UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudo teórico de processos multívocos gerados por processos generalizados exatos

Thamara Lisandra Ferreira
Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

UNIFEI - ITAJUBÁ
Dezembro / 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thamara Lisandra Ferreira

Estudo teórico de processos multívocos gerados por processos generalizados exatos

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Área de Concentração: Análise Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dezembro de 2017
Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thamara Lisandra Ferreira

Estudo teórico de processos multívocos gerados por processos generalizados exatos

Dissertação aprovada por banca examinadora em 12 de Dezembro de 2017, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática.**

Banca examinadora:
Prof. Dr Jacson Simsen
Prof. Dr Lucas Ruiz dos Santos
Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Itajubá
20 de Dezembro de 2017

Dedico este trabalho às pessoas mais presentes em minha vida, meus pais Sebastião e Zoraide e meu irmão João Leonardo, pois sem eles este sonho não se realizaria.

Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos por DEUS, já que Ele colocou pessoas tão especiais a meu lado, sem as quais certamente não teria dado conta!

A meus pais, Sebastião e Zoraide, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em minha capacidade e me acharam a melhor de todas, mesmo não sendo. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser a melhor, mas a fazer o melhor de mim. Obrigada pelo amor incondicional!

Ao meu irmão, João Leonardo, meu agradecimento especial, pois, a seu modo, sempre se orgulhou de mim e confiou em meu trabalho. Obrigada pela confiança!

Agradeço ao Professor Doutor Jacson Simsen, meu orientador, pela paciência, apoio, suporte durante a orientação e pelo incentivo constante ao aprofundamento do estudo. A você Professor, só tenho a dizer muito obrigado por tudo.

Aos professores do departamento de matemática da UNIFEI e do IFRJ pela participação na construção do meu conhecimento.

Às minhas amigas de sempre, Luiza e Ana Helena, por só quererem o meu bem e me valorizarem tanto como pessoa. Obrigada pela amizade!

A meus amigos do mestrado, pelos momentos divididos juntos. Obrigada por dividir comigo as angústias e alegrias e ouvirem minhas bobagens. Foi bom poder contar com vocês!

Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, gostaria de agradecer a UNIFEI por abrir as portas para que eu pudesse realizar este sonho. Proporcionou-me mais que a busca de conhecimento técnico e científico, mas uma lição de vida.

Ninguém vence sozinho... Obrigada a todos!

Thamara Lisandra Ferreira

O homem só pode descobrir novos oceanos se tiver coragem de perder a terra de vista
André Gide

Resumo

Estre trabalho trata-se do estudo da teoria abstrata de processos multívocos e atratores pullback. Primeiramente é feito uma breve revisão sobre semigrupos, processos e semigrupos multívocos. Posteriormente são apresentados os resultados com suas demonstrações a respeito de processos multívocos, $\omega-$limites e atratores pullback.

Palavras-chave:
Processos multívocos, ω-limite, atrator pullback.

Abstract

This work is about a study of an abstract theory of multivalued processes and pullback attractors. First, a brief review is made on semigroups, processes and multivalued semigroups. Subsequently, the results about multivalued processes, $\omega-$limits and pullback attractors are presented with their proofs.

Keywords.
Multivalued processes, ω-limit, pullback attractor.

Índice

Introdução

A proposta deste trabalho é reunir num texto resultados abstratos sobre a teoria de processos multívocos definidos por processos generalizados, tal teoria é uma importante ferramenta matemática para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais ou inclusões não-autônomas, sendo os trabalhos [18] e [20] as partes centrais e as referências [7] e [9] complementações. Focamos na situação multívoca, quando mais de uma solução pode corresponder a um mesmo dado inicial dado.

O estudo da estrutura de um atrator para equações não-autônomas tem chamado a atenção de vários autores nos últimos anos. Vale a pena apontar que, diferente do caso autônomo, várias abordagens são possíveis a fim de fornecer condições suficientes e necessárias para a existência de atratores.

Mas e se mandarmos o tempo inicial para $-\infty$ enquanto o tempo final continuar fixado, as soluções do problema se acumulariam? Algum conjunto as absorveria? Esse conceito é chamado de atração pullback, que atrai soluções do problema do $-\infty$, isto é, o tempo inicial vai para o $-\infty$ enquanto o tempo final continua fixado. Assim, serão apresentados resultados que garantem a existência de tal atrator que é negativamente invariante, compacto e é o minimal entre todos os atratores pullback fechados que atraem de forma pullback todos os limitados do espaço de fase. A teoria de atrator pullback para sistemas dinâmicos não-autônomos em casos unívocos ou multívocos tem sido desenvolvida por vários autores, onde a ideia principal consistiu em aplicar no caso não-autônomo alguns métodos que são similares à aqueles usados no caso autônomo. Uma importante característica dos atratores globais é sua caracterização como a união de todas as órbitas completas do sistema satisfazendo uma certa propriedade.

Neste trabalho adotamos a convenção [ ] para indicar onde as definições e os resultados podem ser encontrados, caso o leitor queira saber mais detalhes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 enunciaremos algumas definições e resultados de Análise Funcional, Espaços Métricos e Topologia. No capítulo 2 apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre semigrupos, processos e semigrupos multívocos que tem sido publicados em trabalhos diferentes. Finalmente no capítulo 3 apresentaremos a teoria de processos multívocos definidos por processos generalizados.

Capítulo 1

Pré Requisitos

1.1 Coletânea de Resultados

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados que utilizamos ao longo deste trabalho. As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [1, 2, 3, 4, 13, 15, 16, 17, 21, 22].

Denotaremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ para definições e resultados.

Definição 1.1.1 *Uma **norma** num espaço vetorial V (real ou complexo) é uma aplicação $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

(i) $||\xi|| \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $||\xi|| = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$.

(ii) $||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{F}$.

(iii) $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Definição 1.1.2 *Um espaço métrico (X,d) é **completo** se toda sequência de Cauchy converge a um elemento desse espaço.*

Definição 1.1.3 *Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado **espaço de Banach**.*

Definição 1.1.4 *Uma função $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ é **absolutamente contínua** se para cada $\varepsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$, tal que se $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ é uma família de intervalos disjuntos contidos em $[a,b]$ com $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^{n}|f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.*

Definição 1.1.5 *Seja V um espaço normado. Uma sequência $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ **converge fracamente a** $\xi \in V$ se $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ para todo $f \in V^*$.*

Definição 1.1.6 *Uma sequência* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (V, ||\cdot||_V)$ ***converge a*** $\xi \in V$ *se* $||\xi_n - \xi||_V \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Teorema 1.1.1 *Seja* $F : X \to Y$ *uma função entre espaços topológicos. São equivalentes:*

1. *F é contínua*
2. *Para cada* $A \subset X$*, tem-se* $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$
3. *Para cada fechado* $B \subset Y$*, o conjunto* $F^{-1}(B)$ *é fechado em X.*
4. *Para cada* $x \in X$ *e cada vizinhança V de* $F(x)$*, existe uma vizinhança U de x tal que* $F(U) \subset V$.

Definição 1.1.7 *Um espaço métrico é* ***separável*** *se existe um subconjunto contável denso nesse espaço.*

Definição 1.1.8 *Uma coleção* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de um espaço X é dita* ***cobrir*** *X ou ser uma* ***cobertura de*** *X se a reunião dos elementos de* $\mathcal{A}$ *contém X. Ela é chamada uma cobertura aberta de X se seus elementos são abertos de X.*

Definição 1.1.9 *Um espaço topológico X é dito ser* ***compacto*** *se toda cobertura aberta* $\mathcal{A}$ *de X contém uma subcoleção finita que também cobre X.*

Definição 1.1.10 *Um espaço topológico X é dito* ***localmente compacto em*** *x se existe algum subconjunto compacto C de X que contém uma vizinhança de x. Se X é localmente compacto em cada um de seus pontos, X é dito localmente compacto.*

Definição 1.1.11 *Um conjunto A em um espaço métrico* (X,d) *é chamado* ***relativamente compacto*** *se o fecho* $\overline{A}$ *é compacto.*

Teorema 1.1.2 *Um conjunto A em um espaço métrico* (X,d) *é compacto se, e somente se, toda sequência* $\{x_n\}$ *cujos elementos pertencem a A, tem uma subsequência convergindo para algum elemento de A.*

Definição 1.1.12 *Um conjunto A em um espaço métrico* (X,d) *é chamado* ***precompacto*** *se para cada* $\varepsilon > 0$*, existe um conjunto finito de pontos em X,* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$*, tal que A está contido na união das bolas abertas* $B(x_i, \varepsilon)$*,* $i = 1, ..., n$ *, onde* $B(x_i, \varepsilon) = \{x : d(x, x_i) < \varepsilon\}$.

Teorema 1.1.3 *Um conjunto relativamente compacto em um espaço métrico é precompacto.*

Teorema 1.1.4 *Um conjunto A em um espaço métrico completo (X,d) é relativamente compacto, se e somente se, é precompacto.*

Definição 1.1.13 *Um espaço topológico X é chamado um* ***espaço de Hausdorff*** *se para cada par x_1, x_2 de pontos disjuntos de X existem vizinhanças V_1 e V_2 de x_1 e x_2, respectivamente, que são disjuntas, ou seja, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.*

Teorema 1.1.5 *(**Teorema do Valor Médio**) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em (a,b), então existe um ponto $x \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x)$$

Definição 1.1.14 *Seja X um espaço de Banach e $0 < T < \infty$. O espaço $C^m([0,T],X)$, com $m = 1,2,3,\ldots$ representa todas as funções $f:[0,T] \to X$ que são m vezes diferenciáveis e cujas derivadas são contínuas em [0,T].*

Definição 1.1.15 *Seja U um espaço topológico. Uma aplicação $G: U \to \mathcal{P}(X)$ é* ***semicontínua superiormente*** *em $u \in U$, se para cada subconjunto D aberto em X com $G(u) \subset D$, existe uma vizinhança V de u, tal que $G(v) \subset D$, para cada $v \in V$. Se G é semicontínua superiormente em cada $u \in U$, então ela é semicontínua superiormente em U.*

Definição 1.1.16 *Seja U um espaço topológico. Uma aplicação $G: U \to \mathcal{P}(X)$ é* ***semicontínua inferiormente*** *em $u_0 \in U$, se para qualquer $v_0 \in G(u_0)$ e qualquer vizinhança D de v_0, existe uma vizinhança V de u_0 tal que $\forall\, u \in V$, $G(u) \cap D \neq \emptyset$. Se G é semicontínua inferiormente em cada $u \in U$, então G é semicontínua inferiormente em U.*

Definição 1.1.17 *Uma aplicação $G: U \to \mathcal{P}(X)$ é* ***contínua*** *em U se, e somente se, G é semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente em todo $u \in U$.*

Capítulo 2

Semigrupos, processos e semigrupos multívocos

2.1 Definições e resultados básicos sobre semigrupos

Neste capítulo não colocaremos as demonstrações dos resultados, apresentaremos somente alguns resultados para que o leitor possa ter uma visão geral da teoria de semigrupos, processos e semigrupos multívocos e comparar com os resultados do capítulo seguinte sobre processos multívocos, que é o foco dessa disserteção. As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [11, 14, 19, 5].

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Durante as próximas seções, usaremos as seguintes notações:
$\mathcal{P}(X) := \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$.
$\mathcal{B}(X) := \{B \subset X : B \neq \emptyset$ é um conjunto limitado em $X\}$.
$\mathcal{C}(X) := \{C \subset X : C \neq \emptyset$ é um conjunto fechado em $X\}$.
$\mathcal{K}(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset$ é um conjunto compacto em $X\}$.
$\mathcal{BC}(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset$ é um conjunto limitado e fechado em $X\}$.

Para $x \in X$ e $A, B \in \mathcal{P}(X)$, e $\varepsilon > 0$ temos

$\rho(x,A) := \inf_{a\in A}\{\rho(x,a)\}$;
$\text{dist}(A,B) := \sup_{a\in A}\{\rho(a,B)\} = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{\rho(a,b)\}$;
$O_\varepsilon(A) := \{z \in X; \rho(z,A) < \varepsilon\}$.

Observação 2.1.1 $O_\varepsilon(\overline{A}) = \bigcup_{x\in\overline{A}} B(x,\varepsilon)$

Observação 2.1.2 *dist*$(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

Definição 2.1.1 *Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Uma família de operadores $\{V_t\}_{t\geq 0}$, $V_t : X \to X$ contínuo, satisfazendo:*

1- $V_0 = I_d$;

2- $V_{t+s} = V_t V_s$

é chamado um ***semigrupo****.*

Observação 2.1.3 *Se X for um espaço vetorial e para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $V_t : X \to X$ for um operador linear, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é dito um* ***semigrupo linear****.*

Observação 2.1.4 *Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é chamado* ***contínuo*** *ou C^0-**semigrupo*** *se a aplicação $(t,x) \mapsto V_t(x)$ é contínua.*

Exemplo 2.1.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possua única solução para todo $u_0 \in \mathbb{R}^n$. A família $\{V_t\}_{t\geq 0}$, tal que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, V_t x_0 := x(t, x_0), t \geq 0$$

e onde $x(t,x_0)$ é a única solução do problema, é um semigrupo. Se f é tal que as soluções do problema dependam continuamente do dado inicial x_0, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$, onde

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, V_t x_0 := x(t, x_0), t \geq 0,$$

é um semigrupo contínuo.

Definição 2.1.2 *O conjunto $\gamma^+(x)$ dado por $\gamma^+(x) := \bigcup_{t\geq 0} V_t(x)$ é chamado a* ***semi-trajetória positiva do ponto x****. O conjunto $\gamma^+(A)$ dado por $\gamma^+(A) := \bigcup_{x\in A} \gamma^+(x) = \bigcup_{t\geq 0} V_t(A)$ é chamado a* ***semi-trajetória positiva do conjunto A****.*

Proposição 2.1.1 *$V_t(\gamma_s^+(A)) = \gamma_{t+s}^+(A)$, para todo $t,s \geq 0$, sendo que $\gamma_s^+(A) := \bigcup_{t\geq s} V_t(A)$.*

Proposição 2.1.2 *Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo. Para cada conjunto compacto $K \subset X$ e $t \in \mathbb{R}_+$, o conjunto $\gamma_{[0,t]}^+(K)$ é compacto.*

Definição 2.1.3

1. *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é* ***positivamente invariante*** *se $V_t(A) \subset A$, para todo $t \geq 0$;*

2. *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é* ***negativamente invariante*** *se $A \subset V_t(A)$, para todo $t \geq 0$;*

3. *Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é **invariante** se $A = V_t(A)$, para todo $t \geq 0$, ou seja, quando A é positivamente e negativamente invariante.*

Definição 2.1.4 *Sejam A e M subconjuntos não-vazios de X. Dizemos que A **atrai** M pelo semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$, se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que $V_t(M) \subset O_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t(\varepsilon, M)$. Dizemos que A atrai um ponto $x \in X$, se atrai o conjunto unitário $\{x\}$.*

Definição 2.1.5 *Seja A um subconjunto não-vazio de X.*

1. *Se A atrai cada ponto $x \in X$, então A é chamado um **atrator global de pontos**.*

2. *Se A atrai cada conjunto limitado $B \in \mathcal{B}(X)$, então A é chamado um **B-atrator global**.*

3. *Se A é um atrator global de pontos fechado (ou um B-atrator global fechado) e qualquer subconjunto próprio fechado de A não é um atrator global de pontos (ou um B-atrator global), então A é chamado um **atrator global de pontos minimal fechado** (ou um **B-atrator global minimal fechado**).*

Exemplo 2.1.2 *[10] Seja o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x^2), t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

O atrator global é $\mathcal{A} = [-1, 1]$. O atrator global de pontos é $\mathcal{A}' = \{-1, 0, 1\}$.

Definição 2.1.6

1. *Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global limitado, dizemos que $\{V_t\}$ é **B-dissipativo**;*

2. *Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um atrator global de pontos limitado, dizemos que $\{V_t\}$ é **pontualmente dissipativo**.*

Definição 2.1.7 *Seja $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.*

1. *Se para cada $x \in X$ existe um $t(x) \geq 0$ tal que $V_t(x) \in A$ para todo $t \geq t(x)$, então A é chamado **absorvente**.*

2. *Se para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $t(B) \geq 0$ tal que $V_t(B) \subset A$, para todo $t \geq t(B)$, então A é chamado **B-absorvente**.*

Definição 2.1.8 *Para cada $x \in X$, e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, definimos os conjuntos $\omega-$**limites** da seguinte forma:*

- $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(x)}$;
- $\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}$.

