

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**ESTUDO DAS PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS
E DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DAS
FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF**

Marcos Amarante Garcia Júnior

Dissertação de Mestrado, orientada pelo Prof. Dr. Armando Bartolome
Bernui Leo

UNIFEI
ITAJUBÁ – MG
ABRIL DE 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**ESTUDO DAS PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS
E DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DAS
FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF**

Marcos Amarante Garcia Júnior

**Dissertação de Mestrado, orientada pelo Prof. Dr. Armando Bartolome
Bernui Leo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física e
Matemática Aplicada - Área de concentração: Astrofísica

UNIFEI
ITAJUBÁ – MG
ABRIL DE 2012

*“Não só Deus joga dados com o universo,
como joga em lugares
onde não podemos ver o resultado.”*

Stephen Hawking

*Aos meus pais
Marcos Amarante Garcia
e Dorotéia Maria Vieira,
À minha irmã
Larissa Vieira Garcia
e à minha namorada
Suelen de Castro.*

Agradecimentos

Agradeço a força física e mental que Deus me concedeu durante esses anos de mestrado. Aos meus pais Marcos e Dorotéia e minha irmã Larissa, por compreenderem meus longos períodos de ausência. À minha namorada Suelen, pelos constantes incentivos e apoios nos momentos de desesperos e dúvidas.

Ao meu orientador, Prof.Dr. Armando Bernui pela paciência no direcionamento de minhas idéias nas horas de maior dificuldade e que sempre esteve a disposição para o esclarecimento de minhas dúvidas em cosmologia.

Ao Prof.Dr. Hektor Monteiro pela força e pelas inúmeras dúvidas esclarecidas em astrofísica estelar e na arte da programação e que também muito me ensinou.

Aos demais professores das disciplinas de mestrado em física e matemática aplicada desta instituição pelo conhecimento transmitido e pelo compartilhamento de experiências.

Ao Adhimar Flávio pelas inúmeras instalações do IDL no sistema operacional LINUX, dicas nos algoritmos do LATEX e IDL.

Ao Rafael Freire pela força e boa vontade na instalação do HEALPix no sistema operacional LINUX.

Aos meus novos amigos feitos durante a realização deste curso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

As flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF) contém informações importantes a respeito da estrutura e evolução do universo. Uma destas informações originou-se na época inflacionária e diz respeito a desvios de gaussianidade na distribuição estatística destas flutuações. O interesse em revelar as assinaturas desses desvios se deve ao fato que existem diversos modelos inflacionários que prevêem tais desvios, assim, confirmar ou descartar a presença deles nos ajudará a conhecer a física do universo jovem. No entanto, existem várias fontes não cosmológicas de desvios de gaussianidade nos dados de flutuações de temperatura da RCF. Assim, é importante empregar um aferidor sensível o suficiente para detectar pequenos desvios de gaussianidade nos mapas da RCF. Neste trabalho testaremos como aferidor o coeficiente de Pearson. Nosso método consiste na aplicação deste aferidor nos dados da RCF do satélite WMAP-7 anos. Um procedimento semelhante é feito com um grande número de mapas Monte Carlo construídos segundo o modelo Λ CDM. A significância estatística de nossos resultados é estabelecida por comparação entre os dados do WMAP e os mapas Monte Carlo.

Palavras-chave

Radiação cósmica de fundo (RCF); flutuações de temperatura da RCF; Modelo Cosmológico Padrão; propriedades estatísticas da RCF.

Abstract

Temperature fluctuations of the cosmic microwave background (CMB) radiation contain valuable information regarding the structure and evolution of the universe. One such information originated in the inflationary epoch concerns Gaussian deviations in the statistical distribution of such fluctuations. Interest in these deviations is due to the fact that there are many inflationary models that predict them, therefore to confirm or rule out their presence will help us to know the physics of the early universe. However, there are various non-cosmological sources of non-Gaussianity in the CMB temperature fluctuations data. Thus, it is important to find an indicator sensitive enough to detect the presence of small non-Gaussianities in CMB data. In this work, we test an indicator based on the Pearson's coefficient definition. Our method relies on the application of this indicator in CMB data from WMAP-7yr. A similar procedure is done with a large set of Monte Carlo Gaussian CMB maps constructed in accordance with Λ CDM model. The usefulness of our approach and the statistical significance of our results is established by comparison between WMAP data and Monte Carlo data.

Keywords

Cosmic microwave background (CMB); temperature fluctuations of the CMB; Standard Cosmological Model; CMB statistical properties.

Conteúdo

Resumo	IV
Abstract	V
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tabelas	XII
1 Introdução	1
2 O Universo Observado	5
2.1 O Universo e o Espectro Eletromagnético	5
2.2 O Princípio Cosmológico	8
2.3 O Universo em Expansão	10
2.3.1 A Lei de Hubble	10
2.4 O Paradoxo de Olbers	11
2.5 A Dinâmica Cósmica	12
2.5.1 A Equação de Friedmann	13
2.5.2 A Métrica de Robertson-Walker	19
2.5.3 A Equação do Fluido Cósmico	20
2.5.4 A Equação da Aceleração	22
2.6 Parâmetros Cosmológicos	23
2.6.1 O Parâmetro de Densidade Crítica	23
2.6.2 O Parâmetro de Densidade	24
2.6.3 O Parâmetro de Desaceleração	25
2.7 A Constante Cosmológica	26
2.8 A Evolução da Densidade de Energia	28

2.9	Modelos Cosmológicos	29
2.10	O Modelo Cosmológico Padrão	30
2.10.1	A Lei de Hubble como Comprovação Observacional	31
2.10.2	Abundância de Elementos Leves	33
2.11	A Radiação Cósmica de Fundo	34
2.11.1	A Detecção da RCF	36
2.11.2	O Satélite COBE	37
2.11.3	As Flutuações de Temperatura da RCF	39
2.12	Classificação das Flutuações de Temperatura da RCF	41
2.12.1	Anisotropias Primárias	41
2.12.2	Anisotropias Secundárias	42
2.13	O Satélite WMAP	43
2.14	Mapas da RCF	45
2.15	Emissão Síncrotron	48
2.16	Emissão Bremsstrahlung	49
2.17	Emissão Térmica pelos Grãos de Poeira	50
2.18	Os Problemas do Modelo do <i>Big Bang</i>	51
2.18.1	O Problema do Horizonte	51
2.18.2	O Problema da Planaridade	52
2.18.3	O Problema das Relíquias Exóticas	53
2.18.4	A Hipótese Inflacionária	54
2.19	Espectro de Potência da RCF	56
2.20	Propriedades Estatísticas da RCF	60
3	Aferidor Coeficiente de Pearson	63
3.1	Medidas da Tendência Central	63
3.1.1	Média Aritmética	63
3.1.2	Mediana	64
3.1.3	Moda	66
3.1.4	Relação entre Média, Mediana e Moda	67
3.2	Medidas de Dispersão	68
3.2.1	Desvio Padrão	68
3.3	Coeficientes de Assimetria de Pearson	69

3.3.1	Assimetria de uma Distribuição de Dados	69
3.4	Distribuição Normal	71
3.4.1	Variáveis Aleatórias	71
3.4.2	Variáveis Aleatórias Discretas	72
3.4.3	Variáveis Aleatórias Contínuas	73
3.4.4	A Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Normal	74
3.4.5	A Distribuição Normal Padrão	76
4	Resultados e Discussões	78
4.1	Metodologia para Análise de Dados	78
4.1.1	A Pixelização da Esfera Celeste	78
4.1.2	Esquemas de Indexação de Píxeis	79
4.2	Máscaras	81
4.3	Dados da RCF do WMAP	83
4.4	Resultados e Discussões	90
4.4.1	Estruturas Reveladas pelo Coeficiente de Pearson	95
5	Conclusões e Perspectivas	101
	Bibliografia	104
	Apêndice A	113
	Apêndice B	118
	Apêndice C	120
	Apêndice D	123
	Apêndice E	125
	Apêndice F	126

Lista de Figuras

2.1	A cobertura do espectro eletromagnético para observação durante o século XX.	5
2.2	O espectro eletromagnético.	6
2.3	Aglomerado de Coma visto na faixa do visível.	8
2.4	Aglomerado de Coma visto na faixa do raio-X.	8
2.5	Definição de parsec.	8
2.6	Distribuição de galáxias em grandes escalas.	9
2.7	Diagrama de Hubble.	11
2.8	Esfera expandindo-se ou contraindo-se.	13
2.9	As coordenadas comóveis de um objeto não se alteram com a expansão. . .	15
2.10	Valores assumidos por κ	16
2.11	Coordenadas retangulares para esféricas.	17
2.12	A Lei de Hubble como suporte observacional.	32
2.13	A evolução química do universo durante os 2000 primeiros segundos.	33
2.14	a) Universo opaco à radiação e b) Universo transparente à radiação.	34
2.15	O satélite COBE.	37
2.16	O espectro de corpo negro da RCF obtido pelo FIRAS.	38
2.17	Flutuação do erro para a temperatura média da RCF.	39
2.18	As flutuações de temperatura da RCF detectadas pelo COBE.	41
2.19	O satélite WMAP.	43
2.20	Inventário cosmológico.	44
2.21	O satélite Planck.	45
2.22	Projeção Mollweide.	46
2.23	Comparação entre mapas da RCF do COBE e WMAP.	46
2.24	Mapas de céu inteiro da RCF nas 5 frequências do WMAP.	47
2.25	O mapa ILC 3 anos.	47

2.26	Espectro de emissão para os contaminantes galácticos.	47
2.27	Emissão sincrotron.	49
2.28	Emissão Bremsstrahlung.	50
2.29	Mapa de emissão térmica pelos grãos de poeira.	51
2.30	O problema do horizonte.	52
2.31	Solução do problema do horizonte.	55
2.32	Solução do problema da planaridade.	56
2.33	Espectros de potência.	59
2.34	Picos acústicos.	59
3.1	Localização da mediana em uma distribuição de frequência.	65
3.2	Retângulos de mesma amplitude de uma distribuição de frequência.	67
3.3	a) Distribuição com assimetria positiva, b) distribuição simetria e c) distribuição com assimetria negativa.	68
3.4	Posições da média, mediana e moda em uma distribuição assimétrica.	70
3.5	Ruído estatístico para média e mediana.	71
3.6	Distribuição normal com desvio padrão fixo e média deslocada.	74
3.7	Distribuição normal com média fixa e desvio padrão alterado.	74
4.1	Pixelização do HEALPix.	78
4.2	Modelo para as flutuações de temperatura da RCF.	79
4.3	Esquema <i>Ring</i>	80
4.4	Esquema <i>Nested</i>	81
4.5	Atualização das máscaras.	82
4.6	Mapa de céu inteiro na banda Q.	83
4.7	Mapa de céu inteiro na banda V.	83
4.8	Mapa de céu inteiro na banda W.	84
4.9	Mapa de céu inteiro ILC.	84
4.10	Máscara KQ75-7.	85
4.11	Distribuição de frequência para os D_1^{MC}	87
4.12	Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$	90
4.13	Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$	90
4.14	Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$	90
4.15	Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$	90

4.16	Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	91
4.17	Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	91
4.18	Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	91
4.19	Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	91
4.20	Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	91
4.21	Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	91
4.22	Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.23	Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.24	Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.25	Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.26	Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.27	Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	92
4.28	Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.29	Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.30	Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.31	Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.32	Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.33	Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	93
4.34	Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	94
4.35	Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	94
4.36	Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	96
4.37	Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	96
4.38	Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	97
4.39	Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 45^\circ$.	97
4.40	Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.	98
4.41	Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 90^\circ$.	98
4.42	Estrutura de dipolo puro.	99
4.43	Estrutura de quadrupolo puro.	99
4.44	O mapa sigma ILC com máscara.	100
4.45	Em destaque as regiões alongadas de baixa temperatura do mapa ILC.	100
A.1	Efeito Doppler.	113
A.2	<i>Redshift e blueshift.</i>	115

D.1 O espectro contínuo e o espectro de linhas.	123
D.2 Emitância espectral da radiação de corpo negro.	124

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros cosmológicos para o modelo Λ CDM.	44
2.2	Nomenclatura para multipolos de baixa ordem.	58
3.1	Exemplos de variáveis aleatórias discretas.	73
3.2	Exemplos de variáveis aleatórias contínuas.	73
4.1	Resolução angular em função do N_{side}	80
4.2	Teste de consistência para 600 Monte Carlo de céu inteiro e $\gamma_0 = 45^\circ$	89
4.3	Valores obtidos para χ_c^2	94
4.4	Valores obtidos para χ^2 para mapas de céu inteiro.	94
4.5	Valores obtidos para χ^2 para mapas mascarados.	95

Capítulo 1

Introdução

Há pouco mais de duas décadas a cosmologia era uma área do conhecimento que carecia de dados e estava apoiada apenas em seu arcabouço teórico, isto é, os modelos que descreviam a evolução do universo não podiam ser confrontados com a realidade. Atualmente, graças às inúmeras observações realizadas por experimentos em solo e no espaço, é possível dispor de uma grande quantidade de dados de alta precisão e através da análise desses dados comprovar, descartar ou modificar os modelos cosmológicos.

Um dos objetos de estudo mais importantes da cosmologia é a radiação cósmica de fundo (RCF). Tal radiação não emana das estrelas ou galáxias, logo é difusa, e foi criada no início do universo, constituindo a principal fonte de informação sobre as suas condições iniciais.

A primeira missão espacial dedicada exclusivamente a cosmologia ocorreu com o lançamento do satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) em 1989 pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) cujo objetivo era analisar detalhadamente a RCF (Boggess et al., 1992). Através deste satélite foi possível detectar a existência das flutuações na temperatura da RCF da ordem de $\approx 6 \times 10^{-6}$ (Smoot et al., 1992).

Em modelos de formação de galáxias, tais flutuações são imprescindíveis, pois permitem que a matéria se aglomere gravitacionalmente formando estrelas e galáxias, distribuídas em grupos, paredes, bolhas e vazios, como hoje observamos no universo. As medidas destas flutuações são importantes pois nos permite conhecer as propriedades do universo, tais como o seu conteúdo, sua geometria e evolução, auxiliando na imposição de limites aos parâmetros de modelos cosmológicos (Spergel et al., 2003, 2007).

No modelo cosmológico padrão, a inflação é considerada o paradigma dominante para a geração das perturbações de densidades primordiais consideradas como as sementes para a

formação das estruturas que observamos no universo. Uma poderosa forma de investigar a natureza destas sementes primordiais é feita através da análise dos desvios de gaussianidade nas flutuações de temperatura da RCF. A detecção de desvios de gaussianidade nos dados da RCF é importante para discriminar modelos inflacionários e testar cenários alternativos (e.g. Komatsu et al., 2009). Entretanto, fontes não cosmológicas, como por exemplo, contaminantes galácticos, podem também produzir desvios de gaussianidades nos dados da RCF (Bernui et al., 2007).

No ano de 2001, a NASA lança o satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) operando em 5 bandas de frequência. O objetivo dessa missão era estudar a geometria, o conteúdo e a evolução do universo. Com esse satélite foi possível analisar as flutuações de temperatura da RCF com um melhor nível de resolução em comparação ao COBE (Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003).

Este trabalho tem como objetivo testar a sensibilidade de um aferidor em detectar desvios de gaussianidade nos mapas das flutuações de temperatura da RCF do satélite WMAP. Nós escolhemos como aferidor de desvio de gaussianidade o coeficiente de Pearson e ele será aplicado em 3 bandas de frequência do WMAP, assim como em um mapa construído a partir das 5 bandas de frequência do WMAP combinadas, com o intuito de minimizar os contaminantes galácticos.

Essa dissertação está dividida em 5 capítulos. Inicialmente, no capítulo 2 nós descrevemos o modelo cosmológico padrão, que é o modelo mais aceito em cosmologia pois há uma quantidade de fatos observacionais que o sustentam. Este modelo tem como suporte matemático as equações que descrevem a dinâmica do universo, conhecidas como as equações de Friedmann, que aqui são discutidas. O modelo cosmológico padrão está baseado no princípio cosmológico e no modelo do *Big Bang*, e na hipótese inflacionária nós faremos uma discussão sobre estas bases do modelo cosmológico padrão.

Ainda no capítulo 2, nós comentaremos as comprovações observacionais que apoiam o modelo do *Big Bang*, que são a lei de Hubble, a abundância dos elementos leves e a RCF. Nesta etapa, nós descreveremos como a RCF se originou e suas características. Nesta parte do desenvolvimento do trabalho, discutiremos a respeito das flutuações de temperatura da RCF e as medidas obtidas pelo satélite COBE.

Também apresentaremos os problemas do modelo do *Big Bang* e as soluções propostas pela hipótese inflacionária para resolver estes problemas. Posteriormente, faremos uma breve descrição do satélite WMAP. Discutimos o significado dos mapas de flutuações de

temperatura da RCF e também os problemas enfrentados nas análises deles causados pelos contaminantes galácticos tais como a emissão sincrotron, a emissão Bremsstrahlung e a emissão térmica pelos grãos de poeira. Os respectivos mapas destes contaminates serão ilustrados neste capítulo. Nós também comentaremos a respeito das propriedades estatísticas da RCF.

Já no capítulo 3, elucidamos as ferramentas necessárias para o entendimento do coeficiente de Pearson. Inicialmente, iremos descrever as propriedades matemáticas de seus constituintes tais como a média, a moda e o desvio padrão. Mostraremos uma relação empírica entre média, mediana e moda. Discutimos o papel desempenhado pelo coeficiente de Pearson quanto a classificação de uma distribuição de dados. Neste trabalho, empregamos o coeficiente de Pearson em função da média, mediana e desvio padrão em conjuntos de dados de flutuações de temperatura da RCF. Também estudamos o ruído estatístico da média e da mediana em função do número de mapas analisados.

No capítulo 4, apresentamos a metodologia empregada para testar o coeficiente de Pearson como aferidor de desvio de gaussianidade. Para isso, descrevemos os processos envolvidos e o funcionamento dos algoritmos empregados neste trabalho para a análise de nossos dados. Investigamos mapas de 7 anos do satélite WMAP em 3 bandas de frequência, a saber, a banda Q 41 GHz, a banda V 61 GHz e a banda W 94 GHz. Também estudamos um mapa construído pela equipe do WMAP com a contaminação dos dados da RCF minimizada. Aplicamos o aferidor coeficiente de Pearson a estes mapas de céu inteiro, com objetivo de verificar a sensibilidade de nosso aferidor quanto a contaminação do plano galáctico. Posteriormente, removemos estes contaminantes e outras fontes de origem não cosmológica através de uma redução digital de 29.4% do céu com auxílio da máscara KQ75-7, para verificar se o aferidor coeficiente de Pearson detecta algum desvio de gaussianidade após a aplicação desta máscara.

Ao aplicar o coeficiente de Pearson às diferentes direções de um mapa de flutuações de temperatura da RCF, obtemos um mapa transformado e a informação contida neste mapa é então quantificada através do espectro de potência angular. O mesmo procedimento é realizado em um grande número de mapas Monte Carlo da RCF confeccionados segundo o Λ CDM, que é a atual versão do modelo cosmológico padrão. Neste capítulo, também, apresentamos os nossos resultados através de tabelas, gráficos e nossos mapas obtidos com o coeficiente de Pearson. A significância estatística é então estabelecida ao compararmos os nossos mapas transformados do satélite WMAP com os mapas Monte Carlo.

Finalmente, no capítulo 5, investigamos o aferidor coeficiente de Pearson quanto a sua capacidade de detectar desvios de gaussianidade significativos nos mapas estudados, tanto aqueles a céu inteiro como aqueles mapas em que a máscara foi aplicada. Nós também analisamos a robusteza deste aferidor. Neste capítulo também apresentamos nossas perspectivas futuras para análise dos dados da RCF.

Capítulo 2

O Universo Observado

A cosmologia tem como objetivo conhecer a origem, a estrutura e a evolução do universo, bem como a física envolvida nestes processos. Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos ao entendimento do estudo da cosmologia bem como da presente dissertação.

2.1 O Universo e o Espectro Eletromagnético

No decorrer da história, os astrônomos contam inicialmente com a luz, na parte visível do espectro eletromagnético, para estudar o universo. No século XX, uma das grandes conquistas da astronomia foi a exploração de todo o espectro eletromagnético para medições astronômicas (figura 2.1)(Lená et al., 1996). Possuímos hoje, instrumentos capazes de fazerem observações de ondas de rádio, microondas, luz infravermelha, luz visível, luz ultravioleta, raios X e raios gamma. Estas ondas diferem apenas no comprimento de onda λ e equivalentemente na sua frequência f (figura 2.2).

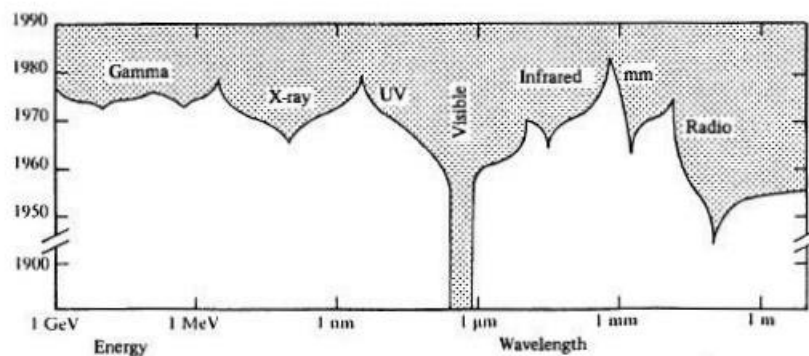


Figura 2.1: A cobertura do espectro eletromagnético para observação durante o século XX.

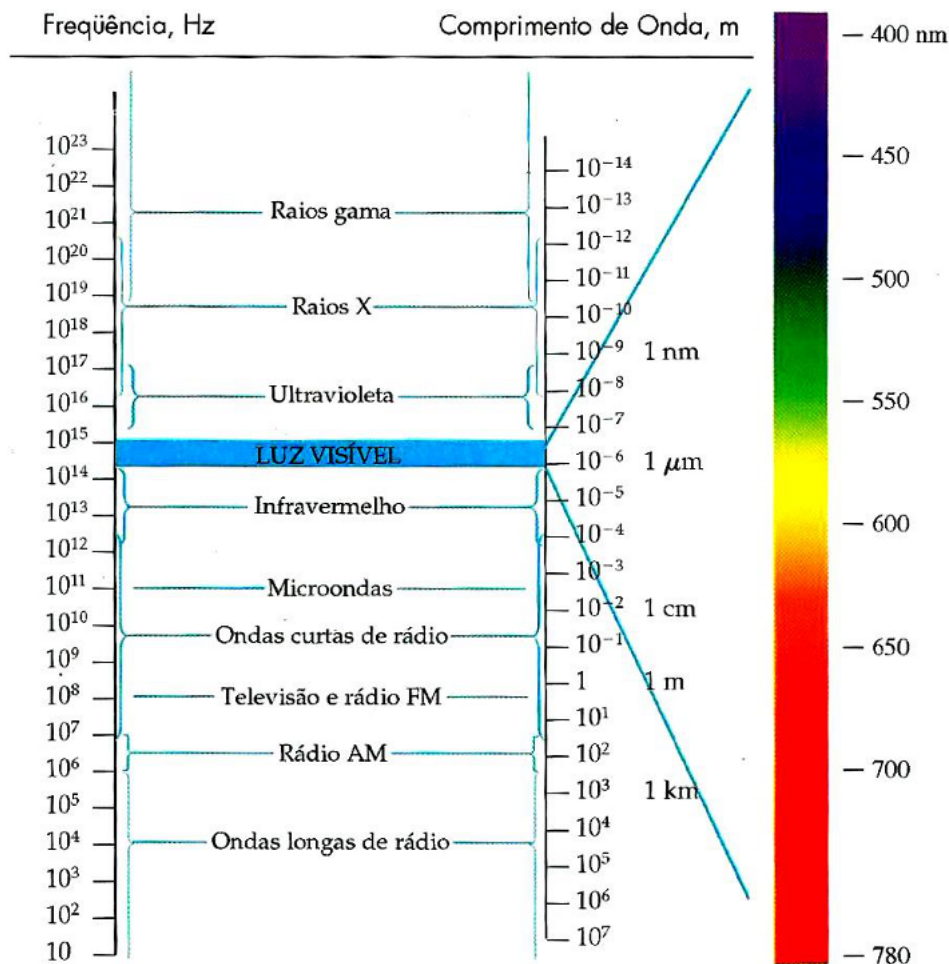


Figura 2.2: O espectro eletromagnético.

Falaremos um pouco dos objetos astronômicos nessas regiões espectrais, começando pelo visível, para estudar o universo. Pode-se citar alguns dos objetos observados no visível, em ordem crescente de complexidade:

- Estrelas: são corpos esféricos autogravitantes formados por gás ionizado. Sua fonte de energia vem da fusão nuclear de hidrogênio em hélio. As reações nucleares nos interiores estelares são a principal fonte de luz visível do universo.
- Galáxias: são sistemas compostos por estrelas, poeira e gás. As galáxias variam em tamanho, forma e quantidade de massa. Porém, uma galáxia típica contém 10^{11} estrelas ou mais. São objetos visualmente impressionantes, com vasta gama de propriedades.
- Aglomerados de galáxias: as galáxias não se encontram aleatoriamente distribuídas no espaço, mas concentram-se em grupos, tais como o Grupo Local, formado por 30

galáxias, dentre as quais se encontra a nossa Via-Láctea; o aglomerado de Virgem, formado por 2000 galáxias. O aglomerado de Virgem é tão massivo e tão próximo¹ que influencia gravitacionalmente o Grupo Local, fazendo com que nos movamos em direção a ele.

- Superaglomerados de galáxias: os aglomerados de galáxias também se agrupam em estruturas maiores denominadas superaglomerados. O mais estudado é o Supercúmulo Local, pois o Grupo Local, está contido nele (Padmanabhan, 1995; Andrew Liddle, 2003).

As observações feitas na faixa do visível, nos fornecem informações do que acontece no universo atual. Mas, muitas outras informações estão contidas em outras faixas do espectro eletromagnético. Como por exemplo, a faixa de microondas é a mais importante para cosmologia, pois é nela que está situada um dos observáveis astrofísicos mais importantes, a RCF.

Já a utilização da faixa do rádio é possível ganhar resolução no mapeamento de galáxias distantes. Muitas galáxias distantes foram descobertas utilizando a faixa do rádio.

A faixa do infravermelho é utilizado principalmente para observar objetos através da poeira de nossa galáxia, pois ele sofre menos absorção e espalhamento pelos grãos de poeira do que a luz visível. O infravermelho é também utilizado para estudar a região próxima ao plano galáctico onde existe grande concentração de poeira.

Observações feitas com raios-X revelam que os aglomerados de galáxias são fontes emissoras de raios-X nesse comprimento de onda (figura 2.3,2.4). Os aglomerados são permeados por um gás quente, material remanescente da formação das galáxias, que pode atingir temperaturas de 10^7K a 10^8K (Peter Schneider, 2006).

¹Dista 40 milhões de anos-luz do Grupo Local. 1 ano-luz é a distância que a luz percorre durante 1 ano, ou seja, aproximadamente 9.46×10^{15} metros.

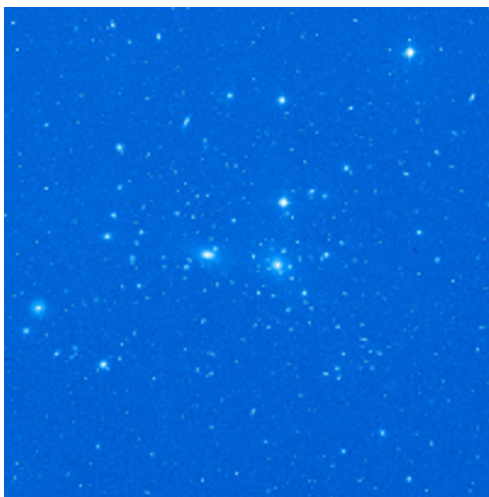


Figura 2.3: Aglomerado de Coma visto na faixa do visível.

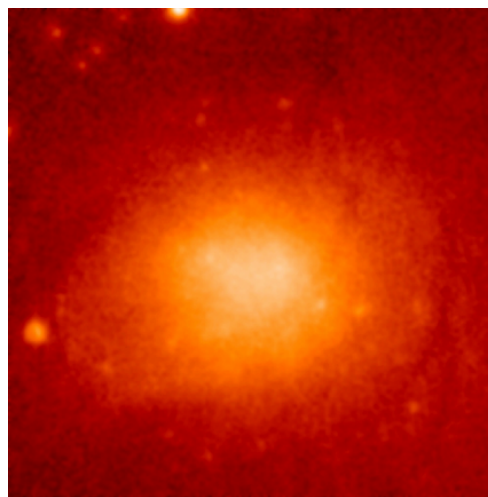


Figura 2.4: Aglomerado de Coma visto na faixa do raio-X.

2.2 O Princípio Cosmológico

A cosmologia moderna está baseada na hipótese do princípio cosmológico, que diz que o universo em larga escala é homogêneo e isotrópico. Dizer que o universo é homogêneo significa que ele parece o mesmo em cada ponto, e dizer que o universo é isotrópico significa que ele parece o mesmo em todas as direções. Matematicamente, as propriedades do universo são invariantes por translação (homogeneidade) e por rotação (isotropia). O princípio cosmológico é uma extensão do princípio copernicano segundo o qual a nossa posição no Sistema Solar não é especial (Ruth Durrer, 2008; Andrew Liddle, 2003).

Antes de continuarmos neste assunto, definiremos aqui a unidade parsec. Para isso utilizamos a próxima figura.

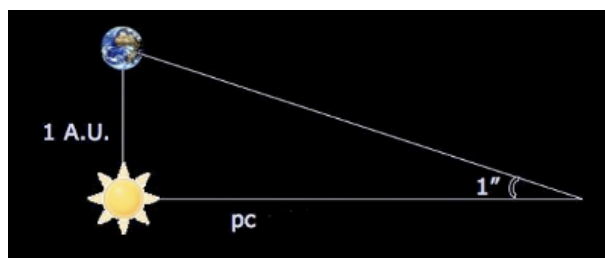


Figura 2.5: Definição de parsec.

Um parsec pc é a distância que um observador dever estar para enxergar a distância Terra-Sol sob um ângulo de $1''$ de arco. Assim, pela figura 2.5, temos que

$$1pc = \frac{1A.U.}{\tan 1''} \approx 3.08 \times 10^{16}m \approx 3.26 \text{ anos-luz}, \quad (2.1)$$

onde $1A.U.$ é a unidade astronômica e vale $1.49598 \times 10^{11}m$.

Até distâncias de 10 Mpc, o universo não é isotrópico nem homogêneo. Porém, se observarmos objetos cada vez mais distantes, o universo irá parecer cada vez mais homogêneo e isotrópico. Até o momento, a concepção mais aceita é que as maiores estruturas visíveis, os aglomerados de galáxias, possuem dimensões de 10 a 30 Mpc, além dessas escalas, as distribuições de galáxias parecem se tornar isotrópica e homogênea, fundamentando observacionalmente o princípio cosmológico através de observações na faixa do visível (Souza, 2004).

A figura 2.6 ilustra a distribuição de galáxias em grandes escalas obtida pelo SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*). Esse projeto tem como objetivo mapear um quarto de todo o céu, determinando as posições e brilhos de centenas de milhões de objetos celestes (Sloan Digital Sky Survey, 2008).

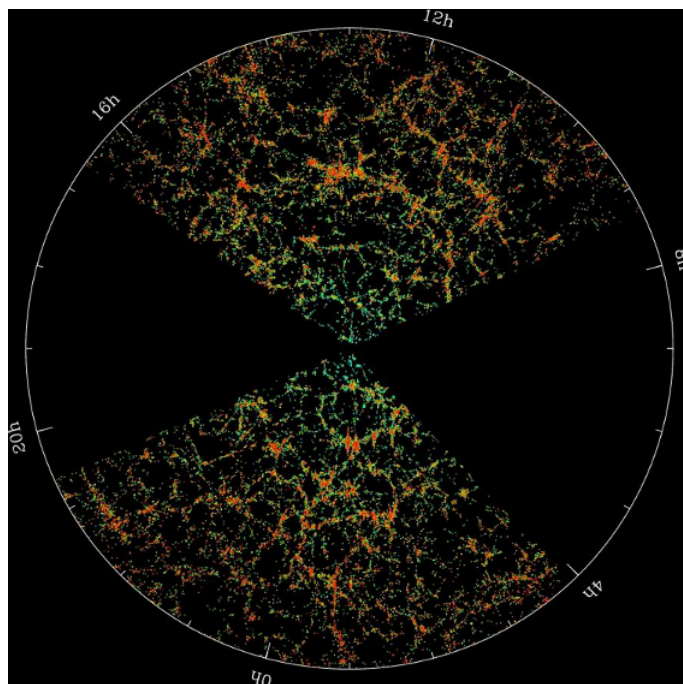


Figura 2.6: Distribuição de galáxias em grandes escalas.

Na figura 2.6, a Terra está no centro e a circunferência tem um raio de 2 bilhões de anos-luz. Cada ponto nesta figura representa uma galáxia contendo cerca de 100 bilhões de estrelas. A região entre as duas fatias que contém as galáxias, não foi mapeada devido ao fato que a poeira de nossa galáxia obscurece a observação do universo distante

nestas direções (Sloan Digital Sky Survey, 2008). Note que a distribuição das galáxias apresentam-se de maneira homogênea independente da direção observada.

2.3 O Universo em Expansão

A peça fundamental das evidências observacionais em cosmologia é que quanto mais longe se encontra o objeto observado, mais rápido ele se afasta de nós. Essas velocidades são medidas através do *redshift*², sendo a medida da velocidade relativa a nós de um objeto, que é, basicamente o efeito Doppler aplicado às ondas eletromagnéticas. Um estudo deste efeito é realizado no Apêndice A.

2.3.1 A Lei de Hubble

Em 1929, Edwin Hubble (1889-1953) fez um estudo da dependência do *redshift* das galáxias em relação a distância até nós. Hubble conhecia o *redshift* de cerca de 50 galáxias, mas estimou a distância de apenas 20 delas. Graficando z em função da distância d , Hubble chegou a relação

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (2.2)$$

onde H_0 é conhecida como constante de Hubble. Devido ao fato de que os valores de z estudados por Hubble serem pequenos, ele pode usar a equação A.31 do Apêndice A. Interpretando os *redshifts* como deslocamentos Doppler, a equação 2.2 torna-se

$$v = H_0d, \quad (2.3)$$

em que v é a velocidade radial da galáxia. Naquela época, o valor de H_0 medido por Hubble foi de $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Hubble, 1929). Assim, um ponto situado a uma distância de 1 Mpc está se afastando a uma velocidade de $500 \text{ km}^{-1} \text{ s}$.

Recentemente, através das observações feitas pelo Telescópio Espacial Hubble, uma medida mais acurada de H_0 foi realizada encontrando-se o valor de $75 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (figura 2.7) (Freedman et al., 2001).

Note, pelo gráfico anterior, que quanto mais a galáxia se encontra afastada, maior é sua a velocidade de recessão em relação a nós. Isso não é uma violação do Princípio

²*Redshift* traduzindo do inglês significa desvio para o vermelho.

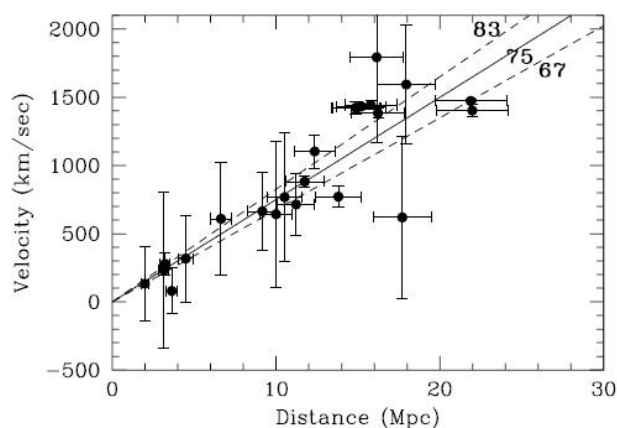


Figura 2.7: Diagrama de Hubble.(Hubble, 1929).

Cosmológico, pois o que é visto em nossa galáxia é exatamente o que é visto em outras, em um universo isotrópico e homogêneo. Se as galáxias estão se afastando de nós, elas também estão se afastando entre elas.

As medições realizadas por Hubble constituíram a primeira evidência observacional de que o universo está se expandindo, o que antes já havia sido predito por Alexander Friedmann (1888-1925) e Georges-Henri Lemaître (1894-1966) (Oliveira Filho, et al., 2004).

