

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Estudo de Escoamentos Turbulentos em torno  
de um Corpo Rombudo de Superfície  
Hidraulicamente Lisa ou Rugosa Utilizando o  
Método de Vórtices Discretos**

**Autor: Alex Mendonça Bimbato**

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira**

**Co-Orientador: Prof. Ph.D. Miguel Hiroo Hirata**

Itajubá, 24 de Agosto de 2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Estudo de Escoamentos Turbulentos em torno  
de um Corpo Rombudo de Superfície  
Hidraulicamente Lisa ou Rugosa Utilizando o  
Método de Vórtices Discretos**

Autor: **Alex Mendonça Bimbato**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira**

Co-Orientador: **Prof. Ph.D. Miguel Hiroo Hirata**

Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Agosto de 2012

M.G. – Brasil

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –  
Bibliotecária Cristiane N. C. Carpinteiro- CRB\_6/1702

B611e

Bimbato, Alex Mendonça

Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos. / por Alex Mendonça Bimbato. -- Itajubá (MG) : [s.n.], 2012.

165 p.: il.

Orientador : Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira.

Coorientador : Prof. Dr. Miguel Hiroo Hirata.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Modelo de superfície rugosa. 2. Modelo submalha. 3. Aerodinâmica de corpos rombudos. 4. Método de painéis. 5. Método de vórtices discretos. I. Pereira, Luiz Antonio Alcântara, orient. II. Hirata, Miguel Hiroo, coorient. III. Universidade Federal de Itajubá. IV. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Estudo de Escoamentos Turbulentos em torno  
de um Corpo Rombudo de Superfície  
Hidraulicamente Lisa ou Rugosa Utilizando o  
Método de Vórtices Discretos**

Autor: **Alex Mendonça Bimbato**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira**

Co-Orientador: **Prof. Ph.D. Miguel Hiroo Hirata**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr.-Ing. Sergio Viçosa Möller – UFRGS**

**Prof. Dr. Sérgio Said Mansur – FEIS/UNESP**

**Prof. Dr. Erick de Moraes Franklin – UNIFEI**

**Prof. Dr. Marcelo José Pirani – UNIFEI**

**Prof. Ph.D. Miguel Hiroo Hirata (Co-Orientador) – FAT/UERJ**

**Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira (Orientador) – UNIFEI**

**Prof. Dr. André Garcia Chiarello (Presidente) – UNIFEI**

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho à Deus e à minha querida família.*

## **Agradecimentos**

Agradeço aos meus pais, Jair e Nancy, por propiciarem, desde a minha infância, um ambiente familiar seguro, de estímulo ao estudo e por me incentivarem em todos os momentos, principalmente nas adversidades. Ao meu irmão, Eric, que através de conversas telefônicas agradáveis fez com que vários dias difíceis se tornassem um pouco mais alegres.

Ao Professor Luiz Antonio Alcântara Pereira, pela amizade, orientação clara, segura, objetiva e pela imensa disposição em ajudar. Agradeço-o, ainda, pela oportunidade de conviver em um ambiente de pesquisa saudável, composto por alunos de graduação, mestrado e doutorado, com os quais muito pude aprender.

Ao Professor Miguel Hiroo Hirata, pela amizade, pelo seu contagiante espírito científico e pela sua indispensável participação no desenvolvimento deste trabalho, deslocando-se com frequência de Resende (RJ) para Itajubá (MG), com o intuito de acompanhar meus estudos mais de perto.

Meu muito obrigado ao amigo Carlos Adriano Corrêa Ribeiro, por estar sempre disposto a ajudar-me nos problemas envolvendo as ferramentas da informática.

A todos os colegas do Laboratório Computacional de Métodos de Partículas do IEM/UNIFEI.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro, através da concessão de uma bolsa de doutorado.

*“Sábio é aquele que conhece os limites da própria ignorância”*

*Sócrates*

## Resumo

**BIMBATO, A. M. (2012)**, *Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos*, Itajubá, 165p. Tese (Doutorado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

O presente trabalho utiliza simulações numéricas bidimensionais na realização de um estudo detalhado sobre estruturas de esteiras e dinâmica de escoamentos ao redor de um cilindro circular. Com base no conceito físico de que superfícies rugosas podem estimular o desenvolvimento da turbulência nos escoamentos, é proposto um modelo de rugosidade associado ao modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem adaptado ao Método de Vórtices Discretos. O modelo submalha originário de um trabalho anterior necessitou de uma correção para que os fenômenos das escalas não resolvidas da turbulência fossem apropriadamente modelados. Apresenta-se uma comparação entre os padrões de escoamentos obtidos a partir de cilindros circulares de superfície hidraulicamente lisa e de superfície hidraulicamente rugosa, para demonstrar as potencialidades do modelo de rugosidade em simular fenômenos físicos; como exemplo, discute-se a crise do arrasto. Outro exemplo de aplicação do modelo de rugosidade desenvolvido analisa as características do escoamento ao redor de um cilindro circular estacionado nas imediações de uma superfície plana, lisa e móvel. Esta tese de doutorado contribui mostrando que modelos bidimensionais de superfícies hidraulicamente rugosas reproduzem bem as características de escoamentos a altos valores do número de Reynolds.

### Palavras-Chave

Modelo de Superfície Rugosa, Modelo Submalha, Aerodinâmica de Corpos Rombudos, Padrões de Escoamento, Método de Painéis, Método de Vórtices Discretos.

## **Abstract**

**BIMBATO, A. M. (2012)**, *Study of Turbulent Flows around a Smooth or a Rough Bluff Body using the Discrete Vortex Method*, D.Sc. Thesis – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 165p.

The present work deals with two-dimensional numerical simulations to study wake structures and flow dynamics past a circular cylinder. Based on a physical sense that roughness surfaces can promote turbulent flows a roughness surface model associated to the second-order velocity structure function model adapted to Lagrangian mesh-free vortex method is proposed. The subgrid model from a previous work needed to be corrected in order to simulate the subgrid scale phenomena appropriately. A comparison between flow patterns originated from the smooth and rough circular cylinders is presented to demonstrate the ability of the roughness model to represent the physics involved in this kind of problem; the study is focused on the drag crisis. As another example of the novel roughness surface model developed is analyzed the flow characteristics past a circular cylinder near a moving smooth ground plane. This thesis shows that the characteristics of high Reynolds number flows are well predicted by a two-dimensional roughness model.

### **Keywords**

Roughness Surface Model, Subgrid Model, Aerodynamic of Bluff Body, Flow Patterns, Panel Methods, Discrete Vortex Method.

## Produção Científica

### a) Artigos em Revistas Indexadas

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2009a)**, “Simulation of Viscous Flow around a Circular Cylinder near a Moving Ground”, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, v. XXXI, n. 3, July-September, pp. 243-252.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2011)**, “Study of the vortex shedding flow around a body near a moving ground”, *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, v. 99, pp. 7-17.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2012a)**, “Analysis of the Vortex Shedding Suppression on the Flow around a Circular Cylinder under the Effect of a Moving Ground”, *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*; submitted for publication.

### b) Artigos em Congressos Internacionais

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2008)**, “Analysis of the Aerodynamic Loads in a Circular Cylinder near a Moving Ground”, *12<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences*, Proceedings of ENCIT 2008, November 10-14, Belo Horizonte, MG, Brazil.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2009b)**, “Influence of the Wake Interference on the Vortex Shedding Flow around a Circular Cylinder in Ground Effect”, *20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Proceedings of COBEM 2009, November 15-20, Gramado, RS, Brazil.

**MOURA, W. H., BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2009c)**, “Wake Interference on the Flow around an Oscillating Circular Cylinder in Ground Effect”, *20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Proceedings of COBEM 2009, November 15-20, Gramado, RS, Brazil.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2010a)**, “A Study of Boundary Layer Formation from a Moving Flat Surface Using Lagrangian Large Eddy Simulation”, *VII Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, Anais da EPTT 2010, 27 de setembro a 01 de outubro, Ilha Solteira, SP, Brasil.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2010b)**, “Aerodynamics of Bluff Body Close to a Moving Ground”, *13<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, Proceedings of ENCIT 2010, December 05-10, Uberlândia, MG, Brazil.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2012b)**, “Corrected Lagrangian LES Model for Vortex Method”, *VIII Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, Anais da EPTT 2012, 24 a 28 de setembro, São Paulo, SP, Brasil.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2012c)**, “On Vortex Shedding from Smooth and Rough Bluff Body in Turbulent Flows”, *IUTAM Symposium in Particle Methods in Fluid Mechanics*, October 15-17, Technical University of Denmark; accepted for publication.

**BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2012d)**, “Vortex Shedding Suppression on a Bluff Body in the Vicinity of a Moving Ground”, *14<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, Proceedings of ENCIT 2012, November 18-22, Rio de Janeiro, RJ, Brasil; accepted for publication.

## Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	iv
<b>LISTA DE TABELAS</b>	x
<b>SIMBOLOGIA</b>	xi
<b>LETRAS LATINAS</b>	xi
<b>LETRAS GREGAS</b>	xiv
<b>SOBRESCRITOS</b>	xvi
<b>SUBSCRITOS</b>	xvi
<b>ABREVIATURAS</b>	xvi
<b>SIGLAS</b>	xvii
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 – MOTIVAÇÕES TECNOLÓGICAS E CIENTÍFICAS	1
1.2 – OBJETIVOS	5
1.3 – METODOLOGIA	5
1.4 – ESTRUTURA DO TRABALHO	7
<b>CAPÍTULO 2: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	9
2.1 – REGIMES DE ESCOAMENTO PARA UM CILINDRO CIRCULAR LISO E ISOLADO	9
2.2 – EFEITOS DA RUGOSIDADE SUPERFICIAL	16
2.3 – O EFEITO SOLO	21
2.4 – O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS	26
<b>CAPÍTULO 3: FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA</b>	35
3.1 – GEOMETRIA E DEFINIÇÕES	36
3.2 – HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	37
3.3 – EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO	38
3.3.1 – Equações Governantes	38

	ii
3.3.2 – Condições de Contorno	40
3.4 – ESCOAMENTOS TURBULENTOS	42
3.4.1 – Filtragem das Equações Governantes	44
3.4.2 – A Simulação da Turbulência	47
3.5 – ESCOAMENTOS DE FLUIDOS SOBRE CONTORNOS SÓLIDOS	49
3.6 – ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA	51
3.7 – EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE	55
3.7.1 – A Lei de Biot-Savart	56
3.8 – CARGAS FLUIDODINÂMICAS	58
<b>CAPÍTULO 4: MÉTODO DE SOLUÇÃO: O MÉTODO DE VÓRTICES</b>	<b>60</b>
<b>DISCRETOS</b>	
4.1 – DISCRETIZAÇÃO DO CAMPO DE VORTICIDADES	60
4.2 – DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO	64
ESCOAMENTO: UM ENFOQUE LAGRANGIANO	
4.2.1 – Contribuição do escoamento Incidente	65
4.2.2 – Contribuição das Fronteiras Sólidas: O Método de Painéis	65
4.2.3 – Geração de Vorticidade e Modelo de Rugosidade	70
4.2.4 – Contribuição da Nuvem de Vórtices Discretos	80
4.3 – CÁLCULO NUMÉRICO DAS CARGAS FLUIDODINÂMICAS	83
4.4 – A CONVECÇÃO DA VORTICIDADE	87
4.5 – A DIFUSÃO DA VORTICIDADE	88
4.5.1 – Método de Vórtices Discretos com Simulação de Turbulência	88
4.5.2 – O Método de Avanço Randômico	90
4.6 – ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS	92
<b>CAPÍTULO 5: ANÁLISE DE RESULTADOS</b>	<b>99</b>
5.1 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA	100
5.1.1 – Parâmetros Relacionados com o Método Numérico	101
5.1.2 – Parâmetros Relacionados com o Fenômeno Físico	105
5.2 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR	106
ISOLADO	
5.2.1 – Cilindro Circular Hidraulicamente Liso	106
5.2.2 – Cilindro Circular Hidraulicamente Rugoso	113
5.3 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR NA	123
PRESENÇA DO EFEITO SOLO	
5.3.1 – Cilindro Circular Hidraulicamente Liso	123

	iii
5.3.2 – Cilindro Circular Hidraulicamente Rugoso	131
5.4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	134
<b>CAPÍTULO 6: CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	136
6.1 – CONCLUSÕES	136
6.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	139
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	142
<b>APÊNDICE A: DISTRIBUIÇÃO DA VORTICIDADE E DA VELOCIDADE INDUZIDA POR MODELOS DE VÓRTICES DISCRETOS</b>	153
A.1 – O VÓRTICE POTENCIAL	153
A.2 – O VÓRTICE DE LAMB	156
<b>APÊNDICE B: FLUXO DE VORTICIDADE ATRAVÉS DE UMA PAREDE</b>	161

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Exemplos de problemas práticos de engenharia onde os efeitos da rugosidade são importantes.	4
Figura 2.1	Exemplos de problemas onde a forma circular do cilindro pode ser utilizada para estudo do escoamento.	10
Figura 2.2	Visualização de padrões de escoamentos laminares ao redor de um cilindro circular liso (figuras retiradas de van Dyke, 1982; Tritton, 1988).	11
Figura 2.3	Variação dos componentes de pressão e de atrito do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds ( $\bar{C}_{D_p}$ e $\bar{C}_{D_f}$ representam, respectivamente, os componentes de pressão e de atrito do coeficiente de arrasto médio, $\bar{C}_D$ ) – adaptada de Assi (2009).	13
Figura 2.4	Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular liso.	14
Figura 2.5	Visualização de padrões de escoamentos turbulentos ao redor de um cilindro circular liso (retirado de van Dyke, 1982).	15
Figura 2.6	Esquemas de escoamentos supercrítico e transcrito (Blevins, 1990).	15
Figura 2.7	Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular rugoso.	16
Figura 2.8	Placas utilizadas nas extremidades do cilindro circular para tornar o escoamento aproximadamente bidimensional	24

	(Nishino, 2007).	
Figura 2.9	Estudos recentes envolvendo o Método de Vórtices Discretos (Chatelain <i>et al.</i> , 2008; Gazzola <i>et al.</i> , 2011; Kamemoto, 2004; Kamemoto, 2009).	27
Figura 2.10	Estudos envolvendo o Método de Vórtices Discretos desenvolvidos no Laboratório Computacional de Métodos de Partículas do IEM/UNIFEI (Alcântara Pereira & Hirata, 2009; Moraes, 2011).	28
Figura 3.1	Exemplos de corpos submetidos ao efeito solo.	35
Figura 3.2	Região fluida e definições.	36
Figura 3.3	Volume de controle elementar, infinitesimal e fixo.	39
Figura 3.4	Decomposição da velocidade de uma partícula fluida em contato com uma superfície sólida nas direções normal e tangencial.	41
Figura 3.5	Escoamento turbulento sobre contornos sólidos.	51
Figura 3.6	Representação do problema adimensionalizado.	55
Figura 4.1	Processo de geração e desenvolvimento da vorticidade nos casos contínuo e discreto.	62
Figura 4.2	Representação esquemática das distribuições de fontes, $\sigma(x)$ , sobre um corpo discretizado em quatro painéis planos, localizado nas vizinhanças de uma superfície plana móvel discretizada em quatro painéis planos.	67
Figura 4.3	Velocidade induzida no ponto $W(x, y)$ por uma distribuição de fontes com densidade constante, $\sigma(x)$ , distribuída ao longo de um painel de comprimento $(x_2 - x_1)$ .	68
Figura 4.4	Geração de vorticidade: um enfoque fenomenológico.	71
Figura 4.5	Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis que discretizam fronteiras sólidas hidraulicamente lisas.	72
Figura 4.6	Influência da rugosidade de superfícies sólidas na determinação da atividade turbulenta do escoamento.	74
Figura 4.7	Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis que discretizam fronteiras sólidas hidraulicamente rugosas em um dado instante de tempo.	75

Figura 4.8	Efeito inercial imposto pela rugosidade de fronteiras sólidas no processo de geração de vórtices discretos de Lamb.	78
Figura 4.9	Comportamento da velocidade tangencial induzida.	81
Figura 4.10	Vorticidade gerada a partir da superfície discretizada do corpo (a) sofrendo um processo de aglutinação instantânea e transformando-se num vórtice discreto de Lamb (b).	84
Figura 4.11	Adaptação do modelo de turbulência ao Método de Vórtices Discretos.	89
Figura 4.12	Estrutura do programa computacional desenvolvido.	94
Figura 4.13	Representação esquemática do corpo e do solo.	95
Figura 5.1	Cilindro circular hidraulicamente rugoso estacionado nas proximidades do solo.	100
Figura 5.2	Esteira de vórtices discretos utilizada no estudo estatístico realizado para determinar a espessura da coroa circular (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $\sigma_0 = \text{eps} = 0,001$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	103
Figura 5.3	Valores médios obtidos para a razão $N/A_c$ em função do raio externo da coroa circular definida ao redor de cada vórtice discreto presente na Figura 5.2.	104
Figura 5.4	Distribuição média do coeficiente de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	108
Figura 5.5	Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	109
Figura 5.6	Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	111
Figura 5.7	Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente liso e isolado, nos instantes	112

	representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras 5.5 e 5.6 (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	
Figura 5.8	Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.5 (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	113
Figura 5.9	Regimes de escoamento para um cilindro circular liso e isolado (adaptada de Sumer & Fredsøe, 2006).	114
Figura 5.10	Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	115
Figura 5.11	Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular liso e isolado.	116
Figura 5.12	Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.10 (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	117
Figura 5.13	Distribuição média de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	118
Figura 5.14	Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	119
Figura 5.15	Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	120
Figura 5.16	Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras	122

	5.14 e 5.15 (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	
Figura 5.17	Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.14 (Euler; $mb1 = 300$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	123
Figura 5.18	Comparação entre resultados numéricos e experimentais obtidos para o coeficiente de arrasto médio envolvendo o cilindro circular submetido ao efeito solo.	124
Figura 5.19	Aparato experimental utilizado em testes em túnel de vento (adaptada de Nishino, 2007).	125
Figura 5.20	Comparação entre resultados numéricos e experimentais obtidos para o coeficiente de sustentação médio envolvendo o cilindro circular submetido ao efeito solo.	126
Figura 5.21	Cargas fluidodinâmicas exercidas sobre um cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	127
Figura 5.22	Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	128
Figura 5.23	Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras 5.21b e 5.22 (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	129
Figura 5.24	Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.21b (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $\varepsilon = 0,000$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	130
Figura 5.25	Cargas fluidodinâmicas exercidas sobre um cilindro circular hidraulicamente rugoso submetido ao efeito solo (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ;	132

	$\varepsilon = 0,007$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	
Figura 5.26	Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente rugoso submetido ao efeito solo, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D da Figura 5.25b (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	133
Figura 5.27	Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.25b (Euler; $mb1 = 300$ ; $mb2 = 950$ ; $\Delta t = 0,05$ ; $sm = 3,0$ ; $NR = 21$ ; $\varepsilon = 0,007$ ; $h = 0,45$ ; $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	134
Figura 5.28	Camada limite desenvolvida sobre a superfície de uma esfera (a), com detalhes para a formação das ondas de Tollmien-Schlichting e das instabilidades do tipo grampo de cabelo (b); retirada de Faber (1995).	135
Figura A.1	Velocidade tangencial induzida.	154
Figura A.2	Distribuição de vorticidade no interior do núcleo e velocidade tangencial induzida pelo vórtice potencial.	155
Figura A.3	Distribuição de vorticidade no interior do núcleo e velocidade tangencial induzida pelo vórtice discreto de Lamb.	160
Figura B.1	Fluxo de vorticidade através de uma fronteira sólida coincidente com o eixo $x$ .	165

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular hidraulicamente liso e isolado.	106
Tabela 5.2	Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular isolado submetido a diversas rugosidades ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ).	114
Tabela 5.3	Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para o cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo ( $h = 0,45$ ).	126
Tabela 5.4	Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular submetido ao efeito solo ( $h = 0,45$ ).	131

## Simbologia

### Letras Latinas

$A$	Vetor potencial
$a$	Distância entre dois pontos para determinação do campo de velocidades a partir do campo de vorticidades (Lei de Biot-Savart)
$B$	Distância entre as paredes de um túnel de vento
$b$	Raio da semicircunferência utilizada no modelo de rugosidade
$C_D$	Coefficiente de arrasto
$\overline{C}_D$	Coefficiente de arrasto médio
$C_{ij}$	Tensor cruzado
$C_k$	Constante de Kolmogorov
$C_L$	Coefficiente de sustentação
$\overline{C}_L$	Coefficiente de sustentação médio
$C_p$	Coefficiente de pressão
$C_{SM}$	Constante de Smagorinsky
$co$	Ponto de controle de um painel plano
$d$	Diâmetro do cilindro de seção circular
$dS$	Coordenada que percorre o perímetro das fronteiras sólidas
$E$	Espectro de energia cinética local
$eps$	Distância para a geração de vórtices discretos a partir do ponto de controle de um painel plano que discretiza um corpo rugoso
$eps'$	Distância para a geração de vórtices discretos a partir do ponto de controle de um painel plano que discretiza um corpo liso

$\bar{F}_2$	Função estrutura de velocidade de segunda ordem
G	Função de Green
$\bar{G}$	Função filtro
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração da gravidade local
h	Distância entre o corpo e o solo
KF	Matriz de influência de fontes
KP	Matriz de influência de pressão
KV	Matriz de influência de vórtices
$K_c$	Número de onda de corte
L	Comprimento de um cilindro de seção circular
LD	Matriz lado direito de pressão
LDF	Vetor coluna lado direito fontes
LDP	Vetor coluna lado direito de pressão
LDV	Vetor coluna lado direito vórtices
$L_{ij}$	Tensor de Leonard
Ma	Número de Mach
m	Número total de painéis que discretizam as superfícies do corpo e do solo ( $m = mb1 + mb2$ )
mb1	Número de painéis que discretizam a superfície do corpo
mb2	Número de painéis que discretizam a superfície do solo
N	Número de vórtices discretos no interior da coroa circular
NR	Número de pontos rugosos
NV	Número de vórtices discretos que compõem a nuvem
$\mathbf{n}$	Vetor unitário
$n_x$	Componente na direção $x$ do vetor unitário, $\mathbf{n}$
$n_y$	Componente na direção $y$ do vetor unitário, $\mathbf{n}$
P	Número randômico entre 0 e 1
p	Campo de pressões
pshed	Ponto de desprendimento de vórtices discretos a partir de uma superfície hidraulicamente rugosa
pshed'	Ponto de desprendimento de vórtices discretos a partir de uma superfície hidraulicamente lisa
$p_\infty$	Pressão de referência

$Q$	Número randômico entre 0 e 1
$Re$	Número de Reynolds
$Re_c$	Número de Reynolds modificado
$r$	Distância do ponto extremo de um painel até um ponto arbitrário do domínio fluido
$r_{ext}$	Raio externo da coroa circular
$r_{int}$	Raio interno da coroa circular
$r_{kj}$	Distância entre o vórtice discreto $j$ e o vórtice discreto $k$
$St$	Número de Strouhal
$\bar{S}_{ij}$	Tensor deformação do campo filtrado
$S_1$	Contorno que delimita a superfície do corpo
$S_2$	Contorno que define o solo
$S_3$	Fronteira definida a grandes distâncias do corpo e do solo
$t$	Instante de tempo
$\mathbf{t}_{ij}$	Tensor das tensões viscosas
$U$	Velocidade do escoamento incidente na direção $x$
$U_{V_{k,j}}$	Componente na direção $x$ da velocidade induzida no vórtice discreto $k$ pelo vórtice discreto $j$
$\mathbf{u}$	Campo de velocidades
$u$	Componente na direção $x$ da velocidade total induzida pelos painéis em um ponto do domínio fluido
$\bar{u}$	Componente filtrado da velocidade $\mathbf{u}$ , na direção $x$
$u_{ij}$	Componente na direção $x$ da velocidade induzida por um vórtice discreto $j$ sobre o ponto de controle de um painel genérico $i$
$\mathbf{u}_k$	Vetor velocidade de um vórtice discreto arbitrário, $k$ , da nuvem
$u_{k_{NV}}$	Componente na direção $x$ da velocidade total induzida no vórtice discreto $k$ pela nuvem de vórtices discretos
$u_n$	Componente normal da velocidade de uma partícula fluida
$u_{t_k}$	Componente na direção $x$ da velocidade total induzida no vórtice discreto $k$
$u_{\theta}^{kj}$	Velocidade tangencial induzida no vórtice discreto $k$ pelo vórtice discreto $j$
$u_{\tau}$	Componente tangencial da velocidade de uma partícula fluida

$u_{\infty}$	Componente na direção $x$ da velocidade do escoamento incidente
$V_{v_{k,j}}$	Componente na direção $y$ da velocidade induzida no vórtice discreto $k$ pelo vórtice discreto $j$
$v$	Componente na direção $y$ da velocidade total induzida pelos painéis em um ponto do domínio fluido
$\bar{v}$	Componente filtrado da velocidade $\mathbf{u}$ , na direção $y$
$v_{ij}$	Componente na direção $y$ da velocidade induzida por um vórtice discreto $j$ sobre o ponto de controle de um painel genérico $i$
$v_{k_{NV}}$	Componente na direção $y$ da velocidade total induzida no vórtice discreto $k$ pela nuvem de vórtices discretos
$v_n$	Componente normal da velocidade das fronteiras sólidas
$v_{t_k}$	Componente na direção $y$ da velocidade total induzida no vórtice discreto $k$
$v_{\tau}$	Componente tangencial da velocidade das fronteiras sólidas
$v_{\infty}$	Componente na direção $y$ da velocidade do escoamento incidente
$x$	Coordenada cartesiana
$\mathbf{x}_k$	Posição de um vórtice discreto $k$ da nuvem
$\tilde{Y}$	Trabalho específico total
$y$	Coordenada cartesiana
$z$	Coordenada cartesiana

## Letras Gregas

$\alpha$	Ângulo de incidência do escoamento não perturbado
$\beta$	Ângulo de orientação de um painel plano
$\Gamma$	Intensidade de um vórtice discreto de Lamb
$\gamma$	Densidade de vórtices distribuída uniformemente sobre os painéis
$\Delta$	Raio da esfera (Lesieur & Metais, 1992)
$\Delta\theta$	Avanço de um vórtice discreto no intervalo angular ( $0 - 2\pi$ ) para o cálculo da difusão da vorticidade
$\Delta C_D$	Coefficiente de arrasto elementar que atua em um painel plano
$\Delta C_L$	Coefficiente de sustentação elementar que atua em um painel plano

$\Delta r$	Avanço de um vórtice discreto na direção radial para o cálculo da difusão da vorticidade
$\Delta S$	Comprimento de um painel plano
$\Delta t$	Incremento de tempo
$\Delta x$	Comprimento da malha (Smagorinsky, 1963)
$\Delta x_{\text{CONVECÇÃO}_k}$	Deslocamento de um vórtice discreto $k$ , na direção $x$ , pelo processo de convecção
$\Delta x_{\text{DIFUSÃO}_k}$	Deslocamento de um vórtice discreto $k$ , na direção $x$ , pelo processo de difusão randômica
$\Delta y$	Largura da malha (Smagorinsky, 1963)
$\Delta y_{\text{CONVECÇÃO}_k}$	Deslocamento de um vórtice discreto $k$ , na direção $y$ , pelo processo de convecção
$\Delta y_{\text{DIFUSÃO}_k}$	Deslocamento de um vórtice discreto $k$ , na direção $y$ , pelo processo de difusão randômica
$\delta$	Espessura da camada limite
$\varepsilon$	Rugosidade superficial
$\theta$	Ângulo de orientação da distância do ponto extremo de um painel até um ponto arbitrário do domínio fluido
$\mu$	Coefficiente de viscosidade dinâmica
$\nu$	Coefficiente de viscosidade molecular (cinemática)
$\nu_t$	Coefficiente de viscosidade turbulenta
$\xi$	Constante utilizada no cálculo das cargas fluidodinâmicas para diferenciar o domínio fluido da superfície sólida
$\pi$	3,141592654
$\rho$	Massa específica
$\Sigma$	Representa um somatório
$\sigma$	Densidade constante de fontes/sumidouros
$\sigma_0$	Raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb
$\sigma_{0c}$	Raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb modificado pela atuação do modelo de rugosidade
$\sigma_{0N}$	Raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb nominal
$\tau$	Tensão de cisalhamento sobre uma fronteira sólida
$\tau_{ij}$	Tensor de Reynolds submalha

$\chi$	Fator de controle que atua no processo de geração de vórtices discretos devido ao modelo de rugosidade
$\Omega$	Domínio fluido semi-infinito
$\omega$	Único componente não nulo do vetor vorticidade (direção normal ao plano do escoamento)
$\omega$	Campo de vorticidades

## Sobrescritos

*	Designa variáveis dimensionais
---	--------------------------------

## Subscritos

n	Designa direção normal
$\tau$	Designa direção tangencial

## Abreviaturas

CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (Dinâmica dos Fluidos Computacional)
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i> (Simulação Numérica Direta)
FI	Força de origem inercial
FV	Força de origem viscosa
LES	<i>Large Eddy Simulation</i> (Simulação de Grandes Escalas)
MVD	Método de Vórtices Discretos
N-S	Refere-se às Equações de Navier-Stokes
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations</i> (Simulação via Equações Médias de Reynolds)
VIV	<i>Vortex Induced Vibrations</i> (Vibrações Induzidas por Vórtices)
WIV	<i>Wake Induced Vibrations</i> (Vibrações Induzidas por Interferência de Esteira)

## Siglas

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
IEM	Instituto de Engenharia Mecânica
UNIFEI	Universidade Federal de Itajubá

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

## 1.1 – MOTIVAÇÕES TECNOLÓGICAS E CIENTÍFICAS

A análise e a compreensão mais aprofundadas de escoamentos ao redor de corpos de geometria arbitrária têm sido fundamentais para o desenvolvimento da tecnologia e para o avanço da ciência em várias áreas do conhecimento. Os avanços alcançados nas indústrias automobilística e aeronáutica (principalmente no que concerne às análises de escoamentos viscosos em torno de corpos rombudos e esbeltos visando alto desempenho) só se concretizam com o desenvolvimento da aerodinâmica. A importância de se conhecer e dominar tal assunto pode ser facilmente reconhecida quando se observa que grande parte dos corpos presentes em situações de interesse prático para a engenharia está exposta, em geral, à passagem de uma corrente de ar ou de água. Estes escoamentos são exemplos típicos de problemas de interação fluido-estrutura, onde inegavelmente a transição para a turbulência se apresenta como um fenômeno complexo da hidrodinâmica não linear.

A asa de um avião, por exemplo, possui uma razão espessura-largura pequena e trabalha, em voo de cruzeiro, com ângulos de ataque pequenos; a fuselagem apresenta dimensões transversais pequenas quando comparadas com o seu comprimento. Todas essas características são próprias de um corpo esbelto. Entretanto, as aeronaves trabalham, nos momentos mais críticos (procedimentos de pouso e de decolagem) com suas asas submetidas a elevados ângulos de ataque. Nestas condições, uma asa, mesmo que fina, pode apresentar uma extensa zona descolada no seu extradorso e uma esteira viscosa significativa, o que

constituem as características marcantes do escoamento ao redor de um corpo rombudo. De maneira semelhante, o escoamento ao redor de veículos (mesmo os de alto desempenho) apresenta estas mesmas características fluidodinâmicas. Pode-se citar, ainda, um terceiro exemplo de interesse no atual cenário mundial: os efeitos de Vibrações Induzidas por Vórtices, VIV (do inglês, *Vortex Induced Vibrations*), nos *risers* da indústria de exploração de petróleo em alto mar. Os *risers* são tubos cilíndricos longos, que possuem a função de transportar o petróleo do fundo do mar para a plataforma. Os esforços cíclicos a que estão submetidos, decorrentes de vibrações, são capazes de degradar a estrutura mecânica dos *risers* por um processo de fadiga.

O escoamento ao redor de corpos rombudos pode provocar o surgimento de fenômenos físicos típicos da hidrodinâmica não linear, tais como: a separação, o desprendimento alternado de pares contrarrotativos de estruturas vorticosas e a transição para a turbulência; tais fenômenos despertam grande interesse científico, têm grande impacto nas aplicações de engenharia e têm suas origens vinculadas ao desenvolvimento de instabilidades oriundas da interação das duas camadas cisalhantes formadas a partir dos pontos de separação do corpo rombudo (Bearman, 1984).

Um fenômeno bastante estudado pela comunidade científica refere-se à transição de um escoamento em regime laminar para o regime turbulento, passando ao redor de corpos rombudos. O parâmetro que governa o fenômeno da transição para a turbulência é o número de Reynolds, o qual representa uma relação entre os efeitos inerciais (que amplificam as perturbações do escoamento) e os efeitos viscosos (que amortecem as perturbações do escoamento). A transição para a turbulência tem início na região da esteira e, com o aumento do número de Reynolds, ocorre cada vez mais próxima do corpo, passando pelas duas camadas cisalhantes formadas a partir dos pontos de separação, até chegar na camada limite que se desenvolve ao redor do corpo. O fato de a transição para a turbulência ocorrer na região da camada limite é particularmente importante para fins práticos, uma vez que o escoamento passa a ter maior quantidade de movimento para suportar o gradiente de pressão adverso e, assim, o ponto de separação é deslocado para jusante da superfície do corpo, causando a chamada crise do arrasto. Esta crise consiste em uma redução da força de arrasto que se opõe ao movimento do corpo. No entanto, o fenômeno físico descrito anteriormente ocorre a altos valores do número de Reynolds, de maneira que a presença de pequenas perturbações no escoamento são amplificadas e, conseqüentemente, modificações no comportamento fluidodinâmico do corpo irão ocorrer.

Um dos tipos de perturbação mais encontrados nos problemas práticos de engenharia refere-se à rugosidade da superfície do corpo imerso no escoamento. Dependendo do número de Reynolds do escoamento, um corpo, mesmo de superfície aparentemente lisa, poderá ter o seu padrão de escoamento e o seu comportamento fluidodinâmico modificados pela influência da rugosidade, fato que o caracterizará como um corpo de superfície hidraulicamente rugosa. Nesta situação, a rugosidade da superfície do corpo pode antecipar a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta, fazendo com que a crise do arrasto ocorra a valores menores do número de Reynolds.

Nas aplicações práticas de engenharia, os aspectos referentes à rugosidade de um corpo imerso em um escoamento são importantes no que concerne à eficiência dos processos de transferência de calor, ao desempenho de propulsores de navios, à aerodinâmica de materiais esportivos, ao desempenho de turbinas eólicas e à aerodinâmica de corpos submetidos ao efeito solo; na Figura 1.1 ilustram-se as situações mais corriqueiras.

As discussões precedentes comprovam que o escoamento ao redor de corpos rombudos é complexo, sendo necessários esforços experimentais e computacionais para entendê-lo completamente. É importante ressaltar que a previsão correta da força de arrasto ainda se constitui em um dos problemas básicos no estudo do escoamento em torno de corpos rombudos.

Na tentativa de entender fenômenos tão complexos, é razoável que se estude o escoamento ao redor de corpos que possuam geometrias mais simples. Dentre eles, o cilindro de seção circular se apresenta como a melhor alternativa, na medida em que restringe a complexidade do problema e permite que se observem as características fundamentais do escoamento. Na verdade, os cilindros circulares têm sido objeto de muitos estudos não só para se observar as características fundamentais do escoamento ao passar por eles, mas também pelo fato de terem importância em muitas aplicações práticas (Figuras 1.1a).

A proposta desta tese de doutorado consiste no desenvolvimento de um modelo numérico-computacional bidimensional, que seja capaz de representar os efeitos causados pela rugosidade da superfície de um cilindro circular nos padrões de escoamentos que se desenvolvem ao seu redor a altos números de Reynolds e, ainda, prever modificações no comportamento das cargas fluidodinâmicas que atuam sobre este corpo. Em essência, mostra-se neste trabalho que um modelo de rugosidade, quando associado a um modelo de turbulência bidimensional, é capaz de representar as principais características do escoamento turbulento ao redor de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente rugosa.



(a) Trocador de calor do tipo casco e tubos  
<http://www.offimar.com.br/trocador-de-calor.php>



(b) Propulsor de uma embarcação  
<http://www.nps.gov/lake/naturescience/zebramussel.htm>



(c) Bola de *baseball*  
<http://marconipp.wordpress.com/page/4/>



(d) Turbinas eólicas  
<http://rotaenergia.wordpress.com/2011/08/19/eolica-cada-vez-mais-competitiva-no-mercado-energetico-brasileiro/>



(e) Aeronave em procedimento de pouso  
<http://www.taringa.net/posts/noticias/11476939/Argentina-lanzara-el-11-de-julio-el-cohete-Gradicom-II.html>



(f) Veículo de alto desempenho  
<http://www.ayrton-senna.com.ar/wallpapers.htm>

Figura 1.1 – Exemplos de problemas práticos de engenharia onde os efeitos da rugosidade são importantes.

## 1.2 – OBJETIVOS

O objetivo central deste trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo de rugosidade associado a uma simulação de turbulência do tipo LES (do inglês, *Large Eddy Simulation*) adaptada ao Método de Vórtices Discretos. Analisa-se numericamente (através de um código computacional desenvolvido em linguagem de programação *FORTRAN*) o escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente de um fluido newtoniano com propriedades constantes que se desenvolve ao passar por um cilindro circular. Estuda-se a influência da rugosidade do corpo no fenômeno da transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta.

O escoamento subcrítico ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ) ao redor de um cilindro circular submetido ao efeito de diferentes rugosidades superficiais é estudado com o objetivo de obter padrões de escoamentos supercríticos. As análises são realizadas a partir de padrões de escoamentos e de histórias temporais, bem como de valores médios, das cargas fluidodinâmicas que atuam sobre o corpo. Como um segundo exemplo de aplicação, investiga-se o escoamento turbulento ao redor de um cilindro circular que se move em relação a uma superfície plana lisa (solo); várias distâncias entre o cilindro circular hidraulicamente liso e o solo são estudadas. Para o cilindro circular hidraulicamente rugoso, escolhe-se apenas uma distância entre o corpo e o solo com o objetivo de demonstrar as potencialidades do modelo de rugosidade desenvolvido. Reconhece-se aqui, que a metodologia utilizada para a representação do corpo e do solo (Método de Painéis) não é a mais apropriada para o levantamento de perfis de velocidade a partir de uma superfície sólida. De qualquer modo, o Método de Vórtices Discretos, associado ao Método de Painéis, se apresenta como uma ferramenta útil para a obtenção de grandezas globais, assim como valores de quantidades locais de escoamentos a altos valores do número de Reynolds.

## 1.3 – METODOLOGIA

Para cumprir os propósitos apresentados na Seção 1.2, utiliza-se como ferramenta numérico-computacional o Método de Vórtices Discretos (MVD), certamente o representante mais conhecido dos Métodos de Partículas que, por sua vez, se constituem numa classe geral de métodos numéricos que utilizam uma descrição puramente lagrangiana. O Método de

Vórtices Discretos é utilizado para resolver as grandes escalas do escoamento, representando, desta maneira, a vorticidade presente no domínio fluido por uma nuvem de vórtices discretos de Lamb (Panton, 1984). Para isso, os vórtices discretos de Lamb são gerados a partir das superfícies sólidas e são submetidos aos processos de convecção\* e de difusão da vorticidade, sendo transportados com a mesma velocidade da massa fluida. O cálculo da velocidade induzida sobre cada vórtice discreto durante cada instante de tempo da simulação numérica requer as contribuições do escoamento incidente, das superfícies sólidas e da nuvem de vórtices discretos (interação vórtice-vórtice). Para a obtenção da intensidade de cada vórtice discreto (necessária para o cálculo da interação vórtice-vórtice) impõe-se a condição de não deslizamento sobre pontos estrategicamente escolhidos para representarem as superfícies sólidas, os chamados pontos de controle. O modelo de rugosidade proposto atua em conformidade com a dinâmica do escoamento, alterando o valor da intensidade dos vórtices discretos nascentes, de maneira a impor-lhes um efeito inercial adicional; este efeito inercial adicional está fisicamente associado ao aumento da taxa de transferência de quantidade de movimento entre camadas adjacentes de fluido em uma região próxima à superfície sólida hidraulicamente rugosa.

No desenvolvimento do modelo de rugosidade consideram-se, também, os aspectos referentes à turbulência através do modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, o qual determina um coeficiente de viscosidade turbulenta responsável por fazer a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento, as quais são resolvidas, e as escalas submalha, as quais são modeladas. O modelo de turbulência foi originalmente adaptado para ser incorporado ao Método de Vórtices Discretos por Alcântara Pereira *et al.* (2002). Os autores simulavam o processo de difusão molecular da vorticidade através do método de avanço randômico (Chorin, 1973) somando-se ao coeficiente de viscosidade molecular um coeficiente de viscosidade turbulenta; além deste efeito, o valor do raio do núcleo dos vórtices discretos também era modificado pelo coeficiente de viscosidade turbulenta. No entanto, o presente trabalho mostra que este último procedimento proposto por Alcântara Pereira *et al.* (2002) deve ser desconsiderado, de modo que, nas regiões do escoamento onde há atividades turbulentas importantes, deve-se utilizar apenas o método de avanço randômico para a inclusão dos aspectos referentes à turbulência.

---

\* O termo “convecção”, utilizado em trabalhos que usam o Método de Vórtices Discretos, é equivalente ao mecanismo de advecção que ocorre devido ao movimento global (macroscópico) de um fluido em processos de transferência de calor. Entretanto, neste texto é utilizada a expressão “convecção” para manter um padrão em relação aos trabalhos envolvendo o Método de Vórtices Discretos já consagrados na literatura especializada.

No estudo do efeito solo utiliza-se um artifício numérico para considerar uma situação de movimento relativo entre o corpo e o solo. O trabalho experimental de Nishino (2007) constatou que, quando o solo se move com a mesma velocidade do escoamento incidente, praticamente não há formação de camada limite junto a ele. Assim, a situação de movimento relativo entre o corpo e o solo é representada, neste trabalho, deixando-se de gerar vórtices discretos a partir da fronteira sólida que representa a superfície do solo (Bimbatto, 2008).

Como mencionado anteriormente, para a representação das superfícies sólidas utiliza-se o Método de Painéis (Katz & Plotkin, 1991), cuja metodologia é baseada na escolha do tipo de singularidades e na escolha do tipo de condição de contorno. Neste trabalho, escolhem-se singularidades do tipo fontes com densidade constante para impor a condição de impermeabilidade sobre o ponto de controle dos painéis planos que representam as superfícies sólidas envolvidas no problema.

Para o cálculo das cargas fluidodinâmicas distribuídas (somente a distribuição de pressão é considerada) e das cargas fluidodinâmicas integradas (força de arrasto de forma e força de sustentação), considera-se a formulação integral apresentada por Shintani & Akamatsu (1994). A formulação é originária de uma equação de Poisson para a pressão e possui a vantagem de considerar a contribuição de todos os vórtices discretos presentes na esteira viscosa para o cálculo da distribuição de pressão atuante sobre o corpo.

## **1.4 – ESTRUTURA DO TRABALHO**

A presente tese de doutorado está dividida em seis capítulos, incluindo esta Introdução.

O Capítulo 2 é conduzido para uma revisão bibliográfica específica sobre trabalhos relevantes envolvendo os aspectos de rugosidade e sobre o fenômeno do efeito solo. Além disso, trabalhos importantes envolvendo o Método de Vórtices Discretos são comentados.

No Capítulo 3 está apresentada a formulação geral do problema, incluindo-se a definição de uma geometria para os estudos, as equações governantes, as condições de contorno, as hipóteses simplificadoras e a adimensionalização do problema.

No Capítulo 4 discute-se detalhadamente o modelo de rugosidade desenvolvido e a solução numérica, via Método de Vórtices Discretos, do problema formulado no Capítulo 3.

No Capítulo 5 está contida toda a análise dos resultados numéricos obtidos, enquanto no Capítulo 6 estão apresentadas as conclusões mais importantes do trabalho e as sugestões para o desenvolvimento de futuras pesquisas.

Na sequência, encontram-se relacionadas as referências bibliográficas de todos os trabalhos citados neste texto.

No Apêndice A são discutidos os comportamentos da velocidade tangencial induzida e da distribuição de vorticidade para o modelo do vórtice potencial e para o modelo do vórtice de Lamb.

O Apêndice B destina-se à dedução da equação que governa o fluxo de vorticidade através de uma superfície sólida, ponto de partida para o item referente à geração de vorticidade, descrito no Capítulo 4.

## Capítulo 2

# REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem por finalidades mencionar trabalhos relevantes e apresentar considerações importantes referentes aos aspectos que envolvem escoamentos ao redor de cilindros circulares de superfícies sólidas lisas e rugosas. Faz-se, também, uma revisão sobre o fenômeno do efeito solo incluindo-se trabalhos experimentais e numéricos. Por fim, realiza-se uma revisão a respeito do Método de Vórtices Discretos para escoamentos incompressíveis, uma vez que esta é a ferramenta numérica utilizada para a solução do problema proposto no Capítulo 3.

## 2.1 – REGIMES DE ESCOAMENTO PARA UM CILINDRO CIRCULAR LISO E ISOLADO

O escoamento ao redor de uma estrutura cilíndrica é influenciado pela sua forma e pelo número de corpos que se apresentam nas suas vizinhanças. No trabalho de Zdravkovich (1987) são mostrados vários arranjos de cilindros circulares que podem ser estudados na presença de um escoamento incidente. Nota-se que, por ser um problema clássico da Mecânica dos Fluidos, há um grande número de trabalhos experimentais disponíveis na literatura referentes à forma circular da seção transversal do cilindro. Como já mencionado na Seção 1.1, a forma circular é bastante estudada por possuir uma combinação desejada de

geometria simples com a configuração complexa do escoamento ao redor de um corpo rombudo. Essa combinação é ainda mais atrativa, uma vez que permite analisar de maneira preliminar, por exemplo, escoamentos ao redor de pilares de pontes, chaminés, grandes edifícios, *risers* de plataformas de petróleo, trocadores de calor, torres de transmissão de energia elétrica e cabos da rede elétrica; a Figura 2.1 apresenta alguns exemplos. O estudo do escoamento ao redor dos cabos de uma linha de transmissão de energia elétrica (Figura 2.1c), por exemplo, pode ser inicialmente realizado através da utilização de um conjunto de cilindros circulares dispostos conforme mostrado na Figura 2.1d.



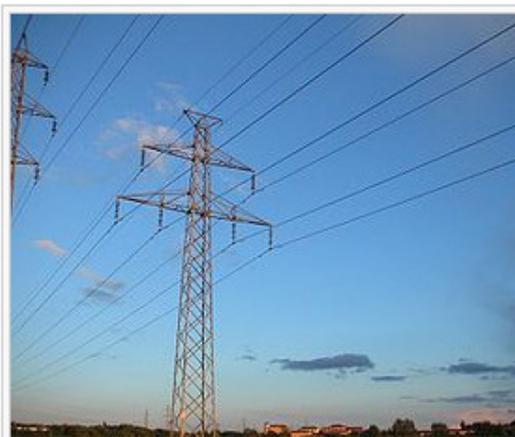
(a)

(<http://mercadoimobiliariosantos.wordpress.com/category/pre-sal/>)



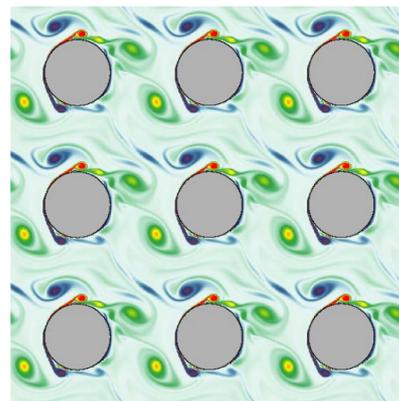
(b)

(<http://cipinox.sites.uol.com.br/prod07.htm>)



(c)

([http://pt.wikipedia.org/wiki/Energia\\_el%C3%A9trica](http://pt.wikipedia.org/wiki/Energia_el%C3%A9trica))



(d)

([http://wavelets.ens.fr/MEDIATHEQUE/media\\_theque\\_index.htm](http://wavelets.ens.fr/MEDIATHEQUE/media_theque_index.htm))

Figura 2.1 – Exemplos de problemas onde a forma circular do cilindro pode ser utilizada para estudo do escoamento.

Sabe-se que a configuração do escoamento ao redor de um corpo rombudo é influenciada por uma grande variedade de parâmetros. Para um cilindro circular liso e longo, submetido a um escoamento uniforme, o parâmetro governante é o número de Reynolds ( $Re = Ud/\nu$ , onde  $U$ ,  $d$  e  $\nu$  são, respectivamente, a velocidade do escoamento incidente, o diâmetro do cilindro circular e o coeficiente de viscosidade cinemática).

Nishino (2007) classifica o escoamento ao redor de um cilindro circular liso e isolado em função do número de Reynolds em três regimes: subcrítico ( $Re < 2,0 \times 10^5 - 5,0 \times 10^5$ ), crítico ( $Re \cong 2,0 \times 10^5 - 5,0 \times 10^5$ ) e supercrítico ( $Re > 2,0 \times 10^5 - 5,0 \times 10^5$ ); Roshko (1961) acrescenta ainda um quarto regime, denominado transcrito e que, nos dias atuais, recebe a denominação de regime pós-crítico ( $Re > 3,5 \times 10^6$ ).

Quando o número de Reynolds é muito baixo ( $Re \leq 1$ ), o escoamento ao redor de um cilindro circular é aproximadamente simétrico a montante e a jusante do corpo, com um ponto de estagnação frontal e outro traseiro. O escoamento nesta condição é chamado de escoamento reptante e a forma das linhas de corrente é mostrada na Figura 2.2a; o escoamento se comporta sem que se verifique o fenômeno da separação da camada limite e a força de arrasto é devida exclusivamente às forças viscosas.

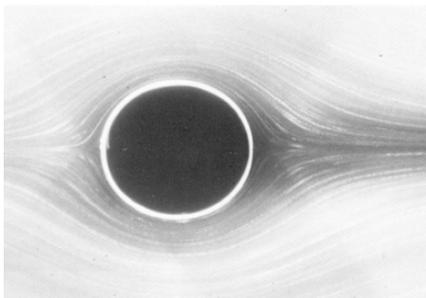
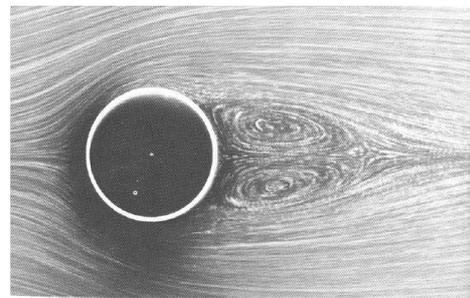
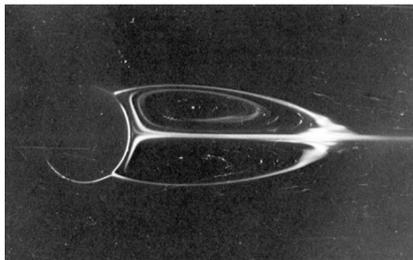
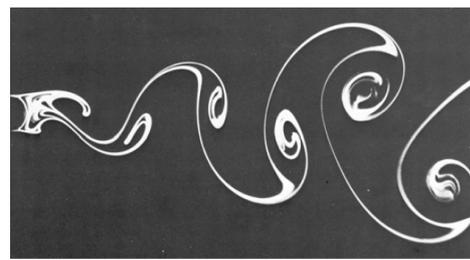
(a)  $Re = 0,16$ (b)  $Re = 26$ (c)  $Re = 41$ (d)  $Re = 140$ 

Figura 2.2 – Visualização de padrões de escoamentos laminares ao redor de um cilindro circular liso (figuras retiradas de van Dyke, 1982; Tritton, 1988).

Para  $2 \leq Re \leq 30$  ocorre a separação da camada limite na parte de trás do corpo e o escoamento apresenta-se assimétrico; nesta condição é formado um único par de estruturas vorticosas estacionárias (recirculação), como mostrado na Figura 2.2b, que vai aumentando em tamanho à medida que o número de Reynolds aumenta; apesar da presença do par de estruturas vorticosas contrarrotativas, o regime do escoamento ainda é permanente; a esteira formada possui um comprimento limitado, é completamente laminar e o arrasto devido à pressão nessa faixa de número de Reynolds deixa de ser nulo.

Para  $40 \leq Re \leq 70$  há o surgimento de instabilidades nas camadas cisalhantes que causam o início de oscilações na esteira; a Figura 2.2c mostra uma situação aproximadamente limite para o regime permanente. Para um valor do número de Reynolds maior do que aproximadamente 70, as duas camadas cisalhantes de fluido enrolam-se em torno delas mesmas, formando as estruturas vorticosas contrarrotativas da esteira; este fenômeno é denominado na literatura de desprendimento de vórtices. Quando o número de Reynolds se encontra por volta de 90, os pontos de separação não são mais fixos e observa-se um desprendimento alternado de pares contrarrotativos de estruturas vorticosas, o que determina o caráter oscilatório da esteira de von Kármán – (Figura 2.2d); nesta situação o arrasto de pressão (arrasto de forma) é responsável por cerca de 90% do arrasto total (Figura 2.3). A Figura 2.4 mostra como variam o número de Strouhal ( $St$ ) e o coeficiente de arrasto médio ( $\bar{C}_D$ ) em função do número de Reynolds ( $Re$ ) para um cilindro circular liso. O número de Strouhal é um parâmetro adimensional utilizado para se medir a frequência de desprendimento de pares de estruturas vorticosas contrarrotativas, e é definido como:

$$St = f^* \frac{d^*}{U^*} \quad (2.1)$$

onde  $f^*$  é a frequência de desprendimento de pares de estruturas vorticosas contrarrotativas,  $d^*$  é o diâmetro do cilindro circular e  $U^*$  é a velocidade do escoamento incidente.

Bearman (1984) postulou que “a geração e o desprendimento de vórtices estão associados à interação entre as duas camadas cisalhantes e não à geometria do corpo”. A presença do corpo rombudo simplesmente modifica a referida interação. O número de Strouhal depende apenas da distância entre as duas camadas cisalhantes.

Abaixo de  $Re = 200$  a esteira continua a ser laminar e, uma vez superado este valor, a esteira fica instável e irregular. Para números de Reynolds superiores a 200,

aproximadamente, os efeitos tridimensionais se tornam importantes, mesmo para cilindros circulares com razão de aspecto elevada.