Lema 2.1.1 *Para um elemento y pertencer ao conjunto ω-limite, $\omega(A)$, é necessário e suficiente que exista uma sequência de elementos $\{x_n\} \subset A$ e uma sequência de números $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, tais que $y = \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x_n)$.*

Lema 2.1.2 *Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e seja $F \neq \emptyset$ um subconjunto fechado de X. Se F atrair um subconjunto $A \neq \emptyset$ de X, então $\omega(A) \subset F$. Em particular, se $\omega(A)$ atrai A, então ele será o conjunto minimal fechado que atrai A.*

Lema 2.1.3 *Seja A um subconjunto não-vazio de X, então $\omega(A)$ é positivamente invariante.*

Lema 2.1.4 *Sejam $\{V_t\}$ um semigrupo e $K \neq \emptyset$ um conjunto compacto que atrai $A \neq \emptyset$. Então cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $x_n \in A$, para todo n e $t_n \to \infty$, contém uma subsequência convergente.*

Lema 2.1.5 *Sejam $\{V_t\}$ um semigrupo e $A \neq \emptyset$. Se cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $x_n \in A$, para todo n e $t_n \to \infty$, contém uma subsequência convergente, então $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não-vazio que atrai A e $\omega(A)$ é compacto.*

Segue o seguinte corolário dos dois lemas anteriores.

Corolário 2.1.1 *$\omega(A)$ é um conjunto compacto não-vazio que atrai A se, e somente se, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $(x_n) \subset A$ e $t_n \to \infty$, contém um subsequência convergente.*

Lema 2.1.6 *Sejam $\{V_t\}$ um semigrupo e $A \neq \emptyset$. Se $\omega(A)$ é um compacto que atrai A, então $\omega(A)$ é invariante.*

Teorema 2.1.1 *Seja $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ um semigrupo. Seja $K \neq \emptyset$ um compacto que atrai $A \neq \emptyset$. Então $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não-vazio que atrai A, é compacto e invariante.*

Lema 2.1.7 *Seja $\{V_t\}$ um semigrupo. Então para qualquer $A \neq \emptyset$ e para qualquer $T \geqslant 0$ temos $\omega(A) = \omega(\gamma_T^+(A))$.*

2.1.1 Formas críticas de atratores minimais fechados

Teorema 2.1.2 *1. Se $F \subset X$ é um B-atrator global fechado, então $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)}$ é um B-atrator global, então ele é o B-atrator global minimal fechado e é positivamente invariante;*

2. Se $F \subset X$ é um atrator global de pontos fechado, então $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$ é um atrator global de pontos, então ele é o atrator global de pontos minimal fechado e é positivamente invariante.

Teorema 2.1.3 *Seja $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ um semigrupo.*

1. Se para cada $x \in X$ o conjunto ω-limite, $\omega(x)$, atrai x, então $\{V_t\}$ tem um único atrator global de pontos minimal fechado positivamente invariante dado por $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$;

2. Se para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ o conjunto ω-limite, $\omega(B)$, atrai B, então $\{V_t\}$ tem um único atrator global de pontos minimal fechado positivamente invariante dado por $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$ e um único B-atrator global minimal fechado positivamente invariante dado por $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)}$.

2.1.2 Comparação de diferentes classes de semigrupos

Definição 2.1.9 *Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ é de **classe K**, se $V_t : X \to X$ é um operador compacto para cada $t > 0$, isto é, para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ sua imagem $V_t(B)$ é relativamente compacto (tem fecho compacto);*

Definição 2.1.10 *Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ é de **classe AK**, se para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, contém uma subsequência convergente.*

Teorema 2.1.4 *Seja $\{V_t\}$ um semigrupo de classe K. Sejam $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ e suponha que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}(X)$ para algum $T \geqslant 0$. Então:*

1. $\omega(A)$ é não-vazio e compacto;

2. $\omega(A)$ atrai A;

3. $\omega(A)$ é invariante;

4. $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado que atrai A;

5. $\omega(A)$ *é conexo, se* A *é conexo e o semigrupo* $\{V_t\}$ *é contínuo.*

Teorema 2.1.5 *Se* $\{V_t\}$ *é de classe K e B-dissipativo, então existe um B-atrator global minimal fechado não-vazio que é compacto e invariante.*

Proposição 2.1.3 *Seja* $\{V_t\}$ *um semigrupo contínuo de classe AK. Suponha que* $K \neq \emptyset$ *é um conjunto compacto tal que* $\gamma^+(K)$ *é limitado. Então* $\gamma^+(K)$ *é relativamente compacto e assim,* $\omega(K)$ *é um conjunto não-vazio, compacto, invariante e atrai* K.

Teorema 2.1.6 *Seja* $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ *um semigrupo contínuo de classe AK, limitado e pontualmente dissipativo. Então, existe um B-atrator global minimal fechado, não-vazio, compacto e invariante. Ele é conexo, se existe* $B \in \mathcal{B}(X)$ *conexo tal que ele está contido em* B. *Em particular, se* X *é um espaço de Banach, então ele também é conexo.*

Definição 2.1.11 *Um semigrupo* $\{V_t\}_{t\geqslant 0}$ *é chamado* ***uniformemente compacto*** *para t grande, se para cada* $B \in \mathcal{B}$ *existe* $t(B) \geqslant 0$ *tal que* $\gamma^+_{t(B)}(B) = \bigcup_{t\geqslant t(B)} V_t(B)$ *é relativamente compacto em* X.

Definição 2.1.12 *O semigrupo* $\{V_t\}$ *é chamado* ***assintoticamente suave****, *se para qualquer conjunto fechado, limitado, positivamente invariante e não-vazio* $B \subset X$, *existir um conjunto compacto* $J \subset B$ *tal que* J *atrai* B. *Se, além disso,* $\{V_t\}$ *for um* C^0*-semigrupo, então* $\{V_t\}$ *é chamado* ***assintoticamente suave***.

Proposição 2.1.4 *Um semigrupo* $\{V_t\}$ *é assintoticamente suave* se, e somente se, dado* $B \subset X$ *fechado, limitado e não-vazio, existe um conjunto compacto* $J \subset X$ *tal que* J *atrai* $L := \{x \in B : V_t(x) \in B, \text{ para todo } t \geqslant 0\}$.

Definição 2.1.13 *Dizemos que um semigrupo* $\{V_t\}$ *é de* ***classe B-ACP*** *(propriedade B - assintoticamente compacto) se para qualquer* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\gamma^+_{t_1(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, *para um certo* $t_1(B) \geqslant 0$, *existe* $t_2(B) \geqslant t_1(B)$ *tal que para qualquer* $t \geqslant t_2(B)$, *existem um conjunto compacto* $K(B,t) \subset X$ *e* $\varepsilon(B,t) > 0$ *satisfazendo* $V_t(B) \subset O_{\varepsilon(B,t)}(K(B,t))$ *e* $\varepsilon(B,t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Definição 2.1.14 *Dizemos que um semigrupo* $\{V_t\}$ *é de* ***classe B-K*** *se para qualquer* $B \in \mathcal{B}(X)$ *existe* $t(B) \geqslant 0$ *tal que* $V_t(B)$ *é relativamente compacto para qualquer* $t \geqslant t(B)$.

Definição 2.1.15 *Dizemos que um semigrupo* $\{V_t\}$ *é de* ***classe B-AK*** *se* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$, *para um certo* $t(B) \geqslant 0$, *então para quaisquer sequências* $\{x_n\} \subset B$ *e* $t_n \to \infty$, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ *contém uma subsequência convergente.*

Teorema 2.1.7 *Sejam $\{V_t\}$ um semigrupo de classe B-ACP e $A \neq \emptyset$. Suponha que existe um $T \geqslant 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}(X)$. Então $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não-vazio que atrai A. Além disso, $\omega(A)$ é compacto e invariante.*

Lema 2.1.8 *Sejam $\{V_t\}$ um semigrupo de classe AK (ou de classe B-AK) e $A \neq \emptyset$. Suponha que existe um $T \geqslant 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}(X)$, então $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não-vazio que atrai A, e é compacto e invariante.*

Proposição 2.1.5 *Se A é conexo e $\{V_t\}$ é contínuo de classe AK (ou B-AK ou B-ACP) e existe $T \geqslant 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}(X)$, então $\omega(A)$ é conexo.*

O próximo teorema estabelece as relações entre as classes de semigrupos.

Teorema 2.1.8 *Seja $\{V_t\}$ um semigrupo, então:*

1. *$\{V_t\}$ é de classe K $\Rightarrow$ $\{V_t\}$ é de classe B-K $\Rightarrow$ $\{V_t\}$ é de classe AK;*
2. *$\{V_t\}$ é de classe B-ACP $\iff$ $\{V_t\}$ é assintoticamente suave* $\iff$ $\{V_t\}$ é de classe AK $\iff$ $\{V_t\}$ é de classe B-AK;*
3. *$\{V_t\}$ é uniformemente compacto para algum t grande $\iff$ $\{V_t\}$ é B-limitado e de classe B-K.*

2.2 Definições e resultados básicos sobre processos

Seja X um espaço métrico completo e denotaremos $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X.

Definição 2.2.1 *Um **processo de evolução** em X é uma família de aplicações*

$$\{S(t,s): X \to X;\ t \geqslant s;\ t,s \in \mathbb{R}\} \subset C(X)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *$S(t,t) = I_d$, para todo $t \in \mathbb{R}$;*
2. *$S(t,s) = S(t,\tau)S(\tau,s)$, para todo $t \geqslant \tau \geqslant s$.*

*Se a aplicação $\{(t,s) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; t \geqslant s\} \times X \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x$ for contínua, diremos que o processo de evolução é **contínuo**.*

Observação 2.2.1 *Note que $S(t,s)$ toma cada estado x do sistema no instante inicial s e evoluciona para o estado $S(t,s)x$ do sistema no tempo final t, onde $-\infty < s \leq t < \infty$.*

Observação 2.2.2 *Observemos que, para um $\theta \in \mathbb{R}^+$ fixo, o operador $S(\theta+\tau,\tau)$ pode ser um operador distinto para cada valor de $\tau \in \mathbb{R}$. Isto indica que, além do tempo decorrido θ, também o tempo inicial τ pode desempenhar um papel importante no processo de evolução.*

Definição 2.2.2 *Os processos $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ para os quais $S(t,s) = S(t-s,0)$ para $t \geqslant s$ são chamados de **processos de evolução autônomos**.*

Proposição 2.2.1 *Dado um processo de evolução autônomo $\{S(t-s,0),\ t \geqslant s\}$, a família de operadores $\{V_t\}_{t \geqslant 0}$, dada por $V_t := S(t,0)$, é um semigrupo. Além disso, se o processo de evolução autônomo for contínuo, então o semigrupo $\{V_t\}_{t \geqslant 0}$ é contínuo.*

Observação 2.2.3 *Note que num processo de evolução autônomo $\{S(t,s) = S(t-s,0);\ t \geqslant s\}$ a evolução do estado x ocupado num instante s para o estado $S(t+s,s)x = S(t+s-s,0)x = S(t,0)x$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t. Assim, num processo de evolução autônomo, o tempo decorrido determina a evolução.*

Observação 2.2.4 *Para um processo de evolução autônomo $\{S(t-s,0);\ t \geqslant s\}$ o comportamento das soluções quando $t \to \infty$, chamado a dinâmica forward, é o mesmo que o comportamento das soluções quando $s \to -\infty$, chamado a dinâmica pullback. Para os processos de evolução gerais, estes dois limites dinâmicos (ou comportamento assintóticos) não estão relacionados e podem produzir propriedades qualitativas diferentes.*

A partir de agora, usaremos a notação $S(t,s) = S(t-s), t \geqslant s$, para processos de evolução autônomos e dizemos que o processo de evolução autônomo $\{S(t-s),\ t \geqslant s\}$ é o processo associado ao semigrupo $\{S(t) = V_t\}$.

Definição 2.2.3 *Dado $t \in \mathbb{R}$, um conjunto $B(t) \subset X$ **atrai pullback** limitados de X em t sob a ação de $S(t,s)$ se $dist(S(t,s)D, B(t)) \to 0$ quando $s \to -\infty$ para cada limitado D de X. Ou seja, se existe $T = T(t,D) \leqslant t$ tal que $S(t,s)D \subset B(t)$, para todo $s \leqslant T$ e para cada limitado D de X.*

Definição 2.2.4 *Uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é **invariante** sob*

$$\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$$

se $S(t,\tau)A(\tau) = A(t)$, para todo $t \geqslant \tau \in \mathbb{R}$.

Definição 2.2.5 *Dizemos que uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos compactos de X é um* ***atrator pullback*** *para $S(t,s)$ se é invariante, atrai pullback subconjuntos limitados de X e é a família de conjuntos fechados que é minimal com a propriedade de atrair pullback subconjuntos limitados.*

2.2.1 Processos pullback assintoticamente compactos

Definição 2.2.6 *Um processo de evolução $\{S(t,s)\}_{t\geqslant s}$ é dito* ***pullback assintoticamente compacto*** *se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e para cada sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $(-\infty,t]$ tal que $s_k \to -\infty$ quando $k \to -\infty$ a sequência limitada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X e $\{S(t,s_k)x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ é limitado, a sequência $\{S(t,s_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.*

Definição 2.2.7 *Um processo de evolução $\{S(t,s)\}_{t\geqslant s}$ é dito* ***pullback limitado dissipativo*** *se existe um conjunto limitado B em X que pullback absorve subconjuntos limitados de X.*

Teorema 2.2.1 *Se $\{S(t);\ t \geqslant 0\}$ é um semigrupo, o processo de evolução autônomo*

$$\{S(t-s); t \geqslant s\}$$

tem um atrator pullback se, e somente se, for pullback assintoticamente compacto e pullback limitado dissipativo.

Definição 2.2.8 *Seja $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ um processo de evolução de X e B um subconjunto de X. O conjunto* ***ω-limite pullback de B no instante t*** *é definido por $\omega(B,t) := \bigcap_{\theta\leqslant t} \overline{\bigcup_{s\leqslant\theta} S(t,s)B}$.*

Lema 2.2.1 *Seja $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ um processo de evolução em X.*

1. *Se $B \subset X$, então $S(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$ para cada $t \geq s$;*
2. *Se B é tal que $\omega(B,s)$ é compacto e pullback atrai B no instante s então para cada $t \geq s$ temos $S(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t)$.*

Teorema 2.2.2 *Seja $\{S(t,s); t \geqslant s\}$ um processo de evolução em X. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\{S(t,s); t \geqslant s\}$ tem um atrator pullback $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$;*
2. *Existe uma família de conjuntos compactos $\{K(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ que pullback atraem subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t,s)\}_{t\geqslant s}$.*

Em qualquer um dos casos, $A(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B,t)}$.

Lema 2.2.2 *Se F é um fechado que pullback atrai o conjunto A no tempo t, então* $\omega(A,t) \subset F$.

Lema 2.2.3 *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\bigcup_{s\leqslant s_0} S(t,s)B}$ é compacto para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leqslant t$, então $\omega(B,t)$ é não-vazio, compacto e pullback atrai B no instante t.*

Lema 2.2.4 *Se $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ é um processo de evolução pullback assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio limitado de X tal que $\overline{\bigcup_{\tau\leqslant s_0} S(t,\tau)B}$ é limitado para algum $s_0 \in (-\infty,t]$, então $\omega(B,t)$ é não-vazio, compacto e atrai pullback B no tempo t.*

Lema 2.2.5 *Se $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então para cada $t \in \mathbb{R}$ e para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, $\omega(B,t) \neq \emptyset$ é compacto e pullback atrai B no instante t. Além disso, para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, $\{\omega(B,t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante.*

Teorema 2.2.3 *Se $\{S(t,s);\ t \geqslant s\}$ é pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $A(t) := \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B,t)}$ é fechado, pullback atrai subconjuntos limitados de X no instante t, e a família $\{A(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ é invariante e é minimal entre as famílias $\{B(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ tal que $B(t)$ é fechado e pullback atrai limitados de X no tempo t.*

2.3 Definições e resultados básicos sobre semigrupos multívocos

Seja X um espaço métrico completo com a métrica denotada por ρ, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ e 2^X o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Para a aplicação multívoca denote $D(F) = \{x \in X;\ F(x) \in \mathcal{P}(X)\} = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}$.