A constante de Hubble é importante em inúmeros cálculos cosmológicos e astrofísicos. Podemos citar algumas de suas aplicações:

- Utilizada no cálculo da idade do universo.
- Na determinação do tamanho do universo observável.
- Na definição da densidade crítica do universo (Freedman et al., 2001).

2.4 O Paradoxo de Olbers

Revisitaremos um antigo questionamento a respeito da escuridão da noite, já formulado na ciência, entre outros, por Johannes Kepler (1571-1630) e Edmond Halley (1656-1742), retomado em 1826 por Heinrich Wilhelm Olbers (1758-1840), quando passou a se chamar Paradoxo de Olbers. Tal questionamento parece ser simples, porém, contém elementos de importância para a discussão cosmológica.

Suponhamos que as estrelas se distribuam uniformemente em um espaço infinito. Para um observador centrado em uma esfera, cada estrela contribui com

$$f_{\star} = \frac{L}{4\pi r_{\star}^2}, \quad (2.4)$$

onde f_{\star} é o fluxo que chega ao observador, L a luminosidade da estrela e r_{\star} a distância da estrela ao observador. Consideramos também que n_{\star} seja a densidade volumétrica de estrelas. Logo, deve existir $n_{\star}4\pi r_{\star}^2 dr_{\star}$ estrelas em uma camada esférica. Note que o número de estrelas aumenta com o quadrado da distância de observação. Assim, para qualquer direção que o observador decida olhar ele verá uma estrela. A contribuição de todas as estrelas é

$$df_{\star} = \frac{L}{4\pi r_{\star}^2} 4\pi r_{\star}^2 dr_{\star}, \quad (2.5)$$

para o fluxo que chega ao observador. O fluxo total recebido pelo observador a uma distância r então seria

$$f_{\star} = \int_0^{r_{\star}} n_{\star} L dr_{\star} = n_{\star} L r_{\star}. \quad (2.6)$$

Como o fluxo decai com o quadrado da distância e o número de estrelas aumenta, esse número maior compensa a queda do fluxo, deveríamos enxergar um céu noturno com brilho semelhante ao de uma superfície de estrela média. Entretanto, isso não é observado.

Olbers propôs uma solução a este problema, dizendo que a poeira interestelar absorve a luz proveniente das estrelas. Mas esta solução levanta outro problema, a poeira interestelar entra em equilíbrio térmico com a luz das estrelas e passa a irradiar luz tão quanto as estrelas. Logo, a absorção da luz estelar por poeira interestelar não resolve o problema.

A solução atualmente aceita para o paradoxo é que o universo tem uma idade finita e a luz uma velocidade limitada, assim a luz das estrelas mais distantes ainda não teve tempo de chegar até nós. Logo, o universo que observamos é limitado no espaço, por ser finito no tempo. A escuridão noturna é prova de que o universo teve um começo (Freedman et al., 2001; Oliveira Filho, et al., 2004).

2.5 A Dinâmica Cósmica

No século passado, após a formulação relativística da cosmologia moderna, foi possível demonstrar que vários dos resultados básicos dos modelos isotrópicos e homogêneos podiam ser obtidos a partir do formalismo newtoniano (Marcelo B. Ribeiro, 1994). O universo da

cosmologia relativística e o universo construído usando mecânica newtoniana são governados por equações diferenciais idênticas (MacVittie, 1954; Milne, 1934).

Friedmann derivou suas equações através das equações de campo de Einstein, usando-se do arcabouço teórico da relatividade geral. Porém, os aspectos da equação de Friedmann podem ser entendidos através da utilização da dinâmica newtoniana (Andrew Liddle, 2003; Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006). Para mostrar como a expansão ou contração do universo podem ser estudados através da dinâmica newtoniana, partiremos da lei da Gravitação de Newton e da Segunda Lei do Movimento para obtermos a forma não-relativística da equação de Friedmann. Posteriormente, introduziremos as modificações na equação de Friedmann não-relativística para o formalismo da relatividade geral sem demonstrações ³.

2.5.1 A Equação de Friedmann

Inicialmente, no formalismo newtoniano, consideremos uma esfera homogênea de massa M que pode se expandir ou contrair isotropicamente ao redor de seu centro. Assim, seu raio R_e modifica-se com o tempo t . Sobre a superfície da esfera, dispomos de uma partícula de prova de massa m (figura 2.8).

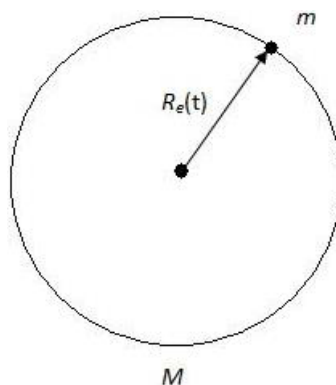


Figura 2.8: Esfera expandindo-se ou contraindo-se.

Se a massa da esfera é M , então sua densidade ρ é dada por

$$\rho(t) = \frac{3M}{4\pi R_e(t)^3}. \quad (2.7)$$

³Para um conhecimento mais aprofundado sobre a equação de Friedmann obtida através da relatividade geral consulte as referências (Narlikar, 2004; Padmanabhan, 1995).

A força gravitacional F experimentada pela partícula de prova, segundo a gravitação newtoniana é dada por

$$F = -\frac{GMm}{R_e(t)^2}, \quad (2.8)$$

onde G é a constante de gravitação universal. Logo, a aceleração da gravidade na superfície da esfera será

$$\frac{d^2 R_e}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{GM}{R_e(t)^2}. \quad (2.9)$$

Multiplicando ambos os membros da equação 2.9 por dR_e/dt e integrando, obtemos

$$\frac{d^2 R_e}{dt^2} \frac{dR_e}{dt} = -\frac{GM}{R_e(t)^2} \frac{dR_e}{dt}, \quad (2.10)$$

$$\int \frac{d^2 R_e}{dt^2} \frac{dR_e}{dt} = -\int \frac{GM}{R_e(t)^2} \frac{dR_e}{dt}. \quad (2.11)$$

Integramos o primeiro membro da equação anterior por substituição

$$\zeta = \frac{dR_e}{dt}, \quad d\zeta = \frac{d^2 R_e}{dt^2}, \quad (2.12)$$

$$\int \zeta d\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{dR_e}{dt} \right)^2 + U_1, \quad (2.13)$$

onde U_1 é a constante de integração. Integremos agora o segundo membro da equação 2.11

$$-\int \frac{GM}{R_e(t)^2} \frac{dR_e}{dt} = \frac{GM}{R_e(t)^2} + U_2, \quad (2.14)$$

onde U_2 é a constante de integração. Igualando os resultados das integrações 2.13 e 2.14, vem

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_e}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R_e(t)} + U_2 - U_1 = \frac{GM}{R_e(t)^2} + U, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR_e}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R_e(t)^2} + U, \quad (2.16)$$

Note que o primeiro membro da equação anterior é a energia cinética por unidade de massa e o primeiro termo do segundo membro desta mesma equação representa a energia potencial gravitacional por unidade de massa e que a soma destas duas entidades para

uma partícula de prova em uma superfície de uma esfera é constante. Assim, a equação 2.16 é a equação de conservação de energia.

Consideramos que esta esfera se expande isotropicamente ao redor do centro, podemos escrever o raio $R_e(t)$ da esfera na seguinte forma

$$R_e(t) = a(t)r_e, \quad (2.17)$$

onde $a(t)$ recebe o nome de fator de escala⁴ e r_e é o raio comóvel da esfera. Discutiremos estas duas grandezas.

O fator de escala mede a taxa de expansão do universo. Ele informa como as separações físicas crescem com o tempo, desde que as coordenadas de r_e sejam por definição fixas. Logo, se entre os instantes t_1 e t_2 , o valor do fator de escala dobra de valor, teremos um universo que se expandiu em tamanho por um fator de dois.

Se a esfera de nosso exemplo se expande de maneira uniforme, as coordenadas do raio desta esfera permanecem fixas com a expansão. As coordenadas de um objeto que se comportam desta maneira recebem o nome de coordenadas comóveis (figura 2.9).

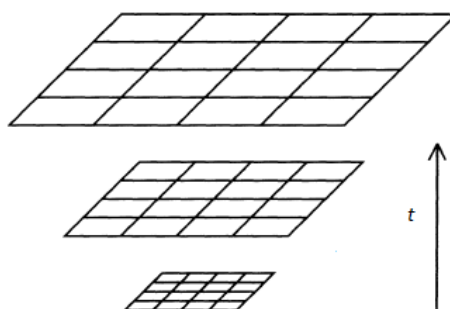


Figura 2.9: As coordenadas comóveis de um objeto não se alteram com a expansão.

Agora, isolamos M na equação 2.7 e $a(t)$ na equação 2.48 e substituindo estes resultados na equação 2.16

$$\frac{1}{2}r_e^2\dot{a}^2 = \frac{G}{r_e a(t)} \frac{4\pi}{3}\rho(t)r_e^3 a(t)^3 + U, \quad (2.18)$$

onde \dot{a} é a derivada de a em relação a t . Agora multiplicamos a equação 2.18 por 2 e dividindo-a por $r_e^2 a(t)^2$

⁴O tamanho do universo observável e uma relação entre o *redshift* e o fator de escala podem ser encontrados nos Apêndices B e C, respectivamente.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{r_e^2} \frac{1}{a(t)^2}, \quad (2.19)$$

A equação 2.19 é a equação de Friedmann na forma newtoniana. Considerando os efeitos relativísticos, essa equação assume a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2}. \quad (2.20)$$

Na equação 2.20, $\varepsilon(t)$ é a densidade de energia, κ é o parâmetro de curvatura e R_0 é o raio de curvatura do universo. Para um universo contendo apenas massa, com partículas se movendo lentamente, a densidade de energia $\varepsilon(t)$ é aproximadamente igual a ρc^2 , com uma pequena correção para a energia cinética das partículas.

Fótons e outras partículas sem massa também contribuem para a densidade de energia segundo a equação $E_f = h\nu$, em que E_f é a energia do fóton, h a constante de Planck e ν a frequência do fóton.

Ainda na equação 2.20 o parâmetro κ pode assumir três valores:

- $\kappa = -1 \rightarrow$ curvatura negativa ou geometria hiperbólica.
- $\kappa = 0 \rightarrow$ curvatura nula ou geometria euclidiana.
- $\kappa = 1 \rightarrow$ curvatura positiva ou geometria esférica.

O parâmetro κ está relacionado com o tipo de geometria que o universo pode assumir (figura 2.10).

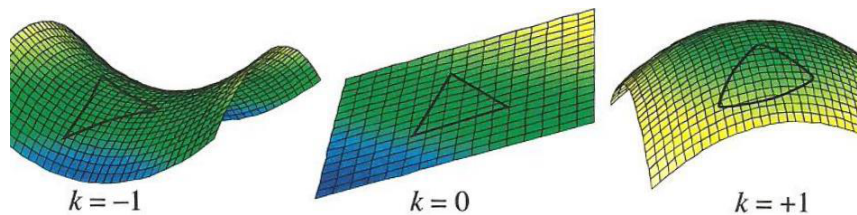


Figura 2.10: Valores assumidos por κ .

Cada uma destas geometrias possuem características peculiares. Comentaremos aqui estas peculiaridades.

Para espaços bidimensionais consideremos que α , β e γ sejam os ângulos internos de um triângulo qualquer e C o perímetro de uma circunferência de raio R_c . Na geometria euclidiana, onde $\kappa = 0$, vale as seguintes relações:

- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- $C = 2\pi R_c$.

Em espaços tridimensionais, a distância ds entre dois pontos de coordenadas (x,y,z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$ é governada pela equação

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.21)$$

As relações que informam a distância entre dois pontos no espaço recebem o nome de métrica. A equação 2.21 é a métrica para uma geometria euclidiana. É possível escrever esta mesma equação em coordenadas esféricas. Utilizando a figura 2.11 façamos a seguinte transformação

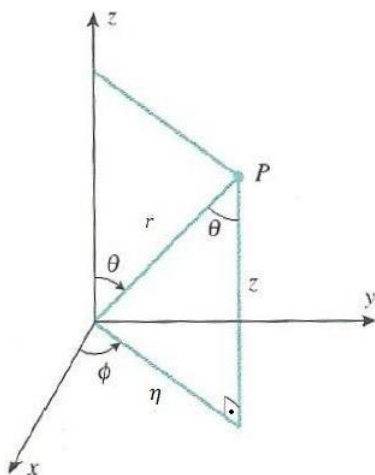


Figura 2.11: Coordenadas retangulares para esféricas.

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi). \quad (2.22)$$

Pela figura anterior é possível obter as seguintes relações

$$x = \eta \cos \phi, \quad y = \eta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta, \quad (2.23)$$

onde η é a projeção de r no plano xy e z já está expresso em coordenadas esféricas. Mas, temos que

$$\eta = r \sin \theta, \quad (2.24)$$

assim, substituindo η em x e y das relações 2.57, vem

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos \phi, \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi. \quad (2.25)$$

Tomando as diferenciais dx , dy e dz obtemos

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

A equação 2.26 representa a equação 2.21 em coordenadas esféricas, logo possuem a mesma métrica.

Para o caso de uma geometria esférica, $\kappa = +1$, temos que:

- $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$
- $C < 2\pi R_c$.

A métrica para pontos de coordenadas (r, θ, ϕ) e $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ em uma esfera tridimensional é dada por

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{R}\right) [d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2], \quad (2.27)$$

em que R é o raio de curvatura.

Finalizando com o caso da geometria hiperbólica, $\kappa = -1$, temos que em situações bidimensionais:

- $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$
- $C > 2\pi R_c$.

Em um espaço tridimensional hiperbólico, a métrica é dada por

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{r}{R}\right) [d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2]. \quad (2.28)$$

Se fizermos

$$d\xi^2 \equiv d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (2.29)$$

$$f_\kappa(r) = \begin{cases} R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \sinh\left(\frac{r}{R}\right) & (\kappa = -1), \end{cases} \quad (2.30)$$

então podemos compactar as métricas 2.26, 2.27 e 2.28 na forma

$$ds^2 = dr^2 + f_\kappa(r)^2 d\xi^2. \quad (2.31)$$

A equação 2.31 representa a forma compacta para a métrica de espaços tridimensionais, homogêneos e isotrópicos. Porém, ao expressarmos esta equação utilizamos o sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) . Porém esta equação pode ser expressa também em outros sistemas de coordenadas. Fazemos $x \equiv f_\kappa(r)$, temos então

$$\frac{dx}{dr} = \frac{d}{dr} f_\kappa(r) = \frac{d}{dr} \left[R \operatorname{sen} \left(\frac{r}{R} \right) \right] = \cos \left(\frac{r}{R} \right), \quad (2.32)$$

$$dr = \frac{dx}{\cos \left(\frac{r}{R} \right)}, \quad (2.33)$$

$$dr^2 = \frac{dx^2}{1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{r}{R} \right)}, \quad (2.34)$$

através do conjunto de equações 2.30, para o caso em que $\kappa = 1$, chegamos a relação

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{r}{R} \right) = \frac{x^2}{R^2}, \quad (2.35)$$

de 2.35 em 2.34, vem

$$dr^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}} + x^2 d\xi^2. \quad (2.36)$$

generalizando a equação anterior para os valores de κ

$$dr^2 = \frac{dx^2}{1 - \kappa \frac{x^2}{R^2}} + x^2 d\xi^2. \quad (2.37)$$

As métricas 2.31 e 2.37 apresentam formas funcionais diferentes devido a escolha de diferentes coordenadas radiais (Andrew Liddle, 2003; Barbara Ryden, 2003).

2.5.2 A Métrica de Robertson-Walker

Na relatividade geral o tempo e o espaço tridimensional compreendem juntos o espaço-tempo quadridimensional. Os pontos neste espaço tempo são denominados eventos. É possível calcular a distância entre dois eventos usando-se de uma métrica apropriada.

Consideremos dois eventos que ocorrem no espaço-tempo cuja a localização de um deles é dada pelas coordenadas (t, r, θ, ϕ) e o outro evento localiza-se em $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$. A distância entre esses dois eventos no espaço-tempo é dado pela métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\xi^2. \quad (2.38)$$

O espaço-tempo descrito pela métrica anterior recebe o nome de espaço-tempo de Minkowski. Comparando a métrica 2.38 com a métrica geral 2.31 e o conjunto de equações 2.30, nota-se que a parte espacial do espaço-tempo de Minkowski é euclidiano. Logo, essa métrica se aplica somente no caso especial do espaço-tempo não curvado na presença de massa e energia.

Para um universo isotrópico e homogêneo em todo o tempo e que se expande, ou contrai, em função do tempo, a métrica do espaço-tempo é

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dx^2}{1 - \kappa x^2/R^2} + x^2 d\xi^2 \right]. \quad (2.39)$$

A equação 2.39 é conhecida como a métrica de Robertson-Walker e nela a parte espacial está multiplicada pelo fator de escala $a(t)$.

2.5.3 A Equação do Fluido Cósmico

Apesar da equação de Friedmann ser fundamental, ela torna-se infrutuosa, visto que ela não descreve como varia a densidade ε do universo em relação ao tempo. Para obtermos uma equação da variação de ε no tempo, precisamos invocar a 1ª Lei da Termodinâmica

$$dQ = dE + PdV, \quad (2.40)$$

em que dQ é a variação da quantidade de calor de uma região, dE a variação de energia interna, P é a pressão e dV a variação de volume. Em um universo homogêneo, não há trocas de calor, ou seja, $dQ = 0$, assim para um volume comóvel, a 1ª Lei da Termodinâmica aplicada a um universo em expansão torna-se

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0, \quad (2.41)$$

$$\dot{E} + P\dot{V} = 0. \quad (2.42)$$

Retomemos a esfera da figura 2.8. Temos que seu volume é dado por

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} R_e(t)^3, \quad (2.43)$$

escrevendo o volume da esfera em função de seu raio comóvel

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} a(t)^3 r_e^3. \quad (2.44)$$

Temos que a densidade de energia da esfera é dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{E(t)}{V(t)}, \quad (2.45)$$

diferenciando em relação ao tempo $V(t)$ e $E(t)$ temos respectivamente

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{3} r_e^3 3a^2 \frac{da}{dt}, \quad (2.46)$$

e

$$\dot{V} = 4\pi r_e^3 a^2 \dot{a} \quad (2.47)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} \varepsilon + V \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.48)$$

ou seja

$$\dot{E} = 4\pi r_e^3 a^2 \dot{a} \varepsilon + \frac{4\pi}{3} r_e^3 a^3 \dot{\varepsilon}, \quad (2.49)$$

substituindo as equações 2.47 e 2.49 em 2.42, vem

$$4\pi r_e^3 a^2 \dot{a} \varepsilon + \frac{4\pi}{3} r_e^3 a^3 \dot{\varepsilon} + P 4\pi r_e^3 a^2 \dot{a} = 0, \quad (2.50)$$

multiplicando a equação anterior por $3/4\pi a^2 \dot{a} r_e^3$, temos

$$3\varepsilon + \frac{a}{\dot{a}} \dot{\varepsilon} + 3P = 0, \quad (2.51)$$

multiplicamos a equação 2.51 por \dot{a}/a

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = 0. \quad (2.52)$$

Assim, chegamos a equação do fluido cósmico (equação 2.52). Ela possui dois termos para mudança da densidade. O primeiro termo entre parênteses corresponde à diluição de densidade, pois o volume aumenta com a expansão, ao passo que o segundo termo corresponde à perda de energia porque a pressão do material tem feito um trabalho enquanto o universo se expande. A energia perdida pelo trabalho realizado é convertida em energia potencial gravitacional.

2.5.4 A Equação da Aceleração

Através da equação de Friedmann 2.20 e da equação do fluido cósmico 2.52 é possível obter a equação da aceleração do fator de escala. Diferenciamos em relação ao tempo a equação de Friedmann

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{d}{dt} \varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a^2} \right), \quad (2.53)$$

$$2 \left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}\dot{a}}{a^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{8\pi G}{3c^2} \dot{\varepsilon} + 2 \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{\dot{a}}{a^3}, \quad (2.54)$$

substituímos a equação do fluido cósmico na equação anterior e fazemos as devidas simplificações.

$$\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{4\pi G}{c^2} [-(\varepsilon + P)] + \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{4\pi G}{c^2} [-(\varepsilon + P)] + \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2}, \quad (2.56)$$

da substituição da equação de Friedmann na equação anterior, vem

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2} - 4\pi G \varepsilon - \frac{4\pi G P}{c^2} + \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a^2}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3P). \quad (2.58)$$

A equação 2.58 é a equação do fator de escala ou equação da aceleração cósmica. Se o material tem qualquer tipo de pressão, isso aumenta a força gravitacional, e assim ainda desacelera a expansão. Não há forças associadas com a pressão em um universo isotrópico.

2.6 Parâmetros Cosmológicos

Os parâmetros cosmológicos determinam, observacionalmente, qual a melhor versão de um modelo que descreve o universo. Na subseção a seguir faremos uma discussão de alguns parâmetros.

2.6.1 O Parâmetro de Densidade Crítica

Consideremos que uma partícula comóvel está localizada na posição \mathbf{p} , no tempo t_0 na esfera da figura 2.8. Devido a expansão da esfera, em outro instante de tempo t a partícula estará em uma posição $\mathbf{r}(t)$. Desde que a expansão seja radial, ou seja, o vetor velocidade da partícula na posição $\mathbf{r}(t)$ é paralelo a \mathbf{r} , temos que a direção de $\mathbf{r}(t)$ é constante. Temos então que

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{p}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{p}. \quad (2.60)$$

A velocidade \mathbf{v} da partícula comóvel é dada pela derivada da posição em relação ao tempo

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{p} \equiv \dot{a}\mathbf{p} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} \equiv H(t)\mathbf{r}, \quad (2.61)$$

assim, temos que a taxa de expansão do universo é definida por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.62)$$

dessa forma a equação de Friedmann pode ser escrita

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)}. \quad (2.63)$$

Para o caso da geometria euclidiana, $\kappa = 0$, temos que

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t), \quad (2.64)$$

$$\varepsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2. \quad (2.65)$$

A equação anterior expressa o valor da densidade crítica ε_c para um dado valor de $H(t)$. Se o valor de ε é maior que o valor expresso pela equivalência 2.65, então o universo é curvado positivamente, caso contrário, será curvado negativamente.

Na época atual escrevemos a equação para a densidade crítica como

$$\varepsilon_{c,0} \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2, \quad (2.66)$$

sendo

$$H_0 \equiv H(t_0), \quad (2.67)$$

em que H_0 é o valor da constante de Hubble medida hoje.

Um universo plano também é denominado universo crítico.

2.6.2 O Parâmetro de Densidade

Em muitas situações físicas é útil expressar uma quantidade em termos de parâmetros adimensionais. Assim, o parâmetro de densidade Ω é definido como

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}. \quad (2.68)$$

A equação de Friedmann pode ser escrita em termos de parâmetro de densidade. Para isso, substituímos a equivalência anterior na equação 2.63

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_c(t) \Omega(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)}, \quad (2.69)$$

dividindo a equação anterior por $H(t)$ e substituindo 2.64 nesta divisão, vem

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}. \quad (2.70)$$

O caso em que $\Omega = 1$ é muito especial, pois $\kappa = 0$, e desde que κ seja uma constante fixa, a equação anterior transforma-se em $\Omega = 1$ para todo tempo.

Note que se $\Omega < 1$ ele o será por todo o tempo; se $\Omega > 1$ ele também será por todo o tempo e conseqüentemente se $\Omega = 0$ ele será assim por todo o tempo. Um universo regido pela equação de Friedmann não pode alterar sua curvatura.

O universo contém diferentes tipos de matéria, e a equação 2.70 pode não só para densidade total, mas também para cada componente individual de densidade tais como

Ω_r (radiação), Ω_m (matéria), etc. Define-se ainda um parâmetro de densidade Ω_κ associado com a curvatura κ

$$\Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}, \quad (2.71)$$

assim a equação 2.110 torna-se

$$\Omega + \Omega_\kappa = 1. \quad (2.72)$$

Na época atual, a equação de Friedmann em função do parâmetro de densidade pode ser escrita na forma compacta

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1). \quad (2.73)$$

Conhecendo o valor Ω_0 se conhece o sinal de κ . Se conhecemos a razão c/H_0 , obtemos o valor de R_0 pela relação $R_0 = c/H_0$, que é conhecido como a distância de Hubble que informa o tamanho do universo observável, caso o mesmo fosse vazio, ou seja, $\varepsilon = 0$.

2.6.3 O Parâmetro de Desaceleração

Não só o universo está em expansão, mas também a taxa com que ele está se expandindo está se alterando com o tempo (Andrew Liddle, 2003). O parâmetro de desaceleração é uma forma de avaliar esta alteração.

A expansão de Taylor de uma função $F(x)$ é dada por

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (2.74)$$

onde $n!$ é o fatorial de n e $f^{(n)}$ denota a n -ésima derivada de f em torno de a . Deve-se levar em conta que f é infinitamente diferenciável. Expande-se o fator de escala $a(t)$, através de 2.74

$$a(t) = \frac{a^{(0)}(t_0)(t - t_0)}{0!} + \frac{a^{(1)}(t_0)(t - t_0)}{1!} + \frac{a^{(2)}(t_0)(t - t_0)}{2!} + \dots, \quad (2.75)$$

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{a}(t_0)^2(t - t_0)^2}{2} + \dots, \quad (2.76)$$

dividindo a equação anterior por $a(t_0)$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.77)$$

O parâmetro de desaceleração q_0 é definido em função do fator de escala, e das suas primeira e segunda derivadas em relação ao tempo presente t_0

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2}. \quad (2.78)$$

Note que da definição anterior temos

- $q_0 > 0 \leftrightarrow \ddot{a} < 0$ (expansão desalorada)
- $q_0 < 0 \leftrightarrow \ddot{a} > 0$ (expansão acelerada).

Se substituirmos a equação da aceleração cósmica e da densidade crítica em função da constante de Hubble na equação 2.78, obtemos

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}. \quad (2.79)$$

Neste caso, uma medida de q_0 daria imediatamente o valor de Ω_0 .

2.7 A Constante Cosmológica

Albert Einstein introduziu a constante cosmológica Λ em suas equações da relatividade geral, com a finalidade de obter soluções estáticas, criando assim um universo estático. Dessa forma, a equação de Friedmann 2.20 e a equação da aceleração cósmica 2.58 tomam, respectivamente, a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.80)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3c^3} (\varepsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.81)$$

A princípio, a constante cosmológica pode assumir valores positivos ou negativo, embora o caso positivo é mais comumente considerado. O objetivo de Einstein era balancear a curvatura, Λ e ε com a finalidade de se obter $\dot{a}(t) = 0, \forall t$.

Com a alteração da equação de Friedmann por Λ uma nova componente no universo surge com densidade de energia

$$\varepsilon_\Lambda \equiv \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda. \quad (2.82)$$

É conveniente definir um parâmetro de densidade para a constante cosmológica como

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H(t)^2}. \quad (2.83)$$

Note que o parâmetro de densidade para a constante cosmológica não é constante, visto que $H(t)$ varia com o tempo.

Reescrevemos a equação de Friedmann na forma 2.70, para isso façamos

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.84)$$

substituímos 2.68 na equação anterior e a dividimos por H^2 , vem

$$1 = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \frac{3c^2 H^2}{8\pi G} \Omega - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2 H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.85)$$

de 2.83 em 2.85 e organizando os termos, encontramos

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{\kappa c^2}{R_0^2 H^2 a^2}, \quad (2.86)$$

Einstein não tinha uma interpretação física para Λ e com a descoberta da expansão do universo por Hubble, que derrubava o modelo estático, ele decidiu por abandonar a constante cosmológica. Mas a idéia de uma constante cosmológica permaneceu guardada. Para termos uma explicação física adequada para Λ , necessitamos identificar algum componente do universo cuja densidade de energia ε_Λ permaneça inalterada com a expansão ou contração do universo. Atualmente, o candidato mais apropriado a isso é a energia de vácuo (Barbara Ryden, 2003).

A idéia clássica de vácuo é entendida como sendo uma região do espaço desprovida de matéria, radiação ou qualquer outra forma de energia. Porém, na visão da física quântica, o vácuo está preenchido por partículas que surgem e desaparecem num curto intervalo de tempo. A energia necessária a criação de tais partículas, chamadas virtuais, é retirada do vácuo e em seguida devolvida quando as partículas se aniquilam, acabando por desaparecerem (Andrew Liddle, 2003; Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006).

2.8 A Evolução da Densidade de Energia

Com a finalidade de se descobrir como o universo evolui, necessita-se conhecer o que está no mesmo. Em um contexto cosmológico, isso é feito estabelecendo-se uma relação entre a densidade de energia ε e a pressão P . Esta relação é conhecida como equação de estado.

Para fluidos de interesse cosmológico, a equação de estado pode ser escrita na forma

$$P = \omega\varepsilon, \quad (2.87)$$

onde o parâmetro ω é adimensional e depende do fluido a ser estudado. Como por exemplo a matéria não relativística apresenta $\omega = 0$, ao passo que a radiação tem um $\omega = 1/3$, já a constante cosmológica possui um $\omega = -1$ (Barbara Ryden, 2003).

Obtemos uma equação geral que relaciona a densidade de energia, o fator de escala e o parâmetro ω . Inicialmente reescrevemos a equação de fluido cósmico 2.52 para um componente de equação de estado dada por 2.87 e a integramos

$$\dot{\varepsilon}_\omega + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_\omega + P_\omega) = 0, \quad (2.88)$$

$$\dot{\varepsilon}_\omega = -3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega\omega) = -3\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon_\omega(1 + \omega), \quad (2.89)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\omega}{\varepsilon_\omega} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega), \quad (2.90)$$

$$\frac{d\varepsilon_\omega}{dt} \frac{1}{\varepsilon_\omega} = -3\frac{da}{dt} \frac{1}{a}(1 + \omega), \quad (2.91)$$

$$\int \frac{d\varepsilon_\omega}{\varepsilon_\omega} = -3(1 + \omega) \int \frac{da}{a}, \quad (2.92)$$

$$\ln \varepsilon_\omega = -3(1 + \omega) \ln a + \varepsilon_{\omega,0}, \quad (2.93)$$

onde $\varepsilon_{\omega,0}$ é a constante das integrações,

$$\varepsilon_\omega = e^{\ln a^{-3(1+\omega)+\varepsilon_{\omega,0}}}, \quad (2.94)$$

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.95)$$

Assim, temos a densidade de energia para os fluidos matéria não relativística ε_m e radiação ε_r , respectivamente

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3}, \quad (2.96)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4}. \quad (2.97)$$

Note que pela equação 2.96, a densidade de energia ε_m cai proporcionalmente ao volume do universo. Se o volume do universo é aumentado de um certo fator, então ε_m cai proporcionalmente ao mesmo valor.

Um universo dominado pela radiação expande-se mais lentamente do que um universo dominado pela matéria, devido a desaceleração extra oriunda da pressão de radiação $P = 1/3\varepsilon$ (Andrew Liddle, 2003; Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006).

2.9 Modelos Cosmológicos

A lei da Gravitação de Newton manteve-se inabalável durante mais de 200 anos, até ser verificado que sua validade está restrita a campos gravitacionais não muito intensos, sendo um caso especial de uma teoria mais ampla, a relatividade geral.

Em 1917, Einstein aplica as equações da relatividade geral à cosmologia. O modelo de universo proposto por Einstein, chamado universo estático, tem como base o Princípio Cosmológico e na invariância das propriedades médias do universo. Entretanto, as equações da relatividade geral não permitem um universo com matéria e estático, pois a matéria origina um campo gravitacional, assim existe sempre uma força atrativa atuando. Para corrigir o problema, Einstein introduz a constante cosmológica, que é proporcional ao negativo da densidade de matéria, logo, se ela existe, a matéria não pode ser nula. Fisicamente, seria uma força que se oporia aos efeitos do campo gravitacional.

Em 1922, Friedmann, desenvolveu os chamados modelos expansionistas. São soluções das equações de Einstein que descrevem um universo que teve origem em um evento do passado remoto, depois chamado *Big Bang*, e que se mantém em expansão para sempre depois deste evento inicial. Como Einstein, Friedmann propôs um universo espacialmente homogêneo e isotrópico. Atualmente, o modelo de Friedmann é considerado o modelo cosmológico padrão.

Em 1927, Georges-Henri Lemaître desenvolveu as mesmas soluções de Friedmann, mas não se deteve apenas aos aspectos matemáticos das soluções, procurando fundamentá-las fisicamente. Ele visualizou todas as estrelas espremidas em um universo supercompacto, que ele denominou de átomo primordial. O momento da criação então, era em que esse átomo único, que englobava tudo, subitamente sofreu um decaimento, gerando assim toda a matéria do universo.

Já na década de 40, Gamow (1904-1968) e os pesquisadores Ralph Alpher (1921-2007) e Robert Hermann (1914-1997) deram um grande impulso ao desenvolvimento da física do universo em sua fase inicial ao propor que o universo primitivo além de conter matéria num estado extremamente denso tinha uma temperatura muito alta. A alta temperatura levou a existência de uma era da radiação, na qual a densidade de radiação superava, em muito, a densidade de matéria. Segundo eles, essa radiação, denominada Radiação Cósmica de Fundo, foi sendo esfriada pela expansão e sobrevive até hoje preenchendo todo o Universo (Lima et al., 2005; Simon Singh, 2006).

2.10 O Modelo Cosmológico Padrão

Por volta de 1950, a cosmologia era estritamente teórica e sem nenhuma atividade observacional que apoiasse os seus modelos que descreviam o universo. Recentemente, fatos observacionais criaram um paradigma de modelo cosmológico, conhecido como modelo cosmológico padrão.

Na nomenclatura modelo cosmológico padrão, a palavra modelo, neste contexto, significa que não há uma resposta final, ao passo que a palavra padrão indica que há uma quantidade de fatos observacionais que o sustentam e o aproximam da realidade. Seu suporte matemático são as equações que descrevem a dinâmica do universo que são a equação de Friedmann 2.20, a equação do fluido cósmico 2.52 e a equação da aceleração do fator de escala 2.58. O modelo cosmológico padrão baseia-se nos seguintes pontos:

- O Princípio Cosmológico.
- O modelo do *Big Bang*.
- A hipótese inflacionária.

O primeiro item anterior foi elucidado na seção 2.2 deste trabalho. Trataremos agora do modelo do *Big Bang* que descreve a evolução de nosso universo a partir de um estado

de extrema pressão e densidade de energia, quando ele era muito menor do que é agora. Esse evento é conhecido como *Big Bang* e o universo começou a expandir e esfriar a partir deste acontecimento que marca o tempo inicial, $t = 0$ (Matts Roos, 2003; Castro Milone et al, 2003). Posteriormente, discutimos a hipótese inflacionária.

A modelo do *Big Bang* está apoiada em três comprovações observacionais a saber:

- A lei de Hubble.
- A abundância de elementos leves.
- A radiação cósmica de fundo.

Façamos a seguir uma discussão destas três comprovações observacionais que sustentam o modelo do *Big Bang*.

2.10.1 A Lei de Hubble como Comprovação Observacional

Pela lei de Hubble, se as galáxias afastam-se umas das outras, então no passado elas deveriam estar mais próximas e em um passado remoto, todas estariam num mesmo ponto, muito quente que se expandiu no *Big Bang* (figura 2.12). Logo, as observações de Hubble implicavam em um momento de criação.

A figura 2.12 a) é uma representação simples do universo hoje formado por três galáxias e a Via-Láctea. Quanto mais distante de nós uma galáxia se encontra, mais rapidamente é sua velocidade de afastamento em relação a nós, o que pode ser indicado pelas setas em cada galáxia. Entretanto, se fizermos os relógios voltarem para trás, as galáxias estariam cada vez mais próximas (fig 2.12 b) e c)). Finalmente, elas estariam todas juntas (fig.2.12 d)) e isso seria o começo do *Big Bang* (Simon Singh, 2006).

