



Universidade  
Federal de Itajubá

TESE DE DOUTORADO

**METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO  
ESCOAMENTO POTENCIAL EM TORNO DE CORPOS  
DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O  
MÉTODO DE QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL**

Autora

**Márcia Suely Corrêa Vilela**

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Itajubá, dezembro de 2017

Minas Gerais – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO  
ESCOAMENTO POTENCIAL EM TORNO DE CORPOS  
DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O  
MÉTODO DE QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL**

Autora: **Márcia Suely Corrêa Vilela**

Orientador: **Waldir de Oliveira**

Curso: **Doutorado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Térmica, Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Itajubá, dezembro de 2017

Minas Gerais - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO  
ESCOAMENTO POTENCIAL EM TORNO DE CORPOS  
DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA UTILIZANDO O  
MÉTODO DE QUADRATURA DIFERENCIAL LOCAL  
COM FUNÇÕES DE BASE RADIAL**

Autora

**Márcia Suely Corrêa Vilela**

**Banca Examinadora:**

**Dr. Marcelo Assato**

**APA/DCTA**

**Dr. Luís Guilherme Cunha Santos**

**CEPETRO/UNICAMP**

**Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

**IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Ramiro Gustavo Ramirez Camacho**

**IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Genésio José Menon**

**IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

**IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*Aos meus pais, Juber e Vera (in memoriam),  
à minha filha, Bruna...*

## **Agradecimentos**

A minha mãe, fonte de generosidade, cujo caminho de retidão me guiou até aqui. Ao meu pai, pelas palavras de coragem e pelos sábios conselhos. Aos dois, minha eterna saudade. Às minhas irmãs, Rita e Patrícia, que sempre me motivaram, agradeço por entenderem as minhas faltas e afastamentos.

A minha filha Bruna, amor maior. Pela luz, por tantos sorrisos e “boas” loucuras compartilhadas. Possa eu ser sempre motivo de seu orgulho.

Ao Rômulo, querido companheiro de jornadas, pela sincera amizade e frequentes palavras de incentivo.

Muito especialmente, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Waldir de Oliveira, pela amizade, disponibilidade, paciência, dedicação e profissionalismo ... um Muito Obrigada. À sua família, pela atenção e carinho sempre dispensados a mim.

Aos meus amigos, em especial, Francislei, Isac, Eli, Wellyngthon, Talita e Vanessa, pelo apoio e alegrias compartilhadas.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá, que me receberam com tanta atenção e disponibilidade.

Aos funcionários do Instituto de Engenharia Mecânica e da Pró-reitoria de Pós-graduação da Universidade Federal de Itajubá, sempre prestativos e educados.

*"Sua aprendizagem só terá valor na medida em que  
você tiver prazer nela. A chegada ao ponto onde  
recomeçar e se superar constantemente torna-se,  
então, uma dança."*

**Alan Watts**

## Resumo

Neste trabalho, o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR) é aplicado para simular o escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária. São utilizadas duas funções de base radial, a saber, a multiquádrica e a *Thin-Plate Spline* Modificada. Para a aplicação do método, são geradas malhas tipo "O" utilizando o método diferencial elíptico, das quais são utilizados os pontos de interseção como nós de referência. A partir de um programa desenvolvido utilizando o *software* MATLAB<sup>®</sup> e através de simulações numéricas, primeiramente é avaliada a influência dos parâmetros envolvidos na geração da malha. A partir do mapeamento do domínio físico irregular para o domínio computacional regular, a equação governante é transformada para o plano computacional e discretizada utilizando o MQDL-FBR. São apresentados os resultados para as linhas de corrente e distribuição do coeficiente de pressão para o escoamento potencial e bidimensional em torno de um cilindro, de elipses, de aerofólios Joukowski simétricos e do aerofólio NACA 0012. Para validação do programa desenvolvido, a partir das soluções exatas para os coeficientes de pressão nas superfícies do cilindro, das elipses e dos aerofólios Joukowski, são analisados os Erros Médios Quadráticos (EMQ) para os resultados numéricos obtidos. É avaliada a contribuição do parâmetro de forma das funções de base radial e do número de pontos da malha nos resultados obtidos para o EMQ. Para o escoamento em torno do aerofólio NACA 0012 são obtidas as linhas de corrente e a distribuição do coeficiente de pressão para diversos ângulos de ataque. Os resultados obtidos, quando utilizadas as duas FBRs, são satisfatórios, sendo confrontados com resultados disponíveis na literatura, obtidos pelo método dos painéis.

**Palavras-chave:** Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial, Funções de Base Radial, Geração de Malha, Escoamento Potencial, Dinâmica dos Fluidos, Aerofólios.

# Abstract

In this work, the Local Radial Basis Function-Based Differential Quadrature Method (RBF-DQ) is applied to simulate the potential two-dimensional flow around arbitrary geometry bodies. The two radial basis functions used are the Multiquadric and the Thin-Plate Spline Modified. In order to apply the method, a mesh type "O" is generated by using the elliptical differential method, from which the intersection points are used as a reference node. From a program developed by a MATLAB<sup>®</sup> software and also through numeric simulations, the influence of the involved parameters on the mesh generation is evaluated. From the mapping over the irregular physical domain to the regular computational domain, the governing equation is converted to the computational plane and discretized by using the RBF-DQ. The results for the stream function contours and the distribution of the pressure coefficient for the two-dimensional potential flow around a cylinder, of the ellipse, symmetrical Joukowski airfoils and the NACA 0012 are presented in this work. As for the ellipses and airfoils, the results for different attack angles are presented. In order to validate the developed program, from the exact solutions for the pressure coefficients on a cylinder's surface, of the ellipses and the Joukowski airfoil, the mean quadric errors (MQE) are analysed for the obtained results. The contribution of the shape parameter of the radial basis functions and the number of mesh points in the results obtained for the MQE is evaluated. The stream function contours and the distribution of the pressure coefficient for diverse attack angles are obtained for the flow around NACA 0012 airfoil. The obtained results, when using both radial basis functions, are appropriate, up to be confronted with available results in the literature, obtained through the panel method.

**Keywords.** Local Radial Basis Function-Based Differential Quadrature Method, Radial Basis Function, Mesh Generation, Potential Flow, Fluid Dynamics, Airfoils.



# Sumário

|   |              |
|---|--------------|
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>v</b>     |
| <b>Lista de Tabelas</b>   | <b>xv</b>    |
| <b>Lista de Símbolos</b>  | <b>xix</b>   |
| <b>Lista de Abreviaturas</b>  | <b>xxiii</b> |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>     |
| 1.1 Justificativa .....   | 1            |
| 1.2 Revisão de Literatura.....  | 5            |
| 1.2.1 Escoamento Potencial em Torno de Corpos<br>de Geometria Arbitrária.....                 | 5            |
| 1.2.2 O Método de Quadratura Diferencial Local com<br>Funções de Base Radial (MQDL-FBR) ..... | 12           |
| 1.3 Objetivos do Trabalho.....  | 19           |
| 1.4 Delineamento do Trabalho .....  | 20           |
| <b>2 A Malha Computacional</b>  | <b>22</b>    |
| 2.1 Algumas Considerações.....  | 22           |
| 2.2 Formulação Matemática para a Geração da Malha.....  | 27           |
| 2.3 Solução Numérica das Equações de Transformação .....                                      | 35           |
| 2.4 Avaliação da Influência dos Parâmetros Envolvidos<br>Na Geração da Malha .....            | 43           |
| 2.4.1 Influência dos Valores das Funções de Controle.....                                     | 44           |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.4.2    | Influência da Condição de Ortogonalidade.....   | 52        |
| 2.4.3    | Influência do Número de Pontos.....   | 56        |
| <b>3</b> | <b>Funções de Base Radial e o MQDL-FBR Aplicado ao Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária</b>    | <b>60</b> |
| 3.1      | Funções de Base Radial.....   | 60        |
| 3.1.1    | Interpolação com Funções de Base Radial.....  | 64        |
| 3.1.2    | A Solução de Equações Diferenciais Parciais Utilizando Funções de Base Radial.....  | 66        |
| 3.2      | O Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR).....   | 69        |
| 3.3      | Considerações Físicas e Formulação Matemática para o Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária..... | 72        |
| 3.4      | Aplicação do MQDL-FBR no Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária.....                             | 76        |
| 3.4.1    | Superposição de Soluções.....   | 79        |
| 3.4.2    | A Condição de Kutta.....  | 80        |
| 3.4.3    | Cálculo das Velocidades.....  | 82        |
| 3.4.4    | Cálculo do Coeficiente de Pressão.....  | 84        |
| <b>4</b> | <b>Testes Numéricos para Aplicação do MQDL-FBR no Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária</b>     | <b>86</b> |
| 4.1      | Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de um Cilindro Circular.....  | 87        |
| 4.2      | Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de uma Elipse.....  | 92        |
| 4.3      | Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de um Aerofólio Joukowski.....  | 101       |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3.1    | Testes com a FBR Multiquádrica para o Aerofólio<br>Joukowski Simétrico e Arredondado ..... | 104        |
| 4.3.2    | Testes com a FBR TPS Multiquádrica para o Aerofólio<br>Joukowski Simétrico e Afilado. .... | 109        |
| 4.4      | Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno<br>de um Aerofólio NACA 0012 .....           | 115        |
| 4.4.1    | A Equação da Espessura de Perfis NACA de 4 Dígitos .....                                   | 119        |
| 4.5      | Tabelas de Consolidação dos Resultados Obtidos ao<br>Utilizar a FBR Multiquádrica. ....    | 121        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões e Sugestões</b>  | <b>123</b> |
| 5.1      | Conclusões .....   | 123        |
| 5.1.1    | Sobre a Geração da Malha .....   | 123        |
| 5.1.2    | Sobre a Aplicação do MQDL-FBR. ....  | 126        |
| 5.2      | Sugestões para Trabalhos Futuros .....   | 129        |
| <b>A</b> | <b>Fluxograma da Geração de Malha</b>  | <b>133</b> |
| <b>B</b> | <b>Fluxograma do Programa Principal</b>  | <b>135</b> |
| <b>C</b> | <b>Derivadas das FBRs Multiquádrica e TPS Modificada</b>                                   | <b>138</b> |
| C.1      | FBR Multiquádrica .....  | 138        |
| C.2      | FBR TPS Modificada .....   | 140        |
| <b>D</b> | <b>Comportamento da FBR TPS Modificada e Resultados<br/>Obtidos com a sua Utilização</b>   | <b>142</b> |
| D.1      | Comportamento da FBR TPS Modificada .....  | 142        |
| D.2      | Resultados dos Testes com o Cilindro. ....   | 143        |
| D.3      | Resultados dos Testes com a Elipse com<br>Razão de Aspecto Igual a 0,5. ....               | 145        |
| D.4      | Resultados dos Testes com o Aerofólio Joukowski<br>Simétrico e Arredondado. ....           | 147        |

---

|  |            |
|--|------------|
| D.5 Resultados dos Testes com o Aerofólio Joukowski<br>Simétrico e Afilado. ....                           | 149        |
| D.6 Resultados dos Testes com o Aerofólio NACA 0012. ....  | 151        |
| <b>E Resultados dos Testes Numéricos Realizados para a<br/>    Elipse com Razão de Aspecto Igual a 0,1</b> | <b>153</b> |
| E.1 Utilizando a FBR Multiquádrica. ....   | 153        |
| E.2 Utilizando a FBR TPS Modificada . ....   | 156        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>159</b> |

## Lista de Figuras

|     |  |   |
|-----|--|---|
| 1.1 | Nó de referência na proximidade do bordo de fuga de um perfil, Método da Visibilidade, Ramos (2010). . . . .   | 4 |
| 1.2 | Discretização do aerofólio NACA 0012, utilizada por Carey e Kim (1983) . . . . .   | 6 |
| 1.3 | Detalhe da discretização na região próxima ao bordo de ataque do aerofólio NACA 0012 utilizada por Carey e Kim (1983). . . . .   | 6 |
| 1.4 | Distribuição do coeficiente de pressão nas superfícies superior e inferior do NACA 0012, para diversos ângulos de ataque, obtida por Carey e Kim (1983) . . . . .              | 7 |
| 1.5 | Comparação dos coeficientes de sustentação obtidos numericamente por Carey e Kim (1983) com os resultados experimentais fornecidos por Abbott e Doenhoff (1959). . . . .       | 7 |
| 1.6 | Malha em torno do aerofólio NACA 0012, utilizada por Ferreira e Fico (2004) . . . . .  | 8 |
| 1.7 | Comparação entre o valor numérico da velocidade na superfície do aerofólio obtido por Ferreira e Fico (2004) e o valor teórico fornecido por Abbot e Doenhoff (1959) . . . . . | 9 |
| 1.8 | Comparação entre o valor numérico do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio obtido por Ferreira e Fico (2004) e o   |   |

|      |  |    |
|------|--|----|
|      | valor teórico fornecido por Abbot e Doenhoff (1959). . . . .   | 9  |
| 1.9  | Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular, Lima (2010). . . . .   | 10 |
| 1.10 | Distribuição de pressão em torno de uma elipse com razão de aspecto de 0,5 sem incidência, Lima (2010) . . . . .   | 11 |
| 1.11 | Malha tipo "O" gerada utilizando o método diferencial elíptico, Mohebbi e Sellier (2014). . . . .  | 11 |
| 1.12 | Comparação da distribuição do coeficiente de pressão obtida numericamente por Mohebbi e Sellier (2014) com resultados fornecidos por Anderson (1985) . . . . . | 12 |
| 1.13 | Domínio computacional utilizado, Hashemi e Hatam (2011), Vilela <i>et al.</i> (2015). . . . .  | 16 |
| 1.14 | Resultados da carga hidráulica obtidos por Hashemi e Hatamm (2011). . . . .  | 17 |
| 1.15 | Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela <i>et al.</i> (2015), condição inicial. . . . .  | 18 |
| 1.16 | Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela <i>et al.</i> (2015), $t = 120$ min . . . . .  | 18 |
| 1.17 | Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela <i>et al.</i> (2015), $t = 180$ min . . . . .  | 19 |
| 1.18 | Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela <i>et al.</i> (2015), $t = 300$ min . . . . .  | 19 |
| 2.1  | Malha curvilínea estruturada tipo "H" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987). . . . .  | 24 |
| 2.2  | Malha curvilínea estruturada tipo "C" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987). . . . .  | 24 |
| 2.3  | Malha curvilínea estruturada tipo "O" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987). . . . .  | 24 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.4  | Mapeamento do plano físico (malha tipo "O") para plano computacional (Fletcher, 1988).....                           | 25 |
| 2.5  | Transformação do domínio físico – malha tipo "O" (Thompson et al., 1985).....  | 26 |
| 2.6  | Ponto interno ao plano computacional e seus vizinhos.....  | 36 |
| 2.7  | Malha gerada por interpolação transfinita em torno do aerofólio NACA 0012.....                                       | 39 |
| 2.8  | Malha gerada pelo método diferencial elíptico em torno do aerofólio NACA 0012.....                                   | 39 |
| 2.9  | Plano computacional.....   | 42 |
| 2.10 | Transformação geométrica de Joukowski $\zeta = z + a^2 / z$ , Lewis (1991).....                                      | 44 |
| 2.11 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 165 iterações.....          | 46 |
| 2.12 | Detalhes das regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga, NACA 0012, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ..... | 46 |
| 2.13 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = -0,15$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 180 iterações.....      | 47 |
| 2.14 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0,15$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 151 iterações.....       | 47 |
| 2.15 | Sobreposições e quebras da malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos.....  | 48 |
| 2.16 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = -0,22$ , 261 iterações.....      | 48 |
| 2.17 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 1,56$ ; 109 iterações.....       | 49 |
| 2.18 | Sobreposições e quebras da malha tipo "O", NACA 0012, 41 x   |    |

|      |  |    |
|------|--|----|
|      | 41 pontos. ....  | 49 |
| 2.19 | Malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 169 iterações. ....                           | 50 |
| 2.20 | Detalhes das regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga, Joukowski, simétrico e arredondado, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ . ...                  | 50 |
| 2.21 | Sobreposições e quebras da malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos. ....   | 51 |
| 2.22 | Deformações da malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos. ....   | 51 |
| 2.23 | Malha tipo "O", Joukowski simétrico e afilado, 41 x 41 pontos, com $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 166 iterações. ....                               | 52 |
| 2.24 | Detalhes das regiões próximas ao bordo de ataque e ao bordo de fuga de aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ . .... | 53 |
| 2.25 | Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ . ....  | 54 |
| 2.26 | Malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ . ....  | 54 |
| 2.27 | Malha tipo "O", Joukowski simétrico e afilado, 41 x 41 pontos, $P(\xi, \eta) = 0$ e $Q(\xi, \eta) = 0$ . ....  | 55 |
| 2.28 | Comportamento do número de iterações necessário para convergência, com a dimensão da malha, NACA 0012. ....  | 57 |
| 2.29 | Comportamento do tempo necessário para convergência, com a dimensão da malha, NACA 0012. ....  | 57 |
| 2.30 | Comportamento do número de iterações necessário para convergência, com a dimensão da malha, aerofólios Joukowski. .  | 58 |
| 2.31 | Comportamento do tempo necessário para convergência, com   |    |



|      |  |    |
|------|--|----|
|      | a dimensão da malha, aerofólios Joukowski. ....  | 59 |
| 3.1  | Comportamento da FBR Multiquádrica (Santos, 2016). ....  | 62 |
| 3.2  | Comportamento da FBR Multiquádrica Inversa (Santos, 2016). . .   | 63 |
| 3.3  | Comportamento da FBR Gaussiana (Santos, 2016) . . . . .  | 63 |
| 3.4  | Suporte local (estêncil) em torno de um nó de referência. . . . .  | 69 |
| 3.5  | Suporte local não centrado (Santos, 2016). . . . .   | 72 |
| 3.6  | Escoamento em torno de um cilindro (Pereira, 2005). . . . .  | 73 |
| 3.7  | Condições de contorno: escoamento não viscoso (Anderson, 1985). . . . .  | 74 |
| 3.8  | Terminologia para um aerofólio típico (adaptado de Anderson, 1985). . . . .  | 75 |
| 3.9  | Condições de contorno transformadas . . . . .  | 77 |
| 3.10 | Estruturas de suporte local (estênceis) testadas. . . . .  | 77 |
| 3.11 | Estrutura de suporte local (estêncil) de segunda camada . . . . .  | 78 |
| 3.12 | Aerofólio com ângulo finito no bordo de fuga (adaptada de Mohebbi e Sellier, 2014). . . . .  | 82 |
| 3.13 | Aerofólio com bordo de fuga afilado (adaptada de Mohebbi e Sellier, 2014) . . . . .  | 82 |
| 4.1  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro. . . . .                 | 89 |
| 4.2  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica, $c = 80$ . . . . .         | 90 |
| 4.3  | Malha tipo "O" gerada em torno do cilindro, 89 x 89 pontos . . . .   | 91 |
| 4.4  | Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro circular, 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ . . . . . | 92 |
| 4.5  | Coeficiente de pressão na superfície do cilindro circular, malha   |    |

|      |  |     |
|------|--|-----|
|      | de 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ . . . . .   | 92  |
| 4.6  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . . . . .                                       | 95  |
| 4.7  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ ( $c = 90$ ) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ( $c = 20$ ). . . . . | 97  |
| 4.8  | Malha tipo "O" gerada em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , 89 x 89 pontos . . . . .   | 98  |
| 4.9  | Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ ( $c = 90$ ) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ( $c = 20$ ) . . . . .                                    | 98  |
| 4.10 | Coeficiente de pressão na superfície da elipse, $\lambda = 0,5$ , FBR Multiquádrica, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ ( $c = 90$ ) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ( $c = 20$ ) . . . . .   | 99  |
| 4.11 | Malha tipo "O" gerada em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , 69 x 69 pontos . . . . .   | 100 |
| 4.12 | Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , FBR Multiquádrica, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ ( $c = 80$ ) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ( $c = 10$ ) . . . . .                 | 100 |
| 4.13 | Coeficiente de pressão na superfície da elipse, $\lambda = 0,1$ , FBR Multiquádrica, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , ( $c = 80$ ) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ( $c = 10$ ). . . . .  | 101 |
| 4.14 | Transformação geométrica de Joukowski $\zeta = z + a^2 / z$ , Lewis (1991). . . . .  | 102 |
| 4.15 | Condição de Kutta no bordo de fuga, transformação Joukowski, Lewis (1991). . . . .   | 103 |
| 4.16 | Ocorrência na geração da malha de dimensão 37 x 37 pontos, aerofólio Joukowski simétrico e arredondado . . . . .   | 104 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.17 | Ocorrência na geração da malha de dimensão 47 x 47 pontos, aerofólio Joukowski simétrico e arredondado . . . . .   | 105 |
| 4.18 | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . . . . .                        | 107 |
| 4.19 | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, FBR Multiquádrica. . . . .   | 108 |
| 4.20 | Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, 45 x 45 pontos . . . . .  | 108 |
| 4.21 | Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ . . . . . | 109 |
| 4.22 | Coeficiente de pressão na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , malha de 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ . . . . .                              | 109 |
| 4.23 | Ocorrência na geração da malha de dimensão 39 x 39 pontos, aerofólio Joukowski simétrico e afilado. . . . .  | 110 |
| 4.24 | Ocorrência na geração da malha de dimensão 47 x 47 pontos, aerofólio Joukowski simétrico e afilado. . . . .  | 110 |
| 4.25 | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . . . . .                            | 112 |
| 4.26 | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, FBR Multiquádrica . . . . .  | 113 |
| 4.27 | Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio Joukowski  |     |

|      |  |     |
|------|--|-----|
|      | simétrico e afilado, 45 x 45 pontos. ....  | 114 |
| 4.28 | Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ ..... | 114 |
| 4.29 | Coeficiente de pressão na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , malha de 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ .....                              | 115 |
| 4.30 | Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio NACA 0012, 49 x 49 pontos. ....  | 116 |
| 4.31 | Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio NACA 0012, 89 x 89 pontos. ....  | 116 |
| 4.32 | Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, malha tipo "O", 49 x 49 pontos, FBR Multiquádrica. ....   | 117 |
| 4.33 | Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica. ....   | 118 |
| 4.34 | Linhas de corrente para os ângulos de ataque $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , $4^{\circ}$ , $6^{\circ}$ , $8^{\circ}$ e $9^{\circ}$ , NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica, $c = 80$ .....                        | 119 |
| 4.35 | Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica, $c = 80$ , 89 x 89 pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a $-0,3516$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ .....                   | 120 |
| 4.36 | Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica, $c = 80$ , 89 x 89 pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a $-0,3516$ , $\alpha_{\infty} = 4^{\circ}$ .....                   | 120 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.37 | Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica, $c = 80$ , $89 \times 89$ pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a $-0,3516$ , $\alpha_{\infty} = 9^{\circ}$ ..... | 120 |
| A.1  | Fluxograma da sub-rotina para a geração da malha.....   | 133 |
| B.1  | Fluxograma do programa principal.....   | 135 |
| D1   | Comportamento da FBR TPS Modificada para alguns valores do parâmetro de forma.....  | 142 |
| D.2  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro.....   | 143 |
| D.3  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada, $c = 1 \times 10^4$ .....  | 144 |
| D.4  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....              | 146 |
| D.5  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....        | 147 |
| D.6  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....        | 148 |
| D.7  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, FBR TPS Modificada.....   | 149 |
| D.8  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno do aerofólio   |     |

|      |   |     |
|------|---|-----|
|      | Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....  | 150 |
| D.9  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, FBR TPS Modificada. ....  | 151 |
| D.10 | Distribuição do coeficiente de pressão na superfície, NACA 0012, malha tipo "O", 49 x 49 pontos, FBR TPS Modificada. ....   | 152 |
| D.11 | Distribuição do coeficiente de pressão na superfície, NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR TPS Modificada. ....   | 152 |
| E.1  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....                      | 155 |
| E.2  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....                         | 156 |
| E.3  | Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .....                     | 157 |
| E.4  | Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ (esquerda) e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ (direita) . . . . | 158 |

## Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Erros médios quadráticos obtidos sem e com a aplicação da condição de ortogonalidade, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_\infty = 0^\circ$ e $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica, malha de 41 x 41 pontos . . . . . | 56 |
| 2.2 | Erros médios quadráticos obtidos sem e com a aplicação da condição de ortogonalidade, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_\infty = 0^\circ$ e $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica, malha de 41 x 41 pontos . . . . .     | 56 |
| 3.1 | Algumas FBRs infinitamente suaves mais utilizadas (Shu <i>et al.</i> , 2003). . . . .  | 61 |
| 3.2 | Algumas FBRs infinitamente suaves em função de $r$ e $\varepsilon$ (Larsson e Fornberg, 2003). . . . .   | 62 |
| 3.3 | FBRs suaves por partes, mais utilizadas segundo Piret (2007). . . . .  | 63 |
| 3.4 | FBRs de suporte compacto (Wendland, 1995) . . . . .  | 66 |
| 4.1 | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica . . . . .  | 88 |
| 4.2 | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento   |    |

|      |   |     |
|------|---|-----|
|      | potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica, $c = 80$ .....   | 90  |
| 4.3  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....   | 94  |
| 4.4  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....   | 95  |
| 4.5  | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ..... | 96  |
| 4.6  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....                            | 105 |
| 4.7  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....                            | 106 |
| 4.8  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....                                | 111 |
| 4.9  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR Multiquádrica .....                                | 112 |
| 4.10 | Dimensões da malha e dos valores do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica que resultaram nos menores EMQ .....  | 121 |
| 4.11 | Número de iterações para a geração da malha e tempos gastos nas simulações que apresentaram menor EMQ .....   | 122 |



---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.12 | Número de iterações para a geração da malha e tempos gastos nas simulações do NACA 0012 .....  | 122 |
| D.1  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada .....   | 143 |
| D.2  | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada, $c = 1 \times 10^4$ .....   | 144 |
| D.3  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada .....   | 145 |
| D.4  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada .....   | 145 |
| D.5  | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_\infty = 0^\circ$ e $\alpha_\infty = 5^\circ$ ..... | 146 |
| D.6  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada .....                        | 147 |
| D.7  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada .....                        | 148 |
| D.8  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada .....                            | 149 |
| D.9  | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e  |     |

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
|     | afilado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR TPS Modificada . . . . .  | 150 |
| E.1 | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , FBR Multiquádrica . . . . .  | 153 |
| E.2 | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR Multiquádrica . . . . .  | 154 |
| E.3 | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . . . . .  | 155 |
| E.4 | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ , FBR TPS Modificada. . . . .  | 156 |
| E.5 | EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ , FBR TPS Modificada. . . . .  | 157 |
| E.6 | EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ e $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . . . . . | 158 |

# Lista de Símbolos

## Símbolos Latinos

|               |   |
|---------------|---|
| $a$           | Raio de influência da FBR de suporte compacto; constante utilizada na transformação Joukowski |
| $[A]$         | Matriz de interpolação; matriz das FBRs   |
| $c$           | Parâmetro de forma da FBR   |
| $C$           | Corda do aerofólio  |
| $C_p$         | Coefficiente de pressão   |
| $C_{p_{num}}$ | Coefficiente de pressão numérico  |
| $C_{p_{ref}}$ | Coefficiente de pressão de referência   |
| $f$           | Função  |
| $F$           | Fator determinado a partir da condição de Kutta   |
| $\{F\}$       | Vetor dos valores conhecidos da função  |
| $i$           | Variável no domínio computacional na direção de $\xi$   |
| $j$           | Variável no domínio computacional na direção de $\eta$  |
| $J$           | Jacobiano da transformação  |
| $k$           | Número de iterações   |
| $L$           | Operador diferencial parcial  |
| $L^P$         | Operador diferencial da equação diferencial parcial   |

---

|                |   |
|----------------|---|
| $N$            | Número de pontos no domínio   |
| $\mathbb{N}$   | Conjunto dos números naturais   |
| $\mathbb{N}_0$ | Conjunto dos números naturais incluindo o zero  |
| $N_i$          | Número de pontos internos   |
| $N_s$          | Número de nós de suporte  |
| $p$            | Pressão   |
| $p_\infty$     | Pressão da corrente livre   |
| $P$            | Função de controle na geração da malha  |
| $Q$            | Função de controle na geração da malha  |
| $\mathbb{R}$   | Conjunto dos números reais  |
| $r$            | Norma euclidiana entre dois pontos; raio polar  |
| $r_o$          | Raio da circunferência na transformação Joukowski   |
| $s$            | Coordenada superficial  |
| $t$            | Espessura máxima do aerofólio NACA de quatro dígitos  |
| $u$            | Velocidade dimensional na direção $x$   |
| $\hat{u}$      | Solução aproximada  |
| $v$            | Velocidade dimensional na direção $y$   |
| $V_t$          | Velocidade tangencial   |
| $V_\infty$     | Velocidade da corrente livre  |
| $x$            | Coordenada espacial   |
| $\mathbf{x}$   | Vetor do espaço vetorial $\mathbb{R}^d$   |
| $y$            | Coordenada espacial   |
| $y_t$          | Ordenada referente à espessura do aerofólio NACA de quatro dígitos tomada em relação à linha de arqueamento |
| $w$            | Coefficiente de ponderação  |

## Símbolos Gregos

|                  |   |
|------------------|---|
| $\alpha$         | Componente do tensor métrico  |
| $\alpha_\infty$  | Ângulo de ataque  |
| $\beta$          | Componente do tensor métrico  |
| $\partial$       | Derivada parcial  |
| $\partial\Omega$ | Fronteira do domínio  |
| $\gamma$         | Componente do tensor métrico  |
| $\varepsilon$    | Parâmetro de forma da FBR; tolerância                                 |
| $\varepsilon_1$  | Parâmetro geométrico utilizado na transformação Joukowski             |
| $\varepsilon_2$  | Parâmetro geométrico utilizado na transformação Joukowski             |
| $\varepsilon_3$  | Parâmetro geométrico utilizado na transformação Joukowski             |
| $\Gamma$         | Circulação  |
| $\eta$           | Coordenada generalizada   |
| $\theta$         | Ângulo polar  |
| $\lambda$        | Incógnita na interpolação com FBR; razão de aspecto da elipse         |
| $\xi$            | Coordenada generalizada   |
| $\rho$           | Massa específica  |
| $\rho_\infty$    | Massa específica do fluido na corrente livre                          |
| $\phi$           | Função de Base Radial; ângulo na transformação Joukowski              |
| $\phi_T$         | Ângulo para aplicação da condição de Kutta na transformação Joukowski |
| $\varphi$        | Função de Base Radial; variável genérica                              |
| $\Phi$           | Função de Base Radial; matriz de interpolação no sistema da FBR       |
| $\psi$           | Função-corrente   |
| $\omega$         | Fator de relaxação  |
| $\Omega$         | Domínio considerado   |

## Subscritos/Sobrescritos

|       |  |
|-------|--|
| $d$   | Dimensão do espaço                               |
| $i$   | Indexação na malha; indexação global no MQDL-FBR |
| $j$   | Indexação na malha; indexação local no MQDL-FBR  |
| $k$   | Número da iteração e indexação local             |
| $m$   | Ordem de derivação                               |
| $n$   | Grau de suavidade e ordem de uma matriz ou vetor |
| $max$ | Máximo   |
| $S$   | Suporte  |
| $t$   | Tangencial                                       |

## Lista de Abreviaturas

|                 |   |
|-----------------|---|
| <b>CB</b>       | FBR <b>C</b> úbica  |
| <b>DF</b>       | <b>D</b> iferenças <b>F</b> initas  |
| <b>EF</b>       | <b>E</b> lementos <b>F</b> initos   |
| <b>EMQ</b>      | <b>E</b> rro <b>M</b> édio <b>Q</b> uadrático   |
| <b>FBR</b>      | <b>F</b> unção de <b>B</b> ase <b>R</b> adial   |
| <b>GA</b>       | FBR <b>G</b> aussiana   |
| <b>LDU</b>      | <i>Factorization <b>L</b>ower-<b>D</b>iagonal-<b>U</b>pper</i>  |
| <b>LN</b>       | FBR <b>L</b> inear  |
| <b>MP</b>       | <b>M</b> étodo dos <b>P</b> ainéis  |
| <b>Mq</b>       | FBR <b>M</b> ulti <b>q</b> uádrica  |
| <b>MqI</b>      | FBR <b>M</b> ulti <b>q</b> uádrica <b>I</b> nversa  |
| <b>MQD</b>      | <b>M</b> étodo de <b>Q</b> uadratura <b>D</b> iferencial  |
| <b>MQDL</b>     | <b>M</b> étodo de <b>Q</b> uadratura <b>D</b> iferencial <b>L</b> ocal  |
| <b>MQDL-FBR</b> | <b>M</b> étodo de <b>Q</b> uadratura <b>D</b> iferencial <b>L</b> ocal com <b>F</b> unções de <b>B</b> ase <b>R</b> adial |
| <b>MSF</b>      | <b>M</b> étodo das <b>S</b> oluções <b>F</b> undamentais  |
| <b>PHS</b>      | FBR <b>P</b> oli <b>h</b> armônica <i><b>S</b>pline</i>   |
| <b>SCC</b>      | <b>S</b> istema de <b>C</b> oordenadas <b>C</b> urvilíneas  |
| <b>SOR</b>      | <i><b>S</b>uccessive <b>O</b>ver-<b>R</b>elaxation</i>  |
| <b>TPS</b>      | FBR <i><b>T</b>hin-<b>P</b>late <b>S</b>pline</i>   |
| <b>TPSm</b>     | FBR <i><b>T</b>hin-<b>P</b>late <b>S</b>pline</i> modificada  |
| <b>VF</b>       | <b>V</b> olumes <b>F</b> initos   |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Justificativa

O estudo do escoamento de fluidos tem, nas últimas décadas, contado com poderosas ferramentas computacionais para a sua análise, tais como os métodos de vórtices e dos painéis, entre outros, bem como os métodos tradicionais das Diferenças Finitas (DF), dos Volumes Finitos (VF) e dos Elementos Finitos (EF).

