

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise Numérica de Problemas Envolvendo
Equações Diferenciais Parciais e Equações
Integrais Através de Funções de Base Radial**

**Autor: Thyago de Lellys Faria Monção
Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

Itajubá, Março de 2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise Numérica de Problemas Envolvendo
Equações Diferenciais Parciais e Equações
Integrais Através de Funções de Base Radial**

**Autor: Thyago de Lellys Faria Monção
Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

**Curso: Mestrado em Engenharia Mecânica
Área de concentração: Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica

Itajubá, Março de 2012

MG – Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise Numérica de Problemas Envolvendo
Equações Diferenciais Parciais e Equações
Integrais Através de Funções de Base Radial**

**Autor: Thyago de Lellys Faria Monção
Orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

Composição da banca examinadora:

**Prof. Dr. José Carlos Cesar Amorim - IME
Prof. Dr. Genésio José Menon – IEM/UNIFEI
Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho – IEM/UNIFEI
Prof. Dr. Waldir de Oliveira – IEM/UNIFEI**

**UNIFEI - UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Análise Numérica de Problemas Envolvendo Equações Diferenciais Parciais e Equações Integrais Através de Funções de Base Radial

THYAGO DE LELLYS FARIA MONÇÃO

Itajubá, Março de 2012

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Joffre e Maria, a minha irmã Sarah e a minha bela sobrinha e afilhada Laura.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por ter se personificado em cada um destes que abaixo cito, tornando possível que mais esta etapa fosse concluída em minha vida.

Deixo meu sincero agradecimento a todos de minha família pelo apoio, mesmo que as vezes distante, em todos os momentos desta caminhada, sem o qual eu não teria aqui chegado.

Ao professor Waldir de Oliveira pela confiança, apoio e incentivo, além da sua compreensão nos momentos necessários. Pela orientação a mim oferecida de forma clara e direta, me mostrando todo o seu conhecimento e colaborando, assim, para o meu crescimento tanto pessoal quanto profissional.

Aos membros da banca, professor José Carlos Amorim, professor Genésio José Menon e professor Nelson Manzanares Filho, por toda contribuição que deram ao trabalho.

Aos meus colegas de estudo do IEM/UNIFEI, em especial Angie, Lady e Yina, que sempre se disponibilizaram a me ajudar contribuindo de maneira significativa na conclusão deste trabalho.

De forma especial, gostaria de agradecer a paraense Daiane por, em diversas vezes desse meu período de estudos, ter me tirado de um mundo turbulento e me trago à tona para respirar e poder lutar por meus sonhos.

“Não vim até aqui / Pra desistir agora”

Até o fim – Engenheiros do Hawaii.

Resumo

Monção, T. L. F. (2012), *Análise Numérica de Problemas Envolvendo Equações Diferenciais Parciais e Equações Integrais Através de Funções de Base Radial*, Itajubá, 90 p. Dissertação (Mestrado em Dinâmica de Fluidos e Máquinas de Fluxo) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Funções de base radial são aquelas que apresentam simetria radial, ou seja, dependem apenas (exceto por alguns parâmetros conhecidos) da distância entre o centro da função e um ponto genérico. Com uma definição tão geral, existe uma infinidade de funções deste tipo. Neste trabalho, técnicas utilizadas para a interpolação de dados dispersos são aplicadas na resolução de equações diferenciais parciais e equações integrais. Desta forma, será empregado um método numérico sem malha, baseado nas funções de base radial. Dois métodos de colocação, assimétrico e simétrico, são apresentados de forma breve e sucinta e então aplicados a diversos problemas de interesse. Em aplicações deste tipo, as duas mais importantes questões envolvidas, na aplicação do método são: (i) que tipo de função de base utilizar e (ii) qual o valor de seu parâmetro de forma. Assim, um conjunto de funções comumente utilizadas na literatura é escolhido e seus resultados apresentados. Para escolha do parâmetro de forma, diferentes estratégias podem ser utilizadas para que se faça a decisão do melhor valor. Foram utilizadas duas técnicas para a escolha de um “bom” valor para o parâmetro de forma. A mais simples por tentativa e erro e outra por validação cruzada. Para uma discussão mais clara, as técnicas propostas foram aplicadas em equações que possuem solução analítica disponível, permitindo uma fácil verificação dos resultados obtidos. Em alguns casos, os resultados obtidos com o presente método e confrontado com outros obtidos por método numéricos clássicos.

Palavras-chave

Método numérico, funções de base radial, sem malha.

Abstract

Monção, T. L. F. (2012), *Numerical Analysis of Problems Involving Partial Differential Equations and Integral Equations Using Radial Basis Functions*, Itajubá, 90 p. Msc. Dissertation – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Radial basis functions are those with radial symmetry, ie, depends only (except for some known parameters) the distance between the center of the function and a generic point. With a definition so broad, there are infinitely many such functions. In this work, techniques used for interpolation of scattered data are applied to solve partial differential equations and integral equations. Thus, will be employed a meshless numerical method based on radial basis functions. Two methods of collocation, asymmetrical and symmetrical, are presented briefly and succinctly and then applied to various problems of interest. In such applications, the two most important issues involved in applying the method are: (i) what kind of basis function used and (ii) where the value of shape parameter. Thus, a number of commonly used functions is chosen in the literature and their resultados presented. To select the shape parameter, different strategies can be used to make the decision that the best value. We used two techniques for choosing a "good" value for the shape parameter. A simple trial and error and other by cross-validation. For a more clear, the proposed techniques were applied to equations that have analytical solution available, allowing easy verification of the results obtained. In some cases, the results obtained with this method are compared with those obtained by conventional method.

Keywords

Numerical method, radial basis functions, meshfree.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	vi
SIMBOLOGIA	viii
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. Contribuição do Trabalho	6
1.3. Revisão da Literatura	6
1.4. Objetivos do Trabalho	9
1.5. Organização do Trabalho	10
CAPÍTULO 2	11
FUNÇÕES DE BASE RADIAL	11
2.1. Definições	11
2.2. Métodos de Colocação	14
2.2.1. Método assimétrico (Kansa)	15
2.2.2. Método simétrico (Hermite)	17
2.2.3. Precisão polinomial	18
2.2.4. Aplicação das RBF em equações integrais	20
2.3. Método de Escolha do Parâmetro de Forma	24
2.3.1. Escolha do parâmetro de forma via tentativa e erro	25
2.3.2. Escolha do parâmetro de forma via validação cruzada	25
2.4. Diretrizes Práticas na Implementação do Método	27
CAPÍTULO 3	28
ANÁLISE NUMÉRICA DE CASOS	28
3.1. Introdução	28
3.2. Problemas com Equações de Campo (Equações Diferenciais Parciais - EDP) ..	29
3.2.1. Problema 1: EDP de Laplace com condição de contorno do tipo Dirichlet	30
3.2.2. Problema 2: EDP de Laplace com condição de contorno do tipo mista ...	34
3.2.3. Problema 3: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo Dirichlet	36
3.2.4. Problema 4: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo Dirichlet, utilizando os métodos assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite)	40

3.2.5. Problema 5: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo mista, utilizando os métodos assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite)	43
3.2.6. Problema 6: EDP de Poisson, com obtenção de um “bom” parâmetro de forma via tentativa e erro e via validação cruzada para o método assimétrico (Kansa)	46
3.2.7. Problema 7: EDP de Poisson em um domínio não retangular	52
3.2.8. Problema 8: EDP para escoamento potencial ao redor de um cilindro circular	56
3.2.9. Comentários sobre os problemas estudados envolvendo EDP	60
3.3. Problemas com Equações de Contorno (Equações Integrais - EI)	62
3.3.1. Problema 9: EI de Fredholm com núcleo suave	64
3.3.2. Problema 10: EI de Fredholm para problema de Dirichlet	67
3.3.3. Problema 11: EI de Fredholm, com obtenção de um “bom” parâmetro de forma via tentativa e erro e via validação cruzada para o método assimétrico (Kansa)	68
3.3.4. Problema 12: EI para o escoamento potencial ao redor de um cilindro circular	74
3.3.5. Comentários sobre os problemas estudados envolvendo EI	76
CAPÍTULO 4	78
CONCLUSÕES E SUGESTÕES	78
4.1. Conclusões	78
4.2. Sugestões para Trabalhos Futuros	79
APÊNDICE A	81
MÉTODO DE PESQUISA BIBLIOGRÁFICA	81
APÊNDICE B	82
ALGUMAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL E SUAS DERIVADAS	82
B.1. Derivadas Genéricas	82
B.2. Fórmulas para Funções de Base Radial Específicas	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Aplicação do método sem malha (RBF) em problemas gráficos em 3D e 2D Gumerov e Duraiswami (2007)	3
Figura 1.2	Resultados obtidos para o escoamento em torno de um cilindro circular, através do método de vórtices e RBF, por Cooper e Barba (2009)	5
Figura 1.3	Número de artigos publicados em periódicos por ano utilizando RBF, com base em procura no <i>Web of Science</i> . Ver Apêndice A para critério de busca utilizado. (Data da pesquisa: 09 de janeiro de 2012)	8
Figura 2.1	Comportamento de algumas funções de base radial comumente utilizadas: (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa, (c) gaussiana e (d) <i>spline</i> de placa fina	12
Figura 2.2	Comportamento de algumas funções de base radial, com definição do parâmetro de forma c , comumente utilizadas: (a) multiquádrica e (b) multiquádrica inversa	13
Figura 3.1	(a) Esquema de uma placa fina com difusão de calor e (b) uma determinada solução para distribuição de temperatura	30
Figura 3.2	(a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF para o Problema 1 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 117$ (9×13) pontos no interior	32
Figura 3.3	Estrutura (esparsidade) das matrizes formadas pelas RBF do tipo suporte compacto da família de Wendland, para o Problema 1, (a) com 35 (5×7) pontos e (b) com 117 (9×13) pontos	33
Figura 3.4	(a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF para o Problema 2 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 65$ (5×13) pontos no interior	35
Figura 3.5	(a) Esquema de um condutor elétrico com geração interna de calor e (b) uma determinada solução para distribuição de temperatura	37
Figura 3.6	(a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF (b) para o Problema 3 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 35$ (5×7) pontos no interior	39

Figura 3.7	Solução numérica do Problema 4 pelo método assimétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior	41
Figura 3.8	Solução numérica do Problema 4 pelo método simétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior	42
Figura 3.9	Solução numérica do Problema 5 pelo método assimétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior	44
Figura 3.10	Solução numérica do Problema 5 pelo método simétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior	45
Figura 3.11	Curvas de ε ótimo para o Problema 4, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	47
Figura 3.12	Curvas de ε ótimo para o Problema 4, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	48
Figura 3.13	Curvas de ε ótimo para o Problema 5, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	49
Figura 3.14	Curvas de ε ótimo para o Problema 5, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	50
Figura 3.15	Curvas de ε / c ótimo para o Problema 4, via validação cruzada, utilizando funções multiquádrica inversa e $N = 289$ pontos no interior ..	52
Figura 3.16	(a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF (baixo) para o Problema 7 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 100$ (10×10) pontos no interior	54
Figura 3.17	Esquema de distribuição de pontos para $N = 289$ no Problema 7. (a) Pontos nodais na malha do MEF e (b) centros e pontos de colocação das RBF	56

Figura 3.18	(a) Esquema de distribuição dos $N = 360$ pontos de colocação do Problema 8 com (b) ampliação nas proximidades do corpo	58
Figura 3.19	Coefficiente de pressão em função do ângulo azimutal no cilindro do Problema 8	59
Figura 3.20	Coefficiente de pressão em função da coordenada horizontal no cilindro	59
Figura 3.21	Modelo para representação de um corpo arbitrário no plano bidimensional utilizando o Método das Singularidades (Lewis, 1991) . .	62
Figura 3.22	Solução numérica do Problema 9 pelo método assimétrico, utilizando RBF do tipo (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 2$	66
Figura 3.23	Solução numérica do Problema 10 pelo método assimétrico, utilizando RBF do tipo (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 2$	68
Figura 3.24	Curvas de ε ótimo para o Problema 9, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	69
Figura 3.25	Curvas de ε ótimo para o Problema 9, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	70
Figura 3.26	Curvas de ε ótimo para o Problema 10, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	71
Figura 3.27	Curvas de ε ótimo para o Problema 10, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N	72
Figura 3.28	Esquema de distribuição de pontos para $N = 36$ no Problema 12. (a) Pontos extremos e pontos de controle do MP e (b) centros das RBF	75
Figura 3.29	Velocidade tangencial em função do ângulo azimutal no cilindro do Problema 12 para $N = 8$ painéis / centros	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	Resultados da pesquisa bibliográfica realizada na base <i>Web of Science</i> .	7
Tabela 2.1	Algumas funções de base radial de suporte global comumente utilizadas.	11
Tabela 2.2	Algumas funções de base radial de suporte compacto	13
Tabela 2.3	Exemplos de curvas e suas respectivas equações parametrizadas	22
Tabela 3.1	Solução numérica do problema de difusão de calor para o Problema 1 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$	33
Tabela 3.2	Solução numérica do Problema 1 utilizando algumas RBF do tipo suporte global	33
Tabela 3.3	Solução numérica do Problema 1 utilizando RBF do tipo suporte compacto	33
Tabela 3.4	Solução numérica do problema de difusão de calor para o Problema 2 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$	36
Tabela 3.5	Solução numérica do problema de difusão de calor com geração interna de energia para o Problema 3 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$	40
Tabela 3.6	Solução do Problema 4 pelo método assimétrico (Kansa)	41
Tabela 3.7	Solução do Problema 4 pelo método simétrico (Hermite)	42
Tabela 3.8	Solução do Problema 5 pelo método assimétrico (Kansa)	44
Tabela 3.9	Solução do Problema 5 pelo método simétrico (Hermite)	45
Tabela 3.10	Valores ótimos de ε para o Problema 4, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	51
Tabela 3.11	Valores ótimos de ε para o Problema 4, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	51
Tabela 3.12	Valores ótimos de ε para o Problema 5, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	51
Tabela 3.13	Valores ótimos de ε para o Problema 5, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	51
Tabela 3.14	Solução numérica do Problema 7 de difusão de calor para um domínio não retangular utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 100$ (10×10) pontos no interior	55

Tabela 3.15	Solução numérica do Problema 7, via MEF, RBF MQ e RBF MQI, para várias distribuições de pontos nodais / centros N	56
Tabela 3.16	Solução numérica do Problema 9 pelo método assimétrico utilizando RBF do tipo MQI e G, com $\varepsilon = 2$, para diversas distribuições de pontos de colocação	66
Tabela 3.17	Solução numérica do Problema 10 pelo método assimétrico utilizando RBF do tipo MQI e G, com $\varepsilon = 2$, para diversas distribuições de pontos de colocação	67
Tabela 3.18	Valores ótimos de ε para o Problema 9, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	73
Tabela 3.19	Valores ótimos de ε para o Problema 9, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	73
Tabela 3.20	Valores ótimos de ε para o Problema 10, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	73
Tabela 3.21	Valores ótimos de ε para o Problema 10, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N	73
Tabela 3.22	Resultados numéricos comparativos entre o MP e RBF para diferentes valores de painéis / centros N	76

SIMBOLOGIA

Caracteres Latinos

a, b	Números reais finitos (limites de integração).
A	Matriz.
\tilde{A}	Matriz parcial de uma matriz A .
B	Conjunto de pontos no contorno.
c	Função incógnita do sistema linear de equações.
C	Curva genérica.
C_p	Coefficiente de pressão.
d	Comprimento, distância.
e	Comprimento, espessura.
E	Erro.
f, g, h	Função genérica.
H	Comprimento, altura.
i, j	Versores.
I	Conjunto de pontos no domínio.
k	Condutividade térmica.
K	Função núcleo da equação integral.
L	Comprimento, largura.
L_c	Comprimento, espessura.
N	Número de pontos.
p	Pressão; função polinomial.
P_f	Função interpolante de uma função f .
Q	Fluxo volumétrico de calor.
r	Distância, norma (Euclidiana) entre dois pontos.
s	Comprimento de arco de uma curva.
t	Coordenada de uma equação parametrizada.
T	Temperatura.
u	Função genérica.
\tilde{u}	Função genérica aproximada.
U, V, W	Velocidade.
x, y, z	Coordenadas cartesianas retangulares; ponto de colocação.
X	Conjunto dos pontos de colocação.
w	Pesos na integração numérica.

Caracteres Gregos

α	Parâmetro real.
β	Ângulo.
ε	Parâmetro de forma da função de base radial.
ϕ	Potencial de velocidades.
γ	Densidade de vórtices.
φ	Função de base radial.
λ	Função incógnita do sistema linear de equações.
π	3,14159265... .
ρ	Raio do suporte, massa específica.
ξ	Centro.
\Re	Conjunto de números reais.
$\partial\Omega$	Contorno, fronteira.
Γ	Contorno, fronteira.
Ω	Domínio.
Ξ	Conjunto dos centros.

Índices Inferiores

B	Referente ao contorno do problema.
I	Referente ao domínio do problema.
i, j, k	Índice para variável indexada.
L	Referente ao operador Laplaciano.
x	Referente à derivada com relação ao eixo x .
y	Referente à derivada com relação ao eixo y .
∞	Referente à distância longe do corpo (infinito).

Abreviaturas

CFD	do inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i> .
EDP	Equações Diferenciais Parciais.

EI	Equações Integrais.
MDF	Método de Diferenças Finitas.
MEC	Método de Elementos de Contorno.
MEF	Método de Elementos Finitos.
MP	Método de Painéis.
MVD	Método de Vórtices Discretos.
MVF	Método de Volumes Finitos.
MQ	Multiquádrica.
MQI	Multiquádrica inversa.
G	Gaussiana.
SPF	<i>Spline</i> de Placa Fina.
FBR	Funções de Base Radial.
RBF	do inglês <i>Radial Basis Functions</i> .
SC	Suporte Compacto.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Gerais

A tarefa de se obter soluções para as equações que regem a mecânica dos fluidos, representa um dos problemas mais desafiadores no campo da engenharia. Na maioria dos casos, as formulações matemáticas das leis fundamentais da mecânica dos fluidos são expressas como equações diferenciais parciais (EDP) e equações integrais (EI).

As equações diferenciais parciais de segunda ordem aparecem com frequência e, portanto, são de particular interesse em mecânica dos fluidos e transferência de calor. Geralmente, as equações que regem a mecânica dos fluidos formam um conjunto de EDP não lineares que deve ser solucionado em um domínio irregular sujeito a várias condições iniciais e de contorno.

Um exemplo de trabalho que emprega a teoria potencial pelo uso das equações integrais pode ser visto no trabalho de Kellogg (1929). Muitos dos métodos numéricos, utilizados atualmente na engenharia, têm sua origem na matemática clássica, anterior à era dos computadores digitais. Entretanto, sem desmerecer os trabalhos anteriores existentes sobre a formulação integral, foi o trabalho de Martensen (1959) que, não somente apresentou

as bases de uma inovadora técnica computacional poderosa, mas também estendeu a teoria integral de contorno para aplicações em turbomáquinas.

As soluções analíticas, para as equações da mecânica dos fluidos, são limitadas para casos muito específicos. A imposição das condições de contorno ainda restringe muito mais a validade das soluções, por exemplo, uma EDP sujeita a uma condição de contorno de Dirichlet (valores da variável dependente especificados no contorno) pode apresentar uma solução analítica, entretanto, a mesma EDP quando sujeita à condição de contorno de Neumann (gradiente normal da variável dependente especificado no contorno) pode não apresentar uma solução analítica.

A mecânica dos fluidos experimental pode fornecer muitas informações referentes a um escoamento em particular. Entretanto, as limitações físicas, tais como o tamanho do modelo e do túnel de vento e a dificuldade em simular adequadamente o escoamento no protótipo, faz com que seja impraticável de se obter alguns dados do escoamento para muitos problemas. Entretanto, as informações do escoamento obtidas de forma experimental são de extrema importância na validação dos modelos matemáticos para solução das equações governantes. Assim, os dados experimentais são utilizados em conjunto com as soluções computacionais das equações.

Nesse contexto, a dinâmica dos fluidos computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamics* – CFD) está preocupada com a solução numérica das equações que regem o transporte de massa, quantidade de movimento e energia no escoamento dos fluidos. A abordagem numérica por meio de CFD surgiu e ganhou destaque com a disponibilidade dos computadores no início dos anos 1960. Hoje, as técnicas de CFD são usadas extensivamente na pesquisa básica e aplicada, na concepção de equipamentos de engenharia e cálculo de fenômenos ambientais e geofísicos. Desde o início dos anos 1970, os pacotes de *softwares* comerciais se tornaram disponíveis, tornando o CFD um componente importante na prática da engenharia em ambientes acadêmicos e industriais.

Durante muito tempo, o projeto de equipamentos de engenharia, tais como trocadores de calor, fornos, torres de resfriamento, motores de combustão interna, turbinas a gás, bombas e turbinas hidráulicas, aeronaves, embarcações e até foguetes dependia meticulosamente de informações geradas empiricamente. As informações empíricas normalmente eram e ainda são exibidas na forma de correlações ou tabelas e nomogramas entre as principais variáveis que influenciam o problema. Entretanto, como dito anteriormente, estas informações são extremamente importantes pois são amplamente aproveitadas para validação dos métodos numéricos.

Os métodos numéricos tradicionais, tais como de Diferenças Finitas (MDF), Elementos Finitos (MEF) e Volumes Finitos (MVF), surgiram motivados principalmente pela simulação de problemas de engenharia uni e bidimensionais via EDP. A discretização em todos esses métodos requer que seja construída uma malha computacional. A criação destas malhas nem sempre é um processo trivial, principalmente em problemas tridimensionais e virtualmente impossível para problemas com dimensões superiores. Aqui é onde surgem os métodos sem malha (em inglês, *meshfree* ou *meshless*).

Os métodos sem malha são frequentemente – mas não necessariamente têm que ser – radialmente simétricos por natureza. Isto é obtido pela composição de equações básicas com uma norma (Euclidiana) e, portanto, torna o problema envolvendo muitas dimensões em um problema virtualmente unidimensional.

Nesta última década, os métodos sem malha têm ganhado muita atenção, não somente no campo da matemática, mas em toda comunidade da engenharia. Muitos dos problemas abordados pelos métodos sem malha são multidisciplinares, utilizando conceitos matemáticos aplicados em diversas áreas do conhecimento. Aplicações dos métodos sem malha podem ser encontradas em uma diversidade enorme de problemas envolvendo, por exemplo: modelagem de dados dispersos, resolução de equações diferenciais parciais, resolução de equações integrais, manipulação/recuperação de imagens (Figura 1.1), matemática financeira, redes neurais, otimização.

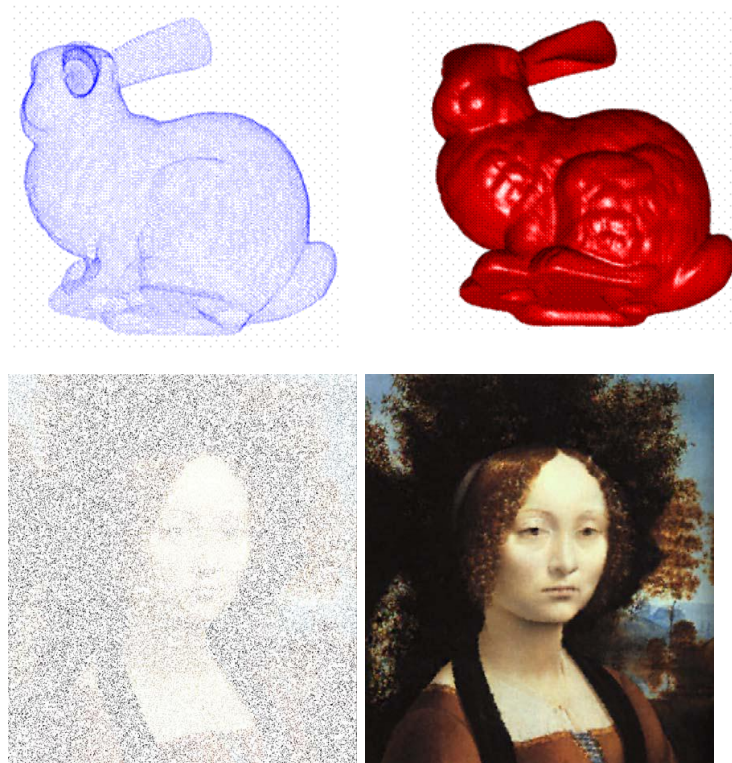


Figura 1.1 Aplicação do método sem malha (RBF) em problemas gráficos em 3D e 2D
Gumerov e Duraiswami (2007)

Segundo Liu (2002) a definição de um método sem malha é: “Um método sem malha é um método utilizado para solucionar um sistema de equações algébricas para o domínio de um problema, sem a utilização de uma malha pré-definida para a discretização do domínio”. Os métodos sem malha utilizam um conjunto de pontos espalhados dentro do domínio do problema bem como conjuntos de pontos distribuídos sobre os limites do domínio para representar o domínio do problema e suas fronteiras. Estes conjuntos de pontos, por não formarem uma malha, não exigem qualquer informação a priori sobre a relação entre estes pontos. Muitos métodos sem malha têm encontrado boas aplicações e mostrado o seu potencial para se tornar uma poderosa ferramenta numérica. Entretanto, este método ainda está em fase de desenvolvimento, e algum avanço é preciso para que se torne uma ferramenta eficiente e útil para problemas complexos de engenharia.

Nesta última década, em particular, nota-se um avanço no desenvolvimento de métodos sem malha que utilizam Funções de Base Radial – FBR (ou do acrônimo em inglês *Radial Basis Function* – RBF) na solução numérica de diversos tipos de equações diferenciais parciais. Neste contexto, os créditos iniciais da aplicação do método de colocação podem ser dados ao trabalho de Kansa (1990) que utilizou RBF como solução aproximada de equações diferenciais parciais. Em linhas gerais, o método de Kansa apresenta diversas vantagens sobre outros métodos numéricos, como aqueles mencionados anteriormente. O método de colocação proposto por Kansa é realmente sem malha, no qual os pontos de colocação podem ser escolhidos livremente (não existe qualquer tipo de conectividade entre os pontos), e independe da dimensão espacial do problema, o que facilita muito a extensão do método para resolução de problemas que envolvem dimensões maiores. O método de Kansa é popularmente conhecido como método assimétrico. Uma outra abordagem, conhecida como método simétrico (ou método de Hermite), foi proposta por Fasshauer (1997) e utilizada por Larsson e Fornberg (2003) e Power e Barraco (2002).

Pode-se encontrar muitas RBF na literatura, como, por exemplo, monômios, várias funções polinomiais ortogonais, séries de Fourier, e assim por diante. Estas RBF são aplicáveis somente para alguns casos de equações diferenciais com geometrias simples. O avanço no desenvolvimento das RBF originou-se para interpolação de funções multivariadas. Sua precisão notável na interpolações de dados tem sido amplamente validada. Por exemplo, Franke (1982) comparou diversos métodos de interpolação para dados discretos e descobriu que a *spline* de placa fina e a multiquádrica são as que funcionam melhor. Estas duas funções são casos especiais de RBF. Na literatura, a função multiquádrica (MQ), multiquádrica inversa (MQI), gaussiana (G) e *spline* de placa fina (SPF) são representantes das RBF na interpolação de dados discretos. Em seu trabalho, Kansa (1990) utilizou as funções

multiquádricas na resolução de equações diferenciais hiperbólicas, parabólicas e elípticas com métodos de colocação. Ele descobriu que estas equações tinham propriedades de convergência muito boa e conseguiu eficiência computacional excepcional. Mais recentemente, Cheng *et al.* (2003) realizaram um estudo das RBF multiquádricas aplicadas às equações diferenciais parciais e mostraram a sua propriedade de convergência superior. Em estudo recente, Cooper e Barba (2009) apresentaram resultados do método de vórtices utilizando RBF no lugar do método dos painéis que eram utilizados para discretizar o corpo e impor as condições de contorno, apresentando um método verdadeiramente sem malha (Figura 1.2).

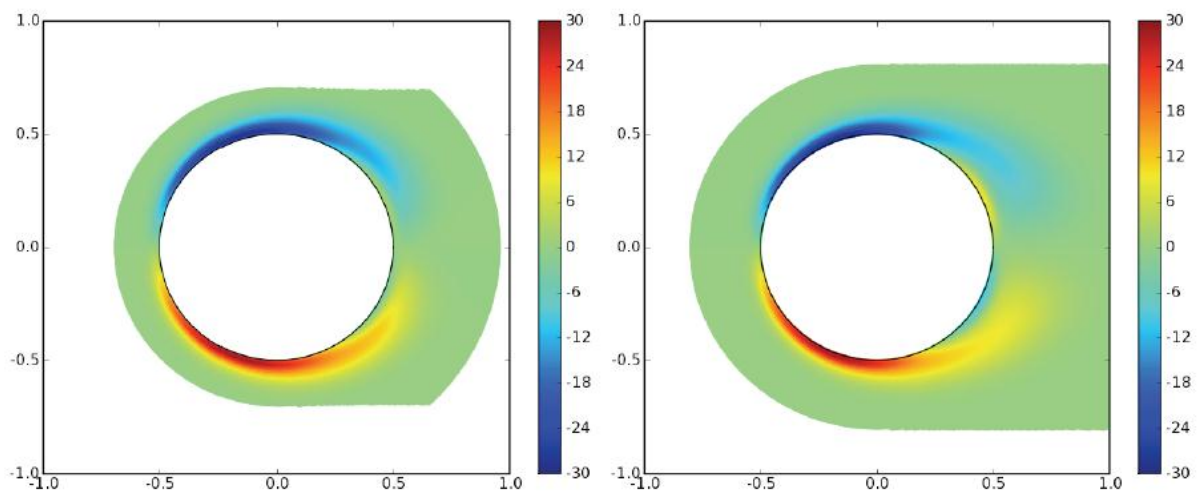


Figura 1.2 Resultados obtidos para o escoamento em torno de um cilindro circular, através do método de vórtices e RBF, por Cooper e Barba (2009)

Aplicada à solução de equações diferenciais parciais e equações integrais, as RBF também tem suas próprias desvantagens inerentes. Por exemplo, elas geralmente formam uma matriz de coeficientes cheias e muitas vezes mal condicionada. Várias soluções para estes inconvenientes têm sido propostas na literatura. Entre eles, o mais promissor é a utilização de RBF do tipo suporte compacto, que pode ser visto em Buhmann (1998) e Wu (1995).