Pode-se estimar o tempo em que ocorre o *Big Bang*. Se considerarmos que a distância que separam duas galáxias é d e que a velocidade de afastamento relativo entre elas é v e supondo que não existe força atuando no movimento das mesma, o tempo t_0 transcorrido desde a época em que elas estavam em contato é

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{d}{dH_0} = H_0^{-1} \approx 4.1 \times 10^{17} s \approx 13 \text{ bilhões de anos atrás.} \quad (2.98)$$

Para o cálculo do tempo em que ocorreu o *Big Bang* utilizamos o valor de H_0 medido pelo Telescópio Espacial Hubble, dado na seção 2.32. O tempo t_0 é chamado tempo de

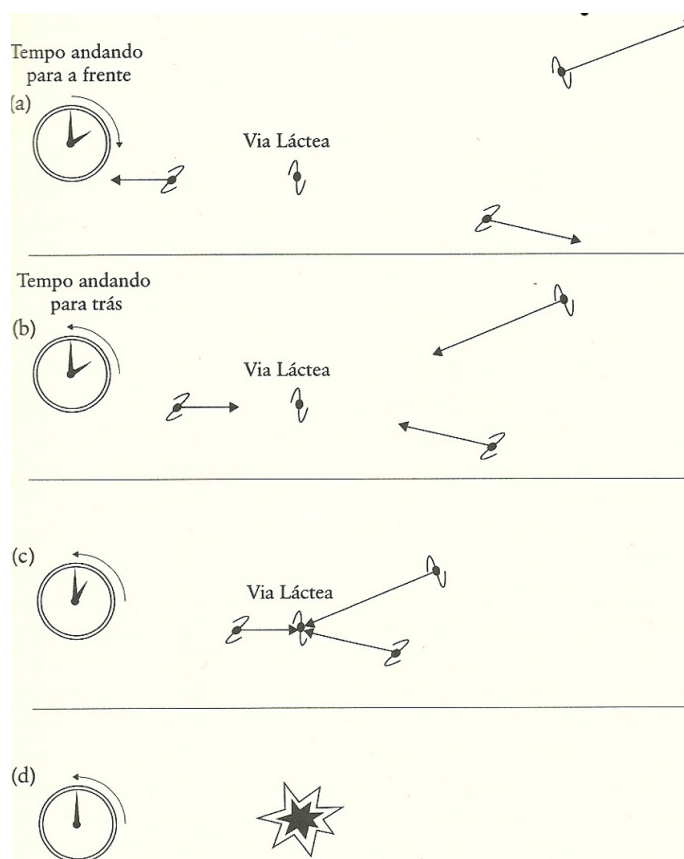


Figura 2.12: A Lei de Hubble como suporte observacional.

Hubble. Ele é comparável a idade avaliada das estrelas mais velhas do universo. Entretanto, a idade do universo que dá o tempo transcorrido desde o estado de alta densidade do mesmo, não é necessariamente igual ao tempo de Hubble, visto que sabemos que as galáxias são formadas por matéria e esta sofre influência da gravidade. O valor do tempo de Hubble constitui o limite superior para a idade do universo.

Em 1998 pesquisadores do projeto *High-Z Supernova Search Team* trabalhando com dados de supernovas⁵ tipo I-a descobriram que o universo está se expandindo de forma acelerada, pois a gravidade frearia a taxa de expansão. Eles encontraram para o parâmetro de desaceleração um valor de $q_0 = -0.75 \pm 0.32$. Logo, a expansão está ocorrendo de forma acelerada (Filippenko et al., 1998; The High-Z SN Search Team, 2011).

⁵Evento explosivo provocado pelo fato de uma estrela não mais conseguir manter seu equilíbrio hidrostático e colapsa originando uma estrela de nêutrons ou buraco negro. Em supernovas tipo Ia, a explosão origina-se de um sistema binário formado por uma anã branca, estrela na fase final de evolução, e uma estrela companheira que ejeta massa para superfície da anã branca, causando seu colapso.

2.10.2 Abundância de Elementos Leves

O primeiro a estudar as condições extremas do cenário do *Big Bang* foi Gamow, por volta de 1940. Ele modelou a nucleossíntese primordial⁶ presumindo que a temperatura no início do universo era tão alta que teria decomposta toda a matéria até sua forma elementar. Portanto, ele considerou que os componentes iniciais do universo eram os prótons, nêutrons e elétrons.

A abundância dos elementos no universo primordial também foi estudada por Enrico Fermi (1901-1954) e Anthony Turkevitch (1916-2002), e seus resultados (figura 2.13) coincidiam com os de Gamow e seu aluno Alpher.

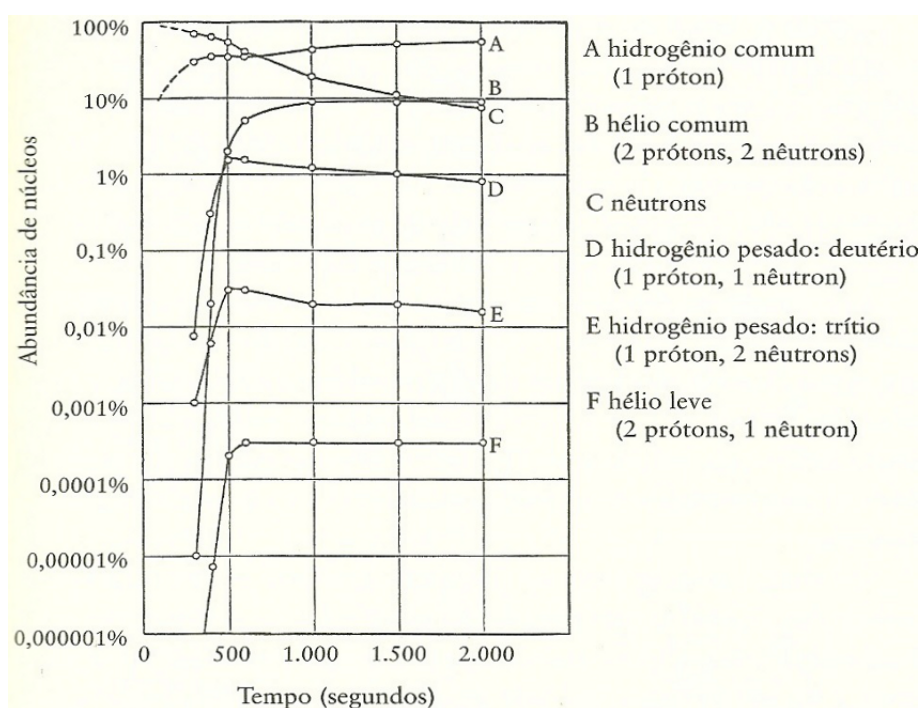


Figura 2.13: A evolução química do universo durante os 2000 primeiros segundos.

Na figura 2.13, os nêutrons são continuamente transformados em prótons, aqui são os núcleos de hidrogênio, o que explica o seu contínuo declínio. Os nêutrons também são integrados aos núcleos de hélio, fato que faz do hélio ser o segundo elemento mais abundante no universo. As outras representações de núcleos neste gráfico correspondem aos isótopos de hidrogênio e hélio originados no trajeto que vai do hidrogênio ao hélio.

Gamow descobriu que o universo primordial não devia conter outros elementos a não ser o hidrogênio, deutério, trítio e lítio. Todos os outros átomos serão formados mais

⁶A nucleossíntese primordial é o conjunto de reações termonucleares que originaram os elementos leves no universo.

tarde por reações nucleares no interior das estrelas.

Os astrônomos mediram a abundância dos isótopos pesados do hidrogênio, deutério e trítio, e suas medições corresponderam aos trabalhos teóricos de Gamow, Alpher, Fermi e Turkevitch e isso é mais um apoio observacional a Teoria do *Big Bang*.

Os elementos leves como hidrogênio e hélio são abundantes devido ao fato de eles terem sido sintetizados nos primeiros instantes do universo, ao passo que átomos mais pesados só começaram a surgir quando as estrelas se formaram (Castro Milone et al, 2003; Simon Singh, 2006).

Outra evidência observacional a favor da Teoria do *Big Bang* é a RCF que será discutida na seção seguinte.

2.11 A Radiação Cósmica de Fundo

O modelo do *Big Bang* originou-se dos estudos de Gamow e seus colaboradores ao tentarem explicar a nucleossíntese primordial dos elementos químicos (Ralph A. Alpher, 1948; Simon Singh, 2006). Gamow e seus colaboradores calcularam que o universo passou por uma transição por volta de 300 mil anos após o *Big Bang*. Neste cenário, a temperatura do universo havia caído de tal forma que os elétrons que antes flutuavam livres começaram a se ligar aos núcleos, formando átomos neutros. Esta época é conhecida como era da recombinação, quando o universo ficou transparente à radiação (figura 2.14 b)).

Antes da era da recombinação, a radiação interagia constantemente com os elétrons e o universo era opaco pois o caminho livre médio desta radiação era muito pequeno (figura 2.14a)).

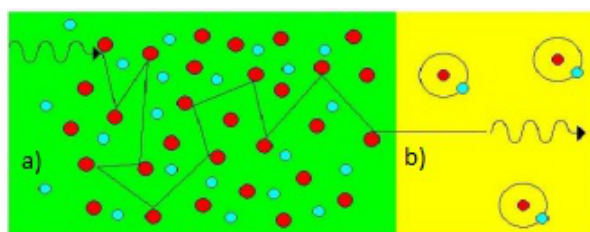


Figura 2.14: a) Universo opaco à radiação e b) Universo transparente à radiação.

Logo, a radiação se desacopla da matéria e é chamada de RCF. Alpher e Herman estimaram que a radiação liberada na recombinação tinha um comprimento de onda de $\approx 1 \mu\text{m}$ correspondendo ao infravermelho próximo. Porém, essa radiação teria sido esti-

cada devido a expansão do universo e agora teria um comprimento de onda de $\approx 1 \text{ mm}$ correspondendo a região de microondas do espectro eletromagnético.

Para Alpher e Herman, o universo deveria estar preenchido com essa radiação de microondas e esta deveria estar vindo de todas as direções, pois existira em todas as partes do universo na época da recombinação (Simon Singh, 2006).

Na época da recombinação a temperatura da RCF era de 3000K (Barbara Ryden, 2003). Alpher e Herman determinaram uma temperatura atual para a RCF de 5K (Ralph A. Alpher, 1948).

É possível mostrar que essa temperatura T cai com o fator de escala a . Para isso, consideramos uma região de volume $V(t)$ que se expande da mesma forma que o universo, tal que $V \propto a(t)^3$. Consideremos que esta região esteja preenchida por gás de fótons. A densidade de energia ε_γ e a pressão P_γ deste gás de fótons são, respectivamente

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4, \quad (2.99)$$

em que α é a constante de Boltzmann,

$$P_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{3}. \quad (2.100)$$

O gás de fótons desta região, obedece a primeira Lei da Termodinâmica

$$dQ = dE + PdV, \quad (2.101)$$

mas, como no universo não há trocas de calor com o meio externo temos que $dQ = 0$, e levando esta informação a equação anterior derivada com respeito ao tempo, vem

$$\frac{dE}{dt} = -P(t) \frac{dV}{dt}, \quad (2.102)$$

combinando 2.99, 2.100 com 2.102, temos

$$\frac{d}{dt}(\alpha T^4 V) = -\frac{\alpha T^4}{3} \frac{dV}{dt}, \quad (2.103)$$

$$4V\alpha \frac{dT^3}{dt} + \alpha T^4 \frac{dV}{dt} = -\frac{\alpha T^4}{3} \frac{dV}{dt}, \quad (2.104)$$

resultando

$$\left(\frac{1}{T}\right) \frac{dT}{dt} = - \left(\frac{1}{3V}\right) \frac{dV}{dt}, \quad (2.105)$$

se

$$V \propto a(t)^3, \quad (2.106)$$

então

$$\frac{d}{dt}(\ln T) = - \frac{d}{dt}(\ln a), \quad (2.107)$$

logo,

$$T(t) \propto a(t)^{-1}. \quad (2.108)$$

Assim, a temperatura da RCF é inversamente proporcional ao fator de escala. Através da equação anterior e da relação entre *redshift* z e o fator de escala (Apêndice C), é possível obter uma expressão para a T da RCF em um passado remoto, a temperatura da RCF observada hoje T_0 e z

$$\frac{T(t)}{T_0} = \frac{a_0}{a(t)} = (1 + z), \quad (2.109)$$

$$T(t) = T_0(1 + z). \quad (2.110)$$

A equação anterior informa o valor da temperatura da RCF a um *redshift* z dada a temperatura hoje T_0 (Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006).

Dicke e seus colaboradores em 1965 argumentaram que à medida que o universo expandia-se adiabaticamente, o desvio cosmológico para o vermelho causou um resfriamento da RCF, mantendo uma distribuição espectral de corpo negro. Consideravam que a temperatura da RCF variou inversamente ao tamanho do universo, logo, a temperatura da RCF é inversamente proporcional ao fator de escala, o que demonstramos segundo a relação 2.110 (Dicke et al., 1965).

2.11.1 A Detecção da RCF

Em 1965, trabalhando nos laboratórios de comunicação por satélites da *Bell Telephone* em New Jersey, Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) detectaram um sinal de fundo

que por sua vez não possuía nenhuma direção privilegiada. Em seu artigo publicado em 1965, argumentaram:

“ Medições da temperatura do ruído efetivo do zênite [...], a 4080MHz revelaram um valor cerca de $(3.5 \pm 1)K$ superior ao esperado. Este excesso de temperatura é, dentro dos limites das nossas observações isotrópico, não-polarizado e independente das variações sazonais (Julho, 1964 - Abril, 1965). [...] (Penzias et al., 1965).”

No mesmo ano, Robert Henry Dicke (1916-1997) e seus colaboradores, interpretaram os resultados de Penzias e Wilson como sendo a RCF (Dicke et al., 1965).

Note que a RCF já havia sido prevista por Gamow e seus colaboradores em 1948.

O equilíbrio termodinâmico entre matéria e radiação imprimiu a característica de corpo negro da RCF. Esta radiação é um dos componentes do universo jovem (Souza, 2004).

2.11.2 O Satélite COBE

Nos anos seguintes após as descobertas de Penzias e Wilson, vários experimentos lançados a bordo de balões foram concedidos para estudar a forma do espectro da RCF.

Em 1989, o satélite COBE, ilustrado na figura 2.15, foi colocado em órbita a 900Km ao redor da Terra. O posicionamento deste satélite minimiza os efeitos da radiação terrestre e solar. Este satélite coletou dados que confirmaram definitivamente que a RCF possui uma distribuição de corpo negro (Boggess et al., 1992; Mather et al., 1990).

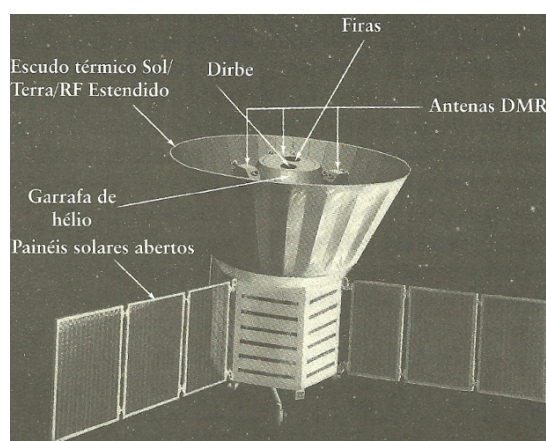


Figura 2.15: O satélite COBE.

A figura 2.15 mostra a localização dos três detectores do COBE. Dentre os detectores está o Dirbe (*Diffuse Infrared Background Experiment*) que fez medidas da radiação in-

fravermelha difusa em 10 bandas fotométricas de 1 a $300\mu\text{m}$ e polarimétrica de 1 a $3.5\mu\text{m}$. Outro detector era o espectrômetro FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*) que realizou uma medição precisa do espectro da RCF de 1cm a $100\mu\text{m}$ e por fim o radiômetro DMR (*Differential Microwave Radiometer*) que pesquisaria as anisotropias da RCF nas escalas angulares maiores do que 7° nas frequências 31.5, 53 e 90 GHz. Estes canais foram escolhidos com o intuito de minimizar os contaminantes causados por fontes de origem não cosmológicas tais como a nossa galáxia e o sistema solar (Boggess et al., 1992; Simon Singh, 2006).

Estes três detectores estão abrigados por um escudo térmico que os protege do calor e das microondas terrestres e solares. A garrafa de hélio auxilia no resfriamento dos componentes do satélite, com intuito de reduzir a emissão de radiação de microondas pelo próprio satélite.

Em 1990, a primeira medida feita com o espectrômetro FIRAS demonstrou que a RCF segue com acurada precisão uma distribuição de corpo negro (figura 2.16), com desvios menores que 1% e apresenta uma temperatura de $(2.735 \pm 0.06)\text{K}$ (Mather et al., 1990).

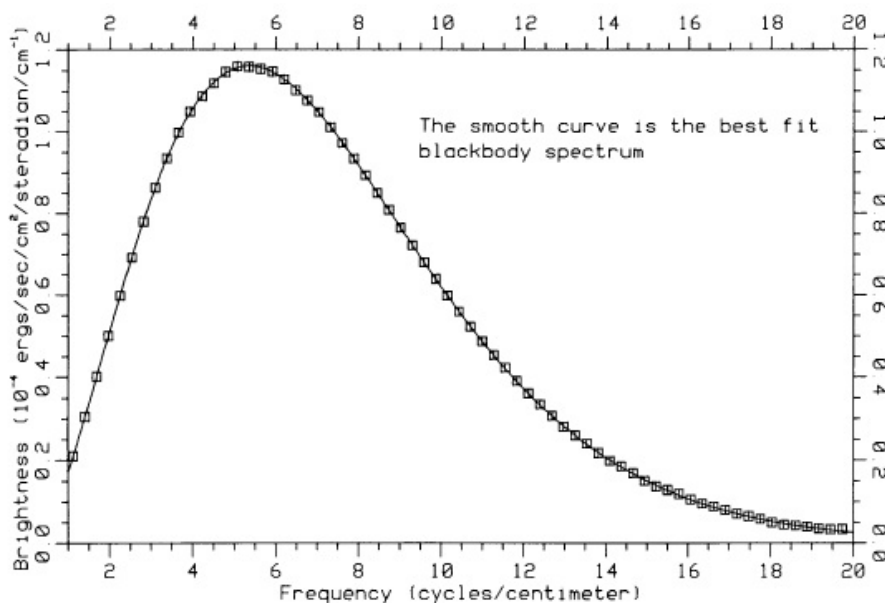


Figura 2.16: O espectro de corpo negro da RCF obtido pelo FIRAS.(Mather et al., 1990).

Uma melhor calibração nestes dados, mostraram que a RCF apresenta um espectro de corpo negro com desvios menores que 0.03% e uma temperatura de $(2.726 \pm 0.01)\text{K}$. Neste caso, o erro ocorre na casa dos milésimos (figura 2.17)(Mather et al., 1994).

Melhorias nas calibrações de medidas da RCF possibilitou ainda uma melhor medição

encontrando-se um valor de $(2.725 \pm 0.002)\text{K}$ (Mather et al., 1999).

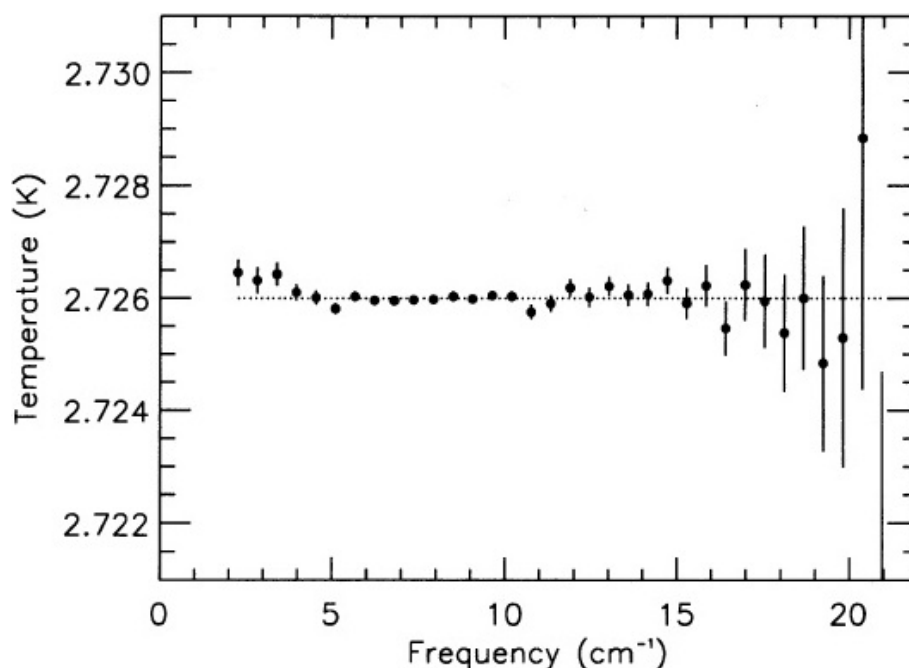


Figura 2.17: Flutuação do erro para a temperatura média da RCF.(Mather et al., 1994).

Com a confirmação de que o espectro da RCF obedece a uma distribuição de corpo negro, ficou evidenciado que todo o universo se encontrava a uma mesma temperatura durante os seus primeiros instantes (Wright et al., 1994). Essa é mais uma comprovação a favor do modelo do *Big Bang*.

2.11.3 As Flutuações de Temperatura da RCF

Quando observamos uma estrela a 100 anos-luz da Terra, isso significa que a luz emitida pela estrela demorou 100 anos para nos atingir. Assim, enxergamos a estrela como ela era há 100 anos atrás. De modo análogo, considerando que a RCF foi liberada há bilhões de anos, então ela levou bilhões de anos para atingir um detector, assim temos informações do universo quando ele tinha aproximadamente 380 000 anos (aqui chamado de universo jovem).

Nesta época, houve variações de densidade no universo, então as mesmas alterariam a RCF captada por nós. Considere que no universo jovem existiam regiões que possuíam uma densidade maior do que a média, isso causaria um efeito na RCF emitida por esta região. Se a RCF escapa de uma região do universo jovem de maior densidade, então ela perderá energia (observa-se uma menor temperatura) para escapar da atração gravitacional

desta região o que causará um ligeiro aumento em seu comprimento de onda. Entretanto, se a RCF escapa de uma região do universo jovem com uma densidade menor do que a média, ela perderá menos energia (observa-se uma maior temperatura) e, portanto, terá um comprimento de onda menor do que a radiação liberada das regiões de densidades maiores.

As flutuações de temperatura da RCF apontam para os primórdios da formação do universo observado e mostram uma imagem congelada delas na superfície do último espalhamento⁷. Essas inhomogeneidades presentes no universo jovem são as sementes que darão origem a diversidade de estruturas do universo atual.

A procura pelas flutuações de temperatura da RCF foi um processo de melhoria das técnicas observacionais à busca da origem das estruturas, imprimidas no universo jovem. Já que todo sistema físico apresenta flutuações devido a processos que perturbam o equilíbrio, e dado que o universo passou por várias eras⁸, as flutuações de temperatura da RCF deviam estar presentes em pequenas e médias escalas angulares no céu. As flutuações de temperatura são definidas como

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta, \phi) \equiv \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0}, \quad (2.111)$$

em que θ e ϕ são coordenadas na esfera celeste. As distribuições de temperatura apresentam flutuações da ordem de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ (Smoot et al., 1992). Essas flutuações são originadas do efeito gravitacional de flutuações de densidades primordiais na distribuição de matéria não bariônica (Barbara Ryden, 2003).

Por volta de 1990, o satélite COBE foi o primeiro a detectar essas flutuações de temperatura da RCF. Através da análise de dados da RCF, foi possível verificar que estas flutuações de temperatura seguem uma distribuição gaussiana,⁹ o que está de acordo com a teoria da inflação que diz que as flutuações de densidade¹⁰ iniciais são aproximadamente gaussianas (Guth et al., 1982; Smoot et al., 1992). A figura 2.18 ilustra mapas de dados de 1 ano de observação coletados pelo DMR em seus três canais de frequências.

As flutuações de temperatura da RCF foram mapeadas na esfera celeste, como se o satélite COBE estivesse em seu centro e olhando para fora.

⁷A superfície do último espalhamento é todo o espaço no momento em que os fótons começa a viajar livremente.

⁸Um breve comentário a respeito destas eras encontra-se no Apêndice E.

⁹As características deste tipo de distribuição, foram discutidas na subseção 3.4.4.

¹⁰Estas flutuações de densidade foram responsáveis pela formação das estruturas do universo.

Detalhes sobre a confecção destes mapas serão mostrados nas subseções do satélite WMAP.

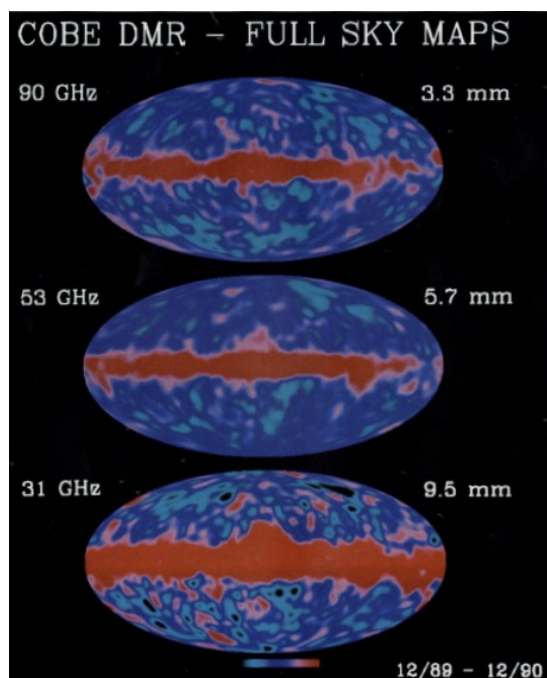


Figura 2.18: As flutuações de temperatura detectadas pelo COBE. (Smoot et al., 1992).

2.12 Classificação das Flutuações de Temperatura da RCF

As anisotropias na distribuição angular da RCF são classificadas de acordo com a época que se originaram (Bersanelli et al., 2002; Barbara Ryden, 2003). Fazemos uma discussão a respeito dos tipos de anisotropias e os processos que as originaram.

2.12.1 Anisotropias Primárias

São denominadas anisotropias primárias àquelas que foram geradas na RCF até a época do desacoplamento. Esse tipo de anisotropia foi gerada pelos seguintes processos:

- **Flutuações de densidade** - Como comentado na subseção 2.11.3 se o fóton escapa de uma região de densidade $\delta\rho/\rho > 0$, observa-se uma região de menor temperatura, caso contrário, se o fóton escapa de uma região $\delta\rho/\rho < 0$, observa-se uma região de

maior temperatura. Em um mapa de flutuações da RCF essas regiões são denominadas de mancha fria (*cold spot*) e mancha quente (*hot spot*) (Kolb et al., 1990). As flutuações de temperatura se relacionam com as flutuações de densidade da seguinte maneira

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (2.112)$$

A relação dada pela equação 2.112 é válida para processos adiabáticos, considerados dominante na época do desacoplamento. (Max Tegmark , 1995).

- **Efeito Sachs-Wolfe** - Este efeito é dominante em escalas angulares $\theta \gtrsim 2^\circ$ e é causado por variações no potencial gravitacional Φ . Essas variações são causadas por irregularidades na distribuição de matéria. Como matéria e radiação estão acoplados, os fótons estão contidos nesse potencial gravitacional, e dele saem após o desacoplamento. Os fótons então perdem energia e sofrem *redshift* e geram as flutuações de temperatura (Sachs et al., 1967, 2007; Martin White et al., 1997). As flutuações de temperatura causada pelo efeito Sachs-Wolfe são dadas por

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \Phi}{3c^2}. \quad (2.113)$$

- **Efeito Doppler** - Ocorre em escalar angulares $10' \lesssim \theta \lesssim 2^\circ$. Esse efeito causa perturbação na temperatura da RCF devido ao efeito Doppler cinemático ocasionado por velocidades peculiares no plasma primordial (Martin White, 1994). Para fótons espalhando por um fluido à uma velocidade v , estima-se esse efeito por

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{v}{c}. \quad (2.114)$$

2.12.2 Anisotropias Secundárias

Esse tipo anisotropia originaram durante o percurso dos fótons da superfície do último espalhamento até nós. Os processos que geram tal anisotropia são:

- **Efeito Sachs-Wolfe integrado** - Esse efeito origina-se devido às variações no tempo dos poços de potenciais durante o percurso do fóton da superfície do último espalhamento até nós. Se a profundidade do poço se mantiver constante, desde o momento em que o fóton entrou até sua saída, a frequência do fóton não se altera e não há variação total de energia. Porém, se a profundidade do poço variar, conseqüentemente a frequência do fóton irá variar ao passar pelo poço, variando portanto, sua energia (Martin White et al., 1997).

- **Efeito Sunyaev-Zel'dovich** - Tal efeito é devido ao espalhamento Compton inverso dos fótons da RCF por elétrons relativísticos encontrados nos interiores de aglomerados de galáxias. O espalhamento Compton inverso ocasiona uma distorção no espectro de corpo negro da RCF, sendo conhecido como efeito Sunyaev-Zel'dovich. Velocidades peculiares nos aglomerados causam anisotropias secundárias na RCF via efeito Doppler. Tal efeito é conhecido como efeito Sunyaev-Zel'dovich cinético (Scott et al., 2010).
- **Efeito de lentes gravitacionais** - Enquanto que o efeito Sachs-Wolfe integrado altera a energia do fóton e conserva sua direção, o efeito das lentes gravitacionais altera o oposto, mantendo a energia e alterando a direção de propagação dos fótons (Bersanelli et al., 2002).

2.13 O Satélite WMAP

Em 2001, a NASA lança o satélite WMAP cujos objetivos eram determinar a curvatura do universo, seu conteúdo e evolução, e estudar em uma maior resolução as flutuações de temperatura da RCF. O WMAP possuía uma sensibilidade 45 vezes maior e uma resolução 33 vezes melhor do que o COBE.

O WMAP (figura 2.19) estava localizado a 1.5×10^6 Km da Terra, em um ponto L_2 denominado segundo ponto de Lagrange. Sua posição visa minimizar erros sistemáticos de medidas causadas pelas contaminações vindas do Sol, Terra e Lua.

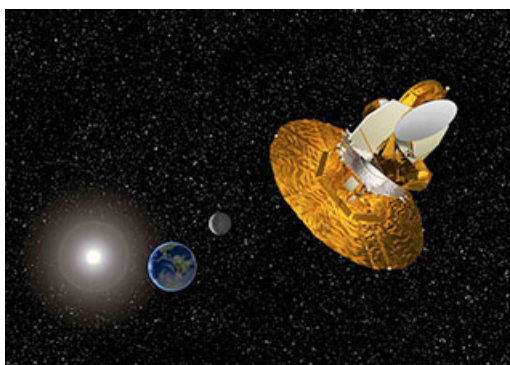


Figura 2.19: O satélite WMAP.

Este satélite opera em 5 bandas de frequência a saber: banda K (23GHz), banda Ka (33GHz), banda Q (41GHz), banda V (61GHz) e banda W (94GHz) (Bennett, C.L.; Bay, M. et al., 2003). A faixa preferencial para observação da RCF é de 60 a 120GHz (Draine

et al., 1999). Porém, para altas latitudes galácticas (maiores do que 15°) as anisotropias da RCF dominam nas faixas de ~ 30 a 150GHz . Entretanto, o plano galáctico precisa ser medido e removido do conjunto de dados que constitui um mapa de flutuação de temperatura da RCF. O satélite WMAP possuía uma sensibilidade de $20 \mu\text{K}$ por pixel, uma resolução angular de $\approx 0.2^\circ$ (Bennett, C.L.; Bay, M. et al., 2003).

A tabela 2.1 ilustra alguns parâmetros cosmológicos para o modelo ΛCDM usando dados do WMAP. Façamos uma discussão sobre este modelo.

Tabela 2.1: Parâmetros cosmológicos para o modelo ΛCDM .(Jarosik et al., 2010).

Parâmetro	Valor obtido
Idade do universo t_0	$(13.75 \pm 0.13) \times 10^9$ anos
Constante de Hubble H_0	$(71.0 \pm 2.5)\text{km/s/Mpc}$
Densidade de matéria bariônica Ω_b	(0.0449 ± 0.0028)
Densidade de matéria escura Ω_c	(0.222 ± 0.026)
Densidade de energia escura Ω_Λ	(0.743 ± 0.029)
Densidade total Ω_{tot}	$1.080^{+0.093}_{-0.071}$

Pela tabela anterior, podemos fazer um diagrama para os constituintes do universo atual (figura 2.21).

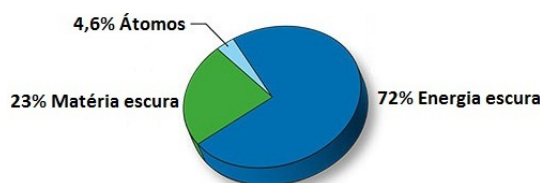


Figura 2.20: Inventário cosmológico.

A matéria bariônica é composta por prótons, elétrons e nêutrons. Já a matéria escura não é visível e não interagem com a matéria normal a não ser gravitacionalmente. A energia escura possui pressão negativa e poderia dar uma interpretação à constante cosmológica explicando a expansão acelerada do universo atual.

Em um modelo cosmológico segundo o qual a matéria escura é fria, sendo não relativística após a inflação, as galáxias e aglomerados de galáxias formaram-se a partir de objetos pré-galácticos cujas massas são da ordem de galáxias anãs¹¹ e posteriormente se

¹¹Esse tipo de galáxia é pequena e contém poucos bilhões de estrelas. Nossa galáxia contém centenas de bilhões de estrelas.

fundiram formando estruturas maiores que observamos.

Adicionando a constante cosmológica e a matéria escura ao modelo cosmológico padrão, chegamos ao modelo Λ CDM (*Cold Dark Matter*) que é um dos modelos de maior chance de aproximadamente reproduzir as características observáveis do universo. Atualmente, o modelo cosmológico padrão é conhecido como Λ CDM (Andrew Liddle, 2003; Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006).

Em 2009, a ESA (*European Space Agency*) lança o satélite Planck, cujo objetivo também é estudar a RCF. Tal satélite é mais avançado que o WMAP, possuindo detectores capazes de detectar sinais 10 vezes mais fracos que o WMAP, em adição, sua resolução é 3 vezes maior que seu antecessor. O satélite Planck é capaz de extrair 15 vezes mais informação a respeito da RCF do que o WMAP (ESA Planck , 2012).

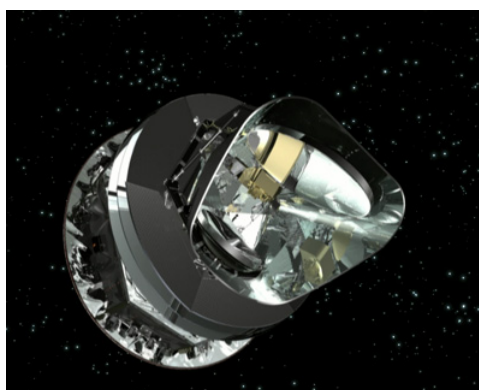


Figura 2.21: O satélite Planck.

2.14 Mapas da RCF

Da mesma forma que a superfície terrestre pode ser desdobrada no planisfério, assim também um mapa da RCF é desdobrado em uma projeção bidimensional denominada Mollweide (figura 2.22)

Nas figuras 2.22 a) e b) as temperaturas são representadas por cores que vão do azul, representando a menor temperatura, até o vermelho que representa a maior temperatura.

Comparando-se os mapas do satélite COBE com o do satélite WMAP, percebe-se que as manchas de temperatura aparecem nos mesmos locais com as mesmas intensidade (cores), provando ser um sinal real (figura 2.23) (Horvath et al., 2007).

Os mapas da RCF são contaminados por emissão em microondas provenientes de nossa própria galáxia e de fontes extragalácticas, conhecidos por contaminantes (*foregrounds*) e

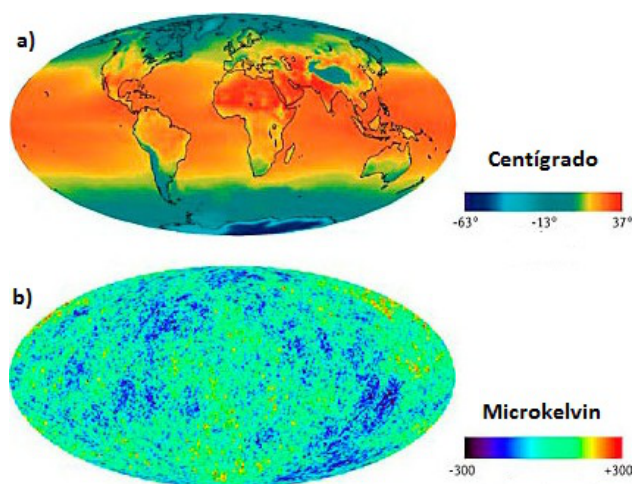


Figura 2.22: Projeção Mollweide.