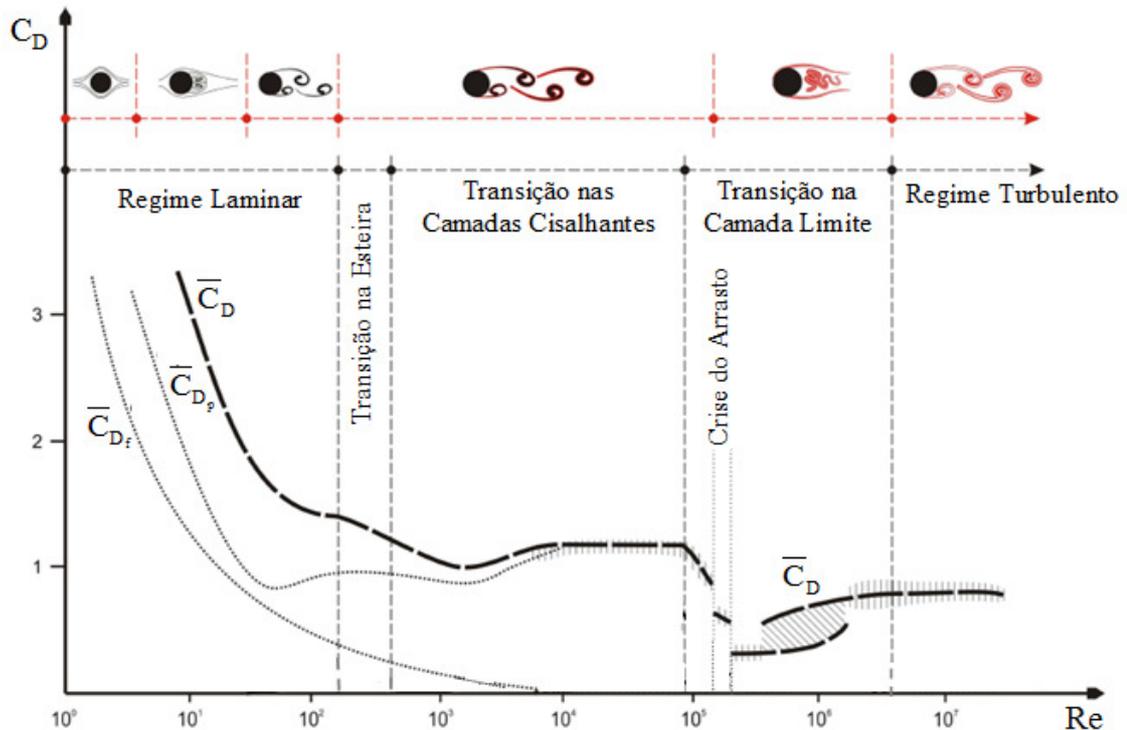


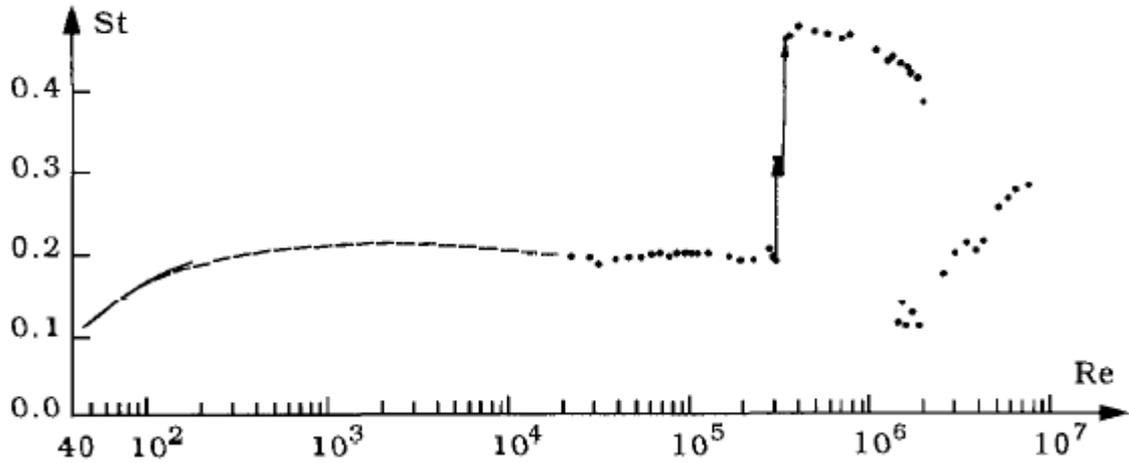
Figura 2.3 – Variação dos componentes de pressão e de atrito do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds ( $\bar{C}_{D_p}$  e  $\bar{C}_{D_f}$  representam, respectivamente, os componentes de pressão e de atrito do coeficiente de arrasto médio,  $\bar{C}_D$ ) – adaptada de Assi (2009).

O escoamento na camada limite laminar é muito vulnerável ao gradiente adverso de pressão na traseira do cilindro circular e a separação ocorre por volta de  $80^\circ$  (Figura 2.5a); a larga esteira e a pressão muito baixa na região de separação laminar causam um aumento na força de arrasto.

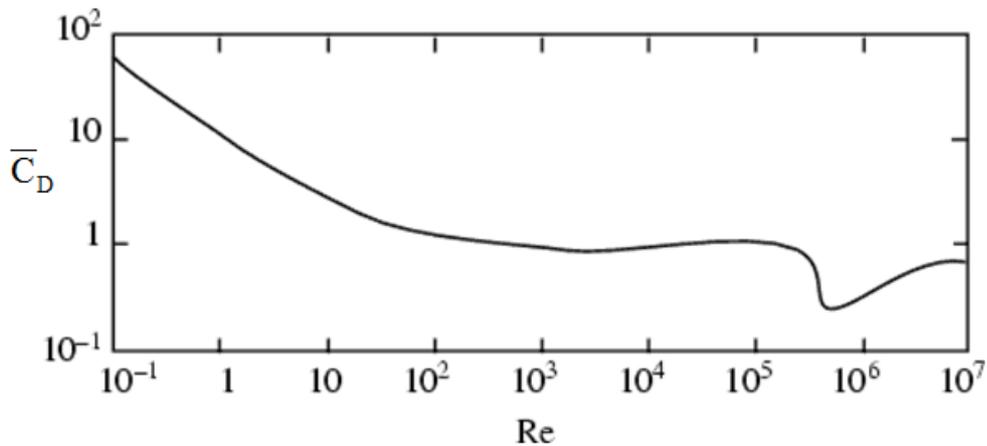
Para  $10^4 \leq Re \leq 10^5$  nota-se a existência de uma esteira turbulenta pulsante a jusante do cilindro circular (Figura 2.5b).

O comportamento do escoamento para altos números de Reynolds, porém, até  $Re < 2,0 \times 10^5$ , mostra que a camada limite permanece laminar ainda que a esteira seja completamente turbulenta; nestes casos, o ponto de separação permanece aproximadamente fixo (por volta de  $80^\circ$ , em relação ao ponto de estagnação frontal do corpo, como descrito

anteriormente), fazendo com que o valor do coeficiente de arrasto médio também permaneça constante em aproximadamente 1,20 (Achenbach, 1968).



(a)  $St \times Re$  (Sumer & Fredsøe, 2006)



(b)  $\bar{C}_D \times Re$  (<http://scienceworld.wolfram.com/physics/CylinderDrag.html>)

Figura 2.4 – Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular liso.

As modificações marcantes no escoamento ocorrem quando o número de Reynolds supera o valor crítico ( $Re \cong 3,0 \times 10^5$ ) e começa a ocorrer uma transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta; tal transição se inicia no ponto de separação e, à medida que o número de Reynolds aumenta, a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta ocorre em uma região cada vez mais próxima do ponto de estagnação frontal do cilindro circular (veja os esquemas apresentados na Figura 2.6), o que faz com que o ponto de separação se desloque para aproximadamente  $120^\circ$ . O deslocamento do ponto de separação para uma posição mais a jusante na superfície do cilindro circular

produz uma esteira mais estreita, aumentando a pressão na parte posterior do corpo e causando a chamada crise do arrasto. Este regime de número de Reynolds é muito sensível, de maneira que, em situações práticas, outros fatores irão afetar consideravelmente o escoamento, tais como: o padrão de rugosidade superficial do corpo (forma, dimensões e distribuição das saliências e protuberâncias que formam a superfície do corpo), a incidência de uma velocidade turbulenta e a superposição de um movimento oscilatório do corpo.

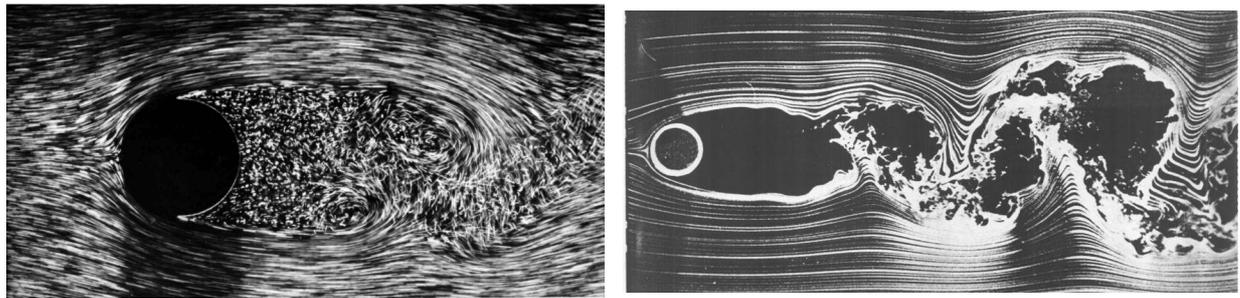
(a)  $Re = 2000$ (b)  $Re = 10000$ 

Figura 2.5 – Visualização de padrões de escoamentos turbulentos ao redor de um cilindro circular liso (retirado de van Dyke, 1982).

Como exemplo, a Figura 2.7 mostra como a rugosidade da superfície de um cilindro circular modifica os comportamentos do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal para uma ampla faixa de número de Reynolds. Nota-se que a rugosidade antecipa a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta, ou seja, a crise do arrasto é antecipada (compare as Figuras 2.4 e 2.7).

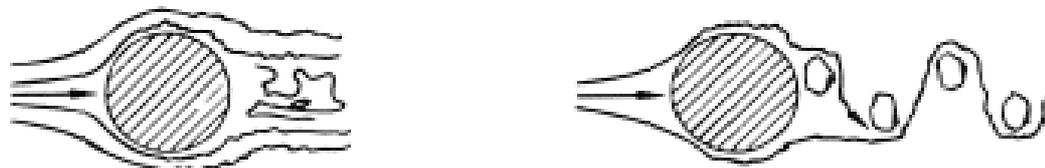
(a)  $3,0 \times 10^5 < Re < 3,5 \times 10^6$ (b)  $Re > 3,5 \times 10^6$ 

Figura 2.6 – Esquemas de escoamentos supercrítico e transcrito (Blevins, 1990).

Este efeito causado pela rugosidade do corpo é usado na fabricação de artigos esportivos (por exemplo, bolas de golfe, bolas de *baseball* e capacetes de ciclistas) e em túneis de vento típicos de escoamentos subcríticos, com o intuito de estudar padrões de escoamentos supercríticos e transcritos.

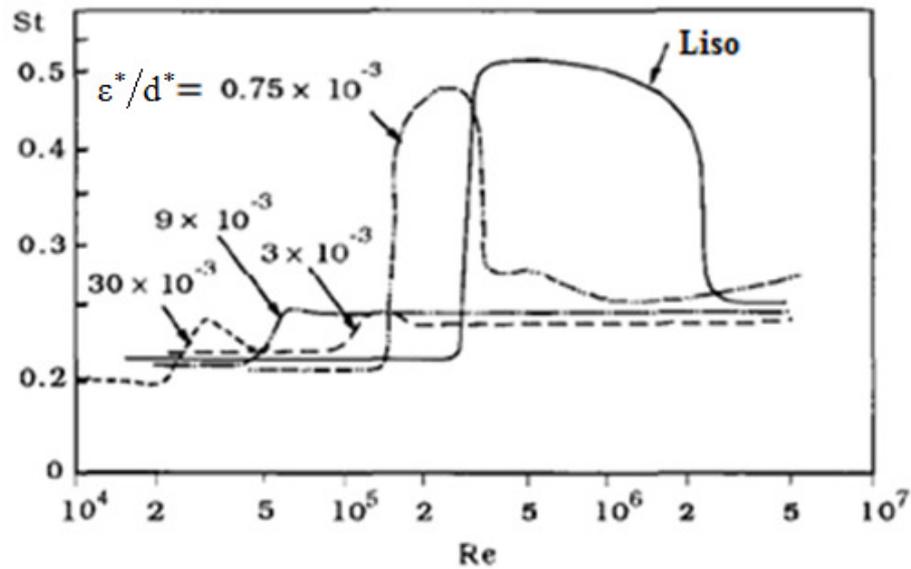
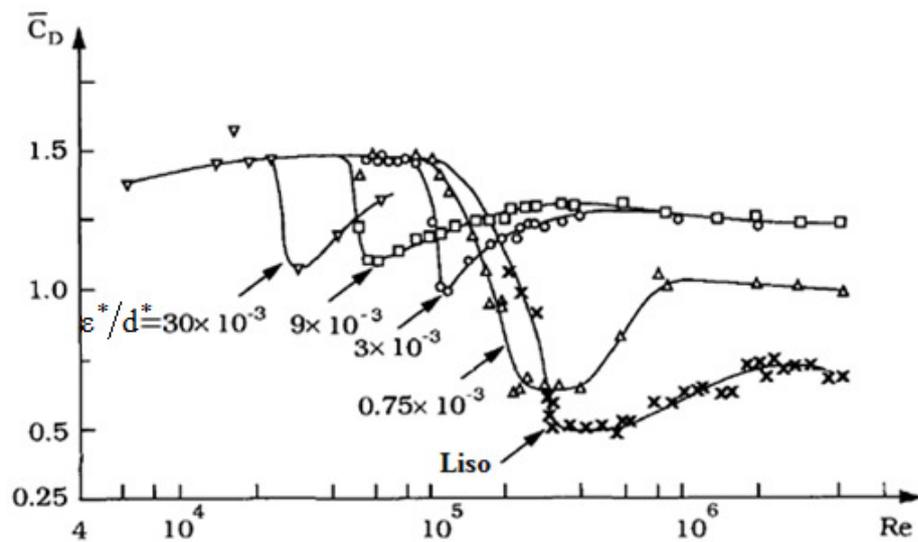
(a)  $St \times Re$  (adaptada de Achenbach & Heinecke, 1981)(b)  $\bar{C}_D \times Re$  (adaptada de Achenbach & Heinecke, 1981)

Figura 2.7 – Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular rugoso.

## 2.2 – EFEITOS DA RUGOSIDADE SUPERFICIAL

A rugosidade superficial dos corpos foi identificada como um parâmetro importante nas características dos escoamentos de fluidos por Darcy (1857). Resultados de experimentos

em tubos de várias rugosidades e a introdução do conceito de rugosidade como uma propriedade hidráulica foram importantes contribuições dadas à Mecânica dos Fluidos.

O principal efeito provocado no escoamento pela manifestação da rugosidade superficial de corpos é a modificação da estrutura da região viscosa de uma camada limite turbulenta. Considerando a estrutura clássica de três regiões da camada limite turbulenta, Nikuradse (1933) foi o primeiro pesquisador a observar que os efeitos da rugosidade permanecem restritos a uma fina camada adjacente à superfície. A região logarítmica e a região externa mantêm as mesmas características mesmo para superfícies rugosas, contudo, o escoamento torna-se dependente da escala de rugosidade e não mais da viscosidade molecular.

A principal dificuldade em trabalhar com escoamentos que sofrem a influência da rugosidade de superfícies sólidas está relacionada à própria caracterização da rugosidade, a qual pode ser determinada a partir dos seguintes parâmetros: (i) a rugosidade relativa,  $\varepsilon^*/d^*$ , onde  $\varepsilon^*$  é a altura média das protuberâncias e saliências que formam a superfície; (ii) a forma das protuberâncias e saliências; (iii) a distribuição das protuberâncias e saliências sobre a superfície, ou seja, se as protuberâncias e saliências estão dispostas sobre a superfície de maneira regular ou irregular. Na realidade, os dois últimos parâmetros constituem uma característica da superfície rugosa denominada textura.

O mecanismo de geração de turbulência em um escoamento através da rugosidade da superfície sobre a qual o escoamento incide é difícil de ser estudado detalhadamente, devido, em particular, à dificuldade de se determinar precisamente a textura de uma superfície sólida. O trabalho pioneiro em estudar o comportamento do coeficiente de arrasto em um cilindro circular de superfície rugosa foi realizado por Fage & Warsap (1929); o coeficiente de arrasto médio ( $\overline{C}_D$ ) foi medido em dois cilindros circulares com razão de aspecto  $L^*/d^* = 8,0$  e  $20,2$  e razão de bloqueio  $d^*/B^* = 0,125$  e  $0,05$ , respectivamente (veja o trabalho de Zdravkovich, 2003);  $d^*$  é o diâmetro do cilindro circular,  $L^*$  é o comprimento do cilindro circular e  $B^*$  é a distância entre as paredes do túnel de vento utilizado nos ensaios experimentais. Fage & Warsap (1929) apud Zdravkovich (2003) mostraram que, à medida que a rugosidade relativa ( $\varepsilon^*/d^*$ ) aumentava, a queda do arrasto ocorria a números de Reynolds ( $Re$ ) mais baixos.

Guven *et al.* (1980) apresentaram em um mesmo diagrama  $\overline{C}_D \times Re$  os resultados obtidos em seus testes experimentais com os resultados obtidos por Fage & Warsap (1929), Achenbach (1971) e Szechenyi (1975), mostrando resultados com até 60% de discrepância, para um mesmo valor do número de Reynolds. Estas discrepâncias entre os diversos estudos experimentais foram atribuídas a vários fatores influentes, tais como: razão de aspecto do cilindro circular, razão de bloqueio do túnel de vento, nível de turbulência do escoamento e as diversas texturas de rugosidade superficial. Na realidade, as maiores diferenças foram observadas no regime supercrítico, indicando que a rugosidade da superfície dos cilindros circulares testados tinha relevância considerável nas diferenças observadas entre os testes. Esta conclusão é devida ao fato de que, no regime supercrítico, a região viscosa da camada limite turbulenta é bastante reduzida, fazendo com que a rugosidade da superfície sólida tenha mais influência nas características do escoamento.

Achenbach & Heinecke (1981) estudaram experimentalmente o desprendimento de estruturas vorticosas sobre a superfície de um cilindro circular liso e a influência da rugosidade sobre este desprendimento em cilindros circulares de superfícies rugosas. Para o cilindro circular liso, observou-se uma supressão no desprendimento de estruturas vorticosas quando o escoamento atingiu os regimes crítico e transcrito. Em contrapartida, para todos os cilindros circulares rugosos, verificou-se um aumento do número de Strouhal ( $St$ ) no regime crítico. Entretanto, a comparação entre os resultados das simulações numéricas bidimensionais, apresentadas no Capítulo 5, com os resultados obtidos experimentalmente por Achenbach & Heinecke (1981) não é realizada, uma vez que o cilindro circular testado por estes autores possui baixa razão de aspecto ( $L^*/d^* = 3,4$ ), além de causar uma alta razão de bloqueio no túnel de vento onde os experimentos foram realizados ( $d^*/B^* = 0,16$ ).

Buresti (1981) realizou testes com dois cilindros circulares ( $L^*/d^* = 22$  e  $L^*/d^* = 12$ ) utilizando rugosidade equivalente a grãos de areia na faixa  $0,09\% < \varepsilon^*/d^* < 1,23\%$ . Foram analisados os gráficos  $\overline{C}_D \times Re$  e  $St \times Re$ . Observou-se que o coeficiente de arrasto médio apresentava uma queda e, após atingir o valor mínimo, voltava a aumentar, porém, de maneira gradual. Por outro lado, o número de Strouhal apresentou um salto ao atingir o regime crítico de escoamento (tal como observado por Achenbach & Heinecke, 1981) e, após atingir o pico máximo, voltou a diminuir, porém, de maneira gradual. O autor afirmou que o aumento gradual do coeficiente de arrasto médio e a diminuição do número de Strouhal eram reflexos de uma esteira larga formada a jusante do cilindro circular.

Zdravkovich (1990) fez uma revisão da literatura sobre escoamentos laminar e turbulento ao redor de cilindros circulares lisos e rugosos, e propôs a classificação do escoamento ao redor deste corpo em quinze regimes. Zdravkovich (1990) afirmou que os primeiros efeitos da rugosidade sobre a camada limite podem ser notados para  $350 - 500 < Re < 1,0 \times 10^5 - 2,0 \times 10^5$ , mas que estes efeitos são mais intensos para a faixa  $1,0 \times 10^5 - 2,0 \times 10^5 < Re < 6,0 \times 10^6 - 8,0 \times 10^6$ . O autor verificou ainda que, para  $Re > 8,0 \times 10^6$ , além da altura dos elementos rugosos, a textura da superfície do corpo tem influência marcante nas características do escoamento.

Kareem & Cheng (1999) distribuíram elementos rugosos cilíndricos em quatro pontos da superfície de um cilindro circular para estudar em um túnel de vento típico de escoamento subcrítico, características ou padrões de escoamentos transcíticos. Os resultados obtidos para o coeficiente de pressão e para o ângulo de separação do escoamento, para  $Re = 25400$ , correspondem a um escoamento com número de Reynolds  $7,0 \times 10^6$ . Esta estratégia utilizada por Kareem & Cheng (1999) é bastante útil, uma vez que é conhecida a dificuldade de se estudar experimentalmente escoamentos com altos valores de números de Reynolds. Tendo-se a dificuldade mencionada como motivação, o presente trabalho contribui com o desenvolvimento de um modelo de rugosidade bidimensional capaz de provocar padrões de escoamentos supercríticos a partir de escoamentos subcríticos.

Uma pesquisa na literatura mostra que vários outros trabalhos experimentais poderiam ser citados nesta Revisão Bibliográfica. No entanto, conforme Zdravkovich (1997), os estudos relacionados à rugosidade superficial de corpos se concentram, de maneira geral, na análise da influência da rugosidade da superfície nos diagramas  $\overline{C}_D \times Re$  e  $St \times Re$ , bem como na distribuição de pressão atuante sobre o corpo e nos padrões de escoamento. Assim, cada estudo experimental utiliza uma estratégia diferente para representar a rugosidade da superfície (arames, esferas, pequenas covas, dentre outros) e está sujeito a fatores influentes (nível de turbulência do escoamento, razão de aspecto do corpo, razão de bloqueio do túnel e textura da superfície) diferentes, o que produz uma grande variação nos resultados obtidos, e que, portanto, dificulta a comparação entre dois resultados experimentais distintos.

No que concerne às simulações numéricas, tal como ocorre nos estudos experimentais, uma variedade de trabalhos também poderia ser citada neste contexto. Ao contrário do que ocorre nos testes experimentais, nos testes numéricos tem-se controle total dos fatores influentes, o que permite uma fácil comparação entre dois testes numéricos distintos.

Entretanto, verifica-se que a maioria dos estudos numéricos encontrados na literatura, envolvendo aspectos referentes à rugosidade de um cilindro circular, trabalham com baixos números de Reynolds (em geral,  $Re < 10^4$ ), o que poderia ser questionado, uma vez que os efeitos da rugosidade tornam-se relevantes para altos valores do número de Reynolds. Uma das exceções é o trabalho de Kawamura *et al.* (1986), que analisaram numericamente o escoamento bidimensional que incidia sobre um cilindro circular rugoso ( $\varepsilon^*/d^* = 0,005$ ) para  $10^3 < Re < 10^5$  utilizando o Método de Diferenças Finitas, porém, sem lançar mão de um modelo de turbulência. A rugosidade não foi considerada em toda a superfície do corpo, mas apenas na faixa  $85^\circ < \theta < 120^\circ$  ( $\theta$  é o ângulo medido a partir do ponto de estagnação frontal do corpo, e no sentido horário). Os autores obtiveram com sucesso a curva  $\overline{C_D} \times Re$ , porém, para  $Re < 10^5$ , já que para números de Reynolds maiores, o Método de Diferenças Finitas apresentou instabilidades numéricas.

Apesar de trabalharem com um número de Reynolds baixo ( $Re = 9500$ ), é interessante mencionar o trabalho desenvolvido por Tsukiji & Matsubara (2003). Estes autores utilizaram o Método de Vórtices Discretos associado ao Método de Painéis e representaram a rugosidade da superfície de um cilindro circular posicionando os vórtices discretos nascentes a uma distância  $\varepsilon^*/d^* = 0,005$  acima da superfície discretizada do corpo. A crítica que se faz ao modelo de rugosidade desenvolvido por Tsukiji & Matsubara (2003) é que, ao se posicionarem os vórtices discretos nascentes acima da superfície discretizada do corpo, cria-se uma região irrotacional entre a posição de geração e a superfície sólida, o que viola a física real envolvida no problema.

Do que foi exposto, observa-se que há lacunas a serem preenchidas nos estudos envolvendo a influência da rugosidade de superfícies sólidas sobre escoamentos, principalmente no que diz respeito a trabalhos numéricos com números de Reynolds maiores do que  $10^4$ . Na realidade, a maioria dos trabalhos numéricos utiliza uma malha de discretização do domínio fluido. Por outro lado, este trabalho apresenta, como principal contribuição, um modelo que representa a rugosidade de corpos submetidos a escoamentos caracterizados por altos números de Reynolds ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ) sem alterar a discretização das superfícies sólidas. O modelo de rugosidade proposto é puramente baseado no fenômeno físico presente em escoamentos que se desenvolvem sobre superfícies rugosas, ou seja, parte-se do princípio de que a rugosidade de uma superfície sólida pode estimular o desenvolvimento da turbulência no escoamento. Assim, o modelo de rugosidade desenvolvido

é acoplado ao Método de Vórtices Discretos e associado ao modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, inicialmente adaptado ao Método de Vórtices Discretos por Alcântara Pereira *et al.* (2002), mas que foi corrigido neste trabalho (conforme discutido na Seção 1.3), para que as manifestações da turbulência no escoamento fossem consideradas de maneira apropriada. Os resultados apresentados no Capítulo 5 mostram que o modelo de rugosidade desenvolvido, associado ao citado modelo de turbulência corrigido, é capaz de reproduzir características importantes de escoamentos ao redor de um cilindro circular a altos valores do número de Reynolds; como exemplo, cita-se a crise do arrasto. Uma outra contribuição que pode ser creditada a este trabalho refere-se à obtenção da condição de aderência sobre a superfície discretizada do corpo; os sistemas lineares de equações de fontes/sumidouros (que impõe a condição de impermeabilidade) e de vórtices discretos (que impõe a condição de não deslizamento) são resolvidos de maneira simultânea, através de um processo iterativo, garantindo, assim, a condição de aderência sobre os pontos de controle da superfície discretizada do corpo. Esta última contribuição foi de suma importância para o desenvolvimento do modelo de rugosidade.

## 2.3 – O EFEITO SOLO

As características do escoamento que incide sobre um cilindro circular situado nas vizinhanças de uma superfície plana (solo) são influenciadas não só pelo número de Reynolds, mas também pela distância do cilindro circular ao solo,  $h^*/d^*$  (onde  $d^*$  é o diâmetro do cilindro circular). O fenômeno do efeito solo ainda está longe de ser completamente entendido, uma vez que existe uma grande quantidade de fatores que afetam o problema, em especial a camada limite que se forma no solo e torna a física do fenômeno ainda mais difícil de ser compreendida. Pode-se citar, ainda, a rugosidade da superfície do corpo ( $\varepsilon^*/d^*$ ) como sendo um outro parâmetro influente importante.

Um dos primeiros trabalhos que investigaram a influência da distância do cilindro circular ao solo foi feito por Taneda (1965). Estudou-se o escoamento de água ao redor de um cilindro circular de forma que a água e o solo se moviam em relação ao corpo, e com a mesma velocidade ( $U_{\text{água}} = U_{\text{solo}}$ ). Tais testes foram feitos com número de Reynolds baixo ( $Re = 170$ ). Nestas condições, verificou-se o desprendimento de vórtices do tipo Kármán a partir do corpo para  $h^*/d^* = 0,6$ , enquanto, para  $h^*/d^* = 0,1$ , apenas uma única fileira de

vórtices foi gerada. Mais detalhes dessa diminuição de geração de vorticidade à medida que a relação  $h^*/d^*$  diminui podem ser encontrados nos trabalhos de Zdravkovich (1985a) e Lin *et al.* (2005), mas apenas para números de Reynolds baixos ( $Re = 3350$  e  $Re = 780$ , respectivamente). Mais tarde, Roshko *et al.* (1975) estudaram experimentalmente o escoamento ao redor de um cilindro circular estacionado nas proximidades de uma superfície plana fixa em um túnel de vento, para  $Re = 2,0 \times 10^4$ . Foram observados os comportamentos dos coeficientes de arrasto e de sustentação médios, constatando-se que o arrasto diminuía rapidamente, ao passo que a sustentação aumentava, à medida que o corpo se aproximava do solo.

Bearman & Zdravkovich (1978) investigaram experimentalmente a distribuição do coeficiente de pressão sobre um cilindro circular estacionado nas vizinhanças de uma superfície plana fixa para  $Re = 4,8 \times 10^4$ . Constataram que a diminuição do coeficiente de arrasto médio para pequenos valores da relação  $h^*/d^*$  era acompanhada por uma pressão de base alta, e que o coeficiente de sustentação médio aumentava quando  $h^*/d^*$  decrescia para valores menores do que 0,4, devido a uma distribuição de pressão assimétrica ao redor do corpo. À medida que o corpo era afastado do solo ( $h^*/d^* \geq 0,4$ ), a distribuição de pressão se tornava simétrica e a pressão de base decrescia até  $h^*/d^* = 1,0$ . Também se mediu a velocidade nas regiões próximas ao corpo, na tentativa de investigar a frequência com que vórtices eram desprendidos na situação de efeito solo. Verificou-se que o número de Strouhal permanecia aproximadamente constante ( $St \cong 0,2$ ) para qualquer  $h^*/d^* < 0,3$ .

Buresti & Lanciotti (1979) mediram o número de Strouhal em um cilindro circular na situação de efeito solo sem movimento relativo entre o corpo e o solo. Para o cilindro circular imerso em um escoamento cujo número de Reynolds era de até  $1,9 \times 10^5$ , observou-se que a distância crítica entre o corpo e o solo era de 0,4, e que o valor do número de Strouhal ficava por volta de 0,2 para qualquer relação  $h^*/d^*$  maior do que 0,4. Assim, nota-se que a distância crítica (distância abaixo da qual a frequência de emissão de estruturas vorticosas diminui) e o valor do número de Strouhal dependem do regime do escoamento, sendo impossível definir valores precisos para tais variáveis. O único consenso parece ser o de que, para escoamentos de altos  $Re$ , o número de Strouhal diminui à medida que  $h^*/d^*$  decresce, mas, mesmo assim, este tipo de comportamento obedece a certos limites.

Apesar dos efeitos fundamentais causados pela relação  $h^*/d^*$  terem sido estudados com sucesso nos trabalhos acima citados, a influência da camada limite formada junto à superfície plana fixa é complicada e ainda não está totalmente esclarecida. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Zdravkovich (1985b), o qual observou que, nos escoamentos com  $Re$  variando de  $4,8 \times 10^4$  a  $3,0 \times 10^5$ , o arrasto decrescia rapidamente à medida que a distância do cilindro circular ao solo diminuía a um valor menor do que a espessura da camada limite formada no solo ( $\delta_s^*/d^*$ ). Com isso, concluiu-se que a variação do coeficiente de arrasto era dominada pela relação  $h^*/\delta_s^*$ , e não mais pela relação convencional  $h^*/d^*$ . Notou-se ainda, que mesmo o coeficiente de sustentação poderia ser afetado pelas condições de camada limite, apesar de ser insensível à espessura desta.

Zdravkovich (2003) estudou o comportamento do coeficiente de arrasto em um cilindro circular localizado próximo a uma superfície plana móvel; a superfície se movimentava com a mesma velocidade do escoamento incidente. O número de Reynolds do escoamento era alto ( $Re = 2,5 \times 10^5$ ) e, nas condições descritas acima, praticamente não houve formação de camada limite junto ao solo. Ao contrário de todos os estudos comentados anteriormente, o autor não verificou a queda do arrasto quando  $h^*/d^*$  diminuía. Entretanto, não ficou claro se o fato observado ocorreu devido ao alto número de Reynolds ou à inexistência de camada limite junto ao solo, ou ainda, devido a algum outro fator influente.

Nishino (2007) estudou o comportamento dos coeficientes de arrasto e de sustentação atuantes sobre um cilindro circular localizado próximo a uma esteira rolante em um túnel de vento. A esteira rolante se movimentava com a mesma velocidade do escoamento incidente, ou seja, não houve formação de camada limite junto ao solo. Foi investigado o comportamento aerodinâmico do corpo para  $Re = 4,0 \times 10^4$  e  $Re = 1,0 \times 10^5$ . Os efeitos de ponta do corpo também foram estudados, mediante o uso de placas nas suas extremidades, para tornar o escoamento aproximadamente bidimensional; a Figura 2.8 ilustra as placas fixadas nas extremidades do corpo. Para o cilindro circular sem placas (caso essencialmente tridimensional), verificou-se que o coeficiente de arrasto médio aumentava à medida que  $h^*/d^*$  diminuía, e que isto ocorria devido à inexistência de camada limite no solo, esclarecendo a dúvida deixada no trabalho de Zdravkovich (2003). Com relação às placas, à medida que a distância do corpo até a extremidade da placa aumentava, retirava-se parte da tridimensionalidade do problema; para o caso mais bidimensional estudado, o valor obtido para o coeficiente de arrasto médio foi o de 1,3, quando  $h^*/d^* = 2,00$ , o que é próximo do

valor obtido para o caso de um cilindro circular isolado, para  $Re = 1,0 \times 10^5$  (Blevins, 1984). Quando o corpo era posicionado de forma a tangenciar a extremidade da placa (caso menos bidimensional estudado), verificou-se que, para  $h^*/d^* < 0,35$ , as placas não exerciam influência alguma sobre o coeficiente de arrasto. Assim, obteve-se um valor de  $\overline{C}_D$  aproximadamente constante e igual a 0,95. No que diz respeito ao coeficiente de sustentação, a situação de movimento relativo com a velocidade do escoamento incidente igual à velocidade da esteira rolante não exerceu modificação sobre este parâmetro, em comparação com o caso de corpo e esteira rolante parados. Sendo assim, sempre que  $h^*/d^*$  diminuiu, observou-se que o  $\overline{C}_L$  aumentou, tal como observado por Roshko *et al.* (1975).



Figura 2.8 – Placas utilizadas nas extremidades do cilindro circular para tornar o escoamento aproximadamente bidimensional (Nishino, 2007).

Verifica-se que a complexidade dos fenômenos envolvidos nos mecanismos do efeito solo e a intensa interação observada entre eles faz com que grande parte das investigações realizadas utilize ferramentas de cunho experimental. Aquelas investigações que utilizam ferramentas numéricas são, geralmente, restritas a baixos valores de números de Reynolds, distanciando-se das aplicações tecnológicas de interesse.

A utilização de algoritmos baseados na descrição lagrangiana viabiliza a realização de simulações numéricas de situações de interesse prático. Com relação à ferramenta numérica em desenvolvimento que será utilizada neste trabalho, o Método de Vórtices Discretos, algumas pesquisas envolvendo o cilindro circular submetido ao efeito solo (sem movimento da superfície plana) merecem destaque.

Ricci (2002) utilizou o Método de Vórtices Discretos para analisar o escoamento de um fluido newtoniano em torno de um cilindro circular, quando disposto nas proximidades de uma superfície plana fixa (estudou-se também o comportamento dos perfis aerodinâmicos NACA 0012 e NACA 0018 sob efeito solo). A superfície do solo foi simulada com a utilização do método de imagens, no qual a condição de impermeabilidade era satisfeita automaticamente em todos os pontos da superfície real, porém, tinha o ônus de demandar maior tempo de simulação, uma vez que os vórtices discretos imagens também deviam ser considerados no cálculo da velocidade total induzida nos vórtices discretos do domínio fluido.

Moura (2007) analisou o escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente de um fluido newtoniano com propriedades constantes que incidia sobre um cilindro circular na presença do efeito solo. Diferentemente de Ricci (2002), Moura (2007) representou a superfície do solo mediante a utilização do Método de Painéis (Hess & Smith, 1967). O corpo apresentava um movimento de oscilação linear e de pequena amplitude na direção perpendicular ao escoamento incidente. Estudou-se a influência que o movimento oscilatório de pequena amplitude exercia sobre o coeficiente de sustentação, na presença do efeito solo.

Recentemente, Bimbato (2008) estudou o efeito do movimento da superfície plana usando as observações feitas por Nishino (2007). Segundo Nishino (2007), quando a superfície plana (solo) se move com a mesma velocidade do escoamento incidente, praticamente não há formação de camada limite junto ao solo. A partir destas informações, Bimbato (2008) simulou o movimento do solo deixando de gerar vórtices discretos junto a esta superfície. Esta situação representava o solo se movendo com a mesma velocidade do escoamento incidente através da supressão total da camada limite do solo, mas, fisicamente, o solo permanecia em repouso. Cabe ressaltar que nenhum modelo de turbulência foi utilizado.

Bimbato *et al.* (2009) fizeram uma comparação acerca do comportamento aerodinâmico do cilindro circular para os casos em que o solo é mantido fixo e móvel; a condição de solo móvel era representada animando-se os painéis que discretizavam a superfície plana de uma velocidade igual à do escoamento incidente. Este trabalho foi importante, na medida em que apresentou discussões a respeito de alguns dos mecanismos que governam o fenômeno do efeito solo e que influenciam diretamente o comportamento do coeficiente de arrasto nas situações de solo fixo e solo móvel. Entretanto, os aspectos relativos à turbulência não foram abordados.

Bimbato *et al.* (2010) compararam as técnicas utilizadas em Bimbato (2008) e Bimbato *et al.* (2009) para representar o movimento do solo. Os autores constataram que não há diferenças significativas entre as duas técnicas, no que se refere aos valores de cargas fluidodinâmicas. Esta conclusão é particularmente interessante, pois permite que se represente o movimento do solo deixando-se de gerar vórtices discretos junto a esta superfície (situação em que o solo e o escoamento incidente possuem a mesma velocidade), o que torna as simulações numéricas menos onerosas em termos de tempo de CPU (no cálculo do campo de velocidades deve-se considerar a contribuição de todos os vórtices discretos presentes no domínio fluido; maiores detalhes são apresentados na Seção 2.4). Assim, Bimbato *et al.* (2011) utilizaram a estratégia numérica apresentada por Bimbato (2008) e o modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem adaptado ao Método de Vórtices Discretos por Alcântara Pereira *et al.* (2002), para considerar os aspectos referentes à turbulência no escoamento ao redor de um cilindro circular que se movia em relação ao solo; verificou-se uma tendência de interrupção do desprendimento de estruturas vorticosas à medida que o cilindro circular se aproximava do solo.

Embora um único caso seja analisado, o presente trabalho vem a contribuir na medida em que acrescenta um outro fator influente na investigação do fenômeno do efeito solo: a rugosidade da superfície do corpo. O problema é estudado considerando-se, ainda, uma situação de aplicação prática da engenharia: a situação de movimento relativo. Para tanto, utiliza-se a estratégia numérica apresentada por Bimbato (2008) na representação do movimento do solo e associa-se ao Método de Vórtices Discretos um modelo submalha que calcula uma função estrutura de velocidade de segunda ordem para determinar um coeficiente de viscosidade turbulenta. Este coeficiente de viscosidade turbulenta tem como finalidade realizar a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento, as quais são resolvidas, e as escalas submalha, as quais são modeladas.

## 2.4 – O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

O Método de Vórtices Discretos moderno nasceu nos anos de 1970, e os estudiosos proeminentes foram Alexander Chorin e Anthony Leonard, nos Estados Unidos, e Conrad Rehbach, na França. O grande interesse pelo Método de Vórtices Discretos durante o começo dos anos de 1980 estava focado nos aspectos matemáticos, como as propriedades de convergência. Nos últimos anos o desenvolvimento do método foi muito rico, principalmente

com relação às questões da inclusão correta dos efeitos viscosos, do tratamento das condições de contorno sobre as fronteiras sólidas e da redução eficiente dos custos computacionais, no intuito de tornar o método apropriado para realizar simulações de escoamentos em regime não permanente. Atualmente, dois grupos de pesquisa que trabalham com o Método de Vórtices Discretos se destacam internacionalmente: (i) o grupo sediado no Instituto de Tecnologia da Suíça, chefiado por Petros Koumoutsakos, estuda, entre outros temas, o processo de formação de esteira em aeronaves e o desempenho hidrodinâmico de competidores de natação (Figura 2.9a e Figura 2.9b, respectivamente); (ii) o grupo sediado na Universidade Nacional de Yokohama, chefiado por Kyoji Kamemoto (até 2009), estuda, entre outros temas, o escoamento no interior de máquinas de fluxo e o desempenho aerodinâmico de um velocista de cem metros rasos (Figura 2.9c e Figura 2.9d, respectivamente).

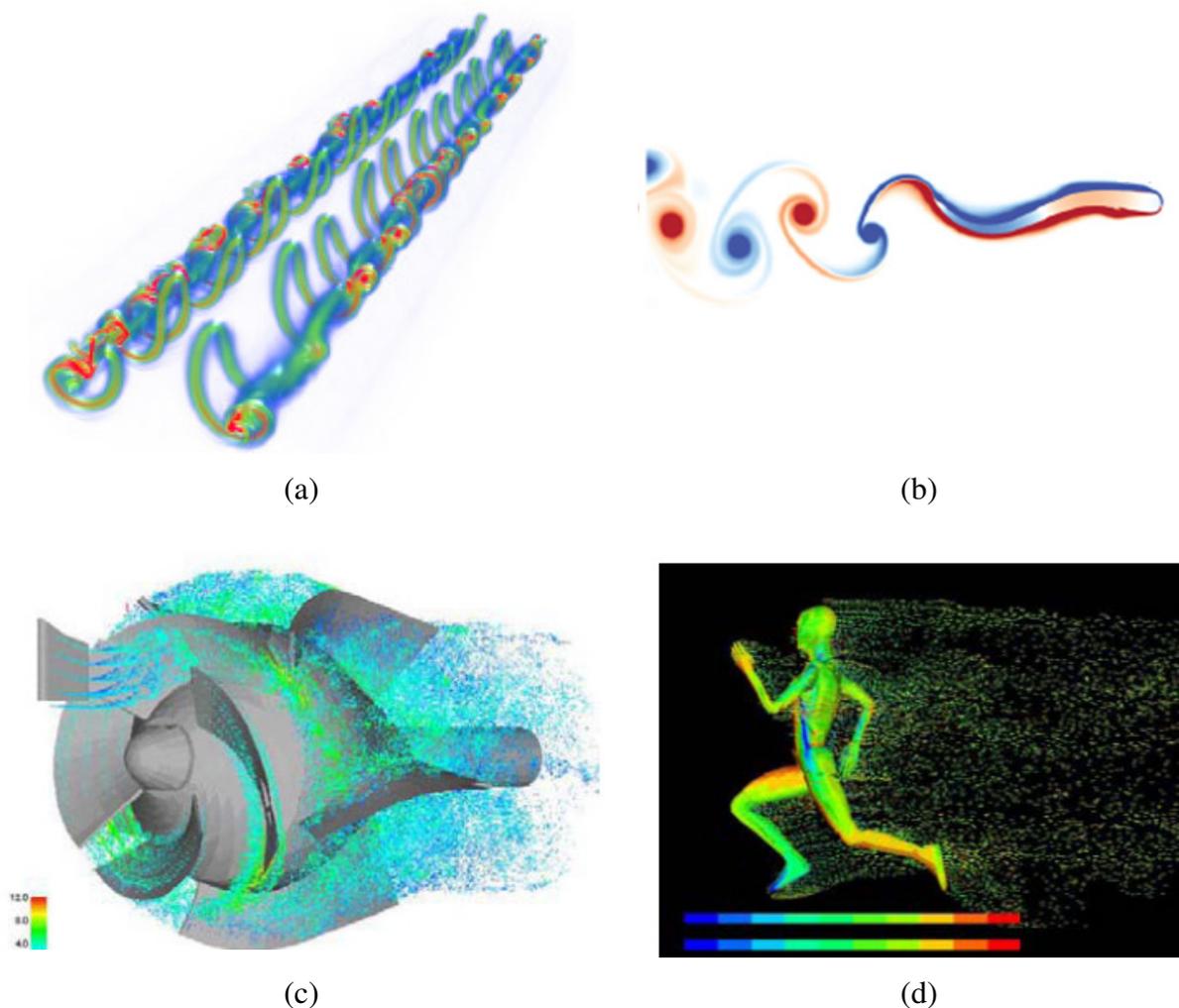
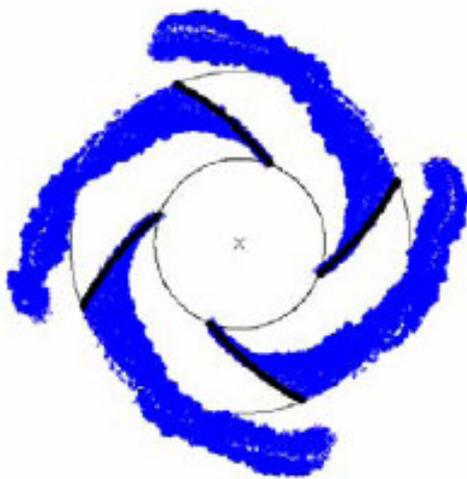
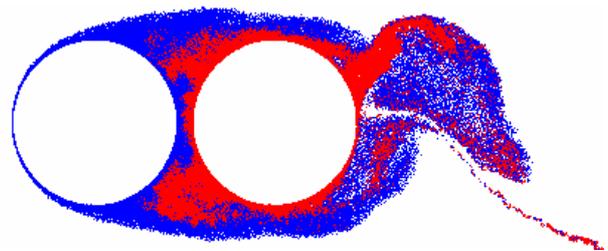


Figura 2.9 – Estudos recentes envolvendo o Método de Vórtices Discretos (Chatelain *et al.*, 2008; Gazzola *et al.*, 2011; Kamemoto, 2004; Kamemoto, 2009).

Os resultados numéricos apresentados nesta tese de doutorado foram obtidos utilizando-se a infraestrutura disponibilizada pelo Laboratório Computacional de Métodos de Partículas do IEM/UNIFEI. Este laboratório conta com um grupo de professores e de alunos que vêm desenvolvendo um Método de Vórtices Discretos desde 1998. Os problemas que vêm sendo estudados envolvem interferência entre corpos com e sem movimento relativo entre eles, efeitos de oscilação de corpos, fenômenos de transferência de calor (Método de Partículas de Calor) e aspectos de turbulência. Esta tese de doutorado contribui de maneira importante através da inclusão dos aspectos referentes à rugosidade de superfícies sólidas nos modelos bidimensionais estudados. A Figura 2.10 ilustra dois exemplos de problemas estudados por este grupo de pesquisa do IEM/UNIFEI.



(a) Rotor de uma bomba centrífuga



(b) Dois cilindros circulares *in tandem*

Figura 2.10 – Estudos envolvendo o Método de Vórtices Discretos desenvolvidos no Laboratório Computacional de Métodos de Partículas do IEM/UNIFEI (Alcântara Pereira & Hirata, 2009; Moraes, 2011).

Conforme discutido no Capítulo 1, o escoamento ao redor de um corpo rombudo, ou mesmo o escoamento ao redor de um corpo esbelto submetido a um ângulo de ataque considerável, é complexo (Figura 2.10). Reforça-se, nesta seção, que esta classe de escoamentos apresenta questões ainda em aberto, que merecem a atenção dos pesquisadores. Dois aspectos, dentre outros, dificultam a análise do escoamento ao redor de um corpo rombudo, ou de um corpo esbelto submetido a um ângulo de ataque considerável. O primeiro aspecto é representado pela esteira viscosa que se forma a jusante destes corpos (Figura 2.10b). Toda a vorticidade gerada é lançada na esteira através da camada limite onde ela se

desenvolve. Portanto, as atividades importantes que precisam ser estudadas em um escoamento externo encontram-se na região da camada limite e na região da esteira viscosa. O segundo aspecto importante, inerente aos escoamentos ilustrados na Figura 2.10, está relacionado com o caráter turbulento do escoamento.

O tratamento integrado destes dois tópicos é uma característica que se deseja encontrar nas técnicas utilizadas no estudo destes tipos de escoamento. Visando utilizar este tratamento integrado, o presente trabalho faz uso do Método de Vórtices Discretos associado a uma simulação de turbulência do tipo LES e inclui, ainda, os efeitos causados pela rugosidade superficial do corpo.

O Método de Vórtices Discretos utilizado na simulação de escoamentos corresponde a uma abordagem numérica que possui três características fundamentais. Primeiramente, as Equações de Navier-Stokes são formuladas em termos do campo de vorticidades e não do campo de velocidades. Em segundo lugar, faz-se uso de um dos teoremas de Helmholtz (Batchelor, 1967; Sherman, 1990), o qual mostra a correspondência entre os elementos de vorticidade (os vórtices discretos) e as partículas materiais de fluido; a partir desta característica, é possível submeter os vórtices discretos a um processo convectivo com a mesma velocidade das partículas fluidas, o que confere uma característica puramente lagrangiana ao método. Por último, para se obter a velocidade do fluido, faz-se uso do fato de que a vorticidade é definida por  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ ; desta forma, integrando-se o campo de vorticidades, determina-se o campo de velocidades,  $\boldsymbol{u}$ . Esta é a Lei de Biot-Savart, que permite descrever completamente o escoamento através do acompanhamento dos vórtices discretos (Batchelor, 1967).

As características fundamentais descritas anteriormente são as responsáveis tanto pelos aspectos desejáveis do Método de Vórtices Discretos quanto pelas maiores dificuldades encontradas para a sua implementação numérica. Estudar o escoamento viscoso concentrando-se no campo de vorticidades é desejável, devido ao fato de se propiciar uma melhor visualização do que ocorre no problema, especialmente em escoamentos vorticosos e em regime não permanente; além disso, a equação que rege o transporte da vorticidade na forma bidimensional é escalar. Outra vantagem é o fato do termo de pressão desaparecer da equação do movimento (Equações de Navier-Stokes); posteriormente, pode-se, como alternativa, tomar o divergente das Equações de Navier-Stokes para se recuperar, via solução integral resultante de uma equação de Poisson para a pressão, o cálculo das cargas fluidodinâmicas. Além disso, trabalhar com o campo de vorticidades sendo discretizado em

uma forma lagrangiana faz com que as condições de contorno no infinito sejam satisfeitas automaticamente, devido à característica que os vórtices discretos têm de marchar no tempo e de simular a dinâmica da vorticidade. É importante salientar que o avanço temporal dos vórtices discretos é bastante simples, uma vez que estas partículas não têm massa (estuda-se a evolução do campo de vorticidades – discretizado em uma nuvem de vórtices discretos - que, por sua vez, modifica o campo de velocidades do escoamento). Ao contrário, satisfazer estas condições nos métodos que utilizam malha pode ser uma tarefa delicada, já que o domínio fluido é limitado. Ademais, os vórtices discretos são convectados sem que haja dissipação numérica, uma vez que o termo não linear das Equações de Navier-Stokes (N-S) é tratado por um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem as trajetórias das partículas; os métodos de malha podem sofrer com essa dissipação numérica, especialmente nos casos de elevados números de Reynolds. Finalmente, os métodos que não utilizam malha são, na sua essência, mais vantajosos, já que a geração de malha é uma das etapas mais custosas dos métodos eulerianos. Por outro lado, o Método de Vórtices Discretos também possui algumas desvantagens, comentadas a seguir.

O surgimento do Método de Vórtices Discretos é quase tão antigo quanto o Método de Diferenças Finitas. Na verdade, o trabalho de Präger (1928) com distribuição de vórtices potenciais sobre uma superfície foi a origem do Método de Painéis utilizado neste trabalho (Katz & Plotkin, 1991), e largamente usado na indústria aeronáutica atual. Rosenhead (1931) apresentou o cálculo de folhas de vorticidade utilizando vórtices discretos potenciais; esse trabalho teve tanta importância que é citado até os dias atuais, sendo um estudo clássico da área. É interessante mencionar que o Método de Vórtices Discretos Potenciais de Rosenhead (1931) foi parcialmente desacreditado por volta de 1960, pela observação de que faltavam provas de que o método convergia (Birkhoff, 1962), e pelos cálculos computacionais, os quais exibiam um movimento aparentemente caótico das partículas (Birkhoff & Fisher, 1959). Este último problema foi atribuído à característica singular da velocidade induzida próximo à origem do vórtice potencial e diferentes abordagens foram propostas para solucioná-lo. Uma delas é a utilizada neste trabalho, onde cada vórtice discreto possui um núcleo viscoso, sendo a vorticidade distribuída de forma gaussiana no interior do núcleo (Chorin, 1973).

Apesar do desenvolvimento contemporâneo com o Método de Diferenças Finitas, o Método de Vórtices Discretos ainda não está entre as ferramentas de CFD (do inglês, *Computational Fluid Dynamics* – “Dinâmica dos Fluidos Computacional”) mais utilizadas. Os três principais desafios que se apresentam para que o Método de Vórtices Discretos se consolide como uma ferramenta padrão da Dinâmica dos Fluidos Computacional são: (i) a

complexidade numérica para o cálculo da velocidade usando a Lei de Biot-Savart, que requer  $NV^2$  operações do processador para  $NV$  vórtices discretos presentes na nuvem; (ii) o inconveniente de incluir os efeitos viscosos em uma formulação puramente lagrangiana, uma vez que a difusão é facilmente computada nos métodos de malha; e, (iii) o efeito da evolução lagrangiana no tempo, pois os resultados serão tão precisos quanto menores forem os incrementos de tempo utilizados; entretanto, quanto menores os incrementos de tempo, mais onerosas serão as simulações, no que diz respeito ao tempo de CPU. Cabe reforçar, ainda, que o presente trabalho lança mão de uma simulação numérica bidimensional, onde a evolução temporal do termo de deformação dos tubos de vorticidade é desprezada; caso este termo fosse considerado, ou seja, caso a simulação numérica fosse tridimensional, o tempo de CPU seria ainda mais crítico.