Assim como outros métodos numéricos, o foco das Funções de Base Radial está na reconstrução de funções desconhecidas a partir de dados conhecidos. Estas funções podem ser tanto de dados espalhados quanto soluções de equações parciais e integrais que satisfazem certas condições de contorno.

1.2 Contribuição do Trabalho

Este trabalho contribuiu para os seguintes desenvolvimentos apresentados na dissertação:

- ✓ Implementação numérica simples, de fácil e rápido entendimento, do método baseado nas RBF para solução de diversas equações de interesse no campo da engenharia, em particular da mecânica dos fluidos.
- ✓ Apresentação e implementação dos métodos de colocação assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite), bem como a comparação dos resultados numéricos obtidos com diferentes tipos de RBF.
- ✓ Utilização de uma técnica sistemática para escolha do parâmetro de forma, presente na definição de muitas RBF.
- ✓ Comparação dos resultados obtidos com *software* comercial (MATLAB Partial Differential Equation Toolbox) para problemas governados por EDP;
- ✓ Comparação da implementação do método e dos resultados obtidos com outro método existente (Método de Diferenças Finitas) para problemas governados por EDP e (Métodos dos Painéis) para problemas governados por EI.

1.3 Revisão da Literatura

A motivação inicial para o emprego de técnicas sem malha para aproximação/interpolação veio de aplicações em geodésia, geofísica, mapeamento e meteorologia. Mais tarde, elas foram aplicadas em diversas outras áreas como, por exemplo, na solução numérica de EDP.

Com o intuito de se obter uma avaliação da evolução e da aplicação das RBF em comparação com outros métodos numéricos, uma pesquisa foi realizada utilizando a base de dados bibliográfica *online Web of Science*. Com base na pesquisa de palavras e/ou expressões adequadas, o número total de publicações encontradas em periódicos, constantes da base, foi compilado para diversos métodos numéricos. Os detalhes da técnica de pesquisa utilizada são descritos no Apêndice A. O resultado obtido, conforme apresentado na Tabela (1.1), indica claramente que o Método de Elementos Finitos (MEF) é o mais popular com mais de 130.000 resultados. O Método de Diferenças Finitas (MDF) fica bem distante em segundo lugar com 37.027 resultados, menos de um terço em relação ao MEF. O Método de Elementos de

Contorno (MEC) é o terceiro com 16.028, menos que a metade do MDF. Os outros métodos numéricos, como Método de Volumes Finitos (MVF) e o de Funções de Base Radial (RBF), ficam para trás. Outro dado interessante obtido é em relação a trabalhos relacionados com geração de malhas. Quando se realiza uma pesquisa sobre esta técnica, pode-se perceber uma quantidade considerável de trabalhos (3.076 resultados) relacionados com esta técnica.

Tabela 1.1 Resultados da pesquisa bibliográfica realizada na base *Web of Science*

Método Numérico	Palavra e/ou expressão procuradas	Resultados
MEF	<i>“finite element”</i> ou <i>“finite elements”</i>	134.552
MDF	<i>“finite difference”</i> ou <i>“finite differences”</i>	37.027
MEC	<i>“boundary element”</i> ou <i>“boundary elements”</i> ou <i>“boundary integral”</i>	16.028
MVF	<i>“finite volume”</i> ou <i>“finite volumes”</i>	11.725
RBF	<i>“radial basis function”</i> ou <i>“radial basis functions”</i>	5.524
Geração de Malha	<i>“mesh generation”</i> ou <i>“grid generation”</i>	3.076
Sem Malha	<i>meshless</i> ou <i>meshfree</i>	2.624

Ver Apêndice A para critério de busca (Data da pesquisa: 09 de janeiro de 2012)

Com base nesta pesquisa bibliográfica, pode-se concluir que a popularidade e a versatilidade das RBF está bem atrás dos outros métodos clássicos. Entretanto, os métodos sem malha, aqui representados pelo Método de Elementos de Contorno e pelo de Funções de Base Radial, surgem como uma alternativa especializada em relação aos outros métodos numéricos, e isto é incontestável.

A Figura 1.3 apresenta um histograma do número de artigos publicados em periódicos anualmente, contendo as expressões referentes ao método de RBF (ver Tabela 1.1). Este mostra que o crescimento da literatura envolvendo RBF segue aproximadamente uma exponencial. Com base nos dados, pode-se ver que a primeira publicação utilizando RBF é datada de 1970 e a próxima em 1988, entretanto existiram sim trabalhos publicados neste período, como será descrito a seguir e justificado tal motivo no Apêndice A. De fato, observa-se que, após a “invenção da tecnologia” no final dos anos 1960 e início de 1970, o número de publicações era muito pequeno, mas seguindo uma taxa de crescimento (mesmo que lenta), até atingir um ponto de inflexão por volta de 1992. Após esse período, a quantidade de publicações por ano tem crescido. É de se esperar que, nos anos seguintes, a quantidade de publicações utilizando o método continue a crescer, porém a uma taxa cada vez menor, mostrando o sinal de nivelamento de sua produção e de que o método alcançou a sua maturidade.

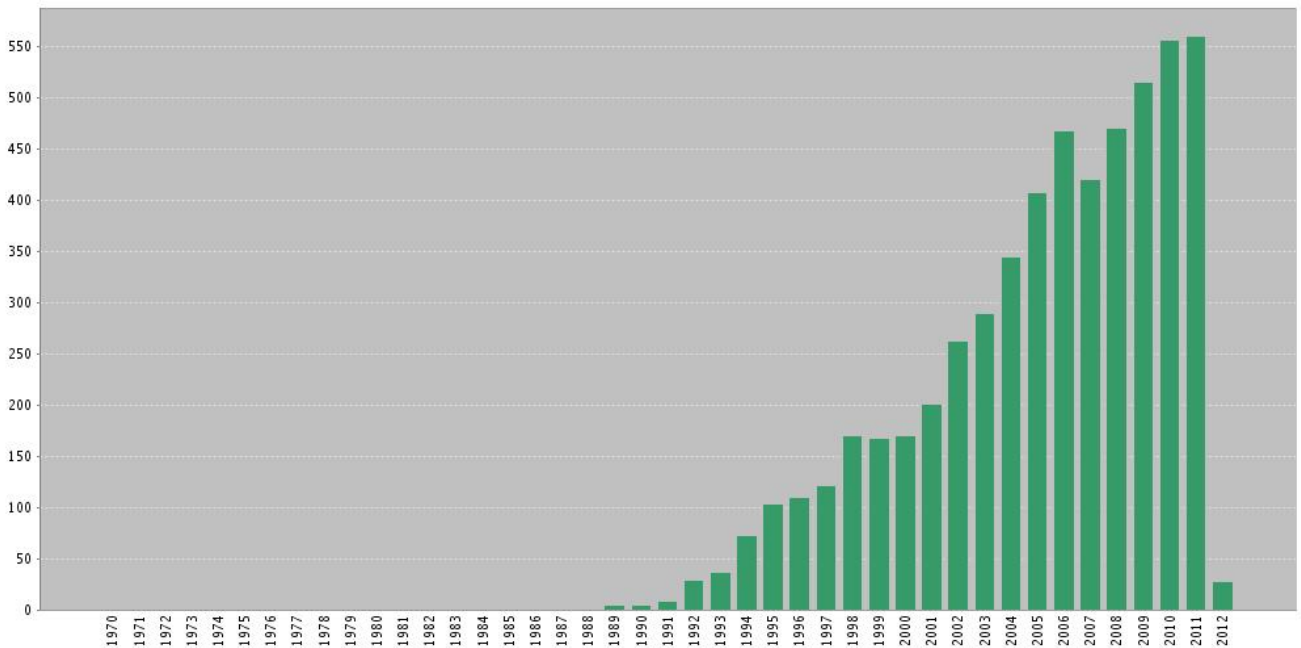


Figura 1.3 Número de artigos publicados em periódicos por ano utilizando RBF, com base em procura no *Web of Science*. Ver Apêndice A para critério de busca utilizado. (Data da pesquisa: 09 de janeiro de 2012)

Abaixo, são listados apenas algumas referências históricas que contribuíram para a evolução e o desenvolvimento dos métodos sem malha utilizando RBF:

- ✓ Em seu trabalho em aplicações em geofísica e mapeamento, Hardy (1971) apresentou as chamadas multiquádricas (MQ);
- ✓ Harder e Desmarais (1972), trabalhando em projetos de aeronaves, apresentaram as conhecidas *splines* de placa fina (SPF);
- ✓ Franke (1982) comparou vários métodos para interpolação de dados e mostrou que as MQ e as SPF apresentaram os melhores resultados;
- ✓ Kansa (1990) sugeriu um método não simétrico para a resolução de EDP elípticas utilizando funções de base radial;
- ✓ Schaback (1995) apresentou as funções de base radial de suporte compacto (SC);
- ✓ Leitão (2001) aplica o método de colocação simétrico em um problema de flexão em chapas e enfatiza a simplicidade da implementação do método de colocação com RBF;
- ✓ Larsson e Fornberg (2003) comparam o método de colocação de Kansa (assimétrico) e o método de colocação de Hermite (simétrico). Utilizando funções multiquádricas, eles concluem que o método simétrico é o que apresenta resultados mais precisos;
- ✓ Wendland (2005) em sua monografia utiliza RBF de suporte compacto. Este tipo de RBF foi inicialmente apresentado por Robert Schaback (Schaback, 1995).

Por todas as razões e características acima mencionadas, o Método de Colocação baseado nas Funções de Base Radial tem-se tornado bastante popular e largamente aplicado a uma gama enorme de problemas de engenharia, incluindo aplicações em EDP elípticas (Kansa e Hon, 2000), transferência de calor (Zerroukat *et al.*, 1998), vibrações em sólidos (Liu e Gu, 2001), teoria das placas (Wen e Hon, 2007), equações de águas rasas (Hon *et al.* 1999), convecção em fluidos (Sarler, 2005), equações de Navier-Stokes para escoamento laminar (El Zahab *et al.*, 2009) e turbulento (Vertnik e Sarler, 2009) e problemas de valor de contorno mal postos (Cheng e Cabral, 2005). Pode-se ainda mencionar um grande número de aplicações do método também no registro de imagens (Zitova e Flusser, 2003), principalmente na área médica (Fornefett *et al.*, 2001).

1.4 Objetivos do Trabalho

Neste trabalho, funções de base radial utilizadas para interpolação de dados dispersos são aplicadas na resolução numérica de equações diferenciais parciais e equações integrais, resultando em uma técnica de solução sem malha para domínios regulares ou irregulares e de quaisquer dimensões. Uma breve introdução sobre funções de base radial é apresentada e depois dois métodos de colocação, assimétrico e simétrico, para a solução numérica de equações diferenciais parciais são expostos. Para a solução numérica das equações integrais, somente o método assimétrico é implementado. Para cada um dos problemas estudados, foi escolhida uma ou mais funções representantes das RBF, sendo que no trabalho de uma maneira geral, três tipos de funções de base radial são utilizados: multiquádrica, multiquádrica inversa e gaussiana. É possível também, em alguns casos, ver resultados numéricos comparativos da aplicação de diferentes RBF em um mesmo problema.

Para uma discussão mais clara, as técnicas propostas são aplicadas em equações diferenciais parciais elípticas do tipo Laplace e Poisson, com condições de contorno de Dirichlet e mistas, que possuem solução analítica disponível, permitindo uma fácil verificação dos resultados numéricos obtidos. Para a aplicação do método em equações integrais, foi escolhida a equação integral de Fredholm de segunda espécie como objeto de estudo.

Apesar de ser apresentada alguma teoria em torno das RBF, o foco deste trabalho não está em buscar provas para teoria do método. Os interessados em se aprofundar em todos os detalhes matemáticos da teoria podem consultar dois excelentes trabalhos: Buhmann (2003) e Wendland (2005). Ao invés disso, o objetivo deste trabalho é apresentar o método de maneira acessível de forma que possa servir de “consulta rápida” para aqueles interessados no assunto.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho possui quatro capítulos, incluindo este, Capítulo 1, que apresentou em linhas gerais aspectos históricos do estudo do Método de Colocação que utiliza Funções de Base Radial. Os capítulos restantes são descritos a seguir.

O Capítulo 2 apresenta a base fundamental do método, bem como algumas particularidades de interesse, para o entendimento do trabalho. São apresentados os métodos de colocação Assimétrico (Kansa) e Simétrico (Hermite), bem como uma forma sistemática para escolha do parâmetro de forma.

No Capítulo 3 são apresentados diversos problemas, envolvendo tanto Equações Diferenciais Parciais quanto Equações Integrais, os quais foram analisados numericamente através do método.

Por fim, no Capítulo 4, as conclusões gerais são descritas, bem como sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

FUNÇÕES DE BASE RADIAL

2.1 Definições

Funções de base radial são aquelas que apresentam simetria radial, ou seja, dependem apenas (além de alguns parâmetros conhecidos) da distância $r = \|x - x_j\|$ entre o centro da função e o ponto genérico x , podendo ser escrita genericamente na forma $\varphi(r)$. Com uma definição tão geral assim, existirão infinitas funções deste tipo. As RBF pode também depender de um parâmetro de forma ε e, neste caso, $\varphi(r)$ é substituído por $\varphi(r, \varepsilon)$. Algumas RBF comumente utilizadas são apresentadas na Tabela 2.1 e na Figura 2.1.

Tabela 2.1 Algumas funções de base radial comumente utilizadas

Multiquádrica (MQ)	$\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$
Multiquádrica Inversa (MQI)	$1/\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$
Gaussiana (G)	$e^{-(\varepsilon r)^2}$
<i>Spline</i> de Placa Fina (SPF)	$ r ^n \ln r $, n par

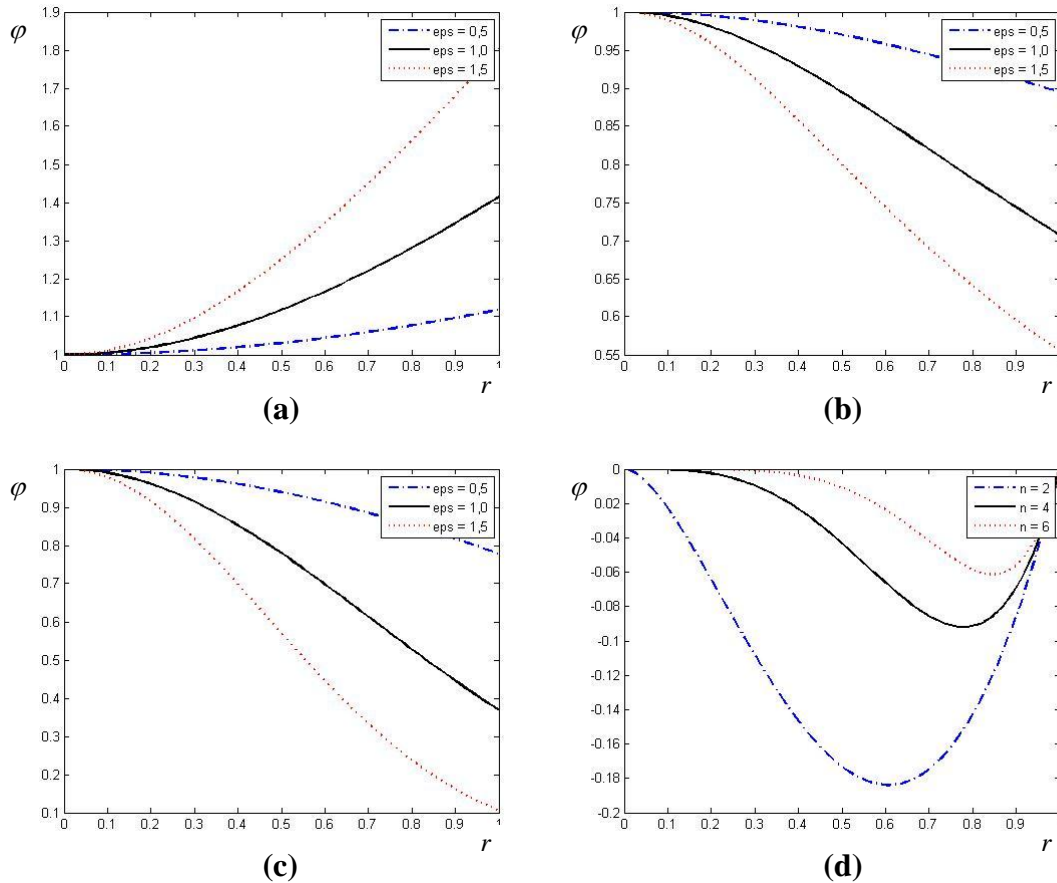


Figura 2.1 Comportamento de algumas funções de base radial comumente utilizadas: (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa, (c) gaussiana e (d) *spline* de placa fina

A definição do parâmetro de forma do presente estudo segue o trabalho de Fasshauer (2007) e, segundo inclusive o próprio autor, nem sempre coincide com a forma “tradicional” comumente utilizada. Por exemplo, Hardy apresentou as funções multiquádricas inversas na forma $\varphi(r) = 1/\sqrt{c^2 + r^2}$ com c sendo o parâmetro de forma. É claro que fica fácil transformar esta definição na que foi apresentada anteriormente, $\varphi(r) = 1/\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$, fazendo $c^2 = 1/\epsilon^2$ e dividindo o resultado por $1/\epsilon$.

A definição aqui utilizada, com o parâmetro de forma como um fator aplicado diretamente a r tem a vantagem de fornecer um tratamento padronizado no qual um decréscimo no parâmetro de forma sempre terá o efeito de produzir RBF mais planas, enquanto que um aumento no parâmetro de forma produz RBF mais acentuadas (ou localizadas), como pode ser visto comparando as Figuras 2.1 e 2.2.

Tradicionalmente as RBF são ditas de suporte global (SG), a maioria delas produz uma matriz cheia sem nenhum termo nulo, mesmo que de forma isolada, como as funções que foram apresentadas anteriormente. Entretanto, as RBF do tipo suporte compacto (SC) são

extremamente interessantes, principalmente pelo aspecto computacional, e têm sido cada vez mais e mais utilizadas em aplicações práticas.

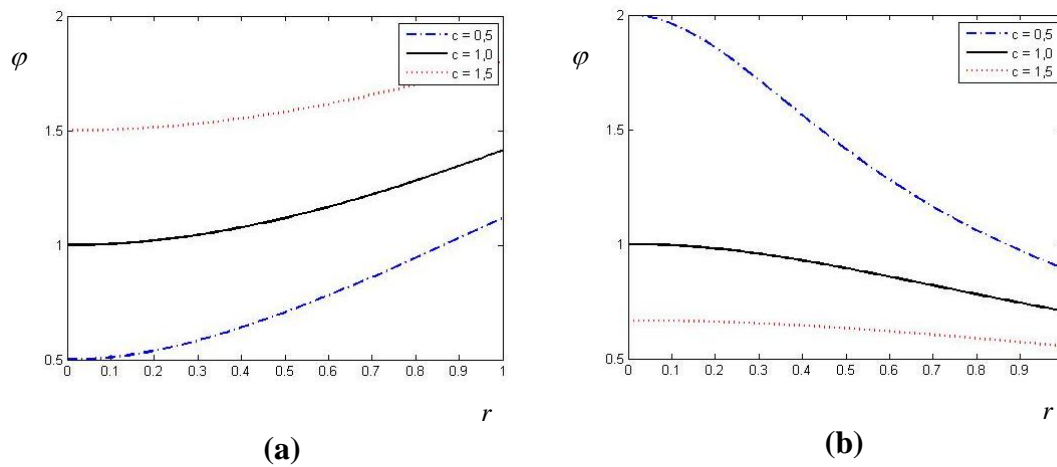


Figura 2.2 Comportamento de algumas funções de base radial, com definição do parâmetro de forma c , comumente utilizadas: **(a)** multiquádrica e **(b)** multiquádrica inversa

Mesmo para as RBF do tipo suporte compacto, que podem formar matrizes esparsas, continua-se utilizando uma função base do tipo $\varphi(r, \varepsilon)$, conforme apresentada anteriormente. Assim, um valor alto de ε , corresponde a um pequeno suporte. Em outras palavras, se o suporte de φ é intervalo $[0, 1]$, então o raio do suporte ρ de φ é dado por $\rho = 1/\varepsilon$ tal que $\varphi(r, \varepsilon) = 0$ para $r > \rho = 1/\varepsilon$.

Muitos aspectos sobre este tipo de funções podem ser comentados, o leitor interessado poderá futuramente consultar os trabalhos de Wendland (1995), Schaback e Wendland (2000) e o livro de Buhmann (2003). Existem diversas classes (famílias) de RBF de suporte compacto bastante populares. Estas são construídas obtendo-se funções simétricas de suporte compacto através de transformadas de Fourier. Provavelmente as duas mais populares dentre as funções de suporte compacto são as funções de Wendland e as funções de Wu. Para maiores detalhes na formação das funções, o leitor é convidado a consultar os trabalhos de Wendland (1995), Wu (1995) e o livro de Fasshauer (2007).

Tabela 2.2 Algumas funções de base radial de suporte compacto

Wendland's $_{3,1}$	$(1 - \varepsilon r)_+^4 (4\varepsilon r + 1)$
Wendland's $_{3,2}$	$(1 - \varepsilon r)_+^6 (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3)$
Wu's $_{1,3}$	$(1 - \varepsilon r)_+^6 (5(\varepsilon r)^5 + 30(\varepsilon r)^4 + 72(\varepsilon r)^3 + 82(\varepsilon r)^2 + 36\varepsilon r + 6)$
Wu's $_{2,3}$	$(1 - \varepsilon r)_+^5 (5(\varepsilon r)^4 + 25(\varepsilon r)^3 + 48(\varepsilon r)^2 + 40\varepsilon r + 8)$

Nas equações da Tabela 2.2, referentes às RBF do tipo suporte compacto, é utilizada a função de corte $(\cdot)_+$ que é definida como

$$\varphi(r)_+ = \begin{cases} p(r), & r \leq \rho, \\ 0, & r > \rho. \end{cases}$$

A função de corte pode ser implementada convenientemente, dependendo da linguagem de programação, através de diferentes formas. Cabe notar que, por exemplo, a expressão $(1-r)_+^2$ é interpretada como $((1-r)_+)^2$, ou seja, primeiro deve se aplicar à função de corte e somente depois realizar a operação de potenciação.

Assim, uma forma alternativa das tradicionais RBF de suporte global é a utilização das RBF de suporte compacto. Na prática, a principal diferença agora é que a matriz gerada por estas funções pode ser do tipo esparsa através da escolha do suporte da função adequadamente.

Desde que se saiba que a matriz formada será uma matriz esparsa, o código computacional gerado deverá ser escrito de maneira a armazenar e manipular de forma eficiente a matriz. A resolução do sistema linear de equações também deverá utilizar técnicas adequadas para este tipo de matriz. Obviamente, não é desejável calcular os elementos da matriz para os pares de pontos distantes além do suporte, pois já se sabe previamente que serão iguais a zero. Por esta razão, uma eficiente estrutura é necessária. Tal fato não foi implementado neste trabalho.

2.2 Métodos de Colocação

Nesta seção será descrito como as técnicas utilizadas para interpolação de dados podem ser aplicadas à resolução numérica de equações parciais diferenciais elípticas. O método numérico resultante será assim um método de colocação baseado nas funções de base radial. Na literatura das EDP, esta abordagem também é conhecida como *strong form solution*.

Assim, são apresentados os dois métodos de colocação, assimétrico e simétrico, da forma que foram implementados para resolução numérica das equações dos casos propostos, que serão vistos posteriormente.

2.2.1 Método assimétrico (Kansa)

Na interpolação de dados, é fornecido um conjunto de dados $\{x_i, f_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $x_i \in \mathfrak{R}^s$, onde os valores f_i podem ser obtidos por uma função $f: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathfrak{R}$. O objetivo, portanto, é encontrar um interpolante da forma

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\|x - x_j\|), \quad x \in \mathfrak{R}^s, \quad (2.1)$$

tal que

$$P_f(x_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

A solução deste problema é obtida através da resolução de um sistema de equações algébricas lineares, $A c = f$, onde a matriz A é dada por

$$A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

A matriz A é não-singular para uma grande variedade de tipos de funções de base radial (Kansa e Hon, 2000), incluindo as multiquádricas, multiquádricas inversas e as gaussianas.

Esta mesma idéia pode ser utilizada para solução de equações diferenciais parciais, ou seja, dado um domínio $\Omega \subset \mathfrak{R}^s$ e uma equação diferencial parcial elíptica da forma

$$Lu(x) = f(x), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.4)$$

com condição de contorno de Dirichlet,

$$u(x) = g(x), \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (2.5)$$

No método de colocação de Kansa, a solução aproximada \tilde{u} é representada por uma expansão análoga aquela utilizada para a interpolação de dados, Equação (2.1), ou seja,

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|x - \xi_j\|). \quad (2.6)$$

Como é de costume, por formalidade, os centros $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ e os pontos de colocação $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ são conjuntos distintos, apesar de poderem coincidir fisicamente. Na Equação (2.6), $N = N_I + N_B$ representa o número total de pontos de colocação, onde N_I é o

número de pontos no domínio e N_B o número de pontos no contorno, $\varphi(r, \varepsilon)$ é a função de base radial e λ_j são os coeficientes a serem determinados (incógnitas) do problema.

A matriz que é obtida, quando se combina a equação diferencial, Equação (2.4), e a condição de contorno, Equação (2.5), nos pontos de colocação X , assume a forma

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_L \\ \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde os dois blocos são obtidos por

$$(\tilde{A}_L)_{ij} = L\varphi(\|x - \xi_j\|)|_{x=x_i}, \quad x_i \in I, \quad \xi_j \in \Xi, \quad (2.8a)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \varphi(\|x_i - \xi_j\|), \quad x_i \in B, \quad \xi_j \in \Xi. \quad (2.8b)$$

O conjunto X dos pontos de colocação pode ser dividido no conjunto I de pontos no domínio e no conjunto B de pontos no contorno. O problema está bem posto se o sistema de equações algébricas lineares, $A c = f$, apresentar solução única.

Realizar modificações na condição de contorno, Equação (2.5), implica em simplesmente mudar algumas linhas da matriz \tilde{A} na Equação (2.7) bem como nos elementos correspondentes do vetor lado direito, g .

Apesar dessa descrição ser uma descrição um pouco genérica de um método numérico sem qualquer RBF em mente, Kansa propôs o método utilizando uma RBF do tipo multiquádrica e, conseqüentemente este método de colocação assimétrico frequentemente aparece na literatura como Método Multiquádrico. Em um de seus artigos (Kansa, 1990) o autor descreve três conjuntos de experimentos utilizando funções do tipo multiquádrica e descreve a superioridade das multiquádricas em termos de complexidade computacional e precisão quando comparadas com o método de diferenças finitas.

Além do mais, Kansa sugeriu a utilização do método com parâmetro de forma variável. Apesar da análise teórica deste método ser bastante complicada, Kansa mostrou que esta técnica aumenta a precisão e a estabilidade do método em comparação com aquela que utiliza um único valor para o parâmetro de forma.

O problema do método de Kansa é que – para um parâmetro de forma, ε , constante – a matriz A pode ser singular para certas configurações de centros. Originalmente, Kansa assumiu que a não-singularidade nos resultados obtidos para interpolação poderia ser aplicada para problemas de EDP. Entretanto, como pode ser visto no experimento numérico em alguns trabalhos (Hon e Schaback, 2001), isto não é verdade. Este fato não é realmente tão surpreendente pelo fato de que a matriz de colocação é obtida por linhas que são formadas por

diferentes funções, as quais – dependendo do operador diferencial – podem não ser inclusive radiais (dependente somente das distâncias). Os resultados para a não singularidade das matrizes de interpolação, entretanto, estão embasados no fato de que a matriz A é gerada por uma única função φ .

Apesar de tudo, uma indicação concreta do sucesso do método desenvolvido por Kansa é a quantidade de artigos que surgiram desde então (Dubal,1992 , Kansa, 1992, Dubal, 1994, Golberg *et al.*, 1996, Moridis e Kansa, 1994, por exemplo). Desde que os experimentos numéricos de Hon e Schaback mostraram que o método de Kansa pode não ser bem posto para centros dispostos de maneira arbitrária, isto se tornou uma questão aberta para que se obtenha condições suficientes na posição dos centros que garantam que a matriz formada pelo método de Kansa seja inversível.

No seguinte tópico, será apresentada uma abordagem alternativa para a formação da matriz baseada nas funções de base radial.

2.2.2 Método simétrico (Hermite)

O método de colocação simétrico se baseia no método de interpolação de Hermite. Considera-se a mesma equação diferencial parcial elíptica, Equação (2.4), com a mesma condição de contorno, Equação (2.5), do item anterior. Para que seja possível que se aplique a interpolação de Hermite e, assim, garantir a não-singularidade da matriz de colocação, a expansão aproximada para a função incógnita, u , assume a seguinte forma

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{N_I} c_j L^\xi \varphi(\|x - \xi\|) \Big|_{\xi=\xi_j} + \sum_{j=N_I+1}^N c_j \varphi(\|x - \xi_j\|) \quad , \quad (2.9)$$

onde N_I representa o número de pontos no domínio Ω , $N = N_I + N_B$ onde N_B representa os pontos no contorno $\partial\Omega$ e L^ξ é o operador diferencial da equação diferencial parcial, Equação (2.4).

Após impor as condições de colocação, segue que

$$L\tilde{u}(x) = f(x_i) \quad , \quad x_i \in I \quad , \quad (2.10)$$

$$\tilde{u}(x) = g(x_i) \quad , \quad x_i \in B \quad , \quad (2.11)$$

com a matriz dos pontos de colocação, A , representada da forma

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{LL^\xi} & \tilde{A}_L \\ \tilde{A}_{L^\xi} & \tilde{A} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Os quatro blocos são gerados do seguinte modo

$$(\tilde{A}_{LL^\xi})_{ij} = LL^\xi \varphi(\|x - \xi\|) \Big|_{x=x_i, \xi=\xi_i}, \quad x_i, \xi_j \in I, \quad (2.13.a)$$

$$(\tilde{A}_L)_{ij} = L\varphi(\|x - \xi_j\|) \Big|_{x=x_i}, \quad x_i \in B, \quad \xi_j \in I, \quad (2.13.b)$$

$$(\tilde{A}_{L^\xi})_{ij} = L^\xi \varphi(\|x_i - \xi\|) \Big|_{\xi=\xi_i}, \quad x_i \in B, \quad \xi_j \in I, \quad (2.13.c)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \varphi(\|x_i - \xi_j\|), \quad x_i, \xi_j \in I. \quad (2.13.d)$$

onde estão identificados os dois conjuntos de pontos de colocação $X = I \cup B$ e dos centros Ξ .

