

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Positivas
Definidas no Contexto Esférico Real

RAFAEL SOUZA BARBOSA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES.

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAFAEL SOUZA BARBOSA

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira

Funções Positivas Definidas no Contexto Esférico Real

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Área de Concentração: **Análise Funcional**

UNIFEI - ITAJUBÁ
Fevereiro/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Funções Positivas Definidas no Contexto Esférico Real

Dissertação aprovada por banca examinadora em fevereiro de 2018, conferido ao autor o título de **Mestre em Ciências Matemática.**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto - ICMC/USP

Profa. Dra. Mariza Stefanello Simsen - UNIFEI

Prof. Dr. Claudemir Pinheiro de Oliveira - Orientador

DEFESA: Dia 23 de fevereiro de 2018 às 14 horas.

RESULTADO: APROVADO.

UNIFEI - ITAJUBÁ

Fevereiro/2018

*Dedico este trabalho ao Prof. Elliott Ward Cheney (in memoriam)
por ele ter nos ensinado a beleza de sondar os problemas
que moram na superfície da esfera.*

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar por manter meu ânimo para que eu não desistisse do desafio de concluir este trabalho.

À minha família e aos meus amigos por sempre acreditarem em mim.

Ao Prof. Claudemir Pinheiro de Oliveira pela orientação, disposição, dedicação e paciência em todo processo de elaboração.

À minha companheira Camila que sempre esteve ao meu lado, dando-me incentivo e coragem para percorrer este certame.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo valioso apoio financeiro.

Muito obrigado!

RAFAEL

Resumo

Partindo da conhecida caracterização de função positiva definida feita por Shoenberg em 1942, estudamos condições em relação às quais uma função da classe de Shoenberg seja também estritamente positiva definida. O contexto da pesquisa envolve tão somente esferas unitárias reais de todas as dimensões. Este trabalho pode ser visto como uma coletânea dos resultados sobre o assunto das últimas décadas de pesquisa.

Palavras-chave e frases: Função positiva definida - Positividade estrita - Matriz semi-positiva definida

Abstract

Following the notion of positive definiteness introduced by Schoenberg in 1942, we study conditions on a function from Schoenberg's class in order that it be strictly positive definite. The study encompasses all possible dimensions for the spheres involved, but in the real setting only. This work can be seen as a systematic exposition of the results on the topic obtained in the past two decades.

Keywords and phrases: Positive definite function - Strict positive definiteness

Índice

Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Conceitos Fundamentais	3
2.1 Resultados técnicos	3
2.2 A esfera unitária	5
2.3 Harmônicos esféricos	7
2.4 Polinômios de Gegenbauer	9
2.5 Lema de Schur	12
2.6 Funções positivas definidas	15
2.7 Funções estritamente positivas definidas	19
2.8 Interpolação esférica	26
3 Funções Estritamente Positivas Definidas sobre Esferas	28
3.1 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^1	28
3.1.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^1	28
3.1.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^1	32
3.1.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^1	36
3.2 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^{q-1}	36
3.2.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^{q-1}	36
3.2.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^{q-1}	40
3.2.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^{q-1}	43
3.3 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^∞	47
3.3.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^∞	48
3.3.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^∞	48
3.3.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^∞	49
3.4 Considerações finais	50
Referências Bibliográficas	53

Índice Remissivo	56
Símbolos e Notações	57

Introdução

\mathcal{F} unções positivas definidas sobre esferas unitárias de todas as dimensões têm importância matemática, tanto do ponto de vista teórico quanto em aplicações. Elas são usadas em teoria probabilística, estatística espacial, processos estocásticos, interpolação, teoria da aproximação, análise complexa, análise de Fourier, teoria da aprendizagem, propriedades de núcleos positivos definidos ([4, 5, 6, 18, 21, 27, 31]).

Em Estatística Espacial, por exemplo, elas ocorrem como correlação de campos aleatórios homogêneos e partículas aleatórias em forma de estrela ([20]).

Na teoria do aprendizado, esta classe de funções ocorre em problemas envolvendo análise espectral fina de operadores integrais em situações em que espaços Hilbert de reprodução de funções esféricas, entram na formulação de problemas ([13]).

A aplicação matemática mais elementar dessas funções está relacionado ao problema de interpolação esférica, onde uma subclasse das funções acima citadas podem ser usadas para resolver de modo único os dados interpolantes. Como interpolação esférica é o primeiro passo para aproximação esférica, tais funções aparecem para compor as chamadas bases radiais conduzindo a resultados satisfatórios no estudo de aproximação de funções contínuas em domínios esféricos ([12]).

Para introduzir o problema que pretendemos estudar, partimos da conhecida caracterização das funções positivas definidas sobre esferas unitárias reais feita por Schoenberg em 1942 ([32]). Tal caracterização assegura que tais funções são expressas por expansões de Fourier uniformemente convergentes usando como base os polinômios de Gegenbauer, onde os coeficientes da função expandida são não negativos.

Nosso interesse é estudar a subclasse das funções positivas definidas formada pelas funções estritamente positivas definidas. Mais especificamente, nosso problema em foco consiste em

estudar condições em relação as quais uma função da classe de Schoenberg seja estritamente positiva definida.

Conforme veremos, este problema depende exclusivamente do conjunto de índices

$$K_q(f) := \{k \in \mathbb{Z}_+ : a_k^q(f) > 0\},$$

onde f é uma função da classe de Schoenberg e $a_k^q(f)$ são os coeficientes da expansão de f em termos dos polinômios de Gegenbauer. O inteiro positivo q nesta notação significa que o problema que estamos investigando depende da esfera unitária de \mathbb{R}^q . A questão exposta acima depende exclusivamente de $K_q(f)$ e não, de fato, dos valores que os coeficientes $a_k^q(f)$ assumem. Então, investigamos condições necessárias ou/e suficientes sobre $K_q(f)$ para que f seja estritamente positiva definida sobre a esfera unitária de \mathbb{R}^q .

Muitos pesquisadores se debruçaram sobre esta questão nas últimas décadas. Por exemplo, Xu e Cheney ([36, 37]), Ron e Sun ([30]), Menegatto ([23, 24], Menegatto e Sun([35]), Schreiner([33]). Este trabalho consiste em elencar os resultados mais relevantes por eles provados a respeito da questão destacada no final da página anterior.

Organizamos o trabalho em três capítulos. No capítulo subsequente, introduziremos conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho. Portanto, aí estudaremos aspectos teóricos relacionados ao tema tais como harmônicos esféricos, polinômios de Gegenbauer, Lema de Schur, passando pelo conceito de funções positivas definidas. Nesse capítulo, então, discorreremos sobre definições, exemplos e propriedades sobre os assuntos acima elencados. Faz parte desse capítulo, a introdução do problema de interpolação esférica, algo que motiva o estudo das funções que acima referimos.

O Capítulo 3, então, é dedicado ao estudo do problema destacado no final da página anterior, estudando em separado as esferas unitárias de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^q e ℓ^2 . Aqui, ℓ^2 denota o espaço vetorial real formado pelas sequências de quadrado somável. Aqui Finalizamos a dissertação mencionando outra família de funções esféricas diretamente relacionadas às funções positivas definidas, as condicionalmente negativas definidas.

Conceitos Fundamentais

Este é o capítulo dedicado aos conceitos principais envolvendo o tema da dissertação. A maioria das propriedades aqui estudadas serão diretamente aplicadas na abordagem do trabalho, enquanto outras serão listadas apenas por questão de completude ou porque trarão maior entendimento.

Será exibida a maioria das demonstrações, enquanto que outras serão substituídas por uma referência adequada. Os assuntos aqui abordados e outros são encontrados em [1, 12, 14, 16, 19, 25, 30, 32, 34].

2.1 Resultados técnicos

Reservamos para esta seção inicial os resultados técnicos que faremos uso em algum momento no decorrer do trabalho.

Recordamos preliminarmente a função que generaliza o conceito de produto fatorial para um número inteiro não negativo ([14, 22]).

Definição 2.1.1 *A função gama é definida pela integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Decorre, então, que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

O símbolo *Pochhammer*, introduzido por Leo August Pochhammer([29]), permite uma notação simplificada para expressões matemáticas que dependem de um produto sequencial. Então, para todo escalar real x

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

Em particular,

$$(-n)_k = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = n + 1, \dots$$

A conexão entre o símbolo Pochhammer e a função gama é

$$\Gamma(x+k) = (x)_k \Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \quad k = 0, 1, \dots$$

Consequentemente, podemos usar translados para estender a definição da função gama a valores negativos não inteiros. Por exemplo,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Recordamos com demonstração um resultado básico da Análise Complexa.

Lema 2.1.1 *Sejam n um inteiro positivo e l um inteiro não divisível por n . Se w é a n -ésima raiz primitiva da unidade, então $w^l + w^{2l} + \dots + w^{nl} = 0$.*

Demonstração: Seja w a n -ésima raiz primitiva da unidade. Como $1 - w^l$ é não nulo, a conclusão da demonstração segue da identidade

$$(1 - w^l)(w^l + w^{2l} + \dots + w^{nl}) = w^l(1 - w^{nl}),$$

juntamente com o fato que $1 - w^{nl} = 0$. ■

Note que o lema anterior tem o seguinte enunciado alternativo.

Lema 2.1.2 *Sejam n um inteiro positivo e l um inteiro não divisível por n . Se w é a n -ésima raiz primitiva da unidade, então $1 + w^l + w^{2l} + \dots + w^{(n-1)l} = 0$.*

Fechamos a seção recordando a independência linear de funções exponenciais.

Lema 2.1.3 *Se t_1, \dots, t_n são escalares distintos de $[0, \pi]$, então as funções $e^{i(\cdot)t_1}, \dots, e^{i(\cdot)t_n}$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Considere a hipótese a respeito de t_1, \dots, t_n e suponha que

$$c_1 e^{i(\cdot)t_1} + \dots + c_n e^{i(\cdot)t_n} = 0,$$

onde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Então, a matriz dos coeficientes do sistema linear

$$c_1 e^{ikt_1} + \dots + c_n e^{ikt_n} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

é uma Vandermonde de ordem n , cujo determinante é

$$\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (e^{it_\mu} - e^{it_\nu}) \neq 0,$$

provando o lema. ■

2.2 A esfera unitária

Nesta seção, introduzimos o domínio das funções envolvidas em nossa investigação, a esfera unitária do contexto real. Consideramos que essa parte do trabalho é auto explicativa. No entanto, para elucidar aos leitores interessados em examinar propriedades adicionais recomendamos as referências [14, 17].

A esfera unitária a que se refere o título da presente seção, depende do ambiente \mathbb{R}^q quando $q \geq 2$. Nesse caso, escrevemos \mathbb{R}^q para o espaço vetorial usual constituído das q -uplas de números reais $x = (x_1, \dots, x_q)$. O produto interno usual de \mathbb{R}^q será escrito como

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_q y_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^q.$$

A esfera unitária centrada na origem de \mathbb{R}^q é \mathbb{S}^{q-1} , isto é,

$$\mathbb{S}^{q-1} := \{x \in \mathbb{R}^q : \langle x, x \rangle = 1\}.$$

O conjunto \mathbb{S}^{q-1} torna-se um espaço métrico quando munido da distância geodésica definida por

$$d_q(x, y) := \arccos \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Consideramos também subesferas de \mathbb{S}^{q-1} . Sejam $y \in \mathbb{S}^{q-1}$ e $t \in [0, 1]$. A subesfera $\mathbb{S}_y^{q,t}$ de \mathbb{S}^{q-1} com raio $(1 - t^2)^{1/2}$ e polo y é a intersecção de \mathbb{S}^{q-1} com o hiperplano $\langle x, y \rangle = t$, $x \in \mathbb{S}^{q-1}$. Em símbolos,

$$\mathbb{S}_y^{q,t} := \{x \in \mathbb{S}^{q-1} : \langle x, y \rangle = t\}.$$

Especialmente, a subesfera $\mathbb{S}_y^{q,0}$ é uma cópia de \mathbb{S}^{q-2} mergulhada em \mathbb{S}^{q-1} e ortogonal a y e $\mathbb{S}_y^{q,1} = \{y\}$.

O seguinte lema técnico mostra como \mathbb{S}^{q-1} pode ser parametrizada em termos de um polo e de um elemento de $\mathbb{S}_y^{q,t}$.

Lema 2.2.1 *Seja y um elemento de \mathbb{S}^{q-1} e $t \in [0, 1)$. Então, o elemento x pertence a \mathbb{S}^{q-1} se e*

somente se existe x' em $\mathbb{S}_y^{q,t}$ tal que

$$x = \left(\langle x, y \rangle - t \frac{\sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2}}{\sqrt{1 - t^2}} \right) y + \frac{\sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2}}{\sqrt{1 - t^2}} x'. \quad (2.1)$$

Demonstração: Primeiramente notamos que cálculo direto mostra que todo elemento como em (2.1) pertence a \mathbb{S}^{q-1} .

Reciprocamente, seja $x \in \mathbb{S}^{q-1}$. Caso $x \in \mathbb{S}_y^{q,1} \cup \mathbb{S}_{-y}^{q,1}$, então (2.1) vale para x' arbitrariamente escolhido em $\mathbb{S}_y^{q,t}$. Para $x \in \mathbb{S}_y^{q,t}$, basta tomar $x' = x$ e quando $x \in \mathbb{S}_{-y}^{q,t}$, tome $x' = -x$. Assuma, então, que x é diferente de $\pm y$ e não é um elemento de $\mathbb{S}_y^{q,t} \cup \mathbb{S}_{-y}^{q,t}$. A projeção esférica de x sobre o equador $\mathbb{S}_y^{q,0}$ resulta em um vetor $x' \in \mathbb{S}_y^{q,0}$ tal que $x = \langle x, y \rangle y + \langle x, x' \rangle x'$. Como $\langle x', y \rangle = 0$ e $\langle x, x \rangle = 1$,

$$x = \langle x, y \rangle y + \sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2} x'. \quad (2.2)$$

Considerando

$$x' = ty + \sqrt{1 - t^2} x'' \quad (2.3)$$

em $\mathbb{S}_y^{q,t}$ e eliminando x' de (2.2) e (2.3), obtemos (2.1). ■

Em vista do que pretendemos relativo ao uso do lema anterior, destacamos a seguir observações decorrentes do mesmo. Para tanto, seja O_q o grupo dos operadores lineares ortogonais sobre \mathbb{R}^q , isto é,

$$O_q = \{\rho : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q : \rho \text{ é linear e } \rho\rho^* = I\},$$

onde I é o operador identidade sobre \mathbb{R}^q e ρ^* é o operador transposto de ρ .

Então, em relação ao lema anterior, valem as seguintes observações:

1. Quando $t = 0$ e o polo é $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, a primeira coordenada de $x' \in \mathbb{S}_{e_1}^{q,0}$ é nula. Logo, cada x' de $\mathbb{S}_{e_1}^{q,0}$ identifica-se com um ponto x'' de \mathbb{S}^{q-2} .
2. A observação anterior revela que a decomposição de $x \in \mathbb{S}^{q-1}$ como em (2.2) pode assumir a forma

$$x = \left(\langle x, e_1 \rangle, \sqrt{1 - \langle x, e_1 \rangle^2} x'' \right), \quad x'' \in \mathbb{S}^{q-2}.$$

Equivalentemente,

$$x = (\cos \theta, \sin \theta x''), \quad \theta = \arccos \langle x, e_1 \rangle \in [0, \pi], \quad x'' \in \mathbb{S}^{q-2}.$$

3. Seja $\rho \in O_q$ tal que $\rho y = e_1$. Então, segue de (2.2) que

$$\rho x = \langle x, y \rangle \rho y + \sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2} \rho x' = \langle x, y \rangle e_1 + \sqrt{1 - \langle x, y \rangle^2} \rho x',$$

onde $\langle x, y \rangle = \langle \rho x, e_1 \rangle$ e $\langle \rho x', e_1 \rangle = \langle \rho x', \rho y \rangle = \langle x', y \rangle = 0$ – Ou seja,

$$\rho x = \langle \rho x, e_1 \rangle e_1 + \sqrt{1 - \langle \rho x, e_1 \rangle^2} \rho x', \quad \rho x' \in \mathbb{S}_{e_1}^{q,0}.$$

Empregando a notação do item (2),

$$\rho x = (\cos \theta, \sin \theta \rho x'), \quad \theta = \arccos \langle \rho x, e_1 \rangle \in [0, \pi], \quad \rho x' \in \mathbb{S}_{e_1}^{q,0} \equiv \mathbb{S}^{q-2}.$$

■

Dentre estas observações, a do item (2) será a mais utilizada no trabalho.

