

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Extensão Holomorfa à Faixa Complexa de Função Real Positiva Definida

KARINA PEREIRA CARVALHO

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KARINA PEREIRA CARVALHO

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Extensão Holomorfa à Faixa Complexa de Função Real Positiva Definida

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências Matemática**.

Área de Concentração: Teoria da Aproximação.

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KARINA PEREIRA CARVALHO

Extensão Holomorfa à Faixa Complexa de Função Real Positiva Definida

Dissertação aprovada por banca examinadora, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Banca examinadora:

Prof. Dra. Ana Paula Peron - ICMC/USP

Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes - UNIFEI

Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira - Orientador

DEFESA: Dia 2 de fevereiro de 2018 às 14 horas.

RESULTADO: APROVADA

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro/2018

*Aos meus pais Elias e Jucélia,
com carinho.*

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar. Ele me ampara nos momentos difíceis me concedendo força interior para superar dificuldades e celebrar as vitórias em todos os momentos do certame que Ele me propõe.

Sou grata aos meus pais, Elias e Jucélia, pela força, incentivo e por estarem sempre presentes nos meus sonhos e conquistas. Ao meu irmão, Hudson, pelo companheirismo e apoio.

Ao meu orientador, professor Claudemir Oliveira, pelas sugestões, dedicação, paciência, auxílio na escrita e no entendimento da Matemática que se fez necessária para o desenvolvimento desse trabalho e pela confiança em mim depositada. A ele expressei a minha gratidão, respeito e admiração.

A todos os meus amigos, Thais, Tarcylle e Raquel, que proporcionaram aos meus dias uma companhia agradável. Agradeço, também, ao Matheus Barnabé e João Paulo, pelo incentivo e ajuda concedida, pois contribuíram de forma significativa para que eu chegasse até aqui.

Aos professores do Programa de Mestrado em Matemática do Instituto de Matemática e Computação da UNIFEI e, em especial, ao coordenador Leandro Gomes, por todo auxílio prestado. Aos professores que ministraram disciplinas contribuindo com minha formação acadêmica, Antônio, Bráulio, Denis e Fábio, principalmente as lições que não foram escritas na lousa.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

De modo geral, agradeço aos meus familiares e amigos que direta ou indiretamente cuidaram de mim em alguma etapa dessa conquista. Particularmente, obrigada aos meus tios, Adamair, Lucilene e Edir, que estiveram presentes na realização desse sonho. A ajuda de vocês foi de fundamental importância.

A todos, meu muito obrigado!

*“Nunca será um verdadeiro
matemático aquele que
não for um pouco poeta.”*

Karl Weierstrass

Resumo

Estudamos funções positivas definidas de uma variável real ou complexa, bem como a relação entre essas duas famílias. Identificamos que uma função analítica positiva definida sobre a reta se estende holomorficamente a uma faixa horizontal do plano complexo contendo o eixo real, onde a ferramenta fundamental é o Teorema de Bochner. Do mesmo modo, exibimos condições suficientes para que uma função se estenda holomorficamente a uma faixa vertical contendo o eixo imaginário, onde o Teorema de Bernstein-Widder é decisivamente usado. Em adição, investigamos positividade definida relativa à diferença conjugada complexa e à soma conjugada complexa para a classe de funções características.

Palavras-chave e frases: Função característica - Função exponencialmente convexa - Positividade definida - Medida de probabilidade - Teoremas de Bochner e Widder - Conjunto diferença real. Conjunto diferença conjugada

Abstract

We study positive definite functions on both \mathbb{R} and \mathbb{C} and some inter-relationship between them. We identify which positive definite analytic functions on \mathbb{R} are holomorphically extendable to a horizontal strip containing the real axis in \mathbb{C} via a classical theorem of Bochner. Similarly, now using the Bernstein-Widder Theorem, we provide sufficient conditions on the functions in order that it be holomorphically extendable to a vertical strip containing the imaginary axis. As a bypass, we present a better understanding of positive definite functions with respect to conjugated differences and conjugated sums.

Keywords and phrases: Holomorphic extension - Characteristic function - Probability measure - Definiteness positivity - Bochner's theorem - Widder's theorem - Conjugate difference

Índice

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	2
2 Conceitos Fundamentais	4
2.1 Conjuntos diferença e soma conjugadas	4
2.2 Lema de Schur	7
2.3 Núcleo positivo definido	10
2.4 Função positiva definida sobre grupo	13
2.5 Função positiva definida sobre a reta	15
3 Extensão Holomorfa sobre Faixa Complexa de Função Positiva Definida	18
3.1 Função positiva definida sobre \mathbb{R} e analiticidade	18
3.2 Função característica	22
3.3 Holomorfia sobre faixas complexas horizontais	28
3.4 Raio de convergência e holomorfia	35
3.5 Função positiva definida relativo à diferença conjugada	38
3.6 Extensão holomorfa de função exponencialmente convexa	41
Referências Bibliográficas	47
Índice Remissivo	48
Símbolos e Notações	50

Introdução

*F*unções positivas definidas desempenham papel central dentro da Análise Harmônica, tanto no desenvolvimento da teoria em si quanto em aplicações. No que tange a aplicabilidade, o conceito aparece em teoria probabilística, processo estocástico, análise complexa, análise de Fourier, análise esférica, teoria da aprendizagem, teoria da aproximação ([2, 3, 4, 5, 14, 20, 23]).

Faz bem recordar que enquanto teoria matemática, ela foi formalizada por Mathias em 1923 lidando com o conceito para funções de uma variável real, surgindo como consequência de transformada de Fourier ([18]). No entanto, motivado pelas pesquisas de Carathéodory e Toeplitz que em 1907 no trabalho [9] tratando da questão em teoria de funções complexas, em 1909 Mercer considera núcleos positivos definidos em suas investigações ([19]).

Como o parágrafo anterior pressupõe, no transcorrer do último século diversos trabalhos surgiram a partir do conceito de função positiva definida, sem contudo, esgotar as generalizações e relações multidisciplinares dessa ferramenta matemática como pode ser verificado em [10] e referências de lá. Prova disto é a abordagem histórica feita por Stewart em 1976 ([24]), onde a evolução dos trabalhos na área e, inclusive, algumas questões foram levantadas mostrando que havia e há muito para se desenvolver.

Essa dissertação ocupa-se de uma parcela desse campo de pesquisa lidando tão somente com funções positivas definidas no contexto em que a função em foco envolve ou uma variável real ou complexa. Na realidade, nossa preocupação aqui é estudar possíveis conexões que surgem entre essas duas famílias de funções. A questão que temos em mente é obter condições suficientes para que uma função positiva definida sobre a reta possa estender-se holomorficamente à faixas do plano complexo e que estas contenham ou o eixo real ou o eixo imaginário do plano de Argand-Gauss.

A investigação da questão aqui proposta requer a utilização de dois teoremas centrais da

Análise Harmônica: o Teorema de Bochner, referente a funções da forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o Teorema de Bernstein-Widder para funções $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. A versão do primeiro teorema que usamos foi tomada de [14]. Ela garante que a função f é contínua e positiva definida sobre \mathbb{R} se e somente se existe uma única medida de Borel ν positiva e finita sobre a reta tal que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\nu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A versão do segundo teorema foi coletada de [14, p. 107]. Ela assegura que $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é exponencialmente convexa se e somente se

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} d\sigma(t), \quad x \in (a, b),$$

onde σ é única medida positiva sobre \mathbb{R} tal que a representação integral acima tenha sentido.

As representações integrais das funções em ambos os teoremas citados motivam a investigação da analiticidade de f e g sobre a reta. Por sua vez, isso conduz à questão de estudar a possibilidade da extensão holomorfa de f e g em vizinhanças complexas que contenham \mathbb{R} e $i\mathbb{R}$, respectivamente. Tais vizinhanças são as que aparecem no título do trabalho referida simplesmente como faixas complexas. Conforme já mencionamos, buscamos condições suficientes sobre as funções ou sobre as medidas acima citadas que garantam tais extensões. Salientamos, também, que objetivamos a elaboração de um elenco de funções positivas definidas, cuja verificação de sua positividade torna-se complicada por meio da definição usual.

A dissertação está organizada como segue. O capítulo seguinte é composto de cinco seções, no decorrer das quais recordamos conceitos fundamentais sobre função positiva definida e que tenham alguma interseção com a proposta do trabalho. A maioria dos resultados estão acompanhados de provas. Sendo assim, faz parte desse capítulo o estudo envolvendo conjunto soma conjugada, conjunto diferença conjugada, positividade definida sobre grupos e o celebrado Lema de Schur para produto de Hadamard de funções positivas definidas.

As discussões das questões relativa à extensão holomorfa levantadas acima estão contidas no Capítulo 3. O assunto está dividido em seis seções, ao longo das quais estudamos analiticidade real de função positiva definida, função característica, holomorfia via Teorema de Bochner e holomorfia via Teorema de Bernstein-Widder. Os resultados principais que respondem as questões levantadas vem acompanhados com aplicações através de exemplos.

Frisamos que no decorrer do presente trabalho notamos o quão abundante é o assunto tratado aqui. Portanto, o que apresentamos é simplesmente uma parcela singela desse vasto campo de pesquisa. No entanto, o objetivo, a princípio almejado, está satisfatoriamente contemplado.

Conceitos Fundamentais

Este capítulo será dedicado aos conceitos considerados preliminares para o decorrer da dissertação. No entanto, conceitos e propriedades correlacionadas serão estudadas mesmo sem uso direto, uma vez que tal investigação lançará luz para o entendimento geral do problema abordado. As referências básicas aqui são [21, 22].

2.1 Conjuntos diferença e soma conjugadas

Nesta seção, estudamos os tipos de conjuntos que lidaremos frequentemente no capítulo principal do trabalho. Três tipos de conjuntos serão abordados: diferença real, soma conjugada complexa e diferença conjugada complexa. Conjunto soma real também aparece, mas em outro momento do trabalho.

Iniciamos introduzindo o conceito de conjunto diferença.

Definição 2.1.1 *O conjunto \mathcal{D}_X é a diferença real de um subconjunto não vazio X de \mathbb{R} quando $\mathcal{D}_X = X - X$, onde*

$$X - X := \{x - y : x, y \in X\}.$$

Seguem observações e exemplos a respeito de \mathcal{D}_X .

- Todo conjunto diferença real é simétrico em relação à 0.
- Dados números reais a, b tais que $a \leq b$, $\mathcal{D}_{(a,b)} = (a - b, b - a)$.
- Mais geralmente, dado $X \subset \mathbb{R}$, vemos que $0, M - m, m - M \in \mathcal{D}_X$, onde $M = \sup\{X\}$ e $m = \inf\{X\}$. No entanto, a diferença \mathcal{D}_X não é necessariamente um intervalo fechado, conforme o exemplo anterior mostra.

- Um exemplo de nosso interesse é \mathbb{R} que é a diferença real de \mathbb{R}^+ – Ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathcal{D}_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ - \mathbb{R}^+.$$

- Quando $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto convexo e simétrico em relação a 0, então $\mathcal{D}_X = 2X = \{2x : x \in X\}$.

Definição 2.1.2 Dizemos que o conjunto S_Ω é a soma conjugada do conjunto complexo não vazio Ω quando $S_\Omega = \Omega + \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega + \overline{\Omega} := \{z + \overline{w} : z, w \in \Omega\}.$$

No contexto complexo, conjuntos dados por diferenças ou somas podem assumir aspectos geométricos estranhos, ocorrendo exemplos com as mais diversas representações geométricas, desde conjunto conexo a desconexo, discreto ou não.

Exemplo 2.1.1 Para $\Omega = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, a soma conjugada é o disco aberto

$$\Delta(0, 2) = \{\rho e^{i\theta} : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Verificação: Sejam $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2} \in \Omega$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$. Uma vez que $0 \leq |e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2}| \leq 2$, as somas $e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2}$ estão sobre segmentos orientados radiais de origem em $0 \in \mathbb{C}$, direção $(\cos \theta_1 + \cos \theta_2, \sin \theta_1 - \sin \theta_2)$ e comprimento 2. Por outro lado, qualquer ponto de tais segmentos é soma conjugada complexa de elementos de Ω . ■

A seguir está a contraparte complexa da Definição 2.1.1.

Definição 2.1.3 Dizemos que o conjunto \mathcal{D}_Ω é a diferença conjugada do subconjunto não vazio Ω do plano complexo quando $\mathcal{D}_\Omega = \Omega - \overline{\Omega}$, onde

$$\Omega - \overline{\Omega} := \{z - \overline{w} : z, w \in \Omega\}.$$

Notamos que se $x + iy \in \Omega$, então $i2y \in \mathcal{D}_\Omega$. Em consequência, dependendo de Ω , considerando $y_M = \sup\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in \Omega\}$ e $y_m = \inf\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in \Omega\}$, segue que

$$\{i2y_m, i2y_M\} \subset \mathcal{D}_\Omega \quad \text{ou} \quad \{iy : 2y_m \leq y \leq 2y_M\} \subset \mathcal{D}_\Omega,$$

mostrando que a interseção de \mathcal{D}_Ω com o eixo imaginário é sempre um conjunto não vazio.