A matriz A na Equação (2.12) é não-singular, para uma escolha apropriada de φ . Outro ponto a favor da abordagem de Hermite é que a matriz A é simétrica, ao contrário da matriz A na Equação (2.7) que é formada de uma maneira completamente não estruturada pelo método assimétrico. Esta propriedade é de grande valor para uma implementação eficiente do método de colocação. Vale notar que, embora a matriz A agora seja composta por quatro blocos, ela permanece do mesmo tamanho ($N \times N$) da matriz A na Equação (2.7) obtida pelo método de Kansa. Entretanto, a matriz de colocação simétrica requer funções de base radial mais suaves do que as do método de Kansa, o que não é vantajoso para solução de equações diferenciais parciais não-lineares.

2.2.3 Precisão polinomial

A Equação (2.1), apresentada para obtenção da solução numérica aproximada, pode ser reescrita de uma forma mais elaborada, acrescentando-se novos termos (polinômio) para se obter uma precisão polinomial. Assim, a solução aproximada agora é assumida ser da forma

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\|x - x_j\|) + p(x), \quad x \in \mathfrak{R}^S. \quad (2.14)$$

onde $p(x)$ é o polinômio acrescentado.

Embora a utilização do polinômio seja de certa forma arbitrária, fica óbvio que a adição de um polinômio de grau m garante que, resultados oriundos de polinômios com grau menor ou igual a m , sejam recuperados pela Equação (2.14).

De forma geral, o sistema linear de equações obtido pela Equação (2.14) pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde cada bloco é dado por

$$A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

$$P_{ik} = p_k(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2.17)$$

$$c = [c_1, \dots, c_N]^T, \quad (2.18)$$

$$d = [d_1, \dots, d_M]^T, \quad (2.19)$$

$$f = [f_1, \dots, f_N]^T, \quad (2.20)$$

$$O \text{ é uma matriz nula } M \times M, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{0} \text{ é um vetor nulo de comprimento } M. \quad (2.22)$$

Uma das possibilidades, para um problema bidimensional, é escrever a Equação (2.14) da seguinte forma

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\|x - x_j\|) + d_1 + d_2x + d_3y. \quad (2.23)$$

Uma das razões em se utilizar as RBF para interpolação de dados é justamente devido as dificuldades associadas à interpolação por polinômios. Além disso, como pode ser visto no trabalho de Carlson e Foley (1991), a adição de termos polinomiais parece não aumentar a precisão do método quando se utiliza RBF não polinomiais.

Entretanto, algumas vezes é desejável reproduzir certos tipos de funções com características um pouco peculiares. Por exemplo, se os dados são constantes ou vêm de uma função linear, então é desejável que o interpolante também consiga reproduzir essas características. Infelizmente, o método aqui apresentado não é capaz de reproduzir resultados para este tipo de funções polinomiais mais simples.

2.2.4 Aplicação das RBF em equações integrais

Os métodos de colocação simétrico e assimétrico foram apresentados, nos itens anteriores, em aplicações para interpolação de dados e para resolução de equações diferenciais parciais do tipo elípticas. Entretanto, de maneira análoga, o método pode ser empregado em diversos outros casos, por exemplo, em EDP parabólicas, hiperbólicas e, o que é de interesse e será apresentado nesse item, em equações integrais.

A aplicação das RBF em equações integrais é semelhante ao apresentado, entretanto, para dirimir quaisquer tipos de dúvidas, será apresentado a seguir para o método de Kansa (assimétrico). Para tal aplicação das RBF, sem perda de generalidade e entendimento do método, considere a equação integral de Fredholm de segunda espécie em 1 (uma) dimensão escrita conforme a equação abaixo

$$\alpha u(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = g(x) , \quad x \in [a, b], \quad (2.24)$$

onde u é a função incógnita, α é um parâmetro real, a e b são números reais finitos e $K(x, \xi)$ é a função-núcleo.

Considere também a função interpolante \hat{u} , com φ denotando uma função de base radial, conforme a equação seguinte

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|) . \quad (2.25)$$

Os pontos-fonte (centros), $\{x_j\}$, são selecionados no intervalo $[a, b]$, onde $a \leq x_1 < x_2 \dots < x_N \leq b$. A distribuição dos pontos-fonte (centros) pode ser regular ou aleatória, o que é válido não apenas para este problema em particular, mas de uma maneira geral também.

Considerando a Equação (2.25), a Equação (2.24) pode ser escrita conforme a Equação (2.26)

$$\alpha \tilde{u}(x) + \int_a^b K(x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi = g(x), \quad x \in [a, b] . \quad (2.26)$$

A Equação (2.26) pode ser escrita de forma equivalente conforme as Equações (2.27) e (2.28)

$$\alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|) + \int_a^b K(x, \xi) \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|\xi - \xi_j\|) d\xi = g(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.27)$$

ou

$$\sum_{j=1}^N \left[\alpha \varphi(\|x - x_j\|) + \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\|\xi - \xi_j\|) d\xi \right] \lambda_j = g(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.28)$$

Admita que a Equação (2.28) seja válida para $x = x_i$. Portanto, a Equação (2.28) torna-se em

$$\sum_{j=1}^N \left[\alpha \varphi(\|x_i - x_j\|) + \int_a^b K(x_i, \xi) \varphi(\|\xi - \xi_j\|) d\xi \right] \lambda_j = g(x_i), \quad x \in [a, b]. \quad (2.29)$$

Utilizando uma fórmula de quadratura com M pontos de integração, e com *coeficientes* ξ_k e *pesos* w_k , no intervalo $[a, b]$, para a solução numérica da integral na Equação (2.29), resulta a Equação (2.30).

$$\sum_{j=1}^N \left[\alpha \varphi(\|x_i - x_j\|) + \sum_{k=1}^M K(x_i, \xi_k) \varphi(\|\xi_k - \xi_j\|) w_k \right] \lambda_j = g(x_i) \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (2.30)$$

A Equação 2.30 pode ser escrita na seguinte forma matricial,

$$A\lambda = g, \quad (2.31)$$

onde,

$$A = A_{ij} = \alpha \varphi(\|x_i - x_j\|) + \sum_{k=1}^M K(x_i, \xi_k) \varphi(\|\xi_k - \xi_j\|) w_k \quad (2.32)$$

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T \quad (2.33)$$

$$g = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T \quad (2.34)$$

Note que nada impede, para aplicação do método, que a integral na Equação (2.29) também possa ser resolvida analiticamente. Entretanto, fica fácil perceber, que a função dentro do integrador, que é uma combinação da função núcleo do problema e da função de base radial escolhida, raramente será uma função trivial que tenha integral analítica exata disponível.

Nos problemas de engenharia que aparece a equação integral de Fredholm de segunda espécie, Equação (2.24), um tipo particular de integral surge. É a chamada integral de linha. Quando se trabalha com integrais de linha, é sempre importante lembrar como parametrizar equações, ou posto de outra forma, é necessário ser capaz de obter um conjunto de equações paramétricas para uma dada curva específica. Na Tabela 2.3 são apresentadas algumas das equações básicas que podem ser utilizadas ou servir de exemplo quando as equações parametrizadas são requeridas.

Tabela 2.3 Exemplos de curvas e suas respectivas equações parametrizadas

Curva	Equação Paramétrica	
<u>Círculo</u> $x^2 + y^2 = R^2$	<u>Anti-Horário</u> $x = R.\cos(t)$ $y = R.\sin(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$	<u>Horário</u> $x = R.\cos(t)$ $y = -R.\sin(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$
<u>Elipse</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	<u>Anti-Horário</u> $x = a.\cos(t)$ $y = b.\sin(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$	<u>Horário</u> $x = a.\cos(t)$ $y = -b.\sin(t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$
<u>Genérica</u> $y = f(x)$	$x = t$ $y = f(t)$	
<u>Genérica</u> $y = f(x)$	$x = g(t)$ $y = t$	
<u>Segmento de Linha</u> $(x_0, y_0) a (x_1, y_1)$	$x = (1-t)x_0 + t x_1$ $x = (1-t)y_0 + t y_1$	

Ainda na tabela, seguem as equações para o caso particular de um círculo e de uma elipse. Na verdade, são apresentados dois conjuntos de equações paramétricas para cada uma delas, uma percorrendo a curva no sentido horário e a outra no sentido anti-horário. Aqui se deve ter cuidado, visto que o sentido escolhido, pode, dependendo do caso, mudar a resposta. Também, deve-se ter atenção que, ambas as equações “iniciam” no eixo positivo de x com $t = 0$.

Agora é a integral de linha. No Cálculo, quando se integra uma função genérica de uma única variável $f(x)$ sobre um intervalo definido $[a, b]$, fica fácil perceber que x tomará valores unitários dentro deste intervalo. Entretanto, com integrais de linha, no caso em que se deseja integrar uma função genérica de duas variáveis $f(x, y)$ e que os valores de x e y que serão utilizados agora são pares de pontos (x, y) de uma curva qualquer C . Note que isto é diferente de uma integral dupla, na qual os pontos são de uma região bidimensional.

Assim, considere uma curva genérica C no plano bidimensional. Assumindo que essa curva é “suave” e é dada pelas equações paramétricas

$$x = h(t) , \quad (2.35.a)$$

$$y = g(t) . \quad (2.35.b)$$

Válidas para $a \leq t \leq b$

Frequentemente fica mais fácil se trabalhar com as equações paramétricas na forma vetorial. Neste caso, a curva será dada por

$$\vec{v}(t) = h(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} , \quad a \leq t \leq b. \quad (2.36)$$

A curva é dita suave se $\vec{v}'(t)$ é contínua e $\vec{v}'(t) \neq 0$ para todo valor de t .

Assim, a integral de linha da função $f(x,y)$ ao longo da curva C é dada por

$$\oint_C f(x, y) ds . \quad (2.37)$$

Neste tipo de integral, se utiliza um ds pelo fato de que a integral é sobre uma dada curva C , ao invés do eixo x (denotado por dx) ou o eixo y (denotado por dy). Para o cálculo da integral de linha, tudo deve ser convertido para equações paramétricas, inclusive ds , que pode ser visto como um comprimento de arco da curva C . Assim, ds pode ser escrito como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt . \quad (2.38)$$

Assim, utilizando a Equação (2.38), a integral de linha, Equação (2.37), pode ser reescrita como

$$\oint_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt . \quad (2.39)$$

Utilizando ainda a forma vetorial, a equação (2.39) pode ser simplificada para

$$\oint_C f(x, y) ds = \int_a^b f(h(t), g(t)) \|\vec{v}'(t)\| dt , \quad (2.40)$$

onde $\|\vec{v}'(t)\|$ é a magnitude ou norma do vetor $\vec{v}'(t)$ e é dada por

$$\|\vec{v}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} . \quad (2.41)$$

Note que, enquanto a parametrização da curva C for feita da forma que t aumente de a para b , o valor da integral de linha irá ser independente da parametrização da curva. Vale a pena comentar ainda algo mais sobre integrais de linha pois, poderão ser de grande utilidade na implementação e programação do método.

O desenvolvimento de integrais de linha sobre uma curva C formada por um conjunto de trechos suaves (C_1 , C_2 e C_3) é relativamente simples. Tudo o que deve ser feito é calcular a integral de linha para cada um dos trechos e então somar cada um deles, ou seja

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \int_{C_3} f(x, y) ds . \quad (2.42)$$

Ainda vale ressaltar que, para integrais de linha, é válida a relação a seguir.

$$\int_C f(x, y) ds = - \int_{-C} f(x, y) ds . \quad (2.43)$$

Então, para um integral de linha, pode-se mudar a direção (ou sentido) da curva que isto não mudará o valor da integral. Esta é uma propriedade bastante útil, visto que algumas integrais são mais fáceis de serem calculadas em uma determinada direção do que em outra.

2.3 Método de Escolha do Fator de Forma

O Método das RBF, após a definição da forma do interpolante, se inicia com a escolha da função básica e do parâmetro de forma a serem utilizados. Estas são provavelmente as escolhas que mais freqüentemente aparecerão na prática.

Quando se sabe que o resultado esperado vem de uma função muito suave, é de se esperar também que, neste caso, se deva utilizar funções básicas também suaves. Em contrapartida, não se tem muito a ganhar fazendo isto. De fato, estas funções podem adicionar uma suavidade exagerada ao interpolante, impedindo que o método seja capaz de detectar variações localizadas no resultado. Uma das primeiras tentativas de se obter diretrizes, para a seleção de funções apropriadas, pode ser vista em Schaback e Wendland (2006). Não faz parte do escopo deste trabalho, realizar uma análise teórica de tal problema, este trabalho se restringiu tão somente em analisar os resultados numéricos obtidos com cada uma das funções implementadas.

O verdadeiro foco deste trabalho, está na segunda questão do problema, ou seja, na escolha do parâmetro de forma ε . Um número de estratégias pode ser utilizado para orientar

esta decisão. Serão agora apresentadas duas estratégias para escolha de um “bom” valor para ε .

2.3.1 Escolha do parâmetro de forma via tentativa e erro

A estratégia mais simples é realizar uma série de experimentos variando o parâmetro de forma e selecionar o melhor entre os utilizados. Esta estratégia pode ser utilizada se a função f que gerou os dados ou que fornece a solução analítica para o problema é previamente conhecida. É claro que, se antes de realizarmos o experimento já conhecemos a resposta, o problema já está resolvido, ficando sem sentido se achar um resultado numérico. Entretanto, esta estratégia é utilizada com intuito acadêmico e para adquirir um “sentimento” inicial do método.

Em contrapartida, quando não se tem qualquer conhecimento de f , se torna muito difícil decidir o que “bom” ou “melhor” significa. Um critério (não otimizado) possível é baseado no princípio de *trade-off*, ou seja, no fato de que, para um ε pequeno, o erro aumenta conforme o número de condicionamento da matriz cresce. Assim, pode se definir o “melhor” ε como sendo o menor valor no qual o programa utilizado para resolução do sistema linear de equações (Matlab ou qualquer outro *solver*) não alerta quanto a proximidade de singularidade na resolução do sistema linear de equações.

Muitos casos de seleção de um ótimo parâmetro de forma, via tentativa e erro, costumam ser processos inclusive subjetivos. Entretanto, esta é a abordagem mais utilizada na prática.

2.3.2 Escolha do parâmetro de forma via validação cruzada

Uma segunda estratégia para procura de um “bom” parâmetro de forma se baseia na abordagem da validação cruzada, Rippl (1999). Este método é muito popular em estatística onde é também conhecido como PRESS (do inglês *Predictive Residual Sum of Squares*). Neste algoritmo, um valor “ótimo” de ε é selecionado minimizando o erro (mínimos quadrados). Uma grande vantagem deste método, é que a dependência do erro na função de dados é levada em consideração. Assim, o parâmetro de forma “ótimo” obtido é bem próximo daquele achado por tentativa e erro, sem que se tenha conhecimento prévio da solução exata. Uma estratégia semelhante foi proposta por Golberg et al. (1996) para a solução de equações diferenciais elípticas utilizando interpolação com multiquádricas.

Sendo mais específico, se $P_f^{[k]}$ é o interpolador para o conjunto de dados $\{f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_N\}$, ou seja,

$$P_f^{[k]}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N c_j^{[k]} \varphi(\|x - x_j\|) , \quad (2.44)$$

tal que

$$P_f^{[k]}(x_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N , \quad (2.45)$$

e, sendo E_k o erro

$$E_k = f_k - P_f^{[k]}(x_k) , \quad (2.46)$$

no ponto x_k não utilizado para determinar o interpolante, então, a qualidade da aproximação é determinada pela norma do vetor de erros $E = [E_1, \dots, E_N]^T$ obtido pela remoção de um dos pontos em cada um dos elementos e comparando o resultado obtido com o valor (conhecido) do ponto removido.

Adicionando um *loop* sobre o ε , pode-se comparar os erros obtidos para diferentes valores de parâmetro de forma ε , e, assim, escolher aquele valor de ε em que se obtém o erro mínimo como sendo o melhor valor para o parâmetro de forma.

A precisão de muitos esquemas que utilizam as funções de base radial depende extremamente do parâmetro de forma ε da função de base radial. Independente do algoritmo ou da técnica que se utilize para adotar ou para obter um valor “bom” deve-se sempre ter em mente, ainda aproveitando o trabalho de Rippa (1999), as seguintes orientações:

- levar em consideração o número e a forma de distribuição dos pontos (centros e pontos de colocação);
- considerar a função de base radial que está sendo implementada; e
- por fim, considerar o condicionamento da matriz do problema, que é determinada pelo número / distribuição dos pontos, a função de base radial e pela precisão numérica utilizada nos cálculos.

2.4 Diretrizes Práticas na Implementação do Método

De uma forma geral, ao iniciar a implementação do método, deve-se sempre ter em mente uma busca do ajuste da suavidade e do parâmetro de forma ε , para uma determinada função de base radial escolhida.

Esta suavidade da função de base radial deve ser escolhida com alguma cautela e de forma dependente da suavidade da função a ser aproximada. De um ponto de vista prático, qualitativamente falando, funções de base radial suaves podem muito bem reproduzir os resultados obtidos através de funções não suaves, como provado em diversos estudos como o de Narcowich et al. (2006). Por outro lado, funções de base radial não suaves, não conseguirão atingir taxas altas de convergência quando aproximando funções suaves (Schaback e Wendland, 2002). Isto significa que utilizar uma função de base radial muito suave não é crítico em relação ao erro, mas sim para a estabilidade.

Porém em muitos casos práticos, a escolha da suavidade não é tão sensível quanto a escolha do parâmetro de forma ε . Quando a função de base radial é empregada sem nenhum tratamento adicional, a escolha de um ε adequado para o problema em estudo aparecerá rapidamente como um dos pontos cruciais para obtenção de resultados satisfatórios.

O que tem se observado nos trabalhos é que as diretrizes válidas para interpolação de dados utilizando funções de base radial também são válidas quando se aplica o método para resolução de equações diferenciais parciais e equações integrais.

Por fim, durante a implementação do método, será de grande valia se as seguintes diretrizes forem levadas em consideração:

- sempre permitir um ajuste do parâmetro de forma;
- se possível, permita que diferentes RBF possam ser escolhidas e testadas;
- realize alguns experimentos numéricos com diferentes fatores de forma e RBF antes de apresentar os resultados finais;
- não se preocupe com números de condicionamento da matriz altos, lembre-se que, ao menos quando se utiliza algum tipo de tratamento durante a resolução do sistema linear de equações, em alguns casos, os melhores resultados são obtidos com matrizes mal condicionadas.

Capítulo 3

ANÁLISE NUMÉRICA DE CASOS

3.1 Introdução

Com o intuito de “iniciação” à implementação numérica do Método de Colocação que utiliza as Funções de Base Radial apresentado, bem como avaliar a aplicabilidade do algoritmo e do seu respectivo programa em problemas de engenharia, são apresentados neste capítulo diversos casos estudados. Estes casos foram separados em dois grupos: o primeiro envolvendo Equações Diferenciais Parciais (Problemas de Campo) e o segundo envolvendo Equações Integrais (Problemas de Contorno).

Os problemas apresentados são auto explicativos, de forma que podem ser estudados de maneira isolada e independente (exceto Problemas 6 e 11, que abordam seus problemas antecedentes). Apesar disso, e o leitor mais atento vai perceber, eles seguem uma ordem de aumento no grau de dificuldade, de maneira que, a leitura e estudo dos problemas em ordem seqüencial é extremamente válida, principalmente para observar que a abordagem menos elaborada, utilizada nos primeiros problemas de cada seção, podem inclusive levar a falsas conclusões quanto aos melhores parâmetros de simulação para um determinado problema.

Maiores detalhes referentes aos problemas e alguma particularidade na implementação do método serão apresentados e descritos posteriormente em momento oportuno para cada um dos casos em questão.

3.2 Problemas com Equações de Campo (Equações Diferenciais Parciais – EDP)

Um número muito grande de equações diferenciais parciais aparece em problemas de engenharia. Duas das mais freqüentes são a *equação de Laplace* e a *equação de Poisson*, apresentadas abaixo para uma variável dependente genérica:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 , \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 u(x, y) = f(x, y) , \quad (3.2)$$

onde $f(x,y)$ é um termo conhecido. A equação de Laplace é aplicada em problemas de difusão de massa, difusão de calor (condução), eletrostática, escoamento potencial (não viscoso) incompressível, etc. De fato, a equação de Laplace governa o potencial de muitas grandezas físicas onde a taxa de variação de uma propriedade particular é proporcional ao gradiente de um potencial. A equação de Poisson por sua vez é a equação de Laplace não homogênea. A presença do termo não homogêneo $f(x,y)$ pode complicar sobremaneira a solução exata da equação de Poisson. Entretanto, a presença deste termo não complica a solução numérica da equação de Poisson, utilizando as RBF.

A solução das Equações (3.1) e (3.2) é uma função $u(x,y)$. Esta função deve satisfazer um conjunto de condições de contorno que são impostas nas fronteiras de um domínio fechado. Estas condições de contorno podem ser do tipo *Dirichlet* (valores de u especificados), do tipo *Neumann* (valores da derivada de ϕ especificados) ou do tipo Mista (combinação das duas anteriores).

Para impedir muita generalidade nesse primeiro momento, os problemas estudados foram limitados tão somente aos que utilizam equações diferenciais parciais elípticas, entretanto, sem perda de entendimento na aplicação do método.

3.2.1 Problema 1: EDP de Laplace com condição de contorno do tipo Dirichlet

O sistema térmico ilustrado na Figura 3.1 é utilizado nessa seção para apresentar a utilização das funções de base radial na resolução de problemas, aqui em particular, envolvendo difusão de calor, entenda-se, na resolução numérica de equações diferenciais parciais elípticas.

Assim, a Figura 3.1 ilustra uma placa fina com largura $L = 10$ cm, altura $H = 15$ cm e espessura $Lc = 1$ cm. As faces da placa estão isoladas de tal forma que não existe fluxo de calor na direção da espessura Lc . A face superior da placa é mantida a temperatura $T = 100/\sin(\pi x/L)$ °C e as outras três faces são mantidas a $T = 0$ °C. O fluxo de calor entra na placa pela face superior e sai pelas outras três faces. Não existe geração de energia interna na placa. Neste caso, deseja-se saber a distribuição de temperatura na placa $T(x, y)$ e a taxa de transferência de calor total pela face superior da placa. A distribuição de temperatura na placa é governada pela equação de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 T(x, y) = 0, \quad (3.3)$$

com as condições de contorno especificadas em cada uma das quatro faces da placa.

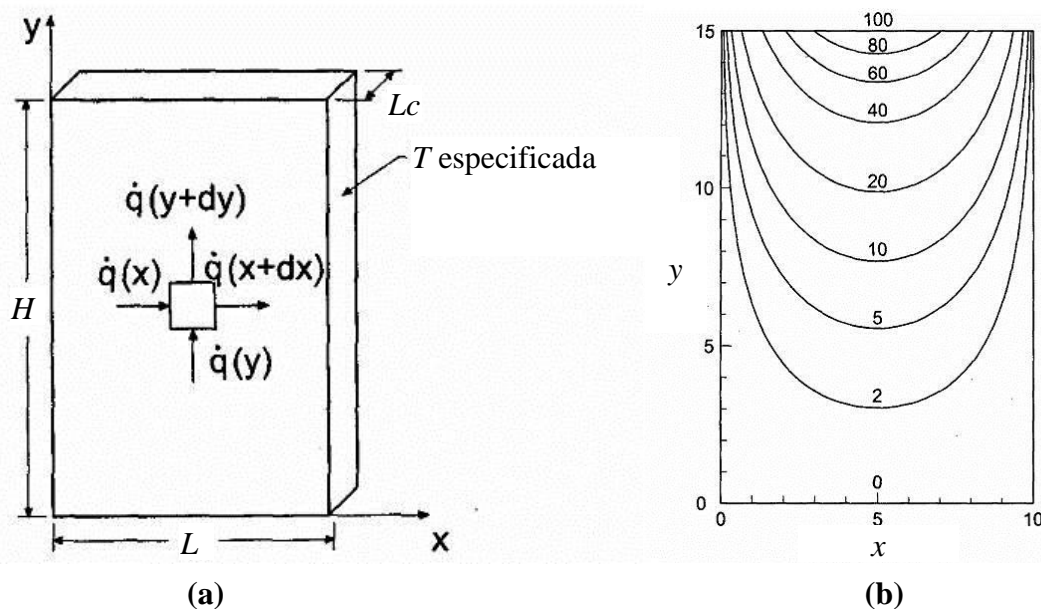


Figura 3.1 (a) Esquema de uma placa fina com difusão de calor e (b) uma determinada solução para distribuição de temperatura

A solução exata para este caso em particular é obtida assumindo uma solução da forma $T(x, y) = f(x).g(y)$, substituindo esta na equação governante e separando variáveis,

integrando as duas equações diferenciais ordinárias resultantes para $f(x)$ e $g(y)$ e aplicando as condições de contorno em $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ e $y = H$. O resultado fica

$$T(x, y) = 100 \frac{\sinh(\pi y / L) \sin(\pi x / L)}{\sinh(\pi H / L)}. \quad (3.4)$$

Para resolução numérica do problema proposto, o método assimétrico (Kansa) com RBF do tipo multiquádrica inversa, foi implementado utilizando um programa em MATLAB. Assim, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica obtida pela Equação (3.4) e outra solução numérica (Método das Diferenças Finitas - MDF) obtida por Hoffman (2001).

Portanto, considere o problema de difusão de calor em uma placa plana Figura 3.1, Equações (3.3) e (3.4). Este será calculado, utilizando-se 35 (5×7) pontos e 117 (9×13) pontos distribuídos uniformemente conforme ilustrado na Figura 3.2. A solução é apresentada na Tabela 3.1 para os pontos comuns das duas distribuições de pontos, ao longo das linhas $x = 2,5$ cm e $x = 5,0$ cm. O erro da solução numérica, em relação à solução analítica, é apresentado imediatamente abaixo do valor da solução.