2.3 Harmônicos esféricos

Nesta seção, introduzimos os polinômios harmônicos esféricos, sem contudo, adentrarmos demasiadamente em propriedades que os envolvem. As referências [12, 14, 17, 28], constituem boas leituras sobre o assunto.

Inicialmente, consideramos a medida usual de Lebesgue σ_q sobre \mathbb{R}^q normalizada sobre \mathbb{S}^{q-1} por

$$\omega_q := \int_{\mathbb{S}^{q-1}} d\sigma_q(x) = \frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma(\frac{q}{2})}. \quad (2.4)$$

A medida σ_q nos permite considerar $L^2(\mathbb{S}^{q-1})$, o espaço formado pelas funções reais σ_q -mensuráveis e de quadrado-integráveis sobre \mathbb{S}^{q-1} . O produto interno sobre esse espaço de Hilbert é

$$\langle f, g \rangle_q = \frac{1}{\omega_q} \int_{\mathbb{S}^{q-1}} f(x)g(x)d\sigma_q(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}^{q-1}).$$

Quando lidamos com funções de $L^2(\mathbb{S}^{q-1}, \sigma_q)$, a notação multi-índices facilita a descrição de fórmulas envolvendo-as. O termo *multi-índices* refere-se a uma q -uplas de inteiros não negativos da forma

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{Z}_+^q.$$

Então, a *norma do multi-índice* α é

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_q$$

e o fatorial de α é

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_q!$$

Os polinômios monômios em q coordenadas reais, agora, assumem a expressão

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_q^{\alpha_q}, \quad x \in \mathbb{R}^q.$$

Em particular, pelo teorema binomial o polinômio ([14])

$$(x_1 + \dots + x_q)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^q, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^q$$

é um elemento genuíno de Π^q , o espaço vetorial dos polinômios em q variáveis reais. Um elemento genérico deste espaço é da forma

$$p(x) := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^q, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^q,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}_+$.

Denotamos por \mathcal{P}_k^q , o subespaço de Π^q formado pelos polinômios homogêneos de grau k em q variáveis. Logo, um elemento deste espaço é da forma

$$p(x) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^q, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^q, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

satisfazendo $p(\lambda x) = \lambda^k p(x)$, $x \in \mathbb{R}^q$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

No que segue, o símbolo Δ_q denota o operador de Laplace usual em q variáveis reais dado por

$$\Delta_q = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_q^2}.$$

Consideramos \mathbb{H}_k^q , o subespaço de \mathcal{P}_k^q constituído pelos polinômios que são harmônicos, isto é, polinômios que estão no núcleo do operador laplaciano. Na notação de conjunto,

$$\mathbb{H}_k^q := \{p \in \mathcal{P}_k^q : \Delta_q(p) = 0\}.$$

Destacamos a seguir o espaço vetorial que dá nome à presente seção.

Definição 2.3.1 *O espaço dos harmônicos esféricos de grau k em q variáveis reais é a restrição \mathcal{H}_k^q dos elementos de \mathbb{H}_k^q à \mathbb{S}^{q-1} .*

No decorrer do trabalho, consideramos

$$\mathcal{H}_K = \bigoplus_{k \in K} \mathcal{H}_k^q,$$

onde K é um conjunto de inteiros não negativos.

Quando necessário, o conjunto

$$\{Y_k^1, \dots, Y_k^{d(q,k)}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.5)$$

denotará uma base ortonormal de \mathcal{H}_k^q relativo ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$. Aqui, denotamos por $d(q, k)$ a dimensão de \mathcal{H}_k^q como sendo ([28, p. 4])

$$d(q, k) := \frac{(2k + q - 2) \Gamma(k + q - 2)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(q - 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Exemplo 2.3.1 Os polinômios $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ e $\operatorname{Im}(x + iy)^k$ são harmônicos e homogêneos de grau k em 2 variáveis.

Os harmônicos esféricos desempenham sobre \mathbb{S}^{q-1} , o mesmo papel que as funções seno e cosseno desempenham no estudo de funções periódicas sobre \mathbb{S}^1 , uma vez que as restrições a \mathbb{S}^1 do exemplo anterior são harmônicos esféricos em 2 variáveis de grau k e

$$Y_k^1(\cos \theta, \sin \theta) = \cos k\theta \quad \text{e} \quad Y_k^2(\cos \theta, \sin \theta) = \sin k\theta$$

é uma base para o espaço \mathcal{H}_k^2 . Da mesma forma que funções com domínio \mathbb{S}^1 possuem expansão de Fourier em termos de $\{Y_k^1, Y_k^2 : k = 0, 1, \dots\}$, funções definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} possuem expansão de Fourier em termos dos harmônicos esféricos (2.5).

2.4 Polinômios de Gegenbauer

Estudamos, agora, os polinômios que são fundamentais ao estudo de funções positivas definidas no contexto esférico. As referências [1, 2, 14, 28, 34] são boas fontes de consulta de propriedades adicionais envolvendo esta classe de polinômios.

Os polinômios de Gegenbauer dependem do produto interno definido sobre o espaço vetorial real formado pelas funções contínuas reais de domínio $[-1, 1]$ dado por

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w_\lambda(x)dx,$$

onde $w_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$.

Para nosso propósito,

$$\lambda := \frac{q-2}{2}, \quad q = 2, \dots$$

Definição 2.4.1 Os polinômios de Gegenbauer P_k^λ associados a $q \geq 2$ e graus menor ou igual a k em $[-1, 1]$ são obtidos pela ortogonalização da base canônica $\{1, x, \dots, x^k\}$ via o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$, seguida da normalização

$$P_k^\lambda(1) = \frac{\Gamma(k+q-2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(q-2)} \quad e \quad P_k^0(1) = 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Eles satisfazem as igualdades ([14, p. 20])

$$\lim_{q \rightarrow 2^+} \frac{P_k^\lambda(\cos \theta)}{\lambda} = \frac{2 \cos k \theta}{k} := \frac{2P_k^0(\cos \theta)}{k} \quad e \quad P_k^1(\cos \theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \theta \in (0, \pi). \quad (2.6)$$

Introduzimos a Fórmula da Adição para polinômios de Gegenbauer, expressando a conexão entre estes polinômios e os harmônicos esféricos.

Proposição 2.4.1 (Fórmula da Adição) Se q um inteiro maior que 1, então

$$P_k^\lambda(\langle x, y \rangle) = \frac{\omega_q}{d(q, k)} \sum_{\mu=1}^{d(q, k)} Y_k^\mu(x) Y_k^\mu(y), \quad x, y \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Outra fórmula de adição envolvendo tão somente polinômios de Gegenbauer está no lema seguinte ([2, p. 30]).

Lema 2.4.1 Se θ, ϕ e γ são números reais, então

$$P_k^\lambda(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \gamma) = \sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda Q_k^l(\theta) Q_k^l(\phi) P_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \gamma),$$

onde

$$Q_k^l(\cdot) := \sin^l(\cdot) P_{k-l}^{\lambda+l}(\cos \cdot), \quad b_{0,k}^\lambda = 1, \quad b_{l,k}^\lambda := \frac{\Gamma(2\lambda-1) 2^{2l} [\Gamma(\lambda+l)]^2 (k-l)! (2\lambda+2l-1)}{[\Gamma(\lambda)]^2 \Gamma(2\lambda+l+k)}.$$

Finalizamos a seção com duas proposições relacionando propriedades operacionais clássicas dos polinômios de Gegenbauer que serão utilizadas no trabalho. Para tanto, sejam

$$c(j, k, l, q) := \frac{\Gamma((l-2)/2)(k-2j+(l-2)/2)\Gamma(\lambda+j-(l-2)/2)\Gamma(\lambda+k-j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda-(l-2)/2)\Gamma(k-j+l/2)}$$

e

$$b(k, l, j) := \frac{\Gamma(k+1)(k-2j+(l-2)/2)\Gamma((l-2)/2)\Gamma(l-2)}{\Gamma(j+1)2^k\Gamma(2k)\Gamma(k-j+l/2)}.$$

Recordamos que quando r é um escalar real, escrevemos $[r]$ para indicar o maior inteiro menor ou igual a r .

Proposição 2.4.2 *Seja q um inteiro maior que 1. Valem:*

(1) *Se $l \leq q$, então*

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c(j, k, l, q) P_{k-2j}^{(l-2)/2}(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

(2) *Se l é um inteiro positivo, então*

$$t^k = \sum_{j=0}^{[k/2]} b(j, k, l) P_{k-2j}^{(l-2)/2}(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

(3) $P_k^\lambda(-1) = (-1)^k P_k^\lambda(1)$, $k = 0, 1, \dots$

Demonstração: Veja [7, p. 147], [17, p. 92] e [34, p. 99]. ■

Proposição 2.4.3 *Seja q um inteiro maior que 2:*

(1) *Se $k = 0, 1, \dots$, então $|P_k^\lambda(\cos \theta)| \leq P_k^\lambda(1)$, $\theta \in [0, \pi]$.*

(2) *Se k é par positivo, então $P_k^\lambda(\cos \theta) = P_k^\lambda(1)$ se e somente se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.*

(3) *Se k é ímpar, então $P_k^\lambda(\cos \theta) = P_k^\lambda(1)$ se e somente se $\theta = 0$.*

(4) *Se k é ímpar, então $P_k^\lambda(\cos \theta) = -P_k^\lambda(1)$ se e somente se $\theta = \pi$.*

Demonstração: A proposição anterior, juntamente com (2.6), implicam que

$$P_k^\lambda(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{[k/2]} d(j, k, q) \cos(k-2j)\theta,$$

onde

$$d(j, k, q) = \begin{cases} 2 \frac{c(j, k, 2, q)}{k-2j}, & \text{se } k-2j \neq 0 \\ c(j, k, 2, q), & \text{se } k-2j = 0. \end{cases}$$

Como cada $d(j, k, q)$ é positivo e $-1 \leq \cos(k-2j)\theta \leq 1$,

$$-P_k^\lambda(1) = -\sum_{j=0}^{[k/2]} d(j, k, q) \leq P_k^\lambda(\cos \theta) \leq \sum_{j=0}^{[k/2]} d(j, k, q) = P_k^\lambda(1),$$

estabelecendo (1).

As provas das implicações diretas de (2) e (3) começam usando o fato que $d(j, k, q) > 0$ para

tirar da igualdade $P_k^\lambda(t) = P_k^\lambda(1)$, o sistema

$$\cos(k - 2j)\theta = 1, \quad j = 0, 1, \dots, [k/2], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Então, para investigar uma solução $\theta \neq 0$ destas equações, assumimos que k é par positivo. Por conseguinte, uma tal solução, também o é de $\cos 2\theta = 1$, $\theta \in (0, \pi]$, revelando que $\theta = \pi$. Analogamente, quando k é ímpar, qualquer solução do sistema anterior, também o será de $\cos \theta = 1$, $\theta \in (0, \pi]$, o que não ocorre. Assim, as afirmações diretas de (2) e (3) estão comprovadas. Como as recíprocas destas são claras, (2) e (3) estão provadas.

Analogamente, a demonstração de (4) recai na busca de uma solução para o sistema

$$\cos(k - 2j)\theta = -1, \quad j = 0, 1, \dots, [k/2], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Investiguemos uma solução destas equações quando K contém um ímpar. Consequentemente, uma tal solução, também o é de $\cos \theta = -1$, implicando que $\theta = \pi$. Como a recíproca é trivial, a proposição está provada. ■

2.5 Lema de Schur

Nesta seção, recordamos o Lema de Schur e propriedades matriciais relacionadas com esse lema. Por exemplo, faz parte desse estudo o conhecido produto de Hadamard para matrizes. As referências [12, 19] são suficientes para dirimir possíveis dúvidas sobre este assunto.

Denotamos, então, por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado pelas matrizes de ordem m por n com entradas reais. Aproveitamos para formalizar o conceito de matriz simétrica.

Definição 2.5.1 *Seja $A = (A_{\mu\nu}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Escrevemos A^t para a matriz obtida de A por transposição. Formalmente, $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $(A^t)_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. A matriz A é simétrica quando $m = n$ e $A = A^t$.*

Introduzimos a seguir a família de matrizes com as quais lidaremos na seção posterior e noutros lugares.

Definição 2.5.2 *Seja A uma matriz de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dizemos que A é semi-positiva definida quando*

$$c^t A c \geq 0, \quad c \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

Dizemos que A é positiva definida quando essa desigualdade é estrita sempre que c é não nula.

De modo mais explícito, a forma quadrática associada à $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ que aparece na definição acima, expressa-se como

$$c^t A c = \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu A_{\mu\nu} c_\nu, \quad c \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

Como $c^t A c \in \mathbb{R}$, $c^t A c = (c^t A c)^t = c^t A^t c$, implicando que

$$c^t A c = \frac{c^t A c + c^t A^t c}{2} = c^t \left(\frac{A + A^t}{2} \right) c, \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), c \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

Por conseguinte, não há perda de generalidade quando assumimos que a matriz da forma quadrática da Definição 2.5.2 é também simétrica.

O lema abaixo é um resultado técnico da teoria de matrizes, mostrando que aquelas que se encaixam na definição precedente decompõem-se num produto de outras duas matrizes.

Lema 2.5.1 *Seja A uma matriz simétrica de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Então, a matriz A é semi-positiva definida e simétrica se e somente se $A = Q^t Q$, para alguma $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Primeiramente, assuma que $c^t A c \geq 0$, $c \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e A é simétrica. Então, existem $P, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, sendo D diagonal, tais que $A = P^t D P$ ([19]). Em consequência, as matrizes A e D têm os mesmos autovalores. No entanto, se λ é um autovalor de A associado ao autovetor $v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, então

$$v^t A v = v^t \lambda v = \lambda \|v\|^2.$$

Agora, se A é semi-positiva definida, então $v^t A v \geq 0$. Como v é não nulo, vemos que λ é não negativo. Denotando os n autovalores de A , levando em conta sua multiplicidade, por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, segue que $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Portanto, a afirmação do lema ocorre para $Q = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$.

Reciprocamente, se $A = Q^t Q$, então $c^t A c = (c^t Q)(c^t Q)^t = \|c^t Q\|^2$, $c \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, terminando a demonstração do lema. ■

Decorre do lema anterior que toda matriz semi-positiva definida tem determinante não negativo. De fato, as matrizes positivas definidas são invertíveis com determinante positivo.

Lema 2.5.2 *Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simétrica e semi-positiva definida. A matriz A é positiva definida se e somente se seu determinante é positivo.*

Demonstração: Veja [19, p. 431]. ■

Definição 2.5.3 *Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. O produto de Hadamard das matrizes A e B é a matriz $A \circ B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, onde $(A \circ B)_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B_{\mu\nu}$.*

O resultado a seguir é conhecido na literatura como Lema de Schur, útil quando lidamos com produtos de matrizes semi-positiva definida.

Lema 2.5.3 *Sejam $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simétricas e semi-positivas definidas.*

(1) $A \circ B$ é semi-positiva definida.

(2) Se A é positiva definida e $B_{jj} > 0$, $j = 1, \dots, n$, então $A \circ B$ é positiva definida.

Demonstração: Suponha que A e B sejam matrizes satisfazendo a hipótese do enunciado. Pelo Lema 2.5.1, existem matrizes E e F tais que $A = E^t E$, $B = F^t F$. Logo, para $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$(A \circ B)_{jk} = (E^t E)_{jk} (F^t F)_{jk} = \sum_{\mu=1}^n E_{\mu j} E_{\mu k} \sum_{\nu=1}^n F_{\nu j} F_{\nu k} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (E_{\mu j} F_{\nu j}) (E_{\mu k} F_{\nu k}) = L_j^t L_k,$$

onde $L_j \in M_{1 \times n^2}(\mathbb{R})$ e é definida como

$$L_j^t := \left[E_{1j} F_{1j} \quad \cdots \quad E_{1j} F_{nj} \quad E_{2j} F_{1j} \quad \cdots \quad E_{2j} F_{nj} \quad \cdots \quad E_{nj} F_{1j} \quad \cdots \quad E_{nj} F_{nj} \right], \quad j = 1, \dots, n.$$

Segue que $A \circ B = C^t C$, onde C é a matriz quadrada de ordem n^3 em que sua primeira linha é $\left[L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n \right]$ e as demais linhas são nulas. Agora, a conclusão da demonstração do item (1) é consequência do Lema 2.5.1.