A primeira dificuldade mencionada tem sido resolvida com sucesso através do método de expansão em multipolos (Greengard & Rokhlin, 1987) para o cálculo da interação vórtice-vórtice. Neste aspecto, o método de expansão em multipolos é uma alternativa à Lei de Biot-Savart no que se refere à diminuição dos esforços computacionais. Tal método possibilita que o processador faça  $NV \log NV$  operações, ou até mesmo  $NV$  operações para  $NV$  vórtices discretos da nuvem, conforme discutido na tese de doutorado de Koumoutsakos (1993). A aplicação do referido método tem sido muito estudada e implementações eficientes têm sido desenvolvidas, mas deve-se ressaltar os grandes esforços dispendidos na programação do método. Com relação à inclusão dos efeitos da difusão viscosa, nas últimas três décadas uma grande quantidade de pesquisas sobre esse assunto produziu pelo menos seis esquemas diferentes para adicionar a difusão viscosa nos cálculos do Método de Vórtices Discretos. Dentre eles, citam-se os dois mais importantes: o método de avanço randômico (Chorin, 1973; Lewis, 1991) e o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado (Rossi, 1996).

O método de avanço randômico utilizado neste trabalho foi a primeira técnica aplicada ao Método de Vórtices Discretos para tratar a difusão viscosa (Chorin, 1973); este método é de simples implementação e de rápida execução. O método do crescimento do raio do núcleo do vórtice foi proposto por Leonard (1980) e utilizado por Kamemoto *et al.* (1990); entretanto, tal método foi abandonado quando Greengard (1985) provou que esta metodologia não convergia para as Equações de Navier-Stokes. Diante disso, Rossi (1996) corrigiu o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice fazendo com que os vórtices discretos crescessem até um valor máximo; ao atingirem o valor máximo, os vórtices discretos são divididos (partição), dando origem a novos vórtices discretos, cujos raios podem novamente

se expandir; o grande inconveniente do método do crescimento do raio do núcleo do vórtice corrigido por Rossi (1996) é que a técnica da partição, citada acima, aumenta demasiadamente o número de vórtices discretos presentes na nuvem, o que torna as simulações numéricas ainda mais onerosas em termos de tempo computacional.

O efeito da evolução lagrangiana no tempo tem sido resolvido pela aplicação de esquemas que calculam as velocidades dos vórtices discretos através de uma malha em cada instante de tempo. Tais esquemas têm sido utilizados há bastante tempo, e possibilitam o cálculo preciso de escoamentos complexos; no entanto, eles têm causado controvérsias pelo fato de adicionar uma malha em um método caracterizado por não utilizar malhas. Além disso, eles introduzem alguns erros de interpolação, mas que são geralmente toleráveis, a menos que se queira simular escoamentos com números de Reynolds mais altos, quando tais erros podem tornar-se uma limitação. Buscando solucionar tais inconvenientes, Barba *et al.* (2004) utilizaram o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice, em conjunto com funções de base radial, para eliminar a necessidade de utilização de malha; esta técnica se mostrou eficiente quanto à precisão dos resultados obtidos.

No que diz respeito ao cálculo das cargas fluidodinâmicas, Lewis (1991) determinou o coeficiente de pressão pela integração do termo de pressão das Equações de Navier-Stokes. He & Su (1999) complementaram a formulação de Lewis (1991) acrescentando o termo de aceleração convectiva. Um estudo relevante e afeto à precisão dos resultados é a formulação proposta por Shintani & Akamatsu (1994), oriunda dos trabalhos de Uhlman (1992) e de Kamemoto (1993), que leva em consideração a contribuição de todos os vórtices discretos presentes na esteira, diferentemente de Lewis (1991) e He & Su (1999), que consideram apenas a influência dos vórtices discretos nascentes em um dado instante de tempo. Buscando obter resultados mais precisos, o presente trabalho utiliza a formulação proposta por Shintani & Akamatsu (1994) para ser acoplada ao modelo de camada limite resolvido via Método de Vórtices Discretos com um modelo de rugosidade associado.

Na busca por resultados cada vez mais realísticos, Kamemoto (2004) fizeram uma revisão do Método de Vórtices Discretos, descrevendo a importância do desenvolvimento de modelos de turbulência para os métodos lagrangianos e destacaram os trabalhos de Leonard & Chua (1989), Mansfield *et al.* (1998), Saltara *et al.* (1998), Mansfield *et al.* (1999), Kiya *et al.* (1999) e Alcântara Pereira *et al.* (2002).

O trabalho de Alcântara Pereira *et al.* (2002) foi preparado visando à realização de simulações numéricas mais refinadas envolvendo os aspectos de turbulência, tendo como

contribuições principais: uma modelagem submalha de turbulência utilizando-se o modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem adaptado ao Método de Vórtices Discretos e o desenvolvimento e implementação de um algoritmo numérico, para incluir, no contexto do Método de Vórtices Discretos, a simulação da turbulência. A presente tese de doutorado contribui para aprimorar o algoritmo desenvolvido por Alcântara Pereira *et al.* (2002), não mais modificando o valor do raio do núcleo dos vórtices discretos em cada instante de tempo da simulação numérica. Este procedimento causa um aumento excessivo do raio do núcleo dos vórtices discretos posicionados nas regiões do escoamento onde a turbulência é considerada, o que implica em um aumento no valor do coeficiente de arrasto médio. Mustto (2004) utilizou a formulação proposta por Alcântara Pereira *et al.* (2002) limitando o valor máximo do raio do núcleo dos vórtices discretos em 2,5% do valor do raio do cilindro circular, de modo que, quando o raio do núcleo de um vórtice discreto atingia este valor, o modelo de turbulência não atuava mais nas posições ocupadas por aquele vórtice discreto. Entretanto, não se identificou melhora nos resultados.

Tennekes & Lumley (1972) são taxativos ao afirmarem que não se pode definir turbulência com precisão, propondo que um escoamento turbulento pode ser caracterizado por: irregularidade (necessidade de métodos estatísticos), alta difusividade (que, do ponto de vista de engenharia, é a característica mais importante), ocorrência a altos números de Reynolds, dissipação (a viscosidade molecular transforma o movimento turbulento de pequenas escalas em calor), meio contínuo (a menor escala da turbulência é muito maior que a escala molecular), imprevisibilidade (uma ínfima perturbação na condição inicial é o bastante para alterar a solução significativamente) e que flutuações bidimensionais do campo de vorticidades não podem se manter por si só, pois os mecanismos de geração de vorticidade são puramente tridimensionais.

No entanto, esta tese de doutorado mostra que a associação do modelo de turbulência desenvolvido por Alcântara Pereira *et al.* (2002), que foi corrigido neste trabalho, com o modelo de rugosidade proposto, permite simular escoamentos bidimensionais ao redor de um corpo rombudo hidraulicamente rugoso com um nível de precisão bastante aceitável.

Como informação final, registra-se que o Laboratório Computacional de Métodos de Partículas do IEM/UNIFEI está, atualmente, desenvolvendo um modelo de programação paralela no ambiente *FORTRAN/LINUX*. Resumidamente, objetiva-se a utilização de memória compartilhada, de maneira que todas as tarefas em execução tenham acesso a dados na memória global da máquina para a aceleração dos cálculos da interação vórtice-vórtice, dentro

de um único computador com múltiplos núcleos. Embora alguns avanços tenham sido atingidos durante o último ano, neste trabalho nenhuma técnica de paralelização do código computacional é utilizada, mantendo-se, assim, fidelidade ao início do trabalho.

## Capítulo 3

# FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

Neste capítulo desenvolve-se um modelo matemático capaz de representar algumas das principais características do escoamento turbulento que incide sobre um corpo de forma qualquer, e que se move em relação a uma superfície plana, tal como nos exemplos ilustrados na Figura 3.1.



(a)



(b)

Figura 3.1 – Exemplos de corpos submetidos ao efeito solo.

### 3.1 – GEOMETRIA E DEFINIÇÕES

A Figura 3.2 representa esquematicamente um escoamento viscoso bidimensional e incompressível que incide sobre um cilindro circular de superfície rugosa (que representa um corpo genérico) de diâmetro  $d^*$ , estacionado nas vizinhanças de uma superfície plana lisa, doravante definida como solo. Como em muitas aplicações práticas (Figura 3.1), há movimento relativo entre o corpo e o solo. No modelo físico desenvolvido neste trabalho, utiliza-se um artifício numérico para se obter uma configuração de escoamento equivalente ao caso em que a superfície plana, ou solo, possui a mesma velocidade do escoamento incidente (maiores detalhes são dados no Item 3.3.2).

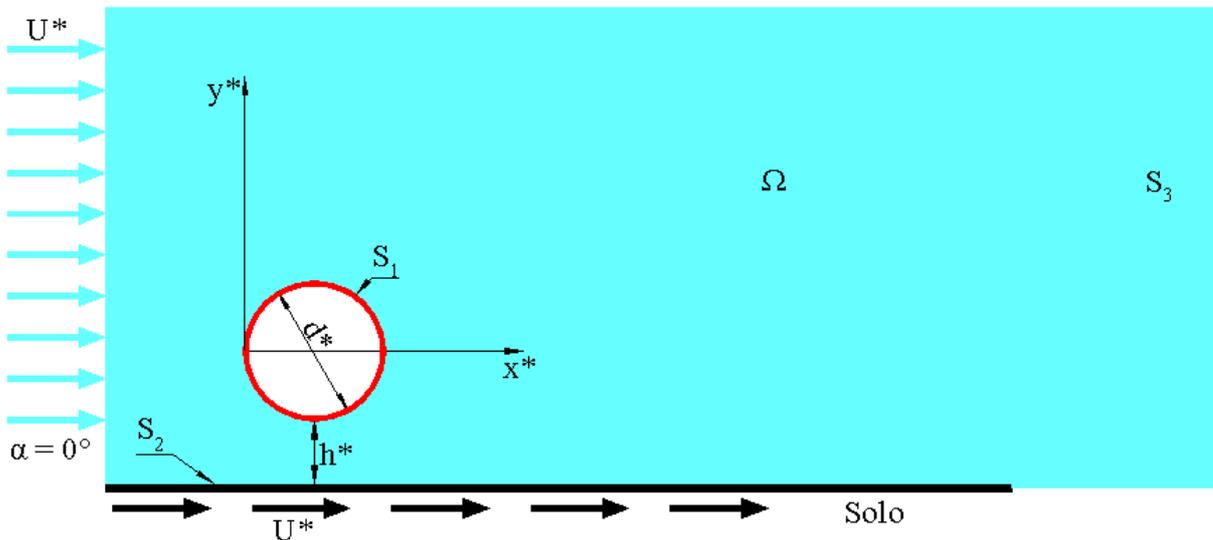


Figura 3.2 – Região fluida e definições.

Na Figura 3.2 são definidos:

$U^*$   $\equiv$  velocidade do escoamento incidente (paralela ao solo);

$\alpha$   $\equiv$  ângulo de incidência do escoamento;

$d^*$   $\equiv$  diâmetro do cilindro circular;

$h^*$   $\equiv$  distância entre o corpo e o solo;

$S_1$   $\equiv$  contorno que delimita a superfície do corpo;

$S_2 \equiv$  contorno que define a superfície do solo;

$S_3 \equiv$  fronteira definida a grandes distâncias do corpo e do solo;

$\Omega \equiv$  domínio fluido semi-infinito positivo, cujo contorno é definido por  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

## 3.2 – HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Dada a complexidade de se analisar o comportamento fluidodinâmico de um corpo de superfície rugosa submetido à presença de um escoamento turbulento, torna-se necessária a especificação de algumas hipóteses que diminuam o grau de complexidade do problema, de maneira a possibilitar a sua solução. Tais hipóteses podem ser divididas em três classes, a saber:

### a) Hipóteses relativas à geometria

**H1** – Região fluida semi-infinita e bidimensional: o escoamento está presente apenas acima do plano definido pelo solo.

**H2** – Ângulo de incidência nulo: considera-se que o escoamento incidente seja paralelo ao solo, de modo que  $\alpha = 0^\circ$ , e que o perfil de velocidades seja retangular.

### b) Hipóteses relativas às propriedades dos fluidos

**H3** – Fluido newtoniano: esta hipótese refere-se ao comportamento reológico do fluido, que especifica uma dependência linear entre a tensão tangencial aplicada sobre uma partícula fluida e a conseqüente taxa de deformação sofrida. A constante de proporcionalidade é representada pelo coeficiente de viscosidade dinâmica; como conseqüência, tem-se:

- o desenvolvimento da camada limite e, desde que haja um gradiente adverso de pressão, o escoamento descola e há a formação da esteira;

- a condição de contorno especificada sobre a superfície do corpo é a condição de aderência, que, por sua vez, pode ser dividida em condição de impermeabilidade e condição de não deslizamento.

**H4** – As propriedades do fluido são constantes: não há variação da viscosidade e da massa específica do fluido em escoamento.

### c) Hipóteses relativas ao escoamento

**H5** – Escoamento isotérmico: não há presença de gradientes de temperatura entre o fluido em escoamento e as fronteiras sólidas.

**H6** – Escoamento incompressível: os efeitos da compressibilidade são desprezados, isto é, o número de Mach ( $Ma$ ) assume valores muito menores que a unidade; em geral, tem-se  $Ma \leq 0,3$ .

## 3.3 – EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

### 3.3.1 – Equações Governantes

Todas as equações diferenciais básicas podem ser deduzidas considerando-se um volume de controle elementar, infinitesimal e fixo ( $dx^*$ ,  $dy^*$ ,  $dz^*$ ), como mostra a Figura 3.3. Nesta figura, a velocidade no centro do volume de controle é  $\mathbf{u}^*$ , a massa específica é  $\rho$  e o coeficiente de viscosidade dinâmica é  $\mu$ .

A seguir, apresentam-se duas leis básicas da Mecânica que devem ser estabelecidas para qualquer fenômeno físico que se queira modelar.

### a) Conservação da Massa

Fazendo-se um balanço de massa no volume de controle infinitesimal da Figura 3.3, expressa-se a equação da continuidade da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho \mathbf{u}^*) = 0 \quad (3.1)$$

Fazendo uso da hipótese H6 (incompressibilidade), a Equação 3.1, em notação indicial, torna-se:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (3.2)$$

onde  $u_i^*$  é o componente  $i$  do vetor velocidade do fluido e, de acordo com a hipótese H1 (problema bidimensional), sabe-se que  $i = 1, 2$ , ou seja,  $u_1$  é o componente do vetor  $\mathbf{u}^*$  na direção  $x^*$  e  $u_2$  é o componente do vetor  $\mathbf{u}^*$  na direção  $y^*$ .

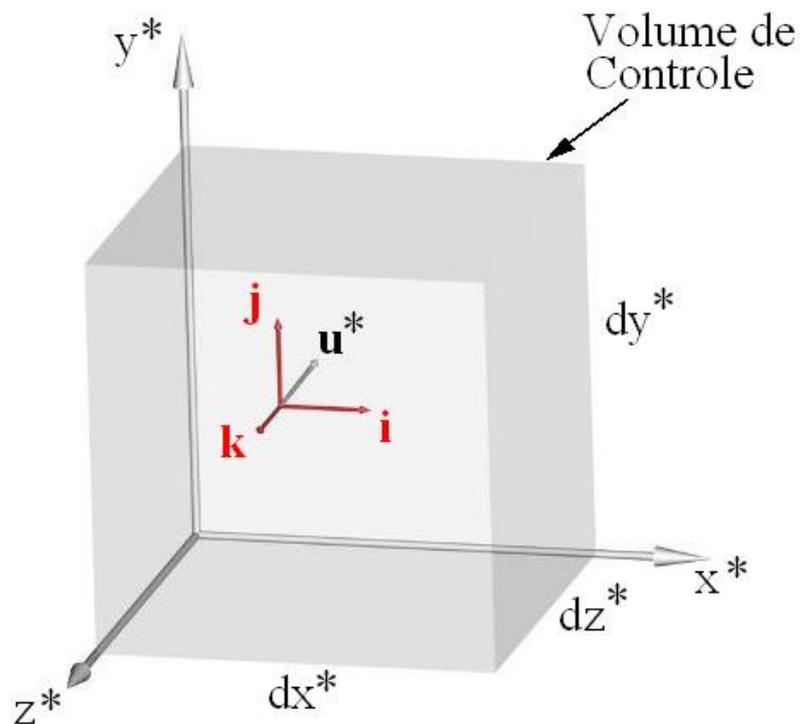


Figura 3.3 – Volume de controle elementar, infinitesimal e fixo.

## b) Balanço de Quantidade de Movimento Linear

Fazendo-se um balanço das forças atuantes sobre o volume de controle infinitesimal da Figura 3.3 (aplicação da Segunda Lei de Newton), obtém-se a equação diferencial da quantidade de movimento linear:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}^*}{dt^*} = \rho \mathbf{g}^* - \nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \mathbf{t}_{ij}^* \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{g}^*$  é o vetor aceleração da gravidade local,  $p^*$  é o campo de pressões e  $\mathbf{t}_{ij}^*$  é o tensor das tensões viscosas que atuam sobre o elemento da Figura 3.3.

Assumindo as hipóteses H3, H4 e H6 (fluido newtoniano com propriedades constantes e escoamento incompressível) e desprezando-se os efeitos de força de campo, obtém-se a seguinte forma para as Equações de Navier-Stokes (em notação indicial):

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (u_i^* u_j^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ v \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (3.4)$$

onde  $v$  é o coeficiente de viscosidade molecular (cinemática).

### 3.3.2 – Condições de Contorno

No contexto deste trabalho, basta que se fixe a atenção nas condições de contorno especificadas sobre as fronteiras sólidas não porosas e nas condições de contorno especificadas a grandes distâncias do corpo e do solo.

Como mostra a Figura 3.4, a velocidade de uma partícula de fluido ( $\mathbf{u}^*$ ) pode ser decomposta em dois componentes: o componente normal à superfície ( $u_n^*$ ) e o componente tangencial à superfície ( $u_t^*$ ).

Desta maneira, a condição de impermeabilidade, suficiente em teoria de escoamento potencial, exige que o componente normal da velocidade da partícula fluida ( $u_n^*$ ) seja igual ao componente normal da velocidade das fronteiras sólidas ( $v_n^*$ ):

$$u_n^* - v_n^* = 0, \text{ em } S_1 \text{ e } S_2 \quad (3.5)$$

Uma vez que o escoamento é limitado pela presença de superfícies sólidas, interações moleculares fazem com que o fluido em contato com as superfícies busque o equilíbrio de quantidade de movimento com tais superfícies. Portanto, a partícula de fluido em contato com uma superfície sólida não porosa, como é o caso deste estudo, assume a velocidade desta superfície; esta é a condição de aderência.

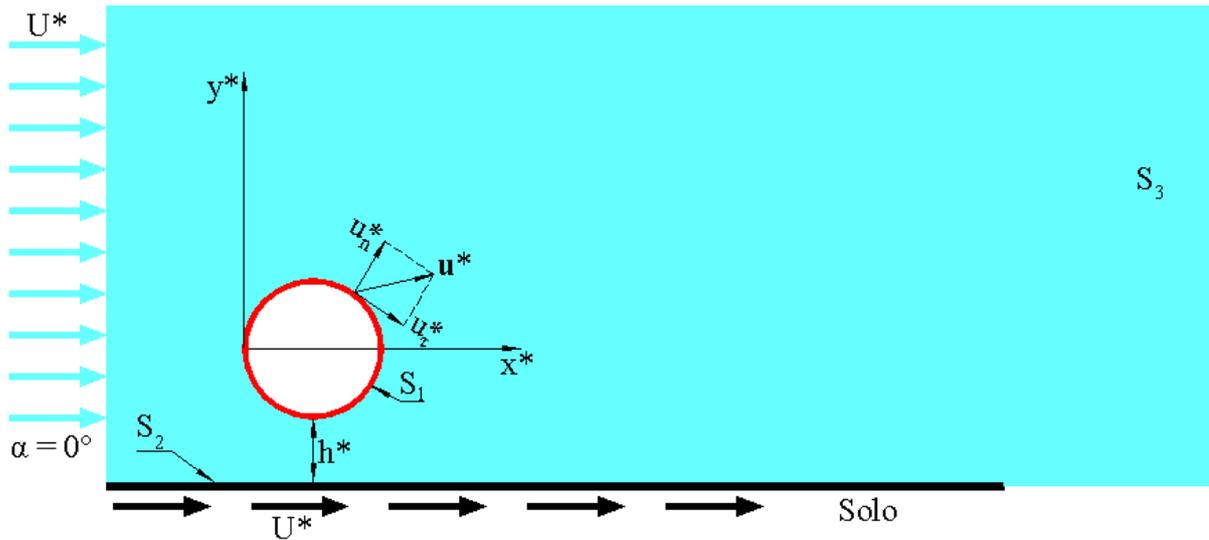


Figura 3.4 – Decomposição da velocidade de uma partícula fluida em contato com uma superfície sólida nas direções normal e tangencial.

Como já visto, os componentes normais da velocidade da partícula fluida e da velocidade das fronteiras sólidas são iguais. Conclui-se que o mesmo deve acontecer com o componente tangencial da velocidade da partícula de fluido ( $u_t^*$ ) e com o componente tangencial da velocidade da superfície  $S_1$  ( $v_\tau^*$ ); esta é a condição de não deslizamento:

$$u_\tau^* - v_\tau^* = 0, \text{ apenas em } S_1 \quad (3.6)$$

Este é o momento oportuno para descrever o artifício numérico citado na Seção 3.1, o qual permite obter uma configuração de escoamento equivalente ao caso em que a superfície plana, ou solo, se move com a mesma velocidade do escoamento incidente. O ponto de partida para a utilização de tal artifício numérico são as observações experimentais realizadas em túnel de vento por Nishino (2007), a respeito do comportamento aerodinâmico de um cilindro circular estacionado nas vizinhanças de uma esteira rolante que se move com a mesma velocidade do escoamento incidente. Conforme comentado no Capítulo 2, Nishino (2007) demonstrou que, quando uma esteira rolante se move com a mesma velocidade do

escoamento incidente, praticamente não há formação de camada limite junto a ela. Assim, a situação experimental descrita por Nishino (2007) pode ser representada por uma simulação numérica que abdique da condição de não deslizamento sobre o solo (a superfície  $S_2$ ).

A consequência de se impor a condição de não deslizamento apenas sobre a superfície do corpo reside no fato de que vórtices discretos de Lamb são gerados apenas no corpo (a superfície  $S_1$ ). Esta estratégia numérica permite representar o movimento da superfície plana, mesmo mantendo-a fisicamente fixa.

A condição de contorno representada pela Equação 3.6, imprescindível para o modelo newtoniano, tem consequências marcantes no desenvolvimento do escoamento junto a uma superfície sólida, tais como: (i) formação da camada limite; (ii) geração de vorticidade e posterior desenvolvimento da esteira viscosa; (iii) aparecimento do fenômeno da separação, desde que haja um gradiente de pressão adverso ao longo da superfície do corpo.

Além da condição de aderência, imposta através das Equações 3.5 e 3.6, assume-se que, a grandes distâncias da região em que o fenômeno físico ocorre, a perturbação causada pelas fronteiras sólidas no escoamento incidente deve se desfazer gradualmente:

$$|\mathbf{u}^*| \rightarrow U^*, \text{ em } S_3 \quad (3.7)$$

### 3.4 – ESCOAMENTOS TURBULENTOS

A grande parte dos escoamentos presentes em situações práticas envolvendo problemas de engenharia é de natureza turbulenta; portanto, a compreensão e a análise dos mecanismos físicos que envolvem esses escoamentos tornam-se imprescindíveis. Em tais escoamentos, identifica-se uma complexidade física devido ao amplo espectro de escalas com interações não lineares entre elas. A geometria que caracteriza o escoamento é o fator dominante nas grandes escalas e as pequenas escalas, dissipadoras de energia e que possuem as frequências mais altas, são controladas pelas escalas de Kolmogorov (viscosidade molecular). As escalas de Kolmogorov são as menores possíveis nos escoamentos turbulentos. Ainda, identifica-se nas pequenas estruturas mais vorticidade que nas grandes estruturas. Já nas grandes estruturas existe mais energia que nas menores escalas.

Os escoamentos turbulentos caracterizam-se pelo alto grau de complexidade à medida que o número de Reynolds ( $Re$ ) aumenta. Logo, as dificuldades para a solução das equações governantes apresentadas na seção anterior tornam-se muito grandes. Surge, portanto, a necessidade de se obter soluções aproximadas através de diversas técnicas estabelecidas de simulação da turbulência; entre elas, cita-se:

**a) Simulação Numérica Direta (DNS – *Direct Numerical Simulation*)**

Caracterizada pela utilização de uma malha de discretização suficientemente fina e que resolve todas as escalas do escoamento, exige uma grande capacidade computacional na solução do sistema de equações resultante e necessita de muitos incrementos discretos de tempo. Esta técnica é a mais direta aproximação das equações transientes de Navier-Stokes (N-S) e está restrita à solução de problemas simples de engenharia com baixos valores de  $Re$ , uma vez que os esforços computacionais requeridos são, ainda, proibitivos.

**b) Simulação via Equações Médias de Reynolds (RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*)**

Como a Simulação Numérica Direta é proibitiva (em termos de esforços computacionais) para grande parte dos problemas de engenharia da atualidade, a alternativa natural que surge consiste na simplificação dos problemas matemáticos através de modelos específicos. A metodologia da Simulação via Equações Médias de Reynolds consiste na aplicação da chamada decomposição de Reynolds, para que as grandezas do escoamento sejam decompostas em uma parte filtrada e na correspondente parte flutuante. Sobre as equações resultantes aplica-se a operação de média, onde as equações médias são calculadas num intervalo de tempo suficientemente grande e, com isto, todas as quantidades médias descrevendo flutuações tornam-se iguais a zero. As equações governantes assim obtidas são chamadas de Equações Médias de Reynolds; nas Equações de N-S observa-se o surgimento das correlações de flutuação de velocidade (denominadas de tensões de Reynolds). Estas novas tensões causam o chamado problema de fechamento da turbulência: o número de incógnitas torna-se maior que o número de equações. Para o fechamento do sistema de equações, as tensões de Reynolds devem ser determinadas de alguma forma. Pode-se desenvolver equações de transporte para as correlações de velocidades, mas novas correlações de ordem ainda maior aparecerão. A solução para este problema é a busca dos chamados

modelos de turbulência, que consistem na dedução de uma relação entre as tensões de Reynolds e alguma função do campo médio de velocidades para que o sistema de equações possa ser fechado.

### c) Simulação de Grandes Escalas (LES – *Large Eddy Simulation*)

Na Simulação de Grandes Escalas aparece o conceito de separação de escalas, mas, diferentemente do que acontece na decomposição de Reynolds (conceito de média), utiliza-se o conceito de filtragem das variáveis associadas ao escoamento. As menores escalas não são afetadas pela geometria; portanto, são consideradas homogêneas e isotrópicas em todo o domínio e para todos os tipos de escoamento; deste modo, um modelo para descrever os seus efeitos deve ser proposto. As maiores escalas, transportadoras de energia e de quantidade de movimento, são influenciadas pela geometria; portanto, são simuladas explicitamente através de um método numérico arbitrário.

## 3.4.1 – Filtragem das Equações Governantes

No problema em estudo, as expressões matemáticas que representam as duas leis da Mecânica apresentadas no Item 3.3.1 são válidas para todas as escalas de número de onda ou de comprimento de onda. A simulação direta dos fenômenos torna-se impraticável, porque exigiria uma discretização muito refinada (uma malha muito fina, no caso dos métodos eulerianos, ou um número de vórtices discretos muito grande, no caso de se utilizar o Método de Vórtices Discretos).

Na presente formulação, o conceito de simulação de grandes escalas (“*Large Eddy Simulation*” – LES) é utilizado para separar as escalas do escoamento. De acordo com Lesieur & Métais (1996), grande parte das atividades de interesse ocorrem nas grandes escalas, de maneira que os fenômenos que se manifestam nas macroescalas podem ser analisados utilizando-se um número máximo de vórtices discretos razoável. Os fenômenos que se manifestam nas microescalas devem ser considerados mediante o uso de um modelo específico para tal fim.

A técnica para a separação de escalas, em LES, é feita através de um processo de filtragem; para tanto, as variáveis presentes nas Equações 3.2 e 3.4 são separadas em uma parte dita de grandes escalas ( $\bar{f}^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ ) e em outra parte dita submalha ( $f'^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ ):

$$f^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \bar{f}^*(\mathbf{x}^*, t^*) + f'^*(\mathbf{x}^*, t^*) \quad (3.8)$$

A parte dita filtrada é dada por (Smagorinsky, 1963):

$$\bar{f}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \int_{\mathcal{V}} \bar{G}(\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*) f^*(\mathbf{y}^*, t^*) d\mathbf{y}^* \quad (3.9)$$

onde a função  $\bar{G}$  caracteriza um filtro passa-baixa, tal que as menores frequências do escoamento (ou as maiores estruturas turbilhonares) são resolvidas e as maiores frequências do escoamento (ou as menores estruturas turbilhonares) são modeladas.

O que se propõe, portanto, é a filtragem das equações governantes usando a Equação 3.9. Consequentemente, tais equações (Equação 3.2 e Equação 3.4) filtradas tomam a forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\overline{u_i^* u_j^*}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (3.11)$$

Observando as Equações 3.10 e 3.11 nota-se uma dificuldade na solução deste sistema de equações devido à presença do termo não linear ( $\overline{u_i^* u_j^*}$ , na Equação 3.11). Deste modo, faz-se necessário decompor as escalas, utilizando a Equação 3.8, o que modifica apenas o termo não linear da Equação 3.11, da seguinte forma:

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{(\bar{u}_i^* + u_i'^*)(\bar{u}_j^* + u_j'^*)} \quad (3.12)$$

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*} + \overline{\bar{u}_i^* u_j'^*} + \overline{u_i'^* \bar{u}_j^*} + \overline{u_i'^* u_j'^*} \quad (3.13)$$

Define-se o tensor de Leonard ( $L_{ij}^*$ ) como:

$$L_{ij}^* = \overline{\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*} - \bar{u}_i^* \bar{u}_j^* \quad (3.14)$$

Portanto:

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{u_i^*} \overline{u_j^*} + L_{ij}^* + \overline{u_i^* u_j^{\prime*}} + \overline{u_i^{\prime*} u_j^*} + \overline{u_i^{\prime*} u_j^{\prime*}} \quad (3.15)$$

Define-se ainda o tensor cruzado ( $C_{ij}^*$ ) e o tensor de Reynolds submalha ( $\tau_{ij}^*$ ), respectivamente por:

$$C_{ij}^* = \overline{u_i^* u_j^{\prime*}} + \overline{u_i^{\prime*} u_j^*} \quad (3.16)$$

$$\tau_{ij}^* = \overline{u_i^{\prime*} u_j^{\prime*}} \quad (3.17)$$

Deste modo, a Equação 3.13 torna-se:

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{u_i^*} \overline{u_j^*} + L_{ij}^* + C_{ij}^* + \tau_{ij}^* \quad (3.18)$$

Entretanto, Silveira Neto *et al.* (1993) verificaram através da simulação do escoamento sobre um degrau, que os tensores de Leonard ( $L_{ij}^*$ ) e cruzado ( $C_{ij}^*$ ) são desprezíveis em comparação com o tensor de Reynolds submalha ( $\tau_{ij}^*$ ), para esquemas de transporte convectivo de até terceira ordem de precisão. Verificou-se, também, que a difusão do termo  $\tau_{ij}^*$  foi quarenta vezes superior em relação aos termos  $L_{ij}^*$  e  $C_{ij}^*$ . Portanto, a inclusão ou não destes termos depende da ordem de precisão do esquema de avanço convectivo.

Como as análises feitas neste trabalho têm como base simulações numéricas com transporte convectivo de primeira ordem (esquema de avanço de Euler), é lícito desprezar a influência dos tensores de Leonard e cruzado, de modo que as Equações 3.10 e 3.11 tornam-se:

$$\frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_i^*} = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\overline{u_i^* u_j^*}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p^*}}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i^*}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \overline{u_j^*}}{\partial x_i^*} \right) - \tau_{ij}^* \right] \quad (3.20)$$

Para resolver este sistema de equações (Equação 3.19 e Equação 3.20) torna-se necessário modelar o tensor de Reynolds submalha ( $\tau_{ij}^* = \overline{u_i^{\prime*} u_j^{\prime*}}$ ). Este termo representa o transporte turbulento de quantidade de movimento entre as escalas resolvidas através do Método de Vórtices Discretos (grandes escalas) e as escalas não resolvidas (escalas submalha). O tensor anteriormente mencionado é obtido como resultado do movimento do

fluido encontrado em escalas inferiores, as quais não são resolvidas com o número de vórtices discretos empregado nas simulações deste trabalho. Portanto, ele deve ser modelado com a finalidade de recuperar as frequências mais altas do escoamento, perdidas no processo de filtragem das equações.

O trabalho de Lesieur & Métais (1996) descreve os diversos modelos submalha que podem ser utilizados na modelagem do tensor  $\tau_{ij}^*$ .

### 3.4.2 – A Simulação da Turbulência

As tensões de Reynolds submalha são a contribuição das pequenas escalas do escoamento; estas tensões não são resolvidas e necessitam de uma modelagem apropriada para serem consideradas na solução do problema. Neste trabalho, esta modelagem é feita através de um coeficiente de viscosidade turbulenta,  $\nu_t$  (Boussinesq, 1877), responsável por fazer a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento (as quais são resolvidas) e as microescalas (as quais são modeladas), até que essa energia seja dissipada através do coeficiente de viscosidade molecular ( $\nu$ ), sob a forma de calor.

Ainda de acordo com a metodologia de Smagorinsky (1963), o tensor deformação do campo filtrado é definido como:

$$\bar{S}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right) \quad (3.21)$$

e se relaciona com o tensor de Reynolds submalha através da relação:

$$\tau_{ij}^* = -2\nu_t \bar{S}_{ij}^* \quad (3.22)$$

onde  $\nu_t$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta.

Finalmente, levando as definições de Smagorinsky (1963) na Equação 3.20, obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j^*} [(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}^*] \quad (3.23)$$

Deste modo, o coeficiente de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ) deve ser calculado, podendo ser simplesmente somado ao coeficiente de viscosidade molecular ( $\nu$ ); para a obtenção do coeficiente de viscosidade turbulenta, Smagorinsky (1963) utiliza a seguinte formulação:

$$\nu_t = (C_{SM} l^*)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}^* S_{ij}^*}} \quad (3.24)$$

onde  $C_{SM} = 0,18$  e  $l^* = \sqrt{\Delta x^* \Delta y^*}$ , sendo  $\Delta x^*$  e  $\Delta y^*$ , respectivamente, o comprimento e a largura da malha.

Este modelo é inconveniente para ser combinado com o Método de Vórtices Discretos (que é um método puramente lagrangiano) por utilizar uma malha; além disso, a metodologia proposta por Smagorinsky (1963) utiliza a noção de taxa de deformação (derivadas), o que torna a sua implementação numérica inoportuna.

Chollet & Lesieur (1981) observam que não há necessidade de modelagem submalha nas regiões de poucas atividades turbulentas e que é essencial que se dissipe, nos domínios onde se identificam as escalas submalha, as manifestações locais da turbulência. Observam, ainda, que, nas escalas submalha, os fenômenos são aproximadamente homogêneos e isotrópicos.

Com estas observações, Chollet & Lesieur (1981) propõem utilizar o espectro de energia cinética local,  $E^*(K_c^*, t^*)$ , para definir o coeficiente de viscosidade turbulenta:

$$\nu_t(K_c^*, t^*) = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \sqrt{\frac{E^*(K_c^*, t^*)}{K_c^*}} \quad (3.25)$$

onde  $C_K = 1,4$  é a constante de Kolmogorov e  $K_c^*$  é o número de onda de corte. É oportuno dizer que o coeficiente de viscosidade turbulenta serve à modelagem das interações entre as grandes estruturas turbilhonares, que correspondem aos pequenos números de onda (menores que o número de onda de corte), e as estruturas submalha, relativas aos grandes números de onda (maiores que o número de onda de corte).

Usando uma relação fornecida por Batchelor (1953), Métais & Lesieur (1992) calculam o espectro de energia cinética local,  $E^*(K_c^*, t^*)$ , através do modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem ( $\overline{F_2^*}$ ):

$$\overline{F}_2^*(\mathbf{x}^*, \Delta^*, t^*) = \left\| \overline{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^*, t^*) - \overline{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^* + \mathbf{r}^*, t^*) \right\|_{\|\mathbf{r}^*\| = \Delta^*}^2 \quad (3.26)$$

Nesta definição, é importante observar que o operador “média” é aplicado entre as velocidades  $\overline{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^* + \mathbf{r}^*, t^*)$ , calculadas sobre pontos da superfície de uma esfera com o centro em  $\mathbf{x}^*$  e raio  $\|\mathbf{r}^*\| = \Delta^*$ , e a velocidade  $\overline{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^*, t^*)$ , calculada sobre o ponto do escoamento definido por  $\mathbf{x}^*$ , onde se deseja determinar a atividade turbulenta.

A função estrutura de velocidade de segunda ordem é utilizada para calcular o coeficiente de viscosidade turbulenta de maneira mais conveniente (Métais & Lesieur, 1992):

$$v_t(\mathbf{x}^*, \Delta^*, t^*) = 0,105 C_k^{-3/2} \Delta^* \sqrt{\overline{F}_2^*(\mathbf{x}^*, \Delta^*, t^*)} \quad (3.27)$$

A grande vantagem desta formulação, para ser combinada com o Método de Vórtices Discretos, é que a função estrutura de velocidade de segunda ordem utiliza flutuações de velocidade (diferenças de velocidade).

Portanto, o que se deseja é utilizar as equações da continuidade (Equação 3.19) e do movimento (Equação 3.23) para simular os fenômenos que ocorrem nas maiores escalas, com a utilização do Método de Vórtices Discretos. Os fenômenos que ocorrem nas menores escalas devem ser levados em consideração através da utilização do coeficiente de viscosidade turbulenta (Equação 3.27); este coeficiente ( $v_t$ ) é modelado via função estrutura de velocidade de segunda ordem,  $\overline{F}_2^*$ , definida pela Equação 3.26. No Item 4.5.1 é apresentada a implementação numérica.

### 3.5 – ESCOAMENTOS DE FLUIDOS SOBRE CONTORNOS SÓLIDOS

O entendimento do fenômeno do escoamento próximo de um contorno sólido é de grande valor em problemas de engenharia, porque os escoamentos reais são sempre afetados pelos contornos sólidos sobre os quais o escoamento se desenvolve. Como exemplos de aplicações, pode-se citar: (i) o resfriamento de componentes eletrônicos, que exige a movimentação do ar sobre eles; (ii) o cálculo das cargas aerodinâmicas que atuam sobre os veículos, sobre os cabos e torres das linhas de transmissão de eletricidade; (iii) o escoamento

externo aos trocadores de calor; (iv) o escoamento de água através dos grandes sistemas oceânicos utilizados para a exploração de petróleo no mar; (v) o movimento do ar através dos conglomerados de edifícios.

O modelo de escoamento potencial não pode ser aplicado para escoamentos de fluidos reais; a experiência mostra que a velocidade da camada fluida imediatamente adjacente a uma superfície sólida é nula (condição de não deslizamento expressa pela Equação 3.6). Isto indica que o perfil de velocidades deve possuir velocidade nula sobre o contorno. Para visualizar o escoamento sobre a superfície de um contorno sólido, é interessante imaginar uma camada muito fina de fluido, possivelmente tendo espessura equivalente a alguns diâmetros moleculares, aderindo à superfície de tal forma que a velocidade aumenta à medida que o ponto se afasta da superfície; a ordem de grandeza da velocidade depende da tensão de cisalhamento no fluido. Para superfícies rugosas esta análise simples pode ser comprometida, porque pequenos vórtices tendem a se formar entre as asperezas da superfície, causando instabilidade local no escoamento.

No escoamento laminar, a agitação das partículas fluidas é devida somente a ações moleculares, e estas partículas são mantidas em trajetórias essencialmente paralelas devido à ação da viscosidade molecular. Como consequência, o escoamento laminar que ocorre sobre contornos lisos ou rugosos possui essencialmente as mesmas propriedades.

Ao contrário do que ocorre no escoamento laminar, a rugosidade da superfície afetará as características do escoamento turbulento. No escoamento laminar há um predomínio das forças de origem viscosa, o que dificulta a ação das asperezas da superfície; por outro lado, o escoamento turbulento é caracterizado pelo predomínio das forças inerciais em detrimento das forças viscosas, o que faz com que os efeitos causados pela rugosidade da superfície sólida se manifestem.

Diz-se que um contorno sólido é hidraulicamente liso quando suas reentrâncias e saliências estiverem completamente submersas na subcamada viscosa (região da camada limite turbulenta onde há um predomínio da tensão molecular devido à forte ação da viscosidade), o que não produz efeito algum sobre a estrutura da turbulência (Figura 3.5a). Entretanto, se a altura da rugosidade for da ordem da espessura da subcamada viscosa, ocorre um aumento da turbulência e o escoamento é afetado (Figura 3.5b). Portanto, a espessura da subcamada viscosa é o critério para a rugosidade efetiva e, como esta espessura depende das propriedades do escoamento, pode-se considerar a mesma superfície como hidraulicamente

lisa ou hidraulicamente rugosa, dependendo da ordem de grandeza do número de Reynolds do escoamento.

Vê-se, assim, que a rugosidade de um contorno sólido pode, dependendo do número de Reynolds do escoamento, estimular o desenvolvimento da turbulência. Portanto, um modelo de rugosidade deve tornar o escoamento mais turbulento, ou seja, deve amplificar as flutuações de velocidade em torno de um dado ponto localizado nas vizinhanças do contorno sólido.

No Capítulo 4 (Item 4.2.3), apresenta-se um modelo de rugosidade baseado nas discussões físicas relatadas nesta seção.

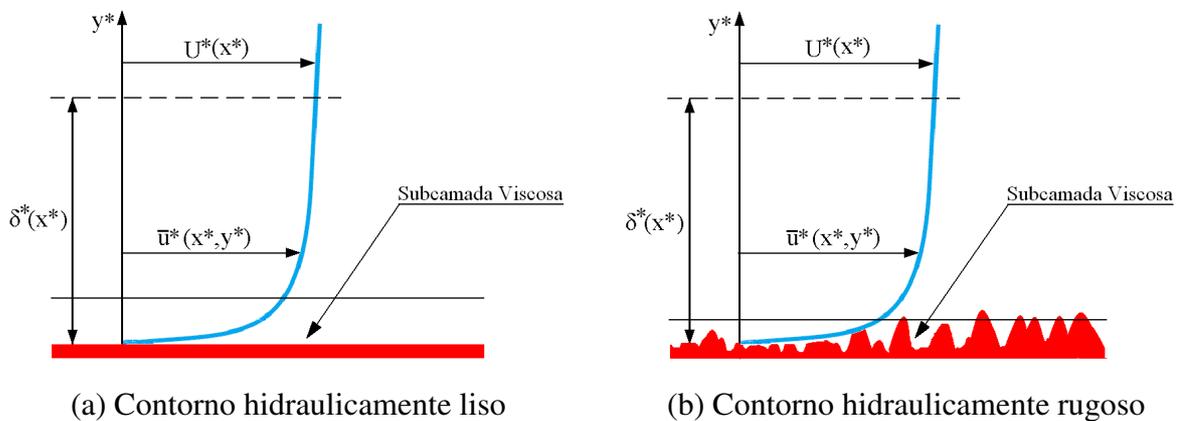


Figura 3.5 – Escoamento turbulento sobre contornos sólidos.

### 3.6 - ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção utiliza a técnica da Análise Dimensional e Semelhança, necessária na Mecânica dos Fluidos (mas que também é útil em todas as ciências físicas), tendo em vista reduzir o número de variáveis envolvidas nas análises e compactar as equações que governam o fenômeno estudado, bem como suas condições de contorno. Além das vantagens anteriormente mencionadas, a referida técnica permite que a comparação de resultados numéricos com dados experimentais se dê de uma maneira mais simples; esta última vantagem é particularmente importante, uma vez que a solução de muitos problemas é obtida com a combinação de uma análise teórica (no caso deste estudo feita através de simulações numéricas) com dados experimentais disponíveis na literatura.

Desta maneira, a adimensionalização do problema apresentado permite que os resultados do programa computacional sejam comparados com resultados de ensaios experimentais, sem a necessidade de se ter conhecimento dos valores das grandezas dimensionais envolvidas no experimento, bastando-se conhecer parâmetros adimensionais afetos ao fenômeno analisado. Para que se possa realizar a adimensionalização do problema em estudo, adotam-se as seguintes escalas como sendo as mais representativas:

$d^*$  → escala de comprimento; neste caso, o diâmetro do cilindro circular;

$U^*$  → escala de velocidade; neste caso, a velocidade do escoamento incidente;

$\frac{d^*}{U^*}$  → escala de tempo; obtida através da relação entre as escalas anteriormente definidas.

Usando as escalas previamente determinadas, as demais grandezas presentes no problema podem ser adimensionalizadas. Deste modo, obtém-se:

$x = \frac{x^*}{d^*}$ , que representa a medida da abscissa,  $x$ ;

$y = \frac{y^*}{d^*}$ , que representa a medida da ordenada,  $y$ ;

$h = \frac{h^*}{d^*}$ , que representa a menor distância entre o corpo e o solo;

$\nabla = d^* \nabla^*$ , que representa o operador Gradiente;

$\nabla^2 = d^{*2} \nabla^{*2}$ , que representa o operador Laplaciano;

$\Delta S = \frac{\Delta S^*}{d^*}$ , que representa o comprimento de cada painel plano que discretiza as fronteiras sólidas (corpo e solo);

$\sigma_0 = \frac{\sigma_0^*}{d^*}$ , que representa o raio do núcleo de um vórtice discreto de Lamb;

$\text{eps} = \frac{\text{eps}^*}{d^*}$ , que representa a distância de geração dos vórtices discretos de Lamb;

$\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{d^*}$ , que representa a rugosidade relativa da superfície do cilindro circular;

$\bar{u} = \frac{\bar{u}^*}{U^*}$ , que representa o componente da velocidade filtrada ( $\bar{u}$ ) do escoamento na direção  $x$ ;

$\bar{v} = \frac{\bar{v}^*}{U^*}$ , que representa o componente da velocidade filtrada ( $\bar{v}$ ) do escoamento na direção  $y$ ;

$\sigma = \frac{\sigma^*}{U^*}$ , que representa a densidade de fontes/sumidouros;

$\bar{p} = \frac{\bar{p}^*}{\rho U^{*2}}$ , que representa o campo de pressões filtrado;

$t = \frac{t^* U^*}{d^*}$ , que representa um instante de tempo da simulação numérica;

$\Delta t = \frac{\Delta t^* U^*}{d^*}$ , que representa o incremento de tempo da simulação numérica;

$\Gamma = \frac{\Gamma^*}{d^* U^*}$ , que representa a intensidade de um vórtice discreto de Lamb;

$\omega = \frac{\omega^* d^*}{U^*}$ , que representa o único componente não nulo do vetor vorticidade no plano;

$\text{Re} = \frac{\rho U^* d^*}{\mu}$ , que representa o número de Reynolds;

$\text{St} = f^* \frac{d^*}{U^*}$ , que representa o número de Strouhal;

O significado de algumas grandezas anteriormente definidas ficará mais bem compreendido com o desenvolvimento do texto. Levando algumas destas grandezas nas equações da continuidade (Equação 3.19) e do movimento (Equação 3.23), escrevem-se as duas leis básicas da Mecânica apresentadas no Item 3.3.1 de maneira mais compacta:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.29)$$

onde as “barras” que designam o campo de velocidades e pressões filtrados ( $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{p}$ ) foram omitidas por conveniência, e assim será feito no decorrer deste texto.

É interessante notar que, devido à adimensionalização do problema, surge o número de Reynolds nas Equações de N-S. Isto já era esperado, uma vez que, ao desprezarem-se os efeitos das forças de campo (gravitacional), o problema em estudo passa a ser governado por apenas duas forças: uma de origem inercial, e outra de origem viscosa; de fato, o número de Reynolds é um parâmetro indicador da importância relativa da força de origem viscosa,  $FV$ , quando comparada com a força inercial,  $FI$ , ou seja:

$$Re \propto \frac{FI}{FV} \quad \Rightarrow \quad Re = \frac{\rho U^* d^*}{\mu} = \frac{U^* d^*}{\nu} \quad (3.30)$$

Entretanto, na Equação 3.29 o número de Reynolds aparece com uma modificação ( $Re_c$ ). Esta modificação deve ser feita devido ao uso do modelo de turbulência descrito no Item 3.4.2, o qual utiliza um coeficiente de viscosidade turbulenta para fazer a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento e as escalas submalha; deste modo, o coeficiente de viscosidade turbulenta é somado ao coeficiente de viscosidade molecular (Equação 3.23). Como consequência, o número de Reynolds ( $Re$  - Equação 3.30) deve ser modificado, assumindo a forma:

$$Re_c = \frac{U^* d^*}{\nu + \nu_t} \quad (3.31)$$

É importante esclarecer que esta modificação do número de Reynolds só é feita nas regiões do escoamento onde as atividades turbulentas são relevantes, ou seja, onde  $\nu_t \neq 0$ ; maiores detalhes são apresentados no Capítulo 4 (Itens 4.2.3 e 4.5.1).

Adotando o mesmo procedimento usado na adimensionalização das Equações 3.19 e 3.23, adimensionalizam-se as condições de contorno (Equações 3.5, 3.6 e 3.7):

$$u_n - v_n = 0, \text{ em } S_1 \text{ e } S_2 \quad (3.32)$$

$$u_\tau - v_\tau = 0, \text{ apenas em } S_1 \quad (3.33)$$

$$|\mathbf{u}| \rightarrow 1, \text{ em } S_3 \quad (3.34)$$

A Figura 3.6 ilustra o problema adimensionalizado.

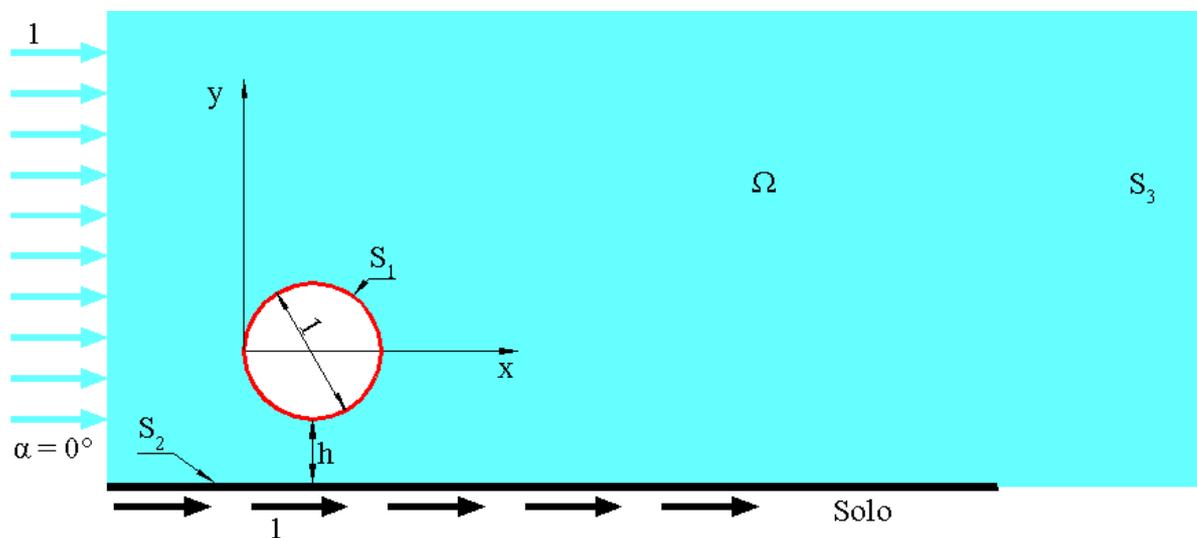


Figura 3.6 – Representação do problema adimensionalizado.

### 3.7 – EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE

Na busca da solução do sistema formado pelas Equações 3.28 e 3.29, depara-se com uma dificuldade: a presença do termo de pressão nas Equações de Navier-Stokes. Para contornar esta dificuldade, toma-se o rotacional de ambos os lados da Equação 3.29 e se utiliza a equação da continuidade; o resultado é a Equação do Transporte da Vorticidade (Batchelor, 1967):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.35)$$

onde:

$\frac{\partial \omega}{\partial t} \equiv$  taxa de variação local da vorticidade;

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega \equiv$  taxa de variação convectiva da vorticidade;

$(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} \equiv$  taxa de deformação dos tubos de vorticidade; este termo só é aplicado a escoamentos tridimensionais;

$\frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \omega \equiv$  taxa de variação difusiva da vorticidade.

Utilizando a hipótese H1 (escoamento bidimensional), o termo que representa a taxa de deformação dos tubos de vorticidade deve ser desprezado, e a Equação do Transporte da Vorticidade, para este caso, assume a forma escalar:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \omega \quad (3.36)$$

onde  $\omega$  representa o único componente não nulo do vetor vorticidade, o qual é definido como:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.37)$$

Formalmente, a Equação 3.36 é a tradicional equação da vorticidade em duas dimensões (Batchelor, 1967); a única diferença reside na definição do número de Reynolds que agora utiliza, também, o coeficiente de viscosidade turbulenta (Equação 3.31).

### 3.7.1 – A Lei de Biot-Savart

A evolução da vorticidade é governada pela Equação 3.36; de fato, o seu lado esquerdo representa a variação temporal da vorticidade, enquanto o seu lado direito representa os efeitos da viscosidade nesta evolução. Diante disso, nota-se que, para acompanhar a evolução da vorticidade no tempo, é necessário determinar o campo de velocidades. A determinação do campo de velocidades a partir de um campo de vorticidades conhecido é realizada através da Lei de Biot-Savart.

A Equação 3.28 mostra que o campo de velocidades é solenoidal, o que permite que  $\mathbf{u}$  seja escrito a partir de um vetor potencial,  $\mathbf{A}$ , com divergente nulo:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.38)$$

Nota-se que a Equação 3.38 satisfaz a equação da continuidade.

O vetor vorticidade é definido através da Equação 3.37, a qual pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.39)$$

A partir da definição do vetor potencial,  $\mathbf{A}$ , obtém-se uma equação de Poisson para este vetor:

$$\boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.40)$$

Integrando a Equação 3.40 e substituindo a solução do vetor potencial na Equação 3.38, obtém-se (Karamcheti, 1966):

$$\mathbf{u} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \times \nabla G d\Omega \quad (3.41)$$

onde  $G$  é a função de Green. Para o escoamento bidimensional em estudo (hipótese H1), tal função deve ser tomada como:

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln a \quad (3.42)$$

com  $a = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ . O índice  $i$  denota o ponto onde se deseja determinar a velocidade induzida pelo campo de vorticidades e  $a$  é a distância entre os pontos.