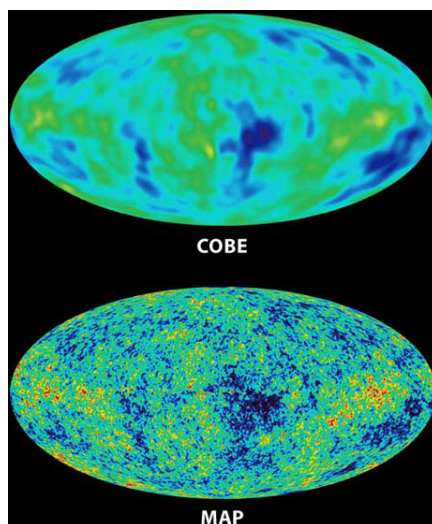


Figura 2.23: Comparação entre mapas da RCF do COBE e WMAP.

para o estudo dos mapas da RCF estes contaminantes devem ser removidos. Na figura 2.24 a faixa vermelha central é devida aos contaminantes da emissão galáctica. Note que a emissão galáctica é mais acentuada na banda K.

Existe um tipo de mapa, denominado ILC (*Internal Linear Combination*), construído a partir de coeficientes cujo objetivo é minimizar a emissão galáctica enquanto mantém o sinal da RCF (figura 2.25) (Hinshaw et al., 2007).

Os processos físicos que produzem emissão difusa em microondas na nossa galáxia são três: a emissão síncrotron, a emissão Bremsstrahlung e a emissão por grãos de poeira. A figura 2.26 ilustra o espectro para estes contaminantes e a RCF.

Façamos, a seguir, uma discussão a respeito destes três tipos de contaminantes.

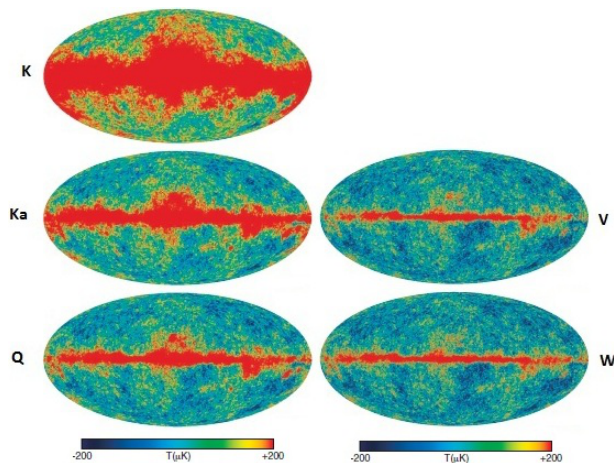


Figura 2.24: Mapas de céu inteiro da RCF nas 5 frequências do WMAP.(Hinshaw et al., 2007).

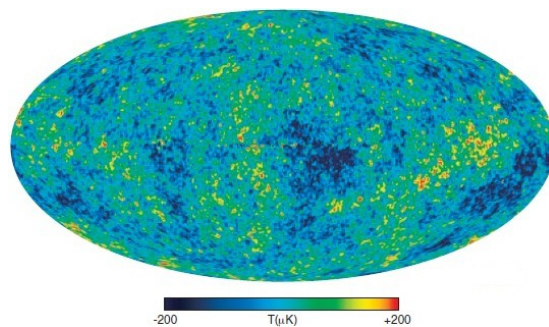


Figura 2.25: O mapa ILC 3 anos. (Hinshaw et al., 2007).

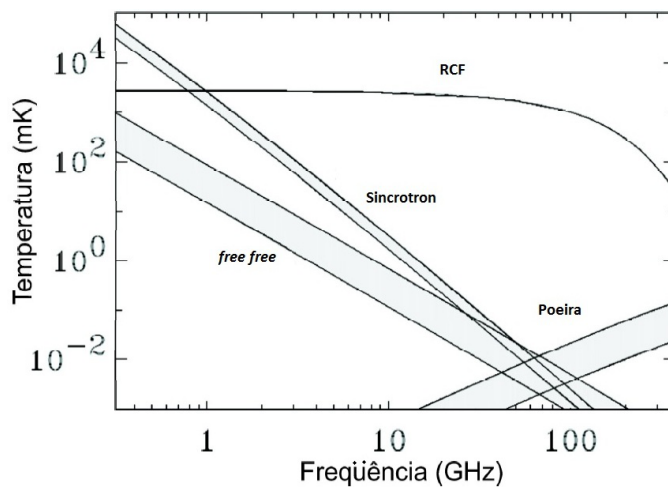


Figura 2.26: Espectro de emissão para os contaminantes galácticos.(Smoot, 1999).

2.15 Emissão Sincrotron

A emissão sincrotron origina-se de elétrons de raios cósmicos acelerados pelo campo magnético de nossa galáxia cuja intensidade é da ordem de 1 - 5 μ G. A intensidade $I(\nu)$ dessa radiação depende da distribuição de energia dos elétrons e do campo magnético B da galáxia, tal que

$$I(\nu) \sim \int \int P_*(\nu, B, E)N(E, s)dEds, \quad (2.115)$$

onde $P_*(\nu, B, E)$ denota a potência irradiada por um elétron no percurso s até o observador e $N(E)$ é a distribuição dos elétrons em função da energia.

A emissão sincrotron domina em frequências $\nu \lesssim 10$ GHz e a temperatura de brilho¹² T_b é governada pela lei de potência

$$T_b \propto \nu^{-\beta}, \quad (2.116)$$

em que β é denominado índice espectral e este varia com a frequência e a posição de acordo com a distribuição de energia dos elétrons e o campo magnético da galáxia.

A emissão sincrotron é afetada pela propagação de raios cósmicos, perda de energia e grau de confinamento. Os elétrons de raios cósmicos podem se propagar via difusão ou convecção. A difusão envolve a dispersão aleatória dos elétrons através de campos magnéticos variáveis, enquanto que a convecção envolve o movimento sistemático para fora das fontes de espalhamento. Os elétrons de raios cósmicos perdem energia via espalhamento Compton inverso, perdas adiabáticas, transições livre-livre e via sincrotron. Nesta última, temos

$$-\frac{dE}{dt} \propto \gamma^2 \epsilon_B, \quad (2.117)$$

onde γ é o fator de Lorentz e ϵ_B é a densidade de energia do campo magnético.

Os elétrons de raios cósmicos podem ficar confinados na galáxia ou simplesmente deixá-la. Elétrons confinados perdem sua energia antes de deixarem o halo da galáxia, ao passo que, os elétrons que deixam a galáxia perdem uma parte substancial de sua energia.

Temos que para o índice espectral $\beta < -2.9$ indica uma alta perda de energia e baixa taxa de escape e $\beta > -2.7$ indica que os elétrons podem escapar do halo da galáxia antes

¹²A temperatura de brilho corresponde a radiância registrada pelo sensor do satélite.

de terem uma perda significativa de sua energia. O estudo do parâmetro β é importante para quantificar a emissão sincrotron.

Remanescentes de supernova tipo I-b e tipo II, também oferecem uma contribuição adicional à emissão sincrotron (Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003; Bersanelli et al., 2002; Todor Stanev, 2005; Coelho, 2008).

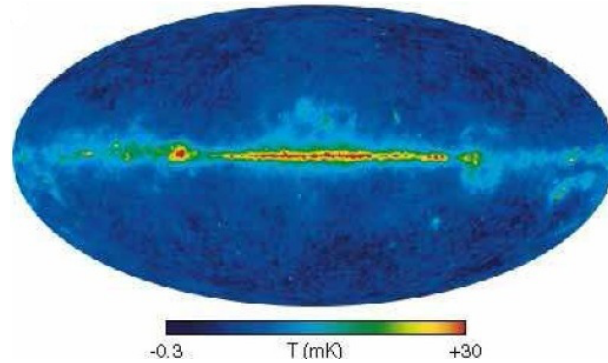


Figura 2.27: Emissão sincrotron.(Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003).

2.16 Emissão Bremsstrahlung

A emissão Bremsstrahlung é o resultado de aceleração causada por um campo coulombiano de íons a um elétron livre. Isso ocorre quando um elétron de temperatura $T_e \gtrsim 10^4\text{K}$ interage com um íon.

A emissão volumétrica ϵ_{ff} da emissão Bremsstrahlung é definida como a potência total dW/dt emitida por volume dV , sendo expressa por

$$\epsilon_{ff} \equiv \frac{dW}{dV dt} = \left(\frac{2\pi k T_e}{3m_e} \right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^5}{3h m_e c^3} Z^2 n_e n_i \bar{g}_B, \quad (2.118)$$

sendo m_e a massa do elétron, n_e e n_i são, respectivamente, a densidade volumétrica do número de elétrons e íons, k é a constante de Boltzmann, h a constante de Planck, Z é a carga efetiva do íon e \bar{g}_B é o fator de Gaunt médio.

Avaliando a equação 2.169 no sistema CGS ($\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}$), vem

$$\epsilon_{ff} = 1.4 \times 10^{-27} T_e^{1/2} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B. \quad (2.119)$$

O mapa da emissão Bremsstrahlung da figura 2.28 foi baseado nas medidas das cinco frequências do WMAP.

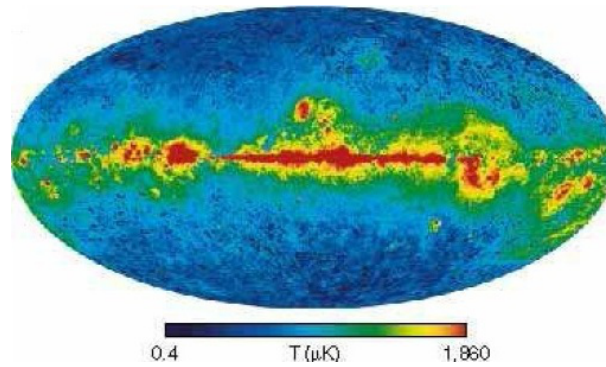


Figura 2.28: Emissão Bremsstrahlung.
(Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003).

A emissão Bremsstrahlung está associada às regiões HII, que são regiões de intensa formação estelar onde elétrons de $T_e \gtrsim 10^4\text{K}$ estão presentes. As regiões HII também gera emissão da linha H_α do hidrogênio (Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003; Bersanelli et al., 2002; George et al., 2004).

2.17 Emissão Térmica pelos Grãos de Poeira

A emissão térmica pelos grãos de poeira é causada pelo aquecimento da poeira do meio interestelar. Um grão de poeira contém de $\sim 10^2 - 10^3$ átomos. Estes grãos são constituídos por silicatos, óxidos, gelo e compostos orgânicos. A poeira interestelar absorve radiação no ultravioleta e no ótico e emite em infravermelho.

A emissão pelos grãos de poeira domina em frequências $\nu \gtrsim 100\text{GHz}$ e sua intensidade total depende da composição química, da estrutura e da dimensão dos grãos de poeira.

A intensidade I_p da emissão pelos grãos de poeira é dada por

$$I_p = \int \rho \kappa_\nu B_\nu(T_p) ds, \quad (2.120)$$

sendo ρ a densidade de massa, κ_ν a opacidade, $B_\nu(T_p)$ a função de Planck e T_p a temperatura do grão de poeira.

A opacidade depende da natureza do material. Em geral, ela é expressa pela lei de potência

$$\kappa_\nu \sim \nu^\alpha, \quad (2.121)$$

para o carbono amorfo tem-se $\alpha \approx 1.0$, para os silicatos $\alpha \approx 1.5$ e para a grafita $\alpha \approx 2.0$.

O mapa da figura 2.29 foi construído através de medidas feitas nas 5 bandas de frequência do WMAP (Bersanelli et al., 2002; Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003; Schlegel et al., 1998).

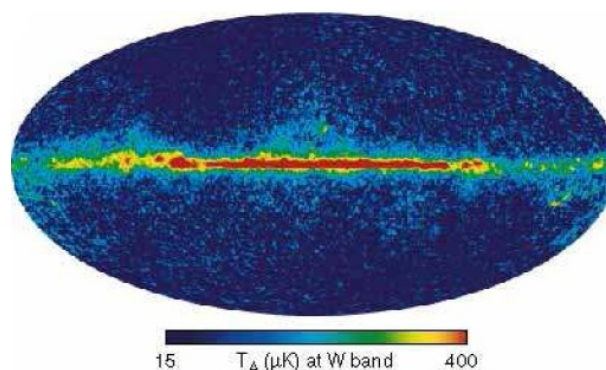


Figura 2.29: Mapa de emissão térmica pelos grãos de poeira.(Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003).

2.18 Os Problemas do Modelo do *Big Bang*

O sucesso do modelo do *Big Bang* é devido às comprovações observacionais. Mostremos alguns problemas que foram apresentados e modificaram o modelo do *Big Bang* graças as soluções propostas por Alan Guth no início dos anos 80 do século passado.

2.18.1 O Problema do Horizonte

Um dos problemas do modelo do *Big Bang* é a isotropia do universo. Conforme a escala da amostra de galáxias é aumentada, o universo vai ficando cada vez mais uniforme. Na época em que a RCF foi liberada, o universo era muito menor do que é hoje. Assim, deparamos com um problema: as regiões que estão muito afastadas no céu não poderiam estar em comunicação causal entre elas naquela época, portanto, não poderiam estar em equilíbrio térmico. Este problema é conhecido como problema do horizonte (Horvath et al., 2007).

Para ilustrar este problema, consideremos a figura 2.30 onde temos duas regiões opostas representadas pelos pontos A e B e temos ainda nossa galáxia.

Na figura 2.30 traçamos uma circunferência de raio que vai até a última superfície do espalhamento. A região externa a nossa circunferência contém os objetos que não

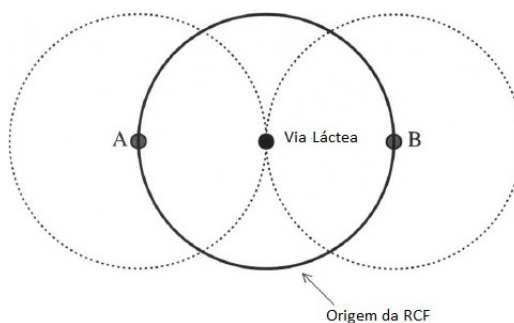


Figura 2.30: O problema do horizonte.

podemos observar. A união entre a nossa circunferência e sua respectiva região interna contém todos os objetos que podemos observar, isso define o nosso horizonte que é o limite de nosso universo observável. O nosso horizonte se expande à medida que o tempo passa, assim podemos enxergar objetos que antes não poderíamos ver.

Traçamos igualmente, circunferências centradas nos pontos A e B. Note pela figura 2.30 que o ponto A está fora do universo observável do ponto B e o recíproco é verdadeiro. As regiões A e B estão tão distantes que a luz não teve tempo de levar informação de A para B. Esperaria que estas regiões não teriam a mesma temperatura, visto que no passado não estavam em contato causal. Entretanto, estas regiões têm a mesma temperatura e o que sustenta isso é o fato da RCF ser altamente isotrópica.

2.18.2 O Problema da Planaridade

Uma outra questão colocada ao modelo do *Big Bang* é o problema da planaridade. Tal problema reside no fato de que a geometria observada do universo é aproximadamente plana¹³, significando que a densidade do universo atual é bem próxima do valor da densidade crítica. Um universo com geometria plana possui o valor da densidade crítica e irá expandir-se eternamente, mais o ritmo da expansão diminui continuamente.

O problema vem do fato de que o parâmetro de densidade altera-se com o tempo. Se em um determinado tempo, observamos o universo com um parâmetro de densidade $\Omega_0 < 1$, sua expansão imperaria sobre a gravidade e com o decorrer do tempo, o universo tornaria-se cada vez mais subdenso, tornado o parâmetro Ω_0 menor ainda.

Para o universo atual possuir um Ω_0 próximo a unidade, ele teria no passado um valor para esse parâmetro ligeiramente menor do que a unidade.

¹³Ver subseções do satélite WMAP.

Se voltarmos no tempo em que as condições iniciais do universo foram estabelecidas, quando se passaram menos do que 10^{-43} s do início do universo, verifica-se que o valor de Ω_0 teria de ser próximo da unidade.

Fica então a questão do porquê, no início, o parâmetro de densidade ter assumido um valor tão especial (Adams et al., 1961; Barbara Ryden, 2003).

2.18.3 O Problema das Relíquias Exóticas

Um outro problema que coloca em prova o modelo do *Big Bang* surge da combinação desta com idéias modernas da física de partículas. Uma das coisas curiosas durante a evolução do universo, é que ele permaneceu dominado pela radiação até pelo menos seus 1000 anos de idade. Entretanto, através da equação 2.142, vimos que $\varepsilon_r \propto 1/a^4$ e da equação 2.141 temos que $\varepsilon_m \propto 1/a^3$.

Logo, ε_r cai mais rapidamente com a expansão do que ε_m . Então, se o universo começa com uma pequena quantidade de matéria não-relativística, sua lenta redução de densidade trará seu ressaltado.

Na verdade, no modelo padrão da física de partículas¹⁴ não há problemas, pois as partículas interagem fortemente com a radiação e após a termalização, tornam-se dominantes.

Mas se for levado em conta a física moderna de partículas, que trata-se de outros tipos de partículas, deparamos com um problema. Tais partículas são uma inevitável consequência dos modelos de unificação das forças elementares, denominados GUT¹⁵ (*Grand Unification Theory*) que prevêem que essas partículas foram produzidas em abundância em um estágio muito cedo do universo.

Essas partículas seriam não relativísticas para quase toda a história do universo, e como $\varepsilon_m \propto 1/a^3$ elas viriam a dominar a radiação.

Os monopólo magnético, partícula hipotética constituída de um só polo magnético, é uma das relíquias exóticas mais importantes. Essa seria uma das relíquias dominantes no universo, o que contradiz as observações (Andrew Liddle, 2003).

¹⁴Neste modelo, as partículas elementares são os quarks e os léptons.

¹⁵Traduzindo do inglês Teoria da Grande Unificação. Esta teoria visa unir as forças elementares: força nuclear fraca, força nuclear forte e força eletromagnética. Em termos cosmológicos, essa unificação ocorreu quando o universo tinha 10^{-34} s de idade.

2.18.4 A Hipótese Inflacionária

A hipótese inflacionária ou simplesmente inflação, foi proposta por Alan Guth em 1981, não para substituir a Teoria do *Big Bang*, mais sim como uma idéia complementar para resolver os seus respectivos problemas.

No contexto cosmológico, a inflação faz a hipótese que houve um período, nos momentos iniciais, em que o universo passou por um crescimento exponencial.

Para mostrar como essa idéia propõe uma solução para os problemas do horizonte, planaridade e a questão das relíquias exóticas no modelo do *Big Bang* retomemos a equação da aceleração cósmica (Barbara Ryden, 2003)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P). \quad (2.122)$$

Para haver uma expansão do universo, temos então a seguinte implicação

$$\ddot{a} \rightarrow P < -\frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.123)$$

Um componente que possui pressão negativa é a constante cosmológica e da equação de Friedmann contendo este termo temos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.124)$$

os dois primeiros termos do segundo membro da equação de Friedmann são rapidamente reduzidos pela expansão e o terceiro termo permanece constante de forma que obtemos

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.125)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (2.126)$$

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt, \quad (2.127)$$

$$\int \frac{da}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \int dt, \quad (2.128)$$

$$a(t) = a_i e^{H_i t}, \quad (2.129)$$

onde a_i é a constante das integrações e H_i o parâmetro de Hubble durante a inflação.

O parâmetro de Hubble permanece constante durante a fase de inflação e o parâmetro de escala cresce exponencialmente com o tempo.

Considerando que a inflação começou em um tempo t_i e terminou posteriormente em t_f , então o aumento do fator de escala pode ser calculado por

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_i(t_f-t_i)}. \quad (2.130)$$

Em uma das formulações do modelo de inflação, ela teria começado na época da GUT, $t_i \approx t_{GUT} \approx 10^{-36}$ s, quando o parâmetro de Hubble era de $H_i \approx t_{GUT}^{-1} \approx 10^{36} \text{ s}^{-1}$ e terminou em $t_f \approx 10^{-34}$ s. Levando essas informações à equação anterior, vem

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{10^{36}(10^{-34}-10^{-36})} = e^{99} \sim 10^{43}. \quad (2.131)$$

Pelo resultado anterior, o universo aumentou cerca de 10^{43} vezes em apenas 10^{-34} s.

A solução para o problema do horizonte seria então resolvida pela inflação, admitindo-se que partes suficientemente pequenas do universo para atingirem o equilíbrio térmico antes da inflação, expandiram-se para um tamanho superior ao universo observável. Dessa forma, a RCF que observamos em regiões opostas do céu possuem a mesma temperatura, pois no passado as regiões em questão estavam em contato causal.

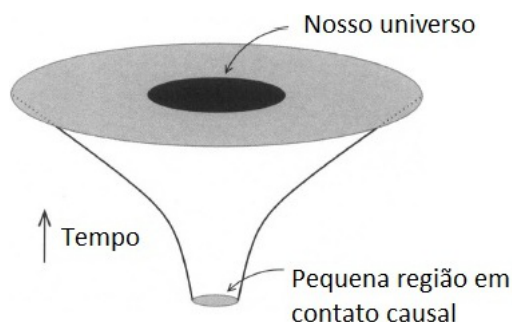


Figura 2.31: Solução do problema do horizonte.

A figura 2.31 esquematiza a resolução do problema do horizonte. A pequena região em equilíbrio térmico e em contato causal se expande para abranger o nosso universo observável.

A inflação explica o fato de $\Omega_0 \approx 1$, pois a expansão acelerada expandiu o universo e o tornou localmente plano. O universo observável é apenas uma pequena parte do universo inflacionado, tornando difícil detectar qualquer tipo de curvatura.

A figura 2.32 ilustra a resolução do problema da planaridade. Note que de 1 a 4 a curvatura do espaço vai se anulando. Esse foi o efeito que o aumento violento causado pela inflação causou à curvatura do universo.

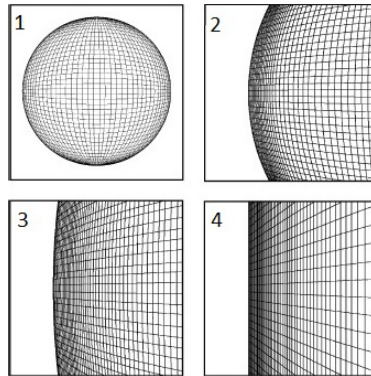


Figura 2.32: Solução do problema da planaridade.

No caso do problema das relíquias exóticas, a expansão violenta causada pela inflação diluiu qualquer partícula exótica, pois a densidade de energia destas diluiu-se mais rapidamente com a expansão que a constante cosmológica. A expansão em questão, foi suficiente para diluir a densidade de energia destas partículas exóticas para que elas não fossem observadas hoje (Barbara Ryden, 2003; Peter Schneider, 2006).

2.19 Espectro de Potência da RCF

O tamanho angular $\delta\theta$ das flutuações da RCF são relacionadas com seu tamanho físico \mathbb{L} na superfície do último espalhamento, através da relação

$$d_A = \frac{\mathbb{L}}{\delta\theta}, \quad (2.132)$$

em que d_A é a distância diâmetro-angular a superfície do último espalhamento. No Modelo Cosmológico Padrão temos que $d_A = 13\text{Mpc}$, assim as flutuações de temperatura na superfície de último espalhamento tinham um tamanho próprio de

$$\mathbb{L} = 13\text{Mpc} \left(\frac{\delta\theta}{1\text{rad}} \right) = 0.22\text{Mpc} \left(\frac{\theta}{1^\circ} \right), \quad (2.133)$$

Se o WMAP possui uma resolução angular de $\approx 0.2^\circ$ (Bennett, C.L.; Bay, M. et al., 2003), então as flutuações que deram origem às flutuações captadas por este satélite tinham, no mínimo, um tamanho físico, na superfície do último espalhamento, de

$$\mathbb{L} \approx 0.044 \text{Mpc}. \quad (2.134)$$

Entretanto, devido a expansão do universo, o tamanho físico atual \mathbb{L}_0 dessas flutuações é dado por

$$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}(1 + z_{ls}) \approx 48.5 \text{Mpc}, \quad (2.135)$$

onde z_{ls} é o *redshift* da superfície do último espalhamento, onde no modelo padrão vale 1100 (Barbara Ryden, 2003).

Os mapas de céu inteiro da RCF fornecem um registro mais compacto das flutuações de temperatura desta radiação sem perda de informação. Eles permitem um amplo estudo estatístico das propriedades da RCF, sendo que o mais fundamental é o espectro de potência angular (Hinshaw et al., 2007). Quando olha-se para a distribuição de uma quantidade física através da esfera celeste, suas anisotropias podem ser descritas pelos harmônicos esféricos. Esta quantidade descreve as flutuações de temperatura da RCF $\Delta T(\theta, \phi)/T_0$ como função de duas coordenadas esféricas, θ declinação e ϕ ascensão reta. Podemos então, escrever

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (2.136)$$

onde $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, ℓ e m são números inteiros em que $\ell \geq 0$ e $|m| \leq \ell$, $a_{\ell,m} \in \mathbb{C}$. Os termos $a_{\ell,m}$ são os coeficientes da expansão e correspondem às amplitudes da temperatura, ao passo que, $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ constituem os harmônicos esféricos, dados por

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (2.137)$$

em que $P_{\ell,m}$ é o polinômio de Legendre de grau ℓ e ordem m . Os coeficientes $a_{\ell,m}$ pode ser obtidos através de

$$a_{\ell,m} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{T(\theta, \phi)}{T} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi, \quad (2.138)$$

onde $Y_{\ell,m}^*$ é o conjugado de $Y_{\ell,m}$ (Narlikar, 2004; Machado, 2007).

A mais importante propriedade estatística das flutuações da RCF é a função correlação $C(\theta)$ dada por

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \theta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (2.139)$$

em que \hat{n} e \hat{n}' são direções no céu separadas por um ângulo θ e C_{ℓ} são os momentos de multipolos

$$C_{\ell} \equiv \frac{1}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\infty} |a_{\ell,m}|^2. \quad (2.140)$$

Os C_{ℓ} são uma medida das flutuações de temperatura em escalas angulares $\theta \sim 180^{\circ}/\ell$ (Barbara Ryden, 2003).

Os momentos de multipolos em função dos multipolos são o espectro de potência da RCF. A tabela a seguir ilustra o nome para alguns multipolos.

Tabela 2.2: Nomenclatura para multipolos de baixa ordem.

ℓ	Nomenclatura
0	Monopolo
1	Dipolo
2	Quadripolo
3	Octupolo
4	Hexadecupolo
5	Triandadipolo

A temperatura da RCF de $(2.725 \pm 0.002)\text{K}$ é considerado como o monopólo $\ell = 0$ nos mapas (Mather et al., 1999). A componente de dipolo, $\ell = 1$, é interpretada como resultando do deslocamento Doppler causado pelo movimento do Sistema Solar em relação ao referencial de repouso da RCF em que a radiação é isotrópica. O valor da componente de dipolo é de $(\ell_1, l, b) = ((3.355 \pm 0.008)\text{mK}, 263.99^{\circ} \pm 0.14^{\circ}, 48.26^{\circ} \pm 0.03^{\circ})$, em que $(l, b) \equiv (\theta, \phi)$ $b \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$ é a latitude galáctica, $l \in [0^{\circ}, 360^{\circ}]$ é a longitude galáctica e a velocidade do Sistema Solar em relação ao referencial de repouso da RCF é de $(369.0 \pm 0.9)\text{km.s}^{-1}$ (Hinshaw et al., 2009).

Os componentes multipolares de ordem $\ell > 2$ são interpretados como o resultado de perturbações na densidade de energia do universo jovem, manifestando-se na época do último espalhamento dos fótons da RCF (Eidelman et al., 2004). Depois de extrair os componentes de monopólo e dipolo dos mapas da RCF o que obtemos é o sinal das anisotropias da RCF.

A localização e a amplitude dos picos do espectro de potência da RCF, permite fazer uma estimação dos parâmetros cosmológicos (figura 2.33). Como por exemplo, o primeiro pico, corresponde a densidade de curvatura e matéria escura, já o segundo corresponde a densidade de bárions, o terceiro a densidade de matéria escura (Wayne Hu, 2008).

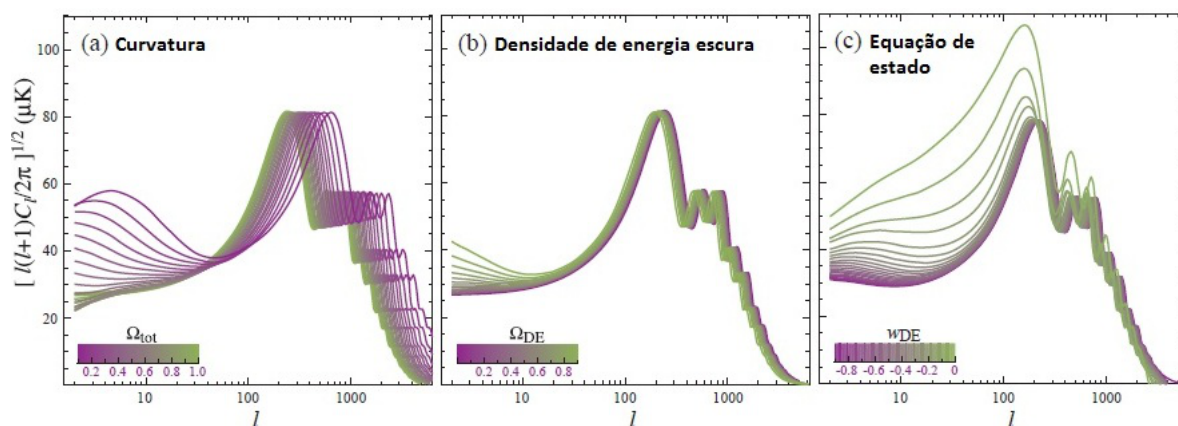


Figura 2.33: Espectros de potência.

Os picos no espectro de potência da RCF são denominados picos acústicos e ocorrem em $100 \lesssim \ell \lesssim 1000$ (figura 2.34). Estes picos são um produto de ondas estacionárias que existiam antes da recombinação no fluido cósmico.

O espectro de potência para o conjunto de dados em mapas de 7 anos de observação do satélite WMAP, mostrou que tal espectro tem um melhor ajuste em um modelo Λ CDM com geometria plana (Jarosik et al., 2010).

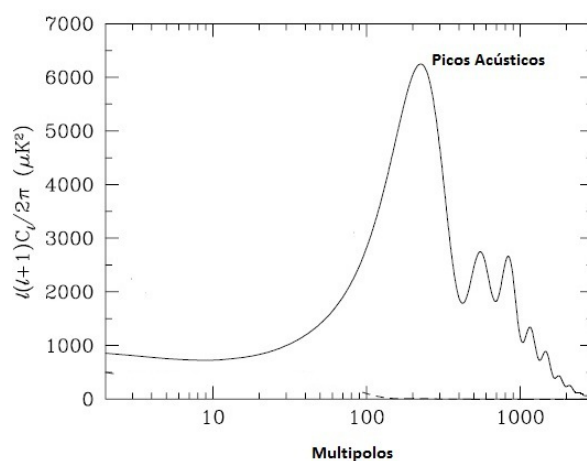


Figura 2.34: Picos acústicos.

2.20 Propriedades Estatísticas da RCF

Considere um componente do universo cuja densidade de energia $\varepsilon(\vec{r}, t)$ é função da posição \vec{r} e do tempo t . Defini-se a flutuação de densidade $\delta(\vec{r}, t)$ como

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\varepsilon(\vec{r}, t) - \langle \varepsilon(t) \rangle}{\langle \varepsilon(t) \rangle}. \quad (2.141)$$

Note que, pela equivalência 2.141, se tivermos um $\delta < 0$, obteremos uma região de menor densidade do que o valor médio observado em todo espaço, ao passo que, se tivermos $\delta > 0$, observaremos uma região de maior densidade do que o valor médio em todo espaço.

A cosmologia se interessa em saber as propriedades estatísticas do campo $\Delta T(\theta, \phi)/T_0$. Analogamente, a cosmologia está interessada nas propriedades estatísticas do campo $\delta(\vec{r}, t)$.

Da mesma forma que é útil expandir as flutuações de temperatura da RCF em termos de harmônicos esféricos, similarmente expande-se as flutuações de densidade em termos de componentes de Fourier.

No interior de uma grande caixa, de volume comóvel V , considerando que a densidade de flutuação não varie no tempo, $\delta(\vec{r})$ pode ser expressa como

$$\delta(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k, \quad (2.142)$$

sendo i a unidade imaginária e \vec{k} o número de onda comóvel. Ao realizar a transformada de Fourier, estamos quebrando a função $\delta(\vec{r})$ em um número infinito de ondas senoidais, cada uma com o número de onda comóvel \vec{k} com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$.

As componentes individuais $\delta_{\vec{k}}$ são encontradas através da integral

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int \delta\vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (2.143)$$

Cada componente de Fourier é um número complexo e pode ser expresso na forma

$$\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\phi_{\vec{k}}}, \quad (2.144)$$

onde que $\phi_{\vec{k}}$ é a fase da onda senoidal.

Podemos ainda definir, através do quadrado da média das amplitudes das componentes de Fourier, o espectro de potência $P_*(k)$

$$P_*(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle, \quad (2.145)$$

onde a média é tomada sob todas as orientações possíveis do número de onda.

A flutuação $\delta(\vec{r})$ é um campo gaussiano quando a fase $\phi_{\vec{k}}$ das diferentes componentes de Fourier não estão correlacionadas. Se um campo gaussiano é homogêneo e isotrópico todas as propriedades estatísticas são resumidas no espectro de potência.

Sendo $\delta(\vec{r})$ um campo gaussiano, então o valor de δ é um ponto aleatoriamente selecionado de uma distribuição gaussiana de probabilidade

$$p_*(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.146)$$

onde o desvio padrão σ pode ser obtido através do espectro de potência, isto é

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty P_*(k) k^2 dk. \quad (2.147)$$

O estudo dos campos de densidade gaussianos são de interesse na cosmologia, pois o modelo inflacionário prediz que as densidades de flutuações criadas na inflação devem ser campos gaussianos isotrópicos e homogêneos (Kolb et al., 1990; Matts Roos, 2003; Barbara Ryden, 2003).

O modelo inflacionário também prediz que estas flutuações são adiabáticas, ou seja, a entropia permanece constante. Assim, toda flutuação de densidade implica em uma flutuação na RCF. Logo, segundo o modelo inflacionário, as flutuações de temperatura desta radiação obedecem uma distribuição quase gaussiana.

Como veremos na seção 2.20, as flutuações de temperatura da RCF $\Delta T(\theta, \phi)/T_0$ são funções da direção de observação na esfera celeste (θ, ϕ) . O modelo cosmológico padrão prediz que o conjunto de números complexos $\{a_{\ell m}\}$ é um campo gaussiano aleatório e estatisticamente isotrópico com média zero ($\langle a_{\ell m} \rangle = 0$) e variância diferente de zero ($\langle a_{\ell' m'}^* a_{\ell m} \rangle \neq 0$). O fato de $\Delta T(\theta, \phi)/T_0$ se uma grandeza real, produz uma consistência entre as partes real e imaginária de $a_{\ell m}$ e $a_{\ell - m}$, ou seja, $a_{\ell m}^* = a_{\ell - m}$.

A aleatoriedade gaussiana significa que ambas as partes, real e imaginária, de $a_{\ell m}$ são variáveis aleatórias independentes que obedecem a uma distribuição gaussiana de média zero. Estatisticamente isotrópico significa que a variância, a qual em princípio pode ser diferente para cada ℓ e m , depende somente de ℓ , isto é $\langle a_{\ell' m'}^* a_{\ell m} \rangle \propto C_\ell$.

Logo, devido a hipótese inflacionária, espera-se que as flutuações de temperatura da RFC devem ser apropriadamente descritas por uma distribuição gaussiana e estatisticamente isotrópica (Bernui et al., 2007).

A análise dos dados de flutuações de temperatura da RCF nos mapas de sete anos de medidas do WMAP, são compatíveis com a gaussianidade. Os desvios da gaussianidade encontrados nos dados da RCF são causados por contaminantes galácticos, fontes extragalácticas (como por exemplo galáxias que emitem na faixa dos comprimentos de onda de rádio), e ruído instrumental (Bennett, C.L.; Halpern, M. et al., 2003; Komatsu et al., 2003, 2009).

Capítulo 3

Aferidor Coeficiente de Pearson

Neste capítulo descreveremos o coeficiente de Pearson que usaremos como aferidor de desvio de gaussianidade na análise de dados do WMAP. Inicialmente, descreveremos as propriedades de cada um dos componentes que formam o coeficiente de Pearson, bem como suas propriedades. Ao final deste capítulo também discutiremos sobre as distribuições normais e suas propriedades.