Definição 2.3.1 *A aplicação multívoca $\mathcal{G} : \mathbb{R}_+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ é chamada de um* ***semigrupo multívoco (ou m-semifluxo)*** *se satisfazer as seguintes condições:*

1. $\mathcal{G}(0,\cdot) = I_d$;
2. $\mathcal{G}(t_1+t_2,x) \subset \mathcal{G}(t_1,\mathcal{G}(t_2,x))$, *para todo $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$ e para todo $x \in X$, para o qual $\mathcal{G}(t,B) = \bigcup_{x\in B} \mathcal{G}(t,x)$, $B \subset X$.*

Definição 2.3.2 *Diz-se que o conjunto $A \subset X$* ***atrai*** *o conjunto B pelo semigrupo multívoco $\mathcal{G}$ se $dist(\mathcal{G}(t,B),A) \to 0$ quando $t \to \infty$.*

Definição 2.3.3 *Para cada $M \subset X$ denota-se:*

1. $\gamma_t^+(M) = \bigcup_{\tau \geqslant t} \mathcal{G}(\tau, M)$;

2. $\gamma^+(M) = \gamma_0^+(M)$;

3. $\gamma_{[t_1,t_2]}^+(M) = \bigcup_{\tau \in [t_1,t_2]} \mathcal{G}(\tau, M)$;

4. $\omega(M) := \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(M)}$

Observação 2.3.1 *1.* $\gamma_{t_1}^+(M) \subset \gamma_{t_2}^+(M)$, *para todo* $t_1 \geqslant t_2$;

2. $\omega(M_1) \subset \omega(M_2)$ *se* $M_1 \subset M_2$;

3. $\omega(M) = \{\xi;\ \xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n,\ \xi_n \in \mathcal{G}(t_n, M),\ t_n \to \infty\}$.

Definição 2.3.4 *O semigrupo multívoco* $\mathcal{G}$ *é chamado de* ***assintoticamente semicompacto superiormente*** *se para todo* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que existe* $T(B) \geqslant 0$ *de modo que* $\gamma_{T(B)}^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, *qualquer sequência* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_n \in \mathcal{G}(t_n, B)$, $t_n \to \infty$ *quando* $n \to \infty$, *é precompacta em* X.

Definição 2.3.5 *1. O conjunto A é* ***negativamente invariante*** *se* $A \subset \mathcal{G}(t, A)$ *para todo* $t \geq 0$;

2. *O conjunto A é* ***positivamente invariante*** *se* $\mathcal{G}(t, A) \subset A$ *para todo* $t \geq 0$;

3. *O conjunto A é* ***invariante*** *se* $\mathcal{G}(t, A) = A$ *para todo* $t \geq 0$.

Proposição 2.3.1 *Se uma aplicação multívoca* $\mathcal{G}(t, \cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ *for semicontínua superiormente e tem valores fechados, então o gráfico da* $\mathcal{G}(t, \cdot)$ *é fechado.*

Teorema 2.3.1 *Seja* $\mathcal{G}(t, \cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ *uma aplicação semicontínua superiormente para todo* $t \in \mathbb{R}_+$. *Se existe um compacto* $K \subset X$ *tal que para todo* $B \in \mathcal{B}(X)$, $dist(\mathcal{G}(t, B), K) \to 0$ *quando* $t \to \infty$, *então o semigrupo multívoco* $\mathcal{G}$ *possui um B-atrator global compacto negativamente invariante* $R \subset K$ *o qual é minimal entre todos os B-atratores globais fechados.*

A próxima versão não supõe dissipatividade e é mais branda, isto é, o B-atrator será somente localmente compacto.

Teorema 2.3.2 *Seja* $\mathcal{G}$ *um semigrupo multívoco assintoticamente semicompacto superiormente. Suponha que* $\mathcal{G}(t, \cdot) : X \to \mathcal{C}(X)$ *seja semicontínua superiormente para qualquer* $t \geq 0$. *Se para todo* $B \in \mathcal{B}(X)$ *existe* $T(B) \geq 0$ *tal que* $\gamma_{T(B)}^+(B) \in \mathcal{B}(X)$, *então* $\mathcal{G}$ *possui um B-atrator global negativamente invariante R definido por* $\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(B)$, *que é localmente compacto em alguma topologia* τ_+. *Além disso, para qualquer conjunto fechado Z atraindo cada* $B \in \mathcal{B}(X)$, *tem-se* $R \subset Z$.

2.3.1 Semigrupos multívocos definidos por semifluxos generalizados

Definição 2.3.6 *Um **semifluxo generalizado** $\mathcal{G}$ sobre X é uma família de aplicações $\varphi : [0,\infty) \to X$ satisfazendo as seguintes condições:*

H1- para cada $z \in X$ existe pelo menos uma $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = z$;

H2 - se $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\tau \geq 0$, então $\varphi^\tau \in \mathcal{G}$, onde $\varphi^\tau(t) = \varphi(t+\tau)$ para todo $t \in [0,\infty)$;

H3 - se $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ e $\psi(0) = \varphi(t)$ para algum $t \geq 0$, então $\theta \in \mathcal{G}$, onde

$$\theta(\tau) := \begin{cases} \varphi(\tau), \text{ para } \tau \in [0,t); \\ \psi(\tau - t), \text{ para } \tau \in [t,\infty). \end{cases}$$

H4 - se $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ e $\varphi_j(0) \to z$ quando $j \to \infty$, então existe uma subsequência $\{\varphi_\mu\}$ de $\{\varphi_j\}$ e $\varphi \in \mathcal{G}$ com $\varphi(0) = z$ tal que $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$, para cada $t \geq 0$.

Observação 2.3.2 *Dizemos que $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado **contínuo** se cada $\varphi \in \mathcal{G}$ é uma aplicação contínua de $[0,\infty)$ em X.*

Definição 2.3.7 *Um **semigrupo multívoco** $\{T_{\mathcal{G}}(t)\}_{t\geq 0}$ definido por $\mathcal{G}$ é uma família de operadores multívocos $T_{\mathcal{G}}(t) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que para cada $t \geq 0$*

$$T_{\mathcal{G}}(t)E := \{\varphi(t);\ \varphi \in \mathcal{G} \text{ com } \varphi(0) \in E\}.$$

Observação 2.3.3 *Usaremos $T = T_{\mathcal{G}}$.*

Proposição 2.3.2 *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo em $\mathcal{P}(X)$, isto é,*

1. *$T(0) = I_d$ e $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;*

2. *$T(t)$ é monótono com relação a ordem parcial de inclusão de conjuntos, isto é, se $E \subset F$, então $T(t)E \subset T(t)F$, para todo $t \geq 0$;*

3. *$T(t)x$ é compacto para cada $x \in X$;*

4. *se $\{K_n\}_{n\geq 1} \subset K(X)$ é tal que $dist(K_n, K) \to 0$ quando $n \to \infty$, então $dist(T(t)K_n, T(t)K) \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo $t \geq 0$;*

5. *$T(t) : X \to K(X)$ é semicontínua superiormente e tem gráfico fechado para cada $t \geq 0$.*

Definição 2.3.8 *As **órbitas positivas** de $\varphi \in \mathcal{G}$ e $E \subset X$, são dadas por $\gamma^+(\varphi) = \{\varphi(t); t \geq 0\}$ e $\gamma^+(E) = \bigcup_{t\geq 0} T(t)E$.*

Definição 2.3.9 *Dizemos que existe uma **órbita completa** passando por $x \in X$ se existir uma aplicação $\psi : \mathbb{R} \to X$ tal que, para cada $s \in \mathbb{R}$, $\psi^s |_{\mathbb{R}_+} \in \mathcal{G}$ e $\psi(0) = x$.*

Definição 2.3.10 *Dizemos que:*

1. *$A \subset X$ é **positivamente invariante** se $T(t)A \subset A$, para todo $t \geq 0$;*
2. *$A \subset X$ é **negativamente invariante** se $A \subset T(t)A$, para todo $t \geq 0$;*
3. *$A \subset X$ é **invariante** se $T(t)A = A$, para todo $t \geq 0$;*
4. *$A \subset X$ é **quasi-invariante** se para cada $z \in A$ existir uma órbita completa ψ passando por z e $\psi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Proposição 2.3.3 *Invariante $\Rightarrow$ quasi-invariante $\Rightarrow$ negativamente invariante.*

Definição 2.3.11 *Seja $E \subset X$, $\omega(E) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(E)}$.*

Definição 2.3.12 *Dizemos que $\emptyset \neq A \subset X$ **atrai** um conjunto $\emptyset \neq E \subset X$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\varepsilon, E) \geq 0$ tal que $T(t)E \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq \tau$, ou equivalentemente,*

$$dist(T(t)E, A) \to 0$$

quando $t \to \infty$.

Definição 2.3.13

1. *O conjunto A é um **B-atrator global** se ele atrai todos os conjuntos limitados de X;*
2. *O conjunto A é um **atrator global de pontos** se ele atrai todos os pontos de X.*

Definição 2.3.14

1. *$\mathcal{G}$ é **limitado dissipativo ou (B-dissipativo)** se existe um conjunto limitado que é um B-atrator global;*
2. *$\mathcal{G}$ é **ponto dissipativo** se existe um atrator global de pontos limitado;*
3. *$\mathcal{G}$ é **φ-dissipativo** se existe um conjunto limitado B_0 tal que para $\varphi \in \mathcal{G}$, $\varphi(t) \in B_0$ para todo t suficientemente grande.*

Observação 2.3.4 *B-dissipativo $\Rightarrow$ ponto dissipativo $\Rightarrow$ φ-dissipativo.*

Definição 2.3.15 *$\mathcal{G}$ é **compacto** se, para cada sequência $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\{\varphi_j(0)\} \in \mathcal{B}(X)$, existe uma subsequência $\{\varphi_{jk}\}$ de $\{\varphi_j\}$ tal que $\{\varphi_{jk}(t)\}$ é convergente para cada $t > 0$.*

Definição 2.3.16 *$\mathcal{G}$ é* ***assintoticamente compacto*** *se, para cada sequência* $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{G}$ *com* $\{\varphi_j(0)\} \in \mathcal{B}(X)$, *e para cada sequência* $\{t_j\}$ *com* $t_j \to \infty$, *a sequência* $\{\varphi_j(t_j)\}$ *tem uma subsequência convergente.*

Definição 2.3.17 *$\mathcal{G}$ é* ***condicionalmente assintoticamente compacto*** *se, para cada* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$ *para algum* $\tau(B) \geq 0$, *cada sequência* $\{\xi_n\}$ *com* $\xi_n \in T(t_n)B$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $t_n \to \infty$, *contém uma subsequência convergente.*

Lema 2.3.1 *Seja $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto. Se* $B \in \mathcal{BC}(X)$ *é negativamente invariante, então B é compacto.*

2.3.2 Atratores para semifluxos generalizados

Lema 2.3.2 *Seja* $F \in \mathcal{C}(X)$. *Se F atrai um subconjunto* $A \in \mathcal{P}(X)$, *então* $\omega(A) \subset F$. *Se* $\omega(A)$ *atrai A, então* $\omega(A)$ *é o minimal fechado que atrai A. Também, para cada* $A \in \mathcal{P}(X)$ *e cada* $\tau \geq 0$, *temos* $\omega(\gamma^+_\tau(A)) = \omega(A)$.

Teorema 2.3.3

1. *Se* $F \subset X$ *é um atrator global de pontos fechado, então* $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)} \subset F$. *Particularmente, se* $\overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}$ *é um atrator global de pontos, então ele precisa ser o atrator global de pontos minimal fechado.*

2. *Se para cada* $x \in X$, $\omega(x)$ *atrai x, então $\mathcal{G}$ tem o atrator global de pontos minimal fechado.*

Teorema 2.3.4

1. *Se* $F \subset X$ *é um B-atrator global fechado, então* $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)} \subset F$. *Particularmente, se* $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)}\omega(B)}$ *for um B-atrator global, então ele será o minimal fechado.*

2. *Se para cada* $B \in \mathcal{B}(X)$, $\omega(B)$ *atrai B, então $\mathcal{G}$ tem o B-atrator global minimal fechado.*

Lema 2.3.3 *Seja* $A \in \mathcal{P}(X)$. *Se cada sequência* $\{\xi_n\}$ *com* $\xi_n \in T(t_n)A$ *e* $t_n \to \infty$ *contém uma subsequência convergente em X, então* $\omega(A)$ *é o conjunto minimal fechado não-vazio que atrai A e, além disso,* $\omega(A)$ *é compacto e quasi-inavriante.*

Teorema 2.3.5 $\omega(A)$ *é não-vazio, quasi-invariante e compacto que atrai A se, e somente se, cada sequência* $\{\xi_n\}$, *com* $\xi_n \in T(t_n)A$, $t_n \to \infty$, *contém uma subsequência convergente em X.*

Teorema 2.3.6 *Seja $\mathcal{G}$ condicionalmente assintoticamente compacto e* $A \in \mathcal{P}(X)$. *Se existir* $\tau \geq 0$ *tal que* $\gamma^+_\tau(A) \in \mathcal{B}(X)$, *então* $\omega(A)$ *é um conjunto não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o conjunto minimal fechado que atrai A.*

Definição 2.3.18 *Dizemos que $\mathcal{G}$ é de classe* ***B-ACP****, se para qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+_{t_1(B)}(B) \in \mathcal{B}(X)$ para algum $t_1(B) \geq 0$, existir um tempo $t_2(B) \geq t_1(B)$ tal que para qualquer $t \geq t_2(B)$, existem um conjunto compacto $K(B,t) \subset X$ e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}K(B,t)$ e $\varepsilon(B,t) \to 0$ quando $t \to \infty$.*

Teorema 2.3.7 *Seja $\mathcal{G}$ de classe B-ACP e $A \in \mathcal{P}(X)$. Se existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma^+_\tau(A) \in \mathcal{B}(X)$, então $\omega(A)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o minimal fechado que atrai A.*

Proposição 2.3.4 *$\mathcal{G}$ é de classe B-ACP se, e somente se, $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto.*

Definição 2.3.19 *Dizemos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ define um* ***eventual semigrupo*** *se existe um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que para qualquer $B \in \mathcal{B}(X)$, existe um $\tau_0 = \tau_0(B) > 0$ tal que, se $\tau \geq \tau_0$ e $x_\tau \in T(\tau)B$, então para cada $t \geq 0$, $T(t)x_\tau = S(t)x_\tau$, onde $T = T_\mathcal{G}$ é o semigrupo multívoco definido por $\mathcal{G}$.*

Teorema 2.3.8 *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado que define um eventual semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e seja $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\gamma^+_{\tau_1}(B_0) := \bigcup_{t\geq\tau_1} T(t)B_0 \in \mathcal{B}(X)$ para algum $\tau_1 = \tau_1(B_0) \geq 0$. Se o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de classe K, ou classe AK, ou classe B-AK, ou B-ACP, então:*

1. *$\omega(B_0)$ é não-vazio, compacto e invariante por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$;*

2. *$\omega(B_0)$ atrai B_0;*

3. *$\omega(B_0)$ é o conjunto minimal fechado que atrai B_0.*

Capítulo 3

Processos multívocos definidos por processos generalizados

3.1 Notações, definições e algumas propriedades dos processos generalizados

Lembrando que utilizaremos as seguintes notações.
Seja (X,ρ) um espaço métrico completo.
$\mathcal{P}(X) := \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$.
$\mathcal{B}(X) := \{B \subset X : B \neq \emptyset$ é um conjunto limitado em $X\}$.
$\mathcal{C}(X) := \{C \subset X : C \neq \emptyset$ é um conjunto fechado em $X\}$.
$\mathcal{K}(X) := \{K \subset X : K \neq \emptyset$ é um conjunto compacto em $X\}$.

Para $x \in X$ e $A,B \in \mathcal{P}(X)$, e $\varepsilon > 0$ temos

$\rho(x,A) := \inf_{a\in A}\{\rho(x,a)\}$;
$\mathrm{dist}(A,B) := \sup_{a\in A}\{\rho(a,B)\} = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\{\rho(a,b)\}$;
$O_\varepsilon(A) := \{z \in X; \rho(z,A) < \varepsilon\}$.

Definição 3.1.1 *Um **processo generalizado** $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ em X é uma família de conjuntos de funções $\mathcal{G}(\tau)$ consistindo de aplicações $\varphi : [\tau,\infty) \to X$, satisfazendo as condições:*

C1- Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $z \in X$ existe no mínimo um $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ com $\varphi(\tau) = z$;

C2- Se $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ e $s \in \mathbb{R}_+$, então $\varphi^{+s} \in \mathcal{G}(\tau+s)$, sendo que $\varphi^{+s} := \varphi_{|[\tau+s,\infty)}$;

C3- Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\tau)$ e $\varphi_j(\tau) \to z$, então existe uma subsequência $\{\varphi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ com $\varphi(\tau) = z$ tais que $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ para cada $t \geq \tau$.