O método DF é o método de aproximação mais antigo e de maior facilidade de implementação. Segundo Gonçalves (2007), acredita-se que tenha sido utilizado por Leonhard Euler no século XVIII. Basicamente, consiste em aproximar ou interpolar valores desconhecidos da função utilizando uma expansão em série de Taylor ou um ajuste polinomial em pontos de uma determinada malha. Segundo Maliska (1995), o método DF sempre foi amplamente utilizado para a análise de escoamentos de fluidos sendo, no entanto, o seu desenvolvimento baseado nos sistemas ortogonais, como o cartesiano, o cilíndrico e o esférico, deixando para um segundo plano o tratamento de geometrias complexas.

Em problemas com geometrias complexas, seriam indicados os métodos VF e EF, que podem ajustar a malha a qualquer tipo de geometria. No entanto, a aplicação de tais métodos não é trivial, podendo gerar elevado custo computacional.



Nas últimas décadas, têm sido desenvolvidos métodos que resultam em modelos e análises mais simples, conhecidos como métodos sem malhas, do inglês *meshfree* ou *meshless*. Tais métodos possibilitam a interpolação ou a construção de relações funcionais a partir apenas das informações de dados dispersos, entre os quais não existem relações de conectividade pré-definidas (Tiago e Leitão, 2002).

Uma das abordagens possíveis para os métodos sem malhas é feita a partir da utilização das Funções de Base Radial (FBRs).

As FBRs foram inicialmente utilizadas por Hardy (1971) na interpolação de dados dispersos. As primeiras tentativas de se usar FBRs para a solução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais foram realizadas por Kansa (1990a,b), que apresentou um método assimétrico de colocação. Kansa (1990b) utilizou a FBR multiquádrica para aproximação espacial envolvendo equações diferenciais parciais parabólicas, hiperbólicas e elípticas, encontrando resultados bastante precisos. Concluiu que, comparado ao método das diferenças finitas, a sua proposta era mais eficiente, uma vez que requeria menor número de operações para atingir o mesmo grau de precisão dos resultados.

Em 1997, outra abordagem para a solução de equações diferenciais utilizando FBRs foi apresentada por Fasshauer (1997) e, posteriormente, foi utilizada por Larsson e Fornberg (2003a) e Power (2002). Esta abordagem, baseada na interpolação de Hermite, apresenta como vantagem o fato de a matriz de interpolação ser simétrica. Mas a abordagem proposta por Kansa (1990b), é de implementação mais simples, pois requer um menor número de derivadas da função básica. No entanto, todos esses métodos aplicam as FBRs de forma global, ou seja, os suportes dos nós compreendem todo o domínio, gerando, com o aumento de nós, sistemas de equações lineares mal-condicionados. Para problemas complexos que necessitam da colocação de um grande número de nós, o problema de mal-condicionamento é praticamente inevitável.

Em 2003, Shu *et al.* (2003) apresentaram o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR), que utiliza as FBRs como funções

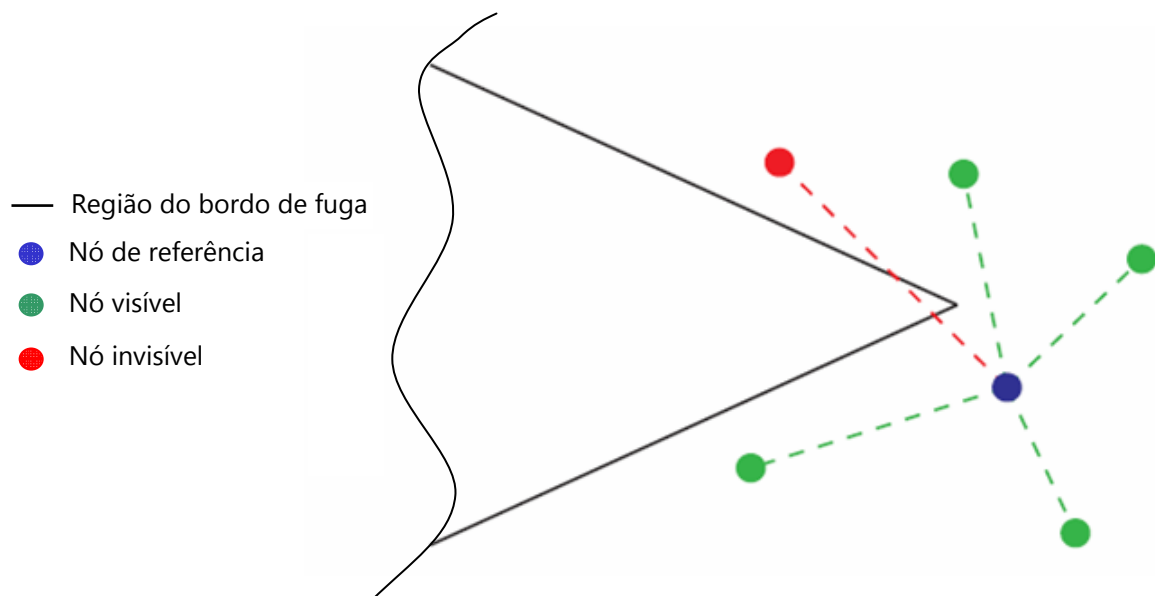
interpoladoras no processo de quadratura diferencial local. O método é flexível, versátil e de implementação relativamente simples. Por apresentar uma abordagem local, reduz o custo computacional e evita o problema de mal-condicionamento dos sistemas de equações lineares, quando é grande o número de pontos distribuídos no domínio. Para a sua aplicação, os pontos podem ser distribuídos no domínio de forma estruturada (malha estruturada), não-estruturada (malhas não-estruturadas) ou aleatoriamente. O método é semelhante ao método tradicional das diferenças finitas e preserva a característica *meshless*, uma vez que basta distribuir uma nuvem de pontos para a sua aplicação. Além disso, pode ser utilizado em problemas com diversas dimensões espaciais, sendo também possível o cálculo de operadores e derivadas parciais de altas ordens (Shen, 2010, Santos, 2016).

A ideia do MQDL-FBR foi, segundo Bayona *et al.* (2010), desenvolvida independentemente por Shu *et al.* (2003), Wright (2003) e Cecil *et al.* (2004).

Esta tese utiliza o MQDL-FBR para simular o escoamento potencial em torno de corpos de geometria arbitrária, a saber: o cilindro, duas elipses com razões de aspecto distintas, aerofólios Joukowski simétricos e o aerofólio NACA 0012. São utilizadas duas funções de base radial e são avaliadas as influências dos valores do parâmetro de forma das FBRs e do número de pontos distribuídos no domínio físico, na precisão dos resultados numéricos. Para a distribuição dos pontos, são geradas malhas estruturadas, utilizando o método diferencial elíptico e são avaliados os parâmetros envolvidos nesta geração.

A opção por gerar uma malha estruturada para obter a distribuição de pontos no domínio computacional, deve-se a algumas dificuldades inerentes à utilização de nuvens de pontos ou distribuição a partir da geração de malhas não-estruturadas. Restrições acontecem com relação à escolha de pontos da nuvem, quando um nó de referência está na proximidade da região de bordo de fuga de um perfil aerodinâmico (Ramos, 2010). O perfil é considerado fora do domínio computacional e um ponto de referência da nuvem não pode possuir suporte que cruze o perfil, conforme ilustrado na Figura 1.1. Nguyen *et al.* (2008) definiram um critério para a

seleção de nós, conhecido como *Visibility Method* (Método da Visibilidade). Um raio é calculado entre o ponto de referência e o possível ponto de suporte. Se o raio cruzar o perfil, o nó não pode ser um nó de suporte, porque ele é invisível. Caso os nós invisíveis sejam utilizados como nós de suporte, a solução perde precisão sendo que, em alguns casos, pode resultar em uma solução divergente. A utilização de uma malha não-estruturada para obter a distribuição de pontos também apresenta outras desvantagens. Apesar de a sua geração ser mais simples, o controle na geração normalmente limita-se às fronteiras físicas e é necessário um maior número de informações para serem armazenadas e recuperadas, (Zheleznyakova e Surzhikov (2013)). Buscando um menor custo computacional, ou seja, menor memória e tempo de processamento requeridos, fez-se, assim, a opção por obter a distribuição de pontos no domínio computacional a partir da geração de uma malha estruturada. Uma vez gerada a malha, são utilizados os pontos de interseção como nós no domínio físico irregular que é mapeado para um domínio computacional regular para a aplicação do MQDL-FBR. Em função da redução do custo computacional, fez-se também a opção por uma estrutura de suporte fixa e centrada.



**Figura 1.1:** Nó de referência na proximidade do bordo de fuga de um perfil, Método da Visibilidade, Ramos (2010)

## 1.2 Revisão de Literatura

### 1.2.1 Escoamento Potencial em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária

Diversos trabalhos de simulações de escoamentos em torno de corpos de geometria arbitrária são encontrados na literatura, utilizando diferentes métodos numéricos.

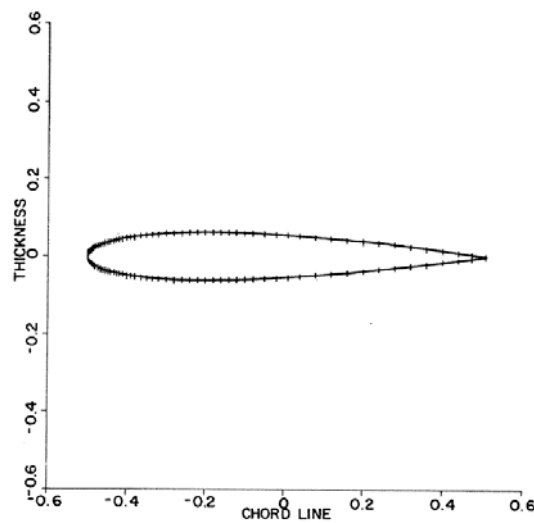
Thames *et al.* (1977), utilizando o sistema de coordenadas curvilíneas (SCC), coincidente com as fronteiras, avaliaram o escoamento viscoso, incompressível e bidimensional, em torno de corpos de geometria arbitrária, utilizando a formulação função-corrente/vorticidade. Para a solução numérica, as funções foram aproximadas utilizando o método DF. Os resultados obtidos para a placa plana semi-infinita apresentaram ótima concordância com a solução de Blasius para a camada-limite. Na segunda parte do trabalho, utilizando o mesmo SCC, foi avaliado o escoamento potencial em torno de aerofólios Karman-Trefftz. Excelente concordância foi obtida quando comparados os resultados numéricos com a solução analítica.

Carey e Kim (1983) aplicaram o Método de Elementos de Contorno para o escoamento potencial incompressível em torno de um aerofólio NACA 0012, para determinação dos coeficientes de pressão e de sustentação. Foi utilizada uma distribuição de elementos não uniforme com 117 nós. A Figura 1.2 ilustra a distribuição de elementos no aerofólio utilizada e a Figura 1.3 apresenta um detalhe da discretização na região próxima ao bordo de ataque do aerofólio.

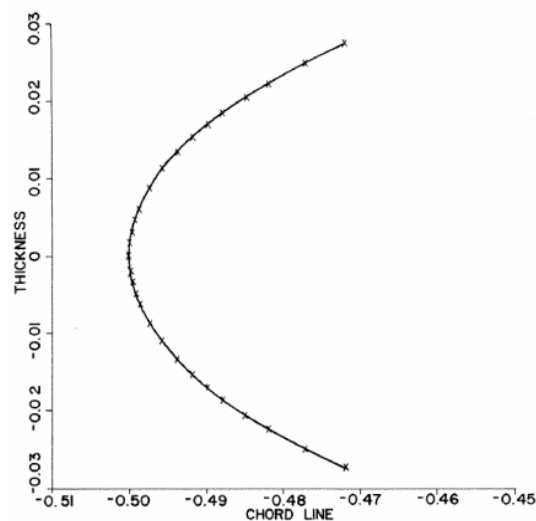
Os resultados para o coeficiente de pressão, obtidos para as superfícies superior e inferior do aerofólio NACA 0012, para diferentes ângulos de ataque,  $\alpha_{\infty}$ , estão ilustrados na Figura 1.4.

Os coeficientes de sustentação foram obtidos para ângulos de ataque de  $0^\circ$  a  $20^\circ$  e comparados com resultados fornecidos por Abbott e Doenhoff (1959). Para valores do ângulo de ataque abaixo de  $14^\circ$ , a concordância dos resultados foi

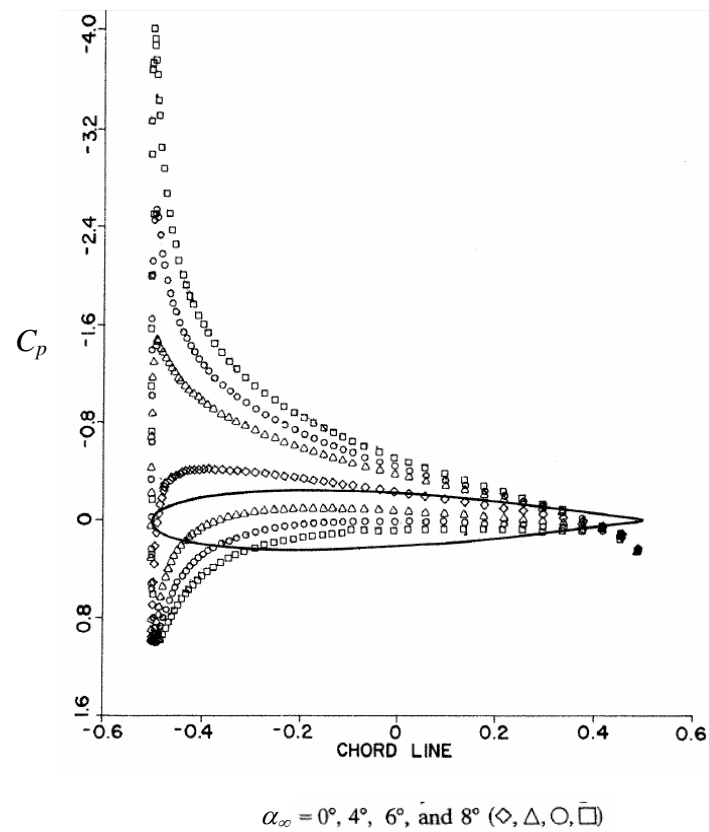
excelente. Para altos valores do ângulo de ataque, maiores de  $14^\circ$ , os autores justificaram a não concordância dos resultados, pela possível separação do escoamento, tornando inválido o modelo matemático para escoamento potencial utilizado. A Figura 1.5 ilustra a comparação dos resultados obtidos numericamente por Carey e Kim (1983) com os resultados experimentais fornecidos por Abbott e Doenhoff (1959).



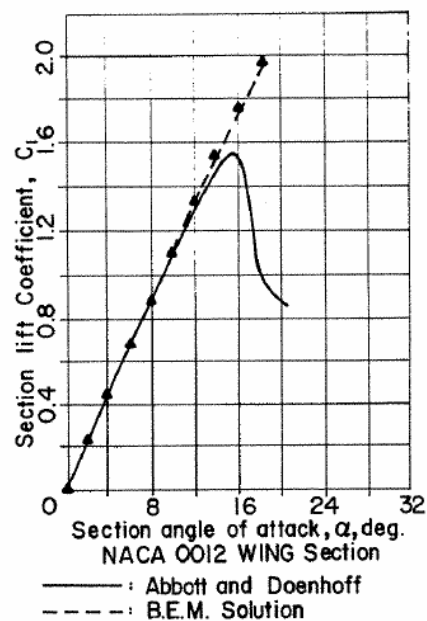
**Figura 1.2:** Discretização do aerofólio NACA 0012, utilizada por Carey e Kim (1983)



**Figura 1.3:** Detalhe da discretização na região próxima ao bordo de ataque do aerofólio NACA 0012 utilizada por Carey e Kim (1983)

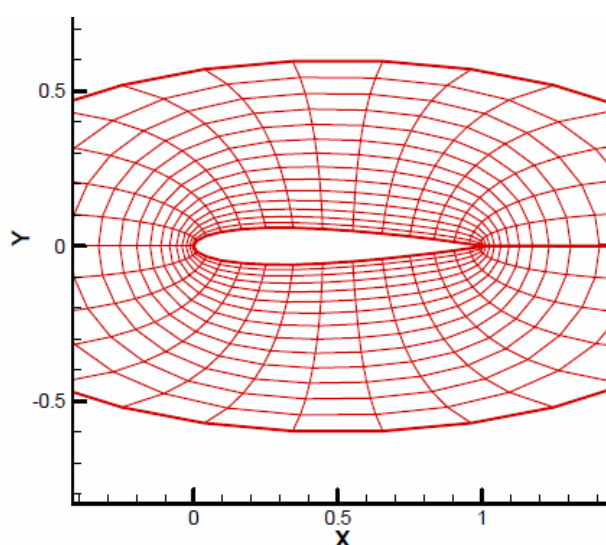


**Figura 1.4:** Distribuição do coeficiente de pressão nas superfícies superior e inferior do NACA 0012, para diversos ângulos de ataque, obtida por Carey e Kim (1983)



**Figura 1.5:** Comparação dos coeficientes de sustentação obtidos numericamente por Carey e Kim (1983) com os resultados experimentais fornecidos por Abbott e Doenhoff (1959)

Ferreira e Fico (2004) simularam o escoamento em torno de aerofólios, utilizando uma malha tipo "O", gerada a partir do método diferencial elíptico. As equações governantes foram solucionadas numericamente, utilizando a técnica de volumes finitos. A malha utilizada para as simulações, de 30 x 15 pontos, está ilustrada na Figura 1.6.

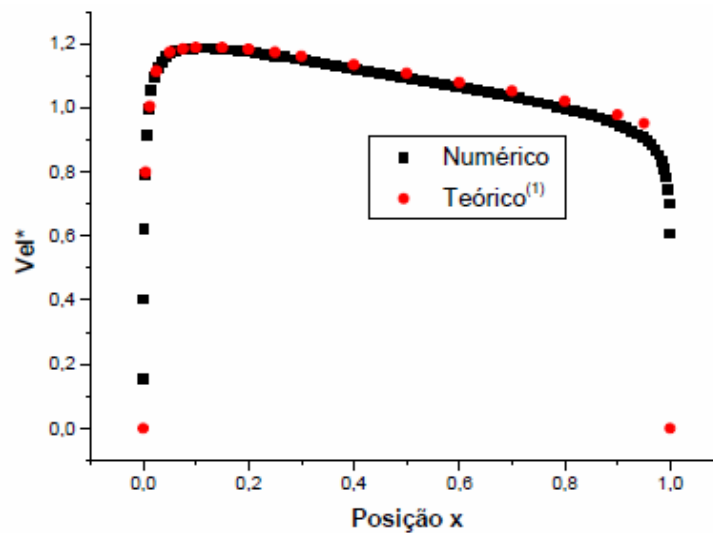


**Figura 1.6:** Malha em torno do aerofólio NACA 0012, utilizada por Ferreira e Fico (2004)

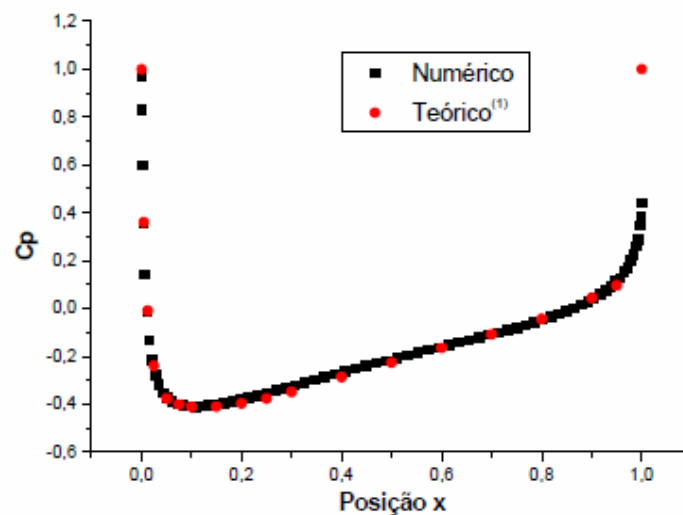
Os resultados obtidos para velocidade e coeficiente de pressão na superfície do aerofólio foram comparados com os resultados apresentados por Abbott e Doenhoff (1959), para ângulo de ataque nulo. Os gráficos comparativos estão ilustrados nas Figuras 1.7 e 1.8. Os autores concluíram que os resultados numéricos encontrados foram precisos, com exceção daqueles obtidos na região próxima ao bordo de fuga. Como o modelo utilizado pelos autores não considerou a viscosidade, os mesmos utilizaram dados teóricos do escoamento potencial para comparação.

Pereira (2005) analisou o desempenho do Método dos Painéis (MP), com diferentes tipos de singularidades no escoamento potencial e incompressível em torno de aerofólios da família van de Vooren. Diversos tipos de singularidades foram comparados, bem como as suas distribuições. Os resultados obtidos para o coeficiente de sustentação e a distribuição do coeficiente de pressão sobre o

aerofólio foram comparados à solução analítica, apresentando boa concordância. O efeito da curvatura dos painéis sobre o desempenho do método foi avaliado.



**Figura 1.7:** Comparação entre o valor numérico da velocidade na superfície do aerofólio obtido por Ferreira e Fico (2004) e o valor teórico fornecido por Abbot e Doenhoff (1959)

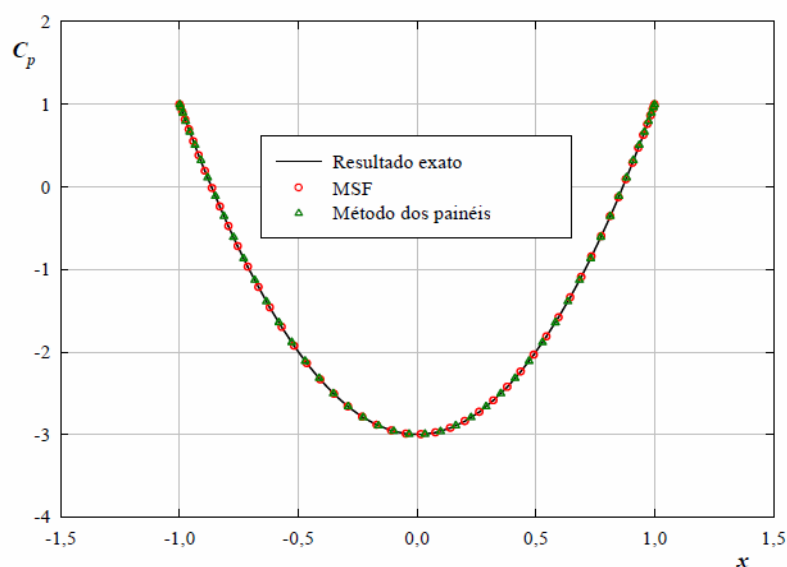


**Figura 1.8:** Comparação entre o valor numérico do coeficiente de pressão na superfície do aerofólio obtido por Ferreira e Fico (2004) e o valor teórico fornecido por Abbot e Doenhoff (1959)

Lima (2010) utilizou o Método das Soluções Fundamentais (MSF) baseado em vórtices, para a solução de problemas bidimensionais de aerodinâmica, utilizando a equação de Laplace para a função-corrente. Verificou que os resultados obtidos



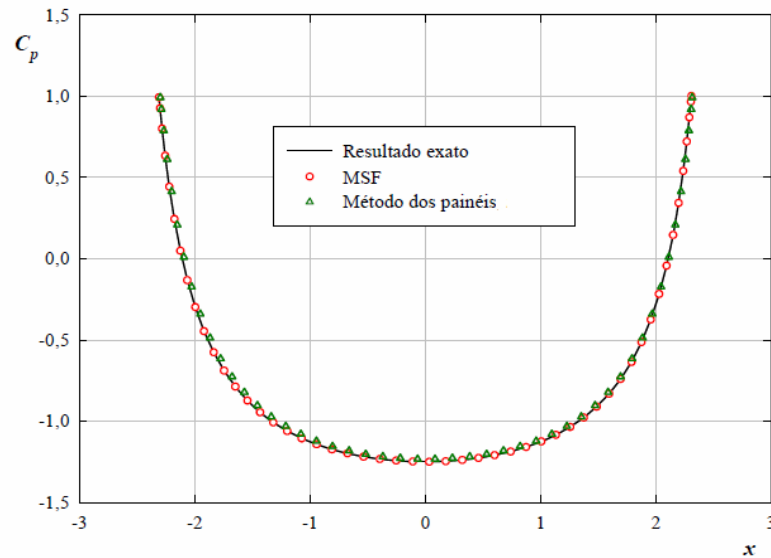
foram precisos e que o método apresentou boa convergência. Concluiu também que o MSF é de fácil implementação, permite a combinação de várias singularidades, apresenta baixo custo computacional e que, a utilização de variáveis complexas, facilita ainda mais a sua aplicação. No entanto, cita algumas desvantagens, tais como: em corpos esbeltos e com região próxima ao bordo de fuga aguda ou afilada, a distribuição das singularidades não é trivial. Além disso, o MSF mostra-se muito sensível às variações de curvatura no contorno do corpo. Alguns exemplos foram apresentados para ilustrar a precisão do MSF baseado em vórtices, quando comparado com o MP e com a solução exata, quando existente. As Figuras 1.9 e 1.10 ilustram os gráficos comparativos para um cilindro circular de raio unitário e para uma elipse com razão de aspecto de 0,5. Em ambos os casos, foram utilizados no MSF 100 pontos no contorno do corpo, com um fator de distância de 0,8 e no MP foram utilizados 96 painéis.