O gradiente da função de Green é dado por:

$$\nabla G = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \nabla a = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} \left( \frac{x - x_i}{a} \mathbf{i} + \frac{y - y_i}{a} \mathbf{j} \right) \quad (3.43)$$

ou

$$\nabla G = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - x_i) \mathbf{i} + (y - y_i) \mathbf{j}}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = -\frac{1}{2\pi a^2} (x - x_i) \mathbf{i} + (y - y_i) \mathbf{j} \quad (3.44)$$

Como se deseja calcular a velocidade induzida no ponto  $(x_i, y_i)$  pelo campo de vorticidades, deve-se utilizar, na Equação 3.41,  $\nabla_i G$  ao invés de  $\nabla G$ . Logo:

$$\nabla_i G = -\nabla G = \frac{1}{2\pi a^2} (x - x_i)\mathbf{i} + (y - y_i)\mathbf{j} \quad (3.45)$$

Finalmente, substituindo a Equação 3.45 na Equação 3.41 obtém-se a Lei de Biot-Savart, a qual relaciona o campo de velocidades com o campo de vorticidades:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} d\Omega \quad (3.46)$$

### 3.8 – CARGAS FLUIDODINÂMICAS

Entende-se por cargas fluidodinâmicas os esforços mecânicos resultantes da ação que um fluido em movimento exerce sobre a superfície de um corpo. Esta ação é exercida pela tensão que atua sobre a superfície do corpo, a qual pode ser decomposta nas direções normal (pressão  $-p$ ) e tangencial ( $\tau$ ).

De posse do campo de velocidades do escoamento (Equação 3.46), procede-se ao cálculo das cargas fluidodinâmicas. Dentre os métodos numéricos utilizados para o cálculo da pressão, destacam-se dois: o esquema de Lewis (1991), que calcula as cargas fluidodinâmicas considerando apenas a influência da vorticidade gerada em um dado instante de tempo discreto da simulação numérica e o método desenvolvido por Shintani & Akamatsu (1994), que leva em consideração a influência de toda a vorticidade presente no domínio fluido.

Devido à precisão dos resultados obtidos quando se calculam as cargas fluidodinâmicas por meio da segunda formulação, tal modelo é utilizado no cálculo da pressão deste trabalho. Para tanto, combina-se as Equações de Navier-Stokes (Equação 3.29) com uma relação vetorial, aplicando o divergente na expressão resultante desta combinação e, com o auxílio da equação da continuidade (Equação 3.28), chega-se numa equação de Poisson para a pressão. No trabalho de Ricci (2002) pode-se encontrar a dedução detalhada que resultou na formulação integral representada pela Equação 3.47, e que permite determinar o valor da pressão em um ponto genérico,  $i$ , do domínio fluido:

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}_i + \int_{S_1+S_2} \frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x_i)+n_y(y-y_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \tilde{Y} dS = - \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{v(x-x_i)-u(y-y_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \omega d\Omega + \\ - \frac{1}{\text{Re}} \int_{S_1+S_2} \frac{1}{2\pi} \frac{n_y(x-x_i)-n_x(y-y_i)}{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \omega dS \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde  $\xi$  é uma constante que assume o valor  $1/2$  nas fronteiras sólidas e  $1,0$  no domínio fluido,  $n_x$  é o componente do vetor unitário ( $\mathbf{n}$ ) na direção  $x$ ,  $n_y$  é o componente do vetor unitário ( $\mathbf{n}$ ) na direção  $y$ ,  $(x, y)$  são as coordenadas de um ponto qualquer pertencente ao domínio fluido, que induz um trabalho específico  $\tilde{Y}$  no ponto  $i(x_i, y_i)$  e  $dS$  é uma coordenada que percorre o perímetro das fronteiras sólidas.

Uma vez conhecidos os valores da incógnita  $\tilde{Y}$ , obtêm-se os valores do coeficiente de pressão,  $C_p$  (Ricci, 2002):

$$C_p = 2\tilde{Y} + 1 \quad (3.48)$$

## Capítulo 4

# MÉTODO DE SOLUÇÃO: O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

O problema formulado matematicamente no Capítulo 3 não apresenta solução analítica, o que impõe a necessidade de se procurar uma solução numérica para o mesmo, uma vez que investigações experimentais estão fora do escopo deste texto. Nestes termos, opta-se por fundamentar a solução no Método de Vórtices Discretos, o qual se distingue por utilizar uma descrição puramente lagrangiana na simulação numérica do escoamento. Para a representação das superfícies sólidas (corpo e solo) é adotado o Método de Painéis. Assim, este capítulo apresenta uma solução numérica para o problema proposto usando um código computacional desenvolvido no ambiente de programação *FORTRAN/LINUX*.

## 4.1 – DISCRETIZAÇÃO DO CAMPO DE VORTICIDADES

Há dois pontos de vista diferentes na análise de problemas em Mecânica dos Fluidos. A primeira visão preocupa-se com o campo de escoamento e é chamada de descrição euleriana. Neste método de descrição calcula-se, por exemplo, o campo de pressões  $p(x, y, z, t)$  do escoamento, e não as variações de pressão,  $p(t)$ , que uma partícula de fluido experimenta quando se move ao longo do domínio fluido.

A segunda abordagem é a chamada descrição lagrangiana, a qual dá origem aos chamados Métodos de Partículas. Este método de descrição identifica partículas (de fluido, por exemplo) e as acompanha individualmente conforme o escoamento evolui no tempo. Para ilustrar (continuando com o exemplo do campo de pressões), quando uma sonda de pressão é introduzida em um escoamento em laboratório, ela é fixada em uma posição específica  $(x, y, z)$ ; sua resposta contribui, assim, para a descrição do campo euleriano de pressões,  $p(x, y, z, t)$ . Para simular uma medida lagrangiana, a sonda deveria mover-se com a própria velocidade das partículas de fluido (White, 2002).

Neste trabalho é utilizado o Método de Vórtices Discretos, certamente o representante mais conhecido dos Métodos de Partículas, para resolver as equações que governam as grandes escalas do problema formulado no Capítulo 3. O Método de Vórtices Discretos representa a grandeza de interesse (no caso deste trabalho, a vorticidade) através de vórtices discretos de Lamb (Apêndice A), os quais são acompanhados individualmente durante todo o tempo de simulação numérica, caracterizando uma descrição puramente lagrangiana.

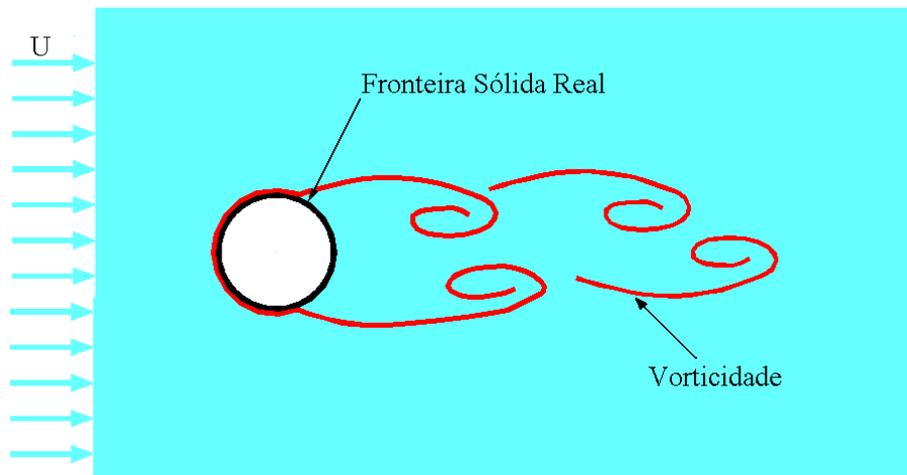
Para a representação das fronteiras sólidas presentes no problema, utiliza-se o Método de Painéis, no qual estas superfícies são simuladas com a utilização de painéis planos sobre os quais são distribuídas singularidades do tipo fontes com densidade constante; a cada painel que discretiza uma fronteira sólida é associado um único ponto (o chamado ponto de controle) sobre o qual é satisfeita a condição de aderência (expressa pelas Equações 3.32 e 3.33).

A Figura 4.1 ilustra, de maneira simplificada, como o Método de Vórtices Discretos e o Método de Painéis são utilizados para representar um problema físico real.

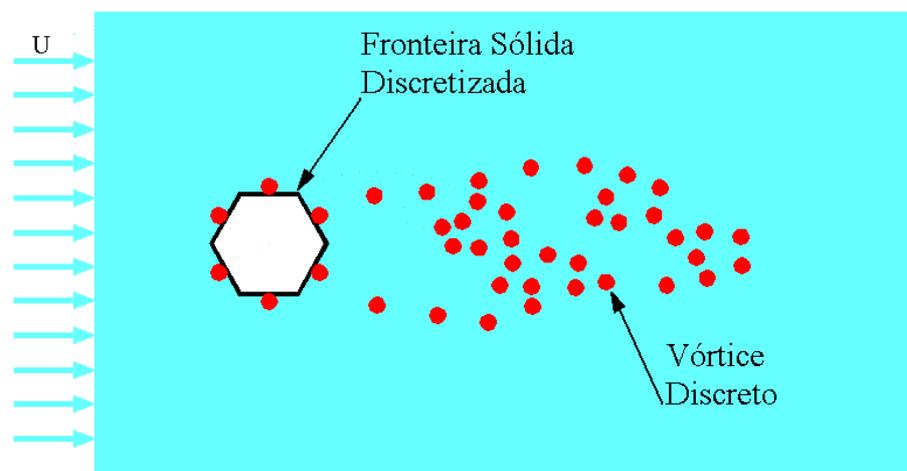
Conforme exposto no Capítulo 3, Seção 3.7, a evolução da vorticidade é governada pela Equação 3.36, reescrita abaixo:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \omega \quad (3.36)$$

O lado esquerdo da Equação 3.36 representa a variação temporal da vorticidade, enquanto o seu lado direito representa os efeitos da viscosidade nesta evolução. Em outras palavras, o lado esquerdo contém as informações necessárias para se descrever o processo de convecção da vorticidade, ao passo que o lado direito dispõe das informações necessárias para descrever a difusão desta propriedade.



(a) Processo contínuo (experimental)



(b) Processo discreto (método numérico)

Figura 4.1 – Processo de geração e desenvolvimento da vorticidade nos casos contínuo e discreto.

Com estas observações em mente, Chorin (1973), através do *Viscous Splitting Algorithm* (Algoritmo de Separação da Parte Viscosa da Equação do Transporte da Vorticidade), propôs um algoritmo no qual os efeitos convectivos fossem calculados independentemente dos efeitos difusivos, porém dentro de um mesmo incremento de tempo. Este expediente tem por finalidade simplificar a implementação numérica do Método de Vórtices Discretos, o qual é caracterizado por acompanhar todas as partículas de vorticidade (vórtices discretos) ao longo do tempo (descrição lagrangiana).

Segundo este algoritmo, a convecção da nuvem de vórtices discretos é governada pela equação:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

a qual é resolvida utilizando-se a sua versão lagrangiana (derivada substantiva,  $D\omega/Dt = 0$ ), evitando-se, assim, trabalhar com o termo convectivo,  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega$ , que é não linear.

Ainda no mesmo incremento de tempo, a equação da difusão da vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \omega \quad (4.2)$$

Como mostra a presença do número de Reynolds, o processo de difusão da vorticidade ocorre devido aos efeitos da viscosidade.

Esta divisão de efeitos constitui-se na essência do Método de Vórtices Discretos. A grande vantagem do algoritmo está no cálculo em separado dos fenômenos da convecção e da difusão da vorticidade; quando o intervalo de tempo tender a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), a solução das Equações 4.1 e 4.2 tende para a solução da Equação do Transporte da Vorticidade original (Equação 3.36).

No decorrer deste capítulo são apresentadas discussões sobre o fenômeno da geração de vorticidade, bem como sobre os problemas da convecção e da difusão desta grandeza cinemática. Ainda, como uma contribuição deste trabalho, no item referente à geração de vorticidade, é apresentado um modelo que considera os efeitos da rugosidade de fronteiras sólidas; este modelo é útil, haja visto que, em aplicações práticas, em maior ou menor grau, as superfícies sólidas sempre são rugosas e, dependendo do número de Reynolds do escoamento, a rugosidade da superfície pode influenciar o comportamento do escoamento (corpo hidráulicamente rugoso). Além disso, é apresentada a discretização da formulação integral proposta por Shintani & Akamatsu (1994) para o cálculo das cargas fluidodinâmicas.

## 4.2 – DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO: UM ENFOQUE LAGRANGIANO

De acordo com o Algoritmo de Separação da Parte Viscosa (Chorin, 1973), a convecção da nuvem de vórtices discretos é governada pela Equação 4.1, a qual mostra claramente que a vorticidade é transportada por convecção como se fosse uma partícula material de fluido. Desta maneira, a trajetória de um elemento de vorticidade é definida pela equação diferencial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  representa o vetor velocidade de uma partícula de fluido (campo de velocidades) na posição  $\mathbf{x}$ .

Como mencionado na Seção 4.1, o Método de Vórtices Discretos simula a evolução da vorticidade com a utilização de uma nuvem de vórtices discretos de Lamb. Assim, o campo de velocidades deve ser determinado na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos que compõem a nuvem para que a dinâmica da vorticidade possa ser analisada. Neste contexto, a Equação 4.3 é reescrita para cada vórtice discreto,  $k$ , que compõe a nuvem de  $NV$  vórtices discretos:

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t) \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t)$  representa o vetor velocidade do fluido calculado na posição onde se localiza o vórtice discreto  $k$ , isto é, na posição  $\mathbf{x}_k$ .

Deste modo, pode-se dividir o problema convectivo em duas etapas: (i) na primeira etapa deve-se determinar o campo de velocidades do escoamento; (ii) de posse do campo de velocidades, deve-se resolver a Equação 4.4 para os  $NV$  vórtices discretos da nuvem, para proceder ao avanço convectivo.

A determinação do campo de velocidades, por sua vez, é dividida em três partes:

- Contribuição do escoamento incidente: o escoamento incidente induz velocidade na nuvem de vórtices discretos; este cálculo é de fácil execução;

- Contribuição das fronteiras sólidas: as fronteiras sólidas presentes no problema também induzem velocidade na nuvem de vórtices discretos; neste trabalho, estas contribuições são creditadas ao corpo e ao solo, e são levadas em consideração através do Método de Painéis;
- Contribuição da nuvem de vórtices discretos: cada vórtice discreto induz, em cada instante de tempo da simulação numérica, velocidade em todos os outros vórtices discretos presentes na nuvem; nestes termos, fica evidente o alto custo computacional empregado em tais simulações quando se faz uso da Lei de Biot-Savart.

#### 4.2.1 - Contribuição do Escoamento Incidente

O escoamento incidente é representado pelo escoamento uniforme ( $U$ ). No caso deste trabalho, em particular, assume-se que o escoamento incidente seja paralelo ao solo (Figura 3.2). Deste modo, escrevendo em termos de componentes e considerando o problema adimensionalizado, tem-se:

$$u_{\infty} = U \cos \alpha = \cos \alpha = 1 \quad (4.5)$$

$$v_{\infty} = U \sin \alpha = \sin \alpha = 0 \quad (4.6)$$

#### 4.2.2 – Contribuição das Fronteiras Sólidas: O Método de Painéis

Uma das primeiras etapas da implementação do Método de Vórtices Discretos consiste na representação numérica das superfícies sólidas; no caso deste estudo, estas incluem a superfície do corpo e do solo. Para cumprir este primeiro objetivo utiliza-se o Método de Painéis.

O Método de Painéis (Katz & Plotkin, 1991), caso particular do Método de Elementos de Contorno, apresenta-se como a alternativa recomendada quando as fronteiras sólidas possuem formas quaisquer, ou seja, o Método de Painéis não se limita a representar corpos de geometria simples, como o cilindro circular, por exemplo.

Resumidamente, o Método de Painéis consiste em discretizar as fronteiras sólidas com a utilização de segmentos planos (os painéis planos) ou curvos (os painéis curvos) sobre os quais são distribuídas singularidades: vórtices são utilizados quando se deseja especificar a condição de não deslizamento (velocidade tangencial nula), enquanto as fontes são utilizadas

quando se deseja especificar a condição de impermeabilidade (velocidade normal nula) sobre as fronteiras sólidas. A principal desvantagem do Método de Painéis reside no fato de que as condições de contorno citadas (impermeabilidade e não deslizamento) são satisfeitas apenas sobre os pontos de controle dos painéis. Conforme comentado no Capítulo 1, esta característica inviabiliza o levantamento do perfil de velocidades do escoamento nas imediações da superfície real do corpo. Em contrapartida, o resultado quantitativo das grandezas de interesse é satisfatório.

Quanto à escolha das singularidades, no caso deste trabalho, pode-se escolher fontes ou vórtices, arbitrariamente. Entretanto, a aplicação da condição de contorno de Dirichlet (velocidade tangencial nula) se limita a corpos que possuem contornos fechados (Martensen, 1959); por outro lado, a aplicação da condição de contorno de Neumann (velocidade normal nula) não impõe este tipo de restrição (Hess & Smith, 1967). Sendo assim, a representação do solo deve ser feita distribuindo-se singularidades do tipo fontes, pois se trata de um contorno aberto; quanto ao corpo, este pode ser discretizado utilizando-se singularidades do tipo fontes ou vórtices. Entretanto, para simplificar a solução do problema, evita-se trabalhar com dois sistemas de equações diferentes (um sistema de equações de fontes para o solo e outro sistema de equações de vórtices para o corpo). Portanto, neste trabalho as fronteiras sólidas (corpo e solo) são discretizadas em painéis planos, sobre os quais se distribui singularidades do tipo fontes com densidade constante ao longo de cada painel, como mostra a Figura 4.2.

Os componentes na direção de  $x$  e de  $y$  da velocidade induzida no ponto  $W(x, y)$  pela distribuição de fontes com densidade constante,  $\sigma(x)$ , distribuída ao longo de uma superfície de comprimento  $(x_2 - x_1)$  valem, respectivamente (Katz & Plotkin, 1991); veja também a Figura 4.3:

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \quad (4.7)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx_0 \quad (4.8)$$

Resolvendo-se as integrais apresentadas nas Equações 4.7 e 4.8, obtém-se, respectivamente:

$$u = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (4.9)$$

$$v = \frac{\sigma(x)}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) \quad (4.10)$$

onde

$$\theta_i = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x - x_i} \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2} \quad i = 1, 2 \quad (4.12)$$

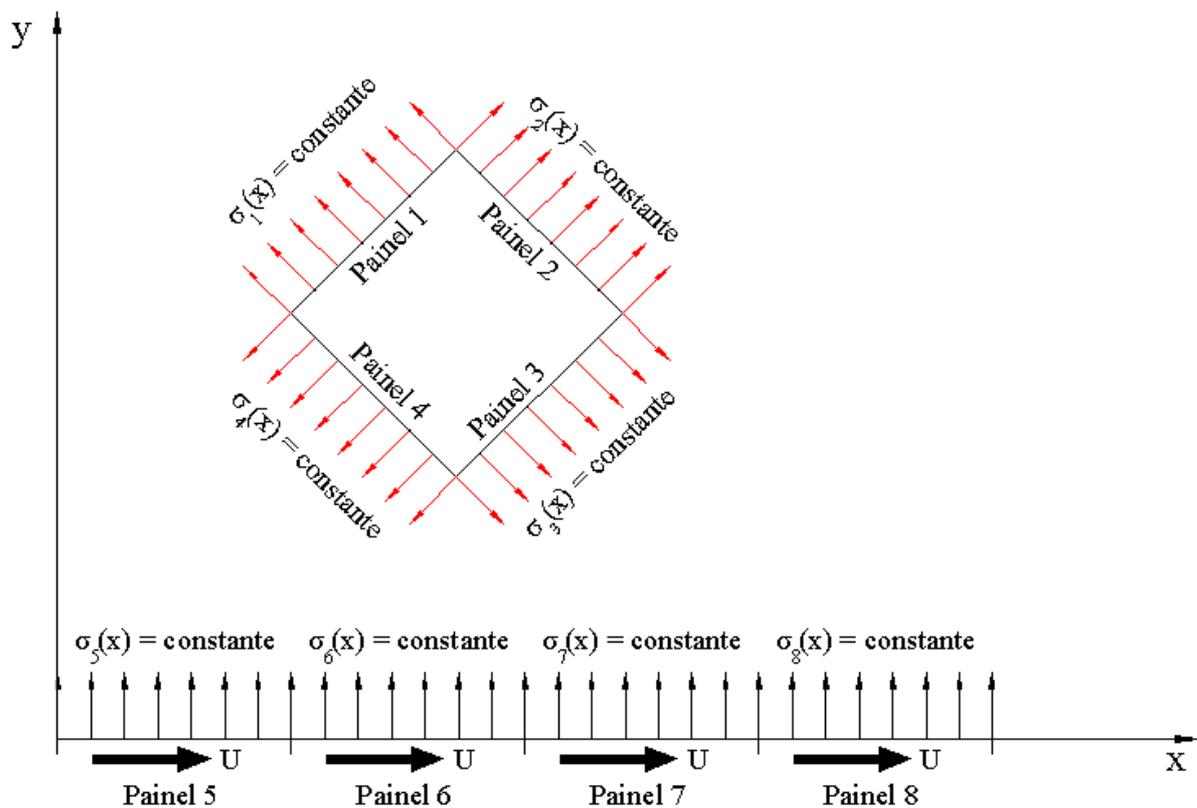


Figura 4.2 – Representação esquemática das distribuições de fontes,  $\sigma(x)$ , sobre um corpo discretizado em quatro painéis planos, localizado nas vizinhanças de uma superfície plana móvel discretizada em quatro painéis planos.

A indução de velocidades na direção  $y$  de um painel sobre ele mesmo é dada pela equação (Katz & Plotkin, 1991):

$$v\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, 0^\pm\right) = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (4.13)$$

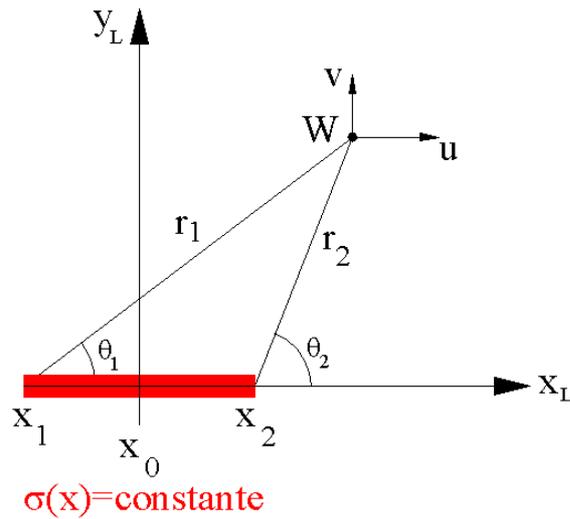


Figura 4.3 – Velocidade induzida no ponto  $W(x, y)$  por uma distribuição de fontes com densidade constante,  $\sigma(x)$ , distribuída ao longo de um painel de comprimento  $(x_2 - x_1)$ .

Quando aplicada, por exemplo, aos oito pontos de controle dos painéis do corpo e do solo, ambos representados na Figura 4.2, a condição de impermeabilidade (condição de contorno de Neumann) pode ser expressa na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 0,5 & K_{12}^f & K_{13}^f & K_{14}^f & K_{15}^f & K_{16}^f & K_{17}^f & K_{18}^f \\
 K_{21}^f & 0,5 & K_{23}^f & K_{24}^f & K_{25}^f & K_{26}^f & K_{27}^f & K_{28}^f \\
 K_{31}^f & K_{32}^f & 0,5 & K_{34}^f & K_{35}^f & K_{36}^f & K_{37}^f & K_{38}^f \\
 K_{41}^f & K_{42}^f & K_{43}^f & 0,5 & K_{45}^f & K_{46}^f & K_{47}^f & K_{48}^f \\
 K_{51}^f & K_{52}^f & K_{53}^f & K_{54}^f & 0,5 & K_{56}^f & K_{57}^f & K_{58}^f \\
 K_{61}^f & K_{62}^f & K_{63}^f & K_{64}^f & K_{65}^f & 0,5 & K_{67}^f & K_{68}^f \\
 K_{71}^f & K_{72}^f & K_{73}^f & K_{74}^f & K_{75}^f & K_{76}^f & 0,5 & K_{78}^f \\
 K_{81}^f & K_{82}^f & K_{83}^f & K_{84}^f & K_{85}^f & K_{86}^f & K_{87}^f & 0,5
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \sigma_3 \\
 \sigma_4 \\
 \sigma_5 \\
 \sigma_6 \\
 \sigma_7 \\
 \sigma_8
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 LDF_1 \\
 LDF_2 \\
 LDF_3 \\
 LDF_4 \\
 LDF_5 \\
 LDF_6 \\
 LDF_7 \\
 LDF_8
 \end{Bmatrix}
 \quad (4.14)$$

onde:

$K_{ip}^f$  é um elemento da matriz de influência de fontes que representa a velocidade normal induzida pelo painel  $p$  no ponto de controle do painel  $i$ , quando se tem uma distribuição de fontes com densidade constante (ou uniforme) e unitária sobre o painel  $p$ ;

$\sigma_p$  (incógnita do problema) é a distribuição uniforme de fontes sobre o painel  $p$ ;

$LDF_i$  é um elemento do vetor que representa a velocidade normal total induzida no ponto de controle do painel  $i$ , devido às contribuições do escoamento incidente e da nuvem de vórtices discretos de Lamb.

Para um painel genérico,  $i$ , na primeira vez em que este vetor é calculado, não há vórtices discretos no domínio fluido. Portanto,

$$\text{LDF}_i = u_\infty \sin\beta_i + v_\infty \cos\beta_i \quad (4.15)$$

onde  $\beta_i$  é o ângulo de orientação do painel  $i$ .

Na diagonal principal da matriz de influência  $K_{ip}^f$ , aparece  $K_{ii}^f = 0,5$ ; isto significa que a autoindução de um painel de fontes está sendo considerada (Katz & Plotkin, 1991).

Assim, a solução do problema consiste em obter os valores das distribuições de fontes sobre cada painel, que sejam capazes de anular o componente normal da velocidade sobre o ponto de controle de cada painel; obtidos os valores de  $\sigma(x)$ , garante-se a condição de impermeabilidade sobre cada ponto de controle da superfície discretizada.

Como mostram as Equações 4.9 e 4.10, a montagem da matriz de influência de fontes,  $K_{ip}^f$ , depende única e exclusivamente da geometria do problema. Neste trabalho, de acordo com a formulação proposta no Capítulo 3, a situação de movimento relativo entre o corpo e o solo é simulada abdicando-se da condição de não deslizamento sobre o solo, de modo a representar o movimento da esteira rolante estudada experimentalmente por Nishino (2007). Assim, o uso deste expediente permite que o corpo e o solo permaneçam em repouso e faz-se passar por estas superfícies sólidas um escoamento uniforme ( $U$ ), de maneira que a matriz de influência de fontes,  $K_{ip}^f$ , seja calculada apenas uma vez, no início da simulação numérica.

Para finalizar a primeira parte do problema, ou seja, a geração das fontes/sumidouros responsáveis por garantir a condição de impermeabilidade, deve-se verificar a condição de conservação da massa. Sabe-se que as fontes introduzem uma vazão no escoamento, ao passo que os sumidouros retiram vazão do domínio fluido. Sabe-se ainda, que as fronteiras sólidas são representadas por painéis cuja distribuição de singularidades pode ser positiva,  $\sigma(x) > 0$  (fontes), ou negativa,  $\sigma(x) < 0$  (sumidouros), dependendo da posição do painel que discretiza a superfície sólida. Para ilustrar, considere o esquema da Figura 4.2: nota-se que a distribuição de fontes sobre o painel 1 deve ser positiva para anular o componente normal da velocidade do escoamento incidente ( $\sigma_1(x) > 0$ ), enquanto a distribuição de fontes sobre o painel 2 deve ser negativa para se atingir o mesmo objetivo ( $\sigma_2(x) < 0$ ). Assim, como a massa deve ser conservada, acrescentam-se duas linhas (uma linha para o corpo e uma linha para o solo) na equação matricial de fontes (Equação 4.14) para garantir que:

$$\sum_{i=1}^{mb1} \sigma_i \Delta S_i = 0 \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=mb1+1}^m \sigma_i \Delta S_i = 0 \quad (4.17)$$

onde o produto  $\sigma_i \Delta S_i$  é a intensidade da fonte distribuída uniformemente (com densidade  $\sigma_i$ ) sobre o painel  $i$ , de comprimento  $\Delta S_i$ ,  $mb1$  é o número de painéis que discretizam a superfície do corpo e  $m$  é o número total de painéis utilizados para discretizar as superfícies do corpo e do solo ( $m = mb1 + mb2$ );  $mb2$  é o número de painéis que discretizam a superfície do solo.

Por conveniência, a Equação 4.14, em sua forma geral, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[KF]_{m \times m} \{SIGMA\}_m = \{LDF\}_m \quad (4.18)$$

### 4.2.3 – Geração de Vorticidade e Modelo de Rugosidade

Uma das consequências mais conhecidas da viscosidade é o desenvolvimento da camada limite junto das fronteiras sólidas. Outra consequência é a geração de vorticidade a partir destas fronteiras. Portanto, a vorticidade é gerada toda vez que o fluido se movimenta em relação a uma parede.

Para entender o processo de geração de vorticidade junto de paredes, considere o escoamento ao redor de um cilindro circular isolado, como mostra a Figura 4.4, e uma partícula fluida localizada no interior da camada limite.

Como mostra a Figura 4.4, nas proximidades da parede (interior da camada limite) o perfil de velocidades do escoamento não é uniforme devido à verificação da condição de aderência e à consequente presença da ação da viscosidade, o que causa um movimento de rotação nas partículas fluidas que se localizam no interior da camada limite. Este efeito de rotação mostra a presença de vorticidade nas proximidades da parede. Além disso, nota-se que a partir de certa distância da parede (fora da camada limite) o perfil de velocidades do escoamento é uniforme e uma partícula fluida localizada nessa região não sofreria rotação (apenas translação), mostrando que fora da camada limite o escoamento é irrotacional. Assim,

o mecanismo de geração de vorticidade está diretamente ligado à formação da camada limite ou, em outras palavras, à ação da viscosidade.

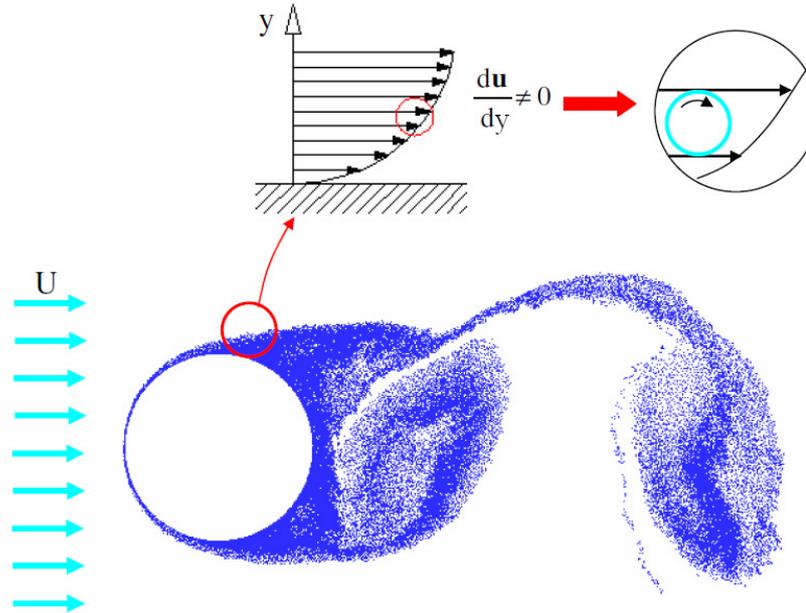


Figura 4.4 – Geração de vorticidade: um enfoque fenomenológico.

Com a finalidade de melhor entender o processo de geração de vorticidade junto das paredes, pode-se escrever as Equações de Navier-Stokes de uma maneira mais conveniente (Apêndice B):

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{\mu}{\rho} (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4.19)$$

Supondo que o escoamento realiza-se no semiplano superior de cada painel (Figura 4.3), o eixo das abscissas (eixo  $x_L$ ) representa uma superfície onde a condição de aderência deve ser especificada. A utilização desta condição na Equação 4.19 fornece a expressão (Apêndice B):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \text{em } y_L = 0 \text{ (Figura 4.3)} \quad (4.20)$$

A Equação 4.20 governa a geração de vorticidade na parede. De fato, a derivada do lado direito desta equação é interpretada como sendo o fluxo de vorticidade em  $y_L = 0$  (Figura 4.3). Como no semiplano inferior de cada painel não há fluido (interior do corpo), este fluxo de vorticidade representa a quantidade de vorticidade que está sendo gerada na

superfície. Esta observação induz à seguinte conclusão: a vorticidade deve ser gerada na quantidade certa para anular o componente tangencial da velocidade junto à superfície.

No presente trabalho a vorticidade é gerada a cada incremento de tempo ( $\Delta t$ ) da simulação numérica para anular o componente tangencial da velocidade; para isso, vórtices discretos de Lamb são posicionados de forma a tangenciar o ponto de controle de cada painel plano que representa a superfície do corpo. Para ilustrar o processo de geração de vorticidade no Método de Vórtices Discretos, considera-se a Figura 4.5.

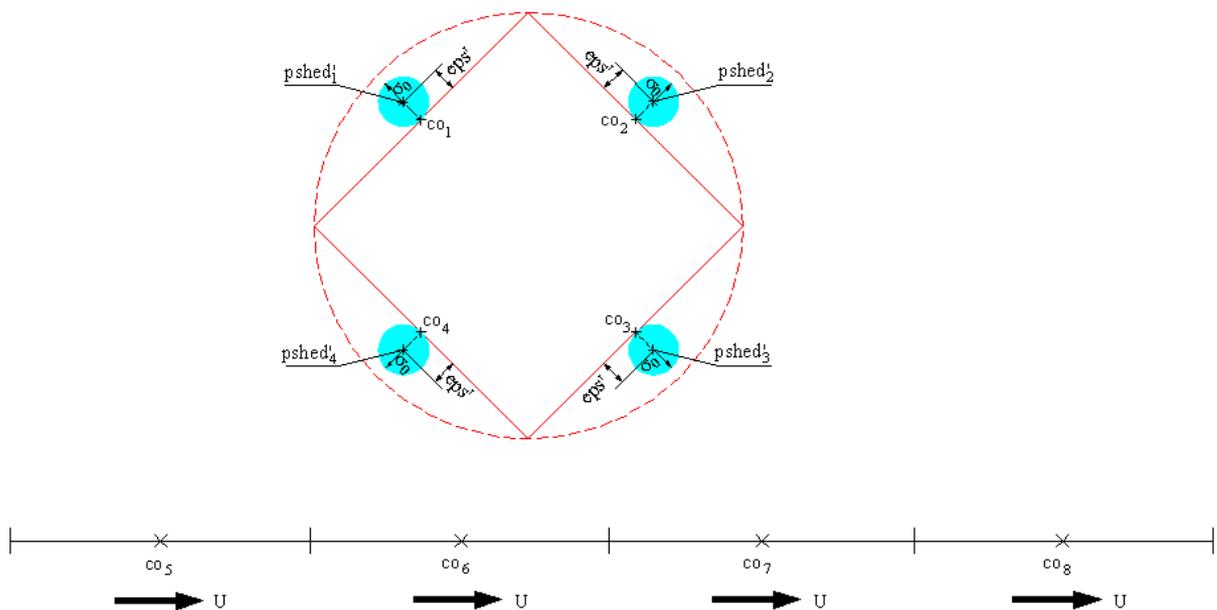


Figura 4.5 – Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis que discretizam fronteiras sólidas hidraulicamente lisas.

onde:

$co_1, co_2, \dots, co_8$  são os pontos de controle dos painéis 1, 2, ..., 8, respectivamente;

$eps'$  é a distância de geração dos vórtices discretos de Lamb, de modo que os vórtices discretos nascentes tangenciem o ponto de controle de cada painel;

$pshed'_1, pshed'_2, \dots, pshed'_4$  são os pontos de desprendimento de vórtices discretos de Lamb ligados aos painéis 1, 2, ..., 4, respectivamente;

$\sigma_0$  é o raio do núcleo dos vórtices discretos de Lamb (Apêndice A).

Na Figura 4.5 está representada, de maneira ilustrativa, a superfície discretizada de um cilindro circular hidraulicamente liso estacionado nas vizinhanças de uma superfície plana móvel. Porém, conforme descrito nos Capítulos 1 e 2, a principal contribuição desta tese de doutorado é o desenvolvimento de um modelo de rugosidade para ser incorporado ao Método de Vórtices Discretos.

O modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho se fundamenta no que foi exposto na Seção 3.5; tal modelo está intimamente ligado ao modelo de turbulência apresentado no Capítulo 3, Item 3.4.2.

Deste modo, partindo do princípio de que a rugosidade de um contorno sólido pode estimular o desenvolvimento da turbulência no escoamento, utiliza-se a ideia da função estrutura de velocidade de segunda ordem (Equação 3.26) com algumas adaptações, para determinar a atividade turbulenta existente em torno dos pontos de desprendimento de vórtices discretos associados a cada painel,  $i$ , que discretiza a superfície sólida (os pontos  $ps_{hed}'_i$  da Figura 4.5), considerando tal superfície ainda como hidraulicamente lisa. No cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, os pontos sobre os quais as velocidades são calculadas devem situar-se sobre uma semicircunferência definida por um raio  $b = 2\varepsilon - eps'$ , cujo centro coincide com o ponto de desprendimento de vórtices discretos associado a um dado painel,  $i$  (Figura 4.6). Logo:

$$\bar{F}_{2_i}(t) = \frac{1}{NR} \sum_{w=1}^{NR} \left\| \mathbf{u}_{t_i}(\mathbf{x}_i, t) - \mathbf{u}_{t_w}(\mathbf{x}_i + \mathbf{b}, t) \right\|_w^2 (1 + \varepsilon) \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{u}_i$  é a velocidade total sobre os pontos,  $NR$  indica o número de pontos (os chamados pontos rugosos) situados sobre a semicircunferência,  $\|\mathbf{b}\| = 2\varepsilon - eps'$  representa a distância entre o ponto em análise (o ponto de desprendimento referente ao painel  $i$ ,  $ps_{hed}'_i$ , supondo-se que o contorno é hidraulicamente liso; veja a Figura 4.6) e os pontos da semicircunferência (pontos  $w$ ), e o termo  $(1 + \varepsilon)$  é incorporado à expressão da função estrutura de velocidade de segunda ordem como sendo um fator de amplificação da energia cinética devido aos efeitos da rugosidade da superfície sólida.

Na sequência, calcula-se o coeficiente de viscosidade turbulenta associado ao ponto de desprendimento de vórtices discretos de cada painel,  $i$ , que discretiza a fronteira sólida onde se deseja contabilizar os efeitos da rugosidade da superfície (compare com a Equação 3.27):

$$v_{t_i}(t) = 0,105 C_k^{-3/2} \sigma_{0_k} \sqrt{\bar{F}_{2_i}(t)} \quad (4.22)$$

onde  $\sigma_{0_k}$  é o raio do núcleo do vórtice discreto,  $k$ , posicionado no ponto de desprendimento do painel  $i$ , de maneira a tangenciar o ponto de controle deste painel (Figura 4.6).

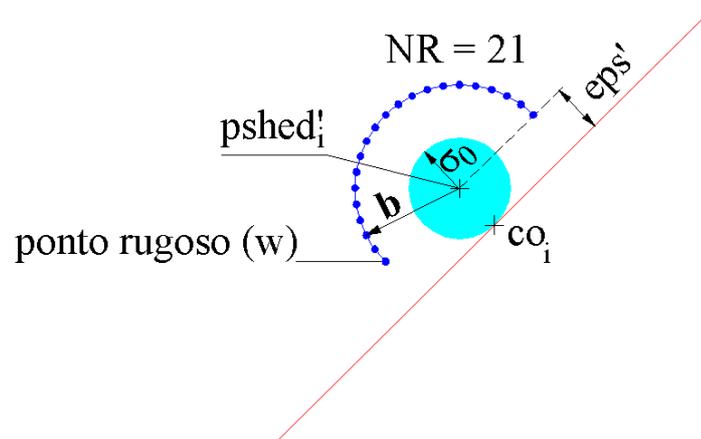


Figura 4.6 – Influência da rugosidade de superfícies sólidas na determinação da atividade turbulenta do escoamento.

Como o coeficiente de viscosidade turbulenta deve ser adicionado ao coeficiente de viscosidade molecular, o número de Reynolds deve ser modificado:

$$Re_{c_i}(t) = \frac{U^* d^*}{\nu + \nu_{t_i}(t)} \quad (4.23)$$

É importante enfatizar que a modificação do número de Reynolds expressa pela Equação 4.23 é local, ou seja, tal modificação ocorre apenas nos pontos de desprendimento de vórtices discretos onde os efeitos da rugosidade são relevantes. Entretanto, como o raio do núcleo do vórtice discreto depende do número de Reynolds (Apêndice A), o qual é modificado pelo coeficiente de viscosidade turbulenta, conclui-se que o raio do núcleo do vórtice discreto também deve ser modificado, de maneira a considerar os efeitos da rugosidade no processo de geração de vórtices discretos. Assim:

$$\sigma_{0_{c_k}}(t) = 4,48364 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re} \left( 1 + \frac{\nu_{t_i}(t)}{\nu} \right)} \chi \quad (4.24)$$

onde  $\sigma_{0c_k}$  é o raio do núcleo do vórtice discreto,  $k$ , que é posicionado no ponto de desprendimento do painel  $i$ , considerando, agora, os efeitos da rugosidade, e  $\chi$  é definido de acordo com o exposto no Apêndice A, Seção A.2.

Como cada vórtice discreto de Lamb deve tangenciar o ponto de controle do painel que lhe dá origem, a posição de desprendimento dos vórtices discretos deve ser modificada. Logo, em cada instante de tempo da simulação numérica os vórtices discretos são posicionados em pontos de desprendimento diferentes, em função da rugosidade da superfície e do conseqüente efeito da turbulência causado por esta rugosidade. A Figura 4.7 ilustra o processo de geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças da superfície discretizada de um corpo hidraulicamente rugoso (compare com a Figura 4.5).

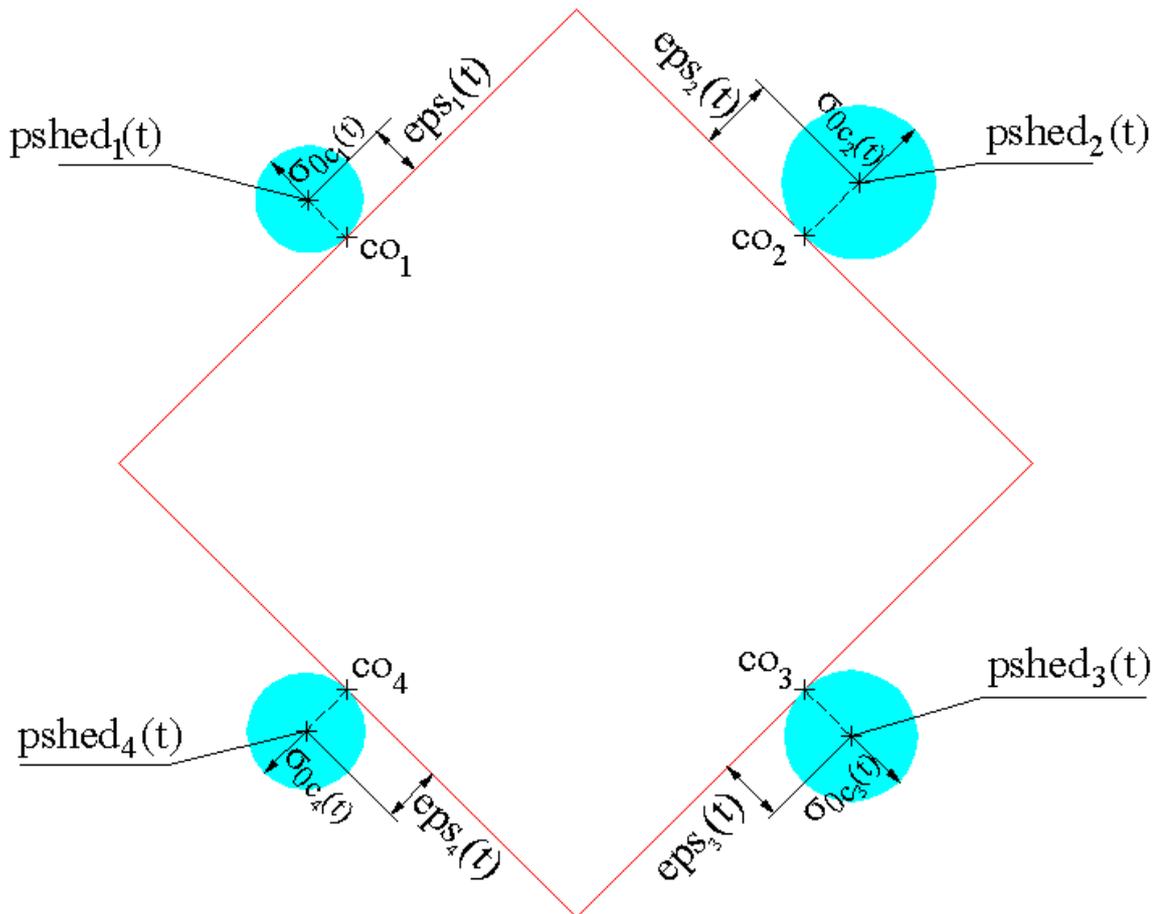


Figura 4.7 – Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis que discretizam fronteiras sólidas hidraulicamente rugosas em um dado instante de tempo.

onde:

$co_1, co_2, co_3, co_4$  são os pontos de controle dos painéis 1, 2, 3 e 4, respectivamente;

$eps_1(t), eps_2(t), eps_3(t), eps_4(t)$  são as distâncias de geração dos vórtices discretos, de modo que os vórtices discretos nascentes tangenciem o ponto de controle de cada painel;

$pshed_1(t), pshed_2(t), pshed_3(t), pshed_4(t)$  são os pontos de desprendimento de vórtices discretos ligados aos painéis 1, 2, 3 e 4, respectivamente;

$\sigma_{oc_1}(t), \sigma_{oc_2}(t), \sigma_{oc_3}(t), \sigma_{oc_4}(t)$  são os valores do raio do núcleo dos vórtices discretos gerados nas vizinhanças dos painéis 1, 2, 3 e 4, respectivamente, modificados pelo modelo de rugosidade (Equação 4.24).

A Equação 4.24 é a base do modelo de rugosidade desenvolvido nesta tese de doutorado. O expediente descrito anteriormente permite que se analise a dinâmica da vorticidade desenvolvida a partir de fronteiras sólidas com rugosidade relativa  $\varepsilon$ . Portanto, para superfícies hidraulicamente lisas, os pontos de desprendimento de vórtices discretos devem ser definidos tal como na Figura 4.5; por outro lado, para superfícies hidraulicamente rugosas, os pontos de desprendimento de vórtices discretos devem ser definidos tal como na Figura 4.7.

De maneira similar à montagem da equação matricial de fontes, Equação 4.14, tem-se a seguinte equação matricial para a geração dos vórtices discretos de Lamb (veja as Figuras 4.5 e 4.7):

$$\begin{bmatrix} K_{11}^v(t) & K_{12}^v(t) & K_{13}^v(t) & K_{14}^v(t) \\ K_{21}^v(t) & K_{22}^v(t) & K_{23}^v(t) & K_{24}^v(t) \\ K_{31}^v(t) & K_{32}^v(t) & K_{33}^v(t) & K_{34}^v(t) \\ K_{41}^v(t) & K_{42}^v(t) & K_{43}^v(t) & K_{44}^v(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} LDV_1 \\ LDV_2 \\ LDV_3 \\ LDV_4 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde:

$K_{ij}^v$  é um elemento da matriz de influência de geração de vórtices discretos, o qual representa a velocidade tangencial induzida pelo vórtice discreto de Lamb posicionado no ponto de desprendimento  $j$ , sobre o ponto de controle do painel  $i$ , considerando que a intensidade do vórtice discreto localizado em  $j$  seja unitária;

$\Gamma_j$  (incógnita do problema) é a intensidade do vórtice discreto posicionado no ponto de desprendimento  $j$ ;

$LDV_i$  é um elemento do vetor que representa a soma da velocidade do escoamento incidente e da velocidade induzida por cada um dos vórtices discretos da nuvem sobre o ponto de controle do painel  $i$ , todas decompostas na direção tangencial ao painel plano.

Para um painel genérico,  $i$ , na primeira vez em que este vetor é calculado não há vórtices discretos no domínio fluido. Logo, tem-se:

$$LDV_i = -u_\infty \cos\beta_i + v_\infty \sin\beta_i \quad (4.26)$$

onde  $\beta_i$  é o ângulo de orientação do painel  $i$ .

A equação matricial de geração de vórtices discretos, Equação 4.25, em sua forma geral, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[KV]_{mb1 \times mb1} \{GAMMA\}_{mb1} = \{LDV\}_{mb1} \quad (4.27)$$

Portanto, o objetivo de se resolver a Equação 4.27 é determinar os valores das intensidades dos vórtices discretos nascentes que sejam capazes de anular o componente tangencial da velocidade sobre o ponto de controle de cada painel plano; obtidos os valores de  $\Gamma$ , garante-se a condição de não deslizamento sobre cada ponto de controle da superfície discretizada. O modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho faz com que o vórtice discreto nascente tenha, caso o corpo seja hidraulicamente rugoso, uma intensidade maior quando comparado ao caso hidraulicamente liso ( $\Gamma_{rugoso} = \Gamma_{liso} + \Delta\Gamma$ ). Esta maior intensidade aumenta o efeito inercial, o que provoca um aumento na taxa de transferência de quantidade de movimento entre camadas adjacentes de fluido, fazendo com que o descolamento da camada limite seja postergado e que, conseqüentemente, o coeficiente de arrasto médio sofra uma redução. A Figura 4.8 ilustra o efeito inercial adicional imposto pelo modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho.

Cabe lembrar que, se a simulação numérica se encontrar em um instante  $t > 0$ , já haverá vórtices discretos no domínio fluido. Seja considerada, ainda, por um breve intervalo de tempo, as ações da convecção e da difusão que deslocam os vórtices discretos presentes no domínio fluido e, em especial, perto das fronteiras sólidas; destes processos resulta uma nova distribuição de vorticidade, a qual irá induzir um campo de velocidades ligeiramente diferente

daquele anteriormente existente, violando a condição de aderência até então garantida. Deste modo, deve-se resolver novamente os sistemas lineares de equações de fontes (Equação 4.14) e de vórtices discretos nascentes (Equação 4.25), atualizando os vetores  $LDF$  e  $LDV$ , a fim de garantir a condição de aderência sobre as superfícies sólidas.

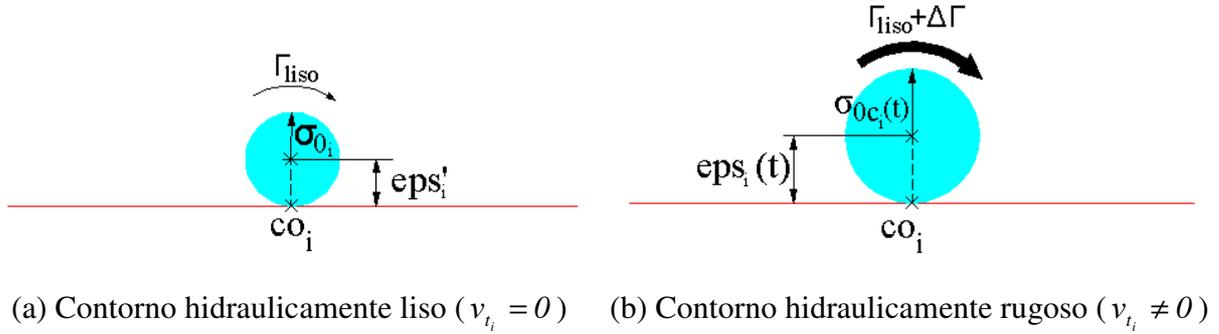


Figura 4.8 – Efeito inercial imposto pela rugosidade de fronteiras sólidas no processo de geração de vórtices discretos de Lamb.

Assim, deve-se considerar a velocidade que cada vórtice discreto da nuvem induz no ponto de controle de cada painel plano. Neste trabalho, utiliza-se o modelo do vórtice discreto de Lamb (Panton, 1984) com esta finalidade (Apêndice A). Sendo  $i$  um painel genérico e  $j$  um vórtice discreto arbitrário, de intensidade positiva  $\Gamma_j$ , localizado na posição  $W_j(x_j, y_j)$ , os componentes em  $x$  e em  $y$  da velocidade induzida neste painel devido à presença do vórtice discreto  $j$  são dados, respectivamente, por (Alcântara Pereira, 1999):

$$u_{ij} = \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{ij}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (4.28)$$

$$v_{ij} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{ij}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (4.29)$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do ponto de controle do painel genérico  $i$ ,  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  e  $\sigma_{0c_j}$  é o raio do núcleo do vórtice discreto  $j$  modificado devido à utilização do modelo de rugosidade.

Quando a distância entre um vórtice discreto arbitrário,  $j$ , e o ponto de controle de um painel for maior ou igual ao raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb ( $r_{ij} \geq \sigma_{0c_j}$ ), pode-se

utilizar como uma alternativa ao modelo do vórtice discreto de Lamb, o modelo do vórtice potencial; este procedimento permite que se evite calcular o exponencial das Equações 4.28 e 4.29, diminuindo o tempo de processamento das simulações numéricas (maiores detalhes são apresentados no Item 4.2.4). Nestas circunstâncias, as Equações 4.28 e 4.29 são substituídas por (Lewis, 1991):

$$u_{ij} = \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.30)$$

$$v_{ij} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (4.31)$$

Logo, a atualização dos vetores  $LDF_i$  e  $LDV_i$  no tempo, fica:

$$LDF_i = u_\infty \text{sen}\beta_i - v_\infty \text{cos}\beta_i + \sum_{j=1}^{NV} (u_{ij} \text{sen}\beta_i - v_{ij} \text{cos}\beta_i) \quad (4.32)$$

$$LDV_i = -u_\infty \text{cos}\beta_i - v_\infty \text{sen}\beta_i + \sum_{j=1}^{NV} (-u_{ij} \text{cos}\beta_i - v_{ij} \text{sen}\beta_i) \quad (4.33)$$

Como mostram as Equações 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31, a montagem da matriz de influência de geração de vórtices discretos,  $K_{ij}^v$ , depende única e exclusivamente da geometria do problema. Entretanto, devido à utilização do modelo de rugosidade, a geometria do problema sofre alterações em cada instante da simulação numérica (veja a Equação 4.25 e as posições dos pontos de desprendimento de vórtices discretos de Lamb na Figura 4.7), de modo que a matriz de influência de vórtices discretos nascentes,  $K_{ij}^v$ , deve ser calculada em cada instante da simulação numérica.