3.1 Medidas da Tendência Central

A média é um valor representativo de um conjunto de dados. Como tal valor tende a se localizar em um ponto central, dentro de um conjunto de dados ordenados segundo suas grandezas, a média também podem receber a denominação de medida da tendência central.

Existem vários tipos de médias, sendo que as mais comuns são a média aritmética¹, a média harmônica, a média geométrica, a mediana e a moda (Spiegel, 1984). Nesta dissertação daremos ênfase a média e a mediana, assim definiremos as mesmas a seguir.

3.1.1 Média Aritmética

Dado um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a média \bar{x} é definida como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum x}{n}. \quad (3.1)$$

¹Média é comumente usada como sinônimo de média aritmética

Se os números x_1, x_2, \dots, x_k do conjunto de dados ocorrerem, respectivamente, f_1, f_2, \dots, f_k vezes, a média torna-se

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{\sum f_i x_i}{N}. \quad (3.2)$$

Na equação anterior, N denota a frequência total, $N = \sum f_i$.

A média de um conjunto de dados possui propriedades importantes a saber:

- Seja d_i o desvio do i -ésimo elemento em relação a média. Temos que

$$\sum_{i=1}^n d_i = 0. \quad (3.3)$$

- Se a cada elemento do conjunto somarmos uma constante k , a média será acrescida de k .
- Se todos os elementos do conjunto forem multiplicados por uma constante k , a média também será multiplicada por k .
- Se m_1 é a soma de f_1 elementos, m_2 é a soma de f_2 elementos, \dots , m_k é a soma de f_k elementos, então pela definição de média, equação 3.1, obtemos as respectivas médias M_1, M_2, \dots, M_k

$$M_1 = \frac{m_1}{f_1}, \quad M_2 = \frac{m_2}{f_2}, \quad \dots \quad M_k = \frac{m_k}{f_k}. \quad (3.4)$$

Se a soma de todos os elementos ($f_1 + f_2 + \dots + f_k$) é ($m_1 + m_2 + \dots + m_k$), a média do conjunto será, com base nas equações 3.4

$$\bar{x} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2 + \dots + f_k M_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}. \quad (3.5)$$

3.1.2 Mediana

A mediana \tilde{x} de um conjunto de dados, ordenados de maneira crescente, será o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais. Se o número de elementos do conjunto for ímpar, a mediana deste conjunto será o elemento que ocupa a posição central. Entretanto, se a quantidade de elementos do conjunto for par, a mediana será dada pela média aritmética dos dois elementos que ocupam as posições centrais.

Para dados agrupados em uma distribuição de frequência, a localização da mediana requer determinar o intervalo que contém a mediana e o ponto deste intervalo no qual está situada. O intervalo a ser procurado é o primeiro cuja a distribuição de frequência supere a metade da frequência total (Toranzos, 1969).

Demonstremos a fórmula para encontrar a mediana de uma distribuição de frequência. Para isso usaremos a figura 3.1 para nos auxiliarmos.

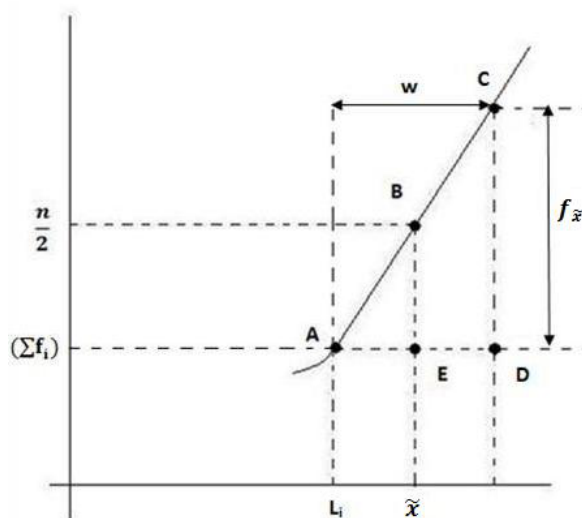


Figura 3.1: Localização da mediana em uma distribuição de frequência.

Como os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABE$ são semelhantes, temos que

$$\triangle ACD \sim \triangle ABE \quad \therefore \quad \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}, \quad (3.6)$$

mas pela análise da figura 3.1 e das razões de segmento 3.6, temos que

$$CD = f_{\tilde{x}}, \quad (3.7)$$

$$BE = \frac{n}{2} - (\sum f_i), \quad (3.8)$$

$$AD = w, \quad (3.9)$$

$$AE = \tilde{x} - L_i, \quad (3.10)$$

combinando as igualdades de 3.7 a 3.10 com a razão de segmento 3.6, obtemos

$$\frac{f_{\tilde{x}}}{\frac{n}{2} - (\sum f_i)} = \frac{w}{\tilde{x} - L_i}. \quad (3.11)$$

Isolando \tilde{x} na equação anterior, vem

$$\tilde{x} = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - (\sum f_i)}{f_{\tilde{x}}} \right) w, \quad (3.12)$$

a equação 3.12 dá o valor da mediana para dados agrupados em uma distribuição de frequência. Nela, L_i é o limite inferior da classe mediana, n é o número de elementos do conjunto de dados, w é a amplitude do intervalo de classe, $f_{\tilde{x}}$ é a frequência da classe que contém a mediana, $(\sum f_i)$ é a soma de todas as frequências das classes inferiores a mediana.

A mediana é a abscissa correspondente à vertical que divide um histograma igualmente em duas partes. Logo, a mediana de um conjunto de dados é a medida de tendência central que divide o conjunto em duas partes iguais, metade abaixo e metade acima da mediana (Montgomery et al., 2003).

3.1.3 Moda

O valor mais comum, ou seja, o que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados é denominado moda ou valor modal \hat{x} . É importante ressaltar que a moda pode não existir e mesmo que exista, pode não ser única.

Para dados agrupados segundo uma curva de frequência a eles ajustada, a moda será o valor da abscissa correspondente ao ponto de máxima ordenada desta curva.

É possível obter uma relação para a moda para uma distribuição de frequência. Para isso usaremos a figura 3.2 como um artifício de demonstração.

Nela podemos obter as seguintes informações

$$\Delta BFP \sim \Delta CPE \therefore \frac{BF}{CE} = \frac{GP}{PD}, \quad (3.13)$$

Através da razão de segmentos da equação 3.13 e da figura 3.2, podemos fazer as seguintes modificações

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\hat{x} - L_1}{V_1 - \hat{x}}. \quad (3.14)$$

Isolando \hat{x} na equação anterior, temos

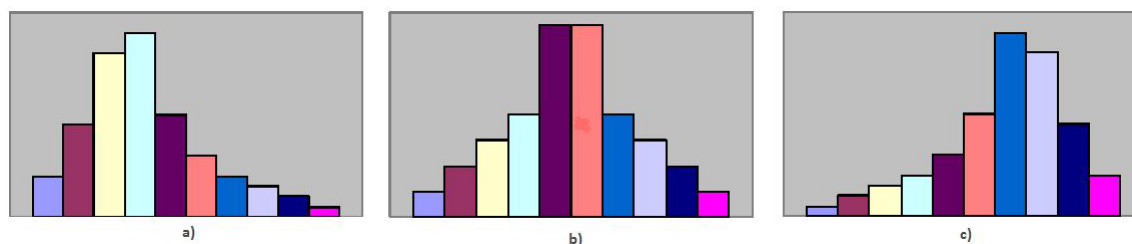


Figura 3.3: a) Distribuição com assimetria positiva, b) distribuição simetria e c) distribuição com assimetria negativa.

$$\bar{x} - \hat{x} = 3(\bar{x} - \tilde{x}). \quad (3.17)$$

A relação anterior é uma relação empírica. Geometricamente, ela indica que a mediana está localizada entre a média e a moda, sendo que sua distância à moda é o dobro de sua distância à média. Sua verificação é mais precisa para um conjunto maior de dados, sendo que a moda é calculada de acordo com dados agrupados em classes de frequências (Costa Neto, 1977).

3.2 Medidas de Dispersão

As medidas da tendência central, quando calculadas para um conjunto de dados, determinam valores típicos deste conjunto. Porém, a informação dada por tais medidas é incompleta, caso não seja acoplada a alguma informação referente a variabilidade dos dados. O grau segundo o qual os dados tendem a se dispersarem em torno de um valor médio denomina-se variação ou dispersão de dados. Existem várias medidas de dispersão, sendo que as mais comuns são a amplitude, o desvio médio, o desvio padrão. Ilustremos aqui a definição de desvio padrão bem como suas propriedades.

3.2.1 Desvio Padrão

Retomemos o conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Defini-se o desvio padrão s , como sendo

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (3.18)$$

O desvio padrão de um conjunto de dados também pode vir definido com $(n - 1)$ no lugar de n no denominador da equação anterior, pois o valor resulta em uma melhor estimativa

para uma amostra do conjunto de dados. Entretanto, para valores de $n > 30$ praticamente não há diferença entre as duas definições.

Se os elementos do conjunto de dados $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ocorrem com as respectivas frequências $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, o desvio s pode ser calculado como

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n}}. \quad (3.19)$$

Para distribuições normais³, há uma importante relação entre desvio padrão e a média:

- 68,27% dos dados pertencem ao intervalo $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$.
- 95,45% dos dados pertencem ao intervalo $]\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s[$.
- 99,73% dos dados pertencem ao intervalo $]\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s[$.

Sejam dois conjuntos de dados com n_1 e n_2 elementos. Tomamos, respectivamente, o quadrado dos desvios padrões de cada conjunto s_1^2 e s_2^2 . Denomina-se variância combinada a seguinte relação

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}. \quad (3.20)$$

A equação 3.20 pode ser generalizada para mais conjuntos de dados.

3.3 Coeficientes de Assimetria de Pearson

Nesta seção definiremos os coeficientes de Pearson, que são utilizados para caracterizar o perfil de uma distribuição de um conjunto de dados.

3.3.1 Assimetria de uma Distribuição de Dados

Como vimos na seção 3.1.4, podemos classificar uma distribuição de dados como simétrica, assimétrica positiva e assimétrica negativa.

Em distribuições assimétricas, a média situa-se ao lado da moda na região da cauda mais longa como ilustrado na figura 3.4.

Uma medida de assimetria é dada pela diferença da média e a moda. Fazendo-se o quociente dessa diferença pelo desvio padrão, chegamos ao coeficiente de Pearson \mathbb{P}

³Ver subseção 3.4

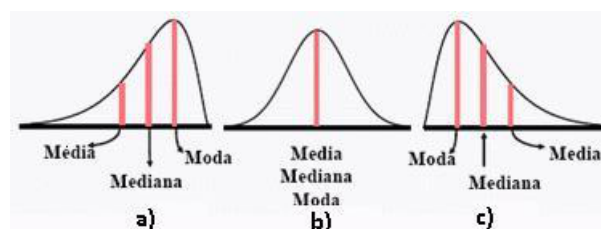


Figura 3.4: Posições da média, mediana e moda em uma distribuição assimétrica.

$$\mathbb{P} = \frac{\bar{x} - \hat{x}}{s}. \quad (3.21)$$

Se $\bar{x} = \hat{x}$ temos uma distribuição simétrica (figura 3.4b)), $\bar{x} < \hat{x}$ temos distribuição assimétrica negativa (figura 3.4c)) e se $\bar{x} > \hat{x}$ temos distribuição assimétrica positiva (figura 3.4a)). Entretanto, a moda em uma distribuição de dados pode não existir ou não ser a única.

Assim, podemos tomar a relação dada por 3.17 e substituir em 3.21

$$\mathbb{P} = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s}, \quad (3.22)$$

as equações 3.21 e 3.22 são denominadas primeiro coeficiente de assimetria de Pearson e segundo coeficiente de assimetria de Pearson, respectivamente.

A média e a mediana de um mapa simulado de céu inteiro, construído segundo o modelo Λ CDM, não são iguais. Este mapa pode apresentar um leve desvio para esquerda ou direita da tendência central. Entretanto, se aumentarmos o número de mapas simulados e calcularmos a média e a mediana das flutuações de temperatura, verificaremos que, em média, estes valores flutuam ao redor de zero e à medida que aumentamos o número de mapas simulados estas duas quantidades torna-se cada vez mais próximas (figura 3.5). O fato dos valores médios para média e mediana flutuarem ao redor de zero é em razão da remoção do componente de monopólio destes mapas. Note que, pela figura 3.5, a mediana apresenta um comportamento mais ruidoso do que a média.

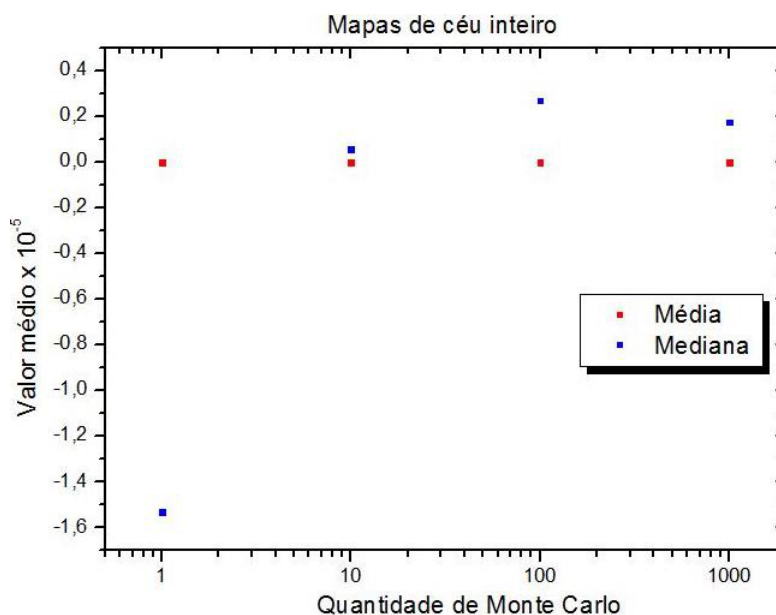


Figura 3.5: Ruído estatístico para média e mediana.

3.4 Distribuição Normal

A distribuição normal é devido a Abraham de Moivre (1667-1754), contudo é mais comumente associada a Gauss (1777-1855) e Laplace (1749-1827). Físicos e engenheiros freqüentemente a chamam de distribuição gaussiana. Foi K. Pearson (1857-1936) que cunhou o nome de normal a esta distribuição. Ela é sem dúvida a mais importante distribuição na teoria estatística (Clarke, 1978).

A importância desta distribuição se deve ao fato de que ela serve para ajustar distribuições quando o número de dados do conjunto é suficientemente grande. Essa característica da distribuição normal advém do teorema do limite central⁴ que em essência afirma, que, “sob condições bastante gerais, uma variável aleatória, resultante de uma soma de n variáveis aleatórias independentes, no limite, quando n tende a infinito, tem distribuição normal (Costa Neto, 1977).”

Nesta seção discutiremos as características da distribuição normal, mas antes falaremos sobre alguns tópicos necessários ao seu entendimento.

3.4.1 Variáveis Aleatórias

Em diversas situações experimentais, deseja-se atribuir um número real x a todo elemento e de um espaço amostral S . Ou seja, $x = X(e)$ é o valor da função X do espaço amostral

⁴Para mais informações sobre este teorema consulte, e.g., Meyer (1969).

no espaço dos números reais. Assim, defini-se variável aleatória como sendo uma função X , que associa cada elemento e de um conjunto S a um número real $X(e)$.

Se X é uma função de S em \mathbb{R}_x é importante que se satisfaça a exigência

$$X \text{ é função de } S \text{ em } \mathbb{R}_x \iff (\forall e \in S, \exists | X(e) \in \mathbb{R}_x | (e, X(e)) \in X). \quad (3.23)$$

Na exigência 3.23, \mathbb{R}_x denomina-se contradomínio e ele contém todos os valores possíveis da variável aleatória (Meyer, 1969). Podemos enumerar alguns exemplos de variáveis aleatórias:

- A intensidade de corrente elétrica em uma certa região de um circuito.
- As medições do período de oscilação de um pêndulo.
- O número de píxeis defeituosos em um dispositivo fotoelétrico.
- A quantidade de estrelas que podem ser geradas em uma nuvem molecular gigante.

3.4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

Defini-se X como sendo variável aleatória discreta quando seu contradomínio for constituído por um conjunto de valores finitos ou infinitamente enumeráveis. Logo, no máximo \mathbb{R}_x é formado por um número infinito enumerável de valores x_1, x_2, x_3, \dots . A cada um destes possíveis valores está associado um número $p(x_i) = P(X = x_i)$ denominado probabilidade de x_i . Os números $p(x_i)$ satisfazem as condições

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1, \quad (3.24)$$

$$p(x_i) \geq 0 \quad \forall i. \quad (3.25)$$

A função p é chamada função de probabilidade da variável aleatória X e o conjunto de pares ordenados $(x_1, p(x_1)), (x_2, p(x_2)), \dots$, denomina-se distribuição de probabilidade de X . Como exemplos, podemos citar a distribuição binomial, a distribuição de Poisson, a distribuição Hipergeométrica, a distribuição de Pascal etc.⁵ Na tabela 3.1, seguem exemplos de variáveis aleatórias discretas.

⁵Para saber mais sobre distribuições de probabilidade para variáveis discretas consulte as referências (Meyer, 1969; Wadsworth et al., 1960).

Tabela 3.1: Exemplos de variáveis aleatórias discretas.

Experimento	Variável Aleatória Discreta X	Valores de X
Verificar 20 computadores	Computadores defeituosos	0,1,2,...20
Vender uma moto	Sexo do cliente	0 = mulher, 1 = homem
Vendas em um supermercado	Número de fregueses	0,1,2...

3.4.3 Variáveis Aleatórias Contínuas

Se o contradomínio \mathbb{R}_x de uma variável aleatória X for constituído por um intervalo ou um conjunto de intervalos, diz-se que X é uma variável aleatória contínua. Como os valores de X são inumeráveis, não há possibilidade de falar em um i -ésimo valor de X e conseqüentemente $p(x_i)$ não tem sentido. Assim, substitui-se $p(x_i)$ por uma função f definida para todos os valores possíveis de x . A função f recebe o nome de função de densidade de probabilidade e satisfaz as seguintes condições

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad (3.26)$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_x. \quad (3.27)$$

Como exemplos de funções de densidade de probabilidade, podemos citar: a distribuição gamma, normal, beta etc.⁶

Abaixo exemplificamos algumas variáveis aleatórias contínuas.

Tabela 3.2: Exemplos de variáveis aleatórias contínuas.

Experimento	Variável Aleatória Contínua X	Valores de X
Desenvolver uma pesquisa	Porcentagem da pesquisa em 1ano	$0 \leq x \leq 100$
Preenchimento de um reservatório	Litros	$0 \leq x \leq 1000$
Clientes entrando em uma loja	Intervalo de cada entrada	$x \geq 0$

⁶Para mais informações sobre os tipos e propriedades de funções de distribuição de probabilidade consulte as referências (Meyer, 1969; Wadsworth et al., 1960).

3.4.4 A Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Normal

Uma variável x é dita como tendo uma distribuição normal se sua função densidade de probabilidade é dada por uma expressão da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.28)$$

onde os parâmetros média μ e desvio padrão σ devem satisfazer as condições $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$. A distribuição é unimodal se sua moda origina-se em $x = \mu$ e há dois pontos de inflexão, situados a uma distância σ de ambos aos lados da moda. Por inspeção, nota-se que a curva é simétrica ao redor de $x = \mu$ e decresce rapidamente como o aumento da magnitude de $x - \mu$. Por ser simétrica ao redor da média, a probabilidade de ocorrer um valor maior do que a média é igual a probabilidade de ocorrer um valor menor do que a média. Em relação ao eixo das abscissas, a distribuição normal é assintótica, ou seja, aproxima-se indefinidamente deste eixo sem alcançá-lo.

Uma mudança em μ desloca a distribuição normal como um todo, para esquerda ou direita, dependendo se ao valor de μ é acrescido ou subtraído de um valor (figura 3.6). Já uma mudança em σ altera suas proporções referentes a uma escala fixa (figura 3.7) (Wadsworth et al., 1960).

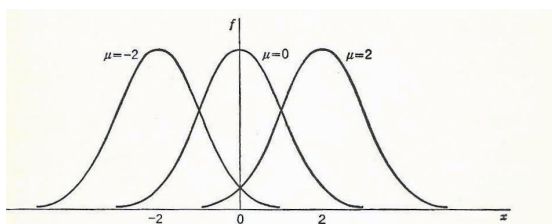


Figura 3.6: Distribuição normal desvio padrão fixo e média deslocada.

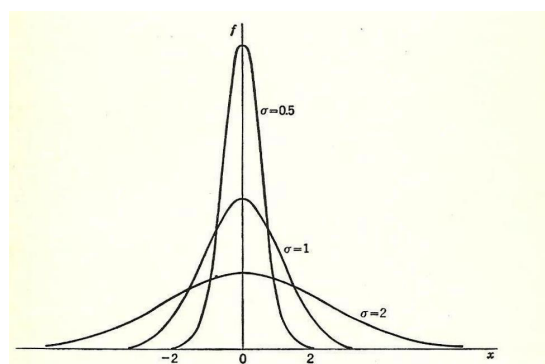


Figura 3.7: Distribuição normal com média fixa e desvio padrão alterado.

Se a equação 3.28 representa uma função densidade de probabilidade, então ela deve satisfazer as condições 3.26 e 3.27. Percebe-se que $f(x) \geq 0$ para quaisquer valores que x , σ , μ podem assumir. Logo, a equação 3.28 satisfaz a condição 3.27.

Analisaremos agora a condição da equação 3.26. Para isso fazemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (3.29)$$

$$u = \frac{(x-\mu)}{\sigma}, \quad (3.30)$$

$$dx = \sigma du, \quad (3.31)$$

substituindo as equações 3.31 e 3.30 em 3.29, vem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (3.32)$$

chamaremos a integral anterior de I e sendo a variável u muda podemos fazer

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \quad (3.33)$$

quadrando a integral I , vem

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)} dudv, \quad (3.34)$$

usando das coordenada polares, temos

$$u^2 + v^2 = r^2, \quad (3.35)$$

$$u = r\cos\theta, \quad (3.36)$$

$$v = r\sin\theta, \quad (3.37)$$

$$dudv = r dr d\theta, \quad (3.38)$$

como u e v variam de $-\infty$ a ∞ e cobre todo o plano, r deve varia de 0 a ∞ e θ de 0 a 2π para continuar a cobrir todo o plano. Assim, substituindo as relações de 3.35 a 3.38 na integral 3.34, vem

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta, \quad (3.39)$$

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} d\theta, \quad (3.40)$$

$$I^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\theta = 1, \quad (3.41)$$

assim, a equação 3.28 é uma função densidade de probabilidade legítima, pois satisfaz as condições 3.26 e 3.27.

3.4.5 A Distribuição Normal Padrão

No caso em que a equação de distribuição normal assume os valores $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ para os seus parâmetros, temos um caso especial chamado de distribuição normal padrão (figura 3.7), assim definida

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (3.42)$$

A distribuição normal padrão apresenta um máximo, para isso deriva-se a mesma com respeito a x

$$\dot{f}(x) = -xf(x), \quad (3.43)$$

onde \dot{f} é a derivada de f com respeito a x , e a equação acima se anula para $x = 0$. Comprovando que em $x = 0$ existe um máximo, fazemos a segunda derivada de f

$$\ddot{f}(x) = (x^2 - 1)f(x), \quad (3.44)$$

$$\therefore \ddot{f}(0) = -f(0) < 0. \quad (3.45)$$

A equação 3.45 mostra que há um máximo em $x = 0$. O valor máximo da função f dada pela equação 3.42 é

$$f_{\max}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.46)$$

A função distribuição normal apresenta dois pontos de inflexão a saber

$$\ddot{f}(x) = (x^2 - 1)f(x) = 0, \quad (3.47)$$

como $x^2 - 1 = 0$, conclui-se que os pontos de inflexão ocorrem para $x = -1$ e $x = 1$.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Metodologia para Análise de Dados

Neste capítulo descrevemos os procedimentos para a implementação do coeficiente de Pearson no conjunto de dados das flutuações de temperatura da RCF. Para isso, utilizamos o *software* IDL (*Interactive Data Language*). Também apresentamos e discutimos os resultados da implementação do coeficiente de Pearson aos mapas de flutuações de temperatura da RCF.

4.1.1 A Pixelização da Esfera Celeste

O HEALPix (*Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelization*) é um conjunto de subrotinas feita para análises de dados sobre a superfície de uma esfera. Com sua ajuda é possível dividir a esfera celeste em quadriláteros, denominados píxeis, de mesma área. O menor número N_{pix} possível de píxeis é 12 organizados, em três anéis em ao redor do equador e dos pólos, essa resolução é denominada resolução base. Esses 12 píxeis são divididos em $N_{side} = 2^k$ partes, assim o número total de píxeis da esfera é $N_{pix} = 12N_{side}^2$, em que N_{side} é denominado parâmetro de resolução.

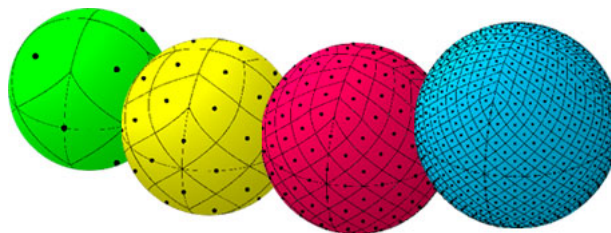


Figura 4.1: Pixelização do HEALPix.

A figura 4.1 ilustra o esquema de pixelização do HEALPix (Górski et al., 2005). Nela a N_{pix} aumenta da esquerda para direita.

A localização dos centros destes píxeis na esfera é definida por $(L \equiv \cos \Theta, \Phi)^1$, em que $\Theta \in [0, \pi]$ é a colatitude em radianos, ao passo que $\Phi \in [0, 2\pi]$ corresponde a longitude em radianos. Esferas com uma grande concentração de píxeis parecem possuir uma superfície contínua, devido ao pequeno tamanho dos píxeis e isso pode ser notado pela figura 4.2 que possui 12 582 912 píxeis.

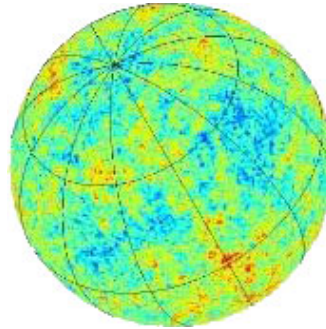


Figura 4.2: Modelo para as flutuações de temperatura da RCF.

Todos os píxeis têm a mesma área, embora a forma dependa do lugar que ocupam na esfera. A resolução angular, ou tamanho do píxel, θ_{pix} é definida como

$$\theta_{pix} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \frac{3600'}{N_{side}}}. \quad (4.1)$$

Com a ajuda desta equação construímos a tabela 4.1 (Górski et al., 2005; La Porta et al., 2005).

O WMAP produziu mapas com resolução máxima de 3 145 728 píxeis ($N_{side} = 512$), ao passo que o satélite COBE gerou mapas que continham no máximo 6 144 píxeis (Górski et al., 2005).

4.1.2 Esquemas de Indexação de Píxeis

O HEALPix suporta dois tipos diferentes de indexação de píxeis, o esquema *Ring* e o esquema *Nested*.

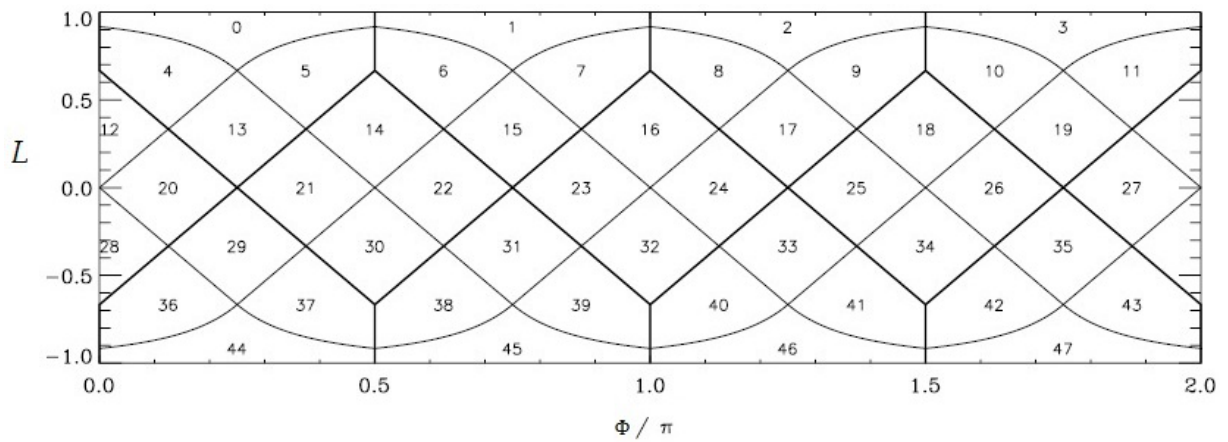
O esquema *Ring* simplesmente enumera os píxeis do norte ao sul ao longo de anéis de mesma latitude. Já o esquema *Nested*, corresponde a uma partição hierárquica, em que

¹ $L = 0$ correspondem aos centros dos píxeis localizados no equador da esfera celeste. A grandeza L é um número adimensional associado a Θ .

Tabela 4.1: Resolução angular em função do N_{side} . Górski et al. (2005).

k	$N_{side} = 2^k$	$N_{pix} = 12N_{side}^2$	θ_{pix}
0	1	12	$58^\circ.6$
1	2	48	$29^\circ.3$
2	4	192	$14^\circ.7$
3	8	768	$7^\circ.33$
4	16	3072	$3^\circ.66$
5	32	12288	$1^\circ.83$
6	64	49152	$55'.0$
7	128	196608	$27'.5$
8	256	786432	$13'.7$
9	512	3145728	$6'.87$

cada um dos doze píxeis da resolução base são dispostos em estruturas de árvore (Górski et al., 2005).

Figura 4.3: Esquema *Ring*.

As figuras 4.3 e 4.4 são as projeções cilíndricas de uma esfera de $N_{side} = 4$, contendo 48 píxeis. Note que no esquema *Nested* os píxeis estão dispostos de forma entrelaçada. Neste trabalho usamos o esquema de indexação *Ring* em nossos mapas de dados.

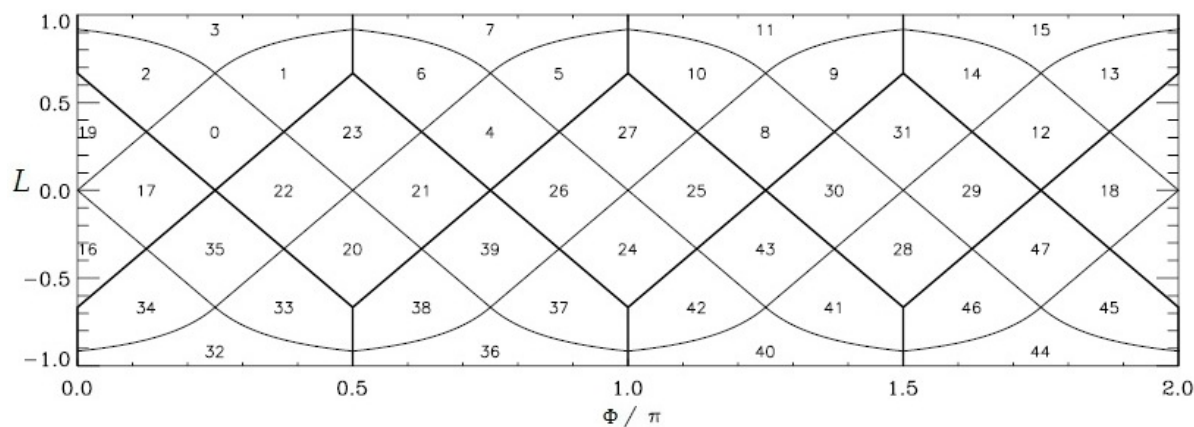


Figura 4.4: Esquema *Nested*.

4.2 Máscaras

Como discutido no capítulo 2, os dados de flutuações de temperatura da RCF são influenciados por contaminantes de origem galáctica e extragaláctica. O mapa ILC é gerado com a intenção de minimizar estes contaminantes.

Uma outra maneira de minimizar estas contaminações é através da aplicação de máscaras aos dados a serem analisados. Uma máscara é constituída por números binários dispostos em um vetor coluna. Os zeros deste vetor excluem regiões onde predominam a contaminação, como por exemplo o plano galáctico dos mapas da RCF, ao passo que os números um deste vetor preservam as regiões onde as flutuações da RCF dominam.

As primeiras máscaras para análise de dados do primeiro ano de observação do WMAP foram baseadas em mapas da banda K, por esta ser a faixa de frequências em que a contaminação galáctica é dominante. As máscaras são classificadas de acordo com o corte que elas realizam no céu, seguindo a ordem de severidade Km2, Km1, Kp0, Kp1, ..., Kp12, em que Km2 é mais severa e Kp12 a menos severa (Bennett, C.L.; Hill, R.S. et al., 2003).

Novas máscaras foram confeccionadas a partir de dados de observação nas bandas K e Q de 3 anos do WMAP. Estes mapas são convertidos em mapas de contaminação por subtração do mapa ILC de 3 anos. Os dois mapas então são combinados (Gold et al., 2008).

A antiga máscara Kp2 foi substituída pelas máscaras combinadas K e Q 85% denominada KQ85 por preservar 85% do céu. Já a máscara Kp0 foi substituída pela máscara KQ75 resultado das combinações das máscaras K e Q75%. A estas duas novas máscaras foram adicionadas máscaras de 32 novas fontes pontuais como resultado das observações

de 5 anos do WMAP (Gold et al., 2008).

Com as atualizações de fontes pontuais de contaminação para os novos dados de mapas de 7 anos as máscaras KQ75 e KQ85 reduziram a área preservada do céu para 70.6% e 78.3% respectivamente (Gold et al., 2010).

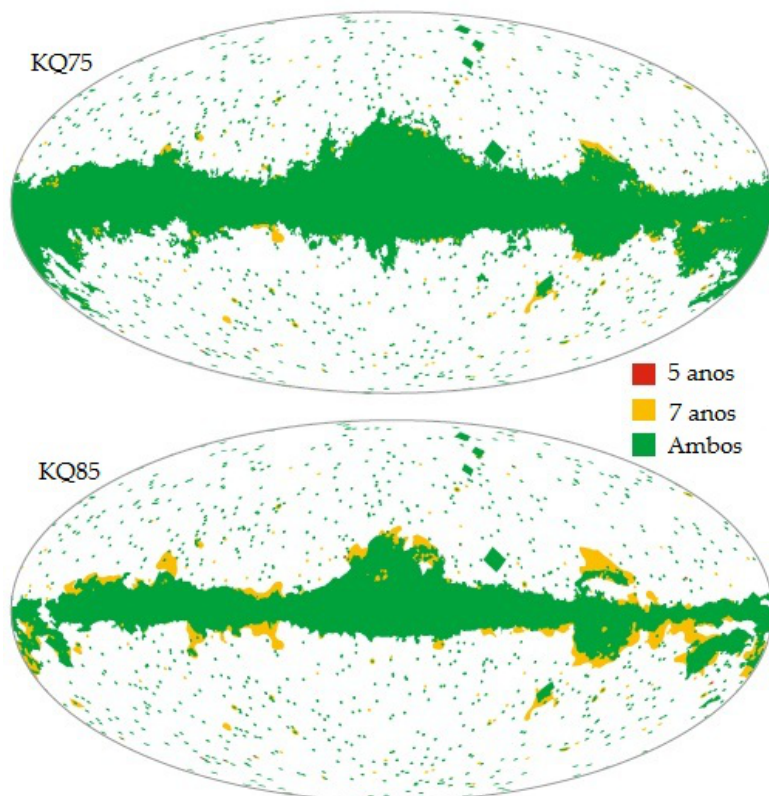


Figura 4.5: Atualização das máscaras.(Gold et al., 2010).

Para cada tipo de remessa de dados, usa-se a máscara apropriada, como por exemplo, ao analisar dados de 3 anos de observação usa-se Kp0, Kp2, ao passo que para dados de 5 anos de observação, utiliza-se as máscaras KQ75 e KQ85, para dados de 7 anos de observação utiliza-se as máscaras KQ75-7 e KQ85-7.

Neste trabalho utilizamos a máscara KQ75 7 anos, a mais severa, por recomendação do WMAP *Team* ao trabalhar com mapas de 7 anos de observação. Por questões de simplicidade, denotaremos esta máscara de KQ75-7.

A figura 4.5 faz uma comparação entre as máscara de 5 e 7 anos de observação.

