisa a estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$:

Teorema 3.2.3. *O ponto de equilíbrio $(0, 0)$ do sistema (3.7) é do tipo*

- (i) *nó hiperbólico estável se $n - B > 0$;*
- (ii) *sela-nó se $n - B = 0$;*
- (iii) *sela hiperbólica se $n - B < 0$.*

Demonstração. Temos que a matriz Jacobiana do sistema (3.7) calculada no ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é

$$M_0 = \begin{bmatrix} B - n & 0 \\ b & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os autovalores de M_0 são dados por $\lambda_1 = B - n$ e $\lambda_2 = -1$. Logo, segue do Teorema de Hartman-Grobman que numa vizinhança de $(0, 0)$ o sistema (3.7) é topologicamente conjugado a um nó atrator se $B - n < 0$ e a uma sela se $B - n > 0$. Com isso, seguem

os itens (i) e (iii), respectivamente. Vale ressaltar que no enunciado do teorema consta a desigualdade contrária pois, posteriormente, relacionaremos a expressão $n - B$ ao número de reprodução básica \mathcal{R}_0 e sintetizaremos os resultados ao longo deste capítulo em função do \mathcal{R}_0 .

Quando $B - n = 0$, o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ não é hiperbólico e, assim, o Teorema de Hartman-Grobman não pode ser aplicado. Neste caso, para analisar o tipo topológico da origem vamos utilizar o Teorema 3.2.2. Para isso precisamos analisar a expansão em Série de Taylor do sistema (3.7) numa vizinhança da origem, a qual é

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -x^2 + x(B - n - y) + O((x, y)^3), \\ \frac{dy}{d\tau} = bx - y, \end{cases} \quad (3.8)$$

sendo $O((x, y)^3)$ termos de ordem maior ou igual a três.

Como estamos analisando o caso quando $B - n = 0$ o sistema (3.8) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -x^2 - xy + O((x, y)^3), \\ \frac{dy}{d\tau} = bx - y. \end{cases} \quad (3.9)$$

Para podermos usar o Teorema 3.2.2 vamos reescalonar o sistema (3.9) da seguinte forma

$$u = x, \quad v = bx - y, \quad t = -\tau.$$

Obtemos assim,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 + u(bu - v) - O((u, bu - v)^3), \\ \frac{dv}{dt} = v + b(-u^2 - u(bu - v) + O((u, bu - v)^3)) := f(u, v), \end{cases}$$

onde $O((u, bu - v)^3)$ representa os termos de ordem três ou superior.

Sabemos que $f(0, 0) = 0$ e que $\frac{\partial}{\partial v} f(u, v) |_{(u,v)=(0,0)} = 1 \neq 0$ então, o Teorema da Função Implícita nos garante que existe uma função ϕ da mesma classe de diferenciabilidade da função f tal que $v = \phi(u)$ e $f(u, \phi(u)) = 0$.

Temos que a expansão em Série de Taylor da função f é

$$f(u, \phi(u)) = u^2 \left(-b^2 - b + \frac{\phi''(0)}{2} \right) + O(u^3),$$

e, pelo Teorema da Função Implícita, sabemos que $f(u, \phi(u)) = 0$. Logo, $\phi''(0) = 2(b+b^2)$. Assim,

$$v = \phi(u) = \frac{1}{2}\phi''(0)u^2 + O(u^3) = b(b+1)u^2 + O(u^3)$$

Comparando com o Teorema 3.2.2 temos que

$$f_1(u, v) = u^2 + u(bu - v) - O((u, bu - v)^3),$$

$$\psi(u) = f_1(u, \phi(u)) = (1+b)u^2 - O(u^3)$$

e, portanto, $a_r = 1 + b \neq 0$ e r é par. Logo, pelo Teorema 3.2.2 o ponto $(0, 0)$ é uma sela-nó. ■

Agora vamos estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico (x^*, y^*) . Assuma que vale a desigualdade $n - B < 0$ já que, como visto anteriormente, isso é condição necessária para que exista um ponto de equilíbrio no primeiro quadrante, o qual denotamos por (x^*, y^*) .

A matriz Jacobiana do sistema (3.7) calculada no ponto de equilíbrio (x^*, y^*) é

$$M_* = \begin{bmatrix} \frac{x^*(a(x^*)^2 + 2ab(x^*)^2 - 2Bax^* - 1)}{(1 + a(x^*)^2)^2} & \frac{-x^*}{1 + a(x^*)^2} \\ b & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o determinante de M_* é

$$\begin{aligned} \det(M_*) &= \frac{-x^*(a(x^*)^2 + 2ab(x^*)^2 - 2Bax^* - 1)}{(1 + a(x^*)^2)^2} + \frac{bx^*}{(1 + a(x^*)^2)}, \\ &= \frac{x^*(1 + b + 2Bax^* - (1 + b)a(x^*)^2)}{(1 + a(x^*)^2)^2}. \end{aligned}$$

Logo, o sinal do determinante é definido por

$$S_1 := -(1 + b)a(x^*)^2 + 2Bax^* + 1 + b.$$

Note que (x^*, y^*) ser ponto de equilíbrio do sistema (3.7), implica em $dx/d\tau = 0$ e por conseguinte, como $x^* \neq 0$, segue do sistema mencionado que

$$na(x^*)^2 + (1 + b)x^* + n - B = 0. \quad (3.10)$$

Isolando $(x^*)^2$ em (3.10) e substituindo na expressão de S_1 temos:

$$nS_1 = [2Bna + (1+b)^2]x^* + (1+b)(2n-B).$$

Substituindo $x^* = \frac{-(1+b) + \Delta_1}{2na}$, onde $\Delta_1 = \sqrt{(1+b)^2 - 4na(n-B)}$ teremos:

$$nS_1 = [2Bna + (1+b)^2] \left(\frac{-(1+b) + \Delta_1}{2na} \right) + (1+b)(2n-B)$$

e, daí

$$\begin{aligned} 2n^2aS_1 &= [2Bna + (1+b)^2]\Delta_1 - [2Bna + (1+b)^2](1+b) + 2na(2n-B)(1+b) \\ &= [2Bna + (1+b)^2]\Delta_1 - (1+b)[2Bna + (1+b)^2 - 2na(2n-B)] \\ &= [2Bna + (1+b)^2]\Delta_1 - (1+b)[(1+b)^2 - 4na(n-B)] \\ &= [2Bna + (1+b)^2]\Delta_1 - (1+b)\Delta_1^2 \\ &= \Delta_1[2Bna + (1+b)^2 - (1+b)\Delta_1]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\Delta_1[2Bna + (1+b)^2 - (1+b)\Delta_1]}{2n^2a} \\ &= \frac{(1+b)\Delta_1}{2n^2a} \left[\left(1+b + \frac{2Bna}{1+b} \right) - \Delta_1 \right]. \end{aligned}$$

Como $(1+b + (2Bna)/(1+b)) > 0$, $\Delta_1 > 0$ e, além disso,

$$\left(1+b + \frac{2Bna}{1+b} \right)^2 - \Delta_1^2 = \frac{4n^2a^2B^2}{(1+b)^2} > 0,$$

segue que $S_1 > 0$. Portanto, $\det(M_*) > 0$ e assim, (x^*, y^*) pode ser do tipo nó, foco ou centro. Mas, como veremos no teorema a seguir, o ponto de equilíbrio endêmico será um nó atrator.

Teorema 3.2.4. *Suponha $n-B < 0$. Então existe um único ponto de equilíbrio endêmico (x^*, y^*) do sistema (3.7), o qual é um nó atrator.*

Demonstração. A estabilidade do ponto de equilíbrio (x^*, y^*) será determinada pelo $\text{tr}(M_*)$ o qual é dado por

$$\begin{aligned} \text{tr}(M_*) &= \frac{x^*(a(x^*)^2 + 2ab(x^*)^2 - 2Bax^* - 1)}{(1+a(x^*)^2)^2} - 1 \\ &= \frac{-a^2(x^*)^4 + a(2b+1)(x^*)^3 - 2(B+1)a(x^*)^2 - x^* - 1}{1+a(x^*)^2}. \end{aligned}$$

Assim, o sinal do traço é obtido por

$$S_2 := -a^2(x^*)^4 + a(2b+1)(x^*)^3 - 2(B+1)a(x^*)^2 - x^* - 1.$$

Afirmamos que $S_2 \neq 0$. Para ver isto, colocamos $(x^*)^2$ em evidência na expressão do S_2 e substituímos $(x^*)^2$ pela expressão obtida através da equação (3.10) por três vezes consecutivas e, assim, obtemos a seguinte igualdade

$$n^3aS_2 = (C_1B + C_2)(x^*) + (C_3B + C_4), \quad (3.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} C_1 &= na(4nb + 3n + 2b + 2), \\ C_2 &= (b+1) [-2n^3a + n(b+1)(2b+1) + (b+1)^2], \\ C_3 &= 2n^3a - n(b+1)(2b+1) - (b+1)^2, \\ C_4 &= n(b+1)(2nb + n + b + 1). \end{aligned}$$

Quando $n - B < 0$, isto é, $n < B$ resulta que

$$\begin{aligned} C_1B + C_2 &= Bn^2a(4b+3) - 2n^3a(b+1) + n(b+1)(2Ba + (b+1)(2b+1)) + (b+1)^3 \\ &> n^3a(4b+3) - 2n^3a(b+1) + n(b+1)(2na + (b+1)(2b+1)) + (b+1)^3 \\ &= (1+2b)n^3a + n(b+1)(2na + (b+1)(2b+1)) + (b+1)^3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Sejam $\xi = na(x^*)^2 + (1+b)x^* + n - B$, $\alpha_1 = (C_1B + C_2)$ e $\alpha_2 = (C_3B + C_4)$. Usando a equação (3.11) teremos

$$\begin{aligned} \alpha_1^2\xi &= \alpha_1^2[na(x^*)^2 + (1+b)x^* + n - B] \\ &= [nax^* + (1+b)]\alpha_1^2x^* + (n-B)\alpha_1^2 \\ &= [nax^* + (1+b)](n^3aS_2 - \alpha_2)\alpha_1 + (n-B)\alpha_1^2 \\ &= \alpha_1[nax^* + (1+b)]n^3aS_2 - na\alpha_2\alpha_1x^* - (1+b)\alpha_1\alpha_2 + (n-B)\alpha_1^2 \\ &= \alpha_1[nax^* + (1+b)]n^3aS_2 - na\alpha_2(n^3aS_2 - \alpha_2) - (1+b)\alpha_1\alpha_2 + (n-B)\alpha_1^2 \\ &= [\alpha_1[nax^* + (1+b)] - na\alpha_2]n^3aS_2 - na\alpha_2^2 - (1+b)\alpha_1\alpha_2 + (n-B)\alpha_1^2. \end{aligned}$$

Temos, assim, que vale a seguinte expressão

$$\alpha_1^2 \xi = n^3 a P S_2 + S_3, \quad (3.12)$$

onde P é um polinômio na variável x^* e

$$S_3 = n^3 a (1 + B^2 a + 2b + b^2) [(B + 2Bn - 2n^2)^2 a + (1 + B - n + b)(1 + n + b + 2nb)].$$

Suponha que $S_2 = 0$. Por $\xi = 0$, de acordo com (3.10), e pela equação (3.12) segue que $S_3 = 0$. No entanto, quando $n - B < 0$ temos $S_3 > 0$ conforme pode ser observado a seguir

$$\begin{aligned} S_3 &= n^3 a (1 + B^2 a + 2b + b^2) [(B + 2Bn - 2n^2)^2 a + (1 + B - n + b)(1 + n + b + 2nb)] \\ &> n^3 a (1 + n^2 a + 2b + b^2) [(n + 2n^2 - 2n^2)^2 a + (1 + b)(1 + n + b + 2nb)] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo, $S_2 \neq 0$ para quaisquer valores positivos para os parâmetros B , a , b e, portanto, $tr(M_*) \neq 0$. Assim, $n - B < 0$ implica que o ponto de equilíbrio (x^*, y^*) não muda de estabilidade. Então, tome $n = 1$, $B = 4$, $a = 1$ e $b = 1$. Com isso, $x^* = 1$ e $y^* = 1$ e $tr(M_*) = -2.5 < 0$. Pela continuidade do traço nos parâmetros e pelo Teorema do Valor Intermediário temos que $tr(M_*) < 0$ para $n - B < 0$ e, então, (x^*, y^*) é um nó estável. ■

Vale observar que quando $n - B < 0$ temos o ponto de equilíbrio E_0

No intuito de analisar a dinâmica do modelo (3.2) a partir do valor de \mathcal{R}_0 vamos agora relacionar a inequação $n - B < 0$, a qual nos informa a quantidade de pontos de equilíbrio do sistema (3.7), com o valor de \mathcal{R}_0 . Temos

$$n - B = \frac{m(m + \mu) - A\beta}{m(m + \nu)},$$

que é equivalente a

$$m(m + \nu)(n - B) = m(m + \mu) - A\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{(m + \nu)(n - B)}{(m + \mu)} = 1 - \mathcal{R}_0.$$

Então, $n - B < 0$ é verdade se, e somente se, $\mathcal{R}_0 > 1$. Assim, podemos resumir os resultados presentes nos teoremas 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4 no seguinte teorema:

Teorema 3.2.5. *Seja \mathcal{R}_0 definido como em (3.5).*

- (i) *Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então o modelo (1.2) com $p = 1$ e $q = 2$ tem um único ponto de equilíbrio, $E_0 = (A/m, 0, 0)$, o qual é um atrator global no primeiro octante;*
- (ii) *Se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o modelo (1.2) com $p = 1$ e $q = 2$ tem dois pontos de equilíbrio, um deles é $E_0 = (A/m, 0, 0)$ e o outro $E^* = (S^*, I^*, R^*)$. O ponto de equilíbrio endêmico, E^* , é um atrator global no interior do primeiro octante.*

Demonstração. Os Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 determinam a estabilidade dos pontos de equilíbrio em ambos os itens, (i) e (ii), e o Teorema 3.2.1 garante que não existe ciclo limite no sistema 3.2. Relembre que o conjunto D definido em (1.5) é positivamente invariante. Então, a prova segue pelo Teorema de Poincaré-Bendixon em cada plano $S + I + R = A/m$ do sistema (1.2). ■

3.3 Discussão dos Resultados

Através da análise qualitativa global de um modelo SIRS com a taxa de incidência não monótona e não linear foram estudadas a existência e a estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico e o comportamento do sistema na ausência da doença. Curiosamente, esse modelo não apresenta dinâmicas complicadas como nos modelos epidêmicos com outros tipos de taxas de incidência como, por exemplo, no modelo relatado em [11] que estudaremos no próximo capítulo. Em termos do número de reprodução básica $\mathcal{R}_0 = \beta A / (m(m + \mu))$, nossos principais resultados indicam que quando $\mathcal{R}_0 < 1$, o ponto de equilíbrio trivial é um atrator global no interior do primeiro octante. Quando $\mathcal{R}_0 > 1$, o ponto de equilíbrio endêmico existe e é globalmente assintoticamente estável.

Biologicamente, isso indica que quando a constante de proporcionalidade (infecção) β e/ou a taxa de recrutamento A é suficientemente grande e taxa de remoção (taxa de mortalidade m mais taxa de recuperação μ) é suficientemente pequena, tal que $\mathcal{R}_0 > 1$, então a doença persiste. Por outro lado, se β e/ou A for pequena o suficiente e a taxa de remoção for grande o suficiente para que $\mathcal{R}_0 < 1$, então a doença desaparece.

Lembre que o parâmetro α descreve o efeito psicológico do público em geral em relação aos infecciosos. Embora o número de reprodução básica \mathcal{R}_0 não dependendo explicitamente do α , o ponto de equilíbrio endêmico do modelo (1.2) com $p = 1$ e $q = 2$, quando ele existir, será atingido com um número menor de infectados, como pode ser visto em (3.6), quanto maior for o fator α . Analisando a expressão do I^* em (3.6), vemos que I^* é inversamente proporcional a α e, assim, o ponto de equilíbrio endêmico será atingido com um número menor de infectados quanto maior o efeito inibitório.

Capítulo 4

Modelo com $p = q = 2$

Não confunda a notação aqui utilizada com a do capítulo anterior. As únicas notações que se mantêm são as dos parâmetros do sistema dado em (1.2). Neste capítulo iremos estudar o sistema (1.2), baseado no artigo [11], com a taxa de incidência dada por

$$g(I) = \frac{\beta I^2}{1 + \alpha I^2}, \quad (4.1)$$

com esta taxa o modelo (1.4) ficará da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I^2}{1 + \alpha I^2} \left(\frac{A}{m} - I - R \right) - (m + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R. \end{cases} \quad (4.2)$$

Note que, quando $I \rightarrow \infty$ na equação (4.1), então $g(I) \rightarrow \beta/\alpha$. Logo, o aumento das medidas de proteção fazem com que a taxa de incidência diminua, ou seja, decai o número de novos casos por unidade de tempo.