Para provar (2) suponha que $A > 0$ e $B_{jj} > 0$, $j = 1, \dots, n$. Sejam $\lambda_1 > 0$ o menor autovalor de A , $b > 0$ o menor elemento da diagonal de B e $c \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ não nulo. Como a matriz $A - \lambda_1 I$ possui autovalores não negativos, ela é semi-positiva definida e por (1) que $(A - \lambda_1 I) \circ B$ é semi-positiva definida. Então,

$$0 \leq c^t (A - \lambda_1 I) \circ B c = c^t (A \circ B) c - \lambda_1 c^t (I \circ B) c,$$

implicando que

$$c^t (A \circ B) c \geq \lambda_1 c^t (I \circ B) c = \lambda_1 \sum_{i=1}^n B_{ii} |c_i|^2 \geq \lambda_1 b \sum_{i=1}^n |c_i|^2 > 0,$$

concluindo a demonstração de (2). ■

Para o lema da sequência, recordamos que o posto de uma matriz corresponde ao maior número de linhas ou colunas da matriz formando um conjunto linearmente independente. Também, dado uma sequência real (a_{2k}) , consideremos a função par $f_e : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_e(\theta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} P_{2k}^\lambda(\cos \theta).$$

Lema 2.5.4 *Seja (a_{2k}) uma sequência real não negativa tal que $f_e(0) < \infty$. Se x_1, \dots, x_{2n} são pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} , formado de pares antipodais, então o posto de $(f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)])$ é menor ou igual a n .*

Demonstração: Sejam x_1, \dots, x_{2n} pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} formado por pares antipodais e mostraremos que o núcleo do operador $(f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)])$ contém n vetores linearmente independentes. Para tal, consideramos para cada $(\mu, \nu) \in \mathcal{J} = \{(j, k) : 1 \leq j < k \leq 2n, x_j = -x_k\}$, a matriz $v^{\mu\nu} \in M_{2n \times 1}(\mathbb{R})$, onde a μ -ésima linha é 1, ν -ésima linha é -1 e as demais linhas têm entradas nulas. Então, o conjunto $\{v^{\mu\nu} \in M_{2n \times 1}(\mathbb{R}) : (\mu, \nu) \in \mathcal{J}\}$ é linearmente independente. Em adição, para cada $(\mu, \nu) \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned} f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)]v^{\mu\nu}|_{l1} &= \sum_{k=1}^{2n} f_e[d_q(x_l, x_k)](v^{\mu\nu})_{k1} \\ &= f_e[d_q(x_l, x_\mu)] - f_e[d_q(x_l, x_\nu)] \\ &= f_e[d_q(x_l, x_\mu)] - f_e[d_q(x_l, -x_\mu)] = 0, \quad 1 \leq l \leq 2n. \end{aligned}$$

A demonstração finaliza, aplicando-se o Teorema do Núcleo e da Imagem. ■

A contraparte deste lema para funções ímpares depende igualmente de uma sequência real (a_{2k+1}) e da função $f_o : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_o(\theta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} P_{2k+1}^\lambda(\cos \theta).$$

Lema 2.5.5 *Seja (a_{2k+1}) uma sequência real não negativa tal que $f_o(0) < \infty$. Se x_1, \dots, x_{2n} são pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} , formados de pares antipodais, então o posto de $(f_o[d_q(x_\mu, x_\nu)])$ é menor ou igual a n .*

Demonstração: Esta demonstração segue os passos da anterior considerando $v^{\mu\nu} \in M_{2n \times 1}(\mathbb{R})$, onde suas μ -ésima e ν -ésima linhas têm entradas 1 e as demais linhas com entradas nulas. ■

2.6 Funções positivas definidas

Apresentamos, nesta seção, o principal conceito relacionado ao tema da nossa pesquisa, as funções positivas definidas no contexto esférico. As consultas para esta parte do trabalho foram tomadas de [12, 14, 16, 23] e de referências indicadas por eles.

Introduzimos a definição da classe de funções mencionadas no título dessa seção, onde a distância geodésica considerada na Seção 2.2 será usada.

Definição 2.6.1 Uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} quando

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu \geq 0,$$

quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. A função f é positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} quando ela o for de todas as ordens sobre \mathbb{S}^{q-1} .

O conceito acima está diretamente relacionado às propriedades da matriz de Gram de f .

Definição 2.6.2 Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. As matrizes dependentes de uma quantidade finita de pontos arbitrários em \mathbb{S}^{q-1} dada por

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1} \mapsto G_f := (f[d_q(x_\mu, x_\nu)]) \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad n = 1, \dots$$

é chamada Matriz de Gram de ordem n associada a f .

Recordando a Definição 2.5.2, dizer que f é positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} significa que as matrizes de Gram G_f de ordem n são semi-positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} . Portanto, a teoria estudada na Seção 2.5, especialmente o Lema de Schur, é diretamente aplicável às funções positivas definidas.

Exemplo 2.6.1 A função $\theta \in [0, \pi] \mapsto f(\theta) = \cos \theta$ é positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Verificação: Para $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$ e c_1, \dots, c_n , segue que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \langle x_\mu, x_\nu \rangle c_\nu = \left\| \sum_{\mu=1}^n c_\mu x_\mu \right\|^2,$$

implicando na afirmação do exemplo. ■

A seguinte generalização do exemplo precedente pode ser verificada pela definição, auxiliado pela Fórmula da Adição.

Exemplo 2.6.2 A função $\theta \in [0, \pi] \mapsto P_k^\lambda(\cos \theta) \in \mathbb{R}$ é positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} .

A classe das funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} formam um cone de funções no sentido do exemplo a seguir.

Exemplo 2.6.3 Se f e g são funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} e c é uma constante não negativa, então $f + g$ e cf são funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Verificação: Segue da definição. ■

Para efeitos da proposição a seguir, dado uma sequência real (a_k) , consideremos o núcleo $g : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$g(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^\lambda(\cos \theta) P_k^\lambda(\cos \phi), \quad \theta, \phi \in [0, \pi]. \quad (2.7)$$

Proposição 2.6.1 *Seja (a_k) uma sequência real de termos não negativos tais que $a_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, \pi]$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, então*

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu g(\theta_\mu, \theta_\nu) c_\nu \geq 0.$$

A forma quadrática é nula se e somente se $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Demonstração: Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n \in [0, \pi]$ e c_1, \dots, c_n escalares reais. Então,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu g(\theta_\mu, \theta_\nu) c_\nu = \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^\lambda(\cos \theta_\mu) P_k^\lambda(\cos \theta_\nu) c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\cos \theta_\mu) \right]^2,$$

de onde segue a não negatividade da forma. Como cada a_k é não negativo, esta forma é nula se e somente se

$$a_k \sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\cos \theta_\mu) = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

implicando que

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\cos \theta_\mu) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Uma vez que $\{P_0^\lambda(\cos \theta), P_1^\lambda(\cos \theta), \dots, P_{n-1}^\lambda(\cos \theta)\}$ gera o espaço dos polinômios n -dimensionais, a interpolação de n dados torna-se possível. Logo, existe um polinômio trigonométrico P pertencente a este espaço tal que ([15, p. 24])

$$P(\theta_\mu) = c_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Em consequência,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^n c_\mu P(\theta_\mu) = 0.$$

Assim, concluímos que $c_1 = \dots = c_n = 0$, finalizando a demonstração. ■

Outro resultado auxiliar semelhante ao anterior vem a seguir. Ele depende de um núcleo $h : \mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja definição envolve os polinômios trigonométricos Q_k^l como no Lema

2.4.1, duas sequências reais (a_k) de termos não negativos e $(b_{l,k}^\lambda)$ de termos positivos. Então,

$$h(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda Q_k^l(\theta) Q_k^l(\phi) P_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\langle x', y' \rangle), \quad x, y \in \mathbb{S}^{q-1},$$

onde $x = (\cos \theta, \text{sen } \theta x')$ e $y = (\cos \theta, \text{sen } \theta y')$, $x', y' \in \mathbb{S}_y^{q,0}$.

Proposição 2.6.2 *Sejam (a_k) e $(b_{l,k}^\lambda)$ como no parágrafo anterior. Se x_1, \dots, x_n são pontos de \mathbb{S}^{q-1} e c_1, \dots, c_n são escalares reais, então*

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu h(x_\mu, x_\nu) c_\nu \geq 0.$$

Ainda, se $a_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, então a forma é nula se e somente se $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Demonstração: Assuma que c_1, \dots, c_n são escalares reais e x_1, \dots, x_n sejam pontos de \mathbb{S}^{q-1} expressos na forma polar como na observação recorrente do Lema 2.2.1 – Ou seja,

$$x_\mu = (\cos \theta_\mu, \text{sen } \theta_\mu x'_\mu), \quad x'_\mu \in \mathbb{S}_y^{q,0}, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Definindo

$$d_{k,\mu}^l = c_\mu Q_k^l(\theta_\mu), \quad l = 1, \dots, k, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

vemos que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu h(x_\mu, x_\nu) c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda \left[\sum_{\mu, \nu=1}^n d_{k,\mu}^l P_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) d_{k,\nu}^l \right].$$

Usando a hipótese sobre as sequências envolvidas e levando em conta que a forma quadrática em destaque na última expressão é não negativa, segue que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu h(x_\mu, x_\nu) c_\nu \geq 0.$$

Para provar a última afirmação da proposição, note que a soma acima é nula se e somente se

$$a_k \sum_{\mu, \nu=1}^n d_{k,\mu}^l P_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) d_{k,\nu}^l = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Em particular,

$$0 = a_k \sum_{\mu, \nu=1}^n d_{k,\mu}^0 P_0^{\lambda-\frac{1}{2}}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) d_{k,\nu}^0 = a_k \sum_{\mu, \nu=1}^n d_{k,\mu}^0 d_{k,\nu}^0 = a_k \left[\sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\cos \theta_\mu) \right]^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Segue que, se $a_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, então pela proposição anterior, a última soma é nula se e somente se $c_1 = \dots = c_n = 0$. Assim, a demonstração da proposição está finalizada. ■

Finalizamos a seção apresentando a caracterização de função positiva definida esférica dada por Shoenberg em 1942 ([32]). Recordamos que quando q é um inteiro maior que 1, o parâmetro λ satisfaz $2\lambda = q - 2$.

Teorema 2.6.1 *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a função f é positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^q(f) P_k^\lambda(\cos \theta), \quad a_k^q(f) \geq 0, \quad f(0) < \infty.$$

Chamamos a atenção do leitor para o fato que a expansão de f como no teorema anterior será usada, sem menção, sempre que a função f satisfizer as propriedades descritas na hipótese.

2.7 Funções estritamente positivas definidas

Introduzimos aqui o conceito de funções estritamente positivas definidas. Propriedades gerais dessa subclasse das funções da seção precedente, também, são mencionadas. Para essa parte do trabalho, usamos as referências [12, 24, 37].

Iniciamos, formalizando essa classe de funções para o contexto esférico.

Definição 2.7.1 *Uma função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} quando*

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu > 0,$$

para quaisquer pontos distintos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos. A função f é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} quando ela o for de todas as ordens sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Aproveitamos o contexto para cotar um resultado bem geral que servirá para estudar, no Capítulo 3, a questão proposta no trabalho.

Proposição 2.7.1 *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} . Então, a função f é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se o conjunto $\{f[d_q(x_1, \cdot)], \dots, f[d_q(x_n, \cdot)]\}$ é linearmente independente, sempre que x_1, \dots, x_n são pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Segue dos lemas 2.5.1 e 2.5.2. ■

Duas propriedades para esta classe de funções estão presentes a seguir.

Proposição 2.7.2 *Sejam f e g funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} . Se f ou g é estritamente positiva definida, então fg e $f + g$ são estritamente positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: A demonstração para a soma segue da definição, enquanto a afirmação em relação ao produto é consequência da definição e do Lema de Schur. ■

Como mencionado na Introdução, a positividade estrita definida de funções representadas como no Teorema 2.6.1 depende exclusivamente de

$$K_q(f) = \{k \in \mathbb{Z}_+ : a_k^q(f) > 0\}$$

e não da magnitude dos coeficientes $a_k^q(f)$. De fato, isto será mostrado na sequência.

Proposição 2.7.3 *Sejam f e g funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^{q-1} tais que $K_q(f) = K_q(g)$. Então, a função f é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se g o é.*

Demonstração: Sejam x_1, \dots, x_n pontos de \mathbb{S}^{q-1} e escalares reais c_1, \dots, c_n . Pelo Teorema 2.6.1,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{k \in K_q(f)} a_k^q(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu$$

e

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu g[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{k \in K_q(g)} a_k^q(g) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu.$$

Como $K_q(f) = K_q(g)$, as formas acima são nulas se e somente se

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu = 0, \quad k \in K_q(f),$$

condição que independe da magnitude dos coeficientes na expansão de f e g . ■

A proposição acima motiva a definição subsequente.

Definição 2.7.2 *O subconjunto não vazio K de \mathbb{Z}_+ induz positividade estrita definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} se toda função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} tal que $K_q(f) = K$ for estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Para facilitar a linguagem, daqui por diante, quando K induzir positividade estrita definida no sentido da definição precedente, diremos simplesmente que ' K induz SPD'. A Proposição 2.7.4 é uma alternativa desta definição.

Proposição 2.7.4 *O conjunto K de \mathbb{Z}_+ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se a função a função*

$$\theta \in [0, 2\pi) \mapsto \kappa(\theta) = \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\cos \theta)$$

é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Demonstração: Para a demonstração da implicação direta, assuma K como na hipótese e considere a função κ como no enunciado da proposição. Pelo Exemplo 2.6.2, κ é contínua e positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Como $K_q(\kappa) = K$, pela Definição 2.7.2, κ é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Reciprocamente, assuma que K não induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Então, pela Definição 2.7.2, existe uma função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} , para a qual $K_q(g) = K$ que não é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Então, existem x_1, \dots, x_n pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} e escalares reais c_1, \dots, c_n não todos nulos tais que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu g[d_q(x_\mu, x_\nu)]c_\nu = \sum_{k \in K} a_k^q(g) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu = 0.$$

Pelo Exemplo 2.6.2, cada P_k^λ é positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Como $a_k^q(g) > 0$, $k \in K$, a igualdade anterior implica que a forma quadrática é nula se e somente se

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu = 0.$$

Consequentemente,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \kappa[d_q(x_\mu, x_\nu)]c_\nu = \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) c_\nu = 0,$$

finalizando a demonstração da proposição. ■

Como a Definição 2.7.2 entrará em muitas partes do trabalho, sendo, de fato, um conceito central dessa investigação, abaixo registramos observações decorrentes dela.

1. A letra K será reservada para denotar subconjuntos de \mathbb{Z}_+ .
2. Note que se K é não vazio, então K induz SPD de ordem 1 sobre qualquer esfera. Conforme veremos, o caso $n = 2$ por sua vez é particularmente importante (Veja, por exemplo, o Teorema 3.1.9).
3. Neste contexto, usamos a nomenclatura “ f é a função associada a K ” significando que

$$f(\theta) = \sum_{k \in K} a_k^q(f) P_k^\lambda(\cos \theta), \quad f(0) < \infty,$$

subentendendo-se, também, que $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} . A notação $K_q(f)$ significará que f tem essa natureza.

4. Não é difícil ver que se K induz SPD de ordem n , então K induz SPD de ordem $n - 1$.
5. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} , então K induz SPD sobre \mathbb{S}^{m-1} , sempre que $m < q$.

Quando $\theta_1, \dots, \theta_n$ são pontos distintos em $[0, 2\pi)$, consideramos $\mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, o espaço vetorial real gerado pelas exponenciais $\{e^{i(\cdot)\theta_1}, \dots, e^{i(\cdot)\theta_n}\}$. Como $\mathbb{E}(\theta_1) \subset \mathbb{E}(\theta_1, \theta_2) \subset \dots$, a união

$$\mathbb{E} := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

também é um espaço vetorial real.