Dados do Problema 1:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ T(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ T(x, y) &= 100 \sin(\pi x / H), & (x, y) \in \Gamma_3, \end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, y = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x = L, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, y = H\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\},$$

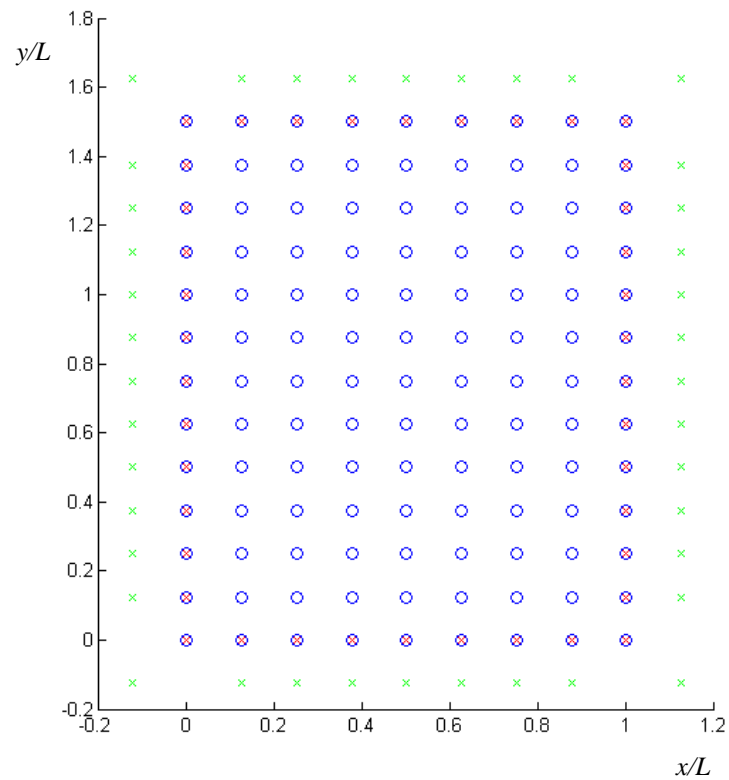
$$L = 10 \text{ cm}, \text{ e}$$

$$H = 15 \text{ cm}.$$

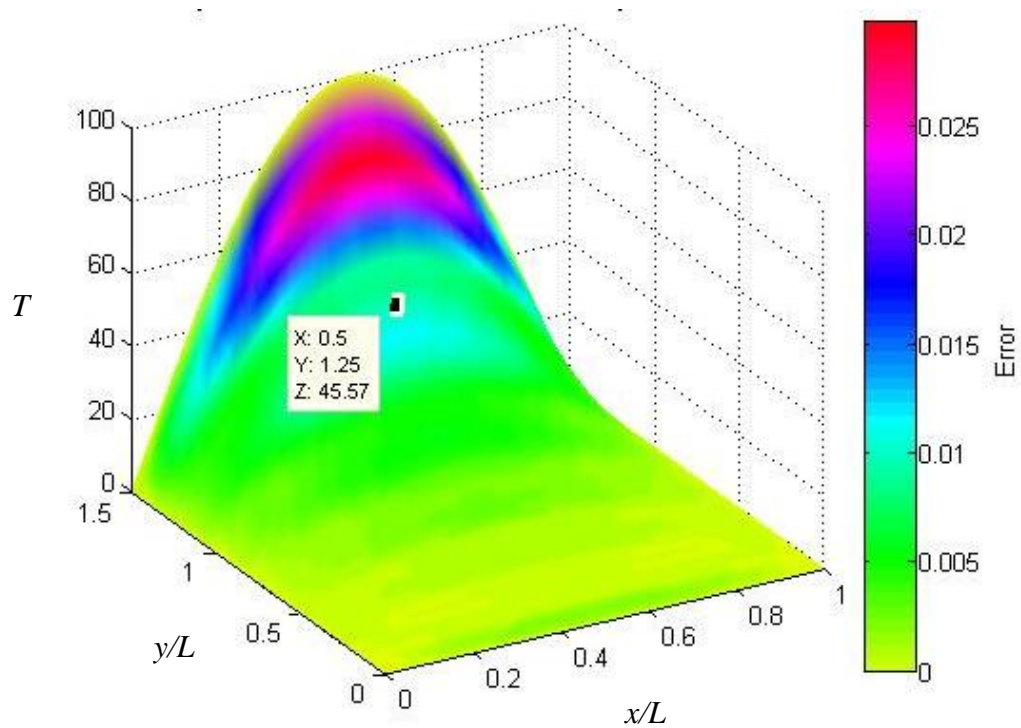
Para este problema, a solução exata é dada por

$$T(x, y) = 100 \frac{\sinh(\pi y / L) \sin(\pi x / L)}{\sinh(\pi H / L)}.$$

Resultados do Problema 1:



(a)



(b)

Figura 3.2 (a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF para o Problema 1 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 117$ (9×13) pontos no interior

Tabela 3.1 Solução numérica do problema de difusão de calor para o Problema 1 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$

$T(x, y), ^\circ\text{C}$								
$\text{Erro}(x, y) = \ T_{\text{numérica}}(x, y) - T_{\text{exata}}(x, y)\ , ^\circ\text{C}$								
$d = 2,5 \text{ cm } (5 \times 7)$					$d = 1,25 \text{ cm } (9 \times 13)$			
y cm	$x = 2,5 \text{ cm}$		$x = 5,0 \text{ cm}$		$x = 2,5 \text{ cm}$		$x = 5,0 \text{ cm}$	
	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF
15,0	70,710678 0,000000	70,710678 0,000000	100,000000 0,000000	100,000000 0,000000	70,710678 0,000000	70,710678 0,000000	100,000000 0,000000	100,000000 0,000000
12,5	31,660664 0,569116	33,459590 1,229810	44,879337 0,700455	47,319006 1,739215	32,222607 0,007173	32,549586 0,319806	45,570004 0,009787	46,032067 0,452276
10,0	14,542989 0,130050	15,808676 1,135636	20,635250 0,115562	22,356844 1,606032	14,669209 0,003830	14,964426 0,291386	20,745709 0,005103	21,162895 0,412083
7,5	6,497677 0,144627	7,418270 0,775966	9,223403 0,170234	10,491019 1,097382	6,640439 0,001865	6,838895 0,196591	9,391189 0,002448	9,671658 0,278021
5,0	2,889204 0,034669	3,373387 0,449514	4,110333 0,024648	4,770690 0,635709	2,923108 0,000765	3,036510 0,112637	4,134014 0,000967	4,294274 0,159293
2,5	1,074512 0,029156	1,304588 0,200914	1,532379 0,028451	1,844967 0,284136	1,103659 0,000015	1,153627 0,049953	1,560878 0,000047	1,631475 0,070644
0	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000

Tabela 3.2 Solução numérica do Problema 1 utilizando algumas RBF do tipo suporte global

N	Multiquádrica (MQ)			Multiquádrica Inversa (MQI)		
	Erro RMS	ε	Rcond	Erro RMS	ε	Rcond
5×7	5.998333e-002	0,5	1.340043e-013	7.337821e-002	0,5	2.235467e-012
9×13	3.788890e-003	1,0	1.442474e-016	6.056965e-003	1,0	5.209520e-015

Tabela 3.3 Solução numérica do Problema 1 utilizando RBF do tipo suporte compacto

N	Wendland's 3,1 (WE31)				Wu's 2,3 (WU23)			
	Erro RMS	ε	Zeros	Rcond	Erro RMS	ε	Zeros	Rcond
5×7	9,335258e-001	0,75	19 %	7,677438e-005	9,225842e-001	0,70	14 %	3,295855e-005
9×13	9,999338e-001	1,40	57 %	6,518649e-006	9,977805e-001	1,48	58 %	5,774594e-006

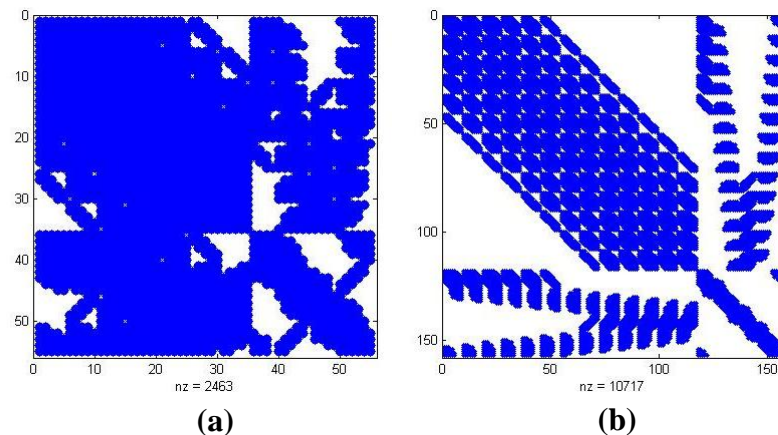


Figura 3.3 Estrutura (esparsidade) das matrizes formadas pelas RBF do tipo suporte compacto da família de Wendland, para o Problema 1, (a) com 35 (5×7) pontos e (b) com 117 (9×13) pontos

3.2.2 Problema 2: EDP de Laplace com condição de contorno do tipo mista

Considerando ainda o problema apresentado no item anterior, este será novamente estudado considerando-se agora a simetria do problema no plano vertical que corta o eixo central da placa. Portanto, não existe fluxo de calor por esse plano e o gradiente de temperatura é igual a zero $\partial T / \partial x = 0$. Isto somente é verdade quando as condições de contorno também são simétricas, que é o caso deste problema em particular.

Seguindo a mesma abordagem do item anterior, para resolução numérica deste exemplo, o método assimétrico (Kansa) com RBF do tipo multiquádrica inversa, foi implementado utilizando um programa em MATLAB. Assim, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica e outra solução numérica (MDF) obtida por Hoffman (2001).

A solução exata (analítica) para este problema é a mesma do problema apresentado no item anterior, que é dada pela Equação (3.4). O resultado para este problema é apresentado na Figura 3.3 e Tabela 3.4.

Dados do Problema 2:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ T(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \partial T / \partial x &= 0, & (x, y) \in \Gamma_2, \\ T(x, y) &= 100 \sin(\pi x / H), & (x, y) \in \Gamma_3, \end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L/2, y = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x = L/2, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L/2, y = H\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\},$$

$$L = 10 \text{ cm}, \text{ e}$$

$$H = 15 \text{ cm}.$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$T(x, y) = 100 \frac{\sinh(\pi y / L) \sin(\pi x / L)}{\sinh(\pi H / L)}.$$

Resultados do Problema 2:

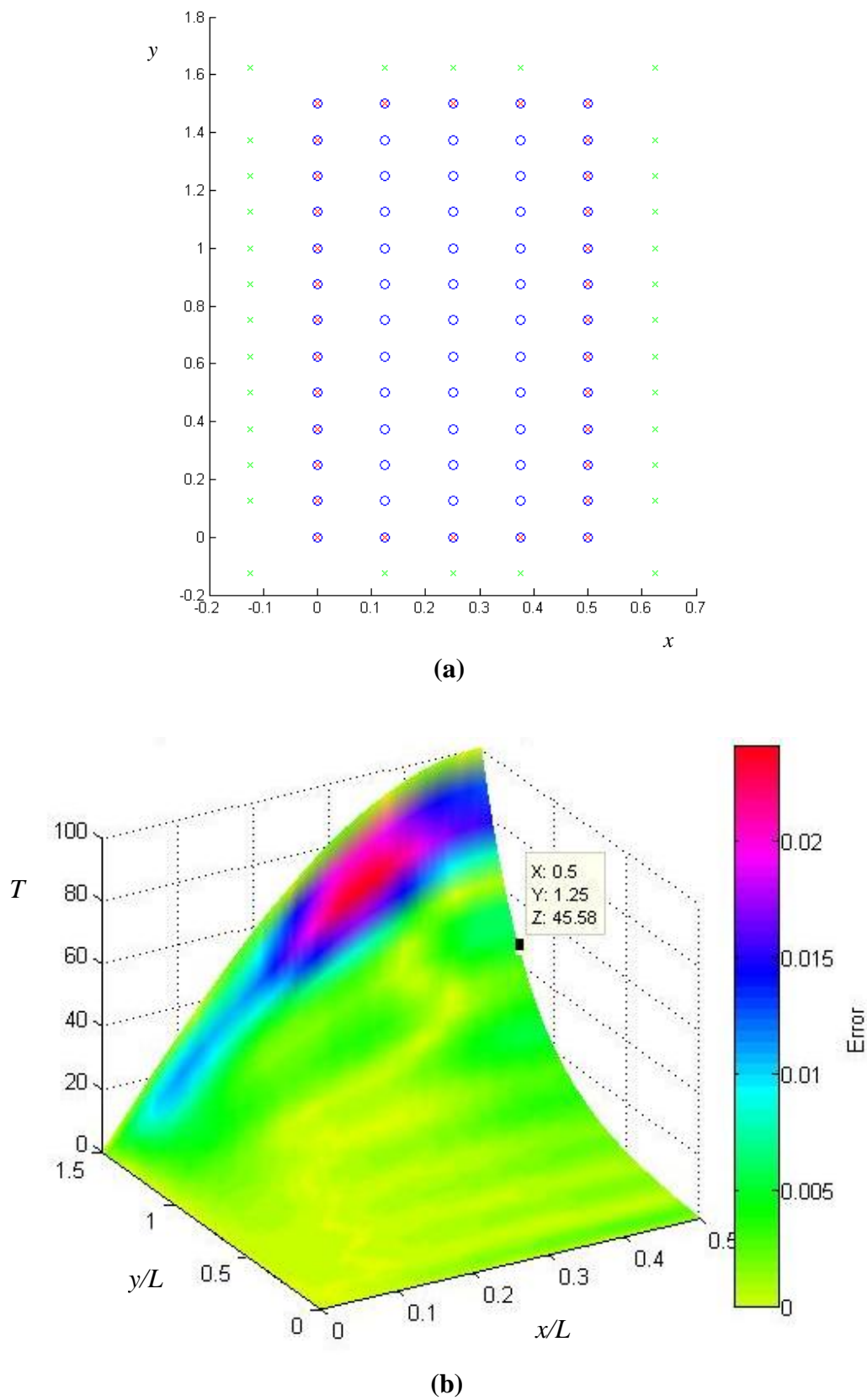


Figura 3.4 (a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF para o Problema 2 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 65$ (5×13) pontos no interior

Tabela 3.4 Solução numérica do problema de difusão de calor para o Problema 2 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$

$T(x, y), ^\circ\text{C}$		
$Erro(x, y) = \ T_{numérica}(x, y) - T_{exata}(x, y)\ , ^\circ\text{C}$		
$d = 1,25 \text{ cm } (5 \times 13)$		
$y, \text{ cm}$	$x = 5,0 \text{ cm}$	
	RBF	MDF
15,0	100,000000 0,000000	100,000000 0,000000
12,5	45,584642 0,004851	46,032068 0,452277
10,0	20,755104 0,004292	21,162895 0,412083
7,5	9,396343 0,002706	9,671658 0,278021
5,0	4,136577 0,001596	4,294274 0,159293
2,5	1,561908 0,001078	1,631476 0,070595
0,0	0,000000 0,000000	0,000000 0,000000

3.2.3 Problema 3: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo Dirichlet

A utilização da equação de Poisson é ilustrada por outro sistema térmico, que é ilustrado na Figura 3.4, e de forma semelhante ao anterior, envolvendo difusão de calor, sendo governado assim, por uma equação diferencial parcial elíptica não homogênea.

A Figura 3.4 ilustra um condutor elétrico retangular que possui geração interna de energia devido a passagem de uma corrente elétrica. A distribuição de temperatura no condutor é governada pela equação de Poisson bidimensional

$$\nabla^2 T(x, y) = -\dot{Q}/k \quad , \quad (3.5)$$

onde k é a condutividade térmica do condutor e \dot{Q} é o fluxo volumétrico de calor $\text{J}/\text{cm}^3\text{s}$ sujeita a condições de contorno especificadas nas quatro faces do condutor.

A solução exata para a distribuição de temperatura na seção transversal do condutor deste problema é dada pela equação

$$T(x, y) = \frac{(\dot{Q}/k)(L^2/4 - x^2)}{2} - \frac{4L^2(\dot{Q}/k)}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[(2n+1)\pi x/L] \cosh[(2n+1)\pi y/L]}{(2n+1)^3 \cosh[(2n+1)\pi H/2L]}, \quad (3.6)$$

onde x e y são medidos do centro do condutor.

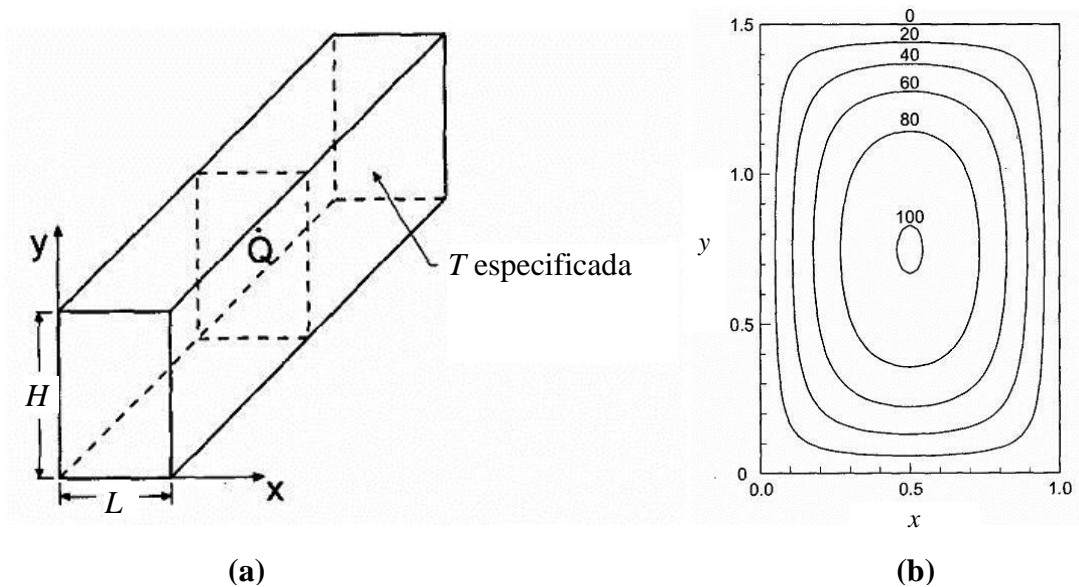


Figura 3.5 (a) Esquema de um condutor elétrico com geração interna de calor e (b) uma determinada solução para distribuição de temperatura

Assim, considerando agora o problema do condutor elétrico retangular Figura 3.5, Equação (3.5) e (3.6) e ainda que o mesmo é feito de uma liga de cobre ($k = 0,4 \text{ J / cm s } ^\circ\text{C}$), com largura de $L = 1,0 \text{ cm}$ e altura de $H = 1,5 \text{ cm}$. O fluxo de calor ao longo do comprimento do condutor é desprezível. A energia é gerada a uma taxa de $\dot{Q} = 400 \text{ J / cm}^3 \text{ s}$. As quatro faces do condutor são mantidas a 0°C .

Para resolução numérica dos exemplos propostos, o método assimétrico (Kansa) com RBF do tipo multiquádrica inversa, foi implementado utilizando um programa em MATLAB. Assim, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica e outra solução numérica (MDF) apresentada em Hoffman (2001). Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3.6 e na Tabela 3.5.

Dados do Problema 3:

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(x, y) &= -\dot{Q}/k, & (x, y) \in \Omega, \\ T(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,\end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, y = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x = L, 0 \leq y \leq H\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, y = H\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\},$$

$$L = 1,0 \text{ cm},$$

$$H = 1,5 \text{ cm},$$

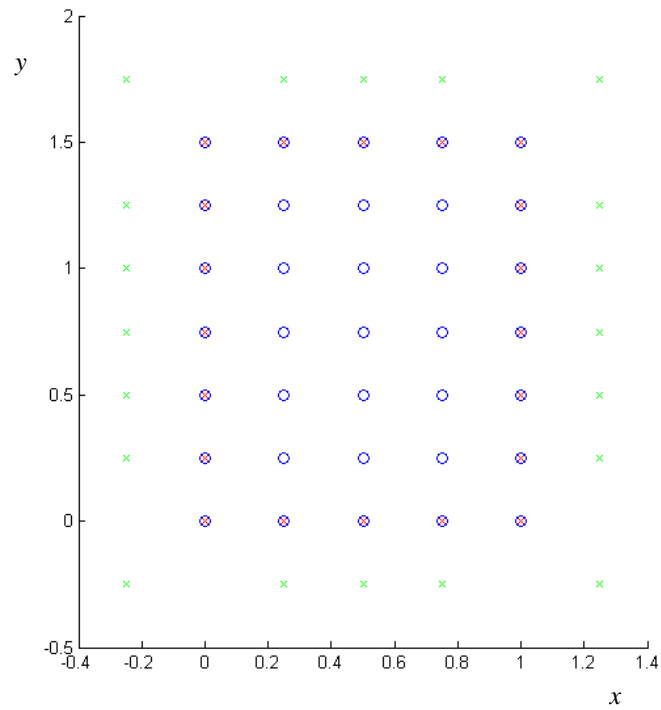
$$\dot{Q} = 400 \text{ J / cm}^3 \text{ s}, \text{ e}$$

$$k = 0,4 \text{ J / cm s } ^\circ\text{C}.$$

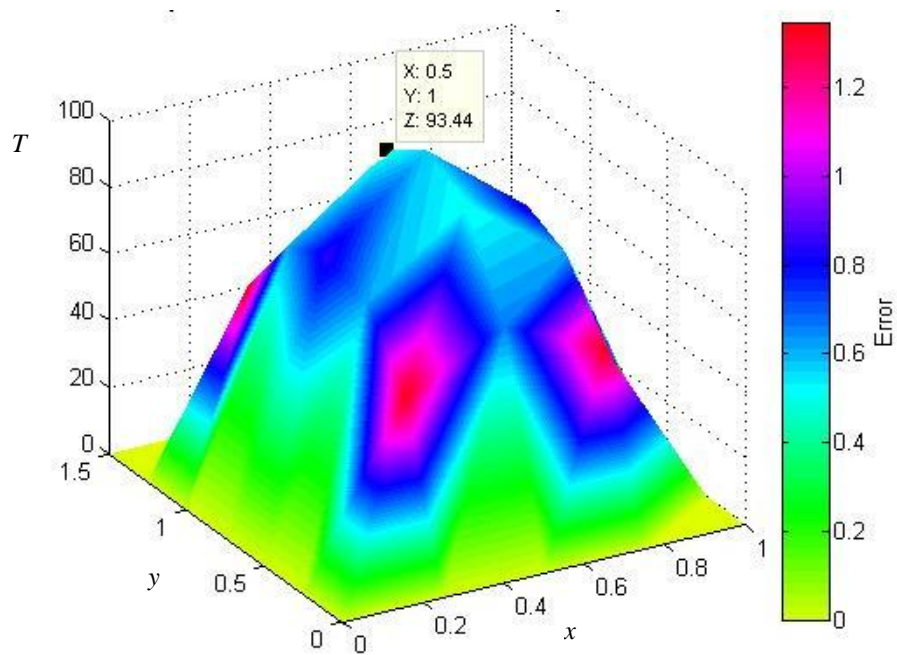
Para este problema, a solução exata é dada por

$$T(x, y) = \frac{(\dot{Q}/k)(L^2/4 - x^2)}{2} - \frac{4L^2(\dot{Q}/k)}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos[(2n+1)\pi x/L] \cosh[(2n+1)\pi y/L]}{(2n+1)^3 \cosh[(2n+1)\pi H/2L]}$$

Resultados do Problema 3:



(a)



(b)

Figura 3.6 (a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF (b) para o Problema 3 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 35$ (5×7) pontos no interior

Tabela 3.5 Solução numérica do problema de difusão de calor com geração interna de energia para o Problema 3 utilizando RBF MQI com $\varepsilon = 1$

$T(x, y), ^\circ\text{C}$								
$\text{Erro}(x, y) = \ T_{\text{numérica}}(x, y) - T_{\text{exata}}(x, y)\ , ^\circ\text{C}$								
$d = 2,5 \text{ cm } (5 \times 7)$					$d = 1,25 \text{ cm } (9 \times 13)$			
$y, \text{ cm}$	$x = 2,5 \text{ cm}$		$x = 5,0 \text{ cm}$		$x = 2,5 \text{ cm}$		$x = 5,0 \text{ cm}$	
	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF
1,25	51,791519 1,348615	48,462813 1,980101	65,280128 0,660457	62,407953 2,211718	50,450787 0,007883	49,910484 0,532420	64,624656 0,004985	64,045535 0,574136
1,00	71,632912 0,614345	68,943299 2,075268	93,437062 0,498349	90,206185 2,732528	71,024127 0,005560	70,482926 0,535641	92,943985 0,005272	92,228966 0,709747
0,75	77,457789 0,851491	74,604197 2,002101	101,342133 0,570748	98,030191 2,741194	76,612350 0,006052	76,095208 0,511090	100,776993 0,005610	100,064542 0,706843

3.2.4 Problema 4: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo Dirichlet, utilizando os métodos assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite)

Considera-se a seguinte equação diferencial parcial de Poisson com condições de contorno de Dirichlet,

$$\nabla^2 u(x, y) = -\frac{5}{4}\pi^2 \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1]^2, \quad (3.7)$$

$$u(x, y) = \sin(\pi x), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (3.8)$$

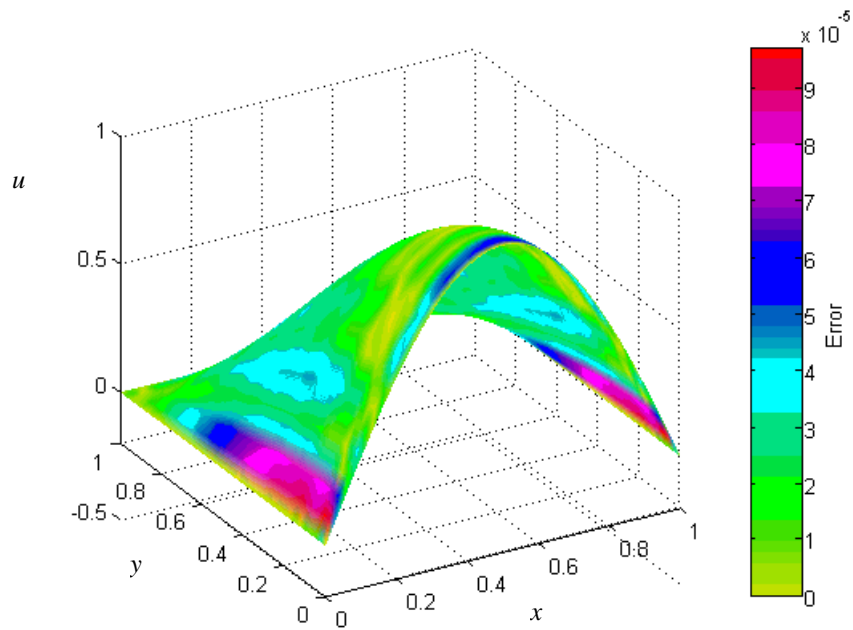
$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (3.9)$$

onde $\Gamma_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ e $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$. Para este caso, pode ser verificado facilmente que a solução exata é dada por

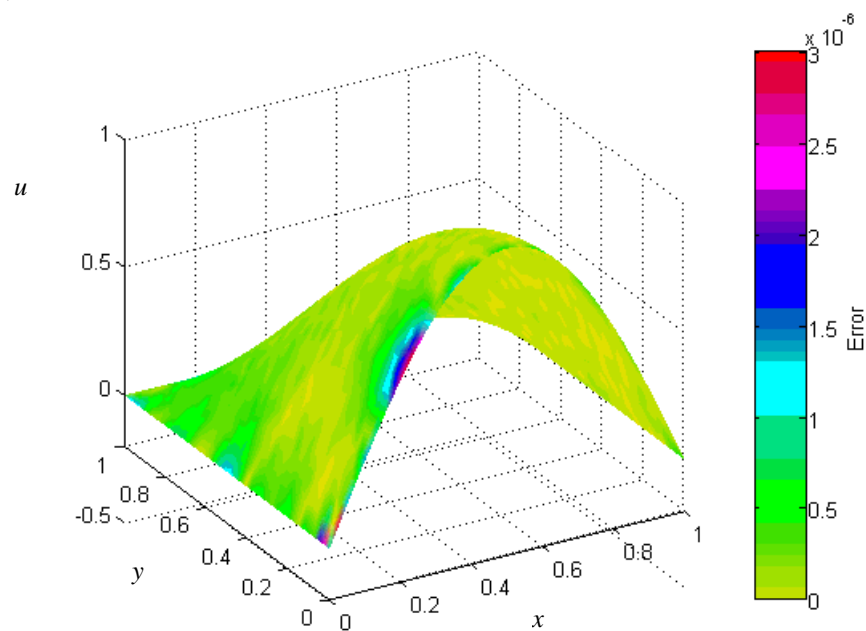
$$u(x, y) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right). \quad (3.10)$$

Os métodos assimétrico e simétrico foram implementados utilizando um programa em MATLAB e, em cada um dos métodos, foram utilizadas RBF dos tipos multiquádrica inversa e gaussiana com o mesmo parâmetro de forma ($\varepsilon = 3$). Assim, os resultados obtidos são apresentados abaixo.

Resultados do Problema 4:



(a)

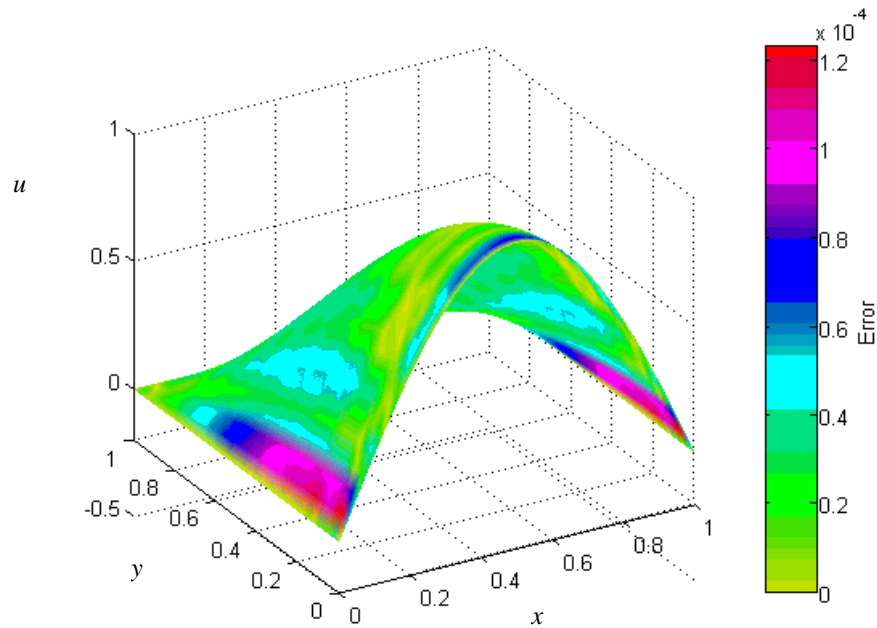


(b)

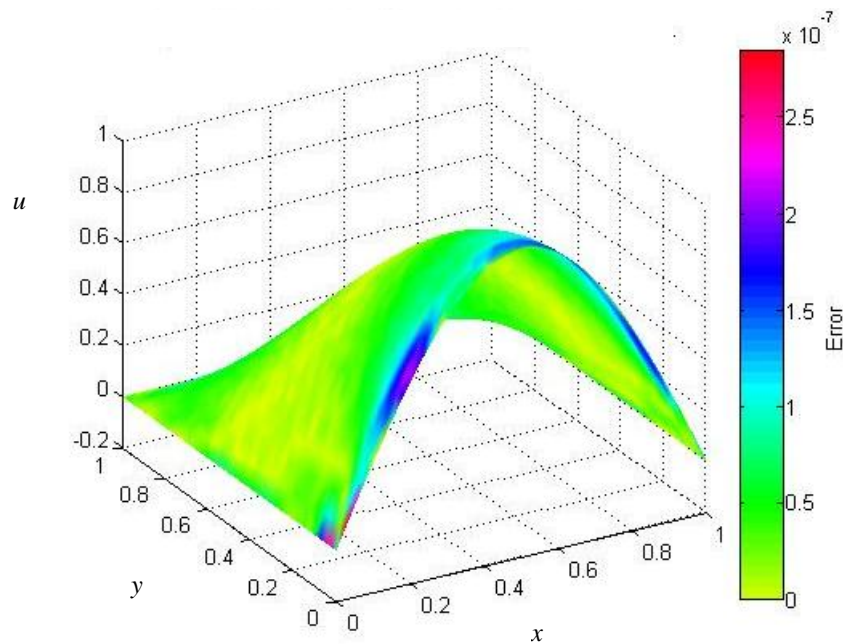
Figura 3.7 Solução numérica do Problema 4 pelo método assimétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior

Tabela 3.6 Solução numérica do Problema 4 pelo método assimétrico (Kansa)

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
9	1,526456e-001	2,883793e-001	1,981675e-001	3,451847e-001
25	6,096534e-003	1,368355e-002	7,199931e-003	1,548491e-002
81	8,071271e-004	2,288896e-003	1,947108e-004	4,669284e-004
289	3,219110e-005	9,686490e-005	3,413579e-007	3,001901e-006



(a)



(b)

Figura 3.8 Solução numérica do Problema 4 pelo método simétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior

Tabela 3.7 Solução numérica do Problema 4 pelo método simétrico (Hermite)

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
9	2,806897e-001	5,440547e-001	4,088188e-001	7,726983e-001
25	1,583948e-001	3,100889e-001	7,704584e-003	1,641233e-002
81	8,650782e-004	2,639934e-003	2,272289e-004	5,328331e-004
289	3,962654e-005	1,229717e-004	6,090906e-008	2,838927e-007

3.2.5 Problema 5: EDP de Poisson com condição de contorno do tipo Mista, utilizando os métodos assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite)

Considera-se agora a seguinte equação diferencial parcial de Poisson com condições de contorno mista,

$$\nabla^2 u(x, y) = -5,4x \quad , \quad (x, y) \in \Omega = [0,1]^2 \quad , \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \quad , \quad (3.12)$$

$$u(x, y) = 0,1 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma_2 \quad , \quad (3.13)$$

$$u(x, y) = 1 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma_4 \quad . \quad (3.14)$$

onde

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad y = 0\} \quad ,$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x = 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1\} \quad ,$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad y = 1\} \quad ,$$

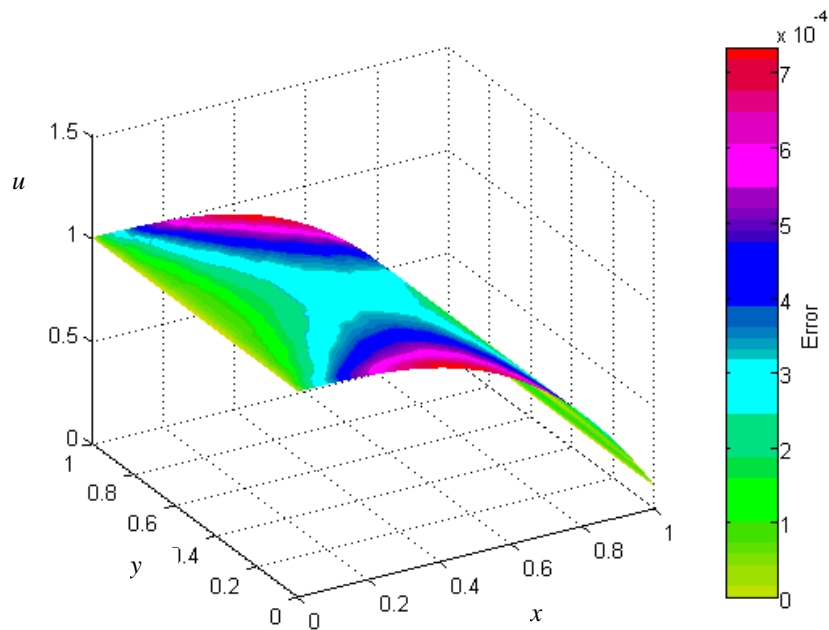
$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1\} \quad .$$

Para este problema, a solução exata é dada por

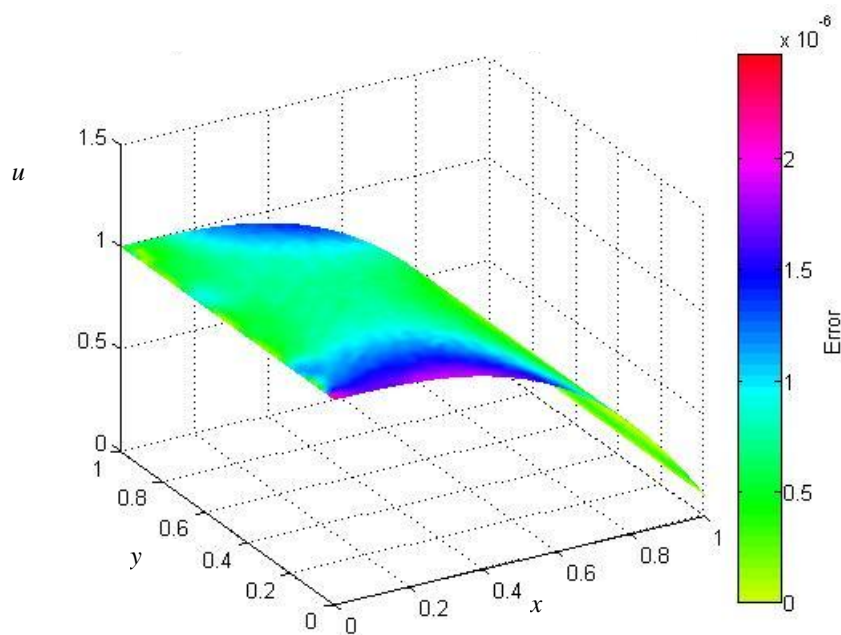
$$u(x, y) = 1 - 0,9x^3 \quad . \quad (3.15)$$

Analogamente, os métodos assimétrico e simétrico foram implementados utilizando um programa em MATLAB e, em cada um dos métodos, foram utilizadas RBF dos tipos multiquádrica inversa e gaussiana com o mesmo parâmetro de forma ($\varepsilon = 3$). Assim, os resultados obtidos são apresentados a seguir.