Após realizar este procedimento, pode-se calcular a segunda contribuição que compõe o campo de velocidades do escoamento: a contribuição das fronteiras sólidas. Para tanto, basta calcular a velocidade induzida por cada um dos painéis sobre cada um dos vórtices discretos presentes na nuvem (veja as Equações 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 e a Figura 4.3), onde, agora, o ponto  $W(x, y)$  corresponde à posição de um vórtice discreto genérico,  $j$ .

Para finalizar a segunda parte do problema, ou seja, a geração dos vórtices discretos responsáveis por garantir a condição de não deslizamento, deve-se verificar a condição de conservação global da circulação (conservação da vorticidade). Sabe-se que, dependendo do

sentido de rotação, os vórtices discretos podem ter intensidade positiva (quando giram no sentido horário) ou negativa (quando giram no sentido anti-horário). A condição de conservação global da circulação é imposta acrescentando-se uma linha (uma vez que vórtices discretos são gerados apenas sobre a superfície do corpo) na equação matricial de vórtices discretos nascentes (Equação 4.25). Assim:

$$\sum_{j=1}^{mb1} (\Gamma_j)_{\text{vórtices nascentes}} = 0 \quad (4.34)$$

lembrando que  $mb1$  é o número de painéis que discretizam a superfície do corpo.

Este momento é oportuno para mencionar uma outra contribuição deste trabalho, a qual modifica a maneira de resolver os dois sistemas lineares, o primeiro para a geração das fontes/sumidouros (que representam as superfícies sólidas) e o segundo para a geração dos vórtices discretos nascentes. Trabalhos anteriores desenvolvidos dentro do grupo de pesquisa onde esta tese de doutorado está inserida, realizavam a geração dos vórtices discretos de Lamb e das fontes/sumidouros sem se preocuparem com a convergência dos dois resultados. Consequentemente, um erro se fazia presente. Neste trabalho, adota-se um processo iterativo para a solução dos dois sistemas de equações citados, de modo que, ao final deste processo, garante-se a condição de aderência sobre todos os pontos de controle dos painéis que discretizam a superfície do corpo.

#### 4.2.4 – Contribuição da Nuvem de Vórtices Discretos

Uma das etapas que consome o maior tempo de CPU relaciona-se com a interação vórtice-vórtice. Quando se utiliza a Lei de Biot-Savart, como é o caso deste trabalho, o número de operações realizadas por um processador é da ordem do quadrado do número total de vórtices discretos presentes no escoamento.

Quando a distância entre dois vórtices discretos,  $j$  e  $k$ , for menor do que o valor do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb ( $\sigma_{0c_j}$ ), a velocidade induzida pelo vórtice discreto  $j$  no vórtice discreto  $k$ , comporta-se de acordo com a Figura 4.9a; observa-se que, quando  $r = 0$ , não há autoindução. Existe na literatura o modelo do vórtice potencial. Este modelo, embora não possua um núcleo viscoso, é bastante útil neste trabalho, uma vez que, para distâncias

superiores ao valor de  $\sigma_{0c_j}$ , a velocidade tangencial que este modelo induz é praticamente igual à velocidade induzida pelo modelo de Lamb – veja a Figura 4.9b e o Apêndice A.

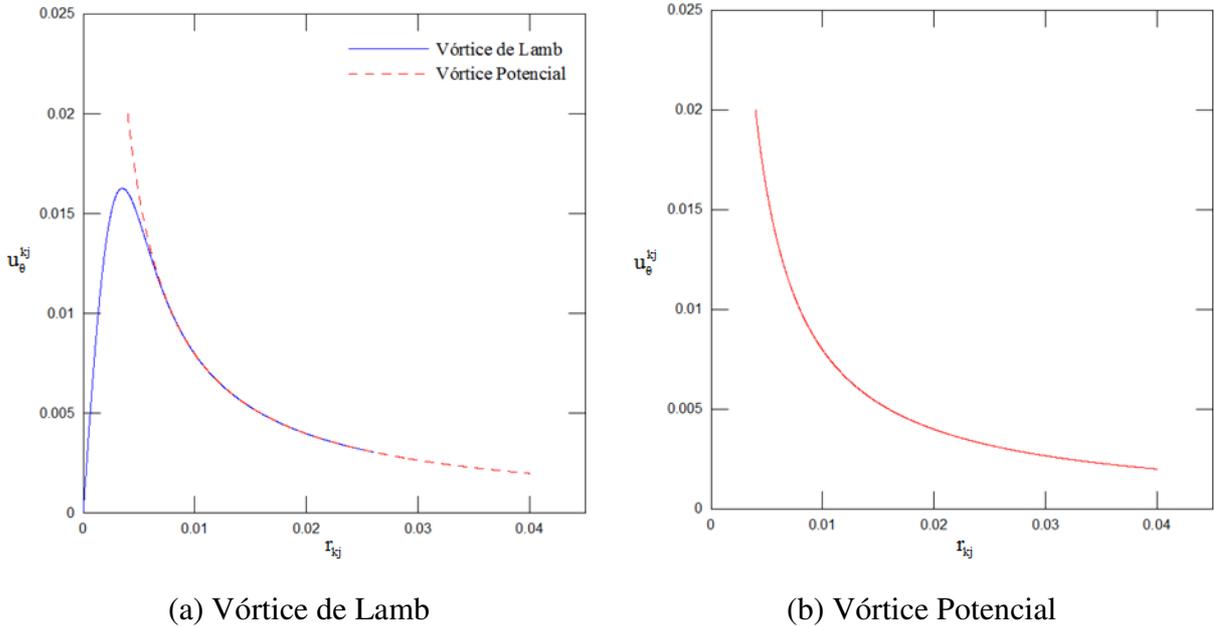


Figura 4.9 – Comportamento da velocidade tangencial induzida.

Numa nuvem de vórtices discretos, a distância entre os vórtices discretos, na grande maioria das vezes, é superior ao valor do raio do núcleo do vórtice discreto em análise ( $\sigma_{0c}$ ). Deste modo, em tais circunstâncias, faz-se uso do modelo do vórtice potencial com a finalidade de evitar o uso do exponencial presente na expressão do vórtice discreto de Lamb. Este exponencial (Equações 4.28 e 4.29) aumenta o tempo de cálculo da interação vórtice-vórtice, a qual já é crítica, conforme descrito anteriormente. No entanto, ressalta-se que, fisicamente, todos os vórtices discretos são considerados conforme o modelo do vórtice discreto de Lamb.

De maneira geral, os componentes nas direções  $x$  e  $y$  da velocidade total induzida no vórtice discreto  $k$ , pelos demais vórtices discretos da nuvem, são calculados pelas expressões:

$$\mathbf{u}_{k_{NV}} = \sum_{j=1}^{NV} \Gamma_j \mathbf{U}_{V_{k,j}}, \quad j \neq k \quad (4.35)$$

$$v_{k_{NV}} = \sum_{j=1}^{NV} \Gamma_j V_{V_{k,j}}, \quad j \neq k \quad (4.36)$$

onde  $U_{V_{k,j}}$  e  $V_{V_{k,j}}$  são as velocidades induzidas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, no vórtice discreto arbitrário,  $k$ , pelo vórtice discreto arbitrário,  $j$ , se este último possuir intensidade unitária.

Considerando que a distância do centro do vórtice discreto  $k$  ao centro do vórtice discreto  $j$  é menor do que o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb em análise (no caso, se  $r_{kj} < \sigma_{0c_j}$ ), utiliza-se o modelo do vórtice discreto de Lamb:

$$U_{V_{k,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (4.37)$$

$$V_{V_{k,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (4.38)$$

O raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb ( $\sigma_0$ ) é calculado, inicialmente, de acordo com os detalhes apresentados no Apêndice A. Posteriormente, o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb deve ser modificado ( $\sigma_0 \rightarrow \sigma_{0c}$ ) devido ao modelo de rugosidade, de acordo com o exposto no Item 4.2.3.

Se  $r_{kj} \geq \sigma_{0c_j}$ , utiliza-se o modelo do vórtice potencial:

$$U_{V_{k,j}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (4.39)$$

$$V_{V_{k,j}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (4.40)$$

As Equações 4.35 e 4.36 revelam que um vórtice discreto não induz velocidade sobre ele mesmo.

## 4.3 – CÁLCULO NUMÉRICO DAS CARGAS FLUIDODINÂMICAS

A integração da tensão atuante sobre a superfície de um corpo ( $\tau_0$ ), também denominada de carga fluidodinâmica distribuída, dá origem às cargas fluidodinâmicas integradas, representadas pelas forças e momentos fluidodinâmicos.

As forças fluidodinâmicas podem ser decompostas em dois tipos: a força de sustentação e a força de arrasto. A força de sustentação é resultante da integração dos componentes normal e tangencial da tensão. No entanto, como a contribuição do componente tangencial da tensão,  $\tau$ , é pequena, se comparada à contribuição do componente normal da tensão,  $p$ , admite-se que a força de sustentação seja resultante da integração do componente normal da tensão que atua sobre a superfície do corpo (a pressão), apenas; a força de sustentação atua em uma direção normal ao escoamento incidente e depende da forma e da orientação do corpo. A força de arrasto, por sua vez, é resultante da integração dos componentes normal e tangencial ( $p$  e  $\tau$ ), atuando sempre na direção do escoamento e opondo-se ao movimento do corpo; esta força depende da forma e da orientação do corpo, bem como das características do escoamento incidente (número de Reynolds).

Em corpos esbeltos que trabalham com pequeno ângulo de incidência, ou ângulo de ataque, não ocorre a separação do escoamento e a esteira que se forma a jusante deste corpo é desprezível, sendo a força de arrasto originada da integração da tensão tangencial, ou seja, dependente apenas dos efeitos viscosos. Por outro lado, como estudado neste trabalho, em corpos rombudos, ocorre a separação do escoamento e a consequente formação da esteira viscosa, sendo dominante o componente de forma da força de arrasto. Portanto, cabe fixar que neste estudo apenas o arrasto de forma é calculado.

Neste trabalho, utiliza-se a formulação integral de Shintani & Akamatsu (1994), Equação 3.47 (reescrita abaixo), para determinar o valor da pressão em um ponto genérico,  $i$ , do domínio fluido (Ricci, 2002):

$$\xi \tilde{Y}_i + \int_{s_1+s_2} \frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x_i) + n_y(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \tilde{Y} dS = - \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{v(x-x_i) - u(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \omega d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{s_1+s_2} \frac{1}{2\pi} \frac{n_y(x-x_i) - n_x(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \omega dS \quad (3.47)$$

A primeira integral da Equação 3.47 representa a contribuição do corpo no cálculo da pressão (cada painel irá induzir a propriedade  $\tilde{Y}$  no ponto de controle do painel  $i$ ), enquanto a segunda integral faz o somatório dos efeitos da vorticidade distribuída em todo o campo do escoamento, em termos da propriedade  $\tilde{Y}$ . A terceira integral, por sua vez, compreende a contribuição, em termos da propriedade  $\tilde{Y}$ , da vorticidade que está sendo gerada sobre a superfície do corpo.

Como o objetivo consiste em resolver numericamente a Equação 3.47, a mesma deve ser discretizada, assumindo a forma (Ricci, 2002):

$$\xi \tilde{Y}_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m \frac{n_{x_p}(x_p - x_i) + n_{y_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \tilde{Y}_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NV} \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j + \frac{1}{2\pi \text{Re}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m \frac{n_{y_p}(x_p - x_i) - n_{x_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \gamma_p \quad (4.41)$$

onde  $\gamma_p$  é a densidade de vórtices distribuída uniformemente sobre o painel  $p$  (Figura 4.10). Neste trabalho, a densidade é obtida dividindo-se a intensidade do vórtice discreto de Lamb nascente (posicionado nas vizinhanças do ponto de controle do painel  $p$  para garantir a condição de não deslizamento) pelo comprimento do painel  $p$ :

$$\gamma_p = \frac{\Gamma_p}{\Delta S_p} \quad (4.42)$$

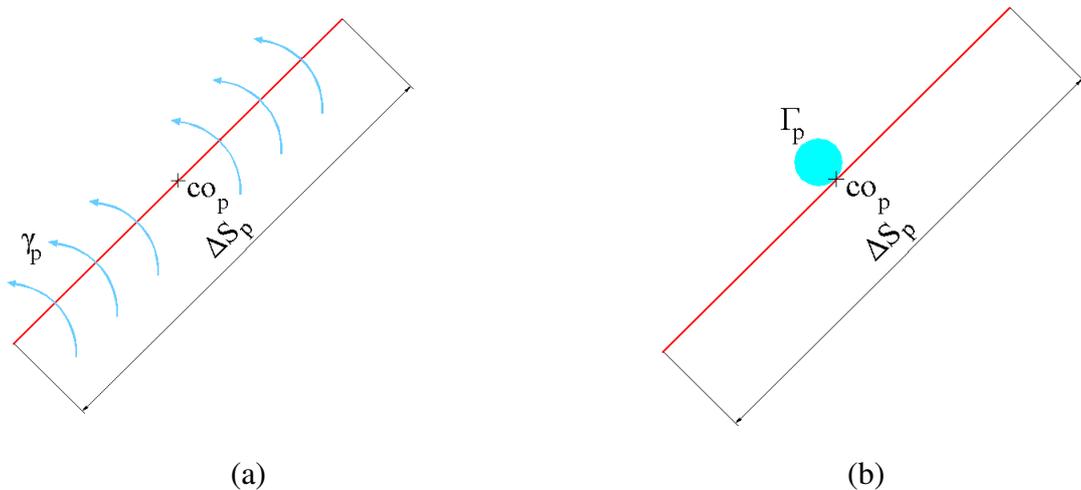


Figura 4.10 – Vorticidade gerada a partir da superfície discretizada do corpo (a) sofrendo um processo de aglutinação instantânea e transformando-se num vórtice discreto de Lamb (b).

Observando a Equação 4.41, nota-se que o somatório do primeiro membro possui termos puramente geométricos e, deste modo, podem ser agrupados em uma matriz de influência. Chamando esta matriz de  $KP$  (matriz de influência de pressão), pode-se escrever:

$$KP_{i,p} = \frac{1}{2\pi} \frac{n_{x_p}(x_p - x_i) + n_{y_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \quad (4.43)$$

Se  $p = i$ , adota-se  $KP_{ii} = \zeta = 1/2$ , como sendo a influência de um painel sobre ele mesmo no cálculo da pressão (autoindução).

O segundo termo do lado direito da Equação 4.41 também depende apenas de grandezas geométricas e, deste modo, pode ser agrupado em outra matriz de influência. Chamando esta matriz de influência de  $LD$  (matriz lado direito), tem-se:

$$LD_{i,p} = \frac{1}{2\pi \text{Re}} \frac{n_{y_p}(x_p - x_i) - n_{x_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \quad (4.44)$$

Se  $p = i$ , adota-se  $LD_{i,p} = 0$ , ou seja, o vórtice nascente não contribui no cálculo da pressão sobre o painel que lhe deu origem.

Assim, a Equação 4.41 pode ser escrita de uma forma mais compacta:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m KP_{i,p} \tilde{Y}_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NV} \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m LD_{i,p} \gamma_p \quad (4.45)$$

Como não há geração de vórtices discretos no solo, o último termo da equação anterior deve ser modificado. Logo, a Equação 4.45 torna-se:

$$\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m KP_{i,p} \tilde{Y}_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NV} \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{mb1} LD_{i,p} \gamma_p \quad (4.46)$$

O lado direito da equação anterior, por sua vez, pode ser escrito da seguinte forma:

$$LDP_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NV} \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{mb1} LD_{i,p} \gamma_p \quad (4.47)$$

A aplicação da Equação 4.46 sobre os  $m$  painéis que discretizam as superfícies do corpo e do solo, conduz ao seguinte sistema linear de equações:

$$[\text{KP}]_{m \times m} \{\tilde{Y}\}_m = \{\text{LDP}\}_m \quad (4.48)$$

Uma vez conhecidos os valores da incógnita  $\tilde{Y}_i$  para os  $m$  painéis, obtêm-se os valores do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) para cada painel plano através da Equação 3.48, reescrita a seguir:

$$C_p = 2\tilde{Y} + 1 \quad (3.48)$$

No presente contexto, a atenção é restrita ao cálculo da força fluidodinâmica, mais especificamente, ao cálculo das forças de arrasto e de sustentação. Neste trabalho, assume-se que apenas a pressão contribui para o cálculo destas forças (o que não é válido para o cálculo da força de arrasto quando o corpo é esbelto e trabalha com um pequeno ângulo de ataque).

Como visto anteriormente, o coeficiente de pressão é determinado em cada ponto de controle dos painéis que discretizam o corpo e o solo. Nestes pontos, a força causada pela pressão é decomposta em duas parcelas: uma parcela paralela ao escoamento incidente (força de arrasto) e outra perpendicular ao mesmo (força de sustentação). Assim, os coeficientes das referidas forças que atuam em um dado painel,  $i$ , são dados por:

$$\Delta C_{D_i} = C_{p_i} \Delta S_i \sin \beta_i \quad (4.49)$$

$$\Delta C_{L_i} = -C_{p_i} \Delta S_i \cos \beta_i \quad (4.50)$$

onde  $\Delta C_{D_i}$  é o coeficiente de arrasto elementar que atua em um painel  $i$ ,  $\Delta C_{L_i}$  é o coeficiente de sustentação elementar que atua em um painel  $i$ ,  $C_{p_i}$  é o coeficiente de pressão que atua em um painel  $i$ ,  $\Delta S_i$  é o comprimento do painel  $i$  e  $\beta_i$  é o ângulo de orientação do painel  $i$ .

Evidentemente, os coeficientes de arrasto e de sustentação são obtidos somando-se as contribuições de cada painel plano individualmente:

$$C_D = \sum_{i=1}^m C_{p_i} \Delta S_i \sin \beta_i \quad (4.51)$$

$$C_L = -\sum_{i=1}^m C_{p_i} \Delta S_i \cos \beta_i \quad (4.52)$$

Em resumo, a discretização da Equação 3.47 fornece a Equação 4.41 que, resolvida numericamente, permite determinar a propriedade  $\tilde{Y}_i$  atuante em cada painel  $i$ . De posse dos valores de  $\tilde{Y}_i$ , calcula-se o valor do coeficiente de pressão,  $C_{p_i}$ , o qual torna possível a determinação dos coeficientes de arrasto e de sustentação através das Equações 4.51 e 4.52.

## 4.4 – A CONVECÇÃO DA VORTICIDADE

Para se saber a velocidade total induzida em um vórtice discreto arbitrário,  $k$ , basta somar as contribuições do escoamento incidente (Equações 4.5 e 4.6), das fronteiras sólidas (Equações 4.9 e 4.10) e da nuvem de vórtices discretos (Equações 4.35 e 4.36). O avanço convectivo deste vórtice discreto  $k$ , é definido pela solução da Equação 4.4, isto é:

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t) \quad (4.4)$$

O avanço convectivo de todos os vórtices discretos que formam a nuvem simula o fenômeno da convecção da vorticidade. Desta forma, obtido o campo de velocidades, a posição de cada vórtice discreto, em cada incremento de tempo na etapa convectiva, pode ser calculada numericamente por diversos esquemas de avanço. Neste trabalho, o avanço convectivo é calculado pelo esquema de primeira ordem de Euler (Ferziger, 1981). Assim, utilizando este esquema, a nova posição de um vórtice discreto arbitrário,  $k$ , após um incremento de tempo  $\Delta t$ , nas direções  $x$  e  $y$ , é dada respectivamente, por:

$$x_k(t + \Delta t) = \Delta x_{\text{CONVECÇÃO}_k} = x_k(t) + u_{t_k}(t)\Delta t \quad (4.53)$$

$$y_k(t + \Delta t) = \Delta y_{\text{CONVECÇÃO}_k} = y_k(t) + v_{t_k}(t)\Delta t \quad (4.54)$$

onde  $u_{t_k}$  e  $v_{t_k}$  são os componentes da velocidade total induzida no vórtice discreto arbitrário  $k$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

## 4.5 – A DIFUSÃO DA VORTICIDADE

De acordo com o Algoritmo de Separação da Parte Viscosa (Chorin, 1973), a difusão da vorticidade é governada pela Equação 4.2, a equação da difusão, transcrita abaixo:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \omega \quad (4.2)$$

onde o número de Reynolds aparece com uma modificação ( $Re_c$ ) devido ao uso do modelo de turbulência descrito no Item 3.4.2, o qual utiliza um coeficiente de viscosidade turbulenta para fazer a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento (que são resolvidas) e as escalas submalha (que são modeladas). Pelo modelo de turbulência utilizado, o coeficiente de viscosidade turbulenta é somado ao coeficiente de viscosidade molecular (Equação 3.23) e, conseqüentemente, o número de Reynolds deve ser modificado, assumindo a forma da Equação 3.31, reescrita abaixo:

$$Re_c = \frac{U^* d^*}{\nu + \nu_t} \quad (3.31)$$

### 4.5.1 – Método de Vórtices Discretos com Simulação de Turbulência

De acordo com a proposta de Métais & Lesieur (1992), os fenômenos que se manifestam nas microescalas podem ser considerados com a utilização do coeficiente de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ); este é definido pela Equação 3.27. Esta definição depende de uma função estrutura de velocidade de segunda ordem ( $\overline{F_2^*}$ ), definida pela Equação 3.26.

Considerando o problema adimensionalizado, Alcântara Pereira *et al.* (2002) fizeram duas adaptações necessárias para a implementação do modelo de turbulência neste trabalho:

(i) os pontos sobre os quais as velocidades são calculadas devem situar-se sobre uma coroa circular definida por  $r_{int} = 0,1\sigma_{oc}$  e  $r_{ext} = sm \times \sigma_{oc}$ , onde  $r_{int}$  e  $r_{ext}$  são os raios interno e externo, respectivamente, da coroa circular e  $\sigma_{oc}$  é o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb em análise, modificado pelo modelo de rugosidade (Figura 4.11a); no Capítulo 5

apresenta-se um estudo estatístico que determina o valor de  $sm$  e, conseqüentemente, o raio externo da coroa circular;

(ii) no cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, os pontos onde as velocidades devem ser calculadas devem coincidir com a posição dos vórtices discretos que se encontram nas vizinhanças do vórtice discreto considerado (Figura 4.11b).

Caso haja vórtices discretos no interior da coroa circular definida ao redor do vórtice discreto em análise (vórtice discreto  $k$ ), calcula-se a função estrutura de velocidade de segunda ordem associada a este vórtice discreto:

$$\bar{F}_{2_k}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \mathbf{u}_{t_k}(\mathbf{x}_k, t) - \mathbf{u}_{t_j}(\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_j, t) \right\|^2 \left( \frac{\sigma_{0c_k}}{\mathbf{r}_j(t)} \right)^{2/3} \quad (4.55)$$

onde  $\mathbf{u}_t$  é a velocidade total sobre os vórtices discretos,  $N$  indica o número de vórtices discretos presentes no interior da coroa circular,  $\mathbf{r}_j$  representa a distância entre o vórtice discreto em análise (vórtice discreto  $k$ ) e os pontos da coroa circular onde as velocidades são calculadas (vórtices discretos  $j$ ), e o termo  $(\sigma_{0c_k}/\mathbf{r}_j(t))^{2/3}$  é incorporado à expressão da função estrutura de velocidade de segunda ordem devido ao fato de os vórtices discretos  $j$  não estarem equidistantes do vórtice discreto  $k$ .

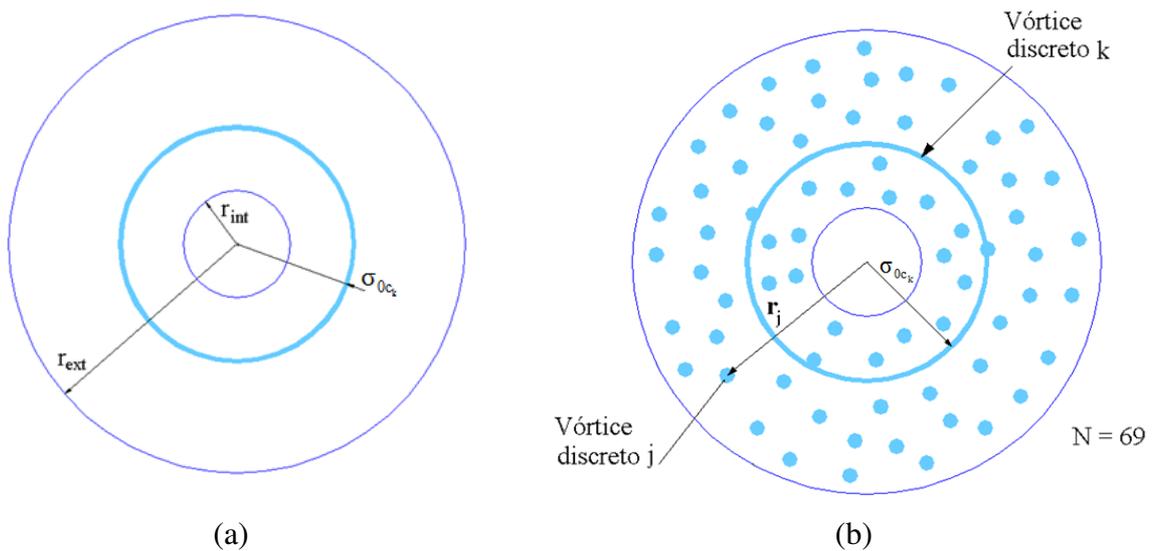


Figura 4.11 – Adaptação do modelo de turbulência ao Método de Vórtices Discretos.

Num dado instante de tempo, tendo calculado a função estrutura de velocidade de segunda ordem para cada vórtice discreto da nuvem que simula turbulência, ela é utilizada para se determinar o coeficiente de viscosidade turbulenta associado a cada vórtice discreto da nuvem que simula turbulência:

$$v_{t_k}(t) = 0,105 C_k^{-3/2} \sigma_{0c_k} \sqrt{\overline{F_{2k}}(t)} \quad (4.56)$$

lembrando que  $C_k$  é a constante de Kolmogorov ( $C_k = 1,4$ ) e  $\sigma_{0c_k}$  é o raio do núcleo do vórtice discreto,  $k$ , modificado pelo modelo de rugosidade.

Finalmente, como o coeficiente de viscosidade turbulenta deve ser adicionado ao coeficiente de viscosidade molecular, o número de Reynolds deve ser modificado:

$$Re_{c_k}(t) = \frac{U^* d^*}{\nu + v_{t_k}(t)} \quad (4.57)$$

Portanto, o número de Reynolds deve ser modificado localmente, em função da atividade turbulenta existente em torno da posição ocupada pelo vórtice discreto  $k$ .

O processo de difusão turbulenta é considerado apenas na etapa da difusão viscosa (Item 4.5.2), já que esta etapa é a responsável pela dissipação de energia. Sendo assim, a modificação do raio do núcleo de um vórtice discreto,  $k$ , pelos efeitos da turbulência, não é realizada. É importante dizer, ainda, que no trabalho de Alcântara Pereira *et al.* (2002), a realização deste último procedimento acarretava em um aumento excessivo do raio do núcleo dos vórtices discretos que simulavam os efeitos da turbulência, uma vez que estes autores não utilizaram um fator de controle do raio do núcleo do vórtice discreto, o qual é proposto neste trabalho, e utilizado no modelo de rugosidade (veja, no Apêndice A, o fator  $\chi$ ).

#### 4.5.2 – O Método de Avanço Randômico

Vários são os algoritmos numéricos que podem ser utilizados para se obter a solução da equação da difusão da vorticidade (Equação 4.2). Entre eles, citam-se os dois mais importantes: o método do crescimento do raio do núcleo do vórtice (Leonard, 1980; Kamemoto *et al.*, 1990; Rossi, 1996) e o método de avanço randômico (Chorin, 1973).

O método de avanço randômico é o método mais utilizado para simular a difusão da vorticidade quando se utiliza o Método de Vórtices Discretos, e consiste em se implementar um deslocamento difusivo para cada vórtice discreto da nuvem, individualmente. Este procedimento foi desenvolvido por Chorin (1973), baseado na teoria do movimento Browniano desenvolvida por Einstein (1956).

Assim, o avanço temporal de um vórtice discreto,  $k$ , da nuvem, é dado por:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + \Delta x_{\text{CONVECÇÃO}_k} + \Delta x_{\text{DIFUSÃO}_k} \quad (4.58)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + \Delta y_{\text{CONVECÇÃO}_k} + \Delta y_{\text{DIFUSÃO}_k} \quad (4.59)$$

Na Seção 4.4 foi obtido o avanço convectivo através do esquema de avanço de primeira ordem de Euler. Agora, é apresentado o deslocamento difusivo, caracterizado pelo movimento aleatório das partículas de vorticidade.

O avanço de cada vórtice discreto  $k$ , na direção radial e no intervalo  $(0 - 2\pi)$ , é dado respectivamente por (Alcântara Pereira, 1999):

$$\Delta r_k = \sqrt{\frac{4\Delta t}{\text{Re}_{c_k}} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \quad (4.60)$$

$$\Delta \theta_k = 2\pi Q \quad (4.61)$$

onde  $P$  e  $Q$  são números randômicos entre 0 e 1. Observa-se que a presença do número de Reynolds modificado, na Equação 4.60, mostra que os efeitos da viscosidade e da turbulência são levados em consideração na etapa da difusão da vorticidade.

Assim, a difusão de um vórtice discreto,  $k$ , da nuvem, após um incremento de tempo  $\Delta t$ , possui um deslocamento na direção  $x$  e um deslocamento na direção  $y$ , dados respectivamente por:

$$\Delta x_{\text{DIFUSÃO}_k} = \Delta r_k \cos \Delta \theta_k \quad (4.62)$$

$$\Delta y_{\text{DIFUSÃO}_k} = \Delta r_k \sin \Delta \theta_k \quad (4.63)$$

## 4.6 – ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

Apresenta-se, nesta seção, um algoritmo para a simulação numérica do escoamento bidimensional e incompressível, de um fluido newtoniano com propriedades constantes, que incide sobre um corpo de forma qualquer e conhecida, o qual pode, ou não, estar estacionado nas vizinhanças de uma superfície plana (solo) que se move com a mesma velocidade do escoamento incidente, considerando, ainda, os efeitos da rugosidade do corpo.

Neste trabalho, em particular, o corpo escolhido foi o cilindro circular, mas salienta-se que todo o desenvolvimento apresentado nos Capítulos 3 e 4 é válido para um corpo de forma qualquer.

A seguir, apresenta-se um roteiro de como funciona o código computacional. Na Figura 4.12, ilustra-se o procedimento que será descrito na sequência.

### **1º Passo: Entrada de Dados**

Faz-se a leitura de todos os dados necessários para a realização da simulação numérica, tais como:

**stop** – número final de incrementos de tempo da simulação numérica;

**option** – o programa disponibiliza ao usuário a escolha de uma das seguintes situações: (i) *option* = 1: escoamento ao redor de um corpo isolado; (ii) *option* = 2: escoamento ao redor de um corpo estacionado nas vizinhanças de uma superfície plana (solo) móvel;

**tck** – raio do cilindro circular;

**gmin** – distância entre o solo e o ponto extremo inferior do cilindro circular ( $gmin = h$ ) – Figura 4.13;

**lm** – comprimento de cada módulo que compõe o solo; cada módulo tem comprimento igual ao diâmetro do cilindro circular (Figura 4.13);

**n** – número de módulos que compõem o solo situados a montante do corpo (Figura 4.13);

**nm** – número total de módulos que compõem o solo;

**np** – número de painéis utilizados para discretizar a superfície de cada módulo;

**mb1** – número de painéis utilizados para discretizar a superfície do corpo;

**vel** – velocidade do escoamento incidente;

**alpha** – ângulo de incidência do escoamento;

**delt** – valor do incremento de tempo da simulação numérica;

**eps** – distância de geração dos vórtices discretos que nascem no corpo, em relação ao ponto de controle de cada painel plano que discretiza o corpo;

**core** – raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb que nasce no corpo;

**re** – número de Reynolds do escoamento;

**sm** – variável que define o valor do raio externo da coroa circular criada ao redor de cada vórtice discreto para considerar os aspectos referentes à turbulência (Capítulo 5, Item 5.1.1);

**epsilon** – rugosidade relativa ( $\varepsilon$ ), lembrando que  $\varepsilon = \varepsilon^*/d^*$  ;

**countr** – número de pontos rugosos situados sobre a semicircunferência definida ao redor dos pontos de desprendimento de vórtices discretos associados a cada painel plano que discretiza a superfície do corpo (Figura 4.6).

## **2º Passo: Discretização das Fronteiras Sólidas**

Discretiza-se a superfície do solo em  $mb2 = nm \times np$  painéis planos e a posiciona sobre o eixo das abscissas (Figura 4.13).

Discretiza-se, ainda, o cilindro circular de diâmetro  $d = 1$ , em  $mb1$  painéis planos e o posiciona a uma distância  $gmin = h$  acima do solo; além disso, o cilindro circular é sempre posicionado de maneira que o seu bordo de ataque fique a uma distância horizontal,  $n$ , medida a partir do eixo de referência (Figura 4.13).

Por fim, calcula-se o valor do ponto de controle, do ângulo de orientação, do comprimento e os valores apropriados das coordenadas dos pontos de desprendimento de vórtices discretos e dos pontos rugosos associados a cada painel.

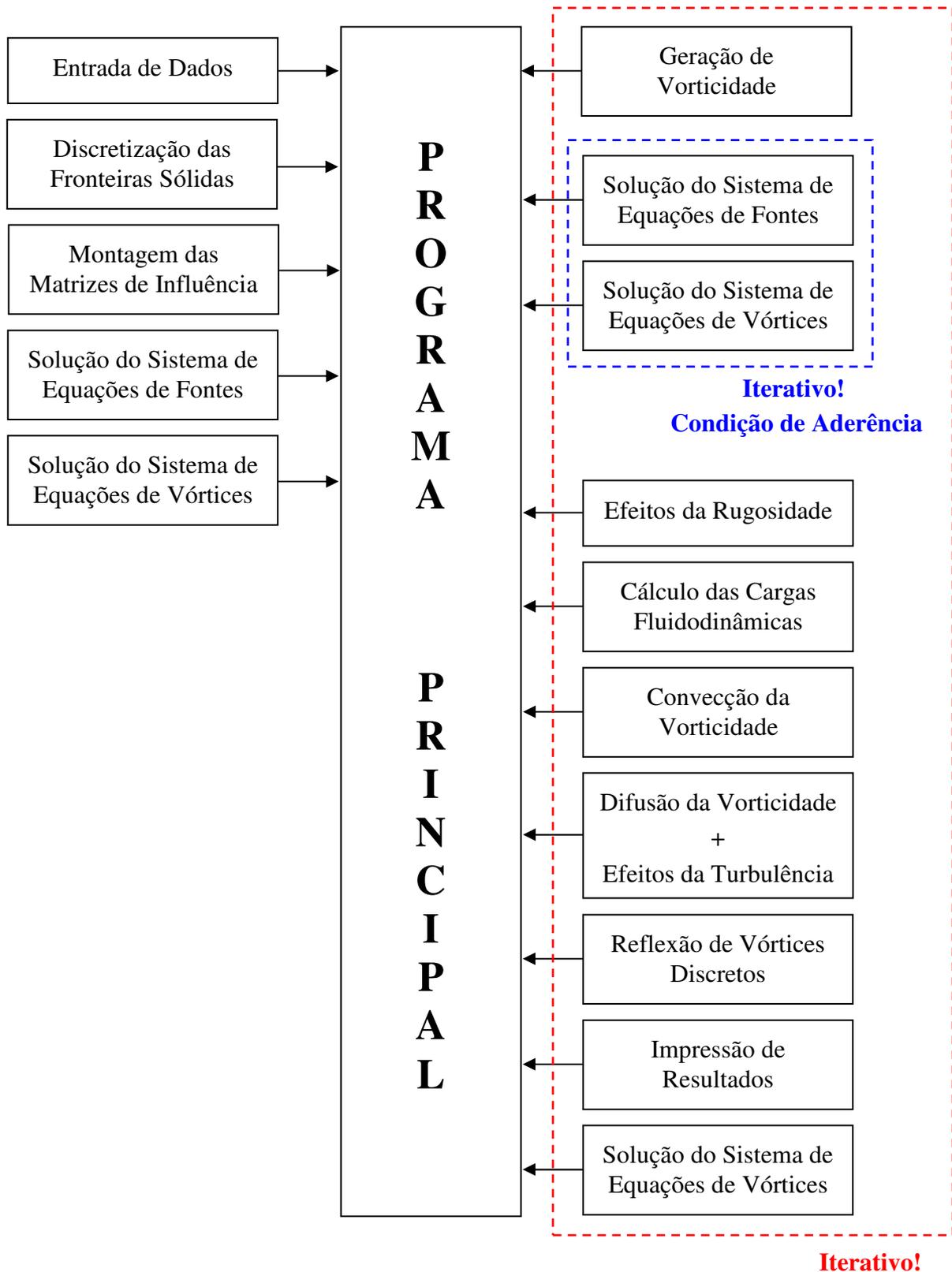


Figura 4.12 – Estrutura do programa computacional desenvolvido.

### 3º Passo: Montagem das Matrizes de Influência

Calculam-se os coeficientes das matrizes de influência de fontes,  $K_{ip}^f$  (Equação 4.14), de vórtices,  $K_{ij}^v$  (Equação 4.25), e de pressão,  $KP_{i,p}$  (Equação 4.43).

### 4º Passo: Solução do Sistema de Equações de Fontes

No instante  $t = 0$  da simulação numérica, o escoamento é potencial, uma vez que ainda não há vórtices discretos no domínio fluido. Nessa situação, o vetor  $LDF$  é calculado conforme a Equação 4.15.

Em seguida, resolve-se a equação matricial de fontes (Equação 4.18) através do método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial.

Como se deseja avaliar, neste momento, a solução potencial do problema, não são impostas as equações de conservação da massa (Equações 4.16 e 4.17).

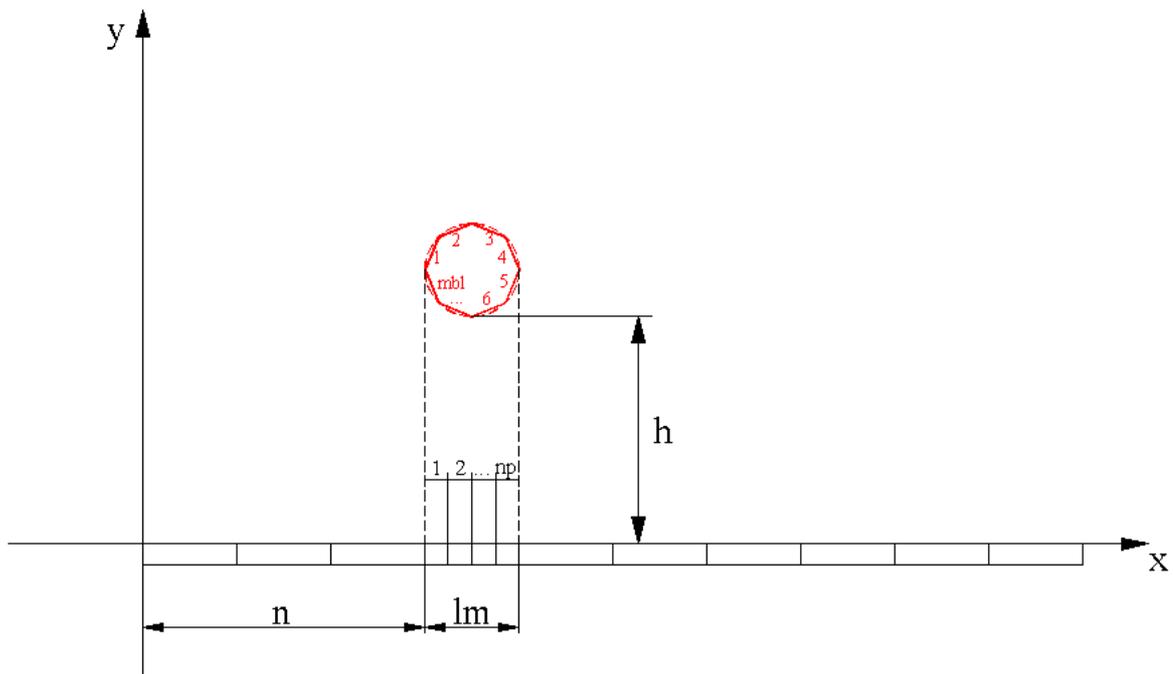


Figura 4.13 – Representação esquemática do corpo e do solo.

### **5º Passo: Solução do Sistema de Equações de Vórtices**

No instante  $t = 0$  da simulação numérica, ainda não há vórtices discretos no domínio fluido. Nessa situação, o vetor  $LDV$  é calculado conforme a Equação 4.26.

Apesar do escoamento, neste momento, ser potencial, como os valores calculados para as intensidades dos vórtices discretos serão utilizados no instante  $t = 1$  da simulação numérica, impõe-se a condição de conservação global da circulação (Equação 4.34).

Deste modo, deve-se resolver a equação matricial de vórtices (Equação 4.27) considerando-se, também, a equação extra referente à condição de conservação global da circulação (Equação 4.34), tendo-se, desta forma, um sistema sobredeterminado de  $mb1 + 1$  equações e  $mb1$  incógnitas.

O novo sistema formado é resolvido através do método dos mínimos quadrados. Este expediente fornece um outro sistema final  $mb1 \times mb1$ , que é resolvido através do método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial.

### **6º Passo: Geração de Vorticidade**

Gera-se, em cada incremento de tempo da simulação numérica,  $mb1$  novos vórtices discretos de Lamb com intensidades dadas pela solução do sistema de equações de vórtices.

### **7º Passo: Obtenção da Condição de Aderência**

Os vórtices discretos gerados induzem velocidade (do tipo tangencial) nos pontos de controle dos painéis que discretizam as superfícies sólidas, o que viola a condição de impermeabilidade garantida até então.

Para garantir a condição de impermeabilidade novamente, resolve-se o sistema de equações de fontes, considerando a influência dos vórtices discretos no cálculo do vetor  $LDF$  (Equação 4.32). Deve-se, também, impor as equações de conservação da massa (Equação 4.16 para o corpo e Equação 4.17 para o solo), o que tornará o sistema sobredeterminado. Assim, utiliza-se o método dos mínimos quadrados para obter um sistema de equações possível e determinado, o qual será resolvido pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial, garantindo-se a condição de impermeabilidade novamente.

No entanto, as novas distribuições de fontes obtidas induzem velocidade (do tipo radial) nos pontos de controle dos painéis que discretizam as superfícies sólidas, o que viola a condição de não deslizamento garantida até então.

Para resolver este problema, recorre-se a um processo iterativo (destacado em azul na Figura 4.12), no qual os sistemas de equações de fontes e de vórtices são resolvidos sucessivamente, durante dez iterações, obtendo-se, assim, a condição de aderência.

### **8º Passo: Efeitos da Rugosidade**

Para representar os efeitos da rugosidade superficial do corpo no escoamento, o raio do núcleo dos vórtices discretos nascentes devem ser modificados de acordo com a Equação 4.24.

Como os vórtices discretos devem tangenciar o ponto de controle dos painéis que lhes deram origem, conclui-se que os pontos de desprendimento de vórtices discretos também devem ser modificados, de maneira que a matriz de influência de vórtices deve ser recalculada em cada instante de tempo da simulação numérica, devido aos efeitos da rugosidade.

Uma vez que a matriz de influência de vórtices é recalculada, resolve-se a equação matricial de vórtices para obter as novas intensidades dos vórtices discretos considerando, agora, os efeitos da rugosidade superficial do corpo.

É importante salientar que, ao se considerar os efeitos da rugosidade superficial do corpo, deve-se recorrer ao processo iterativo descrito no 7º passo para garantir a condição de aderência sobre o ponto de controle de cada painel plano que discretiza a superfície do corpo.

### **9º Passo: Cálculo das Cargas Fluidodinâmicas**

Determina-se a distribuição instantânea de pressão sobre a superfície discretizada do corpo (exatamente em cada ponto de controle) e os coeficientes instantâneos de arrasto e de sustentação.

Esses cálculos são realizados de acordo com o exposto na Seção 4.3.

### **10º Passo: Convecção da Vorticidade**

A convecção da nuvem de vórtices discretos é realizada através do esquema de avanço de primeira ordem de Euler (Seção 4.4).

### **11º Passo: Difusão da Vorticidade e Efeitos da Turbulência**

Realiza-se o processo de difusão da vorticidade pelo método de avanço randômico (Item 4.5.2), considerando-se, ainda, os efeitos da turbulência mediante a modificação do número de Reynolds do escoamento, onde as manifestações da turbulência são relevantes, ou seja, onde  $\nu_t \neq 0$ .

### **12º Passo: Reflexão de Vórtices Discretos**

Os vórtices discretos que migrarem para o interior do corpo, e aqueles que migrarem para baixo da superfície do solo, são devolvidos para o domínio fluido.

### **13º Passo: Impressão de Resultados**

Imprime-se todos os resultados necessários para as análises realizadas no Capítulo 5.

### **14º Passo: Solução do sistema de Equações de Vórtices**

Uma vez que os vórtices discretos sofreram os processos de convecção e de difusão da vorticidade, viola-se a condição de aderência garantida até então.

Portanto, atualiza-se o vetor  $LDV$ , de acordo com a Equação 4.33, e resolve-se a equação matricial de vórtices (Equação 4.27), considerando-se, também, a equação extra referente à condição de conservação global da circulação (Equação 4.34).

É importante lembrar que, para resolver o referido sistema de equações, utiliza-se o método dos mínimos quadrados e o método de eliminação de Gauss com condensação pivotal parcial.

## Capítulo 5

# ANÁLISE DE RESULTADOS

Este capítulo apresenta os principais resultados obtidos da simulação numérica do escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente de um fluido newtoniano com propriedades constantes que incide sobre um cilindro circular. As condições geométricas impostas ao cilindro circular o definem como isolado ou estacionado nas proximidades do solo. Considera-se, também, a influência da rugosidade da superfície do cilindro circular no comportamento fluidodinâmico do corpo. Na Figura 5.1, identificam-se as superfícies do cilindro circular e do solo. Estas superfícies são discretizadas e representadas por painéis planos, sobre os quais se distribuem singularidades do tipo fontes com densidade constante, impondo-se, assim, a condição de impermeabilidade sobre o ponto de controle de cada painel. Vórtices discretos de Lamb são gerados nas vizinhanças da superfície discretizada do corpo para satisfazer a condição de não deslizamento. Como um dos propósitos deste trabalho é o de eliminar a influência da camada limite desenvolvida junto ao solo, a condição de não deslizamento somente é imposta sobre os pontos de controle de cada painel montado para representar a superfície do corpo. Ainda na Figura 5.1, pode-se perceber a estrutura da esteira de vórtices discretos de Lamb que se forma a jusante do corpo.

O primeiro passo constitui-se na aferição do código computacional implementado e, para isso, realiza-se a simulação numérica para o caso do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado.

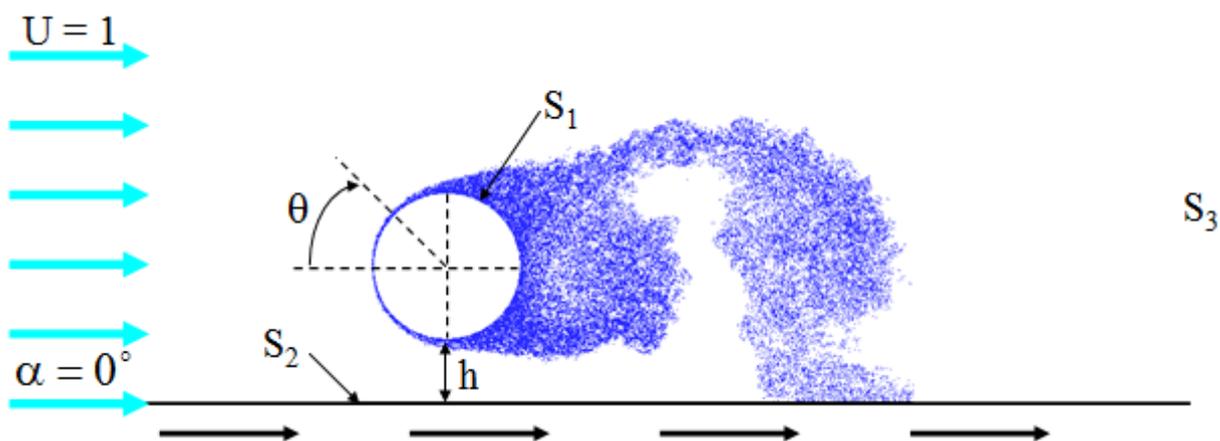


Figura 5.1 – Cilindro circular hidráulico rugoso estacionado nas proximidades do solo.

Após a aferição inicial do código, procede-se à análise do escoamento ao redor do cilindro circular hidráulico rugoso. Na sequência, como um exemplo de aplicação, estuda-se os efeitos causados pela presença do solo no escoamento ao redor do cilindro circular hidráulico liso e do cilindro circular hidráulico rugoso. Os resultados apresentados se referem ao comportamento das cargas fluidodinâmicas integradas (coeficientes de arrasto e de sustentação) e distribuídas (coeficiente de pressão) e ao número de Strouhal. Também se utilizam recursos gráficos de visualização da formação da esteira a jusante do corpo.

## 5.1 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Nas simulações numéricas foram consideradas duas classes de parâmetros: aqueles relacionados ao método numérico e aqueles afetos ao fenômeno físico. A seguir são esclarecidas as influências que tais parâmetros têm sobre os resultados das simulações numéricas.

## 5.1.1 – Parâmetros Relacionados com o Método Numérico

### a) Número de painéis planos (m)

O número de painéis planos utilizados para discretizar e representar as duas fronteiras sólidas do problema tem influência direta na precisão dos resultados das simulações numéricas; sendo assim, aumentando-se o número de painéis planos utilizados para discretizar as fronteiras sólidas, aumenta-se a precisão dos resultados obtidos. Uma das grandes dificuldades impostas pelo Método de Vórtices Discretos consiste no tempo de CPU; sabe-se que, quanto maior o número de painéis utilizados, maior será o número total de vórtices discretos presentes na nuvem. O tempo de CPU, quando se utiliza a Lei de Biot-Savart, torna-se proporcional ao quadrado do número de vórtices discretos presentes na nuvem para o cálculo da interação vórtice-vórtice.

Neste trabalho a superfície do cilindro circular foi discretizada em 300 painéis planos ( $mb1 = 300$ ), ao passo que a superfície do solo foi representada por 10 módulos ( $nm = 10$ ) de comprimento igual ao diâmetro do cilindro circular ( $lm = 1,0$ ), sendo cada módulo discretizado em 95 painéis ( $np = 95$ ), totalizando 950 painéis. Em todas as simulações numéricas onde o solo se faz presente, o cilindro circular é posicionado a uma distância  $n = 3$  da origem (Figura 4.13).

### b) Incremento de tempo ( $\Delta t$ )

O incremento de tempo foi escolhido a partir de vários testes, tendo como primeira aproximação a expressão utilizada no trabalho de Mustto *et al.* (1998), ou seja:

$$\Delta t = \frac{2\pi\vartheta}{mb1}, \quad 0 < \vartheta \leq 1 \quad (5.1)$$

onde  $mb1$  é o número de painéis planos utilizados para discretizar a superfície do corpo.

Na escolha do incremento de tempo, foi avaliado o esquema de avanço convectivo de primeira ordem (esquema de Euler), verificando que o valor 0,05 para o incremento de tempo era satisfatório.

### c) Espessura da coroa circular

De acordo com o que foi exposto no Item 4.5.1, em cada instante de tempo da simulação numérica deve-se determinar, na posição ocupada por cada vórtice discreto presente na nuvem, o valor de uma viscosidade turbulenta. O cálculo desta viscosidade turbulenta (via função estrutura de velocidade de segunda ordem) utiliza a velocidade nos pontos ocupados por outros vórtices discretos que estão localizados no interior de uma coroa circular de espessura  $r_{ext} - r_{int}$ , definida a partir do centro do vórtice discreto em análise (Figura 4.11). Assim, torna-se importante inferir até que distância radial a partir do vórtice discreto em análise deve-se considerar o raio externo da coroa circular, de modo que os vórtices discretos vizinhos localizados próximos a esse raio externo ainda tenham alguma influência sobre o vórtice discreto investigado. Esta influência está associada ao cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem e, conseqüentemente, ao cálculo do coeficiente de viscosidade turbulenta. Em outras palavras, é necessário determinar um valor adequado para a espessura da coroa circular que é definida ao redor de cada vórtice discreto presente na nuvem, para que se considere os aspectos referentes à turbulência nas simulações numéricas.

A determinação da espessura da coroa circular consiste em duas etapas: (i) a determinação do raio interno da coroa circular; (ii) a determinação do raio externo da coroa circular.

O valor do raio interno da coroa circular,  $r_{int}$ , encontra-se limitado pelo valor do raio do núcleo do vórtice discreto em análise,  $\sigma_{0c}$ . Devido a esta limitação, considera-se, tal como no trabalho de Alcântara Pereira (2002), o valor  $r_{int} = 0,1\sigma_{0c}$  como sendo o raio interno da coroa circular.

Para determinar o valor do raio externo da coroa circular, realiza-se um estudo estatístico considerando-se a esteira composta por 300.000 vórtices discretos de Lamb, apresentada na Figura 5.2. Tal esteira foi obtida através de uma simulação numérica do escoamento ao redor de um cilindro circular hidraulicamente liso e isolado, discretizado em 300 painéis planos; o tempo adimensional final desta simulação numérica foi  $t = 50,00$ , e não foi utilizado um modelo de turbulência.

A cada vórtice discreto da Figura 5.2 associa-se uma coroa circular de espessura igual a  $r_{ext} - r_{int}$ , onde  $r_{int} = 0,1\sigma_{0c}$  (raio interno da coroa circular) e  $r_{ext} = \sigma_{0c} + sm\sigma_{0c}$  (raio externo

da coroa circular); veja a Figura 4.11. Com o valor de  $r_{int}$  fixado, adotam-se diferentes valores para o parâmetro  $sm$ , de modo que  $r_{ext} = (1,00 + sm)\sigma_{0c}$ ; neste caso, são escolhidos 61 valores distintos para  $sm$ .