O lema a seguir faz a conexão entre conjuntos soma conjugada e diferença conjugada.

Lema 2.1.1 *Seja Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{C} . O conjunto \mathcal{S} é soma conjugada de Ω se e somente se $i\mathcal{S} = \mathcal{D}_{i\Omega}$.*

Demonstração: A prova é baseada na inclusão usual de conjuntos. Suponha que \mathcal{S} é a soma conjugada de Ω e $\zeta \in i\mathcal{S}$, digamos $\zeta = i(z + \bar{w})$, para $z, w \in \Omega$. Segue que $\zeta = iz - \bar{iw} \in \mathcal{D}_{i\Omega}$. Para a inclusão oposta, seja $\zeta = z - \bar{w} \in \mathcal{D}_{i\Omega}$, onde $z, w \in i\Omega$, digamos $z = i\xi$ e $w = i\eta$, para $\xi, \eta \in \Omega$. Então, expressamos $\zeta = i\xi - \bar{i\eta} = i(\xi + \bar{\eta})$ que é um elemento de $i\mathcal{S}$. Reciprocamente, assuma que $i\mathcal{S} = \mathcal{D}_{i\Omega}$ e seja $\zeta \in \mathcal{S}$. Então, vemos que $i\zeta = iz - \bar{iw} = i(z + \bar{w})$, para $z, w \in \Omega$. Consequentemente, $\zeta = z + \bar{w}$, mostrando que \mathcal{S} é a soma conjugada de Ω . Portanto, a prova do lema está finalizada. ■

Assim, o lema mostra que a rotação de \mathcal{S}_Ω em 90° no sentido anti-horário coincide com a diferença conjugada da mesma rotação de Ω .

Os exemplos de soma conjugada ou diferença conjugada que mais usaremos vem a seguir e dependem da definição de retângulos complexos.

Definição 2.1.4 *Sejam a, b e r_1, r_2 , elementos de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. O retângulo complexo de lados $b - a$ e $r_2 - r_1$ é*

$$R(a, b; r_1, r_2) := \{x + iy \in \mathbb{C} : a < x < b, r_1 < y < r_2\}.$$

Dessa definição e das anteriores, decorrem as chamadas faixas horizontais ou verticais complexas que lidaremos em grande parte do trabalho daqui por diante.

Exemplo 2.1.2 *Sejam $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. A faixa vertical complexa de largura $b - a$ assumindo a forma*

$$V(a, b) := \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\}$$

é a soma conjugada de $R(a/2, b/2; -\infty, \infty)$, enquanto a faixa horizontal complexa de altura $b - a$ tendo a forma

$$H(a, b) := \{z \in \mathbb{C} : a < \Im(z) < b\}$$

é a diferença conjugada de $R(-\infty, \infty; a/2, b/2)$.

Para compreensão melhor do Exemplo 2.1.3, notamos que a definição prévia mostra que $z - \bar{w}$ é um elemento de $\Omega - \overline{\Omega}$ se e somente se $w - \bar{z}$ é um elemento de $\Omega - \overline{\Omega}$. Consequentemente, o conjunto $\Omega - \overline{\Omega}$ é simétrico em relação ao eixo imaginário do plano complexo.

Exemplo 2.1.3 Denotando

$$Q(z; r) := \{w \in \mathbb{C} : |\Re(w - z)| < r, |\Im(w - z)| < r\},$$

a Figura 2.1 refere-se as diferenças conjugadas

$$Q(0; 1) \cup Q(3 + 3i; 1) - \overline{Q(0; 1) \cup Q(3 + 3i; 1)}, \quad Q(0; 1) \cup Q(5 + 5i; 1) - \overline{Q(0; 1) \cup Q(5 + 5i; 1)},$$

respectivamente.

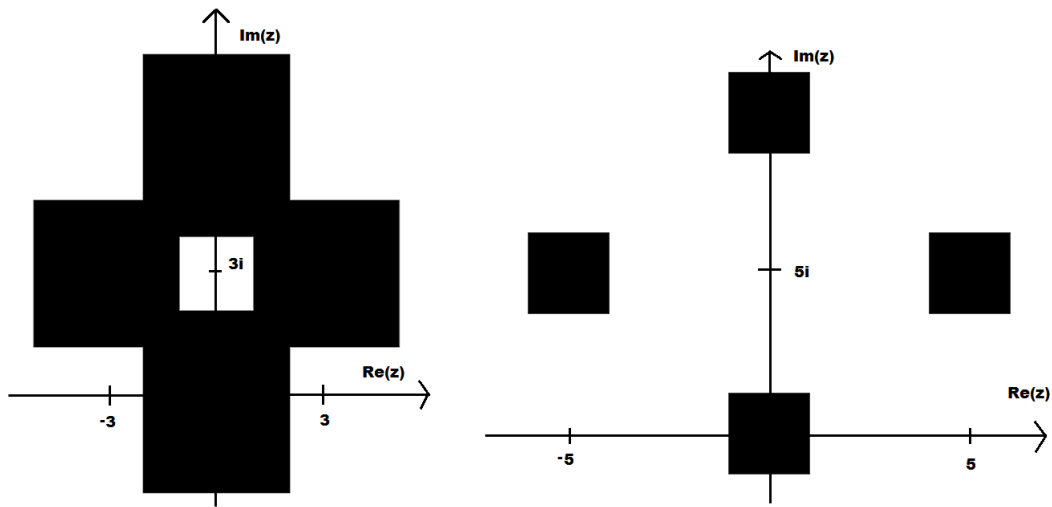


Figura 2.1: Fonte: [8]

Classes de conjuntos ligeiramente mais gerais das que aqui abordamos foram estudados por Buescu e Paixão ([8]). De fato, os conjuntos estudados nessa seção tornam-se subconjuntos daqueles. No entanto, as propriedades provindas de ambos os contextos coincidem.

2.2 Lema de Schur

Recordamos o Lema de Schur e alguns resultados sobre matrizes que estão diretamente envolvidos com esse lema. Faz parte desse estudo o conhecido produto de Hadamard para matrizes. Esse lema é essencial no estudo de propriedades básicas de núcleos positivos definidos. As referências básicas para esta parte do estudo são ([10, 15]).

Para tanto, denotamos por $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ o espaço vetorial complexo formado pelas matrizes de ordem m por n com entradas complexas. Aproveitamos para formalizar o conceito de matriz hermitiana.

Definição 2.2.1 Seja $A = (A_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$. Escrevemos A^* para a matriz obtida de A via transposição, seguida de conjugação complexa. Formalmente, $A^* \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ e $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$. A matriz A é hermitiana quando $m = n$ e $A = A^*$.

O primeiro resultado dessa seção, embora seja bem conhecido da Álgebra Linear, será enunciado acompanhado de sua prova.

Lema 2.2.1 Seja A um elemento de $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Se

$$u^*Au = 0, \quad u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}),$$

então A é identicamente nula.

Demonstração: Usando propriedades de transposta e linearidade, obtemos

$$(u+v)^*A(u+v) = (u^*+v^*)(Au+Av) = u^*Au + v^*Au + u^*Av + v^*Av, \quad u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}).$$

Agora, fica fácil ver que se para todo $u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, o escalar u^*Au é nulo, então $0 = v^*Au + u^*Av$, $u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Em particular,

$$iv^*Au - iu^*Av = 0 = -u^*Av + v^*Au, \quad u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}).$$

Resolvendo este sistema para v^*Au , chegamos a $v^*Au = 0$, $u, v \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, provando assim que $A = 0$. ■

O resultado abaixo traz uma condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada seja hermitiana.

Proposição 2.2.1 Seja A uma matriz de $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) A é hermitiana.
- (2) Se $u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, então u^*Au é um escalar real.

Demonstração: Assuma que A é hermitiana e seja $u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Usando propriedades de transposta de matrizes, vemos que

$$\overline{u^*Au} = (u^*Au)^* = u^*(u^*A)^* = u^*A^*u = u^*Au.$$

Portanto, u^*Au é um escalar real. A arbitrariedade de $u \in \mathbb{C}$ mostra, então, que (1) implica em (2).

Para provar a recíproca, recordamos que A sendo uma matriz quadrada complexa, ela se decompõe unicamente como a soma $A = B + iC$, onde

$$B = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{e} \quad C = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Facilmente, notamos que $B^* = B$ e $C^* = C$, mostrando que essas matrizes são hermitianas. Agora, fixe u em $M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Como a primeira parte da prova se aplica a qualquer matriz, $u^*Bu, u^*Cu \in \mathbb{R}$. Por linearidade é fácil ver que $u^*Au = u^*Bu + iu^*Cu$. Desse modo, se $u^*Au \in \mathbb{R}$, então a parte imaginária de u^*Au é nula - Isto é, $u^*Cu = 0$. A arbitrariedade de u e o Lema 2.2.1 implicam que $C = 0$. Portanto, a matriz A coincide com B e, por consequência a matriz A é hermitiana. ■

Introduzimos a seguir a família de matrizes com as quais lidaremos no capítulo posterior.

Definição 2.2.2 *Seja A uma matriz de $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Dizemos que A é semi-positiva definida quando*

$$u^*Au \geq 0, \quad u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}).$$

Quando esta desigualdade é estrita para toda u não nula, dizemos que A é positiva definida.

De modo mais explícito, notamos que a forma quadrática aparecendo na definição acima se expressa como

$$u^*Au = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_j A_{jk} \bar{u}_k, \quad u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C}).$$

O lema abaixo é outro resultado técnico mostrando que as matrizes que se encaixam na definição precedente decompõem-se num produto de outras duas matrizes.

Lema 2.2.2 *Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Então, a matriz A é semi-positiva definida se e somente se $A = B^*B$, para alguma $B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.*

Demonstração: Suponha que A seja semi-positiva definida e considere que se λ é um autovalor de A associado ao autovetor $v \in M_{1 \times n}(\mathbb{C})$. Então,

$$v^*Av = v^*\lambda v = \lambda \|v\|^2.$$

Usando que v é não nulo e a hipótese sobre A , vemos que λ é não negativo. Denotamos, então, os autovalores de A , levando em conta suas multiplicidades, por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Em adição, a Proposição 2.2.1 mostra que A é hermitiana. Logo, A é diagonalizável - Ou seja, existem $P \in$

$M_{n \times n}(\mathbb{C})$, cuja inversa é P^* tal que $A = P^*DP$, onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Em consequência, segue que a afirmação do lema ocorre para $B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$.

Reciprocamente, se $A = B^*B$, então $u^*Au = (Bu)^*(Bu) = \|Bu\|^2$, $u \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, finalizando a prova. ■

Definição 2.2.3 *Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. O produto de Hadamard de A com B é a matriz $A \circ B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ definida como $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$.*

O resultado a seguir é conhecido como Lema de Schur, objetivo final desta seção.

Lema 2.2.3 *Sejam A e B elementos de $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Se A e B são semi-positivas definidas, então $A \circ B$ é semi-positiva definida.*

Demonstração: Suponha que A e B sejam matrizes satisfazendo a hipótese do lema. Pelo Lema 2.2.2, existem matrizes E e F tais que $A = E^*E$, $B = F^*F$. Logo, para $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$(A \circ B)_{jk} = (E^*E)_{jk}(F^*F)_{jk} = \sum_{\mu=1}^n \bar{E}_{\mu j} E_{\mu k} \sum_{\nu=1}^n \bar{F}_{\nu j} F_{\nu k} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (\bar{E}_{\mu j} \bar{F}_{\nu j})(E_{\mu k} F_{\nu k}) = L_j^* L_k,$$

onde $L_j \in M_{1 \times n^2}(\mathbb{C})$ é definida como

$$L_j := \left[\bar{E}_{1j} \bar{F}_{1j} \quad \bar{E}_{1j} \bar{F}_{2j} \quad \cdots \quad \bar{E}_{1j} \bar{F}_{nj} \quad \bar{E}_{2j} \bar{F}_{1j} \quad \cdots \quad \bar{E}_{2j} \bar{F}_{nj} \quad \cdots \quad \bar{E}_{nj} \bar{F}_{1j} \quad \cdots \quad \bar{E}_{nj} \bar{F}_{nj} \right], \quad j = 1, \dots, n.$$

Segue que $A \circ B = Q^*Q$, onde Q é uma matriz quadrada de ordem n^3 em que sua primeira linha é $\left[L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n \right]$ e as demais são nulas. Agora, a conclusão da prova é consequência do Lema 2.2.2. ■

2.3 Núcleo positivo definido

A classe de funções em duas variáveis que se enquadram no título desta seção está também diretamente ligado ao título desse trabalho.

Introduzimos abaixo a definição dessas funções no contexto complexo, onde X denota, simplesmente, um conjunto não vazio desprovido de estrutura algébrica.

O conceito de núcleo positivo definido relaciona-se às propriedades da matriz de Gram.

Definição 2.3.1 *Seja X um conjunto não vazio. Um núcleo sobre X é uma função da forma $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$. As matrizes dependentes de uma quantidade finita de pontos arbitrários em X*

dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mapsto G_K(x_1, \dots, x_n) := [K(x_j, x_k)] \in M_{n \times n}(\mathbb{C}), \quad n = 1, \dots$$

é chamada *Matriz de Gram associada à K*.

