

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudos da Curvatura Média  
em Variedades de Einstein  
com Folheações Totalmente Umbílicas**

**Kledilson Peter Ribeiro Honorato**

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes**

ITAJUBÁ, 15 DE FEVEREIRO DE 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estudos da Curvatura Média  
em Variedades de Einstein  
com Folheações Totalmente Umbílicas**

**Kledilson Peter Ribeiro Honorato**

**Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do  
Título de Mestre em Ciências em Matemática.

**Área de Concentração: Topologia/Geometria**

ITAJUBÁ – MG

15 DE FEVEREIRO DE 2018

*“Dedico este trabalho a minha mãe (**Ana Lúcia**), aos meus irmãos (**Clebson e Jamilson**) e a minha sobrinha (**Ana Maria**).”*

# Agradecimentos

A Deus por minha vida, família e amigos.

À minha mãe (Ana Lúcia), aos meus irmãos (Clebson e Jamilson) e minha sobrinha (Ana Maria), pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À Andreia, esposa do meu irmão Clebson, pelo o apoio.

À Universidade Federal de Itajubá pela oportunidade de fazer o curso.

Aos meus amigos dos cursos de Graduação e Mestrado em Matemática.

Ao meu orientador o professor Leandro Gustavo Gomes – que é um verdadeiro mestre pela paciência, o apoio, a confiança e seus conhecimentos repassados durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do curso de Mestrado em Matemática.

Aos professores Fábio Scalco Dias e Miguel Ángel Javaloyes Victoria pela disponibilidade de participarem da banca examinadora e pelas considerações acerca da dissertação.

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*

***Bertrand Russell***

# Resumo

Neste trabalho estudaremos variedades de Einstein folheadas por hipersuperfícies totalmente umbílicas. Se denotarmos por  $z$  o parâmetro que dá a distância entre as folhas, veremos que a curvatura média  $H$  de cada uma delas é função apenas de  $z$ , sendo estas também variedades de Einstein. Abordaremos o problema de realizar uma função dada  $H(z)$  como tal, principalmente quando há algum tipo de simetria envolvida.

**Palavras-chave:** Variedades de Einstein, Folheações totalmente umbílicas, Folheações por espaços homogêneos, curvatura média constante.

# Abstract

In this work we will study Einstein manifolds foliated by totally umbilic hypersurfaces. If we denote by  $z$  the parameter that gives the distance between the leaves, we will see that the mean curvature  $H$  of each one of them is only a function of  $z$ , being these also Einstein manifolds. We will approach the problem of representing a given function  $H(z)$  as such, especially when there is some kind of symmetry involved.

**Keywords:** Einstein Manifolds, Totally Umbilic foliations, Homogeneous spaces, constant mean curvature.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Elementos de Álgebra Tensorial</b>	<b>3</b>
1.1 Espaço Dual . . . . .	3
1.2 Forma Bilinear . . . . .	5
1.3 Tensores . . . . .	18
<b>2 Variedades Riemannianas</b>	<b>30</b>
2.1 Variedades Diferenciáveis, Aplicações Diferenciáveis, Espaço Tangente, Derivada, Subvariedades e Partição da Unidade . . . . .	30
2.2 Campos Vetoriais, Fibrados Tensoriais, Campos Tensoriais, Derivada de Lie e Métricas Riemannianas . . . . .	36
2.3 Conexões Afim e Riemanniana e Geodésicas . . . . .	52
2.4 Curvatura e Derivada Covariante de Campos Tensoriais . . . . .	63
<b>3 Variedades de Einstein em Baixas Dimensões</b>	<b>79</b>
3.1 Variedades de Einstein . . . . .	79
3.2 Variedades de Einstein de Dimensão 2 . . . . .	83



3.3	Variedades de Einstein de Dimensão 3 . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Variedades de Einstein com Folheações Totalmente Umbílicas</b>	<b>93</b>
4.1	Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas . . . . .	93
4.2	Folheações por Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas . . . . .	96
4.3	Folheações Totalmente Umbílicas em Variedades de Einstein . . . . .	105
4.4	Exemplos de Folheações Totalmente Umbílicas . . . . .	112
	<b>Considerações Finais</b>	<b>132</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>134</b>
<b>A</b>	<b>Considerações Envolvendo Isometrias</b>	<b>136</b>
A.1	Ação por Isometrias . . . . .	136
A.2	Ação por Isometrias intrínsecas . . . . .	143

# Introdução

Variedades de Einstein são objetos que tem relevância tanto no contexto matemático da Geometria Riemanniana quanto no contexto físico da Relatividade Geral. No primeiro, elas são caracterizadas pelo fato do tensor de Ricci ser proporcional à métrica,

$$\text{Ric}[\gamma] = \Lambda\gamma.$$

Já no segundo, elas são vistas como soluções do vácuo com constante cosmológica  $\Lambda$  das equações de Einstein. Até que ponto uma abordagem oriunda desta teoria física pode trazer contribuições para a Geometria Riemanniana?

Neste trabalho trazemos uma característica típica da relatividade, a saber, olhar a variedade como sendo formada por suas folhas que caracterizam a geometria espacial em cada instante de tempo. Desta forma, traduzindo para nosso contexto de métricas definidas positivas, estudaremos variedades riemannianas que são folheadas por hipersuperfícies, sendo o parâmetro “temporal” representado por  $z$ , que aqui simplesmente representa a distância entre duas folhas. Assim, conceitos da geometria extrínseca que envolvem uma hipersuperfície mergulhada  $\Sigma$  podem ser estendidos para toda a sua variedade ambiente  $M$ , tais como o campo normal, segunda forma fundamental e a curvatura média  $H$ .

Neste trabalho queremos estudar a função curvatura média  $H$  de uma variedade de Einstein  $(M, \gamma)$  associada a uma folheação totalmente umbílica, isto é, cada folha tem sua segunda forma fundamental proporcional à métrica. Um exemplo clássico é dado na geometria das superfícies no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , onde é sabido que as únicas superfícies totalmente umbílicas são partes de um plano ou de uma esfera. Desta forma poderíamos considerar o espaço euclidiano como sendo folheado por planos, o que corresponde a  $H(z) = 0$ , ou por esferas concêntricas com  $H(z) = \frac{1}{z}$ , sendo  $z$  interpretada neste caso

como a coordenada radial. No contexto geral procuraremos abordar questões do tipo:

*$H(z)$  pode ser uma função qualquer?*

*Dados  $\Lambda \in \mathbb{R}$  e  $H(z)$  uma função de  $z$ , existe uma variedade  $M$  de Einstein com constante  $\Lambda$  e uma folheação com folhas totalmente umbílicas que realiza a curvatura média  $H(z)$ ?*

*Sejam  $M$  uma variedade de Einstein com constante  $\Lambda \in \mathbb{R}$  e  $A$  um conjunto fechado de medida nula em  $M$ . É possível obtermos uma folheação totalmente umbílica em  $M \setminus A$  tal que a curvatura média seja  $H(z)$ ?*

A dissertação está distribuída da seguinte forma: os dois primeiros capítulos abordam aspectos básicos da Geometria Riemanniana, que foram incluídos visando um trabalho autocontido e que possa servir de referência para alunos iniciantes nessa área. O terceiro capítulo é uma introdução rápida às variedades de Einstein. No último capítulo concentra-se o desenvolvimento das ideias e das questões levantadas acima. No final desta dissertação encontra-se um apêndice contendo considerações sobre ação por isometrias intrínsecas. Concluimos o trabalho fazendo um levantamento da bibliografia atual de temas conectados com o assunto.

# Capítulo 1

## Elementos de Álgebra Tensorial

Neste capítulo apresentamos aspectos básicos da álgebra tensorial tais como espaço dual, formas bilineares e tensores, que serão úteis no cálculo em variedades que será abordado nos próximos capítulos.

### 1.1 Espaço Dual

Consideraremos neste texto espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais e de dimensão finita, exceto quando for feita menção a outra situação.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $E$  um espaço vetorial. Uma transformação linear  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de funcional linear em  $E$ .*

Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$ . O espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; \mathbb{R}) := E^*$  dos funcionais lineares em  $E$  é chamado de *espaço dual* a  $E$ . Se o subconjunto  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  é uma base de  $E$ , então  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\} \subset E^*$  tal que

$$e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases},$$

onde  $i, j = 1, \dots, n$ , é uma base de  $E^*$ . Consequentemente,  $\dim E = \dim E^*$ . Dizemos que,  $\beta^*$  é a *base dual* a  $\beta$ .

Seja  $v \in E$ . Dessa forma,  $\exists! v^j \in \mathbb{R}$  com  $j = 1, \dots, n$  tais que  $v = \sum_{j=1}^n v^j e_j$ . Assim,

$$e^i(v) = \sum_{j=1}^n v^j e^i(e_j) = v^i,$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ . Logo,

$$v = \sum_{j=1}^n e^j(v) e_j.$$

Agora, considere  $\alpha \in E^*$ . Então, existem  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  com  $j = 1, \dots, n$  de modo que  $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \alpha(e_i) &= \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j \right) (e_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j(e_i) \\ &= \alpha_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

O teorema a seguir resume as discussões acima.

**Teorema 1.1.1.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$  e  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$ . Então, existe uma única base  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  tal que  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ . Ainda,*

$$v = \sum_{j=1}^n e^j(v) e_j \quad e \quad \alpha = \sum_{j=1}^n \alpha(e_j) e^j,$$

para todo  $v \in E$  e  $\alpha \in E^*$ .

Chamaremos o espaço vetorial  $(E^*)^* := E^{**}$  de *espaço bidual* a  $E$ .

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_v : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \phi_v(\alpha) = \alpha(v) \end{aligned},$$

onde  $v \in E$  (fixo). Note que, esta aplicação está bem definida e é linear, ou seja,  $\phi_v \in E^{**}$ .

**Teorema 1.1.2.** *A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E^{**} \\ v &\longmapsto \phi_v \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

A demonstraç~ao deste teorema pode ser encontrada em [4] ou [5].

**Corolário 1.1.1.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimens~ao  $n \geq 1$  e  $\mathcal{B} = \{e^1, \dots, e^n\}$  uma base de  $E^*$ . Ent~ao, existe uma base  $\beta$  de  $E$  tal que  $\mathcal{B} = \beta^*$ .*

*Demonstraç~ao.* Seja  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  a base dual a  $\mathcal{B}$ . Dessa forma,  $\phi_i(e^j) = \delta_i^j$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Como  $\mathcal{B}^*$  é uma base de  $E^{**}$  e  $\Phi : E \rightarrow E^{**}$  é um isomorfismo pelo teorema 1.1.2, ent~ao  $\beta = \{\Phi^{-1}(\phi_1), \dots, \Phi^{-1}(\phi_n)\}$  é uma base para  $E$ . Denotaremos  $e_i = \Phi^{-1}(\phi_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Assim,  $\phi_{e_i} = \phi_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Temos que,

$$\begin{aligned} e^j(e_i) &= \phi_{e_i}(e^j) \\ &= \phi_i(e^j) \\ &= \delta_i^j, \end{aligned}$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ . Logo,  $\mathcal{B} = \beta^*$ . □

## 1.2 Forma Bilinear

**Definiç~ao 1.2.1.** *Seja  $E$  um espaço vetorial. Uma funç~ao  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de forma bilinear se satisfaz as seguintes propriedades:*

*i.*  $b(\lambda u + v, w) = \lambda b(u, w) + b(v, w)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ .

*ii.*  $b(u, \lambda v + w) = \lambda b(u, v) + b(u, w)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ .

Denotaremos por  $B(E)$  o conjunto formado por todas as formas bilineares sobre  $E$ . Note que  $B(E)$  é um espaço vetorial com as operaç~oes usuais de adiç~ao de funç~oes e multiplicaç~ao de uma funç~ao por um número real.

Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$  e  $b \in B(E)$ . Considere  $u, v \in E$ . Ent~ao, existem  $u^i, v^j \in \mathbb{R}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ , tais que  $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$  e

$v = \sum_{j=1}^n v^j e_j$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 b(u, v) &= b\left(\sum_{i=1}^n u^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n u^i b\left(e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^i v^j b(e_i, e_j) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} e^i(u) e^j(v), \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

onde  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Afirmamos que,

$$\gamma = \{e^i \otimes e^j \in B(E); (e^i \otimes e^j)(u, v) = e^i(u) e^j(v), \text{ para } i, j = 1, \dots, n\}$$

é uma base para  $B(E)$ . Com efeito, não é difícil ver que  $e^i \otimes e^j \in B(E)$ . Pelo que foi feito acima já sabemos que  $\gamma$  gera  $B(E)$ , então basta mostrar que  $\gamma$  é linearmente independente.

Sejam  $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ , tais que  $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} (e^i \otimes e^j) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} (e^i \otimes e^j)(e_k, e_l) = 0 \\
 \Rightarrow &\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} e^i(e_k) e^j(e_l) = 0 \\
 \Rightarrow &\alpha_{kl} = 0, \forall k, l = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Daí vem que  $\dim B(E) = n^2$  e, conseqüentemente,  $B(E) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . A saber, o isomorfismo entre  $B(E)$  e  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é dado pela aplicação

$$\begin{aligned}
 T: B(E) &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\
 b &\longmapsto (b_{ij})_{n \times n},
 \end{aligned}$$

onde  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Pela equação (1.1), podemos escrever<sup>1</sup> a forma bilinear  $b$ , acima, da seguinte forma

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u^i v^j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u^i b_{ij} \right) v^j \\ &= \left( \sum_{i=1}^n u^i b_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^n u^i b_{in} \right) [v]_{\beta} \\ &= [u]_{\beta}^t B [v]_{\beta} \end{aligned}$$

para todo  $u, v \in E$ , onde  $[u]_{\beta}^t = (u^i)_{1 \times n}$ ,  $[v]_{\beta} = (v^i)_{n \times 1}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ .

**Proposição 1.2.1.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $b \in B(E)$ . Se  $B$  e  $\tilde{B}$  são as matrizes da forma bilinear  $b$  com relação às bases, respectivamente,  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$  de  $E$ , então  $\tilde{B} = Q^t B Q$ , onde  $Q$  é a matriz de mudança de bases de  $\beta$  para  $\tilde{\beta}$ .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [4] ou [5].

**Definição 1.2.2.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $b \in B(E)$ . Dizemos que  $b$  é:*

- i. simétrica se  $b(u, v) = b(v, u)$ , para todo  $u, v \in E$ .*
- ii. anti-simétrica se  $b(u, v) = -b(v, u)$ , para todo  $u, v \in E$ .*

Note que, o conjunto das formas bilineares simétricas, que será denotado por  $S(E)$ , é um subespaço vetorial de  $B(E)$ .

**Proposição 1.2.2.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta$  uma base de  $E$  e  $b \in B(E)$ . A forma bilinear  $b$  é simétrica se, e somente se,  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  é uma matriz simétrica, onde  $B$  é a matriz de  $b$  relativa à base  $\beta$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $u, v \in E$ . Temos que,

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(v, u), \quad \forall u, v \in E \\ \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (e^i \otimes e^j)(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n b_{ji} (e^i \otimes e^j)(u, v), \quad \forall u, v \in E \\ \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} - b_{ji}) (e^i \otimes e^j)(u, v) &= 0, \quad \forall u, v \in E \\ \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} - b_{ji}) (e^i \otimes e^j) &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Perceba que temos um abuso de notação que é justificado pela identificação natural de  $M_1(\mathbb{R})$  com  $\mathbb{R}$ .



Como  $\{e^i \otimes e^j \in B(E); i, j = 1, \dots, n\}$  é uma base de  $B(E)$ , então segue o resultado.  $\square$

Mostra-se de maneira análoga um resultado semelhante para formas bilineares anti-simétricas, ou seja, uma forma bilinear é anti-simétrica se, e só se, a matriz associada a esta forma bilinear é anti-simétrica.

Seja  $b \in S(E)$ . Chamamos de *núcleo de  $b$*  o subconjunto de  $E$

$$\ker b = \{u \in E; b(u, v) = 0, \forall v \in E\}.$$

Se  $\ker b = \{0\}$ , então dizemos que  $b$  é *não-degenerada*.

**Proposição 1.2.3.** *Seja  $b \in S(E)$ . Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

*i.  $b$  é não-degenerada.*

*ii.  $\det (b_{ij})_{n \times n} \neq 0$ , onde  $(b_{ij})_{n \times n}$  é a matriz de  $b$  com relação a uma base  $\beta$  de  $E$ .*

*iii. A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi_b : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto \Phi_b(u) : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ &v \longmapsto b(u, v) \end{aligned}$$

*é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Dividiremos a prova em duas partes.

1ª Parte: *i.  $\Leftrightarrow$  ii.*

( $\Leftarrow$ ) Seja  $w \in E$  tal que  $b(w, v) = 0$ , para todo  $v \in E$ . Como

$$b(u, v) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} u^i \right) e^j(v), \forall u, v \in E,$$

então,

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} w^i \right) e^j = 0.$$

Lembre-se que  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  é a base dual a  $\beta$ . Dessa forma,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b_{i1} w^i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{in} w^i = 0 \end{cases} \Rightarrow (b_{ij})_{n \times n} [w^i]_{\beta} = 0,$$

pois  $(b_{ij})_{n \times n}$  é simétrica. Como  $\det (b_{ij})_{n \times n} \neq 0$ , então  $(b_{ij})_{n \times n}$  admite inversa. Daí vem que,

$$\begin{aligned} (b_{ij})_{n \times n} [w^i]_{\beta} &= 0 \\ \Rightarrow (b_{ij})_{n \times n}^{-1} \left( (b_{ij})_{n \times n} [w^i]_{\beta} \right) &= 0 \\ \Rightarrow w &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\ker b = \{0\}$ , ou seja,  $b$  é não-degenerada.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\det (b_{ij})_{n \times n} = 0$ . Assim,  $\exists u \in E \setminus \{0\}$  tal que  $(b_{ij})_{n \times n} [u^i]_{\beta} = 0$ . Como  $(b_{ij})_{n \times n}$  é simétrica, então

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b_{i1} u^i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{in} u^i = 0 \end{cases}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} u^i \right) e^j &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} u^i \right) e^j (v) &= 0, \forall v \in E \\ \Rightarrow b(u, v) &= 0, \forall v \in E. \end{aligned}$$

Daí vem que,  $\ker b \neq \{0\}$ . Mas, isso contradiz a hipótese de que  $b$  é não-degenerada. Portanto,  $\det (b_{ij})_{n \times n} \neq 0$ .

2ª Parte: *ii.*  $\Leftrightarrow$  *iii.*

( $\Rightarrow$ ) Primeiramente, note que  $\Phi_b$  está bem definida. Agora, vamos mostrar que  $\Phi_b$  é uma transformação linear. Sejam  $u, v \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \Phi_b(\lambda u + v)(w) &= b(\lambda u + v, w) \\ &= \lambda b(u, w) + b(v, w) \\ &= (\lambda \Phi_b(u) + \Phi_b(v))(w), \forall w \in E. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\Phi_b(\lambda u + v) = \lambda \Phi_b(u) + \Phi_b(v).$$

Daí segue que  $\Phi_b$  é linear. Como  $\dim E < \infty$  e  $\dim E = \dim E^*$ , então para provar que  $\Phi_b$  é um isomorfismo basta mostrar que  $\Phi_b$  é injetora. Sejam  $v, w \in E$  tais que  $\Phi_b(v) = \Phi_b(w)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Phi_b(v)(u) &= \Phi_b(w)(u), \forall u \in E \\ \Rightarrow b(v, u) &= b(w, u), \forall u \in E \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n b_{ij} v^i) e^j(u) &= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n b_{ij} w^i) e^j(u), \forall u \in E \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n b_{ij} v^i) e^j &= \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n b_{ij} w^i) e^j \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n b_{ij} (v^i - w^i) &= 0, \forall j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Como  $b \in S(E)$ , temos que  $(b_{ij})_{n \times n} [v - w]_\beta = 0$ . Por hipótese, obtemos  $v = w$ . O que mostra que  $\Phi_b$  é injetora.

( $\Leftarrow$ ) Temos que,

$$\begin{aligned} \Phi_b(e_k)(u) &= b(e_k, u) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} e^i(e_k) \right) e^j(u) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{kj} e^j(u), \forall k = 1, \dots, n \text{ e } u \in E. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_b(e_k) = \sum_{j=1}^n b_{kj} e^j, \forall k = 1, \dots, n.$$

Daí vem que,

$$[\Phi_b]_{\beta, \beta^*} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como  $[\Phi_b]_{\beta, \beta^*}$  é invertível, então  $\det(b_{ij})_{n \times n} \neq 0$ . □

**Definição 1.2.3.** *Uma forma bilinear  $b \in S(E)$  não-degenerada é chamada de produto escalar.*

O produto escalar  $b$  positivo definido, ou seja,  $b(u, u) > 0, \forall u \in E \setminus \{0\}$  é chamado de *produto interno*.

Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$  e  $g$  um produto escalar sobre  $E$ . O isomorfismo

$$\begin{aligned}\Phi_g : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto \Phi_g(u) = g(u, \cdot)\end{aligned}$$

(veja a proposição 1.2.3) induz um produto escalar sobre  $E^*$  dado por

$$\tilde{g}(\alpha, \beta) = g(\Phi_g^{-1}\alpha, \Phi_g^{-1}\beta).$$

De fato,

*i.*  $\tilde{g}$  está bem definida.

*ii.*  $\tilde{g}$  é uma forma bilinear.

Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in E^*$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Temos que,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(k\alpha + \beta, \gamma) &= g(\Phi_g^{-1}(k\alpha + \beta), \Phi_g^{-1}\gamma) \\ &= g(k\Phi_g^{-1}\alpha + \Phi_g^{-1}\beta, \Phi_g^{-1}\gamma) \\ &= kg(\Phi_g^{-1}\alpha, \Phi_g^{-1}\gamma) + g(\Phi_g^{-1}\beta, \Phi_g^{-1}\gamma) \\ &= k\tilde{g}(\alpha, \gamma) + \tilde{g}(\beta, \gamma).\end{aligned}$$

*iii.*  $\tilde{g}$  é simétrica.

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\alpha, \beta) &= g(\Phi_g^{-1}\alpha, \Phi_g^{-1}\beta) \\ &= g(\Phi_g^{-1}\beta, \Phi_g^{-1}\alpha) \\ &= \tilde{g}(\beta, \alpha),\end{aligned}$$

para todo  $\alpha, \beta \in E^*$ .

*iv.*  $\tilde{g}$  é não-degenerada.

Seja  $\alpha \in \ker \tilde{g}$ . Como  $\Phi_g^{-1}(E^*) = E$ , então

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\alpha, \beta) &= 0, \forall \beta \in E^* \\ \Rightarrow g(\Phi_g^{-1}\alpha, \Phi_g^{-1}\beta) &, \forall \beta \in E^* \\ \Rightarrow \Phi_g^{-1}\alpha &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Logo,  $\ker \tilde{g} = \{0\}$ .

**Proposição 1.2.4.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$  e  $g$  um produto escalar sobre  $E$ . Se  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  a base dual a  $\beta$  e  $\tilde{g}$  é o produto escalar sobre  $E^*$  induzido por  $g$ , então  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , onde  $g^{ij} = \tilde{g}(e^i, e^j)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .*

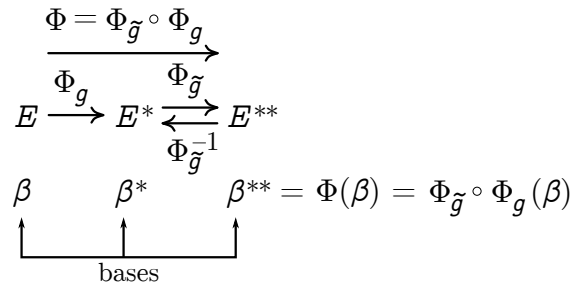


Figura 1.1: Diagrama.

*Demonstração.* Dividiremos a prova em três partes (Veja a figura 1.1).

1ª Parte:  $\Phi = \Phi_{\tilde{g}} \circ \Phi_g$ , onde

$$\begin{aligned}
 \Phi : E &\longrightarrow E^{**} \\
 u &\longmapsto \phi_u : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Ver teorema 1.1.2}). \\
 f &\longmapsto f(u)
 \end{aligned}$$

Sejam  $u \in E$  e  $f \in E^*$ . Temos que,

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{\tilde{g}} \circ \Phi_g)(u)(f) &= (\Phi_{\tilde{g}}(\Phi_g(u)))(f) \\
 &= \tilde{g}(\Phi_g(u), f) \\
 &= g(\Phi_g^{-1}(\Phi_g(u)), \Phi_g^{-1}(f)) \\
 &= g(u, \Phi_g^{-1}(f)) \\
 &= g(\Phi_g^{-1}(f), u) \\
 &= (\Phi_g(\Phi_g^{-1}(f)))(u) \\
 &= f(u) \\
 &= \phi_u(f) \\
 &= \Phi(u)(f).
 \end{aligned}$$

Logo,  $\Phi = \Phi_{\tilde{g}} \circ \Phi_g$ .

2ª Parte:  $\Phi(\beta) = \beta^{**}$ .

Suponha que  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  é uma base de  $E$  tal que  $\Phi(\tilde{\beta}) = \beta^{**}$ . Temos que,  $\tilde{\beta}^* = \beta^*$  pelo corolário 1.1.1. Assim,

$$e^i(e_j) = e^i(\tilde{e}_j) = \delta_j^i, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Pelo teorema 1.1.1,

$$\begin{aligned} e_j &= \sum_{i=1}^n e^i(e_j) \tilde{e}_i \\ \Rightarrow e_j &= \tilde{e}_j, \end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Logo,  $\tilde{\beta} = \beta$  e, conseqüentemente,  $\Phi(\beta) = \beta^{**}$ .

3ª Parte:  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , onde  $g^{ij} = \tilde{g}(e^i, e^j)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Da demonstração da proposição 1.2.3, temos que

$$[\Phi_g]_{\beta, \beta^*} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } [\Phi_{\tilde{g}}]_{\beta^*, \beta^{**}} = \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix}.$$

Como

$$\Phi_g(e_j) = \sum_{i=1}^n g_{ij} e^i, \text{ para } j = 1, \dots, n,$$

então

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{g}}(\Phi_g(e_j)) &= \Phi(e_j) = \phi_{e_j} \\ \Rightarrow \Phi_{\tilde{g}}^{-1}(\phi_{e_j}) &= \Phi_g(e_j) = \sum_{i=1}^n g_{ij} e^i, \end{aligned}$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ . Portanto,

$$[\Phi_{\tilde{g}}^{-1}]_{\beta^{**}, \beta^*} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = [\Phi_g]_{\beta, \beta^*},$$

isto é,  $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ , onde  $g^{ij} = \tilde{g}(e^i, e^j)$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . □

**Definição 1.2.4.** *Seja  $b$  um produto escalar sobre o espaço vetorial  $E$ . Diremos que:*

- i.* dois vetores  $u, v \in E$  são ortogonais com relação a  $b$  se  $b(u, v) = 0$ .
- ii.* um vetor  $u \in E$  é unitário com relação a  $b$  se  $|b(u, u)| = 1$ .
- iii.*  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal relativa a  $b$  de  $E$  se  $\beta$  é uma base de  $E$  e  $|b(e_i, e_j)| = \delta_{ij}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Definição 1.2.5.** Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $b \in B(E)$ . A função

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto q(u) = b(u, u) \end{aligned}$$

é chamada de forma quadrática associada a  $b$ .

Sejam  $u, v \in E$  e  $b \in S(E)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(u-v) &= b(u+v, u+v) - b(u-v, u-v) \\ &= b(u, u) + b(u, v) + b(v, u) + b(v, v) \\ &\quad - b(u, u) + b(u, v) + b(v, u) - b(v, v) \\ &= 4b(u, v). \end{aligned}$$

Note que uma vez conhecida a forma quadrática  $q$  de uma forma bilinear simétrica  $b$  é possível recuperar esta forma bilinear simétrica através da *identidade de polarização*

$$b(u, v) = \frac{1}{4} [q(u+v) - q(u-v)].$$

**Teorema 1.2.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial. Se  $b \in S(E)$ , então existe uma base  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  tal que  $b(e_i, e_j) = 0$ ,  $\forall i \neq j$  com  $i, j = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.* Note que, se  $b = 0$  ou  $\dim E = 1$  não há nada para provar. Desta forma vamos considerar  $b \neq 0$  e  $\dim E > 1$ . Temos que, existe  $0 \neq u \in E$  tal que  $b(u, u) \neq 0$ . De fato, se para todo  $w \in E$  tivéssemos  $q(w) = b(w, w) = 0$ , então, pela identidade de polarização,

$b(u, v) = \frac{1}{4} [q(u+v) - q(u-v)] = 0$ . Mas isto contradiz o fato de que  $b \neq 0$ , logo segue o resultado. Agora, defina o subespaço vetorial  $U = \text{Span}(\{u\})$ . Seja  $U^\perp = \{v \in E; b(u, v) = 0\}$ . Afirmamos que  $E = U \oplus U^\perp$ . Com efeito,

*i.*  $U$  e  $U^\perp$  são independentes.

Sejam  $v \in U$  e  $w \in U^\perp$  tais que  $v + w = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} b(u, v + w) &= 0 \\ \Rightarrow b(u, v) + b(u, w) &= 0 \\ \Rightarrow b(u, \alpha u) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha b(u, u) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0, \end{aligned}$$

onde  $v = \alpha u$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assim,  $v = 0$  e, conseqüentemente,  $w = 0$ .

*ii.*  $U + U^\perp$  é direta.

Seja  $v \in U \cap U^\perp$ . Então, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \alpha u$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} b(u, v) &= 0 \\ \Rightarrow b(u, \alpha u) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha b(u, u) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja,  $v = 0$ . Logo,  $U \cap U^\perp = \{0\}$ .

*iii.*  $E \subset U \oplus U^\perp$ .

Seja  $v \in E$ . Defina o vetor  $w = v - \frac{b(v, u)}{b(u, u)}u$ . Temos que,

$$\begin{aligned} b(u, w) &= b\left(u, v - \frac{b(v, u)}{b(u, u)}u\right) \\ &= b(u, v) - \frac{b(v, u)}{b(u, u)}b(u, u) \\ &= b(u, v) - b(v, u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí vem que,  $w \in U^\perp$ . Assim,  $v = \frac{b(v, u)}{b(u, u)}u + w \in U \oplus U^\perp$ .

Logo,  $E = U \oplus U^\perp$ . Restringindo  $b$  ao subespaço vetorial  $U^\perp$ ,  $b$  continua sendo uma forma bilinear simétrica, e procedendo de maneira análoga obtemos um vetor não nulo  $e_2$  de  $U^\perp$  tal que  $U^\perp = U_2 \oplus \tilde{U}_2$ , onde  $U_2 = \text{Span}(\{e_2\})$  e  $\tilde{U}_2 = \{v \in U^\perp; b(e_2, v) = 0\}$ .



Agora, de forma indutiva e tomando  $e_1 = u$  obtemos uma base  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  tal que  $b(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$  com  $i, j = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Teorema 1.2.2.** *Seja  $E$  um espaço vetorial. Se  $b \in S(E) \setminus \{0\}$ , então existe uma base  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  ortogonal relativa a  $b$  de  $E$  tal que*

$$\begin{cases} b(e_i, e_j) = 0 & , \text{ se } i \neq j \\ b(e_i, e_i) = \pm 1 & , \text{ se } 1 \leq i \leq p , \\ b(e_i, e_i) = 0 & , \text{ se } i > p \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $p = \dim E - \dim \ker E$ . Além disso,

$$\# \{i; b(e_i, e_i) = 1 \text{ para } i = 1, \dots, p\} \text{ e } \# \{i; b(e_i, e_i) = -1 \text{ para } i = 1, \dots, p\}$$

são invariantes relativo a qualquer base de  $E$  que satisfaça a condição (1.2).

*Demonstração.* Pelo teorema 1.2.1, existe uma base  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  de  $E$  tal que  $b(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = 0, \forall i \neq j$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Como  $b \in S(E) \setminus \{0\}$ , então  $b(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ . Afirmamos que  $\{\tilde{e}_{p+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$  é uma base de  $\ker E$ . De fato,  $\{\tilde{e}_{p+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$  é L.I., pois  $\tilde{\beta}$  é uma base de  $E$ . Basta mostrar que  $\{\tilde{e}_{p+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$  gera  $\ker E$ . Seja  $u \in \ker E$ . Temos que,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n a^i \tilde{e}_i \\ \Rightarrow b(\tilde{e}_j, u) &= b(\tilde{e}_j, \sum_{i=1}^n a^i \tilde{e}_i) \\ \Rightarrow a^j &= 0, \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Com isso,  $u = \sum_{i=p+1}^n a^i \tilde{e}_i \in \text{Span}(\{\tilde{e}_{p+1}, \dots, \tilde{e}_n\})$ . Daí segue a afirmação acima e que  $p = \dim E - \dim \ker E$ . Observe que  $p$  não depende da base ortogonal relativa a  $b$  de  $E$ .