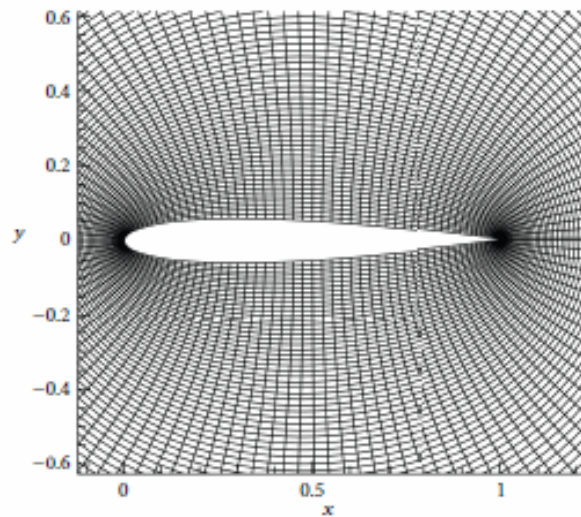
**Figura 1.9:** Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular, Lima (2010)

Mohebby e Sellier (2014) propuseram um método baseado no esquema de DF aplicado numa malha tipo "O", gerada pelo método diferencial elíptico, para avaliar o escoamento potencial em torno de um aerofólio. Os resultados obtidos apresentaram uma ótima precisão, comparados com aqueles da solução analítica e

do método dos painéis. A Figura 1.11 ilustra a malha gerada pelos autores que, utilizaram para distribuição inicial dos pontos a interpolação transfinita.



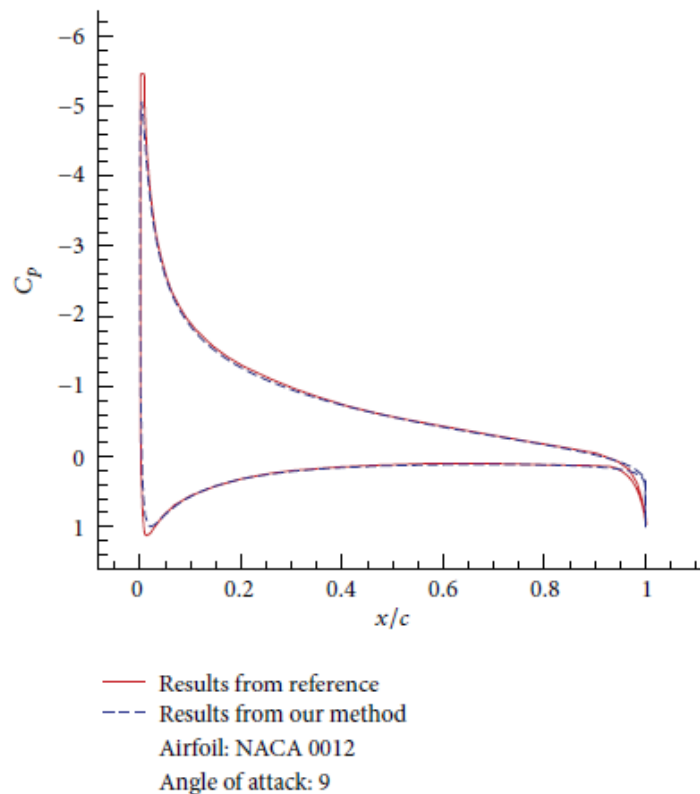
**Figura 1.10:** Distribuição de pressão em torno de uma elipse com razão de aspecto de 0,5 sem incidência, Lima (2010)



**Figura 1.11:** Malha tipo "O" gerada utilizando o método diferencial elíptico, Mohebbi e Sellier (2014)

A validação dos resultados foi feita comparando a distribuição do coeficiente de pressão, obtida nas simulações, com resultados teóricos ou resultados obtidos pelo MP, para diversos aerofólios NACA de quatro dígitos. A Figura 1.12 ilustra a

comparação dos resultados obtidos para o coeficiente de pressão com os resultados fornecidos por Anderson (1985), para o aerofólio NACA 0012, com um ângulo de ataque de  $9^\circ$ . Os autores obtiveram esses resultados numéricos utilizando a malha tipo "O" de 155 x 155 pontos.



**Figura 1.12:** Comparação da distribuição do coeficiente de pressão obtida numericamente por Mohebbi e Sellier (2014) com resultados fornecidos por Anderson (1985)

### 1.2.2 O Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR)

O Método de Quadratura Diferencial (MQD) foi inicialmente proposto por Bellman *et al.* (1972), seguindo a ideia de quadratura integral. Essencialmente, o método aproxima as derivadas parciais de uma função desconhecida através de somas ponderadas de valores da função nos pontos discretos do domínio. Os coeficientes de ponderação são calculados utilizando funções de base polinomiais ou trigonométricas e apresenta também uma abordagem global. Portanto, gera sistemas

de equações lineares de baixa esparsidade e mal-condicionados, ficando então, limitado a aplicações com pequeno número de pontos colocados no domínio.

Shu *et al.* (2003) apresentaram o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR), utilizando as FBRs como funções interpoladoras no processo de quadratura diferencial, aplicado localmente. Ou seja, para cada ponto do domínio (nó de referência), consideraram uma região de suporte e simularam o fenômeno da convecção natural numa cavidade quadrada, considerando uma distribuição irregular de nós no domínio. Somente nas regiões próximas às fronteiras, consideraram uma distribuição ortogonal de pontos, para aproximar as derivadas utilizando diferenças finitas para frente de segunda-ordem. Os resultados encontrados foram próximos aos obtidos por outros pesquisadores que utilizaram o método das diferenças finitas.

Ding *et al.* (2006) aplicaram o MQDL-FBR para problemas de escoamento viscoso, incompressível, tridimensional e não-permanente. Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com resultados disponíveis na literatura. Os autores ressaltam que um problema na aplicação do método é a escolha do valor adequado do parâmetro de forma da FBR a ser utilizado e que, a escolha deste valor depende da realização de testes e da experiência do usuário final.

Tota e Wang (2007) aplicaram o MQDL-FBR para escoamentos compressíveis, não viscosos e em regime permanente. Utilizaram uma distribuição randômica de pontos dispersos, sem nenhuma relação ou conectividade pré-definidas. Validaram os resultados a partir de diversas aplicações em escoamentos compressíveis e bidimensionais e concluíram que o MQDL-FBR é qualitativamente e quantitativamente apropriado para a solução de escoamentos compressíveis.

Soleimani *et al.* (2010) aplicaram o MQDL-FBR para a discretização espacial em problemas bidimensionais de condução de calor não-permanente. Os resultados foram comparados com resultados obtidos pelo método dos EF e demonstraram que o método é preciso para problemas de transferência de calor, mesmo para geometrias complexas irregulares.

Yongyuan (2010) procurou avaliar a eficiência do MQDL-FBR. Inicialmente, apresentou um método que utilizava o esquema de diferenças finitas, mas utilizando a FBR multiquádrica como função de aproximação, com o objetivo de avaliar a influência do parâmetro de forma na precisão dos resultados. Na segunda parte, aplicou o MQDL-FBR, utilizando um algoritmo para adaptação do suporte local, para simular o escoamento bidimensional em problemas com contornos curvos, utilizando pontos obtidos de uma malha ajustada ao corpo (*body-fitted grid*). Depois, aplicou um esquema híbrido, no qual combinava a aplicação do MQDL-FBR nas regiões próximas às fronteiras curvas e o método tradicional de diferenças finitas nas regiões do domínio afastadas das fronteiras, em escoamentos bidimensionais e tridimensionais. Os resultados obtidos foram corroborados pelos resultados disponíveis na literatura e o esquema híbrido mostrou-se mais eficiente computacionalmente que o esquema MQDL-FBR aplicado em todo o domínio. Finalmente, o autor aplicou o MQDL-FBR em problemas tridimensionais de escoamentos em fronteiras curvas, para avaliar a influência do número de pontos de suporte e do valor do parâmetro de forma da FBR multiquádrica, na precisão dos resultados. Percebeu que a precisão das soluções numéricas e que a taxa de convergência podiam ser melhoradas, aumentando o valor do parâmetro de forma da FBR multiquádrica e a dimensão do suporte local. Finalmente, concluiu que, as utilizações do algoritmo de suporte local adaptativo e do esquema híbrido melhoraram a eficiência computacional. O autor ressalta no seu trabalho que o MQDL-FBR, por ser um método local, pode ser aplicado a problemas de larga escala e que, por aproximar as derivadas e não a função tem boa aplicação em problemas lineares e não lineares.

Bayona *et al.* (2011) propuseram um algoritmo para calcular o valor apropriado do parâmetro de forma, que minimiza o erro de aproximação, quando utilizado o MQDL-FBR para a solução de uma equação diferencial parcial. Mostraram que, ao utilizar o valor correto do parâmetro de forma, pode-se melhorar a precisão dos

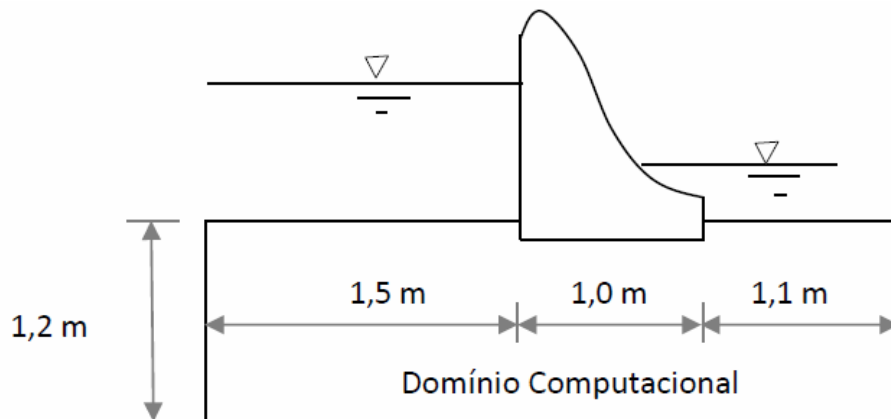
resultados de uma ou duas ordens em relação ao método das diferenças finitas. Utilizaram a FBR Multiquádrica, mas ressaltaram que o algoritmo pode ser utilizado quando considerada qualquer FBR que tenha um parâmetro de forma na sua definição.

Soleimani *et al.* (2011) utilizaram o MQDL-FBR para obter a distribuição e os gradientes de temperatura num problema de condução de calor bidimensional, em uma cavidade quadrada, com aquecimento não uniforme. Os resultados foram comparados com os resultados obtidos quando aplicado um método analítico e mostraram boa concordância.

Hashemi e Hatam (2011) utilizaram o MQDL-FBR para simulação da infiltração transiente bidimensional numa estrutura hidráulica, considerando uma variação linear do nível da água à montante e, utilizando para a discretização temporal, o método alfa de aproximação. Como condição inicial para a simulação transiente, foi utilizada a solução em regime permanente. Os autores utilizaram para monitoramento do valor do parâmetro de forma adequado, o número de condicionamento da matriz dos coeficientes. Os resultados obtidos para a carga hidráulica foram corroborados por trabalhos disponíveis na literatura, que utilizaram o método dos elementos finitos.

Dehghan e Nikpour (2013) aplicaram o MQDL-FBR e utilizaram a FBR multiquádrica para resolver problemas de contorno de segunda ordem. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com resultados de soluções analíticas e resultados disponíveis na literatura que utilizaram o método das DF e outros, obtendo boa concordância.

Vilela *et al.* (2015) utilizaram o MQDL-FBR para um problema similar a um dos problemas estudados por Hashemi e Hatam (2011), considerando agora, não só uma variação linear, mas também uma variação exponencial do nível da água à montante da estrutura hidráulica. A Figura 1.13 ilustra o domínio computacional considerado, no qual foi realizada uma distribuição uniforme de 481 pontos.



**Figura 1.13:** Domínio computacional utilizado, Hashemi e Hatam (2011), Vilela *et al.* (2015)

A equação governante utilizada é dada por (Hashemi e Hatam, 2011)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + F = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.1)$$

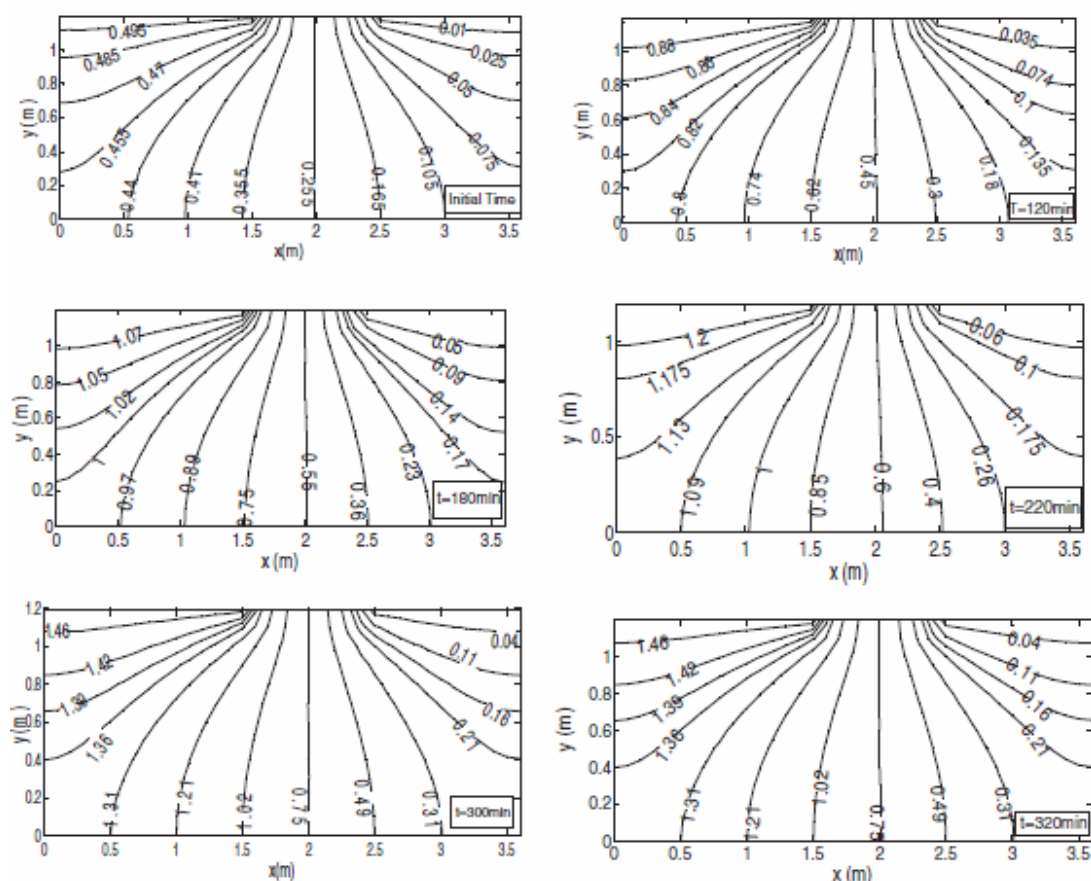
onde  $h$  é a carga hidráulica,  $F$  o termo fonte,  $S_s$  o armazenamento específico e  $K$  a condutividade hidráulica.

Para solucionar o sistema de equações para determinação dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR, foi utilizado o Método de Eliminação de Gauss com pivotamento. Para a solução do sistema de equações para determinação do valor da carga hidráulica, foi utilizada a ferramenta de fatoração LDU (*Factorization Lower-Diagonal-Upper*) do *software* MATLAB<sup>®</sup>, devido à esparsidade da matriz do MQDL-FBR.

Avaliaram, inicialmente, em regime permanente, a influência do parâmetro de forma da FBR multiquádrica e a dimensão do suporte local na precisão dos resultados obtidos para a carga hidráulica. No regime transiente, utilizaram o método alfa para a discretização temporal, procurando avaliar a influência dos esquemas Crank-Nicolson, Galerkin e Euler, que são incondicionalmente estáveis. Os resultados foram comparados com outros disponíveis na literatura e não foram observadas

variações significativas na precisão quanto aos esquemas de discretização temporal, tanto para a variação linear quanto para a variação exponencial do nível à montante.

A Figura 1.14 ilustra os resultados obtidos por Hashemi e Hatan (2011) para o problema caracterizado pelo domínio computacional apresentado na Figura 1.13. Foram considerados na obtenção destes resultados o esquema de discretização temporal de Crank-Nicolson, uma variação linear do nível da água a montante da estrutura e também, propriedades do solo constantes, a saber, coeficiente de armazenamento específico igual a  $10^{-5} \text{ m}^{-1}$  e condutividade hidráulica igual a  $1,7 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ .

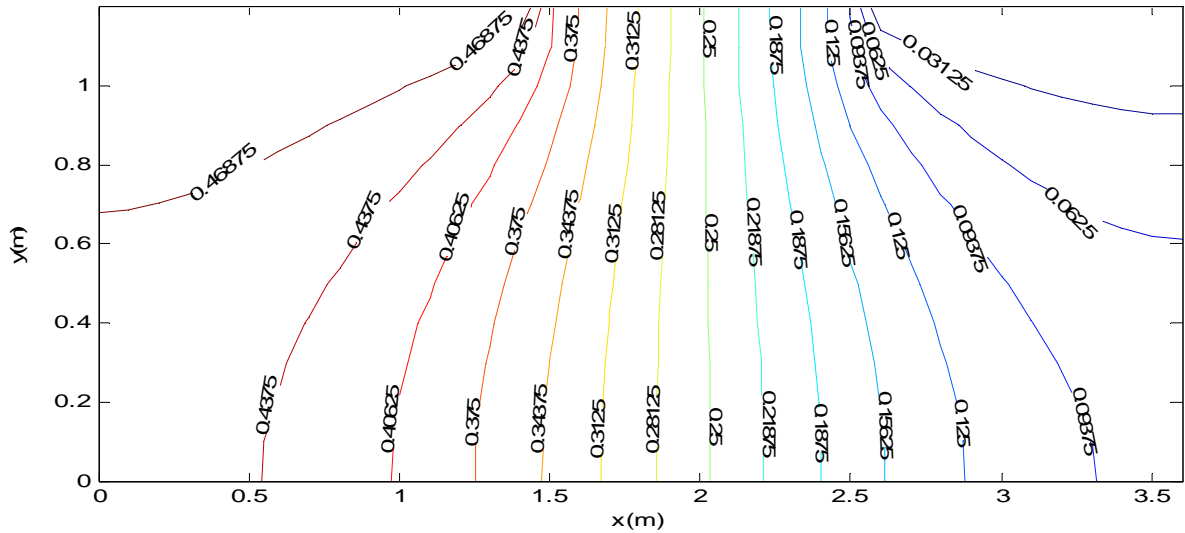


**Figura 1.14:** Resultados da carga hidráulica obtidos por Hashemi e Hatamm (2011)

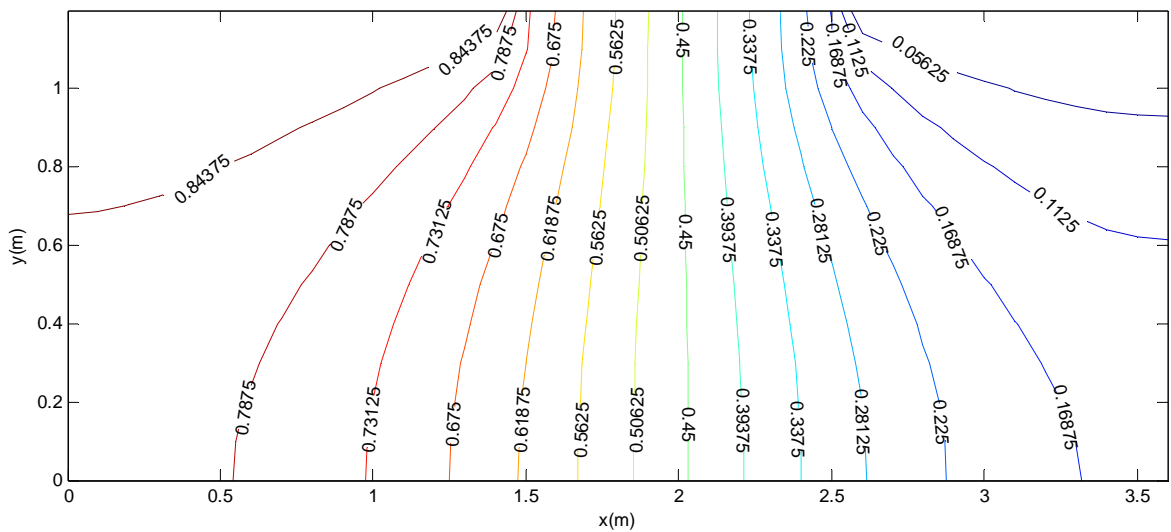
Utilizando os mesmos domínio computacional e parâmetros adotados por Hashemi e Hatam (2011) para obtenção dos resultados ilustrados na Figura 1.14, Vilela *et al.* (2015) obtiveram os resultados ilustrados nas Figuras 1.15 a 1.18.



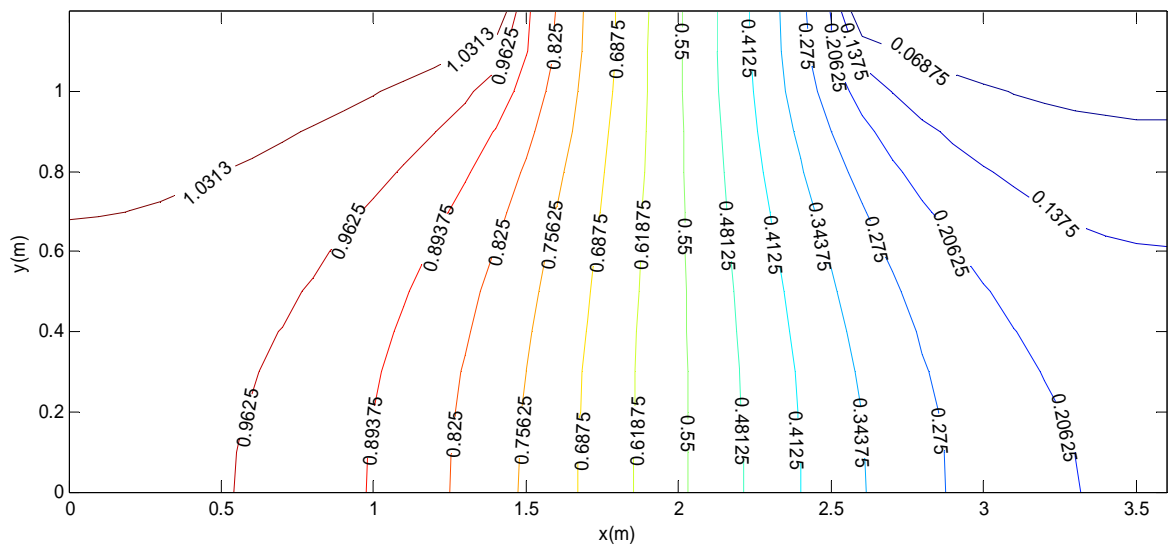
Quanto aos parâmetros de simulação, os melhores resultados foram obtidos para um parâmetro de forma da FBR multiquádrica igual a 0,7, com um suporte local de 13 nós, sendo este o suporte de maior dimensão testado.



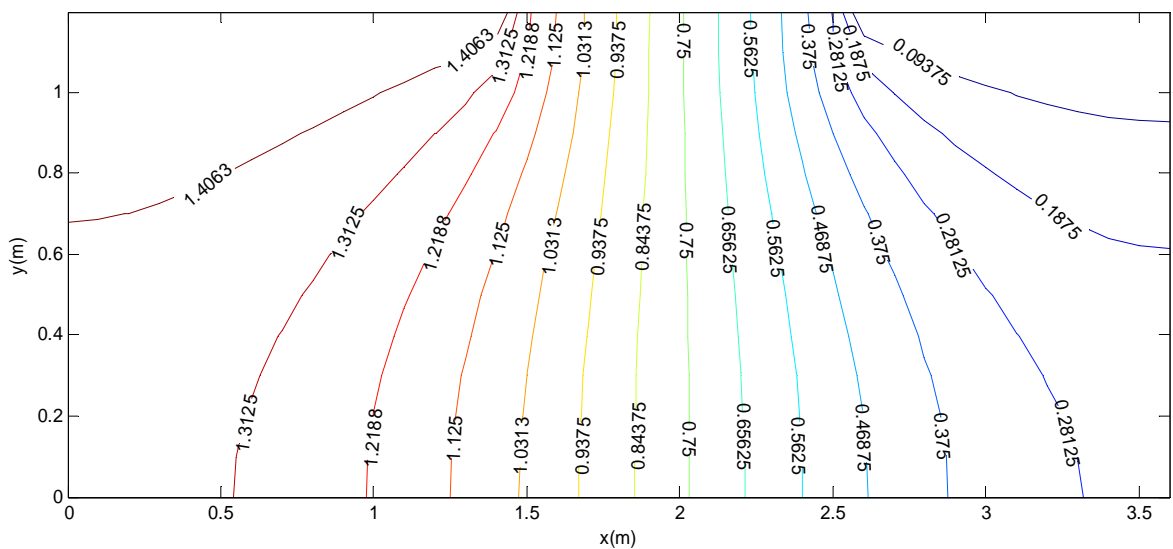
**Figura 1.15:** Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela *et al.* (2015), condição inicial



**Figura 1.16:** Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela *et al.* (2015),  $t = 120$  min



**Figura 1.17:** Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela *et al.* (2015),  $t = 180$  min



**Figura 1.18:** Resultados do contorno da carga hidráulica obtidos por Vilela *et al.* (2015),  $t = 300$  min

### 1.3 Objetivos do Trabalho

O Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial tem se mostrado bastante eficiente, apresentando baixo custo computacional em diversas aplicações. Além disso, o método torna-se bastante interessante por poder ser

aplicado a geometrias complexas, por evitar o mal-condicionamento dos sistemas de equações lineares ao se trabalhar com grande número de pontos, por permitir abordar derivadas de altas ordens e por poder ser implementado utilizando distribuições de pontos estruturadas e não-estruturadas (Santos, 2016).

O objetivo geral desta Tese de Doutorado é aplicar o MQDL-FBR para simular o escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária, buscando evidenciá-lo como potencial ferramenta para a solução de problemas na área de dinâmica dos fluidos. Para alcançar tal objetivo, foram traçados os objetivos específicos, descritos a seguir:

- Desenvolver um programa em MATLAB<sup>®</sup> para gerar uma malha estruturada tipo "O" em torno de corpos de geometria arbitrária, utilizando o método diferencial elíptico.
- Avaliar a influência dos parâmetros envolvidos na geração da malha, tais como valores das funções de controle, condição de ortogonalidade e número de pontos.
- Utilizando o *software* MATLAB<sup>®</sup>, desenvolver um programa para aplicar o MQDL-FBR no escoamento potencial em torno de corpos de geometria arbitrária. Comparar os resultados para a distribuição dos coeficientes de pressão, com resultados analíticos e/ou numéricos disponíveis na literatura.
- Avaliar a influência do valor do parâmetro de forma utilizado em duas FBRs diferentes na precisão dos resultados numéricos.
- Avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados obtidos.

## 1.4 Delineamento do Trabalho

O capítulo 2 deste trabalho apresenta as considerações sobre geração da malha computacional. São descritas as equações de transformação, a solução numérica dessas equações e a avaliação da influência dos parâmetros na geração da

malha tipo "O", a saber: as funções de controle, a condição de ortogonalidade e o número de pontos da malha.

No capítulo 3, são apresentadas algumas considerações sobre funções de base radial, bem como sobre o MQDL-FBR. Também são apresentadas as considerações físicas e matemáticas sobre o escoamento potencial em torno de um corpo de geometria arbitrária e a formulação matemática para aplicação do MQDL-FBR.

No capítulo 4, são descritos os testes numéricos realizados para aplicação do MQDL-FBR no escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária. São apresentados os resultados obtidos quando utilizadas duas funções de base radial distintas.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e as propostas para trabalhos futuros.

Por fim, são apresentados cinco apêndices: A) Fluxograma da Geração de Malha; B) Fluxograma do Programa Principal; C) Derivadas das FBRs Multiquádrica e TPS Modificada; D) Resultados dos Testes Numéricos Realizados Utilizando a FBR TPS Modificada e E) Resultados dos Testes Numéricos Realizados para a Elipse com Razão de Aspecto 0,1.

## Capítulo 2

### A Malha Computacional

Este capítulo tem como objetivo apresentar as considerações sobre a geração da malha, a formulação matemática e a transformação das equações para a geração, bem como, apresentar uma análise da influência dos parâmetros envolvidos no processo. São geradas malhas estruturadas tipo "O" em torno de aerofólios Joukowski simétricos e do aerofólio NACA 0012.

#### 2.1 Algumas Considerações

A solução numérica de problemas físicos, descritos por equações diferenciais, tem na sua precisão uma influência direta da forma de discretização do espaço físico. Tal discretização consiste na geração de uma malha através da qual são distribuídos pontos no espaço contínuo, nos quais os valores numéricos da função devem ser obtidos (Mohebbi, 2014). Problemas de escoamento de fluidos são característicos desta situação.