Lema 2.7.1 *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$, pontos distintos em $[0, 2\pi)$ e E uma função não nula de $\mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Se E anula-se sobre K , então existe \mathcal{E} em $\mathbb{E}(0, t_2, \dots, t_n)$ anulando-se sobre K , cuja primeira parcela é 1 e $t_2, \dots, t_n \in [0, 2\pi)$.*

Demonstração: Seja E uma função não nula de $\mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, digamos

$$E(k) = \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} e^{ik\theta_{\mu}}.$$

Consideramos a parcela $c_{\mu_0} e^{ik\theta_{\mu_0}}$, onde $\theta_{\mu_0} = \min\{\theta_{\mu} : c_{\mu} \neq 0\}$ para expressar E na forma

$$E(k) = c_{\mu_0} e^{ik\theta_{\mu_0}} \sum_{\mu=1}^n \frac{c_{\mu}}{c_{\mu_0}} e^{ik(\theta_{\mu} - \theta_{\mu_0})}.$$

Se $E(k) = 0$, $k \in K$, então

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{c_{\mu}}{c_{\mu_0}} e^{ik(\theta_{\mu} - \theta_{\mu_0})}$$

também anula-se sobre K e a parcela μ_0 é 1. Portanto, a função

$$\mathcal{E}(k) = 1 + \sum_{\mu \neq \mu_0} \frac{c_{\mu}}{c_{\mu_0}} e^{ik(\theta_{\mu} - \theta_{\mu_0})}$$

satisfaz as condições do lema. ■

A Proposição 2.7.5 é uma ferramenta para se abordar a questão SPD quando $q = 2$.

Proposição 2.7.5 *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$, pontos distintos em $[0, 2\pi)$. São equivalentes:*

- (1) *O conjunto K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 .*
- (2) *Se E é uma função de $\mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ que se anula sobre K , então ela é identicamente nula.*

Demonstração: Consideramos a função f associada a K e $\theta_1, \dots, \theta_n$ pontos distintos em $[0, 2\pi)$. Então, os pontos $x_{\mu} = (\cos \theta_{\mu}, \sin \theta_{\mu})$ são distintos em \mathbb{S}^1 . Como $P_k^0(\langle x_{\mu}, x_{\nu} \rangle) = \cos k(\theta_{\mu} - \theta_{\nu})$,

um cálculo direto mostra que para escalares reais c_1, \dots, c_n ,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{k \in K} a_k^2(f) \left[\left(\sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos k\theta_\mu \right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin k\theta_\mu \right)^2 \right].$$

Equivalentemente,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{k \in K} a_k^2(f) |E(k)|^2,$$

onde

$$E(k) = \sum_{\mu=1}^n c_\mu e^{ik\theta_\mu}.$$

Portanto, a equivalência entre as afirmações (1) e (2) é clara. ■

A proposição que acabamos de provar motiva um resultado similar envolvendo \mathbb{E} e SPD de todas as ordens.

Proposição 2.7.6 *São equivalentes:*

- (1) O conjunto K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 .
- (2) Se E é uma função de \mathbb{E} que se anula sobre K , então ela é identicamente nula.

Também necessitamos de um resultado auxiliar para estudar SPD quando $q > 2$. Esse é o propósito da proposição que vem agora. Recordamos que o suporte de um funcional φ de $C(\mathbb{S}^{q-1})^*$ é

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{g \in C(\mathbb{S}^{q-1}) : \varphi(g) \neq 0\}},$$

onde a topologia considerada em $C(\mathbb{S}^{q-1})$ é a que provém da convergência uniforme.

Proposição 2.7.7 *Para $q > 2$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) O conjunto K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .
- (2) Para pontos distintos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$, não existe funcional linear não nulo $\varphi \in C(\mathbb{S}^{q-1})^*$ da forma

$$\varphi(f) = \sum_{\mu=1}^n c_\mu f(x_\mu), \quad f \in C(\mathbb{S}^{q-1}) \tag{2.8}$$

que tenha suporte finito e anula \mathcal{H}_K .

- (3) Para pontos distintos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$, as funções

$$x \in \mathbb{S}^{q-1} \mapsto \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\langle x, x_\mu \rangle), \quad \mu = 1, \dots, n$$

formam um conjunto linearmente independente.

- (4) Sejam c_1, \dots, c_n escalares reais e x_1, \dots, x_n pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} com representação

polar como na observação (2) recorrente do Lema 2.2.1. Se

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} Q_k^l(\theta_{\mu}) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'', x_{\mu}'' \rangle) = 0, \quad k \in K, \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad x'', x_{\mu}'' \in \mathbb{S}^{q-2},$$

então $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Demonstração: Para provar a equivalência entre (1) e (2), primeiro suponha que K não induz SPD. Então, pela Proposição 2.7.4, existem escalares c_1, \dots, c_n , não todos nulos tais que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_{\mu} \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^{\lambda}(\langle x_{\mu}, x_{\nu} \rangle) c_{\nu} = 0.$$

Então, pela Fórmula da Adição,

$$0 = \sum_{k \in K} \frac{\omega_q}{k! d(k, q)} \sum_{j=1}^{d(q, k)} \sum_{\mu, \nu=1}^n c_{\mu} Y_k^j(x_{\mu}) Y_k^j(x_{\nu}) c_{\nu} = \sum_{k \in K} \frac{\omega_q}{k! d(k, q)} \sum_{j=1}^{d(q, k)} \left(\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} Y_k^j(x_{\mu}) \right)^2.$$

A soma à direita é nula se e somente se

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} Y_k^j(x_{\mu}) = 0, \quad k \in K, \quad j = 1, \dots, d(q, k).$$

Segue que o funcional linear não nulo como em (2.8) tem suporte finito e $\varphi(p) = 0$, $p \in \mathcal{H}_K$.

Assim, o item (2) implica em (1).

A implicação de (1) para (2) é obtida invertendo a argumentação da demonstração acima.

Para mostrar que (2) e (3) são equivalentes, suponha que as funções

$$x \in \mathbb{S}^{q-1} \mapsto \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^{\lambda}(\langle x, x_{\mu} \rangle), \quad \mu = 1, \dots, n$$

são linearmente dependentes. Então, com auxílio da Proposição 2.4.1, podemos exibir escalares não nulos c_1, \dots, c_n tais que

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^{\lambda}(\langle x, x_{\mu} \rangle) = \sum_{k \in K} \frac{c(k, \lambda)}{k!} \sum_{j=1}^{d(q, k)} \left(\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} Y_k^j(x_{\mu}) \right) Y_k^j(x) = 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Como $\{Y_k^j : k \in K, j = 1, \dots, d(q, k)\}$ é base de \mathcal{H}_K ,

$$\sum_{\mu=1}^n c_{\mu} Y_k^j(x_{\mu}) = 0, \quad k \in K, \quad j = 0, 1, \dots, d(q, k).$$

Portanto, existe um funcional linear não nulo de suporte finito que se anula sobre \mathcal{H}_K , provando que (2) implica em (3).

Reciprocamente, suponha que exista escalares não nulos c_1, \dots, c_n tais que o funcional linear não nulo em (2.8) se anule sobre $\mathcal{H}_K = [\{Y_k^j : k \in K, j = 1, \dots, d(q, k)\}]$. Assim, pela Proposição 2.4.1, novamente, temos que

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\langle x, x_\mu \rangle) = 0,$$

provando a implicação de **(3)** e **(2)**.

Finalmente, para a equivalência entre **(3)** e **(4)**, suponha que **(4)** não ocorra. Então,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda Q_k^l(\theta_\mu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle \cdot, x_\mu'' \rangle) Q_k^l(\theta) \right] = 0, \quad \theta \in [0, \pi], x_\mu'' \in \mathbb{S}^{q-2},$$

para constantes reais não nulas c_1, \dots, c_n . Pelo Lema 2.4.1,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\langle x_\mu, \cdot \rangle) = 0, \quad x_\mu = (\cos \theta_\mu, \sin \theta_\mu x_\mu'') \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Portanto, o conjunto

$$\left\{ \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\langle \cdot, x_1 \rangle), \dots, \sum_{k \in K} \frac{1}{k!} P_k^\lambda(\langle \cdot, x_n \rangle) \right\}$$

é linearmente dependente que é o contrário da afirmação **(3)**.

Reciprocamente, se este conjunto é linearmente dependente, então existem c_1, \dots, c_n , não todos nulos, tais que

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k!} \sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x, x_\mu \rangle) = 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1},$$

onde x_1, \dots, x_n são pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} . Como \mathcal{H}_K é soma direta dos \mathcal{H}_k ,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu P_k^\lambda(\langle x, x_\mu \rangle) = 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}, k \in K.$$

Decompondo $x, x_\mu \in \mathbb{S}^{q-1}$ na forma polar como na observação recorrente do Lema 2.2.1 e empregando o Lema 2.4.1, obtemos

$$\sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda \left[\sum_{\mu=1}^n c_\mu Q_k^l(\theta_\mu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'', x_\mu'' \rangle) \right] Q_k^l(\theta) = 0, \quad k \in K.$$

Como para cada $k \in K$, o conjunto $\{Q_k^l : l = 0, 1, \dots, k\}$ é linearmente independente, a afirmação contrária de **(4)** está estabelecida. Assim, a demonstração da proposição está finalizada. ■

2.8 Interpolação esférica

Nesta seção, introduzimos o problema de interpolação esférica e os tipos de funções adequadas para a resolução de tal problema. Na realidade, trata-se da aplicação mais elementar da classe de funções tratadas na seção anterior. Portanto, um dos motivadores do estudo de tais funções.

Nas últimas décadas, interpolação de dados aleatórios associados a pontos de \mathbb{S}^{q-1} tem sido tema de muitos artigos em Teoria de Aproximação ([10, 11, 12, 16, 24, 23, 30, 37]). Em particular, a referência [11] descreve o estado atual da pesquisa referente ao método de interpolação aqui descrito.

A interpolação é o passo mais rudimentar no processo de aproximação de funções em qualquer contexto. Nos últimos anos tornou-se popular um método de interpolação usando funções esfericamente radiais sobre \mathbb{S}^{q-1} . Recordando a Seção 2.2, isto significa que estas funções são constantes sobre as subesferas $\mathbb{S}_y^{q,t}$. Tal método é descrito na sequência.

Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}^{q-1}$ e uma função

$$\varphi : \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

O problema de interpolação dos dados $(x_\mu, \varphi(x_\mu))$, $\mu = 1, \dots, n$, consiste em encontrar uma função $\psi : \mathbb{S}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$\psi(x) = \sum_{v=1}^n c_v f[d_q(x, x_v)], \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}$$

tal que $\psi(x_\mu) = \varphi(x_\mu)$, $\mu = 1, \dots, n$. Empregando notação matricial, este sistema linear torna-se

$$\begin{bmatrix} f[d_q(x_1, x_1)] & \cdots & f[d_q(x_1, x_n)] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f[d_q(x_n, x_1)] & \cdots & f[d_q(x_n, x_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_n) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Na expressão de ψ , a função f é sujeita à nossa escolha. Segue que o problema de interpolação acima tem única solução se e somente se a matriz interpolatória

$$(f[d_q(x_\mu, x_v)])$$

é não singular. Consequentemente, a escolha da função f pode facilitar ou complicar a resolução do problema de interpolação. Precisamente, vale o que segue.

Teorema 2.8.1 *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} . Então, o sistema linear (2.9) tem solução única para quaisquer dados se e somente se f é estritamente*

positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Demonstração: A demonstração é consequência dos lemas 2.5.1 e 2.5.2. ■

O teorema anterior revela a estreita relação entre interpolação e a classe de funções estudadas neste trabalho. Uma outra família de funções que são tão boas para a interpolação quanto as citadas acima, será descrita na última seção da dissertação, as funções condicionalmente estritamente negativas definidas.

Funções Estritamente Positivas Definidas sobre Esferas

Este é o capítulo final da dissertação, onde estudamos condições necessárias e/ou suficientes sob as quais K induz SPD sobre esferas de várias dimensões. Portanto, fazem parte desse capítulo, a investigação da questão a que nos propomos, envolvendo as esferas \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^{q-1} e \mathbb{S}^∞ . Nossos estudos foram baseados nas referências [8, 11, 14, 16, 23, 24, 25, 30, 33, 36, 37].

3.1 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^1

Muitas técnicas usadas nas provas a respeito de SPD sobre o círculo diferem das usadas em esferas de dimensão superior, mesmo que os resultados investigados em ambos os contextos possuam similitude. Devido a isso, separamos para esta seção, o estudo específico para \mathbb{S}^1 .

Como buscamos condições necessárias ou/e suficientes, convém subdividir o estudo em subseções, relacionando condições necessárias e condições suficientes, separadamente.

3.1.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^1

Elencamos aqui condições necessárias para que K induza SPD sobre \mathbb{S}^1 , o primeiro passo na direção de identificarmos a família de funções estritamente positivas definidas sobre \mathbb{S}^1 .

Iniciamos com um teorema coletado de [23, Theorem 2.2] datado de 1999.

Teorema 3.1.1 *Seja n um inteiro maior que 1. Se K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in [n/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)\}$ é não vazio.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que n é par e que $K \cap (n/2 + n\mathbb{Z}_+)$ seja vazia e prove-mos que K não induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 . Para tanto, sejam

$$x_\mu = \left(\cos \frac{2\mu\pi}{n}, \sin \frac{2\mu\pi}{n} \right), \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Se f é a função associada a K , então

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] &= \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^{\mu+\nu} \sum_{k \in K} a_k^2(f) P_k^0(d_2(x_\mu, x_\nu)) \\ &= a_0^2(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^{\mu+\nu} \\ &\quad + \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu \cos\left(\frac{2k(\mu-\nu)\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Como n é par, a primeira parcela à direita da igualdade acima é nula. Então, a forma quadrática torna-se

$$\sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) \left[\left(\sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \cos\left(\frac{2k\mu\pi}{n}\right) \right)^2 + \left(\sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu \operatorname{sen}\left(\frac{2k\mu\pi}{n}\right) \right)^2 \right].$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] &= \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) \left| \sum_{\mu=1}^n (-1)^\mu e^{i2k\mu\pi/n} \right|^2 \\ &= \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) \left| \sum_{\mu=1}^n e^{i2\mu\pi(k-n/2)/n} \right|^2. \end{aligned}$$

Nossa hipótese sobre K , implica que os inteiros $k - n/2$ não são divisíveis por n . Então, usando o Lema 2.1.1, concluímos que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] = 0,$$

implicando que f não é estritamente positiva definida. Para terminar a demonstração, suponha que n seja ímpar. Pela observação que segue a Definição 2.7.2, o conjunto K também induz SPD de ordem $n - 1$. Pela primeira parte da demonstração segue que a intersecção $K \cap ((n - 1)/2 + (n - 1)\mathbb{Z}_+)$ não é vazia. Como $(n - 1)/2 = [n/2]$, a afirmação do teorema está provada. ■

Corolário 3.1.1 *Seja m um inteiro maior que 1. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)\}$ é não vazio.*

Corolário 3.1.2 *Seja m um inteiro positivo. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in m\mathbb{Z}_+\}$ é não vazio. Em particular, K contém infinitos pares e infinitos ímpares.*

A recíproca destes corolários não valem. De fato, considere a função associada a \mathbb{Z}_+ dada por

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos 4k\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Para $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1) \in \mathbb{S}^1$, $f[d_2(x_1, x_2)] = f(0)$, implicando que a matriz $(f[d_2(x_\mu, x_\nu)])$ é singular e, pelo Lema 2.5.2, a função f não induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 .

Sob as mesmas condições do Corolário 3.1.2, Ron e Sun, em 1996, mostraram mais a respeito da cardinalidade de K . O teorema seguinte corresponde a primeira parte do Corollary 5.2 de [30].