Para o conceito a seguir faz bem recordar a Definição 2.2.2.

Definição 2.3.2 *Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que o núcleo K sobre X é positivo definido quando a matriz de Gram $G_K(x_1, \dots, x_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ é semi-positiva definida sobre X.*

A fim de que a leitura não se torne cansativa, em muitos lugares, dispensaremos a formalidade de sempre dizer que “são quaisquer $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ”.

Vejam os seguintes exemplos de núcleos positivos definidos. Outros estão em [2], na seção final de [6] e [11, p. 38].

Exemplo 2.3.1 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. A função $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$K(x, y) = f(x)\overline{f(y)}, \quad x, y \in X$$

é um núcleo positivo definido sobre X.

O exemplo acima pode ser estendido à soma de uma quantidade finita de parcelas de funções da forma $(x, y) \in X \times X \mapsto f(x)\overline{f(y)} \in \mathbb{C}$.

No exemplo a seguir, o conjunto $L^2([-1, 1])$ refere-se ao espaço de Hilbert real das classes de funções Lebesgue-mensuráveis que são de quadrado-integráveis em relação a medida linear dt sobre o intervalo $[-1, 1]$.

Exemplo 2.3.2 *Sejam $X = [0, 1]$ e uma função $\Phi : X \rightarrow L^2([-1, 1])$ tal que para cada $x \in X$, $\Phi(x)$ é uma função real. Segue que*

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle, \quad x, y \in X$$

é um núcleo positivo definido sobre X.

Verificação: Usando a definição de K dado pelo produto interno, vemos que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i K(x_i, x_j) \lambda_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \lambda_j \Phi(x_j), \lambda_k \Phi(x_k) \rangle = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \Phi(x_j) \right\|^2,$$

concluindo que K é positivo definido sobre X . ■

O exemplo acima enquadra-se numa classe de núcleos que dependem do produto interno de um espaço de funções. Por essa razão, torna-se fácil verificar que eles são positivos definidos. Note que averiguar essa propriedade via Definição 2.4.1 é uma tarefa demasiadamente difícil e, por vezes, até impossível.

Elencamos abaixo propriedades básicas com suas respectivas provas para núcleos positivos definidos.

Teorema 2.3.1 *Seja $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido. Então, as seguintes propriedades ocorrem:*

- (1) $K(x, x) \geq 0, x \in X$.
- (2) $K(x, y) = \overline{K(y, x)}, x, y \in X$.
- (3) $|K(x, y)|^2 \leq K(x, x)K(y, y), x, y \in X$.

Demonstração: O primeiro item é consequência da Definição 2.3.2, considerando $n = 1, x_1 = x$ e $\lambda_1 = 1$. Para provar (2), sejam $n = 2, x_1 = x, x_2 = y \in X$. Então, a matriz de Gram assume a forma

$$G_K(x, y) := \begin{bmatrix} K(x, x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) \end{bmatrix}.$$

Como K é positiva definida sobre X , a forma $[\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2]G_K(x, y)[\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2]^*$ é não negativa quando $[\lambda_1 \lambda_2] \in M_{1 \times 2}(\mathbb{C})$. Pela Proposição 2.2.1, $G_K(x, y)$ é hermitiana e, portanto $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Para a última afirmação, assumamos que λ é um autovalor de $G_K(x, y)$ associado ao autovetor $v^* \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Logo,

$$vG_K(x, y)v^* = v\lambda v^* = \lambda \|v\|^2,$$

mostrando que todo autovalor de $G_K(x, y)$ é não negativo e como o determinante de $G_K(x, y)$ é igual ao produto de seus autovalores, o item (3) segue. ■

Finalizamos a seção com dois teoremas aparentemente independentes dos assuntos abordados aqui. O primeiro deles trata da obtenção de uma família de núcleos positivos a partir da derivada de um núcleo fixado satisfazendo certas condições, enquanto que o segundo traz estimativa de tais derivadas.

Teorema 2.3.2 *Sejam J um intervalo aberto de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{Z}_+$ um inteiro não negativo e $K : J \times J \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido. Se as derivadas*

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial y^m \partial x^m} K(x, y), \quad x, y \in J, m = 0, 1, \dots, n$$

existem e são contínuas em $J \times J$, então essas derivadas parciais são núcleos positivos definidos sobre J .

Demonstração: Veja [7, Theorem 2.1]. ■

Teorema 2.3.3 *Sejam J um intervalo aberto de \mathbb{R} , $n \in \mathbb{Z}_+$ um inteiro não negativo e $K : J \times J \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido. Se as derivadas*

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial y^m \partial x^m} K(x, y), \quad x, y \in J, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

existem e são contínuas em $J \times J$, então para todo $x, y \in J$

$$\left| \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y^{m_2} \partial x^{m_1}} K(x, y) \right|^2 \leq \frac{\partial^{2m_1}}{\partial y^{m_1} \partial x^{m_1}} K(x, x) \frac{\partial^{2m_2}}{\partial y^{m_2} \partial x^{m_2}} K(y, y), \quad m_1, m_2 = 0, 1, \dots, n.$$

Demonstração: Veja [7, Theorem 2.3]. ■

2.4 Função positiva definida sobre grupo

Embora os conceitos e propriedades que desenvolvemos nessa parte da dissertação tem contra-parte real, assumimos o contexto complexo, onde estudamos positividade definida de funções no ambiente mais frequente da Análise Harmônica, onde o domínio das funções tem estrutura de grupo.

Para tanto, consideramos que $(\mathcal{G}, +)$ é grupo Abelino - Ou seja, \mathcal{G} é um conjunto não vazio munido da operação $(x, y) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto x + y \in \mathcal{G}$ satisfazendo:

- (a) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x, y, z \in \mathcal{G}$.
- (b) Existe um único $0 \in \mathcal{G}$ tal que $x + 0 = 0 + x$, $x \in \mathcal{G}$.
- (c) $x + y = y + x$, $x, y \in \mathcal{G}$.

A Definição 2.3.2 está relacionada com o conceito abaixo. Para vermos isto, introduzimos as matrizes de Gram dependentes de uma quantidade finita de pontos arbitrários em \mathcal{G} dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G} \mapsto G_{K_f}(x_1, \dots, x_n) := [K_f(x_j, x_k)] \in M_{n \times n}(\mathbb{C}), \quad n = 1, \dots,$$

onde $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função e $K_f(x, y) := f(x - y) \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{G}$.

Definição 2.4.1 *Uma função $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva definida quando a matriz de Gram associada ao núcleo K_f é semi-positiva definida sobre \mathcal{G} . A função f é estritamente positiva definida quando a matriz de Gram associada ao núcleo K_f é positiva definida sobre \mathcal{G} .*

Este trabalho está relacionado a núcleos como no exemplo seguinte, enquadrando-se numa família de funções que lidaremos mais adiante, chamadas funções características – Isto é, funções positivas definidas relacionadas com números complexos em sua forma polar. Esse exemplo faz sentido na seção presente, uma vez que todo espaço vetorial sobre \mathbb{C} é, em particular, um grupo abeliano em relação a sua soma usual.

Exemplo 2.4.1 *Seja $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço pré-Hilbert complexo. Para cada $y \in \mathcal{V}$, a função $x \in \mathcal{V} \mapsto e^{i\langle x, y \rangle} \in \mathbb{C}$ é positiva definida sobre \mathcal{V} .*

Verificação: Para averiguar o exemplo, sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j e^{i\langle x_j - x_k, y \rangle} \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{i\langle x_j, y \rangle} \overline{\sum_{k=1}^n \lambda_k e^{i\langle x_k, y \rangle}} = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{i\langle x_j, y \rangle} \right|^2.$$

Portanto, a afirmação do exemplo segue. ■

Por questão de facilidade, escrevemos $PD_{\mathcal{G}_+}$ para a família de funções satisfazendo a Definição 2.4.1. O conjunto $PD_{\mathcal{G}_+}$ forma um *cone convexo* no sentido a seguir.

Proposição 2.4.1 *Valem as seguintes propriedades:*

- (1) *Se $f, g \in PD_{\mathcal{G}_+}$, então $f + g \in PD_{\mathcal{G}_+}$.*
- (2) *Se $f \in PD_{\mathcal{G}_+}$ e α é um escalar não negativo, então $\alpha f \in PD_{\mathcal{G}_+}$.*

Demonstração: Suponha que $f, g \in PD_{\mathcal{G}_+}$. O primeiro item segue da definição de soma de funções e das igualdades

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j (f + g)(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j f(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j g(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k.$$

Para provar (2), seja $f \in PD_{\mathcal{G}_+}$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j (\alpha f)(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k = \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j f(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k \geq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Portanto, nossas afirmações estão provadas. ■

Abaixo listamos outras propriedades da família $PD_{\mathcal{G}_+}$ que normalmente estão presentes em todos os textos científicos que lidam com o conceito de funções ou núcleos positivos definidos.

Proposição 2.4.2 *Seja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função em $PD_{\mathcal{G}_+}$. Então:*

- (1) $f(0) \geq 0$.

- (2) $f(-x) = \overline{f(x)}$, $x \in \mathcal{G}$.
 (3) $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathcal{G}$.

Demonstração: As três propriedades da proposição são consequências da Proposição 2.3.1 aplicada ao núcleo K_f . ■

Com a proposição a seguir, encerramos esta seção discorrendo sobre propriedades que também são recorrentes sobre o assunto que estamos estudando aqui.

Proposição 2.4.3 *Seja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Então, as duas propriedades seguintes valem:*

- (1) *Se $f \in PD_{\mathcal{G}_+}$, então $G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$ têm autovalores e determinante não negativos.*
 (2) *Se $f \in PD_{\mathcal{G}_+}$ é estritamente positiva definida, então $G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$ têm autovalores e determinante positivos.*

Demonstração: Assuma que λ é um autovalor de $G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$ associado ao autovetor $v^* \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$. Logo, a prova dos dois itens do lema segue da igualdade

$$v^* G_{K_f}(x_1, \dots, x_n) v = v \lambda v^* = \lambda \|v\|^2$$

e do fato que o determinante de $G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$ é igual ao produto dos autovalores de $G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$. Portanto, as afirmações (1) e (2) valem. ■

2.5 Função positiva definida sobre a reta

O objetivo desta seção é particularizar a Seção 2.4 para $(\mathcal{G}, +) = (\mathbb{R}, +)$. Com vistas no que pretendemos, abordamos o conceito de funções positivas definidas sobre \mathbb{R} de modo ligeiramente diferente do usual.

Para a definição a seguir é conveniente recordar o núcleo K_f da Definição 2.4.1.

Definição 2.5.1 *Seja $X \subset \mathbb{R}$, não vazia. Dizemos que $f : \mathcal{D}_X \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva definida sobre X quando o núcleo*

$$(x, y) \in X \times X \mapsto K_f(x, y) = f(x - y) \in \mathbb{C}$$

é positivo definido.

Mais explicitamente, dizer que $f : \mathcal{D}_X \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva definida equivale a dizer que a forma quadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j f(x_j - x_k) \bar{\lambda}_k \tag{2.1}$$

é não negativa para quaisquer inteiro positivo n , $x_1, \dots, x_n \in X$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. A família de funções satisfazendo essa definição, denotamos por PD_{X_+} .

Recordamos, nesse contexto particular, as propriedades básicas para a família PD_{X_+} já estabelecidas de modo mais geral para grupos na Seção 2.4.

Proposição 2.5.1 *Sejam f e g funções positivas definidas sobre \mathcal{D}_X . Então:*

- (1) $f(0) \geq 0$.
- (2) Se $0 \in X$, então $f(-x) = \overline{f(x)}$, $x \in X$.
- (3) $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in X$.
- (4) $f + g \in PD_{X_+}$.
- (5) $fg \in PD_{X_+}$.
- (6) $\alpha f \in PD_{X_+}$, $\alpha \geq 0$.
- (7) A função conjugada complexa \bar{f} é um elemento de PD_{X_+} .
- (8) Se $0 \in X$, então a função $x \in X \mapsto \overline{f(-x)} \in \mathbb{C}$ é um elemento de PD_{X_+} .
- (9) Se $0 \in X$, então a função $x \in X \mapsto \Re(f(x)) \in \mathbb{C}$ é um elemento de PD_{X_+} .
- (10) Se $0 \in X$, então a função $x \in X \mapsto |f(x)|^2 \in \mathbb{C}$ é um elemento de PD_{X_+} .

Assim, toda função positiva definida sobre \mathbb{R} é limitada e seu valor máximo é assumido em zero. Continuidade não é uma propriedade decorrente da definição de função positiva definida como mostra o exemplo seguinte, onde χ_J é a função característica do subconjunto J de \mathbb{R} – Ou seja,

$$\chi_J(t) = \begin{cases} 1, & t \in J \\ 0, & t \notin J. \end{cases}$$

Exemplo 2.5.1 *A função $\chi_{\mathbb{R}}$ é positiva definida sobre \mathbb{R} .*

Uma condição suficiente para que uma função positiva definida sobre \mathbb{R} seja contínua em toda a reta está no lema a seguir.