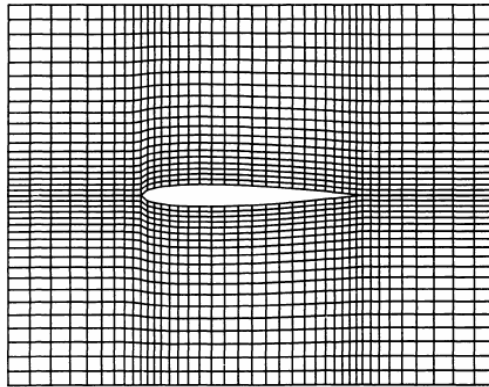
A distribuição de pontos no domínio físico pode ser feita a partir de malhas que não se ajustam ao corpo ou a partir de malhas que se ajustam ao corpo (*body-fitted grid*), Sonar (1989).

Nos problemas que envolvem geometrias complexas, a malha deve ser gerada de maneira a se adaptar às complexidades, sendo importante ressaltar que, em sistemas de equações diferenciais, as condições de contorno têm influência dominante (Thompson *et al.*, 1974, Hirsch, 2007). Assim, deve-se gerar a malha que se ajusta ao corpo (*body-fitted grid*) e, para tal, deve ser usado o sistema coordenado generalizado coincidente com as fronteiras (*boundary-fitted coordinates*). Quando essas malhas são utilizadas em problemas de escoamentos de fluidos, os corpos físicos inseridos no campo de escoamento são partes da malha, ou seja, todos os pontos localizados na superfície desses corpos são pontos da malha. Uma malha cartesiana, na qual as linhas são linhas retas ortogonais, é uma malha que não se ajusta aos corpos de geometria complexa inseridos no campo de escoamento.

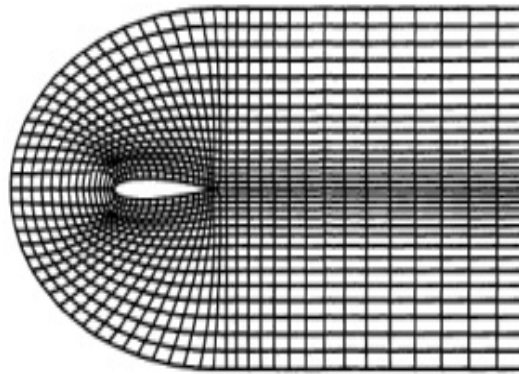
A variação suave da densidade de pontos distribuídos no domínio e a maior densidade de pontos nas regiões onde são esperados os maiores gradientes da função são características desejáveis, tanto para as malhas, quanto para a aplicação do MQDL-FBR. Além disso, as linhas da malha devem se aproximar da ortogonalidade.

Malhas que se ajustam aos corpos podem ser classificadas em não-estruturadas e estruturadas. As não-estruturadas apresentam como desvantagem o fato de que cada ponto só pode ser identificado pelos pontos vizinhos a ele, uma vez que não existe uma ordenação na estrutura da malha. No entanto, para algumas geometrias complexas, a sua geração é mais simples do que a geração da malha estruturada.

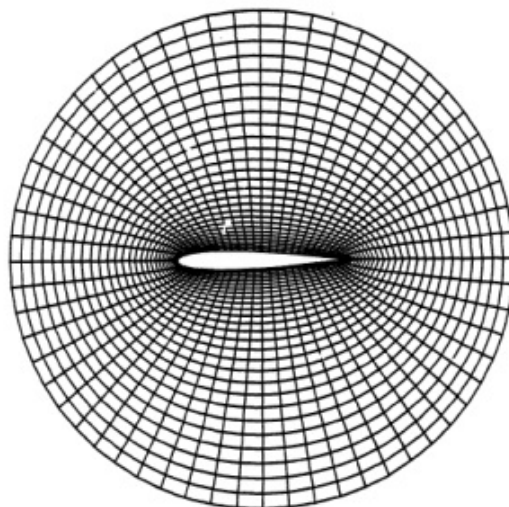
Para o desenvolvimento do programa computacional, as malhas estruturadas apresentam vantagens com a ordenação dos elementos. Nessas malhas, em função da orientação das linhas, as diferentes configurações são denominadas utilizando letras com as quais se assemelham (Siladic, 1987 e Carstens, 1988). Em alguns problemas pode ser indicada, inclusive, a combinação de diferentes configurações. As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 ilustram respectivamente as configurações tipo "H", tipo "C" e tipo "O", para a malha estruturada gerada em torno de um aerofólio NACA 0012.



**Figura 2.1:** Malha curvilínea estruturada tipo "H" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987)



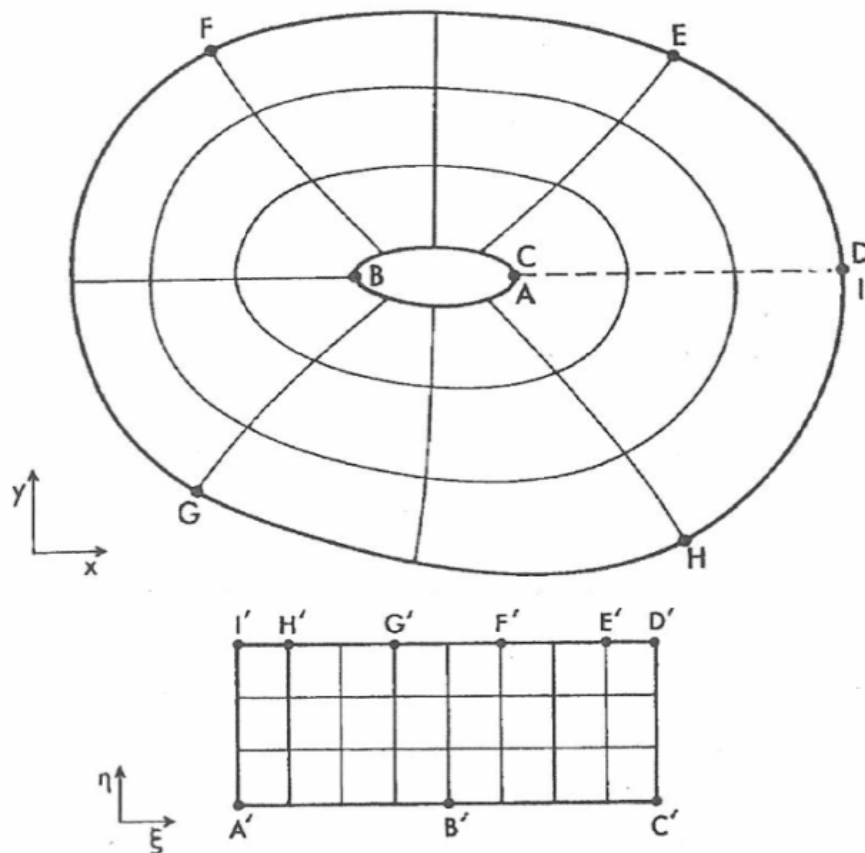
**Figura 2.2:** Malha curvilínea estruturada tipo "C" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987)



**Figura 2.3:** Malha curvilínea estruturada tipo "O" ajustada à fronteira de um aerofólio NACA 0012 (Siladic, 1987)

Para a geração da malha em torno de corpos de geometria arbitrária, a malha tipo "O" apresenta-se mais interessante, por permitir uma distribuição precisa de pontos tanto na região do bordo de ataque quanto na região do bordo de fuga de configurações aerodinâmicas, como no caso de aerofólios (Hirsch, 2007).

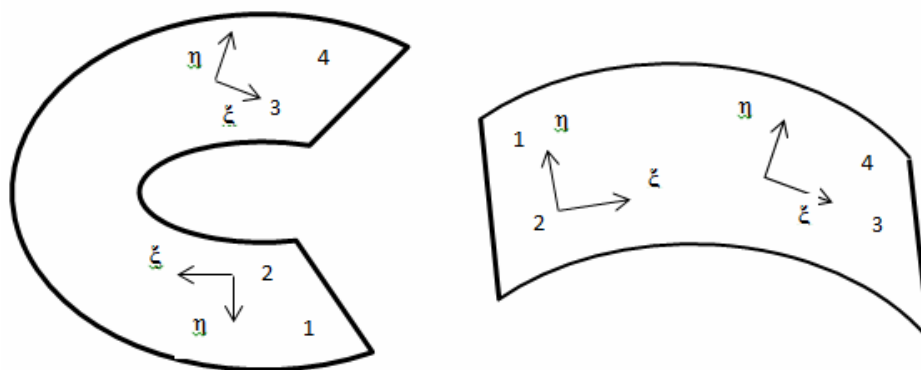
A Figura 2.4 ilustra o mapeamento utilizado, considerando uma malha tipo "O", em torno de um corpo de contorno suave.



**Figura 2.4:** Mapeamento do plano físico (malha tipo "O") para plano computacional (Fletcher, 1988)

O domínio físico é uma região multiplamente conexa, mas é transformado numa região simplesmente conexa, introduzindo um corte no mesmo, na geração da malha tipo "O". Pode-se imaginar um corte do domínio, ao redor do corpo (segmento CD), sendo transformado em um retângulo, conforme ilustrado na Figura 2.5.





**Figura 2.5:** Transformação do domínio físico – malha tipo “O” (Thompson *et al.*, 1985)

As coordenadas coincidentes dos segmentos 1-2 e 3-4 do corte tornam-se fronteiras reentrantes no domínio computacional sendo, no plano transformado, as fronteiras da esquerda e da direita, respectivamente (Sorenson, 1980 e Thompson *et al.*, 1985).

Diversos métodos para a geração da malha são apresentados na literatura, podendo ser classificados em algébricos e diferenciais (Fletcher, 1988, Tannehill *et al.*, 1997). Os métodos algébricos utilizam funções de interpolação para o cálculo das coordenadas dos nós internos e são mais simples de implementar. Apresentam como desvantagem a tendência a transmitir as informações das fronteiras para o interior do domínio, o que pode ser indesejável se as fronteiras forem descontínuas ou pouco suaves. Os métodos diferenciais utilizam sistemas de equações diferenciais, as quais estabelecem uma relação matemática entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas computacionais. São mais elaborados para implementação e utilizam maior tempo computacional. No entanto, são mais robustos e os parâmetros da malha são relativamente mais fáceis de serem controlados (Lopes *et al.*, 2011). São amplamente utilizados em problemas de escoamento bidimensionais (Hirsch, 2007).

Dentre os métodos diferenciais, destaca-se o método diferencial elíptico, utilizado nesta Tese de Doutorado, que consiste em obter a solução de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas, no plano físico, com condições de contorno de Dirichlet (Thompson *et al.*, 1974, Sorenson e Steger 1977 e Sonar, 1989).

Uma das coordenadas deve ser especificada igual a uma constante na superfície do corpo e igual à outra constante na fronteira externa do domínio físico. A outra coordenada, deve variar monotonicamente em torno do corpo. O método é utilizado para mapear o domínio físico irregular do plano  $xy$  para o domínio computacional regular do plano  $\xi\eta$ . Apesar deste método não garantir a ortogonalidade e a conformidade da malha, o mesmo permite um bom controle dos pontos no interior da malha e fornece soluções suaves (Maliska, 1995).

## 2.2 Formulação Matemática para a Geração da Malha

A equação diferencial parcial mais utilizada para a geração da malha é a equação de Poisson, na forma apresentada nas Equações (2.1) e (2.2).

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (2.1)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

onde  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$  são funções utilizadas para controlar a distribuição dos pontos da malha.

Para que os cálculos numéricos sejam realizados no domínio computacional retangular, as variáveis dependentes e independentes são trocadas nas Equações (2.1) e (2.2), (Maliska, 1995, Hirsch, 2007), segundo a transformação

$$\xi = \xi(x, y) \quad (2.3)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2.4)$$

Assim, para uma função  $f(x, y)$ , aplicando a regra da cadeia, tem-se que as derivadas parciais de primeira ordem são

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (2.5)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad (2.6)$$

A seguir, é apresentado o desenvolvimento para a obtenção das derivadas de segunda ordem, primeiramente em relação a  $x$

$$f_{xx} = (f_{\xi} \xi_x)_x + (f_{\eta} \eta_x)_x \quad (2.7)$$

Aplicando a regra do produto na Equação (2.7), obtém-se

$$f_{xx} = f_{\xi x} \xi_x + f_{\xi} \xi_{xx} + f_{\eta x} \eta_x + f_{\eta} \eta_{xx} \quad (2.8)$$

Mas,  $f_{\xi}$  e  $f_{\eta}$  são funções de  $\xi(x,y)$  e de  $\eta(x,y)$ . Assim, aplicando a regra da cadeia, obtém-se

$$f_{xx} = [f_{\xi\xi} \xi_x + f_{\xi\eta} \eta_x] \xi_x + f_{\xi} \xi_{xx} + [f_{\eta\xi} \xi_x + f_{\eta\eta} \eta_x] \eta_x + f_{\eta} \eta_{xx} \quad (2.9)$$

ou

$$f_{xx} = f_{\xi\xi} \xi_x^2 + f_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + f_{\xi} \xi_{xx} + f_{\eta\xi} \xi_x \eta_x + f_{\eta\eta} \eta_x^2 + f_{\eta} \eta_{xx} \quad (2.10)$$

$$f_{xx} = f_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2f_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + f_{\xi} \xi_{xx} + f_{\eta\eta} \eta_x^2 + f_{\eta} \eta_{xx} \quad (2.11)$$

Então,

$$f_{xx} = f_{\xi} \xi_{xx} + f_{\eta} \eta_{xx} + \xi_x^2 f_{\xi\xi} + \eta_x^2 f_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x f_{\xi\eta} \quad (2.12)$$

Para a determinação da derivada de segunda ordem de  $f$  em relação a  $y$ , segue-se um processo análogo. Assim,

$$f_{yy} = f_{\xi y} \xi_y + f_{\xi} \xi_{yy} + f_{\eta y} \eta_y + f_{\eta} \eta_{yy} \quad (2.13)$$

Mas,  $f_{\xi}$  e  $f_{\eta}$  são funções de  $\xi(x,y)$  e de  $\eta(x,y)$ . Assim, aplicando a regra da cadeia, obtém-se

$$f_{yy} = [f_{\xi\xi} \xi_y + f_{\xi\eta} \eta_y] \xi_y + f_{\xi} \xi_{yy} + [f_{\eta\xi} \xi_y + f_{\eta\eta} \eta_y] \eta_y + f_{\eta} \eta_{yy} \quad (2.14)$$

ou

$$f_{yy} = f_{\xi\xi} \xi_y^2 + f_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + f_{\xi} \xi_{yy} + f_{\eta\xi} \xi_y \eta_y + f_{\eta\eta} \eta_y^2 + f_{\eta} \eta_{yy} \quad (2.15)$$

$$f_{yy} = f_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2f_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + f_{\xi} \xi_{yy} + f_{\eta\eta} \eta_y^2 + f_{\eta} \eta_{yy} \quad (2.16)$$

Então,

$$f_{yy} = f_{\xi} \xi_{yy} + f_{\eta} \eta_{yy} + \xi_y^2 f_{\xi\xi} + \eta_y^2 f_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y f_{\xi\eta} \quad (2.17)$$

Fazendo  $f = x$  na Equação (2.12), obtém-se

$$0 = x_{\xi} \xi_{xx} + x_{\eta} \eta_{xx} + E_1 \quad (2.18)$$

onde

$$E_1 = \xi_x^2 x_{\xi\xi} + \eta_x^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x x_{\xi\eta} \quad (2.19)$$

Fazendo  $f = y$  na Equação (2.12), obtém-se

$$0 = y_{\xi} \xi_{xx} + y_{\eta} \eta_{xx} + F_1 \quad (2.20)$$

onde

$$F_1 = \xi_x^2 y_{\xi\xi} + \eta_x^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x y_{\xi\eta} \quad (2.21)$$

Assim,

$$\begin{cases} 0 = x_{\xi} \xi_{xx} + x_{\eta} \eta_{xx} + E_1 \\ 0 = y_{\xi} \xi_{xx} + y_{\eta} \eta_{xx} + F_1 \end{cases} \quad (2.22)$$

ou

$$\begin{cases} x_{\xi} \xi_{xx} + x_{\eta} \eta_{xx} = -E_1 \\ y_{\xi} \xi_{xx} + y_{\eta} \eta_{xx} = -F_1 \end{cases} \quad (2.23)$$

que, na forma matricial, pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{xx} \\ \eta_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ -F_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.24), obtém-se

$$\xi_{xx} = \frac{-E_1 - x_{\eta} \eta_{xx}}{x_{\xi}} \quad (2.25)$$

$$\xi_{xx} = \frac{-F_1 - y_{\eta} \eta_{xx}}{y_{\xi}} \quad (2.26)$$

Então, das Equações (2.25) e (2.26), obtém-se

$$\frac{-E_1 - x_{\eta} \eta_{xx}}{x_{\xi}} = \frac{-F_1 - y_{\eta} \eta_{xx}}{y_{\xi}} \quad (2.27)$$

$$\eta_{xx} (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) = -F_1 x_\xi + E_1 y_\xi \quad (2.28)$$

$$\eta_{xx} = -\frac{F_1 x_\xi}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} + \frac{E_1 y_\xi}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (2.29)$$

Mas, das relações de transformação apresentadas em Fletcher (1988), sabe-se que

$$\frac{x_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} = \eta_y \quad (2.30)$$

$$\frac{y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} = -\eta_x \quad (2.31)$$

Então,

$$\eta_{xx} = -(E_1 \eta_x + F_1 \eta_y) \quad (2.32)$$

De forma análoga, resolvendo o sistema de equações (2.24) para  $\xi_{xx}$ , tem-se

$$\xi_{xx} = -(E_1 \xi_x + F_1 \xi_y) \quad (2.33)$$

Fazendo  $f = x$  na Equação (2.17), obtém-se

$$0 = x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} + E_2 \quad (2.34)$$

onde

$$E_2 = \xi_y^2 x_{\xi\xi} + \eta_y^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y x_{\xi\eta} \quad (2.35)$$

Fazendo  $f = y$  na Equação (2.17), obtém-se

$$0 = y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} + F_2 \quad (2.36)$$

onde

$$F_2 = \xi_y^2 y_{\xi\xi} + \eta_y^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y y_{\xi\eta} \quad (2.37)$$

Assim,

$$\begin{cases} 0 = x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} + E_2 \\ 0 = y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} + F_2 \end{cases} \quad (2.38)$$

ou

$$\begin{cases} x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} = -E_2 \\ y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} = -F_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

que, na forma matricial, pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{yy} \\ \eta_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 \\ -F_2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.40), obtém-se

$$\xi_{yy} = \frac{-E_2 - x_\eta \eta_{yy}}{x_\xi} \quad (2.41)$$

$$\xi_{yy} = \frac{-F_2 - y_\eta \eta_{yy}}{y_\xi} \quad (2.42)$$

Então, das Equações (2.41) e (2.42), obtém-se

$$\frac{-E_2 - x_\eta \eta_{yy}}{x_\xi} = \frac{-F_2 - y_\eta \eta_{yy}}{y_\xi} \quad (2.43)$$

$$\eta_{yy} (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) = -F_2 x_\xi + E_2 y_\xi \quad (2.44)$$

$$\eta_{xx} = -\frac{F_1 x_\xi}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} + \frac{E_1 y_\xi}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (2.45)$$

Recorrendo-se novamente às relações de transformação e utilizando as Equações (2.30) e (2.31), tem-se

$$\eta_{yy} = -(E_2 \eta_x + F_2 \eta_y) \quad (2.46)$$

De forma análoga, resolvendo o sistema de equações (2.40) para  $\xi_{yy}$ , tem-se

$$\xi_{yy} = -(E_2 \xi_x + F_2 \xi_y) \quad (2.47)$$

Substituindo as Equações (2.33) e (2.47) na Equação (2.1), obtém-se

$$-(E_1 + E_2) \xi_x - (F_1 + F_2) \xi_y = P(\xi, \eta) \quad (2.48)$$

Substituindo as Equações (2.32) e (2.46) na Equação (2.2), tem-se

$$-(E_1 + E_2)\eta_x - (F_1 + F_2)\eta_y = Q(\xi, \eta) \quad (2.49)$$

e fazendo

$$E_1 + E_2 = E \quad (2.50)$$

$$F_1 + F_2 = F \quad (2.51)$$

Substituindo (2.50) e (2.51) nas Equações (2.48) e (2.49), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} E\xi_x + F\xi_y = -P(\xi, \eta) \\ E\eta_x + F\eta_y = -Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2.52)$$

que, na forma matricial, se apresenta como

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P(\xi, \eta) \\ Q(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.53), obtém-se

$$F = \frac{-P(\xi, \eta) - E\xi_x}{\xi_y} \quad (2.54)$$

$$F = \frac{-Q(\xi, \eta) - E\eta_x}{\eta_y} \quad (2.55)$$

Então, das Equações (2.54) e (2.55), obtém-se

$$\frac{-P(\xi, \eta) - E\xi_x}{\xi_y} = \frac{-Q(\xi, \eta) - E\eta_x}{\eta_y} \quad (2.56)$$

$$E(\xi_y\eta_x - \xi_x\eta_y) = -\xi_y Q(\xi, \eta) + \eta_y P(\xi, \eta) \quad (2.57)$$

$$E = -\frac{\xi_y}{\xi_y\eta_x - \xi_x\eta_y} Q(\xi, \eta) + \frac{\eta_y}{\xi_y\eta_x - \xi_x\eta_y} P(\xi, \eta) \quad (2.58)$$

Das relações de transformação, sabe-se que o Jacobiano da transformação pode ser escrito como (Maliska,1995, Hirsch, 2007)

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (2.59)$$

Substituindo (2.59) na Equação (2.58), obtém-se

$$E = \frac{\xi_y}{J} Q(\xi, \eta) - \frac{\eta_y}{J} P(\xi, \eta) \quad (2.60)$$

ou

$$E = - \frac{[P(\xi, \eta) \eta_y - Q(\xi, \eta) \xi_y]}{J} \quad (2.61)$$

De maneira análoga, resolvendo o sistema de equações (2.53) para  $F$ , tem-se

$$F = - \frac{[Q(\xi, \eta) \xi_x - P(\xi, \eta) \eta_x]}{J} \quad (2.62)$$

Mas, como

$$E = E_1 + E_2 \quad (2.63)$$

e substituindo as Equações (2.19) e (2.35) em (2.63) tem-se

$$E = \xi_x^2 x_{\xi\xi} + \eta_x^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x x_{\xi\eta} + \xi_y^2 x_{\xi\xi} + \eta_y^2 x_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y x_{\xi\eta} \quad (2.64)$$

Então, (2.64) pode ser escrita como

$$\left( \xi_x^2 + \xi_y^2 \right) x_{\xi\xi} + \left( \eta_x^2 + \eta_y^2 \right) x_{\eta\eta} + 2 \left( \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \right) x_{\xi\eta} = E \quad (2.65)$$

ou

$$ax_{\xi\xi} + bx_{\eta\eta} + 2dx_{\xi\eta} = E \quad (2.66)$$

onde  $a = \xi_x^2 + \xi_y^2$ ,  $b = \eta_x^2 + \eta_y^2$  e  $d = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y$ .

De maneira análoga

$$F = F_1 + F_2 \quad (2.67)$$

e substituindo as Equações (2.21) e (2.37) em (2.67) tem-se



$$F = \xi_x^2 y_{\xi\xi} + \eta_x^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x y_{\xi\eta} + \xi_y^2 y_{\xi\xi} + \eta_y^2 y_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y y_{\xi\eta} \quad (2.68)$$

Então, (2.68) pode ser escrita como

$$\left(\xi_x^2 + \xi_y^2\right) y_{\xi\xi} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2\right) y_{\eta\eta} + 2\left(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y\right) y_{\xi\eta} = F \quad (2.69)$$

ou

$$a y_{\xi\xi} + b y_{\eta\eta} + 2d y_{\xi\eta} = F \quad (2.70)$$

onde  $a = \xi_x^2 + \xi_y^2$ ,  $b = \eta_x^2 + \eta_y^2$  e  $d = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y$ .

Das relações de transformação (Fletcher, 1988),

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{J} \quad (2.71)$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x}{J} \quad (2.72)$$

$$x_\eta = -\frac{\xi_y}{J} \quad (2.73)$$

$$y_\eta = \frac{\xi_x}{J} \quad (2.74)$$

e substituindo estas relações nas Equações (2.61) e (2.62), obtém-se

$$E = -\left[ P(\xi, \eta) x_\xi + Q(\xi, \eta) x_\eta \right] \quad (2.75)$$

$$F = -\left[ Q(\xi, \eta) y_\eta + P(\xi, \eta) y_\xi \right] \quad (2.76)$$

E, finalmente, substituindo as Equações (2.75) e (2.76) nas Equações (2.66) e (2.70), tem-se as seguintes equações:

$$a x_{\xi\xi} + b x_{\eta\eta} + 2d x_{\xi\eta} + \left[ P(\xi, \eta) x_\xi + Q(\xi, \eta) x_\eta \right] = 0 \quad (2.77)$$

$$a y_{\xi\xi} + b y_{\eta\eta} + 2d y_{\xi\eta} + \left[ P(\xi, \eta) y_\xi + Q(\xi, \eta) y_\eta \right] = 0 \quad (2.78)$$

onde  $a = \xi_x^2 + \xi_y^2$ ,  $b = \eta_x^2 + \eta_y^2$  e  $d = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y$ .

Observa-se que, nas Equações (2.77) e (2.78), as variáveis dependentes são  $x$  e  $y$ , sendo, agora,  $\xi$  e  $\eta$  as variáveis independentes. O problema passa a ser resolvido num plano computacional  $(\xi, \eta)$ , fixo e regular, e a solução fornece os pontos do domínio físico irregular  $(x, y)$ .

Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $d$  podem também ser escritos adotando-se  $x$  e  $y$  como variáveis dependentes e  $\xi$  e  $\eta$  como variáveis independentes. Para isto, basta utilizar as relações de transformada inversa (Maliska, 1995). Assim,

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right) [P(\xi, \eta)x_{\xi} + Q(\xi, \eta)x_{\eta}] = 0 \quad (2.79)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right) [P(\xi, \eta)y_{\xi} + Q(\xi, \eta)y_{\eta}] = 0 \quad (2.80)$$

onde

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}.$$

Os coeficientes  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  são os componentes do tensor métrico associado à transformação e  $J$  o Jacobiano da transformação.

O sistema definido pelas Equações (2.79) e (2.80) é um sistema que, apesar de ser mais complexo que o sistema definido pelas Equações (2.1) e (2.2), apresenta duas vantagens: as condições de contorno são especificadas diretamente nas fronteiras e o domínio computacional é uniforme, descrito por coordenadas cartesianas (Thames *et al.*, 1977).

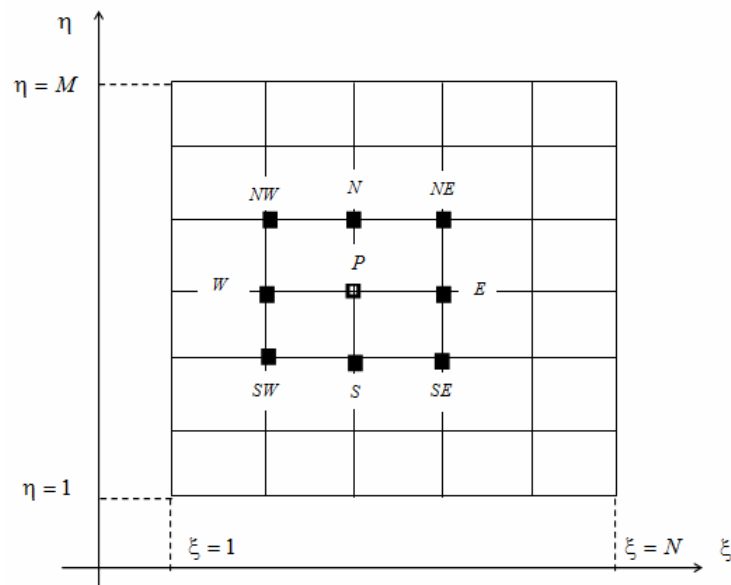
## 2.3 Solução Numérica das Equações de Transformação

As equações de geração transformadas, Equações (2.79) e (2.80), não têm solução analítica fácil, sendo então, resolvidas numericamente. O objetivo é obter as coordenadas  $x$  e  $y$  do domínio físico, correspondentes aos pontos internos do plano computacional  $(\xi, \eta)$ . O método das diferenças finitas, utilizando diferenças finitas centradas, pode ser aplicado para a solução das equações.

A Figura 2.6 ilustra o plano computacional  $(\xi, \eta)$  e a discretização utilizada para a solução das equações de geração transformadas, considerando um ponto P e seus vizinhos.

Escrevendo as Equações (2.79) e (2.80) para uma variável genérica  $\varphi$ , que representa as coordenadas  $x$  e  $y$  do domínio físico, tem-se a seguinte equação:

$$\alpha\varphi_{\xi\xi} + \gamma\varphi_{\eta\eta} - 2\beta\varphi_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right) [P(\xi, \eta)\varphi_{\xi} + Q(\xi, \eta)\varphi_{\eta}] = 0 \quad (2.81)$$



**Figura 2.6:** Ponto interno ao plano computacional e seus vizinhos

Aproximando numericamente os termos da Equação (2.81), utilizando diferenças finitas centradas, as seguintes expressões são estabelecidas:

$$\varphi_{\xi} = \frac{\varphi_E - \varphi_W}{2\Delta\xi} \quad (2.82)$$

$$\varphi_{\eta} = \frac{\varphi_N - \varphi_S}{2\Delta\eta} \quad (2.83)$$

$$\varphi_{\xi\xi} = \frac{\varphi_E + \varphi_W - 2\varphi_P}{\Delta\xi^2} \quad (2.84)$$

$$\varphi_{\eta\eta} = \frac{\varphi_N + \varphi_S - 2\varphi_P}{\Delta\eta^2} \quad (2.85)$$

$$\varphi_{\xi\eta} = \frac{\varphi_{NE} + \varphi_{SW} - \varphi_{SE} - \varphi_{NW}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (2.86)$$

Substituindo as Equações (2.82) a (2.86) na Equação (2.81), obtém-se

$$\begin{aligned} & \alpha \left( \frac{\varphi_E + \varphi_W - 2\varphi_P}{\Delta\xi^2} \right) + \gamma \left( \frac{\varphi_N + \varphi_S - 2\varphi_P}{\Delta\eta^2} \right) - 2\beta \left( \frac{\varphi_{NE} + \varphi_{SW} - \varphi_{SE} - \varphi_{NW}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \right) + \\ & + \frac{1}{J^2} \left[ P(\xi, \eta) \left( \frac{\varphi_E - \varphi_W}{2\Delta\xi} \right) + Q(\xi, \eta) \left( \frac{\varphi_N - \varphi_S}{2\Delta\eta} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Para facilitar a implementação, foram assumidos  $\Delta\xi = 1$  e  $\Delta\eta = 1$ . Estes valores, após a substituição das equações transformadas, são cancelados.