Tomemos

$$e_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|b(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)|}} \tilde{e}_i & , \text{ se } 1 \leq i \leq p \\ \tilde{e}_i & , \text{ se } i > p \end{cases} .$$

Assim,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortogonal de  $E$  tal que

$$\begin{cases} b(e_i, e_j) = 0 & , \text{ se } i \neq j \\ b(e_i, e_i) = \pm 1 & , \text{ se } 1 \leq i \leq p . \\ b(e_i, e_i) = 0 & , \text{ se } i > p \end{cases}$$

Agora, mostraremos que  $\#\{i; b(e_i, e_i) = 1 \text{ para } i = 1, \dots, p\}$  é invariante com qualquer base de  $E$  que satisfaça a condição (1.2). Sejam

$$E^+ := \text{Span}(\{e_i \in \beta; b(e_i, e_i) = 1, \text{ para } i = 1, \dots, p\})$$

e

$$E^- := \text{Span}(\{e_i \in \beta; b(e_i, e_i) = -1, \text{ para } i = 1, \dots, p\}).$$

Dessa forma,  $E = E^+ \oplus E^- \oplus \ker E$ . Seja  $U$  um subespaço vetorial de  $E$  onde  $b$  é um produto interno. Vamos mostrar que  $U$ ,  $E^-$  e  $\ker E$  são independentes. Com efeito, sejam  $u \in U$ ,  $v \in E^-$  e  $w \in \ker E$  tais que  $u + v + w = 0$ . Temos que,

$$0 = b(u, 0) = b(u, u + v + w) = b(u, u) + b(u, v) + b(u, w)$$

e

$$0 = b(v, 0) = b(v, u + v + w) = b(v, u) + b(v, v) + b(v, w).$$

Note que,  $b(u, w) = b(v, w) = 0$ . Como  $b \in S(E) \setminus \{0\}$ , então  $b(u, u) = b(v, v)$ . Mas,  $b$  é definida positiva em  $U$  e definida negativa em  $E^-$ . Assim,  $u = v = 0$  e, conseqüentemente,  $w = 0$ . Destarte,  $U$ ,  $E^-$  e  $\ker E$  são independentes. Com isso,  $\dim U \leq \dim E^+$ . Suponha que  $\gamma$  seja uma base de  $E$  que satisfaça a condição (1.2). De modo análogo defina os subespaços vetoriais  $E_\gamma^+$  e  $E_\gamma^-$  de  $E$ . Pelo que foi exposto acima, temos que  $\dim E_\gamma^+ \leq \dim E^+$ . Trocando a ordem dos argumentos acima, obtemos que  $\dim E^+ \leq \dim E_\gamma^+$ . Logo,  $\dim E^+ = \dim E_\gamma^+$ . Daí vem que,  $\#\{i; b(e_i, e_i) = 1 \text{ para } i = 1, \dots, p\}$  é invariante com qualquer base de  $E$  que satisfaça a condição (1.2). Como

$$\#\{i; b(e_i, e_i) = 1 \text{ para } i = 1, \dots, p\} + \#\{i; b(e_i, e_i) = -1 \text{ para } i = 1, \dots, p\} = p,$$

então  $\#\{i; b(e_i, e_i) = -1 \text{ para } i = 1, \dots, p\}$  é, também, invariante com qualquer base de  $E$  que satisfaça a condição (1.2).  $\square$

Chamaremos de *índice de  $b$*  o número  $\#\{i; b(e_i, e_i) = -1 \text{ para } i = 1, \dots, p\}$  e de *assinatura de  $b$*  a diferença  $\dim E^+ - \dim E^-$ .

Do teorema 1.2.2, temos que se  $b$  é um:

- a) produto escalar de índice  $n_-$  sobre  $E$ , então existe uma base ortonormal relativa a  $b$  de  $E$  tal que a matriz associada é

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ 0 \end{array} \\ & & \begin{array}{ccc} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ 0 \end{array} & & \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

- b) produto interno sobre  $E$ , então existe uma base ortonormal de  $E$  tal que a matriz associada é a matriz identidade.

### 1.3 Tensores

Daqui em diante denotaremos os elementos de uma matriz  $A$  por  $A_j^i$ , onde  $i$  corresponde a linha e  $j$  a coluna do elemento na matriz.

Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  bases de  $E$ . Se  $A$  é a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}$  para  $\beta$ , então a lei de transformação dos vetores de  $\tilde{\beta}$  para  $\beta$  é

$$e_j = \sum_{i=1}^n A_j^i \tilde{e}_i, \forall j = 1, \dots, n.$$

Esta lei de transformação é chamada de *lei de transformação covariante*. Seja  $u \in E$  tal que  $[u]_\beta = (u^i)_{n \times 1}$  e  $[u]_{\tilde{\beta}} = (\tilde{u}^i)_{n \times 1}$ . Temos que,

$$\begin{aligned} [u]_{\tilde{\beta}} &= A [u]_\beta \\ \Rightarrow [u]_\beta &= A^{-1} [u]_{\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^{-1})_1^1 & \cdots & (A^{-1})_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^{-1})_1^n & \cdots & (A^{-1})_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^n \end{pmatrix},$$

ou seja,  $u^i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_j^i \tilde{u}^j$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Note que, as componentes do vetor  $u$  se transformam de forma inversa à lei de transformação covariante. Esta chamaremos de *lei de transformação contravariante*.

**Proposição 1.3.1.** *Sejam  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  bases do espaço vetorial  $E$  e  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  e  $\tilde{\beta}^* = \{\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n\}$  as bases duais, respectivamente, a  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$ . Se  $A$  é a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}$  para  $\beta$ , então*

$$e^i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_j^i \tilde{e}^j, \forall i = 1, \dots, n,$$

isto é,  $(A^{-1})^t$  é a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}^*$  para  $\beta^*$ .

*Demonstração.* Temos que,

$$e_j = \sum_{i=1}^n A_j^i \tilde{e}_i, \forall j = 1, \dots, n.$$

Seja  $B$  a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}^*$  para  $\beta^*$ . Dessa forma, para  $f \in E^*$ ,

$$\begin{aligned} [f]_{\tilde{\beta}^*} &= B [f]_{\beta^*} \\ \Rightarrow \left( [f]_{\tilde{\beta}^*} \right)^t &= \left( [f]_{\beta^*} \right)^t C, \end{aligned}$$

onde  $C = B^t$ . Assim,

$$e^k = \sum_{l=1}^n C_l^k \tilde{e}^l, \forall k = 1, \dots, n.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\delta_j^k &= e^k(e_j) \\
&= e^k\left(\sum_{i=1}^n A_j^i \tilde{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n A_j^i e^k(\tilde{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n A_j^i \sum_{l=1}^n C_l^k \tilde{e}^l(\tilde{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n A_j^i C_i^k \\
&= \sum_{i=1}^n C_i^k A_j^i,
\end{aligned}$$

para  $j, k = 1, \dots, n$ . Daí vem que,  $CA = I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Logo,  $C = A^{-1}$  o que implica que

$$e^k = \sum_{l=1}^n (A^{-1})_l^k \tilde{e}^l,$$

para todo  $k = 1, \dots, n$  e, conseqüentemente,  $B = C^t = (A^{-1})^t$ . □

Seja  $f \in E^*$  tal que  $[f]_{\beta^*} = (f_i)_{n \times 1}$  e  $[f]_{\tilde{\beta}^*} = (\tilde{f}_i)_{n \times 1}$ . Como

$$\begin{aligned}
[f]_{\tilde{\beta}^*} &= (A^{-1})^t [f]_{\beta^*} \\
\Rightarrow [f]_{\beta^*} &= A^t [f]_{\tilde{\beta}^*},
\end{aligned}$$

então

$$f_i = \sum_{j=1}^n A_i^j \tilde{f}_j,$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Portanto, a lei de transformação das coordenadas do vetor  $f$  em  $\tilde{\beta}^*$  para  $\beta^*$  é a mesma da lei de transformação covariante, ou seja,

$$e_i = \sum_{j=1}^n A_i^j \tilde{e}_j, \forall i = 1, \dots, n.$$

Sejam  $E_1, \dots, E_n$  e  $E$  espaços vetoriais. Dizemos que  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E$  é uma *aplicação multilinear* ou *aplicação  $n$ -linear* sobre  $E$  se

$$f(u_1, \dots, \lambda u_i + \tilde{u}_i, \dots, u_n) = \lambda f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + f(u_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, u_n),$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u_i, \tilde{u}_i \in E_i$  com  $i = 1, \dots, n$ . Se  $E = \mathbb{R}$ , então  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *forma multilinear* ou *forma n-linear*.

Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $T : E^k \times (E^*)^l \rightarrow E$  uma aplicação dada por

$$T(u_1, \dots, u_k, \omega^1, \dots, \omega^l) = f^1(u_1) \cdots f^k(u_k) \cdot g_1(\omega^1) \cdots g_l(\omega^l) \cdot e,$$

$\forall (u_1, \dots, u_k, \omega^1, \dots, \omega^l) \in E^k \times (E^*)^l$ , onde  $e \in E$ ,  $f^i \in E^*$  e  $g_j \in E^{**}$  para  $i = 1, \dots, k$  e  $j = 1, \dots, l$ . A aplicação  $T$  é um exemplo de uma aplicação multilinear.

**Definição 1.3.1.** *Seja  $E$  um espaço vetorial.*

*i. Se a aplicação  $T : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma  $k$ -linear, então dizemos que  $T$  é um tensor  $k$ -covariante sobre  $E$ .*

*ii. Seja  $T : \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_{l \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma  $l$ -linear. Chamamos  $T$  de tensor  $l$ -contravariante sobre  $E$ .*

*iii. Seja  $T : \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ fatores}} \times \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_{l \text{ fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma  $(k+l)$ -linear. Dizemos que  $T$  é um  $(k, l)$ -tensor sobre  $E$ , isto é,  $T$  é um tensor  $k$ -covariante e  $l$ -contravariante.*

Denotaremos por  $T_k^0(E)$  o espaço vetorial formado pelos tensores  $k$ -covariantes sobre  $E$ ,  $T_0^l(E)$  o espaço vetorial formado pelos tensores  $l$ -contravariantes sobre  $E$  e  $T_k^l(E)$  o espaço vetorial formado pelos  $(k, l)$ -tensores sobre  $E$ .

Vejam algumas identificações naturais:

- a) 0-tensores são números reais, ou seja,  $T_0^0(E) = \mathbb{R}$ .
- b) Os tensores 1-covariantes sobre  $E$  são funcionais lineares sobre  $E$ . Assim,  $T_1^0(E) = E^*$ .
- c) Os tensores 1-contravariantes sobre  $E$  são funcionais lineares sobre  $E^*$ . Dessa forma,  $T_0^1(E) = (E^*)^* = E$ .
- d) Os tensores 2-covariantes sobre  $E$  são formas bilineares sobre  $E$ , ou seja,  $T_2^0(E) = B(E)$ . Daqui em diante usaremos a notação  $T_2^0(E)$  para nos referirmos as formas bilineares sobre  $E$ .

- e) Os espaços vetoriais  $T_1^1(E)$  e  $\mathcal{L}(E)$  são isomorfos e temos um isomorfismo natural  $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow T_1^1(E)$  dado por  $\Phi(T)(u, f) = f(Tu)$ , para todo  $T \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u \in E$  e  $f \in E^*$ .

**Definição 1.3.2.** *Sejam  $S \in T_k^l(E)$  e  $T \in T_p^q(E)$ . O tensor  $S \otimes T \in T_{k+p}^{l+q}(E)$  dado por*

$$(S \otimes T)(u_1, \dots, u_{k+p}, f^1, \dots, f^{l+q}) = S(u_1, \dots, u_k, f^1, \dots, f^l) \cdot T(u_{k+1}, \dots, u_{k+p}, f^{l+1}, \dots, f^{l+q}),$$

$\forall (u_1, \dots, u_{k+p}, f^1, \dots, f^{l+q}) \in E^{k+p} \times (E^*)^{l+q}$ , é chamado de produto tensorial de  $S$  por  $T$ .

Observe que, se  $f, g \in T_1^0(E) = E^*$ , então  $(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$ , para todo  $u, v \in E$ . Temos, ainda, que  $f \otimes g \in T_2^0(E) = B(E)$ .

**Proposição 1.3.2.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $E$  e  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  a base dual a  $\beta$ . Se  $T \in T_k^l(E)$ , então*

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l},$$

onde  $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l})$ . Além disso,

$$\beta_k^l = \left\{ e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}}$$

é uma base de  $T_k^l(E)$  e, conseqüentemente,  $\dim T_k^l(E) = n^{k+l}$ .

*Demonstração.* Sejam  $u_r \in E$  e  $f^s \in E^*$  para  $r = 1, \dots, k$  e  $s = 1, \dots, l$ . Temos que existem  $u_r^{i_r}, f_{j_s}^s \in \mathbb{R}$  para  $1 \leq i_r, j_s \leq n$  tais que

$$u_r = \sum_{i_r=1}^n u_r^{i_r} e_{i_r} \quad \text{e} \quad f^s = \sum_{j_s=1}^n f_{j_s}^s e^{j_s},$$

para todo  $r = 1, \dots, k$  e  $s = 1, \dots, l$ . Considere  $T \in T_k^l(E)$ . Assim, pela linearidade de

$T$  em cada entrada,

$$\begin{aligned}
& T(u_1, \dots, u_k, f^1, \dots, f^l) \\
&= T\left(\sum_{i_1=1}^n u_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n u_k^{i_k} e_{i_k}, \sum_{j_1=1}^n f_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, \sum_{j_l=1}^n f_{j_l}^l e^{j_l}\right) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n u_1^{i_1} \cdots u_k^{i_k} f_{j_1}^1 \cdots f_{j_l}^l T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} u_1^{i_1} \cdots u_k^{i_k} f_{j_1}^1 \cdots f_{j_l}^l \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1}(u_1) \cdots e^{i_k}(u_k) e_{j_1}(f^1) \cdots e_{j_l}(f^l) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} (u_1, \dots, u_k, f^1, \dots, f^l),
\end{aligned}$$

onde  $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l})$  e  $e_{j_r} = \phi_{e_{j_r}}$  (abuso de notação - ver teorema 1.1.2). Logo,

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

Agora, vamos mostrar que  $\beta_k^l = \{e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq n}}$  é uma base de  $T_k^l(E)$ . Pelo que foi feito acima vemos que  $\beta_k^l$  gera  $T_k^l(E)$ , então basta mostrar que este conjunto é linearmente independente. Sejam  $A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n$  tais que  $\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} = 0$ . Ou seja,

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} (u_1, \dots, u_k, f^1, \dots, f^l) = 0,$$

para todo  $(u_1, \dots, u_k, f^1, \dots, f^l) \in E^k \times (E^*)^l$ . Tome  $u_r = e_{p_r}$  e  $f^s = e^{q_s}$  para



$r = 1, \dots, k$  e  $s = 1, \dots, l$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} (e_{p_1}, \dots, e_{p_k}, e^{q_1}, \dots, e^{q_l}) = 0 \\
\Rightarrow & \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} (e_{p_1}) \dots e^{i_k} (e_{p_k}) e_{j_1} (e^{q_1}) \dots e_{j_l} (e^{q_l}) = 0 \\
\Rightarrow & \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \delta_{p_1}^{i_1} \dots \delta_{p_k}^{i_k} \delta_{j_1}^{q_1} \dots \delta_{j_l}^{q_l} = 0 \\
\Rightarrow & A_{p_1 \dots p_k}^{q_1 \dots q_l} = 0,
\end{aligned}$$

para todo  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l = 1, \dots, n$ . Assim,  $\beta_k^l$  é linearmente independente. Logo,  $\beta_k^l$  é uma base de  $T_k^l(E)$  e, conseqüentemente,  $\dim T_k^l(E) = n^{k+l}$ .  $\square$

**Proposição 1.3.3** (Mudança de Base). *Sejam  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  bases do espaço vetorial  $E$  e  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  e  $\tilde{\beta}^* = \{\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n\}$  as bases duais, respectivamente, a  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$ . Se  $A$  é a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}$  para  $\beta$  e  $T \in T_k^l(E)$  tal que*

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n \tilde{T}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \tilde{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{i_k} \otimes \tilde{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}_{j_l},
\end{aligned}$$

onde  $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l})$  e  $\tilde{T}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = T(\tilde{e}_{i_1}, \dots, \tilde{e}_{i_k}, \tilde{e}^{j_1}, \dots, \tilde{e}^{j_l})$ , então

$$T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k=1 \\ s_1, \dots, s_l=1}}^n A_{i_1}^{r_1} \dots A_{i_k}^{r_k} (A^{-1})_{s_1}^{j_1} \dots (A^{-1})_{s_l}^{j_l} \tilde{T}_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l},$$

para todo  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, \dots, n$ .

*Demonstração.* Pela proposição 1.3.1, temos que  $(A^{-1})^t$  é a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}^*$  para  $\beta^*$ . Dessa forma,

$$e^j = \sum_{s=1}^n (A^{-1})_s^j \tilde{e}^s, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} &= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}) \\
&= T\left(\sum_{r_1=1}^n A_{i_1}^{r_1} \tilde{e}_{r_1}, \dots, \sum_{r_k=1}^n A_{i_k}^{r_k} \tilde{e}_{r_k}, \sum_{s_1=1}^n (A^{-1})_{s_1}^{j_1} \tilde{e}^{s_1}, \dots, \sum_{s_l=1}^n (A^{-1})_{s_l}^{j_l} \tilde{e}^{s_l}\right) \\
&= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k=1 \\ s_1, \dots, s_l=1}}^n A_{i_1}^{r_1} \dots A_{i_k}^{r_k} (A^{-1})_{s_1}^{j_1} \dots (A^{-1})_{s_l}^{j_l} T(\tilde{e}_{r_1}, \dots, \tilde{e}_{r_k}, \tilde{e}^{s_1}, \dots, \tilde{e}^{s_l}) \\
&= \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k=1 \\ s_1, \dots, s_l=1}}^n A_{i_1}^{r_1} \dots A_{i_k}^{r_k} (A^{-1})_{s_1}^{j_1} \dots (A^{-1})_{s_l}^{j_l} \tilde{T}_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l},
\end{aligned}$$

para todo  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, \dots, n$ .  $\square$

Note que, pela proposição 1.3.2,  $T_1^1(E) = \text{Span}(\{f \otimes \phi_u; u \in E \text{ e } f \in E^*\})$ . Na definição a seguir faremos um abuso de notação  $\phi_u = u$ .

**Definição 1.3.3.** *Seja  $E$  um espaço vetorial. O traço de  $(1, 1)$ -tensores é o funcional linear  $\text{tr} : T_1^1(E) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

- i.*  $\text{tr}(f \otimes u) = f(u)$ , para todo  $u \in E$  e  $f \in E^*$ ;
- ii.*  $\text{tr}(\sum_{i=1}^n a_i (f^i \otimes u_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \text{tr}(f^i \otimes u_i)$  com  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in E$  e  $f^i \in E^*$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Vamos verificar que o traço de  $(1, 1)$ -tensores está bem definido e é um funcional linear. Sejam  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\tilde{\beta} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  bases do espaço vetorial  $E$  e  $\beta^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  e  $\tilde{\beta}^* = \{\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n\}$  as bases duais, respectivamente, a  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$ . Considere as bases de  $T_1^1(E)$

$$\beta_1^1 = \{e^i \otimes e_j\}_{1 \leq i, j \leq n} \text{ e } \tilde{\beta}_1^1 = \{\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}_j\}_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Seja  $T \in T_1^1(E)$ . Temos que,

$$T = \sum_{i, j=1}^n T_i^j e^i \otimes e_j = \sum_{i, j=1}^n \tilde{T}_i^j \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}_j.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left( \sum_{i,j=1}^n T_i^j e^i \otimes e_j \right) &= \sum_{i,j=1}^n T_i^j \operatorname{tr} (e^i \otimes e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n T_i^j \delta_j^i \\ &= \sum_{i=1}^n T_i^i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left( \sum_{i,j=1}^n \tilde{T}_i^j \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}_j \right) &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{T}_i^j \operatorname{tr} (\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{T}_i^i. \end{aligned}$$

Seja  $A$  a matriz de mudança de bases de  $\tilde{\beta}$  para  $\beta$ . Então, pela proposição de mudança de base,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n T_i^i &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k,l=1}^n A_i^k (A^{-1})_l^i \tilde{T}_k^l \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{i=1}^n A_i^k (A^{-1})_l^i \tilde{T}_k^l \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \delta_l^k \tilde{T}_k^l \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{T}_i^i. \end{aligned}$$

Logo,  $\text{tr}$  está bem definida. Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $R, T \in T_1^1(E)$ . Temos que,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(aR + T) &= \text{tr} \left( a \sum_{i,j=1}^n R_i^j e^i \otimes e_j + \sum_{i,j=1}^n T_i^j e^i \otimes e_j \right) \\
 &= \text{tr} \left( \sum_{i,j=1}^n (aR_i^j + T_i^j) e^i \otimes e_j \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (aR_i^j + T_i^j) \text{tr}(e^i \otimes e_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n (aR_i^i + T_i^i) \\
 &= a \sum_{i=1}^n R_i^i + \sum_{i=1}^n T_i^i \\
 &= a \text{tr} R + \text{tr} T.
 \end{aligned}$$

Assim,  $\text{tr}$  é um funcional linear. Das considerações acima temos que,

$$\text{tr} T = \sum_{i=1}^n T_i^i.$$

Como  $\mathcal{L}(E) \cong T_1^1(E)$  (isomorfismo natural), então podemos definir o traço de um operador linear  $T$  por

$$\text{tr} T = \text{tr} \Phi(T).$$

**Proposição 1.3.4.** *Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\beta$  uma base de  $E$ . Se  $T \in \mathcal{L}(E)$ , então  $\text{tr} T = \sum_{i=1}^n T_i^i$ , onde  $[T]_\beta = (T_i^j)_{n \times n}$ .*

*Demonstração.* Temos que,

$$\begin{aligned}
 \text{tr} T &= \text{tr} \Phi(T) \\
 &= \sum_{i=1}^n [\Phi(T)]_i^i \\
 &= \sum_{i=1}^n \Phi(T)(e_i, e^i) \\
 &= \sum_{i=1}^n e^i(Te_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n e^i \left( \sum_{j=1}^n T_i^j e_j \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n T_i^j e^i(e_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n T_i^i.
\end{aligned}$$

□

A definição a seguir generaliza naturalmente o conceito de traço de tensores.

**Definição 1.3.4.** <sup>2</sup> *Seja  $T \in T_k^l(E)$ . O traço de  $T$  com relação aos índices  $1 \leq p \leq k$  e  $1 \leq q \leq l$  é o tensor  $\text{tr} T \in T_{k-1}^{l-1}(E)$  dado por*

$$(\text{tr} T) \left( u_1, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, f^{l-1} \right) = \text{tr} T \left( u_1, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right).$$

Note que, o traço de tensores está bem definido devido a definição 1.3.3 e que traço reduz o índice covariante e contravariante do tensor original em uma unidade. Perceba ainda que, se  $T \in T_1^1(E)$  então  $\text{tr} T \in \mathbb{R} = T_0^0(E)$ .

Verificaremos que  $\text{tr} T$  é linear em cada entrada. Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u, u_i \in E$  e  $f^j \in E^*$ , para  $i = 1, \dots, k-1$  e  $j = 1, \dots, l-1$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
(\text{tr} T) \left( \lambda u_1 + u, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, f^{l-1} \right) &= \text{tr} T \left( \lambda u_1 + u, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, \right. \\
&\quad \left. f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right) \\
&= \lambda \text{tr} T \left( u_1, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, \right. \\
&\quad \left. f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right) + \\
&\quad \text{tr} T \left( u, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, \right. \\
&\quad \left. f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right) \\
&= \lambda (\text{tr} T) \left( u_1, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, \right. \\
&\quad \left. f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right) + \\
&\quad (\text{tr} T) \left( u, \dots, u_{p-1}, \cdot, u_p, \dots, u_{k-1}, f^1, \dots, \right. \\
&\quad \left. f^{q-1}, \cdot, f^q, \dots, f^{l-1} \right).
\end{aligned}$$

Verifica-se de modo análogo para as outras entradas.

---

<sup>2</sup>Se for necessário explicitar os índices do traço o denotaremos por  $\text{tr}_p^q T$ .

**Proposição 1.3.5.** Se  $T \in T_k^l(E)$ , então

$$\operatorname{tr} T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{k-1}=1 \\ j_1, \dots, j_{l-1}=1}}^n (\operatorname{tr} T)_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l-1}} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_{k-1}} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{l-1}},$$

onde

$$(\operatorname{tr} T)_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l-1}} = \sum_{r=1}^n T_{i_1 \dots i_{p-1} r i_p \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{q-1} r j_q \dots j_{l-1}}.$$

*Demonstração.* Seja  $S(u, f) = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_{p-1}}, u, e_{i_p}, \dots, e_{i_{k-1}}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{q-1}}, f, e^{j_q}, \dots, e^{j_{l-1}})$ , para todo  $(u, f) \in E \times E^*$ . Temos que,

$$\begin{aligned} (\operatorname{tr} T)_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l-1}} &= (\operatorname{tr} T)(e_{i_1}, \dots, e_{i_{p-1}}, e_{i_p}, \dots, e_{i_{k-1}}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{q-1}}, e^{j_q}, \dots, e^{j_{l-1}}) \\ &= \sum_{r=1}^n S_r^r \\ &= \sum_{r=1}^n T(e_{i_1}, \dots, e_{i_{p-1}}, e_r, e_{i_p}, \dots, e_{i_{k-1}}, e^{j_1}, \dots, e^{j_{q-1}}, e^r, e^{j_q}, \dots, e^{j_{l-1}}) \\ &= \sum_{r=1}^n T_{i_1 \dots i_{p-1} r i_p \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{q-1} r j_q \dots j_{l-1}}. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 2

## Variedades Riemannianas

Neste capítulo abordaremos alguns tópicos de variedades diferenciáveis e de geometria riemanniana que serão fundamentais para o desenvolvimento dos próximos capítulos desta dissertação. Maiores detalhes sobre os assuntos deste capítulo podem ser obtidos através das referências [3], [7], [10], [11], [13], [16] e [18].

### 2.1 Variedades Diferenciáveis, Aplicações Diferenciáveis, Espaço Tangente, Derivada, Subvariedades e Partição da Unidade

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $M$  um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e  $\mathfrak{A}$  uma família de homeomorfismos  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ , onde  $U_\alpha$  é um aberto de  $M$ , tais que:*

*i.*  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ ;

*ii.* Para todo  $U_\alpha, U_\beta \in \mathfrak{A}$  com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  tem-se

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{2.1}$$

*é uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$  com  $k \geq 1$ ;*

*iii.* A família  $\mathfrak{A}$  é máxima relativamente às condições *i.* e *ii.*

Chamaremos de *variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$*  ou, simplesmente, de *variedade diferenciável* o par ordenado  $(M, \mathfrak{A})$ .

A família  $\mathfrak{A}$  é chamada de *atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$*  e os seus elementos de *sistema de coordenadas locais* ou *cartas locais* em  $M$ . A aplicação em (2.1) recebe o nome de *mudança de coordenadas*.

A seguir apresentamos alguns exemplos de variedades diferenciáveis (para ver os detalhes consulte a referência [11]).

**Exemplo 2.1.1.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com o atlas maximal que contém  $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$ .

△

**Exemplo 2.1.2.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$  e  $U$  um subconjunto aberto de  $M$ . Então  $U$  tem uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$  herdada de  $M$ .

△

**Exemplo 2.1.3.** Toda superfície regular  $M$  de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  com o atlas sendo dado pelas inversas das parametrizações da superfície.

△

**Exemplo 2.1.4.** Sejam  $(M, \mathfrak{A})$  e  $(N, \mathfrak{B})$  variedades diferenciáveis de classe  $C^k$ . Temos que, o espaço topológico produto  $M \times N$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m+n$  e classe  $C^k$  munido do atlas

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{ \varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}; (\varphi \times \psi)(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)) \text{ com } \varphi \in \mathfrak{A} \text{ e } \psi \in \mathfrak{B} \}.$$

△



**Definição 2.1.2.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de classe  $C^k$ . A aplicação  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável em  $p \in M$  se existirem cartas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente, em  $M$  e  $N$  com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

*é diferenciável em  $\varphi(p)$ .*

Note que, a definição acima não depende da escolha dos sistemas de coordenadas em  $M$  e em  $N$ .

Se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $M$  dizemos que  $f$  é *diferenciável*. Ainda, diremos que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  é de classe  $C^r$ ,  $r \leq k$ , se existirem cartas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente, em  $M$  e  $N$  com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$  tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é uma aplicação de classe  $C^r$  para todo  $p \in M$ .

**Definição 2.1.3.** *Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação bijetiva diferenciável e sua inversa também é diferenciável, então dizemos que a aplicação  $f$  é um difeomorfismo.*

Apresentamos a seguir uma construção do espaço tangente a uma variedade diferenciável.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^k$ . Denotemos por  $\mathcal{C}_p$  o conjunto de todas as curvas  $\lambda : I \rightarrow M$  de classe  $C^k$  tais que  $\lambda(0) = p$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto contendo a origem. Diremos que duas curvas  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$  são equivalentes,  $\lambda \sim \mu$ , se existir um sistema de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  com  $p \in U$  tal que

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0). \quad (2.2)$$

Note que, a igualdade em (2.2) é válida para todo sistema de coordenadas locais que contenha o ponto  $p$ . Verifica-se facilmente que  $\sim$  define uma relação de equivalência em  $\mathcal{C}_p$ . Assim definimos:

**Definição 2.1.4.** *O espaço tangente à variedade diferenciável  $M$  no ponto  $p$  é*

$$T_p M = \mathcal{C}_p / \sim .$$

*A classe de equivalência*

$$[\lambda] = \{\mu \in \mathcal{C}_p; \mu \sim \lambda\}$$

*será chamada de vetor tangente ou vetor velocidade.*

O espaço tangente  $T_p M$  tem uma estrutura de espaço vetorial real quando munido das operações

$$\begin{cases} [\lambda] + [\mu] = \bar{\varphi}^{-1}(\bar{\varphi}([\lambda]) + \bar{\varphi}([\mu])) \\ c \cdot [\lambda] = \bar{\varphi}^{-1}(c \cdot \bar{\varphi}([\lambda])) \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde a aplicação  $\bar{\varphi} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por

$$\bar{\varphi}([\lambda]) = (\varphi \circ \lambda)'(0)$$

é um isomorfismo (lembrando que  $(U, \varphi)$  é uma carta local em  $M$  com  $p \in U$ ).

**Observação 2.1.1.**

*i.* A estrutura de espaço vetorial induzida por  $\bar{\varphi}$  em  $T_p M$  dada em (2.3) independe da escolha do sistema de coordenadas (veja a referência [13]).

*ii.* Seja  $\{e_i\}_{i=1}^m$  a base canônica de  $\mathbb{R}^m$ . Indicaremos por  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := \bar{\varphi}^{-1}(e_i)$ . Então,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^m$  é a base de  $T_p M$  associada ao sistema de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definição 2.1.5.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável em  $p \in M$ . A derivada de  $f$  no ponto  $p$  é a transformação linear  $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  dada por*

$$df(p) \cdot [\lambda] = [f \circ \lambda],$$

*para todo  $[\lambda] \in T_p M$ .*

Perceba que a derivada de uma aplicação diferenciável está bem definida.

Sejam  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  cartas locais, respectivamente, em  $M$  e  $N$  com  $p \in U$  e  $f(U) \subset V$ . A matriz da derivada em relação às bases  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^m$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{f(p)} \right\}_{j=1}^n$  associadas as cartas locais, respectivamente,  $\varphi$  e  $\psi$  é a matriz jacobiana da aplicação  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  no ponto  $\varphi(p)$ .

**Proposição 2.1.1** (Regra da Cadeia). *Sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$  variedades diferenciáveis,  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável em  $p \in M$  e  $g : N \rightarrow P$  uma aplicação diferenciável em  $f(p) \in N$ . Então, a aplicação  $g \circ f : M \rightarrow P$  é diferenciável em  $p$  e*

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [11].

**Definição 2.1.6.** *Seja  $N$  uma variedade diferenciável de classe  $C^k$ . Dizemos que um subconjunto  $M \subset N$  é uma subvariedade diferenciável de dimensão  $m \leq n$  e classe  $C^k$  de  $N$ , se para cada  $p \in M$  existe um sistema de coordenadas locais  $(U, \varphi)$  em  $N$  com  $p \in U$  tal que*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m.$$

Vejamos os exemplos a seguir.

**Exemplo 2.1.5.** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  é uma subvariedade de dimensão  $s \leq n$  e classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$ .

△

**Exemplo 2.1.6.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^k$ . Um subconjunto aberto  $U \subset M$  é uma subvariedade de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  de  $M$ .

△

**Definição 2.1.7.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ . Dizemos que um ponto  $q \in N$  é um valor regular de  $f$ , se para cada ponto  $p \in f^{-1}(q)$  tem-se que  $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$  é uma aplicação sobrejetora.*

O resultado a seguir nos fornece mais exemplos de subvariedades.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ . Se  $q \in N$  é um valor regular de  $f$ , então ou  $f^{-1}(q)$  é vazio ou  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade de dimensão  $m - n$  e classe  $C^k$  de  $M$ . Além disso, para todo  $p \in f^{-1}(q)$ ,*

$$T_p f^{-1}(q) = \ker df(p).$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [13].

A seguir definiremos partição da unidade em uma variedade diferenciável e apresentaremos alguns resultados que serão utilizados neste texto.

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação. O *suporte de  $f$*  é

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}.$$

Uma família  $\mathcal{X} = \{X_\alpha; \alpha \in A\}$  de subconjuntos de um espaço topológico  $X$  diz-se *localmente finita* se para cada ponto  $x \in X$  existe uma vizinhança que intersecta somente um número finito de elementos da família  $\mathcal{X}$ .

**Definição 2.1.8.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^r$ . Chamamos de partição da unidade de classe  $C^k$ ,  $k \leq r$ , em  $M$  uma família  $\{\varphi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \in A\}$  de funções de classe  $C^k$  tais que:*

- i.*  $0 \leq \varphi_\alpha(p) \leq 1$ , para todo  $p \in M$  e  $\alpha \in A$ ;
- ii.* A família  $\{\text{supp } \varphi_\alpha; \alpha \in A\}$  é localmente finita em  $M$ ;
- iii.*  $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$ , para todo  $p \in M$ .

Seja  $\mathcal{C} = \{C_\beta; \beta \in B\}$  uma cobertura de  $M$ . Dizemos que uma partição da unidade  $\{\varphi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \in A\}$  em  $M$  é *subordinada* à cobertura  $\mathcal{C}$  se, dado  $\alpha \in A$  existe  $\beta \in B$  tal que  $\text{supp } \varphi_\alpha \subset C_\beta$ .

Considere duas coberturas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  de um conjunto  $X$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é um *refinamento* de  $\mathcal{B}$  se, para cada  $A \in \mathcal{A}$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $A \subset B$ .

As demonstrações dos dois próximos resultados podem ser encontradas em [11].

**Proposição 2.1.3.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $\mathcal{C}$  uma cobertura aberta de  $M$ . Então, a cobertura aberta  $\mathcal{C}$  possui um refinamento  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  localmente finito, formado por domínios de cartas locais  $(U_i, \varphi_i)$  em  $M$  tais que  $\varphi_i(U_i) = B(0; 3)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .*

Na proposição acima estamos usando a notação  $B(0; r)$  para representar a bola aberta centrada na origem e de raio  $r$  em  $\mathbb{R}^m$ .