Resultados do Problema 5:



(a)

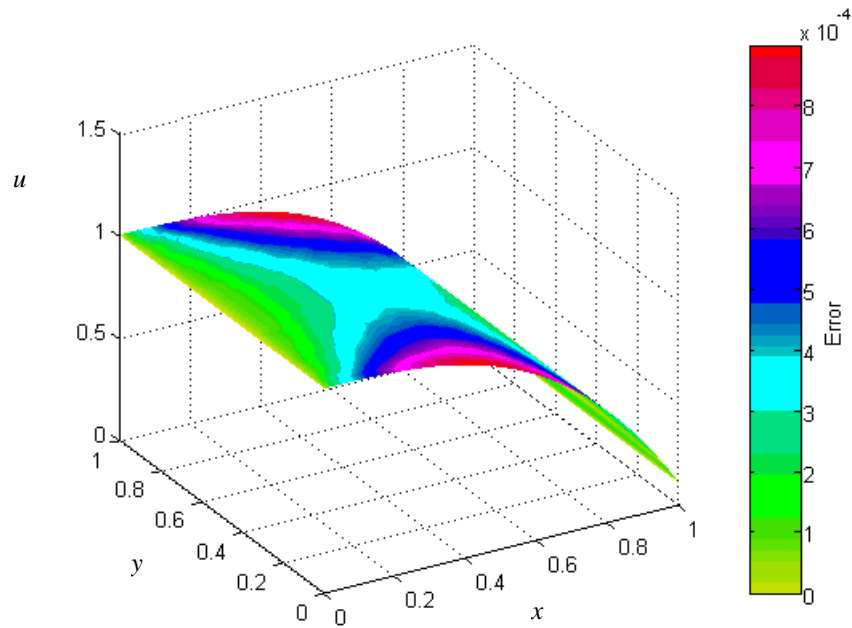


(b)

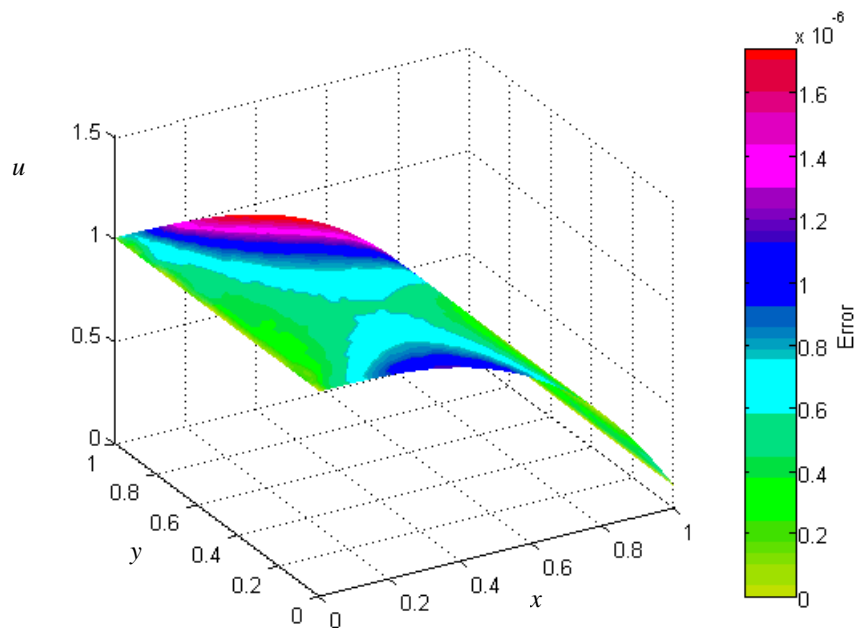
Figura 3.9 Solução numérica do Problema 5 pelo método assimétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior

Tabela 3.8 Solução numérica do Problema 5 pelo método assimétrico (Kansa)

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
9	1,250626e-001	1,850277e-001	3,310424e-001	4,814038e-001
25	9,913477e-003	2,777059e-002	2,568257e-002	5,040789e-002
81	3,533749e-003	7,603914e-003	1,640369e-003	3,467337e-003
289	3,322387e-004	7,319851e-004	7,991658e-007	2,462650e-006



(a)



(b)

Figura 3.10 Solução numérica do Problema 5 pelo método simétrico, utilizando RBF dos tipos (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 3$ e $N = 289$ pontos no interior

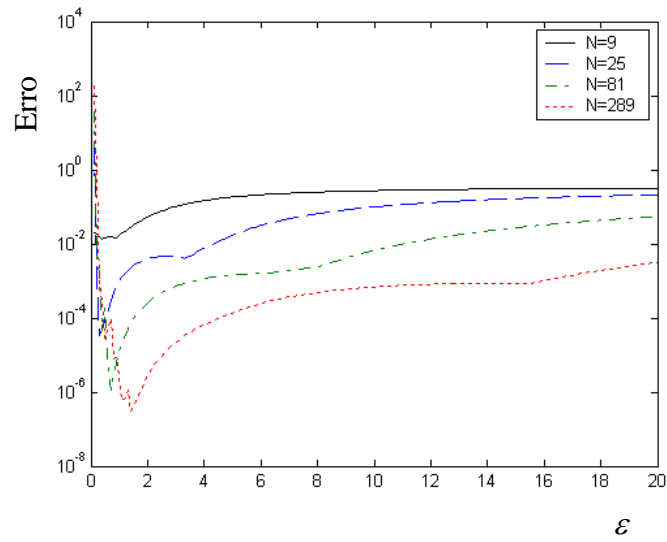
Tabela 3.9 Solução numérica do Problema 5 pelo método simétrico (Hermite).

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
9	2,802003e-001	3,965792e-001	7,653536e-001	1,101844e+000
25	1,795134e-001	2,586947e-001	2,587376e-002	4,946156e-002
81	4,268661e-003	8,947359e-003	1,893772e-003	4,006507e-003
289	4,063021e-004	8,967751e-004	6,984280e-007	1,736188e-006

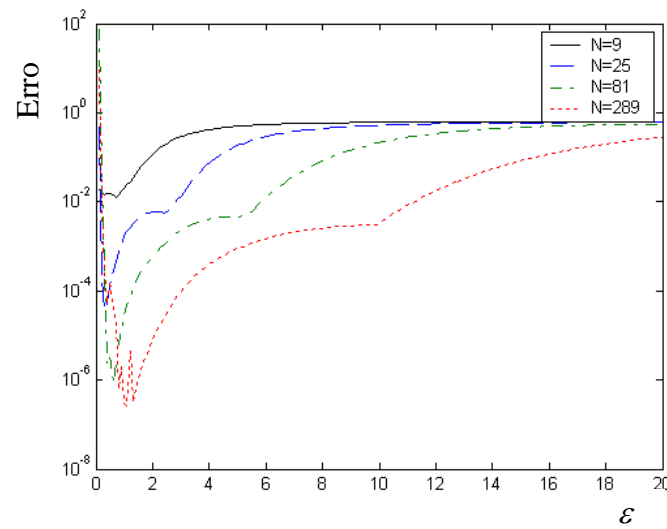
3.2.6 Problema 6: EDP de Poisson, com obtenção de um “bom” parâmetro de forma via tentativa e erro e via validação cruzada para o método assimétrico (Kansa)

Ainda considerando os dados dos problemas anteriores envolvendo a Equação de Poisson (Problema 4 – Condição de Contorno do tipo Dirichlet e Problema 5 – Condição de Contorno do tipo Mista). Os métodos para o cálculo do erro via Tentativa e Erro e via Validação Cruzada, conforme apresentados na seção 2.3, foram implementados utilizando um programa em MATLAB e, somente para o método de colocação Assimétrico, foram utilizadas as RBF dos tipos MQ, MQI e G. Assim, os resultados obtidos são apresentados à seguir.

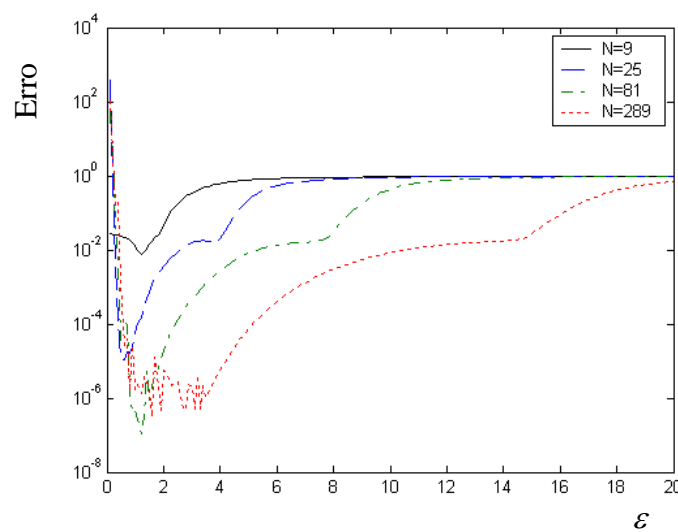
Resultados do Problema 6:



(a)

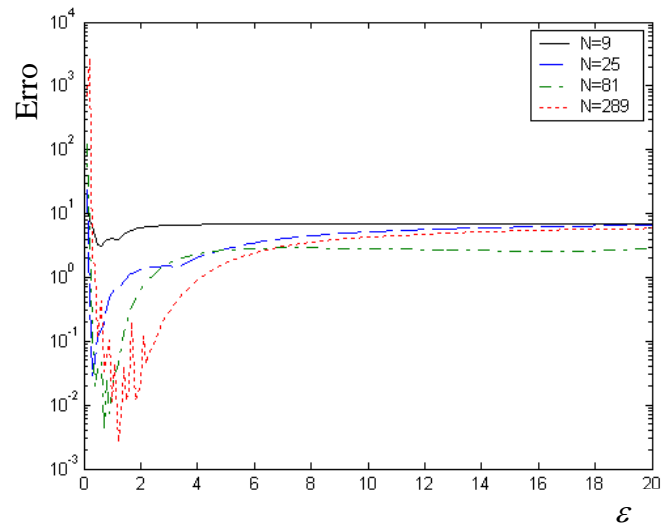


(b)

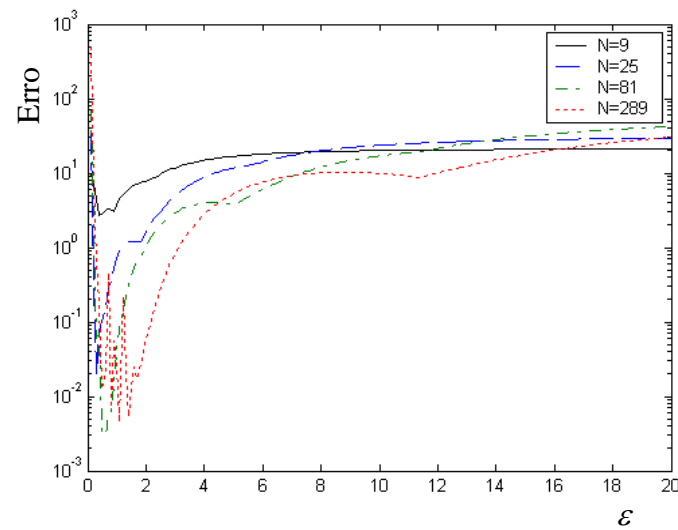


(c)

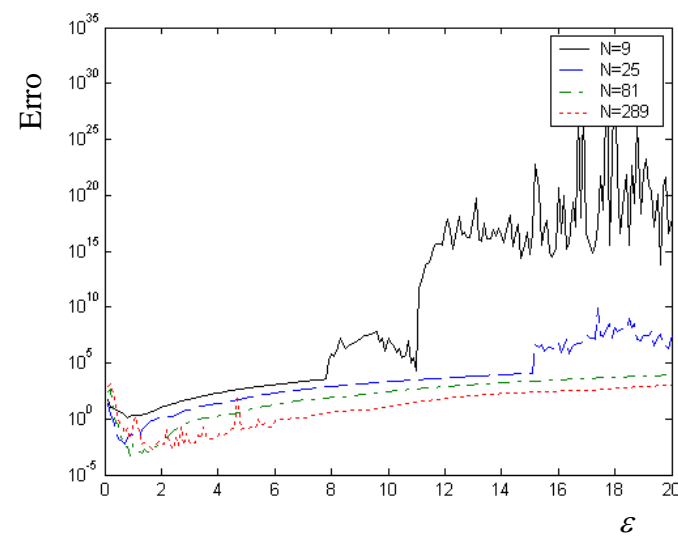
Figura 3.11 Curvas de ε ótimo para o Problema 4, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)

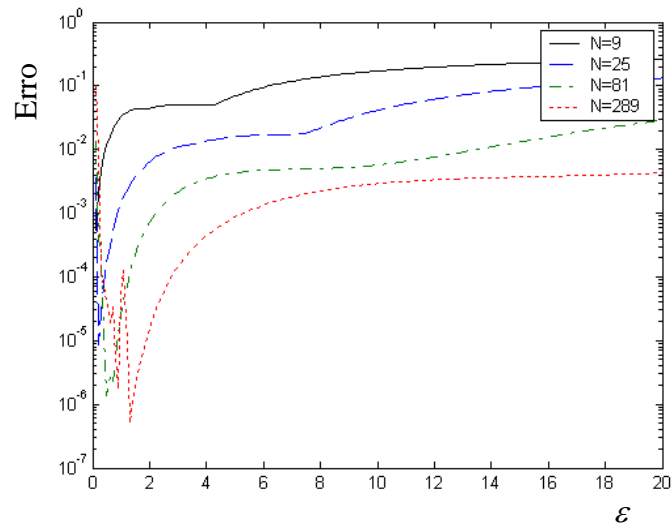


(b)

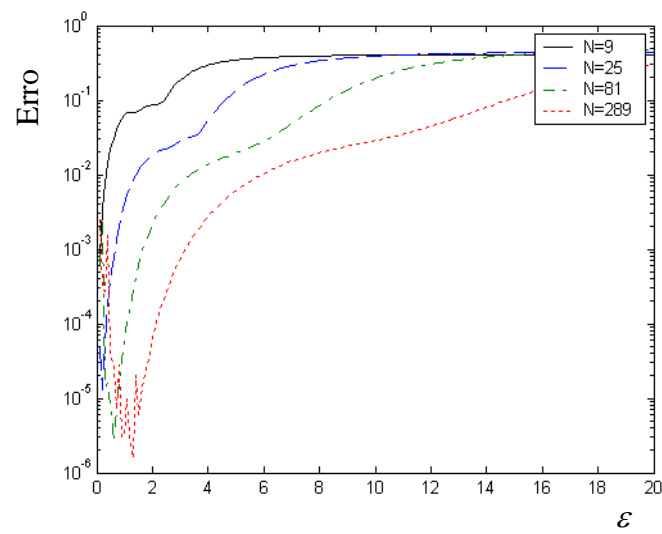


(c)

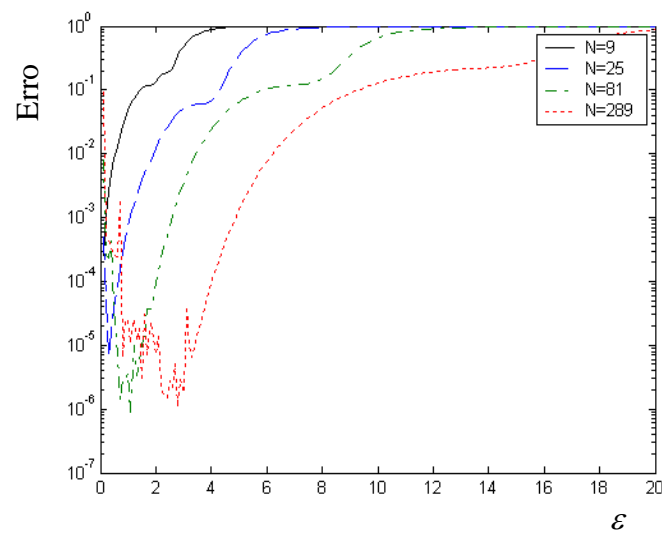
Figura 3.12 Curvas de ε ótimo para o Problema 4, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)

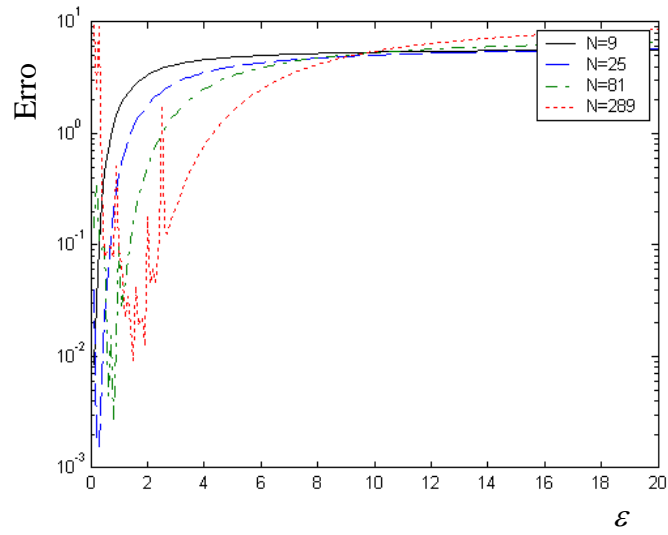


(b)

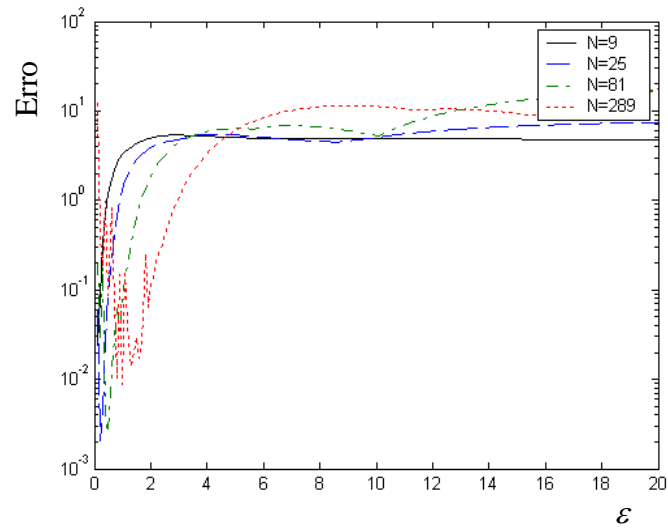


(c)

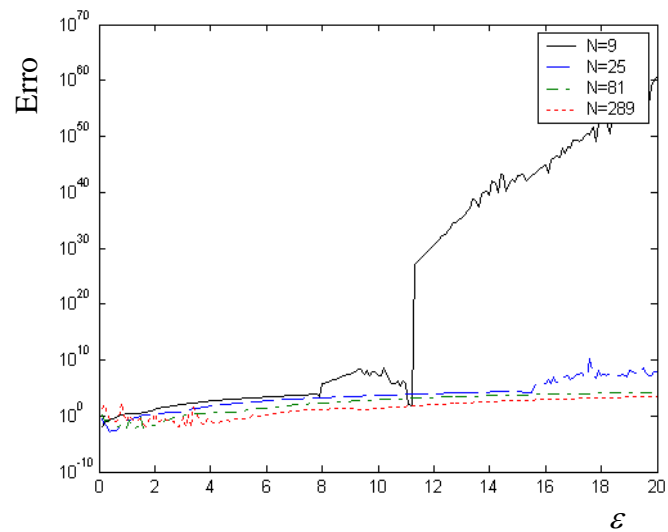
Figura 3.13 Curvas de ε ótimo para o Problema 5, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)



(b)



(c)

Figura 3.14 Curvas de ε ótimo para o Problema 5, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N

Tabela 3.10 Valores ótimos de ε para o Problema 4, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
9	1,290737e-002	0,38	1,220703e-002	0,72	7,232170e-003	1,18
25	3,064789e-005	0,26	2,771469e-005	0,24	6,690389e-006	0,56
81	6,377954e-007	0,64	6,380711e-007	0,58	1,068402e-007	1,14
289	1,423473e-007	1,28	1,472619e-007	1,12	2,506276e-007	2,94

Tabela 3.11 Valores ótimos de ε para o Problema 4, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
9	2,689834e+000	0,56	2,181321e+000	0,44	1,121154e+000	0,82
25	2,093468e-002	0,32	1,963752e-002	0,30	1,488592e-003	0,66
81	3,218289e-003	0,58	1,853307e-003	0,56	5,385951e-004	0,90
289	2,252548e-003	1,26	1,629515e-003	1,08	1,466798e-003	1,94

Tabela 3.12 Valores ótimos de ε para o Problema 5, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
9	1,504276e-004	0,04	1,544807e-004	0,04	1,251803e-004	0,06
25	6,383657e-006	0,18	9,038858e-006	0,18	4,456992e-006	0,24
81	1,108432e-006	0,62	1,523523e-006	0,46	9,023668e-007	1,10
289	4,534774e-007	1,26	6,672159e-007	1,14	1,038442e-006	2,96

Tabela 3.13 Valores ótimos de ε para o Problema 5, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
9	5,588826e-003	0,08	9,089639e-003	0,06	1,165863e-002	0,10
25	5,760627e-004	0,26	8,381942e-004	0,22	1,175038e-003	0,38
81	1,276496e-003	0,56	1,855722e-003	0,46	2,645923e-003	1,02
289	4,893786e-003	1,24	8,180268e-003	1,06	9,546920e-003	2,86

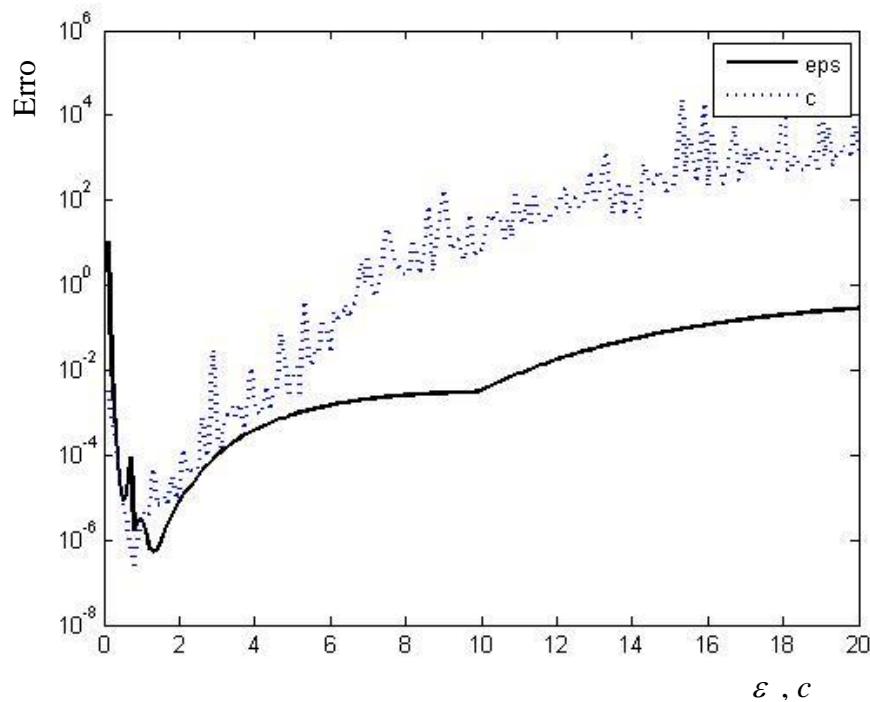


Figura 3.15 Curvas de ε, c ótimo para o Problema 4, via validação cruzada, utilizando funções multiquádrica inversa e $N = 289$ pontos no interior

3.2.7 Problema 7: EDP de Poisson em um domínio não retangular

Os problemas apresentados anteriormente foram todos estudados utilizando espaços físicos retangulares. Quando os espaços físicos do problema não são retangulares aparecem, naturalmente, algumas dificuldades extras na implementação dos diversos métodos numéricos. A utilização das RBF ameniza tais problemas, tendo em vista a natureza (sem malha) do método. Para tal, um dos problemas que pode ser estudado, por exemplo, é o do condutor elétrico com uma fronteira não retangular. Neste problema em particular, foi considerado um condutor elétrico circular com geração de energia interna devido a passagem de corrente elétrica.

Para um condutor circular, a Equação (3.5), expressa em coordenadas cilíndricas, é dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_r) + \frac{\dot{Q}}{k} = 0, \quad (3.16)$$

Assumindo que a geração interna de energia é especificada pela relação

$$\dot{Q} = S \left(1 - 0,9 \frac{r}{R} \right), \quad (3.17)$$

onde, para este caso em particular, $S = 400 \text{ J / cm}^3 \text{ s}$, o raio do condutor é $R = 1,0 \text{ cm}$ e a condutividade térmica é $k = 0,4 \text{ J / cm s } ^\circ\text{C}$. Assim, para estes valores especificados, a solução exata da Equação (3.16) é dada por

$$T(r) = 250(1 - r^2) - 100(1 - r^3). \quad (3.18)$$

Considere o problema do condutor elétrico de calor circular, descrito anteriormente e as Equações (3.16), (3.17) e (3.18). Os 100 pontos de colocação foram distribuídos conforme apresentado na Figura 3.16, juntamente com o resultado obtido. Como anteriormente, devido a simetria do problema, foram omitidos alguns resultados obtidos na resolução do problema, que pode ser visto na Tabela 3.14.

Para resolução numérica dos exemplos propostos, o método assimétrico (Kansa) com RBF do tipo multiquádrica inversa, foi implementado utilizando um programa em MATLAB Assim, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica e outra solução numérica (MDF) apresentada em Hoffman (2001). Esses resultados são apresentados a seguir.