Lema 2.5.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida. Se a parte real de f é contínua em 0, então f é uniformemente contínua em toda a reta.*

Demonstração: Primeiramente quando $f(0) = 0$, a propriedade (3) da Proposição 2.5.1 revela que a continuidade de f ocorre trivialmente. No caso em que $f(0) \neq 0$, sem perda de generalidade, assumimos que $f(0) = 1$ e x_0 é um ponto fixado de \mathbb{R} . A seguir, usando $\lambda_1 = \eta$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\eta \in \mathbb{C}$ e $x_1 = x_0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x, y \in \mathbb{R}$ na desigualdade (2.1) e com auxílio da Proposição 2.5.1, deduzimos a estimativa

$$2\Re[\eta(f(x_0 - y) - f(x_0 - x))] - |\eta|^2 \leq 2\Re[1 - f(y - x)].$$

Em particular, para $\eta = \overline{f(x_0 - y) - f(x_0 - x)}$, obtemos

$$|f(x_0 - y) - f(x_0 - x)|^2 \leq 2\Re[1 - f(y - x)], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Segue que, se a função $x \in \mathbb{R} \mapsto \Re(f(x)) \in \mathbb{C}$ é contínua em 0, então o núcleo

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \Re[1 - f(x - y)]$$

é contínuo sobre $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$. Consequentemente, para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}_\varepsilon \cap \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$ é não vazio e

$$\Re[1 - f(x - y)] < \varepsilon, \quad (x, y) \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

Como x_0 foi fixado arbitrariamente, a função f é uniformemente contínua em \mathbb{R} , finalizando a prova do lema. ■

A versão do lema anterior quando o domínio da função é um grupo abelino topológico se prova identicamente.

Aproveitamos o contexto para questionar sobre a positividade definida da função

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{1}{1 - ix} \in \mathbb{C}.$$

A resposta dessa questão dificilmente pode ser decidida por meio da Definição 2.5.1. O Capítulo 3 terá o objetivo de investigar essa e outras funções positivas definidas que não são tão usuais.

Finalizamos a presente seção com um resultado devido a Donoghue garantindo uma espécie de Propagação de Regularidade de local para global de certas funções positivas definidas ([12]). Escrevemos $C^{(2n)}(0)$ para a classe de funções que possuem derivadas contínuas até a ordem $2n$ numa vizinhança da origem, enquanto que $C^{(2n)}(\mathbb{R})$ é a classe de funções que possuem derivadas contínuas até a ordem $2n$ numa vizinhança de cada ponto de \mathbb{R} .

Teorema 2.5.1 (Propagação de continuidade) *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida. Se f é de classe $C^{(2n)}(0)$, então f é de classe $C^{(2n)}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Uma prova pode ser encontrada em [12, p. 186]. ■

Extensão Holomorfa sobre Faixa Complexa de Função Positiva Definida

Conforme o título acima indica, estudamos resultados relativos ao objetivo dessa dissertação. Embora o estudo de funções positivas definidas é mais antigo, a classe de funções que lidaremos é relativamente nova, tendo sido abordada mais diretamente a partir de 2011 por Buescu e Paixão ([7, 8]).

3.1 Função positiva definida sobre \mathbb{R} e analiticidade

Reservamos para esta seção, mais resultados sobre Propagação de Regularidade mencionado no final do capítulo anterior que são válidos para certas funções complexas, cujo domínio é real. Faz parte desse assunto, o conceito de função analítica real.

Definição 3.1.1 *Uma função f com domínio aberto $J \subset \mathbb{R}$ e imagem real ou complexa é analítica em $\alpha \in J$ quando existir $r > 0$ tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n, \quad x \in (\alpha - r, \alpha + r) \subset J.$$

A função f é analítica em J quando ela o for em cada ponto de J .

Exemplo 3.1.1 *As funções $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ e $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ são analíticas em \mathbb{R} , enquanto que*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 - ix} \quad e \quad x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$$

são analíticas em $(-1, 1)$.

O lema técnico subsequente fornece uma caracterização de função analítica.

Lema 3.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe $C^\infty(J)$, para algum intervalo aberto J . Então, a função f é analítica em J se e somente se para cada $\alpha \in J$, existem um intervalo $I(\alpha) \subset J$, contendo α e constantes C e M tais que*

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{C}{M^n}, \quad x \in I, \quad n = 0, 1, \dots$$

Demonstração: Trata-se de um resultado recorrente da análise, cuja prova pode ser encontrada em [16, Proposition 1.2.12]. ■

Embora a presença da constante α no lema acima pareça não fazer sentido, ela é fundamental na prova desse lema que leva em consideração séries de potências centradas em α .

A contraparte do Teorema 2.3.2 para funções revela a positividade definida para as derivadas de ordem par de certas funções.

Proposição 3.1.1 *Sejam $f : \mathcal{D}_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida e $n \in \mathbb{Z}_+$ um inteiro não negativo. Se f é de classe $C^{(2n)}(0)$, então f é de classe $C^{(2n)}(\mathbb{R})$ e as funções*

$$(-1)^m f^{(2m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

são positivas definidas sobre \mathbb{R} .

Demonstração: Assuma que a função f do enunciado seja de classe $C^{(2n)}(0)$ e considere o núcleo K_f . Pelo Teorema 2.5.1, a função f é de classe $C^{(2n)}(\mathbb{R})$, implicando que as derivadas parciais

$$\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial y^{m_2} \partial x^{m_1}} K_f(x, y) = (-1)^{m_2} f^{(m_1+m_2)}(x-y), \quad m_1, m_2 = 0, 1, \dots, n,$$

existem e são contínuas para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 2.3.2 garante que as derivadas $m_1 = m_2$ são positivas definidas sobre \mathbb{R} . Equivalentemente, as funções $(-1)^m f^{(2m)}$, $m = 0, 1, \dots, n$ são positivas definidas sobre \mathbb{R} . ■

A proposição a seguir é uma extensão da propriedade de limitação da Proposição 2.5.1-(3).

Proposição 3.1.2 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida e $n \in \mathbb{Z}_+$. Se f é de classe $C^{(2n)}(0)$, então f é de classe $C^{(2n)}(\mathbb{R})$ e*

$$|(-1)^{m_2} f^{(m_1+m_2)}(x)|^2 \leq (-1)^{m_1+m_2} f^{(2m_1)}(0) f^{(2m_2)}(0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad m_1, m_2 = 0, 1, \dots, n.$$

Demonstração: Inicialmente considere o núcleo K_f . A prova anterior mostra que K_f tem derivadas parciais mistas de ordens menores ou iguais a n e que estas são contínuas sobre \mathbb{R} . Usando diretamente o Teorema 2.3.3, vemos que

$$|(-1)^{m_2} f^{(m_1+m_2)}(x-y)|^2 \leq |(-1)^{m_1} f^{(2m_1)}(0)| |(-1)^{m_2} f^{(2m_2)}(0)|, \quad x, y \in \mathbb{R}, m_1, m_2 = 0, 1, \dots, n.$$

Pela proposição anterior, as constantes dentro dos módulos à direita da desigualdade anterior são não negativas. Assim, a conclusão da prova segue fazendo $y = 0$. ■

Relembrando a Proposição 2.5.1, se f é positiva definida sobre \mathbb{R} , então $|f(x)| \leq f(0)$, $x \in \mathbb{R}$ e, conseqüentemente f é identicamente nula quando $f(0) = 0$. O próximo resultado pode ser visto como uma extensão dessa propriedade para funções positivas definidas com derivadas de ordem par.

Proposição 3.1.3 *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida e um inteiro positivo n . Se f é de classe $C^{(2n)}(0)$ tal que $f^{(2m)}(0) = 0$, para algum $m \in \{1, \dots, n\}$, então f identifica-se a uma constante não negativa.*

Demonstração: Suponha que $f \in C^{(2n)}(0)$ tal que $f^{(2m)}(0) = 0$, para algum $m \in \{0, \dots, n\}$. A argumentação precedente a essa proposição mostra que a conclusão é clara para $m = 0$. Nos demais casos, usamos a Proposição 3.1.2 para ver que $f \in C^{(2n)}(\mathbb{R})$ e tomando $m_1 = 0$ e $m_2 = m$, obtemos também a desigualdade

$$|f^{(m)}(x)|^2 \leq (-1)^m f(0) f^{(2m)}(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando a hipótese sobre a derivada, vemos que $f^{(m)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ e, conseqüentemente $f^{(m+1)}(0) = 0$ e $f^{(m+2)}(0) = 0$. Como $m+1$ é par ou $m+2$ é par, reaplicamos a argumentação anterior para ver que

$$|f^{((m+1)/2)}(x)|^2 \leq (-1)^{(m+1)/2} f(0) f^{(m+1)}(0), \quad x \in \mathbb{R}$$

ou que

$$|f^{((m+2)/2)}(x)|^2 \leq (-1)^{(m+2)/2} f(0) f^{(m+2)}(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Segue que $f^{((m+1)/2)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ ou $f^{((m+2)/2)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Como m é finito, após um número finito dessas etapas chegamos a desigualdade

$$|f'(x)|^2 \leq -f(0) f''(0), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $f''(0) = 0$. Portanto, a derivada f' é identicamente nula, mostrando que f é constante. Como f é positiva definida, esta constante é não negativa. ■

Conforme veremos no final da página 25,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

é positiva definida sobre \mathbb{R} tal que $f^{(2n+1)}(0) = 0$, $n = 1, \dots$, sem que f seja constante. Assim, um resultado análogo ao anterior para derivadas de ordem ímpar não tem sentido.

Dando continuidade, muitos resultados desenvolvidos nesse trabalho dependem de uma hipótese comum envolvendo derivadas de ordem $2n$ no ponto 0 de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ quando elas existirem, dado pela estimativa

$$(-1)^n f^{(2n)}(0) \leq D \frac{(2n)!}{M^{2n}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

onde M e D são constantes fixadas.

O teorema a seguir exhibe uma condição suficiente para a analiticidade de uma função em toda a reta.

Teorema 3.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida e de classe $C^\infty(0)$. Se (3.1) ocorre, então f é analítica em \mathbb{R} .*

Demonstração: Primeiro notamos que pelo Teorema 2.5.1, a função f é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Então, usando a Proposição 3.1.2 para $m_1 = m_2 = n$ chegamos a estimativa

$$|f^{(2n)}(x)| \leq |f^{(2n)}(0)|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Em adição, se (3.1) vale, então

$$\frac{|f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \leq \frac{D}{M^{2n}} \leq \frac{2D}{M^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Para uma estimativa das derivadas de ordem ímpar, usamos novamente a Proposição 3.1.2 para $m_1 = n$ e $m_2 = n + 1$ para obter

$$|f^{(2n+1)}(x)|^2 \leq f^{(2n)}(0)f^{(2n+2)}(0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Usando uma vez mais a hipótese sobre as derivadas de ordem par no ponto 0, obtemos

$$|f^{(2n+1)}(x)|^2 \leq D^2 \frac{(2n)!}{M^{2n}} \frac{(2n+2)!}{M^{2n+2}} \leq D^2 \frac{[(2n+1)!]^2}{M^{2(2n+1)}} \frac{(2n+2)}{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots$$

Em consequência,

$$\frac{|f^{(2n+1)}(x)|}{(2n+1)!} \leq \frac{2D}{M^{(2n+1)}}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

De (3.2) e (3.3), concluímos que

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{2D}{M^n}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots$$

Portanto, o Lema 3.1.1 finaliza a prova. ■

3.2 Função característica

Descrevemos, nesta seção, a subclasse de $PD_{\mathbb{R}^+}$ que tem conexão com certas medidas sobre a reta. Tal subclasse é conhecida como a família das funções características definidas a partir de uma medida de probabilidade sobre a reta. O texto base para essa parte do estudo é [17].

Então, recordamos que na Seção 2.5, estudamos funções positivas definidas sobre \mathbb{R} , onde propriedades dessa classe de funções foram elencadas. No entanto, reservamos para a presente seção, o mais significativo resultado que ocorre para funções contínuas de $PD_{\mathbb{R}^+}$. Trata-se do Teorema de Bochner publicado em 1932. Uma versão bem geral para grupos topológicos abelianos está em [14, p. 106]. A versão que usaremos nesse trabalho é como segue.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Bochner) *Uma função $f \in PD_{\mathbb{R}^+}$ é contínua se e somente se existe uma única medida Borel ν positiva e finita sobre \mathbb{R} tal que*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\nu(t), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Demonstração: Suponha que a função $f : \mathcal{D}_{\mathbb{R}^+} \rightarrow \mathbb{C}$ seja representada pela integral (3.4), onde ν é uma medida positiva de Borel e finita sobre \mathbb{R} . Então,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j K_f(x_j, x_k) \bar{\lambda}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j e^{ix_j t} \bar{\lambda}_k e^{-ix_k t} d\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{ix_j t} \right|^2 d\nu(t) \geq 0.$$

A continuidade de f está no último item da proposição seguinte.

A prova da recíproca é obtida em [3, p. 169]. ■

Elencamos observações a respeito do teorema da representação integral de Bochner.