**Corolário 2.1.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Se  $\mathcal{C}$  é uma cobertura aberta de  $M$ , então existe uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ .*

**Observação 2.1.2.** A partir daqui consideraremos as variedades diferenciáveis como sendo suaves, ou seja, de classe  $C^\infty$ .

## 2.2 Campos Vetoriais, Fibrados Tensoriais, Campos Tensoriais, Derivada de Lie e Métricas Riemannianas

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Chamamos de *fibrado tangente* de  $M$  o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

O fibrado tangente  $TM$  é na verdade uma variedade diferenciável de dimensão  $2m$  (para ver os detalhes consulte a referência [13]).

A *projeção canônica* de  $TM$  sobre  $M$  é a aplicação  $\pi : TM \rightarrow M$  dada por

$$\pi(p, v) = p.$$

Esta aplicação é uma submersão, isto é, a sua derivada é sobrejetora em todos os pontos de  $TM$ .

**Definição 2.2.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um campo vetorial em  $M$  é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}$ . Isto é, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

*comuta.*

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto formado pelos campos vetoriais suaves em  $M$ . Este conjunto passa a ser um espaço vetorial real com as operações naturais

$$\begin{cases} (X + Y)(p) = X(p) + Y(p) \\ (c \cdot X)(p) = c \cdot X(p) \end{cases},$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $p \in M$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $M$ . O campo vetorial  $X : M \rightarrow TM$  em coordenadas é

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

para todo  $p \in U$ , onde  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida no aberto  $U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^m$  é a base de  $T_p M$  associada a carta  $(U, \varphi)$ . O campo vetorial  $X$  é diferenciável se, e somente se, as funções  $X^i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , são diferenciáveis.

Faremos agora algumas considerações sobre derivações em variedades diferenciáveis para posteriormente definirmos o colchete de Lie de dois campos vetoriais.

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $p \in M$ . Uma derivação em  $p$  é um funcional linear  $D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (2.4)$$

Vejamos o exemplo:

**Exemplo 2.2.1.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $v \in T_p M$ , onde  $p \in M$ . A função  $\bar{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{v}(f) = (f \circ \lambda)'(0),$$

sendo  $\lambda : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável tal que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda'(0) = v$ , é uma derivação em  $p$ . Com efeito, note que  $\bar{v}$  está bem definida e que é um funcional linear (devido a linearidade da derivada). Agora basta verificar a igualdade (2.4). Então,

$$\begin{aligned} \bar{v}(fg) &= (fg \circ \lambda)'(0) \\ &= ((f \circ \lambda) \cdot (g \circ \lambda))'(0) \\ &= (f \circ \lambda)'(0) \cdot (g \circ \lambda)(0) + (f \circ \lambda)(0) \cdot (g \circ \lambda)'(0) \\ &= \bar{v}(f)g(p) + f(p)\bar{v}(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

△

Sejam  $(U, \varphi)$  uma carta local em  $M$  e  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$  um elemento da base de  $T_pM$  associada a  $\varphi$ . Do exemplo 2.2.1 temos que a função

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma derivação e, para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}}{\partial x^i}|_p(f) &= (f \circ \lambda)'(0) \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}|_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

onde  $\lambda : I \rightarrow U$  é uma curva diferenciável tal que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda'(0) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ .

Denotemos por  $\text{Der}_p(M)$  o conjunto formado pelas derivações em  $p \in M$ . Este conjunto se torna um espaço vetorial real quando munido das operações

$$\begin{cases} (D + \tilde{D})(f) = D(f) + \tilde{D}(f) \\ (c \cdot D)(f) = c \cdot D(f) \end{cases},$$

para todo  $D, \tilde{D} \in \text{Der}_p(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Além disso,

$$T_pM \cong \text{Der}_p(M).$$

**Definição 2.2.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma derivação em  $M$  é um operador linear  $\mathcal{D} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  tal que*

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g), \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (2.5)$$

**Exemplo 2.2.2.** Considere um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{X} : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \bar{X}(f) : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \bar{X}(f)(p) := df(p) \cdot X(p) \end{aligned} .$$

Temos que,  $\bar{X}$  é uma derivação em  $M$  (veja a referência [13]).

△

Denotaremos por  $\text{Der}(M)$  o conjunto formado por todas as derivações em  $M$ . De modo análogo a  $\text{Der}_p(M)$  vê-se que o conjunto  $\text{Der}(M)$  é um espaço vetorial real. Temos que, a aplicação  $\phi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(M)$  dada por

$$\phi(X) = \overline{X},$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$\mathfrak{X}(M) \cong \text{Der}(M).$$

Para mais detalhes veja [13].

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \text{Der}(M)$ . A aplicação  $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dada por*

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$$

*é uma derivação em  $M$ .*

*Demonstração.* Facilmente verifica-se que a aplicação  $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]$  está bem definida e é um operador linear. Resta-nos mostrar a igualdade (2.5). Sejam  $f, g \in C^\infty(M)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2)(fg) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f)g + f\mathcal{D}_2(g)) \\ &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(fg) &= \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f)g + f\mathcal{D}_1(g)) \\ &= \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g + \mathcal{D}_1(f)\mathcal{D}_2(g) + \mathcal{D}_2(f)\mathcal{D}_1(g) + f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Subtraindo a equação (2.6) pela equação (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](fg) &= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(f))g + f\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(g)) - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(f))g - f\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(g)) \\ &= [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](f)g + f[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2](g). \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

**Corolário 2.2.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então  $\exists! [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  tal que*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \forall f \in C^\infty(M).$$



O corolário acima motiva a seguinte definição:

**Definição 2.2.4.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . O campo vetorial  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$  dado no corolário 2.2.1 é chamado de Colchete de Lie dos campos vetoriais  $X$  e  $Y$  e é representado da seguinte forma*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

**Proposição 2.2.2.** *O colchete de Lie satisfaz as seguintes propriedades:*

- i. (Anticomutatividade)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ;*
- ii. (Identidade de Jacobi)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ ;*
- iii.  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$ ,*

*para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .*

*Demonstração.*

- i.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Então,

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= -(Y(X(f)) - X(Y(f))) \\ &= -[Y, X](f), \forall f \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Logo,  $[X, Y] = -[Y, X]$ .

- ii.* Considere  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= X[Y, Z] - [Y, Z]X + Y[Z, X] - [Z, X]Y + Z[X, Y] - [X, Y]Z \\ &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) - (ZX - XZ)Y + \\ & \quad Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\ &= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY + ZXY \\ & \quad - ZYX - XYZ + YXZ \\ &= 0. \end{aligned}$$

*iii.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
[fX, gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
&= fX(g)Y(h) + gfX(Y(h)) - gY(f)X(h) - fgY(X(h)) \\
&= fg[X, Y](h) + fX(g)Y(h) - gY(f)X(h) \\
&= (fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X)(h), \forall h \in C^\infty(M).
\end{aligned}$$

Portanto,  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$ .

□

A próxima proposição expressa o colchete de Lie em coordenadas.

**Proposição 2.2.3.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tais que, em coordenadas,*

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

então

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

*Demonstração.* Temos que,

$$\begin{aligned}
X(Y(f)) &= X \left( \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m X \left( Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m X(Y^j) \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^m Y^j X \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (Y^j) \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^m Y^j \left( \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$Y(X(f)) = \sum_{i,j=1}^m Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

então

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ &= \sum_{i,j=1}^m X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{i,j=1}^m Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^m \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (f), \forall f \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Logo,

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

□

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Uma *curva integral* de  $X$  é uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)), \forall t \in I.$$

O teorema a seguir garante a existência do fluxo local (a prova pode ser encontrada em [10]):

**Teorema 2.2.1.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Dado um ponto  $q \in M$ , existe um fluxo local  $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$  para  $X$  em torno de  $q$  tal que, para cada  $p \in U$ , a curva  $\varphi_p : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  dada por  $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , é a única curva integral de  $X$  com  $\varphi(0, p) = p$ .*

Seja  $p \in M$ . Considere o conjunto  $\{\gamma_i : (-\epsilon_i, \epsilon_i) \rightarrow M; i \in I\}$  formado por todas as curvas integrais de  $X$  tais que  $\gamma_i'(0) = p$ , para todo  $i \in I$ . Agora, defina o intervalo aberto

$$I_p = \bigcup_{i \in I} (-\epsilon_i, \epsilon_i)$$

e, posteriormente, a curva

$$\begin{aligned} \gamma_p : I_p &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma_p(t) = \gamma_i(t) \end{aligned} .$$

A curva  $\gamma_p$  é chamada de *curva integral maximal* de  $X$  que passa por  $p$ . Note que,  $\gamma_p$  está bem definida.

Um campo vetorial  $X$  em  $M$  é dito *completo* se, para todo ponto  $p \in M$ , a curva integral maximal que passa por  $p$ , no instante  $t = 0$ , tem domínio  $I_p = \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.2.2.** *Sejam  $\mathcal{D}_t = \{p \in M; t \in I_p\}$  e*

$$\begin{aligned} \varphi_t : \mathcal{D}_t &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto \varphi_t(p) = \varphi(t, p) \end{aligned} .$$

*Dado  $t \in I$ , seja  $s \in I$  tal que  $s \in I_{\gamma_p(t)}$ ,  $\forall p \in \mathcal{D}_t$ . Então,  $s + t \in I_p$ ,  $\forall p \in \mathcal{D}_t$ , e*

$$(\varphi_s \circ \varphi_t)(p) = \varphi_{s+t}(p), \forall p \in \mathcal{D}_t.$$

*Em particular,*

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{id},$$

*ou seja,  $\varphi_t : \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$  é um difeomorfismo.*

Para uma prova deste teorema veja [13].

Se o campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é completo, então o conjunto formado por todos os difeomorfismos  $\varphi_t$  é um grupo, que é chamado de *grupo a 1-parâmetro de  $X$* .

**Definição 2.2.5.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $M$  em  $p$ . Considere*

$$\beta_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}$$

*a base de  $T_p M$  associada a carta  $\varphi$  e*

$$\beta_p^* = \left\{ dx^1 \Big|_p, \dots, dx^m \Big|_p \right\}$$

*a base dual a  $\beta_p$ . A base coordenada associada a carta  $\varphi$  para o espaço tensorial tangente*

*$T_k^l(T_p M)$  a  $M$  em  $p$  é dada por*

$$(\beta_k^l)_p = \left\{ dx^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \Big|_p \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq m}} .$$

**Proposição 2.2.4.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  cartas locais de  $M$  em  $p$ . Considere*

$$\beta_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}$$

e

$$\tilde{\beta}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_p \right\}$$

as bases de  $T_p M$  associadas as cartas, respectivamente,  $\varphi$  e  $\psi$  e

$$\beta_p^* = \left\{ dx^1 \Big|_p, \dots, dx^m \Big|_p \right\}$$

e

$$\tilde{\beta}_p^* = \left\{ dy^1 \Big|_p, \dots, dy^m \Big|_p \right\}$$

as bases duais, respectivamente, a  $\beta_p$  e  $\tilde{\beta}_p$  tais que para um tensor  $T_p \in T_k^l(T_p M)$  temos, em coordenadas,

$$\begin{aligned} T_p &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) dx^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \Big|_p \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m \tilde{T}_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) dy^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dy^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_l}} \Big|_p. \end{aligned}$$

Então,

$$T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k=1 \\ s_1, \dots, s_l=1}}^m \frac{\partial y^{r_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial y^{r_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{s_1}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial y^{s_l}} \tilde{T}_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l}(p),$$

para todo  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, \dots, m$ .

*Demonstração.* Como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{r=1}^m \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^r} \Big|_p$$

e

$$dx^j \Big|_p = \sum_{s=1}^m \frac{\partial x^j}{\partial y^s} dy^s \Big|_p,$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ , então o resultado segue diretamente da proposição 1.3.3.  $\square$

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um *fibrado vetorial de posto  $k$  sobre  $M$*  ( $M$  é chamado de *espaço base*) consiste de:

*i.* uma variedade diferenciável  $E$  (*espaço total*);

*ii.* uma aplicação sobrejetora diferenciável  $\pi : E \rightarrow M$  (*projeção*),

tal que

- cada *fibra de  $E$  sobre  $p$* ,  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , é um espaço vetorial de  $\dim E_p = k$ ;
- para cada  $p \in M$ , existe uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $M$  em  $p$  e um difeomorfismo  $\bar{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ , *trivialização local de  $E$* , tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & \curvearrowright & \swarrow \pi_1 \\ U & & \end{array}$$

é comutativo.

Note que um fibrado tangente  $TM$  é um fibrado vetorial de posto  $m$  sobre  $M$ .

Uma *seção* de um fibrado vetorial  $E$  sobre  $M$  é uma aplicação  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = \text{id}|_M$ , ou seja,  $s(p) \in E_p$ ,  $\forall p \in M$ .

**Definição 2.2.6.** *Seja  $(M, \mathfrak{A})$  uma variedade diferenciável com  $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m; \alpha \in \mathcal{A}\}$ . O fibrado  $(k, l)$ -tensorial de  $M$  é a variedade diferenciável de dimensão  $m + m^{k+l}$*

$$T_k^l M := \{(p, T); p \in M \text{ e } T \in T_k^l(T_p M)\}$$

com o atlas

$$\bar{\mathfrak{A}} = \left\{ \bar{\varphi}_\alpha : U_\alpha \times T_k^l(T_p M) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m^{k+l}}; \alpha \in \mathcal{A} \text{ com } p \in U_\alpha \right\},$$

onde

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_\alpha \left( p, \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) dx^{i_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \Big|_p \right) \\ &= \left( \varphi_\alpha(p), \left( T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) \right)_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m \right) \end{aligned}$$

para  $\alpha \in \mathcal{A}$  e  $p \in U_\alpha$ .

Perceba que fibrados tensoriais são fibrados vetoriais e que

$$\begin{aligned} T_0M &= C^\infty(M); \\ T^1M &= TM; \\ T_1M &= T^*M. \end{aligned}$$

**Definição 2.2.7.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um campo tensorial de  $M$  é uma seção de um fibrado tensorial de  $M$ . Além disso:*

- i.* um campo tensorial é dito diferenciável se a seção do fibrado vetorial é diferenciável;
- ii.* denotaremos por  $\mathcal{T}_k^l(M)$  o espaço vetorial real formado por todos os campos  $(k, l)$ -tensoriais diferenciáveis.

Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(M) &= C^\infty(M); \\ \mathcal{T}^1(M) &= \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $T : M \rightarrow T_k^l M$  um campo tensorial de  $M$ . Dada uma carta local  $(U, \varphi)$  de  $M$  em  $p$  denote por*

$$(\beta_k^l)_p = \left\{ dx^{i_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}|_p \right\}_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m \\ 1 \leq j_1, \dots, j_l \leq m}}$$

a base coordenada associada a carta  $\varphi$  para o espaço tensorial tangente  $T_k^l(T_p M)$  tal que o campo tensorial  $T$  nesta base coordenada se escreve, em coordenadas, como

$$T_p = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(p) dx^{i_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}|_p,$$

para todo  $p \in U$ . Então, o campo tensorial  $T$  é diferenciável se, e somente se, as funções  $T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis, para todo  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, \dots, m$ .

A seguir definiremos o pullback e a derivada de Lie de campos tensoriais.

Seja  $\phi : M \rightarrow N$  um difeomorfismo. O pullback por  $\phi$  do campo tensorial  $T \in \mathcal{T}_k^l(N)$  é o campo tensorial  $\phi^*T \in \mathcal{T}_k^l(M)$  dado por

$$(\phi^*T)_p(u_1, \dots, u_k, \omega_1, \dots, \omega_l) := T_{\phi(p)}(d\phi(p) \cdot u_1, \dots, d\phi(p) \cdot u_k, (\phi_*\omega_1)_p, \dots, (\phi_*\omega_l)_p),$$

para todo  $p \in M$ ,  $u_1, \dots, u_k \in T_p M$  e  $\omega_1, \dots, \omega_l \in T_p^* M$ , onde

$$(\phi_* \omega_i)_p(v) := \omega_i(d\phi^{-1}(\phi(p)) \cdot v),$$

para todo  $v \in T_{\phi(p)} N$  e  $i = 1, \dots, l$ .

**Definição 2.2.8.** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $T \in \mathcal{T}_k^l(M)$  e  $\varphi_t$  o fluxo local do campo  $X$  em uma vizinhança  $U$  de  $p \in M$ . A derivada de Lie do campo tensorial  $T$  na direção do campo vetorial  $X$  em  $p$  é*

$$(\mathcal{L}_X T)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* T)_p - T_p}{t} = \frac{d}{dt} (\varphi_t^* T)_p \Big|_{t=0}.$$

Note que,  $\mathcal{L}_X T \in \mathcal{T}_k^l(M)$ .

**Exemplo 2.2.3.** Seja  $f \in C^\infty(M) = \mathcal{T}_0(M)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)_p &= \frac{d}{dt} (\varphi_t^* f)_p \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t)(p) \\ &= df(\varphi_0(p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_t \Big|_{t=0} \\ &= df(p) \cdot X(p) \\ &= X(f)(p), \end{aligned}$$

isto é,  $\mathcal{L}_X f = X(f)$ .

△

**Exemplo 2.2.4** (Interpretação Geométrica do Colchete de Lie). Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Para ver os detalhes deste exemplo consulte [3].

△

**Definição 2.2.9.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Dizemos que o campo tensorial diferenciável 2-covariante  $\gamma$  é uma métrica riemanniana em  $M$  se,*



- i.*  $\gamma$  é simétrico, ou seja,  $\gamma_p(u, v) = \gamma_p(v, u)$ , para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_pM$ ;
- ii.*  $\gamma$  é positivo definido, isto é,  $\gamma_p(u, u) > 0$ , para todo  $p \in M$  e  $u \in T_pM$ .

Seja  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $M$  em  $p$  cuja base de  $T_pM$  associada é

$$\beta_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}.$$

Então o tensor métrico  $\gamma$ , em coordenadas, é

$$\gamma_p = \sum_{i,j=1}^m \gamma_{ij}(p) dx^i \Big|_p \otimes dx^j \Big|_p,$$

onde as funções  $\gamma_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis. Em forma matricial, temos

$$\gamma = (\gamma_{ij})_{n \times n}$$

é uma matriz simétrica positiva definida. Observe que pela simetria do tensor métrico a matriz acima possui, no máximo,  $\frac{n(n+1)}{2}$  entradas distintas.

Uma variedade diferenciável com uma métrica riemanniana é chamada de *variedade riemanniana*.

**Exemplo 2.2.5.**  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana,  $\gamma = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ , é uma variedade riemanniana.

△

**Proposição 2.2.6.** *Toda variedade diferenciável possui uma métrica riemanniana.*

*Demonstração.* Seja  $(M, \mathfrak{A})$  uma variedade diferenciável com  $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m; \alpha \in \mathcal{A}\}$ .

Considere uma partição da unidade  $\{f_\alpha\}_\alpha$  em  $M$  subordinada a cobertura aberta formada pelos domínios dos elementos do atlas  $\mathfrak{A}$ . Primeiramente vamos definir uma métrica riemanniana para cada  $U_\alpha$  (subvariedade aberta de  $M$ ).

Sejam  $p \in M$  e  $\beta_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \Big|_p \right\}$  a base de  $T_pM$  associada a carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ . Sendo  $u, v \in T_pM$ , temos que

$$u = \sum_{i=1}^m u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{e} \quad v = \sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Agora, defina a seguinte métrica riemanniana em  $U_\alpha$

$$\gamma_p^\alpha(u, v) := \sum_{i=1}^m u^i \cdot v^i. \quad (2.8)$$

A verificação de que (2.8) é uma métrica riemanniana em  $U_\alpha$  é fácil e deixamos a cargo do leitor. Para definir uma métrica riemanniana em  $M$  utilizaremos (2.8) e a partição da unidade  $\{f_\alpha\}_\alpha$ . Afirmamos que

$$\gamma_p(u, v) := \sum_{\alpha} f_\alpha(p) \gamma_p^\alpha(u, v), \quad (2.9)$$

para  $u, v \in T_p M$ , é uma métrica riemanniana em  $M$ . De fato, primeiro note que a soma em (2.9) é finita em uma vizinhança de  $p$  e  $\gamma$  é um campo tensorial diferenciável 2-covariante. Além disso:

*i.* Sejam  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ . Então,

$$\begin{aligned} \gamma_p(u, v) &= \sum_{\alpha} f_\alpha(p) \gamma_p^\alpha(u, v) \\ &= \sum_{\alpha} f_\alpha(p) \gamma_p^\alpha(v, u) \\ &= \gamma_p(v, u). \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma$  é simétrico.

*ii.* Sejam  $p \in M$  e  $u \in T_p M \setminus \{0\}$ . Como  $0 \leq f_\alpha \leq 1$ , para todo  $\alpha$ , e  $\sum_{\alpha} f_\alpha = 1$ , então  $f_\alpha > 0$ , para algum  $\alpha$ . Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_p(u, u) &= \sum_{\alpha} f_\alpha(p) \gamma_p^\alpha(u, u) \\ &> 0, \end{aligned}$$

pois  $\gamma_p^\alpha(u, u) > 0$ , para todo  $\alpha$ . Portanto,  $\gamma$  é positivo definido.

□

Sejam  $(M, \gamma)$ ,  $(N, \tilde{\gamma})$  variedades riemannianas e  $f : M \rightarrow N$  um difeomorfismo. Dizemos que  $f$  é uma *isometria* se

$$\gamma_p(u, v) = \tilde{\gamma}_{f(p)}(df(p) \cdot u, df(p) \cdot v),$$

para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ . Neste caso dizemos que as variedades  $M$  e  $N$  são *isométricas*.

**Definição 2.2.10.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $(N, \tilde{\gamma})$  uma variedade riemanniana e  $f : M \rightarrow N$  uma imersão. Então, a métrica induzida por  $f$  em  $M$ , dada por*

$$\gamma_p(u, v) = \tilde{\gamma}_{f(p)}(df(p) \cdot u, df(p) \cdot v),$$

para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ , é chamada de *métrica pull-back* e representada por

$$\gamma = f^* \tilde{\gamma}.$$

Note que, as variedades  $(M, \gamma)$ ,  $(N, \tilde{\gamma})$  são isométricas ( $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo) se, e somente se,  $\gamma = f^* \tilde{\gamma}$ .

**Exemplo 2.2.6.** Considere a curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\alpha(t) = (0, f(t), g(t)),$$

onde  $f(t) > 0$  para todo  $t \in I$ . Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  a superfície de revolução obtida a partir da rotação da curva  $\alpha$  em torno do eixo- $z$ .

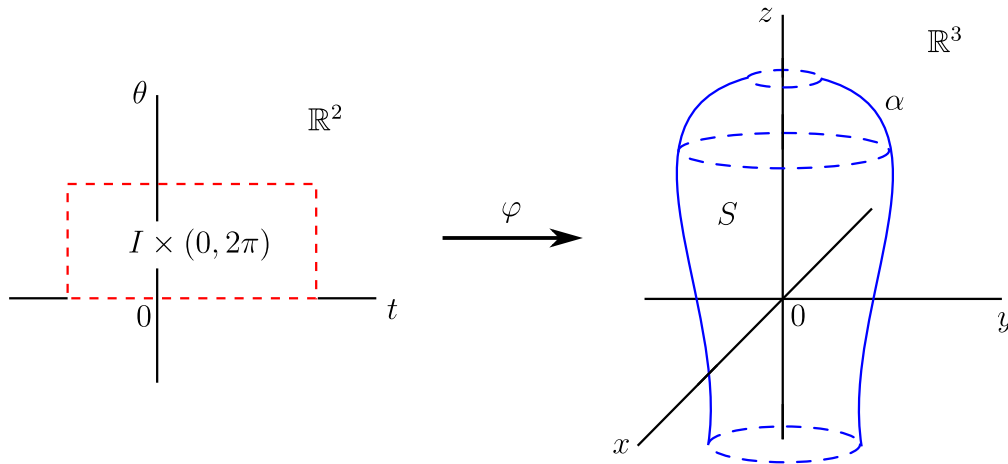


Figura 2.1: Parametrização em  $S$ .

Temos que,  $\varphi : I \times (0, 2\pi) \rightarrow S$  dada por

$$\varphi(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t))$$

é uma parametrização em  $S$ . Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 S \subset \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^3 \\
 \varphi^{-1} \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \text{id} \\
 I \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3
 \end{array}$$

Assim,

$$di_{\varphi(t,\theta)} = d\varphi_{(t,\theta)} = \begin{pmatrix} f'(t) \cos \theta & -f(t) \sin \theta \\ f'(t) \sin \theta & f(t) \cos \theta \\ g'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $i$  é uma imersão, então a métrica induzida por  $\mathbb{R}^3$  é

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\varphi(t,\theta)}(u, v) &= \langle di_{\varphi(t,\theta)} \cdot u, di_{\varphi(t,\theta)} \cdot v \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= \left\langle di_{\varphi(t,\theta)} \cdot \left( u^1 \frac{\partial}{\partial t} + u^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right), di_{\varphi(t,\theta)} \cdot \left( v^1 \frac{\partial}{\partial t} + v^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= (u^1 f'(t) \cos \theta - u^2 f(t) \sin \theta) (v^1 f'(t) \cos \theta - v^2 f(t) \sin \theta) + \\
 &\quad (u^1 f'(t) \sin \theta + u^2 f(t) \cos \theta) (v^1 f'(t) \sin \theta + v^2 f(t) \cos \theta) + \\
 &\quad u^1 v^1 [g'(t)]^2,
 \end{aligned}$$

para todo  $\varphi(t, \theta) \in S$  e  $u, v \in T_{\varphi(t,\theta)}S$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11}(\varphi(t, \theta)) &= \langle (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)), (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{21}(\varphi(t, \theta)) &= \gamma_{12}(\varphi(t, \theta)) \\
 &= \langle (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)), (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \gamma_{22}(\varphi(t, \theta)) &= \langle (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0), (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0) \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= [f(t)]^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma(\varphi(t, \theta)) = \begin{pmatrix} [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 & 0 \\ 0 & [f(t)]^2 \end{pmatrix},$$

para todo  $\varphi(t, \theta) \in S$ .

△

Se no exemplo acima considerarmos a variedade como sendo  $\mathbb{S}^2$  e

$$\varphi(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi),$$

onde  $(\phi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , uma parametrização em  $\mathbb{S}^2$ , então a métrica induzida por  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$\gamma(\varphi(\phi, \theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Conexões Afim e Riemanniana e Geodésicas

**Definição 2.3.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que

- i.*  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- ii.*  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- iii.*  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$ ,

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ . O símbolo  $\nabla_X Y$  lê-se: derivada covariante do campo vetorial  $Y$  na direção do campo vetorial  $X$ .

Sejam  $\nabla$  uma conexão em  $M$ ,  $(U, \varphi)$  uma carta local em  $M$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tais que, em coordenadas,

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \partial_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j \partial_j.$$

Agora iremos escrever o campo vetorial  $\nabla_X Y$  em coordenadas. Temos que,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \left( \sum_{j=1}^m Y^j \partial_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \nabla_X (Y^j \partial_j) \\
&= \sum_{j=1}^m X(Y^j) \partial_j + \sum_{j=1}^m Y^j \nabla_X \partial_j \\
&= \sum_{j=1}^m X(Y^j) \partial_j + \sum_{j=1}^m Y^j \nabla_{\sum_{i=1}^m X^i \partial_i} \partial_j \\
&= \sum_{j=1}^m X(Y^j) \partial_j + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (2.10)$$

Assim,

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^m \left( X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^m X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \quad (2.11)$$

Da identidade (2.11) vemos que  $(\nabla_X Y)_p$  depende apenas dos valores de  $X$  e  $Y$  em  $p$  e dos valores de  $X_p(Y^k)$ , para  $k = 1, \dots, m$ , que dependem do valor de  $Y$  ao longo de uma curva diferenciável que passa por  $p$  e que tem  $X_p$  como sendo o vetor tangente em  $p$  (ver o exemplo 2.2.1).

**Definição 2.3.2.** *As funções suaves  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  definidas em (2.10) são chamadas de símbolos de Christoffel associados a carta  $(U, \varphi)$ .*

**Teorema 2.3.1.** *Toda variedade diferenciável possui uma conexão.*

*Demonstração.* Seja  $(M, \mathfrak{A})$  uma variedade diferenciável com  $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m; \alpha \in \mathcal{A}\}$ . Considere uma partição da unidade  $\{h_\alpha\}_\alpha$  em  $M$  subordinada a cobertura aberta  $\{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ . Agora, definiremos uma conexão para cada  $U_\alpha$  (subvariedade aberta de  $M$ ). Para isso defina as  $m^3$  funções suaves  $\Gamma_{ij}^k$  em  $U_\alpha$ . Dessa forma, a fórmula (2.11) define uma conexão  $\nabla^\alpha$  em  $U_\alpha$ . Utilizando a partição da unidade  $\{h_\alpha\}_\alpha$  definimos uma conexão

global em  $M$

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Y, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Com efeito, as duas primeiras propriedades da definição 2.3.1 são facilmente verificadas, restando provar a terceira. Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^{\infty}(M)$ . Então,

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= \sum_{\alpha} h_{\alpha} \nabla_X^{\alpha}(fY) \\ &= \sum_{\alpha} h_{\alpha} (f \nabla_X^{\alpha} Y + (Xf)Y) \\ &= f \sum_{\alpha} h_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Y + (Xf)Y \sum_{\alpha} h_{\alpha} \\ &= f \nabla_X Y + (Xf)Y. \end{aligned}$$

□

**Definição 2.3.3.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável e  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável, onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Um campo vetorial diferenciável ao longo da curva  $\alpha$  é uma aplicação diferenciável  $V : I \rightarrow TM$  tal que  $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ , para todo  $t \in I$ . Além disso, denotaremos por  $\mathfrak{X}(\alpha)$  o espaço vetorial real formado por todos os campos vetoriais diferenciáveis ao longo da curva  $\alpha$ .*

**Proposição 2.3.1.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável munido de uma conexão  $\nabla$  e  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ . Então, existe apenas uma correspondência  $\frac{D}{dt}$  que associa cada  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  a um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i.*  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}, \forall V, W \in \mathfrak{X}(\alpha);$
- ii.*  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}, \forall V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e para toda função diferenciável  $f$  em  $I$ ;
- iii.* Se  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é induzido por um campo vetorial  $X$  em  $M$ , isto é,  $V = X \circ \alpha$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}X.$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3] ou [7].

**Definição 2.3.4.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão  $\nabla$ . Dizemos que:*

- i.* um campo vetorial diferenciável  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é um campo paralelo ao longo de  $\alpha$  se,

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0.$$

- ii.* um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é um campo paralelo se, ele é paralelo ao longo de qualquer curva diferenciável em  $M$ .

Note que,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é paralelo  $\Leftrightarrow \nabla_X Y = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposição 2.3.2.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão  $\nabla$ ,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva diferenciável e  $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$  com  $t_0 \in I$ . Então, existe somente um campo vetorial paralelo  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que  $V_{t_0} = V_0$ .*

A prova desta proposição pode ser encontrada em [3] ou [7].

A proposição 2.3.2 permite enunciar a seguinte definição:

**Definição 2.3.5.**

- i.* O campo  $V$  é chamado de transporte paralelo de  $V_0$  ao longo da curva diferenciável  $\alpha$ ;

- ii.* A aplicação linear  $\tau_t : T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow T_{\alpha(t)}M$  dada por

$$\tau_t(V_0) = V_t,$$

para cada  $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$  é chamada de aplicação transporte paralelo.

Perceba que a aplicação transporte paralelo é um isomorfismo.

**Proposição 2.3.3.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana com uma conexão  $\nabla$ . As afirmações abaixo são equivalentes:*

- i.* Para todos os campos paralelos  $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tem-se

$$\gamma(V, W) \equiv \text{constante}.$$



*ii.* Para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$  vale

$$\frac{d}{dt}\gamma(V, W) = \gamma\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + \gamma\left(V, \frac{DW}{dt}\right).$$

*iii.* Para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  tem-se

$$X\gamma(Y, Z) = \gamma(\nabla_X Y, Z) + \gamma(Y, \nabla_X Z).$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3].

**Definição 2.3.6.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana com uma conexão  $\nabla$ . Dizemos que a conexão é compatível com a métrica se uma das três condições da proposição 2.3.3 é satisfeita.*

**Definição 2.3.7.** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade riemanniana  $M$  é dita simétrica se*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad (2.12)$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Seja  $\beta_p = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_m|_p\}$  a base de  $T_p M$  associada a carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  com  $p \in M$ . Suponha que a conexão  $\nabla$  é simétrica.

*i.* Então pela definição 2.3.7

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0,$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ .

*ii.* Como

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

e

$$\nabla_{\partial_j} \partial_i = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ji}^k \partial_k,$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k - \sum_{k=1}^m \Gamma_{ji}^k \partial_k \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= [\partial_i, \partial_j] \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** (Levi-Civita). *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Então, existe uma única conexão  $\nabla$  em  $M$  tal que:*

*i.  $\nabla$  é simétrica.*

*ii.  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana  $\gamma$ .*

*Demonstração.* Primeiro provaremos a unicidade da conexão  $\nabla$ . Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Pela compatibilidade da métrica, temos que

$$X\gamma(Y, Z) = \gamma(\nabla_X Y, Z) + \gamma(Y, \nabla_X Z),$$

$$Y\gamma(X, Z) = \gamma(\nabla_Y X, Z) + \gamma(X, \nabla_Y Z)$$

e

$$Z\gamma(X, Y) = \gamma(\nabla_Z X, Y) + \gamma(X, \nabla_Z Y).$$

Assim, pela simetria de  $\nabla$ ,

$$\begin{aligned} X\gamma(Y, Z) + Y\gamma(X, Z) - Z\gamma(X, Y) &= \gamma(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \gamma(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + \\ &\quad \gamma(\nabla_X Y, Z) + \gamma(\nabla_Y X, Z) \\ &= \gamma(X, [Y, Z]) + \gamma(Y, [X, Z]) - \gamma(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + \\ &\quad 2\gamma(\nabla_X Y, Z) \\ &= \gamma(X, [Y, Z]) + \gamma(Y, [X, Z]) - \gamma(Z, [X, Y]) + \\ &\quad 2\gamma(\nabla_X Y, Z), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(X\gamma(Y, Z) + Y\gamma(X, Z) - Z\gamma(X, Y) - \gamma(X, [Y, Z]) - \gamma(Y, [X, Z]) + \gamma(Z, [X, Y])). \quad (2.13)$$

A identidade (2.13) mostra que  $\nabla$  é unicamente determinada pela métrica  $\gamma$  e, conseqüentemente, se a conexão existe, então ela é única. Para mostrar a existência de uma conexão  $\nabla$  que satisfaça os dois itens do teorema, basta definir a conexão pela identidade (2.13). Facilmente verifica-se que a aplicação definida dessa forma está bem definida e é uma conexão simétrica e compatível com a métrica riemanniana  $\gamma$ .  $\square$

A conexão  $\nabla$  simétrica e compatível com a métrica riemanniana  $\gamma$  em  $M$  é chamada de *conexão riemanniana* ou *conexão de Levi-Civita* de  $M$ .

Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana com uma conexão riemanniana  $\nabla$ . Considere  $\beta_p = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_m|_p\}$  a base de  $T_pM$  associada a carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  com  $p \in M$ . De (2.10) temos que,

$$\gamma(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \gamma_{kl}. \quad (2.14)$$

Por outro lado, da expressão (2.13) vem que

$$\begin{aligned} \gamma(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) &= \frac{1}{2} (\partial_i\gamma(\partial_j, \partial_l) + \partial_j\gamma(\partial_i, \partial_l) - \partial_l\gamma(\partial_i, \partial_j) - \gamma(\partial_i, [\partial_j, \partial_l]) - \gamma(\partial_j, [\partial_i, \partial_l]) + \\ &\quad \gamma(\partial_l, [\partial_i, \partial_j])) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_j\gamma_{il} + \partial_i\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{ij}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, de (2.14) e (2.15) segue que

$$\sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \gamma_{kl} = \frac{1}{2} (\partial_j\gamma_{il} + \partial_i\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{ij}).$$

Daí vem que,

$$\sum_{l=1}^m \gamma^{lr} \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \gamma_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\partial_j\gamma_{il} + \partial_i\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{ij}) \gamma^{lr}.$$

Mas,

$$\sum_{k=1}^m \left( \sum_{l=1}^m \gamma^{rl} \gamma_{lk} \right) \Gamma_{ij}^k = \sum_{k=1}^m \delta_k^r \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^r.$$

Logo,

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\partial_j\gamma_{il} + \partial_i\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{ij}) \gamma^{lr}, \quad (2.16)$$

para  $i, j, r = 1, \dots, m$ .

**Proposição 2.3.4** (Interpretação Geométrica da Derivada Covariante). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana com uma conexão riemanniana  $\nabla$ . Considere um campo vetorial  $X$  em  $M$  em que  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma curva integral de  $X$  passando pelo ponto  $p \in M$ . Se  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então*

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_p}{t} := \frac{d}{dt} \tau_t^{-1}(Y_{\alpha(t)}) \Big|_{t=0}.$$

Para uma demonstração veja [3].

**Observação 2.3.1.** A partir daqui vamos supor que a variedade riemanniana está munida da sua conexão riemanniana.

Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  é chamada de *geodésica* se,

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0, \forall t \in I.$$

Isto é, uma geodésica é uma curva diferenciável  $\alpha$  em  $M$  tal que o campo velocidade  $\alpha'$  é paralelo ao longo de  $\alpha$ .

**Proposição 2.3.5.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $\alpha : I \rightarrow M$  uma geodésica. Então,*

$$\|\alpha'(t)\| \equiv \text{constante}.$$

*Consequentemente, uma reparametrização  $\alpha \circ h$  de uma geodésica  $\alpha$  é uma geodésica se, e somente se,*

$$h(t) = at + b,$$

onde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $b \in \mathbb{R}$  são constantes.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3].

**Teorema 2.3.3** (Teorema de Existência e Unicidade de Geodésicas). *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Dados  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ , então existem um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  contendo  $t_0$  e uma única geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = v$ .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3].

**Exemplo 2.3.1.** Temos que as geodésicas em:

- i.*  $\mathbb{R}^n$  são as retas;
- ii.*  $\mathbb{S}^2$  são as circunferências máximas;
- iii.*  $\mathbb{H}^2$  (espaço hiperbólico: modelo do semiplano superior de Poincaré) são as semirretas verticais em relação ao eixo- $x$  e as semicircunferências centradas no eixo- $x$ .

Os detalhes deste exemplo podem ser encontrados em [3].

**Proposição 2.3.6.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Então, para cada  $p \in M$  existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ ,  $\delta, \epsilon > 0$  e uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : (-\delta, \delta) \times \mathcal{V} \rightarrow M,$$

onde

$$\mathcal{V} = \left\{ (q, v); q \in V \text{ e } v \in T_q M, (\gamma_q(v, v))^{1/2} < \epsilon \right\},$$

tais que

$$\alpha_{(q,v)}(t) = \alpha(t, q, v) : (-\delta, \delta) \rightarrow M$$

é a única geodésica de  $M$  que satisfaz as condições iniciais  $\alpha_{(q,v)}(0) = q$  e  $\alpha'_{(q,v)}(0) = v$ , para todo  $q \in V$  e  $v \in T_q M$  tal que  $(\gamma_q(v, v))^{1/2} < \epsilon$ .

Para ver uma prova desta proposição consulte a referência [3] ou [7].

**Lema 2.3.1** (Homogeneidade de uma Geodésica). *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  uma geodésica tal que  $\alpha(0) = p \in M$  e  $\alpha'(0) = v \in T_p M$ . Então, para todo  $0 < k \in \mathbb{R}$  a curva*

$$\begin{aligned} \beta : \left(-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k}\right) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \beta(t) = \alpha(kt) \end{aligned}$$

é uma geodésica tal que  $\beta(0) = p$  e  $\beta'(0) = kv$ . Consequentemente,

$$\beta(t, p, kv) = \alpha(kt, p, v).$$

*Demonstração.* A prova desta proposição segue da proposição 2.3.5 e do fato de que  $\beta'(t) = k\alpha'(kt)$ . □

Da proposição 2.3.6 e do lema da homogeneidade de uma geodésica vem o seguinte resultado:

**Corolário 2.3.1.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Então, para cada  $p \in M$  existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ ,  $\epsilon > 0$  e uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : (-2, 2) \times \mathcal{V} \rightarrow M,$$

onde

$$\mathcal{V} = \left\{ (q, v); q \in V \text{ e } v \in T_q M, (\gamma_q(v, v))^{1/2} < \epsilon \right\},$$

tais que

$$\alpha_{(q,v)}(t) = \alpha(t, q, v) : (-2, 2) \rightarrow M$$

é a única geodésica de  $M$  que satisfaz as condições iniciais  $\alpha_{(q,v)}(0) = q$  e  $\alpha'_{(q,v)}(0) = v$ , para todo  $q \in V$  e  $v \in T_q M$  tal que  $(\gamma_q(v, v))^{1/2} < \epsilon$ .

**Definição 2.3.8.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana,  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  uma geodésica tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . A aplicação exponencial de  $v$  é definida como*

$$\exp_p(v) := \alpha(1).$$

Note que, geometricamente  $\exp_p(v)$  é o ponto de  $M$  obtido através de um ponto que parte de  $p$  com velocidade  $v$  e percorre a geodésica  $\alpha$  em uma unidade tempo. Além disso,

$$\exp_p(0) = p.$$

Se  $\alpha : (-2, 2) \times \mathcal{V} \rightarrow M$  é a aplicação dada no corolário 2.3.1, então a aplicação exponencial está definida para todo  $p \in V$  e  $v \in B(0; \epsilon) := \left\{ u \in T_p M; (\gamma_p(u, u))^{1/2} < \epsilon \right\}$ .

**Proposição 2.3.7.** *Dado  $p \in M$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p$  é um difeomorfismo de  $B(0; \epsilon)$  sobre um aberto de  $M$ .*

Seja  $\exp_p : U \subset T_p M \rightarrow V \subset M$  um difeomorfismo, onde  $0 \in U$  e  $p \in V$ . Então, chamamos  $V$  de *vizinhança normal de  $p$* . Além disso, se  $\overline{B(0; \epsilon)} \subset U$  chamamos

$$B(p; \epsilon) := \exp_p(B(0; \epsilon))$$

de *bola geodésica* de centro em  $p$  e raio  $\epsilon$ .

**Definição 2.3.9.** *Sejam  $V$  uma vizinhança normal de  $p$  em  $M$ ,  $\{E_1, \dots, E_m\}$  uma base ortonormal de  $T_pM$  e  $E : \mathbb{R}^m \rightarrow T_pM$  o isomorfismo dado por*

$$E(x) = \sum_{i=1}^m x^i E_i, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

*Considere a parametrização  $\varphi : E^{-1}(U) \rightarrow V$  definida por*

$$\varphi(x) = (\exp_p \circ E)(x) = \exp_p \left( \sum_{i=1}^m x^i E_i \right).$$

*Chamamos de coordenadas normais em  $p$  as coordenadas desta parametrização.*

**Proposição 2.3.8.** *Sejam  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana,  $V$  uma vizinhança normal em  $p \in M$  e  $x^1, \dots, x^m$  coordenadas normais em  $p$ . Então, em coordenadas normais,*

$$\gamma_{ij}(p) = \delta_{ij},$$

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$$

e

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0,$$

*para todo  $i, j, k = 1, \dots, m$ . Além disso, para cada  $v \in T_pM$  tem-se, em coordenadas normais,*

$$\alpha(t, p, v) = \exp_p(tv),$$

*enquanto  $\alpha(t, p, v) \in V$ , onde  $\alpha$  é a geodésica de  $M$  que parte de  $p$  com velocidade inicial  $v$ .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [3].

**Observação 2.3.2.** *As geodésicas contidas em uma vizinhança normal  $V$  de  $p \in M$  que partem do ponto  $p$  são chamadas de raios geodésicos ou geodésicas radiais.*

**Definição 2.3.10.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. A variedade  $M$  é geodesicamente completa se, para todo  $p \in M$  as geodésicas radiais  $\alpha(t)$  partindo de  $p$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 2.3.4** (Teorema de Hopf-Rinow). *Uma variedade riemanniana conexa é geodesicamente completa se, e só se, a variedade como espaço métrico é completa.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [3].

**Corolário 2.3.2.** *Toda variedade riemanniana compacta é geodesicamente completa.*

## 2.4 Curvatura e Derivada Covariante de Campos Tensoriais

**Definição 2.4.1.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Chamamos de endomorfismo curvatura de  $M$  a aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Identificamos o endomorfismo curvatura  $R$  com o campo  $(3, 1)$ -tensorial  $\bar{R}$  induzido pela aplicação multilinear  $\bar{R} : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}_1(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definida por

$$\bar{R}(X, Y, Z, \omega) := \omega(R(X, Y)Z).$$

**Proposição 2.4.1.** *O endomorfismo curvatura  $R$  é uma aplicação multilinear sobre  $C^\infty(M)$ .*

*Demonstração.*

*i.* Linearidade sobre  $C^\infty(M)$  em relação a primeira variável:

Sejam  $X, X_1, X_2, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} R(X_1 + X_2, Y)Z &= \nabla_{(X_1+X_2)} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{(X_1+X_2)} Z - \nabla_{[X_1+X_2, Y]} Z \\ &= \nabla_{X_1} \nabla_Y Z + \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - \nabla_{[X_1, Y]} Z - \\ &\quad \nabla_{[X_2, Y]} Z \\ &= R(X_1, Y)Z + R(X_2, Y)Z \end{aligned}$$



e

$$\begin{aligned}
R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z \\
&= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X, Y] - Y(f)X} Z \\
&= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - (Yf) \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z + (Yf) \nabla_X Z \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

**ii.** Linearidade sobre  $C^\infty(M)$  em relação a segunda variável:

Basta mostrar que

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= -\nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{-[Y, X]} Z \\
&= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z) \\
&= -R(Y, X)Z.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

**iii.** Linearidade sobre  $C^\infty(M)$  em relação a terceira variável:

Sejam  $X, Y, Z, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ . Então,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(Z_1 + Z_2) &= \nabla_X \nabla_Y (Z_1 + Z_2) - \nabla_Y \nabla_X (Z_1 + Z_2) - \nabla_{[X, Y]} (Z_1 + Z_2) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z_1 + \nabla_X \nabla_Y Z_2 - \nabla_Y \nabla_X Z_1 - \nabla_Y \nabla_X Z_2 - \nabla_{[X, Y]} Z_1 - \\
&\quad \nabla_{[X, Y]} Z_2 \\
&= R(X, Y)Z_1 + R(X, Y)Z_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]}(fZ) \\
&= \nabla_X (f \nabla_Y Z) + \nabla_X ((Yf)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_Y ((Xf)Z) - \\
&\quad f \nabla_{[X, Y]} Z - [X, Y](f)Z \\
&= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + (Yf) \nabla_X Z + (X(Yf))Z - \\
&\quad f \nabla_Y \nabla_X Z - (Yf) \nabla_X Z - (Xf) \nabla_Y Z - (Y(Xf))Z - \\
&\quad f \nabla_{[X, Y]} Z - [X, Y](f)Z \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Então,  $M$  é localmente isométrica ao  $\mathbb{R}^m$  se, e somente se,  $R \equiv 0$ .*

Para uma demonstração deste teorema veja [3].

**Proposição 2.4.2.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. As componentes do endomorfismo curvatura  $R$  de  $M$  são*

$$R_{ijk}^l = \sum_{r=1}^m (\Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l) + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l, \quad (2.18)$$

para  $i, j, k, l = 1, \dots, m$ .

*Demonstração.* Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  tais que, em coordenadas,

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^m Y^j \partial_j \quad \text{e} \quad Z = \sum_{k=1}^m Z^k \partial_k.$$

Da proposição 2.4.1, vem que

$$R(X, Y)Z = \sum_{i, j, k=1}^m X^i Y^j Z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k.$$

Mas

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \sum_{l=1}^m R_{ijk}^l \partial_l, \quad (2.19)$$

para  $i, j, k = 1, \dots, m$ . Então,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^m R_{ijk}^l X^i Y^j Z^k \partial_l,$$

ou seja, as componentes de  $R$  são as funções reais suaves  $R_{ijk}^l$ , para  $i, j, k, l = 1, \dots, m$ .

Como

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{r=1}^m \Gamma_{ij}^r \partial_r,$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ , então

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j) \partial_k &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k \\ &= \nabla_{\partial_i} \left( \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \partial_r \right) - \nabla_{\partial_j} \left( \sum_{r=1}^m \Gamma_{ik}^r \partial_r \right) \\ &= \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \nabla_{\partial_i} \partial_r + \sum_{r=1}^m (\partial_i \Gamma_{jk}^r) \partial_r - \sum_{r=1}^m \Gamma_{ik}^r \nabla_{\partial_j} \partial_r - \sum_{r=1}^m (\partial_j \Gamma_{ik}^r) \partial_r \\ &= \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \sum_{l=1}^m \Gamma_{ir}^l \partial_l + \sum_{l=1}^m (\partial_i \Gamma_{jk}^l) \partial_l - \sum_{r=1}^m \Gamma_{ik}^r \sum_{l=1}^m \Gamma_{jr}^l \partial_l - \sum_{l=1}^m (\partial_j \Gamma_{ik}^l) \partial_l \\ &= \sum_{l=1}^m \left[ \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l - \sum_{r=1}^m \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l \right] \partial_l. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Então, das igualdades (2.19) e (2.20) segue o resultado em (2.18).  $\square$

**Proposição 2.4.3** (Simetrias do Endomorfismo Curvatura). *O endomorfismo curvatura  $R$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- i.*  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- ii.* (Primeira Identidade de Bianchi)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Em coordenadas:*

- i.*  $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ ;
- ii.*  $R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0$ ,

para  $i, j, k, l = 1, \dots, m$ .

*Demonstração.* A primeira propriedade está demonstrada em (2.17). Resta-nos provar a segunda propriedade, para isso aplicaremos inicialmente a simetria da conexão duas vezes e em seguida a identidade de Jacobi (item **ii.** da proposição 2.2.2). Assim,

$$\begin{aligned}
& R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y - \\
&\quad \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X, Y]} Z - \\
&\quad \nabla_{[Y, Z]} X - \nabla_{[Z, X]} Y \\
&= (\nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X) + (\nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y) + (\nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . □

Note que,

$$R_{iik}^l = 0, \text{ para } i, k, l = 1, \dots, m.$$

Definiremos, agora, os isomorfismos musicais que são utilizados para subir e descer um índice de um tensor.

**Definição 2.4.2.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana.*

*i.* *O isomorfismo bemol (abaixar o índice) é a aplicação*

$$\begin{aligned}
{}^b : \mathcal{T}^1(M) &\longrightarrow \mathcal{T}_1(M) \\
X &\longmapsto X^b
\end{aligned}$$

*tal que*

$$X^b(Y) = \gamma(X, Y), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*ii.* *O isomorfismo sostenido (subir o índice) é a aplicação inversa do isomorfismo bemol, isto é, a aplicação*

$$\begin{aligned}
{}^\# : \mathcal{T}_1(M) &\longrightarrow \mathcal{T}^1(M) \\
\omega &\longmapsto \omega^\#
\end{aligned}$$

tal que

$$\gamma(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y), \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em coordenadas,

$$X^b = \sum_{i,j=1}^m \gamma_{ij} X^i dx^j \quad (2.21)$$

e

$$\omega^\sharp = \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} \omega_j \partial_i. \quad (2.22)$$

A definição a seguir generaliza as operações de descer e subir um índice de um tensor:

**Definição 2.4.3.** *Sejam  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana e  $T \in \mathcal{T}_k^l(M)$ . Então,*

*i.*  $T^b \in \mathcal{T}_{k+1}^{l-1}(M)$  é o tensor dado por

$$T^b(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}) = T(X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^{l-1}, X_{k+1}^b);$$

*ii.*  $T^\sharp \in \mathcal{T}_{k-1}^{l+1}(M)$  é o tensor dado por

$$T^\sharp(X_1, \dots, X_{k-1}, \omega^1, \dots, \omega^l, \omega^{l+1}) = T(X_1, \dots, X_{k-1}, (\omega^{l+1})^\sharp, \omega^1, \dots, \omega^l).$$

Escrevendo em coordenadas, por (2.21) e (2.22),

$$(T^b)_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}^{j_1 \dots j_{l-1}} = \sum_{p=1}^m \gamma_{i_{k+1} p} T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_{l-1} p} \quad (2.23)$$

e

$$(T^\sharp)_{i_1 \dots i_{k-1}}^{j_1 \dots j_{l+1}} = \sum_{q=1}^m \gamma^{j_{l+1} q} T_{i_1 \dots i_{k-1} q}^{j_1 \dots j_l}. \quad (2.24)$$

Com o isomorfismo musical sustentado podemos estender o conceito de traço de tensores apresentado no capítulo 1, como pode ser visto na próxima definição:

**Definição 2.4.4.** *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana e  $T \in \mathcal{T}_k^l(M)$ . O traço de  $T$  em relação à métrica  $\gamma$  é o tensor  $\text{tr}_\gamma T \in \mathcal{T}_{k-2}^l(M)$  dado por*

$$\text{tr}_\gamma T = \text{tr}(T^\sharp).$$

Em coordenadas,

$$(\text{tr}_\gamma T)_{i_1 \dots i_{k-2}}^{j_1 \dots j_l} = \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} T_{i_1 \dots i_{k-2} ij}^{j_1 \dots j_l}.$$

Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Chamamos de *tensor curvatura de  $M$*  o campo tensorial  $R \in \mathcal{T}_4(M)$  dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \gamma(R(X, Y)Z, W),$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposição 2.4.4.** *As componentes do tensor curvatura  $R$  são*

$$R_{ijkl} = \sum_{r=1}^m \gamma_{rl} R_{ijk}^r.$$

Além disso,

$$R_{ijk}^l = \sum_{r=1}^m \gamma^{rl} R_{ijk}^r.$$

*Demonstração.* Temos que,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) \\ &= \gamma(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) \\ &= \gamma\left(\sum_{r=1}^m R_{ijk}^r \partial_r, \partial_l\right) \\ &= \sum_{r=1}^m R_{ijk}^r \gamma(\partial_r, \partial_l) \\ &= \sum_{r=1}^m \gamma_{rl} R_{ijk}^r. \end{aligned} \tag{2.25}$$

A última afirmação é consequência da igualdade (2.25),

$$\sum_{r=1}^m \gamma^{rl} R_{ijk}^r = \sum_{r=1}^m \gamma^{rl} \sum_{s=1}^m \gamma_{sr} R_{ijk}^s = \sum_{s=1}^m \left(\sum_{r=1}^m \gamma^{lr} \gamma_{rs}\right) R_{ijk}^s = \sum_{s=1}^m \delta_s^l R_{ijk}^s = R_{ijk}^l.$$

□

Note que o tensor curvatura é obtido com o abaixamento do índice contravariante do tensor endomorfismo curvatura.

**Proposição 2.4.5** (Simetrias do tensor Curvatura). *O tensor curvatura  $R$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- i.*  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ , para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- ii.*  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ , para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- iii.*  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ , para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- iv.* (Primeira Identidade de Bianchi)

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0,$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

Em coordenadas:

- i.*  $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ ;
- ii.*  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ ;
- iii.*  $R_{ijkl} = R_{klij}$ ;
- iv.*  $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$ ,

para  $i, j, k, l = 1, \dots, m$ .

*Demonstração.*

- i.* Segue diretamente do item *i.* da proposição 2.4.3.
- iv.* É consequência do item *ii.* da proposição 2.4.3.
- ii.* Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Temos que,

$$R(X, Y, Z+W, Z+W) = R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, Z, W) + R(X, Y, W, Z) + R(X, Y, W, W).$$

Para provarmos este item basta mostrar que

$$R(X, Y, Z, Z) = 0.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \gamma(R(X, Y)Z, Z) \\ &= \gamma(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - \gamma(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - \gamma(\nabla_{[X, Y]} Z, Z). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pela compatibilidade da métrica, vem que

$$\begin{cases} \gamma(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = X\gamma(\nabla_Y Z, Z) - \gamma(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \\ \gamma(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = Y\gamma(\nabla_X Z, Z) - \gamma(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ \gamma(\nabla_{[X,Y]} Z, Z) = \frac{1}{2}[X, Y]\gamma(Z, Z) \end{cases} \quad (2.27)$$

Substituindo os valores de (2.27) em (2.26) e aplicando novamente a compatibilidade da métrica, obtemos

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \frac{1}{2}X(Y\gamma(Z, Z)) - \frac{1}{2}Y(X\gamma(Z, Z)) - \frac{1}{2}[X, Y]\gamma(Z, Z) \\ &= \frac{1}{2}[X, Y]\gamma(Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y]\gamma(Z, Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**iii.** Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Da primeira identidade de Bianchi obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) + R(X, Y, Z, W) = 0 \\ R(Z, X, W, Y) + R(X, W, Z, Y) + R(W, Z, X, Y) = 0 \\ R(X, W, Y, Z) + R(W, Y, X, Z) + R(Y, X, W, Z) = 0 \\ R(W, Y, Z, X) + R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Somando as quatro identidades do sistema (2.28) e usando as simetrias do tensor curvatura dos itens **i.** e **ii.** temos

$$2R(X, Y, Z, W) + 2R(W, Z, X, Y) = 0 \Rightarrow R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

□

Da proposição acima vemos que,

$$R(X, X, Z, W) = R(X, Y, Z, Z) = 0,$$

ou em coordenadas,

$$R_{iikl} = R_{ijkk} = 0,$$

para  $i, j, k, l = 1, \dots, m$ .



**Corolário 2.4.1.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana de dimensão  $m$ . Então, das  $m^4$  componentes do tensor curvatura, existem*

$$\frac{m^2(m^2 - 1)}{12}$$

*componentes independentes.*

**Definição 2.4.5.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. O tensor curvatura de Ricci de  $M$  ou, simplesmente, tensor de Ricci denotado por  $\text{Ric}$  é o campo tensorial 2-covariante dado pelo traço em relação à métrica do tensor curvatura no primeiro e no último índice. Em coordenadas,*

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^m R_{kij}^k = \sum_{k,l=1}^m \gamma^{kl} R_{kijl},$$

*para  $i, j = 1, \dots, m$ .*

Temos que,

$$R_{ij} = \sum_{k,l=1}^m \gamma^{kl} R_{kijl} = \sum_{k,l=1}^m \gamma^{lk} R_{jlk i} = \sum_{k,l=1}^m \gamma^{lk} R_{ljik} = R_{ji},$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ . Isto é, o tensor de Ricci é um campo tensorial simétrico.

**Definição 2.4.6.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Definimos a curvatura escalar de  $M$  como a função real  $S : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $S$  é o traço em relação à métrica do tensor de Ricci, ou seja,*

$$S = \text{tr}_\gamma \text{Ric} = \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} R_{ij}.$$

Sejam  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço vetorial real com produto interno e  $u, v \in V$  vetores linearmente independentes. Então, definimos como a **área do paralelogramo** formado pelos vetores  $u$  e  $v$  por

$$|u \wedge v| := \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}.$$

**Proposição 2.4.6.** *Os vetores  $u, v \in V$  são linearmente independentes se, e somente se,  $|u \wedge v| \neq 0$ .*

**Definição 2.4.7.** *Sejam  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana e  $\sigma \subset T_p M$  um plano. Considere  $\{X, Y\}$  uma base para o plano  $\sigma$ . A curvatura seccional de  $M$  associada a  $\sigma$  é*

$$K(X, Y) := \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X \wedge Y|^2} = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2}.$$

Pode-se verificar facilmente que a curvatura seccional de  $M$  associada a  $\sigma$  não depende da escolha da base de  $\sigma$ .

**Lema 2.4.1.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $R_i \in T_4^0(V)$ , onde  $i = 1, 2$ , que satisfazem as mesmas propriedades de simetria do tensor curvatura (proposição 2.4.5) e*

$$K_1(X, Y) = \frac{R_1(X, Y, Y, X)}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2} = \frac{R_2(X, Y, Y, X)}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2} = K_2(X, Y),$$

para todo  $X, Y \in V$  linearmente independentes. Então,

$$R_1 = R_2.$$

*Demonstração.* Sejam  $X, Y \in V$ . Se  $X$  e  $Y$  são linearmente dependentes, então  $Y = kX$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$\begin{aligned} R_1(X, Y, Y, X) &= R_1(X, kX, kX, X) \\ &= k^2 R_1(X, X, X, X) \\ &= 0 \\ &= k^2 R_2(X, X, X, X) \\ &= R_2(X, kX, kX, X) \\ &= R_2(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Agora, se  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes então, por hipótese,

$$\begin{aligned} K_1(X, Y) &= K_2(X, Y) \\ \Rightarrow R_1(X, Y, Y, X) &= R_2(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$R_1(X + W, Y, Y, X + W) = R_2(X + W, Y, Y, X + W).$$

Daí vem que,

$$\begin{aligned}
& R_1(X, Y, Y, X) + R_1(X, Y, Y, W) + R_1(W, Y, Y, X) + R_1(W, Y, Y, W) = \\
& R_2(X, Y, Y, X) + R_2(X, Y, Y, W) + R_2(W, Y, Y, X) + R_2(W, Y, Y, W) \\
\Rightarrow & R_1(X, Y, Y, X) + 2R_1(X, Y, Y, W) + R_1(W, Y, Y, W) = \\
& R_2(X, Y, Y, X) + 2R_2(X, Y, Y, W) + R_2(W, Y, Y, W) \\
\Rightarrow & R_1(X, Y, Y, W) = R_2(X, Y, Y, W).
\end{aligned}$$

Da última igualdade acima temos que,

$$R_1(X, Y + Z, Y + Z, W) = R_2(X, Y + Z, Y + Z, W)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
& R_1(X, Y, Y, W) + R_1(X, Y, Z, W) + R_1(X, Z, Y, W) + R_1(X, Z, Z, W) = \\
& R_2(X, Y, Y, W) + R_2(X, Y, Z, W) + R_2(X, Z, Y, W) + R_2(X, Z, Z, W) \\
\Rightarrow & R_1(X, Y, Z, W) + R_1(X, Z, Y, W) = R_2(X, Y, Z, W) + R_2(X, Z, Y, W). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Considere o tensor 4-covariante dado por  $R = R_1 - R_2$ . Verifica-se facilmente que o tensor  $R$  satisfaz as propriedades de simetria do tensor curvatura. Da igualdade em (2.29) vem que,

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Z, Y, W).$$

Com isso,

$$R(Y, Z, X, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(X, Y, Z, W)$$

e

$$R(Z, X, Y, W) = -R(X, Z, Y, W) = R(X, Y, Z, W).$$

Pela identidade de Bianchi,

$$\begin{aligned}
& R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0 \\
\Rightarrow & 3R(X, Y, Z, W) = 0 \\
\Rightarrow & R(X, Y, Z, W) = 0 \\
\Rightarrow & R_1(X, Y, Z, W) = R_2(X, Y, Z, W),
\end{aligned}$$

para todo  $X, Y, Z, W \in V$ . Logo,  $R_1 = R_2$ . □

A partir do lema acima concluímos que, em uma variedade riemanniana  $(M, \gamma)$ , um tensor covariante  $\tilde{R}$  de ordem 4 que satisfaz as propriedades de simetria do tensor curvatura e

$$\frac{\tilde{R}(X, Y, Y, X)}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2} = K(X, Y),$$

em todos os planos associados no espaço tangente, é igual ao tensor curvatura.

A proposição a seguir garante a existência e a unicidade, em uma variedade diferenciável munida com sua conexão riemanniana, de uma aplicação que chamaremos de *conexão em  $\mathcal{T}_k^l(M)$* , que permitirá definir derivadas covariantes para campos tensoriais de  $M$ .

**Proposição 2.4.7.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável munida com sua conexão riemanniana  $\nabla$ . Então, existe uma única conexão*

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}_k^l(M) \rightarrow \mathcal{T}_k^l(M)$$

para cada  $\mathcal{T}_k^l(M)$  tal que:

*i.* Se  $k = 0$  e  $l = 1$ , isto é,  $\mathcal{T}^1(M) = \mathfrak{X}(M)$ , então  $\tilde{\nabla} = \nabla$ ;

*ii.* Para  $\mathcal{T}_0(M) = C^\infty(M)$ ,

$$\tilde{\nabla}_X f = Xf;$$

*iii.* A conexão  $\tilde{\nabla}$  satisfaz a regra do produto para os produtos tensoriais, isto é,

$$\tilde{\nabla}_X (F \otimes G) = (\tilde{\nabla}_X F) \otimes G + F \otimes (\tilde{\nabla}_X G);$$

*iv.*  $\tilde{\nabla}$  comuta com todos os traços de tensores, ou seja,

$$\tilde{\nabla}_X (\text{tr } F) = \text{tr} (\tilde{\nabla}_X F);$$

*v.* Se  $X, Y \in \mathcal{T}^1(M)$  e  $\omega \in \mathcal{T}_1(M)$ , então

$$\tilde{\nabla}_X [\omega(Y)] = (\tilde{\nabla}_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y);$$

*vi.* Sejam  $X, X_1, \dots, X_k \in \mathcal{T}^1(M)$ ,  $\omega^1, \dots, \omega^l \in \mathcal{T}_1(M)$  e  $T \in \mathcal{T}_k^l(M)$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\nabla}_X T \right) (X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) &= X \left( T (X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) \right) - \\ &\quad \sum_{i=1}^k T (X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) - \\ &\quad \sum_{j=1}^l T (X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \tilde{\nabla}_X \omega^j, \dots, \omega^l). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por questão de simplicidade escreveremos  $\tilde{\nabla}$  como  $\nabla$ .

**Definição 2.4.8.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável dotada de sua conexão riemanniana  $\nabla$ . Dado um campo  $(k, l)$ -tensorial  $T$ , a derivada covariante de  $T$  é o campo  $(k+1, l)$ -tensorial*

$$\nabla T : \mathcal{T}^1(M) \times \dots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}_1(M) \times \dots \times \mathcal{T}_1(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definido por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_k, X, \omega^1, \dots, \omega^l) = \nabla_X T(Y_1, \dots, Y_k, \omega^1, \dots, \omega^l).$$

Se  $(M, \gamma)$  é uma variedade riemanniana, então, pela definição de derivada covariante e a compatibilidade da métrica,

$$\nabla \gamma = 0.$$

Seja  $T \in \mathcal{T}_k^l(M)$ . Se, em coordenadas,

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}},$$

então escrevemos em coordenadas a derivada covariante de  $T$  como

$$\nabla T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^m \sum_{r=1}^m \nabla_r T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes dx^r \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}.$$

Como

$$\nabla_{\partial_r} dx^j = - \sum_{s=1}^m \Gamma_{rs}^j dx^s,$$

temos que

$$\nabla_r T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \partial_r T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} + \sum_{p=1}^l \sum_{t=1}^m T_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_{p-1} t j_{p+1} \dots j_l} \Gamma_{rt}^{j_p} - \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^m T_{i_1 \dots j_{q-1} t j_{q+1} \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \Gamma_{ri_q}^t.$$

**Proposição 2.4.8** (Regra do Produto). *Sejam  $R \in \mathcal{T}_k^l(M)$  e  $S \in \mathcal{T}_p^q(M)$ . Então,*

$$\nabla_r \left( R_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} S_{i_{k+1} \dots i_{k+p}}^{j_{l+1} \dots j_{l+q}} \right) = (\nabla_r R_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}) S_{i_{k+1} \dots i_{k+p}}^{j_{l+1} \dots j_{l+q}} + R_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} (\nabla_r S_{i_{k+1} \dots i_{k+p}}^{j_{l+1} \dots j_{l+q}}).$$

Daí juntamente com o fato de que  $\nabla \gamma = 0$  vem que,

$$\nabla_r \gamma^{ij} = 0 \Rightarrow \nabla \gamma^{-1} = 0.$$

As demonstrações das duas últimas proposições podem ser encontradas na referência [3].