Observação 3.1.1 *Dados $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ e $s \geq 0$, considerando a transladada $\varphi^s(t) := \varphi(t+s)$ para* *todo $t \in [\tau, \infty)$ temos Domínio$(\varphi^{+s}) \neq$ Domínio(φ^s), mas Imagem$(\varphi^{+s}) =$ Imagem(φ^s) pois $\varphi^{+s}(\ell) = \varphi(\ell) = \varphi(\ell - s + s) = \varphi^s(\ell - s)$ para todo $\ell \geq \tau + s$.*

Definição 3.1.2 *Um processo generalizado $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{R}}$ que satisfaz a condição*

C4- (Concatenação) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ com $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$, $\psi \in \mathcal{G}(r)$ e $\varphi(s) = \psi(s)$ para algum $s \geq r \geq \tau$, então $\theta \in \mathcal{G}(\tau)$, onde $\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), t \in [\tau, s] \\ \psi(t), t \in (s, \infty) \end{cases}$,
é chamado um ***processo generalizado exato (ou estrito)***.

Definição 3.1.3 *Dizemos que um* ***processo generalizado exato $\mathcal{G}$ é contínuo*** *se para cada $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ é uma aplicação contínua de $[\tau, \infty)$ em X.*

Definição 3.1.4 *Um* ***processo multívoco $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$ definido por*** *$\mathcal{G}$ é uma família de operadores multívocos $U_{\mathcal{G}}(t,\tau) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ com $-\infty < \tau \leq t < +\infty$, tal que para cada $\tau \in \mathbb{R}$*

$$U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E = \{\varphi(t); \varphi \in \mathcal{G}(\tau),\ com\ \varphi(\tau) \in E\},\ t \geq \tau.$$

Agora, vamos provar algumas propriedades de $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$.

Teorema 3.1.1 *[18] Seja $\mathcal{G}$ um processo generalizado exato, ou seja, valem $(C1) - (C4)$. Se $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$ é um processo multívoco definido por $\mathcal{G}$, então $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t \geq \tau}$ é um processo multívoco exato em $\mathcal{P}(X)$, i.e.,*

1. $U_{\mathcal{G}}(t,t) = Id_{\mathcal{P}(X)}$

2. $U_{\mathcal{G}}(t,\tau) = U_{\mathcal{G}}(t,s)U_{\mathcal{G}}(s,\tau)$ *para todo* $-\infty < \tau \leq s \leq t < +\infty$.

Demonstração: Seja $E \subset X$ um conjunto qualquer.

1. Seja $z \in U_{\mathcal{G}}(t,t)E$. Vamos mostrar que $z \in E$. Pela definição de processo multívoco, existe $\varphi \in \mathcal{G}(t)$ tal que $\varphi(t) = z$ e $\varphi(t) \in E$. Então, $z = \varphi(t) \in E$.

Para provar a outra inclusão, pegue $z \in E$. De $(C1)$ existe no mínimo um $\varphi \in \mathcal{G}(t)$ tal que $\varphi(t) = z$. Logo, $z \in U_{\mathcal{G}}(t,t)E$.

Portanto, $U_{\mathcal{G}}(t,t) = Id_{\mathcal{P}(X)}$.

2. Seja $v \in E$ e $z \in U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, \tau)v$. Então, pela definição de processo multívoco, existe $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi(t_1 + t_2) = z$ e $\varphi(\tau) = v$. É claro que $\varphi(t_2) \in U_{\mathcal{G}}(t_2, \tau)v$. Definindo $\psi(t) := \varphi(t)$, para todo $t \geq t_2$, temos $\psi \in \mathcal{G}(t_2)$ e $\psi(t_2) = \varphi(t_2)$ o que implica

$$z = \varphi(t_1 + t_2) = \psi(t_1 + t_2) \in U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, t_2)U_{\mathcal{G}}(t_2, \tau)v,\ \forall\, t_1 \geq 0 \text{ e } t_2 \geq \tau.$$

Logo,

$$U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, \tau)v \subset U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, t_2)U_{\mathcal{G}}(t_2, \tau)v,\ \forall\, t_1 \geq 0 \text{ e } t_2 \geq \tau.$$

Como $v \in E$ foi arbitrário, podemos concluir que

$$U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, \tau)E \subset U_{\mathcal{G}}(t_1 + t_2, t_2)U_{\mathcal{G}}(t_2, \tau)E,\ \forall\, t_1 \geq 0 \text{ e } t_2 \geq \tau.$$

Por outro lado, dado $z \in U_{\mathcal{G}}(t_1+t_2,t_2)U_{\mathcal{G}}(t_2,\tau)v$ então existe $\psi \in \mathcal{G}(t_2)$ com $\psi(t_1+t_2) = z$ e $\psi(t_2) \in U_{\mathcal{G}}(t_2,\tau)v$. Então, existe $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi(t_2) = \psi(t_2)$ com $\varphi(\tau) = v$. Defina

$$\theta(t) := \begin{cases} \varphi(t), \; t \in [\tau,t_2] \\ \psi(t), \; t \in (t_2,\infty) \end{cases}.$$

De $(C4)$, temos $\theta \in \mathcal{G}(\tau)$ com $\theta(\tau) = \varphi(\tau) = v$. Então, $z = \psi(t_1+t_2) = \theta(t_1+t_2) \in U_{\mathcal{G}}(t_1+t_2,\tau)v$. Logo,

$$U_{\mathcal{G}}(t_1+t_2,t_2)U_{\mathcal{G}}(t_2,\tau)v \subset U_{\mathcal{G}}(t_1+t_2,\tau)v.$$

Visto que $v \in E$ foi arbitrário o resultado segue. ■

Proposição 3.1.1 *[18] Seja $\mathcal{G}$ um processo generalizado exato. Se $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é um processo multívoco definido por $\mathcal{G}$, então $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é monótono com respeito à ordem parcial de inclusão de conjuntos, i.e., $E \subset F$ implica $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)F$, para todo $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Demonstração: Seja $z \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E$. Então, pela definição do processo multívoco, existe $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi(t) = z$ e $\varphi(\tau) \in E$. Por hipótese, $E \subset F$, então $\varphi(\tau) \in F$. Logo, por definição, $z \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)F$. ■

Proposição 3.1.2 *[18] Seja $\mathcal{G}$ um processo generalizado exato. Se $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é um processo multívoco definido por $\mathcal{G}$, então $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$ é compacto para cada $x \in X$ e $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Demonstração: Considere $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$, $x \in X$ fixado. Então, por definição, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi_n(t) = z_n, \varphi_n(\tau) = x$.

Como $\varphi_n(\tau) = x \; \forall \; n$ temos $\varphi_n(\tau) \to x$ quando $n \to +\infty$. Então, de $(C3)$, existe $\{\varphi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ com $\varphi(\tau) = x$ tais que $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ para cada $t \geq \tau$. É claro que $\varphi(t) \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$. ■

Teorema 3.1.2 *[18] Seja $\mathcal{G}$ um processo generalizado exato e $\{U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo multívoco definido por $\mathcal{G}$. Se K é um subconjunto compacto de X e $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$é uma sequência de subconjuntos compactos de X tal que $dist(K_n,K) \to 0$ quando $n \to \infty$, então*

$$dist(U_{\mathcal{G}}(t,\tau)K_n, U_{\mathcal{G}}(t,\tau)K) \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

para cada $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.

Demonstração: Suponha que isso não seja verdade. Então deve existir um $\varepsilon_0 > 0$, uma subsequência $\{K_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e elementos $a_\mu \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)K_\mu$ tais que

$$\text{dist}(a_\mu, U_{\mathcal{G}}(t,\tau)K) > \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Nós temos $a_\mu = \varphi_\mu(t)$ com $\{\varphi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\tau)$ e $\varphi_\mu(\tau) \in K_\mu$, pela definição do processo multívoco. Como $\text{dist}(K_n,K) \to 0$ quando $n \to \infty$ e K é compacto existem $z \in K$ e uma subsequência de $\{\varphi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$, que não iremos renomear, tal que $\varphi_\mu(\tau) \to z$. De (C3), existem $\psi \in \mathcal{G}(\tau)$ e uma subsequência de $\{\varphi_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$, que chamaremos da mesma forma, tal que $\varphi_\mu(t) \to \psi(t)$, $\forall \; t \geq \tau$ e com $\psi(\tau) = z \in K$. Então $\psi(t) \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)K$, que contradiz (3.1). ■

Definição 3.1.5 *Sejam X, Y espaços métricos.*

1. *Uma aplicação $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ é **fracamente semicontínua superiormente** se para todo $x \in X$ e qualquer $\varepsilon-$vizinhança de $F(x)$, $O_\varepsilon(F(x))$, existe $\delta > 0$ tal que se $\rho(x,z) < \delta$, então $F(z) \subset O_\varepsilon(F(x))$.*

2. *Se trocarmos a $\varepsilon-$vizinhança O_ε por uma vizinhança qualquer O então F é chamada **semicontínua superiormente**.*

3. *F é **semicontínua inferiormente** se para todo $x \in X, x_n \to x$ e $y \in F(x)$, existe uma sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n \in F(x_n)$ e $y_n \to y$.*

4. *F é **contínua** se é semicontínua superiormente e inferiormente.*

Teorema 3.1.3 *[18] Seja $\mathcal{G}$ um processo generalizado exato. Se $\{U_\mathcal{G}(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ é um processo multívoco definido por $\mathcal{G}$, então $U_\mathcal{G}(t,\tau) : X \to \mathcal{K}(X)$ é uma aplicação semicontínua superiormente e tem gráfico fechado para todo $-\infty < \tau \leq t < +\infty$.*

Demonstração: Suponha que $x \mapsto U_\mathcal{G}(t,\tau)x$ não é uma aplicação semicontínua superiormente. Então, existem $x_0 \in X$, uma vizinhança $O(U_\mathcal{G}(t,\tau)x_0)$ e $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_\mathcal{G}(t,\tau)x_n$ com $\rho(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ tal que $\xi_n \notin O(U_\mathcal{G}(t,\tau)x_0)$. Como $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_\mathcal{G}(t,\tau)x_n$, existe $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\xi_n = \varphi_n(t)$ e $\varphi_n(\tau) = x_n \to x_0$ quando $n \to \infty$. De $(C3)$ existe uma subsequência de $\{\varphi_n\}$, que não iremos renomear, e $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $x_0 = \varphi(\tau)$ e $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$. Então, $\xi := \varphi(t) \in U_\mathcal{G}(t,\tau)x_0$ com $\xi_n \to \xi$ quando $n \to \infty$ o que é uma contradição. Portanto, $x \mapsto U_\mathcal{G}(t,\tau)x$ é semicontínua superiormente.

Para provar a segunda parte, considere o par (t,τ), $-\infty < \tau \leq t < +\infty$ fixado e uma sequência (x_n,y_n) tal que $y_n \in U_\mathcal{G}(t,\tau)x_n$ com $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em X. Como $x_n \to x$, dado $\delta > 0$ existe $n_0(\delta) > 0$ tal que $\rho(x_n,x) < \delta$, para todo $n \geq n_0(\delta)$. Pela semicontinuidade superior, dada uma $\frac{\varepsilon}{2}-$vizinhança de $U_\mathcal{G}(t,\tau)x$, $O_{\varepsilon/2}(U_\mathcal{G}(t,\tau)x)$, existe $\delta_0 > 0$ e $n_0 = n_0(\delta_0)$ tal que $U_\mathcal{G}(t,\tau)x_n \subset O_{\varepsilon/2}(U_\mathcal{G}(t,\tau)x)$, para todo $n \geq n_0$, i.e., $y_n \in O_{\varepsilon/2}(U_\mathcal{G}(t,\tau)x)$, para todo $n \geq n_0$. Como $y_n \to y$ então para um dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 = n_1(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho(y_n,y) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_1$. Considerando $N := \max\{n_0,n_1\}$ temos $\rho(y,U_\mathcal{G}(t,\tau)x) \leq \rho(y,y_N) + \rho(y_N,U_\mathcal{G}(t,\tau)x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Logo, $y \in O_\varepsilon(U_\mathcal{G}(t,\tau)x)$. Como ε foi qualquer e $U_\mathcal{G}(t,\tau)x$ é fechado, temos que $y \in U_\mathcal{G}(t,\tau)x$.
■

3.2 Atração pullback e propriedades de conjuntos ω-limites

Nessa seção definiremos os conjuntos ω-limites e provaremos algumas propriedades. $\mathcal{G}$ será sempre um processo generalizado exato.

Definição 3.2.1 *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer. As **órbitas** de $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ e $E \subset X$, no tempo t, com $t \geq \tau$, são dadas por:*

1. $\gamma_\tau^t(\varphi) := \{\varphi(r); \tau \leq r \leq t\}$;

2. $\gamma_\tau(t,E) := U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E$;

3. $\gamma^\xi(t,E) := \bigcup_{s\leq\xi} \gamma_s(t,E) = \bigcup_{s\leq\xi} U_{\mathcal{G}}(t,s)E$.

Definição 3.2.2 *Seja $\tau \in \mathbb{R}$ qualquer. Se $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$, $E \subset X$ e $t \geq \tau$,*

1. $\omega(\varphi) := \left\{z \in X; \varphi(t_j) \to z, com \left\{t_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [\tau,\infty), t_j \to \infty\right\}$;

2. $\omega(t,\varphi) := \left\{z \in X; \varphi(t_j) \to z, com \left\{t_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [\tau,t]\right\}$;

3. $\omega(t,E) := \bigcap_{\xi\leq t} \overline{\gamma^\xi(t,E)}^X$;

4. $\omega(E) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_0(t,E)}^X = \bigcap_{t\geq 0} \overline{U_{\mathcal{G}}(t,0)E}^X$.

Mais ainda,

1. $\omega_B(t,E) := \Big\{z \in X;\ \exists\ \varphi_j \in \mathcal{G}(\tau_j),\ \left\{\varphi_j(\tau_j)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E, \tau_j \to -\infty,\ \left\{\varphi_j(\tau_j)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X),$ $\varphi_j(t) \to z,\ j \to \infty\Big\}$,

2. $\omega_B(E) := \Big\{z \in X;\ \exists\ \varphi_j \in \mathcal{G}(0),\ \left\{\varphi_j(0)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E, \left\{\varphi_j(0)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)$ *e existe* $\left\{t_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+,\ t_j \to \infty$ *com* $\varphi_j(t_j) \to z\Big\}$.

Procedendo como em [8] pode ser mostrado que

Observação 3.2.1 *O conjunto $\omega(t,E)$ consiste dos limites de todas as sequências convergentes $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $\xi_n \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)E, s_n \to -\infty$. Então, é claro que $\omega_B(t,E) \subset \omega(t,E)$ e $\omega_B(E) \subset \omega(E)$. Mais ainda, $\omega_B(t,E) = \omega(t,E)$ e $\omega_B(E) = \omega(E)$ para qualquer conjunto limitado E.*

Definição 3.2.3 *Dizemos que existe uma **órbita completa** em $x \in X$ se existe uma aplicação $\psi : \mathbb{R} \to X$ com $\psi(\tau) = x$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$ e para todo $s \in \mathbb{R}, \psi^{+s} \in \mathcal{G}(\tau+s)$. Nesse caso, a órbita completa ψ é dada por*

$$\gamma(\psi) := Im(\psi) = \{\psi(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

*Também dizemos que ψ **é uma órbita completa em** x **no tempo** τ.*

Note que toda órbita completa ψ é uma solução ($\psi = \psi^{+0}$), logo satisfaz

$$\psi(t) \in U_{\mathcal{G}}(t,s)(\psi(s)),\ para\ qualquer\ s \leq t.$$

Definição 3.2.4 *Se ψ é uma órbita completa, o conjunto α-limite é dado por*

$$\alpha(\psi) := \left\{ z \in X;\ \psi(t_j) \to z,\ t_j \to -\infty \right\}.$$

Definição 3.2.5 *Dizemos que a órbita completa $\psi : \mathbb{R} \to X$ é* ***estacionária*** *se $\psi(t) = z$, para todo $t \in \mathbb{R}$, para algum $z \in X$. Definimos*

$$Z(\mathcal{G}) := \{z \in X;\ \textit{existe uma órbita completa}\ \ \psi\ \ \textit{tal que}\ \ \psi(t) = z\, \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 3.2.2 *Observe que $z \in Z(\mathcal{G})$ pode ser chamado de uma* ***solução estacionária*** *em $\mathcal{G}$ uma vez que temos que se $z \in Z(\mathcal{G})$ então $\exists\, \phi \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(t) = z$ para todo $t \geq \tau_0$, para algum $\tau_0 \in \mathbb{R}$.*

De fato, se $z \in Z(\mathcal{G})$ então existe uma órbita completa ψ tal que $\psi(t) = z\, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Pegando $\tau, s \in \mathbb{R}$, $\phi := \psi^{+s} \in \mathcal{G}(\tau + s)$, temos $\phi(t) = \psi(t) = z$ para todo $t \geq \tau_0 := \tau + s$.