Dados do Problema 7:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT(r, \theta)) = -\frac{S}{k} \left(1 - 0,9 \frac{r}{R} \right), \quad (r, \theta) \in \Omega,$$

$$T(r, \theta) = 0, \quad (r, \theta) \in \Gamma.$$

onde

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$\Gamma = \{(r, \theta) : r = R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$R = 1,0 \text{ cm},$$

$$S = 400 \text{ J / cm}^3 \text{ s},$$

$$k = 0,4 \text{ J / cm s } ^\circ\text{C}.$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$T(r) = 250(1 - r^2) - 100(1 - r^3).$$

Resultados do Problema 7:

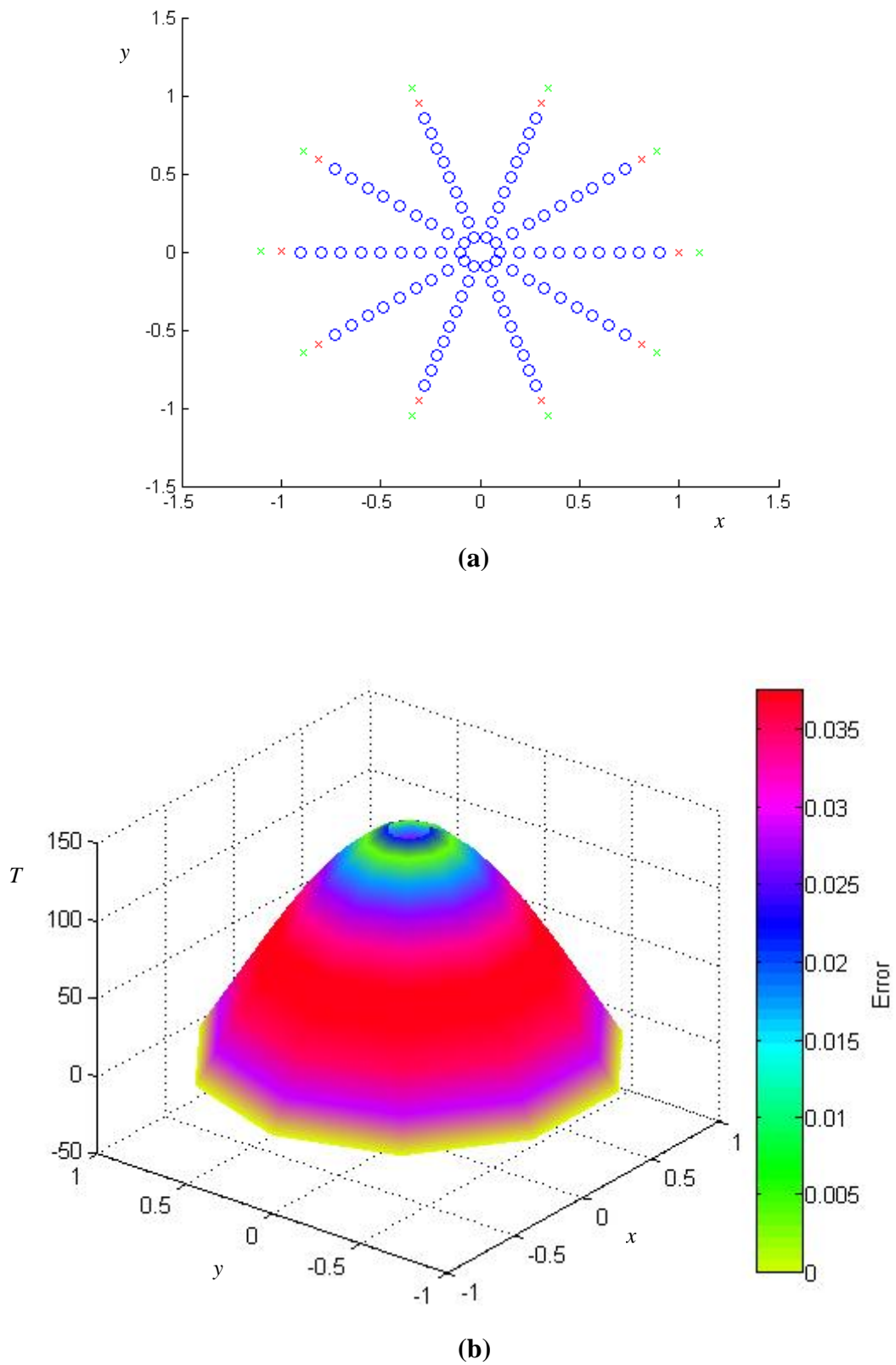


Figura 3.16 (a) Distribuição dos pontos de colocação (interno: azul, contorno: vermelho) e os centros (interno: azul, contorno: verde) e (b) solução numérica utilizando RBF (baixo) para o Problema 7 utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 100$ (10×10) pontos no interior

Tabela 3.14 Solução numérica do Problema 7 de difusão de calor para um domínio não retangular utilizando MQI com $\varepsilon = 1$ e $N = 100$ (10×10) pontos no interior

T (x, y), °C								
Erro (x, y) = Tnumérica(x, y) – Texata(x, y) , °C								
y, cm	x = 0,0 cm		x = 0,25 cm		x = 0,50 cm		x = 0,75 cm	
	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF	RBF	MDF
0,75	51,6038 0,0413	52,3761 0,8136	43,1960 0,0353	43,6732 0,5126	20,1537 0,0409	20,0274 0,0854		
0,50	100,0343 0,0343	101,8453 1,8453	89,3809 0,0366	90,8093 1,4650	60,3942 0,0389	61,0997 0,7444	20,1415 0,0287	20,0274 0,0854
0,25	135,9481 0,0106	139,0117 3,0742	123,1923 0,0229	125,5637 2,3943	89,3810 0,0367	90,8093 1,4650	43,2027 0,0421	43,6732 0,5126
0,0	149,9344 0,0656	154,6367 4,6367	135,9481 0,0106	139,0117 3,0742	100,0332 0,0333	101,8453 1,8453	51,5994 0,0369	52,3761 0,8136

O domínio deste problema, um disco unitário, pode ser utilizado ainda para comparação dos resultados obtidos através das RBF com outro método numérico.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), atualmente, é de fato o método mais utilizado entre os métodos numéricos, inclusive muitos *softwares* comerciais são baseados neste método. Um destes é o *software* Matlab (que aqui é utilizado para implementação dos programas com RBF). Ele possui uma vasta biblioteca de comandos e funções, inclusive partes gráficas de entrada e saída de dados, referentes ao MEF, que é utilizada no estudo de problemas envolvendo EDP. Um problema que é bastante estudado, podendo inclusive ser visto dentro da ajuda do Matlab, é apresentado a seguir e comparado com os resultados obtidos utilizando RBF.

Considere um problema envolvendo uma EDP Elíptica do tipo Poisson, em um domínio Ω igual a um disco unitário, que é governado a seguinte equação

$$-\nabla^2 u(x, y) = 1, \quad (3.19)$$

e a respectiva condição de contorno válida para o contorno do domínio $\partial\Omega$

$$u(x, y) = 0 \quad (3.20)$$

Este problema apresenta solução exata dada pela equação

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}, \quad (3.21)$$

de forma que o erro da solução numérica pode ser calculado para diferentes malhas do MEF e diferentes distribuições de centros para as RBF.

Os dados utilizados para as simulações, bem como os resultados obtidos são apresentados a seguir.

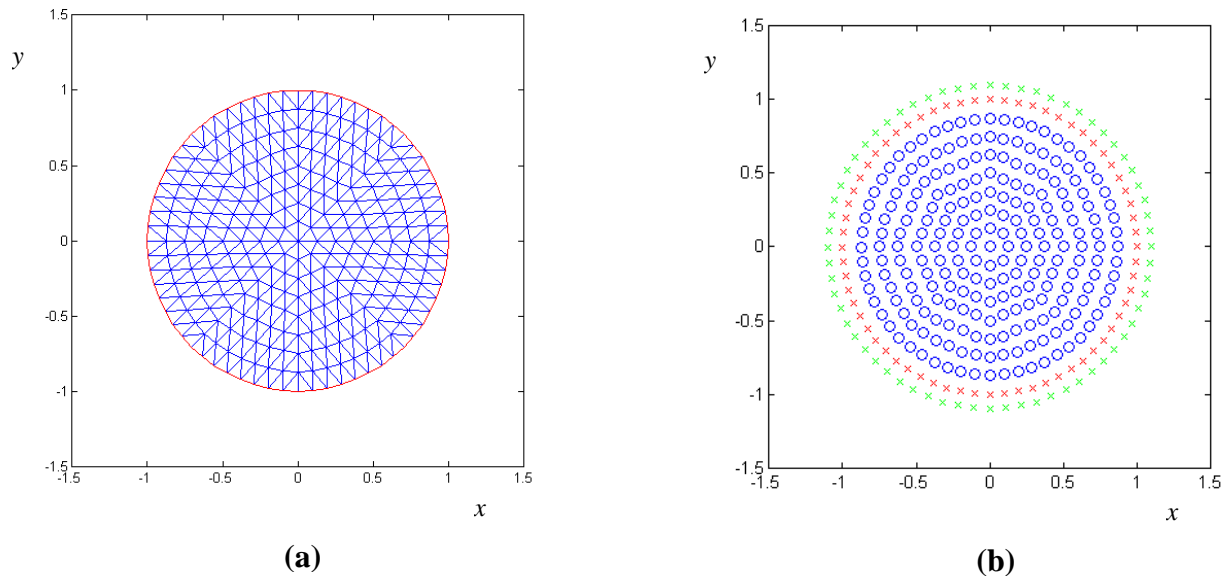


Figura 3.17 Esquema de distribuição de pontos para $N = 289$ no Problema 7. **(a)** Pontos nodais na malha do MEF e **(b)** centros e pontos de colocação das RBF

Tabela 3.15 Solução numérica do Problema 7, via MEF, RBF MQ e RBF MQI, para várias distribuições de pontos nodais / centros N

N	Método Elementos Finitos (MEF)	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)	
	Erro MAX	Erro MAX	ϵ	Erro MAX	ϵ
25	1,292265e-002	9,536743e-006	0,05	1,335144e-005	0,05
81	4,079923e-003	4,415403e-007	0,30	9,126961e-007	0,25
289	1,221020e-003	3,651719e-007	0,65	5,015873e-007	0,55

3.2.8 Problema 8: EDP para Escoamento Potencial ao Redor de um Cilindro Circular

Um escoamento uniforme potencial bidimensional em torno de um corpo pode ser descrito pela equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \quad (3.22)$$

onde $\phi = \phi(x, y)$ é o potencial de velocidade, resultando em um campo de velocidade dado por

$$v = \nabla \phi(x, y). \quad (3.23)$$

As condições de contorno para este problema são dadas por

$$\nabla\phi(x, y) \cdot \hat{n} = 0, \text{ na superfície do corpo.} \quad (3.24)$$

$$\nabla\phi(x, y) = W_\infty, \text{ no infinito (longe do corpo).} \quad (3.25)$$

onde n e $W_\infty = U_\infty i + V_\infty j$ representam o vetor normal a superfície do corpo e a velocidade uniforme longe do corpo, respectivamente. Para o escoamento incidente, o ângulo de ataque β_∞ é definido por

$$\beta_\infty = \tan^{-1}(V_\infty / U_\infty). \quad (3.26)$$

O problema ainda não está bem formulado matematicamente e necessita de mais algum tipo de restrição (condição). Esta é a condição de Kutta.

Para utilização do método de colocação em problemas de escoamento em corpos em sustentação, surgem algumas dificuldades para implementação numérica do método. A primeira surge devido a física do escoamento. Na formulação do problema, a condição de contorno no infinito, Equação (3.25), é uma equação vetorial. Diretamente aplicada na Equação (3.25) para aproximação do potencial de velocidades, em qualquer ponto do contorno no infinito, resultará em duas equações algébricas que, geralmente, resulta em um sistema de equações na qual o número de equações é maior do que o número de incógnitas. Para contornar esse problema, utiliza-se o fato da equação de Laplace ser linear, permitindo assim utilizar a composição de soluções fundamentais. O segundo problema surge da necessidade da imposição da condição de Kutta. Existem diversas maneiras de, na prática, aplicar essa condição. A maneira aqui escolhida é a de que as velocidades do escoamento na superfície da parte superior e da parte inferior do corpo são iguais a distâncias iguais do bordo de fuga, portanto, existe um ponto no qual a velocidade é numericamente igual a zero. A condição de Kutta é aplicada de forma que o escoamento se apresenta simétrico ao redor do corpo.

Assim, um programa em linguagem Fortran, utilizando RBF, foi implementado para resolução numérica do problema. A distribuição dos pontos de colocação é apresentada na Figura 3.16. Foram utilizados 36 pontos no contorno do corpo, 36 pontos no contorno do infinito e 324 pontos distribuídos no domínio. Nos cálculos, o domínio computacional foi truncado em um raio de $10R$, onde R representa o raio do cilindro.

Resolvendo o sistema de equações algébricas, obtém-se a expressão aproximada para o potencial de velocidades. Desta forma, pode-se calcular o coeficiente de pressão, definido por

$$Cp = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2} , \quad (3.27)$$

onde p_∞ e ρ representam a pressão distante do corpo e ρ a massa específica do fluido, respectivamente.

Por fim, é apresentado a solução numérica do presente método comparada com a solução analítica na Figura 3.19.

Dados do Problema 8:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y) &= 0 , & (x, y) &\in \Omega , \\ \nabla \phi(x, y) \cdot \hat{n} &= 0 , & (x, y) &\in \Gamma_B , \\ \nabla \phi(x, y) &= W_\infty , & (x, y) &\in \Gamma_\infty , \end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 10R , 0 \leq \theta \leq 2\pi\} ,$$

$$\Gamma_B = \{(r, \theta) : r = R , 0 \leq \theta \leq 2\pi\} ,$$

$$\Gamma_\infty = \{(r, \theta) : r = 10R , 0 \leq \theta \leq 2\pi\} ,$$

$$R = 1,0 .$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$Cp = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2} .$$

Resultados do Problema 8:

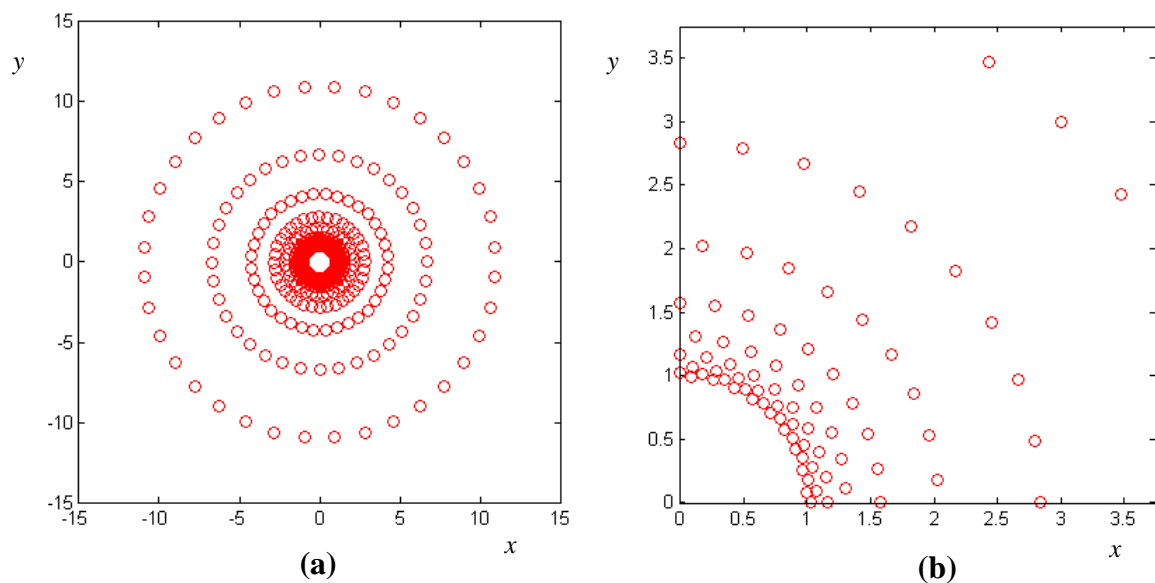


Figura 3.18 (a) Esquema de distribuição dos $N = 360$ pontos de colocação do Problema 8 com (b) ampliação nas proximidades do corpo

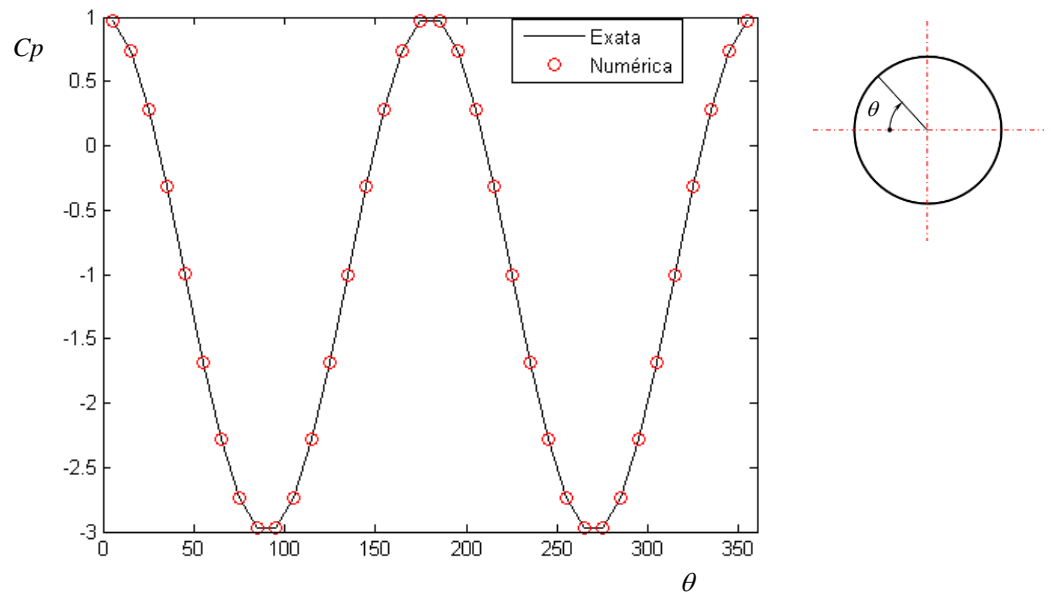


Figura 3.19 Coeficiente de pressão em função do ângulo azimutal no cilindro do Problema 8

Agora, pode-se fazer mão da condição de Kutta para estudo do escoamento ao redor do cilindro circular com sustentação. Para tal, a condição de Kutta é imposta em um ponto $(x,y) = (\sqrt{3}/2, -0,5)$. Esta não é uma especificação natural, entretanto, é um excelente caso para estudo, visto que possui solução analítica para o escoamento. Teoricamente, essa imposição da condição de Kutta introduz ao escoamento uma circulação de intensidade $\Gamma = 2 \pi W_\infty$.

A disposição dos pontos de colocação empregada é exatamente igual aquela apresentada para a simulação anterior, Figura 3.18. O mesmo procedimento descrito anteriormente para o cálculo do coeficiente de pressão é utilizado e apresentado na Figura 3.20.

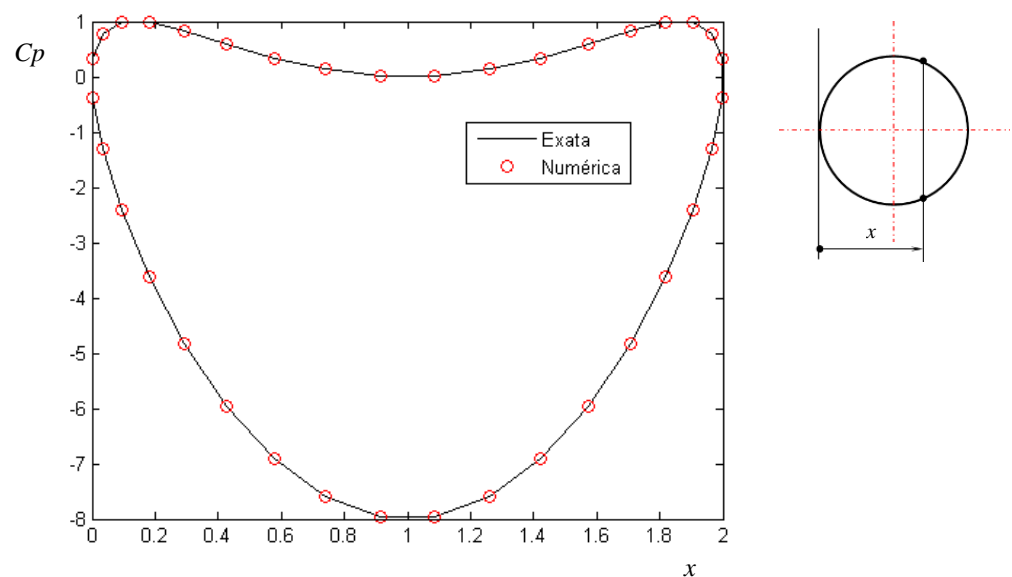


Figura 3.20 Coeficiente de pressão em função da coordenada horizontal no cilindro

3.2.9 Comentários sobre os problemas estudados envolvendo EDP

Apesar de relativamente simples, os problemas estudados mostram o potencial das RBF na resolução numérica de equações diferenciais parciais elípticas pelo método de colocação, tanto o assimétrico (Kansa) quanto o simétrico (Hermite), como mostram, de maneira geral, as tabelas e as figuras, que agrupam os resultados, para cada problema em particular.

Os resultados obtidos através das RBF, em todos os exemplos, são de fato uma boa aproximação da solução exata esperada. Entretanto, em alguns casos, apesar de não serem enormes, os erros obtidos são relativamente grandes. Melhores resultados podem ser obtidos com a utilização, até certo valor limite, de maior número de pontos de colocação. Observando os resultados apresentados (exceto para o Problema (2) em que não foi variado o número de pontos de colocação), fica fácil perceber que, de fato, os menores erros ocorreram sempre quando se utilizou maior número de pontos de colocação. Entretanto, os parâmetros de colocação (quantidade e disposição dos pontos) para os Problemas (1), (2), (3) e (7), foram escolhidos para que se conseguisse um efeito comparativo com os resultados obtidos pelo presente método com aqueles obtidos pelo Método de Diferenças Finitas, obtidos por Hoffman (2001). Desta forma, em todos os casos, tentou-se utilizar parâmetros equivalentes aos utilizados com o MDF, podendo-se observar nos resultados obtidos (Tabelas 3.1, 3.4, 3.5 e 3.14) que sempre se obteve melhores resultados com o emprego das RBF e de forma significativa.

Os dois métodos de colocação, assimétrico (Kansa) e simétrico (Hermite), foram apresentados para a solução de equações diferenciais parciais elípticas nos Problemas (4) e (5), referentes a equações diferenciais parciais do tipo Poisson, com condições de contorno de Dirichlet e mistas, respectivamente. Nestes problemas foram utilizadas as RBF multiquádrica inversa e a gaussiana. Diversos pontos de colocação foram adotados e, para todos os casos, um único valor do parâmetro de forma foi utilizado. Nestes dois problemas, o método assimétrico (Kansa) apresentou resultados um pouco melhores do que o método simétrico (Hermite). Uma vantagem da abordagem de Hermite sobre a de Kansa, é que as matrizes de colocação resultantes da aplicação do método são simétricas, se todos os centros coincidirem com os pontos de colocação. Por esse motivo, a quantidade de cálculos pode ser consideravelmente reduzida utilizando um *solver* para sistemas simétricos. Em contrapartida, o método de Kansa requer menos derivadas da função básica, sendo assim, de implementação mais simples.

Não foi objetivo dos problemas anteriores analisar o efeito da variação do parâmetro de forma, ε , o qual, para um determinado problema, depende da RBF utilizada, do número total de pontos, N , e também da distribuição desses pontos no contorno e no domínio. De fato, a proposta principal destes problemas é comparar os resultados obtidos através do emprego das RBF, em problemas envolvendo Equações de Laplace e Poisson, com as respectivas soluções exatas analíticas e outra solução por outro método numérico, neste caso em particular o método de diferenças finitas.

Entretanto, atenção especial deve ser dada ao Problema (6) que utiliza as técnicas apresentadas no item (2.3) para obtenção de um valor “bom” para o parâmetro de forma, ε . Os gráficos e as tabelas obtidas neste problema devem ser comparados dois a dois, para cada um dos problemas estudados. Observando assim, Figura 3.11 e Tabela 3.10 com Figura 3.12 e Tabela 3.11 para Equação de Poisson com condição de contorno de Dirichlet e Figura 3.13 e Tabela 3.12 com Figura 3.14 e Tabela 3.13 para Equação de Poisson com condição de contorno Mista, pode-se concluir que os valores de ε “ótimos” obtidos pelo método da Tentativa e Erro e pelo método da Validação Cruzada aproximam-se bastante. A semelhança das curvas e dos valores para ε “ótimo” é claramente aparente. Assim, a abordagem utilizando a Validação Cruzada pode ser recomendada como um bom método para seleção de um “bom” parâmetro de forma, haja vista que, não é necessário nenhum conhecimento prévio exato do erro. Ainda, quando não se está interessado nas curvas de ε apresentadas no problema, mas simplesmente num “bom” valor para o parâmetro de forma, tão rápido quanto possível, pode-se utilizar uma função específica para tal.

A importância de se estudar o parâmetro de forma, para um determinado problema em particular, fica bastante evidente com os resultados obtidos no Problema (6). Assim, os resultados obtidos no Problema (4) e (5) para o método de colocação assimétrico (Tabela 3.6 e 3.8, respectivamente) podem, inclusive em termos da precisão numérica, serem comparados aos resultados obtidos no Problema (6) (Tabelas 3.11 e 3.12 e Tabelas 3.13 e 3.14). Nota-se que os resultados obtidos, quando se adota um valor “bom” para o parâmetro de forma são muito melhores do que aqueles quando este é escolhido de maneira aleatória. Assim, é possível se obter resultados com a mesma precisão numérica com um valor muito menor de pontos de colocação quando se adota um “bom” valor para o parâmetro de forma. Além disso, existe o agravante de sempre existirem faixas de valores de ε , em que o erro da solução numérica obtida pode ser maior do que a tolerância requerida ou conduzir a resultados catastróficos. Posto desta forma fica quase sem sentido comparar os resultados obtidos por

diferentes métodos de colocação e de funções, sem que se faça um estudo do parâmetro de forma, visto que este valor é distinto para cada caso particular.

Mesmo não tendo sido abordado de forma mais aprofundada, pode-se ver que o método de colocação com RBF é uma boa aproximação para problemas de escoamento ao redor de corpos, com ou sem sustentação, como pode ser visto no Problema (8).

3.3 Problemas com Equações de Contorno (Equações Integrais - EI)

Quando se quer resolver numericamente um problema de valor de contorno, para a equação de Laplace, duas abordagens são geralmente empregadas. A primeira é a mostrada no item anterior que, utilizando a formulação diferencial e distribuindo pontos de colocação na região de interesse, obtém-se um sistema linear de equações algébricas. A outra abordagem é a de formulações baseadas nas integrais de contorno. Na maioria destas formulações, o problema se reduz em uma equação integral de segunda espécie no contorno do domínio através da teoria potencial clássica.

No Problema 8, foi estudado o escoamento em torno de um cilindro circular através de sua equação diferencial parcial governante. Entretanto, segundo Lewis (1991), utilizando o Método das Singularidades, é possível representar um corpo por meio de uma folha de vórtices de densidade $\gamma = \gamma(s)$ inicialmente de valor desconhecido. Para tanto, considera-se o escoamento potencial, incompressível e bidimensional, em torno de um corpo arbitrário no plano (x, y) , imerso em um escoamento incidente W_∞ inclinado de um ângulo de ataque β_∞ em relação ao eixo x .

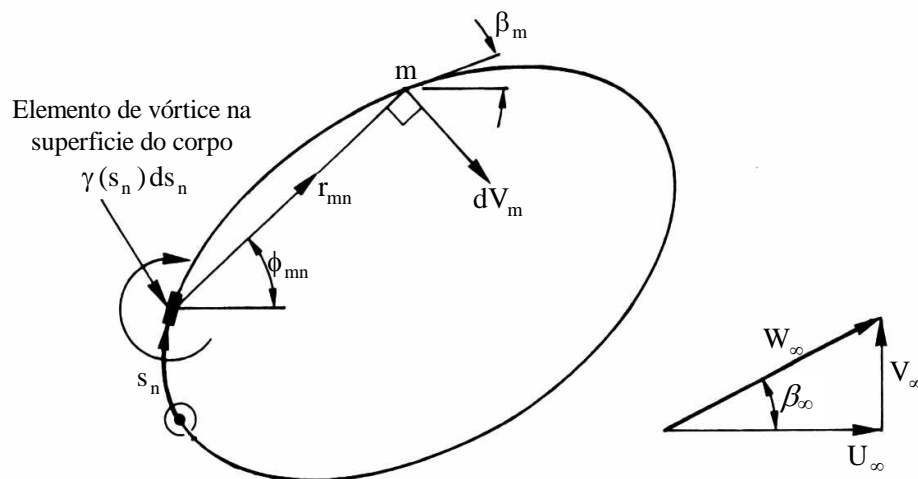


Figura 3.21 Modelo para representação de um corpo arbitrário no plano bidimensional utilizando o Método das Singularidades (Lewis, 1991)

Da figura 3.21, tem-se que a velocidade dV_m induzida em s_m , em conseqüência de um elemento de vórtice de intensidade $\gamma(s_n)ds_n$ localizado em s_n na superfície do corpo, obedece à lei de Biot-Savart. No caso em estudo, a lei de Biot-Savart se reduz à velocidade induzida por um elemento reto de vórtice, como segue:

$$dV_m = \frac{\gamma(s_n)ds_n}{2\pi r_{mn}}. \quad (3.28)$$

Na Equação (3.28), s_n simboliza a distância s medida no sentido horário, de uma referência arbitrária do contorno, em torno do perímetro representativo do contorno do corpo. O referencial é adotado na parte frontal do corpo com relação ao escoamento incidente, enquanto que, para aerofólios, esse referencial é adotado no bordo de ataque. A distância entre os pontos $M(x_m, y_m)$ e $N(x_n, y_n)$, r_{mn} é dada por:

$$r_{mn} = [(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2]^{1/2}. \quad (3.29)$$

Solucionando a Equação (3.28) nas direções x e y e decompondo $\sin\phi_{mn}$ e $\cos\phi_{mn}$ em termos das coordenadas de M e N , tem-se:

$$du_m = \frac{\gamma(s_n)ds_n}{2\pi r_{mn}} \sin\phi_{mn} = \left(\frac{y_m - y_n}{2\pi r_{mn}^2} \right) \gamma(s_n)ds_n, \quad (3.30)$$

$$dv_m = \frac{\gamma(s_n)ds_n}{2\pi r_{mn}} \cos\phi_{mn} = \left(\frac{x_m - x_n}{2\pi r_{mn}^2} \right) \gamma(s_n)ds_n. \quad (3.31)$$

Já a solução de dV_m na direção tangencial à superfície do corpo no ponto M , onde β_m é o ângulo representativo, fica:

$$dv_{sm} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n)\cos\beta_m - (x_m - x_n)\sin\beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right] \gamma(s_n)ds_n. \quad (3.32)$$

Assim, umas das formas de se obter a equação integral no método dos painéis de vórtice é integrar a Equação (3.32) e combinar com o escoamento não-perturbado, W_∞ , decomposto na direção tangencial à superfície do corpo no ponto $M(x_m, y_m)$, resultando na equação de Fredholm de segunda espécie

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_m) + \oint K_v(s_m, s_n)\gamma ds_n + W_\infty(\cos\alpha_\infty \cos\beta_m + \sin\alpha_\infty \sin\beta_m) = 0. \quad (3.33)$$

A função K_v , chamada de função núcleo, no caso em estudo (corpo isolado e vórtice pontual), é representada por

$$K_v(s_m, s_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n) \cos \beta_m - (x_m - x_n) \sin \beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right]. \quad (3.34)$$

Não se pode deixar de ter em mente que, para escoamento tridimensional, o escoamento potencial na superfície é de fato bidimensional e, para o escoamento bidimensional, o escoamento sobre o contorno do corpo é unidimensional.