Para simplificar os cálculos dos pontos de equilíbrio, iremos reescalonar o sistema para depois obter a expressão matemática para os pontos de equilíbrio fazendo a seguinte mudança de variável

$$x = \sqrt{\frac{\beta}{m + \nu}} I, \quad y = \sqrt{\frac{\beta}{m + \nu}} R \quad \text{e} \quad \tau = (m + \nu)t.$$

E, ao invés de denotar as variáveis por x , y e τ manteremos como I , R e t . Então, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{I^2}{1 + aI^2}(B - I - R) - nI, \\ \frac{dR}{dt} = bI - R, \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo

$$a = \frac{\alpha(m + \nu)}{\beta}, \quad B = \frac{A}{m} \sqrt{\frac{m}{(m + \nu)}}, \quad n = \frac{m + \mu}{m + \nu} \quad \text{e} \quad b = \frac{\mu}{m + \nu}.$$

4.1 Pontos de Equilíbrio

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (4.3) igualamos as duas equações do sistema a zero. Teremos que o ponto $E_0 = (0, 0)$, assim como no modelo do capítulo anterior, é um dos equilíbrios do sistema e para encontrar os pontos de equilíbrio endêmicos é equivalente a resolver a seguinte equação

$$(na + b + 1)I^2 - BI + n = 0. \quad (4.4)$$

Analisando esta equação de segundo grau, é fácil ver que

- (i) não existe equilíbrio positivo se $B^2 < 4n(na + b + 1)$;
- (ii) existe um equilíbrio positivo se $B^2 = 4n(na + b + 1)$;
- (iii) existem dois equilíbrios positivos se $B^2 > 4n(na + b + 1)$.

Quando a condição do item (ii) é satisfeita, isto é, existe somente um ponto de equilíbrio endêmico, o mesmo é dado por

$$I_0 = \frac{B}{2(na + b + 1)}, \quad R_0 = bI_0.$$

No caso onde (iii) é satisfeito, ou seja, temos dois pontos de equilíbrio positivos (I_1, R_1) e (I_2, R_2) , os mesmos serão

$$I_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4n(na + b + 1)}}{2(na + b + 1)}, \quad R_1 = bI_1;$$

$$I_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4n(na + b + 1)}}{2(na + b + 1)}, \quad R_2 = bI_2.$$

Vale ressaltar que caso o parâmetro α do sistema inicial seja nulo segue a mesma análise anterior, em razão da equação (4.4) não ter nenhum dos seus coeficientes nulos ou com sinal alterado em virtude do novo parâmetro a , do sistema (4.3), ser nulo.

Agora analisaremos a dinâmica do sistema (4.3) em cada um dos três casos anteriores. Começaremos com o caso onde só temos o equilíbrio trivial, após estudaremos o caso com dois equilíbrios positivos e, por fim, o caso quando teremos somente um equilíbrio positivo. Vale ressaltar que a existência do ponto de equilíbrio E_0 não depende da escolha dos parâmetros.

4.2 Análise Qualitativa

Inicialmente consideraremos que $B^2 < 4n(na + b + 1)$. Neste caso, o sistema (4.3) possui somente o ponto de equilíbrio trivial E_0 .

Teorema 4.2.1. *O ponto de equilíbrio trivial E_0 do sistema (4.3) é assintoticamente estável. Se $B^2 < 4n(na + b + 1)$, então E_0 é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. A estabilidade do ponto de equilíbrio E_0 é obtida diretamente ao avaliar o traço e determinante da parte linear avaliada neste ponto a qual é dada por

$$M_0 = \begin{bmatrix} -n & 0 \\ b & -1 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $n > 0$, logo temos que o ponto E_0 será um ponto singular atrator, já que $\det(M_0) > 0$ e $\text{tr}(M_0) < 0$. Se $B^2 < 4n(na + b + 1)$ o ponto E_0 é assintoticamente estável e é o único ponto de equilíbrio do sistema (4.3). Como a reta $I = 0$ é invariante não pode haver um ciclo envolvendo E_0 pois violaria a unicidade dada pelo Teorema de Picard. Logo, E_0 é globalmente assintoticamente estável. ■

Este resultado mostra que na ausência de equilíbrio endêmico a população tende a ficar totalmente susceptível e que mesmo

Agora analisaremos o caso quando existem dois equilíbrios endêmicos, a saber, (I_1, R_1) e (I_2, R_2) . Então, suponha $B^2 > 4n(na + b + 1)$. Para determinar a estabilidade de tais pontos de equilíbrio, vamos começar analisando o determinante da matriz Jacobiana do sistema (4.3) calculada nestes pontos. Substituindo n pela expressão encontrada para o mesmo através da equação (4.4) teremos que a matriz Jacobiana é

$$M_j = \begin{bmatrix} \frac{I_j(baI_j^3 - BaI_j^2 - (2+b)I_j + B)}{(1 + aI_j^2)^2} & \frac{-I_j}{1 + aI_j^2} \\ b & -1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Assim, no ponto (I_1, R_1) o determinante é

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= -\frac{I_1(B - BaI_1^2 - (2+b)I_1 + bI_1^3a)}{(1 + aI_1^2)^2} + \frac{bI_1}{1 + aI_1^2} \\ &= \frac{I_1(-B + BaI_1^2 + 2I_1 + 2bI_1)}{(1 + aI_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Logo, o sinal do determinante é definido por

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= -B + BaI_1^2 + 2(1+b)I_1 \\ &= \frac{(-B + BaI_1^2 + 2(1+b)I_1)(na + b + 1)}{na + b + 1} + \frac{B^2aI_1}{na + b + 1} - \frac{B^2aI_1}{na + b + 1} \\ &= \frac{Ba}{na + b + 1} [(na + b + 1)I_1^2 - BI_1 + n] + \frac{r_1}{na + b + 1}, \end{aligned}$$

sendo

$$r_1 = (2na + 4b + 2b^2 + 2nab + 2 + B^2p)I_1 - B(2na + 1 + b).$$

Então, o sinal de ϕ_1 será definido pelo sinal de r_1 . Note que r_1 pode ser visto como a equação de uma reta com variável independente I_1 , com coeficiente linear negativo e coeficiente angular positivo. Logo, o esboço de r_1 será como na Figura 4.1. Sendo γ o valor onde $r_1 = 0$ vemos que se $I_1 < \gamma$, então r_1 será negativo e se $I_1 > \gamma$, r_1 será positivo.

Para calcularmos o sinal de r_1 , denotamos $\Delta = \sqrt{B^2 - 4n(na + b + 1)}$ e encontramos o sinal da seguinte diferença:

$$\begin{aligned} \gamma - I_1 &= \frac{B(2na + 1 + b)}{2na + 4b + 2b^2 + 2nab + 2 + B^2a} - \frac{B - \Delta}{2(na + b + 1)} \\ &= \frac{-B^3a + 4Bna(na + b + 1) + B^2a\Delta + 2(b + 1)(na + b + 1)\Delta}{2(na + b + 1)(B^2a + 2(na + b + 1))}, \end{aligned}$$

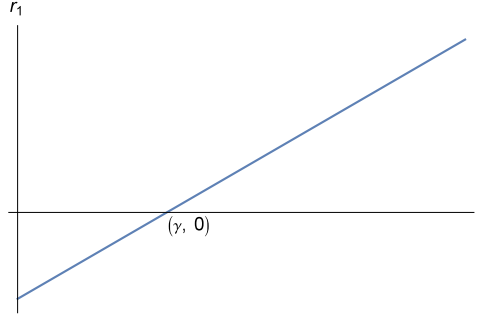


Figura 4.1: Função r_1 .

desta forma, basta avaliar o sinal do numerador (ψ) na equação acima. Então, usando a hipótese que $B^2 > 4n(na + b + 1)$ teremos

$$\begin{aligned} \psi &> -Ba(4Bna(na + b + 1)) + 4Bna(na + b + 1) + B^2a\Delta + 2(b + 1)(na + b + 1)\Delta \\ &= B^2a\Delta + 2(b + 1)(na + b + 1)\Delta \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo, $r_1 < 0$ e, portanto, (I_1, R_1) é um ponto de equilíbrio do tipo sela já que $\det(M_1) < 0$.

Para o ponto de equilíbrio (I_2, R_2) , mostramos de forma análoga à realizada para (I_1, R_1) , que $\det(M_2) > 0$ pois teremos $I_2 - \gamma > 0$. Sendo assim, (I_2, R_2) será um ponto de equilíbrio do tipo nó, ou do tipo foco ou não hiperbólico. Com isso, para determinar a estabilidade do ponto (I_2, R_2) precisaremos analisar o traço de M_2 :

$$\begin{aligned} \text{tr}(M_2) &= \frac{I_2[baI_2^3 - BaI_2^2 - (2 + b)I_2 + B]}{(1 + aI_2^2)^2} - 1 \\ &= \frac{I_2[baI_2^3 - BaI_2^2 - (2 + b)I_2 + B] - (1 + aI_2^2)^2}{(1 + aI_2^2)^2} \\ &= \frac{(ba - b^2)I_2^4 - BaI_2^3 - (2 + b + 2a)I_2^2 + BI_1 - 1}{(1 + aI_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, o sinal do traço irá depender de algumas hipóteses. No Teorema 4.2.2 as hipóteses que nos fornecem a estabilidade do ponto de equilíbrio (I_2, R_2) são apresentadas.

Teorema 4.2.2. *Suponha $B^2 > 4n(na + b + 1)$, ou seja, que existem os dois pontos de equilíbrio endêmicos. Defina*

$$B_c^2 = \frac{(nb + 2n - 1 - b + 2n^2a)^2}{(n - 1)(na + a + 1)}.$$

Então:

(i) (I_1, R_1) é um ponto de sela;

(ii) (I_2, R_2) é um ponto de equilíbrio estável se alguma das seguintes inequações for verdadeira

$$B^2 > B_c^2, \quad n \leq 1, \quad b < (2na + 1)/(n - 1). \quad (4.5)$$

(iii) (I_2, R_2) é instável se todas as inequações a seguir forem verdadeiras

$$B^2 < B_c^2, \quad n > 1, \quad b > (2na + 1)/(n - 1). \quad (4.6)$$

Demonstração. O item (i) do teorema já foi provado anteriormente, uma vez que $\det(M_1) < 0$ para quaisquer valores dos parâmetros. Para provar os outros dois itens que dizem respeito à estabilidade do ponto de equilíbrio (I_2, R_2) note que, o sinal do traço de M_2 é determinado por

$$\phi_2 := (ba - b^2)I_2^4 - BaI_2^3 - (2 + b + 2a)I_2^2 + BI_1 - 1.$$

Denote por $\xi = (na + b + 1)I_2 - BI_2 + n$, $\alpha_1 = ba - b^2$, $\alpha_2 = Ba$ e $\alpha_3 = 2 + b + 2a$. Então

$$\begin{aligned} \phi_2 &= (\alpha_1 I_2^2 - \alpha_2 I_2 - \alpha_3) I_2^2 + BI_1 - 1 \\ &= \underbrace{(\alpha_1 I_2^2 - \alpha_2 I_2 - \alpha_3)}_{Q_2} \left(\frac{\xi + BI_2 - n}{na + b + 1} \right) + BI_1 - 1 \\ &= Q_2 \xi + \frac{(B\alpha_1 I_2 - \alpha_2 B - n\alpha_1) I_2^2}{na + b + 1} + \frac{-n\alpha_2 I_2 + \alpha_3 n - \alpha_1 BI_2}{na + b + 1} + BI_2 - 1. \end{aligned}$$

Repetindo, por mais duas vezes, o procedimento de colocar I_2^2 em evidência e trocar pela expressão obtida através do ξ veremos que ϕ_2 pode ser escrito da seguinte forma $\phi_2 = P_0 \xi + P_1 r_2$, onde $P_1 = (na + b + 1)^{-3}$, P_0 é um polinômio quadrático de I_2 e

$$r_2 = B(x_1 B^2 + x_2) I_2 + x_3 B^2 + x_4,$$

com

$$\begin{aligned} x_1 &= -a(na + a + 1), \\ x_2 &= (na + b + 1)(2n^2 a^2 + na - 2a - 2ba - b - 1), \\ x_3 &= na(na + a + 1), \\ x_4 &= (1 + b)(na + b + 1)(2n^2 a + nb + 2n - b - 1). \end{aligned}$$

Por hipótese temos $B^2 > 4n(na + b + 1)$ e, com isso, podemos ver que $(x_1B^2 + x_2) < 0$, como é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
(x_1B^2 + x_2) &= -a(na + a + 1)B^2 + (1 + b)(na + b + 1)(2n^2a + nb + 2n - b - 1) \\
&< -a(na + a + 1)4n(na + b + 1) + (1 + b)(na + b + 1)(2n^2a + nb + 2n - b - 1) \\
&= -(na + b + 1)(1 + 2a + 3na + 4na^2 + 2n^2a^2 + b + 2ab) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Decorre que $(x_1B^2 + x_2) \neq 0$ e, deste modo, podemos isolar I_2 na expressão do r_2 . Agora, similarmente ao feito para ϕ_2 , isolamos I_2 na expressão do ξ e, substituindo pela expressão obtida a partir do r_2 , podemos escrever ξ como $\xi = P_2r_2 + P_3r_3$, onde P_2 é um polinômio de I_2 , P_3 é uma constante positiva dada por

$$P_3 = \frac{(1 + na + b)^3(1 + B^2a + 2b + b^2)}{B^2(x_1B^2 + x_2)^2}$$

e r_3 é dado por

$$r_3 = -[(n - 1)(na + a + 1)B^2 - (nb + 2n - 1 - b + 2n^2a)^2]. \quad (4.7)$$

Analisando as expressões obtidas para ϕ_2 e para ξ e lembrando que $\xi = 0$ podemos ver que $\phi_2 = 0$ implica em $r_2 = 0$ o qual, por sua vez, implica em $r_3 = 0$. O traço de M_2 é nulo se, e somente se, $\phi_2 = 0$ e, assim, uma condição necessária para $\text{tr}(M_2) = 0$ é $r_3 = 0$. De $r_3 > 0$ se $m \leq 1$, segue que $m \leq 1$ implica no ponto de equilíbrio (I_2, R_2) não trocar de estabilidade. Note que, B_c^2 é o valor no qual temos $r_3 = 0$ e que podemos escrever r_3 como $r_3 = -[(n - 1)(na + a + 1)(B^2 - B_c^2)]$. Com isso, vemos que se $m > 1$ e $B^2 \neq B_c^2$, então (I_2, R_2) também não muda de estabilidade.

Suponha que $m > 1$ e $r_3 = 0$, ou seja, $B^2 = B_c^2$. Queremos encontrar condições para as quais a estabilidade do ponto de equilíbrio é alterada. Claramente, $r_2 = 0$ é equivalente a

$$-\frac{2(x_3B^2 + x_4)(na + b + 1)}{B^2(x_1B^2 + x_2)} - 1 = \sqrt{1 - \frac{4n(na + b + 1)}{B^2}}. \quad (4.8)$$

De $r_3 = 0$ implicar $B^2 = B_c^2$ temos,

$$1 - \frac{4n(na + b + 1)}{B^2} = \frac{(-2na + nb - 1 - b)^2}{(nb + 2n - b - 1 + 2n^2a)^2}.$$

E assim, a equação (4.8) é equivalente a

$$-\frac{2(x_3B^2 + x_4)(na + b + 1)}{B^2(x_1B^2 + x_2)} - 1 = \frac{-2na + nb - 1 - b}{nb + 2n - b - 1 + 2n^2a}.$$

Precisamos garantir que o lado direito da equação acima seja positivo, para isso basta escolher uma condição na qual o numerador seja positivo, uma vez que, por estarmos supondo $n > 1$, o denominador será sempre positivo. Segue então que a equação (4.8) é válida se, e somente se,

$$n > 1, \quad b > (2na + 1)/(n - 1), \quad B^2 = B_c^2. \quad (4.9)$$

Como consequência, (I_2, R_2) não muda de estabilidade se $b < (2na + 1)/(n - 1)$. Agora vamos estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio quando $tr(M_2) \neq 0$. Primeiro considere o caso quando $b < (2na + 1)/(n - 1)$. Podemos ver que se $B \rightarrow \infty$ então $r_2 \rightarrow -\infty$. Assim, $tr(M_2) < 0$. Similarmente, $tr(M_2) < 0$ se $n \leq 1$ ou $B^2 > B_c^2$. Suponha $n > 1$, $b > (2na + 1)/(n - 1)$ e $4n(na + b + 1) < B^2 < B_c^2$. Se fizermos $B^2 \rightarrow 4n(na + b + 1)$, então $I_2 \rightarrow B/[2(na + b + 1)]$. Como consequência,

$$r_2 \rightarrow (2na + 1 + b)(na + b + 1)(-2na + nb - 1 - b),$$

o qual é positivo. Por conseguinte, $tr(M_2)$ é positivo se as condições do item (ii) forem satisfeitas. Resumindo a discussão acima, podemos ver que (I_2, R_2) é estável se alguma das inequações em (4.5) são válidas e instável se (4.6) vale. ■

Note que $n \leq 1$ é equivalente a $\mu \leq \nu$. O Teorema 4.2.2 implica que o equilíbrio endêmico é estável se a taxa de perda da imunidade ν é maior do que a taxa de recuperação μ . Isto significa que a taxa de perda da imunidade contribui para estabilidade do (I_2, R_2) , enquanto que a taxa de recuperação prejudica essa estabilidade. A primeira inequação no item (ii) essencialmente significa que o tamanho da população N_0 ou a taxa de contato β deve ser grande. Com intuito de analisar o que a terceira inequação no item (ii) significa, supomos que $\mu > \nu$. Note que $b < (2na + 1)/(n - 1)$ é equivalente a

$$\frac{[\mu(\mu - \nu) - (m + \nu)^2]\beta - 2\alpha(m + \mu)(m + \nu)^2}{\beta(\mu - \nu)(m + \nu)} < 0,$$

e, por estarmos supondo que $\mu > \nu$, a inequação acima é equivalente a

$$(\mu^2 - \mu\nu - m^2 - 2m\nu - \nu^2)\beta - 2\alpha(m + \nu)^2(m + \mu) < 0.$$

Note também que $4n(na + b + 1) < B^2$ é equivalente a

$$\frac{4(m + \mu)(\alpha m^2 + \alpha m\nu + \alpha\mu m + \alpha\mu\nu + \mu\beta + \beta m + \nu\beta)}{(m + \nu)\beta^2} < (N_0)^2.$$

Concluimos que (I_2, R_2) é estável se a taxa de contato β é pequena e o tamanho da população N_0 é grande.