Teorema 3.1.2 *Seja m um inteiro positivo. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in m\mathbb{Z}_+\}$ tem cardinalidade infinita.*

Demonstração: Considere

$$E(k) = \sum_{\mu=1}^m e^{i \frac{2(\mu-1)\pi}{m} k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Como os elementos de $\mathbb{Z}_+ \setminus m\mathbb{Z}_+$ não são divisíveis por m , recorrendo ao Lema 2.1.1, vemos que $E(l) = 0$, $l \in \mathbb{Z}_+ \setminus m\mathbb{Z}_+$. Por outro lado, o Corolário 3.1.2 revela que $K \cap m\mathbb{Z}_+$ é não vazio. Suponha, por absurdo, que $K \cap m\mathbb{Z}_+$ tenha cardinalidade c e sejam t_1, \dots, t_{c+1} , números reais distintos tais que

$$t_\nu + \frac{2l\pi}{c} \in [0, 2\pi), \quad t_\mu - t_\nu \neq \frac{2l\pi}{c}, \quad l = 0, 1, \dots, c-1, \quad \mu, \nu = 1, \dots, c+1.$$

O conjunto $\{e^{i(\cdot)t_1} E, \dots, e^{i(\cdot)t_{c+1}} E\}$ possui $c+1$ funções, estas restritas a $K \cap m\mathbb{Z}_+$, formam um conjunto linearmente dependente, implicando na existência de escalares reais r_1, \dots, r_{c+1} , não nulos, tais que

$$\sum_{\nu=1}^{c+1} r_\nu e^{ikt_\nu} E(k) = 0, \quad k \in K \cap m\mathbb{Z}_+.$$

Logo, a função

$$F(k) = E(k) \sum_{\nu=1}^{c+1} r_\nu e^{ikt_\nu}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

anula-se sobre $(K \cap m\mathbb{Z}_+) \dot{\cup} (\mathbb{Z}_+ \setminus m\mathbb{Z}_+)$ e, conseqüentemente, sobre K . Uma vez que

$$e^{ikt_\nu} E(k) \in \mathbb{E} \left(t_\nu, t_\nu + \frac{2\pi}{c}, \dots, t_\nu + \frac{2(c-1)\pi}{c} \right), \quad \nu = 1, \dots, c+1,$$

$$F \in \sum_{\nu=1}^{c+1} \mathbb{E} \left(t_\nu, t_\nu + \frac{2\pi}{c}, \dots, t_\nu + \frac{2(c-1)\pi}{c} \right) \subset \mathbb{E}.$$

Para finalizar a demonstração, resta mostrar que F não é identicamente nula. De fato, se este for o caso, então

$$F(c\eta) = E(c\eta) \sum_{v=1}^{c+1} r_v e^{ic\eta t_v} = 0, \quad \eta = 0, 1, \dots$$

Como $E(c\eta) \neq 0$, $\eta = 0, 1, \dots$, o somatório anterior é nulo. Pelo Lema 2.1.3, concluímos que $r_1 = \dots = r_{c+1} = 0$, contradizendo a escolha destas constantes. Finalmente, pela Proposição 2.7.6, o conjunto K não induz SPD sobre \mathbb{S}^1 . Portanto, a demonstração do teorema está finalizada. ■

Observamos que o resultado anterior torna-se mais refinado no sentido do teorema a seguir. A demonstração segue os passos da anterior.

Teorema 3.1.3 *Seja m um inteiro positivo. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in m(2\mathbb{Z}_+ + 1)\}$ tem cardinalidade infinita.*

Nosso teorema abaixo melhora a segunda parte do Corollary 5.2 de [30]. De fato, naquele é considerado apenas o caso em que m é par, enquanto que nesta versão o inteiro m pode ser ímpar. Além disso, uma demonstração mais simples que aquela será exibida.

Teorema 3.1.4 *Seja m um inteiro maior que 1. Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^1 , então $\{k \in K : k \in [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)\}$ tem cardinalidade infinita.*

Demonstração: Assuma que K induza SPD sobre \mathbb{S}^1 . Pelo Corolário 3.1.1, a intersecção $K \cap [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)$ é não vazia, sempre que $m > 1$. Suponha que para algum m maior que 1, a cardinalidade de $K \cap [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)$ seja finita. Logo, existe um inteiro não negativo r tal que $[m/2](1 + 2r)$ seja o maior inteiro de $K \cap [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)$. Aplicando o Corolário 3.1.1 uma vez mais, exibimos um inteiro não negativo s tal que

$$\left[\frac{m(3+2r)}{2} \right] (1+2s) \in K \cap \left[\frac{m(3+2r)}{2} \right] (1+2\mathbb{Z}_+) \subset K \cap \left[\frac{m}{2} \right] (1+2\mathbb{Z}_+).$$

Porém,

$$\left[\frac{m(3+2r)}{2} \right] (1+2s) > \left[\frac{m}{2} \right] (1+2r),$$

contrariando a maximilidade deste último em $K \cap [m/2](1 + 2\mathbb{Z}_+)$. Portanto, a afirmação do teorema vale. ■

Finalizamos a subseção tratando do caso $n = 2$. Observamos que o teorema comprova que conjuntos de cardinalidade 1 não induzem SPD de ordem 2 sobre nenhuma esfera.

Teorema 3.1.5 *Se K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 , então K contém um par e um conjunto de coprimos.*

Demonstração: Seja f a função associada a K e suponha que este induza SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 . Fixamos $x_1 \in \mathbb{S}^{q-1}$ e usamos o Lema 2.5.2 para ver que a matriz

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(d_2(x_1, x)) \\ f(d_2(x_1, x)) & f(0) \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$$

tem determinante positivo dado por

$$\left(\sum_{k \in K} a_k^2(f) \right)^2 - \left(\sum_{k \in K} a_k^2(f) \cos k\theta(x) \right)^2, \quad x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\},$$

onde $\theta(x) = \arccos \langle x_1, x \rangle$. Equivalentemente, para cada $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$,

$$\left[\sum_{k \in K} a_k^2(f) (1 - \cos k\theta(x)) \right] \left[\sum_{k \in K} a_k^2(f) (1 + \cos k\theta(x)) \right] > 0,$$

Como $a_k^2(f) > 0$, $k \in K$ e $0 \leq 1 + \cos \theta(x)$, $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$, a desigualdade anterior implica que

$$0 < \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) (1 - \cos k\theta(x)), \quad x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\} \quad (3.1)$$

e

$$0 < 2a_0^2(f) + \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) (1 + \cos k\theta(x)), \quad x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}. \quad (3.2)$$

A desigualdade (3.1) revela que o sistema

$$\cos k\theta(x) = 1, \quad k \in K \setminus \{0\}$$

não possui solução em $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$. Sejam $K \setminus \{0\} = \{k_1, \dots\}$ e $\bar{k}_\mu = \text{mdc}(k_1, \dots, k_\mu)$, $\mu = 1, \dots$. Então, $1 \leq \bar{k}_{\mu+1} \leq \bar{k}_\mu$ e existe o menor inteiro positivo r tal que $\bar{k}_r = \bar{k}_{r+\nu}$, $\nu = 1, \dots$. Então, $\theta = 2\pi/\bar{k}_r \in [0, \pi]$ é solução do sistema precedente, razão pela qual $\bar{k}_r = 1$. Assim, o conjunto $\{k_1, \dots, k_r\}$ é relativamente primo em K . Se $0 \in K$, então a demonstração finaliza. Suponha, então, que este não é o caso. Como $x = -x_1$ anula a soma em (3.2), caso K só contenha ímpares, segue que K contém um par positivo, a demonstração está terminada. ■

3.1.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^1

O tipo mais elementar de conjunto que induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} está descrito no teorema abaixo. Trata-se de um exemplo construído por Xu e Cheney de 1992 ([36]).

Teorema 3.1.6 *O conjunto $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 .*

Demonstração: Sejam x_1, \dots, x_n pontos distintos de \mathbb{S}^1 e considere f a função associada a $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$. Como $x_\mu = (\cos \theta_\mu, \sin \theta_\mu)$, para $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] c_\nu &= \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^2(f) \cos k(\theta_\mu - \theta_\nu) c_\nu \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^2(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \cos k\theta_\mu \cos k\theta_\nu c_\nu + \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^2(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sin k\theta_\mu \sin k\theta_\nu c_\nu. \end{aligned}$$

Desde que cada uma dessas parcelas é não negativa,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_2(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = 0$$

se e somente se

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^2(f) \left[\sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos k\theta_\mu \right]^2 = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^2(f) \left[\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin k\theta_\mu \right]^2 = 0.$$

Segue que

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu \sin k\theta_\mu = \sum_{\mu=1}^n c_\mu \cos k\theta_\mu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [n/2].$$

Pela propriedade de interpolação de Haar ([9, p. 2]), existe um polinômio trigonométrico P pertencente ao espaço gerado por $\{1, \sin \theta, \cos \theta, \dots, \sin [n/2]\theta, \cos [n/2]\theta\}$ tal que

$$P(\theta_\mu) = c_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Então,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^n c_\mu P(\theta_\mu) = 0,$$

implicando que $c_1 = \dots = c_n = 0$. ■

Observamos que o Teorema 3.1.6 permite a interpolação de até n dados, quantidade maior que a cardinalidade de K . Isto é devido ao fato que as funções bases seno e cosseno que aparecem na demonstração do teorema dão origem ao espaço vetorial dos polinômios trigonométricos, cuja dimensão é n .

Em adição, o Teorema 3.1.1 e o Teorema 3.1.6 revelam que translados de conjuntos não preservam a propriedade do conjunto induzir SPD. Por exemplo, quando $n \leq 8$, o conjunto

$$\{[n/2] + 1, [n/2] + 2, \dots, 2[n/2] + 1\} = \{0, 1, \dots, [n/2]\} + [n/2] + 1,$$

não induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 , confirmando a afirmação.

O resultado da sequência exige uma condição mais forte sobre K para garantir a interpolação da mesma quantidade de pontos que o teorema precedente. De fato, notamos que ele garante que $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$ interpola apenas $[n/2] + 1$ pontos.

Trata-se de um teorema de Ron e Sun de 1994. Nossa demonstração segue a sugerida por eles, entretanto, nosso contexto possibilita construí-la por uma linguagem clara e de fácil compreensão ([30]).

Teorema 3.1.7 *Se K contém n inteiros consecutivos, então K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 .*

Demonstração: Assuma que n é um inteiro maior que 1 e que K possua n inteiros consecutivos. Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$, distintos em $[0, 2\pi)$. Suponha, por absurdo, que K não induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 . Auxiliados pela Proposição 2.7.5 e o Lema 2.7.1, garantimos a existência de uma função não nula $E \in \mathbb{E}(0, \theta_2, \dots, \theta_n)$ da forma

$$E(k) = 1 + \sum_{\mu=2}^n c_{\mu} e^{ik\theta_{\mu}}$$

e que seja nula quando restrita a K . Para pesquisarmos uma contradição, considere o polinômio não nulo

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j, \quad a_j \in \mathbb{C},$$

cujas raízes são $\{e^{i\theta_{\mu}} : \mu \neq 1\}$. Este polinômio possibilita a definição do operador $p(\nabla)$ que atuando numa função g de uma variável resulta em

$$p(\nabla)(g)(\cdot) := \sum_{j=0}^{n-1} a_j g(\cdot + j).$$

Consequentemente,

$$p(\nabla)(E)(k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j E(k+j) = \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} e^{ik\theta_{\mu}} p(e^{i\theta_{\mu}}) = p(e^{i\theta_1}) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

No entanto, a hipótese sobre K e E implica que existe $k_0 \in K$ tal que

$$p(\nabla)(E)(k_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j E(k_0 + j) = 0,$$

uma contradição. Portanto, a conclusão do teorema vale. ■

Corolário 3.1.3 *O conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 .*

Corolário 3.1.4 *O conjunto \mathbb{Z}_+ induz SPD sobre \mathbb{S}^1 .*

Teorema 3.1.8 *Se K contém um par e um conjunto de coprimos, então K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 .*

Demonstração: Suponha que f é a função associada a K . Fixamos $x_1 \in \mathbb{S}^{q-1}$ e usamos o Lema 2.5.1 para ver que a matriz do início da demonstração do Teorema 3.1.5 tem determinante não negativo dado por

$$\left[\sum_{k \in K} a_k^2(f) (1 - \cos k\theta(x)) \right] \left[\sum_{k \in K} a_k^2(f) (1 + \cos k\theta(x)) \right] \geq 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Como $a_k^2(f) > 0$, $k \in K$ e $0 \leq 1 + \cos \theta(x)$, $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$, a desigualdade anterior implica que

$$0 \leq \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) (1 - \cos k\theta(x)), \quad x \in \mathbb{S}^1 \quad (3.3)$$

e

$$0 \leq 2a_0^2(f) + \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^2(f) (1 + \cos k\theta(x)), \quad x \in \mathbb{S}^1. \quad (3.4)$$

Assumimos que K contenha o par $2m$ e o conjunto relativamente primo $\{k_1, \dots, k_l\}$ e mostremos que as duas desigualdades acima são estritas quando $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$. De fato, primeiro usamos a Identidade de Bézout para encontrar inteiros q_1, \dots, q_l tais que $q_1 k_1 + \dots + q_l k_l = 1$. Se $\theta_d(x)$ é solução do sistema

$$\cos k\theta(x) = 1, \quad k \in K \setminus \{0\},$$

para algum $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$, então existem inteiros p_1, \dots, p_l tais que $k_\mu \theta_d(x) = 2p_\mu \pi$, $\mu = 1, \dots, l$. Consequentemente,

$$0 < \theta_d(x) = \theta_d(x) \sum_{\mu=1}^l q_\mu k_\mu = 2\pi \sum_{\mu=1}^l p_\mu q_\mu,$$

revelando que $\theta_d(x) \notin [0, 2\pi)$, contradizendo o fato que $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$. Portanto, a soma em (3.3) é positiva. Do mesmo modo, se $\theta_s(x)$ é solução do sistema

$$\cos k\theta(x) = -1, \quad k \in K \setminus \{0\}$$

para algum $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x_1\}$, existem inteiros p_1, \dots, p_l tais que $k_\mu \theta_s(x) = (2p_\mu + 1)\pi$, $\mu = 1, \dots, l$ e

$$0 < \theta_s = \pi \sum_{\mu=1}^l (2p_\mu + 1) q_\mu,$$

mostrando que $x = -x_1$ é a única possibilidade de solução de (3.4). Neste caso, a conclusão

segue, caso o par de K seja 0. Caso $0 \notin K$, o par de K é positivo, mostrando que $x \neq -x_1$. Portanto, o determinante do início desta demonstração é positivo e, devido ao Lema 2.5.2, o teorema está provado. ■

3.1.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^1

Iniciamos salientando que questão de

Encontrar uma condição necessária e suficiente sobre K para que ele induza positividade estrita definida sobre \mathbb{S}^1

foi adequadamente estudada nos artigos [3, 26]. Em nosso trabalho isto não será feito, uma vez que o contexto necessário é bem diferente deste.

Relativo a este problema, somente estudamos o caso $n = 2$ tirado do artigo [24] de Menegatto.

Teorema 3.1.9 *O conjunto K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 se e somente se K contém um par e um conjunto de coprimos.*

Demonstração: A implicação direta é o Teorema 3.1.5, enquanto que a demonstração da recíproca provém do Teorema 3.1.8. ■

Terminamos a seção observando que quando $n \geq 3$, desafortunadamente, a condição sobre K do Teorema 3.1.9 não é suficiente para que K induza SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^1 . Por exemplo, o conjunto $\{2, 3\}$ não induz SPD de ordem 4 sobre \mathbb{S}^1 . Isto pode ser verificado escolhendo-se 4 pontos igualmente espaçados sobre o círculo.

3.2 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^{q-1}

As condições sobre K estudadas na Seção 3.1 motivam a investigação de casos semelhantes na presente seção. A exemplo daquela, organizamos o estudo aqui nas subseções subsequentes. Em muitos lugares, este contexto contém, também, a esfera \mathbb{S}^1 .

3.2.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^{q-1}

Em resumo, esta parte da seção contém apenas um resultado que pode ser visto como motivador para a caracterização da classe de funções esféricas estritamente positivas definidas para $q > 2$. No entanto, dependemos da análise para $n = 2$.