**Definição 2.4.9.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade diferenciável dotada de sua conexão riemanniana  $\nabla$ . Considere  $T \in \mathcal{T}^l(M)$  e  $Q \in \mathcal{T}_k(M)$ . Então definimos a divergência destes campos tensoriais como:*

*i. A divergência de  $T$  é o campo  $(l-1)$ -tensorial contravariante*

$$\operatorname{div} T = \operatorname{tr} \nabla T;$$

*ii. A divergência de  $Q$  é o campo  $(k-1)$ -tensorial covariante*

$$\operatorname{div} Q = \operatorname{tr}_\gamma \nabla Q.$$

Vejamos o exemplo a seguir:

**Exemplo 2.4.1.**

a) Seja  $T \in \mathcal{T}^2(M)$ . Assim, em coordenadas,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} T)^i &= (\operatorname{tr} \nabla T)^i \\ &= \sum_{j=1}^m (\nabla T)_j^{ij} \\ &= \sum_{j=1}^m \nabla_j T^{ij}. \end{aligned}$$

b) Se  $T \in \mathcal{T}_2(M)$ , então

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} T)_i &= (\operatorname{tr}_\gamma \nabla T)_i \\ &= \sum_{j,k=1}^m \gamma^{jk} (\nabla T)_{ijk} \\ &= \sum_{j,k=1}^m \gamma^{jk} \nabla_k T_{ij}.\end{aligned}$$

△

# Capítulo 3

## Variedades de Einstein em Baixas Dimensões

Neste capítulo começamos definindo variedade de Einstein e apresentando dois resultados gerais que serão utilizados no decorrer do texto. Em seguida fazemos um estudo das variedades de Einstein de dimensões 2 e 3 procurando caracterizá-las.

### 3.1 Variedades de Einstein

**Definição 3.1.1.** *Diremos que uma variedade riemanniana  $(M, \gamma)$  é uma variedade de Einstein se existe uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\text{Ric} = f\gamma.$$

*Dizemos neste caso que a métrica  $\gamma$  é uma métrica de Einstein.*

O resultado a seguir nos diz que a função  $f$  é essencialmente a curvatura escalar quando a variedade é Einstein, isto é,  $f = S/m$ .

**Proposição 3.1.1.**  *$(M, \gamma)$  é uma variedade de Einstein se, e somente se,*

$$\text{Ric} = \frac{S}{m}\gamma,$$

*onde  $S$  é a curvatura escalar de  $M$ .*



*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Temos que,

$$S = \text{tr}_\gamma \text{Ric} = \text{tr}_\gamma f\gamma = \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} (f\gamma)_{ij} = f \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \gamma^{ij} \gamma_{ji} \right) = f \sum_{i=1}^m \delta_i^i = fm,$$

ou seja,

$$\text{Ric} = fg = \frac{S}{m}\gamma.$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $\text{Ric} = \frac{S}{m}\gamma$ , então basta tomar a função  $f = \frac{S}{m}$  e, conseqüentemente,  $M$  é uma variedade de Einstein.  $\square$

**Proposição 3.1.2.** (*Identidade de Bianchi Diferencial*) *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Então,*

$$\nabla_{X_3} R(U, V, X_1, X_2) + \nabla_{X_1} R(U, V, X_2, X_3) + \nabla_{X_2} R(U, V, X_3, X_1) = 0, \quad (3.1)$$

para todo  $U, V, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $R$  é o tensor de curvatura de  $M$ . Em coordenadas temos

$$\nabla_r R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlr} + \nabla_l R_{ijrk} = 0. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Sejam  $U, V, X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ . Escrevendo estes campos vetoriais em coordenadas, temos

$$U = \sum_{i=1}^m U^i \partial_i, \quad V = \sum_{j=1}^m V^j \partial_j, \quad X_1 = \sum_{k=1}^m X_1^k \partial_k, \quad X_2 = \sum_{l=1}^m X_2^l \partial_l \quad \text{e} \quad X_3 = \sum_{r=1}^m X_3^r \partial_r.$$

A fim de simplificar nossos cálculos, consideraremos coordenadas normais em  $p \in M$ . Dessa forma,

$$(\nabla_{\partial_s} \partial_t)(p) = \sum_{q=1}^m \Gamma_{st}^q(p) \partial_q|_p = 0, \quad \forall s, t = 1, \dots, m.$$

Pelas simetrias do tensor de curvatura temos que,

$$\begin{aligned} & \nabla_{X_3} R(U, V, X_1, X_2) + \nabla_{X_1} R(U, V, X_2, X_3) + \nabla_{X_2} R(U, V, X_3, X_1) \\ &= \nabla_{X_3} R(X_1, X_2, U, V) + \nabla_{X_1} R(X_2, X_3, U, V) + \nabla_{X_2} R(X_3, X_1, U, V) \\ &= \sum_{i,j,k,l,r=1}^n [\nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) + \nabla_k R(\partial_l, \partial_r, \partial_i, \partial_j) \\ & \quad + \nabla_l R(\partial_r, \partial_k, \partial_i, \partial_j)] X_1^k X_2^l X_3^r U^i V^j. \end{aligned}$$

Pelo que foi exposto acima para provarmos a igualdade 3.1 basta mostrarmos que

$$\nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) + \nabla_k R(\partial_l, \partial_r, \partial_i, \partial_j) + \nabla_l R(\partial_r, \partial_k, \partial_i, \partial_j) = 0,$$

para todo  $i, j, k, l, r = 1, \dots, m$ . Temos que,

$$\begin{aligned} \nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) &= \partial_r (R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j)) - [R(\nabla_{\partial_r} \partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) + R(\partial_k, \nabla_{\partial_r} \partial_l, \partial_i, \partial_j) \\ &\quad + R(\partial_k, \partial_l, \nabla_{\partial_r} \partial_i, \partial_j) + R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \nabla_{\partial_r} \partial_j)] \\ &= \partial_r (\gamma(R(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \partial_j)). \end{aligned}$$

Pela compatibilidade da métrica,

$$\begin{aligned} \partial_r (\gamma(R(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \partial_j)) &= \gamma(\nabla_{\partial_r} (R(\partial_k, \partial_l) \partial_i), \partial_j) + \gamma(R(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \nabla_{\partial_r} \partial_j) \\ &= \gamma(\nabla_{\partial_r} (R(\partial_k, \partial_l) \partial_i), \partial_j). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) = \gamma(\nabla_{\partial_r} (R(\partial_k, \partial_l) \partial_i), \partial_j).$$

Como

$$R(\partial_k, \partial_l) \partial_i = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i,$$

pois  $[\partial_k, \partial_l] = 0$ , para todo  $k, l = 1, \dots, m$ , então

$$\begin{aligned} \nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) &= \gamma(\nabla_{\partial_r} (\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i), \partial_j) \\ &= \gamma(\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j). \end{aligned}$$

De modo análogo obtemos expressões similares para  $\nabla_k R(\partial_l, \partial_r, \partial_i, \partial_j)$  e  $\nabla_l R(\partial_r, \partial_k, \partial_i, \partial_j)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} &\nabla_r R(\partial_k, \partial_l, \partial_i, \partial_j) + \nabla_k R(\partial_l, \partial_r, \partial_i, \partial_j) + \nabla_l R(\partial_r, \partial_k, \partial_i, \partial_j) \\ &= \gamma(\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j) + \gamma(\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_r} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_l} \partial_i, \partial_j) \\ &\quad + \gamma(\nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_r} \partial_i, \partial_j) \\ &= \gamma(\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_l} \partial_i + \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_r} \partial_i - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_r} \partial_i \\ &\quad + \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j) \\ &= \gamma(R(\partial_r, \partial_k) \nabla_{\partial_l} \partial_i + R(\partial_k, \partial_l) \nabla_{\partial_r} \partial_i + R(\partial_l, \partial_r) \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

A seguir mostraremos a relação, em coordenadas, entre a derivada covariante da curvatura escalar  $S$  de  $M$  com a divergência do tensor de Ricci.

Da identidade de Bianchi diferencial (3.2) e a compatibilidade da métrica vem que,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} (\nabla_r R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlr} + \nabla_l R_{ijrk}) = 0 \\
\Rightarrow & \sum_{j,l=1}^m \nabla_r (\gamma^{jl} R_{ijkl}) + \sum_{j,l=1}^m \nabla_k (\gamma^{jl} R_{ijlr}) + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{ijrk} = 0 \\
\Rightarrow & \nabla_r \left( \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} R_{ijkl} \right) + \nabla_k \left( \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} R_{ijlr} \right) + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{ijrk} = 0 \\
\Rightarrow & -\nabla_r \left( \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} R_{jjkl} \right) + \nabla_k \left( \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} R_{jirl} \right) + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{ijrk} = 0 \\
\Rightarrow & \nabla_r R_{ik} = \nabla_k R_{ir} + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{ijrk}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_r S &= \nabla_r \left( \sum_{i,k=1}^m \gamma^{ik} R_{ik} \right) \\
&= \sum_{i,k=1}^m \gamma^{ik} \nabla_r R_{ik} \\
&= \sum_{i,k=1}^m \gamma^{ik} \nabla_k R_{ir} + \sum_{i,k=1}^m \gamma^{ik} \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{ijrk} \\
&= (\operatorname{div Ric})_r + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l \left( \sum_{i,k=1}^m \gamma^{ik} R_{ijrk} \right) \\
&= (\operatorname{div Ric})_r + \sum_{j,l=1}^m \gamma^{jl} \nabla_l R_{jr} \\
&= 2 (\operatorname{div Ric})_r.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_r S = 2 (\operatorname{div Ric})_r$$

ou se preferir

$$\nabla_r S = 2 \sum_{k=1}^m \nabla_k R_r^k.$$

**Teorema 3.1.1.** *Se  $(M, \gamma)$  é uma variedade de Einstein conexa tal que  $m \geq 3$ , então a curvatura escalar de  $M$  é constante.*

*Demonstração.* Da proposição 3.1.1 temos que,  $\text{Ric} = \frac{S}{m}\gamma$ . Com isso

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \frac{S}{m}\gamma_{ij} \\
\Rightarrow \nabla_k R_{ij} &= \nabla_k \left( \frac{S}{m}\gamma_{ij} \right) \\
\Rightarrow \nabla_k R_{ij} &= \frac{1}{m}\gamma_{ij}\nabla_k S \\
\Rightarrow \sum_{j,k=1}^m \gamma^{jk}\nabla_k R_{ij} &= \frac{1}{m}\sum_{j,k=1}^m \gamma^{jk}\gamma_{ij}\nabla_k S \\
\Rightarrow (\text{div Ric})_i &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \gamma^{kj}\gamma_{ji} \right) \nabla_k S \\
\Rightarrow \frac{\nabla_i S}{2} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \delta_i^k \nabla_k S \\
\Rightarrow \frac{\nabla_i S}{2} &= \frac{\nabla_i S}{m} \\
\Rightarrow (m-2)\nabla_i S &= 0, \forall i = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Como  $m \geq 3$ , então  $\nabla_i S = 0, \forall i = 1, \dots, m$ . Portanto,  $S$  é constante em  $M$ , pois  $M$  é conexa.  $\square$

## 3.2 Variedades de Einstein de Dimensão 2

Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana de dimensão 2. Como  $\dim T_p M = 2$ , então  $T_p M$  contém apenas um plano que é ele mesmo. Dessa forma, podemos considerar a curvatura seccional  $K$  de  $M$  associada a  $T_p M$  como uma função de  $M$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\{E_1, E_2\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . Temos que,

$$S(p) = 2K(E_1, E_2) := 2K(p), \forall p \in M.$$

Considere o campo tensorial 4-covariante  $\tilde{R}$  dado por

$$\tilde{R}(W, X, Y, Z) = K[\gamma(W, Z)\gamma(X, Y) - \gamma(W, Y)\gamma(X, Z)].$$

De onde vem que,

$$\begin{aligned}
R_{1221} &= R(E_1, E_2, E_2, E_1) \cdot 1 \\
&= R(E_1, E_2, E_2, E_1) \cdot |E_1 \wedge E_2|^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K(E_1, E_2) \\
&= K(p) \\
&= K(p) [\gamma(E_1, E_1) \gamma(E_2, E_2) - \gamma(E_1, E_2) \gamma(E_2, E_1)] \\
&= \tilde{R}_{1221}.
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= -R_{1221} = -K(p) = \tilde{R}_{1212} \\
R_{2112} &= R_{1221} = K(p) = \tilde{R}_{2112} \\
R_{2121} &= -R_{1221} = -K(p) = \tilde{R}_{2121}
\end{aligned}$$

e as demais componentes dos tensores  $R$  e  $\tilde{R}$  são nulas. Destarte,

$$\begin{aligned}
R(W, X, Y, Z) &= \tilde{R}(W, X, Y, Z) \\
\Rightarrow R(W, X, Y, Z) &= K [\gamma(W, Z) \gamma(X, Y) - \gamma(W, Y) \gamma(X, Z)].
\end{aligned}$$

Em coordenadas

$$R_{ijkl} = K (\gamma_{il} \gamma_{jk} - \gamma_{ik} \gamma_{jl}).$$

Assim, a única componente independente de  $R_{ijkl}$  em dimensão 2 é  $R_{1212}$ .

O teorema a seguir diz que toda variedade de dimensão 2 é uma variedade de Einstein.

**Teorema 3.2.1.** *Se  $(M, \gamma)$  é uma variedade de riemanniana com  $m = 2$ , então  $(M, \gamma)$  é uma variedade de Einstein.*

*Demonstração.* Das considerações anteriores temos que,

$$R_{rijs} = \frac{S}{2} (\gamma_{rs} \gamma_{ij} - \gamma_{rj} \gamma_{is}).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \sum_{r,s=1}^2 \gamma^{rs} R_{rijs} \\
&= \sum_{r,s=1}^2 \gamma^{rs} \frac{S}{2} (\gamma_{rs} \gamma_{ij} - \gamma_{rj} \gamma_{is}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S}{2} \gamma_{ij} \sum_{s=1}^2 \left( \sum_{r=1}^2 \gamma^{sr} \gamma_{rs} \right) - \frac{S}{2} \sum_{s=1}^2 \left( \sum_{r=1}^2 \gamma^{sr} \gamma_{rj} \right) \gamma_{is} \\
&= \frac{S}{2} \gamma_{ij} \sum_{s=1}^2 \delta_s^s - \frac{S}{2} \sum_{s=1}^2 \delta_j^s \gamma_{is} \\
&= S \gamma_{ij} - \frac{S}{2} \gamma_{ij} \\
&= \frac{S}{2} \gamma_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo,  $\text{Ric} = (S/2)\gamma$ , isto é,  $M$  é uma variedade de Einstein.  $\square$

Do teorema anterior temos que

$$\text{Ric} = K\gamma,$$

então se  $K = 0$  segue que o tensor de Ricci é nulo. Agora, se  $\text{Ric} = 0$  e  $p \in M$  tome um campo vetorial  $X$  de  $M$  tal que  $X_p \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
&\text{Ric}(X, X)(p) = K(p) \gamma_p(X_p, X_p) \\
&\Rightarrow 0 = K(p) \overbrace{\gamma_p(X_p, X_p)}^{>0} \\
&\Rightarrow K(p) = 0.
\end{aligned}$$

O próximo resultado resume a discussão acima e classifica as variedades de Einstein completas de dimensão 2 cujo tensor de Ricci é nulo.

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana bidimensional, então*

$$\text{Ric} = 0 \Leftrightarrow K = 0.$$

*Além disso, se  $\text{Ric} = 0$  e  $M$  é uma variedade completa, então  $M$  é uma das seguintes variedades:*

- i.* o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$ ;
- ii.* o toro plano  $\mathbb{T}^2$ ;
- iii.* o cilindro plano;

*iv. a garrafa de Klein plana;*

*v. a faixa de Möbius.*

A demonstração da classificação das variedades riemannianas de dimensão 2 com curvatura nula pode ser encontrada em [19].

### 3.3 Variedades de Einstein de Dimensão 3

A seguir apresentaremos alguns resultados gerais, referentes a variedades riemannianas de curvatura seccional constante, que serão utilizados para demonstrar o resultado principal desta seção.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. A curvatura seccional de  $M$  é constante  $K_0$  se, e somente se,*

$$R(X, Y, Z, W) = K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)], \quad (3.3)$$

*ou de forma equivalente,*

$$R(X, Y)Z = K_0 [\gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y].$$

*Neste caso:*

*i. Ric =  $(m - 1) K_0 \gamma$ ;*

*ii.  $S = m(m - 1) K_0$ .*

*Demonstração.* Faremos a demonstração deste teorema em três partes.

1ª Parte: A curvatura seccional de  $M$  é constante  $K_0 \Leftrightarrow (3.3)$ .

( $\Rightarrow$ ) Considere o campo tensorial 4-covariante  $\tilde{R}$  dado por

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)].$$

Verificaremos, agora, que  $\tilde{R}$  satisfaz as propriedades de simetria do tensor de curvatura. Com efeito,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(Y, X, Z, W) &= K_0 [\gamma(Y, W)\gamma(X, Z) - \gamma(Y, Z)\gamma(X, W)] \\ &= -K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)] \\ &= -\tilde{R}(X, Y, Z, W),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y, W, Z) &= K_0 [\gamma(X, Z)\gamma(Y, W) - \gamma(X, W)\gamma(Y, Z)] \\ &= -K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)] \\ &= -\tilde{R}(X, Y, Z, W),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(Z, W, X, Y) &= K_0 [\gamma(Z, Y)\gamma(W, X) - \gamma(Z, X)\gamma(W, Y)] \\ &= K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)] \\ &= \tilde{R}(X, Y, Z, W)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\tilde{R}(X, Y, Z, W) + \tilde{R}(Y, Z, X, W) + \tilde{R}(Z, X, Y, W) \\ &= K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)] + K_0 [\gamma(Y, W)\gamma(Z, X) - \gamma(Y, X)\gamma(Z, W)] + \\ &\quad K_0 [\gamma(Z, W)\gamma(X, Y) - \gamma(Z, Y)\gamma(X, W)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Temos, ainda, que

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{R}(X, Y, Y, X)}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2} &= \frac{K_0 [\gamma(X, X)\gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)\gamma(Y, X)]}{\gamma(X, X) \cdot \gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)^2} \\ &= K_0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

para todo  $X, Y \in T_p M$  linearmente independentes. Portanto, pelo lema 2.4.1,

$$R(X, Y, Z, W) = \tilde{R}(X, Y, Z, W) = K_0 [\gamma(X, X)\gamma(Y, Y) - \gamma(X, Y)\gamma(Y, X)].$$

( $\Leftarrow$ ) Segue diretamente de (3.4).

2ª Parte: (3.3)  $\Leftrightarrow R(X, Y)Z = K_0 [\gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y]$ .



( $\Leftarrow$ ) Esta implicação é direta por definição do tensor de curvatura. ( $\Rightarrow$ ) Temos que,

$$\begin{aligned}\gamma(R(X, Y)Z, W) &:= R(X, Y, Z, W) \\ &= K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)] \\ &= \gamma(K_0 [\gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y], W),\end{aligned}$$

para todo  $X, Y, Z, W \in T_p M$ , então

$$R(X, Y)Z = K_0 [\gamma(Y, Z)X - \gamma(X, Z)Y],$$

para todo  $X, Y, Z \in T_p M$ .

3ª Parte:

*i.* Temos que,

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \sum_{r,s=1}^m \gamma^{rs} R_{rijs} \\ &= \sum_{r,s=1}^m \gamma^{rs} K_0 (\gamma_{rs}\gamma_{ij} - \gamma_{rj}\gamma_{is}) \\ &= K_0 \gamma_{ij} \sum_{s=1}^m \left( \sum_{r=1}^m \gamma^{sr}\gamma_{rs} \right) - K_0 \sum_{s=1}^m \left( \sum_{r=1}^m \gamma^{sr}\gamma_{rj} \right) \gamma_{is} \\ &= K_0 \gamma_{ij} \sum_{s=1}^m \delta_s^s - K_0 \sum_{s=1}^m \delta_j^s \gamma_{is} \\ &= mK_0 \gamma_{ij} - K_0 \gamma_{ij} \\ &= (m-1) K_0 \gamma_{ij}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Assim,  $\text{Ric} = (m-1) K_0 \gamma$ .

*ii.* Utilizando o resultado em (3.5) vem que,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} R_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^m \gamma^{ij} (m-1) K_0 \gamma_{ij} \\ &= (m-1) K_0 \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \gamma^{ij}\gamma_{ji} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m-1) K_0 \sum_{i=1}^m \delta_i^i \\
&= m(m-1) K_0.
\end{aligned}$$

□

Note que, se a variedade riemanniana tem curvatura seccional constante então o tensor de curvatura é escrito em função do tensor métrico.

Do item *i.* do teorema anterior segue o seguinte corolário:

**Corolário 3.3.1.** *Variedades riemannianas de curvatura constante são variedades de Einstein.*

O corolário a seguir apresenta a equivalência entre curvatura seccional constante e as componentes do tensor curvatura de uma variedade riemanniana.

**Corolário 3.3.2.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana. Considere para cada  $p \in M$  uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $T_p M$ . Então, a curvatura seccional de  $M$  é constante  $K_0$  se, e somente se,*

$$\begin{cases} R_{ijji} = K_0, \text{ para todo } i \neq j \\ R_{ijij} = -K_0, \text{ para todo } i \neq j \\ R_{ijkl} = 0, \text{ nos demais casos} \end{cases} ,$$

para todo  $p \in M$ .

*Demonstração.* Do teorema 3.3.1 temos que  $M$  tem curvatura seccional constante  $K_0$  se, e somente se,  $R(X, Y, Z, W) = K_0 [\gamma(X, W)\gamma(Y, Z) - \gamma(X, Z)\gamma(Y, W)]$ . Como um tensor é determinado pelas suas componentes, então  $M$  tem curvatura seccional constante  $K_0 \Leftrightarrow R(E_i, E_j, E_k, E_l) = K_0 [\gamma(E_i, E_l)\gamma(E_j, E_k) - \gamma(E_i, E_k)\gamma(E_j, E_l)]$ . Mas,

$$\begin{aligned}
R(E_i, E_j, E_k, E_l) &= K_0 (\delta_{il} \cdot \delta_{jk} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}) \\
&= \begin{cases} K_0, \text{ para } i = l, j = k \text{ e } i \neq j \\ -K_0, \text{ para } i = k, j = l \text{ e } i \neq j \\ 0, \text{ nos demais casos} \end{cases} ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} R_{ijji} = K_0, \text{ para todo } i \neq j \\ R_{ijij} = -K_0, \text{ para todo } i \neq j \\ R_{ijkl} = 0, \text{ nos demais casos} \end{cases} .$$

Destarte, segue o resultado.  $\square$

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana conexa de dimensão 3. Então,  $M$  é uma variedade de Einstein se, e somente se,  $M$  tem curvatura seccional constante.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Inicialmente calcularemos as componentes do tensor de curvatura, em um ponto  $p \in M$ , para uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_m\}$  de  $T_p M$ . Como  $M$  é uma variedade de Einstein conexa de  $\dim M = 3$ , então, pelo teorema 3.1.1, a curvatura escalar de  $M$  é constante  $S_0$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{i,j=1}^3 \gamma^{ij} R_{ij} \\ \Rightarrow \sum_{i,j=1}^3 \delta^{ij} R_{ij} &= S_0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^3 R_{ii} &= S_0 \\ \Rightarrow \sum_{k,l=1}^3 \gamma^{kl} R_{k11l} + \sum_{k,l=1}^3 \gamma^{kl} R_{k22l} + \sum_{k,l=1}^3 \gamma^{kl} R_{k33l} &= S_0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^3 (R_{k11k} + R_{k22k} + R_{k33k}) &= S_0 \\ \Rightarrow R_{1221} + R_{1331} + R_{2112} + R_{2332} + R_{3113} + R_{3223} &= S_0 \\ \Rightarrow R_{1221} + R_{2332} + R_{1331} &= S_0/2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como  $M$  é uma variedade de Einstein, então

$$\text{Ric} = \frac{S_0}{3} \gamma \Rightarrow R_{ij} = \frac{S_0}{3} \gamma_{ij} = \frac{S_0}{3} \delta_{ij},$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ . Assim,  $R_{ii} = \frac{S_0}{3}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Temos que,

$$R_{1221} + R_{1331} = \sum_{k,l=1}^3 \gamma^{kl} R_{k11l} = R_{11} = \frac{S_0}{3}. \tag{3.7}$$

Substituindo o valor de (3.7) na igualdade (3.6) obtemos

$$R_{2332} + \frac{S_0}{3} = \frac{S_0}{2} \Rightarrow R_{2332} = \frac{S_0}{6}.$$

De modo análogo obtém-se

$$R_{1221} = R_{1331} = \frac{S_0}{6}.$$

Pelas simetrias do tensor curvatura temos que,

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{2332} = R_{2112} = R_{3113} = R_{3223} = \frac{S_0}{6}$$

e

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = R_{2121} = R_{3131} = R_{3232} = -\frac{S_0}{6}.$$

Note que,

$$R_{iijk} = 0,$$

para  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Como  $\dim M = 3$ , temos que pelo menos dois índices das componentes do tensor de curvatura são repetidos. Ainda temos que,

$$R_{1ij1} + R_{2ij2} + R_{3ij3} = \sum_{k,l=1}^3 \gamma^{kl} R_{kijl} = R_{ij} = 0, \forall i \neq j,$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ . Daí vem que,

$$R_{ijii} = R_{ijik} = R_{ijjj} = R_{ijjk} = R_{ijki} = R_{ijkj} = R_{ijkk} = 0,$$

para  $i, j, k = 1, 2, 3$ , onde índices representados com letras distintas correspondem a valores diferentes. Portanto, pelo corolário 3.3.2, a curvatura seccional de  $M$  é constante.

( $\Leftarrow$ ) Segue diretamente do corolário 3.3.1. □

**Corolário 3.3.3.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana conexa com  $\dim M = 3$ . Então,*

$$\text{Ric} = 0 \Leftrightarrow K = 0.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Temos que,

$$\text{Ric} = 0 = 0 \cdot \gamma.$$

Assim,  $M$  é uma variedade de Einstein e, pelo teorema 3.3.2,  $K$  é constante. Pelo item *i.* do teorema 3.3.1, para  $X \in T_p M \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= (3 - 1) K \gamma(X, X) \\ \Rightarrow 0 &= 2K \gamma(X, X) \\ \Rightarrow K &= 0. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Como a curvatura seccional de  $M$  é nula, ou seja, constante, então, pelo item *i.* do teorema 3.3.1,

$$\begin{aligned} \text{Ric} &= 2K\gamma \\ &= 2 \cdot 0 \cdot \gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Assim, vemos que o estudo de variedades de Einstein ganha um aspecto independente a partir de dimensão 4, pois em dimensão 2 todas as variedades riemannianas são Einstein, enquanto em dimensão 3 elas tem curvatura constante.

# Capítulo 4

## Variedades de Einstein com Folheações Totalmente Umbílicas

Neste capítulo estudaremos variedades de Einstein folheadas por hipersuperfícies totalmente umbílicas. Se denotarmos por  $z$  o parâmetro que dá a distância entre as folhas, veremos que a curvatura média  $H$  de cada uma delas é função apenas de  $z$ , sendo estas também variedades de Einstein. Abordaremos o problema de realizar uma função dada  $H(z)$  como tal, principalmente quando há algum tipo de simetria sendo envolvida.

### 4.1 Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas

As demonstrações dos resultados básicos desta seção podem ser encontradas nas referências [3], [7] e [16].

Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana conexa e orientável munida da sua conexão riemanniana  $\nabla$ . Chamaremos de *hipersuperfície* a subvariedade  $\Sigma$  mergulhada em  $M$ , conexa e orientável de codimensão 1 com a métrica induzida  $\bar{\gamma}$ , isto é,

$$\bar{\gamma} := \gamma|_{\Sigma}.$$

Dados dois campos vetoriais  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma$ , definimos em  $p \in \Sigma$

$$(\nabla_X Y)_p := \left( \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} \right)_p \in T_p M, \tag{4.1}$$

onde  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  são extensões dos campos, respectivamente,  $X$  e  $Y$ . A expressão acima não depende destas extensões, o que é diretamente verificado em coordenadas adaptadas à subvariedade  $\Sigma$ . Como

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus (T_p \Sigma)^\perp, \quad (4.2)$$

onde  $(T_p \Sigma)^\perp$  é o espaço vetorial  $\gamma$ -ortogonal a  $T_p \Sigma$  em  $p$ , então o vetor  $(\nabla_X Y)_p$  em (4.1) pode ser escrito de forma única como

$$(\nabla_X Y)_p = \text{Tan}(X, Y)_p + \text{Nor}(X, Y)_p$$

com  $\text{Tan}(X, Y)_p \in T_p \Sigma$  e  $\text{Nor}(X, Y)_p \in (T_p \Sigma)^\perp$  — *componentes tangencial e normal* de  $(\nabla_X Y)_p$ , respectivamente. Seja  $N$  o campo normal em  $\Sigma$  compatível com sua orientação ( $N$  é  $\gamma$ -unitário, isto é,  $\gamma(N, N) = 1$ ), então,

$$(\nabla_X Y)_p = \text{Tan}(X, Y)_p + \text{II}_p(X, Y)N_p, \quad (4.3)$$

onde

$$\text{Nor}(X, Y)_p = \text{II}_p(X, Y)N_p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_p \left( (\nabla_X Y)_p, N_p \right) &= \gamma_p \left( \text{Tan}(X, Y)_p + \text{II}_p(X, Y)N_p, N_p \right) \\ \Rightarrow \text{II}_p(X, Y) &= \gamma_p \left( (\nabla_X Y)_p, N_p \right). \end{aligned}$$

Observe que, claramente a expressão  $\gamma_p \left( (\nabla_X Y)_p, N_p \right)$  depende de  $X$  no ponto  $p$ . Como

$$\begin{aligned} \gamma_p \left( (\nabla_X Y)_p, N_p \right) &= \gamma_p \left( (\nabla_Y X)_p + [X, Y]_p, N_p \right) \\ &= \gamma_p \left( (\nabla_Y X)_p, N_p \right) + \gamma_p \left( [X, Y]_p, N_p \right) \\ &= \gamma_p \left( (\nabla_Y X)_p, N_p \right), \end{aligned}$$

pois  $[X, Y]_p \in T_p \Sigma$ , então  $\gamma_p \left( (\nabla_X Y)_p, N_p \right)$  depende de  $Y$  no ponto  $p$ . Dessa forma,  $\text{II}_p$  está bem definida e é uma forma bilinear simétrica em  $T_p \Sigma$ .

Da discussão acima segue a seguinte definição:

**Definição 4.1.1.** *A segunda forma fundamental de  $\Sigma$  é o campo tensorial 2-covariante simétrico dado por*

$$\text{II}(X, Y) = \gamma(\nabla_X Y, N),$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ .

**Teorema 4.1.1.** *Sejam  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana conexa e orientável munida de sua conexão riemanniana  $\nabla$  e  $(\Sigma, \bar{\gamma})$  uma hipersuperfície orientada em  $M$  com sua conexão riemanniana  $\bar{\nabla}$ , onde  $\bar{\gamma}$  é a métrica induzida por  $\gamma$ . Então, para campos vetoriais  $X$  e  $Y$  em  $\Sigma$*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \text{II}(X, Y)N.$$

**Teorema 4.1.2** (Equação de Weingarten). *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Então,*

$$\text{II}(X, Y) = -\gamma(X, \nabla_Y N).$$

**Teorema 4.1.3.** *Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . As seguintes equações se verificam:*

*i. Equação de Gauss:*

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X, Y, Z, W) - \text{II}(X, W)\text{II}(Y, Z) + \text{II}(X, Z)\text{II}(Y, W), \quad (4.4)$$

onde  $\bar{R}$  é o tensor curvatura de  $\bar{\gamma}$  em  $\Sigma$ .

*ii. Equação de Codazzi:*

$$R(X, Y, Z, N) = (\nabla_X \text{II})(Y, Z) - (\nabla_Y \text{II})(X, Z). \quad (4.5)$$

**Corolário 4.1.1.** *Sejam  $p \in M$  e  $X, Y \in T_p \Sigma$  vetores ortonormais. Então,*

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + [\text{II}(X, Y)]^2 - \text{II}(X, X)\text{II}(Y, Y),$$

onde  $\bar{K}$  é o curvatura seccional de  $\Sigma$ .

*Demonstração.* A prova sai diretamente da equação de Gauss. □

Podemos associar naturalmente a  $\text{II}$  um operador linear autoadjunto, para cada ponto  $p \in \Sigma$ ,

$$\bar{\mathcal{S}}_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$$

definido por

$$\bar{\gamma}_p(\bar{\mathcal{S}}_p(u), v) = \text{II}_p(u, v), \forall u, v \in T_p \Sigma.$$



Esse operador é chamado de *operador forma de*  $\Sigma$ . Como  $\bar{\mathcal{S}}_p$  é autoadjunto, então existe uma base  $\bar{\gamma}$ -ortonormal  $\beta = \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$  de  $T_p\Sigma$  formada por autovetores, ou seja,

$$\bar{\mathcal{S}}_p(e_i) = \kappa_i e_i,$$

para  $i = 1, \dots, m-1$ . Os autovalores  $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$  são chamados de *curvaturas principais de*  $\Sigma$  em  $p$ .

**Definição 4.1.2.** A *curvatura média de*  $\Sigma$  em  $p$  é dada por

$$H(p) = \frac{1}{m-1} \operatorname{tr} \bar{\mathcal{S}}_p = \frac{\kappa_1 + \dots + \kappa_{m-1}}{m-1}.$$

## 4.2 Folheações por Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas

Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana conexa e orientável tal que em cada ponto  $p \in M$  passa uma única hipersuperfície orientada  $\Sigma_p$ . Neste caso dizemos que a variedade  $M$  é *folheada* por suas hipersuperfícies, isto é,

$$M = \bigcup_{p \in M} \Sigma_p.$$

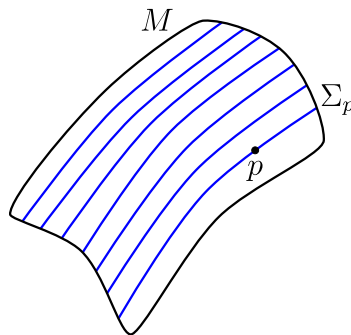


Figura 4.1:  $M$  folheada pelas hipersuperfícies  $\Sigma_p$ .