Se o sistema (4.3) não tem ciclo limite, pelo Teorema de Poincaré-Bendixon o comportamento assintótico é determinado pela estabilidade do ponto de equilíbrio (I_2, R_2) . Especificamente, se (I_2, R_2) é instável, qualquer semi-órbita positiva, exceto os dois pontos de equilíbrio e a variedade estável do (I_1, R_1) , tende para o ponto $(0, 0)$ com t tendendo para infinito, isto é, a doença desaparecerá como pode ser visto na Figura 4.2 (a); se (I_2, R_2) for estável há uma região fora da qual as semi-órbitas tendem para o ponto $(0, 0)$ o qual é assintoticamente estável com t como mostrado no Teorema 4.2.1 e dentro dessa região as semi-órbitas positivas tendem para o ponto (I_2, R_2) quando t tende para o infinito como pode ser visto na Figura 4.2 (b). Assim, a doença irá persistir se a posição inicial estiver dentro dessa região e desaparecerá se estiver fora.

Agora iremos encontrar as condições para as quais o sistema (4.3) não tem ciclos limites. Note que (I_1, R_1) é um ponto de equilíbrio do tipo sela e (I_2, R_2) é um ponto de equilíbrio do tipo nó, foco ou não hiperbólico como vimos anteriormente. Um ciclo limite de (4.3) deve incluir (I_2, R_2) e não pode conter (I_1, R_1) uma vez que violaria a unicidade de solução dada pelo Teorema de Picard. Como o fluxo do sistema (4.3) se move para a esquerda na reta onde $I = I_1$ e $R > R_1$, e se move para a direita na linha onde $I = I_1$ e $R < R_1$, é fácil ver que qualquer ciclo limite de (4.3), se existir, deve estar na região onde $I > I_1$. Podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 4.2.3. *Suponha $I_1^2 > (n - 1)/(1 + a + na)$. Então não existe ciclo limite em (4.3).*

Demonstração. Tome uma função Dulac $H = (1 + aI^2)/I^2$ e denote o lado direito de (4.3) por P e Q , respectivamente. Temos, então

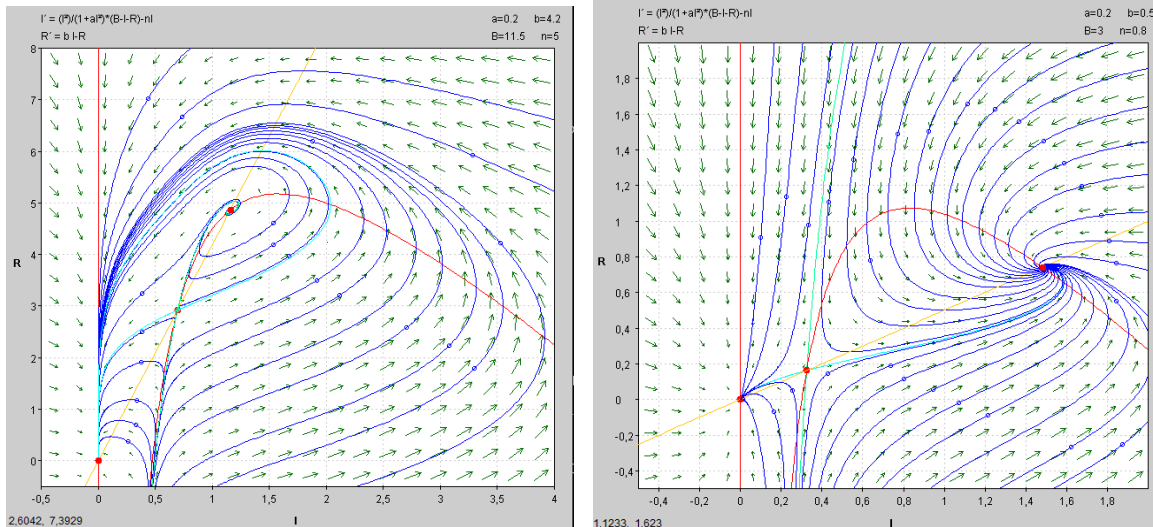
$$\frac{\partial HP}{\partial I} + \frac{\partial HQ}{\partial R} = -(1 + a + na) + \frac{n-1}{I^2}$$

que é sempre negativo se $I^2 > (n-1)/(1+a+na)$. Logo, pelo critério de Dulac, segue que não existe ciclo limite. ■

Consequentemente, se $n-1 < 0$, como $I_1 > 0$, temos que a condição do Teorema 4.2.3 será satisfeita para quaisquer valores de a e assim temos o seguinte corolário:

Corolário 4.2.4. *Suponha $n \leq 1$. Então não existe ciclo limite em (4.3).*

Demonstração. É imediato, pois $n \leq 1$ implica que $(n-1)/(1+a+na) < 0$ e como $I_1 > 0$ a desigualdade do Teorema 4.2.3 será sempre satisfeita. ■



(a) Equilíbrio (I_2, R_2) instável.

(b) Equilíbrio (I_2, R_2) estável.

Figura 4.2: Retratos de fase do sistema (4.3): (a) quando a doença desaparece e (b) quando a doença oscila entre a persistência e a extinção de acordo com a posição inicial.

A seguir, vamos encontrar outras condições que nos garantam que não existe ciclo limite no sistema (4.3). A isóclina vertical do sistema (4.3) é $R_v = B - (na + 1)I - n/I$ e a isóclina horizontal de (4.3) é $R_h = bI$.

Temos que a derivada da isóclina vertical é $R_v' = -(na+1) + n/I^2$ e que $R_v'' = -2n/I^3$ e assim, $R_v'' < 0$. Logo, a isóclina vertical admite um valor máximo em $\bar{I} = \sqrt{n/(na+1)}$.

Então, isóclina vertical admite função inversa restringindo o domínio a partir do \bar{I} a qual será

$$\begin{aligned} G : [\bar{I}, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ I &\longmapsto G(I) = \frac{B - I + \sqrt{(B - I)^2 - 4n(na + 1)}}{2(na + 1)}. \end{aligned}$$

Teorema 4.2.5. *Suponha*

$$\begin{aligned} bG(bI_1) &< B - 2n/\bar{I}, \\ I_2B(na + 1 - b) &> 2n(na + 1), \\ B(na + 1 - b)\sqrt{n/(na + 1)} &> n(2na + 2 - b). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Então não existe ciclo limite em (4.3).

Demonstração. Assuma que as três inequações em (4.10) sejam válidas. Observe a Figura 4.3 onde P_1 denota o ponto de equilíbrio (I_1, R_1) .

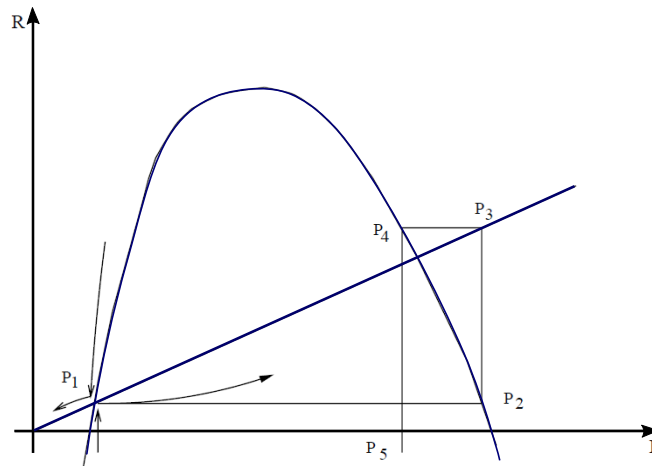


Figura 4.3: Posição da variedade estável e da variedade instável de P_1 .

As posições das variedades estável e instável de P_1 na vizinhança desse ponto podem ser vistas nesta figura. Além do mais, o segmento de reta P_3P_4 mostrado na mesma

figura existe devido à primeira inequação de (4.10). Considere agora a variedade instável Γ_1 de P_1 a qual se move para a direita. Note que o campo vetorial aponta para cima no segmento de reta P_1P_2 , para a esquerda no segmento de reta P_2P_3 , para baixo no segmento de reta P_3P_4 , e para a direita no segmento de reta P_4P_5 . Segue que Γ_1 irá permanecer a direita de P_4P_5 . Suponha que a coordenada horizontal de P_4 é x_1 e $\Gamma_1 = (I(t), R(t))$. Segue que $I(t) > x_1$ quando t é grande. Se chamarmos $x_{(i+1)} = G(bG(bx_i))$, $i = 1, \dots$, por argumentos similares, podemos ver que x_i é monotonicamente crescente com limite superior I_2 e $I(t) > x_i$ quando t é grande. Suponha $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$. Mostraremos que $x = I_2$. De $x = G(bG(bx))$, é suficiente mostrar que $x \neq G(bG(bx))$ para $\bar{I} < x < I_2$. Mostraremos isso por contradição. Suponha que existe um x , $\bar{I} < x < I_2$, tal que $x = G(bG(bx))$. Se $\eta(x) = B - (na + 1)x - n/x$, segue de $x = G(bG(bx))$ que $\eta(\eta(x)/b) = bx$. A contradição será óbvia se mostrarmos que $\eta(\eta(x)/b) < bx$ quando $\bar{I} < x < I_2$.

Depois de alguns cálculos, obtemos

$$\eta(\eta(x)/b) - bx = \frac{(na + b + 1)x^2 - Bx + n}{-bx^2\eta(x)}\eta_1(x),$$

onde

$$\eta_1(x) = (na + 1)(1 - b + na)x^2 - 1(1 - b + na)Bx + n(na + 1).$$

De $((na + b + 1)x^2 - Bx + n)/(-bx^2\eta(x)) > 0$ para $\bar{I} < x < I_2$, é suficiente considerar o sinal de $\eta_1(x)$. Simplificando, temos

$$\eta_1(I_2) = -\frac{b(B(1 - b + na)I_2 - 2n^2a - 2n)}{1 + b + na} < 0$$

e isso segue por (4.10). Similarmente,

$$\eta_1(\bar{I}) = B(-1 + b - na)\bar{I} + 2n^2a + 2n - nb < 0.$$

Desta forma, $\eta_1(x) < 0$ para $\bar{I} < x < I_2$. Isto mostra que é impossível ter $\eta(\eta(x)/b) = bx$ para algum $\bar{I} < x < I_2$. Assim, $x = I_2$ e Γ_1 tende para (I_2, R_2) com t tendendo ao infinito. Note que um ciclo limite do sistema (4.3), se existe, deve incluir (I_2, R_2) e não pode interceptar Γ_1 . Com isso, concluímos que não existe ciclo limite em (4.3) sob as condições em (4.10). ■

Observação 4.2.1. O Teorema 4.2.5 diz essencialmente que não existe ciclo limite no sistema (4.3) se b é pequeno e B é grande. Isso será satisfeito se o tamanho da população N_0 ou a taxa de contato β for grande e a taxa de recuperação μ é pequena.

Se o sistema (4.3) possui ciclo limite, o comportamento dinâmico do modelo é determinado pela estabilidade de (I_2, R_2) e do ciclo limite. Para encontrar ciclo limite, inicialmente vamos considerar a curva da bifurcação de Hopf para (I_2, R_2) . Seja

$$\gamma = b(n-1)(2na-4a-1) + (2n^2a+2n+4a+1)(2na+1). \quad (4.11)$$

Teorema 4.2.6. Assuma que vale (4.9). Se $\gamma < 0$, então existe uma família de órbitas periódicas estáveis em (4.3) conforme B^2 decresce para B_c^2 . Se $\gamma > 0$, existe uma família de órbitas periódicas instáveis a medida que B^2 cresce para B_c^2 . Se $\gamma = 0$, existem pelo menos dois ciclos limites em (4.3) sob suaves perturbações.

Demonstração. Para simplificar os cálculos, consideraremos o seguinte sistema o qual é equivalente ao sistema (4.3):

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = I^2(B - I - R) - nI(1 + aI^2), \\ \frac{dR}{dt} = (bI - R)(1 + aI^2). \end{cases} \quad (4.12)$$

Para transladar o ponto de equilíbrio (I_2, R_2) para a origem faça a seguinte transformação $x = I - I_2$, $y = R - R_2$. Então o sistema (4.12) pode ser escrito da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(x, y), \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) representa termos de ordem superior e

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2I_2(B - I_2 - R_2) - I_2^2 - n(1 + aI_2^2) - 2naI_2^2, \\ a_{12} &= -I_2^2, \\ a_{21} &= b(1 + aI_2^2) + 2(bI_2 - R_2)aI_2, \\ a_{22} &= -(1 + aI_2^2). \end{aligned}$$

De (4.9) implicar $a_{11} + a_{22} = 0$, que é o traço da matriz Jacobiana do sistema (4.13) avaliada na origem, temos

$$(-2b - 3na - 3 - a)I_2^2 + 2BI_2 - 1 - n = 0. \quad (4.14)$$

De $(na + b + 1)I_2^2 - BI_2 + n = 0$, segue que

$$I_2 = \frac{2n^2a - b + nb - 1 + 2n}{B(na + 1 + a)}. \quad (4.15)$$

Usando esta equação e $B^2 = B_c^2$, podemos simplificar a_{ij} como segue:

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_0(2na + 1), \\ a_{12} &= -k_0(n - 1), \\ a_{21} &= k_0(2na + 1)b, \\ a_{22} &= -k_0(2na + 1), \end{aligned}$$

com $k_0 = 1/(na + a + 1)$. Agora, usando a transformação $X = x$, $Y = a_{11}x + a_{12}y$ em (4.13), obtemos

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y + f_1\left(X, \frac{Y - a_{11}X}{a_{12}}\right), \\ \frac{dY}{dt} = -k_1X + a_{11}f_1\left(X, \frac{Y - a_{11}X}{a_{12}}\right) + a_{12}f_2\left(X, \frac{Y - a_{11}X}{a_{12}}\right), \end{cases} \quad (4.16)$$

no qual

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0^2(-2na + nb - b - 1)(2na + 1), \\ &= k_0^2[-(2na + 1) + q(n - 1)](2na + 1). \end{aligned}$$

De $n > 1$ e $b > (2na + 1)/(n - 1)$, segue que $k_1 > 0$.

Faça $u = -X$ e $v = Y/\sqrt{k_1}$. Então, podemos reescrever o sistema (4.16) da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\sqrt{k_1}v + F_1(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = \sqrt{k_1}u + F_2(u, v), \end{cases} \quad (4.17)$$

sendo

$$F_1(u, v) = -f_1(-u, (v\sqrt{k_1} + a_{11}u/a_{12})),$$

$$F_2(u, v) = \frac{a_{11}f_1(-u, (v\sqrt{k_1} + a_{11}u)/a_{12}) + a_{12}f_2(-u, (v\sqrt{k_1} + a_{11}u)/a_{12})}{\sqrt{k_1}}.$$

Essa é a forma normal para a bifurcação de Hopf.

Seja o primeiro coeficiente de Liapunov:

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{16} \left[\frac{\partial^3 F_1}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial v^3} \right] \\ & + \frac{1}{16\sqrt{k_1}} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \right) - \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right]. \end{aligned}$$

Usando que $B^2 = B_c^2$, com o *software Wolfram Mathematica*, podemos ver que o sinal de κ é determinado por γ . Assim, por resultados em [10] (p. 354), o teorema segue. ■

Segue um exemplo na Figura 4.4 tomando $n = 4.0$, $b = 3.6$, $a = 0.2$ e $B = 10.02$. Para este valores segue que $B_c = 9.8796$ e $\gamma = 39.96$. Por conseguinte, existe um ciclo limite instável no sistema (4.3).

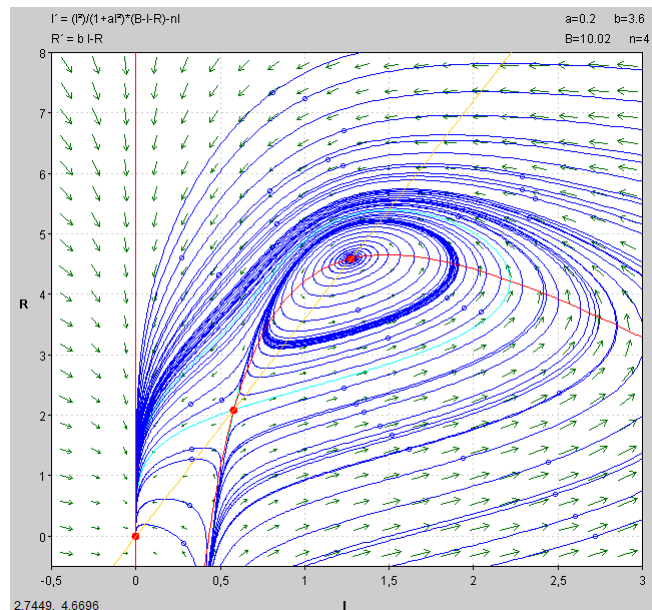


Figura 4.4: Retrato de fase do sistema (4.3) com um ciclo limite instável.

Para analisar a possível existência de ciclos limite no sistema (4.3), reescreveremos o mesmo num sistema do tipo Liénard e, para isso, faremos algumas mudanças de variáveis.