Teorema 3.2.1 *Se K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^{q-1} , então K contém um par e um ímpar.*

Demonstração: Quando $q = 2$, a conclusão provém do Teorema 3.1.9. Para os demais casos, assumamos a hipótese sobre K e considere que f é sua função associada. Então, para $x_1 \in \mathbb{S}^{q-1}$, a matriz

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(d_q(x_1, x)) \\ f(d_q(x_1, x)) & f(0) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

é positiva definida quando $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$. Pelo Lema 2.5.2, seu determinante dado por

$$\left(\sum_{k \in K} a_k^q(f) P_k^\lambda(1) \right)^2 - \left(\sum_{k \in K} a_k^q(f) P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right)^2$$

é positivo quando $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$. Equivalentemente,

$$\left[\sum_{k \in K} a_k^q(f) \left(P_k^\lambda(1) - P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right) \right] \left[\sum_{k \in K} a_k^q(f) \left(P_k^\lambda(1) + P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right) \right] > 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}.$$

Como $a_k^q(f) > 0$, $k \in K$, $P_0^\lambda(\langle x_1, x \rangle) = P_0^\lambda(1)$ e $P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \leq P_k^\lambda(1)$,

$$0 < \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) (P_k^\lambda(1) - P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle)), \quad x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$$

e

$$0 < 2a_0^q(f) P_0^\lambda(1) + \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) \left(P_k^\lambda(1) + P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right), \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Particularmente, a penúltima desigualdade mostra que o sistema

$$P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) = P_k^\lambda(1), \quad k \in K \setminus \{0\}$$

não tem solução em $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$. No entanto, pela Proposição 2.4.3-(2), $x = -x_1$ é solução do sistema, sempre que k for um inteiro par. Por conseguinte, K contém um ímpar e a demonstração finaliza, caso $0 \in K$. Suponha, então, que este não é o caso. Então, a última desigualdade, implica que o sistema

$$P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) = -P_k^\lambda(1), \quad k \in K$$

também não tem solução em $x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}$. Como $x = -x_1$ é solução deste sistema quando k é ímpar, K contém um par não nulo. Assim, as duas conclusões acima revelam que K possui um inteiro par e um inteiro ímpar. ■

A versão do teorema acima quando $n \neq 2$ é o assunto tratado agora, cuja demonstração é devida a Menegatto, datando de 1999 ([24]). Como qualquer conjunto não vazio induz SPD de

ordem 1, o teorema é inválido para $n = 1$.

Teorema 3.2.2 *Seja n um inteiro maior que 1. Se K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} , então o conjunto $\{k \in K : k \geq [n/2] - 1\}$ contém um par e um ímpar.*

Demonstração: Assuma que K é como no enunciado do teorema e sejam x_1, \dots, x_n , pontos de \mathbb{S}^{q-1} escolhidos como sendo

$$x_\mu = \left(\cos \frac{2\mu\pi}{n}, \sin \frac{2\mu\pi}{n}, 0, \dots, 0 \right), \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Se f é a função associada a K , então

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] (-1)^\nu &= \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^{\mu+\nu} \sum_{k \in K} a_k^q(f) P_k^\lambda(d_q(x_\mu, x_\nu)) \\ &= a_0^q(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^{\mu+\nu} \\ &\quad + \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) P_k^\lambda(d_q(x_\mu, x_\nu)). \end{aligned}$$

Neste ponto da demonstração, primeiro, considere que n é par e devido ao teorema precedente, podemos assumir que n é maior que 2. Então, notando que a primeira parcela à direita da segunda igualdade acima é nula e aplicando a Proposição 2.4.2 - (1), obtemos

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] (-1)^\nu = \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) \sum_{j=0}^{[k/2]} c(k, 2, q, j) \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu P_{k-2j}^0(d_q(x_\mu, x_\nu)).$$

Como

$$\langle x_\mu, x_\nu \rangle = \cos \frac{2(\mu - \nu)\pi}{n}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n,$$

usando (2.6), chegamos a

$$\sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) \sum_{j=0}^{[k/2]} d(j, k, q) \sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu (-1)^\nu \cos \left(\frac{2(k-2j)(\mu - \nu)\pi}{n} \right),$$

onde

$$d(j, k, q) = \begin{cases} 2 \frac{c(k, 2, q, j)}{k-2j}, & \text{se } k-2j \neq 0 \\ c(k, 2, q, j), & \text{se } k-2j = 0. \end{cases}$$

Usando argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 3.1.1, obtemos

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n (-1)^\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] (-1)^\nu = \sum_{k \in K \setminus \{0\}} a_k^q(f) \sum_{j=0}^{[k/2]} d(j, k, q) \left| \sum_{\mu=1}^n e^{i2\mu(k-2j-n/2)\pi/n} \right|^2.$$

Caso $K \cap (n/2 + (n+2)\mathbb{Z}_+)$ é vazia, cada número da forma

$$k - 2j - \frac{n}{2}, \quad j = 0, \dots, \frac{n}{2}, \quad k \in K \setminus \{0\}$$

não é divisível por n . Pelo Lema 2.1.1, a forma quadrática é nula. Consequentemente, o conjunto K não induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Logo, se K é como na hipótese do teorema, ele contém um inteiro maior ou igual a $n/2$ e com a mesma paridade de $n/2$. Em particular, para $n = 2$, o conjunto K contém um ímpar e, pelo teorema precedente, este contém um par também. Assumimos, então, que n é um par maior que 2. Auxiliados pela observação recorrente da Definição 2.7.2, vemos que K induz SPD de ordem $n - 2$. Pela primeira parte desta demonstração, K contém um inteiro maior ou igual a $(n - 2)/2$ e da mesma paridade de $(n - 2)/2$. Combinando as duas conclusões anteriores, segue que K contém um par e um ímpar, ambos maiores ou iguais a $[n/2] - 1$. Para finalizar a demonstração, suponha n seja ímpar. Como n é maior que 1, a parte anterior da demonstração aplica-se para ao par positivo $n - 1$ e temos a mesma conclusão. ■

A propriedade de K conter infinitos pares e infinitos ímpares do Corolário 3.1.1 é confirmada, também, para $q > 2$.

Corolário 3.2.1 *Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} , então K contém infinitos pares e infinitos ímpares.*

Mais uma vez salientamos que a recíproca deste corolário não vale quando $q = 2$. Mostramos este fato, novamente, construindo um exemplo distinto do exibido na página 29. Seja m um inteiro positivo e considere que f é a função associada a $(2m + 1)\mathbb{Z}_+$ definida como

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k(2m+1))!} \cos k(2m+1)\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$ satisfazendo $d_2(x_1, x_2) = 2\pi/(2m + 1)$. Então, $f[d_2(x_1, x_2)] = f(0)$, revelando que o determinante da matriz $(f[d_2(x_\mu, x_\nu)])$ é nulo. Assim, pelo Lema 2.5.2, esta função não induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 .

Encerramos a seção com uma aplicação interessante do teorema anterior. A demonstração foi feita por Ron e Sun usando teoria de conjuntos totais desenvolvida por eles em [30]. Nossa demonstração a seguir é mais simples e até direta.

Teorema 3.2.3 *Para nenhum n maior que 1, o conjunto $\{0, 1, \dots, [n/2] - 1\}$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Suponha que para algum inteiro $n > 1$, o conjunto $\{0, 1, \dots, [n/2] - 1\}$ induza SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} . Pelo teorema anterior, este conjunto contém um par e um ímpar maiores ou iguais a $[n/2] - 1$, o que não ocorre. ■

3.2.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^{q-1}

Iniciamos com um tipo de conjunto bem elementar em se tratando de condição suficiente para $q \geq 2$. Apresentado por Xu e Cheney em 1992, sendo uma extensão do Corolário 3.1.3 para este contexto ([37]).

Teorema 3.2.4 *O conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Como caso $q = 2$ é o Teorema 3.1.7, assumamos $q > 2$. Sejam x_1, \dots, x_n pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} , expressos nas suas formas polares como nas observações posteriores ao Lema 2.2.1 como

$$x_\mu = (\cos \theta_\mu, \text{sen } \theta_\mu x''_\mu), \quad x''_\mu \in \mathbb{S}^{q-2}, \mu = 1, \dots, n.$$

Então,

$$\langle x_\mu, x_\nu \rangle = \cos \theta_\mu \cos \theta_\nu + \text{sen } \theta_\mu \text{sen } \theta_\nu \langle x''_\mu, x''_\nu \rangle.$$

Dá e do Lema 2.4.1,

$$P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) = \sum_{l=0}^k b_{l,k}^q Q_k^l(\theta_\mu) Q_k^l(\theta_\nu) P_l^{\lambda-\frac{1}{2}}(\langle x''_\mu, x''_\nu \rangle),$$

onde cada coeficiente $b_{l,k}^\lambda$ é positivo. Se f é a função associada a $\{0, 1, \dots, n-1\}$, então para escalares reais c_1, \dots, c_n ,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sum_{k=0}^{n-1} a_k^q(f) \sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda Q_k^l(\theta_\mu) Q_k^l(\theta_\nu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x''_\mu, x''_\nu \rangle) c_\nu.$$

Usando a função h da Proposição 2.6.2,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu h(x_\mu, x_\nu) c_\nu.$$

Pela mesma proposição, a soma anterior é nula se e somente se $c_1 = \dots = c_n = 0$. ■

Conforme já observamos, o teorema anterior garante que $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$ induz, apenas, SPD de ordem $[n/2] + 1$ sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Coube a Ron e Sun provarem que este conjunto induz SPD de ordem n , provando a versão do Teorema 3.1.6 em 1996 ([30]) para este contexto. Entretanto, o preço para tal foi desenvolver uma teoria baseada em uma construção algébrica envolvendo espaços totais e conjuntos fundamentais, conhecido na literatura como soluções mínimas para interpolação polinomial multivariável. Por essa razão, a demonstração do teorema da sequência não será desenvolvida como nos demais, uma vez que sua construção foge do contexto em que trabalhamos.

Teorema 3.2.5 *Se K contém $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$, então K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Convidamos ao leitor a examinar que em se tratando de inteiros consecutivos, este é o conjunto mais elementar possível para se interpolar n pontos, conforme foi comprovado no Teorema 3.2.3.

Mostramos, agora, como funções positivas definidas sobre uma certa esfera pode tornar-se SPD sobre esferas de dimensões inferiores que aquela.

Teorema 3.2.6 *Seja f uma função positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} tal que $K_q(f)$ contém os inteiros $2l$ e $2m+1$. Se $[n/2] \leq \min\{2l, 2m+1\}$, então $K_q(f)$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{p-1} , $p < q$.*

Demonstração: Usamos a Proposição 2.4.2 para ver que para cada θ em $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} f(\theta) = & a_{2l}^q(f) \sum_{\mu=0}^l c(\mu, 2l, p, q) P_{2l-2\mu}^{(p-2)/2}(\cos \theta) \\ & + a_{2m+1}^q(f) \sum_{\mu=0}^m c(\mu, 2m+1, p, q) P_{2m+1-2\mu}^{(p-2)/2}(\cos \theta) + \sum_{k \in K_q(f) \setminus \{2l, 2m+1\}} a_k^q(f) P_k^\lambda(\cos \theta). \end{aligned}$$

Como \mathbb{S}^{q-1} contém uma cópia de \mathbb{S}^{p-1} , a última parcela da igualdade acima é positiva definida sobre \mathbb{S}^{p-1} . Por outro lado, as duas primeiras parcelas referem-se a soma da expansão de uma certa função f tal que $a_\nu^p(f) > 0$, $\nu = 0, 1, \dots, \min\{2l, 2m+1\}$. Consequentemente, se $[n/2] \leq \min\{2l, 2m+1\}$, então $\{0, 1, \dots, [n/2]\}$ está contido em $K_p(f)$. Pelo teorema anterior, a função f é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{p-1} e, devido a Proposição 2.7.2, a função f também o é. ■

A seguir está a contraparte do Teorema 3.1.7 para $q > 1$, entretanto, a técnica usada nesta demonstração é bem outra. Além disso, o Teorema 3.2.4, também, pode, agora, ser visto como corolário deste.

Teorema 3.2.7 *Se K contém n inteiros consecutivos, então K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Assuma que x_1, \dots, x_n pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} e escolha um polo $y \in \mathbb{S}^{q-1}$ tal que $y \neq \pm x_\mu$ e $\langle x_\mu, y \rangle \neq \langle x_\nu, y \rangle$, $\mu \neq \nu$. Usando a decomposição

$$x_\mu = \cos \theta_\mu y + \sin \theta_\mu x'_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad x'_\mu \in \mathbb{S}_y^{q,0},$$

garantida por (2.2), segue que

$$\langle x_\mu, x_\nu \rangle = \cos \theta_\mu \cos \theta_\nu + \sin \theta_\mu \sin \theta_\nu \langle x'_\mu, x'_\nu \rangle.$$

Daí e do Lema 2.4.1, temos que

$$P_k^\lambda(\langle x_\mu, x_\nu \rangle) = \sum_{l=0}^k b_{l,k}^q Q_k^l(\theta_\mu) Q_k^l(\theta_\nu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle),$$

onde cada coeficiente $b_{l,k}^\lambda$ é positivo. Seja K como na hipótese e f a função associada a K . Então, para escalares reais c_1, \dots, c_n ,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu f[d_q(x_\mu, x_\nu)] c_\nu = \sum_{k \in K} \sum_{l=0}^k b_{l,k}^\lambda a_k^q(f) \sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu Q_k^l(\theta_\mu) Q_k^l(\theta_\nu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) c_\nu.$$

A forma anterior é nula se e somente se

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu Q_k^l(\theta_\mu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) c_\nu Q_k^l(\theta_\nu) = 0, \quad k \in K, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Usando a definição de Q_k^l , para cada $k \in K$, a igualdade anterior equivale a

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sin^l \theta_\mu \sin^l \theta_\nu P_{k-l}^{\lambda+l}(\cos \theta_\mu) P_{k-l}^{\lambda+r}(\cos \theta_\nu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) c_\nu = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Sabendo que $\{0, 1, \dots, n-1\} + r \subset K$, para algum inteiro não negativo r , fazendo $l = r$, segue que

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sin^r \theta_\mu \sin^r \theta_\nu P_k^{\lambda+r}(\cos \theta_\mu) P_k^{\lambda+r}(\cos \theta_\nu) P_r^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) c_\nu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Em consequência,

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n c_\mu \sin^r \theta_\mu \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^{r+\lambda}(\cos \theta_\mu) P_k^{r+\lambda}(\cos \theta_\nu) \right) \left(P_r^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) \right) c_\nu \sin^r \theta_\nu = 0.$$

Para analisar os somandos da forma anterior, use a Proposição 2.6.1 para ver que a matriz

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k^{r+\lambda}(\cos \theta_\mu) P_k^{r+\lambda}(\cos \theta_\nu) \right)$$

é positiva definida. Também, a matriz $\left(P_r^{\lambda-1/2}(\langle x'_\mu, x'_\nu \rangle) \right)$ é semi-positiva definida, cuja diagonal é $P_r^{\lambda-1/2}(1) > 0$. Então, pelo Lema 2.5.3, o produto de Hadamard destas duas matrizes é positivo definido e, da última igualdade, temos que

$$c_\mu \sin^r \theta_\mu = 0, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Como cada x_μ é distinto de y , pelo Lema 2.2.1, segue que $\sin \theta_\mu \neq 0$, $\mu = 1, \dots, n$, mostrando que $c_1 = \dots = c_n = 0$. Assim, a demonstração está finalizada. ■

Na sequência, cotamos uma condição suficiente para SPD de 1997. É o Teorema 5.1 de [33], onde ele está provado usando recursos matemáticos não elementares. Uma demonstração mais simples é como segue.

Teorema 3.2.8 *Se $\mathbb{Z}_+ \setminus K$ é finito, então K induz SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Assuma que K satisfaz a hipótese do teorema. Segue que existe um inteiro não negativo p para o qual, $p+1, \dots, p+n \in K$, $n = 1, \dots$. Pelo Teorema 3.2.7, K induz SPD de todas as ordens sobre \mathbb{S}^{q-1} . ■

Finalizamos a seção com o teorema de Menegatto abaixo, datado de 1999 ([24]).