Observação 3.2.3 *Quando se trata de equações diferenciais ou inclusões, também temos que se $z \in Z(\mathcal{G})$ então $z \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)z$ para todo $t \geq \tau$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Então, podemos nos referir a z como um* ***equilíbrio*** *de $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)$.*

De fato, se $z \in Z(\mathcal{G})$ então existe uma órbita completa ψ tal que $\psi(t) = z\, \forall\, t \in \mathbb{R}$ e, pela definição de órbita completa, $\psi^{+0} \in \mathcal{G}(\tau)$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Considerando $\phi := \psi^{+0}$ temos $z = \phi(t)$ com $\phi \in \mathcal{G}(\tau)$ e $\phi(\tau) = z$. Logo, $z \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)z$ para todo $t \geq \tau$.

Definição 3.2.6 *Seja $A = \{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família de subconjuntos de X.*

1. *A é* ***positivamente invariante*** *se $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau) \subset A(t)$ para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$;*

2. *A é* ***negativamente invariante*** *se $A(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau)$ para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$;*

3. *A é* ***invariante*** *se $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau) = A(t)$ para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$;*

4. *A é* ***quasi-invariante*** *se para cada $z \in A(\tau)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$, existe uma órbita completa ψ passando por z em τ (i.e., $\psi(\tau) = z$) e $\psi(t) \in A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

5. *A é* ***fracamente positivamente invariante*** *se para todo $\tau \leq t$ e $z \in A(\tau)$ temos que*

$$U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau) \cap A(t) \neq \varnothing.$$

É óbvio que A é invariante se, e somente se, é positivamente e negativamente invariante.

Proposição 3.2.1 *[18] a) Se A é quasi-invariante, então A é negativamente invariante.*

b) Se A é invariante, então A é quasi-invariante.

Demonstração: a) : Seja $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ um conjunto quasi-invariante, isto é, para $z \in A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, existe uma órbita completa ψ passando por z em t (i.e., $\psi(t) = z$) e $\psi(l) \in A(l)$, para todo $l \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $A(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau)$ para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$. De fato, sejam $-\infty < \tau \leq t < \infty$ fixados e $z \in A(t)$. Por hipótese existe ψ passando por z em t citada acima. Pela definição de órbita completa $\psi^{+s} \in \mathcal{G}(t+s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Consideremos $g := \psi^{+(\tau-t)} \in \mathcal{G}(t+\tau-t) = \mathcal{G}(\tau)$. Daí $g(t) = \psi^{+(\tau-t)}(t) = \psi(t) = z$ e $g(\tau) = \psi(\tau) \in A(\tau)$. Portanto, $A(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau)$

Ou seja, A é negativamente invariante.

b) : Seja $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família invariante de subconjuntos de X, i.e., $A(t) = U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau)$ para todo $-\infty < \tau \leq t < \infty$. Seja $z \in A(\tau)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$. Mostremos que existe uma órbita completa ψ passando por z em τ (i.e., $\psi(\tau) = z$) e que $\psi(t) \in A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por (C1), existe $\psi_0 \in \mathcal{G}(\tau)$ com $\psi_0(\tau) = z$. Visto que $U_{\mathcal{G}}(\tau,\tau-1)A(\tau-1) = A(\tau)$, existe $\psi_1 \in \mathcal{G}(\tau-1)$ com $\psi_1(\tau-1) \in A(\tau-1)$ e $z = \psi_1(\tau)$.

Analogamente, existe $\psi_2 \in \mathcal{G}(\tau-2)$ com $\psi_2(\tau-2) \in A(\tau-2)$ e $\psi_1(\tau-1) = \psi_2(\tau-1)$, pois $U_{\mathcal{G}}(\tau-1,\tau-2)A(\tau-2) = A(\tau-1)$.

Continuando este procedimento indutivamente podemos definir $\psi : \mathbb{R} \to X$, por

$$\psi(t) := \begin{cases} \psi_0(t), t \geq \tau, \\ \psi_1(t), t \in [\tau-1,\tau), \\ \psi_2(t), t \in [\tau-2,\tau-1), \\ \vdots \\ \psi_r(t), t \in [\tau-r,\tau-(r-1)), \\ \vdots \end{cases}$$

Note que $\psi : \mathbb{R} \to X$ com $\psi(\tau) = z$. Mostremos que ψ é uma órbita completa. De fato, seja $s \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $\psi^{+s} \in \mathcal{G}(\tau+s)$.

Temos que se $s \geq 0$, $\psi^{+s}(l) = \psi(l) = \psi_0(l)$, para todo $l \geq \tau+s$.

Se $s < 0$, então $\tau+s \in [\tau-\tilde{r},\tau-(\tilde{r}-1))$ para algum $\tilde{r} \in \mathbb{N}$ (basta tomar $\tilde{r}$ como o menor inteiro maior ou igual a $-s$).

Daí defina $\tilde{\psi} : [\tau-\tilde{r},\infty) \to X$ da seguinte forma

$$\tilde{\psi}(l) := \begin{cases} \psi_0(l), \text{ se } & l \geq \tau, \\ \psi_1(l), \text{ se } & l \in [\tau-1,\tau), \\ \psi_2(l), \text{ se } & l \in [\tau-2,\tau-1), \\ \vdots & \\ \psi_{\tilde{r}}(l), \text{ se } & l \in [\tau-\tilde{r},\tau-(\tilde{r}-1)). \end{cases}$$

Por (C4), $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}(\tau-\tilde{r})$.

Agora, $\tilde{\psi}^{+(\tilde{r}+s)} \in \mathcal{G}(\tau-\tilde{r}+\tilde{r}+s) = \mathcal{G}(\tau+s)$ e $\psi^{+s}(l) = \tilde{\psi}(l) = \tilde{\psi}^{+(\tilde{r}+s)}(l)$, para todo $l \geq \tau+s$. Logo, $\psi^{+s} = \tilde{\psi}^{+(\tilde{r}+s)} \in \mathcal{G}(\tau+s)$. Portanto, ψ é uma órbita completa passando por z em τ.

Mostremos que $\psi(t) \in A(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $t \in \mathbb{R}$. Se $t \geq \tau$, temos $\psi(t) = \psi_0(t) \in A(t) = U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau)$, pois $\psi_0 \in \mathcal{G}(\tau)$ e $\psi_0(\tau) = z \in A(\tau)$. Se $t < \tau$, $t \in [\tau-r,\tau-(r-1))$ para algum $r \in \mathbb{N}*$. Logo, neste caso, $\psi(t) = \psi_r(t) \in A(t) = U_{\mathcal{G}}(t,\tau-r)A(\tau-r)$, pois $\psi_r \in \mathcal{G}(\tau-r)$ e $\psi_r(\tau-r) \in A(\tau-r)$. ■

Definição 3.2.7 *Uma família $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é dita* ***fechada (compacta, limitada)*** *se todo conjunto $A(t)$ é fechado (compacto, limitado).*

O próximo lema mostra que para famílias compactas de conjuntos de processos multívocos estritos, a invariância negativa junto com a fracamente positivamente invariância implica quasi-invariância.

Lema 3.2.1 *[20] Suponha $(C1)-(C4)$ válidos e seja $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família compacta. Se A é fracamente positivamente invariante e negativamente invariante, então A é quasi-invariante.*

Demonstração: Primeiro, provaremos que para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $x_0 \in A(\tau)$ existe $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi(\tau) = x_0$ e $\varphi(t) \in A(t)$ para todo $t \geq \tau$. Observe que para essa afirmação é necessário apenas assumir que A é uma família fechada.

Existe um $x_{11} \in U_{\mathcal{G}}(\tau+1,\tau)x_0 \cap A(\tau+1)$ e uma aplicação $\varphi_1 \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi_1(\tau) = x_0$ e $\varphi_1(\tau+1) = x_{11}$. Da mesma forma, escolhemos

$$x_{21} \in U_{\mathcal{G}}(\tau+\frac{1}{2},\tau)x_0 \cap A(\tau+\frac{1}{2}),\ x_{22} \in U_{\mathcal{G}}(\tau+1,\tau+\frac{1}{2})x_{21} \cap A(\tau+1),$$

assim por $(C4)$ existe $\varphi_2 \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi_2(\tau) = x_0$, $\varphi_2(\tau+\frac{1}{2}) = x_{21}$ e $\varphi_2(\tau+1) = x_{22}$.

Repetindo esse procedimento várias vezes, obtemos uma aplicação $\varphi_{n+1} \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi_{n+1}(\tau) = x_0$ e $\varphi_{n+1}(t) \in A(t)$ para $t = \tau + \frac{j}{2^n}$, $j = 1,2,\ldots,2^n$.

De $(C3)$ existe $\varphi^0 \in \mathcal{G}(\tau)$ e uma subsequência de φ_n tal que $\varphi^0(t) = \lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(t)$, para todo $t \geq 0$. Então, como A é uma família fechada, $\varphi^0(t) \in A(t)$ para todo $t \in [0,1]$ que são frações binárias. Como A é fechada e φ^0 é contínua, segue que $\varphi^0(t) \in A(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

Repetimos a mesma prova para definir a sequência $\varphi^j \in \mathcal{G}(\tau+j)$, $j \in \mathbb{N}$, tal que $\varphi^j(\tau+j) = \varphi^{j-1}(\tau+j)$ e $\varphi^j(t) \in A(t)$ para todo $t \in [\tau+j,\tau+j+1]$. Usando $(C4)$ concatenamos essas aplicações e obtemos $\varphi \in \mathcal{G}(\tau)$ tal que $\varphi(\tau) = x_0$ e $\varphi(t) \in A$, para todo $t \geq \tau$, como queríamos mostrar.

Agora, argumentando de uma maneira similar podemos ver que se A é uma família compacta, então para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $x_0 \in A(\tau)$ existe uma órbita completa ϕ tal que $\phi(\tau) = x_0$ e $\phi(t) \in A(t)$ para todo $t \leq \tau$.

Concatenando as aplicações ϕ e φ obtemos uma órbita completa ψ tal que $\psi(\tau) = x_0$ e $\psi(t) \in A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Definição 3.2.8 *Seja $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Um conjunto $A(t) \subset X$* ***pullback atrai*** *um conjunto $B \in X$ no tempo t se*

$$dist(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, A(t)) \to 0 \ \ quando\ \ s \to -\infty.$$

2. *Uma família $A = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$* ***pullback atrai conjuntos limitados*** *de X se $A(\tau) \subset X$ pullback atrai todos subconjuntos limitados em τ, para cada $\tau \in \mathbb{R}$.*

3. ***Um conjunto*** *$A(t) \subset X$* ***pullback absorve subconjuntos limitados*** *de X no tempo t se, para cada $B \in \mathcal{B}(X)$, existe $T = T(t,B) \leq t$ tal que $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)B \subset A(t)\ \forall\, \tau \leq T$.*

Definição 3.2.9 *Uma família* $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ***pullback absorve subconjuntos limitados*** *de* X *se,* $A(t)$ *pullback absorve conjuntos limitados no tempo* t, *para cada* $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.10 *A família* $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é dita um* ***atrator pullback global*** *para* $U_{\mathcal{G}}$ *se:*

1. $\mathcal{A}$ *é compacta;*

2. $\mathcal{A}$ *pullback atrai conjuntos limitados de* X*;*

3. $\mathcal{A}$ *é negativamente invariante;*

4. $\mathcal{A}$ *é minimal, isto é, se* $\widehat{\mathcal{A}} = \left\{\widehat{\mathcal{A}}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *é uma família pullback atratora fechada, então* $\mathcal{A}(t) \subset \widehat{\mathcal{A}}(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.11 $\mathcal{G}$ *é chamado* ***pullback limitado dissipativo*** *se existe uma família* $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *com* $B(t) \in \mathcal{B}(X)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ *que pullback absorve subconjuntos limitados de* X. *De outro modo,* $U_{\mathcal{G}}$ *é chamado pullback limitado dissipativo se existe uma família* $\mathcal{B}_0 := \{B_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *com* $B_0(t) \in \mathcal{B}(X)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *que pullback absorve subconjuntos limitados de* X. $\mathcal{B}_0$ *é dito pullback absorvente.* $\mathcal{G}$ *é dito monoticamente pullback limitado dissipativo se, além disso,* $B_0(s) \subset B_0(t)$ *para todo* $s \leq t$.

Definição 3.2.12 $\mathcal{G}$ *é chamado* ***pullback assintoticamente compacto no tempo*** t *se para qualquer sequência* $\left\{\varphi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}, \varphi_j \in \mathcal{G}(\tau_j)$ *com* $\left\{\tau_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, t], \tau_j \to -\infty$ *e* $\left\{\varphi_j(\tau_j)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)$ *a sequência* $\left\{\varphi_j(t)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *tem uma subsequência convergente. Ou equivalentemente, para todo* $B \in \mathcal{B}(X)$ *cada sequência* $\left\{\xi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *com* $\xi_j \in U_{\mathcal{G}}(t, \tau_j)B\ \forall\, j \in \mathbb{N}$ *e* $\tau_j \to -\infty$ *tem uma subsequência convergente. Dizemos que* $\mathcal{G}$ *é* ***pullback assintoticamente compacto*** *se o é em cada tempo* $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.13 $\mathcal{G}$ *é chamado* ***pullback condicionalmente assintoticamente compacto no tempo*** t *se todo* $B \in \mathcal{B}(X)$ *tal que* $\gamma^{\tau_0}(t, B) \in \mathcal{B}(X)$, *para algum* $\tau_0 = \tau_0(B) < t$, *cada sequência* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $\xi_n \in U_{\mathcal{G}}(t, t_n)B\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *e* $t_n \to -\infty$ *tem uma subsequência convergente. Dizemos que* $\mathcal{G}$ *é* ***pullback condicionalmente assintoticamente compacto*** *se o é em cada tempo* $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2.14 $\mathcal{G}$ *é* ***pullback eventualmente limitado no tempo*** t *se para todo* $B \in \mathcal{B}(X)$ *existe* $\tau_0 = \tau_0(B) \leq t$ *tal que* $\gamma^{\tau_0}(t, B) \in \mathcal{B}(X)$.

Proposição 3.2.2 *[18] Seja* $\mathcal{G}$ *pullback assintoticamente compacto no tempo* t. *Então* $\mathcal{G}$ *é pullback eventualmente limitado no tempo* t.

Demonstração: Seja $a \in X$ and $B \in \mathcal{B}(X)$, e suponha por contradição que $\gamma^{\tau}(t,B)$ não é limitado para todo $\tau \leq t$. Então existe $\varphi_j \in \mathcal{G}(s_j)$ com $\varphi_j(s_j) \in B$ e $s_j \to -\infty$ quando $j \to +\infty$ com $\rho(\varphi_j(t),a) \to +\infty$ quando $j \to +\infty$, mas $\{\varphi_j(t)\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, pelo fato de $\mathcal{G}$ ser pullback assintoticamente compacto no tempo t. ■

Teorema 3.2.1 *[18] $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto no tempo t se, e somente se, $\mathcal{G}$ é pullback eventualmente limitado no tempo t e pullback condicionalmente assintoticamente compacto no tempo t.*

Demonstração: Se $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto no tempo t então a proposição anterior garante que $\mathcal{G}$ é pullback eventualmente limitado no tempo t. É claro que $\mathcal{G}$ ser pullback assintoticamente compacto no tempo t implica que $\mathcal{G}$ é pullback condicionalmente assintoticamente compacto no tempo t.

Por outro lado, suponha que $\mathcal{G}$ é pullback eventualmente limitado no tempo t e pullback condicionalmente assintoticamente compacto no tempo t. Seja $\varphi_j \in \mathcal{G}(\tau_j)$ com $B := \left\{\varphi_j(\tau_j)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)$ e $t \geq \tau_j$, $\tau_j \to -\infty$. Como $\mathcal{G}$ é pullback eventualmente limitado no tempo t existe $\tau_0 = \tau_0(B) < t$ tal que $\gamma^{\tau_0}(t,B) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{G}$ é pullback condicionalmente assintoticamente compacto no tempo t, a sequência $\left\{\varphi_j(t)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. Isso mostra que $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto no tempo t. ■

Proposição 3.2.3 *[18] Seja $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$. Suponha que existe $D(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ tal que*

$$lim_{s\to-\infty} dist\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)\right) = 0.$$

Então $\omega(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ e é o conjunto minimal fechado que pullback atrai B no tempo t.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $\omega(t,B)$ é não-vazio. Se for vazio, então pela Observação 3.2.1, a sequência $\{x_k\} \in U_{\mathcal{G}}(t,s)B$, onde $s_k \to -\infty$, não tem subsequência convergente. Como $\lim_{s\to-\infty} dist\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)\right) = 0$, temos $dist(x_k, D(t,B)) \to 0$ quando $s_k \to -\infty$. Logo, existe $\alpha_k \to 0$ e $\{y_k\} \in D(t,B)$ tais que $d(x_k, y_k) < \alpha_k$ para todo k. Da compacidade do conjunto $D(t,B)$, $\{y_k\}$ tem uma subsequência $\left\{y_{kj}\right\}$ convergente, logo $\left\{x_{kj}\right\}$ converge, que é uma contradição.