A Equação (2.87) foi então manipulada algebricamente, para obter os coeficientes associados ao ponto P e aos seus pontos vizinhos. Assim,

$$\begin{aligned} & \varphi_E \left( \alpha + \frac{P(\xi, \eta)}{2J^2} \right) + \varphi_W \left( \alpha - \frac{P(\xi, \eta)}{2J^2} \right) + \varphi_N \left( \gamma + \frac{Q(\xi, \eta)}{2J^2} \right) + \\ & + \varphi_S \left( \gamma - \frac{Q(\xi, \eta)}{2J^2} \right) + \varphi_{NE} \left( -\frac{2\beta}{4} \right) + \varphi_{SE} \left( \frac{2\beta}{4} \right) + \\ & + \varphi_{NW} \left( \frac{2\beta}{4} \right) + \varphi_{SW} \left( -\frac{2\beta}{4} \right) = \varphi_P (2\alpha + 2\gamma) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Então,

$$\begin{aligned} A_P \varphi_P &= A_E \varphi_E + A_W \varphi_W + A_N \varphi_N + A_S \varphi_S + \\ & + A_{NE} \varphi_{NE} + A_{SE} \varphi_{SE} + A_{NW} \varphi_{NW} + A_{SW} \varphi_{SW} \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde

$$A_P = 2(\alpha + \gamma) \quad (2.90)$$

$$A_E = \alpha + \frac{P(\xi, \eta)}{2J^2} \quad (2.91)$$

$$A_W = \alpha - \frac{P(\xi, \eta)}{2J^2} \quad (2.92)$$

$$A_N = \gamma + \frac{Q(\xi, \eta)}{2J^2} \quad (2.93)$$

$$A_S = \gamma - \frac{Q(\xi, \eta)}{2J^2} \quad (2.94)$$

$$A_{NE} = -\frac{\beta}{2} \quad (2.95)$$

$$A_{SE} = \frac{\beta}{2} \quad (2.96)$$

$$A_{NW} = \frac{\beta}{2} \quad (2.97)$$

$$A_{SW} = -\frac{\beta}{2} \quad (2.98)$$

e

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (2.99)$$

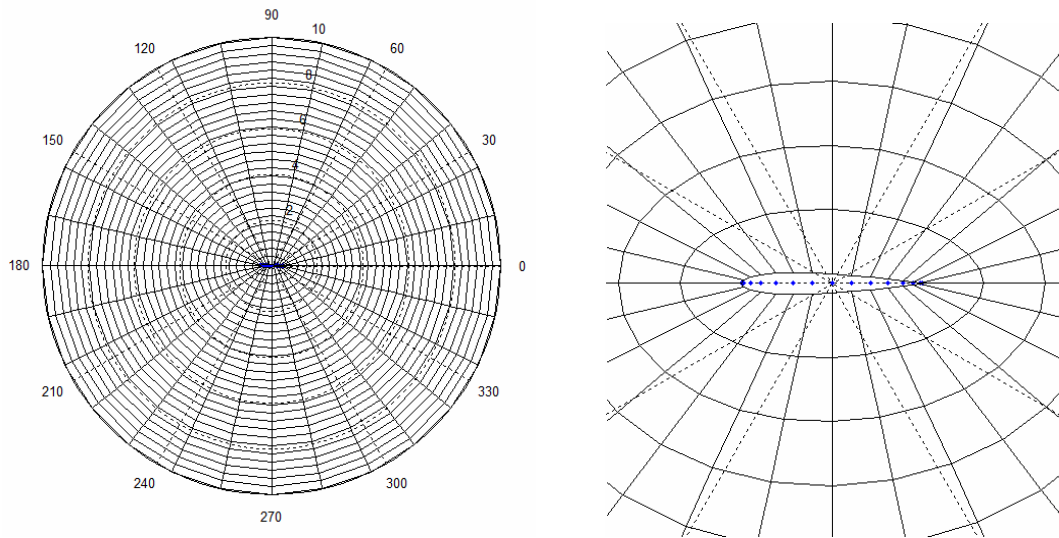
$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (2.100)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (2.101)$$

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (2.102)$$

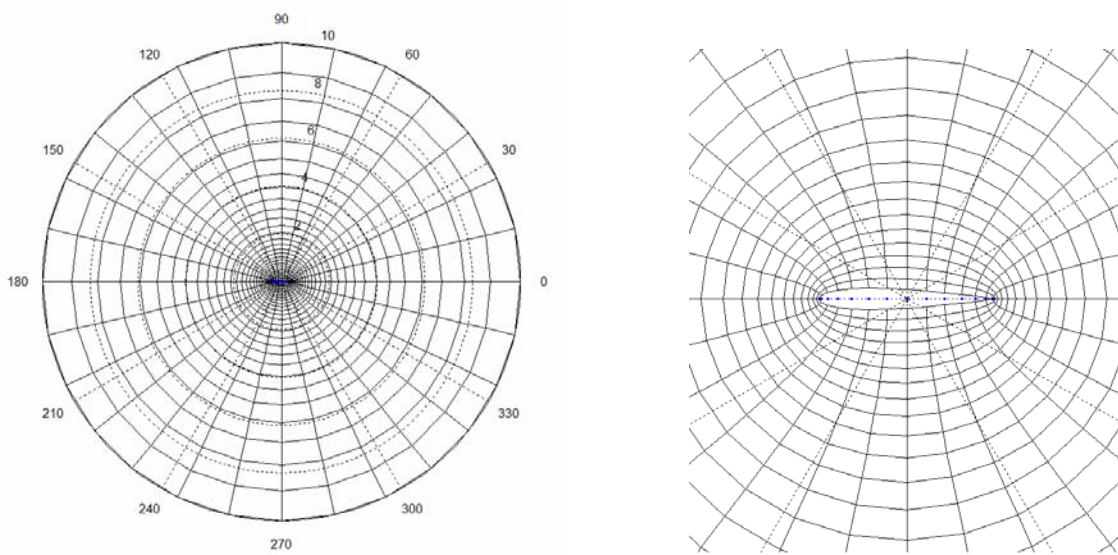
Para a geração da malha é necessária uma distribuição inicial dos pontos no domínio físico. Para o método diferencial elíptico de geração da malha, a *interpolação transfinita* se destaca por ser uma técnica algébrica, de baixo custo computacional, e que acelera o tempo de convergência. A interpolação transfinita, detalhada em Mohebbi (2014), é essencialmente uma interpolação entre curvas ou superfícies ao invés de pontos. É chamado de "transfinita" porque combina valores de coordenadas em toda a curva ou superfície, ou seja, num número infinito de pontos (Siladic, 1987). Numa interpolação unidimensional, utiliza funções como polinômios de Lagrange ou de Hermite, ou funções *spline*. Para o domínio bidimensional, faz interpolações lineares com funções de Lagrange ao longo de cada uma das coordenadas. A malha inicial, gerada pela interpolação transfinita não é suave e, se houver descontinuidade da inclinação nos limites do domínio físico, essa descontinuidade será propagada para o interior do domínio. A Figura 2.7 ilustra a

malha de dimensão 29 x 29 pontos, obtida ao utilizar a interpolação transfinita, ao redor do aerofólio NACA 0012.



**Figura 2.7:** Malha gerada por interpolação transfinita em torno do aerofólio NACA 0012

A Figura 2.8 ilustra a malha de dimensão 29 x 29 pontos, obtida ao utilizar o método diferencial elíptico, ao redor do aerofólio NACA 0012. Foi utilizada para a distribuição inicial dos pontos, as interseções da malha obtida por interpolação transfinita.



**Figura 2.8:** Malha gerada pelo método diferencial elíptico em torno do aerofólio NACA 0012

Nesta Tese de Doutorado, para gerar a malha em torno de corpos de geometria arbitrária, foi considerada como fronteira externa do domínio físico, uma circunferência com raio igual a 10 unidades de comprimento. No centro desta circunferência, foram colocados diferentes corpos para simulações, a saber: um cilindro circular, uma elipse, aerofólios Joukowski simétricos e um aerofólio simétrico NACA de quatro dígitos. Na fronteira externa, pontos foram distribuídos utilizando um incremento angular constante, calculado a partir do número de pontos distribuídos na linha de centro do cilindro, no eixo maior da elipse e na corda dos aerofólios. Os perfis geométricos dos corpos foram mapeados para a determinação das coordenadas dos pontos na superfície dos mesmos, considerada como fronteira interna do domínio físico.

Para definir as linhas de  $\xi$  e de  $\eta$  constantes no domínio físico, foram definidas as variáveis  $i$  e  $j$  no domínio computacional. A variável  $i$  descreve os pontos ao redor do corpo (linhas de  $\eta$  constante), sendo tomada no sentido horário a partir do bordo de fuga dos corpos, da superfície dos mesmos até à fronteira externa. A variável  $j$  descreve as linhas ortogonais às linhas de  $i$ , sendo  $j = 1$  na superfície do corpo e  $j = j_{max}$  na fronteira externa.

Uma vez determinados os pontos na fronteira externa e na fronteira interna, foi utilizada para uma primeira distribuição de pontos no domínio físico, a interpolação transfinita proposta por Thompson *et al.* (1977a e 1977b). Para as abscissas  $x$  dos pontos do domínio, tem-se

$$x_1(i, j) = \left( \frac{i-1}{i_{max}-1} \right) x(i_{max}, j) + \left( \frac{i_{max}-i}{i_{max}-1} \right) x(1, j) \quad (2.103)$$

$$x_2(i, j) = \left( \frac{j-1}{j_{max}-1} \right) [x(i, j_{max}) - x_1(i, j_{max})] + \left( \frac{j_{max}-j}{j_{max}-1} \right) [x(i, 1) - x_1(i, 1)] \quad (2.104)$$

$$x(i, j) = x_1(i, j) + x_2(i, j) \quad (2.105)$$

Equações análogas foram utilizadas para as ordenadas  $y$  dos pontos do domínio, tendo assim, a distribuição inicial obtida utilizando interpolação transfinita no plano  $xy$ , para a geração da malha.

A Figura 2.9 ilustra o plano computacional para a geração elíptica da malha tipo "O".

Conforme comentado anteriormente, os limites do plano computacional em  $i = 1$  e em  $i = i_{max}$  constituem fronteiras reentrantes, nas quais os valores de  $x$  e  $y$  não são especificados. Numericamente, nestas fronteiras, os valores da função foram tratados como

$$f_{i_{max},j} = f_{1,j} \quad (2.106)$$

$$f_{i_{max}+1,j} = f_{2,j} \quad (2.107)$$

As derivadas para os pontos internos, ou seja, quando  $2 \leq i \leq i_{max-1}$  e  $2 \leq j \leq j_{max-1}$ , foram aproximadas utilizando diferenças finitas centradas, conforme as Equações (2.108) a (2.117).

$$(x_{\xi})_{i,j} = \frac{1}{2}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \quad (2.108)$$

$$(x_{\eta})_{i,j} = \frac{1}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \quad (2.109)$$

$$(y_{\xi})_{i,j} = \frac{1}{2}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \quad (2.110)$$

$$(y_{\eta})_{i,j} = \frac{1}{2}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \quad (2.111)$$

$$(x_{\xi\xi})_{i,j} = (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) \quad (2.112)$$

$$(x_{\eta\eta})_{i,j} = (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) \quad (2.113)$$

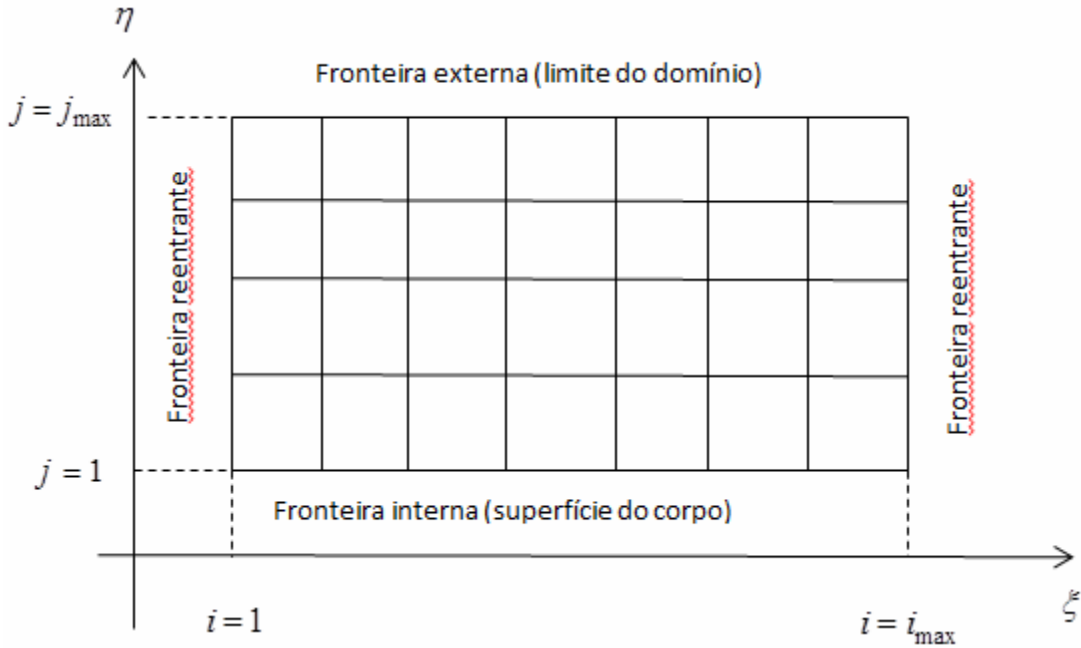
$$(y_{\xi\xi})_{i,j} = (y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) \quad (2.114)$$

$$(y_{\eta\eta})_{i,j} = (y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}) \quad (2.115)$$



$$(x_{\xi\eta})_{i,j} = \frac{1}{4}(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}) \quad (2.116)$$

$$(y_{\xi\eta})_{i,j} = \frac{1}{4}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}) \quad (2.117)$$



**Figura 2.9:** Plano computacional

O sistema de equações resultante foi então resolvido utilizando o Método de Sobre-Relaxação Sucessiva ou SOR (*Successive Over-Relaxation*). Assim,

$$x^{(k+1)} = \omega x^{(k+1)} + (1 - \omega) x^{(k)} \quad (2.118)$$

$$y^{(k+1)} = \omega y^{(k+1)} + (1 - \omega) y^{(k)} \quad (2.119)$$

onde  $k$  é o número da iteração e  $\omega$  é o fator de relaxação.

Quando  $\omega$  é igual a um, tem-se o Método de Gauss-Siedel e se  $\omega < 1$ , o problema está sendo sub-relaxado, ocorrendo um aumento do número de iterações necessário para convergência. Quando  $\omega > 1$ , o sistema está sendo sobre-relaxado e tende a diminuir o número de iterações até um determinado valor de  $\omega$ , que deve ser menor do que dois (Fortuna, 2012). Testes numéricos foram realizados e, para todos os casos, o valor de  $\omega$  em torno de 1,8 apresentou um menor número de

iterações para a convergência. Para definir a convergência, foi definida uma tolerância de  $\varepsilon = 10^{-5}$  para o erro, o qual foi estabelecido para

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right| \leq \varepsilon \quad (2.120)$$

Depois de obtida a convergência, os valores das métricas da transformação  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e do Jacobiano, para cada ponto do domínio, foram armazenados para serem utilizados na solução do escoamento.

## 2.4 Avaliação da Influência dos Parâmetros Envolvidos na Geração da Malha

Para que fosse possível avaliar a influência das funções de controle, da condição de ortogonalidade e do número de pontos na geração da malha, foram realizados testes numéricos a partir de um programa desenvolvido neste trabalho utilizando o *software* MATLAB<sup>®</sup>. O fluxograma utilizado para a geração da malha tipo "O" está apresentado no Apêndice A.

As malhas foram geradas em torno de um aerofólio NACA 0012 e em torno de aerofólios Joukowski. Em todos os testes, foi considerada como critério de convergência uma tolerância  $\varepsilon = 10^{-5}$ , sendo utilizado o fator de relaxação  $\omega = 1,85$ .

O aerofólio simétrico NACA 0012, com corda igual a uma unidade de comprimento, foi posicionado no centro da circunferência que limita o domínio físico, e teve o seu perfil gerado utilizando a Equação (2.121), Moran (1984).

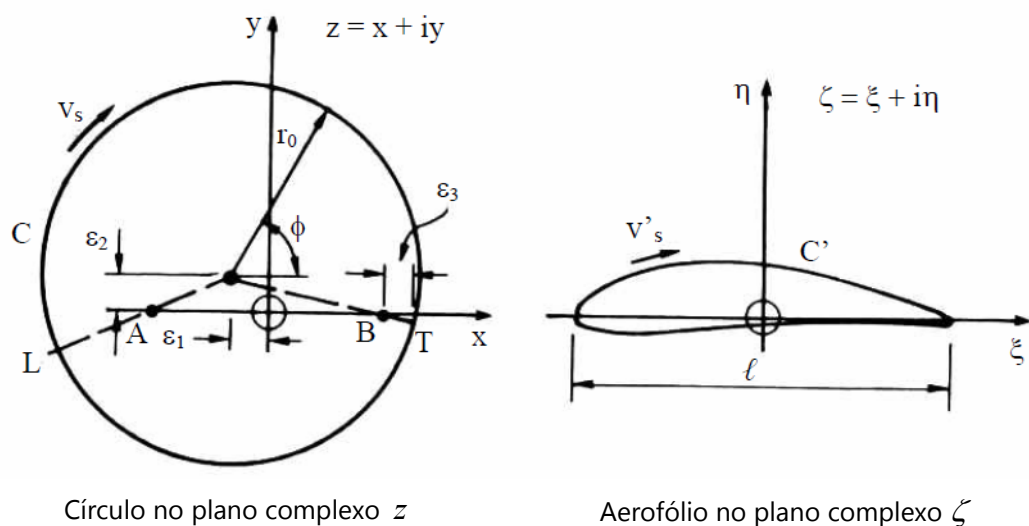
$$y_t = \pm \frac{t}{0,20} (0,2969\sqrt{x} - 0,1260x - 0,3537x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4) \quad (2.121)$$

onde  $y_t$  é a ordenada calculada em função da espessura máxima do aerofólio,  $t$ , e da posição  $x$  tomada ao longo da corda, a partir do bordo de ataque. O aerofólio NACA 0012 é um aerofólio simétrico tendo uma espessura máxima de 12% da corda.

Os aerofólios Joukowski, com corda igual a uma unidade de comprimento, foram também posicionados no centro da circunferência que limita o domínio físico.

Foi utilizada a transformação de Joukowski para mapeamento desses perfis, conforme detalhada em Lewis (1991) e ilustrada geometricamente na Figura 2.10.

Foram considerados um aerofólio Joukowski simétrico e arredondado nas proximidades do bordo de fuga e um aerofólio Joukowski também simétrico, porém afilado nas proximidades do bordo de fuga. Para esses aerofólios, foi considerado  $r_0 = 0,25$ . Os valores dos parâmetros geométricos da transformação de Joukowski utilizados para o aerofólio simétrico e arredondado na região próxima ao bordo de fuga foram  $\varepsilon_1 = 0,02$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$  e  $\varepsilon_3 = 0,01$ , onde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  controlam, respectivamente, a espessura, o arqueamento e o arredondamento da região próxima ao bordo de fuga do aerofólio. Para o aerofólio simétrico e afilado na região próxima ao bordo de fuga esses valores foram  $\varepsilon_1 = 0,02$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$  e  $\varepsilon_3 = 10^{-6}$ .



**Figura 2.10:** Transformação geométrica de Joukowski  $\zeta = z + a^2/z$ , Lewis (1991)

#### 2.4.1 Influência dos Valores das Funções de Controle

Para valores apropriados das funções de controle,  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ , os valores máximos e mínimos das coordenadas generalizadas  $\xi$  e  $\eta$  devem ocorrer nas

fronteiras, garantindo que o mapeamento do domínio físico para o domínio computacional ocorra ponto a ponto. Valores extremos obtidos para estas funções, no entanto, podem provocar distorções e sobreposição da malha. Diversas expressões são apresentadas na literatura para  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ . Thompson *et al.* (1977b) apresentaram como proposta as expressões dadas em (2.122) e (2.123).

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp^{-c_i |\xi - \xi_i|} + \\ -\sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\xi - \xi_j) \exp^{-d_j [(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2]^{1/2}} \quad (2.122)$$

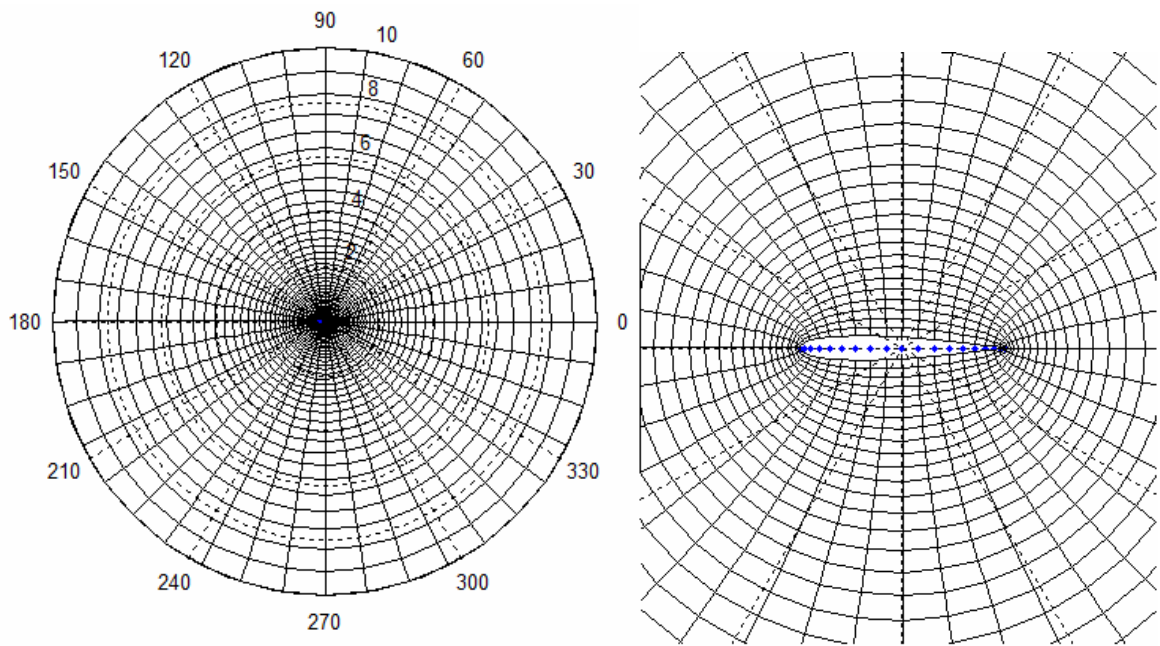
$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp^{-c_i |\eta - \eta_i|} + \\ -\sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\eta - \eta_j) \exp^{-d_j [(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2]^{1/2}} \quad (2.123)$$

onde  $\xi_i$  e  $\eta_i$  são as linhas para as quais as outras linhas de  $\xi$  e  $\eta$  serão atraídas e  $(\xi_j, \eta_j)$  são os pontos para os quais as linhas de  $\xi$  e de  $\eta$  serão atraídas. Cabe ressaltar que as constantes  $a_i$ ,  $c_i$ ,  $b_j$  e  $d_j$  não assumem necessariamente os mesmos valores, devendo ser determinadas a partir de testes numéricos.

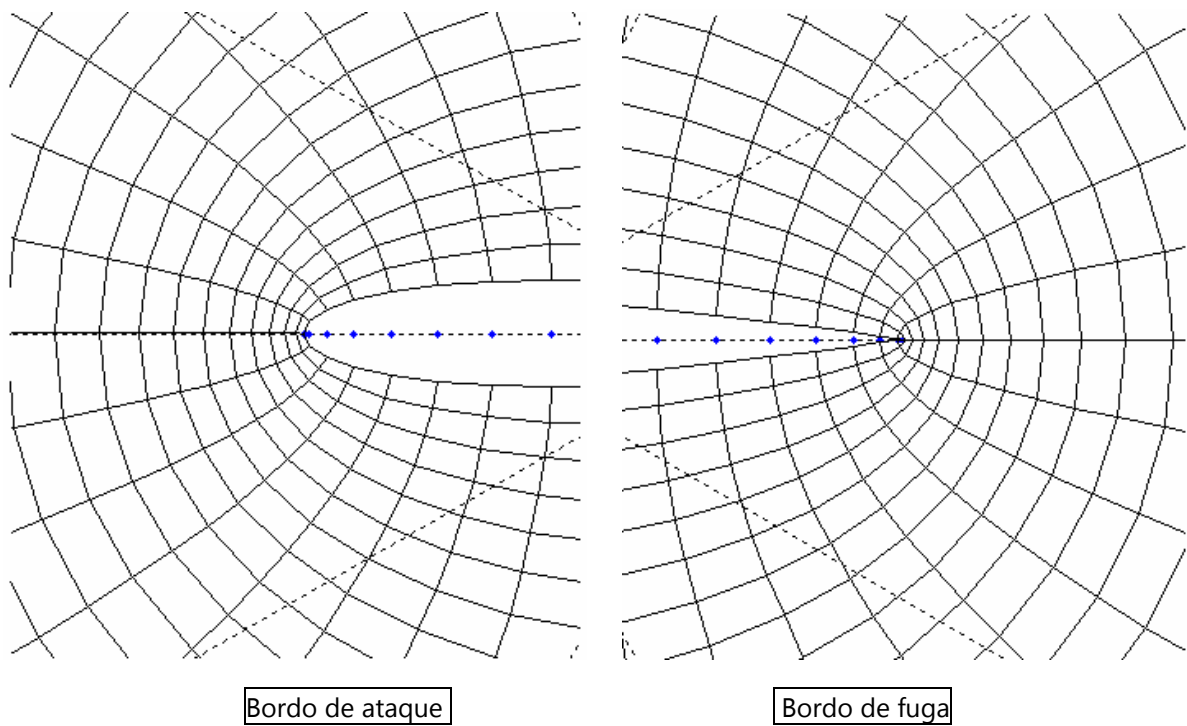
A Figura 2.11 ilustra a malha gerada nesta Tese de Doutorado, com valores de  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$  nulos, utilizando o método diferencial elíptico, dimensão de 41 x 41 pontos, em torno do aerofólio NACA 0012.

A Figura 2.12 ilustra mais detalhadamente as regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga referentes à malha apresentada na Figura 2.11.

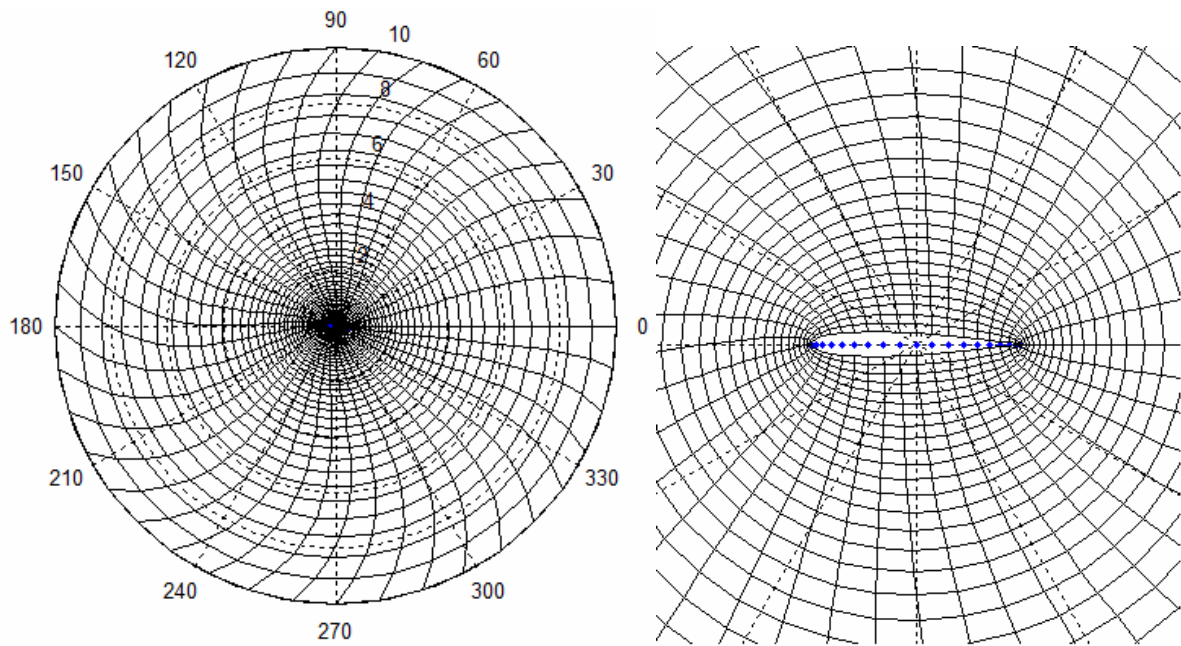
Testes foram realizados considerando alguns valores para as funções de controle  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ , para avaliar a influência dos mesmos na geração da malha. Observou-se uma maior sensibilidade com relação aos valores de  $P(\xi, \eta)$ . Para valores de  $P(\xi, \eta)$  iguais a -0,15 e a 0,15, deformações foram observadas, conforme ilustram as Figuras 2.13 e 2.14.