4.3 Dados da RCF do WMAP

Neste trabalho analisamos os mapas nas bandas Q, V, W e ILC de duas formas: o mapa completo (céu inteiro) e os dados obtidos logo depois da aplicação da máscara KQ75-7.

Mapa Q - 7 anos

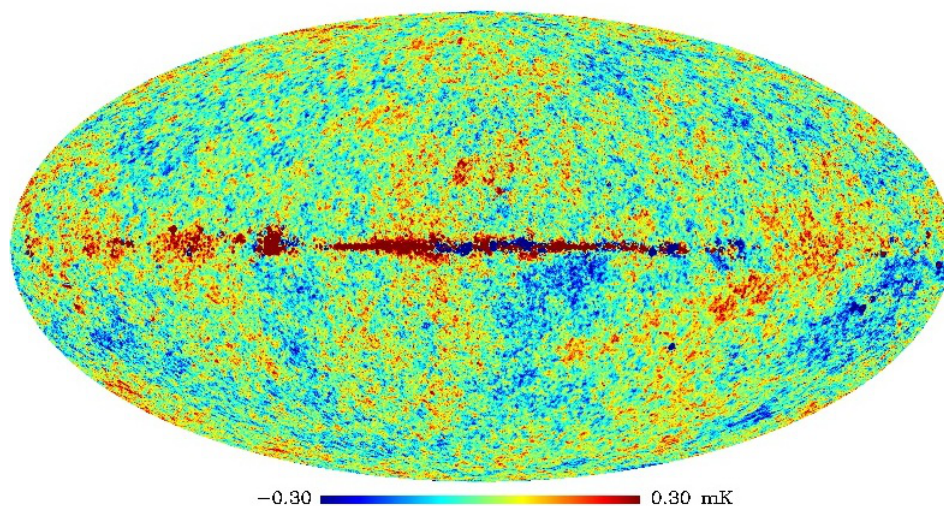


Figura 4.6: Mapa de céu inteiro na banda Q.

Mapa V - 7 anos

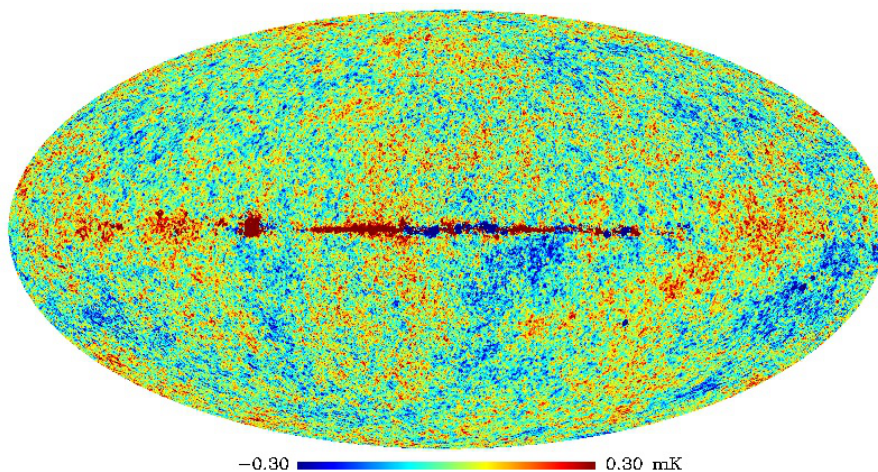


Figura 4.7: Mapa de céu inteiro na banda V.

Os mapas das figuras de 4.6 a 4.10 apresentam resolução angular máxima de 3 145 728 píxeis, onde a cada píxel está associado um valor de temperatura da RCF.

Para aplicar nosso aferidor nos mapas de céu inteiro nas bandas Q, V, W e ILC, procedemos assim:

- Seleccionamos um conjunto de centros de calotas esféricas.

Mapa W - 7 anos

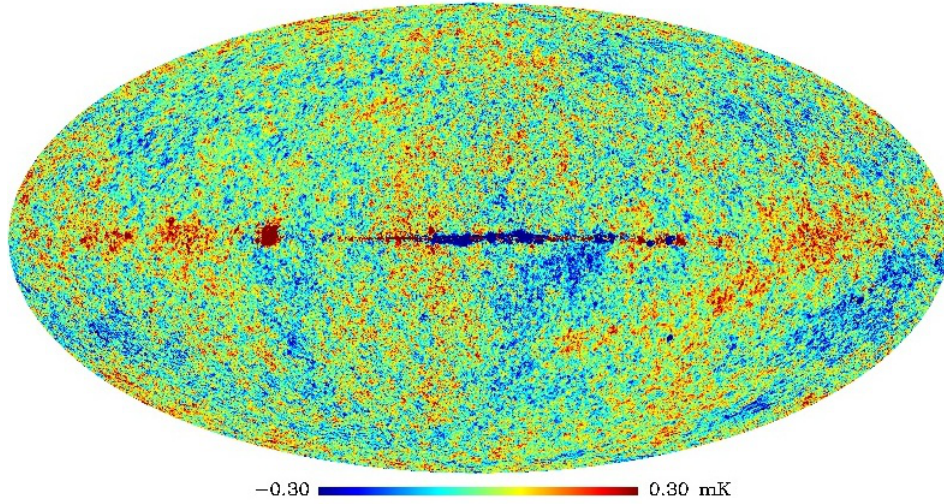


Figura 4.8: Mapa de céu inteiro na banda W.

Mapa ILC - 7 anos

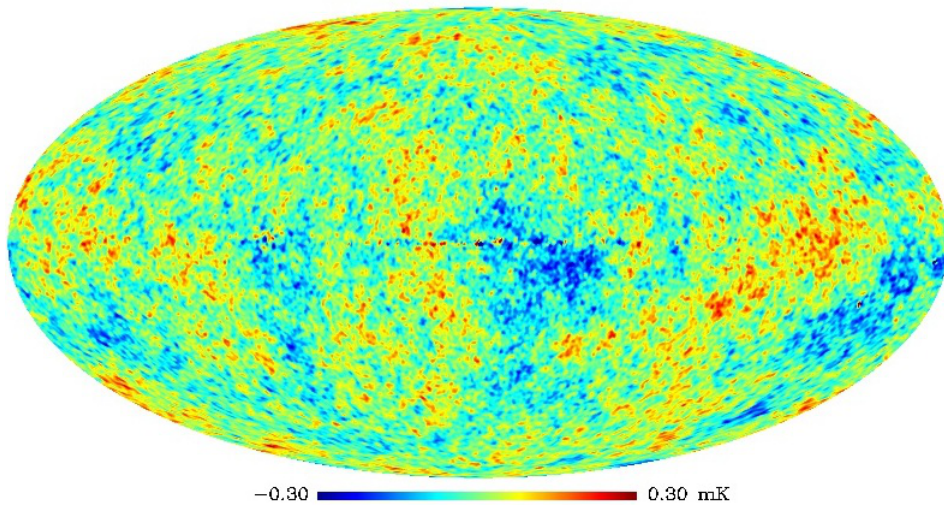


Figura 4.9: Mapa de céu inteiro ILC.

- Calculamos o coeficiente de Pearson em cada uma destas calotas.
- Calculamos o espectro de potências do mapa obtido.

Definimos $\Omega_{\gamma_0}^J \equiv \Omega(\theta_J, \phi_J; \gamma_0) \subset \mathbb{S}^2$ como sendo uma calota esférica na região da esfera celeste \mathbb{S}^2 , em que γ_0 é o raio da calota, com centro no J-ésimo píxel, $J = 1, 2, \dots, N_{cals}$, sendo N_{cals} o número de calotas e (θ_J, ϕ_J) as coordenadas dos centros destas calotas. O número de calotas e as coordenadas de seus centros são definidas pelo esquema de pixelização do HEALPix e a união de todas as calotas corresponde a esfera celeste completa (Bernui, 2009).

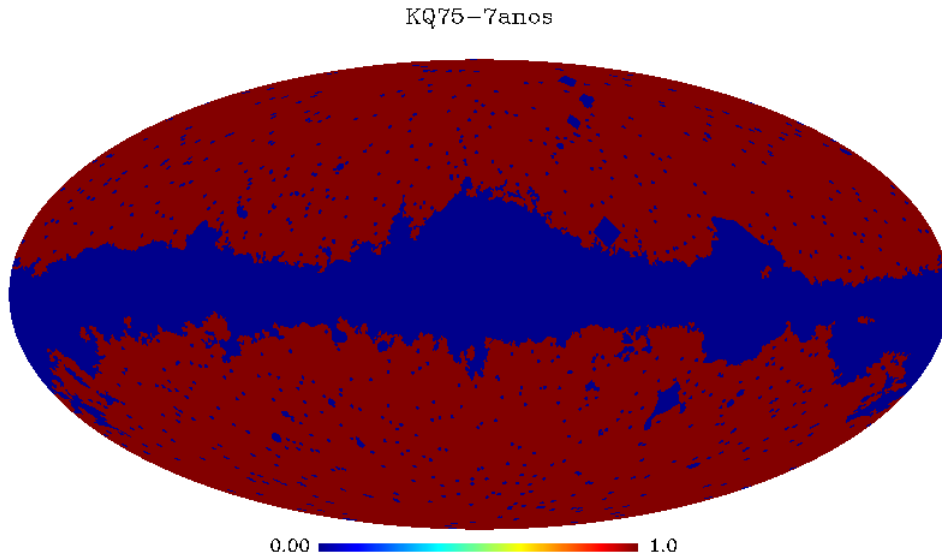


Figura 4.10: Máscara KQ75-7.

O coeficiente de Pearson das flutuações de temperatura dos mapas nas bandas Q, V, W e ILC, corresponde aos píxeis localizados na calota esférica $\Omega_{\gamma_0}^J$ em que

$$\cos \gamma = \cos \theta_i \cos \theta_{i'} + \text{sen} \theta_i \text{sen} \theta_{i'} \cos(\phi_i - \phi_{i'}), \quad (4.2)$$

onde $\gamma \in]0, 2\gamma_0]$ corresponde à distância angular entre os centros do i -ésimo e i' -ésimo píxeis.

Nós fazemos 3 conjuntos de análises usando calotas com $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$, respectivamente. Trabalhamos na pixelização $N_{side} = 512$. Nos mapas com calotas com $\gamma_0 = 8^\circ$ utilizamos $N_{cals} = 192$ e nos mapas de calotas com $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$ usamos $N_{cals} = 3\,072$. A variação no raio (e no parâmetro N_{cals}) serve para verificar a robustez de nosso método quanto a sua capacidade de detectar um desvio de gaussianidade nos dados destes mapas, caso ela exista.

Feitos estes procedimentos aos mapas estudados, pode-se dizer que estes foram submetidos a transformação

$$T(\theta, \phi) \longrightarrow \mathbb{P}(\theta, \phi), \quad (4.3)$$

onde \mathbb{P} é o coeficiente de Pearson dado pela equação

$$\mathbb{P}_J = \frac{3(\bar{T}_J - \tilde{T}_J)}{s_J}, \quad (4.4)$$

em que \mathbb{P}_J , \bar{T}_J , \tilde{T}_J e s_J correspondem, respectivamente, ao coeficiente de Pearson, a média, a mediana e ao desvio padrão das flutuações de temperatura associadas aos píxeis contidos na J -ésima calota. Note que, pela equação 4.4, \mathbb{P}_J é uma grandeza adimensional.

Dos mapas transformados são extraídos os D_ℓ em função dos multipolos de $\ell = 1$ a $\ell = 10$. Os D_ℓ são o espectro de potência dos mapas transformados. Definimos os D_ℓ , para nossos mapas transformados, como

$$D_\ell \equiv \frac{1}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |b_{\ell,m}|^2, \quad (4.5)$$

em que os coeficientes $b_{\ell,m}$ correspondem aos coeficientes da expansão e à amplitude do coeficiente de Pearson nos mapas transformados.

A extração dos D_ℓ dos mapas transformados foi realizada com auxílio das rotinas ANAFast e SYNFAST do HEALPix. Este procedimento gera um arquivo de texto que contém um vetor coluna formado por 10 elementos. Este arquivo de texto é gerado para cada mapa analisado. O primeiro elemento desse vetor, corresponde ao D_1 que está associado ao dipolo, D_2 associado ao quadrupolo e assim sucessivamente.

Para estimar a significância estatística dos resultados encontrados usando o aferidor coeficiente de Pearson, usamos mapas Monte Carlo. Devido ao sucesso do modelo cosmológico padrão em explicar a evolução do universo e suas previsões serem sustentadas pelas observações, nosso conjunto de mapas Monte Carlo consiste em 600 mapas de flutuações de temperatura produzidos de acordo com o modelo Λ CDM. As transformações efetuadas aos mapas Q, V, W e ILC foram similarmente aplicadas aos mapas Monte Carlo tidos como gaussianos e isotrópicos, com a finalidade de se fazerem as devidas comparações.

Foram obtidos os espectros D_ℓ^{MC} para os mapas Monte Carlo transformados e D_ℓ^{WMAP} para os mapas do WMAP transformados. Estamos interessados em analisar o comportamento dos mapas transformados do WMAP com respeito aos mapas Monte Carlo transformados, e para isso comparamos os valores médios dos D_ℓ^{WMAP} com os D_ℓ^{MC} .

Para o cálculo dos valores médios dos D_ℓ^{MC} dos 600 Monte Carlo utilizamos o Algoritmo I escrito em IDL, localizado no Apêndice F deste trabalho. Este algoritmo tem como saída um arquivo de texto que contém um vetor coluna de elementos $\bar{D}_1^{MC}, \bar{D}_2^{MC}, \dots, \bar{D}_{10}^{MC}$, em que \bar{D}_1^{MC} corresponde ao valor médio associado aos dipolos $\ell = 1$ dos 600 Monte Carlo, e assim sucessivamente até o \bar{D}_{10}^{MC} que corresponde o valor médio associado ao multipolo $\ell = 10$ dos 600 mapas Monte Carlo.

Para encontrar a faixa dos 95.4% dos valores dos D_ℓ^{MC} , não podemos usar as propriedades de uma distribuição gaussiana, comentadas na subseção 3.2.1 deste trabalho, visto que a distribuição dos D_ℓ^{MC} não é gaussiana. A figura 4.11 é a distribuição de frequência para os D_1 dos 600 Monte Carlo de céu inteiro com $\gamma_0 = 45^\circ$.

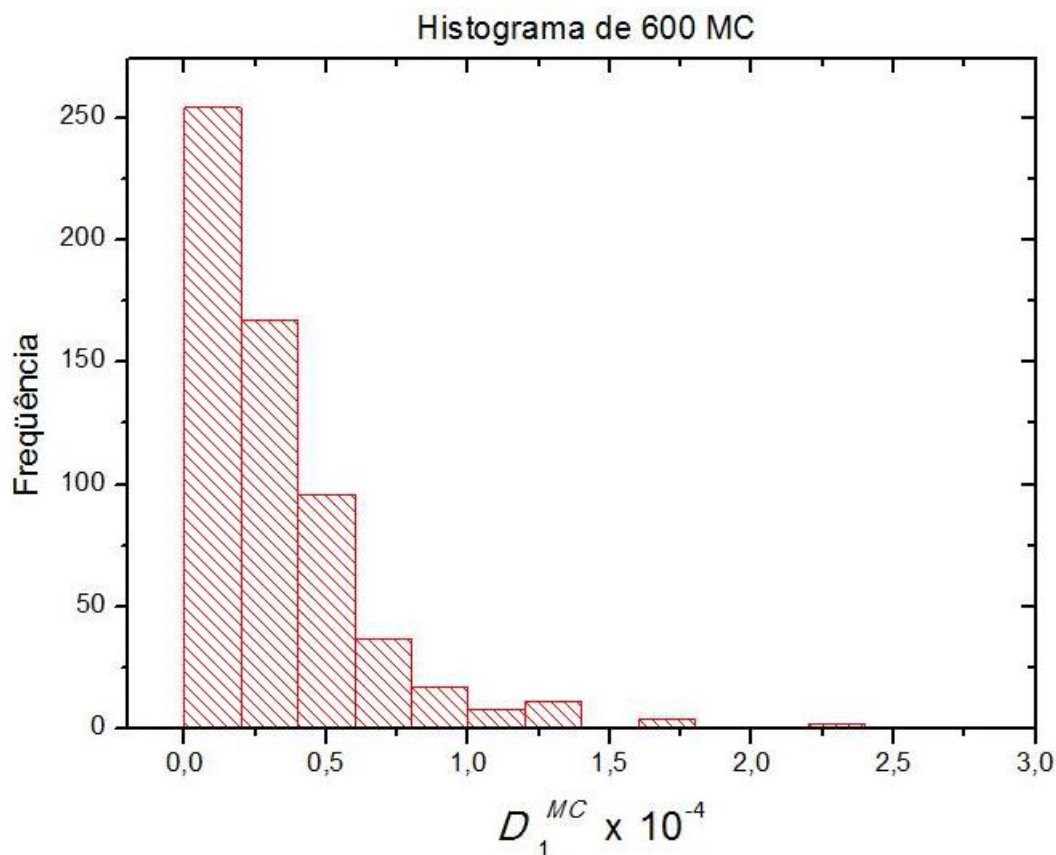


Figura 4.11: Distribuição de frequência para os D_1^{MC} .

Para resolver este problema temos que montar um algoritmo capaz de encontrar a faixa de 95.4% dos valores assumidos pelos D_ℓ^{MC} dos Monte Carlo transformados. Com o intuito de nos auxiliar na resolução deste problema, calculamos o desvio padrão² σ_ℓ , através da equação 3.18 multiplicada por $\sqrt{n/(n-1)}$, de todos D_ℓ^{MC} associados ao enésimo ℓ através do Algoritmo II do Apêndice F. Este algoritmo tem como saída um arquivo de texto que contém um vetor coluna, composto por 10 elementos, onde seu primeiro elemento σ_1 corresponde ao desvio padrão dos 600 D_1^{MC} associados ao dipolo $\ell = 1$ dos mapas Monte Carlo, e assim, até o σ_{10} , que são os desvios padrões para os 600 D_{10}^{MC} associados ao multipolo $\ell = 10$. Estas quantidades serão úteis logo adiante.

²Como os D_ℓ^{MC} não apresentam uma distribuição gaussiana, como mostrado pela figura 4.11, não podemos utilizar este desvio padrão para encontrar os 68.3% de nossos dados.

De posse dos desvios padrões σ_ℓ , dos valores médios \bar{D}_ℓ^{MC} e dos D_ℓ^{MC} dos mapas Monte Carlo, construímos o Algoritmo III do Apêndice F. Explicamos agora o funcionamento deste algoritmo obedecendo sua seqüência lógica. Inicialmente temos neste algoritmo

$$\Xi \asymp \Gamma \sigma_\ell(0, j), \quad (4.6)$$

onde Ξ chamamos de acréscimo, Γ é um valor determinado empiricamente, inicialmente atribuímos a Γ o valor 1, e $\sigma_\ell(0, j)$ é o desvio padrão σ_ℓ . Note que σ_ℓ foi devidamente escrito no algoritmo com auxílio da indexação $(0, j)$, em que o 0 e o j , representam, respectivamente, a posição da coluna e da linha no conjunto de dados. O símbolo \asymp denota que Ξ recebe o produto $\Gamma \sigma_\ell(0, j)$.

Posteriormente, no Algoritmo III declaramos

$$\Upsilon \asymp \bar{D}_\ell^{MC}(0, j) + \Xi, \quad (4.7)$$

onde Υ recebe $\bar{D}_\ell^{MC}(0, j)$ mais o acréscimo Ξ . Na expressão 4.7 o valor de \bar{D}_ℓ^{MC} foi devidamente indexado com $(0, j)$.

O Algoritmo III compara todos os 600 D_1^{MC} com o valor recebido por Υ . Se Υ encerrar 95.4% dos valores D_1^{MC} dos nossos mapas Monte Carlo, este valor recebido por Υ é salvo e passamos para análise de D_2^{MC} . Entretanto, se o valor recebido por Υ não encerra os 95.4% dos valores dos 600 D_1^{MC} , então modificamos o valor recebido por Γ até encontrar o valor desejado para Υ . Este procedimento é repetido até D_{10}^{MC} .

Note que o valor atribuído ao acréscimo Ξ aumenta ou diminui o valor recebido por Υ através da modificação do valor de Γ . O valor de Υ estabelece a faixa dos 95.4% dos valores dos D_ℓ^{MC} dos mapas Monte Carlo.

Os procedimentos descritos anteriormente são realizados em mapas Monte Carlo com raio $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$. A estes mapas também é aplicada a máscara KQ75-7, com a finalidade de se saber se o possível desvio de gaussianidade é devido a contaminação do plano galáctico e de fontes pontuais. Os espectros de potência angular dos mapas de céu inteiro são então comparados com o resultado obtido usando o mesmo procedimento nos mapas Monte Carlo. Similar comparação é feita quando usamos a máscara KQ75-7, tanto nos mapas de dados do WMAP quanto nos mapas Monte Carlo.

Quantificamos nossos resultados através do χ^2 . Primeiramente, calculamos o χ_c^2 referente aos valores médios dos D_ℓ e dos valores que encerram 95.4% destes, com a finalidade

de obtermos um valor de corte. Posteriormente, calculamos o χ^2 dos D_ℓ dos mapas Q, V, W e ILC e seus similares mapas Monte Carlo.

Devida às possíveis variações de tensão na rede elétrica que podem danificar nossos mapas durante o processamento dos algoritmos, por questões de segurança, realizamos testes de consistência. Calculamos o valor médio para o coeficiente de Pearson em um mapa Monte Carlo. Calculamos então o valor médio para 100 mapas Monte Carlo e fizemos uma varredura de passo 100 até chegar ao arquivo de número 600 e comparamos os números.

Tabela 4.2: Teste de consistência para 600 Monte Carlo de céu inteiro e $\gamma_0 = 45^\circ$.

Intervalo de Arquivos Monte Carlo	Valor médio para o coeficiente de Pearson
[1, 100]	-2.5×10^{-4}
[101, 200]	-4.9×10^{-4}
[201, 300]	-4.1×10^{-4}
[301, 400]	-8.9×10^{-4}
[401, 500]	-1.4×10^{-4}
[501, 600]	-4.9×10^{-4}

Note pela tabela 4.2 que os valores médios para o coeficiente de Pearson para 100 arquivos Monte Carlo são aproximados. Esse mesmo procedimento foi realizado para as outras variações de Monte Carlo estudadas e obtivemos números aproximados, certificando que nossos dados são seguros.

4.4 Resultados e Discussões

Apresentamos nesta seção os resultados do aferidor coeficiente de Pearson aplicado aos nossos mapas de dados Q, V, W e ILC de céu inteiro e com aplicação da máscara KQ75-7. Discutimos as estruturas reveladas pela aplicação do coeficiente de Pearson aos mapas em questão. É possível notar o efeito do tamanho das calotas comparando-se os mapas de céu inteiro transformados $\mathbb{P}(\theta, \phi)$ de $\gamma_0 = 90^\circ$ (figuras 4.12, 4.14, 4.16 e 4.18) com $\gamma_0 = 45^\circ$ (figuras 4.20, 4.22, 4.24 e 4.26). Esses mapas com estes parâmetros, são constituídos por calotas conjuntas, isto é, possuem píxeis comuns. Já os mapas em que $\gamma_0 = 8^\circ$, são formados por calotas disjuntas, ou seja, que não compartilham dos mesmos píxeis.

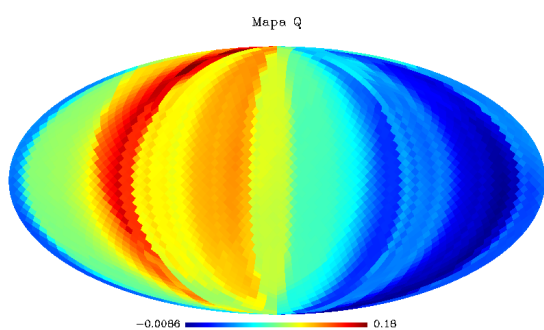


Figura 4.12: Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

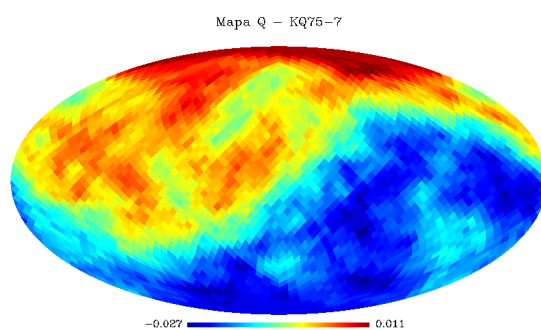


Figura 4.13: Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

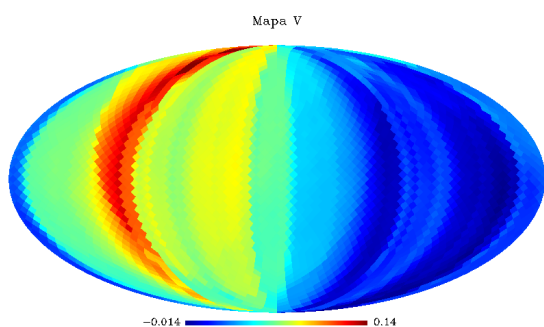


Figura 4.14: Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

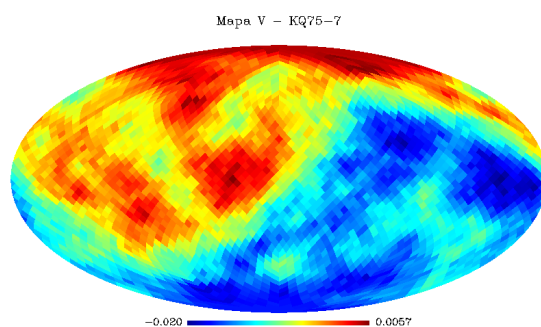


Figura 4.15: Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

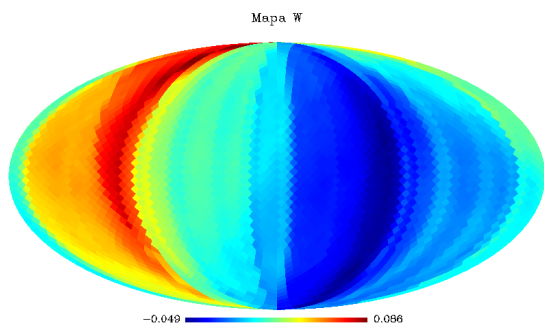


Figura 4.16: Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

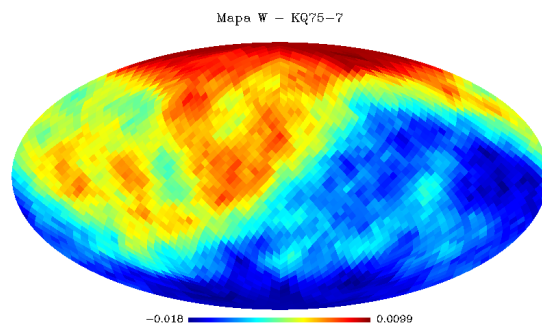


Figura 4.17: Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

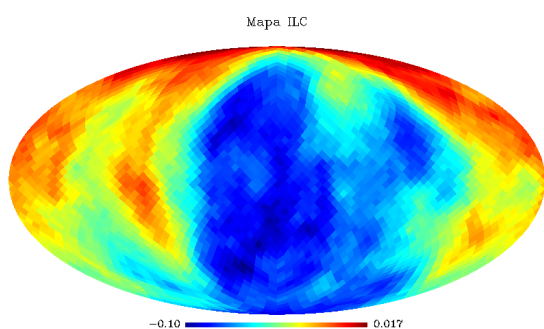


Figura 4.18: Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

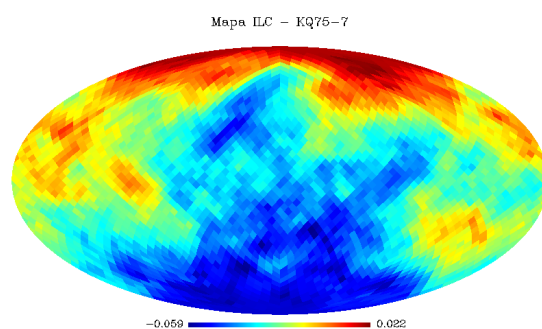


Figura 4.19: Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

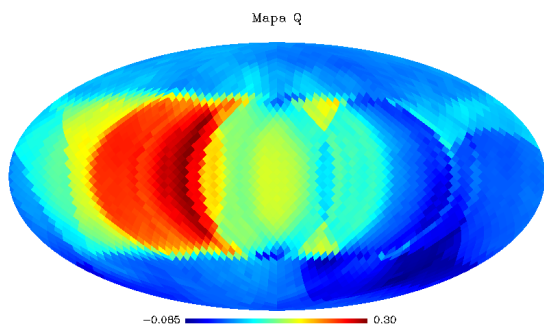


Figura 4.20: Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

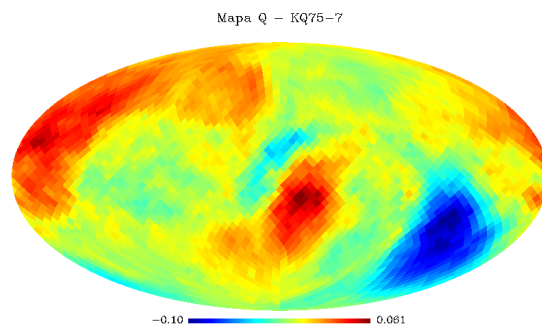


Figura 4.21: Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

Para todos estes mapas obtemos seus respectivos espectros de potência e os comparamos os seus similares mapas Monte Carlo. Note que pelos gráficos das figuras 4.36, 4.38 e 4.40, os espectros de potência angular dos mapas transformados $\mathbb{P}(\theta, \phi)$, obedecem ao grau de contaminação dos mapas, apresentando na ordem crescente de desvio Q, V, W, respectivamente. O mapa ILC tem um comportamento oscilante em seu grau de contaminação,

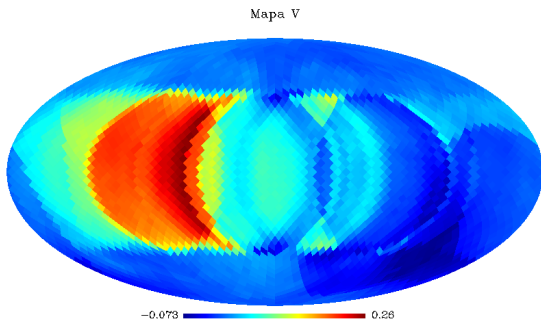


Figura 4.22: Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

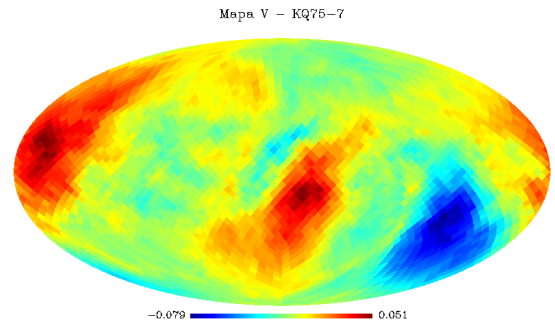


Figura 4.23: Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

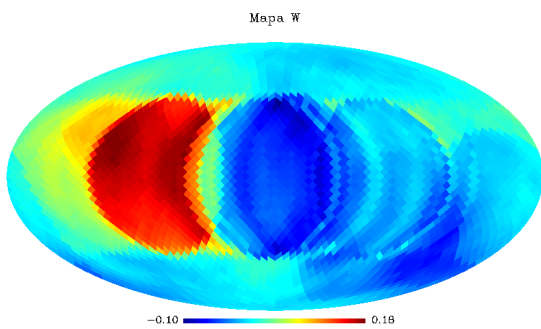


Figura 4.24: Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

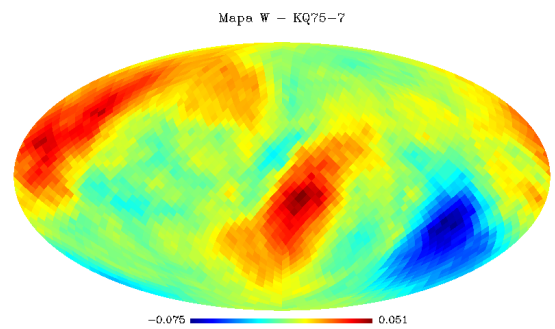


Figura 4.25: Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

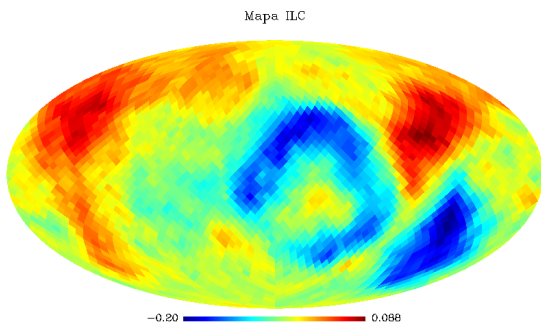


Figura 4.26: Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

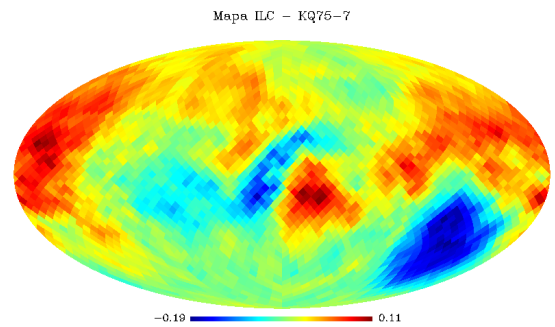


Figura 4.27: Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

mostrando-se não estar completamente limpo.

Nós calculamos um χ_c^2 de corte, tabela 4.3 , equação 4.3, com a finalidade de procurar os valores acima do valor correspondente a 95.4% C.L. .

$$\chi_c^2 = \sum_{\ell=1}^{10} \left(\frac{M_\ell - \sigma_\ell^{95.5\%}}{\sigma_\ell^{68.3\%}} \right)^2, \quad (4.8)$$

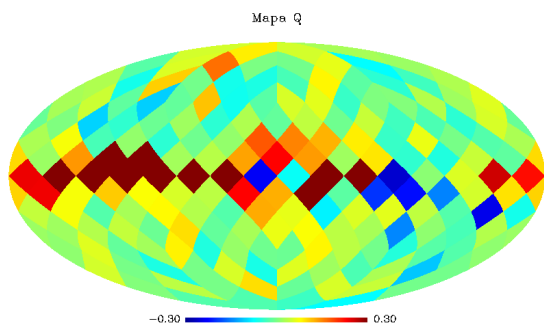


Figura 4.28: Mapa Q de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

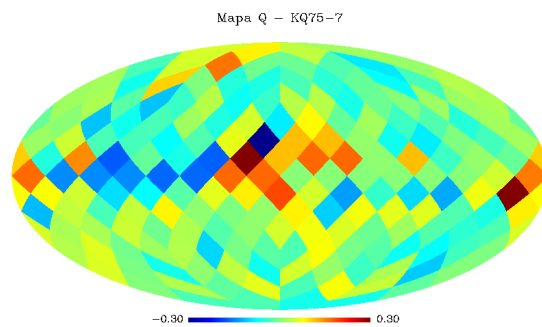


Figura 4.29: Mapa Q mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

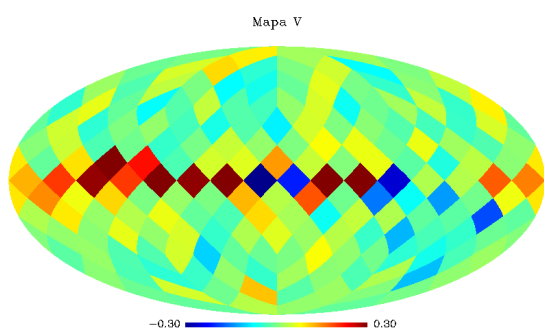


Figura 4.30: Mapa V de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

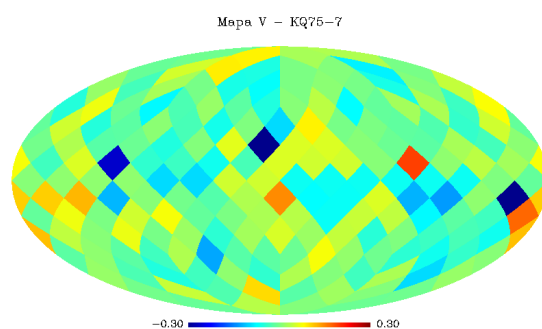


Figura 4.31: Mapa V mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

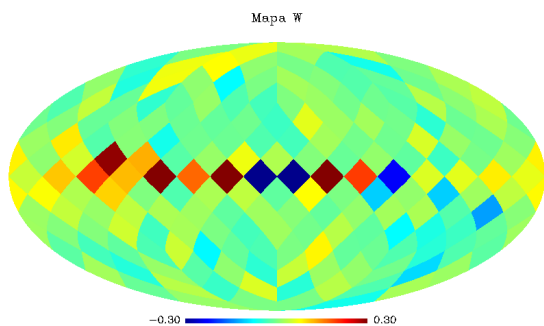


Figura 4.32: Mapa W de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

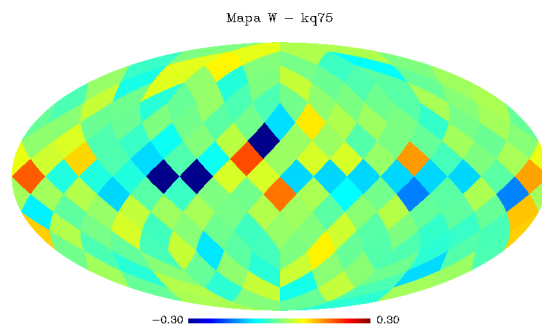


Figura 4.33: Mapa W mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

em que \mathbb{M}_ℓ corresponde ao valor médio para os mapas Monte Carlo transformados do ℓ -ésimo D_ℓ associado ao ℓ -ésimo, $\sigma_\ell^{95.6\%}$ corresponde a faixa dos 95.4% C.L. dos valores médios assumidos pelos ℓ -ésimos D_ℓ associados aos ℓ -ésimos dos mapas Monte Carlo e $\sigma_\ell^{68.3\%}$ corresponde ao desvio padrão dos valores médios dos ℓ -ésimos D_ℓ associados aos ℓ -ésimos dos mapas Monte Carlo.