- Na representação integral (3.4), o número complexo e^{-ixt} também pode ser usado. Essa escolha é convencional e irrelevante. Em geral, em abordagens analíticas prefere-se e^{ixt} , enquanto que em abordagem probabilística é utilizado e^{-ixt} . Nesse trabalho, usaremos e^{ixt} .
- A segunda observação diz respeito com que facilidade verificamos na prova acima que f é de classe $PD_{\mathbb{R}^+}$, sempre que f tem uma representação como (3.4). Consequentemente, o Teorema de Bochner torna-se uma via interessante para verificar que uma função é positiva definida, principalmente, naqueles casos em que usar a Definição 2.1.1 torna-se demasiadamente complicado. Portanto, esse resultado motiva a próxima definição.
- A condição sobre a continuidade da função não pode ser suprimida da hipótese do teorema, uma vez que positividade definida não implica em continuidade. No entanto, ela pode ser enfraquecida como no Lema 2.5.1.

Definição 3.2.1 *A função característica de uma medida de probabilidade μ sobre \mathbb{R} é a função $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela integral*

$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chamamos a atenção do leitor que daqui por diante, a notação f_μ deve ser entendida como na definição precedente.

Destacamos a seguir propriedades que são consequências ou do Teorema de Bochner, ou da definição anterior ou das seções precedentes. Em particular, a propriedade (2) mostra que a função dada pela integral imprópria acima está bem definida, cuja imagem é subconjunto do disco unitário complexo centrado na origem de \mathbb{C} .

Proposição 3.2.1 *A função característica f_μ tem as seguintes propriedades:*

- (1) $f_\mu(0) = 1$.
- (2) $|f_\mu(x)| \leq 1, x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f_\mu(-x) = \overline{f_\mu(x)}, x \in \mathbb{R}$.
- (4) f_μ é positiva definida sobre \mathbb{R} .
- (5) f_μ é uniformemente contínua sobre \mathbb{R} .

Demonstração: Uma vez que as propriedades de (1) a (4) foram abordadas na Seção 2.5, somente a última propriedade requer alguma atenção. Para tanto, fixemos $x \in \mathbb{R}$ e notemos que

$$|f_\mu(x+h) - f_\mu(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iht} - 1| d\mu(t),$$

onde $|e^{iht} - 1| \leq 2$, $h \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [13, p. 54],

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iht} - 1| d\mu(t) = 0.$$

Como o último limite independe de x , f_μ é uniformemente contínua em \mathbb{R} . ■

Citamos na sequência, exemplos de funções positivas definidas sobre a reta, onde as propriedades da Proposição 2.5.1 serão empregadas sem menção explícita.

Exemplo 3.2.1 *Sejam (t_n) uma sequência de números reais e μ a medida de probabilidade de densidade $p_j \in [0, 1]$ em cada t_j . Então, a medida μ gera a função*

$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{ixt_j}, \quad x \in \mathbb{R},$$

positiva definida sobre \mathbb{R} . Especialmente, para cada $a \in \mathbb{R}$, as funções

$$x \in \mathbb{R} \mapsto e^{iax} \in \mathbb{C} \quad e \quad x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2} \in \mathbb{R}$$

são positivas definidas sobre \mathbb{R} .

O exemplo a seguir responde ao questionamento do final do Capítulo 2 – Ou seja, verificar a positividade definida da função

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{1}{1-ix} \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 3.2.2 *Se a é uma constante positiva, então as funções*

$$\delta_a(x) = \frac{a}{a-ix} \quad e \quad \overline{\delta_a(x)} = \frac{a}{a+ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

são positivas definidas sobre \mathbb{R} .

Verificação: Assuma que $a > 0$. Cálculo elementar revela que

$$d\mu(t) = a\chi_{[0,\infty)}(t)e^{-at} dt, \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma medida de probabilidade sobre \mathbb{R} , cuja função característica é

$$\delta_a(x) = \frac{a}{a - xi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pela Proposição 3.2.1, as funções δ_a e $\bar{\delta}_a$ são positivas definidas sobre \mathbb{R} . ■

O exemplo acima acarreta a seguinte consequência a respeito da família $\{\delta_a : a > 0\}$.

Exemplo 3.2.3 *Se a é uma constante positiva, então $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f_a(x) = \frac{a}{a + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

é uma função analítica e positiva definida sobre \mathbb{R} .

Verificação: Seja a um escalar positivo. Pela Proposição 2.5.1 a classe $PD_{\mathbb{R}^+}$ é fechada em relação a conjugação e a produto de funções. Como $\delta_{\sqrt{a}} \in PD_{\mathbb{R}^+}$, a função

$$\frac{a}{a + x^2} = \delta_{\sqrt{a}}(x) \overline{\delta_{\sqrt{a}}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

é positiva definida sobre \mathbb{R} , enquanto que a analiticidade segue do Teorema 3.1.1 notando que

$$(-1)^n f_a^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{a^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

■

Uma forma alternativa para a verificação da positividade definida do exemplo anterior é como segue. De fato, basta notar que

$$d\mu(t) = \frac{\sqrt{a}}{2} e^{-\sqrt{a}|t|} dt, \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma medida de probabilidade sobre \mathbb{R} e que

$$\frac{a}{a + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O Exemplo 3.2.3 responde a questão levantada no parágrafo que segue à Proposição 3.1.3 – Isto é, não faz sentido uma contraparte daquela proposição para derivadas de ordem ímpar. De fato, as derivadas de ordem ímpar de f_a anulam-se em 0, sem que ela seja constante.

Notamos que as funções obtidas nos três últimos exemplos são diferenciáveis de todas as ordens em \mathbb{R} e na realidade são analíticas em \mathbb{R} . No entanto, não há garantia que toda função

característica tenha tão boas propriedades. Fechamos essa seção, exibindo uma condição suficiente sobre a medida para garantir a derivabilidade de todas as ordens de f_μ em \mathbb{R} .

Necessitamos de um resultado técnico envolvendo a sequência (r_n) , onde r_n é uma função a valores complexos definida como

$$r_n(z) := e^{iz} - 1 - iz - \dots - \frac{(iz)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Lema 3.2.1 *O termo geral da sequência (r_n) tem estimativa*

$$|r_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Demonstração: Note que o resultado do lema segue quando $z = 0$. Caso contrário, denotando $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ e usando a identidade

$$r_0(z) = e^{iz} - 1 = iz \int_0^1 e^{izt} dt,$$

vemos que

$$|r_0(z)| = |z| \left| \int_0^1 e^{izt} dt \right| \leq |z| \int_0^1 |e^{iat-bt}| dt = |z| \int_0^1 e^{-bt} dt.$$

Para $t \in [0, 1]$, valem as estimativas

$$e^{-tb} \leq 1 \leq e^{|z|}, b > 0 \quad \text{e} \quad e^{-bt} \leq e^{-b} \leq e^{|z|}, b < 0,$$

revelando que $|r_0(z)| \leq |z|e^{|z|}$, $z \in \mathbb{C}$. Procedendo por indução sobre $n \in \mathbb{Z}_+$, suponhamos que a desigualdade vale quando n é um inteiro positivo. Calculando diretamente, vemos que

$$iz \int_0^1 r_n(tz) dt = iz \int_0^1 \left(e^{izt} - \sum_{j=0}^n \frac{(iz)^j t^j}{j!} \right) dt = iz \left(\frac{e^{iz}}{iz} - \frac{1}{iz} - \sum_{j=0}^n \frac{(iz)^j}{(j+1)!} \right) = r_{n+1}(z).$$

Em consequência usando a hipótese de indução chegamos à desigualdade

$$|r_{n+1}(z)| \leq |z| \int_0^1 |r_n(tz)| dt \leq \frac{|z|^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 t^{n+1} e^{t|z|} dt.$$

Agora, empregando expansão de Maclaurin de $t|z| \in \mathbb{R} \mapsto e^{t|z|}$, chegamos a

$$\int_0^1 t^{n+1} e^{t|z|} dt \leq \frac{e^{|z|}}{n+2},$$

mostrando que a estimativa do lema vale para $n+1$. Assim, concluímos a prova do lema. ■

Teorema 3.2.2 Se $\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t) < \infty$, $n = 0, 1, \dots$, então

$$f_{\mu}^{(n)}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (ti)^n e^{i\alpha t} d\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Suponhamos que f_{μ} seja como na hipótese do teorema. Então, para $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f_{\mu}(\alpha + h) - f_{\mu}(\alpha)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{e^{i(\alpha+h)t} - 1}{th} e^{i\alpha t} d\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aplicando o lema anterior quando $n = 0$, obtemos

$$\left| t \frac{e^{ith} - 1}{th} \right| \leq |t| \leq \frac{t^2 + 1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se as potências t^n são μ -integráveis, então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$f'_{\mu}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i(\alpha+h)t} - 1}{h} e^{i\alpha t} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ti e^{i\alpha t} d\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Seguindo os passos acima, calculamos as derivadas de ordem $2k - 1$, notando-se que

$$|t|^{2k-1} \leq \frac{t^{2k} + t^{2k-2}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

para garantir a integrabilidade do integrando mediante o uso da hipótese sobre μ . Como as derivadas de ordem par seguem diretamente, a prova está finalizada. ■

Para o cálculo a seguir, recordamos a definição de função gama dada pela integral ([1, p. 255])

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

decorrendo, então, que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Em particular, que para $a > 0$, a medida de probabilidade do Exemplo 3.2.2 satisfaz a igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t) = \frac{n!}{a^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Como

$$\delta_a^{(n)}(x) = \frac{i^n n!}{a^n} \delta_a(x)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

pelo teorema anterior,

$$\delta_a(x)^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n e^{(ix-a)t} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em consequência, a sequência de funções integrais

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{(ix-a)t} dt = \frac{(n-1)!}{(a-ix)^n}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, \dots$$

são positivas definidas sobre \mathbb{R} .

A seguinte consequência do Teorema 3.2.2 ratifica a estimativa presente na Proposição 3.1.2.

Corolário 3.2.1 *Sob a hipótese do teorema anterior*

$$|f_\mu^{(m_1+m_2)}(\alpha)|^2 \leq (-1)^{m_1+m_2} f_\mu^{(2m_1)}(0) f_\mu^{(2m_2)}(0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, m_1, m_2 = 0, 1, \dots$$

Demonstração: Sejam m_1 e m_2 inteiros não negativos. Pelo teorema anterior,

$$|f_\mu^{(m_1+m_2)}(\alpha)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^\infty |t|^{m_1+m_2} d\mu(t) \right)^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|f_\mu^{(m_1+m_2)}(\alpha)|^2 \leq (-1)^{m_1+m_2} \int_{-\infty}^\infty (-1)^{m_1} t^{2m_1} d\mu(t) \int_{-\infty}^\infty (-1)^{m_2} t^{2m_2} d\mu(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como $f_\mu^{(2m)}(0) = \int_{-\infty}^\infty (-1)^m t^{2m} d\mu(t)$, $m = 0, 1, \dots$, o resultado segue. ■

3.3 Holomorfia sobre faixas complexas horizontais

Nesta seção, descrevemos o processo pelo qual é possível estender holomorficamente certas funções positivas definidas reais a uma faixa horizontal do plano de Argand-Gauss contendo o eixo real. No entanto, desde já alertamos que a positividade usual não é preservada. Em vez, um outro tipo de positividade surge naturalmente, cujas propriedades serão vistas a partir da Seção 3.5.

Começamos recordando conceitos básicos adicionais usados diretamente aqui ou daqui por diante.

Definição 3.3.1 *Seja \mathcal{U} um conjunto não vazio e aberto de \mathbb{C} . A função $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa*

em $\alpha \in \mathcal{U}$ quando o limite

$$f'(\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$$

é um escalar complexo. A função f é holomorfa em \mathcal{U} quando ela o for em cada ponto de \mathcal{U} .

O resultado da análise relacionando analiticidade e holomorfia é o assunto a seguir ([23, p. 139, 279]).

Teorema 3.3.1 *Seja J um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} . Então, a função $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em $\alpha \in J$ se e somente se f possui uma extensão holomorfa em um disco aberto complexo centrado em α .*

Demonstração: Assuma que $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica no ponto $\alpha \in J$. Então, existe um $r > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n, \quad x \in (\alpha - r, \alpha + r) \subset J.$$

Segue que a função $F : \Delta(\alpha + i0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n, \quad z \in \Delta(\alpha + i0, r) \quad (3.5)$$

é uma extensão de f no disco aberto

$$\Delta(\alpha + 0i, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}.$$

A holomorfia de F em tal disco é clara.

A recíproca segue do fato que toda função holomorfa em $\Delta(\alpha + 0i, r)$ é representável por uma série e, conseqüentemente, a função f é analítica em α . Assim, a prova do teorema está concluída. ■

O teorema anterior tem a seguinte consequência importante para esse trabalho.

Corolário 3.3.1 *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica se e somente se existe $b > 0$ tal que f se estende holomorficamente à $H(-b, b)$, para algum $b > 0$.*

Demonstração: Assuma que f é analítica em cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Pelo teorema anterior, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $r_\alpha > 0$ tal que $F_\alpha : \Delta(\alpha + 0i, r_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma extensão holomorfa de f . Segue que

se $b = \inf\{r_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$, então

$$H(-b, b) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \Delta(\alpha + 0i, b)$$

e a função $F : H(-b, b) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(z) = F_\alpha(z)$, $z \in \Delta(\alpha + 0i, b)$ é uma extensão holomorfa de f sobre $H(-b, b)$.