Figura 5.2 – Esteira de vórtices discretos utilizada no estudo estatístico realizado para determinar a espessura da coroa circular (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $\sigma_0 = \text{eps} = 0,001$ ;

$$\varepsilon = 0,000; \text{Re} = 1,0 \times 10^5).$$

Em seguida, para cada valor adotado para o parâmetro  $sm$ , conta-se o número de vórtices discretos ( $N$ ) encontrados no interior da coroa circular definida ao redor de cada vórtice discreto presente na esteira da Figura 5.2, e divide-se este número pela respectiva área da coroa circular,  $A_c = \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)$ . Em seguida, calcula-se o valor médio desta divisão,  $(N/A_c)_{médio}$ , entre todos os vórtices discretos da esteira analisada. Na Figura 5.3, apresentam-se os valores médios encontrados para a razão  $N/A_c$ , em função do raio externo adotado para a coroa circular definida ao redor de cada vórtice discreto que compõe a esteira da Figura 5.2.

De acordo com a Figura 5.3, observa-se que a curva possui um comportamento assintótico, e este comportamento pode ser utilizado como base para a determinação do parâmetro  $sm$ . Estabelece-se o princípio de que, em uma simulação numérica, não é correto aplicar o modelo de turbulência em todos os vórtices discretos que representam a vorticidade presente na região fluida, e que também não é correto aplicar tal modelo em poucos vórtices discretos (Alcântara Pereira, 2002). Dessa forma, adota-se  $sm = 3,0$  como sendo um valor razoável, ou seja, a espessura da coroa circular definida ao redor de cada vórtice discreto da nuvem assume o valor  $r_{ext} - r_{int} = 3,9\sigma_{0c}$ .

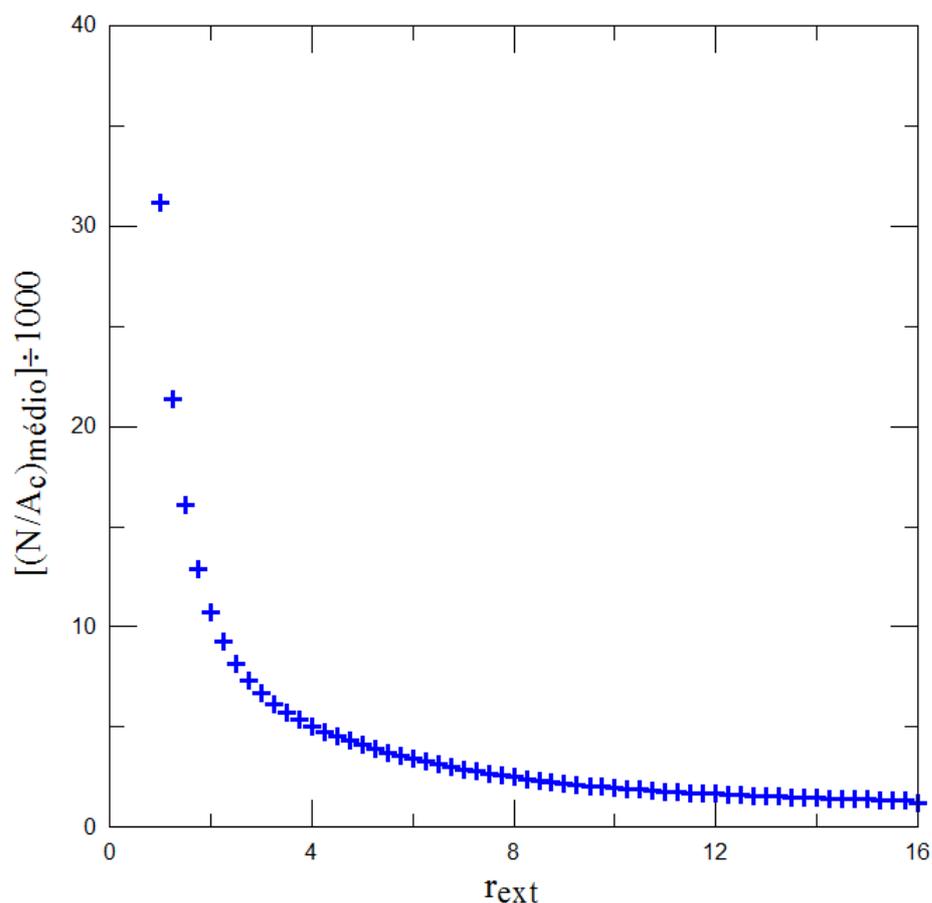


Figura 5.3 – Valores médios obtidos para a razão  $N/A_c$  em função do raio externo da coroa circular definida ao redor de cada vórtice discreto presente na Figura 5.2.

#### d) Número de pontos rugosos

De acordo com o exposto no Item 4.2.3, o modelo de rugosidade modifica, em cada instante de tempo da simulação numérica, o valor do raio do núcleo do vórtice discreto nascente, uma vez que o número de Reynolds deve ser modificado pela influência de um coeficiente de viscosidade turbulenta. Este coeficiente, por sua vez, é calculado a partir da função estrutura de velocidade de segunda ordem, a qual representa uma média entre as diferenças de velocidade existentes entre o ponto de geração de vórtices discretos de um dado painel plano, e pontos situados nas vizinhanças da posição de geração de vórtices discretos, os chamados pontos rugosos.

Portanto, o número de pontos rugosos ( $NR$ ) é importante para garantir uma média representativa das flutuações de velocidade existentes em torno dos pontos de geração de vórtices discretos. Neste trabalho, utiliza-se  $NR = 21$  pontos rugosos definidos ao redor de cada posição de geração de vórtices discretos (Figura 4.6).

## 5.1.2 – Parâmetros Relacionados com o Fenômeno Físico

### a) Número de Reynolds ( $Re$ )

O valor adotado para o número de Reynolds foi de  $1,0 \times 10^5$ . Este valor foi escolhido por situar-se no regime de escoamento subcrítico, de modo a mostrar que o modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho é capaz de provocar padrões de escoamentos supercríticos, ou seja, de antecipar a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta.

### b) Distância vertical entre o cilindro circular e o solo ( $h$ )

Este parâmetro é de fundamental importância para indicar os valores de  $h$  que submetem o corpo ao efeito de bloqueio imposto pelo solo.

### c) Velocidade da superfície do solo

Os resultados encontrados na literatura se referem ao escoamento sobre um cilindro circular na presença de uma superfície plana que se move com a mesma velocidade do escoamento incidente.

### d) Rugosidade da superfície do corpo

Este parâmetro afeta significativamente o comportamento do escoamento, uma vez que contribui para que a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta ocorra com valores menores do número de Reynolds.

## 5.2 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR ISOLADO

### 5.2.1 – Cilindro Circular Hidraulicamente Liso

No caso deste trabalho, um cilindro circular sujeito a um escoamento incidente é dito isolado quando se encontra a uma distância suficientemente grande do solo, de modo que os mecanismos do efeito solo não sejam mais sentidos por este corpo (por exemplo,  $h = 5.000$ ), e é dito hidraulicamente liso quando a rugosidade de sua superfície é insuficiente para causar modificações significativas na camada limite que se desenvolve ao seu redor.

Os resultados numéricos obtidos para o cilindro circular hidraulicamente liso e isolado foram comparados com os resultados experimentais de Blevins (1984) e com os resultados numéricos de Alcântara Pereira *et al.* (2002), para mostrar que a correção do modelo de turbulência proposto por estes autores, desenvolvida no presente trabalho, produz melhores resultados.

A Tabela 5.1 apresenta uma comparação entre os resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura e os resultados obtidos pela presente simulação. As aferições realizadas permitiram simular o escoamento ao redor do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado com 1.500 avanços no tempo, sendo que os valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação, bem como o número de Strouhal, foram calculados entre  $t_{inicial} = 37,50$  e  $t_{final} = 75,00$ .

Tabela 5.1 – Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular hidraulicamente liso e isolado.

$Re = 1,0 \times 10^5$	$\bar{C}_D$	$\bar{C}_L$	St
Blevins (1984) - experimental	1,200	-	0,190
Alcântara Pereira <i>et al.</i> (2002) – sem modelo de turbulência	1,210	0,040	0,220
Alcântara Pereira <i>et al.</i> (2002) – com modelo de turbulência	1,270	0,020	0,200
Presente Simulação – sem modelo de turbulência	1,225	-0,034	0,210
Presente Simulação – com modelo de turbulência	1,223	0,021	0,207

Analisando a Tabela 5.1, deve-se comentar que Alcântara Pereira *et al.* (2002) utilizaram painéis planos sobre os quais distribuíram vórtices com densidade constante para representar a superfície discretizada do cilindro circular (Martensen, 1959). Observa-se que o modelo de turbulência proposto por Alcântara Pereira *et al.* (2002) elevou o valor obtido numericamente para o coeficiente de arrasto, de 1,210 para 1,270, ou seja, a atuação do modelo de turbulência aumentou a diferença entre o resultado numérico e o resultado experimental obtido por Blevins, para aproximadamente 5,8%.

Comparando os resultados obtidos numericamente por Alcântara Pereira *et al.* (2002) e pela presente simulação, ambos utilizando um modelo de turbulência, nota-se que a correção do modelo de turbulência proposto por Alcântara Pereira *et al.* (2002), realizada nesta tese de doutorado, conduz a melhores resultados; a diferença entre o resultado numérico obtido, para o valor do coeficiente de arrasto médio, e o resultado experimental de Blevins (1984), é da ordem de 1,9%. Entretanto, confrontando os resultados obtidos no presente trabalho, sem o uso do modelo de turbulência e com o uso do mesmo, não se observam grandes diferenças no valor do coeficiente de arrasto médio, o que já era esperado, uma vez que as simulações numéricas são bidimensionais. Apesar disso, conforme será mostrado no Item 5.2.2, o modelo de turbulência utilizado neste trabalho é fundamental para o êxito do modelo de rugosidade desenvolvido neste estudo, ainda que as simulações numéricas sejam bidimensionais. Deste modo, as análises apresentadas na sequência deste capítulo são feitas utilizando-se o modelo de turbulência proposto por Alcântara Pereira *et al.* (2002) corrigido.

Comparando os resultados numéricos da presente simulação, com o uso do modelo de turbulência, com os valores experimentais de Blevins (1984), os quais possuem uma incerteza de  $\pm 10\%$ , observa-se uma boa concordância entre eles. Verifica-se que os resultados obtidos para o coeficiente de arrasto são um pouco superiores aos experimentais, o que é uma característica das simulações numéricas bidimensionais. Deve ser mencionado que na formulação matemática do problema (Capítulo 3) foi desprezado o termo responsável pela deformação dos tubos de vorticidade,  $(\omega \cdot \nabla)u$ , o qual deve ser implementado nas simulações numéricas tridimensionais. Com relação ao número de Strouhal, o qual mede a frequência de desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas, considera-se que o código computacional está em concordância com o que se prevê para escoamentos subcríticos ( $St \cong 0,20$ ). Neste trabalho, o número de Strouhal é calculado via Transformada Rápida de Fourier, utilizando o software ORIGIN 8.0.

A Figura 5.4 apresenta o comportamento da distribuição média do coeficiente de pressão sobre a superfície discretizada do cilindro circular. É feita uma comparação entre os resultados da teoria potencial e os resultados experimentais de Blevins (1984). A seguir, também são feitas comparações com outros trabalhos experimentais, embora estes não estejam mencionados na Figura 5.4.

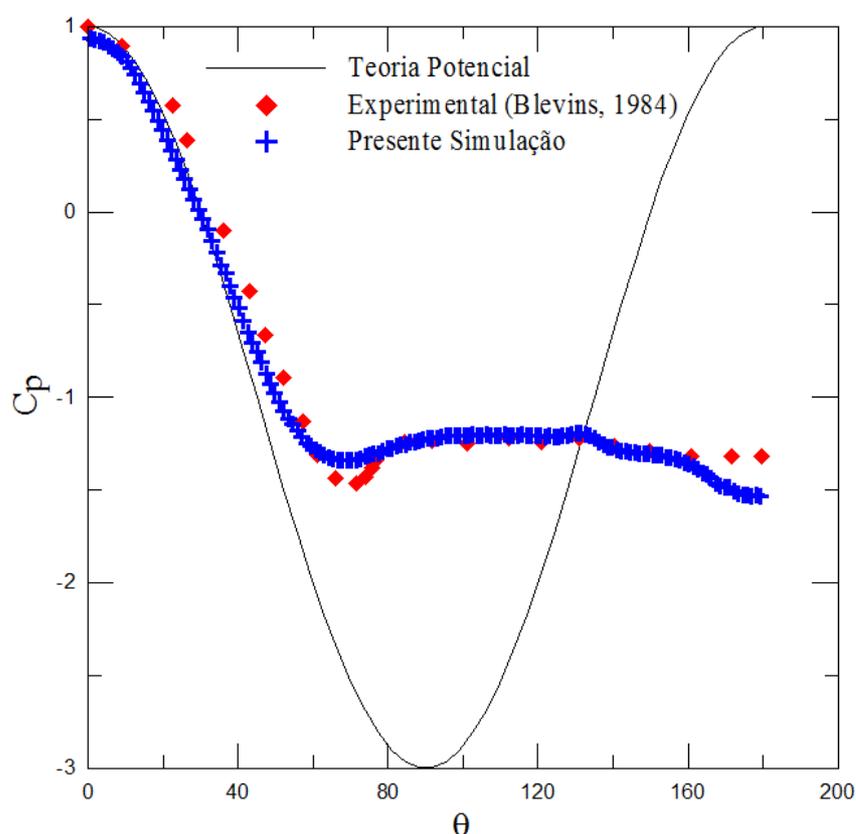


Figura 5.4 – Distribuição média do coeficiente de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Verifica-se que a separação do escoamento para a presente simulação ocorre quando  $\theta \cong 77^\circ$ , o que é um resultado aceitável. A literatura apresenta valores experimentais distintos para este ângulo:  $\theta \cong 82^\circ$  (Milne-Thompson, 1955) e  $\theta \cong 78^\circ$  (Son & Hanratty, 1969); o ângulo  $\theta$  é definido na Figura 5.1. Nota-se que há uma diferença entre o resultado da presente simulação e o resultado experimental na região de descolamento da camada limite. Esta discrepância pode ser minimizada mediante a utilização de painéis menores nesta região. Quanto ao critério utilizado para se determinar o ponto de separação do escoamento, adotou-se o ângulo correspondente ao ponto de controle do painel situado na região onde a curva de

distribuição de pressão média sofre uma inflexão, tendendo à região de pressão aproximadamente constante.

A Figura 5.5 mostra a evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo. Observa-se que, após a passagem do transiente numérico, o coeficiente de sustentação oscila em torno do valor nulo (uma vez que o cilindro circular é um corpo rombudo e simétrico) e o coeficiente de arrasto oscila em torno de 1,22. O número de Strouhal, por sua vez, apresenta o valor de 0,21. Observa-se ainda, que a frequência de oscilação do coeficiente de arrasto é duas vezes maior do que a frequência de oscilação do coeficiente de sustentação, o que é uma característica intrínseca do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado; este comportamento ocorre porque o coeficiente de arrasto oscila uma vez para cada estrutura vorticosa que se desprende, ou no lado superior, ou no lado inferior do corpo. Já o coeficiente de sustentação completa um ciclo de oscilação para cada par de estruturas vorticosas contrarrotativas que se desprende a partir dos pontos de separação do corpo.

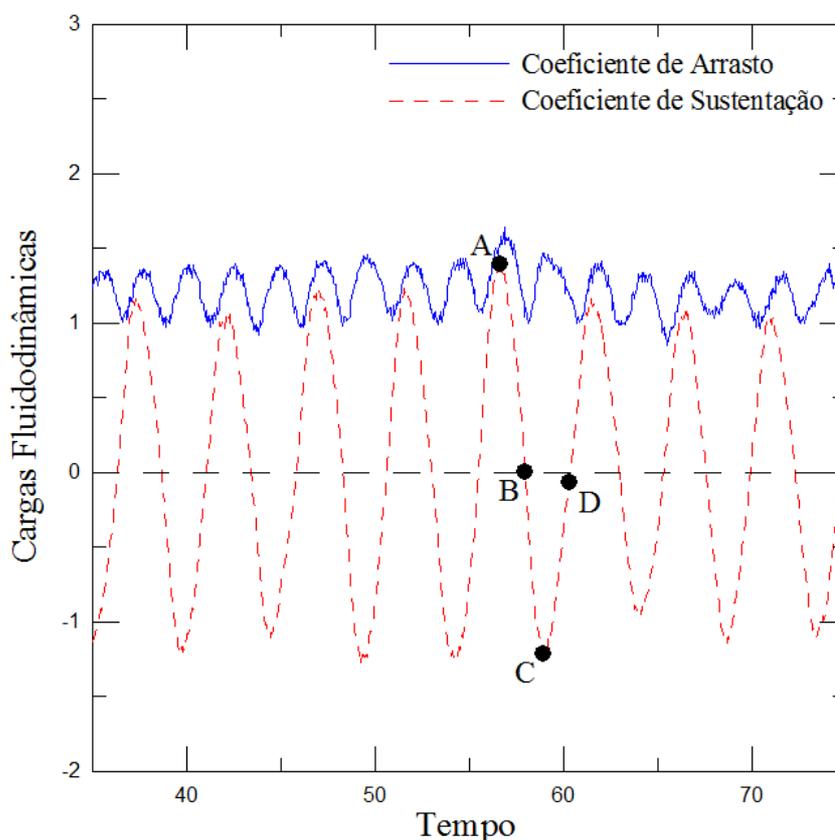


Figura 5.5 – Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Ainda na Figura 5.5, identificam-se quatro pontos importantes que são utilizados para entender os mecanismos de desprendimento das estruturas vorticosas ao longo de um período da curva que representa o coeficiente de sustentação.

Outra observação importante está relacionada à amplitude de oscilação do coeficiente de sustentação na Figura 5.5. Verifica-se que a amplitude de oscilação média positiva é de aproximadamente 1,17, ao passo que a amplitude de oscilação média negativa é de aproximadamente 1,16, ou seja, o valor líquido é de aproximadamente zero, comprovando que não há sustentação no cilindro circular isolado; o valor do coeficiente de sustentação médio obtido não é nulo devido a erros de aproximação numérica.

Na Figura 5.6 apresenta-se a distribuição de pressão instantânea que atua sobre a superfície discretizada do cilindro circular, em cada um dos quatro instantes marcados na Figura 5.5.

Nota-se que, no instante representado pelo ponto *A*, existe uma zona de baixa pressão compreendida entre  $59^\circ$  e  $180^\circ$ , medida a partir do bordo de ataque do cilindro circular no sentido horário. Esta zona de baixa pressão corresponde a uma estrutura vorticosa horária que nasceu na parte superior do corpo, no instante representado pelo ponto *D*, e que, no instante representado pelo ponto *A*, encontra-se em um estágio inicial de desenvolvimento (Figura 5.7a); este estágio de desenvolvimento da estrutura vorticosa horária (superior) implica no surgimento de uma força de sustentação positiva (ponto *A* da Figura 5.5), e no crescimento do coeficiente de arrasto.

No instante representado pelo ponto *B* da Figura 5.6 há uma região de baixa pressão aproximadamente constante entre  $50^\circ$  e  $296^\circ$ , a qual corresponde à passagem do coeficiente de sustentação de positivo para negativo. A estrutura vorticosa horária (superior) continua se desenvolvendo e, no instante representado pelo ponto *B*, começa a atrair a camada cisalhante oposta (Figura 5.7b). Ainda por volta deste instante, pode-se notar, na parte inferior do corpo (Figura 5.7b), o nascimento de uma estrutura vorticosa anti-horária.

Observa-se que, no instante representado pelo ponto *C* da Figura 5.6, existe uma zona de baixa pressão compreendida entre  $180^\circ$  e  $296^\circ$ . Esta zona de baixa pressão corresponde à estrutura vorticosa anti-horária que nasceu na parte inferior do corpo, no instante representado pelo ponto *B*, e que, agora, no instante representado pelo ponto *C*, encontra-se em estágio inicial de desenvolvimento (Figura 5.7c); este estágio de desenvolvimento da estrutura vorticosa anti-horária (inferior) implica no surgimento de uma força de sustentação negativa

(ponto *C* da Figura 5.5), e no crescimento do coeficiente de arrasto. Simultaneamente ao que foi descrito anteriormente, nota-se que o desenvolvimento da estrutura vorticosa anti-horária (inferior) inicia o processo de desprendimento da estrutura vorticosa horária (superior), através da interrupção da camada cisalhante superior que injeta vorticidade permanentemente na estrutura vorticosa horária (Figura 5.7c).

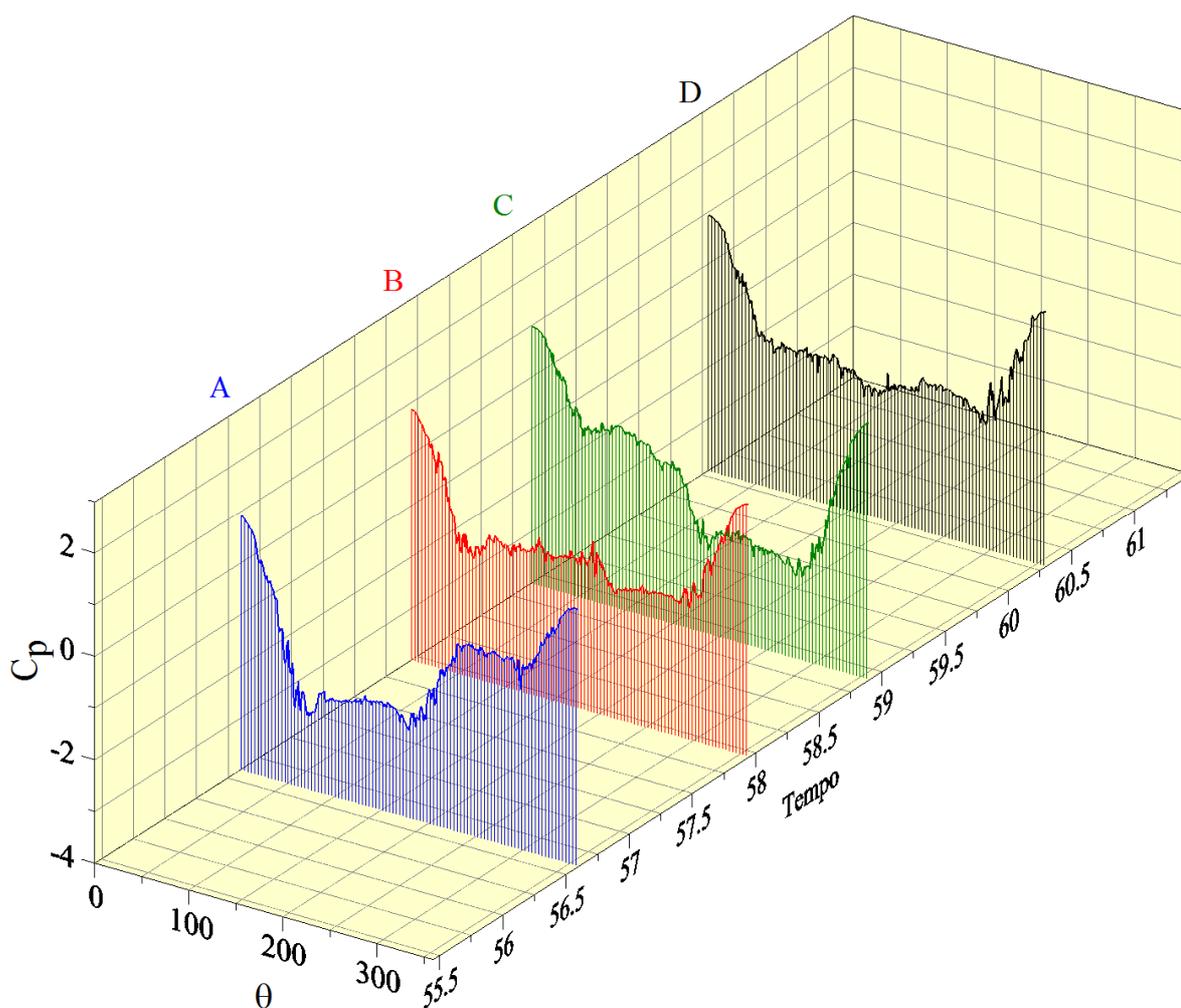


Figura 5.6 – Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

De maneira semelhante ao que ocorre no instante representado pelo ponto *B*, o ponto *D* da Figura 5.6 apresenta uma região de baixa pressão aproximadamente constante entre  $71^\circ$  e  $296^\circ$ , a qual corresponde à passagem do coeficiente de sustentação de negativo para positivo. A estrutura vorticosa anti-horária (inferior) continua se desenvolvendo e, no instante representado pelo ponto *D*, verifica-se que tal estrutura está atraindo a camada cisalhante

oposta de tal maneira que culmina no desprendimento definitivo da estrutura vorticosa horária (superior), a qual passa a fazer parte da esteira viscosa (Figura 5.7d). À medida que a estrutura vorticosa horária (superior) é incorporada à esteira viscosa, pode-se notar que uma nova estrutura vorticosa horária começa a nascer na parte superior do cilindro circular; tal estrutura irá se desenvolver, e este desenvolvimento inicia o processo de desprendimento da estrutura vorticosa anti-horária (inferior) – Figura 5.7a – através da interrupção da camada cisalhante inferior que injeta vorticidade permanentemente na estrutura vorticosa anti-horária. O processo de desenvolvimento da estrutura vorticosa horária (superior) continua, e o ciclo de desprendimento de um par de estruturas vorticosas contrarrotativas é finalizado com o desprendimento definitivo da estrutura vorticosa anti-horária (inferior) – Figura 5.7b – a qual passa a fazer parte da esteira viscosa.

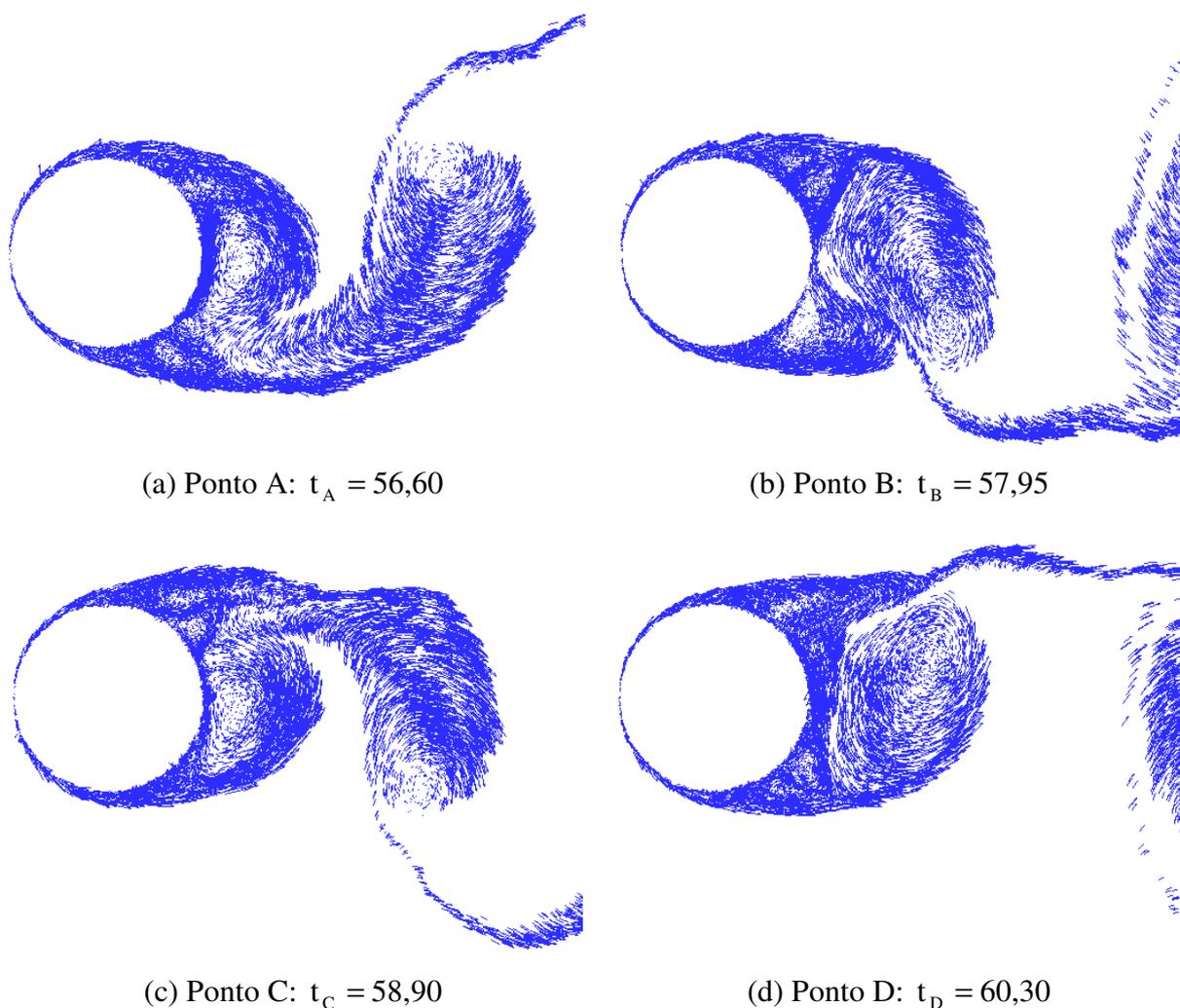


Figura 5.7 – Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente liso e isolado, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras 5.5 e 5.6 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Os mecanismos anteriormente descritos se repetem, ou seja, pares contrarrotativos de estruturas vorticosas são gerados alternadamente a partir dos pontos de separação do cilindro circular, o que faz com que a esteira viscosa formada a jusante do corpo tenha um caráter oscilatório, caracterizando a formação da esteira de von Kármán apresentada na Figura 5.8. Estes mecanismos físicos obtidos pelo presente código computacional estão de acordo com aqueles descritos por Gerrard (1966).

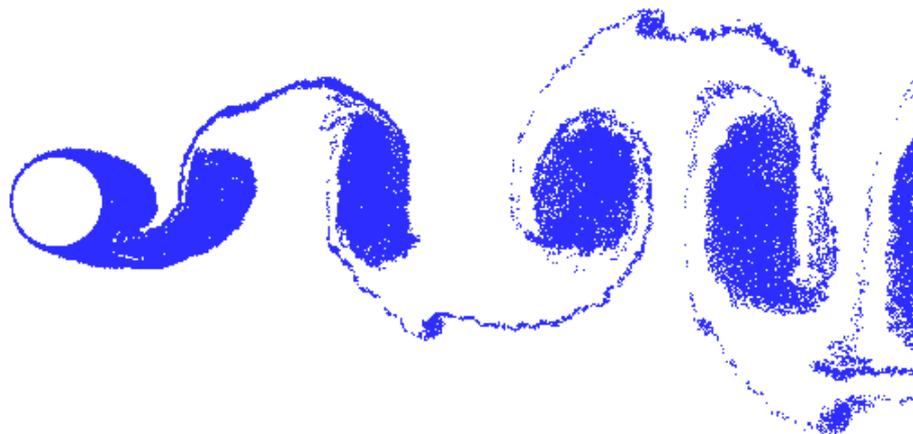


Figura 5.8 – Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.5 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Neste momento, é importante destacar o elevado tempo dispendido na simulação numérica; para se obter uma esteira com 450.000 vórtices discretos, levou-se aproximadamente 482 horas de tempo de CPU, em um processador INTEL CORE I7 de 2,80GHz.

Considera-se, portanto, que o código computacional está aferido e apto a simular o escoamento ao redor do cilindro circular de superfície hidraulicamente rugosa e, ainda, o escoamento ao redor deste corpo estacionado nas proximidades da superfície do solo, com a utilização dos mesmos parâmetros usados no caso do cilindro circular hidraulicamente liso e isolado.

### 5.2.2 – Cilindro Circular Hidraulicamente Rugoso

Um corpo é dito hidraulicamente rugoso quando a rugosidade de sua superfície causa modificações significativas na camada limite que se desenvolve ao seu redor.

O objetivo deste item é o de demonstrar que o modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho é capaz de provocar padrões bidimensionais de escoamentos supercríticos, partindo-se de simulações numéricas cujo número de Reynolds pertence ao regime subcrítico de escoamento ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ); veja a Figura 5.9.

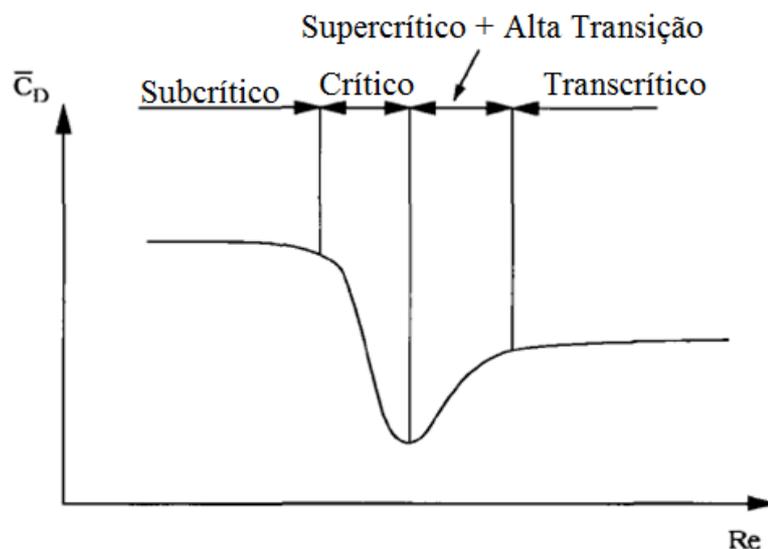


Figura 5.9 – Regimes de escoamento para um cilindro circular liso e isolado (adaptada de Sumer & Fredsøe, 2006).

A análise dos resultados obtidos para um cilindro circular hidráulicamente rugoso inicia-se com a Tabela 5.2, a qual mostra os valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação médios, bem como o número de Strouhal para os diversos valores de rugosidade simulados numericamente.

Tabela 5.2 – Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular isolado submetido a diversas rugosidades ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

$\varepsilon$	$\bar{C}_D$	$\bar{C}_L$	St
0,000	1,223	0,021	0,207
0,001	1,188	0,035	0,206
0,002	1,133	0,005	0,203
0,007	1,071	-0,132	0,191
0,020	1,025	-0,058	0,179

Observa-se, a partir da Tabela 5.2 e da Figura 5.10, que as menores rugosidades estudadas ( $\varepsilon = 0,001$  e  $\varepsilon = 0,002$ ) provocam pequenas modificações no comportamento fluidodinâmico do corpo; como justificativa, pode-se notar que a separação do escoamento ocorre em  $\theta \cong 81^\circ$ , o que é bem próximo do caso do cilindro circular hidraulicamente liso.

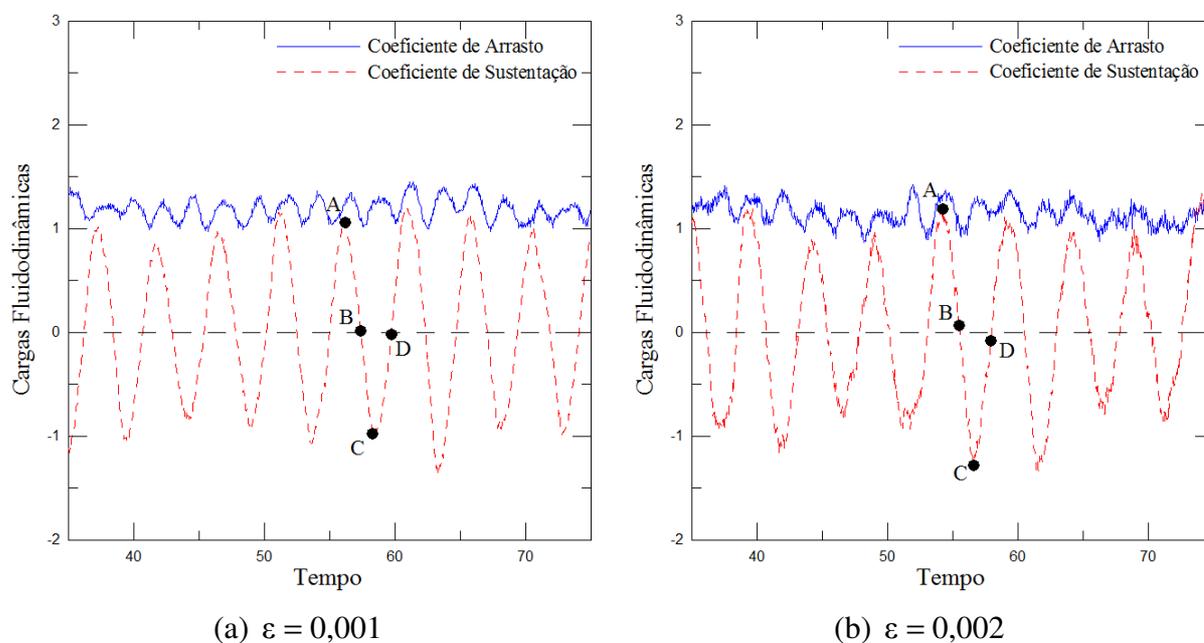
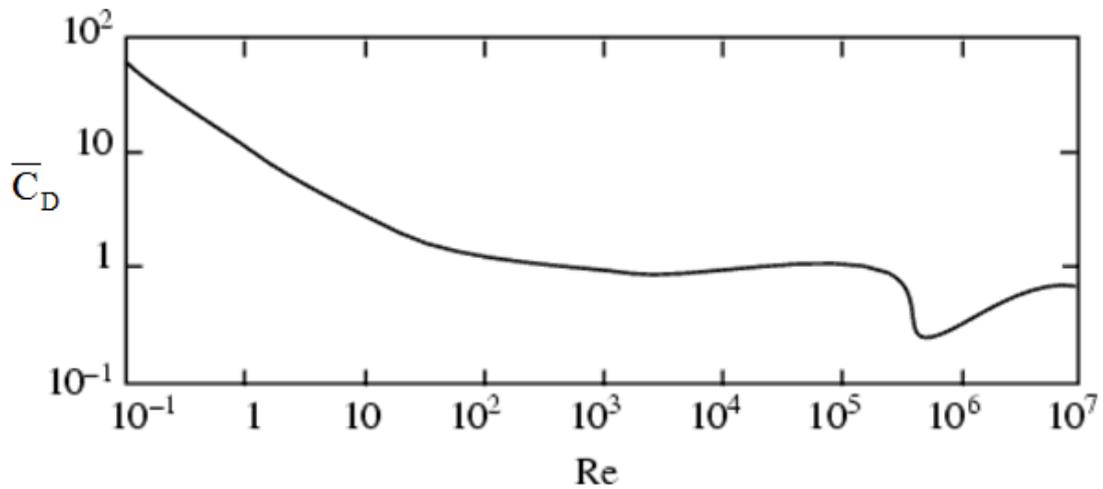


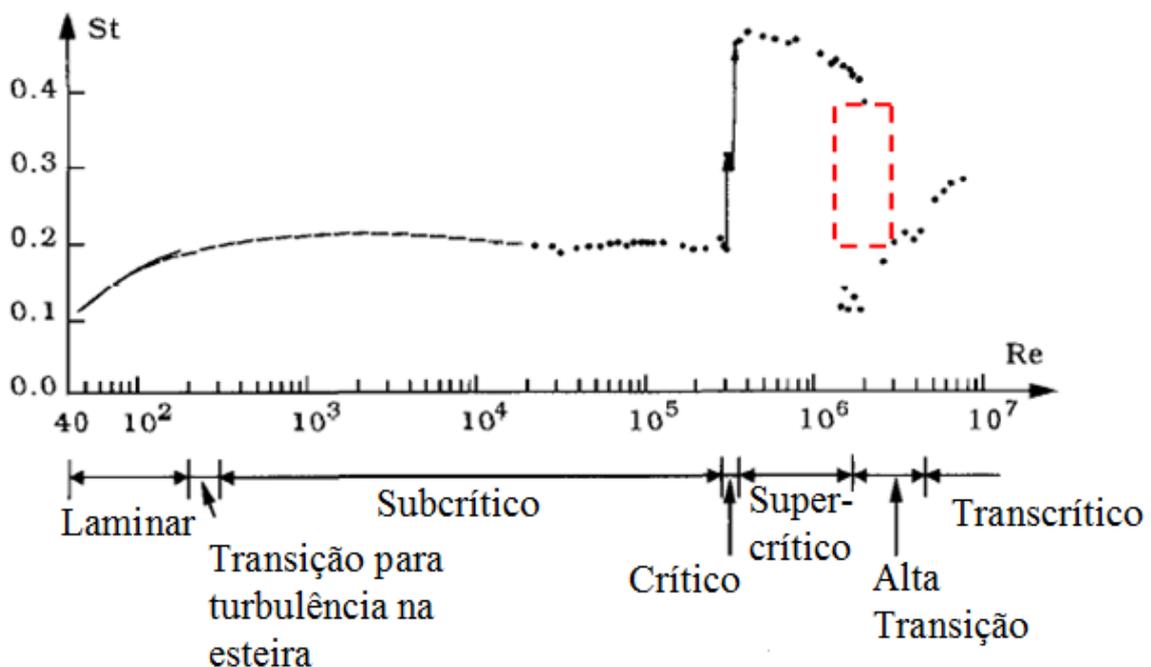
Figura 5.10 – Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Comparando a Figura 5.10 com a Figura 5.5, observa-se que o comportamento fluidodinâmico do corpo é pouco alterado, podendo-se, no entanto, verificar o início da crise do arrasto (Tabela 5.2). Contudo, como a crise do arrasto encontra-se em estágio inicial, não se verifica uma modificação significativa na frequência de desprendimento de estruturas vorticosas, representada pelo número de Strouhal na Tabela 5.2 ( $St \cong 0,2$ ), o que caracteriza o regime de escoamento ainda como sendo subcrítico (Figura 5.11).

A Figura 5.12 mostra a evolução da esteira viscosa formada a jusante do cilindro circular com rugosidades  $\varepsilon = 0,001$  (Figura 5.12a) e  $\varepsilon = 0,002$  (Figura 5.12b). A comparação entre a Figura 5.12 e a Figura 5.8 confirma que o comportamento do escoamento não sofre grandes modificações quando a superfície do cilindro circular é simulada considerando-se as rugosidades  $\varepsilon = 0,001$  e  $\varepsilon = 0,002$ .



(a)  $\overline{C_D} \times Re$  (<http://scienceworld.wolfram.com/physics/CylinderDrag.html>)



(b)  $St \times Re$  (adaptada de Sumer & Fredsøe, 2006)

Figura 5.11 – Comportamento do coeficiente de arrasto médio e do número de Strouhal em função do número de Reynolds para um cilindro circular liso e isolado.

Por outro lado, no que se refere às maiores rugosidades testadas ( $\varepsilon = 0,007$  e  $\varepsilon = 0,020$ ), verifica-se que o comportamento do escoamento é alterado de maneira significativa, deixando o regime subcrítico. Esta afirmação será justificada na sequência e, para isto, as análises que se seguem são focadas na rugosidade  $\varepsilon = 0,007$ .

Na Figura 5.13 apresenta-se o comportamento da distribuição média de pressão sobre a superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso ( $\varepsilon = 0,007$ ) e isolado.

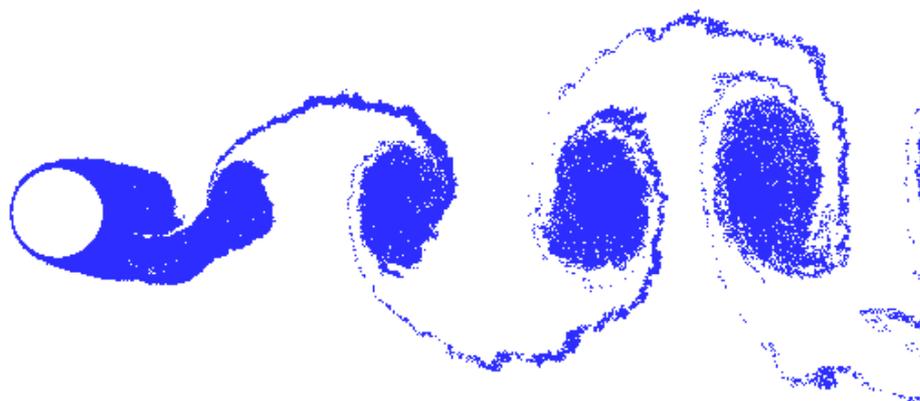
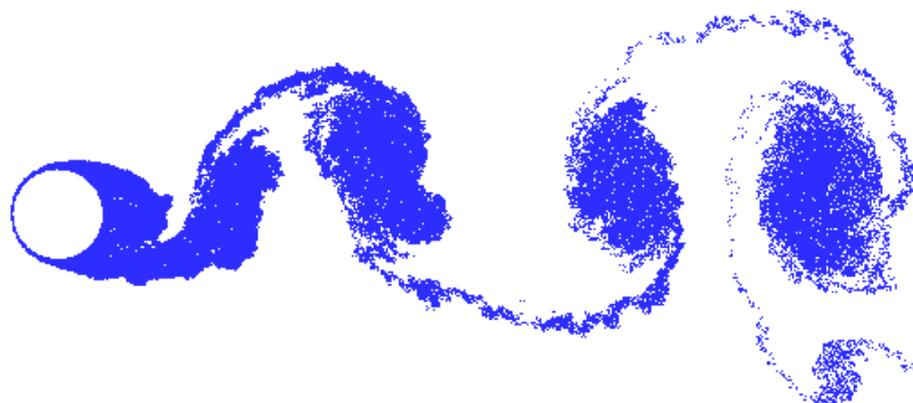
(a)  $\varepsilon = 0,001$ (b)  $\varepsilon = 0,002$ 

Figura 5.12 – Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.10 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Verifica-se que a separação do escoamento para a presente simulação ocorre quando  $\theta \cong 88^\circ$ , o que justifica a queda do arrasto; é importante lembrar que, para o cilindro circular hidraulicamente liso, a separação do escoamento prevista numericamente ocorre quando  $\theta \cong 77^\circ$ . Assim, observa-se que o ponto de separação é deslocado para jusante da superfície do corpo, de um valor igual a  $11^\circ$ ; este deslocamento do ponto de separação para jusante faz com que o coeficiente de arrasto sofra uma redução de aproximadamente 12,4%, quando comparado com o caso em que a superfície do corpo é hidraulicamente lisa.

A Figura 5.14 mostra a evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo, para o cilindro circular de superfície com rugosidade  $\varepsilon = 0,007$ . Observa-se que as oscilações periódicas verificadas na curva do coeficiente de arrasto, quando  $\varepsilon = 0,000$  (Figura 5.5), são atenuadas quando  $\varepsilon = 0,007$ . O número de Strouhal, por sua vez, é reduzido de aproximadamente 0,21 ( $\varepsilon = 0,000$ ) para aproximadamente 0,19 ( $\varepsilon = 0,007$ ).

Ainda na Figura 5.14, identificam-se quatro pontos importantes que são utilizados para entender o mecanismo de desprendimento das estruturas vorticosas ao longo de um período da curva que representa o coeficiente de sustentação. A comparação entre os casos do cilindro circular hidraulicamente liso e hidraulicamente rugoso, no que se refere ao mecanismo de desprendimento das estruturas vorticosas, explica a queda do número de Strouhal quando  $\varepsilon = 0,007$  e, ainda, juntamente com a queda do  $\overline{C}_D$ , caracteriza o regime de escoamento como sendo supercrítico.

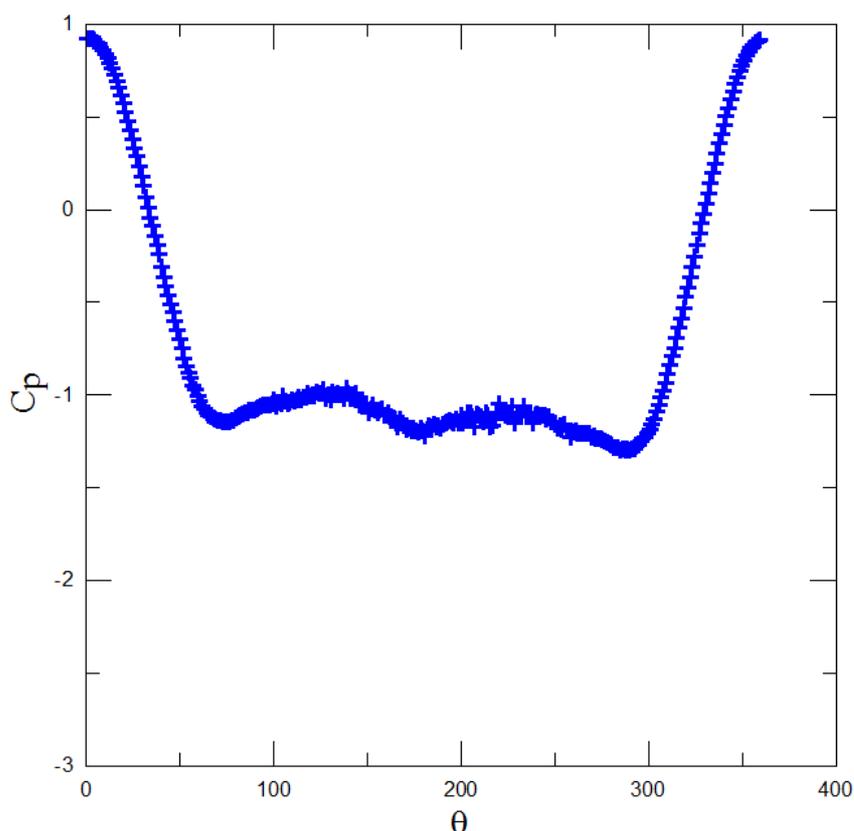


Figura 5.13 – Distribuição média de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Na Figura 5.15, apresenta-se a distribuição de pressão instantânea que atua sobre a superfície discretizada do cilindro circular em cada um dos quatro instantes marcados na Figura 5.14.

Nota-se que a distribuição instantânea de pressão apresentada na Figura 5.15 ( $\varepsilon = 0,007$ ) possui um comportamento semelhante à distribuição instantânea de pressão

apresentada na Figura 5.6 ( $\varepsilon = 0,000$ ), no que se refere às diferenças entre as pressões exercidas nas partes superior e inferior do corpo. No entanto, observa-se que a rugosidade do corpo provoca flutuações na distribuição de pressão; tal característica já era esperada, uma vez que, considerando-se que o número de Reynolds do escoamento é de  $1,0 \times 10^5$ , rugosidades da ordem de  $\varepsilon = 0,007$  já são suficientes para tornar o escoamento supercrítico (Fage & Warsap, 1929), ou seja, para propiciar a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta. A comprovação de que o modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho promoveu a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta, tem origem no deslocamento do ponto de separação para jusante (de  $\theta \cong 77^\circ$  para  $\theta \cong 88^\circ$ ), o qual tem como consequência a queda do coeficiente de arrasto médio.

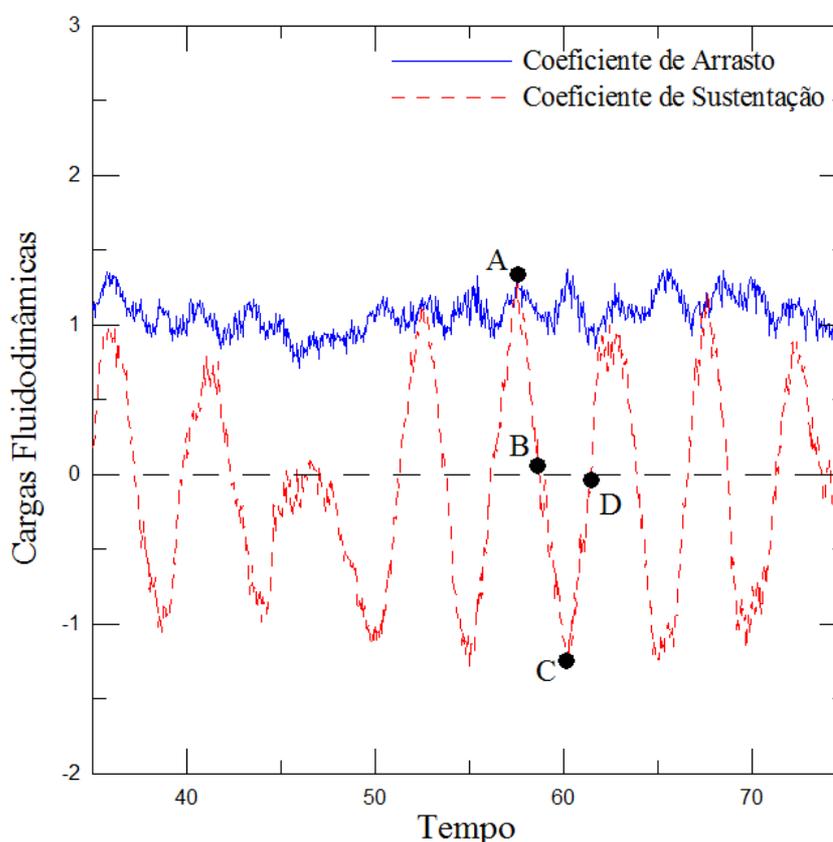


Figura 5.14 – Evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo para o cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Neste ponto, surge um questionamento relacionado ao comportamento do número de Strouhal: na Tabela 5.2, nota-se que o número de Strouhal é reduzido de aproximadamente 0,21 ( $\varepsilon = 0,000$ ), para aproximadamente 0,19 ( $\varepsilon = 0,007$ ). Este comportamento parece ser

contraditório com o que foi exposto anteriormente, pois com o ponto de separação deslocado para jusante, imagina-se, num primeiro momento, que a frequência de desprendimento de estruturas vorticosas deva aumentar, e não diminuir. Este fato é determinante para concluir em que região da Figura 5.11b o escoamento estudado se encontra, ou seja, qual é o regime de escoamento atingido, partindo-se de  $Re = 1,0 \times 10^5$ , quando o modelo de rugosidade atua com  $\varepsilon = 0,007$ .