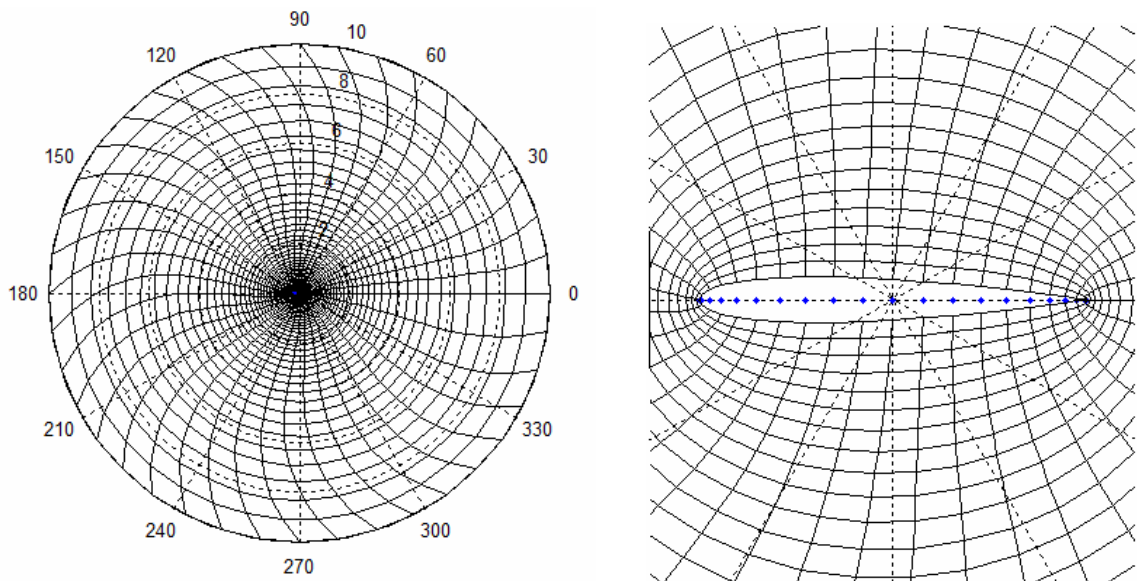
**Figura 2.11:** Malha tipo “O”, NACA 0012, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 165 iterações



**Figura 2.12:** Detalhes das regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga, NACA 0012,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$

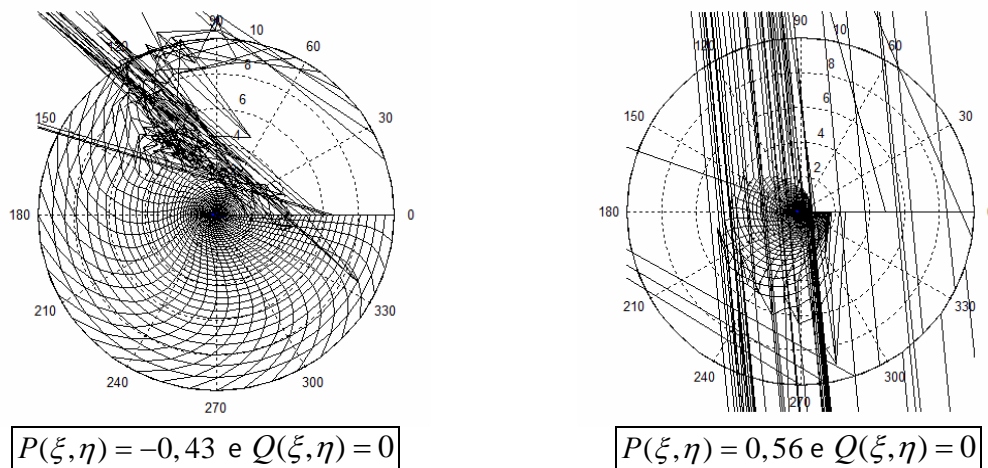


**Figura 2.13:** Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = -0,15$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 180 iterações



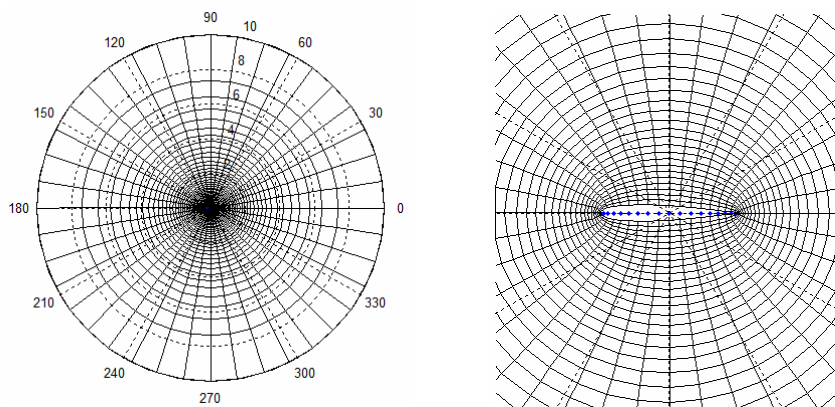
**Figura 2.14:** Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = 0,15$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 151 iterações

Para valores de  $P(\xi, \eta)$  abaixo de  $-0,15$  e acima de  $0,15$ , as deformações aumentaram gradativamente até que, para os valores de  $-0,43$  e  $0,56$ , houve sobreposição e quebra da malha, conforme ilustrado na Figura 2.15.

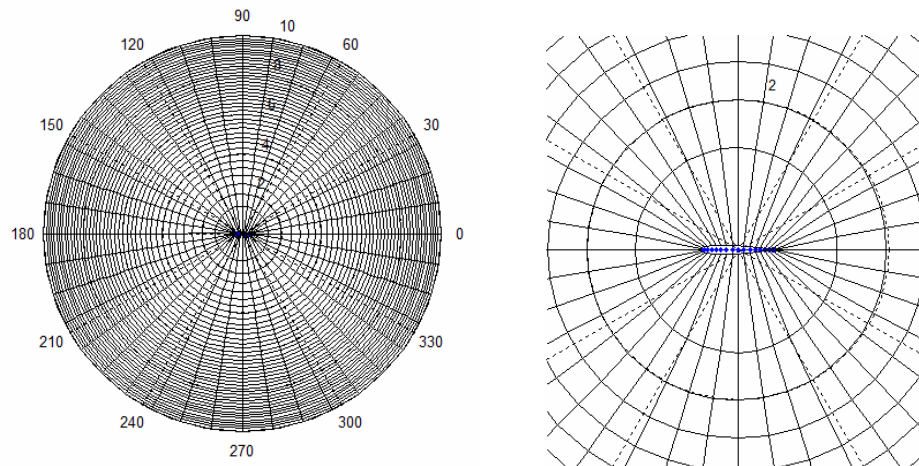


**Figura 2.15:** Sobreposições e quebras da malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos

Com relação aos valores de  $Q(\xi, \eta)$ , foi possível obter malhas sem sobreposição, no intervalo de -0,22 a 1,56. Para valores de  $Q(\xi, \eta)$  negativos, observou-se uma aproximação das linhas de  $\eta$  constante para o aerofólio e para valores de  $Q(\xi, \eta)$  positivos, um afastamento. Mesmo não tendo ocorrido deformações significativas para valores positivos até 1,56, o afastamento das linhas de  $\eta$  constante não é interessante para o caso do estudo do escoamento em torno do corpo, uma vez que os maiores gradientes de pressão ocorrem próximos à superfície. As Figuras 2.16 e 2.17 ilustram as malhas obtidas considerando o valor nulo de  $P(\xi, \eta)$  e os valores limites de  $Q(\xi, \eta)$ , antes de ocorrer sobreposição e quebra da malha.

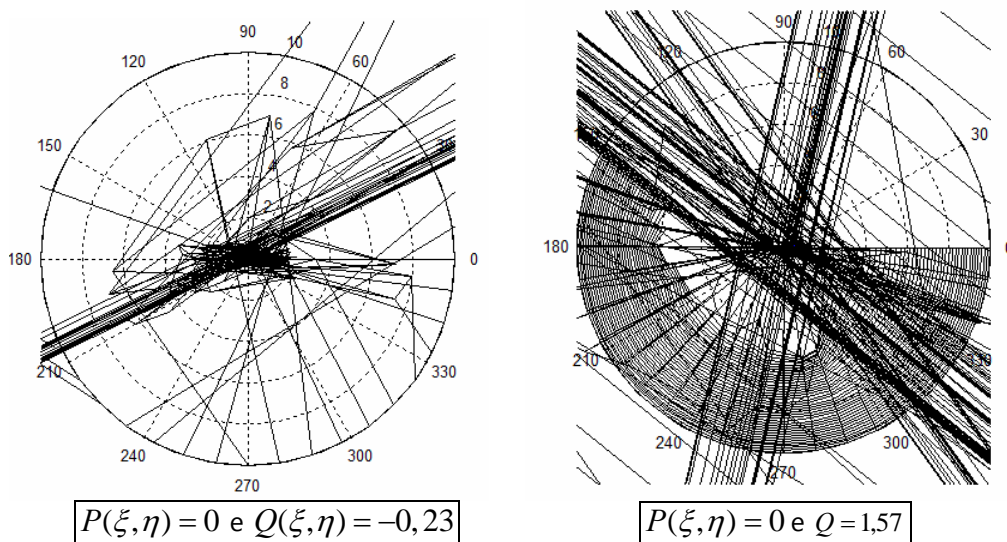


**Figura 2.16:** Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = -0,22$ , 261 iterações



**Figura 2.17:** Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi,\eta)=0$  e  $Q(\xi,\eta)=1,56$ ; 109 iterações

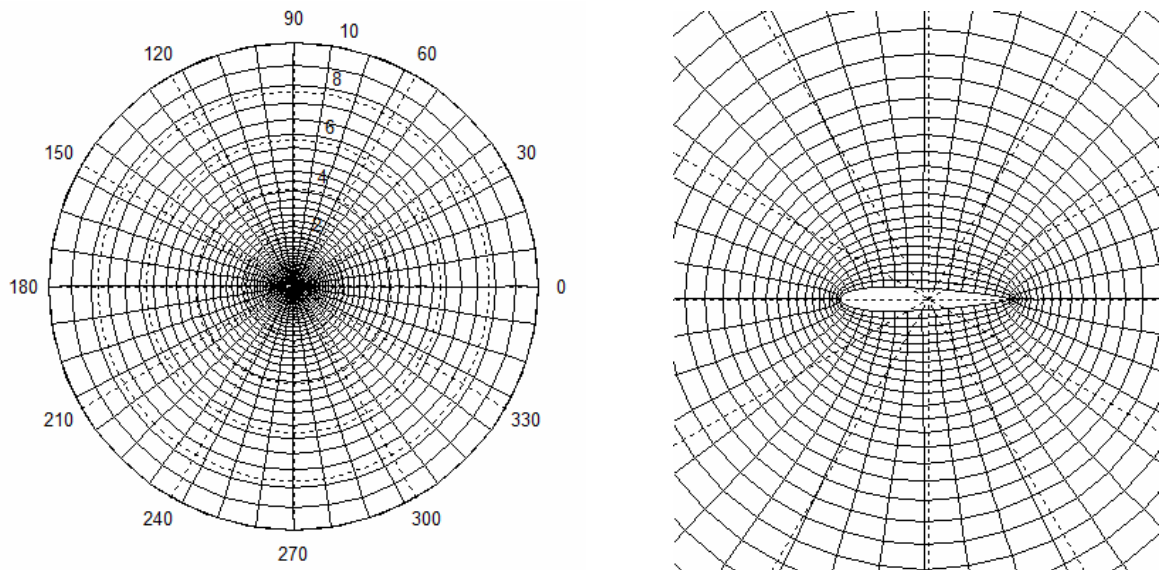
Para valores abaixo de -0,22 e acima de 1,56 para  $Q(\xi,\eta)$ , sobreposição e quebra da malha aconteceram, conforme ilustrado na Figura 2.18.



**Figura 2.18:** Sobreposições e quebras da malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos

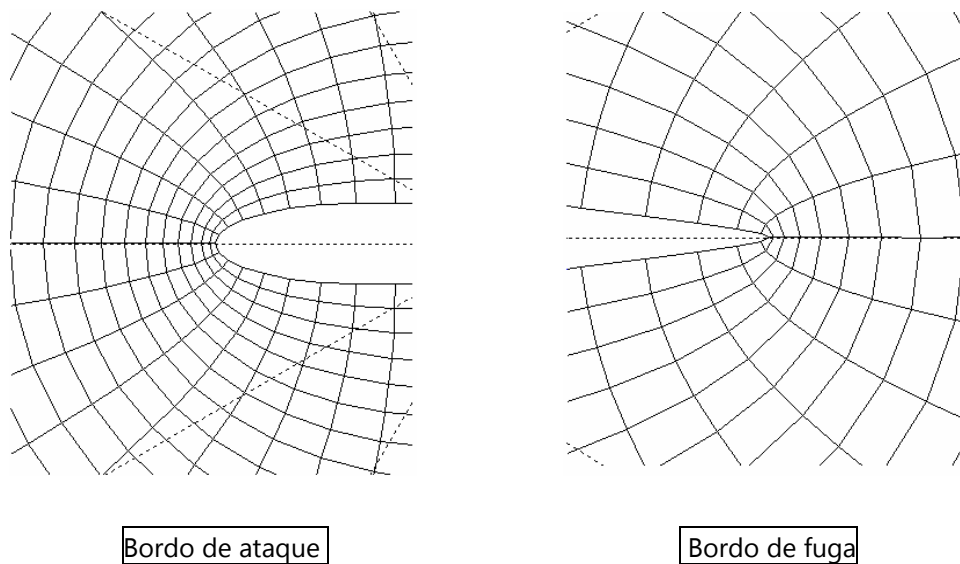
Os testes realizados para o aerofólio Joukowski, simétrico e arredondado, indicaram uma maior sensibilidade à influência dos valores das funções de controle  $P(\xi,\eta)$  e  $Q(\xi,\eta)$ . A Figura 2.19, ilustra a malha tipo "O", gerada utilizando o método diferencial elíptico, 41 x 41 pontos, em torno do aerofólio Joukowski, simétrico e arredondado, com valores de  $P(\xi,\eta)$  e  $Q(\xi,\eta)$  nulos.





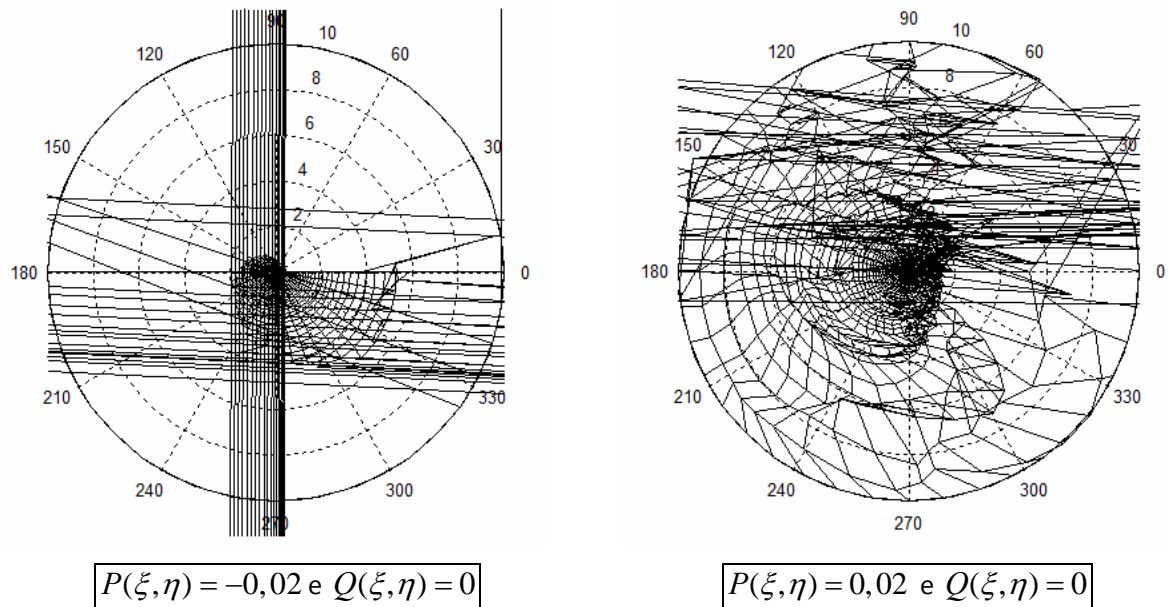
**Figura 2.19:** Malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q = 0$ ; 169 iterações

A Figura 2.20 ilustra mais detalhadamente, as regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga.



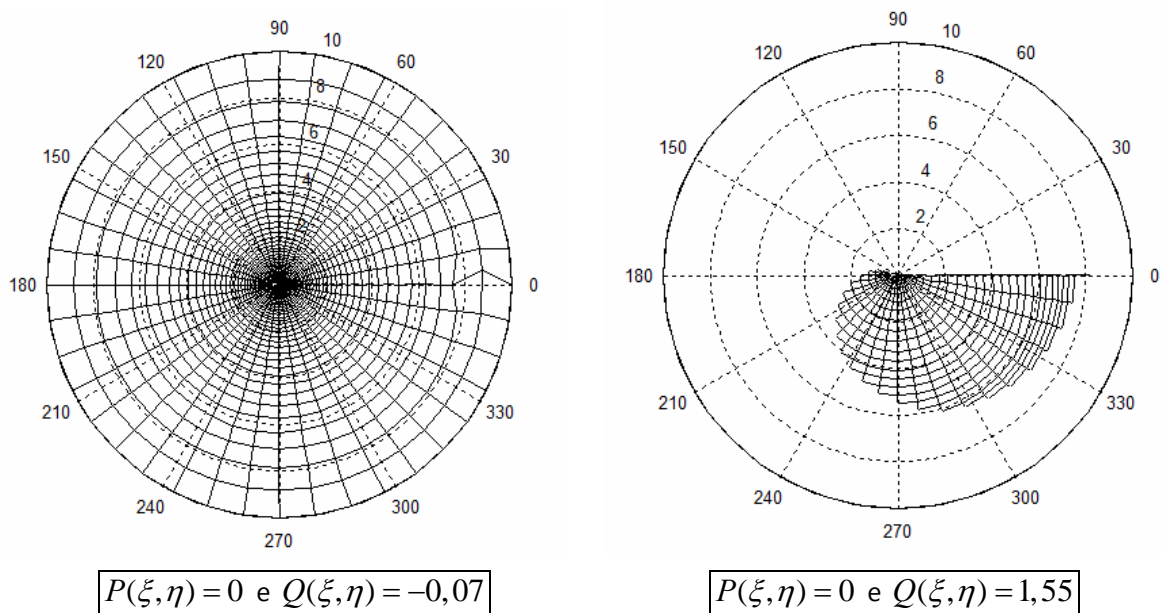
**Figura 2.20:** Detalhes das regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga, Joukowski, simétrico e arredondado,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$

Com relação aos valores de  $P(\xi, \eta)$ , deformações ocorreram já para  $P(\xi, \eta) = -0,02$  e para  $P(\xi, \eta) = 0,02$ , conforme ilustrado na Figura 2.21.



**Figura 2.21:** Sobreposições e quebras da malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos

Para variações de  $Q(\xi, \eta)$ , as deformações começaram a surgir para valores iguais a -0,07 e a 1,55. A Figura 2.22 ilustra tais deformações.



**Figura 2.22:** Deformações da malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos

Deve-se ressaltar aqui, que deformações e/ou quebras das malhas surgiram em função de problemas de mal-condicionamento dos sistemas.

Para o aerofólio Joukowski simétrico e afilado, só não ocorreram deformações da malha para valores nulos de  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ . A Figura 2.23 ilustra a malha tipo "O" gerada para esta situação e a Figura 2.24 ilustra, mais detalhadamente, as regiões do bordo de ataque e do bordo de fuga do aerofólio Joukowski afilado e simétrico.

### 2.4.2 Influência da Condição de Ortogonalidade

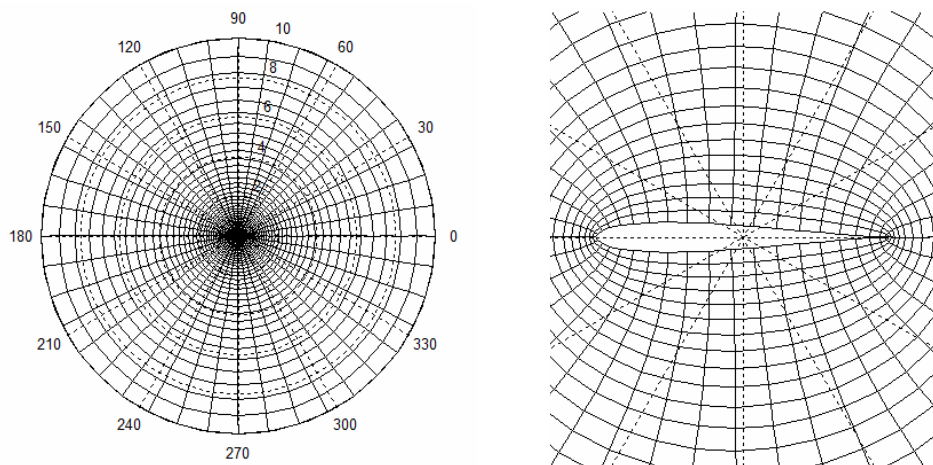
Sabe-se que o método diferencial elíptico não garante a ortogonalidade da malha. No entanto, a suavidade e a ortogonalidade das linhas de malha afetam a precisão das soluções numéricas (Mohebbi, 2014). O desvio do espaçamento da malha pode resultar em erros de truncamento, particularmente nas fronteiras do domínio físico. Sejam os gradientes de  $\xi$  e  $\eta$ :

$$\nabla \xi = \xi_x \hat{i} + \xi_y \hat{j} \quad (2.124)$$

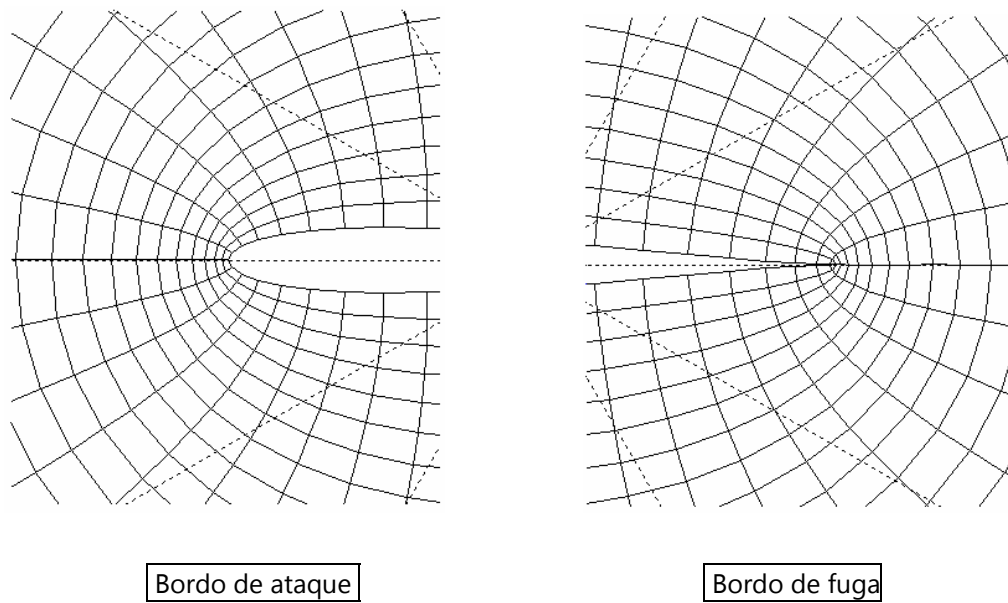
$$\nabla \eta = \eta_x \hat{i} + \eta_y \hat{j} \quad (2.125)$$

Então,

$$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \quad (2.126)$$



**Figura 2.23:** Malha tipo "O", Joukowski simétrico e afilado, 41 x 41 pontos, com  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$ ; 166 iterações



**Figura 2.24:** Detalhes das regiões próximas ao bordo de ataque e ao bordo de fuga de aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$

Utilizando as relações de transformação, dadas nas Equações (2.71) a (2.74) e, substituindo na Equação (2.126), tem-se

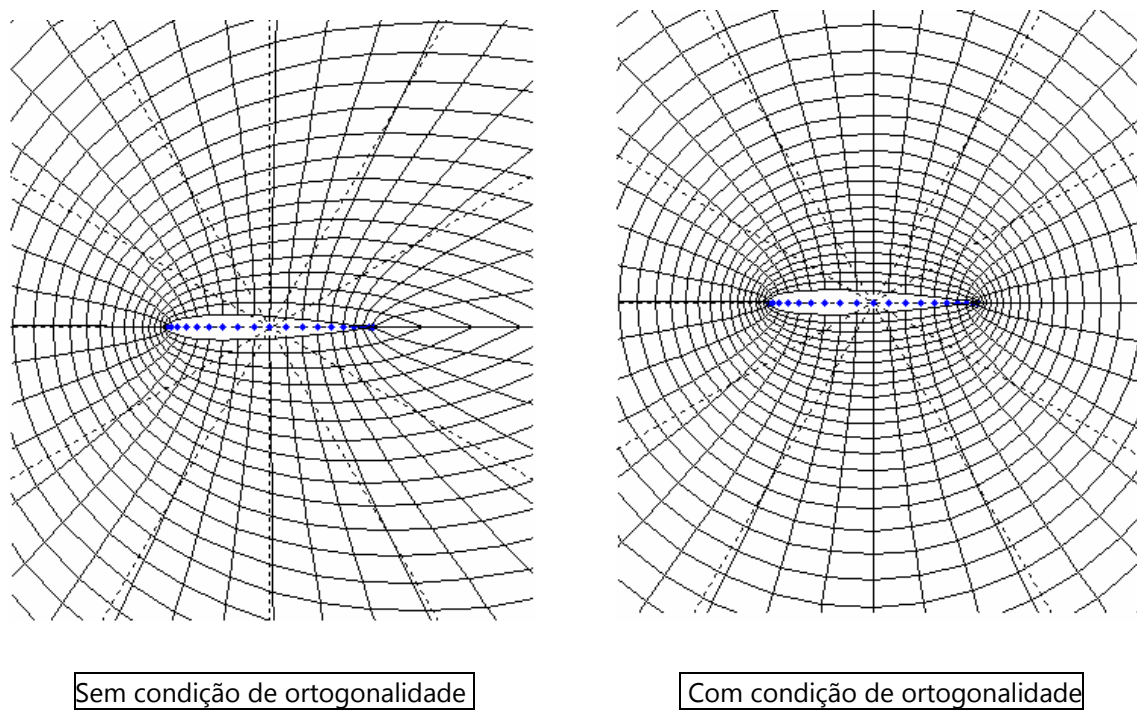
$$\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} = -J^2 (x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) \quad (2.127)$$

Aplicando a condição de ortogonalidade, ou seja, igualando a zero o produto escalar nas fronteiras, obtém-se

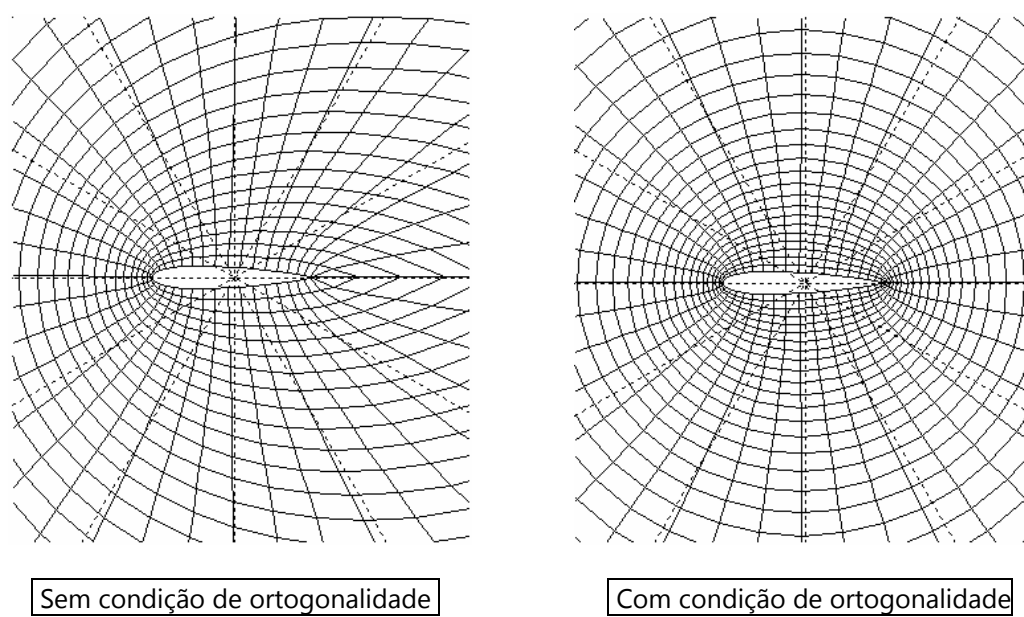
$$x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} = 0 \quad (2.128)$$

A Equação (2.128) foi então, utilizada para impor a ortogonalidade das linhas de malha à fronteira reentrante.