Reciprocamente, suponha que para alguma constante positiva b , a função $F : H(-b, b) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma extensão holomorfa de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Em particular, a função F é representável por uma série de Taylor em torno de cada ponto $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a função f é analítica em \mathbb{R} . ■

Dando prosseguimento, consideramos a função característica $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da medida de probabilidade μ sobre \mathbb{R} como na Definição 3.2.1 – Ou seja,

$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A existência de extensão holomorfa de f_μ sobre faixas horizontais complexas está vinculada a convergência das integrais

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Para identificar para quais $s \in \mathbb{R}$ essa convergência ocorre, definimos

$$s_\mu^+ := \sup \left\{ s \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) < \infty \right\}, \quad s_\mu^- := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) < \infty \right\}.$$

Usando a notação do Exemplo 2.1.2, chamamos a atenção para o fato de que o conjunto

$$H(s_\mu^-, s_\mu^+) = \{z \in \mathbb{C} : s_\mu^- < \text{Im}(z) < s_\mu^+\}$$

pode ser vazio, para os casos em que s_μ^- e s_μ^+ são finitos. De fato, como $s_\mu^- \leq 0 \leq s_\mu^+$, a faixa horizontal complexa $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ é vazia se e somente se $s_\mu^- = 0 = s_\mu^+$ ([23]). Assim, a faixa $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ é não vazia sempre que $s_\mu^- < 0$ ou $s_\mu^+ > 0$. Em particular, quando $s_\mu^- < 0$, o eixo real é subconjunto de $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$.

O resultado a seguir assegura, justamente, que ser $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ não vazio é uma condição suficiente para que a função característica da medida probabilidade μ sobre \mathbb{R} tenha extensão holomorfa sobre $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$. Na realidade, o conjunto $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ constitui uma faixa maximal, onde f tem extensão holomorfa.

Teorema 3.3.2 *Se $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ contém \mathbb{R} , então f_μ se estende holomorficamente à $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ assumindo a forma*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tzi} d\mu(t), \quad z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+).$$

Adicionalmente, para cada $z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$, a função $t \in \mathbb{R} \mapsto (ti)^n e^{izt} \in \mathbb{C}$ é μ -integrável e

$$F^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (ti)^n e^{izt} d\mu(t), \quad z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

Demonstração: Suponha que a faixa horizontal $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ é não vazia e considere a função característica de μ dada por

$$f_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desde que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\mu(t) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\Im m(z)} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

a função f se estende à

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\mu(t)$$

que é convergente sempre que $z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$. Para provar a segunda afirmação do teorema, sejam $z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ e $h \in \mathbb{C}$ tais que $z+h \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$. Segue que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{e^{ith} - 1}{th} e^{izt} d\mu(t), \quad h \neq 0.$$

Pelo Lema 3.2.1,

$$\left| t \frac{e^{ith} - 1}{th} e^{izt} \right| = \frac{|t|}{|ht|} |e^{ith} - 1| e^{-t\Im m(z)} \leq |t| e^{-t\Im m(z)} e^{|th|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, escolhendo $\delta > 0$ de modo que $|h| < \delta/2$ juntamente com a desigualdade $s \leq e^s$, $s \in \mathbb{R}$, chegamos à estimativa

$$\frac{\delta}{2} \left| t \frac{e^{ith} - 1}{th} e^{izt} \right| \leq \frac{|t|\delta}{2} e^{-t\Im m(z)} e^{|th|} \leq e^{|t|\delta} e^{-t\Im m(z)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+).$$

Como para cada $z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$, a função

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2}{\delta} e^{|t|\delta} e^{-t\Im m(z)} \in \mathbb{R}$$

é μ -integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i(h+z)t} - 1}{h} e^{izt} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (it) e^{izt} d\mu(t),$$

provando (3.6) quando $n = 1$. A prova para os demais inteiros positivos n se faz recursivamente repetindo a argumentação anterior. ■

Corolário 3.3.2 *Seja μ uma medida de probabilidade sobre \mathbb{R} . Se $s_{\mu}^{-} < 0$, então f_{μ} é analítica em \mathbb{R} .*

Demonstração: Suponha que $s_{\mu}^{-} < 0$ e considere $b = \min\{-s_{\mu}^{-}, s_{\mu}^{+}\}$. Então, pela observação abaixo da definição de s_{μ}^{+} na página 30, a faixa $H(s_{\mu}^{-}, s_{\mu}^{+})$ é não vazia. Segue que a faixa $H(-b, b)$ é não vazia e contém \mathbb{R} . Pelo teorema anterior f se estende holomorficamente à uma função $F : H(-b, b) \rightarrow \mathbb{C}$. A conclusão da prova, agora, segue do Corolário 3.3.1. ■

Duas comparações merecem destaque a respeito de uma medida de probabilidade μ sobre \mathbb{R} , nesse momento.

- O Teorema 3.2.2 revela que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n d\mu(t) < \infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

é uma condição suficiente para que f_{μ} seja derivável de todas as ordens em \mathbb{R} .

- O Corolário 3.3.2 mostra que

$$s_{\mu}^{-} := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) < \infty \right\} < 0$$

é condição suficiente para que f_{μ} seja analítica e, portanto derivável de todas as ordens em \mathbb{R} .

- Essas duas observações leva-nos a conclusão que, de algum modo, a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) < \infty \tag{3.7}$$

possa ser comparada com a integrabilidade das potências t^n como no Teorema 3.2.2, embora não se possa garantir que $t^n \leq e^{-st}$, $s, t \in \mathbb{R}$ e $n = 0, 1, \dots$

O teorema anterior implica nas seguintes extensões holomorfas, além de exibir um exemplo, onde, de fato, a constante s_μ^- é negativa. Nos exemplos seguintes também identificamos $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$.

Exemplo 3.3.1 *Se a é uma constante positiva, então*

$$F(z) = \frac{a}{a - iz} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} d\mu(t)$$

é holomorfa em $H(-a, \infty) = \{z \in \mathbb{C} : -a < \Im m(z) < \infty\}$.

Verificação: Assuma que $a > 0$. Pelo Exemplo 3.2.2 $d\mu(t) = a\chi_{[0, \infty)}(t)e^{-at} dt$, $t \in \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade sobre \mathbb{R} , cuja função característica é

$$f(x) = \frac{a}{a - xi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) = a \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{a}{a+s} \left(1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s+a)b}\right),$$

revelando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) = \begin{cases} \frac{a}{a+s}, & \text{se } s > -a \\ \infty, & \text{se } s \leq -a. \end{cases}$$

Assim, $s_\mu^+ = \sup\{s \in \mathbb{R} : s + a > 0\} = \infty$ e $s_\mu^- = \inf\{s \in \mathbb{R} : s + a > 0\} = -a$, concluindo a verificação da afirmação do exemplo. ■

Exemplo 3.3.2 *Se a é uma constante positiva, então a função*

$$F(z) = \frac{a}{a + z^2}$$

é holomorfa em $H(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

Verificação: Assuma que $a > 0$. Pelo Exemplo 3.2.2, a função do enunciado é a extensão da função característica da medida

$$d\mu(t) = \frac{\sqrt{a}}{2} e^{-\sqrt{a}|t|} dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para determinar s_μ^+ e s_μ^- , notamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\sqrt{a}-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{a}+s)t} dt \right).$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) = \begin{cases} \frac{a}{a-s^2}, & \text{se } s \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \\ \infty, & \text{se } s \notin (-\sqrt{a}, \sqrt{a}). \end{cases}$$

Segue que $s_\mu^+ = \sup \{s \in \mathbb{R} : s + a > 0\} = \sqrt{a}$ e $s_\mu^- = \inf \{s \in \mathbb{R} : s + a > 0\} = -\sqrt{a}$. Portanto, a função do exemplo é holomorfa em $H(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$. ■

A extensão da função g do Exemplo 3.3.2 restrita ao eixo imaginário torna-se

$$\frac{a}{a-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty} d\mu(t), \quad -\sqrt{a} < y < \sqrt{a},$$

enquanto sua restrição ao eixo real é

$$\frac{a}{a+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R},$$

conforme o Exemplo 3.2.3.

Exemplo 3.3.3 Se a é um escalar real, então

$$z \in \mathbb{C} \mapsto e^{iaz} \in \mathbb{C} \quad e \quad z \in \mathbb{C} \mapsto \cos(az) = \frac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{2} \in \mathbb{R}$$

são holomorfas em $H(-\infty, \infty)$.

Verificação: Assuma que a é um escalar real e considere μ , a medida de probabilidade de densidade 1 em a , cuja função característica é

$$f(x) = e^{iax}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} d\mu(t) = e^{-as}$, $s_\mu^+ = \infty$ e $s_\mu^- = -\infty$. Assim, a afirmação do exemplo segue. ■

3.4 Raio de convergência e holomorfia

Estudamos aqui um tipo de extensão holomorfa em faixas horizontais, as quais são construídas diferentemente do que fizemos na seção anterior. O diferencial é que aqui as faixas $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ dão a faixas horizontais simétricas em torno do eixo real assumindo a forma $H(-b, b)$. Nossa tarefa nessa seção é investigar um procedimento para se calcular a altura dessa faixa ou até mesmo determiná-la.

Para facilitar, introduzimos a sequência de funções $(a_n(\alpha))$, onde $a_n : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é definida como

$$a_n(\alpha) = \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots,$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função.

O primeiro resultado aqui garante que o limite superior de $(a_n(\alpha))$ é dominado pelo limite superior da sequência numérica $(a_n(0))$.

Proposição 3.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida. Se f é de classe $C^\infty(0)$, então $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(\alpha) \leq \rho(0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, onde*

$$\rho(0) := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(0).$$

Demonstração: Primeiramente, usamos a Proposição 3.1.2 para garantir que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, revelando que $(a_n(\alpha))$ está bem definida em toda a reta. A mesma proposição aplicada à $m_1 = m_2 = n$, resulta em

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

enquanto que aplicada à $m_1 = n$ e $m_2 = n + 1$ nos leva à estimativa

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[2n+1]{\frac{|f^{(2n+1)}(\alpha)|}{(2n+1)!}} \right)^2 &\leq \sqrt[2n+1]{\frac{|f^{(2n)}(0)|}{(2n)!}} \sqrt[2n+1]{\frac{|f^{(2n+2)}(0)|}{(2n+2)!}} \sqrt[2n+1]{\frac{2n+2}{2n+1}} \\ &= \left(\sqrt[2n]{\frac{|f^{(2n)}(0)|}{(2n)!}} \right)^{\frac{2n}{2n+1}} \left(\sqrt[2n+2]{\frac{|f^{(2n+2)}(0)|}{(2n+2)!}} \right)^{\frac{2n+2}{2n+1}} \sqrt[2n+1]{\frac{2n+2}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$a_{2n+1}(\alpha)^2 \leq a_{2n}(0)^{\frac{2n}{2n+1}} a_{2n+2}(0)^{\frac{2n+2}{2n+1}} \sqrt[2n+1]{\frac{2n+2}{2n+1}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots$$

Uma vez que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\frac{2n+2}{2n+1}} = 1 \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0)^{\frac{2n}{2n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2}(0)^{\frac{2n+2}{2n+1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0),$$

chegamos a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(0). \quad (3.9)$$

Portanto, de (3.8) e (3.9)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(0),$$

finalizando a prova. ■

Na próxima proposição exibimos condições sob as quais a sequência $(a_n(\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{R}$ torna-se limitada.

Proposição 3.4.2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe $C^\infty(0)$. Se (3.1) vale, então $\rho(0) < \infty$.*

Demonstração: Assuma que f seja uma função como no enunciado. Logo, a sequência $(a_n(\alpha))$ está bem definida em toda a reta e

$$a_{2n}(\alpha) \leq \sqrt[2n]{\frac{D}{M^{2n}}} = \frac{\sqrt[2n]{D}}{M}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots$$

Particularmente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0) \leq \frac{1}{M},$$

enquanto que (3.9) conduz a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}(0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{2n}(0) \leq \frac{1}{M}.$$

Desse modo, temos duas subsequências de $(a_n(0))$, cujo limite superior existe. Por [25, Theorem 1.4], concluímos que

$$\rho(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(0) \leq \frac{1}{M}.$$

O final da prova é consequência da proposição precedente. ■

Sob as condições da Proposição 3.4.2, faz sentido considerar a função raio $R : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty]$

como sendo

$$R(\alpha) := \begin{cases} \frac{1}{\rho(\alpha)}, & \text{se } \rho(\alpha) < \infty \\ \infty, & \text{se } \rho(\alpha) = 0, \end{cases}$$

onde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ é dada por

$$\rho(\alpha) := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Especialmente,

$$R(0) := \begin{cases} \frac{1}{\rho(0)}, & \text{se } \rho(0) \neq 0 \\ \infty, & \text{se } \rho(0) = 0. \end{cases}$$

Agora, estamos prontos para enunciar e provar o resultado principal da presente seção.