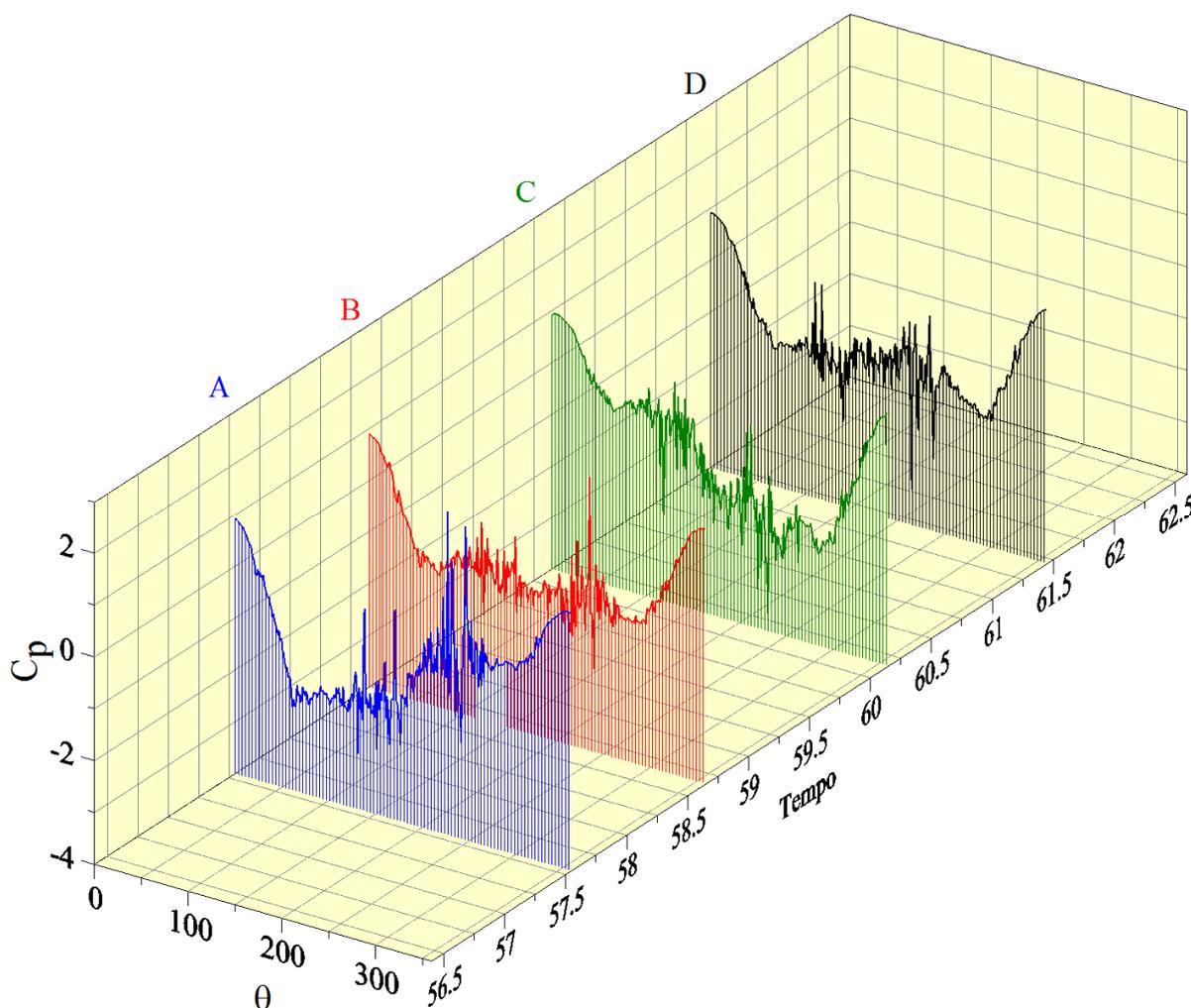


Figura 5.15 – Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Sabe-se que a principal característica do escoamento supercrítico é a interrupção do desprendimento de estruturas vorticosas (veja o destaque em vermelho na Figura 5.11b). No entanto, à medida que o número de Reynolds aumenta, o desprendimento de estruturas vorticosas surge novamente, porém, de maneira irregular (no final do regime supercrítico e

em um regime denominado de alta transição; veja a Figura 5.11b) até atingir o regime transcrito, onde o desprendimento de estruturas vorticosas pode ser observado de maneira regular, novamente.

Portanto, a diminuição da frequência de desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas ocorre porque o escoamento é levado para um regime de transição entre os regimes supercrítico e transcrito, o qual é caracterizado por um desprendimento irregular de estruturas vorticosas. O fenômeno físico capturado pelo modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho está de acordo com o exposto por Zdravkovich (1997); o autor pondera que, experimentalmente, dependendo do nível de turbulência do escoamento incidente e da rugosidade do corpo, o regime supercrítico pode ser atingido imediatamente após o regime subcrítico do escoamento, ou seja, sem passar pelo regime crítico.

Na Figura 5.16 mostra-se o campo de velocidades do escoamento nas vizinhanças do corpo, nos instantes representados pelos pontos *A*, *B*, *C* e *D* das Figuras 5.14 e 5.15.

Observa-se a ocorrência do mesmo mecanismo de formação e desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas descrito para o caso do cilindro circular hidraulicamente liso (Item 5.2.1), porém, para o corpo com rugosidade  $\varepsilon = 0,007$ , nota-se um atraso no desprendimento de tais estruturas, o que explica a redução observada no número de Strouhal. Verifica-se, ainda, que a estrutura vortica horária (superior) nasce e permanece na parte traseira do cilindro circular por mais tempo, o que faz com que esta estrutura adquira uma dimensão maior (Figura 5.16a). No entanto, este processo acaba por retardar, também, o desenvolvimento da estrutura vortica anti-horária (inferior), a qual é a responsável por causar o desprendimento da estrutura vortica horária (superior); veja as Figuras 5.16c e 5.16d. Este mesmo atraso verificado no desprendimento da estrutura vortica horária (superior) ocorre para o desprendimento da estrutura vortica anti-horária (inferior); compare a sequência de eventos mostrada na Figura 5.7 com a sequência mostrada na Figura 5.16. Este processo se repete causando a esteira oscilante mostrada na Figura 5.17.

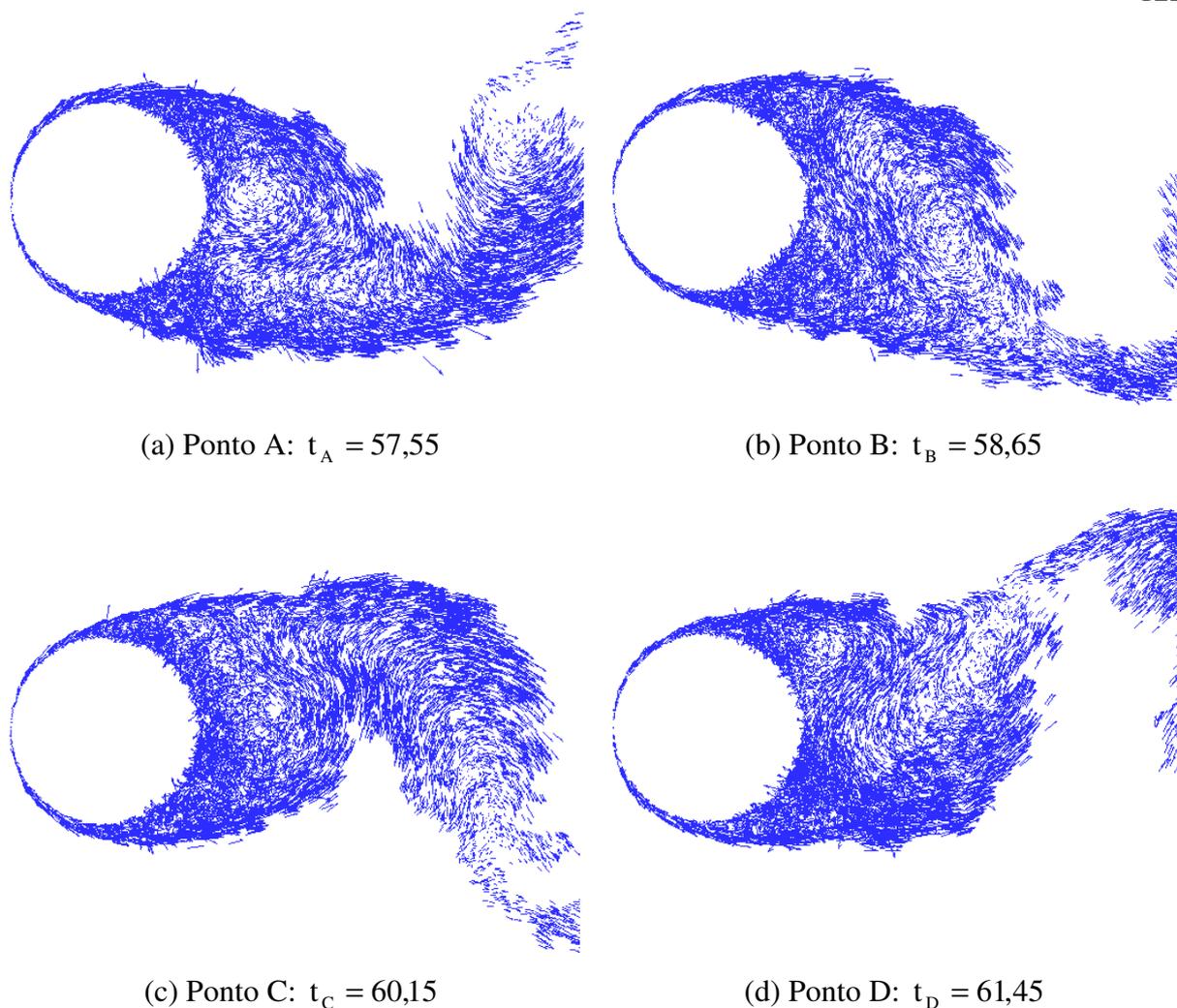


Figura 5.16 – Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente rugoso e isolado, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras 5.14 e 5.15 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

É importante destacar que o modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho se mostrou apto a simular escoamentos ao redor de contornos sólidos hidraulicamente rugosos, sem aumentar muito o tempo de processamento. As simulações apresentadas levaram cerca de 526 horas de tempo de processamento, ou seja, o tempo dispendido para realizar as simulações envolvendo os aspectos referentes à rugosidade aumentaram em apenas cerca de 9% o tempo de processamento, em comparação com as simulações realizadas para contornos sólidos hidraulicamente lisos.

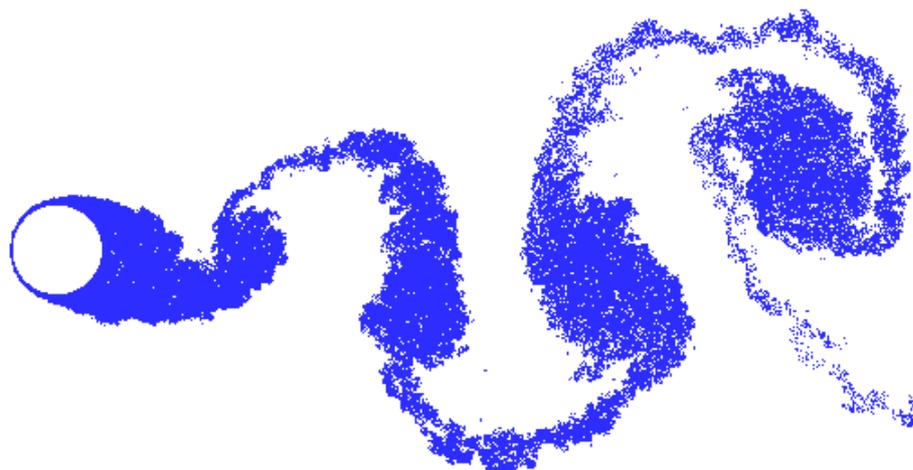


Figura 5.17 – Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.14 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

## 5.3 – ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO CIRCULAR NA PRESENÇA DO EFEITO SOLO

Como um exemplo de aplicação, nesta seção estuda-se o efeito imposto pelo solo ao escoamento ao redor de um cilindro circular. Como em grande parte das aplicações de engenharia existe movimento relativo entre o corpo e o solo, neste trabalho o solo é mantido fisicamente em repouso, porém, faz-se uso da estratégia numérica utilizada por Bimbato (2008) para representar o movimento do solo com velocidade igual à do escoamento incidente. Inicialmente (Item 5.3.1), considera-se o corpo como sendo hidraulicamente liso e, na sequência (Item 5.3.2), mostra-se um exemplo de aplicação do modelo de rugosidade desenvolvido neste estudo para uma dada distância entre o corpo e o solo.

### 5.3.1 – Cilindro Circular Hidraulicamente Liso

O esclarecimento do fenômeno físico presente no escoamento ao redor de um corpo estacionado nas proximidades do solo é difícil de ser obtido, uma vez que existem pelo menos três mecanismos que influenciam o comportamento fluidodinâmico do corpo nesta situação, os quais são apresentados no decorrer deste texto.

A análise do problema se inicia com a observação da Figura 5.18. Nela estão representados os resultados experimentais obtidos por Nishino (2007), bem como os resultados numéricos obtidos neste trabalho.

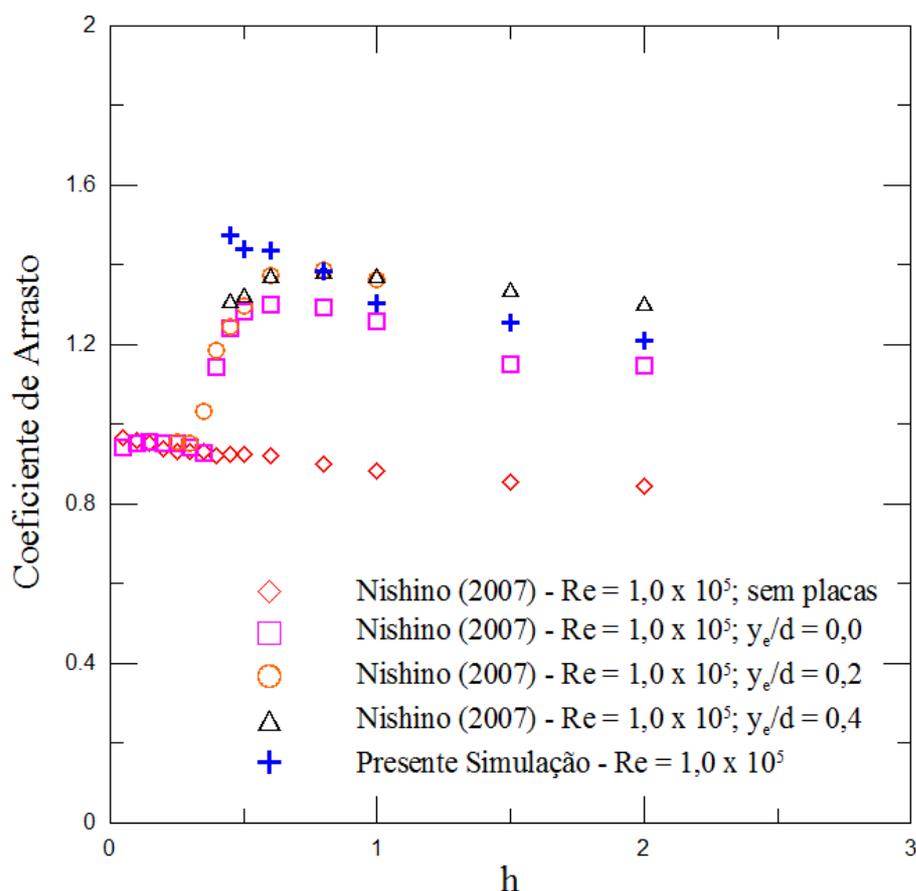


Figura 5.18 – Comparação entre resultados numéricos e experimentais obtidos para o coeficiente de arrasto médio envolvendo o cilindro circular submetido ao efeito solo.

Entre os testes realizados em túnel de vento por Nishino (2007), a situação de maior interesse para efeito de comparação com os resultados do presente trabalho, é aquela referente ao comportamento das cargas fluidodinâmicas quando os efeitos tridimensionais são parcialmente retirados do problema. Para isso, Nishino (2007) utilizou placas nas extremidades do cilindro circular para inibir a manifestação de efeitos de ponta, como mostrado na Figura 5.19, retirada de sua tese de doutorado. A situação mais próxima de um escoamento bidimensional, estudada por Nishino (2007), corresponde ao caso em que o corpo é posicionado a uma distância  $y_e/d = 0,4$  da extremidade inferior das placas inibidoras dos efeitos tridimensionais.

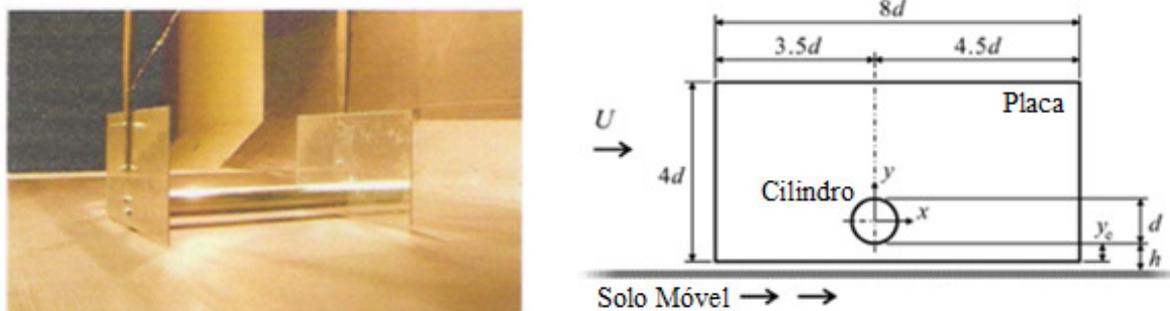


Figura 5.19 – Aparato experimental utilizado em testes em túnel de vento (adaptada de Nishino, 2007).

Pode-se observar, a partir da Figura 5.18, que, para o caso em que as placas inibidoras dos efeitos tridimensionais não são utilizadas, à medida que o corpo se aproxima do solo o coeficiente de arrasto aumenta suavemente, contrariando os resultados experimentais obtidos com a utilização das placas inibidoras dos efeitos tridimensionais. Conclui-se, portanto, que o primeiro mecanismo que governa o fenômeno do efeito solo relaciona-se com a tridimensionalidade do escoamento.

Como o presente trabalho estuda o fenômeno do efeito solo através de simulações numéricas bidimensionais, os resultados obtidos neste trabalho são comparados apenas com os testes feitos por Nishino (2007) para os casos em que foram utilizadas as placas inibidoras dos efeitos tridimensionais a uma distância  $y_c/d = 0,4$  do cilindro circular. Nesta condição, nota-se que o código bidimensional representa de maneira satisfatória o fenômeno físico presente no problema, uma vez que os resultados numéricos se aproximam dos resultados experimentais correspondentes ao caso em que os efeitos tridimensionais são reduzidos.

De maneira semelhante ao coeficiente de arrasto, na Figura 5.20 mostra-se que o código computacional também fornece bons resultados acerca do coeficiente de sustentação. Os dados experimentais indicam que, à medida que o corpo se aproxima do solo, o cilindro circular passa a ter uma sustentação positiva, e as simulações numéricas conseguem captar essa tendência.

Observa-se ainda, através dos dados experimentais, que, diferentemente do coeficiente de arrasto, o coeficiente de sustentação não apresenta grandes diferenças entre os casos em que as placas inibidoras dos efeitos tridimensionais são utilizadas e aqueles em que elas são retiradas das extremidades do cilindro circular.

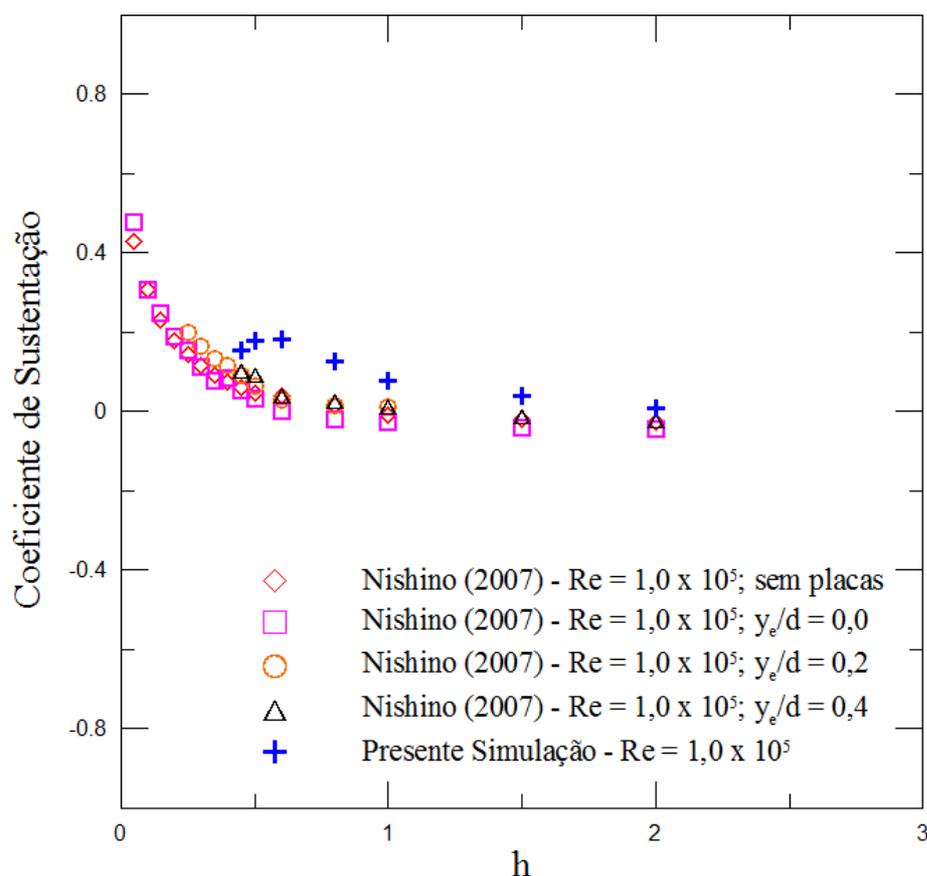


Figura 5.20 – Comparação entre resultados numéricos e experimentais obtidos para o coeficiente de sustentação médio envolvendo o cilindro circular submetido ao efeito solo.

Na Tabela 5.3, apresentam-se os valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e o número de Strouhal para o cilindro circular situado a uma distância  $h = 0,45$  da superfície plana, situação esta em que o efeito solo se faz presente. Nota-se que, para o coeficiente de arrasto, o resultado obtido através da simulação numérica difere em aproximadamente 12,4% em relação ao resultado experimental; esta discrepância é considerada aceitável, uma vez que, mesmo utilizando as placas inibidoras dos efeitos tridimensionais, o escoamento não é perfeitamente bidimensional.

Tabela 5.3 – Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para o cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo ( $h = 0,45$ ).

<b>Re = <math>1,0 \times 10^5</math> ; h = 0,45</b>	<b><math>\bar{C}_D</math></b>	<b><math>\bar{C}_L</math></b>	<b>St</b>
Nishino (2007) - $y_e/d = 0,4$	1,311	0,102	-
Presente Simulação	1,474	0,154	0,205

Na Figura 5.21, mostra-se o comportamento da distribuição média de pressão sobre a superfície discretizada do cilindro circular (Figura 5.21a), bem como a evolução, no tempo, das cargas fluidodinâmicas integradas que atuam sobre o corpo (Figura 5.21b), quando o mesmo está submetido à situação de efeito solo.

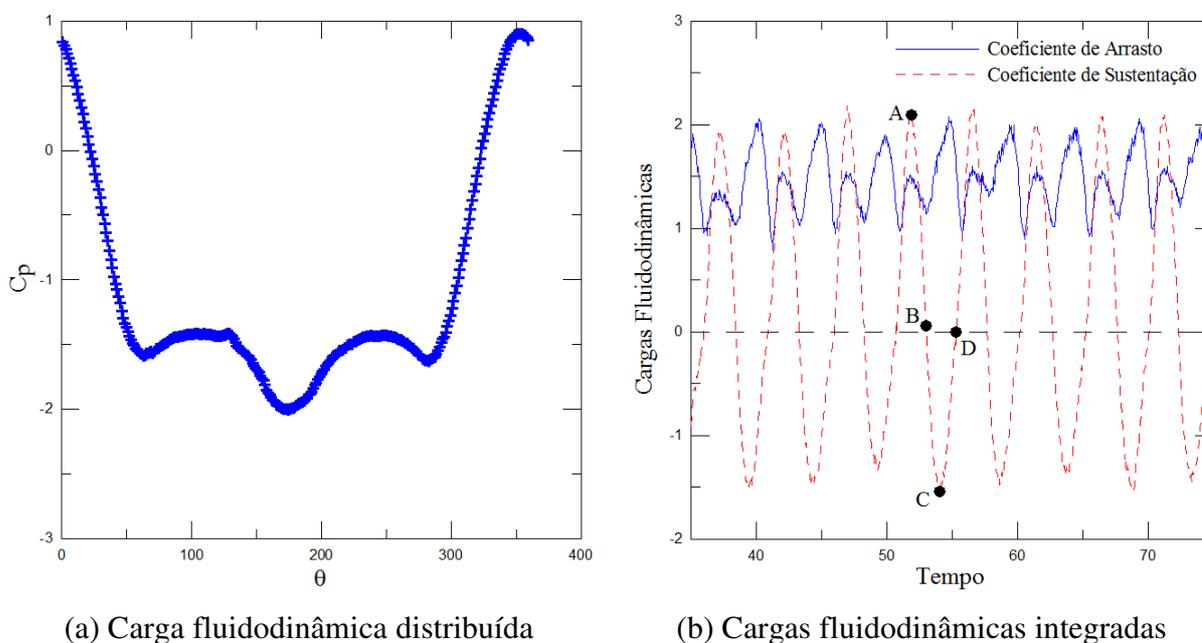


Figura 5.21 – Cargas fluidodinâmicas exercidas sobre um cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;

$$\varepsilon = 0,000 ; h = 0,45 ; Re = 1,0 \times 10^5 ).$$

Comparando a Figura 5.21a com a Figura 5.4, observa-se que a pressão na traseira do cilindro circular é menor quando o corpo está submetido ao efeito solo, fato que explica o aumento do coeficiente de arrasto médio em relação ao caso em que o corpo encontra-se isolado; compare os valores do coeficiente de arrasto médio obtidos pela presente simulação nas Tabelas 5.1 e 5.3. Além disso, comparando a Figura 5.21b com a Figura 5.5, nota-se que, na situação de efeito solo, o período de oscilação do coeficiente de arrasto não possui amplitude aproximadamente constante, tal como ocorre para o corpo isolado; verifica-se que o período do  $C_D$  possui amplitudes intercaladas: ora maiores, ora menores; este fato decorre do efeito de bloqueio imposto pela presença do solo. Ainda na Figura 5.21b, são identificados quatro pontos importantes que são utilizados para comparar o comportamento fluidodinâmico do corpo sujeito ao efeito solo, com o comportamento fluidodinâmico deste mesmo corpo, porém, isolado (Item 5.2.1).

Ao contrário do que ocorreu com o cilindro circular isolado, a situação de efeito solo provocou uma sustentação positiva no corpo. Na Figura 5.22, a qual apresenta a distribuição de pressão que atua sobre a superfície discretizada do corpo em cada um dos quatro instantes marcados na Figura 5.21b, pode-se encontrar uma explicação para este fato.

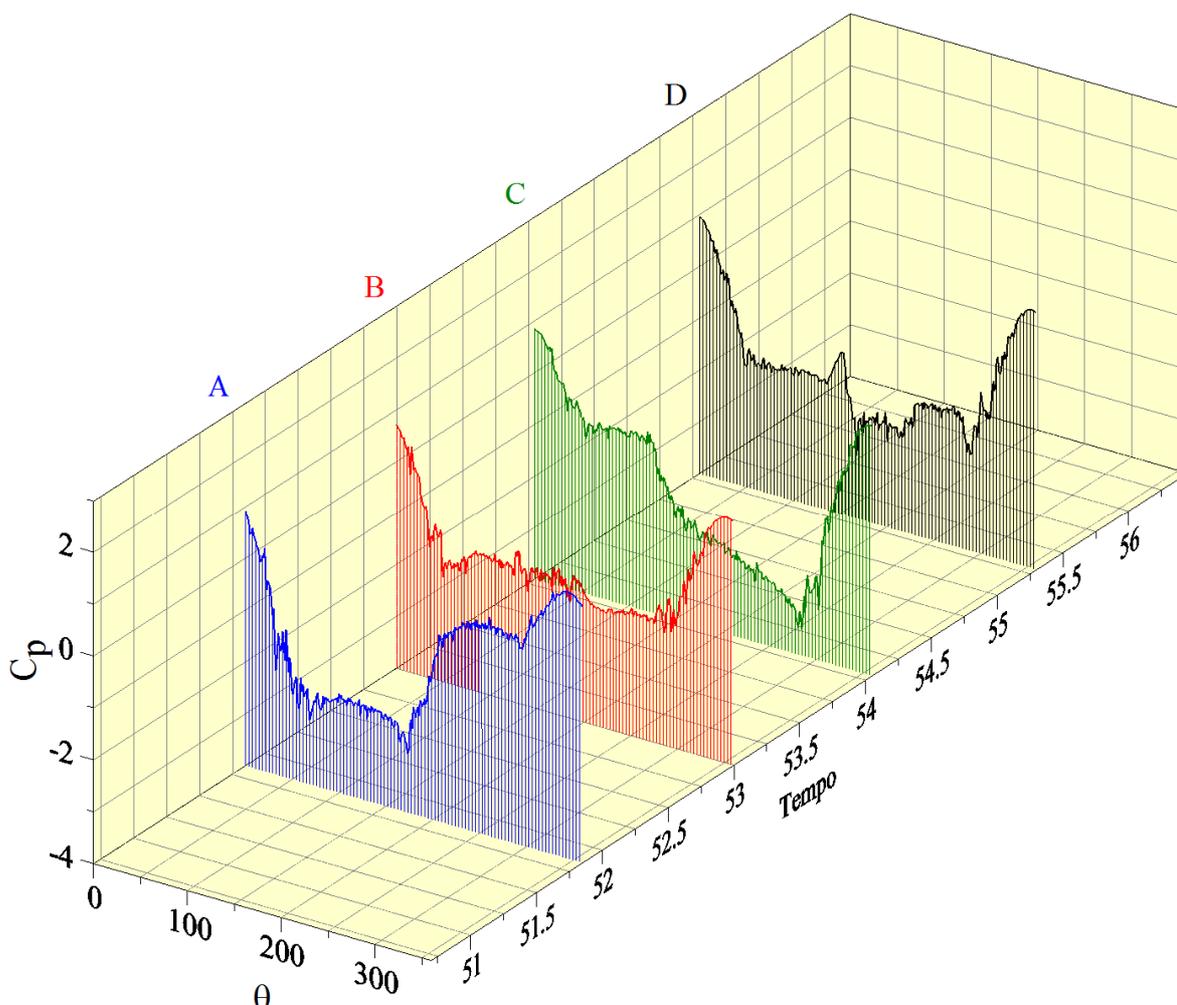


Figura 5.22 – Distribuição instantânea de pressão ao longo da superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $h = 0,45$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Sabe-se que, para uma modelagem puramente potencial, o resultado indicaria pressões maiores na face superior do corpo, resultando em uma sustentação negativa para o cilindro circular. Isto é, para um aumento da velocidade observado na face inferior do corpo, corresponderia uma diminuição da pressão nesta face. Já para o modelo viscoso, caso do presente trabalho, a vorticidade presente no domínio fluido atua no sentido de deslocar o ponto de estagnação para a face inferior do corpo, o que é claramente observado nas curvas

apresentadas na Figura 5.22. Este fato acaba por gerar uma circulação adicional no sentido horário em torno do corpo, causando uma sustentação positiva.

Na Figura 5.23, apresenta-se a dinâmica da vorticidade presente nas vizinhanças do corpo ao longo de um período completo da curva do coeficiente de sustentação.

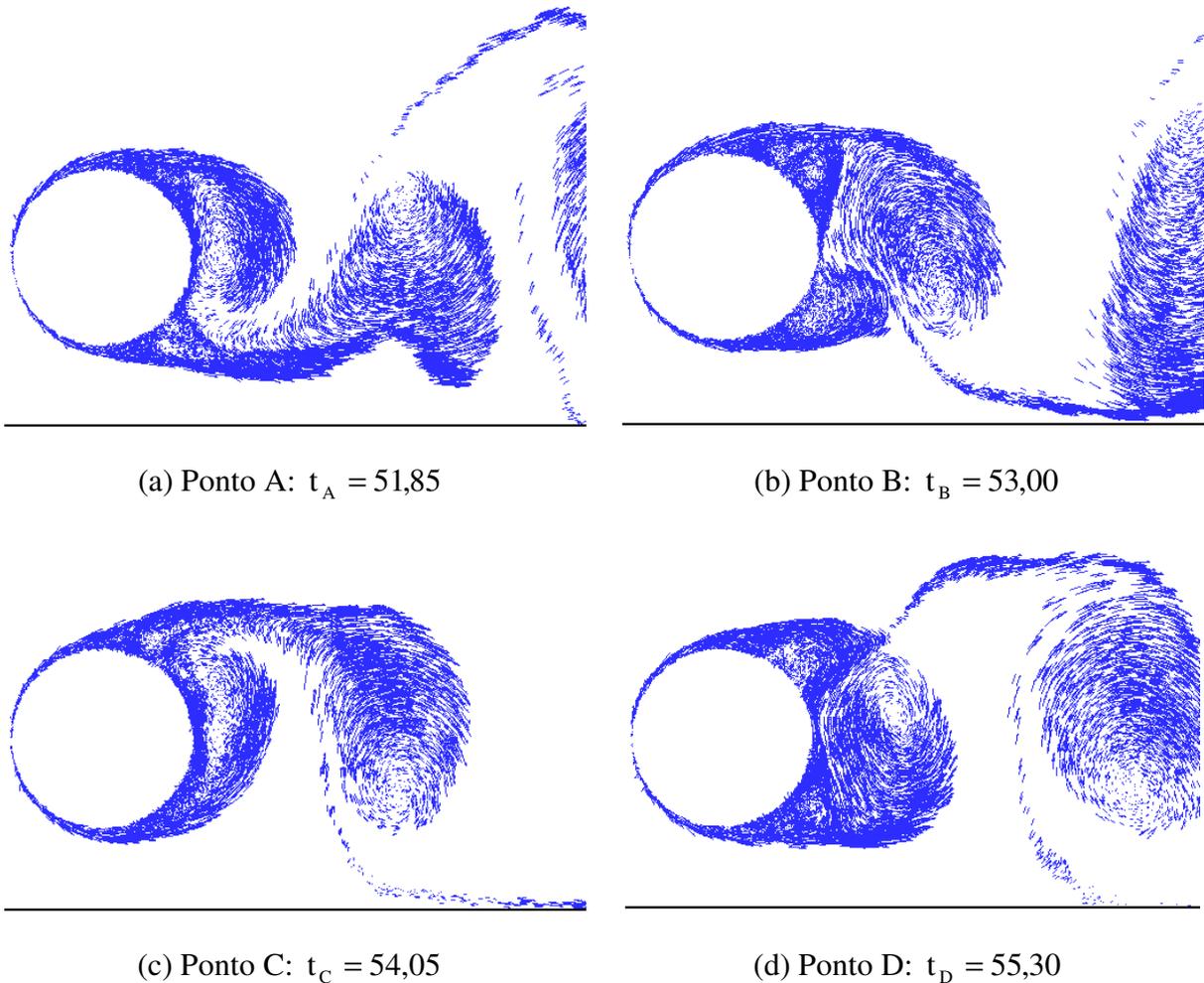


Figura 5.23 – Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente liso submetido ao efeito solo, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D das Figuras 5.21b e 5.22 (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $h = 0,45$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Verifica-se que, de maneira geral, quando o cilindro circular está posicionado a uma distância  $h = 0,45$  do solo, observa-se a mesma dinâmica de geração e desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas observada quando o corpo encontra-se isolado.

Entretanto, comparando de maneira detalhada as Figuras 5.7 e 5.23, é possível identificar algumas particularidades referentes à situação de efeito solo. Observando as Figuras 5.7c e 5.23c, nota-se que a estrutura vorticosa anti-horária (inferior) desenvolve-se, quando o cilindro circular encontra-se sob efeito solo, mais próxima ao corpo. Este efeito causa uma pressão mais baixa na traseira do corpo, justificando o aumento do coeficiente de arrasto médio em relação ao caso em que o corpo encontra-se isolado.

Além disso, a comparação entre as Figuras 5.7 e 5.23 torna possível o esclarecimento do segundo mecanismo que governa o fenômeno do efeito solo, citado anteriormente: o efeito de bloqueio imposto pela superfície plana. Observa-se que, quando o corpo está submetido ao efeito solo, a estrutura vorticosa horária (superior) nasce e tem total liberdade para se desenvolver, até ser incorporada definitivamente pela esteira viscosa (veja, na sequência, as Figuras 5.23a, 5.23b, 5.23c e 5.23d), o que produz picos de amplitude maior na curva do coeficiente de arrasto. Por outro lado, a estrutura vorticosa anti-horária (inferior) tem seu desenvolvimento limitado pela presença do solo (veja, na sequência, as Figuras 5.23c, 5.23d, 5.23a e 5.23b), o que produz picos de amplitude menor na curva do coeficiente de arrasto.

Na Figura 5.24, apresenta-se a esteira formada no instante correspondente ao ponto A da Figura 5.21b. Comparando as Figuras 5.8 e 5.24, é possível identificar como a formação da esteira de von Kármán na Figura 5.24 se apresenta com uma influência significativa do efeito solo (efeito de bloqueio).



Figura 5.24 – Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.21b (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $\varepsilon = 0,000$ ;  $h = 0,45$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Quanto ao tempo dispendido nesta simulação, foram necessárias 584 horas de tempo de CPU, utilizando um processador INTEL CORE I7 de 2,80GHz, para se chegar a uma esteira de 450.000 vórtices discretos.

É importante destacar a importância da estratégia numérica de Bimbato (2008), que é utilizada neste trabalho, pois, caso vórtices discretos fossem gerados na superfície do solo, o tempo computacional seria ainda mais crítico.

### 5.3.2 – Cilindro Circular Hidraulicamente Rugoso

Como um exemplo de aplicação do modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho, apresenta-se, neste item, a análise do escoamento subcrítico ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ) ao redor de um cilindro circular hidraulicamente rugoso ( $\varepsilon = 0,007$ ), situado a uma distância  $h = 0,45$  da superfície do solo (Tabela 5.4).

Tabela 5.4 – Valores médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Strouhal para um cilindro circular submetido ao efeito solo ( $h = 0,45$ ).

<b>Re = <math>1,0 \times 10^5</math> ; h = 0,45</b>	$\overline{C_D}$	$\overline{C_L}$	St
Nishino (2007) - $y_e/d = 0,4$ ( $\varepsilon = 0,000$ )	1,311	0,102	-
Presente Simulação ( $\varepsilon = 0,000$ )	1,474	0,154	0,205
Presente Simulação ( $\varepsilon = 0,007$ )	1,208	0,055	0,209

O valor de rugosidade utilizado para esta simulação numérica ( $\varepsilon = 0,007$ ) foi escolhido pelo fato de ser capaz de provocar padrões de escoamentos supercríticos (veja o Item 5.2.2). Comparando-se os valores do coeficiente de arrasto médio apresentados na Tabela 5.4, pode-se inferir que tal rugosidade realmente é capaz de propiciar a transição da camada limite laminar para a camada limite turbulenta, o que causa, neste caso, uma redução de aproximadamente 18,0% no valor do coeficiente de arrasto médio.

Na Figura 5.25, apresenta-se o comportamento da distribuição média de pressão que atua sobre a superfície discretizada do cilindro circular hidraulicamente rugoso ( $\varepsilon = 0,007$ ) submetido ao efeito solo (Figura 5.25a), bem como a evolução, no tempo, das cargas fluidodinâmicas integradas que atuam sobre a superfície do corpo (Figura 5.25b).

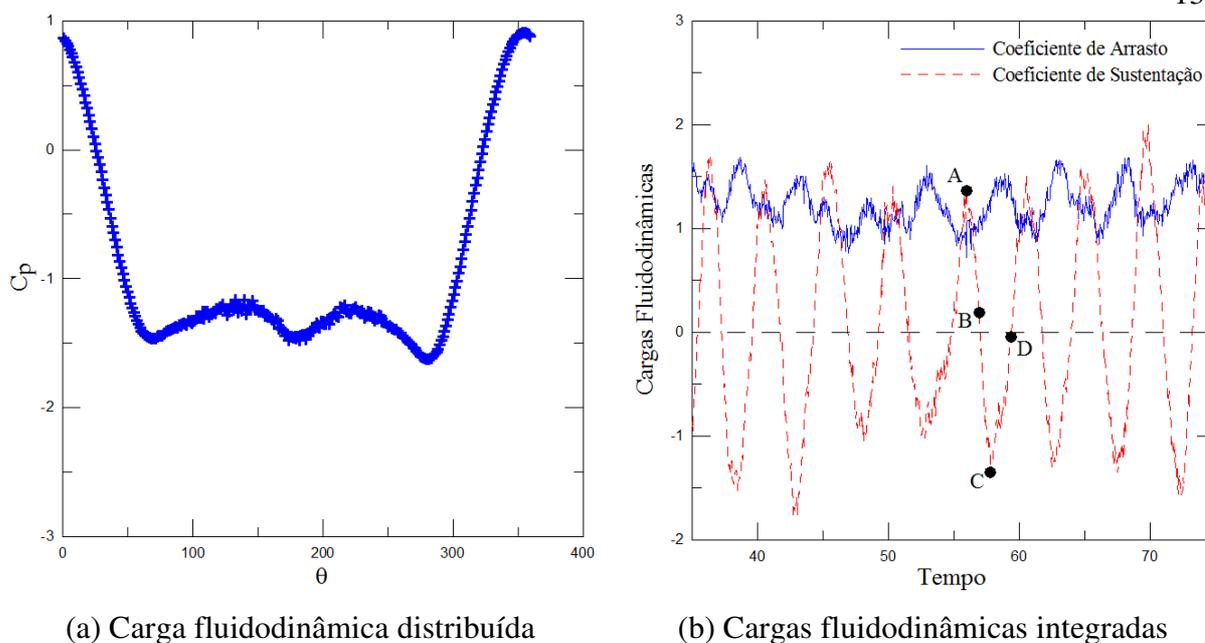


Figura 5.25 – Cargas fluidodinâmicas exercidas sobre um cilindro circular hidráulicamente rugoso submetido ao efeito solo (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;

$$NR = 21; \varepsilon = 0,007; h = 0,45; Re = 1,0 \times 10^5).$$

Verifica-se que a separação do escoamento para a presente simulação ocorre quando  $\theta \cong 86^\circ$  e  $\theta \cong 258^\circ$ . Pondera-se que, para o cilindro circular hidráulicamente liso submetido ao efeito solo, a separação do escoamento prevista numericamente ocorre quando  $\theta \cong 81^\circ$  e  $\theta \cong 270^\circ$ . Assim, observa-se que o ponto de separação é deslocado para jusante, o que explica a redução do coeficiente de arrasto comentada anteriormente. Diferentemente do que se observa na Figura 5.21b, na Figura 5.25b não se verifica a alternância de amplitudes (ora maiores, ora menores) na curva do coeficiente de arrasto. Ainda na Figura 5.25b, identificam-se quatro instantes que são utilizados na Figura 5.26 para a visualização do campo de velocidades do escoamento nas vizinhanças do corpo.

Comparando a sequência de eventos apresentada na Figura 5.23 com a sequência apresentada na Figura 5.26, nota-se que o mecanismo de formação e desprendimento de estruturas vorticosas contrarrotativas é modificado pelo efeito da rugosidade; na Figura 5.23 é possível identificar claramente o que acontece em cada um dos quatro instantes selecionados, ao passo que, na Figura 5.26, existe uma dificuldade maior em fazê-lo. Na verdade, o mesmo mecanismo identificado na Figura 5.23 está presente na sequência ilustrada na Figura 5.26. Entretanto, conforme comentado no Item 5.2.2, a rugosidade simulada ( $\varepsilon = 0,007$ ) faz com que o escoamento cujo número de Reynolds é de  $1,0 \times 10^5$  atinja padrões de escoamentos supercríticos, regime de escoamento caracterizado pela interrupção do desprendimento de

estruturas vorticosas e posterior retorno irregular do desprendimento de tais estruturas. Este fato explica a dificuldade de se identificar, de maneira clara, o que ocorre em cada um dos quatro instantes apresentados na Figura 5.26, ou seja, o escoamento encontra-se na transição entre os regimes supercrítico e transcrito

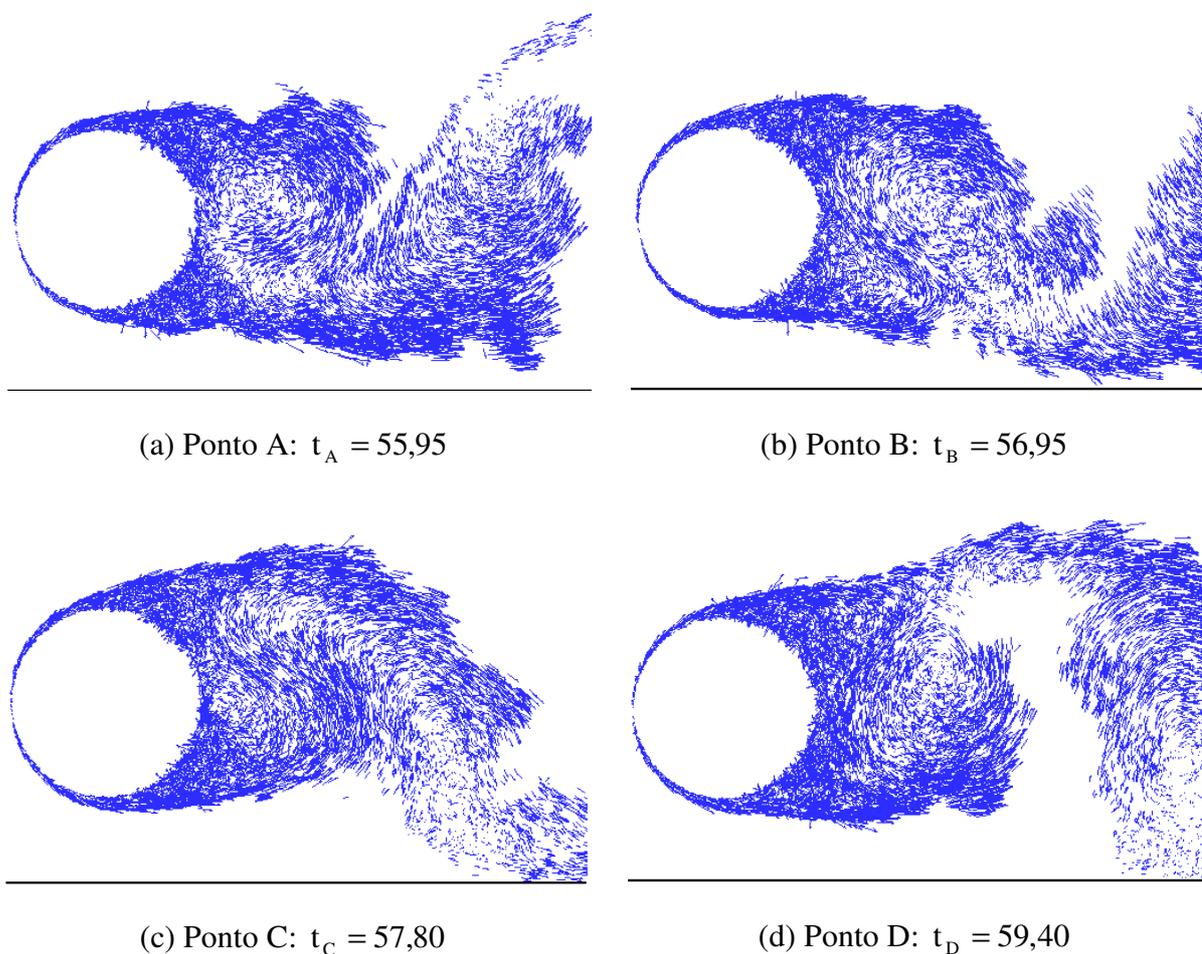


Figura 5.26 – Detalhes do desprendimento de estruturas vorticosas em um cilindro circular hidraulicamente rugoso submetido ao efeito solo, nos instantes representados pelos pontos A, B, C e D da Figura 5.25b (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $h = 0,45$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Além disso, nota-se uma semelhança entre as sequências de eventos ilustradas pelas Figuras 5.16 e 5.26, o que justifica a classificação do escoamento mostrado na Figura 5.27 como sendo supercrítico.

Comparando a Figura 5.27 com a Figura 5.24, pode-se comprovar que o modelo de rugosidade modifica, de fato, as características do escoamento.

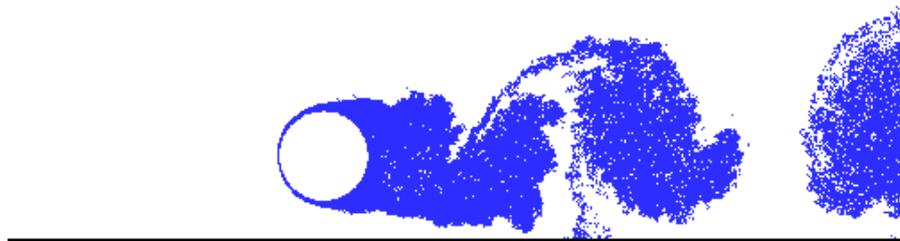


Figura 5.27 – Posição dos vórtices discretos na esteira no instante representado pelo ponto A da Figura 5.25b (Euler;  $mb1 = 300$ ;  $mb2 = 950$ ;  $\Delta t = 0,05$ ;  $sm = 3,0$ ;  $NR = 21$ ;  $\varepsilon = 0,007$ ;  $h = 0,45$ ;  $Re = 1,0 \times 10^5$ ).

Quanto ao tempo de simulação necessário para obter uma esteira viscosa como a apresentada na Figura 5.27, leva-se em torno de 717 horas de tempo de CPU, utilizando um processador INTEL CORE I7 de 2,80 GHz, ou seja, aproximadamente 30 dias de simulação numérica.

## 5.4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises apresentadas nas seções anteriores deste capítulo reforçam que ainda há muito o que compreender a respeito dos fenômenos físicos envolvidos na transição de uma camada limite.

Nesta região, as primeiras instabilidades que surgem são as ondas de Tollmien-Schlichting, as quais dão origem a outra família de instabilidades, chamadas instabilidades do tipo grampo de cabelo, que desencadeiam as explosões turbulentas. Esta fase da transição é caracterizada por fortes concentrações de vorticidade, as quais geram transporte de matéria da superfície do corpo para o interior da camada limite. As explosões turbulentas antecedem a degeneração em turbulência desenvolvida. A Figura 5.28 ilustra, para uma esfera, o processo de transição descrito acima.

A multiplicidade de escalas envolvidas torna a modelagem do fenômeno muito complexa, de maneira que hipóteses simplificadoras se tornam indispensáveis. A teoria cinética dos gases, por exemplo, pressupõe que a dimensão de uma partícula de fluido seja muito superior ao livre caminho médio molecular. Por outro lado, nos escoamentos turbulentos pode-se ter estruturas turbilhonares apresentando dimensões superiores ao comprimento característico envolvido no problema. Um outro exemplo está relacionado ao

coeficiente de viscosidade turbulenta; sabe-se que o coeficiente de viscosidade molecular é uma grandeza escalar. Já o coeficiente de viscosidade turbulenta não permite esta mesma classificação, em virtude das fortes anisotropias encontradas nas grandes estruturas turbilhonares.

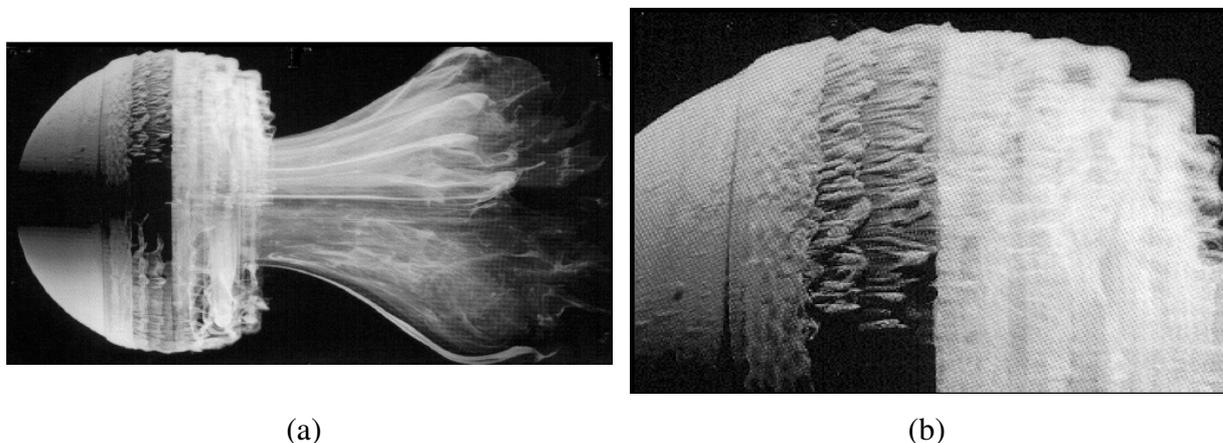


Figura 5.28 – Camada limite desenvolvida sobre a superfície de uma esfera (a), com detalhes para a formação das ondas de Tollmien-Schlichting e das instabilidades do tipo grampo de cabelo (b); retirada de Faber (1995).

Entretanto, mesmo com estas limitações, o conceito do coeficiente de viscosidade turbulenta (Boussinesq, 1877) permitiu grandes avanços, seja no campo tecnológico, seja no campo de metodologias para a simulação da turbulência.

Salienta-se que o completo entendimento dos fenômenos não lineares que se manifestam na camada limite necessita do conhecimento absoluto da natureza da interação entre as múltiplas escalas do escoamento.

Diante de tamanha complexidade para a completa descrição da camada limite, se faz necessário dizer que o modelo de rugosidade proposto nesta tese de doutorado tem como finalidade apenas estudar padrões de escoamentos formados a partir da influência da rugosidade de uma fronteira sólida bidimensional. Neste contexto, o Método de Vórtices Discretos se mostra uma ferramenta numérica valiosa. Os resultados apresentados são animadores e o modelo proposto parece ser promissor em um cenário de escoamentos tridimensionais.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES

## 6.1 – CONCLUSÕES

Esta tese de doutorado teve como ponto de partida um código computacional desenvolvido em linguagem *FORTRAN*, que utilizava o Método de Vórtices Discretos associado ao modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem (Alcântara Pereira *et al.*, 2002). O código computacional permitia a análise do escoamento bidimensional, incompressível e em regime não permanente que se desenvolvia ao redor de um corpo de forma qualquer e conhecida, mediante a discretização do campo de vorticidades através de uma nuvem de vórtices discretos de Lamb.