Como $dist(x_k, D(t,B)) \to 0$ quando $s_k \to -\infty$, se $y = lim_{s_k\to-\infty} x_k$, onde $x_k \in U_{\mathcal{G}}(t,s_k)B$, então $y \in D(t,B)$. Logo, usando a Observação 3.2.1, temos $\omega(t,B) \subset D(t,B)$, portanto, $\omega(t,B)$ é compacto.

Suponha agora que $\omega(t,B)$ não atrai pullback B no tempo t. Então, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ e uma sequência $x_k \in U_{\mathcal{G}}(t,s_k)B$, onde $s_k \to -\infty$, tais que $dist(x_k, \omega(t,B)) > \varepsilon$, para todo k. Visto que $lim_{s\to-\infty} dist\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)\right) = 0$, então $\{x_k\}$ tem uma subsequência $\left\{x_{kj}\right\}$ convergente. Finalmente, pela Observação 3.2.1, temos $x_{kj} \to y \in \omega(t,B)$, que nos dá uma contradição.

Agora, considere um conjunto fechado F satisfazendo $\lim_{s\to-\infty} \mathrm{dist}\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, F\right) = 0$. Provaremos que $\omega(t,B) \subset F$. Pela Observação 3.2.1, para qualquer $y \in \omega(t,B)$ podemos obter uma sequência $\{x_n\} \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)B$ convergindo para y quando $s_n \to -\infty$. Pegue um $\varepsilon > 0$ qualquer. Por $lim_{s\to-\infty} \mathrm{dist}\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, F\right) = 0$, existe n_0 tal que $dist(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y, \{x_n\}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Logo, $dist\,(y,F) \leqslant d(y, x_{n_0}) + \mathrm{dist}\,(x_{n_0}, F) < \varepsilon$. Como F é fechado, finalmente obtemos que $y \in F$. ■

Proposição 3.2.4 *[18] $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto se, e somente se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$ existe um conjunto compacto $D(t,B)$ satisfazendo*

$$lim_{s\to-\infty} dist(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)) = 0.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $\mathcal{G}$ pullback assintoticamente compacto. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $B \subset \mathcal{B}(X)$ dados. Então, pela Observação 3.2.1, o conjunto $\omega(t,B)$ é não vazio.

Primeiro vamos mostrar que $\omega(t,B)$ é compacto. De fato, para qualquer sequência $\{\xi_n\} \subset \omega(t,B)$, temos $\{\xi_n\} \subset \overline{\gamma^s(t,B)}$, para todo $s \leqslant t$ e então existe $\zeta_n \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)B$ com $s_n \to -\infty$ tal que $d(\xi_n,\zeta_n) < \frac{1}{n}$. Como $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto, é possível extrair uma sequência $\{\zeta_{nk}\}$ convergindo para algum $y \in X$. Pela Observação 3.2.1, $y \in \omega(t,B)$, daí $\xi_{n_k} \to y \in \omega(t,B)$ e a compacidade segue.

Agora vamos checar que $\omega(t,B)$ pullback atrai B no tempo t. Suponha que não. Então podemos encontrar um $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\xi_n \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)B$, onde $s_n \to -\infty$, tal que

$$\text{dist}(\xi_n, \omega(t,B)) > \varepsilon$$

, para todo n. Como $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto, $\{\xi_n\}$ tem uma subsequência $\{\xi_{nk}\}$ convergente. Pela Observação 3.2.1, $\{\xi_{nk}\} \to y \in \omega(t,B)$, que nos dá uma contradição.

Assim, o conjunto $D(t,B) = \omega(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ satisfaz $lim_{s\to-\infty}\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{B}(X)$, existe $D(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ tal que

$$lim_{s\to-\infty}\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)) = 0.$$

Tome uma sequência qualquer $\xi_n \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)B$ com $s_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como

$$lim_{s\to-\infty}\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B, D(t,B)) = 0,$$

$\text{dist}(\xi_n, D(t,B)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, existe $\alpha_n \to 0$ e $\zeta_n \in D(t,B)$ tal que $d(\xi_n,\zeta_n) < \alpha_n$, para todo n. Como $D(t,B) \in \mathcal{K}(X)$, $\{\zeta_n\}$ tem uma subsequência $\{\zeta_{n_k}\}$ que converge para algum $y \in D(t,B)$. Consequentemente $\xi_{n_k} \to y$. Portanto $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto. ■

Como uma consequência da Proposição 3.2.3 e Proposição 3.2.4 temos o seguinte.

Corolário 3.2.1 *Seja $\mathcal{G}$ pullback assintoticamente compacto no tempo t e seja $B \in B(X)$, então $\omega(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ e é o conjunto minimal fechado que pullback atrai B no tempo t.*

O próximo teorema é o resultado principal dessa seção.

Teorema 3.2.2 *[18] Suponha que $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto no tempo t e seja $B \in \mathcal{B}(X)$. Então $\omega(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ e é o conjunto minimal fechado que pullback atrai B no tempo t. Se $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto, então a família $\{\omega(t,B)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é quasi-invariante. Se tivermos, além das hipóteses acima, que para cada $t \in \mathbb{R}$, $U_{\mathcal{G}}(t,r)\omega(r,B) \subset B$ para todo $r \leq t$ então $\{\omega(t,B)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante.*

Demonstração: Fixe $t \in \mathbb{R}$ qualquer.

Como $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto no tempo t, o Corolário 3.2.1 garante que $\omega(t,B) \in \mathcal{K}(X)$ e é o conjunto minimal fechado que pullback atrai B no tempo t.

Para provar que $\{\omega(t,B)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é quasi-invariante, pegue $z \in \omega(t,B)$ qualquer. Pela Observação 3.2.1 existe $\varphi_j \in \mathcal{G}(\tau_j)$ com $\tau_j < t$ para todo j e $\tau_j \to -\infty$ com $\varphi_j(\tau_j) \in B$ e $\varphi_j(t) \to z$. De $(C2)$, $\varphi_j^{+(t-\tau_j)} \in \mathcal{G}(t) = \mathcal{G}(\tau_j + t - \tau_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Como $\varphi_j^{+(t-\tau_j)}(t) = \varphi_j(t) \to z$, por $(C3)$ existe uma subsequência de $\left\{\varphi_j^{+(t-\tau_j)}\right\}$, que não vamos renomear, e uma solução $\psi_0 \in \mathcal{G}(t)$ com $\psi_0(t) = z$ tal que $\varphi_j(\ell) = \varphi_j^{+(t-\tau_j)}(\ell) \to \psi_0(\ell)$, para todo $\ell \geq t$. Claramente, $\psi_0(\ell) \in \omega(\ell,B)$ para todo $\ell \geq t$. Agora, considere a sequência $\{\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}\}$. De $(C2)$, $\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)} \in \mathcal{G}(t-1) = \mathcal{G}(\tau_j + t - \tau_j - 1)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{G}$ é pullback assintoticamente compacto, $\{\varphi_j(t-1)\}$ tem uma subsequência convergente, que não vamos renomear, tal que $\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}(t-1) = \varphi_j(t-1) \to z_1$. Por $(C3)$, existe uma subsequência de $\{\varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}\}$, que chamaremos da mesma, e uma solução $\psi_1 \in \mathcal{G}(t-1)$ com $\psi_1(t-1) = z_1$ tal que $\varphi_j(\ell) = \varphi_j^{+(t-\tau_j-1)}(\ell) \to \psi_1(\ell)$, para todo $\ell \geq t-1$. É fácil ver que $\psi_1(\ell) \in \omega(\ell,B)$ para todo $\ell \geq t-1$ e $\psi_1(\ell) = \psi_0(\ell)$ para todo $\ell \geq t$. Procedendo indutivamente, encontramos para cada $r = 1,2,\ldots$ uma solução $\psi_r \in \mathcal{G}(t-r)$ tal que $\psi_r(\ell) = \psi_{r-1}(\ell)$ para todo $\ell \geq t-(r-1)$ e $\psi_r(\ell) \in \omega(\ell,B)$ para todo $\ell \geq t-r$. Dado $\ell \in \mathbb{R}$, defina $\psi(\ell)$ como o valor comum de $\psi_r(\ell + r)$ para $r \geq t - \ell$. Então ψ é uma órbita completa com $\psi(t) = \psi_0(t) = z$ e $\psi(\ell) \in \omega(\ell,B)$ para todo $\ell \geq t$.

Finalmente, suponha que para cada $t \in \mathbb{R}$, $U_{\mathcal{G}}(t,r)\omega(r,B) \subset B$ para todo $r \leq t$, vamos provar que $\{\omega(t,B)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é invariante. Pela Observação 3.2.1, $\omega(t,B)$ ser quasi-invariante implica $\omega(t,B)$ ser negativamente invariante, i.e., $\omega(t,B) \subset U_{\mathcal{G}}(t,t_0)\omega(t_0,B)$ para todo $-\infty < t_0 \leq t < \infty$.

Falta provar a inclusão oposta. Seja $z \in U_{\mathcal{G}}(t,t_0)\omega(t_0,B)$, então $z = \varphi(t)$ com $\varphi \in \mathcal{G}(t_0)$ e $\varphi(t_0) =: y \in \omega(t_0,B)$. Como $\omega(t_0,B) \subset U_{\mathcal{G}}(t_0,\tau_n)\omega(\tau_n,B), \tau_n \leq t_0 \leq t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\tau_n \to -\infty$, temos $y = \varphi_n(t_0)$ para algum $\varphi_n \in \mathcal{G}(\tau_n)$ e $\varphi_n(\tau_n) \in \omega(\tau_n,B)$. Defina a aplicação

$$\theta_n(s) := \begin{cases} \varphi_n(s), & s \in [\tau_n, t_0] \\ \varphi(s), & s \geq t_0 \end{cases}.$$

Como $\varphi(t_0) = y = \varphi_n(t_0)$, por $(C4)$ $\theta_n \in \mathcal{G}(\tau_n)$. Mais ainda, $z = \varphi(t) = \theta_n(t)$. Logo, $z = \lim_{n\to\infty}\theta_n(t)$ com $\theta_n(\tau_n) = \varphi_n(\tau_n) \in \omega(\tau_n,B) \subset U_{\mathcal{G}}(\tau_n,\ell)\omega(\ell,B) \subset B$ para todo $\ell \leq \tau_n$, sendo que a última inclusão vem da hipótese. Portanto, $\theta_n(t) \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau_n)B$ e , pela Observação3.2.1, conclui-se que $z \in \omega(t,B)$. ■

3.3 Existência e caracterização do atrator pullback

Vamos considerar agora condições necessárias e suficientes para a existência de um atrator pullback. A condição (C3) implica que para todo $(t,s) \in \mathbb{R}$ a aplicação $x \to U_{\mathcal{G}}(t,s)x$ tem gráfico fechado (vide Teorema 3.1.3). Então obtemos o seguinte teorema que nos dá uma condição suficiente para a existência de um atrator pullback.

Teorema 3.3.1 *[8, Teorema 18]Sejam $(C1)-(C3)$ válidos. Se existe uma família de conjuntos compactos pullback atratora $D(t)$, então a família de conjuntos $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ definida por*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)} \tag{3.2}$$

é um atrator pullback global para $U_{\mathcal{G}}$. Mais ainda, os conjuntos $\mathcal{A}(t)$ são compactos e $\mathcal{A}(t) \subset D(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.3.1 *A família de conjuntos $\{K(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é chamada **backwards limitada** se para algum τ o conjunto $K_\tau = \cup_{t\leq\tau} K(t)$ é limitado.*

Em [23, Proposição 4.3] e [9, Lema 5] foi provado que se o atrator pullback é backwards limitado e $U_{\mathcal{G}}$ é estrito, então é invariante. Como as condições $(C1)-(C4)$ implicam que o processo generalizado $U_{\mathcal{G}}$ é estrito, temos o seguinte resultado.

Lema 3.3.1 *[20] Sejam $(C1)-(C4)$ válidos. Se $U_{\mathcal{G}}$ possui um atrator pullback global backwards limitado $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, então $\mathcal{A}$ é invariante.*

Demonstração: Seja t_1 tal que $B = \bigcup_{t\leqslant t_1} A(t)$ é limitado. Como $\mathcal{A}(t)$ é negativamente invariante e $U_{\mathcal{G}}$ é um processo multívoco definido por um precesso generalizado exato, para $\tau \leqslant t_1$, $\tau \leqslant s \leqslant t$, temos

$$U_{\mathcal{G}}(t,s)A(s) \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)U_{\mathcal{G}}(s,\tau)A(\tau) = U_{\mathcal{G}}(t,\tau)A(\tau) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)B.$$

Então passando o limite quando $\tau \to -\infty$ temos que $U_{\mathcal{G}}(t,s)A(s) \subset A(t)$. ■

Quando usamos a compacidade pullback assintótica para provar a existência de um atrator pullback, precisamos adicionar algumas propriedades dissipativas.

Definição 3.3.2 *A família $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ **pullback absorve subconjuntos limitados** X se para cada $t \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}(X)$ existe $T = T(t,B) \leq t$ tal que $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)(B) \subset A(t)$, para todo $\tau \leq T$.*

Em [23, Teorema 3.6 e Proposição 4.2] os autores provaram que se $U_{\mathcal{G}}$ é um processo multívoco tal que o gráfico da aplicação $x \mapsto U_{\mathcal{G}}(t,s)x$ é fechado, então a compacidade pullback assintótica e a dissipacidade pullback monótona são condições necessárias e suficientes para a existência de um atrator pullback limitado $A = \{A(s) : s \in \mathbb{R}\}$. Os autores em [20] estenderam esse resultado mostrando que o atrator pullback é caracterizado nesse caso pela fórmula

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)} \tag{3.3}$$

mas sem o fecho.

Lema 3.3.2 *[23, Lema 2.5] Seja $U_{\mathcal{G}}$ assintoticamente compacto. Então para cada $B \in \mathcal{B}(X)$ e cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t,B)$ é não-vazio e compacto. Mais ainda, o conjunto $\Omega(B) = \{\omega(t,B) : t \in \mathbb{R}\}$, onde para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $\omega(t,B) = \bigcap_{s\leq t} \overline{\bigcup_{\tau\leq s} U_{\mathcal{G}}(t,\tau)B}$, pullback atrai B no tempo t.*

Teorema 3.3.2 *[23, Teorema 2.14] Se $U_{\mathcal{G}}$ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto minimal fechado que pullback atrai os limitados no tempo t. Esse conjunto é dado por*

$$\mathcal{K}(t) = \overline{\bigcup_{B_0\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B_0)}. \tag{3.4}$$

Segue da Proposição 4.2 em [23] a seguinte

Proposição 3.3.1 *Se $U_{\mathcal{G}}$ é assintoticamente compacto e monotonicamente dissipativo, então o atrator pullback $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é negativamente invariante.*

Teorema 3.3.3 *[23, Teorema 3.5] $U_{\mathcal{G}}$ é pullback assintoticamente compacto e monotonicamente dissipativo se, e somente se, $U_{\mathcal{G}}$ possui um único atrator pullback backwards limitado minimal fechado.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$: Seja $\mathcal{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ um conjunto pullback absorvente backward limitado. Em vista do Lema 3.3.2, para cada $t \in \mathbb{R}$ os conjuntos $A(t) = \omega(t, B_0(t))$ são não-vazios, compactos e

$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0(t), A(t)) = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Precisamos mostrar que $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ pullback atrai qualquer conjunto limitado. Se $E \in \mathcal{B}(X)$ é esse conjunto, então para cada $s,t \in \mathbb{R}$ com $s \leqslant t$, podemos encontrar $\overline{\tau} = \overline{\tau}(s,E) < s$ tal que

$$U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)U_{\mathcal{G}}(s,\tau)E \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0(s) \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0(t),$$

para todo $\tau \leqslant \overline{\tau}$, onde a última inclusão segue da monotocidade.

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\tau \leqslant \overline{\tau}$,

$$\operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E, A(t)) \leqslant \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0(t), A(t)).$$

Então,

$$lim_{\tau\to-\infty}\operatorname{supdist}(U_{\mathcal{G}}(t,\tau)E, A(t)) \leqslant \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0(t), A(t)).$$

Visto que

$$\lim_{s\to-\infty} \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)B_0, A(t)) = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

a propriedade de atrator pullback segue passando o limite quando $s \to -\infty$ ($\therefore \tau \to -\infty$, pois $\tau \leqslant \overline{\tau} < s$) na desigualdade acima.