O campo vetorial normal  $N$  em  $\Sigma$  mencionado na seção 4.1, agora, pode ser naturalmente estendido, pela folheação, a um campo vetorial normal em  $M$ , que também chamaremos de  $N$ .

Considere o campo tensorial  $\widehat{N} \in \mathcal{T}_1(M)$  definido por

$$\widehat{N}(X) = \gamma(X, N),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Perceba que,

$$\widehat{N}(N) = 1 \quad \text{e} \quad \widehat{N}(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

A partir do campo tensorial  $\widehat{N}$  podemos estender o tensor métrico  $\bar{\gamma}$  em  $\Sigma$  para um campo tensorial 2-covariante em  $M$ , segundo a fórmula

$$\bar{\gamma} := \gamma - \widehat{N} \otimes \widehat{N}. \quad (4.6)$$

Note que,

$$\bar{\gamma}(X, N) = \bar{\gamma}(N, X) = \bar{\gamma}(N, N) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $p \in M$ . Considere  $p \in \Sigma$  e  $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$  uma base de  $T_p\Sigma$ . Então, existem campos locais  $X_1, \dots, X_{m-1} \in \mathfrak{X}(U)$ , onde  $U \subset M$  é uma vizinhança em  $p$ , tais que*

- i.*  $X_i(p) = u_i$ ;
- ii.*  $\{X_1(q), \dots, X_{m-1}(q), N(q)\}$  é uma base de  $T_qM$ ,  $\forall q \in U$ ;
- iii.*  $[X_i, X_j] = [N, X_i] = 0$  em  $U$ , para todo  $i, j = 1, \dots, m-1$ ;
- iv.*  $X_i(q) \in T_q\Sigma_p$ , para todo  $q \in \Sigma_p \cap U$  com  $i = 1, \dots, m-1$ .

Além disso, se o campo vetorial normal é geodésico, isto é,  $\nabla_N N = 0$ , então, em  $U$ ,

$$\gamma(X_i, N) = 0, \forall i = 1, \dots, m-1,$$

isto é,

$$X_i(q) \in T_q\Sigma, \forall q \in U \quad \text{e} \quad i = 1, \dots, m-1.$$

*Demonstração.* Seja  $(V, \psi)$  uma carta local de  $M$  em  $p$  adaptada à subvariedade  $\Sigma$  tal que  $\psi = (y^1, \dots, y^{m-1}, y^m)$ . Como

$$u_i = \sum_{j=1}^{m-1} u_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p,$$

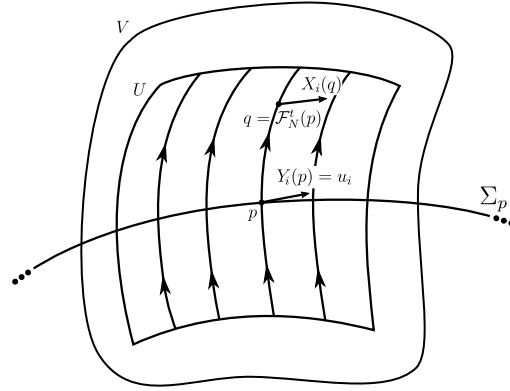


Figura 4.2: Campos vetoriais  $X_i$  em  $U$  através do fluxo de  $N$ .

então podemos definir os seguintes campos vetoriais locais em  $\mathfrak{X}(\Sigma)$ ,

$$Y_i(q) = \sum_{j=1}^{m-1} u_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q,$$

para todo  $q \in V$  e  $i = 1, \dots, m-1$ . Note que, para  $i = 1, \dots, m-1$ ,

$$Y_i(p) = u_i$$

e

$$[Y_i, Y_j] = 0,$$

em  $V \cap \Sigma$ . Sem perda de generalidade, pelo teorema de existência do fluxo local (teorema 2.2.1) obtemos um fluxo local  $\mathcal{F}_N : (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow M$ , onde  $p \in V$ . Agora, Defina os campos vetoriais  $X_i$ , com  $i = 1, \dots, m-1$ , em uma vizinhança  $U \subset V$  do ponto  $p$  tais que

$$X_i(q) = [(\mathcal{F}_N^t)_* Y_i](q) = d\mathcal{F}_N^t(\tilde{q}) Y_i(\tilde{q}), \forall q \in U,$$

onde  $\tilde{q} = \mathcal{F}_N^{-t}(q) \in \Sigma \cap U$  para algum  $t$  – Ver figura 4.2. Note que, para  $i = 1, \dots, m-1$ ,

$$X_i(q) = d\mathcal{F}_N^0(\tilde{q}) Y_i(\tilde{q}) = I_{m-1} \cdot Y_i(q) = Y_i(q) \in T_q \Sigma, \forall q \in \Sigma \cap U,$$

onde  $I_{m-1}$  é a matriz identidade de ordem  $m-1$ . Dessa forma,

$$X_i(p) = Y_i(p) = u_i,$$

para  $i = 1, \dots, m-1$ . Como  $\{X_1(p), \dots, X_{m-1}(p), N(p)\}$  é L.I., então, sem perda de generalidade,  $\{X_1(q), \dots, X_{m-1}(q), N(q)\}$  é L.I. em  $U$ . Isto é,  $\{X_1(q), \dots, X_{m-1}(q), N(q)\}$  é uma base de  $T_qM$ ,  $\forall q \in U$ . Temos que, para  $i, j = 1, \dots, m-1$ ,

$$\begin{aligned} [X_i, X_j](q) &= [(\mathcal{F}_N^t)_* Y_i, (\mathcal{F}_N^t)_* Y_j](q) \\ &= (\mathcal{F}_N^t)_* [Y_i, Y_j](q) \\ &= d\mathcal{F}_N^t(\tilde{q}) [Y_i, Y_j](\tilde{q}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $q \in U$ . Como  $\{\mathcal{F}_N^t\}$  é um grupo local a 1-parâmetro de  $N$ , então dados  $q_1, q_2 \in U$  na mesma trajetória, existe  $t_0$  tal que

$$q_2 = \mathcal{F}_N^{t_0}(q_1)$$

e

$$X_i(q_2) = d\mathcal{F}_N^{t_0}(q_1) X_i(q_1),$$

para  $i = 1, \dots, m-1$ . Dessa forma, para todo  $q \in U$  e  $t$ ,

$$\begin{aligned} X_i(\mathcal{F}_N^t(q)) &= [(\mathcal{F}_N^t)_* X_i](\mathcal{F}_N^t(q)) \\ \Rightarrow [(\mathcal{F}_N^t)^* X_i](q) &= X_i(q) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [(\mathcal{F}_N^t)^* X_i](q) \Big|_{t=0} &= 0 \\ \Rightarrow (\mathcal{L}_N X_i)(q) &= 0 \\ \Rightarrow [N, X_i](q) &= 0, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, m-1$ . Assim, os campos vetoriais  $X_1, \dots, X_{m-1}$  e  $N$  comutam entre si. Defina a aplicação

$$\phi(x^1, \dots, x^{m-1}, z) = \left( \mathcal{F}_{X_1}^{x^1} \circ \mathcal{F}_{X_2}^{x^2} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{X_{m-1}}^{x^{m-1}} \circ \mathcal{F}_N^z \right) (p). \quad (4.7)$$

Como  $\phi$  é um difeomorfismo local, então  $\phi$  é um sistema de coordenadas locais em  $p$ . Note que,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Resta-nos provar a última afirmação da proposição. Temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} (\gamma(X_i, N))_{\mathcal{F}_N^z(q)} &= \nabla_N (\gamma(X_i, N))_{\mathcal{F}_N^z(q)} \\
&= \gamma(\nabla_{X_i} N, N)_{\mathcal{F}_N^z(q)} + \gamma(X_i, \nabla_N N)_{\mathcal{F}_N^z(q)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo  $q \in \Sigma \cap U$ . Assim,  $\gamma(X_i, N)$  é constante ao longo do fluxo  $\mathcal{F}_N^z(q)$ . Mas,  $\gamma(X_i, N)_q = 0$ , então  $\gamma(X_i, N)$  é nulo ao longo do fluxo  $\mathcal{F}_N^z(q)$ , isto é, temos que, em  $U$ ,

$$\gamma(X_i, N) = 0.$$

No sistema de coordenadas em (4.7) as hipersuperfícies  $z = z_0$  são ortogonais a  $N = \frac{\partial}{\partial z}$  e portanto, representam as hipersuperfícies  $\Sigma$ 's. Note ainda que,

$$\widehat{N} = dz.$$

□

**Corolário 4.2.1.** *O campo vetorial normal é geodésico se, e somente se, existe um sistema de coordenadas  $(U, \phi)$  em  $M$  com  $\phi = (x^1, \dots, x^{m-1}, z)$  tal que*

$$\gamma = dz^2 + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} dx^i dx^j,$$

sendo cada hipersuperfície  $\Sigma$  localmente descrita por uma equação  $z = z_0$ . Em particular,

$$\frac{\partial}{\partial z} = N \quad e \quad dz = \widehat{N}.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Segue diretamente da proposição 4.2.1.

( $\Leftarrow$ ) Temos que,

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= dz^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} (dx^i \otimes dx^j) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) &= dz^2 \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} (dx^i \otimes dx^j) \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ij} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= dz^2 \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} (dx^i \otimes dx^j) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \bar{\gamma}_{ij}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial z} = N \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} = \gamma|_{\Sigma}.$$

Dessa forma, em coordenadas,

$$\begin{aligned}
 \nabla_N N &= \sum_{k=1}^m \left( N(N^k) + \sum_{i,j=1}^m N^i N^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k \\
 &= \sum_{k=1}^m \Gamma_{mm}^k \partial_k,
 \end{aligned}$$

onde  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial z}$ . De (4.8) e (4.9) vem que

$$\gamma_{mj} = \delta_{mj},$$

para  $j = 1, \dots, m$ . Pela igualdade (2.16) obtemos

$$\Gamma_{mm}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\partial_m \gamma_{ml} + \partial_m \gamma_{ml} - \partial_l \gamma_{mm}) \gamma^{lk} = 0,$$

para  $k = 1, \dots, m$ . Logo,

$$\nabla_N N = 0.$$

□

**Exemplo 4.2.1.** O espaço euclidiano sem a origem  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é folheado por esferas concêntricas e considerando o sistema de coordenadas esféricas, temos que

$$\gamma = dr^2 + r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2).$$

Localmente,  $\mathbb{S}_R^2$  é caracterizado por  $r = R$  com

$$\frac{\partial}{\partial r} = N \quad \text{e} \quad dr = \hat{N}.$$

△

Pelo menos localmente, o corolário anterior mostra que  $z$  é o parâmetro comprimento de arco das geodésicas normais ( $\gamma' = N$ ) e representa a distância entre duas hipersuperfícies, embora isso nem sempre seja verdade globalmente. Assim, denominaremos  $z$ , ou  $z + z_0$  para algum  $z_0$ , como o *parâmetro distância entre hipersuperfícies*. Em particular, se  $f \in C^\infty(M)$ , nas coordenadas adaptadas,

$$\nabla_N f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Se  $\nabla_X f = 0$ , para todo  $X \in T_p \Sigma$  em todo ponto  $p \in M$ , então

$$\nabla_X f = \frac{df}{dz}.$$

A definição a seguir estende o conceito da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície para a variedade ambiente  $M$ .

**Definição 4.2.1.** *A segunda forma fundamental é o tensor 2-covariante em  $M$  definida em  $p \in M$  por*

$$\text{II}(u, v) = -\gamma(u, \nabla_v N) + \gamma(u, \nabla_N N) \widehat{N}(v),$$

para todo  $u, v \in T_p M$ .

Vejamos alguns casos particulares da segunda forma fundamental de  $M$ :

*i.* Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma_p)$ , então

$$\text{II}_p(X_p, Y_p) = -\gamma_p \left( X_p, (\nabla_Y N)_p \right),$$

ou seja,  $\text{II}_p$  coincide com a segunda forma fundamental da hipersuperfície  $\Sigma_p$ .

*ii.* Se  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_p)$ , então

$$\text{II}(X, N) = -\gamma(X, \nabla_N N) + \gamma(X, \nabla_N N) \widehat{N}(N) = 0$$

e

$$\text{II}(N, X) = -\gamma(N, \nabla_X N) + \gamma(N, \nabla_N N) \widehat{N}(X) = -\gamma(N, \nabla_X N) = 0,$$

pois  $(\nabla_X N)_p \in T_p \Sigma$ . Ainda,

$$\text{II}(N, N) = -\gamma(N, \nabla_N N) + \gamma(N, \nabla_N N) \widehat{N}(N) = 0.$$

Em resumo,

$$\text{II}(X, N) = \text{II}(N, X) = \text{II}(N, N) = 0. \quad (4.10)$$

Assim, concluímos que a segunda forma fundamental de  $M$  é simétrica. Mais do que isso, no ponto  $p \in M$  ela é a única forma bilinear em  $T_p M$  que coincide com a segunda forma fundamental de  $\Sigma_p$  em  $T_p \Sigma_p$  e  $\text{II}_p(N_p, \cdot) = 0$ .

Da mesma forma que associamos o operador forma  $\overline{\mathcal{S}}_p$  a  $\text{II}_p$  em  $\Sigma$  podemos associar um operador linear  $\mathcal{S}_p : T_p M \rightarrow T_p M$  a segunda forma fundamental de  $M$  definido por

$$\gamma_p(\mathcal{S}_p(u), v) = \text{II}_p(u, v), \quad \forall u, v \in T_p M.$$

Chamaremos este operador de *operador forma de  $M$  em  $p$* . Note que  $\mathcal{S}_p$  é autoadjunto, pois  $\text{II}_p$  é simétrica. Sem perda de generalidade, tome uma base  $\beta = \{e_1, \dots, e_{m-1}, N_p\}$  de  $T_p M$  tal que  $e_i \in T_p \Sigma$ , para  $i = 1, \dots, m-1$ . Como a última linha e a última coluna da matriz associada a  $\text{II}_p$  com relação a  $\beta$  são nulas (veja a relação em (4.10)) e

$$(\mathcal{S}_p)_j^i = \sum_{k=1}^m \gamma^{ik}(p) \text{II}_{kj}(p),$$

para  $i, j = 1, \dots, m$  com  $e_m = N_p$ , então

$$\text{tr } \mathcal{S}_p = \text{tr}_{\overline{\gamma}}(\text{II}_p) \Big|_{T_p \Sigma} = \text{tr } \overline{\mathcal{S}}_p = (m-1)H(p),$$

onde  $H(p)$  é a curvatura média de  $\Sigma_p$ .

Agora, no contexto de folheações, podemos estudar a variação da segunda forma na direção normal, o que não era possível quando tínhamos uma única hipersuperfície.

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Então, em  $\Sigma$ ,*

$$(\nabla_N \text{II})(X, Y) = R(N, X, Y, N) + \gamma(\nabla_X N, \nabla_Y N) - \gamma(X, \nabla_Y(\nabla_N N)); \quad (4.11)$$

$$(\nabla_N \text{II})(X, N) = (\nabla_N \text{II})(N, X) = -\text{II}(\nabla_N N, X); \quad (4.12)$$

$$(\nabla_N \text{II})(N, N) = 0. \quad (4.13)$$



*Demonstração.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . Então, pela proposição 4.2.1, para cada  $p \in M$  existem extensões locais  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ , onde  $U \subset M$  é uma vizinhança em  $p$ , tais que

$$i. \quad \tilde{X}(q), \tilde{Y}(q) \in T_q \Sigma, \text{ para todo } q \in U \cap \Sigma;$$

$$ii. \quad [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, N] = [\tilde{Y}, N] = 0 \text{ em } U.$$

Sejam  $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_2(M)$  definidos por

$$\begin{aligned} T_1(Z, W) &= R(N, Z, W, N); \\ T_2(Z, W) &= \gamma(\nabla_Z N, \nabla_W N); \\ T_3(Z, W) &= -\gamma(Z, \nabla_W(\nabla_N N)), \end{aligned}$$

para todo  $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Utilizando a notação inicial, temos que:

*i.* Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , então, em  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} T_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= R(N, \tilde{X}, \tilde{Y}, N) \\ &= R(\tilde{Y}, N, N, \tilde{X}) \\ &= \gamma(R(\tilde{Y}, N)N, \tilde{X}) \\ &= \gamma(\nabla_{\tilde{Y}}\nabla_N N, \tilde{X}) - \gamma(\nabla_N\nabla_{\tilde{Y}}N, \tilde{X}) - \gamma(\nabla_{[\tilde{Y}, N]}N, \tilde{X}) \\ &= -T_3(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \nabla_N(\gamma(\nabla_{\tilde{Y}}N, \tilde{X})) + \gamma(\nabla_{\tilde{Y}}N, \nabla_N\tilde{X}) \\ &= -T_3(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \nabla_N(\text{II}(\tilde{X}, \tilde{Y})) - \text{II}(\nabla_N\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= -T_3(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (\nabla_N \text{II})(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \text{II}(\nabla_N\tilde{X}, \tilde{Y}) + \text{II}(\tilde{X}, \nabla_N\tilde{Y}) - \\ &\quad \text{II}(\nabla_N\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= -T_3(\tilde{X}, \tilde{Y}) - T_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) + (\nabla_N \text{II})(\tilde{X}, \tilde{Y}). \end{aligned}$$

Isto é, em  $\Sigma$ ,

$$(\nabla_N \text{II})(X, Y) = R(N, X, Y, N) + \gamma(\nabla_X N, \nabla_Y N) - \gamma(X, \nabla_Y(\nabla_N N)).$$

*ii.* Para os demais casos usufruiremos das igualdades em (4.10). Assim,

$$\begin{aligned} (\nabla_N \text{II})(N, \tilde{X}) &= \nabla_N(\text{II}(N, \tilde{X})) - \text{II}(\nabla_N N, \tilde{X}) - \text{II}(N, \nabla_N \tilde{X}) \\ &= -\text{II}(\nabla_N N, \tilde{X}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_N \Pi)(\tilde{X}, N) &= \nabla_N (\Pi(\tilde{X}, N)) - \Pi(\nabla_N \tilde{X}, N) - \Pi(\tilde{X}, \nabla_N N) \\
&= -\Pi(\nabla_N N, \tilde{X})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\nabla_N \Pi)(N, N) &= \nabla_N (\Pi(N, N)) - \Pi(\nabla_N N, N) - \Pi(N, \nabla_N N) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

### 4.3 Folheações Totalmente Umbílicas em Variedades de Einstein

**Definição 4.3.1.** *Um ponto  $p$  de uma hipersuperfície  $\Sigma$  é chamado de ponto umbílico se*

$$\Pi_p = \xi \bar{\gamma}_p, \quad (4.14)$$

para algum  $\xi \in \mathbb{R}$ . Se todo ponto de uma hipersuperfície  $\Sigma$  é umbílico dizemos que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica.

Como  $\bar{\gamma} = \gamma - \hat{N} \otimes \hat{N}$  em  $T_p M$ , podemos estender a equação (4.14) para  $T_p M$ , ou seja,

$$\Pi_p(u, v) := \xi \bar{\gamma}_p(u, v),$$

para todo  $u, v \in T_p M$ .

Considere uma base  $\beta$  de  $T_p \Sigma$  formada por autovetores do operador forma de  $\Sigma$  em  $p$ . Temos que,

$$\begin{aligned}
\left[ (\bar{\mathcal{S}}_p)_j^i \right]_\beta &= \xi I_{m-1} \\
\Leftrightarrow \left[ \bar{\gamma}^{ik}(p) \right]_\beta \cdot \left[ \Pi_{kj}(p) \right]_\beta &= \xi \left[ \bar{\gamma}^{ik}(p) \right]_\beta \cdot \left[ \bar{\gamma}_{kj}(p) \right]_\beta \\
\Leftrightarrow \left[ \Pi_{kj}(p) \right]_\beta &= \xi \left[ \bar{\gamma}_{kj}(p) \right]_\beta \\
\Leftrightarrow \Pi_p &= \xi \bar{\gamma}_p.
\end{aligned}$$

Daí vem que, um ponto  $p$  de  $\Sigma$  é umbílico se, e só se, as curvaturas principais de  $\Sigma$  em  $p$  são iguais.

**Exemplo 4.3.1.** A esfera e o plano são exemplos de hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . De forma geral, as hipersuperfícies totalmente umbílicas em  $\mathbb{R}^{m+1}$  com a métrica euclidiana estão contidas ou em um hiperplano ou em uma hipersfera. Os detalhes podem ser encontrados em [7] ou [15].

△

O teorema a seguir mostra que em uma variedade de Einstein folheada por hipersuperfícies totalmente umbílicas, com o campo normal sendo geodésico, tem-se que suas folhas são também variedades de Einstein e que a curvatura média é constante ao longo de cada hipersuperfície.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $(M, \gamma)$  uma variedade de Einstein, isto é,*

$$\text{Ric} = \Lambda \gamma$$

*conexa e orientável de  $\dim M = m$ , munida de sua conexão riemanniana  $\nabla$ , e folheada pelas suas hipersuperfícies totalmente umbílicas  $(\Sigma, \bar{\gamma})$  em  $M$ . Se o campo normal  $N$  em  $M$  é geodésico, então:*

*i.* *A curvatura média  $H$  de  $\Sigma$  é constante ao longo da hipersuperfície  $\Sigma$ ;*

*ii.* *A hipersuperfície  $\Sigma$  é uma variedade de Einstein com*

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + (m - 1)H^2 - \nabla_N H;$$

*iii.* *A curvatura média  $H$  de  $\Sigma$  satisfaz a equação*

$$\nabla_N H - H^2 = \frac{\Lambda}{m - 1}. \quad (4.15)$$

*Demonstração.* Sejam  $p \in \Sigma$  e  $\beta = \{e_1, \dots, e_{m-1}, N\}$  uma base  $\gamma$ -ortonormal de  $T_p M$  tal que  $\bar{\beta} = \{e_1, \dots, e_{m-1}\}$  é uma base  $\bar{\gamma}$ -ortonormal de  $T_p \Sigma$ . Para  $\tilde{u}, \tilde{v} \in T_p M$  temos que,

$$\text{Ric}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, \tilde{u}, \tilde{v}, e_i) + a(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (4.16)$$

sendo

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = R(N, \tilde{u}, \tilde{v}, N)$$

um tensor 2-covariante simétrico. Note que,  $a(N, \cdot) = 0$ . Da igualdade (4.2) temos que existem  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\tilde{u} = u + \lambda_1 N$$

e

$$\tilde{v} = v + \lambda_2 N.$$

Dessa forma, escrevemos a expressão (4.16) como

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= a(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, u, v, e_i) + \lambda_1 \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, N, v, e_i) + \lambda_2 b(u) + \\ &\quad \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, N, N, e_i), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$b(u) = \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, u, N, e_i)$$

é um funcional linear. Temos que,

$$\sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, N, N, e_i) = \sum_{i=1}^{m-1} R(N, e_i, e_i, N) = \sum_{i=1}^{m-1} a(e_i, e_i) \quad (4.18)$$

e, da equação de Gauss (4.4),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, u, v, e_i) &= \sum_{i=1}^{m-1} [\overline{R}(e_i, u, v, e_i) - \text{II}(e_i, e_i) \text{II}(u, v) + \text{II}(e_i, v) \text{II}(u, e_i)] \\ &= \overline{\text{Ric}}(u, v) - \left( \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(e_i, e_i) \right) \text{II}(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(e_i, v) \text{II}(u, e_i) \\ &= \overline{\text{Ric}}(u, v) - (\text{tr}_{\overline{\gamma}} \text{II}) \text{II}(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(u, e_i) \text{II}(v, e_i). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Substituindo as expressões obtidas em (4.18) e (4.19) em (4.17) temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= a(u, v) + \overline{\text{Ric}}(u, v) - (\text{tr}_{\overline{\gamma}} \text{II}) \text{II}(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(u, e_i) \text{II}(v, e_i) + \\ &\quad \lambda_1 \sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, N, v, e_i) + \lambda_2 b(u) + \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^{m-1} a(e_i, e_i). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim, da equação (4.20) obtemos as equações

$$\text{Ric}(u, v) = \overline{\text{Ric}}(u, v) + a(u, v) - (\text{tr}_{\overline{\gamma}} \text{II}) \text{II}(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(u, e_i) \text{II}(v, e_i), \quad (4.21)$$

$$b(u) = \text{Ric}(u, N) \quad (4.22)$$

e

$$\sum_{i=1}^{m-1} a(e_i, e_i) = \text{Ric}(N, N), \quad (4.23)$$

para  $u, v \in T_p \Sigma$ . Aplicando a hipótese de que a variedade  $M$  é Einstein nas equações (4.21), (4.22) e (4.23) chegamos nas equações

$$\Lambda \overline{\gamma}(u, v) = \overline{\text{Ric}}(u, v) + a(u, v) - (\text{tr}_{\overline{\gamma}} \text{II}) \text{II}(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \text{II}(u, e_i) \text{II}(v, e_i), \quad (4.24)$$

$$b(u) = 0 \quad (4.25)$$

e

$$\text{tr}_{\overline{\gamma}} a = \Lambda, \quad (4.26)$$

onde  $u, v \in T_p \Sigma$ .

*i.* Como a hipersuperfície  $\Sigma$  é totalmente umbílicas, isto é,

$$\text{II} = \xi \overline{\gamma}$$

com  $\xi \in \mathbb{R}$ , então

$$\text{tr}_{\overline{\gamma}} \text{II} = \xi \text{tr}_{\overline{\gamma}} \overline{\gamma}$$

$$\Rightarrow \text{tr} \overline{\mathcal{S}} = (m-1)\xi$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{m-1} \text{tr} \overline{\mathcal{S}}$$

$$\Rightarrow \xi = H.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{II} &= H \overline{\gamma} \\ &= H (\gamma - \widehat{N} \otimes \widehat{N}) \end{aligned}$$

Com isso

$$\begin{aligned}
(\nabla_w \Pi)(u, v) &= (\nabla_w H) \bar{\gamma}(u, v) + H \left[ (\nabla_w \gamma)(u, v) - \left( \nabla_w \hat{N} \otimes \hat{N} \right)(u, v) - \right. \\
&\quad \left. \left( \hat{N} \otimes \nabla_w \hat{N} \right)(u, v) \right] \\
&= (\nabla_w H) \bar{\gamma}(u, v),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

para todo  $u, v \in T_p \Sigma$ . Da equação (4.25) vem que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, e_k, N, e_i) = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i=1}^{m-1} R(e_i, e_k, e_i, N) = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i \neq k} R(e_i, e_k, e_i, N) = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i \neq k} [(\nabla_{e_i} \Pi)(e_k, e_i) - (\nabla_{e_k} \Pi)(e_i, e_i)] = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i \neq k} [(\nabla_{e_i} H) \bar{\gamma}(e_k, e_i) - (\nabla_{e_k} H) \bar{\gamma}(e_i, e_i)] = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i \neq k} \nabla_{e_k} H = 0 \\
\Rightarrow &(m-2) \nabla_{e_k} H = 0 \\
\Rightarrow &\nabla_{e_k} H = 0,
\end{aligned}$$

para  $k = 1, \dots, m-1$ . Logo,

$$\nabla_u H = 0,$$

para todo  $u \in T_p \Sigma$ . Isto é, a curvatura média  $H$  é constante na hipersuperfície  $\Sigma$ .

**ii.** Sejam  $u, v \in T_p \Sigma$ . Temos que,

$$\begin{aligned}
\gamma(\nabla_u N, \nabla_v N) &= -\Pi(\nabla_u N, v) \\
&= -H \gamma(\nabla_u N, v) \\
&= H \Pi(v, u) \\
&= H^2 \gamma(u, v).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Da expressão (4.27) vem que

$$(\nabla_N \Pi)(u, v) = (\nabla_N H) \bar{\gamma}(u, v). \tag{4.29}$$

Dessa forma, substituindo as expressões de (4.28) e (4.29) na equação (4.11) obtemos

$$a(u, v) = (\nabla_N H - H^2) \bar{\gamma}(u, v), \quad (4.30)$$

pois o campo normal  $N$  é geodésico. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} \Pi(u, e_i) \Pi(v, e_i) &= \sum_{i=1}^{m-1} H^2 \bar{\gamma}(u, e_i) \bar{\gamma}(v, e_i) \\ &= H^2 \sum_{i=1}^{m-1} u^i v^i \\ &= H^2 \bar{\gamma}(u, v). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Agora, substituindo as expressões obtidas em (4.30) e (4.31) na equação (4.24) temos

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{\gamma}(u, v) &= \overline{\text{Ric}}(u, v) + a(u, v) - (\text{tr}_{\bar{\gamma}} \Pi) \Pi(u, v) + \sum_{i=1}^{m-1} \Pi(u, e_i) \Pi(v, e_i) \\ \Rightarrow \Lambda \bar{\gamma}(u, v) &= \overline{\text{Ric}}(u, v) + (\nabla_N H - H^2) \bar{\gamma}(u, v) - (m-1) H^2 \bar{\gamma}(u, v) + H^2 \bar{\gamma}(u, v) \\ \Rightarrow \overline{\text{Ric}}(u, v) &= \bar{\Lambda} \bar{\gamma}(u, v), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + (m-1)H^2 - \nabla_N H. \quad (4.32)$$

Portanto, a hipersuperfície  $\Sigma$  é uma variedade de Einstein.

*iii.* Das equações (4.24) e (4.26) temos

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{\gamma} &= \bar{\Lambda} \bar{\gamma} + a - (m-1)H^2 \bar{\gamma} + H^2 \bar{\gamma} \\ \Rightarrow a &= (\Lambda - \bar{\Lambda} + (m-2)H^2) \bar{\gamma} \\ \Rightarrow \text{tr}_{\bar{\gamma}} a &= (\Lambda - \bar{\Lambda} + (m-2)H^2) \text{tr}_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} \\ \Rightarrow \Lambda &= (m-1) (\Lambda - \bar{\Lambda} + (m-2)H^2) \\ \Rightarrow \bar{\Lambda} &= \frac{m-2}{m-1} \Lambda + (m-2)H^2. \end{aligned}$$

Por (4.32),

$$\begin{aligned} \Lambda + (m-1)H^2 - \nabla_N H &= \frac{m-2}{m-1} \Lambda + (m-2)H^2 \\ \Rightarrow \nabla_N H + (m-2)H^2 - (m-1)H^2 &= \Lambda - \frac{m-2}{m-1} \Lambda \\ \Rightarrow \nabla_N H - H^2 &= \frac{\Lambda}{m-1}. \end{aligned}$$

□

Seja  $(U, \phi)$  uma carta adaptada conforme o corolário 4.2.1. Então, a equação (4.15) em coordenadas  $\phi = (x^1, \dots, x^{m-1}, z)$  fica

$$\frac{dH}{dz} - H^2 = \frac{\Lambda}{m-1}, \quad (4.33)$$

pois a curvatura média depende apenas da coordenada  $z$ , uma vez que ela é constante ao longo das folhas. Considere a condição inicial da equação diferencial (4.33)  $H(z_0) = H_0$ . Temos três casos:

*i.* Para  $\Lambda < 0$ :

- Se  $|H| < \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}}$ :

$$H(z) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} (z - z_0) + C \right), \quad (4.34)$$

onde

$$C = \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-m}{\Lambda}} H_0 \right);$$

- Se  $|H| > \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}}$ :

$$H(z) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \coth \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} (z - z_0) + C \right), \quad (4.35)$$

em que

$$C = \coth^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-m}{\Lambda}} H_0 \right);$$

*ii.* Para  $\Lambda = 0$ :

Se  $H_0 = 0$ , então

$$H = 0. \quad (4.36)$$

Do contrário,

$$H(z) = -\frac{1}{(z - z_0) + C}, \quad (4.37)$$

com

$$C = -\frac{1}{H_0};$$



*iii.* Para  $\Lambda > 0$ :

$$H(z) = \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \tan \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}}(z - z_0) + C \right), \quad (4.38)$$

onde

$$C = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{m-1}{\Lambda}} H_0 \right).$$

Após as discussões acima surgem inicialmente duas questões que tentaremos resolver nesta dissertação:

**Questão 1:** Dados  $\Lambda \in \mathbb{R}$  e  $H(z)$  como acima, existe uma variedade  $M$  de Einstein com constante  $\Lambda$  e uma folheação com folhas totalmente umbílicas que realiza a curvatura média constante ao longo de suas folhas como  $H(z)$ , isto é, em coordenadas adaptadas  $\Sigma_{z_0}$  é totalmente umbílica e tem curvatura média constante ao longo de suas folhas como  $H(z)$ ?

**Questão 2:** Seja  $M$  uma variedade de Einstein com constante  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , onde  $A$  é um conjunto fechado de medida nula em  $M$ . É possível obtermos uma folheação totalmente umbílica em  $M \setminus A$  tal que a curvatura média ao longo de cada folha é constante e igual a  $H(z)$ ?

## 4.4 Exemplos de Folheações Totalmente Umbílicas

Agora, iremos responder a **questão 1** que foi levantada no final da seção 4.3.

O teorema a seguir nos diz quais são as hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço euclidiano, na esfera e no espaço hiperbólico – no modelo do hiperbolóide (veja o exemplo 4.4.4).

**Teorema 4.4.1.** *Seja  $\Sigma$  uma variedade riemanniana completa. Se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica em:*

*i.*  $\mathbb{R}^m$ , então  $\Sigma$  é um hiperplano ou uma hiperesfera;

*ii.*  $\mathbb{S}^m(r)$ , então  $\Sigma$  é uma esfera euclidiana  $(m-1)$ -dimensional;

*iii.*  $\mathbb{H}_r^m$  (modelo do hiperbolóide), então  $\Sigma$  é a interseção de  $\mathbb{H}_r^m$  com um hiperplano de  $\mathbb{L}^{m+1}$  (espaço de Lorentz-Minkowski:  $\mathbb{R}^{m+1}$  munido com a métrica de Lorentz-Minkowski de índice 1).

Para ver a prova e os detalhes deste teorema consulte as referências [6], [12], [15] e [17].