Inicialmente, reescreveremos o sistema (4.3) da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = g_0(I) - g_1(I)R, \\ \frac{dR}{dt} = bI - R, \end{cases} \quad (4.18)$$

sendo

$$g_0(I) = \frac{I^2(B - I)}{1 + aI^2} - nI, \quad g_1(I) = \frac{I^2}{1 + aI^2}.$$

Faremos $X = I$ e $Y = g_0(I) - g_1(I)R$ no sistema (4.18). Usando as regras de derivação implícita temos que o sistema (4.3) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y, \\ \frac{dY}{dt} = \psi_0(X) + \psi_1(X)Y + \frac{g'_1(X)}{g_1(X)}Y^2, \end{cases} \quad (4.19)$$

com

$$\begin{aligned} \psi_0(X) &= g_0(X) - bg_1(X)X, \\ \psi_1(X) &= g'_0(X) - g_0(X)g'_1(X)/g_1(X) - 1. \end{aligned}$$

Agora, defina $Y = ug_1(X)$. Então o sistema (4.19) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = ug_1(X), \\ \frac{du}{dt} = \frac{\psi_0(X)}{g_1(X)} + \psi_1(X)u. \end{cases} \quad (4.20)$$

Para fazermos a próxima mudança de variável precisamos usar a expressão de $g'_i(X)$, com $i = 0, 1$, as quais são

$$g'_0(X) = \frac{-aX^4 - 3X^2 + 2BX - n(1 + aX^2)^2}{(1 + aX^2)^2}, \quad g'_1(X) = \frac{2X}{(1 + aX^2)^2}.$$

e, então, com alguns cálculos simples, obtemos

$$\frac{\psi_1(X)}{g_1(X)} = -\frac{(na + a + 1)X^2 + 1 - n}{X^2}. \quad (4.21)$$

A integral indefinida de (4.21) é $-(na + a + 1)X + (1 - n)/X$ onde a constante de integração foi ignorada já que, a seguir, essa expressão será derivada. A mudança que faremos agora será

$$v = u - \int \frac{\psi_1(X)}{g_1(X)} dX = u + (na + a + 1)X - \frac{(1 - n)}{X}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{du}{dt} + (na + a + 1) \frac{dX}{dt} + \frac{(1 - n)}{X^2} \frac{dX}{dt} \\ &= \frac{\psi_0(X)}{g_1(X)} + \psi_1(X)u + \left(na + a + 1 + \frac{1 - n}{X^2} \right) u g_1(X) \\ &= \frac{\psi_0(X)}{g_1(X)} + g_1(X) \left(\frac{\psi_1(X)}{g_1(X)} + \frac{(na + a + 1)X^2 + 1 - n}{X^2} \right) u, \end{aligned}$$

e, pela equação (4.21), segue que o segundo termo de dv/dt é nulo e, então, o sistema (4.20) se torna

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = g_1(X) \left(v - (na + a + 1)X + \frac{1 - n}{X} \right), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\psi_0(X)}{g_1(X)}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Introduzindo um novo tempo

$$\tau = \alpha(t) = \int_0^t g_1(X(s)) ds,$$

ou seja, $d\tau = g_1(X(t))dt$, donde temos

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = v - (na + a + 1)X + \frac{1 - n}{X}, \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{\psi_0(X)}{g_1^2(X)}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Note que

$$\frac{d\tau}{dt} = g_1(X(t)) > 0,$$

sendo assim, logo após a alteração no tempo as direções das órbitas permanecem inalteradas.

Fazendo

$$x = X - I_2 \quad e \quad y = v - (na + a + 1)I_2 + \frac{1 - n}{I_2},$$

finalmente obtemos um sistema do tipo Liénard

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y - F(x), \\ \frac{dy}{d\tau} = -g(x), \end{cases} \quad (4.24)$$

no qual

$$F(x) = (na + a + 1)x + \frac{(1 - n)x}{I_2(I_2 + x)},$$

$$g(x) = \frac{(na + b + 1)x(x + I_2 - I_1)}{(x + I_2)g_1(x + I_2)}.$$

A expressão da primeira equação do sistema (4.24) é facilmente encontrada. Para encontrar a segunda basta usar que $(na + b + 1)I_2^2 + AI_2 - m = 0$ e que podemos escrever $A = (I_2 + I_1)(na + b + 1)$ sendo que esta última expressão foi obtida ao somarmos as expressões de I_1 e I_2 .

Podemos ver que o equilíbrio trivial $(0, 0)$ do sistema (4.24) corresponde ao equilíbrio (I_2, R_2) de (4.3) e que o equilíbrio $(-I_2 + I_1, F(-I_2 + I_1))$ corresponde ao equilíbrio (I_1, R_1) de (4.3). Além disso, verificando a relação entre as novas variáveis e as antigas, conseguimos averiguar que a estabilidade do equilíbrio e a existência de ciclos limite em (4.3) são preservados em (4.24). Assim, é suficiente estudar a existência de ciclos limite no sistema (4.24). A seguir, para simplificar, usaremos t para representar o tempo ao invés de τ .

Se $n \leq 1$, o Corolário 4.2.4 mostra que o sistema (4.24) não tem ciclo limite. Assim, somente consideramos o caso onde $n > 1$.

Defina

$$\begin{aligned} h(x) = & -a(na + a + 1)(1 + na + b)x^6 \\ & + (-a^2n - 2ab + 6na + 5n^2a^2 - 2a + 1 + 4nab + b)x^4 \\ & - 2B(2na + 1)x^3 + (nb - b + na - 1 + 5n^2a + 4n)x^2 \\ & - n(n - 1). \end{aligned}$$

Para demonstrar o Teorema 4.2.8 utilizaremos um resultado encontrado em [10] (pag. 387) sobre a bifurcação de um ciclo limite semi-estável e para isso precisaremos da definição de campo vetorial rodado.

Definição 4.2.1. *Seja $x' = f(x, y, \gamma) = (P(x, y, \gamma), Q(x, y, \gamma))$ com $f \in C^1$. Este sistema diferencial é dito definir uma **família a um parâmetro de um campo vetorial rodado** se os pontos singulares de f são isolados e para todos os pontos regulares vale que a matriz N dada por*

$$N = \begin{pmatrix} P & Q \\ P_\gamma & Q_\gamma \end{pmatrix},$$

possui $\det(N) > 0$, onde P_γ e Q_γ denotam a derivada parcial com respeito ao parâmetro γ .

Segue agora, o resultado mencionado anteriormente

Teorema 4.2.7. *Um ciclo limite semi-estável C de uma família a um parâmetro de um campo vetorial rodado $x' = f(x, \gamma)$ se divide em dois ciclos limite simples, um estável e um instável, conforme o parâmetro γ é variado num sentido e desaparece conforme γ é variado no sentido oposto.*

No Teorema anterior, a estabilidade do ciclo limite interior é determinada pela estabilidade do ponto singular envolvido: se o ponto é estável, então o ciclo limite interior será instável e, se o ponto singular for repulsor então o ciclo limite interno será estável. Veja a Figura 4.5 quando o ponto singular é estável.

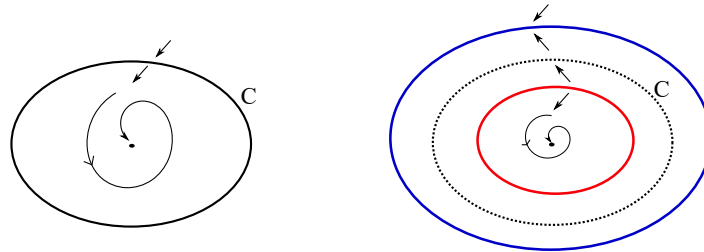


Figura 4.5: Divisão de ciclo limite semi-estável de um campo vetorial rodado.

Temos o seguinte resultado sobre a existência de ciclos limites no sistema (4.3):

Teorema 4.2.8. *Suponha $n > 1$ e $(n - 1)/(na + a + 1) < I_2^2$. Então existe no máximo um ciclo limite no sistema (4.24) se $h(x) \leq 0$ para $x \in [I_1, \sqrt{(n - 1)/(na + a + 1)}]$.*

Demonstração. Assuma a hipótese. Denote $F'(x) = f(x)$ e por $G(x, y)$ o campo vetorial associado ao sistema (4.24). Então,

$$f(x) = na + a + 1 - \frac{n-1}{(x + I_2)^2}, \quad G(x, y) = (y - F(x), -g(x)).$$

Inicialmente vamos analisar a estabilidade da origem. Temos que a linearização do sistema (4.24) no ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é

$$M = \begin{pmatrix} -f(0) & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{pmatrix},$$

sendo

$$f(0) = na + a + 1 - \frac{n-1}{I_2^2} \quad \text{e} \quad g'(0) = \frac{(I_2 - I_1)(na + b + 1)}{I_2 g_1(I_2)}.$$

Deste modo, $\text{tr}(M) = -f(0)$ e $\det(M) = g'(0)$. Por definição $I_2 > I_1$ e $g_1(I_2) > 0$, por conseguinte, $\det(M) > 0$. Além disso, temos $\text{tr}(M) < 0$ já que, por hipótese, $n > 1$ e $(n-1)/(na + a + 1) < I_2^2$, com isso, $f(0) > 0$. Logo, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

Agora, suponha por absurdo que existam dois ciclos limite C_1 e C_2 no sistema (4.24), onde C_1 é o ciclo limite interno e C_2 é o ciclo limite externo. Seja

$$h_i = \int_{C_i} \text{div}(G(x, y)) dt = - \int_{C_i} f(x) dt, \quad i = 1, 2.$$

Por conseguinte, h_i informa a estabilidade do ciclo limite, se $h_i > 0$, então C_i é instável e, se $h_i < 0$, então C_i é estável como apresentado no Corolário 2.2.4.

Desejamos mostrar que $h_2 > h_1$, pois pela estabilidade da origem temos que o ciclo limite interior ou será instável ou semi-estável e, com isso segue que $h_1 \geq 0$, logo, ao mostrarmos que $h_2 > h_1$ a estabilidade do ciclo exterior fica determinada. Para mostrarmos isso dividiremos C_1 e C_2 como segue

$$C_1 = \overbrace{Q_1 Q_5 Q_3} \cup \overbrace{Q_1 Q_7 Q_3}, \quad C_2 = \overbrace{Q_2 Q_6 Q_4} \cup \overbrace{Q_2 Q_8 Q_4}.$$

Vamos precisar, ainda, definir duas regiões. Seja D_1 a região delimitada pela curva fechada $C_{21} = \overbrace{Q_2 Q_6 Q_4 Q_3 Q_5 Q_1 Q_2}$ e D_2 a região delimitada pela curva fechada $C_{12} = \overbrace{Q_4 Q_8 Q_2 Q_1 Q_7 Q_3 Q_4}$ como segue na Figura 4.6.

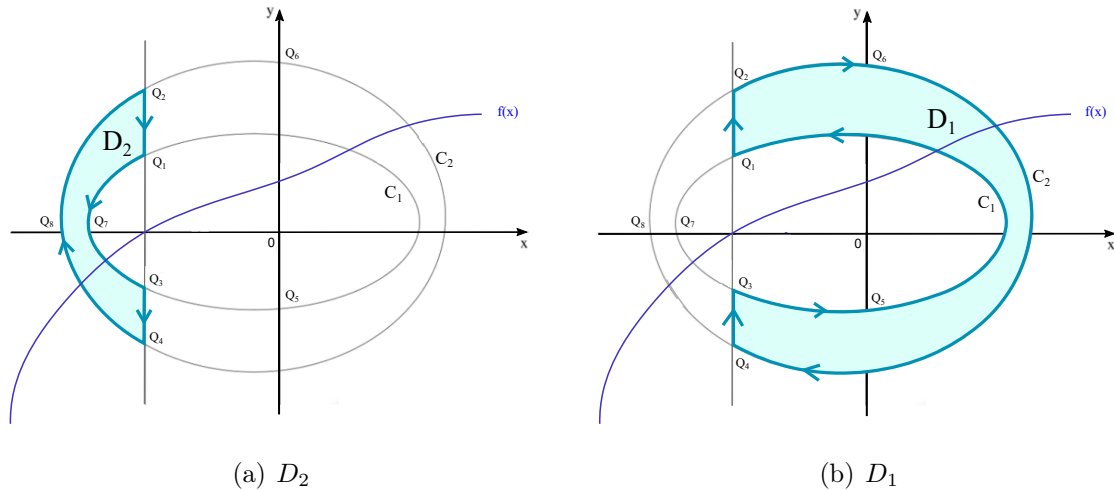


Figura 4.6: Divisão dos ciclos C_1 e C_2 .

Note que

$$h_2 - h_1 = - \int_{C_2} f(x) dt + \int_{C_1} f(x) dt = - \left(\int_{C_2} f(x) dt - \int_{C_1} f(x) dt \right).$$

Por sua vez,

$$\int_{C_2} f(x) dt = \int_{\overbrace{Q_2 Q_6 Q_4}} f(x) dt + \int_{\overbrace{Q_4 Q_8 Q_2}} f(x) dt$$

e

$$\int_{C_1} f(x) dt = \int_{\overbrace{Q_3 Q_7 Q_1}} f(x) dt + \int_{\overbrace{Q_1 Q_5 Q_3}} f(x) dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(x) dt - \int_{C_1} f(x) dt &= \left(\int_{\overbrace{Q_2 Q_6 Q_4}} f(x) dt - \int_{\overbrace{Q_1 Q_5 Q_3}} f(x) dt \right) \\ &\quad + \left(\int_{\overbrace{Q_4 Q_8 Q_2}} f(x) dt - \int_{\overbrace{Q_3 Q_7 Q_1}} f(x) dt \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} \int_{C_{21}} f(x) dt &= \int_{\overbrace{Q_2 Q_6 Q_4}} f(x) dt + \int_{\overbrace{Q_4 Q_3}} f(x) dt + \int_{\overbrace{Q_3 Q_5 Q_1}} f(x) dt + \int_{\overbrace{Q_1 Q_2}} f(x) dt \\ &= \int_{\overbrace{Q_2 Q_6 Q_4}} f(x) dt - \int_{\overbrace{Q_1 Q_5 Q_3}} f(x) dt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{C_{12}} f(x)dt &= \int_{\overbrace{Q_4Q_8Q_2}} f(x)dt + \int_{\overbrace{Q_2Q_1}} f(x)dt + \int_{\overbrace{Q_1Q_7Q_3}} f(x)dt + \int_{\overbrace{Q_3Q_4}} f(x)dt \\ &= \int_{\overbrace{Q_4Q_8Q_2}} f(x)dt - \int_{\overbrace{Q_3Q_7Q_1}} f(x)dt. \end{aligned}$$

Mostraremos que as duas parcelas na equação (4.25) são negativas e, com isso, concluiremos que $h_2 > h_1$.

Primeiramente, vamos calcular a integral sobre a região D_1 a qual é delimitada pela curva C_{21} orientada no sentido horário como pode ser visto na Figura 4.6 (b). Da primeira equação do sistema (4.24) obtemos

$$dt = \frac{dx}{y - F(x)}$$

e, como a curva C_{21} que delimita D_1 é fechada, simples e C^1 por partes podemos utilizar o Teorema de Green para calcularmos a integral ao longo da curva C_{21} . Então, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\overbrace{Q_2Q_6Q_4}} f(x)dt - \int_{\overbrace{Q_1Q_5Q_3}} f(x)dt &= \int_{C_{21}} f(x)dt \\ &= \int_{C_{21}} \frac{f(x)}{y - F(x)} dx \\ &= - \int \int_{D_1} \frac{f(x)}{(y - F(x))^2} dx dy < 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a integral sobre a região D_2 a qual é delimitada pela curva C_{12} orientada no sentido horário como pode ser visto na Figura 4.6 (a). Da segunda equação do sistema (4.24) obtemos $dt = -dy/g(x)$ e, como a curva C_{12} que é fechada, simples e C^1 por partes podemos utilizar o Teorema de Green para calcularmos a integral ao longo desta curva. Desta maneira,

$$\begin{aligned} \int_{\overbrace{Q_4Q_8Q_2}} f(x)dt - \int_{\overbrace{Q_3Q_7Q_1}} f(x)dt &= \int_{\overbrace{Q_4Q_8Q_2Q_1Q_7Q_3Q_4}} f(x)dt \\ &= - \int_{\overbrace{Q_4Q_8Q_2Q_1Q_7Q_3Q_4}} \frac{f(x)}{g(x)} dy \\ &= \int \int_{D_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Ao mostrarmos que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) \leq 0, \quad x \in \left(-(I_2 - I_1), -I_2 + \sqrt{(n-1)/(na + a + 1)} \right],$$

já que qualquer ponto em D_2 pertence a este intervalo, será óbvio que $h_2 > h_1$. Por simplicidade, troque $I_2 + x$ por z em f/g . Então,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{[(na + a + 1)z^2 - n + 1]z}{(1 + pz^2)[-zA + m + (na + b + 1)z^2]}. \quad (4.26)$$

Utilizando o *software Wolfram Mathematica* para ver que o sinal da equação (4.26) é determinado por $h(x)$ onde $x \in \left(I_1, \sqrt{(n-1)/(na+a+1)}\right)$ e, com isso, segue que a derivada de f/g é negativa para x neste intervalo. Logo, temos que a equação (4.25) é negativa e, conseqüentemente, $h_2 > h_1$.

Como vimos que $h_2 > h_1$ e, pela estabilidade da origem, $h_1 \geq 0$ logo, $h_2 > 0$. Isto significa, pela definição de h_2 , que C_2 é um ciclo limite instável. Vamos agora avaliar as duas possibilidades para o ciclo limite C_1 .