Para a minimalidade, observe que o Teorema 3.3.2 nos dá a existência de um único conjunto atrator pullback minimal fechado definido por

$$\mathcal{K}(t) = \overline{\bigcup_{B_0\in\mathcal{B}(X)} \omega(t, B_0)}. \tag{3.5}$$

Como $B_0(t)$ é limitado, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$A(t) = \omega(t, B_0(t)) \subset \mathcal{K}(t) \subset A(t) \Rightarrow A(t) = \mathcal{K}(t),$$

provando a minimalidade.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ é backward limitado, observe que para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $\overline{\tau}(t, B_0(t))$ tal que temos $\bigcup_{\tau\leqslant\overline{\tau}(t,B_0(t))} U_{\mathcal{G}}(t,\tau)B_0(t) \subset B_0(t)$ e então $\overline{\bigcup_{\tau\leqslant\overline{\tau}(t,B_0(t))} U_{\mathcal{G}}(t,\tau)B_0(t)} \subset \overline{B_0(t)}$. Isso significa que $A(t) = \omega(t, B_0(t)) \subset \overline{B_0(t)}$. Logo temos

$$\bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau) \subset \bigcup_{\tau\leqslant t} \overline{B_0(\tau)} \subset \overline{\bigcup_{\tau\leqslant t} B_0(\tau)} = \overline{B_0(t)}$$

e a limitação backward segue.

($\Leftarrow$) : Agora seja $E \in \mathcal{B}(X)$ e seja $\mathcal{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ o único atrator pullback backwards limitado minimal fechado. Temos para todo $t \in \mathbb{R}$ que $lim_{s\to-\infty}\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)E, A(t)) = 0$. Disso segue que

$$lim_{s\to-\infty}\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s)E, \bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau)) = 0.$$

Escolha $\varepsilon > 0$. O conjunto $\mathcal{C} = \{\mathcal{O}_\varepsilon(\bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau)) : t \in \mathbb{R}\}$ é limitado e monónoto. Precisamos mostrar que esse conjunto tem que ser absorvente.

Assuma por contradição que existe um conjunto $E \in \mathcal{B}(X)$ e as sequências $\{x_n\} \subset E$, $s_n \to -\infty$ e $\{\xi_n\} \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)x_n$ tal que $\{\xi_n\} \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau))$. Isso significa que $\text{dist}(\xi_n, \bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau)) > \varepsilon$ e $\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,s_n)E, \bigcup_{\tau\leqslant t} A(\tau)) > \varepsilon$, uma contradição.

Para a provar a compacidade assintótica, assuma que $\{x_n\} \subset E$ onde $E \in \mathcal{B}(X)$ e $\{\xi_n\} \in U_{\mathcal{G}}(t,s_n)x_n$ com $s_n \to -\infty$. Nós temos

$$lim_{n\to\infty}\text{dist}(\xi_n, A(t)) = 0,$$

e então conseguimos encontrar uma sequência $\eta_n \subset A(t)$ tal que $\rho(\xi_n,\eta_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Pelo fato de que A(t) é compacto segue que, para uma subsequência denotada da mesma maneira, $\eta_n \to \eta$. Para essa subsequência devemos ter $\xi_n \to \eta$ e a demonstração está completa. ■

Teorema 3.3.4 *[20] Sejam $(C1)-(C3)$ válidos. Então $U_{\mathcal{G}}$ é pullback assintoticamente compacto e monotonicamente pullback limitado dissipativo se, e somente se, possui o único atrator pullback global backwards limitado $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(s) : s \in \mathbb{R}\}$ definido por*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B). \tag{3.6}$$

Se $(C4)$ também for satisfeito, então $\mathcal{A}$ é invariante.

Demonstração: Em vista do Teorema anterior e da Proposição 3.3.1 só falta provar que

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B). \tag{3.7}$$

Da demonstração do Teorema anterior sabemos que $\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)} = \omega(t,B_0(t))$. Então,

$$\mathcal{A}(t) := \omega(t,B_0(t)) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B) \subset \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}(X)} \omega(t,B)} = \mathcal{A}(t),$$

assim a igualdade segue.

A última afirmação segue do Lema 3.3.1. ■

Observação 3.3.1 *É interessante saber se é possível obter a existência do atrator pullback assumindo que $U_{\mathcal{G}}$ é apenas pullback limitado dissipativo. Daremos uma resposta a essa questão na próxima seção.*

Finalmente, vamos considerar a caracterização de dinâmicas dentro do atrator pullback usando órbitas completas. Em [9] foi mostrado que o atrator pullback backwards limitado pode ser caracterizado pela união de todas as órbitas completas backwards limitadas. Lembrando que uma órbita completa ψ é dita limitada se o conjunto $\cup_{t\in\mathbb{R}}\psi(t)$ é limitado.

Teorema 3.3.5 *[9] Seja $(C1)-(C2)$, $(C4)$ ou $(C1)-(C3)$ válidos. Se $U_{\mathcal{G}}$ possui um atrator global backwards limitado $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(s): s\in\mathbb{R}\}$, então*

$$\mathcal{A}(t)=\{\gamma(t):\gamma \text{ é uma órbita completa backwards limitada}\}. \tag{3.8}$$

Se não assumirmos que o atrator é backwards limitado, então podemos obter apenas que toda órbita completa backwards limitada pertence ao atrator global pullback limitado $\mathcal{A}(t)$.

Corolário 3.3.1 *[9] Assuma que $(C1)-(C2)$, $(C4)$ valem e que $U_{\mathcal{G}}$ possui o atrator pullback limitado $\mathcal{A}(t)$, então*

$$\mathcal{A}(t)=\{\psi(t):\psi \text{ é uma órbita completa limitada}\}. \tag{3.9}$$

Teorema 3.3.6 *[20] Sejam $(C1)-(C4)$ válidos e suponha que $U_{\mathcal{G}}$ possui o atrator pullback global $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(s): s\in\mathbb{R}\}$. As seguintes afirmações valem:*

1. *Se $\psi:\mathbb{R}\to X$ é uma órbita completa limitada, então $\psi(s)\in\mathcal{A}(s)$ para todo $s\in\mathbb{R}$.*
2. *Se, mais ainda, $\mathcal{A}$ for invariante, então para cada $z\in\mathcal{A}(t)$ existe uma órbita completa ψ_z tal que $\psi_z(t)=z$ e $\psi_z(s)\in\mathcal{A}(s)$ para todo $s\in\mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $\psi:\mathbb{R}\to X$ uma órbita completa limitada. Considere o conjunto $B:=\bigcup_{s\in\mathbb{R}}\psi(s)\in\mathcal{B}(X)$. Então para qualquer $s\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon>0$ existe $T=T(s,B)<s$ tal que $U_{\mathcal{G}}(s,\ell)B\subset O_\varepsilon(\mathcal{A}(s))$ para todo $\ell<T$. Logo,

$$\psi(s)\in U_{\mathcal{G}}(s,s-t)\psi(s-t)\subset U_{\mathcal{G}}(s,s-t)B\subset O_\varepsilon(\mathcal{A}(s))$$

para t grande o bastante (i.e., $s-t<T$). Então, $\psi(s)\in\bigcap_{\varepsilon>0}O_\varepsilon(\mathcal{A}(s))=\overline{\mathcal{A}(s)}=\mathcal{A}(s)$.

A segunda afirmação é uma consequência do Lema 3.2.1. ∎

Observação 3.3.2 *As condições $(C3)-(C4)$ não são necessárias para a primeira afirmação.*

3.4 Atração pullback de famílias de conjuntos arbitrários

Nessa seção vamos considerar a teoria de atratores pullbacks que atraem certas famílias de conjuntos ao invés de conjuntos limitados. Lembraremos primeiro a teoria de existência de tais atratores, que foram desenvolvidas em [6] e [7] para processos multívocos. Depois disso, estudaremos suas caracterizações usando órbitas completas.

Seja $\mathcal{D}$ uma classe de famílias de conjuntos não-vazios $D=\{D(t):\ t\in\mathbb{R}\}$. Vamos dizer que a classe $\mathcal{D}$ é inclusão-fechada se $D\in\mathcal{D}$ e $\emptyset\neq D'(t)\subset D(t)$, para todo $t\in\mathbb{R}$, implica que $D'=\{D'(t):\ t\in\mathbb{R}\}$ pertence a $\mathcal{D}$.

Definição 3.4.1 *A família $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é dita um* ***pullback $\mathcal{D}$-atrator global*** *para $U_{\mathcal{G}}$ se satisfaz:*

1. *$\mathcal{A}(t)$ é compacto para qualquer $t \in \mathbb{R}$;*
2. *$\mathcal{A}$ é pullback $\mathcal{D}$-atrator, i.e.*

$$\lim_{\tau \to -\infty} dist(U_{\mathcal{G}}(t,\tau)D(\tau), \mathcal{A}(t)) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

para todo $D \in \mathcal{D}$;

3. *$\mathcal{A}$ é negativamente invariante.*

$\mathcal{A}$ é dito um $\mathcal{D}$-atrator pullback global estrito se é também invariante.

Nesse trabalho, o teorema que afirma a existência de um $\mathcal{D}$-atrator pullback global é similar ao correspondente no caso autônomo, ao contrário da situação na seção anterior não precisamos assumir que a família absorvente é backwards limitada.

Definição 3.4.2 *Dizemos que uma família de conjuntos não-vazios $\mathcal{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é* ***pullback $\mathcal{D}$-absorvente*** *se para todo $D \in \mathcal{D}$ e todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\tau(t,D) \le t$ tal que*

$$U_{\mathcal{G}}(t,\tau)D(\tau) \subset B_0(t) \text{ para todo } \tau \le \tau(t,D).$$

Definição 3.4.3 *O processo multívoco $U_{\mathcal{G}}$ é* ***assintoticamente compacto*** *com respeito a família $\widehat{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$se para todo $t \in \mathbb{R}$ e para toda sequência $\tau_n \le t$ tendendo ao $-\infty$, qualquer sequência $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau_n)B(\tau_n)$ é relativamente compacta.*

Definição 3.4.4 *Dizemos que $U_{\mathcal{G}}$ é* ***semicontínuo superiormente*** *se para todo $t \ge \tau$ a aplicação $U_{\mathcal{G}}(t,\tau,\cdot)$ é semicontínua superiormente, i.e., para qualquer $x_0 \in X$ e para toda vizinhança O em X do conjunto $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x_0$, existe $\delta > 0$ tal que $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)y \subset O$ seja qual for $\rho(x_0,y) < \delta$.*

A condição $(C3)$ implica facilmente que $U_{\mathcal{G}}(t,\tau,\cdot)$ é semicontínuo superiormente e tem valores fechados.

Definição 3.4.5 *Se $B_0 = \{B_0(t); t \in \mathbb{R}\}$, então $\omega(t,B_0) := \bigcap_{s \le t} \overline{\bigcup_{\tau \le s} U_{\mathcal{G}}(t,\tau)(B_0(\tau))}$.*

Lema 3.4.1 *[7] Assuma que o processo multívoco $U_{\mathcal{G}}(t,\tau)$ é semicontínuo superiormente para $t \ge \tau$, $(t,\tau \in \mathbb{R})$. Seja $B_0 = \{B_0(t); t \in \mathbb{R}\}$, tal que o processo multívoco é assintoticamente compacto com respeito a B_0, i.e., para toda sequência $t_n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$, toda sequência $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,t-t_n)B(t-t_n)$ é pré-compacta. Então, para $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $\omega -$ limite pullback $\omega(t,B_0)$ é não vazio, compacto, $\lim_{\tau \to \infty} dist(U_{\mathcal{G}}(t,t-\tau)B(t-\tau), \omega(t,B_0)) = 0$ e $\omega(t,B_0) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\omega(t,B_0)$, para todo $t,\tau \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Considere a sequência $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,t-t_n)B(t-t_n)$ com $t_n \to \infty$. Como o processo multívoco é assintoticamente compacto com respeito a B_0, existe uma subsequência convergente e seu limite y pertence a $\omega(t,B_0)$, então $\omega(t,B_0)$ é não vazio.

Agora provaremos que $\omega(t,B_0)$ é compacto. Para qualquer sequência $\{y_n\} \subset \omega(t,B_0)$ existe $t_n \to \infty$ e $z_n \in U_{\mathcal{G}}(t,t-t_n)B(t-t_n)$, tais que $d(y_n,z_n) < \dfrac{1}{n}$. Usando novamente que o processo multívoco é assintoticamente compacto a existência de uma subsequência convergente $z_{nk} \to z \in \omega(t,B_0)$ segue. Então, $y_{nk} \to z$, logo $\omega(t,B_0)$ é compacto.

Vamos mostrar que $\lim_{\tau\to\infty} \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,t-\tau)B(t-\tau),\omega(t,B_0)) = 0$ por contradição. Suponha que a igualdade não vale, então existe $\varepsilon > 0$ e $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,t-t_n)B(t-t_n)$ com $t_n \to \infty$, tal que $\operatorname{dist}(y_n,\omega(t,B_0)) > \varepsilon$. Como $U_{\mathcal{G}}$ é pullback assintoticamente compacto com respeito a B_0, segue que existe uma subsequência, que nomearemos da mesma, $y_n \to y \in \omega(t,B_0)$, o que não é possível.

Agora mostraremos que $\omega(t,B_0) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\omega(t,B_0)$ para todo $t,\tau \in \mathbb{R}$. Fixe $t,\tau \in \mathbb{R}$. Então se $y \in \omega(t,B_0)$ existem sequências $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,t-(t_n-\tau))x_n$, $x_n \in B(t-(t_n-\tau))$ com $t_n \to \infty$, tal que $y_n \to y$. Para $t_n \geq t$, a propriedade de processo multívoco implica $U_{\mathcal{G}}(t,t-t_n+\tau)x_n \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)(U_{\mathcal{G}}(\tau,t-t_n+\tau)x_n)$, e então $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)z_n$, onde $z_n \in U_{\mathcal{G}}(\tau,t-t_n+\tau)x_n$. Como anteriormente, ao menos de uma subsequência, $z_n \to z \in \omega(\tau,B_0)$. Como $x_n \mapsto U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$ é semicontínuo superiormente com valores fechados, temos $y \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)z \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\omega(t,B_0)$. ■

Teorema 3.4.1 *[7] Assuma as hipóteses do Lema 3.4.1. E suponha que $B_0 \in \mathcal{D}$ é pullback $\mathcal{D}-$absorvente. Então o conjunto $\mathcal{A}$ dado por*

$$\mathcal{A}(t) := \omega(t,B_0)$$

é um $\mathcal{D}-$atrator pullback. Mais ainda, $\mathcal{A}$ é o único elemento de $\mathcal{D}$ com essas propriedades. E, se $U_{\mathcal{G}}$ é um processo multívoco exato, então $\mathcal{A}$ é invariante.

Demonstração: A primeira parte segue do Lema 3.4.1.

Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é único. De fato, suponha que existe outro $\mathcal{D}$-atrator pullback $\widehat{\mathcal{A}'}$, então como

$$\mathcal{A}'(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,t-\tau)\mathcal{A}'(t-\tau)$$

e

$$\lim_{\tau\to\infty} \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,t-\tau)\mathcal{A}'(t-\tau),\mathcal{A}(t)) = 0,$$

temos que $\mathcal{A}'(t) \subset \mathcal{A}(t)$. Trocando $\widehat{\mathcal{A}}$ e $\widehat{\mathcal{A}'}$ segue que $\widehat{\mathcal{A}'} = \widehat{\mathcal{A}}$.