Teorema 3.2.9 *Seja q um inteiro maior que 2. Se $2l, 2m+1 \in K$, então K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^{q-1} .*

Demonstração: Assuma que f é a função associada a K contendo $2l$ e $2m+1$. Segue daí e de $-P_k^\lambda(1) \leq P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \leq P_k^\lambda(1)$ que

$$a_k^q(f)(P_k^\lambda(1) - P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle)) \geq 0 \quad \text{e} \quad a_k^q(f)(P_k^\lambda(1) + P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle)) \geq 0, \quad k \in K, x \in \mathbb{S}^{q-1}.$$

Além disso, pela Proposição 2.4.3-(3)-(4),

$$a_{2m+1}^q(f)(P_{2m+1}^\lambda(1) - P_{2m+1}^\lambda(\langle x_1, x \rangle)) > 0 \quad \text{e} \quad a_{2l}^q(f)(P_{2l}^\lambda(1) + P_{2l}^\lambda(\langle x_1, x \rangle)) > 0, \quad x \in \mathbb{S}^{q-1} \setminus \{x_1\}.$$

Por conseguinte, o determinante da matriz (3.5) dado por

$$\left[\sum_{k \in K} a_k^q(f) \left(P_k^\lambda(1) - P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right) \right] \left[\sum_{k \in K} a_k^q(f) \left(P_k^\lambda(1) + P_k^\lambda(\langle x_1, x \rangle) \right) \right], \quad x \in \mathbb{S}^{q-1}$$

é positivo. Assim, a conclusão da demonstração segue do Lema 2.5.2. ■

3.2.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^{q-1}

Este é o ponto do trabalho, onde provamos a almejada condição necessária e suficiente sobre K para que o mesmo induza SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} . Provada em 2003, ela deve-se aos pesquisadores Chen, Menegatto e Sun ([8]). Na realidade, o contexto que eles trabalharam resolve definitivamente a questão para $q > 2$ e $q = \infty$. Embora, a demonstração da implicação direta deste teorema segue do Corolário 3.2.1, uma demonstração independente será exibida.

Teorema 3.2.10 *Seja q um inteiro maior que 2. O conjunto K induz SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se K contém infinitos pares e infinitos ímpares.*

Demonstração: Seja f a função associada a K decomposta na forma $f = f_e + f_o$, onde f_e e f_o são as partes par e ímpar de f definidas conforme as somas

$$f_e(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^q(f) P_{2k}^\lambda(\cos \theta) \quad \text{e} \quad f_o(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}^q(f) P_{2k+1}^\lambda(\cos \theta).$$

Suponha que $K \cap 2\mathbb{Z}_+$ é finito e seja

$$m = \text{máx} \{k \in \mathbb{Z}_+ : a_{2k}^q(f) > 0\}.$$

Como cada P_{2k}^λ é par de grau $2k$, existem números reais b_0, b_2, \dots, b_{2m} tais que

$$f_e(\theta) = \sum_{k=0}^m a_{2k}^q(f) P_{2k}^\lambda(\cos \theta) = \sum_{j=0}^m b_{2j} \cos^{2j} \theta, \quad b_{2m} \neq 0.$$

Sejam x_1, \dots, x_{2n} pontos distintos de \mathbb{S}^{q-1} , formados de pares antipodais tais que $1 + mq^{2m} < n$. Denotando por \mathfrak{p} a função que indica o posto de uma matriz, segue que

$$\mathfrak{p}(f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)]) = \mathfrak{p}\left(\sum_{j=0}^m b_{2j} \langle x_\mu, x_\nu \rangle^{2j}\right) \leq \sum_{j=0}^m \mathfrak{p}(b_{2j} \langle x_\mu, x_\nu \rangle^{2j}) \leq \sum_{j=0}^m \mathfrak{p}(\langle x_\mu, x_\nu \rangle^{2j}).$$

Logo, a conclusão desta parte da demonstração depende da análise do posto das matrizes $G_l = (\langle x_\mu, x_\nu \rangle^l)$. Diretamente, segue que $\mathfrak{p}(G_0) = 1$ e como $\{x_1, \dots, x_{2n}\} \subset \mathbb{R}^q$, também vale a desigualdade $\mathfrak{p}(G_1) \leq q$. Como G_1 é semi-positiva definida, o Lema de Schur revela que $\mathfrak{p}(G_{2j}) \leq q^{2j}$, $j = 0, 1, \dots, m$. Em consequência,

$$\mathfrak{p}(f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)]) \leq \sum_{j=0}^m q^{2j} \leq 1 + mq^{2m}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 2n.$$

Daí e do Lema 2.5.5,

$$\mathfrak{p}(f[d_q(x_\mu, x_\nu)]) \leq \mathfrak{p}(f_e[d_q(x_\mu, x_\nu)]) + \mathfrak{p}(f_o[d_q(x_\mu, x_\nu)]) \leq 1 + mq^{2m} + n < 2n,$$

implicando que a matriz $(f[d_q(x_\mu, x_\nu)])$ não tem posto completo e f não é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} . Analogamente se procede, caso $K \cap (2\mathbb{Z}_+ + 1)$ seja finito.

Para provar a recíproca, suponha que $K \cap 2\mathbb{Z}_+$ e $K \cap (2\mathbb{Z}_+ + 1)$ são infinitos. Sejam x_1, \dots, x_n pontos distintos em \mathbb{S}^{q-1} . Primeiramente, assuma que esses pontos são tais que os produtos

internos $\langle x_\mu, e_1 \rangle$ sejam distintos em $(-1, 1)$ e que

$$x_\mu = (\cos \theta_\mu, \text{sen } \theta_\mu x''_\mu), \quad x''_\mu \in \mathbb{S}^{q-2}, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

conforme a observação recorrente do Lema 2.2.1. Sejam escalares reais c_1, \dots, c_n tais que

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu Q_k^l(\theta_\mu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x''_\mu, x''_\mu \rangle) = 0, \quad k \in K, \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad x''_\mu, x''_\mu \in \mathbb{S}^{q-2}.$$

Em particular, quando $l = k$,

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu \text{sen}^k \theta_\mu P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_\mu, x''_\mu \rangle) = 0, \quad k \in K, \quad x''_\mu \in \mathbb{S}^{q-2}. \quad (3.6)$$

Para provar que os c_μ são nulos, procedemos por indução sobre a quantidade de pontos esféricos. Como $\text{sen } \theta_1$ é não nulo, o caso $n = 1$ torna-se trivial. Para $n \geq 2$, a presença de pontos antipodais podem ocorrer e, precisamos analisar tais situações. Primeiramente, suponha que $n = 2$ e $x_1 = -x_2$, implicando que $x''_1 = -x''_2$. Com auxílio da Proposição 2.4.2, quando $x'' = x''_1$, a igualdade (3.6) torna-se

$$0 = c_1 \text{sen}^k \theta_1 P_k^{\lambda-1/2}(1) + c_2 \text{sen}^k \theta_2 P_k^{\lambda-1/2}(-1) = (c_1 + (-1)^k c_2) \text{sen}^k \theta_1 P_k^{\lambda-1/2}(1).$$

A hipótese sobre K e o fato que $\text{sen}^k \theta_1 \neq 0$, revelam que $c_1 + c_2 = 0 = c_1 - c_2$, mostrando que $c_1 = c_2 = 0$. Assuma, agora, que o resultado vale para $n - 1$ pontos, onde $n > 3$, caso hajam pontos antipodais ou $n > 2$, caso contrário. Seja

$$\text{sen } \theta_{\mu_0} = \text{máx} \{ \text{sen } \theta_\mu : \mu = 1, \dots, n \}.$$

Aqui, subdividimos o restante da demonstração nos casos a seguir:

(1) O conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{\mu_0}\}$ não contém o ponto antipodal de x_{μ_0} .

(2) O conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{\mu_0}\}$ contém o ponto antipodal de x_{μ_0} .

Se ocorrer **(1)**, então $\text{sen } \theta_{\mu_0} > \text{sen } \theta_\mu, \mu_0 \neq \mu$. Tomando $x'' = x''_{\mu_0}$ e dividindo (3.6) por $\text{sen}^k \theta_{\mu_0} > 0$, obtemos

$$\sum_{\mu \neq \mu_0} c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^k P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle) + c_{\mu_0} P_k^{\lambda-1/2}(1) = 0, \quad k \in K.$$

Equivalentemente,

$$\sum_{\mu \neq \mu_0} c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^k \frac{P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_k^{\lambda-1/2}(1)} + c_{\mu_0} = 0, \quad k \in K.$$

Observamos que cada parcela da soma anterior é uma sequência indexada em K , cujo k -ésimo termo é

$$c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^k \frac{P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_k^{\lambda-1/2}(1)}.$$

Como $0 < (\text{sen } \theta_\mu / \text{sen } \theta_{\mu_0})^k < 1$ e $\left| P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle) \right| \leq P_k^{\lambda-1/2}(1)$, $k \in K$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^k \frac{P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_k^{\lambda-1/2}(1)} = 0, \quad \mu \neq \mu_0,$$

revelando que $c_{\mu_0} = 0$. A hipótese de indução, implica que $c_1 = \dots = c_n = 0$, neste caso.

Se (2) ocorrer com $x_{\mu_1} = -x_{\mu_0}$, então $\text{sen } \theta_{\mu_0} = \text{sen } \theta_{\mu_1} > \text{sen } \theta_\mu$, $\mu \neq \mu_0, \mu_1$ e $x''_{\mu_1} = -x''_{\mu_0}$. Escolhendo $x'' = x''_{\mu_0}$, vemos que (3.6) toma a forma

$$\sum_{\mu \neq \mu_0, \mu_1} c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^k \frac{P_k^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_k^{\lambda-1/2}(1)} + c_{\mu_0} + (-1)^k c_{\mu_1} = 0, \quad k \in K.$$

Consequentemente,

$$\sum_{\mu \neq \mu_0, \mu_1} c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^{2k} \frac{P_{2k}^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_{2k}^{\lambda-1/2}(1)} + c_{\mu_0} + c_{\mu_1} = 0, \quad 2k \in K$$

e

$$\sum_{\mu \neq \mu_0, \mu_1} c_\mu \left(\frac{\text{sen } \theta_\mu}{\text{sen } \theta_{\mu_0}} \right)^{2k+1} \frac{P_{2k+1}^{\lambda-1/2}(\langle x''_{\mu_0}, x''_\mu \rangle)}{P_{2k+1}^{\lambda-1/2}(1)} + c_{\mu_0} - c_{\mu_1} = 0, \quad 2k+1 \in K.$$

A mesma argumentação usando limite como na demonstração de (1), leva-nos a $c_{\mu_0} = c_{\mu_1} = 0$. Assim, a hipótese de indução revela que $c_1 = \dots = c_n = 0$. O término da demonstração requer, ainda, a análise do caso em que $\langle x_\mu, e_1 \rangle$ não são distintos em $(-1, 1)$. Nesse caso, seja $y \in \mathbb{S}^{q-1}$ tal que $y \neq \pm x_\mu$ e $\langle x_\mu, y \rangle \neq \langle x_\nu, y \rangle$, $\mu \neq \nu$. Consequentemente os pontos ρx_μ têm as mesmas propriedades que os pontos x_μ que conduziram a demonstração da parte anterior, a saber, $\rho x_\mu \neq \rho x_\nu$, $\mu \neq \nu$,

$$\rho x_\mu = (\cos \theta_\mu, \text{sen } \theta_\mu \rho x''_\mu), \quad \rho x'' \in \mathbb{S}_{e_1}^{q,0} \equiv \mathbb{S}^{q-2},$$

$$\langle \rho x_\mu, e_1 \rangle = \langle x_\mu, y \rangle \neq \langle x_\nu, y \rangle = \langle \rho x_\nu, e_1 \rangle, \quad \mu \neq \nu$$

e $\langle \rho x_\mu, e_1 \rangle \neq \pm 1$, $\mu = 1, \dots, n$. Segue que os passos da parte anterior desta demonstração podem ser imitados para ver que a igualdade

$$\sum_{\mu=1}^n c_\mu Q_k^l(\theta_\mu) P_l^{\lambda-1/2}(\langle x'', \rho x''_\mu \rangle) = 0, \quad k \in K, \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad x'', x''_\mu \in \mathbb{S}^{q-2}$$

nos conduz a $c_1 = \dots = c_n = 0$. Portanto, pelas duas partes provadas, a conclusão da demonstração segue da Proposição 2.7.7. ■

Também incluímos a contraparte do Teorema 3.1.9 quando $q > 2$, em que a condição exigida para K é ligeiramente diferente daquela. Portanto, trata-se da caracterização de funções estritamente positivas definidas de ordem 2 sobre \mathbb{S}^{q-1} .

Teorema 3.2.11 *Seja q um inteiro maior que 2. O conjunto K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se K contém um par e um ímpar.*

Demonstração: A parte direta da demonstração é o Teorema 3.2.1 e a recíproca é o Teorema 3.2.9. ■

3.3 Positividade estrita sobre \mathbb{S}^∞

A notação \mathbb{S}^∞ do título desta seção, refere-se a esfera unitária do espaço de Hilbert, o espaço vetorial real formado pelas sequências reais de quadrado somável que aqui denotamos simplesmente por ℓ^2 . Lembramos que

$$d_\infty(x, y) := \arccos \langle x, y \rangle_2, \quad x, y \in \mathbb{S}^\infty$$

é uma métrica sobre \mathbb{S}^∞ . A notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ é o produto interno usual de ℓ^2 .

Os resultados coletados aqui foram retirados de [10, 12, 23, 24]. Começamos, recordando a caracterização de funções positivas definidas sobre \mathbb{S}^∞ que é devido a Bingham e Schoenberg ([7, 32]).

Teorema 3.3.1 *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, a função f é positiva definida em todas as esferas \mathbb{S}^{q-1} se e somente se*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\infty(f) \cos^k \theta, \quad a_k^\infty(f) \geq 0, \quad f(0) < \infty.$$

A exemplo das seções anteriores, nesta, o conjunto K desempenha o mesmo papel, isto é, dado f como na soma acima,

$$K_\infty(f) = \{k \in \mathbb{Z}_+ : a_k^\infty(f) > 0\}.$$

Por outro lado, a qualquer conjunto de \mathbb{Z}_+ está associada uma função f como na expansão do teorema anterior.

3.3.1 Condições necessárias para \mathbb{S}^∞

Na verdade, o apresentado aqui consiste de um resumo de resultados provados ou mencionados nas seções anteriores.

Teorema 3.3.2 *Se K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^∞ , então $\{k \in K : k \geq [n/2] - 1\}$ contém um par e um ímpar.*

Demonstração: Seja K como na hipótese do teorema. Segue que K induz SPD de ordem n sobre qualquer \mathbb{S}^{q-1} . Portanto, pelo Teorema 3.2.2, o conjunto $\{k \in K : k \geq [n/2] - 1\}$ contém um par e um ímpar. ■

Corolário 3.3.1 *Se K induz SPD sobre \mathbb{S}^∞ , então K contém infinitos pares e infinitos ímpares.*

3.3.2 Condições suficientes para \mathbb{S}^∞

Um passo significativo neste contexto é devido a Cheney que em 1993 provou o teorema a seguir ([10]).

Teorema 3.3.3 *Se $m - 1, m \in K$, então este conjunto induz SPD de ordens menores que $m + 2$ sobre \mathbb{S}^∞ .*

Motivado por este teorema, em 1999 Menegatto melhorou a condição de Cheney no sentido de que os índices par e ímpar da hipótese, agora, não precisam ser consecutivos ([23]).