- Se $h_1 > 0$ temos que C_1 é um ciclo limite instável, o que é impossível pois, neste caso, teríamos uma região positivamente invariante entre os ciclos C_1 e C_2 a qual não possui nenhum equilíbrio por conseguinte, pelo Teorema de Poincaré-Bendixon, existiria um terceiro ciclo limite entre ambos o qual seria estável. Mas, acabamos de mostrar que se existem dois ciclos limites no sistema (4.18) sob as hipóteses deste teorema o ciclo limite exterior deveria ser instável. Deste modo, temos uma contradição ao analisarmos os ciclos C_1 e o que surgiria entre C_1 e C_2 .
- Se $h_1 = 0$, temos que C_1 será semi-estável. Sejam $B = B_1$, $n = n_1$, $a = a_1$ e $b = b_1$ os parâmetros para os quais temos $h_1 = 0$ e escolha $a = a_1 + \gamma$ e $b = b_1 + n_1\gamma$. De I_1 , I_2 e $na + b + 1$ serem invariantes conforme γ é variado segue que as hipóteses do teorema ainda são satisfeitas. Além disso, podemos verificar que (4.24) é um campo vetorial rodado com respeito ao parâmetro γ quando $-(I_2 - I_1) < x$ já que os dois pontos de equilíbrio são isolados e denotando a primeira e segunda entrada do campo vetorial $G(x, y)$ por P e Q , respectivamente:

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ P_\gamma & Q_\gamma \end{pmatrix} = \frac{(na + b + 1)(n_1 + 1)x^2(-I_1 + I_2 + x)}{(I_2 + x)g_1(I_2 + x)} > 0.$$

Deste modo, usando o Teorema 4.2.7, se $\gamma > 0$ for suficientemente pequeno, o sistema (4.24) produz um ciclo limite instável na vizinhança interior de C_1 e um ciclo

limite estável na vizinhança exterior de C_1 . Das condições do teorema permanecerem válidas para γ suficientemente pequeno, pelos argumentos anteriores, segue que o ciclo na vizinhança exterior de C_1 deveria ser instável. Isto é uma contradição.

Assim, é impossível ter dois ciclos limites no sistema (4.24). ■

Podemos ver que as condições do Teorema 4.2.8 são satisfeitas se B e n são grandes. Isto significa, devido às expressões de B e n em relação aos parâmetros iniciais, que quando o tamanho da população N_0 for grande, junto com uma boa taxa de recuperação μ , implica que existe no máximo um ciclo limite no modelo (4.3).

Vamos agora estudar as condições para ocorrência da bifurcação de Bogdanov-Takens.

4.3 Bifurcação Bogdanov-Takens

O objetivo desta seção é estudar a bifurcação Bogdanov-Takens do sistema (4.3) que pode ocorrer quando existe um único ponto de equilíbrio positivo degenerado. Para que o sistema (4.3) tenha somente um ponto de equilíbrio suponha que a seguinte hipótese seja satisfeita

$$(H1) \quad B^2 = 4n(na + b + 1).$$

Então, neste caso, o sistema (4.3) admite um único ponto de equilíbrio (I_0, R_0) , sendo

$$I_0 = \frac{B}{2(na + b + 1)}, \quad R_0 = bI_0.$$

Tome os parâmetros B_0 , a_0 , n_0 e b_0 tal que (H1) seja satisfeita. Considere o sistema (4.3) com esses parâmetros

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{I^2}{1 + a_0 I^2} (B_0 - I - R) - n_0 I, \\ \frac{dR}{dt} = b_0 I - R. \end{cases} \quad (4.27)$$

Como (I_0, R_0) é ponto de equilíbrio do sistema (4.27), segue que $dI/dt = 0$, e assim, temos a seguinte expressão para n_0

$$n_0 = \frac{I_0(B_0 - I_0 - R_0)}{1 + a_0(I_0)^2},$$

a qual será usada para obter o coeficiente a_{11} do sistema (4.28) apresentado a seguir. Para transladar o ponto (I_0, R_0) para a origem, fazemos $x = I - I_0$ e $y = R - R_0$. Então, expandindo o sistema (4.3) em Série de Taylor em torno da origem e usando que (I_0, R_0) é ponto de equilíbrio, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}x^2 + a_{14}xy + f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = b_0x - y, \end{cases} \quad (4.28)$$

sendo $f_1(x, y)$ termos de ordem superior e

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{I_0(B_0 - 2I_0 - R_0 - B_0a_0(I_0)^2 + R_0a_0(I_0)^2)}{(1 + a_0(I_0)^2)^2}, \\ a_{12} &= -\frac{(I_0)^2}{1 + a_0(I_0)^2} < 0, \\ a_{13} &= \frac{B_0(1 - 3a_0(I_0)^2) + I_0(-3 + a_0I_0(I_0 + 3R_0)) - R_0}{(1 + a_0(I_0)^2)^3}, \\ a_{14} &= -\frac{2I_0}{(1 + a_0(I_0)^2)^2} < 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que a parte linear de (4.28) calculada na origem é

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por estarmos interessados em bifurcações de codimensão 2, precisamos ter o traço e o determinante da matriz Jacobiana nulos, então assumimos

$$(H2) \quad a_{11} = 1.$$

Teorema 4.3.1. *Suponha que as hipóteses (H1) e (H2) sejam válidas. Então o ponto de equilíbrio (I_0, R_0) de (4.3) é uma cúspide de codimensão 2, isto é, uma singularidade Bogdanov-Takens.*

Demonstração. Sob as hipóteses (H1) e (H2), podemos mostrar que o determinante da matriz $M = J(0, 0)$ é zero e, com isso, $a_{12} = -1/b_0$. Lembrando que $R_0 = b_0I_0$, temos

$$\begin{aligned} \det(M) &= -a_{11} - b_0a_{12} \\ &= -\frac{I_0(B_0 - 2I_0 - b_0I_0 - B_0a_0(I_0)^2 + b_0a_0(I_0)^3) + b_0(I_0)^2(1 + a_0(I_0)^2)}{(1 + a_0(I_0)^2)^2} \\ &= \frac{I_0(-B_0 + 2I_0 + 2b_0I_0 + B_0a_0(I_0)^2)}{(1 + a_0(I_0)^2)^2}. \end{aligned}$$

De $I_0 = B_0/(2(n_0a_0 + b_0 + 1))$,

$$\det(M) = \frac{2B_0^2a_0(n_0a_0 + b_0 + 1)(B_0^2 - 4n_0(n_0a_0 + b_0 + 1))}{(B_0^2a_0 + 4(n_0a_0 + b_0 + 1)^2)},$$

segue de (H1) que $\det(M) = 0$.

Além disto, substituindo em a_{11} a expressão de I_0 e usando (H1), resulta que

$$a_{11} = \frac{n_0b_0}{2n_0a_0 + b_0 + 1},$$

logo, (H2) é equivalente a

$$b_0 = \frac{2n_0a_0 + 1}{n_0 - 1}, \quad (4.29)$$

e isto implica que devemos ter $n_0 > 1$. Substituindo I_0 e B_0^2 na expressão de a_{12} , obtemos

$$a_{12} = -\frac{n_0}{2n_0a_0 + b_0 + 1}.$$

Segue da equação (4.29) que $a_{12} = -1/b_0$. Agora, é claro que a matriz M tem dois autovalores nulos. Assim, sob as hipóteses (H1) e (H2), o sistema (4.28) é escrito como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{b_0}y + a_{13}x^2 + a_{14}xy + f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = b_0x - y. \end{cases} \quad (4.30)$$

Substituindo I_0 , R_0 , B_0^2 , e b_0 , nesta ordem, em a_{13} e a_{14} , e simplificando as expressões, encontramos

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\frac{(n_0 - 2)(n_0a_0 + a_0 + 1)B_0}{2n_0(2n_0a_0 + 1)}, \\ a_{14} &= -\frac{(n_0 - 1)(n_0a_0 + a_0 + 1)B_0}{n_0(2n_0a_0 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Fazendo $X = x$ e $Y = x - y/b_0$, o sistema (4.30) é então escrito como

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y + (a_{13} + b_0a_{14})X^2 - a_{14}b_0XY + f_2(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = (a_{13} + b_0a_{14})X^2 - a_{14}b_0XY + f_2(X, Y), \end{cases} \quad (4.32)$$

sendo f_2 uma função suave em (X, Y) de pelo menos ordem três. Faremos a seguinte mudança de variáveis

$$u = X + \frac{a_{14}b_0}{2}X^2, \quad v = Y + (a_{13} + b_0a_{14})X^2.$$

para obter a forma normal canônica.

Assim,

$$\begin{aligned} u' &= X' + a_{14}b_0XX', & v' &= Y' + 2(a_{13} + b_0a_{14})XX', \\ uv &= XY + (a_{13} + b_0a_{14})X^3 + \frac{a_{14}b_0}{2}X^2Y + \left(\frac{a_{14}b_0}{2} + a_{13} + b_0a_{14}\right)X^4, \\ u^2 &= X^2 + a_{14}b_0X^3 + \left(\frac{a_{14}b_0}{2}\right)^2X^4. \end{aligned}$$

Então, obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v + g_1(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = (a_{13} + b_0a_{14})u^2 + (2a_{13} + b_0a_{14})uv + g_2(u, v), \end{cases} \quad (4.33)$$

com g_i sendo funções suaves em (u, v) de pelo menos terceira ordem. De (4.29) e (4.31), temos

$$\begin{aligned} a_{13} + b_0a_{14} &= -\frac{B_0(n_0a_0 + a_0 + 1)}{2(2n_0a_0 + 1)} < 0, \\ 2a_{13} + b_0a_{14} &= -\frac{(n_0 - 1)(n_0a_0 + a_0 + 1)B_0}{n_0(2n_0a_0 + 1)} < 0, \end{aligned}$$

sendo que usamos $n_0 > 1$ para garantir que as expressões anteriores não são nulas. Segue então, pelo Teorema 3 em [10] (pag. 151), que (I_0, R_0) é uma cúspide de codimensão 2. ■

Antes de prosseguirmos com o estudo do sistema (4.3), apresentaremos algumas definições.

Definição 4.3.1. *Uma família de campos vetoriais \mathbf{F}_μ sobre \mathbb{R}^n , a k parâmetros, onde $\mu \in \mathbb{R}^k$ denota o parâmetro, é definida por*

$$F_\mu = f(x, \mu)\frac{\partial}{\partial x} + g(x, \mu)\frac{\partial}{\partial y}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde as funções coeficientes f e g são de classe C^∞ com respeito a $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Definição 4.3.2. Consideremos $F : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^r ($r \geq 0$). Um desdobramento F_ε de classe C^r ($r \geq 0$) de F , isto é, $F_{\varepsilon|\varepsilon=0} = F$ com $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, é um **desdobramento versal de F** se, e somente se, dado qualquer perturbação Y_μ de classe C^r com $\mu \in \mathbb{R}^m$ com $Y_{\mu|\mu=0} = X$, tem-se:

- (i) Existem vizinhanças abertas U da origem em \mathbb{R}^k , V da origem em \mathbb{R}^m , W da origem em \mathbb{R}^n ;
- (ii) Existe uma função $\varphi : V \rightarrow U$;
- (iii) Existe uma aplicação $H : W \times V \rightarrow W$ tal que para μ fixo, $H_\mu = H(\cdot, \mu)$ é um homeomorfismo, e além disso, para cada μ , Y_μ é topologicamente equivalente a $F(\varphi(\mu))$ através de H_μ .

Definição 4.3.3. No desdobramento versal, o número k é unicamente definido e é dito a *codimensão (ou ordem) de uma singularidade*.

A seguir, encontraremos o desdobramento versal dependendo dos parâmetros originais do sistema (4.3). Desta maneira, conheceremos as curvas aproximadas de bifurcação. Escolhemos B e n como parâmetros de bifurcação. Suponha B_0 , a , n_0 e b satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Sejam

$$\begin{aligned} B &= B_0 + \lambda_1, & n &= n_0 + \lambda_2, \\ I_0 &= \frac{B_0}{2(n_0 a + b + 1)}, & R_0 &= b I_0. \end{aligned}$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, (I_0, R_0) é o ponto de equilíbrio degenerado do sistema (4.3). Substituindo $x = I - I_0$ e $y = R - R_0$ em (4.3) e usando a expansão em Taylor, obtemos que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{30} + a_{31}x - \frac{1}{b}y + a_{32}x^2 + a_{33}xy + W_1(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} = bx - y, \end{cases} \quad (4.34)$$

sendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, W_1 uma função suave de x , y e λ de ordem pelo menos três, e

$$\begin{aligned}
a_{30} &= -\frac{I_0(-I_0B_0 - I_0\lambda_1 + (I_0)^2 + I_0R_0 + n_0 + n_0a(I_0)^2 + \lambda_2 + \lambda_2a(I_0)^2)}{1 + a(I_0)^2}, \\
a_{31} &= -\frac{(n_0 + \lambda_2)(a(I_0)^2 + 1)^2 + I_0(-2B_0 - 2\lambda_1 + (I_0)^3a + 3I_0 + 2R_0)}{(1 + a(I_0)^2)^2}, \\
a_{32} &= -\frac{-B_0(1 - 3a(I_0)^2) - \lambda_1 - a(I_0)^2(I_0 + 3R_0 - 3\lambda_1) + 3I_0 + R_0}{(1 + a(I_0)^2)^3}, \\
a_{33} &= -\frac{2I_0}{(1 + a(I_0)^2)^2}.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo procedimento de simplificação em (4.31), temos

$$\begin{aligned}
a_{30} &= -\frac{B_0(n_0 - 1)(2n_0(2n_0a + 1)\lambda_2 - B_0(n_0 - 1)\lambda_1)}{4(2n_0a + 1)(n_0a + a + 1)n_0^2}, \\
a_{31} &= 1 + \frac{B_0(n_0 - 1)(n_0a + a + 1)\lambda_1 - n_0(2n_0a + 1)^2\lambda_2}{n_0(2n_0a + 1)^2}, \\
a_{32} &= -\frac{(n_0a + b + 1)[2\lambda_1(-b - 1 + 2n_0a)(n_0a + b + 1) + B_0(2n_0a + b + 1)(b + 1 + 2a)]}{2(2n_0a + b + 1)^3}, \\
a_{33} &= -\frac{B_0(n_0 - 1)(n_0a + a + 1)}{n_0(2n_0a + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $X = x$, $Y = a_0 + a_1x - y/b + a_2x^2 + a_3xy + W_1(x, y)$ e reescrevendo X, Y como x e y , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{30} + (a_{31} - 1)x + a_{34}y + (a_{33}b + a_2)x^2 + a_{35}xy - a_{33}by^2 + W_2(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (4.35)$$

sendo

$$a_{34} = a_{31} - 1 + ba_{33}a_{30}, \quad a_{35} = 2a_{32} + a_{33}ba_{31} + a_{30}a_{33}^2b^2.$$

Tomando $\lambda_i \rightarrow 0$, é fácil ver que $a_5 \rightarrow -(B_0(n_0 - 1)(n_0a + a + 1))/((2n_0a + 1)n_0) < 0$.

Fazendo $X = x + a_4/a_5$ e reescrevendo X como x , temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = b_{10} + b_1x + (a_{33}b + a_{32})x^2 + a_{35}xy - ba_{33}y^2 + W_3(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (4.36)$$

sendo $W_3(x, y, \lambda)$ uma função suave em x, y e λ de ordem pelo menos três e

$$b_0 = \frac{a_{30}a_{35}^2 + a_{35}a_{34} - a_{35}a_{31}a_{34} + ba_{33}a_{34}^2 + a_{32}a_{34}^2}{a_{35}^2},$$

$$b_1 = -\frac{a_{35} - a_{31}a_{35} + 2ba_{33}a_{34} + 2a_{32}a_{34}}{a_{35}}.$$

Agora, introduzindo o novo tempo τ por $dt = (1 + ba_{33}x)d\tau$ e reescrevendo τ como t , obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(1 + ba_{33}x), \\ \frac{dy}{dt} = (1 + ba_{33}x)(b_{10} + b_{11}x + (a_{33}b + a_{32})x^2 + a_{35}xy - ba_{33}y^2 + W_3(x, y, \lambda)). \end{cases} \quad (4.37)$$

Fazendo $X = x$, $Y = y(1 + ba_{33}x)$ e renomeando X , Y como x , y , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = b_{10} + c_1x + c_2x^2 + a_{35}xy + W_4(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (4.38)$$

sendo $W_4(x, y, \lambda)$ uma função suave em x , y e λ de ordem pelo menos três e

$$c_1 = 2b_{10}a_{33}b + b_{11},$$

$$c_2 = a_3^2b^2b_{10} + 2b_{11}a_3b + a_{33}b + a_{32}.$$

Note que

$$b_i \longrightarrow 0,$$

$$a_{35} \longrightarrow -\frac{B_0(n_0 - 1)(n_0a + a + 1)}{(2n_0a + 1)n_0} < 0,$$

$$c_2 \longrightarrow -\frac{(n_0a + a + 1)B_0}{2(2n_0a + 1)} < 0,$$

com $\lambda_i \longrightarrow 0$. Fazendo a seguinte mudança de variável, a qual será a última

$$X = \frac{a_5^2x}{c_2}, \quad Y = \frac{a_5^3y}{c_2^2} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{c_2t}{a_5},$$

e denotando as novas variáveis por x , y e t , respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \tau_1 + \tau_2x + x^2 + xy + W_5(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (4.39)$$

onde $W_5(x, y, \lambda)$ é uma função suave em x, y e λ de ordem pelo menos três e

$$\tau_1 = \frac{b_0 a_5^4}{c_2^3}, \quad \tau_2 = \frac{c_1 a_5^2}{c_2^2}. \quad (4.40)$$

Conforme apresentado nos resultados preliminares, pelo Teorema 2.3.2 temos que o sistema está na forma normal da bifurcação de Bogdanov-Takens e a curva de bifurcação sela-nó é dada pela equação (2.5), da bifurcação de Hopf é dada pela equação (2.6) e o Lema 2.3.1 garante que existe uma curva de bifurcação homoclínica cuja representação local está na equação (2.7).