Suponha que o campo vetorial normal a  $M$  seja geodésico. Considere um sistema de coordenadas  $(U, \phi)$  em  $M$  com  $\phi = (x^1, \dots, x^{m-1}, z)$  tal que

$$\gamma = dz^2 + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} dx^i dx^j,$$

cuja existência é garantida pelo corolário 4.2.1. Temos que, para  $i, j = 1, \dots, m-1$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \gamma(\nabla_{\partial_i} \partial_j, N) \\ &= \gamma\left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{ij}^l \partial_l, N\right) \\ &= \Gamma_{ij}^m, \end{aligned}$$

onde  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial z} = N$ . Como

$$\gamma^{ml} = \delta^{ml} \quad \text{e} \quad \gamma_{ml} = \delta_{ml},$$

para  $l = 1, \dots, m$ , então

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\partial_j \gamma_{il} + \partial_i \gamma_{jl} - \partial_l \gamma_{ij}) \gamma^{lm} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_j \gamma_{im} + \partial_i \gamma_{jm} - \partial_m \gamma_{ij}) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_m \gamma_{ij}, \end{aligned}$$

para  $i, j = 1, \dots, m$ . Note que,

$$\Gamma_{ij}^m = 0,$$

se  $i = m$  ou  $j = m$ . Dessa forma, para  $i, j = 1, \dots, m-1$ ,

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{2} \partial_m \bar{\gamma}_{ij}, \tag{4.39}$$

ou seja, considerando a base associada ao sistema de coordenadas  $(U, \phi)$ , temos que a segunda forma fundamental, matricialmente, é dada por

$$\mathbb{I} = -\frac{1}{2}\partial_m \bar{\gamma}. \quad (4.40)$$

Além disso, a curvatura média é

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{m-1} \operatorname{tr} \bar{S} \\ &= \frac{1}{m-1} \operatorname{tr}_{\bar{\gamma}} \mathbb{I} \\ &= \frac{1}{m-1} \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}^{ij} \mathbb{I}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2(m-1)} \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}^{ij} \partial_m \bar{\gamma}_{ij}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A seguir apresentaremos exemplos de  $H$  com  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda < 0$  e  $\Lambda > 0$ .

**Exemplo 4.4.1** ( $\Lambda = 0$  e  $\mathbf{H} = 0$ ). Considere o espaço  $\mathbb{R}^m$  com a métrica euclidiana folheado por hiperplanos  $\Sigma$  paralelos ao hiperplano  $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ .

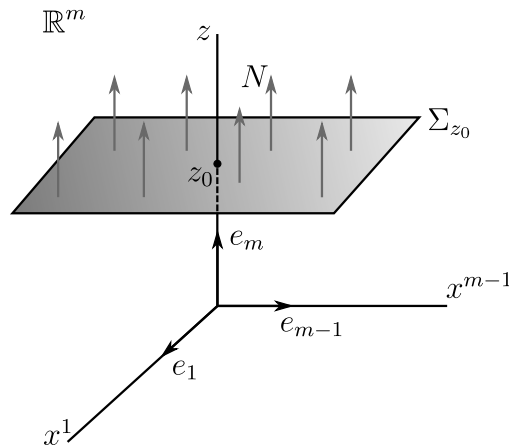


Figura 4.3:  $\mathbb{R}^m$  folheado por hiperplanos  $\Sigma_{z_0}$ .

Temos que,  $\mathbb{R}^m$  é uma variedade de Einstein com constante de Einstein nula. Além disso, para o sistema de coordenadas locais  $(\mathbb{R}^m, \text{id})$  tal que  $\text{id} = (x^1, \dots, x^{m-1}, z)$  temos

$$\gamma = dz^2 + \sum_{i,j=1}^{m-1} \bar{\gamma}_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{métrica euclidiana})$$

onde  $\bar{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$ . Pelo corolário 4.2.1,  $\nabla_N N = 0$ . Assim, por (4.39)

$$\text{II}_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_m \delta_{ij} = 0,$$

ou seja,

$$\text{II} = 0 = 0 \cdot \bar{\gamma}.$$

Com isso vemos que os hiperplanos  $\Sigma$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas em  $\mathbb{R}^m$  (veja o item **i.** do teorema 4.4.1). Dessa forma,

$$H = 0.$$

Assim, obtemos a função em (4.36) do caso **ii.**

△

**Observação 4.4.1.** Todo hiperplano em  $\mathbb{R}^m$  tem curvatura média nula.

**Exemplo 4.4.2** ( $\Lambda = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{H} = -1/z$ ). Considere o espaço euclidiano furado  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , com a métrica euclidiana, folheado por hiperesferas  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$  para  $r > 0$ . O espaço euclidiano furado é uma variedade de Einstein com constante nula.

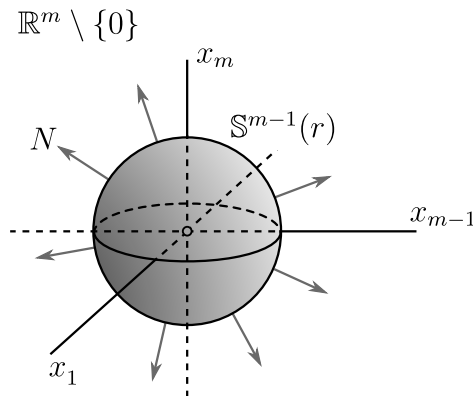


Figura 4.4:  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  folheado por hiperesferas  $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ .

Seja a aplicação  $\phi : D = (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{m-2} \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por

$$\phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, r) = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

onde

$$\begin{cases} x_1 = r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \theta \\ x_2 = r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \sin \theta \\ x_j = r \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_{j-2} \\ x_m = r \cos \varphi_{m-2} \end{cases},$$

para  $j = 3, \dots, m-1$ .

Temos que,

$$\phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, r) \in \mathbb{S}^{m-1}(r),$$

para todo  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi_j \in (0, \pi)$  e  $r > 0$  com  $j = 1, \dots, m-2$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|\phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, r)\|^2 &= r^2 \prod_{i=1}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \theta + r^2 \prod_{i=1}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \sin^2 \theta + \\ &\quad r^2 \sum_{j=3}^{m-1} \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_{j-2} + r^2 \cos^2 \varphi_{m-2} \\ &= r^2 \prod_{i=2}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_1 + r^2 \prod_{i=2}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_1 + \\ &\quad r^2 \sum_{j=4}^{m-1} \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_{j-2} + r^2 \cos^2 \varphi_{m-2} = \\ &= \dots \\ &= r^2 \sin^2 \varphi_{m-2} + r^2 \cos^2 \varphi_{m-2} \\ &= r^2. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Afirmamos que a aplicação  $\phi$  é uma parametrização em  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Com efeito:

*i.* A aplicação  $\phi : D \rightarrow \phi(D)$  é bijetiva.

Sejam  $(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, r), (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{m-2}, \tilde{r}) \in D$  tais que

$$\phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, r) = \phi(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{m-2}, \tilde{r}).$$

De 4.42 vem que,

$$r = \tilde{r}.$$

Dessa forma,  $\varphi_{m-2}, \tilde{\varphi}_{m-2} \in (0, \pi)$ , então  $\varphi_{m-2} = \tilde{\varphi}_{m-2}$ . Como  $\sin \varphi_{m-2} > 0$  em  $(0, \pi)$ , então  $\varphi_{m-3} = \tilde{\varphi}_{m-3}$ . De forma sucessiva obtemos

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j,$$

para  $j = 1, \dots, m-4$ . Por fim, para  $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\begin{cases} r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \theta = r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \tilde{\theta} \\ r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \sin \theta = r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \sin \tilde{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos \tilde{\theta} \\ \sin \theta = \sin \tilde{\theta} \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\theta = \tilde{\theta}.$$

*ii.* A aplicação  $\phi : D \rightarrow \phi(D)$  é contínua em  $D$ , pois claramente é diferenciável em todo seu domínio.

*iii.* A aplicação  $\phi$  é uma imersão.

Calcularemos a seguir as derivadas parciais de  $\phi$ . Temos que,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial \theta} \right) \neq 0$ , onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \sin \theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \theta \\ \frac{\partial x_j}{\partial \theta} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 3, \dots, m$ .

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_1} \right) \neq 0$ , onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = r \prod_{i=2}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_1 \cos \theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} = r \prod_{i=2}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_1 \sin \theta \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} = -r \prod_{i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \neq 0 \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_1} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 4, \dots, m$ .

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_2} \right) \neq 0$ , onde

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} = r \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_2 \cos \theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} = r \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_2 \sin \theta \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_2} = r \prod_{i=3}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_2} = -r \prod_{i=2}^{m-2} \sin \varphi_i \neq 0 \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_2} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 5, \dots, m$ .

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_k} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_k} \right) \neq 0$ , onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k} = r \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_k \cos \theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_k} = r \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_k \sin \theta \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_k} = r \prod_{k \neq i=j-1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_k \cos \varphi_{j-2} \\ \frac{\partial x_{k+1}}{\partial \varphi_k} = r \prod_{i=k+1}^{m-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_k \cos \varphi_{k-1} \\ \frac{\partial x_{k+2}}{\partial \varphi_k} = -r \prod_{i=k}^{m-2} \sin \varphi_i \neq 0 \\ \frac{\partial x_l}{\partial \varphi_k} = 0 \end{array} \right. ,$$

para  $3 \leq k < m-2$ ,  $j = 3, \dots, k$  e  $l > k+2$ .

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_{m-2}} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_{m-2}} \right) \neq 0$ , onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}} = r \prod_{i=1}^{m-3} \sin \varphi_i \cos \varphi_{m-2} \cos \theta \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_{m-2}} = r \prod_{i=1}^{m-3} \sin \varphi_i \cos \varphi_{m-2} \sin \theta \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{m-2}} = r \prod_{i=j-1}^{m-3} \sin \varphi_i \cos \varphi_{m-2} \cos \varphi_{j-2} \\ \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \varphi_{m-2}} = r \cos \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-3} \\ \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_{m-2}} = -r \sin \varphi_{m-2} \neq 0 \end{array} \right. ,$$

para  $j = 3, \dots, m-2$ .

- $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial r}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \phi \neq 0$ .

Calculando o produto interno entre estes vetores obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\rangle &= r^2 \prod_{i=1}^{m-2} \sin^2 \varphi_i > 0; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_i} \right\rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, m-2; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\rangle &= 0; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_i} \right\rangle &= r^2 \prod_{j=i+1}^{m-2} \sin^2 \varphi_j > 0, \quad i = 1, \dots, m-3; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_{m-2}}, \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_{m-2}} \right\rangle &= r^2 > 0; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_j} \right\rangle &= 0, \quad i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, m-2; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\rangle &= 0, \quad i = 1, \dots, m-2; \\ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial r} \right\rangle &= 1. \end{aligned}$$







$M \subset \mathbb{S}^m(r)$  e está munida da métrica de  $\mathbb{S}^m(r)$ , então a curvatura de  $M$  é constante e igual a  $1/r^2$ . Dessa forma,  $M$  é uma variedade de Einstein com constante  $\Lambda = (m-1)/r^2$ , pelo teorema 3.3.1. Observe que, se fixarmos a dimensão  $m$  e variarmos o raio  $r > 0$  podemos obter qualquer valor real positivo para  $\Lambda$ . Agora, considere

$$M = \bigcup_{\varphi_{m-1} \in (0, r\pi)} \mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r)).$$

Ou seja,  $M$  é folheada pelas esferas, de dimensão  $m-1$ ,  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r))$ .

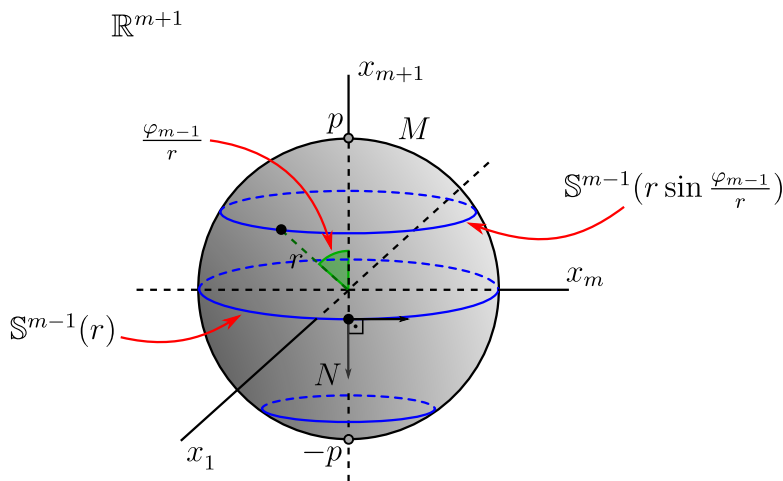


Figura 4.5: A variedade  $M$  folheada pelas esferas  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r))$ .

Tomemos a parametrização em  $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, r) = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}),$$

com  $r > 0$ ,  $\theta \in (0, 2r\pi)$  e  $\varphi_i \in (0, r\pi)$ , tal que

$$\begin{cases} x_1 = r \prod_{i=1}^{m-1} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ x_2 = r \prod_{i=1}^{m-1} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ x_j = r \prod_{i=j-1}^{m-1} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ x_{m+1} = r \cos(\varphi_{m-1}/r) \end{cases},$$

para  $j = 3, \dots, m$ . Pelo exemplo 4.4.2, temos que a métrica  $\gamma$  de  $M$  é

$$\begin{cases} \gamma_{ii} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{k=i}^{m-2} \sin^2(\varphi_k/r), & i = 1, \dots, m-2 \\ \gamma_{kk} = \sin^2(\varphi_k/r), & k = m-1 \\ \gamma_{mm} = 1 \\ \gamma_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}$$

Consideremos, agora, a esfera  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r))$ . Temos que, a aplicação  $\psi : D = (0, 2r\pi) \times (0, r\pi)^{m-2} \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r)) \subset M$  dada por

$$\psi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}) = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}),$$

onde

$$\begin{cases} x_1 = (r \sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ x_2 = (r \sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ x_j = (r \sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \quad , \\ x_m = (r \sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \\ x_{m+1} = r \cos(\varphi_{m-1}/r) \end{cases}$$

para  $j = 3, \dots, m-1$ , é uma parametrização em  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sin(\varphi_{m-1}/r))$  (pode-se verificar de forma similar ao que foi feito no exemplo 4.4.2). Como

$$\bullet \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \theta} \right):$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -(\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \quad , \\ \frac{\partial x_j}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

para  $j = 3, \dots, m+1$ ,

$$\bullet \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_1} \right):$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_1/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_1/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} = -(\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_1} = 0 \end{cases}$$

para  $j = 4, \dots, m+1$ ,

- $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_2} \right):$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_2} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=3}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \cos(\varphi_1/r) \quad , \\ \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_2} = -(\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_2} = 0 \end{array} \right.$$

para  $j = 5, \dots, m+1,$

- $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_k} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_k} \right):$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_k} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_k} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{k \neq i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ \frac{\partial x_{k+1}}{\partial \varphi_k} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=k+1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\varphi_{k-1}/r) \quad , \\ \frac{\partial x_{k+2}}{\partial \varphi_k} = -(\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=k}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_l}{\partial \varphi_k} = 0 \end{array} \right.$$

para  $3 \leq k < m-2, j = 3, \dots, k$  e  $l > k+2,$

- $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_{m-2}} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m-2}} \right):$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \prod_{i=j-1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\varphi_{m-3}/r) \quad , \\ \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_{m-2}} = -(\sin^2(\varphi_{m-1}/r)) \sin(\varphi_{m-2}/r) \\ \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m-2}} = 0 \end{array} \right.$$

para  $j = 3, \dots, m-2,$



Como

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}},$$

então

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{r} \cot \frac{\varphi_{m-1}}{r} \\ &= \frac{1}{r} \tan \left( \frac{\varphi_{m-1}}{r} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \tan \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \varphi_{m-1} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Com isso checamos a possibilidade para a função obtida em (4.38) no caso **iii**.

△

**Exemplo 4.4.4** ( $\Lambda < 0$ ). Seja

$$\mathbb{H}_r^m = \left\{ (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times [1, \infty); \sum_{i=1}^m x_i^2 - x_{m+1}^2 = -r^2 \right\}$$

o espaço hiperbólico,  $r > 0$ , com a métrica de Minkowski  $\gamma$ , isto é,

$$\gamma = \sum_{i=1}^m (dx_i)^2 - (dx_{m+1})^2. \quad (\text{modelo do hiperbolóide})$$

- a)** Considere a variedade riemanniana  $M = \mathbb{H}_r^m \setminus \{p\}$ , onde  $p = (0, \dots, r)$ , munida com a métrica de Minkowski. A curvatura de  $M$  é constante e igual a  $-1/r^2$ . Assim,  $M$  é uma variedade de Einstein com constante  $\Lambda = -(m-1)/r^2$ , pelo teorema 3.3.1. Note que,  $\Lambda$  pode assumir qualquer valor real negativo. Agora, tomemos a parametrização em  $M$

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2r\pi) \times (0, r\pi)^{m-2} \times (0, \infty) &\longrightarrow M \subset \mathbb{R}^{m+1} \\ (\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, \rho) &\longmapsto \phi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, \rho) = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} x_1 &= (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ x_2 &= (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ x_j &= (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \quad , \\ x_m &= (r \sinh(\rho/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \\ x_{m+1} &= r \cosh(\rho/r) \end{cases} \quad (4.43)$$

para  $j = 3, \dots, m-1$ . Temos que,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \theta} \right):$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -(\sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \theta} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 3, \dots, m+1$ ,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_1} \right):$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_1/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_1/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1} = -(\sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_1} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 4, \dots, m+1$ ,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_2} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_2} \right):$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{2 \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_2} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=3}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_2/r) \cos(\varphi_1/r) \\ \frac{\partial x_4}{\partial \varphi_2} = -(\sinh(\rho/r)) \prod_{i=2}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_2} = 0 \end{cases},$$

para  $j = 5, \dots, m+1$ ,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_k} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_k} \right):$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_k} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_k} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{k \neq i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_k} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{k \neq i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ \frac{\partial x_{k+1}}{\partial \varphi_k} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=k+1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_k/r) \cos(\varphi_{k-1}/r) \\ \frac{\partial x_{k+2}}{\partial \varphi_k} = -(\sinh(\rho/r)) \prod_{i=k}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \\ \frac{\partial x_l}{\partial \varphi_k} = 0 \end{cases},$$

para  $3 \leq k < m-2$ ,  $j = 3, \dots, k$  e  $l > k+2$ ,

- $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi_{m-2}} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m-2}} \right)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sinh(\rho/r)) \prod_{i=j-1}^{m-3} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \varphi_{m-2}} = (\sinh(\rho/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \cos(\varphi_{m-3}/r) \\ \frac{\partial x_m}{\partial \varphi_{m-2}} = -(\sinh(\rho/r)) \sin(\varphi_{m-2}/r) \\ \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m-2}} = 0 \end{array} \right. ,$$

para  $j = 3, \dots, m-2$ , e

- $\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \dots, \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \rho} \right)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} = (\cosh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} = (\cosh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ \frac{\partial x_j}{\partial \rho} = (\cosh(\rho/r)) \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \\ \frac{\partial x_m}{\partial \rho} = (\cosh(\rho/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \\ \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \rho} = \sinh(\rho/r) \end{array} \right. ,$$

para  $j = 3, \dots, m-1$ .

Dessa forma, a métrica  $\gamma$  de  $M$  é

$$\left( \begin{array}{cccc} \boxed{(\sinh^2 \frac{\rho}{r}) \prod_{i=1}^{m-2} \sin^2 \frac{\varphi_i}{r}} & & & 0 \\ & \boxed{(\sinh^2 \frac{\rho}{r}) \prod_{i=2}^{m-2} \sin^2 \frac{\varphi_i}{r}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\sinh^2 \frac{\rho}{r}} \\ & & & & \boxed{1} \end{array} \right)_{m \times m}$$



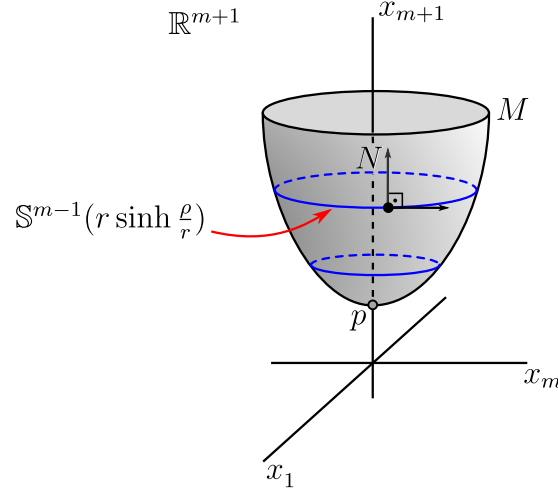


Figura 4.6: A variedade  $M$  folheada pelas esferas  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r))$ .

Da parametrização  $\phi$  em  $M$  (ver (4.43)) vemos que  $M$  é folheada por esferas euclidianas de dimensão  $m - 1$ , ou seja, de forma mais precisa

$$M = \bigcup_{\rho \in (0, \infty)} \mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r)). \quad (\text{veja figura 4.7})$$

Agora, considere a parametrização em  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r))$

$$\begin{aligned} \psi : (0, 2r\pi) \times (0, r\pi)^{m-2} &\longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r)) \\ (\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}) &\longmapsto \psi(\theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}) = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} x_1 = (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\theta/r) \\ x_2 = (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \sin(\theta/r) \\ x_j = (r \sinh(\rho/r)) \prod_{i=j-1}^{m-2} \sin(\varphi_i/r) \cos(\varphi_{j-2}/r) \quad , \\ x_m = (r \sinh(\rho/r)) \cos(\varphi_{m-2}/r) \\ x_{m+1} = r \cosh(\rho/r) \end{cases}$$

para  $j = 3, \dots, m - 1$ . Assim,

$$\bar{\gamma} = \gamma|_{\mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r))},$$



Donde vemos que as esferas  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r))$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas, sendo esta possibilidade ilustrada pelo item **iii.** do teorema 4.4.1. Destarte,

$$H = -\frac{1}{r} \coth \frac{\rho}{r}.$$

Note que,

$$|H| > \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} = \frac{1}{r}.$$

Além disso, podemos escrever a curvatura média da hipersuperfície  $\mathbb{S}^{m-1}(r \sinh(\rho/r))$  como:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{r} \coth \frac{\rho}{r} \\ &= -\sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \coth \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \rho \right). \end{aligned}$$

Assim, a possibilidade para a função obtida em (4.35), no caso **i.**, fica verificada.

b) Agora, considere  $M = \mathbb{H}_r^m$ . Temos que a aplicação  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$  dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \prod_{i=1}^{m-1} \cosh(\eta_i/r) \sinh(\rho/r) \\ x_2 = r \prod_{i=2}^{m-1} \cosh(\eta_i/r) \sinh(\eta_1/r) \\ x_j = r \prod_{i=j}^{m-1} \cosh(\eta_i/r) \sinh(\eta_{j-1}/r) \text{ ,} \\ x_m = r \sinh(\eta_{m-1}/r) \\ x_{m+1} = r \prod_{i=1}^{m-1} \cosh(\eta_i/r) \cosh(\rho/r) \end{array} \right.$$

para  $j = 3, \dots, m-1$ , é uma parametrização em  $M$ . De forma similar ao item anterior, vemos que

$$M = \bigcup_{\eta_{m-1} \in \mathbb{R}} \mathbb{H}_{r \cosh \frac{\eta_{m-1}}{r}}^{m-1},$$

onde as hipersuperfícies  $\mathbb{H}_{r \cosh \frac{\eta_{m-1}}{r}}^{m-1}$  são totalmente umbílicas em  $M$ . Além disso,

$$N = \frac{\partial}{\partial \eta_{m-1}} \text{ (geodésico)}$$

e

$$H(z) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \eta_{m-1} \right), \text{ (ver (4.34))}$$

onde

$$|H| < \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}}.$$

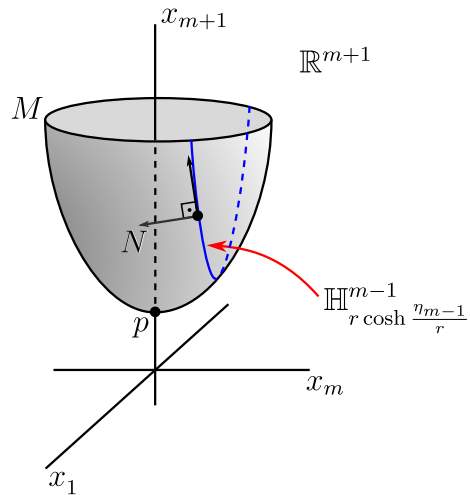


Figura 4.7: O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}_r^m$  folheado pelos espaços hiperbólicos  $\mathbb{H}_{r \cosh \frac{\eta_{m-1}}{r}}^{m-1}$ .

△

Quanto a **questão 2** apresentada no final da seção 4.3, apesar de não respondê-la aqui pela questão do tempo/cronograma deixamos um apêndice em que abordamos as ações por isometrias intrínsecas, que acreditamos ser útil na tentativa de responder a questão 2.

# Considerações Finais

Neste trabalho os dois primeiros capítulos foram apresentados com a ideia de termos um texto autocontido, a fim de que um aluno de pós-graduação ou de final de graduação em Matemática que deseje iniciar um trabalho com geometria riemanniana possa usá-lo como um guia. Já o capítulo referente a variedades de Einstein em baixas dimensões não é tão usual.

O capítulo 4 é o principal deste trabalho, nele apresentamos algumas contribuições aparentemente novas. Lá consideramos uma variedade de Einstein com constante  $\Lambda$ , que é folheada por hipersuperfícies totalmente umbílicas e com o campo normal geodésico. Inicialmente constatamos que essas hipersuperfícies também são Einstein, o que é conhecido desde dos anos 50 – ver referência [2]. Sua “constante” é dada por

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + (m - 1)H^2 - \frac{dH}{dz},$$

onde  $H$  é a curvatura média e  $z$  é o parâmetro que dá a distância entre as hipersuperfícies. Em seguida provamos que a curvatura média deve necessariamente satisfazer um, e somente um, dos seguintes casos:

1. Para  $\Lambda = 0$  então  $H = 0$  ou  $H = -\frac{1}{z+C}$ . Representamos o primeiro caso através dos hiperplanos no espaço euclidiano, como pode ser visto no exemplo 4.4.1. Já o segundo pode ser visto por uma família de hiperesferas concêntricas como no exemplo 4.4.2, onde tomamos por conveniência  $z = r$  e  $C = 0$ .
2. Para  $\Lambda > 0$  obtemos  $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} \tan\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{m-1}} z + C\right)$ , que é ilustrado pelo exemplo 4.4.3.
3. Para  $\Lambda < 0$  obtemos duas possibilidades:

- Se  $|H| < \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}}$ , então:

$$H(z) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \tanh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} z + C \right);$$

- Se  $|H| > \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}}$ , então:

$$H(z) = -\sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} \coth \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{1-m}} z + C \right).$$

Ambas possibilidades são ilustradas no exemplo 4.4.4.

Na tentativa de solucionarmos a questão 2, ou seja, se é possível obtermos uma folheação totalmente umbílica em variedade Einstein com curvatura média dada por  $H(z)$ , desenvolvemos conceitos de simetrias além das isometrias, a saber, as ações por isometrias intrínsecas. Porém, constatamos que abordar tais problemas exigiria um tempo maior do que o previsto no cronograma desta dissertação. Assim, preferimos deixar a questão de simetrias intrínsecas em um apêndice.

Sobre a literatura da área e o que foi desenvolvido nesta dissertação, podemos fazer os seguintes comentários:

- O resultado de que hipersuperfície totalmente umbílicas em espaços de Einstein também são Einstein, já era conhecido [2]. Porém, o tratamento de questões envolvendo a função  $H(z)$ , até o momento, parece ser original.
- A questão de simetrias intrínsecas apresentadas no apêndice pode vir a ser útil na tentativa de responder, mesmo que parcialmente, a questão 2. Ela já era conhecida na literatura da Relatividade Geral, porém aqui ganhou um tratamento mais formal.

# Bibliografia

- [1] ADATI, T. J. *On Riemannian Spaces Admitting a Family of Totally Umbilical Hypersurfaces I*, Proc. Japan Acad. 27 (1951), no. 1, 1–6. doi:10.3792/pja/1195571551. <<https://projecteuclid.org/euclid.pja/1195571551>>. Acesso em: 05 jan. 2018.
- [2] \_\_\_\_\_. *On Riemannian Spaces Admitting a Family of Totally Umbilical Hypersurfaces II*, Proc. Japan Acad. 27 (1951), no. 2, 49–54. doi:10.3792/pja/1195571513. <<https://projecteuclid.org/euclid.pja/1195571513>>. Acesso em: 05 jan. 2018.
- [3] BIEZUNER, R. J. *Geometria Riemanniana*. Notas de aula do Doutorado em Matemática. Belo Horizonte: UFMG, 2016. <<http://www.mat.ufmg.br/~rodney/>>. Acesso em: 03 mar. 2017.
- [4] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2005.
- [5] COLOMBO, J. *Notas de Álgebra Linear*. Notas de aula do Mestrado em Matemática. Rio de Janeiro: UFF, 2011.
- [6] DE AQUINO, C. P. *Sobre Rigidez de Hipersuperfícies Completas*. Fortaleza: UFC, Departamento de Matemática, 2011. 77f. Tese (Doutorado em Matemática). <[http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/4081/1/2011\\_tese\\_cpaquino.pdf](http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/4081/1/2011_tese_cpaquino.pdf)>. Acesso em: 11 nov. 2017.
- [7] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

- [8] GONDIN JÚNIOR, J. L. *Classificação de Algumas Geometrias sem Quociente Compacto*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2010. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática).
- [9] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2nd Edition. New Jersey: Prentice Hall, 1971.
- [10] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2nd Edition. Graduate Texts Mathematics 218. New York: Springer, 2012.
- [11] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas - PM 25, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [12] LÓPEZ, R. ; MONTIEL, S. *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*. Springer-Verlag, Calc. Var., v.8, p177-190, 1999.
- [13] MANFIO, F. *Variedades Diferenciáveis*. Notas de aula. São Carlos: USP/ICMC.
- [14] MARTIN, L. A. B. S. *Grupos de Lie*. 1. ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 2017.
- [15] MONTEIRO, L. C. S. *Estabilidade de Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante em Variedades Riemannianas de Curvatura Seccional Constante*. Niterói: UFF, Instituto de Matemática, 2006. 123f. Dissertação (Mestrado em Matemática).
- [16] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, INC, 1983.
- [17] ROCHA, J. L. *Teoremas de Rigidez no Espaço Hiperbólico*. Campina Grande: UFCG, UAMat, 2014. 61f. Dissertação (Mestrado em Matemática). <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PPGMat/DissertacaoPDF/Jamilly.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2017.
- [18] WARNER, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, 94. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [19] WOLF, J. A. *Spaces of Constant Curvature*. 6th ed. Providence: AMS, 2011.



# Apêndice A

## Considerações Envolvendo Isometrias

Neste apêndice admitiremos um conhecimento prévio básico do leitor sobre grupos e álgebras de Lie. Para mais detalhes sobre este tema podem ser consultadas as referências [10], [13], [14] e [18]. Aqui, abordaremos as ações por isometrias e por isometrias intrínsecas. Finalizaremos o apêndice com as variedades de Einstein folheadas por espaços homogêneos, onde apresentaremos três exemplos:  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ .

### A.1 Ação por Isometrias

Sejam  $(M, \gamma)$  uma variedade riemanniana e  $G$  um grupo de Lie agindo em  $M$ . Temos que a translação à esquerda

$$\begin{aligned} L_g : M &\longrightarrow M \\ p &\longmapsto L_g(p) = g \cdot p \end{aligned}$$

é um difeomorfismo para todo  $g \in G$  e, conseqüentemente,  $d(L_g)_p : T_p M \rightarrow P_{gp} M$  é um isomorfismo para todo  $p \in M$  e  $g \in G$ . Diremos que esta ação é uma *ação por isometrias* se

$$L_g^* \gamma = \gamma, \forall g \in G,$$

isto é,

$$\gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v \right) = \gamma_p(u, v),$$

para todo  $p \in M$ ,  $g \in G$  e  $u, v \in T_p M$ .

Vejam os exemplos a seguir envolvendo ação por isometrias:

**Exemplo A.1.1.** Seja  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  uma variedade riemanniana com uma métrica  $\gamma$ . Considere o grupo de Lie  $SO(3)$  agindo em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  através da ação usual, isto é,

$$\begin{aligned} SO(3) \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ (A, p) &\longmapsto A \cdot p = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $A = (a_j^i)_{3 \times 3}$  e  $p = (x, y, z)$ . Suponha que essa ação de  $SO(3)$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  seja por isometrias. Temos que,  $\{X_1, X_2, X_3\}$  é uma base de  $\mathfrak{so}(3)$ , onde

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As exponenciais  $\exp(tX_1)$ ,  $\exp(tX_2)$  e  $\exp(tX_3)$  são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os campos fundamentais referentes a estes campos vetoriais invariantes à esquerda são

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(p) &= \frac{d}{dt} \exp(tX_1) \cdot p \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (x, y \cos t - z \sin t, y \sin t + z \cos t) \Big|_{t=0} \\ &= -z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(p) &= \frac{d}{dt} \exp(tX_2) \cdot p \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (x \cos t - z \sin t, y, x \sin t + z \cos t) \Big|_{t=0} \\ &= -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_3(p) &= \frac{d}{dt} \exp(tX_3) \cdot p \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z) \Big|_{t=0} \\
&= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

para  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Como o fluxo do campo fundamental  $\tilde{X}_i$  é dado por

$$\mathcal{F}_{\tilde{X}_i}^t = L_{\exp(tX_i)},$$

então, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned}
&L_{\exp(tX_i)}^* \gamma = \gamma \\
\Rightarrow &\left(\mathcal{F}_{\tilde{X}_i}^t\right)^* \gamma = \gamma \\
\Rightarrow &\frac{d}{dt} \left( \left(\mathcal{F}_{\tilde{X}_i}^t\right)^* \gamma \right) (p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma(p) \Big|_{t=0}, \forall p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\
\Rightarrow &(\mathcal{L}_{\tilde{X}_i} \gamma) (p) = 0, \forall p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\
\Rightarrow &\mathcal{L}_{\tilde{X}_i} \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Cada campo fundamental é um *campo de Killing* (isto é,  $\mathcal{L}_X \gamma = 0$ ). Analogamente, o fluxo de um campo de Killing gera um grupo a 1-parâmetro de isometrias locais.