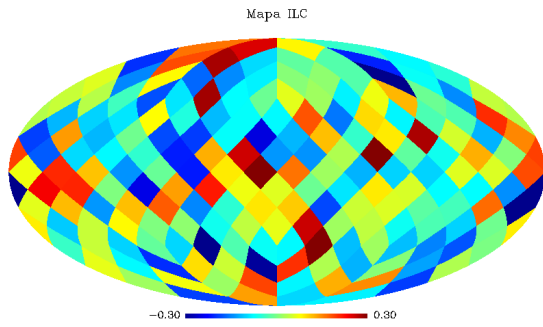


Figura 4.34: Mapa ILC de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

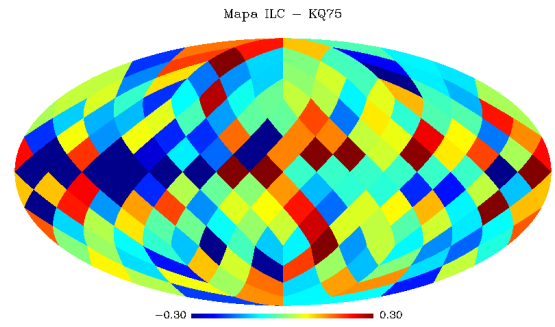


Figura 4.35: Mapa ILC mascarado e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

Para quantificar os desvios em relação aos valores médios calculamos então o χ^2 com as devidas modificações

$$\chi^2 = \sum_{\ell=1}^{10} \left(\frac{M_{\ell} - W_{\ell}}{\sigma_{\ell}^{68.3\%}} \right)^2, \quad (4.9)$$

onde W_{ℓ} corresponde a valor de cada mapa analisado neste trabalho do ℓ -ésimo D_{ℓ} .

Tabela 4.3: Valores obtidos para χ_c^2 .

γ_0	Mapas de céu inteiro	Mapas mascarados
8°	0.86	0.80
45°	2.16	2.06
90°	3.72	3.68

Tabela 4.4: Valores obtidos para χ^2 para mapas de céu inteiro.

γ_0	Q	V	W	ILC
8°	109.86	27.68	9.16	13.74
45°	488.11	225.58	102.62	104.76
90°	5741.67	2084.01	553.31	478.60

Apenas com os gráficos das figuras 4.36, 4.38 e 4.40 não é possível saber o quanto os mapas de céu inteiro Q, V, W e ILC se afastam da média, eles ilustram apenas uma visão geral do que estão acontecendo, pois há pontos tanto fora da faixa de 95.4% C.L. quanto dentro nos mapas mascarados.

Note que, comparando-se os valores das tabelas 4.3 e 4.4, todos os valores estão fora se afastam do valor médio e todos estão fora da faixa dos 95.4%C.L. Também é possível verificar que o aferidor coeficiente de Pearson é capaz de acompanhar o grau de contaminação dos mapas nos três valores do parâmetro γ_0 , apresentando um χ^2 que cresce com o nível de contaminação nas bandas W, V, Q.

Já o mapa ILC não segue um padrão, pois para os parâmetros $\gamma_0 = 8^\circ$ e $\gamma_0 = 45^\circ$, os valores obtidos para seu χ^2 está entre os valores dos χ^2 das banda W e V. Já quando $\gamma_0 = 90^\circ$ ele apresenta o menor valor para χ^2 .

Tabela 4.5: Valores obtidos para χ^2 para mapas mascarados.

γ_0	Q	V	W	ILC
8°	0.05	0.03	0.02	0.11
45°	0.78	0.31	0.25	41.99
90°	0.22	0.29	0.22	33.43

Comparando as tabelas 4.3 e 4.5, é possível verificar que o aferidor coeficiente de Pearson não acusa desvio além de 95.4%C.L. para os mapas Q, V, W variando-se o parâmetro γ_0 em seus três valores estudados neste trabalho, assim, a causa dos desvios nos mapas de céu inteiro é devida a contaminates do plano galáctico e fontes extragalácticas e a máscara KQ75-7 foi capaz de suprimir tais contaminates nestes mapas.

Entretanto, a máscara KQ75-7 não foi capaz de suprimir os contaminates do mapa ILC, pois o mesmo apresenta desvio para os três valores do parâmetro γ_0 .

4.4.1 Estruturas Reveladas pelo Coeficiente de Pearson

O espectro de potência D_ℓ para o caso $\gamma_0 = 90^\circ$ e pela a análise usando a máscara KQ75-7, ilustrado pelo gráfico 4.37, deixa claro que a componente $\ell = 1$ de dipolo destes mapas é dominante sobre as demais componentes (figuras 4.13, 4.15 e 4.17).

A figura 4.42 representa a estrutura para um dipolo puro. Nosso mapas em questão, não só apresentam o dipolo, como também as outras componentes. Note que a estrutura de dipolo puro e a dos nossos mapas mascarados com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$ são semelhantes.

Já para figura 4.39 a componente dominante para os mapas Q, V e W é a de quadrupolo $\ell = 2$. Por este gráfico, percebe-se que os dois primeiros pontos para o mapa Q estão muito próximos. Porém o $D_1 = 6.60976 \times 10^{-4}$ ao passo que $D_2 = 6.31188 \times 10^{-4}$. A figura 4.43

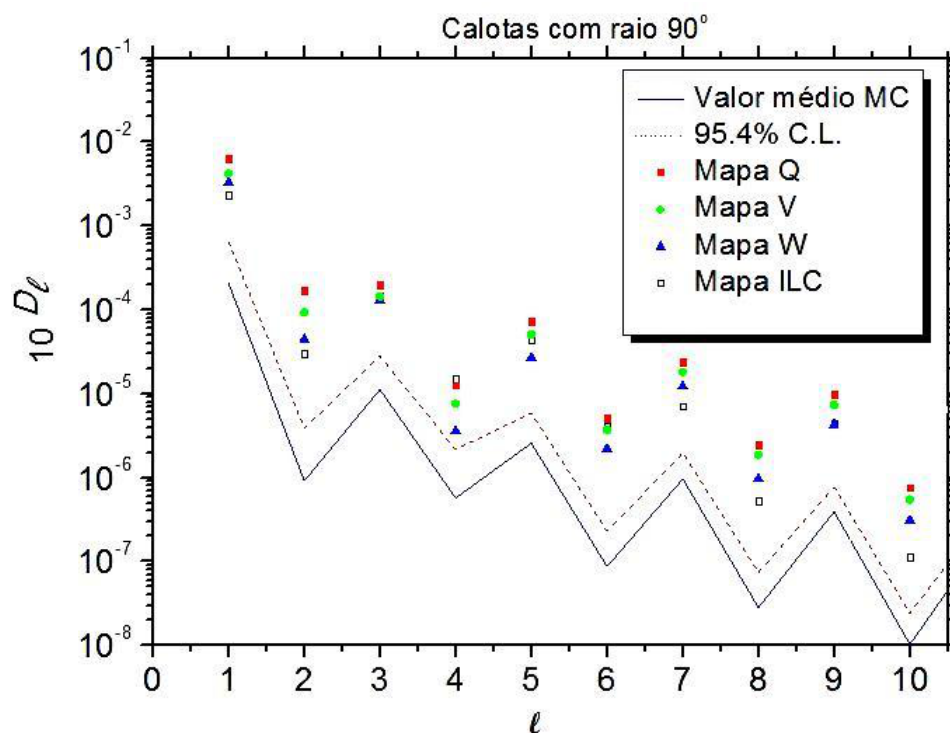


Figura 4.36: Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

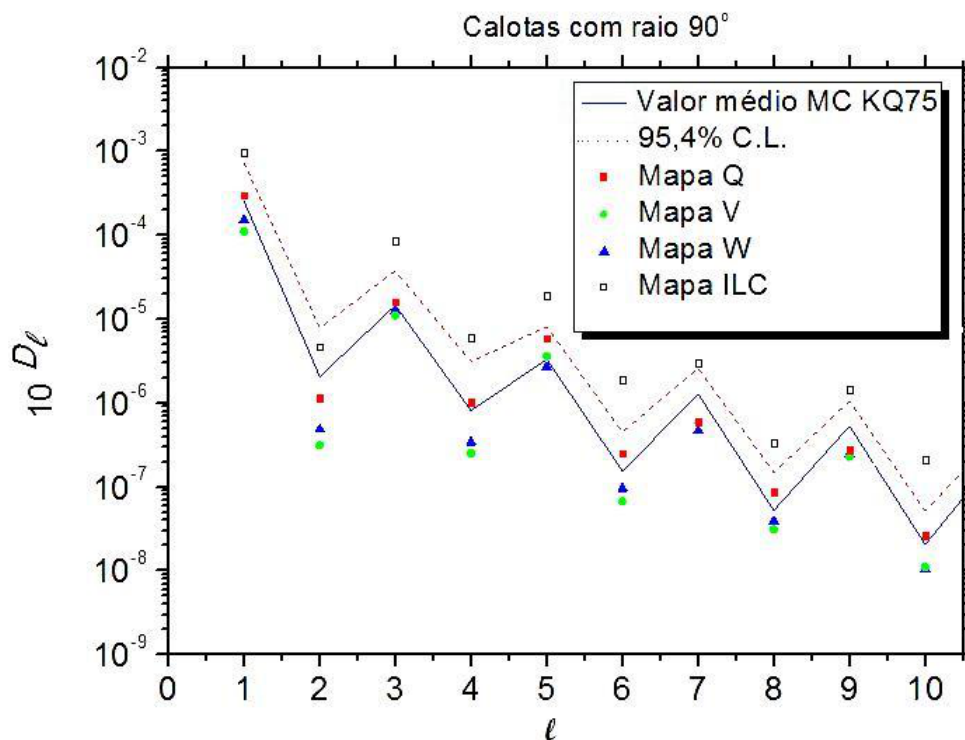


Figura 4.37: Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 90^\circ$.

representa uma estrutura formada por quadrupolo puro. Note que os mapas mascarados com parâmetro $\gamma_0 = 45^\circ$ (figuras 4.21, 4.23, 4.25 e 4.27) são semelhantes ao mapa de

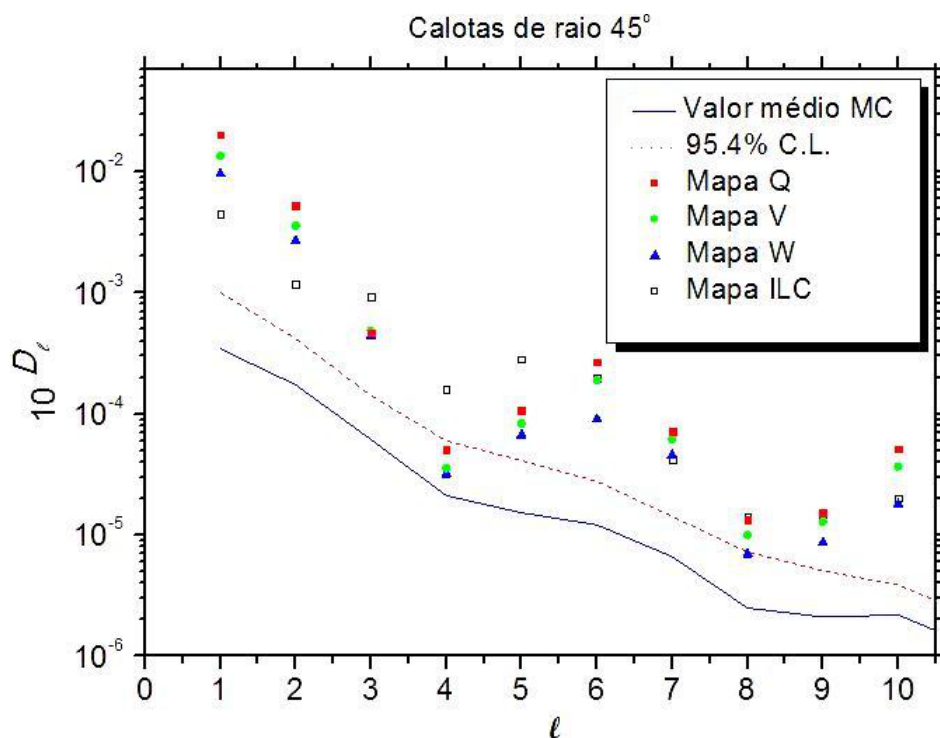


Figura 4.38: Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

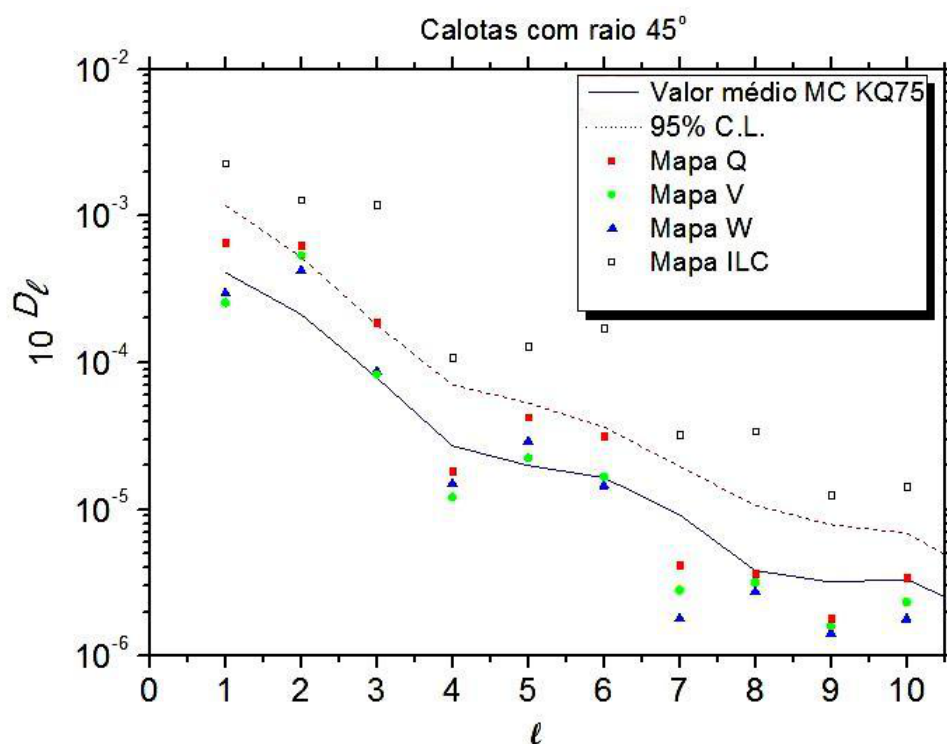


Figura 4.39: Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 45^\circ$.

quadrupolo puro da figura 4.43. Os mapas com esta configuração, apresentam manchas aproximadamente iguais e em posições semelhantes ao mapa de um quadrupolo puro.

As estruturas presentes nos mapas mascarados e com parâmetro $\gamma_0 = 8^\circ$ (figuras 4.29,

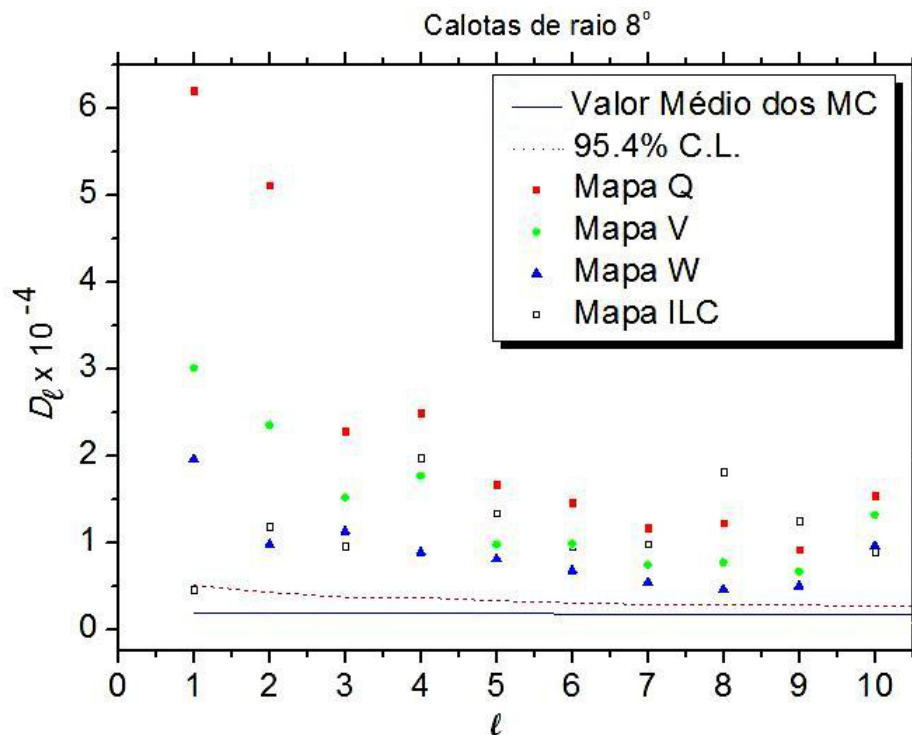


Figura 4.40: Espectro de potência angular para mapas de céu inteiro e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

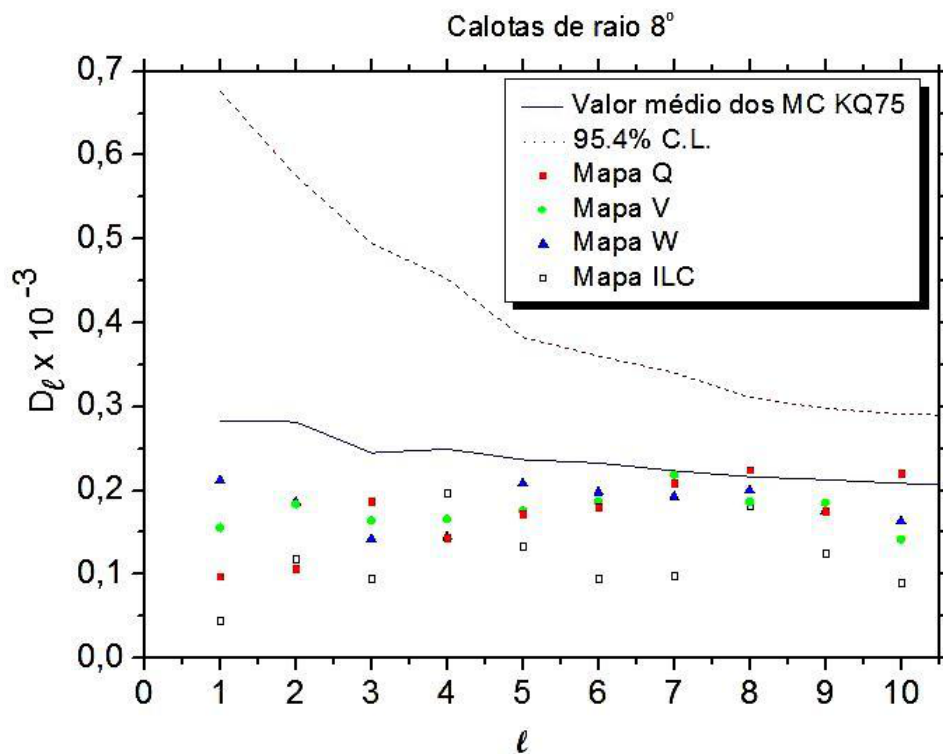


Figura 4.41: Espectro de potência angular para mapas mascarados e com $\gamma_0 = 8^\circ$.

4.31, 4.33 e 4.35) são o resultado da combinação de todos os multipolos ℓ , pois os D_ℓ estão próximos.

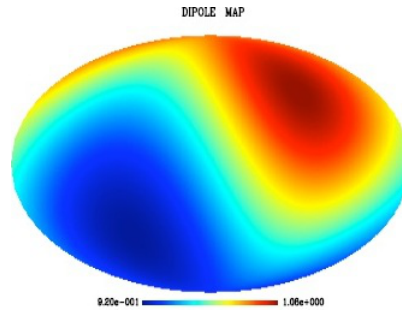


Figura 4.42: Estrutura de dipolo puro. (Bernui, 2009)

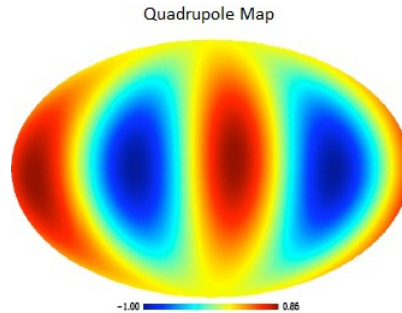


Figura 4.43: Estrutura de quadrupolo puro. (Bernui, 2009)

O coeficiente de Pearson aplicado ao mapa ILC mascarado (figura 4.19) revela uma estrutura muito semelhante àquela da assimetria norte-sul.

No ano de 2009, A. Bernui utilizando do método do mapa sigma, evidenciou a estrutura de assimetria norte-sul. De forma análoga ao nosso método, o mapa sigma de maneira geral, pode ser obtido da seguinte forma

$$\sigma_J^2 \equiv \frac{1}{N_{\text{bins}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{bins}}} (C_k^J)^2, \quad (4.10)$$

em que σ é uma função escalar que associa a J -ésima calota a um número real positivo, C_k^J é o valor para a função de correlação angular de dois pontos, N_{bins} é o número de bins do histograma ³. Para o mapa sigma ILC com parâmetro $\gamma_0 = 45^\circ$ e com a máscara KQ75-7, retirando 28.4% do céu, fica evidenciada a assimetria norte-sul (figura 4.44).

Vielva em 2004, detectou desvios de gaussianidade com significância de $\approx 99\%$ C.L. para os dados do primeiro ano do WMAP independente da frequência analisada (Vielva et al., 2004). Ele utilizou como aferidor de desvio da gaussianidade a *wavelet* esférica da família chapéu mexicano, que consiste de um protótipo de função capaz de escalonar e dilatar um sinal. Assim, quando a *wavelet* dilata e escalona o sinal, o mesmo pode revelar

³Para saber mais sobre este método, consulte Bernui, 2009.

estruturas que não são visíveis no sinal original (Bolzan, 2004, 2006; R ath et al., 2007). O desvio de gaussianidade encontrado por Vielva   exclusivamente atribuído ao *cold spot* cujas coordenadas galácticas são $\ell = 209^\circ$ e $b = -57^\circ$ (figura 4.45).

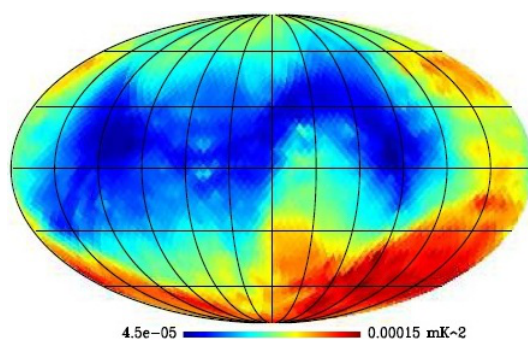


Figura 4.44: O mapa ILC com máscara. (Bernui, 2009)

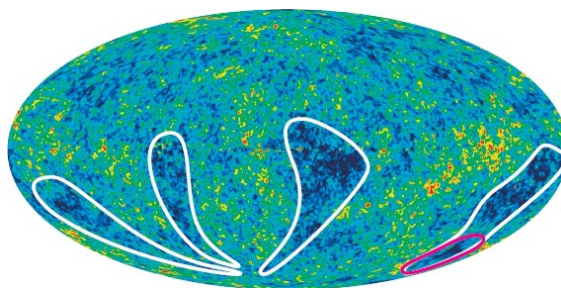


Figura 4.45: Em destaque as regiões alongadas de baixa temperatura do mapa ILC. (Bernui, 2009)

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram descritos os procedimentos realizados para testar o coeficiente de Pearson como aferidor de desvio de gaussianidade em mapas de flutuações de temperatura da RCF obtidos pelo satélite WMAP, nas frequências das bandas Q 41Ghz, V 61Ghz e W 94GHz. Também foi analisado o mapa ILC, construído através da combinação das 5 frequências desse satélite.

Nossos resultados foram apresentados por meio de gráficos, tabelas e mapas produzidos pelos aferidor coeficiente de Pearson. Nós quantificamos nossos resultados através do χ^2 , comparando o resultado obtido com os dados versus os valores médios obtidos usando os mapas Monte Carlo. Com intuito de verificar se o aferidor coeficiente de Pearson é robusto, encerramos os píxeis nos mapas transformados em calotas de raio $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$.

Através da comparação entre as tabelas 4.3 e 4.4, verificamos que o aferidor coeficiente de Pearson é sensível à contaminação galáctica dos mapas Q, V e W, pois ele acompanha o grau de contaminação desses mapas, isto é, o desvio de gaussianidade cai com o grau de contaminação do mapa analisado (tabela 4.4, figura 4.40, figura 4.38 e figura 4.36). Concluimos que, quanto a essa propriedade, o aferidor coeficiente de Pearson, se revelou robusto para os mapas Q, V e W com parâmetros de $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$, mostrando que tal propriedade não é influenciada por calotas que compartilham dos mesmos píxeis ou que contenham píxeis incomuns.

Através da tabela 4.4, é possível verificar que o χ^2 para o mapa ILC com parâmetros $\gamma_0 = 8^\circ$ e $\gamma_0 = 45^\circ$ apresenta valores que estão entre os χ^2 dos mapas V e W. Já o χ^2 para o mapa ILC com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$ apresenta o menor valor. Assim, o coeficiente de Pearson acusa que o mapa ILC não apresenta um comportamento padrão quanto ao

aumento da abertura da calota de $\gamma_0 = 45^\circ$ para $\gamma_0 = 90^\circ$.

Os mapas transformados de céu inteiro das figuras 4.28, 4.30 e 4.32, todas com parâmetro $\gamma_0 = 8^\circ$, mostram que as calotas que contém os píxeis contaminados estão localizadas no plano galáctico. Esse efeito também é evidenciado pelos mapas das figuras 4.20, 4.22, 4.24 e 4.12, com parâmetro $\gamma_0 = 45^\circ$. Para as figuras 4.12, 4.14 e 4.16 com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$, devido a maior abertura das calotas, todas elas apresentam um fuso avermelhado devido a influência dos píxeis contaminados do plano galáctico. Os mapas transformados pelo coeficiente de Pearson correspondentes ao ILC, para os casos $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$, ilustrados respectivamente pelas figuras 4.34, 4.26 e 4.18, apresentam estruturas diferentes dos mapas transformados Q, V e W, o que evidencia que o mapa ILC passou por um processo que não conseguiu minimizar a contaminação. De fato, nosso aferidor detectou desvios de gaussianidade com significância estatística acima dos 95.4% C.L. no mapa ILC céu inteiro e nos casos $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$, o que é mostrado pela comparação das tabelas 4.3 e 4.4 e também pelos gráficos das figuras 4.40, 4.38 e 4.36.

Concluimos que, através da remoção de 29.4% do céu com a aplicação da máscara KQ75-7 aos mapas transformados, Q, V e W, pelo aferidor coeficiente de Pearson, para os parâmetros $\gamma_0 = 8^\circ$, $\gamma_0 = 45^\circ$ e $\gamma_0 = 90^\circ$, que os desvios de gaussianidade acusados pelo aferidor a estes mapas de céu inteiro são devidos à contaminação pelo plano galáctico e a outras fontes de origem não cosmológicas, que foram subtraídas com a aplicação da máscara KQ75-7. O aferidor coeficiente de Pearson não detecta desvios de gaussianidades nos mapas Q, V e W após a aplicação da máscara KQ75-7. Isso é visto através da comparação dos dados das tabelas 4.3 e 4.5.

Os mapas mascarados transformados pelo aferidor coeficiente de Pearson, ilustrados pelas figuras 4.21, 4.23, 4.25, 4.13, 4.15 e 4.17, apesar de apresentarem uma estrutura semelhante a estrutura de um quadrupolo puro, a estrutura revelada pelo nosso aferidor não é uma estrutura de quadrupolo, pois o quadrupolo $\ell = 2$ do nosso gráfico de dados da figura 4.39 das bandas Q, V e W não domina sobre os demais multipolos e não apresenta um desvio de gaussianidade significativo.

Já para os mapas das figuras 4.13, 4.15 e 4.17 que apresentam uma estrutura semelhante a estrutura de dipolo puro, a estrutura revelada por nosso aferidor não é uma estrutura de dipolo, pois apesar do gráfico da figura 4.37 mostrar que o dipolo é dominante para as bandas Q, V e W, ele não apresenta desvio de gaussianidade significativo. Assim, a estrutura revelada para nossos mapas mascarados e com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$ não parece

ser uma estrutura de dipolo dominante.

O aferidor coeficiente de Pearson para os mapas ILC e com máscara ilustrados pela figura 4.27 com parâmetro $\gamma_0 = 45^\circ$ e pela figura 4.19 com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$ acusou desvio de gaussianidade com significância estatística acima de 95.4%, o que é verificado pela inspeção das tabelas 4.3 e 4.5. A estrutura apresentada pelo mapa ILC transformado mascarado e com parâmetro $\gamma_0 = 90^\circ$ revela uma assimetria entre os hemisférios norte e sul. Entretanto, ao analisarmos o gráfico da figura 4.41 e as tabelas 4.3 e 4.5, verificamos que o mapa ILC transformado mascarado e com parâmetro $\gamma_0 = 8^\circ$ não apresenta desvio de gaussianidade significativo para o dipolo.

Nós então, podemos concluir que nosso aferidor coeficiente de Pearson é capaz de detectar desvios de gaussianidades devido a contaminações do plano galáctico e fontes não cosmológicas.

Futuramente, pretendemos buscar novos candidatos capazes de detectarem desvios de gaussianidade significativos nos mapas de flutuações de temperatura da RCF, tanto mapas mascarados quanto mapas de céu inteiro. Nossa pretensão é analisar os dados do satélite Planck da ESA (*European Agency Space*) lançado em 2009. Esse satélite produz mapas de dados da RCF com ~ 50 milhões de píxeis e ele opera em 9 bandas de frequência (e.g. Górski et al., 2005).

Um dos aferidores que iremos testar é a transformada *wavelet* discreta não dizimada. Este aferidor transforma o mapa de flutuações da RCF em dois mapas transformados, sendo um mapa que é composto pelo coeficiente de detalhes da transformação e outro mapa que é composto pelos coeficientes de detalhes da transformação. Também testaremos as transformadas *wavelet* contínuas nos mapas da RCF.