Portanto, temos o seguinte teorema sobre o comportamento de bifurcação no sistema (4.3) o qual é equivalente ao sistema (4.39)

Teorema 4.3.2. *Assuma as hipóteses (H1) e (H2) sejam válidas. Então o sistema (4.3) admite o seguinte comportamento de bifurcação:*

- (i) *existe uma curva de bifurcação sela-nó $SN = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 4c_2 b_0 = c_1 + o(\|\lambda\|^2)\}$;*
- (ii) *existe uma curva de bifurcação de Hopf $H = \{(\lambda_1, \lambda_2) : b_0 = 0 + o(\|\lambda\|^2), c_1 < 0\}$;*
- (iii) *existe uma curva de bifurcação homoclínica $HL = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 25b_0 c_2 + 6c_1^2 = 0 + o(\|\lambda\|^2)\}$.*

4.4 Discussão dos Resultados

Ao combinar análise qualitativa e de bifurcação, foi possível estudarmos o comportamento global de um modelo epidêmico com uma taxa de incidência saturada $\beta I^2 S / (1 + \alpha I^2)$. Mostramos que existem duas possibilidades para o resultado da transmissão da doença, assim como no capítulo anterior. A doença pode desaparecer à medida que o tempo evolui. E ainda, há uma região de tal forma que a doença persistirá se a posição inicial estiver nessa região e desaparecerá se a posição inicial estiver fora dessa região. A bifurcação sela-nó, as bifurcações de Hopf supercríticas e subcríticas e a bifurcação homoclínica podem ocorrer e pode existir nenhum ou um ciclo limite para diferentes parâmetros. Uma vez que

mostramos que o sistema possui bifurcação Bogdanov-Takens, temos informações claras sobre a dinâmica do sistema perto do ponto de equilíbrio degenerado.

Uma alteração no fator inibitório α , que é mais plausível do que nos demais parâmetros, pode reduzir os impactos da doença na população, visto que esse fator reduz a possibilidade de propagação da doença, porque os equilíbrios endêmicos do modelo (1.2) com $p = q = 2$ desaparecem quando α é aumentado de tal forma que $B^2 < 4n(na + b + 1)$.

Capítulo 5

Modelo com $p > 0$ e $q \geq 0$

Iniciamos este capítulo relembrando que a notação mantida é somente a dos parâmetros do sistema (1.2). Neste capítulo a taxa de incidência, conforme estudada em [5], será da forma

$$f(I)S = \frac{\beta I^p S}{1 + \alpha I^q} \quad (5.1)$$

onde βI^p mede a força da infecção, $1/(1 + \alpha I^q)$ descreve os efeitos inibitórios pela mudança de comportamento dos indivíduos susceptíveis quando a quantidade de indivíduos infectados aumenta. Note que a taxa de incidência bilinear βSI é um caso especial de (5.1) com $p = 1$ e $\alpha = 0$ ou $q = 0$.

Neste capítulo estudaremos o comportamento do modelo SIRS apresentado no sistema (1.2) com $p > 0$ e $q \geq 0$ bem como as bifurcações que podem ocorrer. Em razão de neste capítulo alguns teoremas serem enunciados utilizando o conjunto positivamente invariante D , vale lembrar que o mesmo foi apresentado na introdução em (1.5).

Com a taxa de incidência dada por (5.1) o sistema fica da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{\beta I^p}{\alpha I^q + 1} (N_0 - I - R) - (m + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \mu I - (m + \nu)R. \end{cases} \quad (5.2)$$

5.1 Equilíbrios

Nesta seção será feita uma análise da quantidade de equilíbrios do sistema (5.2).

Para obter os pontos de equilíbrio do sistema (5.2), igualamos o lado direito a zero:

$$\begin{cases} \frac{\beta I^p}{1 + \alpha I^q}(N_0 - I - R) - (m + \mu)I = 0, \\ \mu I - (m + \nu)R = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Agora, substituindo a expressão de R obtida através da segunda equação do sistema (5.3) na primeira equação temos:

$$I \left[\frac{\beta I^{p-1}}{1 + \alpha I^q} \left(\frac{A}{m} - I - \frac{\mu I}{(m + \nu)} \right) - (m + \mu) \right] = 0, \quad (5.4)$$

com isso, vemos que o ponto $(0, 0)$ é o equilíbrio “livre da doença” do sistema (5.2). Para obter o equilíbrio positivo do sistema (5.2)

$$\begin{aligned} \frac{I^{p-1}}{1 + \alpha I^q} \left(\frac{A}{m} - I - \frac{\mu I}{(m + \nu)} \right) &= \frac{(m + \mu)}{\beta}, \\ \frac{AI^{p-1}}{m(1 + \alpha I^q)} \left(1 - \frac{m(m + \nu + \mu)I}{A(m + \nu)} \right) &= \frac{(m + \mu)}{\beta}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

que produz

$$\frac{I^{p-1}}{1 + \alpha I^q} \left(1 - \frac{I}{K} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \quad (5.6)$$

sendo

$$K = \frac{A(m + \nu)}{m(m + \nu + \mu)}, \quad \mathcal{R}_0 = \frac{\beta A}{m(\mu + m)}.$$

Como já citado anteriormente, \mathcal{R}_0 é chamado *número de reprodução básica* da doença.

Seja

$$\varphi(I) = \frac{I^{p-1}}{1 + \alpha I^q} \left(1 - \frac{I}{K} \right), \quad I \in (0, K]. \quad (5.7)$$

Então

$$\varphi'(I) = \frac{I^{p-2}}{(1 + \alpha I^q)^2} \psi(I), \quad I \in (0, K], \quad (5.8)$$

onde

$$\psi(I) = p - 1 - p \frac{I}{K} + \alpha(p - 1 - q)I^q - \alpha(p - q) \frac{I^{q+1}}{K}, \quad I \in (0, K]. \quad (5.9)$$

Agora discutiremos as raízes positivas da equação (5.6):

(i) Quando $0 < p < 1$, se $p \geq q$, então $\psi(I) < 0$; se $p < q$, então

$$\begin{aligned}\psi(I) &\leq p - 1 - p\frac{I}{K} + \alpha(p - 1 - q)I^q + \alpha(q - p)I^q \\ &= p - 1 - p\frac{I}{K} - \alpha I^q < 0, \quad I \in (0, K].\end{aligned}\quad (5.10)$$

Assim $\varphi'(I) < 0$. Como $\varphi(K) = 0$ e $\lim_{I \rightarrow 0^+} \varphi(I) = +\infty$, para qualquer $\mathcal{R}_0 > 0$ a equação (5.6) tem uma única solução positiva em I_e ($0 < I_e < K$).

(ii) Quando $p = 1$, temos que $\psi(I) < 0$. Segue por (5.9) que se $q \leq 1$, então $\psi(I) < 0$ para $I \in (0, K)$, e se $q > 1$, então

$$\begin{aligned}\psi(I) &\leq -\frac{I}{K} - \alpha q I^q + \alpha(q - 1)I^q \\ &= -\frac{I}{K} - \alpha I^q < 0, \quad I \in (0, K].\end{aligned}\quad (5.11)$$

Assim, $\phi'(I) < 0$ para qualquer $I \in (0, K)$.

(a) Se $q = 0$, então $\varphi(0) = \frac{1}{1 + \alpha}$ e $\varphi(K) = 0$. Dessa forma, a equação (5.6) não tem solução positiva quando $\mathcal{R}_0 \leq 1 + \alpha$ e tem uma única solução positiva quando $\mathcal{R}_0 > 1 + \alpha$.

(b) Se $q > 0$, então $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(K) = 0$. Assim, (5.6) não tem solução positiva quando $\mathcal{R}_0 \leq 1$ e tem uma única solução positiva quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

(iii) Quando $p > 1$, pode ser provado que $\psi(I)$ tem uma única raiz I_0 no intervalo $(0, K)$. Este resultado será provado em sete casos.

(a) Se $\alpha = 0$ ou $q = 0$, então a conclusão é evidente.

(b) Se $\alpha > 0$, $0 < q \leq 1$ e $1 < p \leq q + 1$, é obtido por (5.9) que

$$\psi'(I) = -\frac{p}{K} + \alpha q(p - 1 - q)I^{q-1} - \alpha(p - q)(q + 1)\frac{I^q}{K} < 0, \quad I \in (0, K]. \quad (5.12)$$

Como $\psi(0) = p - 1 > 0$ e $\psi(K) = -1 - \alpha K^q < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero I^* em $(0, K)$.

(c) Se $\alpha > 0$, $0 < q \leq 1$ e $p > 1 + q$, então

$$\begin{aligned}\psi''(I) &= \alpha q(q-1)(p-1-q)I^{q-2} - \alpha(p-q)q(q+1)\frac{I^{q-1}}{K} \\ &= \alpha q I^{q-2} \left[(q-1)(p-q-1) - (p-q)(q+1)\frac{I}{K} \right] < 0, \quad I \in (0, K].\end{aligned}\tag{5.13}$$

Assim, $\psi(I)$ é uma função com concavidade para baixo. Como $\psi(0) = p-1 > 0$ e $\psi(K) = -1 - \alpha K^q < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero em $(0, K)$.

(d) Se $\alpha > 0$, $q > 1$ e $q \leq p \leq q+1$, então segue de (5.12) que $\psi'(I) < 0$ em $(0, K)$.

Como $\psi(0) = p-1 > 0$ e $\psi(K) < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero I^* em $(0, K)$.

(e) Se $\alpha > 0$, $q > 1$ e $\frac{1+q}{2} \leq p < q$, então segue de (5.13) que

$$\begin{aligned}\psi''(I) &< \alpha q I^{q-2} [(q-1)(p-q-1) + (q-p)(q+1)] \\ &= \alpha q I^{q-2} (-2p+q+1) \leq 0, \quad I \in (0, K].\end{aligned}$$

Assim, $\psi(I)$ é uma função com concavidade para baixo. Como $\psi(0) = p-1 > 0$ e $\psi(K) = -1 - \alpha K^q < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero I^* no intervalo $(0, K)$.

(f) Se $\alpha > 0$, $q > 1$ e $1 < p < (1+q)/2$, segue de (5.13) que no intervalo $(0, K)$,

$\psi''(I)$ tem um único zero

$$\bar{I} = \frac{(q-1)(1+q-p)}{(q-p)(q+1)} K,$$

além do mais, $\psi''(I) < 0$ quando $0 < I < \bar{I}$ e $\psi''(I) > 0$ quando $\bar{I} < I < K$. Como $\psi'(0) = -p/K$, $\psi'(I) < 0$ quando $0 < I < \bar{I}$. Como $\psi'(K) = -p/K - \alpha p K^{q-1} < 0$, $\psi'(I) < \psi'(K) < 0$ quando $\bar{I} < I < K$. Então, $\psi'(I) < 0$ no intervalo $(0, K)$ exceto \bar{I} , isto é, $\psi(I)$ é uma função monotonicamente decrescente no intervalo $(0, K)$. Como $\psi(0) = p-1 > 0$ e $\psi(K) < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero I^* no intervalo $(0, K)$.

(g) Se $\alpha > 0$, $q > 1$ e $p > q+1$, então no intervalo $(0, K)$, $\psi''(I)$ tem um único zero

$$\bar{I} = \frac{(q-1)(p-1-q)}{(p-q)(q+1)} K.$$

Além disso, $\psi''(I) > 0$ quando $0 < I < \bar{I}$ e $\psi''(I) < 0$ quando $\bar{I} < I < K$. Assim, \bar{I} é o único ponto extremo e o ponto de máximo de $\psi'(I)$ no intervalo $[0, K]$. Então provaremos o restante em dois sub-casos:

(g1) Se $\psi'(\bar{I}) \leq 0$, então $\psi'(I) \leq \psi'(\bar{I}) < 0$ quando $I \in (0, K)$ e $I \neq \bar{I}$.

Logo, $\psi(I)$ é uma função monotonicamente decrescente no intervalo $(0, K)$.

Como $\psi(0) > 0$ e $\psi(K) < 0$, $\psi(I)$ tem um único zero I^* no intervalo $(0, K)$.

(g2) Se $\psi'(\bar{I}) > 0$, como $\psi'(0) < 0$ e $\psi'(K) < 0$, assim, $\psi'(I)$ tem dois pontos

I_{10} e I_{20} tais que

$$0 < I_{10} < \bar{I} < I_{20} < K,$$

e $\psi'(I) < 0$ quando $0 < I < I_{10}$, $\psi'(I) > 0$ quando $I_{10} < I < I_{20}$ e $\psi'(I) < 0$ quando $I_{20} < I < K$. Então I_{10} e I_{20} são pontos de mínimo e máximo da função $\psi(I)$ no intervalo $[0, K]$, respectivamente. Através de $\psi'(I_{10}) = 0$ e (9), temos

$$\begin{aligned} \psi(I_{10}) &= p - 1 - p \frac{I_{10}}{K} + \alpha(p - 1 - q) I_{10}^q + \alpha(q - p) \frac{I_{10}^{q+1}}{K} \\ &= p - 1 - p \frac{I_{10}}{K} + p \frac{I_{10}}{qK} + \alpha(p - q)(q + 1) \frac{I_{10}^{q+1}}{qK} + \alpha(q - p) \frac{I_{10}^{q+1}}{K} \\ &> (p - 1) \frac{I_{10}}{K} - p \frac{I_{10}}{K} + p \frac{I_{10}}{qK} + \frac{\alpha(p - q)}{qK} I_{10}^{q+1} \\ &= \frac{(p - q)I_{10}}{qK} + \frac{\alpha(p - q)}{qK} I_{10}^{q+1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Segue por $\psi(K) < 0$ que $\psi(I)$ tem um único zero I^* no intervalo $(0, K)$.

É sabido pela discussão acima que se $p > 1$, então $\psi(I)$ tem um único zero I^* no intervalo $(0, K)$ tal que $\psi(I) > 0$ com $I \in (0, I^*)$, e $\psi(I) < 0$ com $I \in (I^*, K)$. Assim, é obtido de (5.8) que $\varphi'(I) > 0$ com $I \in (0, I^*)$, e $\varphi'(I) < 0$ com $I \in (I^*, K)$. Então I^* é o único ponto crítico e ponto de máximo de $\varphi(I)$ no intervalo $(0, K)$. Com $\varphi(0) = \varphi(K) = 0$, seja

$$\mathcal{R}_0^* = \frac{1}{\varphi(I^*)} = \frac{1}{\max_{0 \leq I \leq K} \varphi(I)}. \quad (5.14)$$

Se $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$, então a equação (5.6) não tem solução positiva; se $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0^*$, então a equação (5.6) tem uma única solução positiva I^* ; e se $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$, então a equação (5.6) tem duas soluções positivas I_1 e I_2 , sendo $0 < I_1 < I^* < I_2 < K$.

Pela discussão acima, temos as seguintes conclusões:

Teorema 5.1.1. *O sistema (5.2) sempre tem um equilíbrio trivial $(0, 0)$. Além disso:*

- (i) *Se $0 < p < 1$, então o sistema (5.2) tem um único equilíbrio endêmico $E_e(I_e, R_e)$;*
- (ii) *Se $p = 1$ e $q = 0$, então o sistema (5.2) não tem equilíbrio endêmico quando $\mathcal{R}_0 \leq 1 + \alpha$; e tem um único equilíbrio endêmico $E_e(I_e, R_e)$ quando $\mathcal{R}_0 > 1 + \alpha$;*
- (iii) *Se $p = 1$ e $q > 0$, então o sistema (5.2) não tem equilíbrio endêmico quando $\mathcal{R}_0 \leq 1$; e tem um único equilíbrio endêmico $E_e(I_e, R_e)$ quando $\mathcal{R}_0 > 1$;*
- (iv) *Se $p > 1$, então o sistema (5.2) não tem equilíbrio endêmico quando $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$; tem um único equilíbrio endêmico $E^*(I^*, R^*)$ quando $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0^*$, e dois equilíbrios endêmicos $E_1(I_1, R_1)$ e $E_2(I_2, R_2)$ quando $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$.*

5.2 Análise Qualitativa

Nesta seção, estudaremos a estabilidade do ponto de equilíbrio trivial $(0, 0)$ e do ponto de equilíbrio endêmico. Para o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema (5.2), temos a seguinte conclusão:

Teorema 5.2.1. (i) *Se $0 < p < 1$, então $(0, 0)$ é instável;*

(ii) *Se $p = 1$ e $q = 0$, então O é globalmente assintoticamente estável em D quando $\mathcal{R}_0 \leq 1 + \alpha$, e instável quando $\mathcal{R}_0 > 1 + \alpha$;*

(iii) *Se $p = 1$ e $q > 0$, então O é globalmente assintoticamente estável em D quando $\mathcal{R}_0 \leq 1$, e instável quando $\mathcal{R}_0 > 1$;*

(iv) *Se $p > 1$, então O é localmente assintoticamente estável. Além do mais, O é globalmente assintoticamente estável em D quando $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$.*

Demonstração. Provaremos cada um dos itens separadamente.