Teorema 3.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe $C^\infty(0)$ tal que (3.1) vale.*

Então:

- (1) *Existe $b \in (0, \infty)$ tal que f estende-se holomorficamente à $H(-b, b)$.*
- (2) *Se $\rho(0) \neq 0$ e b é a constante do item anterior, então $M \leq b = R(0)$.*

Demonstração: Assuma f como na hipótese do teorema. Então, pelo Teorema 3.1.1, a função f é analítica em \mathbb{R} . Pelo Corolário 3.3.1, existe uma constante positiva b tal que f estende-se holomorficamente à $H(-b, b)$, provando (1).

Para provar (2), suponha que $\rho(0) \neq 0$ e considere b do item anterior. Pelo Corolário 3.3.1, $b = \inf \{R(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. A Proposição 3.4.1 implica em $R(0) \leq R(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, revelando que $R(0) \leq b \leq R(0)$. A última afirmação, agora, é consequência da prova da Proposição 3.4.2 e da definição de $R(0)$. ■

O teorema precedente vai além do Teorema 3.3.2, mostrando que a extensão holomorfa de f à $H(-R(0), R(0))$, quando for o caso, apresenta singularidade em $iR(0)$ ou em $-iR(0)$. De fato, se esse não for o caso, então f tem extensão holomorfa em $\overline{\Delta(0, R(0))}$, donde tiramos que o raio de convergência centrado em 0 é maior que $R(0)$, contradizendo o teorema.

O exemplo a seguir ratifica o Exemplo 3.3.2.

Exemplo 3.4.1 *Se a é uma constante positiva, então as funções*

$$F(z) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + iz} \quad e \quad G(z) = \frac{a}{a + z^2}$$

são holomorfas em $H(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

Verificação: Basta notar que para todo $a > 0$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\sqrt{a^n}} z^n, \quad |z| < \sqrt{a} \quad \text{e} \quad R(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{n/2}} = \sqrt{a}.$$

Analogamente se procede para averiguar a afirmação sobre G . ■

3.5 Função positiva definida relativo à diferença conjugada

Estudamos aqui uma classe de funções positivas definidas sobre faixas horizontais do plano complexo. No entanto, veremos que o tipo positividade definida não é o usual estudado na Seção 2.4.

Novamente, a motivação provém do Teorema de Bochner. A propriedade de positividade a seguir esclarece essa motivação e chama à atenção para uma nova família de funções positivas definidas.

Teorema 3.5.1 *Se $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ contém \mathbb{R} , então f_μ se estende à $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ e sua extensão holomorfa $F : H(s_\mu^-, s_\mu^+) \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j K_F(z_j, \bar{z}_k) \bar{\lambda}_k \geq 0,$$

para quaisquer inteiro não negativo n , $z_1, \dots, z_n \in R(-\infty, \infty; s_\mu^-/2, s_\mu^+/2)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Assuma que $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$ contenha \mathbb{R} . Pelo Teorema 3.3.2, a função

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\mu(t), \quad z \in H(s_\mu^-, s_\mu^+)$$

é a extensão holomorfa de f_μ sobre $H(s_\mu^-, s_\mu^+)$. Para $z_1, \dots, z_n \in R(-\infty, \infty; s_\mu^-/2, s_\mu^+/2)$,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j K_F(z_j, \bar{z}_k) \bar{\lambda}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e^{itz_j} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e^{itz_k} \right)} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{itz_j} \right|^2 d\mu(t).$$

Como μ é finita e positiva, a forma quadrática acima é não negativa. ■

Corolário 3.5.1 Se $s_{\mu}^- < 0$, então f_{μ} possui extensão holomorfa $F : H(-b, b) \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j K_F(z_j, \bar{z}_k) \bar{\lambda}_k \geq 0,$$

para quaisquer inteiro não negativo n , $z_1, \dots, z_n \in R(-\infty, \infty; -b/2, b/2)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Demonstração: A prova é consequência do Corolário 3.3.2 e do teorema anterior. ■

Este é o ponto da dissertação, onde a positividade definida difere do conceito usual num aspecto principal. A operação $(z, w) \in \mathbb{C} \mapsto z - \bar{w} \in \mathbb{C}$ não é a operação do grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$ estudado na Seção 2.4. Em síntese, a função F é a extensão holomorfa de $f \in PD_{\mathbb{R}^+}$, porém não preserva a positividade definida no sentido usual. Isso motiva o estudo mais detalhado da família de funções satisfazendo essa positividade dependente de uma diferença conjugada complexa.

Definição 3.5.1 Seja Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{C} . A função $f : \mathcal{D}_{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva definida relativa à diferença conjugada \mathcal{D}_{Ω} quando o núcleo

$$(z, w) \in \Omega \times \Omega \mapsto K_f(z, \bar{w}) = f(z - \bar{w}), \quad z, w \in \Omega$$

é positivo definido.

A seguir provamos duas desigualdades básicas que ocorrem para essa família de funções.

Proposição 3.5.1 Sejam Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{R} e f uma função positiva definida relativo à \mathcal{D}_{Ω} . Se

$$\frac{x}{2} + i \left(\frac{y+u}{2} \right), \quad -\frac{x}{2} + i \left(\frac{y-u}{2} \right) \in \Omega, \quad x, y, u \in \mathbb{R},$$

então $f(-x + iy) = \overline{f(x + iy)}$ e $|f(x + iy)|^2 \leq f(i(y+u))f(i(y-u))$.

Demonstração: Assuma que

$$z_1 = \frac{x}{2} + i \left(\frac{y+u}{2} \right), \quad z_2 = -\frac{x}{2} + i \left(\frac{y-u}{2} \right) \in \Omega, \quad x, y, u \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, as diferenças conjugadas de z_1 e z_2 são

$$z_1 - \bar{z}_1 = i(y+u), \quad z_1 - \bar{z}_2 = x + iy, \quad z_2 - \bar{z}_1 = -x + iy, \quad z_2 - \bar{z}_2 = i(y-u) \in \mathcal{D}_{\Omega}.$$

Usando o Teorema 2.3.1, temos que $K_f(z_2, \bar{z}_1) = \overline{K_f(z_1, \bar{z}_2)}$ e $|K_f(z_1, \bar{z}_2)|^2 \leq K_f(z_1, \bar{z}_1)K_f(z_2, \bar{z}_2)$, implicando nas duas propriedades da proposição. ■

A observação que segue à Definição 2.1.3 conclui que a interseção de \mathcal{D}_Ω com o eixo imaginário complexo é não vazia. A proposição anterior revela que tomando $x = 0$, se for o caso, concluimos que f restrita ao eixo imaginário tem como imagem uma constante real não negativa. Particularmente, existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(iy_0) = \overline{f(iy_0)}.$$

Outras propriedades básicas estão na sequência.

Proposição 3.5.2 *Sejam Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{R} e $f : \mathcal{D}_\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Então:*

- (1) *Se f é positiva definida relativo à \mathcal{D}_Ω , então \bar{f} também o é.*
- (2) *Se f e g são funções positivas definidas relativo à \mathcal{D}_Ω , então fg também o é.*
- (3) *Se f_1, \dots, f_m são funções positivas definidas relativo à \mathcal{D}_Ω , igualmente o é a soma*

$$c_1 f_1 + \dots + c_m f_m, \quad c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}_+.$$

- (4) *Seja (f_k) uma sequência de funções convergindo pontualmente para f . Se cada f_k é positiva definida relativo à \mathcal{D}_Ω , então f também o é.*

O exemplo a seguir é resultante das propriedades acima auxiliado por certas séries geométricas.

Exemplo 3.5.1 *A função*

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 + i\frac{z}{k})(1 - i\frac{z}{k})} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{z^2}{k^2})}$$

é positiva definida relativa à diferença conjugada $H(-1, 1) = \mathcal{D}_{R(-\infty, \infty; 1/2, 1/2)}$.

A definição abaixo introduz outra família de funções positivas definidas que está estreitamente relacionada às funções que estudamos nessa parte do trabalho. Finalizamos essa seção provando tal resultado.

Definição 3.5.2 *Seja Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{C} . A função $f : S_\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é positiva definida relativa à soma conjugada S_Ω quando o núcleo*

$$(z, w) \in \Omega \times \Omega \mapsto K_f(z, -\bar{w}) = f(z + \bar{w}), \quad z, w \in \Omega$$

é positivo definido.

A referência ([1]) pode ser consultada, caso o leitor deseje um estudo mais completo sobre a função gama que aparece no exemplo abaixo.

Exemplo 3.5.2 A função gama é definida para um número complexo z , cuja parte real é positiva, como sendo a função dada pela integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Então, Γ é positiva definida relativa à soma conjugada no semi-plano à direita do eixo imaginário.

Proposição 3.5.3 Seja Ω um subconjunto não vazio de \mathbb{C} . A função complexa f é positiva definida relativo à diferença conjugada $\mathcal{D}_{i\Omega}$ se e somente se a função $z \in \mathcal{S}_{\Omega} \mapsto f(iz) \in \mathbb{C}$ é positiva definida relativo à soma conjugada $i\mathcal{S}_{\Omega}$.

Demonstração: Primeiramente, faz bem recordar o Lema 2.1.1 assegurando que $i\mathcal{S}_{\Omega} = \mathcal{D}_{i\Omega}$. Desse modo, para quaisquer $z_1, \dots, z_n \in \Omega$,

$$iz_j - \bar{iz}_k = i(z_j + \bar{z}_k) \in i\mathcal{S}_{\Omega} = \mathcal{D}_{i\Omega}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Logo, as igualdades

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j f(iz_j - \bar{iz}_k) \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j f(i(z_j + \bar{z}_k)) \bar{\lambda}_k$$

fazem sentido e implicam na equivalência desejada. ■

3.6 Extensão holomorfa de função exponencialmente convexa

Com esta seção encerramos o trabalho, onde estudamos a extensão holomorfa de função positiva definida relativa a soma de números reais. No último resultado investigamos a relação entre as quatro famílias de positividade definida presentes nesse trabalho.

Definição 3.6.1 Uma função $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é exponencialmente convexa quando o núcleo

$$(x, y) \in (a/2, b/2) \times (a/2, b/2) \mapsto K_g(x, -y) = g(x+y) \in \mathbb{R}$$

é positivo definido no sentido da Definição 2.5.1.

Equivalentemente, a função g é exponencialmente convexa quando a forma quadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j g(x_j + x_k) \xi_k$$

é não negativa para quaisquer inteiro não negativo n , $x_1, \dots, x_n \in (a/2, b/2)$ e $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$. Em particular, vemos que toda função exponencialmente convexa satisfaz a desigualdade

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{g(x)g(y)}, \quad x, y \in (a, b).$$

Justamente, essa é a propriedade que motiva o nome dado a essa família de funções.

Um famoso teorema devido a Bernstein e Widder dá uma representação integral para as funções que são exponencialmente convexas ([14, p. 107]).

Teorema 3.6.1 (Teorema de Bernstein-Widder) *Uma função $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é exponencialmente convexa e contínua se e somente se*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} d\sigma(t), \quad x \in (a, b), \quad (3.10)$$

onde σ é uma medida positiva sobre \mathbb{R} tal que a integral acima existe.

Como o Teorema de Bochner possibilita extensões holomorfas de funções característica é de se esperar que as funções possuindo representação integral como em (3.10) também tenham e dessa vez sobre faixas verticais contendo o eixo imaginário.

Teorema 3.6.2 *Seja $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função exponencialmente convexa e contínua. Então, a função g admite a extensão*

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} d\sigma(t), \quad z \in V(a, b)$$

que é positiva definida relativa a soma conjugada de $R(-\infty, \infty; a/2, b/2)$. Adicionalmente, para cada $z \in V(a, b)$, a função $t \in \mathbb{R} \mapsto (-t)^n e^{zt} \in \mathbb{C}$ é σ -integrável e

$$G^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)^n e^{-zt} d\sigma(t), \quad z \in V(a, b), \quad n = 0, 1, \dots$$

Demonstração: Inicialmente, usamos o Teorema de Bernstein-Widder para representar g na

forma (3.10). Como $|e^{-zt}| = e^{-t\Re(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, o mesmo teorema assegura que a integral

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} d\sigma(t)$$

é convergente sempre que $z \in V(a, b)$ e G é positiva definida relativa a soma conjugada do conjunto $R(-\infty, \infty; a/2, b/2)$. A derivação sob o sinal de integração sob as condições estabelecidas é um fato recorrente. Resta provar que a n -ésima derivada de G em $z \in V(a, b)$ é σ -integrável.

Para isso, notamos que

$$\left| \frac{\partial^n e^{-zt}}{\partial z^n} \right| = |t|^n e^{-xt}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

implicando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^n e^{-xt} d\sigma(t) = (-1)^n \int_{-\infty}^0 t^n e^{-xt} d\sigma(t) + \int_0^{\infty} t^n e^{-xt} d\sigma(t), \quad (3.11)$$

onde

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-xt} d\sigma(t) = \int_0^{\infty} t^n e^{-(x-\alpha)t} e^{-\alpha t} d\sigma(t), \quad \alpha \in (a, x), x \in (a, b).$$

Para x e α fixados como acima, vemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-(x-\alpha)t} = 0$ e $t \in [0, \infty) \mapsto e^{-\alpha t} \in \mathbb{R}$ é σ -integrável. Segue que a segunda integral em (3.11) é convergente. O estudo sobre a convergência da primeira integral se faz analogamente. Assim, a última afirmação do teorema está provada. ■

O objetivo do teorema a seguir é relacionar as quatro famílias de funções positivas definidas estudadas nesse trabalho e com ele finalizamos a dissertação.