Finalmente, assuma que $U_{\mathcal{G}}$ é um processo multívoco exato. Então, dados $t \geq r$, temos que

$$U_{\mathcal{G}}(t,r)\mathcal{A}(r) \subset U_{\mathcal{G}}(t,r)U_{\mathcal{G}}(r,r-\tau)\mathcal{A}(r-\tau) = U_{\mathcal{G}}(t,r-\tau)\mathcal{A}(r-\tau),$$

para todo $\tau \geq 0$. Como $\widehat{\mathcal{A}}$ pullback atrai ele mesmo, segue que

$$\lim_{\tau\to\infty} \operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,r-\tau)\mathcal{A}(r-\tau),\mathcal{A}(t)) = 0,$$

e, consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $T(\varepsilon,t,r) > 0$ tal que, para $\tau \geq T(\varepsilon,t,r)$

$$\operatorname{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,r-\tau)\mathcal{A}(r-\tau),\mathcal{A}(t)) < \varepsilon,$$

e como $U_{\mathcal{G}}(t,r)\mathcal{A}(r) \subset U_{\mathcal{G}}(t,r-\tau)\mathcal{A}(r-\tau)$, temos

$$\text{dist}(U_{\mathcal{G}}(t,r)\mathcal{A}(r),\mathcal{A}(t)) < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, logo $U_{\mathcal{G}}(t,r)\mathcal{A}(r) \subset \mathcal{A}(t)$, como desejado. ■

Teorema 3.4.2 *[20] Sejam $(C1)-(C3)$ válidos. Assuma que existe uma família pullback $\mathcal{D}$-absorvente $\mathcal{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e que $U_{\mathcal{G}}$ é assintoticamente compacto com respeito a $\mathcal{B}_0$. Então, o conjunto $\mathcal{A}$ dado por*

$$\mathcal{A}(t) := \overline{\bigcup_{D\in\mathcal{D}} \omega(t,D)} \subset \omega(t,\mathcal{B}_0), \tag{3.10}$$

onde $\omega(t,D) = \bigcap_{s\le t} \overline{\bigcup_{\tau\le s} U_{\mathcal{G}}(t,\tau,D(\tau))}$, é um $\mathcal{D}$-atrator pullback glogal para $U_{\mathcal{G}}$. $\mathcal{A}$ é a família minimal fechada pullback $\mathcal{D}$-atratora. Se $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{D}$, então

$$\mathcal{A}(t) := \omega(t,\mathcal{B}_0). \tag{3.11}$$

Mais ainda, suponha que $\mathcal{D}$ é inclusão-fechada, $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{D}$, e que $B_0(t)$ é fechado em X para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$ e é o único $\mathcal{D}$-atrator pullback global com essa propriedade. E, se $(C4)$ também for satisfeito, então $\mathcal{A}$ é invariante.

Demonstração: Em vista do Lema 3.4.1 a família $\omega(t,\mathcal{B}_0)$ é não-vazia, compacta, negativamente invariante e pullback atrai $\mathcal{B}_0$. Também é provado no Teorema 3.4.1 que $\omega(t,\mathcal{B}_0)$ pullback atrai todo $D \in \mathcal{D}$. Então, $U_{\mathcal{G}}$ é assintoticamente compacto com respeito a todo $D \in \mathcal{D}$. Assim, usando novamente o Lema 3.4.1 a família $\{\omega(t,D)\}_{t\in\mathbb{R}}$ pullback atrai D e é negativamente invariante e compacta. Ainda, $\{\omega(t,D)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é a família mininal fechada que pullback atrai D. De fato, seja $\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ uma família fechada pullback atraindo D. Como para qualquer $y \in \omega(t,D)$ existe uma sequência $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau_n)D(\tau_n)$, $\tau_n \to -\infty$, tal que $y_n \to y$, temos

$$dist(y,A(t)) \le \rho(y,y_n) + dist(y_n,A(t)) \to 0,$$

então $y \in A(t)$. Logo segue que $\omega(t,D) \subset \omega(t,\mathcal{B}_0)$.

Portanto, $\mathcal{A}$ é a família minimal fechada $\mathcal{D}$-atratora pullback e $\mathcal{A}(t) \subset \omega(t,\mathcal{B}_0)$. É claro que os conjuntos $\mathcal{A}(t)$ são compactos. Falta provar que $\mathcal{A}$ é negativamente invariante. De fato, seja $y \in \mathcal{A}(t)$ e $y_n \in \omega(t,D_n)$ tal que $y_n \to y$. Para qualquer $\tau < t$ existem $x_n \in \omega(\tau,D_n)$ satisfazendo $y_n \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x_n$. Passando para uma subsequência podemos assumir que $x_n \to x \in \mathcal{A}(\tau)$ e então $y \in U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$, pois o gráfico da aplicação $x \mapsto U_{\mathcal{G}}(t,\tau)x$ é fechado. Então, $\mathcal{A}(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,\tau)\mathcal{A}(\tau)$.

Se $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{D}$, então $\omega(t,\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{A}(t)$, o que implica (3.11).

As outras afirmações seguem do Teorema 3.4.1. ■

Além disso, vamos estudar a estrutura do atrator pullback. Mais precisamente, vamos provar resultados análogos como no Teorema 3.3.5, a principal diferença é que o atrator será descrito agora como a união de todas as órbitas completas que pertencem à classe $\mathcal{D}$.

Teorema 3.4.3 *[20] Assuma que* $(C1)-(C3)$ *valem,* $\mathcal{D}$ *é inclusão-fechada e que* $U_{\mathcal{G}}$ *possui o* $\mathcal{D}$*-atrator global pullback* $\mathcal{A}$*, que pertence a* $\mathcal{D}$*. Então*

$$\mathcal{A}(t) = \{\psi(t) : \psi \text{ é uma órbita completa e } \psi \in \mathcal{D}\}.$$

Demonstração: Primeiro, seja $\psi \in \mathcal{D}$ uma órbita completa. Então

$$\psi(t) \in U_{\mathcal{G}}(t,s)(\psi(s)), \text{ para qualquer } s \leq t.$$

Como $dist\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)\psi(s), \mathcal{A}(t)\right) \to 0$ quando $s \to -\infty$, obtemos que $\psi(t) \in \mathcal{A}(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Segundo, seja $z \in \mathcal{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Como $\mathcal{A}$ é negativamente invariante, para qualquer sequência $s_n \to -\infty$ temos $z \in \mathcal{A}(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,s_n)(\mathcal{A}(s_n))$, então existe $\varphi_n \in \mathcal{G}(s_n)$ tal que $z = \varphi_n(t)$ e $\varphi_n(s_n) \in \mathcal{A}(s_n)$, pela definição de $U_{\mathcal{G}}(t,s_n)(\mathcal{A}(s_n))$. A condição $(C2)$ implica que $v_n^0 = \varphi_n |_{[t,\infty)} \in \mathcal{G}(t)$. Por $(C3)$, passando para uma subsequência, $v_n^0(r) \to v^0(r)$, para todo $r \geq t$, onde $v^0 \in \mathcal{G}(t)$, $v^0(t) = z$. Como $v^0(r) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(r)$ e $\varphi_n(r) \in U_{\mathcal{G}}(r,s_n)(\mathcal{A}(s_n))$, obtemos que $v^0(r) \in \omega(r,\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}(r)$ para qualquer $r \geq t$.

Seja agora $v_n^1 = \varphi_n |_{[t-1,\infty)} \in \mathcal{G}(t-1)$. Como

$$v_n^1(t-1) = \varphi_n(t-1) \in U_{\mathcal{G}}(t-1,s_n)(\mathcal{A}(s_n)),$$

passando para uma subsequência $v_n^1(t-1) \to z_{-1}$. Então, repetindo o mesmo argumento como anteriormente obtemos uma aplicação $v^1 \in \mathcal{G}(t-1)$ tal que, a menos de uma subsequência, $v_n^1(r) \to v^1(r)$ para todo $r \geq t-1$. Também, $v^1(r) \in \mathcal{A}(r)$, para qualquer $r \geq t-1$, e $v^1(r) = v^0(r)$ se $r \geq t$. Em particular, $v^1(t) = z$.

Argumentando como nos casos anteriores definimos uma sequência de funções $v^j \in \mathcal{G}(t-j)$, $j \in \mathbb{Z}^+$, tal que $v^j(r) \in \mathcal{A}(r)$, para qualquer $r \geq t-j$, $v^j(r) = v^{j-1}(r)$, para $r \geq t-j+1$, e $v^j(t) = z$.

Seja $\psi(\cdot)$ uma função que pega o valor comum das funções $v^j(\cdot)$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Segue que $\psi(\cdot)$ é uma órbita completa e $\psi(t) = z$. Mais ainda, como $\psi(r) \in \mathcal{A}(r)$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ é inclusão-fechada, temos que $\psi \in \mathcal{D}$. ■

Teorema 3.4.4 *[20] Assuma que* $(C1),(C2)$ *e* $(C4)$ *valem,* $\mathcal{D}$ *é inclusão-fechada e que* $U_{\mathcal{G}}$ *possui o* $\mathcal{D}$*-atrator pullback global* $\mathcal{A}$*, que pertence a* $\mathcal{D}$*. Então*

$$\mathcal{A}(t) = \{\psi(t) : \psi \text{ é uma órbita completa e } \psi \in \mathcal{D}\}.$$

Demonstração: Sabemos pela prova do Teorema 3.4.3 que $\psi(t) \in \mathcal{A}(t)$ para qualquer órbita completa ψ tal que $\psi \in \mathcal{D}$.

Seja $z \in \mathcal{A}(t)$. Por $(C1)$ existe $\varphi^0 \in \mathcal{G}(t)$ tal que $\varphi^0(t) = z$.

O atrator pullback $\mathcal{A}$ é invariante. De fato, por $(C4)$ para qualquer $s \leq r$ temos

$$U_{\mathcal{G}}(r,s)\mathcal{A}(s) \subset U_{\mathcal{G}}(r,s)(U_{\mathcal{G}}(s,\tau)(\mathcal{A}(\tau))) \subset U_{\mathcal{G}}(r,\tau)\mathcal{A}(\tau) \to \mathcal{A}(r), \tag{3.12}$$

quando $\tau \to -\infty$.

Assim, $\mathcal{A}(r) = U_{\mathcal{G}}(r,t)\mathcal{A}(t)$, que implica que $\varphi^0(r) \in \mathcal{A}(r)$ para qualquer $r \geq t$. Ainda, $z \in \mathcal{A}(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,t-1)(\mathcal{A}(t-1))$ implica a existência de $v^1 \in \mathcal{G}(t-1)$ satisfazendo $v^1(r) \in$

$\mathcal{A}(r)$, para todo $r \geq t-1$, e $v^1(t) = z$. Por $(C4)$ concatenando v^1 e φ^0 obtemos uma função $\varphi^1 \in \mathcal{G}(t-1)$ ta que $\varphi^1(r) \in \mathcal{A}(r)$, para todo $r \geq t-1$, $\varphi^1(t) = z$ e $\varphi^1(r) = \varphi^0(r)$ para $r \geq t$. Então, definimos indutivamente uma sequência de funções $\varphi^j \in \mathcal{G}(t-j)$, $j \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\varphi^j(r) \in \mathcal{A}(r)$, para todo $r \geq t-j$, $\varphi^j(t) = z$ e $\varphi^j(r) = \varphi^{j-1}(r)$ se $r \geq t-j+1$. Seja ψ a função definida pelo valor comum de φ^j em um ponto qualquer $t \in \mathbb{R}$, que é uma órbita completa satisfazendo $\psi(t) = z$ e $\psi(r) \in \mathcal{A}(r)$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$. Como $\mathcal{D}$ é uma inclusão-fechada e $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$, obtemos que $\psi \in \mathcal{D}$. ■

Observação 3.4.1 *Essa caracterização no Teorema 3.4.4 para o atrator pullback dada pelos autores em [20] foi nova até mesmo no caso onde a aplicação $U_{\mathcal{G}}$ é unívoca.*

Uma questão interessante surgue quando o processo multívoco possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback e um atrator pullback como na Definição 3.2.10. Vamos denotar esses atratores por $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ e $\mathcal{A}$, respectivamente. Assim, qual é a relação entre eles?

Lema 3.4.2 *[20] Seja $(C1)-(C2)$ e considere toda família do tipo $\mathcal{B} = \{B(t) \equiv B \in \mathcal{B}(X) : t \in \mathbb{R}\}$ pertencente a $\mathcal{D}$ (isto é, qualquer família de conjuntos limitados pertencem a $\mathcal{D}$). Assuma que $U_{\mathcal{G}}$ possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ e um atrator pullback $\mathcal{A}$. Então*

$$\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Se, mais ainda, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é backwards limitado, então

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Demonstração: Como as famílias de conjuntos limitados fixados pertencem a $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é uma família fechada pullback atratora segundo a Definição 3.2.8. A minimalidade de $\mathcal{A}$ implica (3.13).

Seja $t \in \mathbb{R}$ qualquer. Se $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é backwards limitada, então

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(s) \subset U_{\mathcal{G}}(t,s)A_{\tau}, \text{ para qualquer } s \leq \tau,$$

sendo que $\tau \leq t$ é tal que $A_{\tau} = \cup_{r \leq \tau} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(r)$ é limitado. De

$$dist\left(U_{\mathcal{G}}(t,s)A_{\tau}, A(t)\right) \to 0, \text{ quando } s \to -\infty,$$

temos que $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset \mathcal{A}(t)$. Logo, (3.14) está provado. ■

Como comentado anteriormente, é uma questão interessante se é possível provar a existência de um atrator pullback (como na Definição 3.2.8) assumindo apenas que $U_{\mathcal{G}}$ é pullback limitado dissipativo. Em [12] esse problema foi resolvido no caso unívoco modificando a condição de compacidade pullback. Usando o Teorema 3.4.2 um resultado similar foi provado em [20] para o caso multívoco.

Teorema 3.4.5 *[20] Sejam $(C1)-(C3)$ válidos. Se $U_{\mathcal{G}}$ é pullback limitado dissipativo e assintoticamente compacto com respeito a família absorvente $\mathcal{B}_0$, então também possui o atrator pullback global $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(s) : s \in \mathbb{R}\}$ definido por (3.10).*

Se $(C4)$ também é satisfeita e $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ é backwards limitada, então $\mathcal{A}$ é invariante e (3.9) vale.

Demonstração: Considere a classe de famílias $\mathcal{D}$ consistindo de conjuntos limitados, isto é, $D \in \mathcal{D}$ se, e somente se, $D = \{D(t) \equiv B \in \mathcal{B}(X) : t \in \mathbb{R}\}$. A existência do atrator pullback segue do Teorema 3.4.2.

A segunda parte é uma consequência do Lema 3.3.1 e Teorema 3.3.5. ■

Observação 3.4.2 *Sugerimos a referência [20] para ver uma aplicação desta teoria em EDP.*

Bibliografia

[1] J. P. Aubin; H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] A. R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[3] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer, New York, 2010.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[5] T. Caraballo; A. N. Carvalho J. A. Langa; F. Rivero, *Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact processes*, Nonlinear Analysis 72 (2010) 1967-1976.

[6] T. Caraballo; M. J. Garrido-Atienza; B. Schmalfuss; J. Valero, *Non-autonomous and randon attractors for delay random attractors for delay random semilinear equations without uniqueness*, Discret. Contin. Dyn. Syst. 21, 415-443 (2008)

[7] T. Caraballo; P. E. Kloeden, *Non-autonomous attractors for integro-differential evolution equations*, Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. S 2, 17-36 (2009)

[8] T. Caraballo; J. A. Langa; V. S. Melnik; J. Valero, Attractors of nonautonomous and stochastic multivalued dynamical systems, Set-Valued Analysis 11, 153-201 (2003).

[9] T. Caraballo; J. Langa; J. Valero, *Structure of the pullback attractor for a non-autonomous scalar differential inclusion*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 9 (2016), no. 4, 979–994.

[10] A. N. Carvalho; J. A. Langa; J. C. Robinson, *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Springer, 2013.

[11] F. S. Guimarães, *Teoria de semigrupos não-lineares e resultados de compacidade*. 2012. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.

[12] P. Marín-Rubio; J. Real, *On the relation between two different concepts of pullback attractors for non-autonomous dynamical systems*, Nonlinear Anal. 71, 3956-3963 (2009)

[13] R. J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2 edição, Upper Saddle River, 2000.

[14] E. N. Neres Júnior, *Teoria de Semigrupos Multívocos: Atratores para Inclusões Diferenciais*. 2013. 52 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2013.

[15] C. R. Oliveira, *Introdução à análise funcional*, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[16] A. C. Pereira, *Sistemas de Inclusões Diferenciais Governadas Pelo p-Laplaciano*, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em matemática, UFSCar, 2004.

[17] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[18] J. Simsen; E. Capelato, *Some properties for exact generalized processes*, Continuous and distributed systems. II, 209–219, Stud. Syst. Decis. Control, 30, Springer, Switzerland, 2015.

[19] J. Simsen; C. B. Gentile, *On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows*, Set-Valued Analysis 16 (2008) 105-124

[20] J. Simsen; J. Valero, *Characterization of pullback attractors for multivalued nonautonomous dynamical systems*, Advances in dynamical systems and control, 179–195, Stud. Syst. Decis. Control, 69, Springer, Switzerland, 2016.

[21] A. E. Taylor, *General Theory of functions and integration*, Dover Science, 1985.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[23] M. C. Zelati; P. Kalita, *Minimality properties of set-valued processes and their pullback attractors*, SIAM J. Math. Anal. 47, 1530 -1561 (2015).