A partir daqui abordaremos este exemplo através do sistema de coordenadas esféricas.

Dessa forma,

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $p \equiv (r, \phi, \theta)$  com  $r > 0$ ,  $0 < \phi < \pi$  e  $0 < \theta < 2\pi$ . A matriz jacobiana referente a (A.1) é

$$J = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz inversa da matriz jacobiana  $J$  é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta & \frac{1}{r} \cos \phi \sin \theta & -\frac{1}{r} \sin \phi \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} & \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \phi} & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \end{cases}.$$

Daí vem que, os campos fundamentais  $\tilde{X}_1$ ,  $\tilde{X}_2$  e  $\tilde{X}_3$  no sistema de coordenadas esféricas são

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(p) &= -r \cos \phi \left( \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad r \sin \phi \sin \theta \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= - \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2(p) &= -r \cos \phi \left( \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad r \sin \phi \cos \theta \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= -\cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{X}_3(p) &= -r \sin \phi \sin \theta \left( \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad r \sin \phi \cos \theta \left( \sin \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Temos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mathcal{L}_{\tilde{X}_1} \gamma_{ij} = -(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{ij} - \gamma_{2j} \partial_i \sin \theta - \gamma_{2i} \partial_j \sin \theta - \gamma_{3j} \partial_i \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} - \\ \quad \gamma_{3i} \partial_j \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} \\ 0 = \mathcal{L}_{\tilde{X}_2} \gamma_{ij} = -(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{ij} - \gamma_{2j} \partial_i \cos \theta - \gamma_{2i} \partial_j \cos \theta - \gamma_{3j} \partial_i \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} - \\ \quad \gamma_{3i} \partial_j \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} \\ 0 = \mathcal{L}_{\tilde{X}_3} \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \theta} \end{array} \right. .$$

Da última igualdade acima temos que a métrica não depende da variável  $\theta$ , isto é,  $\gamma = \gamma(r, \phi)$ . Além disso temos doze equações independentes, são elas:

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{11} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{11} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{12} + \gamma_{31} \cos \theta \csc^2 \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{12} - \gamma_{31} \sin \theta \csc^2 \phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{13} - \gamma_{21} \cos \theta + \gamma_{31} \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{13} + \gamma_{21} \sin \theta + \gamma_{31} \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{22} + 2\gamma_{32} \cos \theta \csc^2 \phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{22} - 2\gamma_{32} \sin \theta \csc^2 \phi = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{23} - \gamma_{22} \cos \theta + \gamma_{33} \cos \theta \csc^2 \phi + \gamma_{32} \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{23} + \gamma_{22} \sin \theta - \gamma_{33} \sin \theta \csc^2 \phi + \gamma_{32} \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$-(\sin \theta) \partial_2 \gamma_{33} - 2\gamma_{23} \cos \theta + 2\gamma_{33} \frac{\cos \phi \sin \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$-(\cos \theta) \partial_2 \gamma_{33} - 2\gamma_{23} \sin \theta + 2\gamma_{33} \frac{\cos \phi \cos \theta}{\sin \phi} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Das equações (A.2) e (A.3) temos que

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\partial_2 \gamma_{11})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_2 \gamma_{11} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_{11} = a(r) > 0.$$

Multiplicando as equações (A.4) e (A.5), respectivamente, por  $\cos \theta$  e  $-\sin \theta$  obtemos

$$\begin{cases} -(\cos \theta \sin \theta) \partial_2 \gamma_{12} + \gamma_{31} \cos^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \\ (\cos \theta \sin \theta) \partial_2 \gamma_{12} - \gamma_{31} \sin^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \end{cases}.$$

Agora, somando-as temos que

$$\begin{aligned} & -(\cos \theta \sin \theta) \partial_2 \gamma_{12} + \gamma_{31} \cos^2 \theta \csc^2 \phi + (\cos \theta \sin \theta) \partial_2 \gamma_{12} - \gamma_{31} \sin^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_{31} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \csc^2 \phi = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_{13} = \gamma_{31} = 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{31}$  nas equações (A.6) e (A.7) vem que

$$\begin{cases} -\gamma_{21} \cos \theta = 0 \\ \gamma_{21} \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{21} \cos^2 \theta = 0 \\ \gamma_{21} \sin^2 \theta = 0 \end{cases}.$$

Assim, somando as duas equações obtemos  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ . Se multiplicarmos as equações (A.8) e (A.9), respectivamente, por  $\cos \theta$  e  $-\sin \theta$  obtemos

$$\begin{cases} -(\sin \theta \cos \theta) \partial_2 \gamma_{22} + 2\gamma_{32} \cos^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \\ (\sin \theta \cos \theta) \partial_2 \gamma_{22} + 2\gamma_{32} \sin^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \end{cases}.$$

Somando ambas equações vemos que  $\gamma_{23} = \gamma_{32} = 0$ . Substituindo o valor  $\gamma_{32}$  nas equações (A.8) e (A.9) e em seguida somando-as obtemos

$$\partial_2 \gamma_{22} = 0 \Rightarrow \gamma_{22} = b(r) > 0.$$

E por fim, substituindo os valores de  $\gamma_{22}$ ,  $\gamma_{23}$  e  $\gamma_{32}$  nas equações (A.10) e (A.11) e multiplicando-as por  $-\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} b(r) \cos^2 \theta - \gamma_{33} \cos^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \\ b(r) \sin^2 \theta - \gamma_{33} \sin^2 \theta \csc^2 \phi = 0 \end{cases}.$$

Somando estas equações temos

$$\begin{aligned} & b(r) - \gamma_{33} \csc^2 \phi = 0 \\ \Rightarrow & \gamma_{33} = b(r) \sin^2 \phi > 0. \end{aligned}$$

Note que, as equações (A.12) e (A.13) se verificam para os valores encontrados de  $\gamma_{23}$  e  $\gamma_{33}$ . Logo, se ação é por isometrias temos que

$$\gamma = \begin{pmatrix} a(r) & 0 & 0 \\ 0 & b(r) & 0 \\ 0 & 0 & b(r) \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Para concluir este exemplo analisaremos a relação entre as funções  $a$  e  $b$  para que  $\text{Ric} = 0$ .

Como

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} [a(r)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [b(r)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [b(r)]^{-1} \csc^2 \phi \end{pmatrix},$$

então os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{31}^2 = \\ \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} [a(r)]^{-1} a'(r), \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} [b(r)]^{-1} b'(r), \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} [a(r)]^{-1} b'(r), \\ \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \cot \phi, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} [a(r)]^{-1} b'(r) \sin^2 \phi \text{ e} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \phi \cos \phi. \end{aligned}$$

Os componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{12} = R_{21} = R_{13} = R_{31} = R_{23} = R_{32} &= 0, \\ R_{11} &= \frac{1}{2} a^{-1} b^{-1} a' b' + \frac{1}{2} b^{-2} (b')^2 - b^{-1} b'', \\ R_{22} &= \frac{1}{4} a^{-2} a' b' - \frac{1}{2} a^{-1} b'' + 1 \text{ e} \\ R_{33} &= \left( \frac{1}{4} a^{-2} a' b' - \frac{1}{2} a^{-1} b'' + 1 \right) \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Suponha que  $\text{Ric} = 0$ , então obtemos o sistema de equações

$$\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}a'b' + \frac{1}{2}b^{-2}(b')^2 - b^{-1}b'' = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{1}{4}a^{-2}a'b' - \frac{1}{2}a^{-1}b'' + 1 = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\left(\frac{1}{4}a^{-2}a'b' - \frac{1}{2}a^{-1}b'' + 1\right) \sin^2 \phi = 0 \quad (\text{A.16})$$

Note que, as equações (A.15) e (A.16) são equivalentes. Da equação (A.15) temos

$$b'' = \frac{1}{2}a^{-1}a'b' + 2a.$$

Agora, substituindo o valor de  $b''$  na equação (A.14)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}a'b' + \frac{1}{2}b^{-2}(b')^2 - b^{-1}\left(\frac{1}{2}a^{-1}a'b' + 2a\right) = 0 \\ \Rightarrow & (b')^2 = 4ab \\ \Rightarrow & b' = 2\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \frac{b'(r)}{\sqrt{b(r)}} = 2\sqrt{a(r)} \\ \Rightarrow & \left(2\sqrt{b(r)}\right)' = 2\sqrt{a(r)} \\ \Rightarrow & 2\sqrt{b(r)} = \int_1^r 2\sqrt{a(t)} dt + b_0 \\ \Rightarrow & b(r) = \frac{1}{4} \left( \int_1^r 2\sqrt{a(t)} dt + b_0 \right)^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\text{Ric} = 0$  quando

$$b(r) = \frac{1}{4} \left( \int_1^r 2\sqrt{a(t)} dt + b_0 \right)^2.$$

△

## A.2 Ação por Isometrias intrínsecas

Sejam  $M$  uma variedade riemanniana conexa e orientável folheada por suas hipersuperfícies  $\Sigma_p$  e  $G$  um grupo de Lie agindo sobre  $M$  tal que  $\Sigma_p = G \cdot p$ . Como a ação de



$G$  em  $M$  restrita à subvariedade  $\Sigma_p$  ainda é uma ação (transitiva), então dizemos que a ação de  $G$  em  $M$ , definida acima, é uma *ação por isometrias intrínsecas* se

$$L_g^* \bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_p,$$

para todo  $p \in M$  e  $g \in G$  com  $\bar{\gamma}$  definida como em 4.6, ou seja,

$$\bar{\gamma}_p \left( d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v \right) = \bar{\gamma}_p(u, v),$$

para todo  $p \in M$ ,  $g \in G$  e  $u, v \in T_p \Sigma_p$ .

**Definição A.2.1.** A distribuição  $\Delta_N : M \rightarrow T_p M$  dada por

$$\Delta_N(p) = \{v \in T_p M; \gamma_p(v, u) = 0, \forall u \in T_p \Sigma_p\},$$

é chamada de *distribuição normal*. Além disso, diremos que  $\Delta_N$  é

*i.*  $G$ -invariante, se

$$d(L_g)_p \cdot \Delta_N(p) = \Delta_N(g \cdot p),$$

para todo  $p \in M$  e  $g \in G$ .

*ii.* *Estritamente  $G$ -invariante*, se para cada  $p \in M$  existe um vetor unitário  $N(p) \in \Delta_N(p)$  tal que

$$d(L_g)_p \cdot N(p) \in \Delta_N(g \cdot p)$$

é também um vetor unitário, para todo  $g \in G$ .

Note que,  $\Delta_N(p) = (T_p \Sigma_p)^\perp$ , para todo  $p \in M$ , e, conseqüentemente,

$$\dim \Delta_N(p) = \dim (T_p \Sigma_p)^\perp = 1.$$

Assim,  $\Delta_N$  é uma distribuição regular de posto 1.

**Teorema A.2.1.** A ação de  $G$  em  $M$  é por isometrias se, e somente se, a ação de  $G$  em  $M$  é por isometrias intrínsecas e a distribuição normal  $\Delta_N$  é estritamente  $G$ -invariante.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Lembre-se que  $\Sigma_p = \Sigma_{g \cdot p}$ , onde  $g \in G$  e  $p \in M$ . Se  $q \in \Sigma_p$ , então existe  $g_1 \in G$  tal que  $q = g_1 p$ . Assim,

$$gq = g(g_1 p) = (gg_1)p \in \Sigma_p.$$

Dessa forma,  $L_g|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$  está bem definida, é bijetiva e é um difeomorfismo. Como

$$L_g^* \gamma = \gamma, \forall g \in G$$

e

$$dL_g(p) \cdot u \in T_{g \cdot p} \Sigma_p, \forall u \in T_p \Sigma_p,$$

então

$$\gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v \right) = \gamma_p(u, v), \text{ para todo } p \in M, g \in G \text{ e } u, v \in T_p \Sigma_p,$$

ou seja,

$$L_g^* \bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_p,$$

para todo  $p \in M$ . Logo, a ação de  $G$  em  $M$  é por isometrias intrínsecas. Sejam  $g \in G$  e  $p \in M$ . Agora, tome um vetor unitário  $N(p) \in \Delta_N(p)$ . Considere  $v \in T_{g \cdot p} \Sigma_p$ . Como  $d(L_g)_p|_{T_p \Sigma_p} : T_p \Sigma_p \rightarrow T_{g \cdot p} \Sigma_p$  é um isomorfismo, então existe  $u \in T_p \Sigma_p$  tal que  $v = d(L_g)_p \cdot u$ . Com isso

$$\begin{aligned} \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot N(p), v \right) &= \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot u \right) \\ &= \gamma_p(N(p), u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Temos ainda que,

$$\begin{aligned} \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot N(p) \right) &= \gamma_p(N(p), N(p)) \\ &:= 1. \end{aligned}$$

Destarte, a distribuição normal  $\Delta_N$  é estritamente  $G$ -invariante.

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $N(p)$  um vetor unitário em  $\Delta_N(p)$  tal como o item **ii.** da definição A.2.1 e  $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$  uma base de  $T_p \Sigma_p$  com  $p \in M$ . Assim,  $\{u_1, \dots, u_{m-1}, N(p)\}$  é uma

base de  $T_p M = T_p \Sigma_p \oplus \Delta(p)$ . Considere  $u, v \in T_p M$ , então existem  $\alpha^i, \beta^j \in \mathbb{R}$  com  $i, j = 1, \dots, m-1, m$  tais que

$$u = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i u_i + \alpha^m N(p)$$

e

$$v = \sum_{j=1}^{m-1} \beta^j u_j + \beta^m N(p).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v \right) \\ = & \sum_{i,j=1}^{m-1} \alpha^i \beta^j \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot u_i, d(L_g)_p \cdot u_j \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i \beta^m \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot u_i, d(L_g)_p \cdot N(p) \right) + \\ & \sum_{j=1}^{m-1} \alpha^m \beta^j \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot u_j \right) + \alpha^m \beta^m \gamma_{g \cdot p} \left( d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot N(p) \right) \\ = & \sum_{i,j=1}^{m-1} \alpha^i \beta^j \gamma_p(u_i, u_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i \beta^m \cdot 0 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha^m \beta^j \cdot 0 + \alpha^m \beta^m \cdot 1 \\ = & \sum_{i,j=1}^{m-1} \alpha^i \beta^j \gamma_p(u_i, u_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i \beta^m \gamma_p(u_i, N(p)) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha^m \beta^j \gamma_p(N(p), u_j) + \\ & \alpha^m \beta^m \gamma_p(N(p), N(p)) \\ = & \gamma_p(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, a ação é por isometrias. □

**Exemplo A.2.1.** Sejam  $(\mathbb{R}^4, \gamma)$  uma variedade riemanniana e  $(\mathbb{R}^3, +)$  o grupo de Lie abeliano que age em  $\mathbb{R}^4$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (g, p) & \longmapsto g \cdot p = (g^1, g^2, g^3) \cdot (x^1, x^2, x^3, z) = (x^1 + g^1, x^2 + g^2, x^3 + g^3, z) \end{aligned}$$

onde  $g = (g^1, g^2, g^3)$  e  $p = (x^1, x^2, x^3, z)$ . Temos que,

$$\Sigma_{p_0} = \{ (x_0^1 + g^1, x_0^2 + g^2, x_0^3 + g^3, z_0) \in \mathbb{R}^4; (g^1, g^2, g^3) \in \mathbb{R}^3 \},$$

em que  $p_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3, z_0) \in \mathbb{R}^4$ , ou simplesmente

$$\Sigma_{p_0} = \{(x^1, x^2, x^3, z) \in \mathbb{R}^4; z = z_0\},$$

é uma subvariedade mergulhada de  $\mathbb{R}^4$  e orientável de dimensão 3. Para ilustrarmos o teorema A.2.1, assumiremos que nas coordenadas canônicas de  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\gamma = \exp(2\phi)(dz)^2 + \gamma_{11}(dx^1)^2 + \gamma_{22}(dx^2)^2 + \gamma_{33}(dx^3)^2.$$

Agora examinaremos, através do teorema acima, os componentes da métrica a fim de que tenhamos uma ação por isometrias. Usemos primeiro o fato da ação ser por isometrias intrínsecas. Com isso

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_p(u, v) &= \bar{\gamma}_{g \cdot p}(d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v) \\ \Leftrightarrow \gamma_p(u, v) &= \gamma_{g \cdot p}(d(L_g)_p \cdot u, d(L_g)_p \cdot v), \end{aligned}$$

para todo  $p = (x^1, x^2, x^3, z) \in \mathbb{R}^4$  e  $u, v \in T_p \Sigma_p$ . Note que,  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\}_{i=1,2,3}$  é uma base de  $T_p \Sigma_p$ . A condição acima toma a forma

$$\gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3, z) = \gamma_{ij}(x^1 + g^1, x^2 + g^2, x^3 + g^3, z),$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^4$  e  $g^i \in \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Dessa forma,

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(z),$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Perceba que a recíproca também vale. Agora, usaremos a condição da distribuição normal  $\Delta_N$  ser estritamente G-invariante. Como  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}|_p, \frac{\partial}{\partial x^3}|_p, \frac{\partial}{\partial z}|_p\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$  e  $\gamma_p(\frac{\partial}{\partial z}|_p, \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = 0$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ , então  $\frac{\partial}{\partial z}|_p \in \Delta_N(p)$ . Note que,  $\dim \Delta_N(p) = 1, \forall p \in \mathbb{R}^4$ . Daí vem que, um vetor unitário satisfazendo a condição **ii.** da definição A.2.1 é da forma, para cada  $p \in \mathbb{R}^4$ ,

$$N(p) = f(p) \frac{\partial}{\partial z}|_p.$$

Temos que,

$$\gamma_p(N(p), u) = 0, \forall u \in T_p \Sigma_p.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \gamma_p(N(p), N(p)) = 1 \\
\Rightarrow & \gamma_p\left(f(p) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p, f(p) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p\right) = 1 \\
\Rightarrow & [f(p)]^2 \gamma_p\left(\frac{\partial}{\partial z} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p\right) = 1 \\
\Rightarrow & [f(p)]^2 \gamma_{44}(p) = 1 \\
\Rightarrow & [f(p)]^2 \exp(2\phi(p)) = 1 \\
\Rightarrow & f(p) = \exp(-\phi(p)).
\end{aligned}$$

Assim, para cada  $p \in \mathbb{R}^4$ ,

$$N(p) = \exp(-\phi(p)) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p.$$

Como  $d(L_g)_p$  é um isomorfismo e  $[d(L_g)_p] = I_4$ , onde  $I_4$  é a matriz identidade nas coordenadas canônicas de  $\mathbb{R}^4$ , então, para  $v \in T_{g \cdot p} \Sigma_p$ ,

$$\begin{aligned}
\gamma_{g \cdot p}\left(d(L_g)_p \cdot N(p), v\right) &= \gamma_{g \cdot p}\left(d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot u\right) \\
&= \gamma_{g \cdot p}\left(\exp(-\phi(p)) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}, \sum_{i=1}^3 u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{g \cdot p}\right) \\
&= \sum_{i=1}^3 u^i \exp(-\phi(p)) \gamma_{g \cdot p}\left(\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{g \cdot p}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^4$  e  $g \in \mathbb{R}^3$ , onde  $v = d(L_g)_p \cdot u$ . Isto é,  $d(L_g)_p \cdot N(p) \in \Delta_N(g \cdot p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^4$  e  $g \in \mathbb{R}^3$ . Porém,

$$\begin{aligned}
& \gamma_{g \cdot p}\left(d(L_g)_p \cdot N(p), d(L_g)_p \cdot N(p)\right) = 1 \\
\Rightarrow & \gamma_{g \cdot p}\left(\exp(-\phi(p)) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}, \exp(-\phi(p)) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}\right) = 1 \\
\Rightarrow & \exp(-2\phi(p)) \gamma_{g \cdot p}\left(\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{g \cdot p}\right) = 1 \\
\Rightarrow & \exp(-2\phi(p)) \exp(2\phi(g \cdot p)) = 1 \\
\Rightarrow & -\phi(p) + \phi(g \cdot p) = 0 \\
\Rightarrow & \phi(p) = \phi(g \cdot p),
\end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^4$  e  $g \in \mathbb{R}^3$ . Dessa forma,

$$\phi = \phi(z).$$

Vale a recíproca.

Considerando que esta ação é por isometrias vamos estudar a métrica supondo que  $\text{Ric} = 0$ . Como a métrica é

$$\gamma = \exp(2\phi(z)) (dz)^2 + \sum_{i=1}^3 \gamma_{ii}(z) (dx^i)^2,$$

então fazendo a mudança de variável

$$w = \int \exp(\phi(z)) dz$$

ficamos com a métrica da seguinte forma

$$\gamma = (dw)^2 + \sum_{i=1}^3 \gamma_{ii}(w) (dx^i)^2.$$

Temos que,

$$\gamma^{-1}(w) = \begin{pmatrix} [\gamma_{11}(w)]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\gamma_{22}(w)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\gamma_{33}(w)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= 0 && , \text{ para } i, j, k = 1, 2, 3, \\ \Gamma_{ij}^4 &= 0 && , \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \text{ com } i \neq j, \\ \Gamma_{ii}^4 &= -\frac{1}{2} \gamma'_{ii} && , \text{ para } i = 1, 2, 3, \\ \Gamma_{4j}^k &= \Gamma_{j4}^k = 0 && , \text{ para } j, k = 1, 2, 3 \text{ com } j \neq k, \\ \Gamma_{4j}^j &= \Gamma_{j4}^j = \frac{1}{2} \gamma_{jj}^{-1} \gamma'_{jj} && , \text{ para } j = 1, 2, 3, \\ \Gamma_{4j}^4 &= \Gamma_{j4}^4 = 0 && , \text{ para } j = 1, 2, 3, \\ \Gamma_{44}^k &= 0 && , \text{ para } k = 1, 2, 3 \text{ e} \\ \Gamma_{44}^4 &= 0. \end{aligned}$$

Os componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned}
R_{12} &= R_{13} = R_{14} = R_{21} = R_{23} = R_{24} = R_{31} = R_{32} = R_{34} = R_{41} = R_{42} = R_{43} = 0, \\
R_{11} &= \frac{1}{4} [\gamma'_{11} (-\gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22} - \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33} + \gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11}) - 2\gamma''_{11}] , \\
R_{22} &= \frac{1}{4} [\gamma'_{22} (-\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11} - \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33} + \gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22}) - 2\gamma''_{22}] , \\
R_{33} &= \frac{1}{4} [\gamma'_{33} (-\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11} - \gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22} + \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33}) - 2\gamma''_{33}] \text{ e} \\
R_{44} &= \frac{1}{4} [(\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11})^2 + (\gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22})^2 + (\gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33})^2 - 2\gamma_{11}^{-1} \gamma''_{11} - 2\gamma_{22}^{-1} \gamma''_{22} - 2\gamma_{33}^{-1} \gamma''_{33}] .
\end{aligned}$$

Sendo Ric = 0 obtemos quatro equações

$$\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11} (-\gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22} - \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33} + \gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11}) - 2\gamma_{11}^{-1} \gamma''_{11} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22} (-\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11} - \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33} + \gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22}) - 2\gamma_{22}^{-1} \gamma''_{22} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33} (-\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11} - \gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22} + \gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33}) - 2\gamma_{33}^{-1} \gamma''_{33} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$(\gamma_{11}^{-1} \gamma'_{11})^2 + (\gamma_{22}^{-1} \gamma'_{22})^2 + (\gamma_{33}^{-1} \gamma'_{33})^2 - 2\gamma_{11}^{-1} \gamma''_{11} - 2\gamma_{22}^{-1} \gamma''_{22} - 2\gamma_{33}^{-1} \gamma''_{33} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Sejam

$$l_i = \sqrt{\gamma_{ii}} > 0,$$

$$a = \sqrt[3]{l_1 l_2 l_3} = \sqrt[6]{\gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33}} > 0,$$

$$\sigma_i = \frac{l'_i}{l_i} - \frac{a'}{a} \text{ e}$$

$$\gamma_{ii} = a^2 \exp(2 \int \sigma_i dw)$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Temos que, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned}
l'_i &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{ii}}} \gamma'_{ii} \\
\Rightarrow \frac{l'_i}{l_i} &= \frac{\gamma'_{ii}}{2\gamma_{ii}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a' &= \frac{1}{6\sqrt[6]{(\gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33})^5}} (\gamma'_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} + \gamma_{11} \gamma'_{22} \gamma_{33} + \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma'_{33}) \\
\Rightarrow \frac{a'}{a} &= \frac{1}{6} \frac{\gamma'_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} + \gamma_{11} \gamma'_{22} \gamma_{33} + \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma'_{33}}{\gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \frac{l'_1}{l_1} - \frac{a'}{a} + \frac{l'_2}{l_2} - \frac{a'}{a} + \frac{l'_3}{l_3} - \frac{a'}{a} \\
&= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{l'_i}{l_i} \right) - \frac{3a'}{a} \\
&= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\gamma'_{ii}}{2\gamma_{ii}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\gamma'_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{11}\gamma'_{22}\gamma_{33} + \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma'_{33}}{\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Denotemos por

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2}$$

e

$$H = \frac{a'}{a}.$$

Além disso, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma'_{ii}}{\gamma_{ii}} &= \frac{2aa' \exp(2 \int \sigma_i dw) + 2a^2 \sigma_i \exp(2 \int \sigma_i dw)}{a^2 \exp(2 \int \sigma_i dw)} \\
&= 2 \left( \frac{a'}{a} + \sigma_i \right) \\
&= 2(H + \sigma_i)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma''_{ii}}{\gamma_{ii}} &= 2 \left[ \frac{(a')^2 + aa'' + 2aa'\sigma_i + 2aa'\sigma_i + a^2\sigma'_i + 2a^2\sigma_i^2}{a^2 \exp(2 \int \sigma_i dw)} \right] \exp(2 \int \sigma_i dw) \\
&= 2 \left( H^2 + \frac{a''}{a} + 4H\sigma_i + \sigma'_i + 2\sigma_i^2 \right).
\end{aligned}$$

Assim, fazendo as devidas substituições dos valores acima na equação (A.17) obtemos

$$\begin{aligned}
&2(H + \sigma_1) [-2(H + \sigma_2) - 2(H + \sigma_3) + 2(H + \sigma_1)] - 4 \left( H^2 + \frac{a''}{a} + 4H\sigma_1 + \sigma'_1 + 2\sigma_1^2 \right) = 0 \\
\Rightarrow &(H + \sigma_1)(-H + 2\sigma_1) - H^2 - \frac{a''}{a} - 4H\sigma_1 - \sigma'_1 - 2\sigma_1^2 = 0 \\
\Rightarrow &-2H^2 - 3H\sigma_1 - \frac{a''}{a} - \sigma'_1 = 0.
\end{aligned}$$



A partir das equações (A.18) e (A.19) obtém-se de modo análogo as equações:

$$-2H^2 - 3H\sigma_2 - \frac{a''}{a} - \sigma_2' = 0$$

e

$$-2H^2 - 3H\sigma_3 - \frac{a''}{a} - \sigma_3' = 0.$$

Somando as três últimas equações temos

$$\begin{aligned} & -6H^2 - 3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)H - \frac{3a''}{a} - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)' = 0 \\ \Rightarrow & 2H^2 + \frac{a''}{a} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Da equação (A.21) segue que

$$\begin{aligned} & -2H^2 - 3H\sigma_i - \frac{a''}{a} - \sigma_i' = 0 \\ \Rightarrow & \sigma_i' = -3H\sigma_i \\ \Rightarrow & \frac{\sigma_i'}{\sigma_i} = -\frac{3a'}{a} \\ \Rightarrow & \ln|\sigma_i| - \ln\sigma_{0i} = -3\ln a + 3\ln a_{0i} \\ \Rightarrow & \ln\left(\frac{|\sigma_i|}{\sigma_{0i}}\right) = \ln\left(\frac{a_{0i}}{a}\right)^3 \\ \Rightarrow & |\sigma_i| = \sigma_{0i}\left(\frac{a_{0i}}{a}\right)^3, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Da equação (A.20) vem que

$$\begin{aligned} & 4(H + \sigma_1)^2 + 4(H + \sigma_2)^2 + 4(H + \sigma_3)^2 - 4\left(H^2 + \frac{a''}{a} + 4H\sigma_1 + \sigma_1' + 2\sigma_1^2 + \right. \\ & \left. H^2 + \frac{a''}{a} + 4H\sigma_2 + \sigma_2' + 2\sigma_2^2 + H^2 + \frac{a''}{a} + 4H\sigma_3 + \sigma_3' + 2\sigma_3^2\right) = 0 \\ \Rightarrow & 3H^2 + \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 - 3H^2 - \frac{3a''}{a} - 2\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 = 0 \\ \Rightarrow & \frac{a''}{a} = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Substituindo o valor de (A.23) na equação (A.21) obtemos

$$2H^2 - \frac{1}{3}\sigma^2 = 0 \Rightarrow H^2 = \frac{1}{6}\sigma^2. \quad (\text{A.24})$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\sigma &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \frac{\sigma_{01}^2 a_{01}^6 + \sigma_{02}^2 a_{02}^6 + \sigma_{03}^2 a_{03}^6}{a^6} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(\sigma_{01}^2 a_{01}^6 + \sigma_{02}^2 a_{02}^6 + \sigma_{03}^2 a_{03}^6)^{\frac{1}{2}}}{a^3} \\
&= \frac{\lambda}{a^3}, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

onde  $\lambda = (\sigma_{01}^2 a_{01}^6 + \sigma_{02}^2 a_{02}^6 + \sigma_{03}^2 a_{03}^6)^{\frac{1}{2}}$ . Agora, substituindo o valor de (A.25) na equação (A.24)

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{1}{6} \sigma^2 \\
\Rightarrow H &= \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma \\
\Rightarrow H &= \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{a^3} \\
\Rightarrow \frac{3a'}{a} &= \frac{\lambda_0}{a^3} \\
\Rightarrow 3a^2 a' &= \lambda_0 \\
\Rightarrow (a^3)' &= \lambda_0 \\
\Rightarrow a^3 &= \lambda_0 w + \lambda_1 \\
\Rightarrow a(w) &= \sqrt[3]{\lambda_0 w + \lambda_1}, \tag{A.26}
\end{aligned}$$

em que  $\lambda_0 = \pm 3\lambda/\sqrt{6}$ . De (A.22) e (A.26) vem que,

$$|\sigma_i(w)| = \frac{\sigma_{0i} a_{0i}^3}{\lambda_0 w + \lambda_1},$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Portanto,

$$\gamma_{ii}(w) = \begin{cases} \sqrt[3]{(\lambda_0 w + \lambda_1)^2} \exp\left(2 \int \frac{\sigma_{0i} a_{0i}^3}{\lambda_0 w + \lambda_1} dw\right) \\ \text{ou} \\ \sqrt[3]{(\lambda_0 w + \lambda_1)^2} \exp\left(-2 \int \frac{\sigma_{0i} a_{0i}^3}{\lambda_0 w + \lambda_1} dw\right) \end{cases},$$

para  $i = 1, 2, 3$ .

△

Considere  $M$  uma variedade de Einstein e o grupo de Lie  $G = \text{Isom}(M)$  com sua ação natural sobre  $M$  (para verificar que  $G$  é um grupo de Lie e esta ação é diferenciável veja [16]). Se  $p \in \Sigma_p$  (órbita de  $G$  através de  $p \in M$ ) e  $H_p$  é o subgrupo de isotropia em  $p$ , isto é,

$$H_p = \{g \in G; g \cdot p = p\},$$

então  $\Sigma_p$  e  $G/H_p$  são difeomorfos (veja [14]). Assim dizemos que  $M$  é folheada por espaços homogêneos.

A seguir apresentamos exemplos de variedades de Einstein folheada por espaços homogêneos.

**Exemplo A.2.2.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana é uma variedade de Einstein em que  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$  (composições de transformações ortogonais e translações) onde a ação é definida da forma

$$\begin{aligned} (O(n) \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((A, q), p) &\longmapsto (A, q) \cdot p = A \cdot p + q \end{aligned}$$

Considere o subgrupo conexo  $G = SO(n) \times \mathbb{R}^n$  de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  agindo em  $\mathbb{R}^n$ . Note que,

$$H_p \cong SO(n) \quad (\text{difeomorfos}).$$

Como

$$(SO(n) \times \mathbb{R}^n) \cdot p = \mathbb{R}^n,$$

onde  $p \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\mathbb{R}^n \cong G/SO(n).$$

△

**Exemplo A.2.3.** Seja  $\mathbb{S}^2$  com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ . Temos que  $\mathbb{S}^2$  é uma variedade de Einstein e  $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = O(3)$ . Considere o subgrupo conexo  $SO(3)$  agindo em  $\mathbb{S}^2$  da maneira usual, como rotações em  $\mathbb{R}^3$ . Note que, o grupo de isotropia em  $p \in \mathbb{S}^2$  é difeomorfo ao subgrupo  $SO(2)$ . Assim,

$$\mathbb{S}^2 = SO(3) \cdot p \cong SO(3)/SO(2).$$

Analogamente temos que,

$$\mathbb{S}^n = SO(n+1) \cdot p \cong SO(n+1)/SO(n).$$

△

**Exemplo A.2.4.** O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  (modelo do hiperbolóide) é uma variedade de Einstein e  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = O(n, 1)$  (grupo ortogonal de Lorentz). Temos que o grupo ortogonal especial de Lorentz  $SO(n, 1)$  age sobre  $\mathbb{H}^n$  transitivamente. Note que, o subgrupo de isotropia em  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  é difeomorfo a  $SO(n)$ . Logo,

$$\mathbb{H}^n = SO(n, 1) \cdot e_{n+1} \cong SO(n, 1)/SO(n).$$

△

Para mais detalhes dos exemplos A.2.2, A.2.3 e A.2.4 ver as referências [8] e [16].