Teorema 3.6.3 *Seja $F : H(a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. São equivalentes:*

- (1) *A função F é positiva definida relativa a diferença conjugada de $R(a/2, b/2; -\infty, \infty)$.*
- (2) *Existe uma medida μ positiva e finita sobre \mathbb{R} tal que*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\mu(t), \quad z \in H(a, b).$$

- (3) *Para todo $y \in (a, b)$, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x + iy) \in \mathbb{C}$ é positiva definida sobre \mathbb{R} .*
- (4) *Para todo $y \in (a, b)$, existe uma medida finita e positiva ν_y sobre \mathbb{R} tal que*

$$F(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xit} d\nu_y(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (5) *A função $y \in (a, b) \mapsto F(iy) \in \mathbb{C}$ é exponencialmente convexa.*

(6) Existe uma medida μ_I positiva sobre \mathbb{R} tal que

$$F(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yt} d\mu_I(t), \quad y \in (a, b).$$

Demonstração: Em todas as etapas da prova $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são escalares arbitrários de \mathbb{C} . Suponha que para cada y em (a, b) , a função $x \in \mathbb{R} \mapsto f_y(x) = F(x + iy) \in \mathbb{C}$ seja positiva definida sobre \mathbb{R} . Como F é holomorfa em $H(a, b)$, segue que f_y é contínua sobre \mathbb{R} . Assim, o Teorema 3.2.1 garante a implicação de (3) para (4).

A implicação de (4) para (3) segue de cálculo direto.

A equivalência entre (5) e (6) é consequência do Teorema de Bernstein-Widder.

Seguindo, mostramos que (1) é condição suficiente para (3) e (5). Para tanto, seja $y \in (a, b)$ e usamos a hipótese para ver que a soma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F(x_j - x_k + iy) \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F\left(x_j + i\frac{y}{2} - \left(\overline{x_k + i\frac{y}{2}}\right)\right) \bar{\lambda}_k$$

é não negativa para todas escolhas $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Igualmente, a forma quadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F(i(y_j + y_k)) \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F(iy_j - i\bar{y}_k) \bar{\lambda}_k$$

é não negativa para todas escolhas $y_1, \dots, y_n \in (a/2, b/2)$.

Na sequência, assumimos que (2) vale. A hipótese sobre μ implica, então, que a forma quadrática

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F(z_j - \bar{z}_k) \bar{\lambda}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{itz_j} d\mu(t) \right|^2$$

é não negativa para todas escolhas $z_1, \dots, z_n \in R(a/2, b/2; -\infty, \infty)$, provando (1).

Nesse estágio da prova, mostremos que (3) é condição suficiente para (2). Então, assumimos que para algum $y_0 \in (a, b)$, a função $x \in \mathbb{R} \mapsto f_{y_0}(x) = F(x + iy_0) \in \mathbb{C}$ é positiva definida. Usando a equivalência entre (3) e (4), garantimos a existência de uma medida ν_{y_0} finita e positiva sobre \mathbb{R} tal que

$$f_{y_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xit} d\nu_{y_0}(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A analiticidade de f_{y_0} em $\alpha \in \mathbb{R}$ segue da holomorfia de F em $\alpha + 0i$. Logo, a função f_{y_0} estende-se holomorficamente a uma faixa $H(x_0, x_1)$, para $x_0, x_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ admitindo a representação

$$f_{y_0}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\nu_{y_0}(t), \quad z \in H(x_0, x_1).$$

Como $z + iy_0 = \mathcal{R}e(z) + i(\mathcal{I}m(z) + y_0) \in H(a, b)$ se e somente se $z \in H(a - y_0, b - y_0)$, a função f_{y_0} é holomorfa em $H(a - y_0, b - y_0)$. Pela maximalidade de $H(x_0, x_1)$ com essa propriedade, $H(a - x_0, b - y_0) \subset H(x_0, y_0)$. Adicionalmente, $f_{y_0}(z) = f_{y_0}(z) = F(z + iy_0)$, $z \in \mathbb{R}$. Pela unicidade da extensão, segue imediatamente que

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z-iy_0)t} d\mu_{y_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} e^{y_0t} d\mu_{y_0}(t), \quad z \in H(a, b).$$

Considere a medida μ definida nos subconjuntos mensuráveis J de $(-\infty, \infty)$ dada por

$$\mu(J) = \int_J e^{y_0t} d\mu_{y_0}(t)$$

e, conseqüentemente

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\mu(t), \quad z \in H(a, b).$$

Isso mostra que **(2)** vale, implicando que **(1)** também ocorre.

Para fechar as implicações entre os itens do teorema, mostramos que **(5)** implica em **(2)**. Suponha que $x \in (a, b) \mapsto F(xi) \in \mathbb{C}$ é exponencialmente convexa sobre $(a/2, b/2)$. Pelo Teorema de Bernstein-Widder, existe uma medida σ positiva sobre \mathbb{R} tal que

$$F(xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} d\sigma(t), \quad x \in (a, b).$$

Pelo Teorema 3.6.2, essa função admite a extensão holomorfa

$$F(iz) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} d\sigma(t), \quad z \in V(a, b).$$

Como $z \in H(a, b)$ se e somente se $-iz \in V(a, b)$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} d\sigma(t), \quad z \in H(a, b),$$

provando **(2)**. ■

Notamos que a hipótese de holomorfia de $F : H(a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ não pode ser suprimida do Teorema 3.6.3. De fato, considere a função $z \in \mathbb{C} \mapsto F(z) = e^{i\mathcal{R}e(z)} \in \mathbb{C}$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j F(z_j - \bar{z}_k) \bar{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j e^{i\mathcal{R}e(z_j)} e^{-i\mathcal{R}e(z_k)} \bar{\lambda}_k = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{i\mathcal{R}e(z_j)} \right|^2,$$

para todos $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, revelando que as funções

$$x \in \mathbb{R} \mapsto F(x + iy) = e^{xi} \in \mathbb{C}, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R} \mapsto F(iy) = 1 \in \mathbb{C}$$

são positiva definida e exponencialmente convexa, respectivamente. No entanto, as restrições dessas funções ao domínio \mathbb{C} não são holomorfas conforme pode ser verificado via condições de Cauchy-Riemann ([21, p. 69]).

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.
- [2] Aronszajn, N. *Theory of Reproducing Kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 68, no. 3, 337–404, 1950.
- [3] Bhatia, R. *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 1952.
- [4] Berg, C.; Forst, G. *Potencial Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [5] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P. *Harmonic analysis on semigroups: Theory of positive definite and related functions*, Springer-Verlag, 1984.
- [6] Berliet, A.; Thomas-Agnan, C. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*, With a preface by Persi Diaconis, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.
- [7] Buescu, J.; Paixão, A. C. On differentiability and analyticity of positive definite functions. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 375. no. 1, 336–341, 2011.
- [8] Buescu, J.; Paixão, A. C. Complex variable positive definite functions, *Complex Anal. Oper. Theory*, v. 8, 2014.
- [9] Carathéodory, C. Uber den variabilitätsbereich der koeffizienten von potenzreihen, die gegebene Wert nicht annehmen, *Math. Ann.*, v. 64, 95-115, 1997.
- [10] Cheney, W.; Light, W. *A course in approximation theory*, Graduate Studies in Mathematics, 101, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

- [11] Cucker, F.; Smale, S. On the mathematical foundations of learning, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, v. 39, no. 1, 1–49, 2001.
- [12] Donoghue, W. F. *Distributions and Fourier transforms*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1969.
- [13] Folland, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience publication, John Wiley and Sons, 2nd ed., New York, 1999.
- [14] Havin, V. P.; Nikolski, N. K. *Encyclopedia of Mathematical Sciences: Commutative Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [15] Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1985.
- [16] Krantz, S.; Parks, H. *A Primer of Real Analytic Functions: Group Methods in Commutative Harmonic Analysis*, 2nd ed., Birkhäuser, Basel, 2002.
- [17] Lukacs, E., Sasvári, Z. On analytic characteristic functions. *Pac. J. Math.*, v. 3, 615–625, 1953.
- [18] Mathias, M. Uber positive Fourier-Integrale, *Math. Zeit*, v. 16, 103–125, 1923.
- [19] Mercer, J. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. *Phil. Trans. Royal Soc. A.*, v. 209, 415–446, 1909.
- [20] Niedzialomski, Robert. Extension of positive definite functions, Universidade de Iowa, Iowa, 2013.
- [21] Palka, B. *Mathematics Analysis: An Introduction to Complex Function Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [22] Rudin, W. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 3rd ed., 1976.
- [23] Sasvári, Z. *Positive Definite and Definitizable Functions*, *Mathematical Topics*, v. 2, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
- [24] Stewart, James. *Positive definite functions and generalizations, an historical survey*. Rocky Mountain, *Journal of Mathematics*, v. 6, no. 3, 1976.
- [25] Wheeden, R. L.; Zygmund, A. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 1st ed., p. 288, 1977.

Índice

- Cone de funções, 14
- Conjunto diferença conjugada, 5
- Conjunto diferença real, 4
- Conjunto soma conjugada, 5
- Disco aberto do plano complexo, 29
- Esboço de conjuntos diferenças, 7
- Espaço vetorial de matrizes complexas, 7
- Extensão holomorfa, 29
- Faixa horizontal complexa, 6
- Faixa vertical complexa, 6
- Função analítica real, 18
- Função característica, 23
- Função característica de um conjunto, 16
- Função gama, 27, 41
- Função holomorfa, 29
- Função positiva definida relativa à \mathcal{D}_X , 39
- Função positiva definida relativa a \mathcal{S}_X , 40
- Função positiva definida sobre grupo, 13
- Grupo Abelino, 13
- Lema de Schur, 10
- Matriz hermitiana, 7
- Matriz positiva definida, 9
- Matriz semi-positiva definida, 9
- Núcleo invariante por translado, 13
- Produto de Hadamard, 10
- Quadrado complexo de lado r , 7
- Raio de convergência, 37
- Retângulos complexo, 6
- Teorema de Bernstein-Widder, 42
- Teorema de Bochner, 22

Símbolos e Notações

\mathbb{R}	Corpo dos números reais, p. 4
$R(a, b; r_1, r_2)$	Retângulo complexo de lados $b - a$ e $r_2 - r_1$, p. 4
\mathcal{D}_Ω	Conjunto diferença conjugada complexa associada a Ω , p. 5
\mathcal{D}_X	Conjunto diferença real, p. 5
S_Ω	Conjunto soma conjugada complexa associada a Ω , p. 5
$e^{i\theta}$	Número complexo de argumento θ , p. 5
$H(a, b)$	Faixa horizontal complexa de altura $b - a$, p. 6
$V(a, b)$	Faixa vertical complexa de largura $b - a$, p. 6
$\overline{\mathbb{R}}$	Corpo dos reais estendidos contendo $\pm\infty$, p. 6
\mathbb{C}	Plano complexo ou plano de Argand Gauss, p. 6
$\Re(z)$	A parte real do complexo z , p. 6
$M_{m \times n}(\mathbb{C})$	Espaço vetorial das matrizes complexas de ordem m por n , p. 7
A^*	A adjunta da matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$, p. 8
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos inteiros não negativos, p. 11
$G_{K_f}(x_1, \dots, x_n)$	Matriz de Gram associada a uma função f calculada em x_1, \dots, x_n , p. 10
K	Núcleo, p. 10
J	Intervalo aberto de \mathbb{R} , p. 12
\mathcal{G}	Grupo aditivo comutativo, p. 13
$(\mathbb{R}, +)$	Exemplo de grupo abeliano comutativo, p. 13
\mathcal{V}	Espaço vetorial pré-Hilbert sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , p. 14
K_f	Núcleo invariante por translado dependente da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, p. 13
$PD_{\mathcal{G}_+}$	Família de funções positivas definida sobre \mathcal{G} , p. 14
$PD_{\mathbb{R}_+}$	Família de funções positivas definidas sobre \mathbb{R} , p. 16
$\Re(f)$	Função parte real da função complexa f , p. 16
χ_J	Função característica relativa a um conjunto $J \subset \mathbb{R}$, p. 16
\mathcal{A}_ϵ	Conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, p. 17
$C^{(2n)}(\mathbb{R})$	Função de classe $C^{(2n)}$ em \mathbb{R} , p. 17

- $C^{(2n)}(0)$ Função de classe $C^{(2n)}$ numa vizinhança da origem, p. 19
- $C^\infty(J)$ Função de classe C^∞ num aberto $J \subset \mathbb{R}$, p. 19
- $PD_{\mathcal{D}_{\mathbb{R}^+}}$ Família de funções positivas definidas sobre diferença conjugada, p. 19
- f_μ Função característica da medida de probabilidade μ sobre \mathbb{R} , p. 23
- Γ Função gama definida para complexos com parte real positiva, p. 27
- \mathcal{U} Um conjunto aberto de \mathbb{C} , p. 28
- $\Delta(\alpha, r)$ Disco aberto do plano complexo de centro α e raio r , p. 29