Teorema 3.3.4 *Se para inteiros não negativos l e m , $2l, 2m + 1 \in K$, então K induz SPD de ordens menores ou iguais a $\min\{2l, 2m + 1\} + 2$ sobre \mathbb{S}^∞ .*

Demonstração: Assuma a hipótese do teorema e considere $N = \max\{2l, 2m + 1\}$. Pela Proposição 2.7.2, basta mostrarmos que

$$f_N(\theta) = \sum_{k=0}^N a_k^\infty(f) \cos^k \theta$$

é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^∞ de ordens $n \leq \min\{2l, 2m + 1\} + 1$. De fato, pela Proposição 2.4.2,

$$f_N(\theta) = \sum_{k=0}^N a_k^\infty(f) \sum_{j=0}^{[k/2]} b(j, k, n) P_{k-2j}^{(n-2)/2}(\cos \theta), \quad b(j, k, n) > 0.$$

Então, a função f_N tem dois somandos da forma

$$\sum_{j=0}^l a_{2l}^\infty(f) b(j, 2l, n) P_{2(l-j)}^{(n-2)/2}(\cos \theta) + \sum_{j=0}^m a_{2m+1}^\infty(f) b(j, 2m + 1, n) P_{2(m-j)+1}^{(n-2)/2}(\cos \theta),$$

contendo $\min\{2l, 2m + 1\} + 2$ parcelas. Segue que $K_n(g_N)$. Como $n \leq \min\{2l, 2m + 1\} + 2$, a função dada pela soma destas duas parcelas tem o somando

$$g(\theta) = \sum_{r=0}^{n-1} c(r, l, m, n) P_r^{(n-2)/2}(\cos \theta), \quad c(r, l, m, n) > 0$$

que, pelo Teorema 3.2.4, é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{n-1} . Consequentemente, a função f_N é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{n-1} . Seguindo, se x_1, \dots, x_n são pontos distintos em \mathbb{S}^∞ , então o subespaço de ℓ^2 , gerado por $\{x_1, \dots, x_n\}$ tem dimensão menor ou igual a n . Assumimos que n é sua dimensão. Logo, os pontos x_1, \dots, x_n estão biunivocamente associados aos vetores canônicos $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{S}^{n-1}$, mediante um isomorfismo que preserva produto interno. Segue que a matriz

$$(f_N[d_\infty(x_\mu, x_\nu)]) = (f_N[d_n(e_\mu, e_\nu)])$$

é positiva definida sobre \mathbb{S}^∞ . Como f_N é um somando de f , pela Proposição 2.7.2, esta é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^∞ , finalizando a demonstração do teorema. ■

Corolário 3.3.2 *O conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^∞ .*

Corolário 3.3.3 *Se K contém infinitos pares e infinitos ímpares, então K induz SPD sobre \mathbb{S}^∞ .*

Teorema 3.3.5 *Se $\{k \in K : k \geq [n/2] - 1\}$ contém um par e um ímpar, então K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^∞ .*

Demonstração: Suponha que K contenha os inteiros $2l, 2m + 1$, ambos maiores ou iguais a $[n/2] - 1$. Agora, imitando os passos da demonstração anterior para $N = \max\{2l, 2m + 1\}$, concluímos que f possui o somando

$$g(\theta) = \sum_{r=0}^{[n/2]} d(r, l, m, n) P_r^{(n-2)/2}(\cos \theta), \quad d(r, l, m, n) > 0,$$

onde $[n/2] \leq \min\{2l, 2m + 1\} + 1$. No restante da demonstração, usam-se os mesmos argumentos do final da demonstração do teorema anterior. ■

3.3.3 Condição necessária e suficiente para \mathbb{S}^∞

O título acima sugere o que esta subseção conterà, um resumo das subseções 3.3.1 e 3.3.2.

Teorema 3.3.6 *Seja n um inteiro maior que 1. O conjunto K induz SPD de ordem n sobre \mathbb{S}^∞ se e somente se $\{k \in K : k \geq [n/2] - 1\}$ contém um par e um ímpar.*

Demonstração: A implicação direta é o Teorema 3.2.2, enquanto que a demonstração da recíproca vem do Teorema 3.3.5. ■

Teorema 3.3.7 *Seja $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A função f é estritamente positiva definida sobre \mathbb{S}^∞ se e somente se*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\infty(f) \cos^k \theta, \quad a_k^\infty(f) \geq 0, \quad f(0) < \infty$$

e $K_\infty(f)$ contém infinitos pares e infinitos ímpares.

Demonstração: Veja os teoremas 3.2.10 e 3.3.4. ■

A exemplo das seções anteriores, onde $n = 2$ foi separadamente trabalhado, segue a condição necessária e suficiente quando $n = 2$ sobre \mathbb{S}^∞ . Ela foi apresentada por Menegatto em 1999([24]) e, percebemos certa similitude com o Teorema 3.2.10, agora, para esferas de dimensões maiores.

Teorema 3.3.8 *Seja q maior que 1. O conjunto K induz SPD de ordem 2 sobre \mathbb{S}^∞ se e somente se K contém um par e um ímpar.*

Demonstração: A parte direta é o Teorema 3.2.1, enquanto que a demonstração da recíproca vem do Teorema 3.3.5. ■

3.4 Considerações finais

Conforme a exposição das seções que compõem este trabalho, nosso intuito foi o de produzir um material consistente contendo a evolução histórica da pesquisa sobre interpolação esférica e sua estreita relação com a classe das funções estritamente positivas definidas sobre esferas de todas as dimensões.

Guardamos para esta seção, a menção de outra família de funções que igualmente são escolhas alternativas de comprovado sucesso para resolver o problema de interpolação que foi descrita na Seção 2.8. Falamos das funções introduzidas a seguir([11, 23]).

Definição 3.4.1 *Uma função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é condicionalmente negativa definida de ordem $n > 1$ sobre \mathbb{S}^{q-1} quando $-g$ é positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} , sempre que o conjunto de escalares estiverem restritos ao hiperplano*

$$\left\{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{\mu=1}^n c_\mu = 0 \right\}. \quad (3.7)$$

A função g é condicionalmente negativa definida sobre \mathbb{S}^{q-1} quando ela o for de todas as ordens aí. A função g é estritamente condicionalmente negativa definida de ordem $n > 1$ sobre \mathbb{S}^{q-1} quando $-g$ é estritamente positiva definida de ordem n sobre \mathbb{S}^{q-1} , sempre que os escalares são não todos nulos no hiperplano (3.7). Ela é estritamente condicionalmente negativa definida sobre \mathbb{S}^{q-1} , quando o for de todas as ordens aí.

Agora, torna-se evidente a afirmação:

A função f é positiva definida sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se $c - f$ é condicionalmente negativa definida sobre \mathbb{S}^{q-1} , sempre que $c \in \mathbb{R}$.

Assim, esta afirmação e as seções anteriores possibilitam as classificações listadas na sequência. Notamos que os resultados elencados na sequência é um resumo do que foi estudado neste trabalho. Para tanto, usamos a normalização

$$p_k^\lambda = P_k^\lambda / P_k^\lambda(1).$$

Como antes, as sequências (a_k) que aqui aparecem são compostas de números reais como no Teorema de Schoenberg.

Teorema 3.4.1 *A função contínua $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente condicionalmente negativa definida de ordem 2 sobre \mathbb{S}^1 se e somente se*

$$g(\theta) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k [1 - \cos k\theta], \quad \sum_{k \in K} a_k < \infty,$$

onde K contém um par e um conjunto de coprimos.

Teorema 3.4.2 *A função contínua $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente condicionalmente negativa definida de ordem 2 sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se*

$$g(\theta) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k [1 - p_k^\lambda(\cos \theta)], \quad \sum_{k \in K} a_k < \infty,$$

onde K contém um par e um ímpar.

Teorema 3.4.3 *A função contínua $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente condicionalmente negativa definida sobre \mathbb{S}^{q-1} se e somente se*

$$g(\theta) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k [1 - p_k^\lambda(\cos \theta)], \quad \sum_{k \in K} a_k < \infty,$$

onde K contém infinitos pares e infinitos ímpares.

Teorema 3.4.4 *A função contínua $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente condicionalmente negativa definida sobre \mathbb{S}^∞ se e somente se*

$$g(\theta) = g(0) + \sum_{k \in K} a_k [1 - \cos^k \theta], \quad g(\pi/2) < \infty,$$

onde K contém infinitos pares e infinitos ímpares.

Não podemos finalizar a presente dissertação sem mencionar o Prof. E. W. Cheney (1929-2016), autor de belas técnicas de demonstrações que tivemos a oportunidade de aqui rememorar. Vem dele a herança que temos desta vertente da Análise Harmônica no Brasil, trazida pelo Prof. V. A. Menegatto, inicializador dessa área de pesquisa no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo em 1994, data de suas primeiras publicações e orientações. Somos gratos ao Prof. Cheney por ter nos ensinado tão bem a lição de observarmos os problemas que moram na superfície da esfera.

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, 1972.
- [2] R. Askey. *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania, 1975.
- [3] V. S. Barbosa and V. A. Menegatto. Strictly positive definite kernels on two-point compact homogeneous spaces, *Math. Ineq. Appl.*, v. 19, n. 2, 2016, pp. 743-756.
- [4] C. Berg and G. Forst. *Potencial Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [5] C. Berg; J. P. R. Christensen and P. Ressel. *Harmonic analysis on semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions*, Springer-Verlag, Salisbury, England, 1984.
- [6] R. Bhatia. *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007.
- [7] N. H. Bingham. *Positive Definite Functions on Spheres*, *Proc. Camb. Phil. Soc.* v. 73, 1973, pp. 145-156.
- [8] D. Chen; V. A. Menegatto and X. Sun. *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v.131, n. 9, 2003, pp. 2733-2740.
- [9] E. W. Cheney. *Multivariate Approximation Theory: Selected topics*, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1986.
- [10] E. W. Cheney and Y . Xu. A set of research problems in approximation theory, In *Topics in Polynomials of One and Several Variables and their Applications*, ed. by T. M. Rassias, H. M. Srivastava, and A. Yanushauskas, World Scientific Publishers, Singapore, 1992, pp. 109-123.

- [11] E. W. Cheney. Approximation using positive definite functions, Approximation Theory 8, C. K. Chui e L. L. Schumaker(eds.), World Scientific Publishing, 1995.
- [12] E. W. Cheney and W. Light. *A Course in Approximation Theory*, Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101. American Mathematical Society, Providence, 2009, 259.
- [13] F. Cucker and D.X. Zhou. *Learning theory: an Aproximation Theory Viewpoint with a Foreword by Stephen Smale*, Cambridge Monographs on Applied and Computaional Mathematics. Cambridge Univesity Press, Cambridge, 2007.
- [14] F. Dai and Y. Xu. *Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Balls*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2013.
- [15] P. J. Davis. *Interpolation and Approximation*, Blaisdell, New York, 1963, Reprint, Dover Publications, New York, 1975.
- [16] T. Gneiting. Strictly and no-strictly positive definite functions on spheres, Bernoulli, v. 19, n. 4, 2013, pp. 1327-1349.
- [17] H. Groemer. *Geometric Aplications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1996.
- [18] V. P. Havin and N. K. Nikolki. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences: Commutative Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [19] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1985.
- [20] C. Huang, H. Zhang and S. M. Robeson. On the validity of commonly used covariance and variogram functions on the sphere, Math. Geosci, v. 43, n. 6, 2011, pp. 721-733.
- [21] P. E. T. Jorgensena and R. Niedzialomski. Extension of positive definite functions, J. Math. Anal. Appl., v. 422, n. 1, 2015, pp. 712-740.
- [22] A. Kendall and H. Weimin. *Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction*, Springer Science and Business Media, v. 2044, 2012.
- [23] V. A. Menegatto. Stricly positive definite kernels on the Hilbert sphere, Appl. Anal., v. 55, n. 1-2, 1994, pp. 91-101.
- [24] V. A. Menegatto. Strict positive definiteness on spheres, Analysis, v. 19, 1999, pp. 217-233.

- [25] V. A. Menegatto and A.P. Peron. Positive definite kernels on complex spheres, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 254, n. 1, 2001, pp. 219-232.
- [26] V. A. Menegatto; C. P. Oliveira and A. P. Peron. Strictly positive definite kernels on subsets of the complex plane, *Comp. Math. Appl.*, v. 51. n. 8, 2006, pp. 1233-1250.
- [27] V. A. Menegatto; C. P. Oliveira and A. P. Peron. Differentiable positive definite kernels on spheres, *J. Appl. Anal.*, v. 15, n. 1, 2009, pp. 101-117.
- [28] C. Müller. *Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces*, Applied Mathematica Scienes, Springer, v. 129, 1998.
- [29] E. C. Oliveira. *Funções Especiais com Aplicações*, 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- [30] A. Ron and X. Sun. Strictly positive definite functions on spheres in euclidean spaces, *Math. Comp.*, v. 65, n. 216, 1996, pp. 1513-1530.
- [31] Z. Sasvári. *Positive Definite and Definitizable Functions, Mathematical Topics*, v. 2, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
- [32] I. J. Schoenberg. Metric spaces and positive definite functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 44, n. 3, 1938, pp. 522-536.
- [33] M. Schreiner. On a new condition for strictly positive definite functions on spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 125, n. 2, 1997, pp. 531-539.
- [34] G. Szegö. *Orthogonal polynomials*, v. 23, 4th ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, RI, 1975.
- [35] Xingping Sun and V. A. Menegatto. Strictly positive definite functions on the complex Hilbert sphere, *Adv. Comput. Math.*, v. 11, 1999, pp. 105-119.
- [36] Y. Xu. Positive definite functions on the unit sphere and integrals of Jacobi polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017.
- [37] Y. Xu and W. Cheney. Strictly positive definite functions on spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 116, n. 4, 1992, pp. 977-981.

Índice

- As funções exponenciais E , 22
- Base ortonormal para harmônicos esféricos, 9
- Distância geodésica sobre \mathbb{S}^{q-1} , 5
- Esfera de Hilbert, 47
- Esfera unitária de \mathbb{R}^q , 5
- Espaço de polinômios em \mathbb{R}^q , 8
- Espaço vetorial de matrizes reais, 12
- Fórmula da Adição, 10
- Fatorial de multi-índices, 8
- Função condicionalmente negativa definida, 51
- Função estritamente positiva definida, 19
- Função gama, 3
- Função negativa definida, 50
- Função positiva definida, 15
- Funções de Bingham-Schoenberg, 47
- Funções esfericamente radiais, 26
- Funções SPD sobre \mathbb{S}^{q-1} , 20
- Independência linear de exponenciais, 4
- Interpolação esférica, 26
- Lema de Schur, 14
- Métrica sobre a esfera de Hilbert, 47
- Matriz de Gram, 16
- Matriz semi-positiva definida, 12
- Matriz simétrica, 12
- Menor inteiro, 11
- Monômios multivariáveis reais, 8
- Multi-índices, 7
- Norma de multi-índices, 8
- Operadores ortogonais sobre \mathbb{R}^q , 6
- Polinômio de Gegenbauer, 10
- Polinômios homogêneos de grau n , 8
- Posto de uma matriz, 14
- Produto de Hadamard, 13
- Produto interno de ℓ^2 , 47
- Produto interno de \mathbb{R}^q , 5
- Propriedades dos polinômios no disco, 11
- Raiz n -ésima da unidade, 4
- Símbolo Pochhammer, 3
- Sequências reais de quadrado integrável, 47
- Subesferas, 5
- Suporte de funcional, 23

Símbolos e Notações

Γ	Função gama usual
\mathbb{R}^q	Espaço euclidiano real q -dimensional
\mathbb{S}^{q-1}	Esfera unitária de \mathbb{R}^q centrada na origem
d_q	Distância geodésica sobre \mathbb{S}^{q-1}
$\mathbb{S}_y^{q,t}$	Subesfera de \mathbb{S}^{q-1}
O_q	Grupo dos operadores ortogonais sobre \mathbb{R}^q
ρ^*	Adjunto do operador $\rho \in O_q$
σ_q	Medida usual de Lebesgue sobre \mathbb{R}^q
$L^2(\mathbb{S}^{q-1})$	Espaço vetorial real de funções σ_q -mensuráveis quadrado-integráveis sobre \mathbb{S}^{q-1}
α	Multi-índice com q coordenadas em \mathbb{Z}_+
Π^q	Espaço vetorial dos polinômios em q variáveis reais
\mathcal{P}_ν^q	Subespaço de Π^q formado pelos polinômios ν -homogêneos em q variáveis
Δ_q	Operador de Laplace em q componentes
\mathbb{H}_ν^q	Subespaço de polinômios em \mathcal{P}_ν^q que são harmônicos
\mathcal{H}_ν^q	Espaço dos harmônicos esféricos
Y_ν^j	Elemento da base de \mathcal{H}_ν^q
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos inteiros não negativos
$d(q, \nu)$	Dimensão de \mathcal{H}_ν^q
P_k^λ	Polinômio de Gegenbauer de grau k associado ao parâmetro $\lambda > -1/2$
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$	Espaço vetorial formado pelas matrizes de ordem m por n com entradas reais
A^t	Transposta da matriz A
$C(\mathbb{S}^{q-1})$	Espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em \mathbb{S}^{q-1}
$\mathbb{E}(\theta_1, \dots, \theta_n)$	Espaço vetorial real gerado por exponenciais
ℓ^2	Espaço das sequências reais de quadrado somável
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno sobre \mathbb{R}^q
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$	Produto interno funções contínuas
$\langle \cdot, \cdot \rangle_q$	Produto interno sobre $L^2(\mathbb{S}^{q-1}, \sigma_q)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$	Produto interno sobre ℓ^2