A idéia central de se eliminar as equações de campo no domínio e reduzir os problemas de valor de contorno às equações equivalentes somente no contorno requer o conhecimento da solução fundamental correspondente. Esta técnica é de longa data, como pode ser vista pelos históricos trabalhos de Green (1828) e Gauss (1839) e (1840). Ainda nos tempos de hoje, as equações integrais de contorno continuam sendo uma das principais ferramentas para análise e construção de soluções para os problemas de valor de contorno.

Assim como nos problemas anteriores envolvendo equações diferenciais parciais, nesta seção também, para impedir muita generalidade num primeiro momento, os problemas estudados foram limitados tão somente aos que utilizam equações integrais de Fredholm de segunda espécie com núcleo (*kernel*) suave num intervalo $[a; b]$ finito especificado, entretanto, sem perda de entendimento na aplicação do método.

3.3.1 Problema 9: EI de Fredholm com núcleo suave

Considere a Equação (2.14), apresentada na seção 2.2.3. Esta é uma Equação Integral de Fredholm de segunda espécie não homogênea. Considerando o que fora descrito anteriormente, esta é reescrita abaixo.

$$\alpha u(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = g(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.35)$$

A resolução desta equação para uma dada equação $g(x)$, onde $K(x, \xi)$ é a função núcleo e α um parâmetro real e $\alpha u(x)$ o termo não homogêneo, não é trivial. A grande maioria dos programas comerciais de cálculos matemáticos não possui rotinas internas nem pacotes para resolução deste tipo de equações. Entretanto, a implementação das RBF permite a resolução de tais tipos de equações.

Como um exemplo específico, considere a equação abaixo

$$\alpha u(x) - \int_0^1 \frac{c}{c^2 + (x - \xi)^2} u(\xi) d\xi = g(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 . \quad (3.36)$$

A função núcleo desta equação apresenta um pico em $x = \xi$ quando a constante positiva c apresenta um valor pequeno.

Esta equação é popularmente conhecida como Equação de Love e utilizada no campo da eletrostática (Love, 1949, Fox e Goodwin, 1953 e Abbott, 2002). Muitas tentativas têm sido realizadas para resolução desta equação.

Uma excelente aproximação para resolução da Equação (3.36) pode ser obtida na forma de uma série de Chebyshev

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_{2i}(x) , \quad (3.37)$$

onde os coeficientes c_i para $i = 0, 1, \dots, n$ são determinados resolvendo numericamente o sistema de equações algébricas que resulta do desenvolvimento da integral da Equação (3.36) nos pontos de Chebyshev $x_j = \cos(j\pi/2n)$ para $j = 0, 1, \dots, 2n$, utilizando séries de Chebyshev (Equação (3.37)).

Para resolução numérica da Equação (3.36), através de RBF, $g(x)$ será definido de tal forma que se tenha $u(x) = 0,006 - 0,8x + x^2$. Os resultados numéricos aqui apresentados, são válidos para $c = 0,1$ e $\alpha = -0,5$.

O método assimétrico foi implementado utilizando um programa em MATLAB e foram utilizadas RBF dos tipos multiquádrica inversa e gaussiana com o mesmo parâmetro de forma ($\varepsilon = 2$). Assim, os resultados obtidos são apresentados abaixo na Tabela 3.16 e Figura 3.22.

Dados do Problema 9:

$$\alpha u(x) - \int_0^1 \frac{c}{c^2 + (x - \xi)^2} u(\xi) d\xi = g(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

$$\alpha = -0,5 \quad ,$$

$$c = 0,1 \quad ,$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$u(x) = 0,006 - 0,8x + x^2 .$$

Resultados do Problema 9:

Tabela 3.16 Solução numérica do Problema 9 pelo método assimétrico utilizando RBF do tipo MQI e G, com $\varepsilon = 2$, para diversas distribuições de pontos de colocação

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
5	4,980658e-003	9,344302e-003	2,869182e-003	5,859919e-003
10	2,239523e-004	5,490009e-004	1,077068e-005	2,193456e-005
20	2,577627e-006	5,395962e-006	5,425146e-005	1,833122e-004
50	1,291137e-006	7,364249e-006	3,739460e-005	1,386820e-004

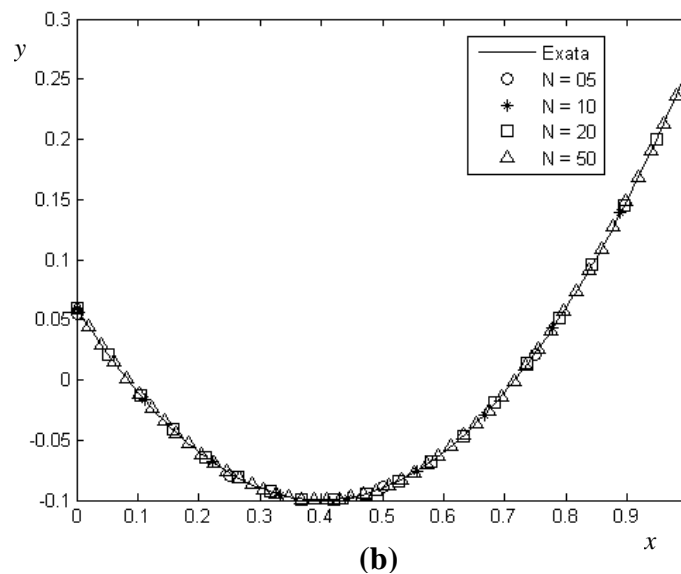
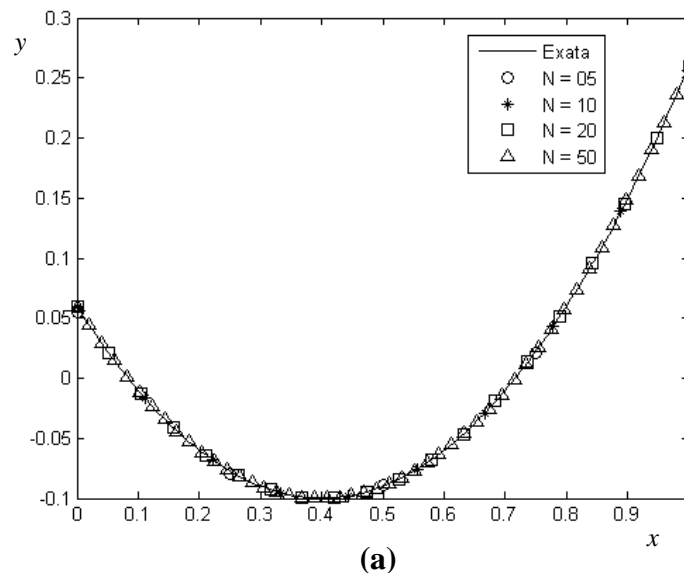


Figura 3.22 Solução numérica do Problema 9 pelo método assimétrico, utilizando RBF do tipo (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 2$

3.3.2 Problema 10: EI de Fredholm para problema de Dirichlet

Considere ainda a Equação (3.35). Como segundo exemplo desta seção, será estudada uma equação integral de contorno para um problema de Dirichlet plano no interior para uma elipse. Assim, para este problema em particular, a Equação (3.20) pode ser reescrita como

$$u(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{0,3}{1 - 0,64 \cos^2\left(\frac{1}{2}(x + \xi)\right)} u(\xi) d\xi = g(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (3.38)$$

Problema este que pode ser visto em Mikhlin e Smolitskiy (1967).

Para resolução numérica da Equação (3.38), através de RBF, para uma função $g(x)$ definida como $g(x) = 25 - 16\sin^2(x)$, segue que a solução exata é dada por $u(x) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17}\cos(2x)$.

Dados do Problema 10:

$$u(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{0,3}{1 - 0,64 \cos^2\left(\frac{1}{2}(x + \xi)\right)} u(\xi) d\xi = g(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

$$g(x) = 25 - 16\sin^2(x).$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$u(x) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17}\cos(2x).$$

Resultados do Problema 10:

Tabela 3.17 Solução numérica do Problema 10 pelo método assimétrico utilizando RBF do tipo MQI e G, com $\varepsilon = 2$, para diversas distribuições de pontos de colocação

N	Multiquádrica inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro RMS	Erro MAX	Erro RMS	Erro MAX
5	3,327215e-001	3,675249e-001	2,368734e+000	2,411214e+000
10	2,111588e-002	3,197308e-002	2,844781e-002	5,907278e-002
20	4,308492e-003	7,431760e-003	1,172810e-002	2,031712e-002
50	9,549543e-005	1,691584e-004	9,472771e-004	3,408037e-003

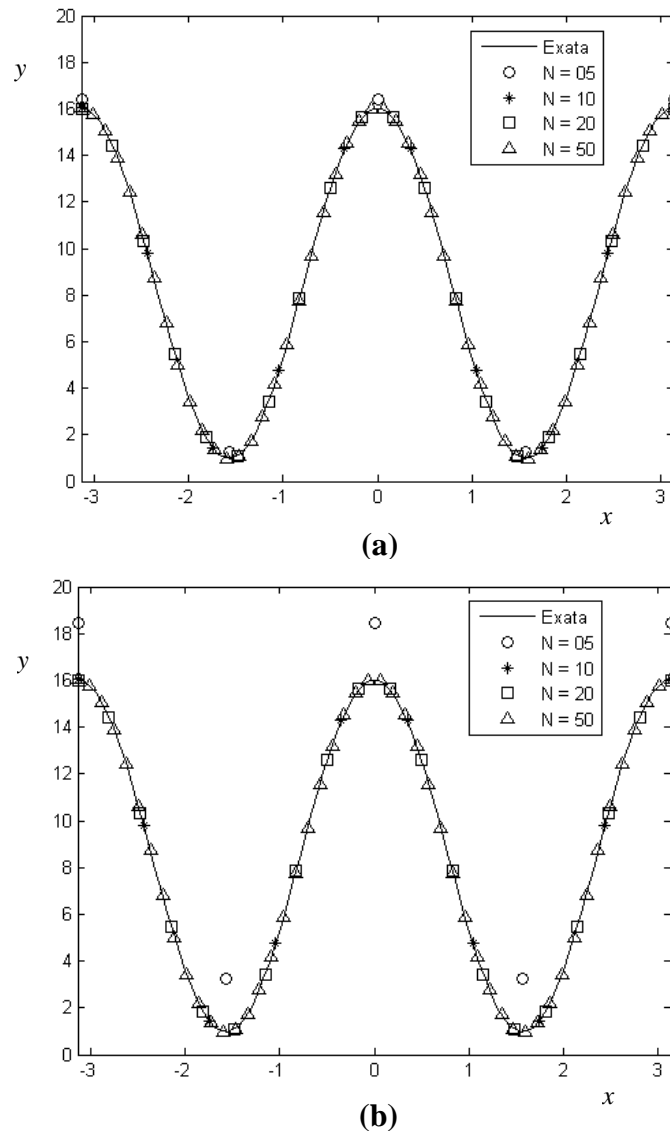
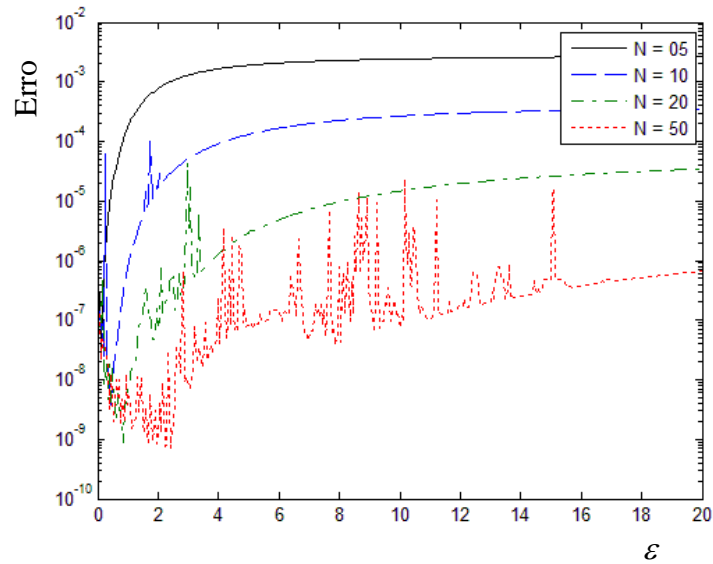


Figura 3.23 Solução numérica do Problema 10 pelo método assimétrico, utilizando RBF do tipo (a) multiquádrica inversa e (b) gaussiana, com $\varepsilon = 2$

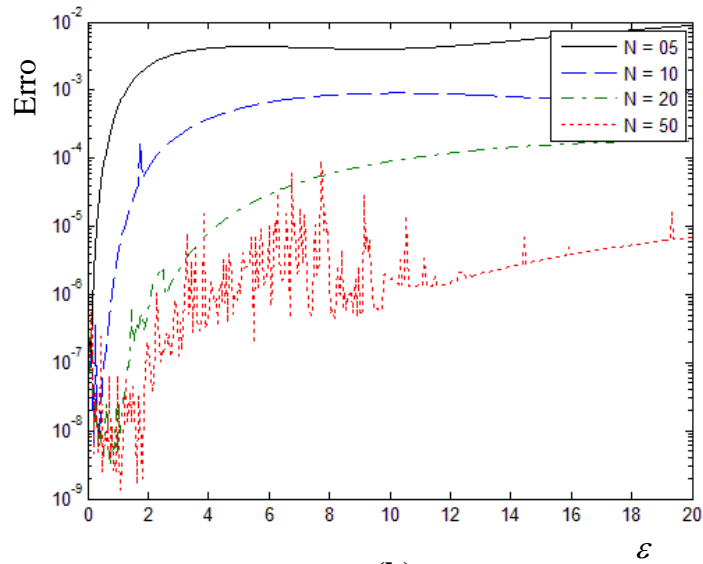
3.3.3 Problema 11: EI de Fredholm, com obtenção de um “bom” parâmetro de forma via tentativa e erro e via validação cruzada para o método assimétrico (Kansa)

De maneira análoga aos problemas envolvendo EDP, mas agora com EI, considerando os dados dos problemas anteriores envolvendo a Equação Integral de Fredholm (Problema 9 – Equação de Love e Problema 10 – Condição de Dirichlet). Os métodos para o cálculo do erro via Tentativa e Erro e via Validação Cruzada, conforme apresentados na seção 2.3, foram implementados utilizando um programa em MATLAB e, somente para o método de colocação Assimétrico, foram utilizadas as RBF apresentadas anteriormente. Assim, os resultados obtidos são apresentados à seguir.

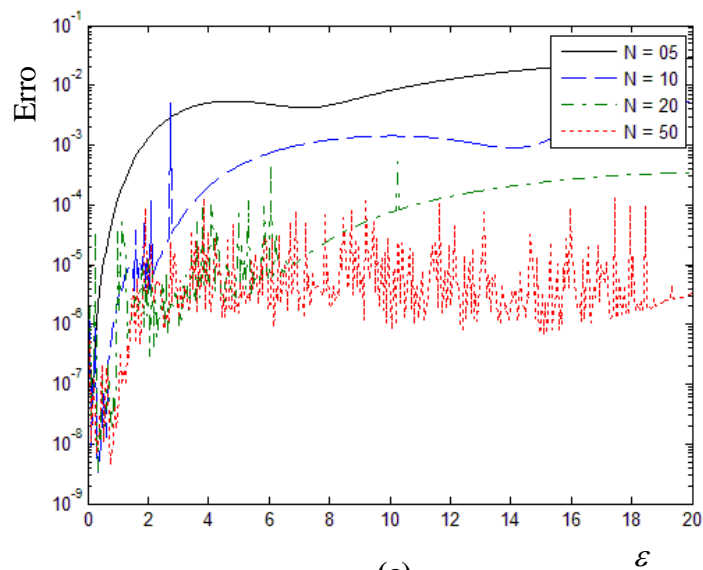
Resultados do Problema 11:



(a)

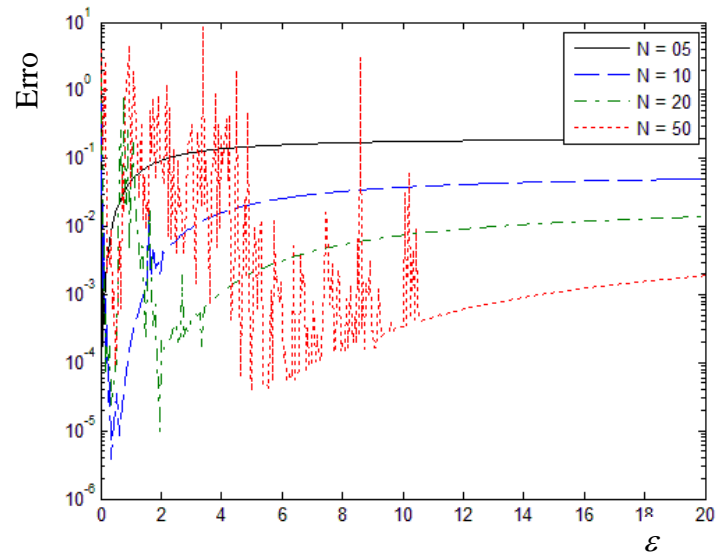


(b)

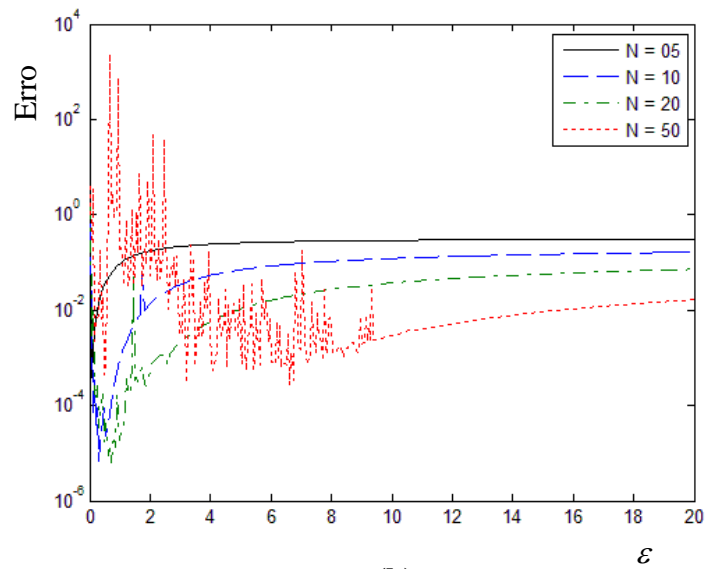


(c)

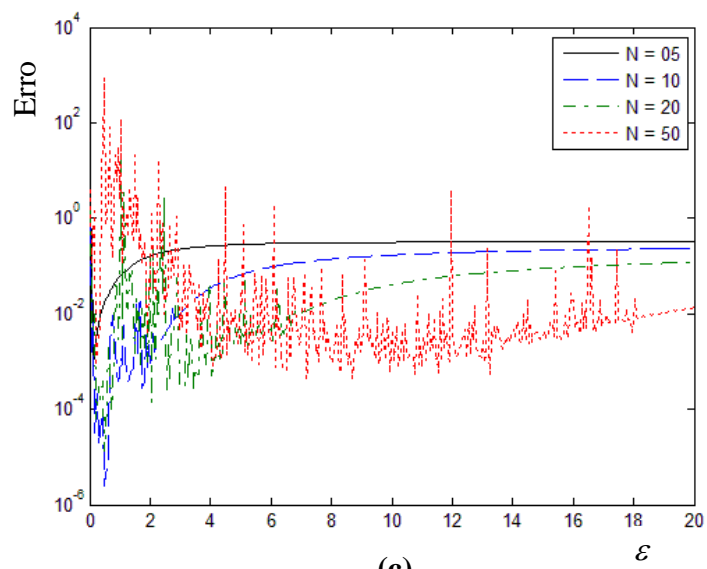
Figura 3.24 Curvas de ε ótimo para o Problema 9, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)

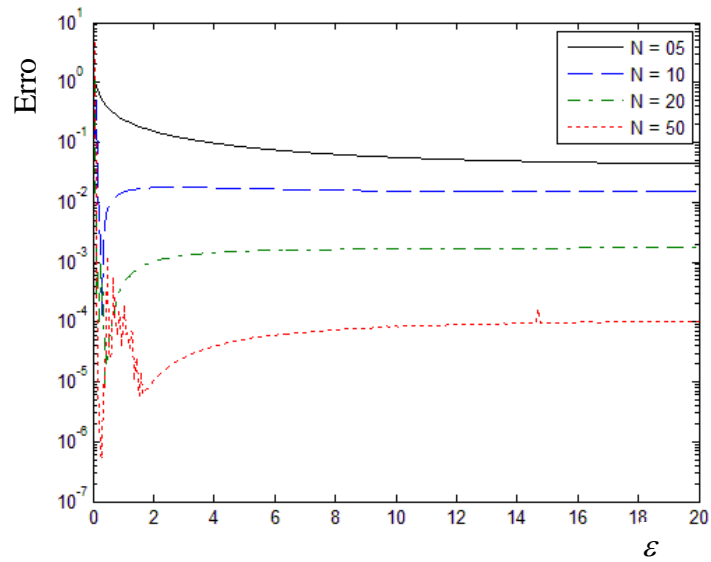


(b)

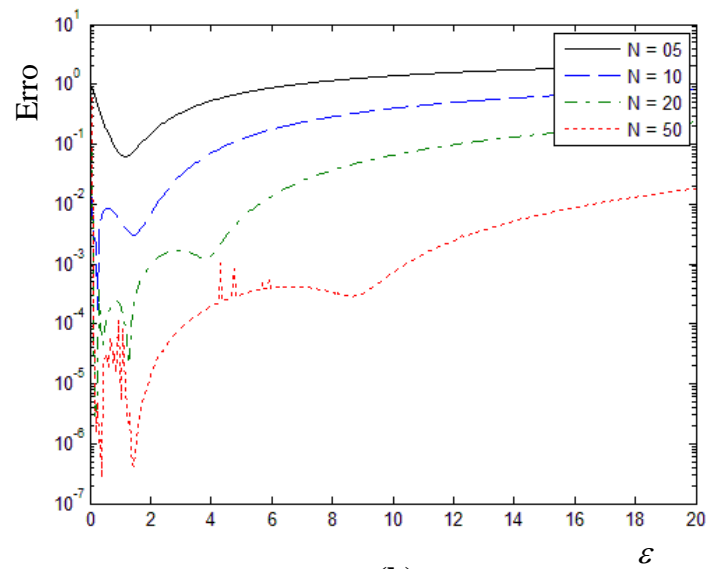


(c)

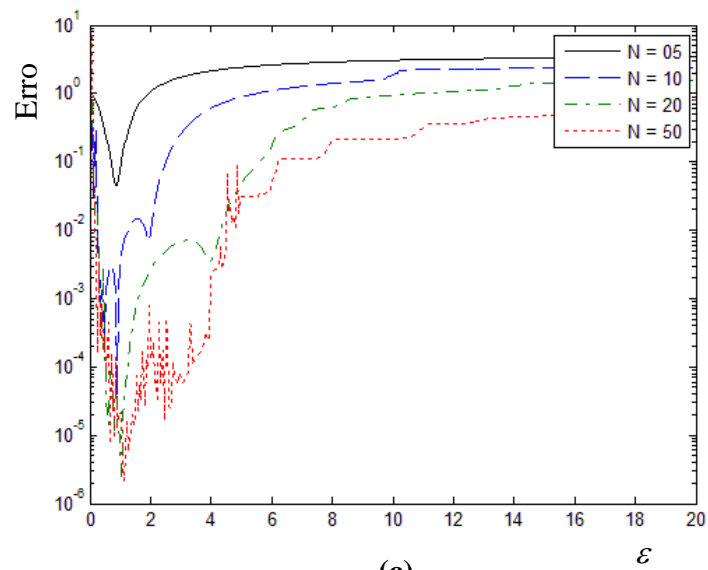
Figura 3.25 Curvas de ε ótimo para o Problema 9, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)

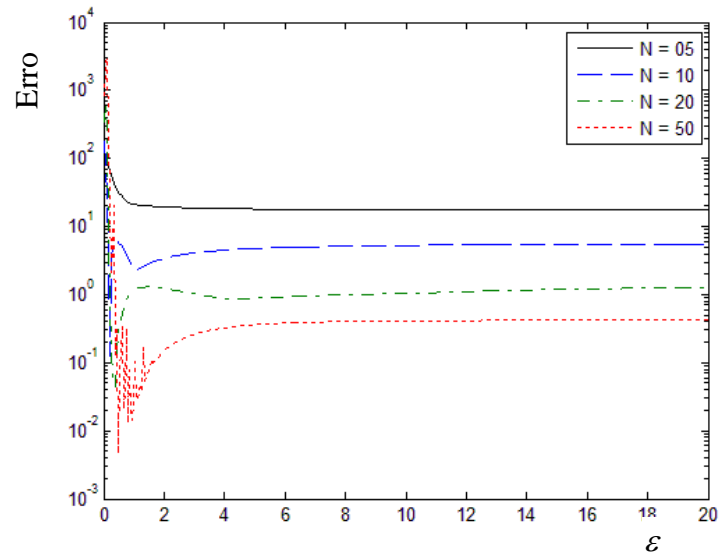


(b)

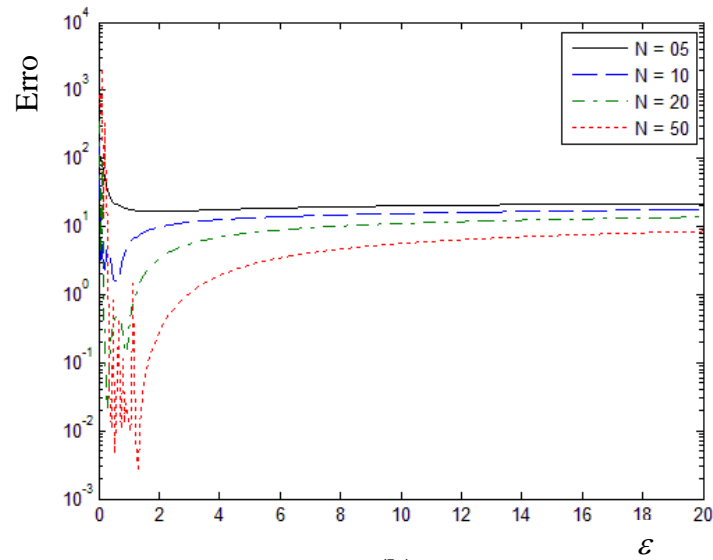


(c)

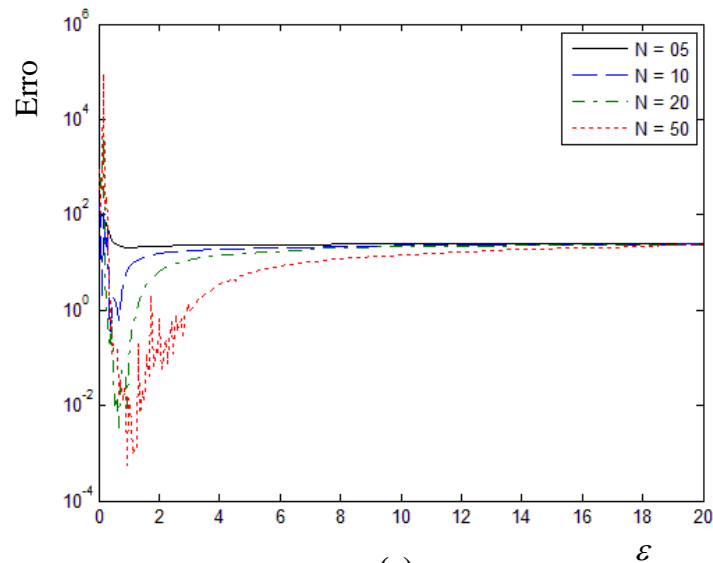
Figura 3.26 Curvas de ε ótimo para o Problema 10, via tentativa e erro, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N



(a)



(b)



(c)

Figura 3.27 Curvas de ε ótimo para o Problema 10, via validação cruzada, utilizando funções (a) multiquádrica, (b) multiquádrica inversa e (c) gaussiana para vários valores de pontos no interior N

Tabela 3.18 Valores ótimos de ε para o Problema 9, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
05	1,361966e-007	0,10	5,450472e-007	0,10	1,119822e-007	0,10
10	2,827961e-008	0,45	3,933907e-008	0,20	1,644003e-008	0,35
20	9,239920e-009	0,85	2,457102e-008	0,75	3,220899e-008	0,35
50	2,124347e-008	1,15	2,835134e-008	1,10	1,175702e-007	0,30

Tabela 3.19 Valores ótimos de ε para o Problema 9, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
05	1,770679e-004	0,05	3,982524e-004	0,05	7,081293e-004	0,10
10	3,823885e-006	0,35	6,843531e-006	0,30	2,557724e-006	0,50
20	9,795541e-006	1,95	6,514971e-006	0,70	1,353989e-005	0,50
50	3,943946e-005	5,00	2,841664e-004	6,60	4,320346e-004	7,15

Tabela 3.20 Valores ótimos de ε para o Problema 10, via tentativa e erro, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
05	1,390647e-001	20,00	1,809581e-001	1,20	4,443630e-002	0,85
10	5,833839e-004	0,30	9,249930e-004	0,25	3,729970e-005	0,90
20	6,641035e-005	0,40	3,125095e-005	0,15	2,507810e-006	1,05
50	9,374391e-006	0,25	4,025245e-006	0,40	2,862245e-005	1,15

Tabela 3.21 Valores ótimos de ε para o Problema 10, via validação cruzada, para várias funções de interpolação e várias distribuições de pontos internos N

N	Multiquádrica (MQ)		Multiquádrica Inversa (MQI)		Gaussiana (G)	
	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε	Erro MAX	ε
05	1,733674e+001	20,00	1,659697e+001	1,90	2,053983e+001	0,95
10	1,281622e-001	0,20	1,501204e+000	0,60	3,494223e-001	0,40
20	4,494276e-002	0,40	2,233051e-002	0,25	2,927243e-003	0,65
50	4,724813e-003	0,50	2,503902e-003	1,30	5,747076e-004	0,95

3.3.4 Problema 12: El para o escoamento potencial ao redor de um cilindro circular

Para este problema em particular, considere o escoamento potencial, incompressível e bidimensional, em torno de um cilindro de seção circular no plano (x, y) , imerso em um escoamento incidente W_∞ .