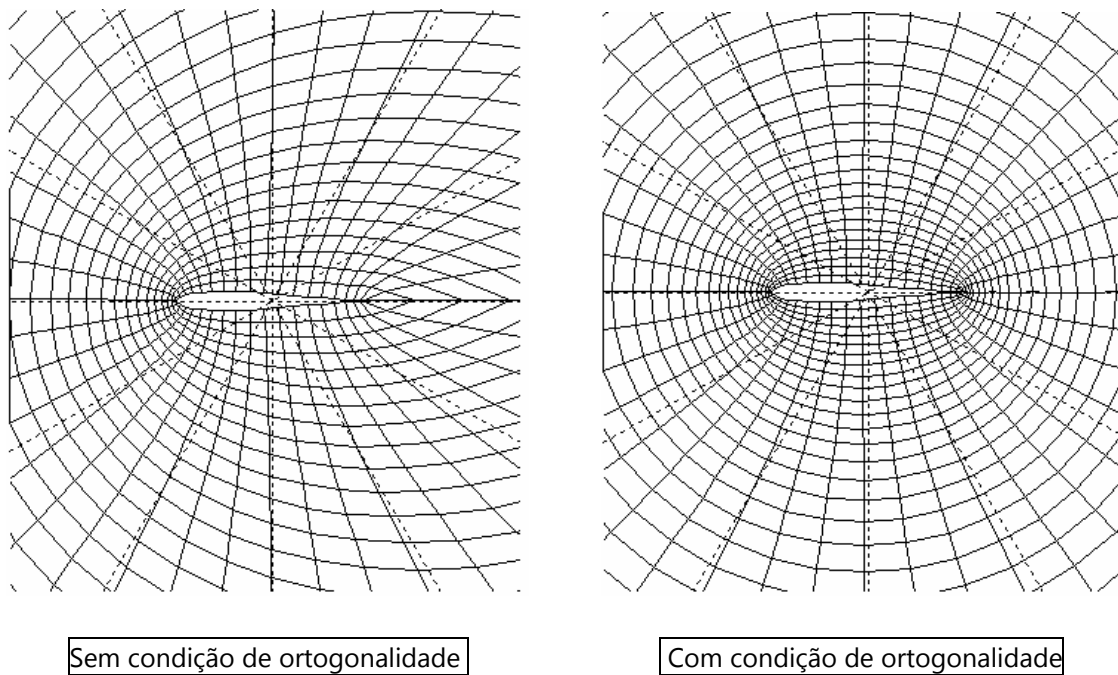
As Figuras 2.25, 2.26 e 2.27 ilustram as malhas tipo "O", geradas utilizando o método diferencial elíptico, de 49 x 49 pontos, com funções de controle  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$ , com aplicação da condição de ortogonalidade e sem aplicação da condição de ortogonalidade. Estas figuras apresentam as malhas geradas para os aerofólios NACA 0012, Joukowski simétrico e arredondado e Joukowski simétrico e afilado, respectivamente.



**Figura 2.25:** Malha tipo "O", NACA 0012, 41 x 41 pontos,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$



**Figura 2.26:** Malha tipo "O", Joukowski simétrico e arredondado, 41 x 41 pontos,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$



**Figura 2.27:** Malha tipo "O", Joukowski simétrico e afilado, 41 x 41 pontos,  $P(\xi, \eta) = 0$  e  $Q(\xi, \eta) = 0$

Nota-se que, sem a aplicação da condição de ortogonalidade, ocorre afastamento e variação do espaçamento da malha, gerando erros de truncamento e afetando a precisão na solução de problemas físicos.

Para verificar a influência da aplicação da condição de ortogonalidade na precisão de resultados numéricos, foram realizadas simulações utilizando o MQDL-FBR em torno do aerofólio Joukowski simétrico, com a região do bordo de fuga arredondada e afilada, considerando os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ . Nestas simulações foi utilizada a malha de 41 x 41 pontos e a FBR Multiquádrica com parâmetro de forma  $c = 80$ . As Tabelas 2.1 e 2.2 apresentam os valores para o erro médio quadrático, obtidos para o coeficiente de pressão na superfície dos aerofólios Joukowski simétricos arredondado e afilado, respectivamente. Para o cálculo dos erros, foram utilizadas como referência as soluções analíticas. As considerações a respeito dos cálculos do erro médio quadrático e do coeficiente de pressão são apresentadas no Capítulo 4 desta tese.

**Tabela 2.1:** Erros médios quadráticos obtidos sem e com a aplicação da condição de ortogonalidade, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica, malha de 41 x 41 pontos

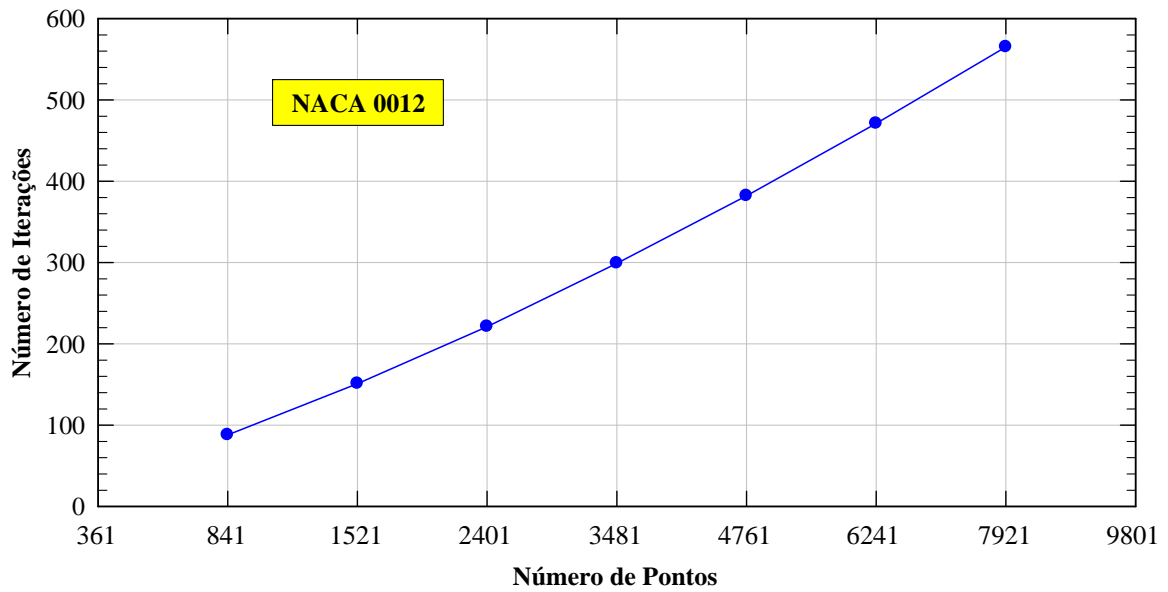
| $\alpha_\infty$ | Sem aplicação da condição de ortogonalidade | Com aplicação da condição de ortogonalidade |
|-----------------|---|---|
| $0^\circ$       | $1,004182 \times 10^{-1}$                   | $9,580569 \times 10^{-5}$                   |
| $5^\circ$       | $4,020125 \times 10^{-1}$                   | $3,179029 \times 10^{-4}$                   |

**Tabela 2.2:** Erros médios quadráticos obtidos sem e com a aplicação da condição de ortogonalidade, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica, malha de 41 x 41 pontos

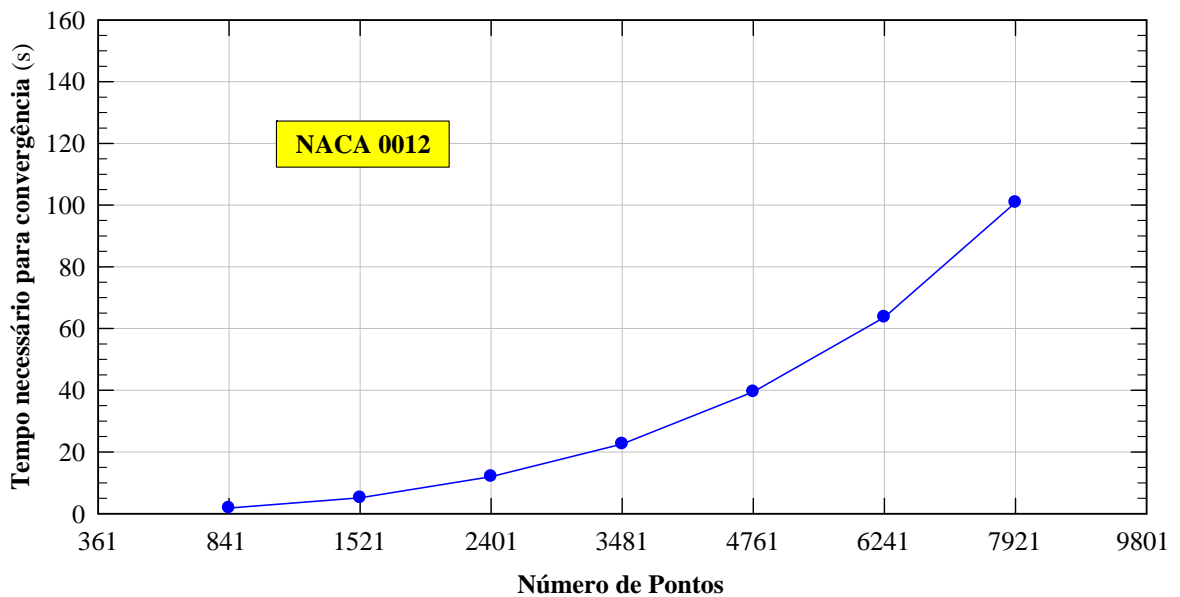
| $\alpha_\infty$ | Sem aplicação da condição de ortogonalidade | Com aplicação da condição de ortogonalidade |
|-----------------|---|---|
| $0^\circ$       | $1,144354 \times 10^{-1}$                   | $8,810635 \times 10^{-3}$                   |
| $5^\circ$       | $4,294419 \times 10^{-1}$                   | $9,027335 \times 10^{-3}$                   |

### 2.4.3 Influência do Número de Pontos

Para o aerofólio NACA 0012 foram testadas as seguintes distribuições de pontos: 29x29, 39x39, 49x49, 59x59, 69x69, 79x79 e 89x89 pontos. As Figuras 2.28 e 2.29 ilustram os comportamentos do número de iterações e do tempo necessário para convergência da malha, em função do número de pontos. Foi utilizado para os testes um computador Intel (R) Core (TM) 2 Duo CPU 2,93 GHz, memória RAM de 4,00 GB, 64-bit.



**Figura 2.28:** Comportamento do número de iterações necessário para convergência, com a dimensão da malha, NACA 0012

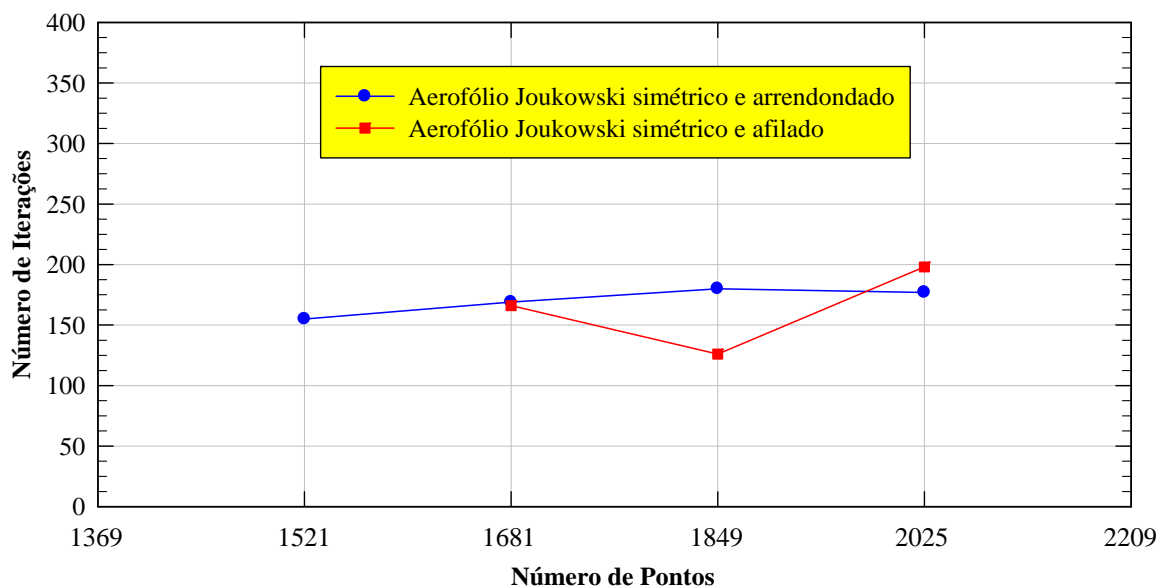


**Figura 2.29:** Comportamento do tempo necessário para convergência, com a dimensão da malha, NACA 0012

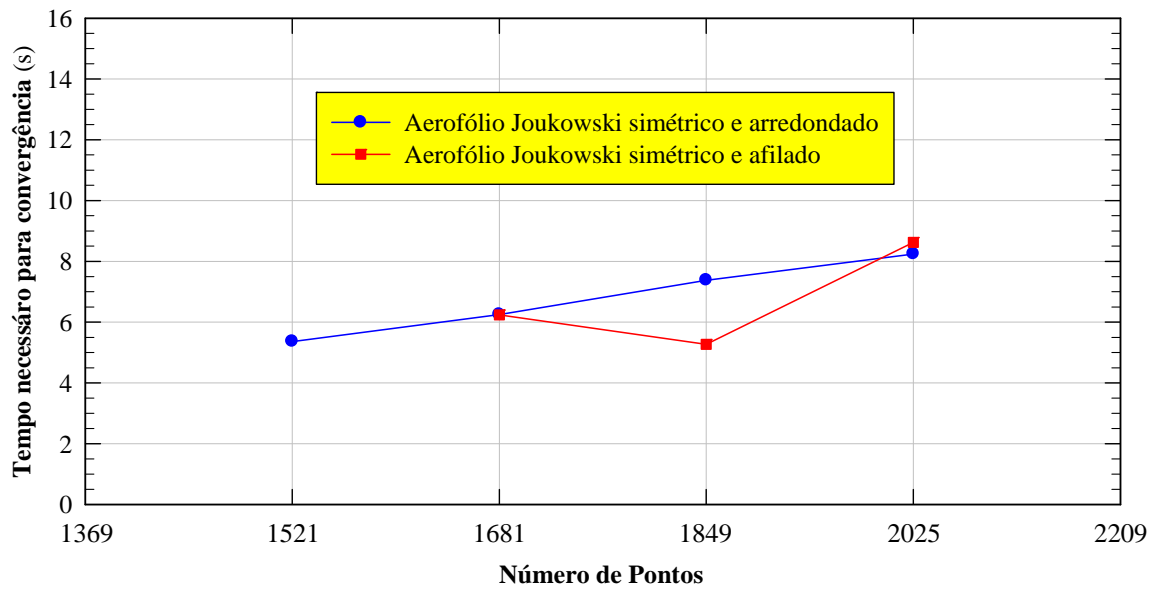
As malhas geradas para o aerofólio NACA 0012, não apresentaram problemas com relação à dimensão, mas para dimensões superiores a 49 x 49 pontos ocorreu um aumento significativo do tempo computacional. Quanto ao número de iterações necessário para convergência, ocorreu um aumento gradual do mesmo, com o aumento da dimensão da malha.



Na geração da malha em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, ocorreu mal-condicionamento do sistema para malhas de dimensões inferiores a 39 x 39 pontos e superiores a 45 x 45 pontos. A malha em torno do aerofólio Joukowski afilado e simétrico mostrou-se ainda mais sensível ao número de pontos distribuídos. Neste caso, o mal-condicionamento do sistema ocorreu para dimensões da malha inferiores a 41 x 41 pontos e superiores a 45 x 45 pontos. Os comportamentos do número de iterações e do tempo para a convergência, com a dimensão da malha, para os aerofólios Joukowski, estão ilustrados nas Figuras 2.30 e 2.31, respectivamente.



**Figura 2.30:** Comportamento do número de iterações necessário para convergência, com a dimensão da malha, aerofólios Joukowski



**Figura 2.31:** Comportamento do tempo necessário para convergência, com a dimensão da malha, aerofólios Joukowski

Os comportamentos do número de iterações e do tempo gasto para convergência, no caso do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, não apresentaram grandes variações com a dimensão da malha. Para o aerofólio Joukowski afilado e simétrico, visivelmente, a malha de 43 x 43 pontos distribuídos foi a que apresentou um menor número de iterações e menor tempo necessário para convergência.

## Capítulo 3

# Funções de Base Radial e o MQDL-FBR Aplicado ao escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária

Este capítulo apresenta algumas considerações sobre as funções de base radial, sobre o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR), sobre o escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária, bem como a metodologia utilizada para aplicação do MQDL-FBR a este tipo de escoamento.

### 3.1 Funções de Base Radial

Uma função de base radial (FBR) é definida por (Fasshauer, 2007, Golbabai e Seifollahi, 2006)

$$\phi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (3.1)$$

onde  $d$  é a dimensão do problema,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_i$  são vetores de mesma dimensão e  $\phi$  uma função que depende apenas da distância radial entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_i$ . Na Equação (3.1),  $\|\cdot\|$  é alguma norma em  $\mathbb{R}^d$ , sendo geralmente utilizada a norma euclidiana.

Definindo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$  como  $r$ , pode-se escrever a FBR como  $\phi(r)$ .

As FBRs podem ser divididas em dois grupos principais: as infinitamente suaves e as suaves por partes. As infinitamente suaves, possuem derivadas parciais de qualquer ordem em  $r = 0$ , enquanto que as suaves por partes não possuem (Silva, 2014).

A Tabela 3.1 apresenta algumas das FBRs infinitamente suaves mais utilizadas, em função de  $r$  e  $c$ , sendo  $c$  o parâmetro de forma da função ( $c > 0$ ) (Shu *et al.*, 2003).

**Tabela 3.1:** Algumas FBRs infinitamente suaves mais utilizadas (Shu *et al.*, 2003)

| FBR infinitamente suave     | $\phi(r, c)$                              |
|-----------------------------|---|
| Multiquádrica (Mq)          | $\phi(r, c) = \sqrt{r^2 + c^2}$           |
| Multiquádrica Inversa (MqI) | $\phi(r, c) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$ |
| Gaussiana (GA)              | $\phi(r, c) = e^{-r^2/c^2}$               |

Alguns autores utilizam  $\varepsilon$  como sendo o parâmetro de forma da FBR, sendo que este tem o comportamento inverso de  $c$ . A Tabela 3.2 apresenta as mesmas FBRs infinitamente suaves, em função de  $r$  e  $\varepsilon$  (Larsson e Fornberg, 2003a).

Diversos estudos têm sido realizados com o objetivo de determinar o parâmetro de forma mais adequado para os diferentes tipos de FBR e aplicações (Piret, 2007, Bayona *et al.*, 2011, Cheng, 2012, Afiatdoust e Esmailbeigi, 2015, Esmailbeigi e Hosseini, 2014).

Segundo Fasshauer e Zhang (2007), a escolha do parâmetro de forma é fator importante para o resultado, podendo comprometer a sua precisão, a estabilidade numérica e o custo computacional. Em geral, resultados mais precisos são obtidos para valores de  $\varepsilon$  muito pequenos, tanto em problemas de interpolação de dados dispersos, quanto em problemas de solução de equações diferenciais (Larsson e

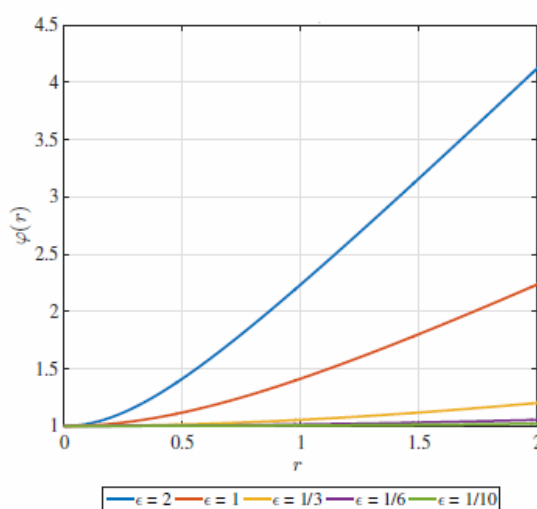
Fornberg, 2003b). No entanto, valores pequenos de  $\varepsilon$ , resultam em um achatamento no comportamento da FBR e, em algumas situações, podem gerar mal-condicionamento da matriz de interpolação.

**Tabela 3.2:** Algumas FBRs infinitamente suaves em função de  $r$  e  $\varepsilon$  (Larsson e Fornberg, 2003)

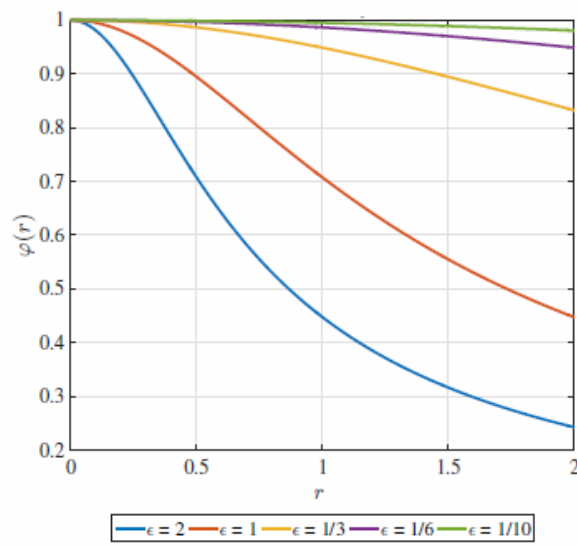
| FBR infinitamente suave     | $\phi(r, \varepsilon)$  |
|-----------------------------|---|
| Multiquádrica (Mq)          | $\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$           |
| Multiquádrica Inversa (MqI) | $\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$ |
| Gaussiana (GA)              | $\phi(r, \varepsilon) = e^{(-\varepsilon r^2)}$                 |

Santos (2016) apresenta os comportamentos de diversas FBRs em função dos valores de  $\varepsilon$ . As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 apresentam estes comportamentos para as FBRs Multiquádrica, Multiquádrica Inversa e Gaussiana, respectivamente, onde  $\phi(r)$  é a função de base radial.

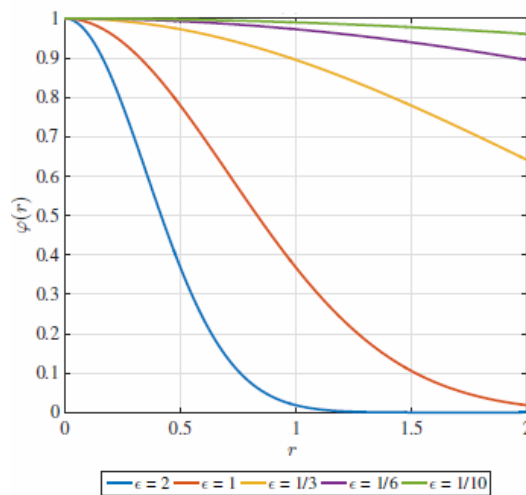
Dentre as FBRs suaves por partes, Piret (2007) destaca como as mais utilizadas, as apresentadas na Tabela 3.3.



**Figura 3.1:** Comportamento da FBR Multiquádrica (Santos, 2016)



**Figura 3.2:** Comportamento da FBR Multiquádrica Inversa (Santos, 2016)



**Figura 3.3:** Comportamento da FBR Gaussiana (Santos, 2016)

**Tabela 3.3:** FBRs suaves por partes, mais utilizadas segundo Piret (2007)

| FBR infinitamente suave                      | $\phi(r, c)$                                   |
|--|--|
| <i>Thin-Plate Spline</i> (TPS)               | $\phi(r) = r^2 \log(r)$                        |
| Linear (LN)                                  | $\phi(r) = r$                                  |
| Cúbica (CB)                                  | $\phi(r) = r^3$                                |
| <i>Spline</i> Poliharmônica PHS <sub>1</sub> | $\phi(r) = r^{2p-1}, p \in \mathbb{N}$         |
| <i>Spline</i> Poliharmônica PHS <sub>1</sub> | $\phi(r) = r^{2p} \log(r), p \in \mathbb{N}_0$ |

### 3.1.1 Interpolação com Funções de Base Radial

No processo de interpolação utilizando FBRs, faz-se a combinação linear da função centrada nos pontos  $\mathbf{x}_i$ . Assim, trabalha-se com uma FBR interpolante para pontos dispersos no domínio de interesse. Assim,

$$f(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (3.2)$$

sendo  $f(\mathbf{x}_p)$  o valor aproximado da função no ponto de interesse,  $\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$  a FBR escolhida,  $\lambda_i$  as incógnitas do sistema de equações lineares e  $\mathbf{x}_i$  os centros (pontos para os quais os valores da função são conhecidos).

Sendo  $\mathbf{x}_i$  (centros nas FBRs) os pontos nos quais os valores da função a ser interpolada são conhecidos, valores desta função em outros pontos dispersos  $\mathbf{x}_j$  podem ser obtidos desde que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbf{f}_j = f(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|) \quad (3.3)$$

o que, na forma vetorial, é escrito como

$$\Phi \lambda = \mathbf{F} \quad (3.4)$$

sendo  $\Phi$  a matriz simétrica dos elementos  $\phi_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|)$ , conhecida como matriz de interpolação,  $\lambda$  o vetor das incógnitas  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  e  $\mathbf{F}$  o vetor dos valores conhecidos da função nos centros  $(f_1, \dots, f_n)^T$ . Com relação à solução do sistema, sabe-se que, para que o mesmo tenha solução e que esta seja única, a matriz de interpolação deve ser não-singular (Michelli, 1986).

Na forma matricial, a Equação (3.3) é escrita como

$$\begin{pmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|) & \phi(\|x_2 - x_1\|) & \cdots & \phi(\|x_n - x_1\|) \\ \phi(\|x_1 - x_2\|) & \phi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_n - x_2\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|x_1 - x_n\|) & \phi(\|x_1 - x_n\|) & \cdots & \phi(\|x_n - x_n\|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

No processo de interpolação, as FBRs podem ser definidas em todo o domínio ou em parte dele. As FBRs apresentadas nas Tabelas 3.1 a 3.3 são funções definidas em todo o domínio, sendo conhecidas como FBRs de suporte global. A análise global é utilizada com resultados satisfatórios em diversos problemas. Porém, quando o número de pontos é elevado, a matriz de interpolação resultante é densa e pode ser altamente mal-condicionada, causando problemas de estabilidade. Esta dificuldade pode ser superada pela aplicação de FBRs de suporte compacto que ao serem empregadas geram matrizes de interpolação positivas definidas e esparsas.

As FBRs de suporte compacto ou local surgiram em meados de 1990 e as mais utilizadas são as funções apresentadas por Wendland (1995). Wendland (1995) demonstrou que, para uma determinada dimensão  $d$  e um determinado grau de suavidade, sempre existe uma função de base radial positiva definida na forma de um polinômio de uma variável de grau mínimo, único dentro de um fator constante. Algumas dessas funções são apresentadas na Tabela 3.4 para diversos graus de continuidade desejados ( $C^n$ ) e dimensionalidade  $d$ . Sendo  $\phi$  positiva definida e se  $\phi \in PD_d$ , deve-se ressaltar que  $\phi \in PD_k$  sempre que  $k \leq d$ .

As funções apresentadas na Tabela 3.4 têm raio de influência igual a um. Para adaptar a interpolação de dados dispersos de diferentes densidades, torna-se necessário dimensionar o raio de influência. Assim, as funções apresentadas podem ser reescritas substituindo  $r$  por  $(r/a)$ , onde  $a$  é o raio de influência a ser considerado. Para valores de  $r$  maiores do que o valor de  $a$  considerado, a função é truncada para o valor zero. Sendo assim, o raio de influência controla a densidade da matriz, pois se o valor de  $a$  for maior que o maior valor de  $r$  do domínio, a matriz será completamente cheia. Por outro lado, quanto menor o valor de  $a$ , maior a esparsidade da matriz, resultando em menor precisão. Num caso extremo, se  $a$  for menor que a menor distância entre dois pontos de colocação (nós), a matriz de interpolação será uma matriz diagonal. Portanto, um valor apropriado de raio de influência a ser utilizado deve estar entre estes dois limites.



**Tabela 3.4:** FBRs de suporte compacto (Wendland, 1995)

| $\phi(r)$                     | $C^n \cap PD_d$ |
|-------------------------------|-----------------|
| $(1-r)_+$                     | $C^0 \cap PD_1$ |
| $(1-r)_+^3(3r+1)$             | $C^2 \cap PD_1$ |
| $(1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$        | $C^4 \cap PD_1$ |
| $(1-r)_+^2$                   | $C^0 \cap PD_3$ |
| $(1-r)_+^4(4r+1)$             | $C^2 \cap PD_3$ |
| $(1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$      | $C^5 \cap PD_3$ |
| $(1-r)_+^8(32r^3+25r^2+8r+1)$ | $C^6 \cap PD_3$ |
| $(1-r)_+^3$                   | $C^0 \cap PD_5$ |
| $(1-r)_+^5(5r+1)$             | $C^2 \cap PD_5$ |
| $(1-r)_+^7(16r^2+7r+1)$       | $C^4 \cap PD_5$ |

Segundo Floater e Iske (1996), o valor do raio de influência interfere no comportamento da aproximação e na estabilidade do processo de interpolação. Do ponto de vista do comportamento da aproximação, intuitivamente, parece que uma maior densidade de valores na matriz de interpolação produz melhor aproximação, sendo melhor um maior valor do raio de influência. No entanto, grandes valores do raio de influência geram valores pequenos para a razão  $(r/a)$  e colunas da matriz de colocação podem ter valores muito próximos, podendo ocasionar perda de estabilidade no processo de interpolação. Portanto, pensando nesta estabilidade, o melhor seria trabalhar com valores menores do raio de influência.