No início do trabalho, o modelo de turbulência, que utiliza a função estrutura de velocidade de segunda ordem adaptada ao Método de Vórtices Discretos, foi revisado e corrigido apropriadamente. O modelo de turbulência original realizava corretamente o cálculo do coeficiente de viscosidade turbulenta que deve ser associado a cada vórtice discreto de Lamb em cada instante de tempo da simulação numérica. Entretanto, a atuação do modelo de turbulência se dava, matematicamente, através da modificação das expressões do deslocamento randômico (difusão molecular) e do raio do núcleo de cada vórtice discreto de Lamb presente na esteira viscosa. A partir dos estudos mostrados nesta tese de doutorado, a modificação da expressão do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb não se faz mais necessária, ficando apenas no processo de difusão randômica da vorticidade a inclusão dos efeitos de dissipação de energia.

Numa segunda etapa, partiu-se para o desenvolvimento de um modelo que fosse fisicamente consistente em representar a rugosidade de superfícies sólidas, e que, portanto, causasse mudanças significativas nos padrões de escoamentos, bem como no comportamento das cargas fluidodinâmicas atuantes sobre um corpo rombudo. Em outras palavras, o modelo de rugosidade desenvolvido interfere no valor da intensidade dos vórtices discretos de Lamb nascentes, impondo-lhes um efeito inercial adicional.

Para validar a metodologia apresentada, escolheu-se, como corpo rombudo, o cilindro circular. Nas simulações numéricas realizadas, há duas classes de parâmetros numéricos variáveis. Na primeira classe, estão os parâmetros numéricos relacionados com o método numérico, ou seja,  $m = mb1 + mb2$  (número de painéis planos),  $\Delta t$  (incremento de tempo),  $eps$  (posição de desprendimento dos vórtices discretos),  $\sigma_0$  (raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb), espessura da coroa circular e número de pontos rugosos (quando o modelo de rugosidade atuar). Na segunda classe, estão os parâmetros numéricos afetos ao fenômeno físico, ou seja,  $Re$  (número de Reynolds),  $\varepsilon$  (rugosidade relativa do corpo),  $h$  (distância vertical entre o cilindro circular e o solo) e a velocidade da superfície do solo em relação ao corpo.

Foram apresentados gráficos da distribuição do coeficiente de pressão instantâneo ao longo da superfície discretizada do corpo e da evolução das cargas fluidodinâmicas integradas ao longo do tempo. Apresentou-se, também, o comportamento do campo de velocidades nas vizinhanças do corpo em momentos onde se identificam características importantes do escoamento. O Método de Vórtices Discretos foi muito útil para estes fins, mostrando as potencialidades da técnica puramente lagrangiana.

De acordo com as discussões apresentadas no Capítulo 5, pode-se concluir que a referida correção do modelo de turbulência melhorou de maneira significativa os resultados obtidos, se comparada com os resultados obtidos pelo modelo proposto originalmente por Alcântara Pereira *et al.* (2002). No entanto, os resultados oriundos deste trabalho, apresentados na Tabela 5.1, mostram que, para simulações numéricas bidimensionais, o uso de um modelo de turbulência não produz grandes melhoras nos resultados, se comparado com o caso onde um modelo deste tipo não é utilizado.

Por outro lado, a consideração dos aspectos referentes à rugosidade se mostrou dependente do modelo de turbulência, mesmo para escoamentos bidimensionais. Esta dependência é vista como uma vantagem do modelo de rugosidade desenvolvido neste

trabalho, uma vez que o fenômeno físico envolvido nesta classe de problemas mostra que a rugosidade pode estimular o desenvolvimento da turbulência. Esta relação entre rugosidade e turbulência tem, como características marcantes, o deslocamento do ponto de separação do cilindro circular para jusante da superfície do corpo e a conseqüente crise do arrasto. Essas características foram representadas com sucesso pelo modelo de rugosidade desenvolvido neste trabalho, o que prova que tal modelo pode, de fato, ser incorporado ao Método de Vórtices Discretos para estudar-se escoamentos turbulentos considerando a influência de contornos sólidos hidraulicamente rugosos.

Os resultados numéricos apresentados no Item 5.2.2 não foram comparados diretamente com dados experimentais pois, quando se trabalha com rugosidade de superfícies sólidas, é difícil garantir que as rugosidades envolvidas em experimentos distintos são exatamente as mesmas, uma vez que as características da rugosidade de uma superfície sólida dependem da rugosidade relativa ( $\varepsilon = \varepsilon^*/d^*$ , lembrando que  $\varepsilon^*$  é a altura das protuberâncias e saliências que formam a superfície) e da textura da superfície. Assim, procurou-se confrontar os padrões de escoamentos obtidos para um cilindro circular hidraulicamente liso e para um cilindro circular hidraulicamente rugoso, concluindo que, para rugosidades relativas da ordem de  $\varepsilon = 0,007$ , pode-se, a partir de escoamentos subcríticos, provocar padrões de escoamentos supercríticos.

Os efeitos causados pela presença de uma superfície plana lisa (solo) nas vizinhanças do corpo foram analisados como um exemplo de aplicação. As características do escoamento ao redor de um cilindro circular hidraulicamente liso estacionado nas proximidades de uma superfície plana variam em função da distância do corpo até o solo. A influência da camada limite gerada a partir da superfície plana foi desconsiderada neste trabalho, uma vez que se considera que o solo se move com a mesma velocidade do escoamento incidente (Nishino, 2007); para estudar a situação de movimento relativo entre o corpo e o solo, o movimento do solo foi simulado de maneira “fictícia”, ou seja, tal superfície foi mantida em repouso e o seu movimento foi representado deixando-se de satisfazer a condição de não deslizamento sobre esta fronteira. Esta estratégia numérica foi de suma importância para que se concentrassem todos os esforços computacionais sobre os vórtices discretos desprendidos a partir da superfície do cilindro circular.

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho se apresentam promissores. Nas Figuras 5.18 e 5.20 mostra-se que, para uma situação bidimensional, o código computacional fornece bons resultados. Entretanto, pode-se notar que os resultados obtidos através das

simulações numéricas bidimensionais, para o coeficiente de arrasto, diferem quantitativamente em relação aos casos em que Nishino (2007) não utiliza as placas que inibem os efeitos tridimensionais; este fato mostra que o primeiro mecanismo que governa o fenômeno do efeito solo refere-se aos efeitos causados pela tridimensionalidade do escoamento. O segundo mecanismo é o efeito de bloqueio imposto pela superfície do solo, o que causa picos de amplitudes intercaladas na curva do coeficiente de arrasto (Figura 5.21b), além de um aumento deste coeficiente, se comparado ao caso em que o corpo se encontra isolado.

Por fim, o cilindro circular hidraulicamente rugoso ( $\varepsilon = 0,007$ ) submetido ao efeito solo apresentou um valor médio para o coeficiente de arrasto menor do que quando o corpo é hidraulicamente liso. Este fato é explicado pelo regime de escoamento ser modificado pelo efeito da rugosidade, ou seja, tal como para o corpo isolado, quando o corpo está submetido ao efeito solo, rugosidades da ordem de  $\varepsilon = 0,007$  são capazes de propiciar a transição do regime de escoamento subcrítico para o regime de escoamento supercrítico.

Em suma, os resultados e as análises apresentados demonstram que modelos que representem consistentemente o escoamento ao redor de superfícies hidraulicamente rugosas, mesmo que bidimensionais, não devem receber o mesmo tratamento conferido a um simples modelo de turbulência. Portanto, este objetivo primordial foi atingido com êxito e se constitui na principal contribuição desta tese de doutorado.

Assim, esta metodologia abre uma nova linha de pesquisa para a exploração de outras configurações de geometrias bidimensionais, bem como para a implementação de modelos que representem a rugosidade de geometrias tridimensionais. Esta última quantificará, definitivamente, o nível de qualidade do modelo embrionário proposto neste trabalho.

## **6.2 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS**

Como sugestões para a continuação do desenvolvimento do modelo de rugosidade apresentado neste trabalho, primeiramente, deve-se investigar o comportamento do código computacional para outras faixas de números de Reynolds, tanto para corpos rombudos quanto para corpos esbeltos.

Uma extensão útil do presente código consiste na inclusão dos efeitos de interação térmica a partir de um Método de Partículas de Calor (Ogami, 2001 e Alcântara Pereira & Hirata, 2003), visto que a rugosidade é capaz de modificar os processos de transferência de calor.

Outra linha de pesquisa se refere ao desenvolvimento de uma modelagem de Vibrações Induzidas por Interferência de Esteira, WIV (do inglês, *Wake Induced Vibrations*). Estas análises são importantes, por exemplo, para o estudo do escoamento ao redor de um conjunto de *risers* em uma plataforma de petróleo. Propõe-se uma análise do comportamento fluidodinâmico de dois cilindros circulares de superfícies hidraulicamente rugosas, idênticos, imersos em um escoamento turbulento ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ). Uma primeira configuração a ser estudada é aquela em que o cilindro à montante permanece fixo, enquanto o cilindro à jusante oscila forçadamente na direção transversal ao escoamento incidente. O modelo fluidodinâmico utilizará o Método de Vórtices Discretos desenvolvido nesta tese de doutorado em associação com a formulação de Shintani & Akamatsu (1994) para proceder ao cálculo dos coeficientes fluidodinâmicos e, assim, identificar o fenômeno de WIV. As Vibrações Induzidas por Interferência de Esteira, encontradas em um cilindro circular à jusante de outro, originam-se da interação entre o campo de vorticidades desenvolvido a partir do cilindro à montante e o corpo situado à jusante.

Com relação ao fenômeno do efeito solo, torna-se necessário aferir o comportamento do código computacional para perfis aerodinâmicos sem a presença da camada limite gerada a partir do solo (Ahmed, 2005 e Ahmed & Sharma, 2005). Posteriormente, é necessário investigar o terceiro mecanismo que governa o fenômeno do efeito solo: o efeito de interferência de esteira, causado pelo entrelaçamento da esteira formada a jusante do corpo com a camada limite desenvolvida junto ao solo. Aspectos que envolvem a rugosidade da superfície de perfis aerodinâmicos serão incluídos no futuro.

A acurácia e os tempos de CPU atuais também devem ser melhorados. Deseja-se, num futuro próximo, repetir as análises apresentadas no Capítulo 5 utilizando-se o método de expansão em multipolos (Greengard & Rohklin, 1987) associado ao método do crescimento do raio do núcleo do vórtice modificado (Rossi, 1996), chegando a um número final de vórtices discretos da ordem de  $10^6$ . No entanto, para se trabalhar com um número de vórtices discretos dessa ordem, a utilização de computação de alto desempenho é uma condição necessária.

Se os propósitos anteriores forem atingidos, a extensão do código computacional para o espaço tridimensional será a próxima meta a ser cumprida.

Apesar de a inclusão dos efeitos da rugosidade de superfícies sólidas, da transferência de calor, dos efeitos de vibração induzida pelo escoamento e dos mecanismos do efeito solo serem combinações pouco exploradas na literatura, o entendimento destes fenômenos é imprescindível para a análise e a compreensão mais aprofundadas de escoamentos complexos que se desenvolvem ao redor de corpos de geometria arbitrária.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHENBACH, E. (1968)**, “Distribution of Local Pressure and Skin Friction around a Circular Cylinder in Cross-Flow up to  $Re = 5 \times 10^6$ ”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 34, pp. 625-639.
- ACHENBACH, E. (1971)**, “Influence of Surface Roughness on the Cross-Flow around a Circular Cylinder”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 46, pp. 321-335.
- ACHENBACH, E., HEINECKE, E. (1981)**, “On Vortex Shedding from Smooth and Rough Cylinders in Range of Reynolds Number  $6 \times 10^3$  to  $5 \times 10^6$ ”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 109, pp. 239-251.
- AHMED, M. R. (2005)**, “Aerodynamics of a Cambered Airfoil in Ground Effect”, *International Journal of Mechanics Research*, v. 32, n. 2, pp. 157-183.
- AHMED, M. R., SHARMA, S. D. (2005)**, “An Investigation on the Aerodynamics of a Symmetrical Airfoil in Ground Effect”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, v. 29, pp. 633-647.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. (1999)**, *Simulação Numérica do Escoamento em torno de um Corpo de Forma Arbitrária Utilizando o Método de Vórtices Discretos*, Dissertação de Mestrado, EFEI/IEM/DME.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. (2002)**, *Simulação Numérica do Escoamento ao redor de Perfis Aerodinâmicos Montados em Grades Lineares de Turbomáquinas Utilizando o Método de Vórtices Discretos com Modelagem Sub-Malha de Turbulência*, Tese de Doutorado, Departamento de Mecânica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., RICCI, J. E. R., HIRATA, M. H., SILVEIRA NETO, A. (2002)**, “Simulation of the Vortex-Shedding Flow about a Circular Cylinder with Turbulence Modeling”, *CFD Journal*, v. 11, n. 3, pp. 315-322, October.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2003)**, “Heat Transfer in the Wake Behind a Body Using a Particle Method”, *17<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Proceedings of COBEM 2003, November 10-14, São Paulo, SP, Brazil.
- ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2009)**, “Development of the Vortex Method for Centrifugal Impeller Applications”, *20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Proceedings of COBEM 2009, November 15-20, Gramado, RS, Brazil.
- ASSI, G. R. S. (2009)**, *Mechanisms for Flow-Induced Vibration of Interfering Bluff Bodies*, Ph.D. Thesis, Department of Aeronautics, Imperial College London.
- BARBA, L. A., LEONARD, A., ALLEN, C. B. (2004)**, “Vortex Method with Fully Mesh-Less Implementation for High-Reynolds Number Flow Computations”, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECCOMAS 2004, Jyväskylä.
- BATCHELOR, G. K. (1953)**, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G. K. (1967)**, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- BEARMAN, P. W., ZDRAVKOVICH, M. M. (1978)**, “Flow around a Circular Cylinder near a Plane Boundary”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 89, pp. 33-47.
- BEARMAN, P. W. (1984)**, “Vortex Shedding from Oscillating Bluff Bodies”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 16, pp. 195-222.
- BIMBATO, A. M. (2008)**, *Análise do Comportamento Aerodinâmico de um Corpo na Presença de uma Superfície Plana Móvel*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

- BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2009)**, “Influence of the Wake Interference on the Vortex Shedding Flow around a Circular Cylinder in Ground Effect”, *20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Proceedings of COBEM 2009, November 15-20, Gramado, RS, Brazil.
- BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2010)**, “A Study of Boundary Layer Formation from a Moving Flat Surface Using Lagrangian Large Eddy Simulation”, *VII Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, Anais da EPTT 2010, 27 de setembro a 01 de outubro, Ilha Solteira, SP, Brazil.
- BIMBATO, A. M., ALCÂNTARA PEREIRA, L. A., HIRATA, M. H. (2011)**, “Study of the Vortex Shedding Flow around a Body near a Moving Ground”, *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, v. 99, pp. 7-17.
- BIRKHOFF, G., FISHER, J. (1959)**, “Do Vortex Sheets Roll UP?”, *Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 2*, 8:77-90.
- BIRKHOFF, G. (1962)**, “Helmholtz and Taylor Instability”, *Proc. Symp. Appl. Math.*, Amer. Math. Soc., v. XIII, pp. 55-76.
- BLEVINS, R. D. (1984)**, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Co.
- BLEVINS, R. D. (1990)**, *Flow Induced Vibration*, Van Nostrand Reinhold, Co, 2<sup>nd</sup> edition.
- BOUSSINESQ, J. (1877)**, *Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*, 2 vols., Fautiers-Villars, Paris.
- BURESTI, G., LANCIOTTI, A. (1979)**, “Vortex Shedding from Smooth and Roughened Cylinders in Cross-Flow near a Plane Surface”, *Aeronautical Quarterly*, v. 30, pp. 305-321.
- BURESTI, G. (1981)**, “The Effect of Surface Roughness on the Flow Regime around Circular Cylinders”, *Journal of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, v. 8, pp. 115-122.

- CHATELAIN, P., CURIONI, A., BERGDORF, M., ROSSINELLI, D., ANDREONI, W., KOUMOUTSAKOS, P. (2008)**, “Billion Vortex Particle Direct Numerical Simulations of Aircraft Wakes”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, pp. 1296-1304.
- CHOLLET, J. P., LESIEUR, M. (1981)**, “Parameterization of Small Scales of Three-Dimensional Isotropic Turbulence Utilizing Spectral Closures”, *J. Atmos. Sci.*, v. 38, pp. 2747-2757.
- CHORIN, A. J. (1973)**, “Numerical Study of Slightly Viscous Flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 57, pp. 785-796.
- DARCY, H. (1857)**, *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les Tuyaux*, Mallet-Bachelier, Paris.
- EINSTEIN, A. (1956)**, *Investigation on the Theory of Brownian Motion*, Dover, NY.
- FABER, T. E. (1995)**, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press.
- FAGE, A., WARSAP, J. H. (1929)**, “The Effects of Turbulence and Surface Roughness on the Drag of a Circular Cylinder”, *Brit. Aeronautical Research Council*, Rep and Memo 1283.
- FERZIGER, J. H. (1981)**, *Numerical Methods for Engineering Application*, John Wiley & Sons Inc..
- GAZZOLA, M., CHATELAIN, P., VAN REES, WIM M., KOUMOUTSAKOS, P. (2011)**, “Simulations of Single and Multiple Swimmers with Non-Divergence Free Deforming Geometries”, *Journal of Computational Physics*, v. 230, pp. 7093-7114.
- GERRARD, J. H. (1966)**, “The Mechanics of the Formation Region of Vortices behind Bluff Bodies”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 25, pp. 401-413.
- GREENGARD, C. (1985)**, “The Core Spreading Vortex Method Approximates the Wrong Equation”, *Journal of Computational Physics*, v. 61, pp. 345-348.

- GREENGARD, L., ROKHLIN, V. (1987)**, “A Fast Algorithm for particle simulations”, *J. Comp. Phys.*, 73:325-348.
- GUVEN, O., FARELL, C., PATEL, V. C. (1980)**, “Surface Roughness Effects on the Mean Flow Past Circular Cylinders”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 98, pp. 673-701.
- HE, F., SU, T. C. (1999)**, “An Improved Offset Model for Vorticity Shedding from a Solid Boundary in Discrete Vortex Element Method”, *Department of Mechanical Engineering*, FAU: Florida Atlantic University, Boca Raton, FL 33431, pp. 1-24.
- HESS, J. I., SMITH, A. M. O. (1967)**, “Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies”, *Progress in Aeronautical Sciences*, v. 8, pp. 1-138.
- KAMEMOTO, K., NAKAHARA, N., KAWATA, Y., IMAMURA, K., KANEKO, T. (1990)**, “Numerical Simulation of Vortex Flows Interacting with Vibrations under Flow Gates”, *IAHR Symposium*, Belgrade, Yugoslave, N4, pp. 1-8.
- KAMEMOTO, K. (1993)**, “Procedure to Estimate Unstead Pressure Distribution for Vortex Method” (In Japanese), *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng.*, v. 59, n. 568B, pp. 3708-3713.
- KAMEMOTO, K., ZHU, B., OJIMA, A. (2000)**, “Attractive Features of an Advanced Vortex Method and its Subjects as a Tool of Lagrangian LES”, *14<sup>th</sup> Japan Society of CFD Symposium*, Tokyo, December, pp. 1-10.
- KAMEMOTO, K. (2004)**, “On Contribution of Advanced Vortex Element Methods Toward Virtual Reality of Unsteady Vortical Flows in the New Generation of CFD”, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, v. XXVI, n. 4, October-December, pp. 368-378.
- KAMEMOTO, K. (2009)**, “Perspective Characteristics of a Lagrangian Vortex Method in Application into Vortex Flows of Moving Boundary Problems”, *Workshop – From fast cars to slow flows over bluff bodies*, 20-30 June, Imperial College, London, UK.
- KARAMCHETI, K. (1966)**, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, John Wiley and Sons, Inc. New York/London/Sydney.

- KAREEM, A., CHENG, C. M. (1999)**, “Pressure and Force Fluctuations on Isolated Roughened Circular Cylinders of Finite Height in Boundary Layer Flows”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, pp. 907-933.
- KATZ, J., PLOTKIN, A. (1991)**, *Low Speed Aerodynamics: from Wing Theory to Panel Methods*, McGraw Hill Inc..
- KAWAMURA, T., TAKAMI, H., KUWAHARA, K. (1986)**, “Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness”, *Fluid Dynamics Research*, v. 1, pp. 145-162.
- KIYA, M., IZAWA, S., ISHIKAWA, H. (1999)**, “Vortex Method Simulation of Forced, Impulsively Started Round Jet”, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> ASME/JSME Joint Fluids Eng. Conf. San Francisco*, July 18-22, FEDSM 99-6813.
- KOUMOUTSAKOS, P. D. (1993)**, *Direct Numerical Simulations of Unsteady Separated Flows Using Vortex Methods*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.
- KUNDU, P. K. (1990)**, *Fluid Mechanics*, Academic Press.
- LEONARD, A. (1980)**, “Vortex Methods for Flow Simulation”, *Journal of Computational Physics*, v. 37, pp. 289-335.
- LEONARD, A., CHUA, K. (1989)**, “Three-Dimensional Interaction of Vortex Tubes”, *Physica D (Nonlinear Phenomena)*, v. 37, pp. 490-496.
- LESIEUR, M., MÉTAIS, O. (1996)**, “New Trends in Large-Eddy Simulation of Turbulence”, *An Review in Fluid Mechanics*, v. 28, pp. 45-82.
- LEWIS, R. I. (1991)**, *Vortex Element Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, U.K.
- LIN, C., LIN, W-J., LIN, S-S. (2005)**, “Flow Characteristics around a Circular Cylinder Near a Plane Boundary”, *Proceedings of the Sixteenth International Symposium on Transport Phenomena*, ISTP-16, Prague, Czech Republic, 29 August – 1 September, (CD-Rom).

- MANSFIELD, J. R., KNIO, O. M., MENEVEAU, C. (1998)**, “a Dynamic LES Scheme for the Vorticity Transport Equation: Formulation and a Priori Tests”, *J. of Comp. Phys.*, v. 145, pp. 693-730.
- MANSFIELD, J. R., KNIO, O. M., MENEVEAU, C. (1999)**, “Dynamic LES of Colliding Vortex Rings Using a 3D Vortex Method”, *J. of Comp. Phys.*, v. 152, pp. 305-345.
- MARTENSEN, E. (1959)**, “Berechnung der druckverteilung an gitterprofilen in ebener potentialströmung mit einer Fredholmschen integralgleichung”, *Arch. Rat. Mech.*, 3, S. 235-270.
- MÉTAIS, O., LESIEUR, M. (1992)**, “Spectral Large-Eddy Simulations of Isotropic and Stably-Stratified Turbulence”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 239, pp. 157-194.
- MILNE-THOMPSON, L. M. (1955)**, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan & Co, London.
- MORAES, P. G. (2011)**, *Efeitos de Interferência entre Dois Corpos Idênticos Alinhados com o escoamento*, Dissertação de Mestrado, IEM/UNIFEI.
- MOURA, W. H. (2007)**, *Análise do escoamento ao redor de um corpo oscilante na presença de uma superfície plana*, Dissertação de Mestrado, IEM/UNIFEI.
- MUSTTO, A. A. (1998)**, *Simulação Numérica do escoamento em torno de um cilindro circular com e sem rotação utilizando o método de vórtices*, Dissertação de Mestrado, PEM – COPPE/UFRJ.
- MUSTTO, A. A., HIRATA, M. H., BODSTEIN, G. C. R. (1998)**, “Discrete Vortex Method Simulation of the Flow Around a Circular Cylinder with and without Rotation”, *Proceedings of the 16<sup>th</sup> A.I.A.A. Applied Aerodynamics Conference*, Albuquerque, NM, USA, June, A.I.A.A. Paper 98-2409.
- MUSTTO, A. A. (2004)**, *Simulação Numérica do escoamento turbulento em torno de um cilindro circular via o método de vórtices*, Tese de Doutorado, PEM – COPPE/UFRJ.

- NIKURADSE, J. (1933)**, “Strömungsgesetze in Rauhen Röhren”, *V. D. I. Forschungsheft*, v. 361.
- NISHINO, T. (2007)**, *Dynamics and Stability of Flow Past a Circular Cylinder in Ground Effect*, Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering, Science and Mathematics, University of Southampton, 145p.
- OGAMI, Y. (2001)**, “Simulation of Heat-Fluid Motion by Vortex Method”, *International Journal*, Series B, v. 44, n. 4, pp. 513-519.
- PANTON, R. L. (1984)**, *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons.
- PRÄGER, W. (1928)**, “Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung”, *Physik. Zeitschr.*, XXIX: 865.
- RICCI, J. E. R. (2002)**, *Simulação Numérica do Escoamento ao redor de um Corpo de Forma Arbitrária, Estacionado nas Imediações de uma Superfície Plana, com o Emprego do Método de Vórtices*, Tese de Doutorado, Departamento de Mecânica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá.
- ROSENHEAD, L. (1931)**, “The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, A134:170-192.
- ROSHKO, A. (1961)**, “Experiments on the Flow past a Circular Cylinder at Very High Reynolds Number”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 10, pp. 345-356.
- ROSHKO, A., STEINOLFSON, A., CHATTOORGOON, V. (1975)**, “Flow Forces on a Cylinder near a Wall or Near another Cylinder”, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> US National Conference on Wind Engineering Research*, Fort Collins, Paper IV-15.
- ROSSI, L. F. (1996)**, “Resurrecting Core Spreading Vortex Methods: A New Scheme that is both Deterministic and Convergent”, *SIAM J. Sci. Comput.*, 17:370-397.
- SALTARA, F., MENEGHINI, J. R., SIQUEIRA, C. R., BEARMAN, P. W. (1998)**, “The Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder with Turbulence

Modelling”, 1998 ASME FEDSM, *Proceedings of 1998 Conf. on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibration*, paper n. 13.

**SHERMAN, F. S. (1990)**, *Viscous Flow*, McGraw-Hill, International Editions Mechanical Engineering Series.

**SHINTANI, M., AKAMATSU, T. (1994)**, “Investigation of Two Dimensional Discrete Vortex Method with Viscous Diffusion Model”, *Computational Fluid Dynamics Journal*, v. 3, n. 2, pp. 237-254.

**SILVEIRA NETO, A., GRAND, D., MÉTAIS, O., LESIEUR, M. (1993)**, “A Numerical Investigation of the Coherent Structures of Turbulence behind a Backward-Facing Step”, *International Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, pp. 1-25.

**SMAGORINSKY, J. (1963)**, “General Circulation Experiments with the Primitive Equations”, *Mon. Weather Rev.*, v. 91, n. 3, pp. 99-164.

**SON, J. S., HANRATTY, T. J. (1969)**, “Velocity Gradients at the Wall for Flow Around a Cylinder at Reynolds Number from  $5,0 \times 10^3$  to  $1,0 \times 10^5$ ”, *J. Fluid Mech.*, v. 35 (2), pp. 353-368.

**SUMER, B. M., FREDSE, J. (2006)**, “Hydrodynamics around Cylindrical Structures”, *Advanced Series on Ocean Engineering*, v. 26, 550p.

**SZECHENYI, E. (1975)**, “Supercritical Reynolds Number Simulation for Two Dimensional Flow over Circular Cylinders”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 70, pp. 529-542.

**TANEDA, S. (1965)**, “Experimental Investigation of Vortex Streets”, *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 20, pp. 1714-1721.

**TENNEKES, H., LUMLEY, J. L. (1972)**, *A First Course of Turbulence*, The MIT Press.

**TRITTON, D. J. (1988)**, *Physical Fluid Mechanics*, 2<sup>nd</sup> edition, Oxford Univ. Press.

**TSUKIJI, T., MATSUBARA, Y. (2003)**, “Flow Simulation around a Rotating Circular Cylinder with Surface Roughness by the Vortex Method”, 4<sup>th</sup> ASME\_JSME Joint Fluids

*Engineering Conference*, Proceedings of ASME FEDSM'03, July 06-10, Honolulu, Hawaii, USA.

**UHLMAN, J. S. (1992)**, “An Integral Equation Formulation of the Equation of Motion of an Incompressible Fluid”, *Naval Undersea Warfare Center T. R.*, pp. 10-86.

**VAN DYKE, M. (1982)**, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford.

**WHITE, F. M. (2002)**, *Mecânica dos Fluidos*, McGraw-Hill, 4ª edição, 570p.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (1985a)**, “Observation of Vortex Shedding behind a Towed Circular Cylinder near a Wall”, *Flow Visualization III: Proceedings of the Third International Symposium on Flow Visualization*, ed. W. J. Yang, Hemisphere, Washington DC, pp. 423-427.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (1985b)**, “Forces on a Circular Cylinder near a Plane Wall”, *Applied Ocean Research*, v. 7, pp. 197-201.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (1987)**, “The Effects of Interference between Circular Cylinders in Cross Flow”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 1, pp. 239-261.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (1990)**, “Conceptual Overview of Laminar and Turbulent Flows Past Smooth and Rough Circular Cylinders”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 33, pp. 53-62.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (1997)**, *Flow around Circular Cylinders: Vol. 1: Fundamentals*, Oxford University Press, Oxford, UK.

**ZDRAVKOVICH, M. M. (2003)**, *Flow around Circular Cylinders: Vol. 2: Applications*, Oxford University Press, Oxford, UK.

<<http://mercadoimobiliariosantos.wordpress.com/category/pre-sal/>>. Acesso em: 15 mai. 2012.

<<http://cipinox.sites.uol.com.br/prod07.htm>>. Acesso em: 15 mai. 2012.

<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Energia\\_el%C3%A9trica](http://pt.wikipedia.org/wiki/Energia_el%C3%A9trica)>. Acesso em: 15 mai. 2012.

<[http://wavelets.ens.fr/MEDIATHEQUE/mediatheque\\_index.htm](http://wavelets.ens.fr/MEDIATHEQUE/mediatheque_index.htm)>. Acesso em: 15 mai. 2012.

<<http://www.offimar.com.br/trocador-de-calor.php>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://www.nps.gov/lake/naturescience/zebramussel.htm>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://marconipp.wordpress.com/page/4/>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://rotaenergia.wordpress.com/2011/08/19/eolica-cada-vez-mais-competitiva-no-mercado-energetivo-brasileiro/>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://www.taringa.net/posts/noticias/11476939/Argentina-lanzara-el-11-de-julio-el-cohete-Gradicom-II.html>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://www.ayrton-senna.com.ar/wallpapers.htm>>. Acesso em: 11 jun. 2012.

<<http://scienceworld.wolfram.com/physics/CylinderDrag.html>>. Acesso em: 15 jun. 2012.

## Apêndice A

# DISTRIBUIÇÃO DA VORTICIDADE E DA VELOCIDADE INDUZIDA POR MODELOS DE VÓRTICES DISCRETOS

## A.1 – O VÓRTICE POTENCIAL

O vórtice potencial tem o seguinte potencial complexo (Batchelor, 1967):

$$f(Z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{A.1})$$

A partir da Equação A.1, define-se a função potencial de velocidades para um vórtice girando no sentido horário, como sendo do tipo:

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{A.2})$$

Na Figura A.1 tem-se um vórtice discreto  $j$ , de intensidade positiva  $\Gamma_j$ , localizado no ponto  $W_j = (x_j, y_j)$  e um vórtice discreto  $k$ , de intensidade negativa  $\Gamma_k$ , localizado no ponto  $W_k = (x_k, y_k)$ .

A velocidade que o vórtice discreto  $j$  induz no ponto  $W_k = (x_k, y_k)$  possui apenas um componente tangencial, definido por:

$$u_{\theta}^{kj} = \frac{1}{r_{jk}} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_{kj}} \quad (\text{A.3})$$

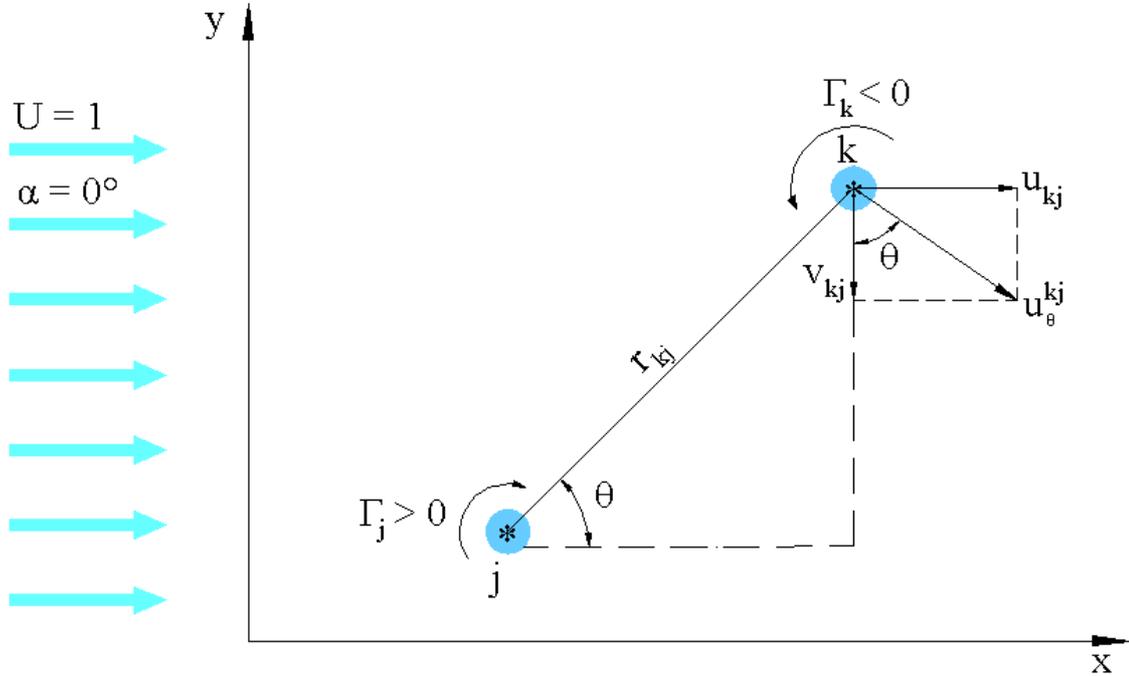


Figura A.1 – Velocidade tangencial induzida.

A função potencial complexo para o conjunto escoamento uniforme ( $\alpha = 0^\circ$ ), vórtice discreto  $j$  e vórtice discreto  $k$ , vale:

$$f(Z) = UZe^{-i\alpha} + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln[Z - Z(j)] + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \ln[Z - Z(k)] \quad (\text{A.4})$$

Em termos dos componentes na direção  $x$  e na direção  $y$ , tem-se:

$$\begin{aligned} u_{kj} - iv_{kj} &= \frac{df(Z)}{dZ} = U + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{Z - Z(j)} + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{Z - Z(k)} = \\ \frac{df(Z)}{dZ} &= U + i\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{(x - x_j) + i(y - y_j)} + i\frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{1}{(x - x_k) + i(y - y_k)} = \\ u_{kj} - iv_{kj} &= \left[ U + \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} + \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{(y - y_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right] + \\ &+ i \left[ \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} + \frac{\Gamma_k}{2\pi} \frac{(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

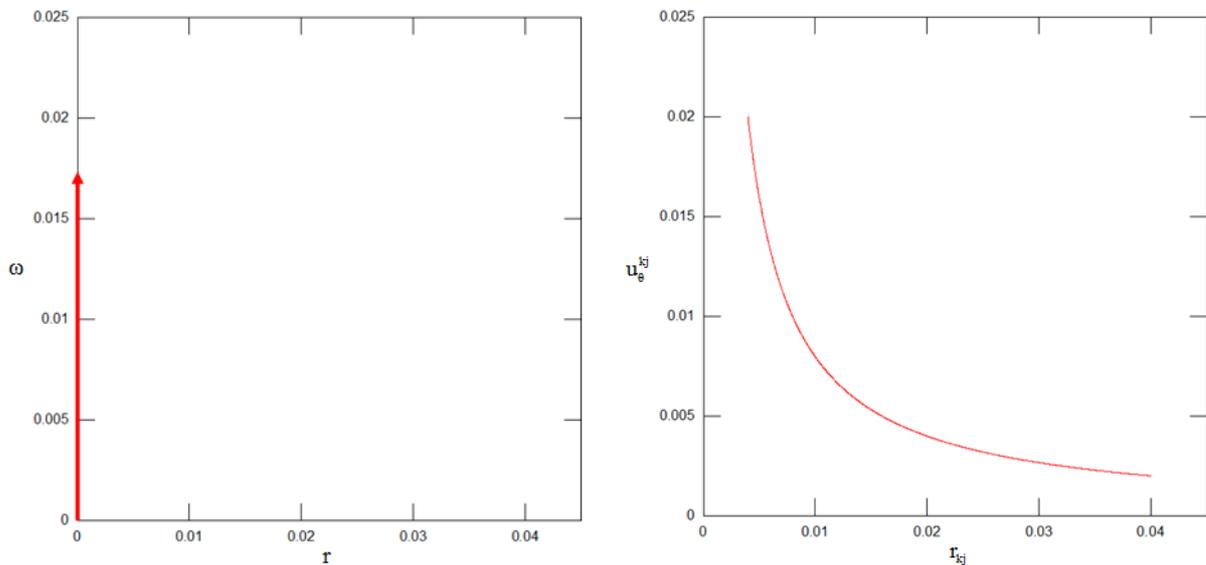
Para calcular a velocidade induzida no vórtice discreto localizado no ponto  $k$ , faz-se  $x = x_k$  e  $y = y_k$ .

Deste modo:

$$u_{kj} = U + \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (\text{A.6})$$

$$v_{kj} = 0 - \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (\text{A.7})$$

Como se pode notar, o vórtice potencial apresenta um comportamento singular na sua origem, ou seja, onde ele está localizado. Com isto, na utilização de dois vórtices potenciais muito próximos podem surgir problemas de instabilidade numérica, já que o campo de velocidades é singular para  $r \rightarrow 0$ . Na Figura A.2 pode-se notar graficamente que para vórtices potenciais muito próximos, o valor de  $r_{kj}$  torna-se pequeno, fazendo com que a velocidade tenda para um valor infinito. Estas dificuldades impedem a efetiva utilização do modelo do vórtice potencial.



(a) Distribuição de vorticidade

(b) Velocidade tangencial induzida

Figura A.2 – Distribuição de vorticidade no interior do núcleo e velocidade tangencial induzida pelo vórtice potencial.

Neste trabalho, para eliminar tal singularidade, o modelo do vórtice discreto de Lamb, que possui um núcleo viscoso com uma distribuição de vorticidade gaussiana no seu interior e velocidade finita para todos os valores de  $r$ , mostra-se apropriado.

## A.2 – O VÓRTICE DE LAMB

O vórtice discreto de Lamb possui distribuições de vorticidade ( $\omega$ ) e de velocidade tangencial induzida ( $u_\theta$ ), mais suas derivadas, contínuas em todo o domínio, porque é solução da equação da difusão da vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (\text{A.8})$$

A solução da Equação A.8, em uma região infinita (Kundu, 1990) é dada por:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma_j}{\pi \sigma^2} \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma^2}\right) \quad (\text{A.9})$$

Na Equação A.9,  $\sigma$  é expresso como:

$$\sigma = \sqrt{4\nu t} \quad (\text{A.10})$$

O componente tangencial da velocidade induzida pelo vórtice discreto de Lamb, com a distribuição de vorticidade acima, é definido pela seguinte equação:

$$u_\theta^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_{kj}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r_{kj}^2}{\sigma^2}\right) \right] \quad (\text{A.11})$$

O ponto  $r_{m\acute{a}x}$ , onde a velocidade  $u_\theta^{kj}(r)$  é máxima, é encontrado derivando-se a Equação A.11 em relação à  $r_{kj}$  e igualando-a a zero (Mustto, 1998):

$$\frac{r_{kj}}{\sigma} = 1,12091 \quad \Rightarrow \quad r_{m\acute{a}x} = 1,12091\sigma \quad (\text{A.12})$$

Deste modo:

$$u_{\theta}^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_{kj}} \left[ 1 - \exp\left(-1,25643 \frac{r_{kj}^2}{r_{m\acute{a}x}^2}\right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Para  $r = r_{m\acute{a}x}$ , tem-se:

$$u_{\theta_{m\acute{a}x}}^{kj} = -0,71533 \frac{\Gamma_j}{2\pi r_{m\acute{a}x}} \quad (\text{A.14})$$

O raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb, definido de modo que a diferença entre as velocidades induzidas calculadas pelo modelo do vórtice de Lamb e pelo modelo do vórtice potencial seja pequena, vale:

$$\sigma_{0_N} = 2r_{m\acute{a}x} \quad (\text{A.15})$$

onde  $\sigma_{0_N}$  é, neste texto, denominado de raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb nominal. Nesta situação, a diferença entre as velocidades induzidas calculadas pelo vórtice discreto de Lamb e pelo vórtice potencial é de 0,6%.

Resolvendo-se a Equação A.12 com auxílio da Equação A.10, adimensionalizada, e levando-se em consideração um incremento de tempo  $\Delta t$ , encontra-se:

$$r_{m\acute{a}x} \cong 2,24182 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re}} \quad (\text{A.16})$$

A equação final para o cálculo do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb nominal é obtida relacionando-se as Equações A.15 e A.16:

$$\sigma_{0_N} = 4,48364 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re}} \quad (\text{A.17})$$

Entretanto, experiências numéricas mostram que o valor do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb nominal (Equação A.17) depende da precisão da discretização das fronteiras sólidas. Assim, a obtenção do valor ideal para o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb (representado por  $\sigma_0$ ), passa pelo seguinte procedimento de aferição:

(i) dado um problema que se deseja estudar (onde o número de Reynolds,  $Re$ , é conhecido), deve-se escolher o valor do incremento de tempo ( $\Delta t$ ) que será utilizado na simulação numérica;

- (ii) determina-se o número de painéis planos em que a fronteira sólida envolvida no problema será discretizada;
- (iii) escolhe-se o tipo de singularidades a serem distribuídas sobre os painéis que discretizam a fronteira sólida;
- (iv) realizam-se testes numéricos com vários valores de raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb,  $\sigma_0$ , tendo como ponto de partida a Equação A.17;
- (v) o valor ideal do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb ( $\sigma_{0_{Aferido}} = \sigma_0$ ) é determinado através da comparação dos valores de cargas fluidodinâmicas entre os testes numéricos realizados e dados experimentais disponíveis na literatura.

De maneira geral, o procedimento de aferição para a obtenção do valor ideal do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb é realizado para corpos isolados. Assim, no caso deste estudo, por exemplo, o processo de aferição é realizado considerando-se o escoamento subcrítico ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ) ao redor de um cilindro circular isolado discretizado em trezentos painéis planos, sobre os quais são distribuídas singularidades do tipo fontes com densidade constante; opta-se, ainda, por realizar simulações numéricas com incremento de tempo  $\Delta t = 0,05$ . Nesta situação, determina-se como valor ideal do raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb  $\sigma_0 = 0,001$ .

Deste modo, esta aferição é utilizada para todas as simulações numéricas envolvendo o cilindro circular ( $Re = 1,0 \times 10^5$ ), seja ele hidraulicamente liso ou hidraulicamente rugoso, isolado ou submetido ao efeito solo.

No entanto, conforme discutido no Capítulo 4, Item 4.2.3, o modelo de rugosidade exige que o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb seja modificado pelo número de Reynolds, uma vez que cada ponto de geração de vórtices discretos tem, para o corpo hidraulicamente rugoso, um coeficiente de viscosidade turbulenta associado. Como a modificação é feita considerando-se a equação original deduzida por Mustto (1998) – a Equação A.17 – e sabe-se que, geralmente, o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb utilizado nas simulações numéricas é diferente do valor nominal ( $\sigma_0 \neq \sigma_{0_N}$ ), faz-se necessário, quando da atuação do modelo de rugosidade, definir um fator de controle para que o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb não seja gerado com um valor excessivamente grande; este fator é definido como:

$$\chi = \frac{\sigma_0}{\sigma_{0N}} \quad (\text{A.18})$$

No caso específico deste trabalho, tem-se:

$$\sigma_0 = 1,00 \times 10^{-3}$$

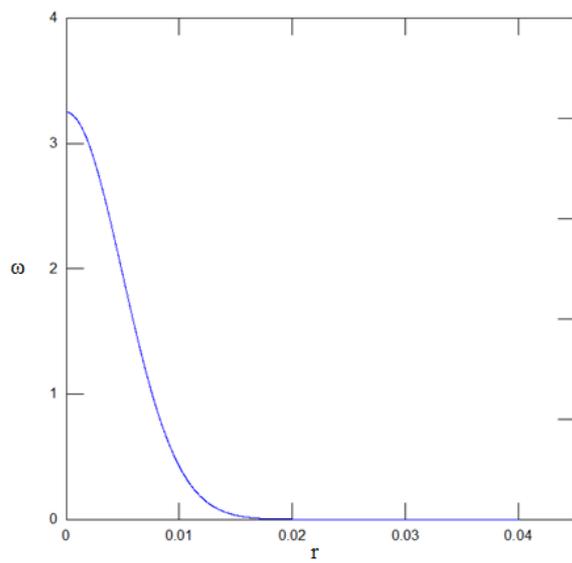
$$\sigma_{0N} = 4,48364 \sqrt{\frac{\Delta t}{\text{Re}}} = 4,48364 \sqrt{\frac{5,0 \times 10^{-2}}{1,0 \times 10^5}} = 3,17 \times 10^{-3}$$

$$\chi = \frac{\sigma_0}{\sigma_{0N}} = \frac{1,00 \times 10^{-3}}{3,17 \times 10^{-3}} = 3,15 \times 10^{-1} \quad (\text{A.19})$$

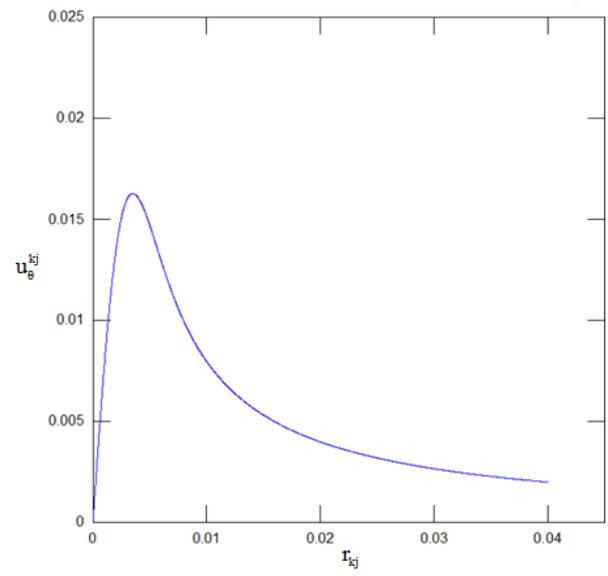
Finalmente, para calcular a velocidade induzida pelo vórtice discreto de Lamb, com  $u_\theta = u_\theta(\sigma_0)$ , substitui-se a Equação A.15 na Equação A.13:

$$u_\theta^{kj} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{1}{r_{kj}} \left[ 1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_0^2}\right) \right] \quad (\text{A.20})$$

O modelo do vórtice discreto de Lamb, Figura A.3, não apresenta problemas de singularidade, mas na sua equação nota-se a presença do exponencial, que tem um cálculo computacional demorado. Deste modo, todos os vórtices discretos existentes na nuvem são vórtices discretos de Lamb, inicialmente. A Equação A.20 pode ser usada quando dois vórtices discretos estiverem muito próximos um do outro, de modo que  $r_{kj} < \sigma_0$ ; quando  $r_{kj} \geq \sigma_0$ , a Equação A.3 pode ser aplicada sem os problemas de singularidade.



(a) Distribuição de vorticidade



(b) Velocidade tangencial induzida

Figura A.3 – Distribuição de vorticidade no interior do núcleo e velocidade tangencial induzida pelo vórtice discreto de Lamb.

## Apêndice B

# FLUXO DE VORTICIDADE ATRAVÉS DE UMA PAREDE

Para analisar a geração da vorticidade junto à parede, considere as Equações de Navier-Stokes:

$$\frac{D\mathbf{u}^*}{Dt^*} = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (\text{B.1})$$

O primeiro objetivo consiste em utilizar a notação indicial para demonstrar que:

$$-\nabla^{*2} \mathbf{u}^* = \nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{B.2})$$

Assim, segue que:

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \nabla^* \times (\nabla^* \times \mathbf{u}^*) \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \times \left( \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^*} \times u_k^* \mathbf{e}_k \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \times \varepsilon_{jkl} \mathbf{e}_l \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ilm} \mathbf{e}_m \quad (\text{B.6})$$

Como  $\varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{mil} = \varepsilon_{lmi}$ :

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{mil} \mathbf{e}_m \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_m (\delta_{jm} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{km}) \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_m \delta_{jm} \delta_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_m \delta_{ji} \delta_{km} \quad (\text{B.9})$$

Fazendo  $j = m$  em  $\delta_{jm}$  e  $j = i$  em  $\delta_{ji}$ , para não zerar a Equação B.9, fica:

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_j \delta_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_i^*} u_k^* \mathbf{e}_m \delta_{km} \quad (\text{B.10})$$

Fazendo  $k = i$  em  $\delta_{ki}$  e  $m = k$  em  $\delta_{km}$ , para não zerar a Equação B.10, fica:

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_i^* \mathbf{e}_j - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_i^*} u_k^* \mathbf{e}_k \quad (\text{B.11})$$

Agora, deseja-se escrever a expressão  $\nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*)$  em notação indicial:

$$\nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left( \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^*} \cdot u_k^* \mathbf{e}_k \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \delta_{jk} \quad (\text{B.13})$$

Fazendo  $k = j$  em  $\delta_{jk}$ , para não zerar a Equação B.13, escreve-se:

$$\nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_j^* \quad (\text{B.14})$$

Escrevendo-se a Equação B.14 convenientemente:

$$\nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) = \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^*} \frac{\partial}{\partial x_i^*} u_i^* \quad (\text{B.15})$$

Observa-se que o segundo membro da Equação B.15 é igual ao primeiro termo do segundo membro da Equação B.11.

Para finalizar o primeiro objetivo, escreve-se a expressão  $\nabla^{*2} \mathbf{u}^*$  em notação indicial:

$$\nabla^{*2} \mathbf{u}^* = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \cdot \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_k \quad (\text{B.16})$$

$$\nabla^{*2} \mathbf{u}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_j^*} u_k^* \mathbf{e}_k \delta_{ij} \quad (\text{B.17})$$

Fazendo  $j = i$  em  $\delta_{ij}$ , para não zerar a Equação B.17, fica:

$$\nabla^{*2} \mathbf{u}^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial}{\partial x_i^*} u_k^* \mathbf{e}_k \quad (\text{B.18})$$

Observa-se que o segundo membro da Equação B.18 é igual ao segundo termo do segundo membro da Equação B.11.

Assim, considerando-se as Equações B.11, B.15 e B.18, pode-se escrever:

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) - \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (\text{B.19})$$

Considerando a Lei de Conservação da Massa (Equação 3.28), a Equação B.19 assume a forma:

$$\nabla^* \times \boldsymbol{\omega}^* = -\nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (\text{B.20})$$

Assim, as Equações de Navier-Stokes (Equação B.1) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla^* p^* - \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (\text{B.21})$$

Escrevendo o componente das Equações de Navier-Stokes na direção  $x^*$ , e considerando que o vetor vorticidade possui um único componente, o qual é normal ao plano do escoamento (Hipótese H1 – escoamento bidimensional), escreve-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (\text{B.22})$$

Considerando o eixo das abscissas (eixo  $x^*$ ) como uma fronteira sólida, então a condição de aderência deve ser verificada, ou seja:

$$\text{em } y^* = 0 \Rightarrow u^* = 0 \text{ e } v^* = 0 \quad (\text{B.23})$$

Escrevendo o componente das Equações de Navier-Stokes na direção  $x^*$ , em  $y^* = 0$ , a Equação B.22 torna-se:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \nu \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \quad (\text{B.24})$$

Finalmente, resulta:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -\nu \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \quad (\text{B.25})$$

onde:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \equiv \text{gradiente de pressão na direção } x^* ;$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \equiv \text{fluxo de vorticidade através da superfície } x^* .$$

A interpretação física da Equação B.25 pode ser mais bem compreendida com o auxílio da Figura B.1.

Se  $\partial p^* / \partial x^* > 0$ , então o gradiente de pressão é desfavorável. Consequentemente,  $\partial \omega^* / \partial y^* < 0$  e haverá destruição de vorticidade.

Por outro lado, se  $\partial p^* / \partial x^* < 0$ , então o gradiente de pressão é favorável. Consequentemente,  $\partial \omega^* / \partial y^* > 0$  e haverá geração de vorticidade.

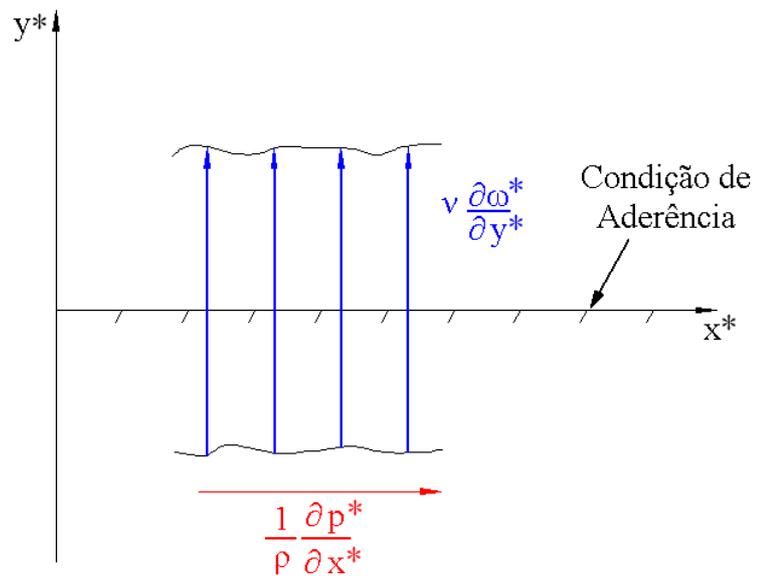


Figura B.1 – Fluxo de vorticidade através de uma fronteira sólida coincidente com o eixo  $x$ .