(i) Suponha que quando $0 < p < 1$, o equilíbrio $(0, 0)$ do sistema (5.2) é estável. Seja ε_0 tal que

$$\varepsilon_0^{1-p} - \beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{2(m + \mu)(1 + \alpha\varepsilon_0^q)} < 0.$$

Para o ε_0 acima, existe um número positivo δ_0 tal que a solução $(I(t), R(t))$ do sistema (5.2) com condições iniciais $I(0) = I_0 > 0$ e $R(0) = R_0 > 0$ satisfaz para todo $t > 0$,

$$0 < I(t) < \varepsilon_0, \quad 0 < R(t) < \varepsilon_0. \quad (5.15)$$

Seja $U = I^{1-p}$, então a primeira equação do sistema (5.2) é transformada em

$$\frac{dU}{dt} = (1-p)\beta \frac{N_0 - U^{\frac{1}{1-p}} - R}{1 + \alpha U^{\frac{q}{1-p}}} - (m + \mu)(1-p)U. \quad (5.16)$$

Observando (5.15), segue que

$$U(t) = I(t)^{1-p} < \varepsilon_0^{1-p}. \quad (5.17)$$

Usando (5.15) e (5.16) obtemos

$$\frac{dU(t)}{dt} > (1-p)\beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{1 + \alpha\varepsilon_0^q} - (m + \mu)(1-p)U(t).$$

Segue que

$$\begin{aligned} U(t) &\geq U(0)e^{-(1-p)(m+\mu)t} + \int_0^t (1-p)\beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{1 + \alpha\varepsilon_0^q} e^{-(1-p)(m+\mu)(t-y)} dy \\ &> \beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{(d + \mu)(1 + \alpha\varepsilon_0^q)} (1 - e^{-(1-p)(m+\mu)t}). \end{aligned}$$

Quando t é suficientemente grande, temos

$$U(t) = \beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{2(d + \mu)(1 + \alpha\varepsilon_0^q)}. \quad (5.18)$$

De (5.17) e (5.18), segue que

$$\varepsilon_0^{1-p} > \beta \frac{N_0 - 2\varepsilon_0}{2(m + \mu)(1 + \alpha\varepsilon_0^q)}, \quad (5.19)$$

o que contradiz a escolha de ε_0 . Então $(0, 0)$ é instável quando $0 < p < 1$.

(ii) Se $p = 1$ e $q = 0$, a matriz Jacobiana do sistema (5.2) em $(0, 0)$ é

$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\beta A}{m(1+\alpha)} - (m + \mu) & 0 \\ \mu & -(m + \nu) \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz J_0 são os elementos da diagonal principal e, usando a definição de \mathcal{R}_0 , os mesmos podem ser escritos como

$$\lambda_1 = -(m + \nu) < 0, \quad \lambda_2 = (m + \mu) \left(\frac{\mathcal{R}_0}{1 + \alpha} - 1 \right).$$

Então, $(0, 0)$ é localmente assintoticamente estável quando $\mathcal{R}_0 < 1 + \alpha$, e instável quando $\mathcal{R}_0 > 1 + \alpha$.

Para provar a estabilidade global do equilíbrio O , construímos uma função de Liapunov $V = I$. Então, a derivada de V ao longo das soluções do sistema (5.2) é

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq \frac{\beta I}{(1 + \alpha)} \left(\frac{A}{m} - I \right) - (m + \mu)I \\ &= (m + \mu) \left(\frac{\mathcal{R}_0}{1 + \alpha} - 1 \right) I - \frac{\beta I^2}{1 + \alpha}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, é obtido através de (5.20) que dV/dt é negativo definido. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0.$$

Por meio da segunda equação do sistema (5.2), é fácil provar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

Assim, $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável em D com $\mathcal{R}_0 \leq 1 + \alpha$.

(iii) Similarmente, podemos provar que se $p = 1$ e $q > 0$, então $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável quando $\mathcal{R}_0 \leq 1$, e instável quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

(iv) Se $p > 1$, então os autovalores da matriz Jacobiana do sistema (5.2) calculada no ponto $(0, 0)$ são

$$\lambda_1 = -(d + v) < 0, \quad \lambda_2 = -(d + \mu) < 0.$$

Então, pelo teorema de Hartman-Grobman, $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.

Se $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$, sabemos pelo Teorema 5.1.1 que o sistema (5.2) não tem equilíbrio positivo no conjunto invariante D . Assim $(0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável em D . ■

Teorema 5.2.2. *Suponha $0 < p \leq 1$. Se o equilíbrio endêmico $E_e (I_e, R_e)$ do sistema (5.2) existe, então tal equilíbrio é localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Se existe o equilíbrio endêmico $E_e (I_e, R_e)$ do sistema (5.2), a matriz Jacobiana J_e desse sistema calculada em E_e é

$$J_e = \begin{pmatrix} \frac{p\beta(N_0 - I_e - R_e)I_e^{p-1}}{1 + \alpha I_e^q} - \frac{\beta I_e^p}{1 + \alpha I_e^q} - \frac{\alpha q \beta (N_0 - I_e - R_e) I_e^{p+q-1}}{(1 + \alpha I_e^q)^2} - (m + \mu) & -\frac{\beta I_e^p}{1 + \alpha I_e^q} \\ \mu & -(m + \nu) \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Da equação (5.3) temos que

$$N_0 - I_e - R_e = \frac{(m + \mu)(1 + \alpha I_e^q)}{\beta I_e^{p-1}}. \quad (5.22)$$

Assim, podemos simplificar a expressão de J_e substituindo a equação (5.22) em (5.21), obtendo

$$J_e = \begin{pmatrix} (p - 1)(m + \mu) - \alpha q(m + \mu) \frac{I_e^q}{1 + \alpha I_e^q} - \frac{\beta I_e^p}{1 + \alpha I_e^q} & -\frac{\beta I_e^p}{1 + \alpha I_e^q} \\ \mu & -(m + \nu) \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz J_e é

$$\det(J_e) = (m + \mu)(m + \nu) \left(1 - p + \frac{\alpha q I_e^q}{1 + \alpha I_e^q} \right) + \frac{\beta(m + \mu + \nu) I_e^p}{1 + \alpha I_e^q}.$$

Como todos os parâmetros são positivos e, por hipótese, $0 < p \leq 1$, vemos que $\det(J_e) > 0$.

Desta forma, vamos agora analisar o sinal do traço para determinar a estabilidade de E_e .

O traço da matriz J_e é

$$\text{tr}(J_e) = -(m + \nu) + (p - 1)(m + \mu) - \alpha q(m + \mu) \frac{I_e^q}{1 + \alpha I_e^q} - \frac{\beta I_e^p}{1 + \alpha I_e^q},$$

e, logo $\text{tr}(J_e) < 0$. Portanto, E_e é localmente assintoticamente estável. ■

Teorema 5.2.3. *Se $p > 1$ e $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$, então o equilíbrio endêmico $E_1 (I_1, R_1)$ do sistema (5.2) com o menor número de infectados é um ponto de sela.*

Demonstração. Quando $p > 1$ e $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$, existem os pontos de equilíbrio endêmico $E_1, (I_1, R_1)$, e $E_2, (I_2, R_2)$ do sistema (5.2). A matriz Jacobiana do sistema (5.2) em E_i ($i = 1, 2$) é

$$J_i = \begin{pmatrix} (p-1)(m+\mu) - \alpha q(m+\mu) \frac{I_i^q}{1+\alpha I_i^q} - \frac{\beta I_i^p}{1+\alpha I_i^q} & -\frac{\beta I_i^p}{1+\alpha I_i^q} \\ \mu & -(m+\nu) \end{pmatrix}.$$

Para o equilíbrio endêmico com menor número de infectados E_1 , utilizando (5.6) depois de “tediosos cálculos”, o determinante de J_1 é obtido:

$$\begin{aligned} \det(J_1) &= (m+\mu)(m+\nu) \left(1 - p + \alpha q \frac{I_1^q}{1+\alpha I_1^q} \right) + \beta(m+\mu+\nu) \frac{I_1^q}{1+\alpha I_1^q} \\ &= -\frac{(m+\mu)(m+\nu)}{(1+\alpha I_1^q) \left(1 - \frac{I_1}{K} \right)} \psi(I_1). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Para o equilíbrio endêmico (I_1, R_1) , com $0 < I_1 < I^*$ é sabido na demonstração do Teorema 5.1.1 que $\psi(I) > 0$ no intervalo $(0, I^*)$, então $\psi(I_1) > 0$. Segue de (5.23) que $\det(J_1) < 0$. Por conseguinte, o equilíbrio endêmico E_1 é uma sela. ■

Teorema 5.2.4. *Se $p > 1$ e $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$, então o equilíbrio endêmico $E_2, (I_2, R_2)$, do sistema (5.2) com o maior número de infectados é ou um atrator ou um repulsor. Mais ainda, E_2 é localmente assintoticamente estável com $1 < p \leq 1 + (m+\nu)/(m+\mu)$.*

Demonstração. Para o equilíbrio endêmico com maior número de infectados E_2 , recorrendo a (5.6), com $I^* < I_2 < K$, temos $\psi(I_2) < 0$. Então o determinante da matriz J_2 é

$$\det(J_2) = -\frac{(m+\mu)(m+\nu)}{(1+\alpha I_2^q) \left(1 - \frac{I_2}{K} \right)} \psi(I_2) > 0.$$

Logo, E_2 não pode ser um ponto de sela, ou é um atrator ou um repulsor. Se $1 < p \leq 1 + (m+\nu)/(m+\mu)$, o traço de J_2 é

$$\text{tr}(J_2) = -(m+\nu) + (p-1)(m+\mu) - \alpha q(m+\mu) \frac{I_2^q}{1+\alpha I_2^q} - \frac{\beta I_2^p}{1+\alpha I_2^q} < 0. \quad (5.24)$$

Assim, E_2 é localmente assintoticamente estável. ■

Agora, encontraremos condições sob as quais é possível garantir que não existe de ciclos limite no sistema (5.2). Neste intuito, construímos uma função de Dulac para obter condições suficientes. É conveniente denotar as duas equações do lado direito no sistema (5.2) por $P(I, R)$ e $Q(I, R)$, respectivamente.

Teorema 5.2.5. *Para o sistema (5.2), se o parâmetro p satisfaz $0 < p \leq 1$ ou $1 < p \leq 1 + (m + \nu)/(m + \mu)$, então não existe ciclo limite.*

Demonstração. Considere a função de Dulac

$$f(I, R) = \frac{1 + \alpha I^q}{\beta I^p}.$$

Como

$$\frac{\partial(Pf)}{\partial I} + \frac{\partial(Qf)}{\partial R} = -1 - \frac{(m + \mu)(1 - p) + (m + \nu) + [(m + \mu)(1 - p + q) + m + \nu]\alpha I^q}{\beta I^p},$$

quando $0 < p \leq 1$ ou $1 < p \leq 1 + (m + \nu)/(m + \mu)$, temos $\partial(Pf)/\partial I + \partial(Qf)/\partial R < 0$ em D . Então, pelo critério de Dulac, não existe órbita fechada no sistema (5.2). ■

Pelo teoremas 5.2.2 e 5.2.5, temos a seguinte conclusão:

Corolário 5.2.6. *Suponha $0 < p \leq 1$. Se existe o equilíbrio endêmico $E_e (I_e, R_e)$ do sistema (5.2), então tal ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável.*

5.3 Bifurcação

Nesta seção, diferentes tipos de bifurcações serão discutidos. Realizaremos a análise da estabilidade do equilíbrio para obter a forma normal para o modelo de bifurcação de Hopf e Bogdanov-Takens. Consideramos \mathcal{R}_0 ou A e ν como parâmetros de bifurcação e obtemos a forma normal do sistema na vizinhança do ponto de bifurcação.

5.3.1 Bifurcação de Hopf

Para mostrar que o sistema (5.2) sofre bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio (I_2, R_2) , considere a função

$$f(I) = \frac{\beta I^p}{1 + \alpha I^q} \tag{5.25}$$

Para transladar o ponto de equilíbrio (I_2, R_2) para origem, fazemos $x = I - I_2$ e $y = R - R_2$. Usando o fato de (I_2, R_2) ser ponto de equilíbrio, depois de algumas manipulações, o sistema (5.2) é transformado no seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(x, y; A) \\ v \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

sendo

$$J(A) = \begin{pmatrix} f'(I_2) \left(\frac{A}{m} - I_2 - R_2 \right) - (m + \mu) - f(I_2) & -f(I_2) \\ \mu & -(m + \nu) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} M(x, y; A) &= \frac{1}{2} f''(I_2) \left(\frac{A}{m} - I_2 - R_2 \right) x^2 - f'(I_2)(x + y)x \\ &\quad - \frac{1}{2} f''(I_2) x^2 y + \frac{1}{3!} f^{(3)}(I_2) \left(\frac{A}{m} - I_2 - R_2 \right) x^3 - \frac{1}{2} f''(I_2) x^3 \\ &\quad - \frac{1}{3!} f^{(3)} x^3 y + f_4(x, A) \left(\frac{A}{m} - I_2 - R_2 - x - y \right), \end{aligned}$$

onde $f_4(x, A)$ denota os termos de ordem pelo menos 4 em x na expressão

$$f(I_2(A) + x; A) = f(I_2) + f'(I_2)x + \frac{1}{2} f''(I_2)x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(I_2)x^3 + f_4(x, A).$$

Uma vez que o traço da matriz $J(A)$ é

$$T(I_2(A), A) := \text{tr}(J(A)) = f'(I_2)(N_0 - I_2 - R_2) - f(I_2) - (2m + \mu + \nu),$$

calculando a derivada implícita de $T(I_2(A), A)$ em relação a A e usando a primeira expressão do sistema dado em (5.3) para obter o dI_2/dA , temos

$$\frac{dT}{dA} = \frac{[f(I_2)f''(I_2) - f'^2(I_2)](N_0 - I_2 - R_2) + f'(I_2)(m + \mu - f(I_2))}{m \left(\frac{\mu}{m + \nu} f(I_2) - (m + \nu) - T(I_2(A), A) \right)}.$$

Para que a condição de transversalidade seja satisfeita, suponha que $dT/dA \neq 0$. Agora, como queremos analisar a ocorrência da bifurcação de Hopf, suponha que $\text{tr}(J(A)) = 0$ em A_c , então segue que

$$f'(I_2)(N_0 - I_2 - R_2) = f(I_2) + (2m + \mu + \nu),$$

com isso, podemos ver que

$$J(A_c) = \begin{pmatrix} m + \nu & -f(I_2) \\ \mu & -(m + \nu) \end{pmatrix}.$$

Agora, iremos colocar o sistema numa forma normal que nos permitirá concluir que ocorre a bifurcação de Hopf. Temos que os autovalores da matriz $J(A_c)$ são $\pm i\omega_c$, onde $\omega_c = \sqrt{\mu f(I_2) - (m + \nu)^2}$. Seja \mathbf{u} o autovetor da matriz $J(A_c)$ associado ao autovalor $-i\omega_c$, ou seja, $J(A_c)\mathbf{u} = -i\omega_c\mathbf{u}$ sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{C}^2$.

É fácil ver que os autovetores associados ao autovalor $-i\omega_c$ são da forma

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{(m + \nu - i\omega_c)u_2}{\mu} \\ u_2 \end{pmatrix},$$

assim, um dos seus representantes é

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} m + \nu - i\omega_c \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathbf{u} = \text{Re}(\mathbf{u}) + i\text{Im}(\mathbf{u})$, sendo

$$\text{Re}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} m + \nu \\ \mu \end{pmatrix} e \quad \text{Im}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\omega_c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{cases} J(A_c)\text{Re}(\mathbf{u}) = \omega_c\text{Im}(\mathbf{u}), \\ J(A_c)\text{Im}(\mathbf{u}) = -\omega_c\text{Re}(\mathbf{u}), \end{cases}$$

com isso,

$$J(A_c) (\text{Re}(\mathbf{u}), \text{Im}(\mathbf{u})) = (\text{Re}(\mathbf{u}), \text{Im}(\mathbf{u})) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_c \\ \omega_c & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Defina a matriz $Q = (\text{Re}(\mathbf{u}), \text{Im}(\mathbf{u}))$, assim

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\omega_c \\ 1/\mu & \frac{m + \nu}{\mu\omega_c} \end{pmatrix}$$

e segue de (5.27) que

$$Q^{-1}J(A_c)Q = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_c \\ \omega_c & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, se considerarmos a transformação

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \eta \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

obtemos a forma normal do sistema (5.26) como segue

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = -\omega_c\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = \omega_c\epsilon - \frac{1}{\omega_c}\widetilde{M}(\epsilon, \eta; A_c), \end{cases} \quad (5.28)$$

sendo $\widetilde{M}(\epsilon, \eta; A_c) = M((m + \nu)\epsilon - \omega_c\eta, \mu\epsilon; A_c)$. Note que $dT/dA = f_{Ax} + g_{Ay}$ com f e g como no Teorema 2.3.1. Defina

$$\begin{aligned} \Phi = & \left\{ [f(I_2(A))f''(I_2(A)) - f'^2(I_2(A))] \left(\frac{A}{m} - I_2(A) - R_2(A) \right) \right. \\ & \left. + f'(I_2(A)) [(m + \mu - f(I_2(A)))] \right\} [\mu f(I_2(A)) - (m + \nu)^2]. \end{aligned}$$

Então Φ e dT/dA têm o mesmo sinal em $A = A_c$, pois $T(I_2(A_c), A_c) = 0$ e

$$\Phi|_{A=A_c} = \left(\frac{m}{m + \nu} [\mu f(I_2) - (m + \nu)^2]^2 \right) \frac{dT}{dA}.$$

Segue pelo Teorema 2.3.1 que E_2 é localmente assintoticamente estável para $A > A_c$ (respectivamente, $A < A_c$) e instável para $A < A_c$ (respectivamente, $A > A_c$) se $\Phi|_{A=A_c} < 0$ (respectivamente, $\Phi|_{A=A_c} > 0$), e o sistema sofre bifurcação de Hopf em $A = A_c$.