Bibliografia

- Adams, F; Laughlin, G. . *The Five Ages of the Universe: Inside the Physics of Eternity*, New York, United States of America: The Free Press, 1961
- Bennett, C. L.; Bay, M.; Halpern, M.; Hinshaw, G.; Jackson, C.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Page, L.; Spergel, D.N.; Tucker, D.S.; Wilkinson, D. T.; Wollack, E.; Wright, E.L. . The Microwave Anisotropy Probe (MAP) Mission, eprint arxiv: 0301158v1, 2003
- Bennett, C.L.; Halpern, M.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Page, L.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Wollack, E.; Wright, E.L.; Barnes, C.; Greason, M.R.; Hill, R.S.; Komatsu, E.; Nolta, M.R.; Odegard, N.; Peiris, H.V.; Verde, L.; Weiland, J.L. . First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results. eprint arxiv: 0302207v2, 2003
- Bennett, C. L.; Hill, R.S.; Hinshaw, G.; Nolta, M.; Odegard, N.; Page, L.; Spergel, D.; Weiland, J.; Wright, E.; Halpern, M.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S.; Tucker, G.; Wollack, E. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Foreground Emission. *ApJS.*, **148**:97, 2003
- Bennett, C.L.; Hill, R.S.; Hinshaw, G.; Larson, D.; Smith, K.M.; Dunkley, J.; Gold, B.; Halpern, M.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Komatsu, E.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Nolta, M.R.; Odegard, N.; Page, L.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Weiland, J.L.; Wollack, E.; Wright, E.L. .Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observation: Are There Cosmic Microwave Anomalies? *ApJS.*, **192**:17, 2011
- Bernui, A.; Tsallis, C.; Villela, T. . Deviation from Gaussianity in the Cosmic Microwave Background Temperature Fluctuations. *EPL.*, **78**, 2007

- Bernui, A. .Is the Cold-Spot Responsible for the North-South Asymetry?, eprint arxiv: 0912.1147v2, 2009
- Bersanelli, M.; Maino, D.; Mennella, A. . Anisotropies of the Cosmic Microwave Background, eprint arxiv: 0209215v2, 2002
- Bogges, N.W.; Mather, C.L.; Weiss, R.; Bennett, C.L.; Cheng, E.S.; Dwek, E.; Gulkis, S.; Hauser, M.G.; Janssen, M.A.; Kelsall, T.; Meyer, S.S.; Moseley, S.H.; Murdock, T.L.; Shafer, R.A.; Silverberg, R.F.; Smoot, G.F.; Wilkinson, D.T.; Wright, E.L. .The COBE Mission: Its Design and Performance Two Years After Launch . *Astrophysical Journal*, **397**:420, 1992
- Bolzan, M.J.A. . Análise da Transformada em Ondeletras Aplicada em Sinal Geofísico. *Revista Brasileira do Ensino de Física.*, **v.26, n.1**:37, 2004
- Bolzan, M.J.A. .Transformada em ondeleta: uma necessidade . *Revista Brasileira do Ensino de Física.*, **v.28, n.4**:563, 2006
- Castro Milone, A.; Wuensche, C.A.; Rodrigues, C.V.; Jablonski, F.J.; Capelato, H.V.; Boas, José Williams Vilas; Cecatto, J.R.; Villela, T. . Introdução à Astronomia e Astrofísica. São José dos Campos, Brasil: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2003
- Clarke, G.M. . *A Basics Course in Statistics*, London, England: Edward Arnold, 1978
- Coelho, C.M. . Descontaminação dos Mapas da Radiação Cósmica de Fundo Feitos Pelo Satélite WMAP Utilizando Dados do Radiotelescópio GEM, Dissertação de Mestrado, INPE, São José dos Campos, 2008a
- Costa Neto, Pedro Luiz de Oliveira . *Estatística*, São Paulo, Brasil: Edgard Blucher, 1977
- Dicke, R.H.; Peebles, P.J.E.; Roll, P.J.; Wilkinson, D.T. . Cosmic Black-Body Radiation. *Astrophysical Journal Letters.*, **142**:414, 1965
- Draine, B.T.; Lazarian, A. . Microwave Emission from Galactic Dust Grains. eprint arxiv: 9902356v1, 1999
- Eidelman, S. et al. . Revised by Douglas Scott and George F. Smoot. Cosmic Microwave Background Mini-Review. eprint arxiv: 0406567v1, 2004

ESA Planck, <<http://www.esa.int/SPECIALS/Planck/index.html>>, Página visitada em 9 de março de 2012

Filippenko, A.V.; Riess, A.G. . Results from the High-Z Supernova Search Team. eprint arxiv: 9807008v1, 1998

Freedman, W.L.; Madore, B.F.; Gibson, B.K.; Ferrarese, L.; Kelson, D.D.; Sakai, S.; Mould, J.R.; Kennicutt, R.C.; Ford, H.C.; Grahan, J.A.; Huchra, J.P.; Hughes, S.M.G.; Illingworth, G.D.; Macri, L.M. and Stetson, P.B. Final Results the Hubble Space Telescope Key Project to Measure The Hubble Constant. *ApJS.*, **553**:47, 2001

George B. Rybicki; Alan P. Lightman . *Radiative Processes in Astrophysics*, Mörlenbach, Germany: Wiley VCH, 2004

Gold, B.; Bennett, C.L.; Hill, R.S.; Hinshaw, G.; Odegard, N.; Page, L.; Spergel, D.N.; Weiland, J.L.; Dunkley, L.; Halpern, M.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Komatsu, E.; Larson, D.; Meyer, S.S.; Nolta, M.R.; Wollack, R.; Wright, E.L. .Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)Observations: Galactic Foreground Emission, eprint arxiv: 0803.0715v2, 2008

Gold, B.; Odegard, N.; Weiland, J.L.; Hill, R.S.; Kogut, A.; Bennett, C.L.; Hinshaw, G.; Chen, X.; Dunkley, J.; Halpern, M.; Jarosik, N.; Komatsu, E.;Larson, D.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Nolta, M.R.; Page, L.; Smith, K.M.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Wollack, E.; Wright, E.L. .Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Galactic Foreground Emission, eprint arxiv: 1001.4555v3, 2010

Górski, K.; Hivon, E.; Banday, A.; Wandelt, B.; Hansen, F.; Reinecke, M.; Bartelmann, M. HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere, *ApJS.*, **622**:759, 2005

Guth, A. H.; So-Young Pi Fluctuations in the New Inflationary Universe. *Physical Review Letters.*, **v.49**, **n.15**:1110, 1982

Hinshaw, G.; Nolta, R.; Bennett, C.L.; Bean, R.; Dore, O.; Greason, M.R.; Halpern, M.; Hill, R.S.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Komatsu, E.; Limon, M.; Odegard, N.;Meyer, S.S.; Page, L.; Peiris, H.V.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Verde, L.; Weiland, J.L.; Wollack, E.; Wright, E.L. . Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis, *ApJS.*, **170**:288, 2007

- Hinshaw, G.; Weiland, J.L.; Hill, R.S.; Odegard, N.; Larson, D.; Bennett, C.L.; Dunkley, J.; Gold, B.; Greason, M.R.; Jarosik, N.; Komatsu, E.; Nolta, M.R.; Page, L.; Spergel, D.N.; Wollack, E.; Halpern, E.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Tucker, G.S.; Wright, E.L. . Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, & Basic Results eprint arxiv: 0803.0732v2, 2009
- Horvath, J.E.; Lugones, G.; Scarano, S. Jr.; Teixeira, R.; Allen, M.P. . *Cosmologia Física*, São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física, 2007
- Hubble, Edwin. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences.*, **15**:168.
- Jarosik, N.; Bennett, C.L.; Dunkley, J.; Gold, B.; Greason, M.R.; Halpern, M.; Hill, R.S.; Hinshaw, G.; Kogut, A.; Komatsu, E.; Larson, D.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Nolta, M.R.; Odegard, N.; Page, L.; Smith, K.M.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Weiland, J.L.; Wollack, E.; Wright, E.L. . Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results, eprint arxiv: 1001.4744v1, 2011
- Kolb, Edward W.; Turner, Michael Stanley . *The Early Universe*, Chicago, United States of America : Westview Press, 1990
- Komatsu, E.; Kogut, A.; Nolta, M.R.; Bennett, C.L.; Halpern, M.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Limon, M.; Meyer, S.S.; Page, L.; Spergel, D.N.; Tucker, G.S.; Verde, L.; Wollack, E.; Wright, E.L. . First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Tests of Gaussianity. eprint arxiv: 0302223v2, 2003
- Komatsu, E.; Afshordi, N.; Bartolo, N.; Baumann, D.; Bond, J.R.; Buchbinder, E.I.; Byrnes, C.T.; Chen, X.; Chung, D.J.H.; Cooray, A.; Creminelli, P.; Dalal, N.; Doré, o.; Easter, R.; Frolov, A.V.; Górski, K.M.; Jackson, M.G.; Khoury, J.; Kinney, W.H.; Kofman, L.; Koyama, k.; Leblond, L.; Lehnert, J.L.; Lidsey, J.E.; Liguori, M.; Lim, E.A.; Linde, A.; Lyth, D.H.; Maldacena, J.; Matarrese, S.; McAllister, L.; McDonald, P.; Mukohyama, S.; Ovrut, B.; Peiris, H.V.; Räth, C.; Riotto, A.; Rodriguez, Y.; Sasaki, M.; Scoccimarro, R.; Seery, D.; Sefusatti, E.; Seljak, U.; Senatore, L.; Shandera, S.; Shellard, E.P.S.; Silverstein, E.; Slosar, A.; Smith, K.M.; Starobinsky, A.A.; Steinhardt,

- P.J.; Takahashi, F.; Tegmark, M.; Tolley, A.J.; Verde, L.; Wandelt, B.D.; Wands, D.; Weinberg, S.; Wyman, M.; Yadav, A.P.S.; Zaldarriaga, M. . Non-Gaussianity as a Probe of the Physics of the Primordial Universe and the Astrophysics of the Low Redshift Universe eprint arxiv: 0902.4759v4, 2009
- La Porta, L.; Reich, P.; Burigana, C.; Reich, W. Conversion of ECP Maps into Healpix maps, MPIfR-Memo 2005
- Lená, P.; Lebrun, F.; Mignard, F.; . *Observational Astrophysics.*, 2 ed., Berlin, Germany: Springer, 1996
- Lima, C. T. S.; Santos, W. M. S. . Modelos Cosmológicos: Uma apresentação introdutória, XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física 2005
- Liddle, A. . *An Introduction To Modern Cosmology - Second Edition*, Sussex, England: Jonh Wiley & Sons Ltd., 2003
- Machado, Kleber Daum . *Teoria do Eletromagnetismo*. 3 ed. v.1. Ponta Grossa, Brasil: Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2007
- MacVittie, G.C. . Relativistic and Newtonian Cosmology. *The Astronomical Journal*, **59**:173, 1954
- Marcelo B. Ribeiro. Cosmologia Newtoniana .*Sociedade Astronômica Brasileira*, **14**:34, 1994
- Martin White; Douglas Scott; Joseph Silk. Anisotropies in the Cosmic Microwave Background . *Annual Reviews Astronomy Astrophysics*, **32**:319, 1994
- Martin White; Wayne Hu. The Sachs-Wolfe Effect .*Astronomy and Astrophysics*, **312**:8, 1997
- Mather, J.C.; Cheng, E.S.; Eplee, R.E.; Jr.; Isaacman, R.B.; Meyer, S.S.; Shafer, R.A.; Weiss, R.; Wright, E.L.; Bennett, C.L.; Boggess, N.W.; Dwek, E.; Gulkis, S.; Hauser, M.G.; Janssen, M.; Kelsall, T.; Lubin, P.M.; Moseley, Jr.; Murdock, T.L.; Silverberg, R.F.; Smoot, G.F. . A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. *The Astrophysical Journal*, **354**:L37, 1990

- Mather, J.C.; Cheng, E.S.; Cottingham, D.A.; Eplee, R.E.; Fixen, D.J.; Hewagama, T.; Isaacman, R.B.; Jensen, K.A.; Meyer, S.S.; Noerdlinger, P.D.; Read, S.M.; Rosen, L.P.; Shafer, R.A.; Wright, E.L.; Bennett, C.L.; Boggess, N.W.; Hauser, M.G.; Kelsall, T.; Moseley, S.H.; Jr.; Silverberg, R.F.; Smoot, G.F.; Weiss, R.; Wilkinson, D.T. . Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cobe Firas Instrument. *The Astrophysical Journal*, **420**:439, 1994
- Mather, J.C.; Fixsen, D.J.; Shafer, R.A.; Mosier, C.; Wilkinson, D.T. . Calibrator Design for the Cobe far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS). *The Astrophysical Journal*, **512**:511, 1999
- Matts Roos .*Introduction to Cosmology*. 3ed., West Sussex, England: John Wiley & Sons, 2003
- Max Tegmark. Doppler peaks and all that: CMB anisotropies and what they can tell us. eprint arxiv: 9511148v1, 1995
- Meyer, P.L. .*Propabilidade: Aplicações à Estatística*, Rio de Janeiro, Brasil: Livro Técnico, 1969
- Milne, E.A. . A Newtonian Expanding Universe. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **5**:64, 1934
- Montgomery, D.C.; Runger, G.C. . *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. 2ª ed., Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2003
- Narlikar, Jayant Vishnu . *An Introduction to Cosmology*. San Francisco, United States of America: Addison Wesley, 2004
- Oliveira Filho, Kepler de Souza; Maria de Fátima Oliveira. *Astronomia e Astrofísica*. 2 ed. São Paulo, Brasil: Livraria da Física., 2004
- Padmanabhan, T. . *Structure formation in the universe.*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1995
- Penzias, A.A.; Wilson, W. . A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/c. *Astrophysical Journal Letters*, **142**:419, 1965

- Ralph A. Alpher; Robert C. Herman. Remarks on the Evolution of the Expanding Universe. *Physical Review*, **v.75, n.7**, 1948
- Räth, C.; Schuecker, P.; Banday, A.J. .A scaling index analysis of the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe three-year data: signatures of non-Gaussianities and asymmetries in the cosmic microwave background . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **380**:466, 2007
- Ruth Durrer . *The Cosmic Microwave Background*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2008
- Ryden, Barbara Sue . *Introduction to Cosmology*. San Francisco, United States of America: Addison Wesley, 2003
- Sachs, R.K.; Wolfe, A.M. . Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background . *Astrophysical Journal*, **147**:73, 1967
- Sachs, R.K.; Wolfe, A.M.; Ellis, G.; Ehlers, J.; Krasínski, A . . Republicatin of: Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background . **39**:1929, 2007
- Schneider, P. . *Extragalactic Astronomy and Cosmology An Introduction*, Bonn, Germany: Springer, 2006
- Shelegel, D.J.; Finkbeiner, D.P.; Davis, M. . Maps of Dust Infrared Emission for Use in Estimation of Reddening and Cosmic Microwave Background Radiation Foregrounds. *The Astrophysical Journal.*, **500**:525, 1998
- Scott, D.; Smoot, G.F. . Cosmic Microwave Background. eprint arxiv: 1005.0555v1, 2010
- Singh, Simon. . *Big Bang*. Tradução: Jorge Luiz Calife. Revisão Técnica: Alfredo Sotto, Rio de Janeiro, Brasil: Editora Record Ltda., 2006
- Sloan Digital Sky Survey, <<http://www.sdss.org/>>, Página visitada em 12 de dezembro de 2011
- Smoot, G.F.; Bennett, C.L.; Kogut, A.; Wright, E.L.; Aymon, J.; Boggess, N.W.; Cheng, E.S.; Amici, G.De; Gulkis, S.; Hauser, M.G.; Hinshaw, G.; Jackson, P.D.; Janssen, M.; Kaita, E.; Kelsall, T.; Keegstra, P.; Lineweaver, C.; Loewenstein, K.; Lubin, P.; Mather,

- J.; Meyer, S.S.; Moseley, S.H.; Murdock, T.; Rokke, L.; Silverberg, R.F.; Tenorio, L.; Weiss, R.; Wilkinson, D.T. .
Structure in the Cobe Differential Microwave Radiometer Firsst-Year Maps. *The Astrophysical Journal*, **396**:L1, 1992
- Smoot, G. F. CMB Synchrotron Foreground. eprint arxiv: 9902201v1, 1999
- Souza, R.E. . *Introdução à Cosmologia*, São Paulo, Brasil: Editora da Universidade de São Paulo, 2004
- Spergel, D. N.; Verde, L.; Peiris, H. V.; Komatsu, E.; Nolta, M. R.; Bennett, C. L.; Halpern, M.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Page, L.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L.. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters . *The Astrophysical Journal*, **148**:175, 2003
- Spergel, D. N.; Bean, R.; Dor´e, O.; Nolta, M. R.; Bennett, C. L.; Dunkley, J.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Komatsu, E.; Page, L.; Peiris, H. V.; Verde, L.; Halpern, M.; Hill, R. S.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Odegard, N.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L.. Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. . *The Astrophysical Journal*, **170**:377, 2007
- Spiegel, M. R.c. *Estatística*. 2^a ed. Tradução: Carlos Augusto Crusius, São Paulo, Brasil: McGraw-Hill do Brasil, 1984
- Sunyaev, R.; Zel’dovich, Y.B. . The observation of relic radiation as a test of the nature of X-ray radiation from the clusters galaxies . *Comments on Astrophysics and Space Science*, **v.4, n.1**:173, 1972
- Max Tegmark. Doppler peaks and all that: CMB anisotropies and what they can tell us. eprint arxiv: 9511148v1, 1995
- The High-Z SN Search Team, <<http://www.cfa.harvard.edu/supernova/home.html>>, Página visitada em 10 de novembro de 2011
- Todor Stanev. High Energy Astrophysical Processes. eprint arxiv: 0504401v1, 2005
- Toranzos, F.I. . *Estatística*, São Paulo, Brasil: Mestre Jou, 1969

- Vielva, P.; Martínez-González, E.; Barreiro, R.B.; Sanz, J.L.; Cayón, L. . Detection of non- Gaussianity in the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe First-Year Data Using Spherical Wavelets. *The Astrophysical Journal.*, **609**:22, 2004
- Wayne Hu. Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination , 2008
- Wadsworth, G. P; Bryan, J. G. . *Introduction to Probability and Randon Variables*, New York, United States of America: McGraw-Hill, 1960
- Wright, E.L.; Mather, J.C.; Fixen, D.J.; Kogut, A.; Shafer, R.A.; Bennett, C.L.; Bogges, N.W.; Cheng, E.S.; Silverberg, R.F.; Smoot, G.F.; Weiss, R. .Interpretation of the Cobe Firas CMBR Spectrum. *The Astrophysical Journal.*, **420**:450, 1994
- Young, H.D.; Freedman, R.A.; .*Física IV: Ótica e Física Moderna*, São Paulo, Brasil: Pearson Education do Brasil Ltda., 2004

Apêndice A

Efeito Doppler Aplicado às Ondas Eletromagnéticas

Consideremos uma fonte de luz que se move com velocidade constante v em relação a um observador em repouso em um referencial inercial S (figura A.1). No referencial da fonte, a luz é emitida com uma frequência f_0 e período τ_0 .

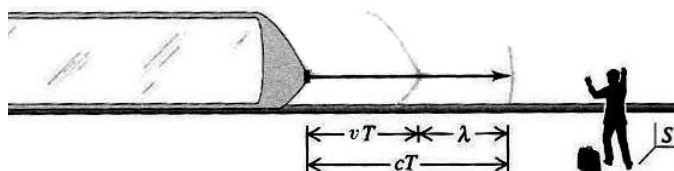


Figura A.1: Efeito Doppler.

Seja τ o intervalo de tempo entre duas cristas consecutivas vistas por um observador no sistema de referência S . Observa-se que tal valor não é o intervalo entre a chegada de duas cristas sucessivas à sua posição porque as cristas são emitidas em pontos diferentes no sistema de referência S . Ao medir somente f que o referencial S recebe, o observador não leva em conta as diferenças dos tempos de trânsito entre as cristas sucessivas. Logo, a frequência medida pelo observador em S não é o inverso do período τ .

De acordo com a figura A.1, para o referencial S , se a segunda crista está a uma distância λ em relação a primeira, então o intervalo de tempo entre essas duas cristas é λ/c , onde c é a velocidade de propagação da onda eletromagnética e

$$\lambda = (c - v)\tau, \quad (\text{A.1})$$

$$\tau = \gamma\tau_0, \quad (\text{A.2})$$

onde γ é o coeficiente de Lorentz, dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.3})$$

Em um intervalo de tempo τ , uma crista de onda na frente se move a uma distância $c\tau$, enquanto que a fonte move-se a uma menor distância $v\tau$ no mesmo sentido. Logo, a frequência medida pelo observador no referencial S , será

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-v)\tau}. \quad (\text{A.4})$$

Entretanto, τ_0 é medido no sistema de repouso da fonte, assim ele é o tempo próprio. Então, τ e τ_0 estão relacionados por

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c\tau_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c\tau_0} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} f_0. \quad (\text{A.6})$$

Porém, $1/\tau$ é diferente de f . Substituímos a equação A.6 em A.4

$$f = \frac{c}{(c-v)} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} f_0, \quad (\text{A.7})$$

trabalhando a equação anterior, temos

$$f = \frac{c}{(c-v)} \frac{\sqrt{(c+v)(c-v)}}{c} f_0 = \sqrt{\frac{(c+v)(c-v)}{(c-v)^2}} f_0, \quad (\text{A.8})$$

$$f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_0. \quad (\text{A.9})$$

A equação A.9 expressa o efeito Doppler para ondas eletromagnéticas. Ela mostra que quando uma fonte aproxima-se de um observador em repouso, a frequência f observada é maior do que a frequência emitida f_0 . De maneira análoga, para uma fonte que se afasta de um observador, a frequência f observada é menor do que a frequência f_0 emitida. Logo, a equação A.9 torna-se

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0. \quad (\text{A.10})$$

Uma aplicação do efeito Doppler em ondas eletromagnéticas é o *redshift* z , observado no espectro luminoso oriundo de galáxias distantes (Young et al., 2004). Se as galáxias se

movem afastando-se da Terra, a luz por elas emitidas é desviada no sentido dos maiores comprimentos de onda, o que é ilustrado pela equação A.10. Entretanto, se a galáxia se aproxima de nós, a luz emitida por ele é deslocada no sentido dos menores comprimentos de onda, *blueshift*¹. A velocidade das galáxias em relação à Terra pode ser determinada pela medição destes desvios.

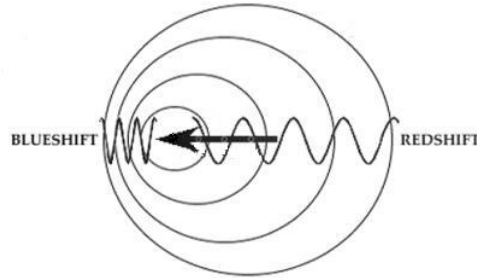


Figura A.2: *Redshift e blueshift.*

Defini-se o *redshift* como

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (\text{A.11})$$

onde λ é o comprimento de onda da luz observada e λ_0 é o comprimento de onda da luz se o objeto estivesse em repouso. Se $z < 0$ esta quantidade é chamada *blueshift*, caso contrário, se $z > 0$, teremos um *redshift*. A maior parte das galáxias observadas possuem um $z > 0$.

Com auxílio das equações A.10 e A.11, demonstraremos o *redshift* de um objeto, que se afasta de nós, em função de sua velocidade. Sabe-se que

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (\text{A.12})$$

de A.12 em A.11, vem

$$z = \frac{\frac{c}{f} - \frac{c}{f_0}}{\frac{c}{f_0}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0}}{\frac{1}{f_0}}, \quad (\text{A.13})$$

trabalhando algebricamente com a equação anterior chegamos a

$$1 + z = \frac{f_0}{f}, \quad (\text{A.14})$$

¹*Blueshift* traduzindo do inglês significa desvio para o azul.

dividimos ambos os membros da equação A.10 por f

$$1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v} \frac{f_0}{f}}, \quad (\text{A.15})$$

de A.14 em A.15, vem

$$1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} (1+z), \quad (\text{A.16})$$

$$1+z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \quad (\text{A.17})$$

$$z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1. \quad (\text{A.18})$$

Para $v \ll c$ (ou $z \ll 1$), a equação A.18 se reduz a uma forma mais simples. Para demonstrar isso, elevamos ao quadrado ambos os membros desta equação

$$(1+z)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} \right)^2, \quad (\text{A.19})$$

desenvolvendo os quadrados da equação anterior, vem

$$1 + 2z + z^2 = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (\text{A.20})$$

$$(1 + 2z + z^2) \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 + \frac{v}{c}, \quad (\text{A.21})$$

$$1 + 2z + z^2 - \frac{v}{c} - 2z\frac{v}{c} - z^2\frac{v}{c} = 1 + \frac{v}{c}, \quad (\text{A.22})$$

$$2z + z^2 - \frac{v}{c} - 2z\frac{v}{c} - z^2\frac{v}{c} = \frac{v}{c}, \quad (\text{A.23})$$

$$2z + z^2 = 2\frac{v}{c} + 2z\frac{v}{c} + z^2\frac{v}{c}, \quad (\text{A.24})$$

$$2z + z^2 = \frac{v}{c}(2 + 2zz^2), \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2} = \frac{v}{c}, \quad (\text{A.26})$$

escrevendo o primeiro membro da equação acima em termos de seus quadrados perfeitos e fazendo os devidos ajustes, vem

$$\frac{(z+1)^2 - 1}{2 + 2z + z^2} = \frac{v}{c}. \quad (\text{A.27})$$

Como queremos uma equação para $z \ll 1$, então expandimos z ao redor de zero. Sabe-se que o polinômio de Taylor de primeira ordem é dado por

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (\text{A.28})$$

onde $f(x)$ é uma função diferenciável em x_0 .

Aplicamos o segundo termo do segundo membro da equação 2.29 no primeiro termo da equação A.27

$$f'(0)(z - 0) = \frac{(2 + 2z)(2 + 2z + z^2) - (z^2 + 2z)(2 + 2z)}{[(z + 1)^2 + 1]^2}, \quad (\text{A.29})$$

$$f'(0)(z - 0) = \frac{4}{4}z = z, \quad (\text{A.30})$$

de A.27 em A.30, vem

$$z = \frac{v}{c}. \quad (\text{A.31})$$

A equação A.31 é a fórmula reduzida para o *redshift* z quando se tem $v \ll c$.

Apêndice B

O Universo Observável

Consideremos uma galáxia longe o suficiente de tal forma que a métrica de Robertson-Walker possa ser utilizada. Nos posicionamos na origem de um sistema de referência e a galáxia possui coordenadas comóveis (r, θ, ϕ) . Fixamos um instante de tempo t , para encontrarmos a distância exata entre a galáxia e nós, visto que o universo está se expandido.

Defini-se a distância própria d_p entre dois pontos como sendo o comprimento da geodésica² espacial entre eles quando o fator de escala é fixado em um valor $a(t)$.

Ao longo da geodésica espacial entre o observador e a galáxia, as coordenadas θ e ϕ são fixas e a métrica de métrica de Robertson-Walker torna-se

$$ds = a(t)dr. \quad (\text{B.1})$$

A distância própria é obtida, integrando-se a equação B.1 anterior de 0 a r

$$d_p = a(t) \int_0^r dr = a(t)r, \quad (\text{B.2})$$

e sendo r constante, a velocidade de recessão, resulta em

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}r = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} d_p = H d_p, \quad (\text{B.3})$$

onde

$$H = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (\text{B.4})$$

A equação B.3 informa a velocidade que dois pontos no universo, separados por uma distância $d_p(t)$, estão se afastando naquele momento. Como estamos em um sistema de

²Geodésica é uma curva de menor comprimento que une dois pontos do espaço-tempo.

referência comóvel, então a posição é fixa, portanto, a equação anterior expressa a taxa em que o espaço entre os dois pontos aumenta.

Se a luz da galáxia foi emitida em um instante t_e e nós a detectamos no instante t_o e considerando que a luz viajou por uma geodésica nula em que $ds = 0$, e em um universo homogêneo e isotrópico não há deflexão, para um universo plano temos que a métrica de Robertson-Walker:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2, \quad (\text{B.5})$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr. \quad (\text{B.6})$$

Integrando a equação B.6 de t_e a t_o , vem

$$r = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{B.7})$$

De B.2 em B.7, vem

$$d_p(t_o) = a(t_o) \int_{t_o}^{t_e} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{B.8})$$

em que $d_p(t_o)$ é a distância própria atual.

Teoricamente, o objeto mais distante que podemos observar é aquele que emitiu luz em $t = 0$, e nos alcança em t_o . A distância que a luz percorre de 0 a t_o denomina-se distância de horizonte d_{hor} e é dada por

$$d_{hor}(t_o) = a(t_o) c \int_{t_o}^{t_e} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{B.9})$$

Objetos astronômicos com distâncias maiores do que a distância de horizonte não podem ser observados, pois a luz que eles emitiram não teve tempo de nos alcançar. O conjunto de pontos com distância menores do que a distância de horizonte forma o universo observável (Kolb et al., 1990; Andrew Liddle, 2003; Matts Roos, 2003; Barbara Ryden, 2003).

Apêndice C

A Relação entre *Redshif* e Fator de Escala

Denotamos λ_e como sendo o comprimento de onda no momento em que uma galáxia observada emitiu a luz e λ_0 o comprimento de onda captado por nós na Terra. Assim, a equação A.11 para o *redshift* torna-se

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (\text{C.1})$$

Quanto mais distante a galáxia se encontrar, mais tempo a luz por ela emitida irá gastar para nos atingir, isso implicará em maiores valores para o *redshift*. Podemos obter uma relação entre z e o fator de escala que não dependa do modelo cosmológico e de suas componentes.

Para isso, consideramos que se uma crista de onda é emitida por uma galáxia no instante t_e ela é observada por nós no instante t_0 . A coordenada radial r da fonte é dada por

$$r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{C.2})$$

A crista de onda consecutiva foi emitida pela galáxia no instante $t_e + \lambda_e/c$ e é captada por nós em $t_0 + \lambda_0/c$. Logo, a coordenada radial será dada por

$$r = c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{C.3})$$

igualamos C.2 e C.3

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{C.4})$$

simplificando os termos e subtraindo de cada membro da equação anterior o fator

$$\int_{t_0}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_0}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_0}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{C.6})$$

$$\int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{C.7})$$

Considerando que o instante de tempo entre a emissão sucessiva de duas cristas de onda pela galáxia, o universo não teve tempo para ter um aumento significativo, a alteração do fator de escala é desprezível, então o mesmo permaneceu praticamente constante e pode sair das integrais, assim temos

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt, \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{1}{a(t_e)} \left[t_e + \frac{\lambda_e}{c} - t_e \right] = \frac{1}{a(t_0)} \left[t_0 + \frac{\lambda_0}{c} - t_0 \right], \quad (\text{C.9})$$

$$\therefore \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}, \quad (\text{C.10})$$

mas se da equação C.1, temos

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1, \quad (\text{C.11})$$

então

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}. \quad (\text{C.12})$$

A expressão anterior relaciona *redshift* com o fator de escala. É possível obter a distância própria em função do *redshift*. Para isso tomamos a diferencial de z

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt} dt = -\frac{a_0}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) dt = -(1+z)H dt, \quad (\text{C.13})$$

note que no tempo atual t_0 considera-se que o fator de escala atual é $a_0 = 1$.

Tomando a equação da distância própria no tempo atual

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{a_0}{a} dt, \quad (\text{C.14})$$

de C.12 em C.14, temos

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} (1+z) dt, \quad (\text{C.15})$$

substituindo dt por dz com auxílio da equação C.13, chegamos a

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (\text{C.16})$$

A equação anterior informa a distância própria em função do *redshift*. Para objetos com z pequeno, ou seja, objetos próximos, podemos fazer $H \approx H_0$ e a equação anterior fica

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} z, \quad (\text{C.17})$$

que é a equação 2.2 para a Lei de Hubble (Kolb et al., 1990; Andrew Liddle, 2003; Matts Roos, 2003; Barbara Ryden, 2003).

Apêndice D

O Espectro de Corpo Negro

A matéria em estado gasoso emite espectro de linhas, os átomos que a formam estão afastados entre eles, de tal forma que podemos desprezar suas interações. Já a matéria escura quente, no estado condensado, emite luz em que o espectro é uma distribuição contínua de comprimentos de onda ao invés de um espectro de linhas (figura D.1).

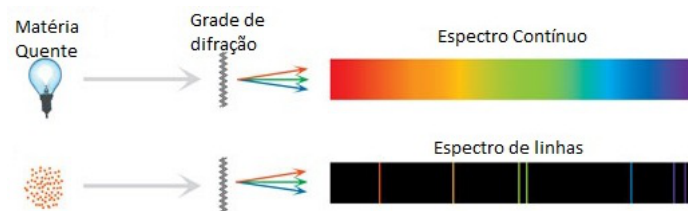


Figura D.1: O espectro contínuo e o espectro de linhas.

Defini-se corpo negro como sendo uma superfície ideal que absorve todos os comprimentos de onda da radiação eletromagnética que nela incide. Ela é também o melhor emissor de ondas eletromagnéticas para qualquer frequência. O espectro contínuo que tal superfície emite denomina-se espectro de corpo negro.

A intensidade I , a média temporal da taxa de variação de energia por unidade de área da superfície, emitida pela superfície do corpo negro ideal é dada pela lei de Stefan-Boltzmann

$$I = \sigma T^4, \quad (\text{D.1})$$

onde σ é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta em que I foi emitida.

A intensidade I não é uniforme ao longo de todos os comprimentos de onda. A distribuição de I pode ser medida e descrita por uma intensidade por intervalo de comprimento de onda $I(\lambda)$, denominada emitância espectral. A intensidade total, é a integral da função

distribuição $I(\lambda)$, sobre todos os comprimentos de onda, sendo igual a área embaixo da curva de $I(\lambda)$ contra λ

$$I = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda. \quad (\text{D.2})$$

A figura D.2 a seguir ilustra a emitância espectral para três temperaturas diferentes. Note que, cada curva apresenta um máximo λ_m denominado comprimento de onda de pico. Através da lei de Wien

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3} mK, \quad (\text{D.3})$$

é possível encontrar λ_m .

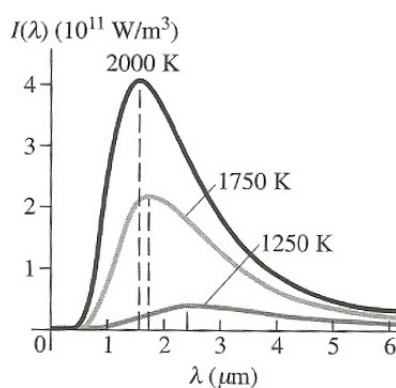


Figura D.2: Emitância espectral da radiação de corpo negro.

Note que, à medida que a temperatura aumenta, o máximo das curvas da emitância espectral torna-se cada vez mais elevado deslocando-se para comprimentos de ondas menores.

Max Planck (1858-1947), desenvolveu uma fórmula, hoje denominada lei da radiação de Planck, que concorda muito bem com as curvas experimentais da distribuição de intensidades

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda\sigma T} - 1)}, \quad (\text{D.4})$$

em que h é a constante de Planck e c a velocidade da luz.

A lei da radiação de Planck informa a intensidade $I(\lambda)$ por intervalo de comprimento de onda para um corpo negro ideal (Young et al., 2004).

Apêndice E

Uma Breve História da Evolução do Universo

Façamos um comentário breve das fases desta evolução.

- **Era Planck:** Período que vai desde o início do universo até épocas da ordem de 10^{-43} s, com uma temperatura de 10^{32} K. Nesta época, a teoria da gravitação da relatividade geral não é válida devido a necessidade de inclusão de efeitos quânticos.
- **Era da Inflação:** Do fim da era Planck até 10^{-32} s, tem-se a época da inflação que é o período em que o universo aumenta rapidamente o seu volume em um curto intervalo de tempo.
- **Era da Radiação:** É a fase de evolução do universo anterior a era da matéria fase que estamos atualmente. O campo de radiação na era da radiação dominava a taxa de expansão. Nesta época, todo o material estava completamente ionizado e a interação matéria-radiação era muito forte o que gerava forte acoplamento entre eles. Assim, os objetos astronômicos não tinham condições ainda de serem formados.
- **Era Recombinação:** Esta época possibilitou a formação do hidrogênio neutro que interage muito menos com a radiação. Essa é a fase em que radiação se desacopla da matéria.
- **Era da Matéria:** Período em que a temperatura do universo caiu abaixo de ≈ 3700 K. Houve a formação das galáxias. Começa a vida na Terra.

Apêndice F

Algoritmo I

```
pro cls_medios
vetor = dblarr(1,10)
cd, 'Diretório onde estão os  $D_\ell^{MC}$  dos 600 Monte Carlo'
openW, 1, 'Abri-se um arquivo .txt para guardar os valores médios  $\bar{D}_\ell^{MC}$ '
for j = 0., 9. do begin ; número de linhas dos arquivos Monte Carlo
c = 0.
soma = 0.
for i = 10001, 10600 do begin; número dos arquivos Monte Carlo
MCstring = strmid(string(i + 10000),4,4)
file= string(strcompress('cl_espectr_saida_' + MCstring + '.txt',/remove_all))
openr, 2, file
readf, 2, vetor
close, 2
soma = soma + vetor(0,j)
c = c + 1
endfor
media = soma/c
printF, 1, media
endfor
close, 1
end
```

Algoritmo II

```

pro sigmadois
vetor = dblarr(1,10)
 $\bar{D}_\ell^{MC}$  = dblarr(1,10)
cd, 'Diretório onde se encontra o arquivo dos  $\bar{D}_\ell^{MC}$  dos mapas Monte Carlo'
openR, 1, 'cl_mean.txt'
readF, 1,  $\bar{D}_\ell^{MC}$ 
close, 1
cd, 'Diretório onde estão os  $D_\ell^{MC}$  dos 600 Monte Carlo'
openW, 3, 'Local onde será salvo o arquivo que conterà os desvios padrões de cada  $D_\ell^{MC}$ '
for j = 0., 9. do begin; número de linhas dos arquivos Monte Carlo
c = 0.
soma = 0.
for i = 10001, 10600 do begin; número dos arquivos Monte Carlo
MCstring = strmid(string(i + 10000), 4, 4)
file= string(strcompress('cl_espectr_saida_' + MCstring + '.txt', /remove_all))
openr, 2, file
readf, 2, vetor
close, 2
soma = soma + (vetor(0,j) -  $\bar{D}_\ell^{MC}$ (0,j))^2
c = c + 1
endfor
 $\sigma_\ell$  = sqrt(soma/(c-1.))
printF, 3,  $\sigma_\ell$ 
endfor
close, 3
end

```

Algoritmo III

```

pro std
vetor = dblarr(1,10)
 $\sigma_\ell$  = dblarr(1,10)
 $\bar{D}_\ell^{MC}$  = dblarr(1,10)
cd, 'Diretório onde se encontram os arquivos para os  $\bar{D}_\ell^{MC}$  e seus respectivos desvios
padrões  $\sigma_\ell$ '
openR, 1, 'cl_std.txt'
readF, 1,  $\sigma_\ell$ 
close, 1
openR, 2, 'cl_mean.txt'
readF, 2,  $D_\ell^{MC}$ 
close, 2
cd, 'Diretório onde se encontram os  $D_\ell^{MC}$  para os Monte Carlo'
openW, 3, 'Diretório onde será salvo a faixa dos 95.4% dos  $D_\ell^{MC}$ '
for j = 0., 9. do begin; número de linhas dos arquivos Monte Carlo
c = 0.
 $\Gamma$  = 1.
while ( $\Gamma$  ne 9.) do begin
for i = 10001, 10600 do begin; número dos arquivos Monte Carlo
MCstring = strmid(string(i + 10000),4,4)
file = string(strcompress('cl_espectr_saida_' + MCstring + '.txt',/remove_all))
openr, 4, file
readf, 4, vetor
close, 4
 $\Xi$  =  $\Gamma * \sigma_\ell(0, j)$ ; enquanto o parâmetro  $\Gamma$  não produzir uma faixa que corresponde a 95.4%
a análise de  $D_{\ell+1}$  não é realizada
 $\Upsilon$  =  $\bar{D}_\ell^{MC}(0, j) + \Xi$ 
if vetor(0, j) le  $\Upsilon$  then begin
c = c + 1.
endif
endfor

```

```
razao = (c/600.)*100.; porcentagem dos valores de  $D_\ell$  menores ou iguais a  $\Upsilon$ 
print, razao
if razao eq 95.4 then begin; condição para que a faixa procurada seja salva
print, '***VALOR ACEITO (MUDE DE LINHA)***'; se a condição acima for aceita,
então passa-se para a análise de  $D_{\ell+1}$ 
endif
read,  $\Gamma$ , prompt='digite um novo  $\Gamma$ , ou 9 para mudar de linha :'
```

```
if razao eq 95.4 then begin
printF, 3,  $\Gamma$ ; faixa procurada correspondendo a 95.4% dos valores médios de  $D_\ell$ 
endif
c = 0.
endwhile
endfor
close, 3
end
```