A equação integral governante para esse problema é a equação integral de Fredholm de segunda espécie, Equação (3.33), apresentada no início dessa seção.

Se as coordenadas de um cilindro de raio R são expressas por

$$\begin{aligned} x &= R(1 - \cos \theta) \\ y &= R \sin \theta \end{aligned} \quad , \quad (3.39)$$

então a solução exata para a velocidade na superfície devido a um escoamento incidente W_∞ paralelo ao eixo x é dado por

$$V_s = 2W_\infty \sin \theta \quad . \quad (3.40)$$

A solução do problema acima é um problema clássico da mecânica dos fluidos. Pois, além de possuir uma solução analítica disponível, é amplamente estudado por outros métodos numéricos.

Um dos métodos que permite solucionar este tipo de problema é o Método dos Painéis (MP) (Katz e Plotkin, 1991 e Lewis, 1991). A estratégia numérica padrão para este problema com sua formulação integral, através do Método dos Painéis, seria representar a superfície do corpo por M elementos discretos (painéis). Entretanto, deste ponto em diante, iremos empregar as Funções de Base Radial (RBF) para resolução da equação e análise numérica do problema e compará-las com o Método dos Painéis. Porém, antes da aplicação do método, a Equação (3.33) deve ser trabalhada utilizando ferramentas do cálculo para integração, conforme apresentado no item 2.2.3.

Assim, são apresentados os resultados obtidos a seguir.

Dados do Problema 12:

$$-\frac{1}{2} \gamma(s_m) + \oint K_v(s_m, s_n) \gamma ds_n + W_\infty (\cos \beta_\infty \cos \beta_m + \sin \beta_\infty \sin \beta_m) = 0 \quad .$$

$$K_v(s_m, s_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(y_m - y_n) \cos \beta_m - (x_m - x_n) \sin \beta_m}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \right] \quad .$$

$$R = 1 \quad , \quad W_\infty = 1 \quad , \quad \beta_\infty = 0^\circ \quad .$$

Para este problema, a solução exata é dada por

$$V_s = 2W_\infty \sin(\theta - \beta_\infty) \quad .$$

Resultados do Problema 12:

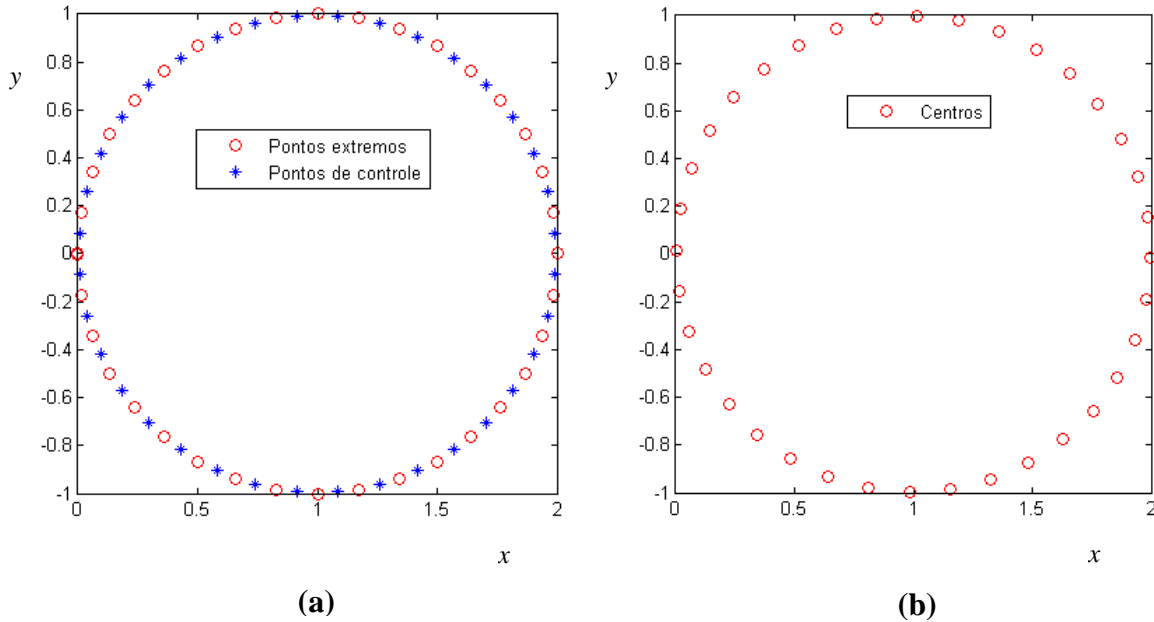


Figura 3.28 Esquema de distribuição de pontos para $N = 36$ no Problema 12. **(a)** Pontos extremos e pontos de controle do MP e **(b)** centros das RBF

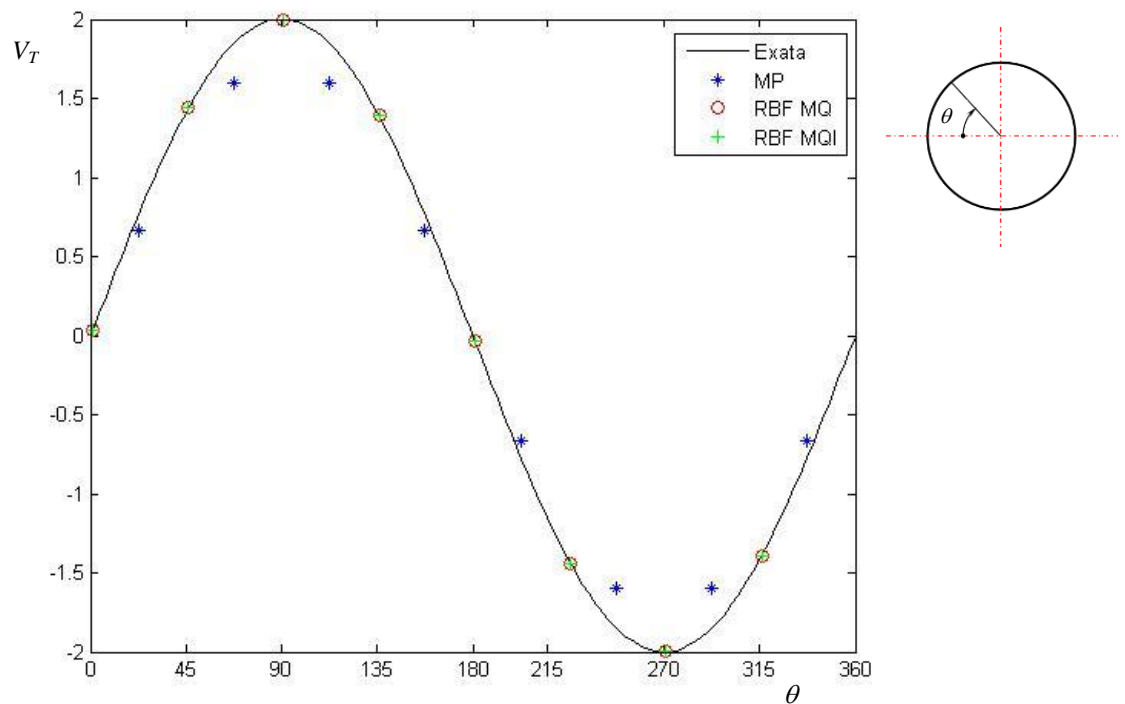


Figura 3.29 Velocidade tangencial em função do ângulo azimutal no cilindro do Problema 12 para $N = 8$ painéis / centros

Tabela 3.22 Resultados numéricos comparativos entre o MP e RBF para diferentes valores de painéis / centros N

N	Método de Painéis	Multiquádrica		Multiquádrica Inversa	
	(MP)	(MQ)	ε	(MQI)	ε
	Erro MAX	Erro MAX		Erro MAX	ε
08	2,473567e-001	7,278031e-009	6,400	6,653982e-010	10,200
36	7,168989e-002	2,173476e-009	30,400	2,085786e-006	5,800
100	2,702135e-002	4,446047e-005	39,200	3,628152e-005	18,600

3.3.5 Comentários sobre os problemas estudados envolvendo EI

Em linhas gerais, os mesmos comentários realizados para a seção de problemas anterior, quando Método de Colocação de RBF foi utilizado para resolução de problemas envolvendo EDP, são também válidos para a aplicação deste método em EI. Problemas relativamente simples foram elencados para sua resolução e o método conseguiu reproduzir relativamente bem cada uma das soluções esperadas.

Em todos os casos, pode ser visto que os resultados obtidos através das RBF são uma boa aproximação da solução esperada. Apesar de que, em alguns casos, os erros obtidos são relativamente grandes, mesmo não sendo enormes. Assim como nos casos anteriores, os melhores resultados foram obtidos, na grande maioria das vezes, quando se utilizava uma maior quantidade de pontos no problema, entretanto, estranhamente, tal fato não ocorreu para o caso do escoamento potencial em torno do cilindro.

O método de colocação assimétrico (Kansa) foi implementado para solução de equações integrais de Fredholm de segunda espécie nos Problemas 9, 10 e 12, cada qual representando uma função núcleo diferente. Novamente podem ser vistas aplicações das RBF dos tipos multiquádrica, multiquádrica inversa e gaussiana. Observando, no Problema 9, os gráficos da Figura 3.22 e a Tabela 3.16, pode-se concluir que os melhores resultados são obtidos quando se utiliza RBF do tipo MQI em relação a RBF do tipo G, para um mesmo parâmetro de forma ($\varepsilon = 2$). Fato este comprovado pelo Problema 10, observando os gráficos da Figura 3.23 e a Tabela 3.17.

O Problema 11 foi tão somente uma repetição dos outros dois anteriores, agora obtendo e utilizando um “bom” parâmetro de forma. Apesar dos valores de um “bom” ε dos dois métodos empregados, tentativa e erro e validação cruzada, por diversas vezes não ficarem próximos, que pode ser visto comparando as Tabelas 3.18 e 3.19 e as Tabelas 3.20 e

3.21, pode-se notar, comparando os gráficos das Figuras 3.24 e 3.25 e das Figuras 3.26 e 3.27 que os métodos registraram uma mesma tendência sempre, de existir uma faixa inicial do parâmetro de forma em que o erro varia muito, mas na qual se encontra o melhor valor para o parâmetro de forma e outra faixa, acima desta, na qual variando-se o parâmetro de forma não se altera sensivelmente o erro. Note que pelas Tabelas 3.18 e 3.20, na grande maioria das vezes, os melhores resultados foram obtidos empregando-se RBF do tipo Gaussiana. Fato que vem em desacordo com a conclusão que fora obtida anteriormente, para os Problemas 9 e 10, entretanto, serve muito mais para reforçar a idéia de que sempre se deve utilizar alguma maneira para se encontrar um “bom” valor para o parâmetro de forma, qualquer que seja o problema estudado.

Novamente, agora empregando a formulação integral, pode ser visto uma aplicação das RBF em um problema de escoamento potencial ao redor do cilindro. No Problema 12, utilizando RBF do tipo MQ e MQI, empregando um “bom” valor para o parâmetro de forma, os resultados melhores variaram (ver Tabela 3.22) entre estas funções a medida em que se variavam os pontos de colocação, entretanto, foram sempre melhores, em termos de precisão numérica, quando comparados com os obtidos pelo Método dos Painéis.

Capítulo 4

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

4.1 Conclusões

No início do trabalho, após a escolha de se estudar o Método de Colocação baseado nas Funções de Base Radial, ficou-se com o seguinte dilema: realizar um trabalho com um enfoque maior no próprio método ou em uma aplicação mais específica ?

Após o período de revisão bibliográfica, foi possível verificar que realmente o método tem uma gama imensa de problemas no qual pode ser aplicado, entretanto é relativamente novo e está ainda em desenvolvimento, visto que ainda existem problemas em aberto para a implementação do método (por exemplo, mau condicionamento da matriz e a escolha do parâmetro de forma). Assim, por ser um primeiro trabalho, optou-se por realizar um trabalho de fato voltado para o método em si como foco principal.

Face ao exposto e com base nos problemas resolvidos e resultados obtidos, pode-se verificar a quantidade enorme de problemas de engenharia que o método é capaz de analisar. Problemas envolvendo Equações Diferenciais Parciais e Equações Integrais, com diferentes condições de contorno e para diferentes geometrias.

Ainda pode-se comentar que, mesmo em sua forma mais simples de aplicação que foi aqui utilizada, os resultados obtidos pelo método de RBF foram sensivelmente melhores (em termos de precisão numérica) quando foram comparados com os resultados obtidos por outro método. Outro fato é a facilidade na implementação do método em relação aos demais, tanto pela sua natureza quanto pelo fato de ser um método sem malha.

Mesmo assim, ficam em aberto inúmeras características e problemas que precisam e podem ser estudados pelo método. Isto será visto no tópico a seguir.

4.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

De fato, hoje a lista de problemas selecionados para serem estudados, é sensivelmente maior do que a elaborada no início do trabalho. Muitos problemas ainda ficam em aberto. Os itens abaixo seguem como umas poucas sugestões, tendo em vista que não esgotam todas as reais possibilidades para aplicação do método.

- ✓ Inicialmente as RBF foram empregadas em interpolação de dados discretos. Utilizada para este fim, o método pode ser utilizado para problemas específicos de interpolação de dados discretos em problemas de otimização.
- ✓ Todas as EDP analisadas aqui neste trabalho são do tipo elíptica. Entretanto, existem diversos problemas de interesse na engenharia que utilizam EDP do tipo parabólica e hiperbólica. Assim, por exemplo, ficam em aberto problemas de difusão de calor em regime não permanente, convecção, convecção e difusão, propagação de ondas e muitos outros.
- ✓ Como citado anteriormente, pela própria definição de RBF, outros tantos tipos de funções podem e devem ser testadas, inclusive para os simples problemas apresentados. Uma configuração que parece ser interessante é utilizar o método de colocação simétrico (Hermite) com RBF do tipo Suporte Compacto.
- ✓ Mesmo as Equações Integrais de Fredholm podem ser estudadas ainda para diversos outros tipos de função núcleo.

- ✓ Na dinâmica dos fluidos, o escoamento em torno do cilindro é um problema base, que deve ser estudado sempre, para fins de verificação e validação. Após isto, naturalmente, surgem muitas possibilidades de serem estudadas. Visto que existe uma infinidade de geometrias desde as mais simples, por exemplo uma elipse ou uma placa plana, até as mais complexas, por exemplo perfil em forma de aerofólio com bordo de fuga afilado ou com *flap*.

- ✓ Mesmo ainda considerando o escoamento potencial, após a aplicação do método em um perfil isolado, com poucas modificações é possível sua extensão para o escoamento em turbomáquinas axiais (grades lineares). Após feito isto, é possível também estudar o escoamento em turbomáquinas radiais, através da transformação conforme.

- ✓ O Método de Vórtices Discretos (MVD) é um método numérico lagrangiano bastante utilizado para análise do escoamento ao redor de corpos, e que leva em conta os efeitos viscosos no escoamento. Entretanto, emprega o Método dos Painéis para discretização do corpo. Uma alternativa então seria utilizar as RBF em seu lugar, tornando o método verdadeiramente sem malha.

Apêndice A – Método de Pesquisa Bibliográfica

Uma pesquisa *online* através da base de dados bibliográficos Web of science foi realizada em 09 de janeiro de 2012. Na época da pesquisa, a referida base de dados continha aproximadamente 36 milhões de registros de 9.300 importantes revistas científicas, abrangendo o período de 1945 até a presente data. Uma pesquisa no campo [assunto] com diferentes combinações de palavras e/ou expressões referentes a diferentes métodos numéricos foi realizada e seus resultados apresentados na Tabela 1.1 e na Figura 1.3. A busca foi feita de tal forma que a palavra e/ou expressão estivesse presente no título, palavra chave ou no resumo do artigo.

O leitor deve ser advertido de que o método de pesquisa utilizado não é preciso. A correspondente palavra e/ou expressão é realizada apenas no título, palavra chave ou no resumo do artigo, e não no texto principal. Entretanto, nem todos os artigos da base de dados contém um resumo. Na verdade, os artigos mais antigos não contêm nem resumos nem palavras chave. Nesses casos, somente os títulos foram procurados. Assim, esta busca perdeu a maioria dos artigos iniciais de diferentes métodos. Por exemplo, o histórico e clássico trabalho de Rizzo (1967) não foi computado na busca do Método de Elementos de Contorno por que nenhuma das palavras e/ou expressões referentes ao método estava contida no título do trabalho. Todos os primeiros artigos deste método inicialmente denominado Método das Equações de Contorno foram perdidos e a primeira entrada é datada de 1974 (ver Figura 1.3). Se a expressão “*integral equation*” fosse utilizada na pesquisa, o trabalho seria computado, entretanto, muitos outros artigos matemáticos que não são de natureza puramente numérica seriam computados. Da mesma forma que alguns artigos não foram computados, também deve-se reconhecer o fato de que, um artigo selecionado na correspondente base de dados contendo como palavra chave “*boundary element*”, não necessariamente utilizou o método para solução numérica e, portanto, não deveria pertencer ao conjunto apresentado.

Assim, devido ao grande número de resultados envolvidos nas pesquisas, só foi possível contar com uma busca automática e nenhuma tentativa foi feita para ajustar os dados através de um inspeção artigo por artigo. Portanto, o resultado reportado neste presente trabalho deve ser considerado muito mais em seu aspecto qualitativo.

Apêndice B – Algumas Funções de Base Radial e suas Derivadas

B.1 Derivadas Genéricas

Apenas para comodidade do leitor que realmente tem intenção de implementar o método, neste apêndice serão compiladas as fórmulas e suas respectivas derivadas de primeira e segunda ordem de algumas funções de base radial de duas variáveis, ou seja,

$$\varphi(r) = \varphi(\|\hat{x}\|) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad \hat{x} = (x, y) \in \mathfrak{R}^2.$$

Aplicando a regra da cadeia, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(\|\hat{x}\|) = \frac{d}{dr} \varphi(r) \frac{\partial}{\partial x} r(x, y) = \frac{d}{dr} \varphi(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} \frac{d}{dr} \varphi(r),$$

de maneira análoga, vem que

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi(\|\hat{x}\|) = \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \varphi(r).$$

As derivadas de segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(\|\hat{x}\|) &= \frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} r(x, y) \right)^2 + \frac{d}{dr} \varphi(r) \frac{\partial^2}{\partial x^2} r(x, y) = \\ &= \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) + \frac{y^2}{r^3} \frac{d}{dr} \varphi(r), \end{aligned}$$

assim como

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(\|\hat{x}\|) = \frac{y^2}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) + \frac{x^2}{r^3} \frac{d}{dr} \varphi(r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(\|\hat{x}\|) = \frac{xy}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) - \frac{xy}{r^3} \frac{d}{dr} \varphi(r),$$

e o Laplaciano

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(\|\hat{x}\|) = \frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi(r).$$

As derivadas de ordem superior ou dimensões espaciais maiores podem ser obtidas de maneira análoga pela aplicação da regra da cadeia.

B.2 Fórmulas para Funções de Base Radial Específicas

As derivadas genéricas, anteriormente descritas, podem então ser utilizadas para obtenção das derivadas das seguintes funções de base radial:

Função B.1.: Gaussiana (G)

$$\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2},$$

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = -2\varepsilon^2 r e^{-(\varepsilon r)^2},$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) = 2\varepsilon^2 r e^{-(\varepsilon r)^2} (2(\varepsilon r)^2 - 1).$$

Função B.2.: Multiquádrica (MQ)

$$\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2},$$

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = \frac{\varepsilon^2 r}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}},$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) = \frac{\varepsilon^2}{(1 + (\varepsilon r)^2)^{3/2}}.$$

Função B.3.: Multiquádrica inversa (MQI)

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}},$$

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = -\frac{\varepsilon^2 r}{(1 + (\varepsilon r)^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) = \varepsilon^2 \frac{2(\varepsilon r)^2 - 1}{(1 + (\varepsilon r)^2)^{5/2}}.$$

Função B.4.: Spline de placa fina (SPF)

$$\varphi(r) = r^2 \log(r),$$

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = r(2\log(r) + 1),$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) = 2\log(r) + 3.$$

Função B.5.: Wendland's $\varphi_{3,1}$ (WE31)

$$\varphi(r) = (1 - \varepsilon r)_+^4 (4\varepsilon r + 1) ,$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -20 \varepsilon^2 r (1 - \varepsilon r)_+^3 ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) = 20 \varepsilon^2 (4\varepsilon r - 1) (1 - \varepsilon r)_+^2 .$$

Função B.6.: Wendland's $\varphi_{3,2}$ (WE32)

$$\varphi(r) = (1 - \varepsilon r)_+^6 (35(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 3) ,$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -56 \varepsilon^2 r (5\varepsilon r + 1) (1 - \varepsilon r)_+^5 ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) = 56 \varepsilon^2 (35(\varepsilon r)^2 - 4\varepsilon r - 1) (1 - \varepsilon r)_+^4 .$$

Função B.7.: Wu's $\varphi_{1,3}$ (WU13)

$$\varphi(r) = (1 - \varepsilon r)_+^6 (5(\varepsilon r)^5 + 30(\varepsilon r)^4 + 72(\varepsilon r)^3 + 82(\varepsilon r)^2 + 36\varepsilon r + 6) ,$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -11 \varepsilon^2 r (\varepsilon r + 2) (5(\varepsilon r)^3 + 15(\varepsilon r)^2 + 18\varepsilon r + 6) (1 - \varepsilon r)_+^5 ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) = 22 \varepsilon^2 (25(\varepsilon r)^5 + 100(\varepsilon r)^4 + 142(\varepsilon r)^3 + 68(\varepsilon r)^2 - 16\varepsilon r - 4) (1 - \varepsilon r)_+^4 .$$

Função B.7.: Wu's $\varphi_{2,3}$ (WU23)

$$\varphi(r) = (1 - \varepsilon r)_+^5 (5(\varepsilon r)^4 + 25(\varepsilon r)^3 + 48(\varepsilon r)^2 + 40\varepsilon r + 8) ,$$

$$\frac{d}{dr} \varphi(r) = -9 \varepsilon^2 r (5(\varepsilon r)^3 + 20(\varepsilon r)^2 + 29\varepsilon r + 16) (1 - \varepsilon r)_+^4 ,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r) = 18 \varepsilon^2 (20(\varepsilon r)^4 + 60(\varepsilon r)^3 + 57(\varepsilon r)^2 + 11\varepsilon r - 8) (1 - \varepsilon r)_+^3 .$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, P., (2002)**, "Tricks of the Trade", *The Mathematica Journal*, Wolfram Media, Beck (ed.), 8(4) : 516-522.
- BUHMANN, M. D., (1998)**, "Radial functions on compact support," *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41(1) : 33-46.
- BUHMANN, M. D., (2003)**, *Radial Basis Function: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- CARLSON, R. E., FOLEY, T. A., (1991)**, "The parameter R2 in multiquadric interpolation", *Computers and Mathematics with Applications*, 21 : 29-42.
- CHENG, A. H. D., CABRAL, J., (2005)**, "Direct solution of ill-posed boundary value problems by radial basis function collocation method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(1) : 45-64.
- CHENG, A. H. D., GOLBERG, M. A., KANSA, E. J., ZAMMITO, G., (2003)**, "Exponential convergence and H-c multiquadric collocation method for partial differential equations", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(5) : 571-594.
- COOPER, C. D., BARBA, L. A., (2008)**, "Panel-free boundary conditions for viscous vortex methods", *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*.
- DUBAL, M. R., (1992)**, "Construction of three-dimensional black-hole initial data via multiquadrics", *Physical Review*, 45(4) : 1178-1187.
- DUBAL, M. R., (1994)**, "Domain decomposition and local refinement for multiquadric approximations", *International Journal of Applied Science and Computations*, 1 : 146-171.
- EL ZAHAB, Z., DIVO, E., KASSAB, A. J., (2009)**, "A localized collocation meshless method (LCMM) for incompressible flows CFD modeling with applications to transient hemodynamics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33 (8-9) : 1045-1061.

- FASSHAUER, G. E., (1997)**, “Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions”, *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, 131-138.
- FASSHAUER, G. E., (2007)**, *Meshfree Approximation Methods With MATLAB*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- FORNEFETT, M., ROHR, K., STIEHL, H. S., (2001)**, “Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images”, *Image and Vision Computing*, 19(1-2) : 87-96.
- FRANKE, R., (1982)**, “Scattered data interpolation: tests of some methods”, *Mathematics of Computation*, 38(157) : 181-200.
- FOX, L., GOODWIN, E. T., (1953)**, "The numerical solution of non-singular linear integral equations", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 245(902) : 501-534.
- GAUSS, C.F., (1839)**, “Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte”, *Werke* 5, 2nd Ed. Göttingen 1877, 194–242.
- GAUSS, C.F., (1840)** “Atlas des Erdmagnetismus”, *Werke* 12, Göttingen 1929, 326–408.
- GOLBERG, M. A., CHEN, C. S., KARUR, S. R., (1996)**, “Improved multiquadric approximation for partial differential equations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 18(1) : 9-17.
- GREEN, G., (1828)**, *An Essay on the Applicability of Mathematical Analysis of the Theories of Elasticity and Magnetism*, Nottingham, U.K.
- GUMEROV, N. A., DURAISWAMI, R., (2007)**, “Fast radial basis function interpolation via preconditioned Krylov iteration”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(5) : 1876-1899.

- HARDER, R. L., DESMARAIS, R. N., (1972)**, “Interpolation using surface splines”, *Journal Aircraft*, 9 : 189-191.
- HARDY, R. L., (1971)**, “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces”, *Journal Geophysical Research*, 76 : 1905-1915.
- HOFFMAN, J. D., (2001)**, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2nd Edition, Marcel Dekker Inc., New York, NY, 823 p.
- HON, Y. C., CHEUNG, K. F., MAO, X. Z., KANSA, E.J., (1999)**, “Multiquadric solution for shallow water equations”, *Journal of Hydraulic Engineering-ASCE*, 125(5) : 524-533.
- HON, Y. C. AND SCHABACK, R., (2001)**, “On unsymmetric collocation by radial basis functions”, *Applied Mathematics and Computation*, 119(2-3) : 177-186.
- KANSA, E.J., (1990)**, “Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics II: solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations”, *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8-9) : 147-161.
- KANSA, E. J., (1992)**, “A strictly conservative spatial approximation scheme for the governing engineering and physics equations over irregular regions and inhomogeneous scattered nodes”, *Computers and Mathematics with Applications*, 24(5-6) : 169-190.
- KANSA, E. J., HON, Y.C., (2000)**, “Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial differential equations”, *Computers and Mathematics with Applications*, 39(7-8) : 123-137.
- KATZ, J., PLOTKIN, A., (1991)**, *Low-speed aerodynamics: from wind theory to panel methods*, McGraw-Hill, Inc.
- KELLOGG, O. D., (1929)**, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, New York.

- LARSSON, E., FORNBERG, B., (2003)**, “A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs”, *Computers and Mathematics with Applications*, 46(5-6) : 891-902.
- LEITÃO, V. M. A., (2001)**, “A meshless method for Kirchhoff plate bending problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 : 1107-1130.
- LEWIS, R. I., (1991)**, *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge University Press.
- LIU, G. R., (2002)**, *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC press, Boca Raton, USA.
- LIU, G. R., GU, Y. T., (2001)**, “A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids”, *Journal of Sound and Vibration*, 246(1) : 29-46.
- LOVE, E. R., (1949)**, "The electrostatic field of two equal circular coaxial conducting disks", *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(4) : 428-451.
- MARTENSEN, E., (1959)**, “Berechnung der druckverteilung an gitterprofilen in ebener potentialstromung mit einer Fredholmschen integralgleichung”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 3 : 235-270.
- MORIDIS, G. J., KANSA, E. J., (1994)**, “The Laplace transform multiquadric method: A highly accurate scheme for the numerical solution of linear partial differential equations”, *Journal of Applied Science & Computation*, 1 : 375-407.
- MIKHLIN, S. G., SMOLITSKIY, K. L., (1967)**, *Approximate Methods for Solution of Differential and Integral Equations*, American Elsevier Pub., London.
- NARCOWICH, F. J., WARD, J. D. AND WENDLAND, H., (2006)**, “Sobolev error estimates and a Bernstein inequality for scattered data interpolation via radial basis functions”, *Constructive Approximation*, 24(2) : 175-186.

- POWER, H., BARRACO, V., (2002)**, “A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations”, *Computers and Mathematics with Applications*, 43(3-5) : 551-583.
- RIPPA, S., (1999)**, “An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation”, *Advances in Computational Mathematics*, 11 : 193-210.
- RIZZO, F. J., (1967)**, “An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics”, *Quarterly of Applied Mathematics*, 25(1) : 83–95.
- SARLER, B., (2005)**, “A radial basis function collocation approach in computational fluid dynamics”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 7(2) : 185-193.
- SCHABACK, R., (1995)**, “Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions”, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Vanderbilt University Press, 477-496.
- SCHABACK, R., WENDLAND, H., (2002)**, “Approximation by positive definite kernels”, IDOMat2001 proceedings (invited lecture).
- VERTNIK, R., SARLER, B., (2009)**, “Solution of incompressible turbulent flow by a mesh-free method”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 44(1) : 65-95.
- WEN, P. H., HON, Y. C., (2007)**, “Geometrically nonlinear analysis of Reissner–Mindlin plate by meshless computation”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 21(3) : 177-191.
- WENDLAND, H., (1995)**, “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree”, *Advances in Computational Mathematics*, 4 : 389-396.
- WENDLAND, H., (2005)**, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge.

WU, Z., (1995), “Compactly supported positive definite radial functions”, *Advances in Computational Mathematics*, 4(1) : 283-292.

ZERROUKAT, M., POWER, H., CHEN, C.S., (1998), “A numerical method for heat transfer problems using collocation and radial basis functions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(7) : 1263-1278.

ZITOVA, B., FLUSSER, J., (2003), “Image registration methods: a survey”, *Image and Vision Computing*, 21(11) : 977-1000.