Avaliando o primeiro coeficiente de Liapunov do sistema em $(0, 0, A_c)$ temos

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{16\omega_c} \left(\widetilde{M}_{\xi\xi\eta} + \widetilde{M}_{\eta\eta\eta} \right) - \frac{1}{16\omega_c^2} \widetilde{M}_{\xi\eta} \left(\widetilde{M}_{\xi\xi} + \widetilde{M}_{\eta\eta} \right), \\ &= \frac{1}{16} [2\mu(m + \nu)M_{xy} + ((m + \nu)^2 + \omega_c^2)] \\ &+ \frac{1}{16\omega_c} (\mu M_{xy} + (m + \nu)M_{xx}) [2\mu(M_{xy} + ((m + \nu)^2 + \omega_c^2)M_{xx})], \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} M_{xx}(0, 0, A_c) &= f''(I_2)(N_0 - I_2 - R_2) - 2f'(I_2^2), \\ M_{xyx}(0, 0, A_c) &= -f'(I_2), \\ M_{xxy}(0, 0, A_c) &= -f''(I_2), \\ M_{xxx}(0, 0, A_c) &= f'''(I_2)(N_0 - I_2 - R_2) - 3f''(I_2). \end{aligned}$$

Portanto, logramos o seguinte resultado:

Teorema 5.3.1. *Suponha que $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$ e que exista $A_c > 0$ tal que $T(I_2(A_c); A_c) = 0$ e $\Phi|_{A=A_c} \neq 0$. Se $\kappa \neq 0$, então uma família de soluções periódicas bifurca no equilíbrio endêmico E_e de tal modo que*

- (i) *para $\kappa < 0$, o sistema sofre bifurcação de Hopf supercrítica se $\Phi|_{A=A_c} > 0$ e uma backward bifurcação de Hopf supercrítica se $\Phi|_{A=A_c} < 0$;*
- (ii) *para $\kappa > 0$, o sistema sofre bifurcação de Hopf subcrítica se $\Phi|_{A=A_c} > 0$ e uma backward bifurcação de Hopf subcrítica se $\Phi|_{A=A_c} < 0$.*

5.3.2 Bifurcação de Bogdanov-Takens

Nesta seção, consideraremos a bifurcação Bogdanov-Takens, isto é, a bifurcação de uma cúspide de codimensão 2. A forma normal desta bifurcação fornece a representação local de uma curva homoclínica no ponto de Bogdanov-Takens (ν, A) , onde $\text{tr}(J^*(\nu, A)) = \det(J^*(\nu, A)) = 0$. Consideraremos ν e A como parâmetros de bifurcação e aplicaremos a transformação $I = I^* + x$ e $R = R^* + y$ para levar o único ponto de equilíbrio endêmico E^* , (I^*, R^*) , para origem. Neste caso, já obtemos na seção anterior que o sistema (5.2) pode ser escrito como em (5.26), porém avaliado no único ponto de equilíbrio endêmico (I^*, R^*) o qual é uma singularidade Bogdanov-Takens. Sejam $\nu = \nu_{BT}$ e $A = A_{BT}$, os parâmetros para os quais ocorre a bifurcação de Bogdanov-Takens. Podemos ver que no ponto Bogdanov-Takens, temos

$$J_{BT} = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} (m + \nu_{BT})\mu & -(m + \nu_{BT})^2 \\ \mu^2 & -(m + \nu_{BT})\mu \end{pmatrix}.$$

Assim, segue de (5.3) e por $\det(J_{BT}) = 0$,

$$\begin{aligned} I_{BT} &:= I^*(\nu_{BT}, A_{BT}) = \frac{(d + \nu_{BT})^2 A_{BT}}{m[\mu(m + \mu) + (m + \nu_{BT})(m + \nu_{BT} + \mu)]}, \\ R_{BT} &:= R^*(\nu_{BT}, A_{BT}) = \frac{\mu}{(d + \nu_{BT})} I_{BT}. \end{aligned}$$

De $J_{BT} \neq \mathbf{0}$, existem vetores reais linearmente independentes x_1 e x_2 tais que $J_{BT}x_1 = 0$ e $J_{BT}x_2 = x_1$. Esses vetores são dados por

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} m + \nu_{BT} \\ \mu \end{pmatrix}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{m + \nu_{BT} + \mu} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Então, o sistema (5.26) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{pmatrix} = \tilde{J}^*(\nu, A) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \sqrt{\mu} \begin{pmatrix} \frac{1}{m + \nu_{BT} + \mu} \tilde{M}(z_1, z_2; \nu, A) \\ \tilde{M}(z_1, z_2; \nu, A) \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

sendo

$$\tilde{J}^*(\nu, A) = U^{-1} J^* U = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(\nu, A) & \tilde{a}_{12}(\nu, A) \\ \tilde{a}_{21}(\nu, A) & \tilde{a}_{22}(\nu, A) \end{pmatrix},$$

com

$$\tilde{a}_{11}(\nu, A) = -\frac{(m + \nu_{BT} + \mu)f(I^*) + \mu(m + \nu) + (m + \nu_{BT})[m - (N_0 - I^* - R^*)f'(I^*)]}{m + \nu_{BT} + \mu},$$

$$\tilde{a}_{12}(\nu, A) = \frac{\mu[\nu + (N_0 - I^* - R^*)f'(I^*)]}{(m + \nu_{BT} + \mu)^2},$$

$$\tilde{a}_{21}(\nu, A) = -(m + \nu_{BT} + \mu)f(I^*) - (m + \nu_{BT})[m + \mu + \nu_{BT} - \nu - (N_0 - I^* - R^*)f'(I^*)],$$

$$\tilde{a}_{22}(\nu, A) = -\frac{m^2 + \mu^2 + \mu\nu_{BT} + \nu\nu_{BT} + m(2\mu + \nu + \nu_{BT}) - \mu(N_0 - I^* - R^*)f'(I^*)}{m + \nu_{BT} + \mu}.$$

Notando que $\tilde{a}_{ij}(\nu, A) = \tilde{b}_{ij}^{(0)} + b_{ij}(\nu - \nu_{BT}) + \tilde{b}_{ij}(A - A_{BT}) + O(2)$, $\tilde{b}_{ij}^{(0)} = 0$ para $(i, j) \neq (1, 2)$ e $\tilde{b}_{12}^{(0)} = 1$, segue que no ponto Bogdanov-Takens,

$$\tilde{J}^*(\nu_{BT}, A_{BT}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora faremos uma mudança de variáveis denotando o lado direito da primeira equação em (5.29) por Y e fazendo $X = z_1$. Obtemos que o sistema (5.29) transformado em

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y, \\ \frac{dY}{dt} = r_{10}X + r_{01}Y + r_{11}XY + r_{20}X^2 + r_{02}Y^2 \\ \quad + O(\|(X, Y, \nu - \nu_{BT}, A - A_{BT})\|^3), \end{cases} \quad (5.30)$$

sendo

$$\begin{aligned} r_{10} &= b_{21}(\nu - \nu_{BT}) + \tilde{b}_{21}(A - A_{BT}), \\ r_{01} &= (b_{11} + b_{22})(\nu - \nu_{BT}) + (\tilde{b}_{11} + \tilde{b}_{22})(A - A_{BT}), \\ r_{11} &= \frac{m(2m + 2\nu_{BT} + \mu)f'(I^*) - [A - m(I^* + R^*)](m + \nu_{BT})f''(I^*)}{m\sqrt{\mu}}, \\ r_{20} &= \frac{(m + \nu_{BT})[2m(m + \nu_{BT} + \mu)f'(I^*) - (A - m(I^* + R^*))(m + \nu_{BT})f''(I^*)]}{2m\sqrt{\mu}}, \\ r_{02} &= \frac{1}{2m(m + \nu_{BT} + \mu)^2} [2m(m^2 + \nu_{BT}^2 + 2m(\nu_{BT} + \sqrt{\mu}) + 2\nu_{BT}\sqrt{\mu} - \mu^2)f'(I^*) \\ &\quad - \sqrt{\mu}(A - m(I^* + R^*))(2m + 2\nu_{BT} + \mu)f''(I^*)], \\ R^* &= \frac{\mu}{m + \nu_{BT}}I^*. \end{aligned}$$

Assuma que $r_{11} \neq 0$ no ponto Bogdanov-Takens. Então existe uma vizinhança de $(I_{BT}, R_{BT}, \nu_{BT}, A_{BT})$ na qual $r_{11} \neq 0$. Fazendo $\Theta_1 = X - \rho$, onde $\rho = r_{01}/r_{11}$, denotando Θ_1 como X e usando uma reparametrização do tempo $dt = (1 - r_{02}X)d\tau$, é fácil checar que o sistema (5.30) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = (1 - r_{02}X)Y, \\ \frac{dY}{d\tau} = (1 - r_{02}X)[(r_{10} + \rho r_{20})\rho + (r_{10} + 2\rho r_{20})X \\ \quad + r_{11}XY + r_{20}X^2 + r_{02}Y^2 + O(3)], \end{cases} \quad (5.31)$$

onde $O(3)$ é uma função suave de $(x, y, \nu - \nu_{BT}, A - A_{BT})$ de ordem pelo menos três. Definindo duas novas variáveis $\theta_1 = X$ e $\theta_2 = (1 - r_{02}X)Y$, então o sistema (5.31) pode

ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{d\tau} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} = \rho(r_{10} + \rho r_{20}) + [r_{10} + 2\rho r_{20} - 2\rho r_{02}(r_{10} + \rho r_{20})]\theta_1 + r_{11}\theta_1\theta_2 \\ \quad + [\rho r_{02}^2(r_{10} + \rho r_{20}) - 2r_{02}(r_{10} + 2\rho r_{20}) + r_{20}]\theta_1^2 + 1 + O(3). \end{cases} \quad (5.32)$$

Seja

$$\Lambda = \rho r_{02}^2(r_{10} + \rho r_{20}) - 2r_{02}(r_{10} + 2\rho r_{20}) + r_{20}.$$

De $(r_{10}, r_{01}, \rho) \rightarrow (0, 0, 0)$ quando $(\nu, A) \rightarrow (\nu_{BT}, A_{BT})$, segue que

$$\begin{aligned} \Lambda_{BT} &= \lim_{(\nu, A) \rightarrow (\nu_{BT}, A_{BT})} \Lambda \\ &= \lim_{(\nu, A) \rightarrow (\nu_{BT}, A_{BT})} r_{20} \\ &= \frac{m + \nu_{BT}}{2m\sqrt{\mu}} \left[\frac{2m^2(m + \nu_{BT} + \mu)[m^2 + \nu_{BT}^2 + \nu_{BT}\mu + \mu^2 + 2m(\nu_{BT} + \mu)]^2}{\mu^2(m + \mu)A_{BT}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu(m + \nu_{BT})(m + \mu)A_{BT}f''(I_{BT})}{m^2 + \nu_{BT}^2 + \nu_{BT}\mu + \mu^2 + 2m(\nu_{BT} + \mu)} \right]. \end{aligned}$$

Se $\Lambda_{BT} \neq 0$, então $\Lambda \neq 0$ numa vizinhança pequena do ponto Bogdanov-Takens. De $r_{11} \neq 0$, fazendo a mudança de variáveis

$$\Theta_1 = \frac{r_{11}^2\theta_1}{\Lambda}, \quad \Theta_2 = \frac{r_{11}^3\theta_2}{\Lambda^2}, \quad t = \frac{\Theta\tau}{r_{11}}$$

e renomeando Θ_1, Θ_2 como θ_1, θ_2 , respectivamente, temos

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \rho r_{11}^4(r_{10} + \rho r_{20})/\Lambda^3 + [r_{10} + 2\rho r_{20} - 2\rho r_{02}(r_{10} + \rho r_{20})]r_{11}^2\theta_1/\Lambda^2 \\ \quad - \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + O(3). \end{cases} \quad (5.33)$$

Assim, pelo Teorema 2.3.2 e pelas equações (2.5)-(2.7) dos resultados preliminares, o seguinte teorema é estabelecido:

Teorema 5.3.2. *Suponha $p > 1$ e $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0^*$. Se existe um ponto de Bogdanov-Takens (I_{BT}, R_{BT}) com os parâmetros $\nu = \nu_{BT}$ e $A = A_{BT}$, tais que*

$$(i) \quad \frac{f'(I_{BT})}{f''(I_{BT})} - \frac{[A_{BT} - m(I_{BT} + R_{BT})](m + \nu_{BT})}{m(2m + 2\nu_{BT} + \mu)} \neq 0,$$

$$(ii) \quad f''(I_{BT}) \neq \frac{2m^2(m + \nu_{BT} + \mu)[m^2 + \nu_{BT}^2 + \nu_{BT}\mu + \mu^2 + 2m(\nu_{BT} + \mu)]^3}{\mu^3(m + \mu)^2(m + \nu_{BT})A_{BT}^2},$$

então em uma pequena vizinhança do ponto de equilíbrio (I_{BT}, R_{BT}) , o sistema (5.2) tem as seguintes curvas de bifurcação:

(a) uma curva de bifurcação sela-nó

$$SN = \{(\nu, A) \mid 4\rho(r_{10} + \rho r_{20})\Lambda = [r_{10}(1 - 2\rho r_{02}) + 2\rho r_{20}(1 - \rho r_{02})]^2\};$$

(b) uma curva não-degenerada de bifurcação de Hopf

$$H = \{(\nu, A) \mid r_{01} = 0, r_{10} < 0\};$$

(c) uma curva de bifurcação homoclínica

$$\begin{aligned} P = \{(\nu, A) \mid r_{10} + 2\rho r_{20} < 2\rho r_{02}(r_{10} + \rho r_{20}), \\ 6[r_{10} + 2\rho r_{20} - 2\rho r_{02}(r_{10} + \rho r_{20})]^2 \\ + 25\rho(r_{10} + \rho r_{20})\Lambda = o(\|(\nu - \nu_{BT}, A - A_{BT})\|^2)\}. \end{aligned}$$

5.4 Discussão dos Resultados

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo permitiu estudar o comportamento de bifurcação local, como Hopf, sela-nó e bifurcação de Bogdanov-Takens. O primeiro coeficiente de Liapunov foi calculado para determinar os tipos de bifurcações de Hopf que o modelo sofre. A forma normal do sistema na bifurcação de Bogdanov-Takens foi obtida, a partir da qual a representação local de uma curva de bifurcação homoclínica foi determinada. Para $p > 1$, o comportamento do sistema (5.2) depende não apenas do número de reprodução básica \mathcal{R}_0 , mas também de outros parâmetros no sistema. O modelo epidemiológico estudado sofre bifurcações de codimensão 2 perto do equilíbrio degenerado, isto é, uma bifurcação de Bogdanov-Takens pode ocorrer quando dois parâmetros principais ν e A variam perto de valores críticos.

Temos que para $0 < p < 1$, a doença não pode ser erradicada.

Para $p = 1$, existe um limiar, a doença não pode ser erradicada quando o número de reprodução básica \mathcal{R}_0 é maior do que esse limite, caso contrário a doença desaparecerá. Esse resultado coincide com o comportamento do modelo com $p = 1$ e $q = 2$ estudado no Capítulo 3, conforme está sintetizado no Teorema 3.2.5.

Para $p > 1$, o conceito de limite torna-se mais complicado, uma vez que o comportamento assintótico depende do limiar e das condições iniciais. Caso estejam abaixo do limiar ($\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_0^*$), a doença desaparece. Acima do limiar ($\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}_0^*$), existem dois equilíbrios endêmicos, o ponto de equilíbrio com menor número de infectados é sempre do tipo sela e o ponto de equilíbrio com maior número de infectados é localmente um atrator ou repulsor, o que condiz com o Teorema 4.2.2 para o modelo com $p = q = 2$ estudado no Capítulo 4. Portanto, acima do limiar, a doença desaparece sob algumas condições iniciais: se o equilíbrio endêmico maior é localmente estável, de modo que os níveis da doença em alguma região próxima o atinjam, uma doença local é formada; se o equilíbrio endêmico maior é repulsivo, então a doença pode desaparecer ou exibir oscilações periódicas sob certas condições.

Referências Bibliográficas

- [1] BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 40. Springer, 2001.
- [2] GLENDINNING, P. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, vol. 11. Cambridge university press, 1994.
- [3] HETHCOTE, H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM* 42, 4 (2000), 599–653.
- [4] HETHCOTE, H. W; LEVIN, S. A. Periodicity in epidemiological models. In *Applied mathematical ecology*. Springer, 1989, pp. 193–211.
- [5] HU, Z., ET AL. Bifurcations of an sirs epidemic model with nonlinear incidence rate. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* 15, 1 (2011), 93–112.
- [6] HUBBARD, J. H.; WEST, B. H. *Differential equations: a dynamical systems approach: higher-dimensional systems*, vol. 18. Springer-Verlag, 1995.
- [7] KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. In *Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences* (1927), vol. 115, The Royal Society, pp. 700–721.
- [8] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112. Springer Science & Business Media, 2013.

- [9] LIU, W.; LEVIN, S. A.; IWASA, Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of sirs epidemiological models. *Journal of mathematical biology* 23, 2 (1986), 187–204.
- [10] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2001.
- [11] RUAN, S.; WANG, W. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Journal of Differential Equations* 188, 1 (2003), 135–163.
- [12] SMALE, S.; HIRSCH, M. W.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, vol. 60. Academic Press, 2003.
- [13] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [14] SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias*, vol. 4. Livraria da Física, 2011.
- [15] TANG, Y., ET AL. Coexistence of limit cycles and homoclinic loops in a sirs model with a nonlinear incidence rate. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 69, 2 (2008), 621–639.
- [16] XIAO, D.; RUAN, S. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate. *Mathematical biosciences* 208, 2 (2007), 419–429.