### 3.1.2 A Solução de Equações Diferenciais Parciais Utilizando Funções de Base Radial

Ideia similar à da interpolação, pode ser utilizada para a solução de equações diferenciais parciais, utilizando FBRs.

Seja um dado domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  e uma equação diferencial parcial de forma que

$$Lu(x) = f(x), \text{ em } \Omega \quad (3.6)$$

Com condição de contorno de Dirichlet,

$$u(x) = g(x), \text{ em } \partial\Omega \quad (3.7)$$

onde  $L$  é o operador diferencial parcial.

No método assimétrico de colocação (Kansa, 1990a,b), a solução aproximada  $\hat{u}$  é representada por uma expansão análoga àquela utilizada para a interpolação de dados, Equação (3.3), ou seja,

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (3.8)$$

onde  $\hat{u}$  é o valor aproximado da solução no ponto de interesse,  $\phi(\|x - x_i\|)$  é a função de base radial,  $\lambda_i$  são as incógnitas do sistema de equações,  $x_i$  os centros,  $B_i$  os pontos do contorno do domínio,  $N$  o número de pontos do domínio.

Sendo a matriz de interpolação  $\phi = \phi(\|x - x_i\|)$  definida como

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_L \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

obtida por

$$\tilde{A}_L = L\phi(\|x_j - x_i\|) \quad j = 1, 2, \dots, N_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

$$\tilde{A} = \phi(\|x_j - x_i\|) \quad j = N_i + 1, N_i + 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.11)$$

onde  $N_i$  é o número de pontos internos do domínio.

Kansa (1990a,b) propôs o método utilizando a FBR multiquádrica e, conseqüentemente, este método de colocação assimétrico frequentemente aparece na literatura como Método Multiquádrico.

O problema do método de Kansa é que, para um parâmetro de forma  $\varepsilon$  constante, a matriz de interpolação pode ser singular para certas configurações de centros.

No método de colocação simétrico, baseado na interpolação de Hermite, a expansão aproximada para a função incógnita  $u$ , assume a seguinte forma

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{N_i} \lambda_i L^P \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{i=N_i+1}^N \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (3.12)$$

onde  $N_i$  é o número de pontos no domínio  $\Omega$ ,  $N = N_i + N_b$ ,  $N_b$  é o número de pontos no contorno  $\partial\Omega$  e  $L^P$  é o operador diferencial da equação diferencial parcial. Sendo a matriz de interpolação  $\phi = \phi(\|x - x_i\|)$  simétrica definida como

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{LL^P} & \tilde{A}_L \\ \tilde{A}_{L^P} & \tilde{A} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Sendo os blocos gerados da seguinte forma

$$(\tilde{A}_{LL^P})_{ij} = LL^P \phi(\|x_j - x_i\|), \quad j = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_i \quad (3.14)$$

$$(\tilde{A}_L)_{ij} = L\phi(\|x_j - x_i\|), \quad j = 1, 2, \dots, N_i, \quad i = N_i + 1, N_i + 2, \dots, N \quad (3.15)$$

$$(\tilde{A}_{L^P})_{ij} = L^P \phi(\|x_j - x_i\|), \quad j = N_i + 1, N_i + 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N_i \quad (3.16)$$

$$\tilde{A}_{ij} = \phi(\|x_j - x_i\|), \quad j = N_i + 1, N_i + 2, \dots, N, \quad i = N_i + 1, N_i + 2, \dots, N \quad (3.17)$$

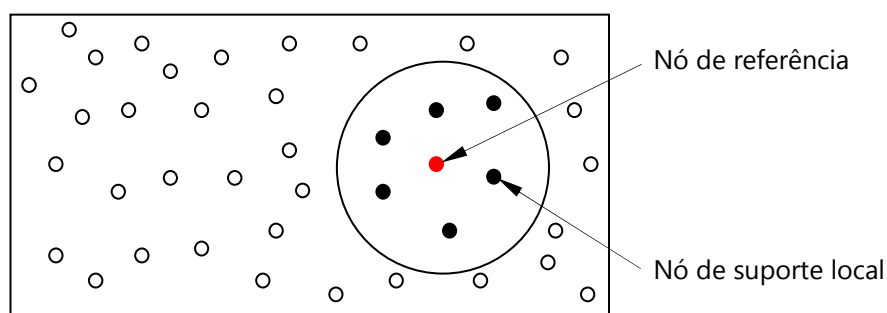
A matriz  $A$  na Equação (3.13) é não-singular para uma escolha apropriada de  $\phi$ . Um ponto a favor da abordagem de Hermite é que a matriz  $A$  é simétrica, ao contrário da matriz de interpolação obtida pelo método assimétrico, o que é de grande valor para uma implementação eficiente do método de colocação. Vale notar que, embora a matriz  $A$  agora seja composta por quatro blocos, ela permanece do mesmo tamanho da matriz obtida pelo método de Kansa.

Se o método de Hermite possui a vantagem de gerar matrizes de interpolação simétricas, o método de Kansa apresenta a vantagem de ser mais simples de implementar, uma vez que requer número menor de derivadas da função básica.

## 3.2 O Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR)

O Método de Quadratura Diferencial (MQD) foi inicialmente proposto por Bellman *et al.* (1972) seguindo a ideia de quadratura integral. A essência do método é a aproximação das derivadas parciais de uma função desconhecida através de somas ponderadas de valores da função nos pontos discretos do domínio.

No Método de Quadratura Diferencial Local (MQDL), a aproximação é aplicada localmente. Para cada ponto do domínio (nó de referência), define-se uma região de suporte (estêncil), conforme ilustrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Suporte local (estêncil) em torno de um nó de referência

Seja  $f(\mathbf{x})$  uma função suficientemente suave. Então a derivada de  $m$ -ésima ordem com relação a  $\mathbf{x}$ , no ponto  $\mathbf{x}_i$ , pode ser aproximada utilizando o MQDL conforme a Equação (3.18)

$$\frac{\partial^m f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}^m} = \sum_{j=1}^{N_s} w_{ij}^{(m)} f(\mathbf{x}_j), \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{x}_j$ ,  $j=1,\dots,N_s$ , são os pontos de suporte,  $f(\mathbf{x}_j)$  e  $w_{ij}^{(m)}$  são, respectivamente, os valores da função nestes pontos e os coeficientes de ponderação relacionados. O índice  $i$  relaciona o ponto numa discretização global de  $N$  nós e o índice  $j$  numa discretização local (suporte). O procedimento pode ser utilizado para qualquer

dimensão do domínio e para a determinação dos coeficientes de ponderação, que é um ponto crucial do método, é necessário um conjunto de funções de base.

Shu *et al.* (2003) propuseram então, o Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR), que utiliza uma função de base radial para determinar os coeficientes de ponderação no processo de quadratura diferencial local (Bhatia e Arora, 2016). Este método é atualmente denominado por vários autores como Método de Diferenças Finitas gerado por Funções de Base Radial (*Radial Basis Function-generated Finite Difference – RBF-FD*), Santos (2016).

Nesta Tese de Doutorado, para a aplicação do MQDL-FBR, foram utilizadas as FBRs Multiquádrica, conforme apresentada na Tabela 3.1, e a FBR utilizada por Yu (2001), para interpolação de superfícies de pontos dispersos, apresentada na Equação (3.19), nomeada aqui de FBR TPS modificada (TPSm).

$$\phi(x) = r^2 \ln(r^2 + c) \quad (3.19)$$

Substituindo o conjunto de FBR na Equação (3.18), obtém-se um sistema de equações lineares local para a determinação dos coeficientes de ponderação (Santos, 2012), conforme a Equação (3.20).

$$\frac{\partial^m \phi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^{N_S} w_{ij}^{(m)} \phi_k(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, 2, \dots, N_S \quad (3.20)$$

Para um dado ponto de referência  $i$ , o sistema de equações obtido na partir da Equação (3.20) tem  $N_S$  incógnitas com  $N_S$  equações. A solução deste sistema fornece então, os coeficientes de ponderação  $w_{ij}^{(m)}$ , que são utilizados para a aproximação das derivadas da função desconhecida. Na forma matricial, a Equação (3.20) pode ser escrita como

$$\left\{ \frac{\partial^m \phi_k(\mathbf{x}_i)}{\partial x^m} \right\} = [A] \{w_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.21)$$

A matriz  $[A]$ , obtida da FBR, é simétrica e, caso ela seja singular, o sistema não tem solução. Para a FBR multiquádrica, Hon e Shaback (2001) mostraram que os casos de singularidade são raros, podendo ser desconsiderados.

Os coeficientes de ponderação calculados para cada derivada de cada nó de referência devem ser armazenados, bem como a relação de conectividade entre os nós de suporte, estabelecida para a definição da estrutura do estêncil.

Expressando de forma explícita, a Equação (3.21) para a primeira derivada ( $m = 1$ ) em relação à coordenada  $x$ , tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{N_S}(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\{b_i\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_1(\mathbf{x}_{N_S}) \\ \phi_2(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_2(\mathbf{x}_{N_S}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N_S}(\mathbf{x}_1) & \phi_{N_S}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_{N_S}(\mathbf{x}_{N_S}) \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{i,1}^x \\ w_{i,2}^x \\ \vdots \\ w_{i,N_S}^x \end{bmatrix}}_{\{w_i\}} \quad (3.22)$$

Diversos critérios para definição da estrutura do estêncil podem ser estabelecidos, como por exemplo: utilizar um determinado número de nós mais próximos ao nó de referência ou estabelecer um raio e considerar como nós de suporte os pontos internos à circunferência definida por esse raio. Neste último caso, o número de nós de suporte pode ser variável para diferentes pontos de referência. O suporte local pode ainda ser centrado ou não. A Figura 3.5 exemplifica um suporte local não centrado.

Uma característica favorável do método é que os coeficientes de ponderação estão relacionados somente com a FBR utilizada e a posição dos nós de suporte. É naturalmente um método *meshfree*, uma vez que a única informação necessária dos pontos do domínio é a localização dos mesmos (Shu *et al.*, 2003).

Apesar do MQDL-FBR apresentar uma abordagem local, problemas de mal-condicionamento podem ocorrer na matriz da FBR. Para suportes locais com maior número de pontos, a matriz  $[A]$  do sistema (3.21) pode ser mal-condicionada,

impedindo o cálculo de valores satisfatórios para os coeficientes de ponderação, para determinados valores do parâmetro de forma da FBR. Diversos trabalhos têm sido desenvolvidos, propondo formas para melhorar o condicionamento da matriz  $[A]$ , como por exemplo, o método Contour-Padé (Sarra e Kansa, 2009) e o método RBF-QR, que permite o cálculo de interpolantes e a aproximação de derivadas para pequenos valores do parâmetro de forma ( $\varepsilon$ ) da FBR (Fornberg e Piret, 2008, Fornberg *et al.*, 2011, Fornberg *et al.*, 2013, Larsson *et al.*, 2013).

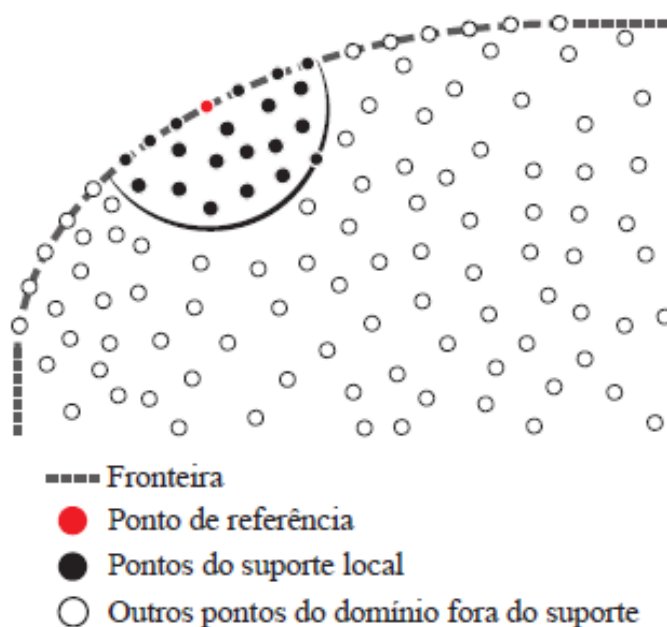
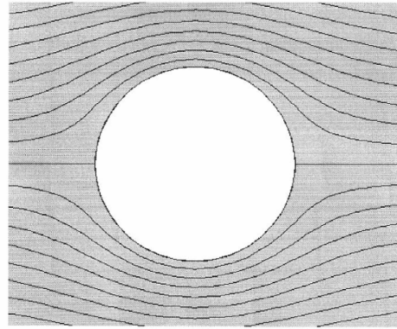


Figura 3.5: Suporte local não centrado (Santos, 2016)

### 3.3 Considerações Físicas e Formulação Matemática para o Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária

Escoamentos externos em corpos simétricos, tais como cilindros e esferas, não geram sustentação, uma vez que não geram assimetria no escoamento incidente, conforme ilustrado na Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Escoamento em torno de um cilindro (Pereira, 2005)

Em perfis esbeltos, nos quais a simetria acontece em relação a apenas um eixo, os campos de pressão e velocidade, acima e abaixo do corpo são simétricos, quando o corpo está alinhado com o escoamento incidente. No entanto, quando o corpo é ligeiramente rotacionado, observa-se que uma assimetria surge no escoamento. Tal assimetria altera os campos de velocidade e pressão, gerando uma força de sustentação (Pereira, 2005).

Considerando um escoamento com efeitos de compressibilidade desprezíveis e efeitos viscosos restritos a uma estreita camada limite, as hipóteses de escoamento incompressível e irrotacional são bastante razoáveis para o escoamento em torno de um corpo. Tal escoamento é classificado como escoamento potencial e incompressível.

Sendo o escoamento bidimensional e incompressível, define-se então, a função corrente  $\psi$  como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.23)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.24)$$

onde  $u$  é a componente da velocidade na direção  $x$  e  $v$  é a componente da velocidade na direção  $y$ . Pela condição de irrotacionalidade, tem-se que

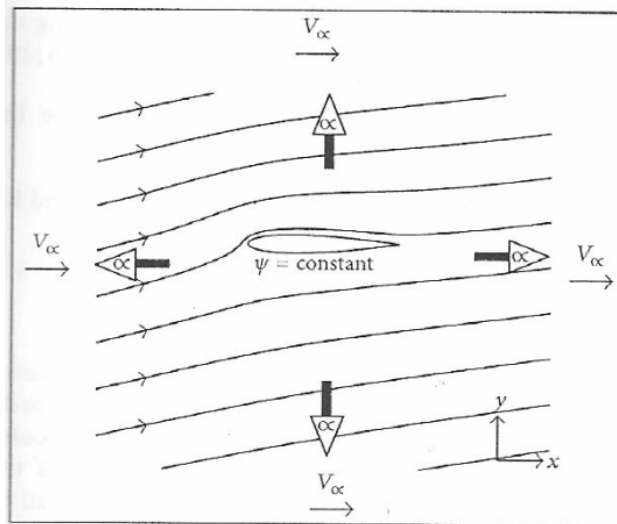
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$



Substituindo as Equações (3.23) e (3.24) na Equação (3.25), tem-se a equação governante para o escoamento potencial e bidimensional ou a equação de Laplace para a função-corrente, dada a seguir.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

Tal equação requer duas condições de contorno, uma na superfície do corpo e uma no limite do domínio físico (região de escoamento não perturbado), conforme ilustrado na Figura 3.7, para o escoamento em torno de um aerofólio.



**Figura 3.7:** Condições de contorno: escoamento não viscoso (Anderson, 1985)

Longe da superfície do corpo, a velocidade tende à velocidade do escoamento incidente (condição de corrente livre). Se  $\alpha_\infty$  é o ângulo de ataque e  $V_\infty$  a velocidade da corrente livre, então as componentes da velocidade podem ser escritas como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \cos \alpha_\infty \quad (3.27)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_\infty \sin \alpha_\infty \quad (3.28)$$

Em termos da função-corrente, tem-se então a condição de contorno na região de escoamento não-perturbado (fronteira externa do domínio físico):

$$\psi(x, y) = y \cos \alpha_\infty - x \operatorname{sen} \alpha_\infty \quad (3.29)$$

Na Equação (3.29), o comprimento do corpo e a velocidade da corrente livre  $V_\infty$ , foram utilizadas para adimensionalizar a função-corrente.

Uma vez que o escoamento é não viscoso, não se aplica na superfície a condição de não deslizamento. A condição de contorno aplicada é a de impenetrabilidade, ou seja, o vetor velocidade deve ser tangente à superfície. Assim,

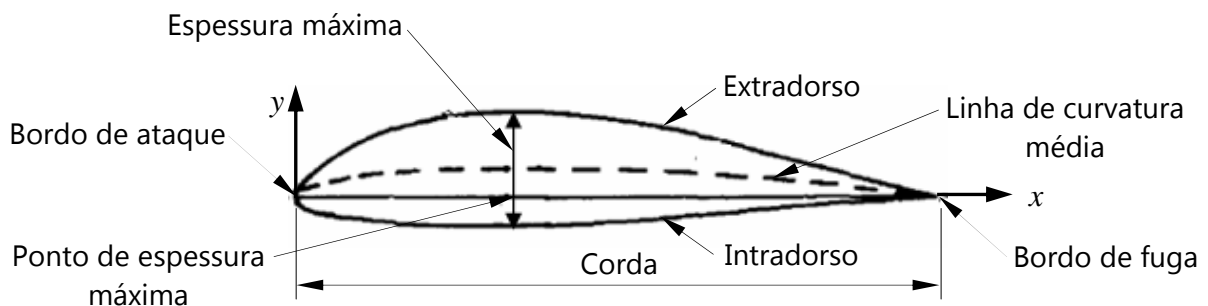
$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (3.30)$$

onde  $s$  é tomado ao longo da superfície ou,

$$\psi(x, y) = \text{constante} \quad (3.31)$$

Além das condições de contorno, necessárias para a solução da Equação (3.26) no escoamento potencial em torno de um corpo, a aplicação da condição de Kutta, que fixa o valor da circulação, é fundamental para perfis aerodinâmicos com regiões próximas ao bordo de fuga afilada ou aguda. Tal condição exige escoamento suave e que não contorne o bordo de fuga. Na região muito próxima ao bordo de fuga a pressão no extradorso precisa ser igual à pressão no intradorso (Wilkinson, 1967).

A Figura 3.8 ilustra a terminologia utilizada para um aerofólio típico de corda  $C$ .



**Figura 3.8:** Terminologia para um aerofólio típico (adaptado de Anderson, 1985)

### 3.4 Aplicação do MQDL-FBR no Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária

O escoamento potencial e bidimensional em torno de um corpo tem como equação governante para a função-corrente a equação de Laplace, Equação (3.26), com as condições de contorno dadas pelas Equações (3.29) e (3.30). Quando a Equação (3.26) é transformada para o sistema de coordenadas curvilíneas, ela assume a forma dada a seguir:

$$\alpha \psi_{\xi\xi} - 2\beta \psi_{\xi\eta} + \gamma \psi_{\eta\eta} = 0 \quad (3.32)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as métricas da transformação, dadas pelas Equações (2.99) a (2.101).

Sendo as condições de contorno, depois de transformadas, escritas como:

Na superfície do corpo, para  $i = 1, \dots, i_{\max}$  :

$$\psi(\xi, \eta) = \psi_0 \quad \text{em } \eta = \eta_1 \quad (j = 1) \quad (3.33)$$

Na fronteira externa do domínio, para  $i = 1, \dots, i_{\max}$  :

$$\psi(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_2) \cos \alpha_\infty - x(\xi, \eta_2) \sin \alpha_\infty \quad \text{em } \eta = \eta_2 \quad (j = j_{\max}) \quad (3.34)$$

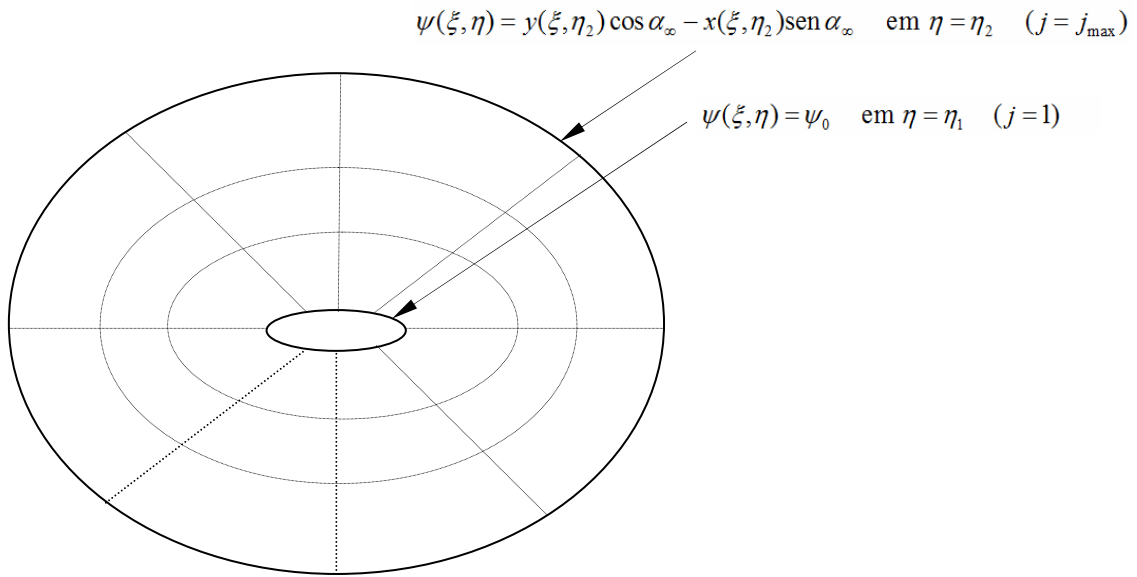
A Figura 3.9 ilustra as fronteiras e as condições de contorno transformadas, correspondentes.

Discretizando a Equação (3.32) para um nó de referência  $i$  do domínio, obtém-se

$$\alpha \psi(\xi_i, \eta_i)_{\xi\xi} - 2\beta \psi(\xi_i, \eta_i)_{\xi\eta} + \gamma \psi(\xi_i, \eta_i)_{\eta\eta} = 0 \quad (3.35)$$

Aproximando as derivadas pelo MQDL-FBR, conforme a Equação (3.21) e aplicando na Equação (3.35) tem-se que

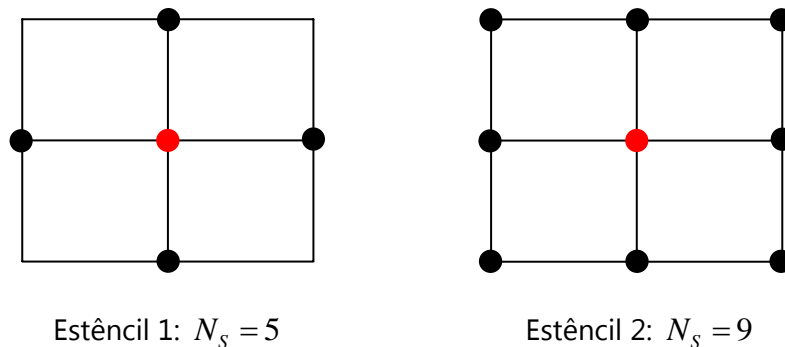
$$\sum_{j=1}^{N_s} [\alpha w_{i,j}^{2\xi} - 2\beta w_{i,j}^{\xi\eta} + \gamma w_{i,j}^{2\eta}] \psi(\xi_j, \eta_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.36)$$



**Figura 3.9:** Condições de contorno transformadas

onde  $w_{i,j}^{2\xi}$  e  $w_{i,j}^{2\eta}$  são os coeficientes de ponderação associados às derivadas de segunda ordem com relação a  $\xi$  e a  $\eta$ , respectivamente, e  $w_{i,j}^{\xi\eta}$  é o coeficiente de ponderação associado à derivada de segunda ordem mista, para o nó de referência  $i$ .

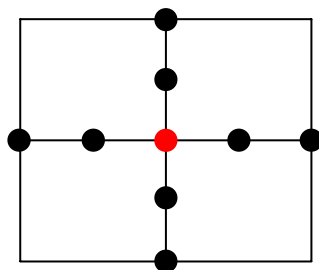
Nesta Tese de Doutorado, foram adotadas estruturas de suporte local centradas e, inicialmente, foram testadas duas distribuições diferentes dos nós de suporte para a aplicação do MQDL-FBR. A Figura 3.10 ilustra as estruturas de suporte testadas, sendo estas, conhecidas como estruturas de primeira camada (Santos, 2012).



**Figura 3.10:** Estruturas de suporte local (estênceis) testadas

Estruturas de segunda camada não foram testadas por apresentarem, para os pontos de referência próximos do corpo, pontos de suporte "internos" ao corpo. Tais situações necessitariam de aproximações, ocasionando erros numéricos.

A Figura 3.11 ilustra uma estrutura de suporte de segunda camada.



**Figura 3.11:** Estrutura de suporte local (estêncil) de segunda camada

Dentre as estruturas testadas e apresentadas na Figura 3.10, fez-se a opção pela estrutura denominada estêncil 2, com nove nós de suporte, em função das derivadas de segunda ordem mista se anularem na estrutura denominada estêncil 1. Foi utilizada a mesma estrutura de suporte local para todos os pontos de referência do domínio, sendo que, então, o cálculo dos coeficientes de ponderação foi realizado apenas uma vez e armazenado.

A Equação (3.36) foi então aplicada para os nós internos, considerando as métricas e os valores do Jacobiano obtidos na geração da malha para os pontos de referência. Foram consideradas quatro situações: 1) pontos de referência sem nós de suporte nas fronteiras físicas, 2) pontos de referência com nós de suporte na fronteira interna, 3) pontos de referência com nós de suporte na fronteira externa e 4) nós de referência situados nas fronteiras reentrantes. Atenção especial foi dada aos nós de referência localizados nas fronteiras reentrantes, para que as estruturas de suporte dos mesmos se comunicassem.

A solução do sistema de equações para determinação dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR foi obtida utilizando o Método de Eliminação de Gauss, com pivotamento.

### 3.4.1 Superposição de Soluções

Uma vez que o sistema a ser resolvido é linear em  $\psi$ , a solução para o escoamento em torno do aerofólio, para qualquer ângulo de ataque, foi obtida fazendo a superposição de três soluções, descritas a seguir, com as respectivas condições de contorno.

#### Solução (1):

O escoamento com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , sem circulação.

$$\psi_{i,1}^{(1)} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.37)$$

$$\psi_{i,j_{\max}}^{(1)} = y_{i,j} \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.38)$$

#### Solução (2):

O escoamento com ângulo de ataque  $\alpha = 90^\circ$ , sem circulação.

$$\psi_{i,1}^{(2)} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.39)$$

$$\psi_{i,j_{\max}}^{(2)} = -x_{i,j} \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.40)$$

#### Solução (3):

O escoamento com  $V_\infty = 0$ , com circulação.

$$\psi_{i,1}^{(3)} = 1 \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.41)$$

$$\psi_{i,j_{\max}}^{(3)} = 0 \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.42)$$

Os sistemas de equações obtidos para o cálculo das soluções descritas acima, foram solucionados utilizando a ferramenta de fatoração LDU do *software* MATLAB<sup>®</sup>, devido à esparsidade da matriz do MQDL-FBR.

### 3.4.2 A Condição de Kutta

Para a determinação do valor da função-corrente, foi imposta na superfície do corpo a condição de Kutta, que estabelece que o escoamento deva ser suave e que não contorne o bordo de fuga. Uma circulação é introduzida no escoamento, modificando a configuração das linhas de corrente, de tal forma que a velocidade no bordo de fuga seja finita.

Uma vez obtidas as soluções fundamentais ( $\psi^{(1)}$ ,  $\psi^{(2)}$  e  $\psi^{(3)}$ ), a solução completa para a função corrente é determinada a partir da Equação (3.43).

$$\psi(\xi, \eta, F) = \psi^{(1)}(\xi, \eta) \cos \alpha_\infty + \psi^{(2)}(\xi, \eta) \sin \alpha_\infty + F\psi^{(3)}(\xi, \eta) \quad (3.43)$$

onde  $F$  é um fator determinado a partir da imposição da condição de Kutta.

Para a determinação deste fator  $F$ , foi adotado o procedimento apresentado por Pires Júnior (1977), descrito a seguir.

Seja a transformação apresentada nas Equações (2.3) e (2.4). Aplicando a regra da cadeia, as expressões das derivadas de primeira ordem de uma função  $f$  são obtidas e estão apresentadas nas Equações (2.5) e (2.6). Fazendo  $f = \psi$  nessas equações, pode-se escrever que

$$\psi_x = \psi_\xi \xi_x + \psi_\eta \eta_x \quad (3.44)$$

$$\psi_y = \psi_\xi \xi_y + \psi_\eta \eta_y \quad (3.45)$$

Das relações de transformação e substituindo as Equações (2.71) à (2.74) nas Equações (3.44) e (3.45), tem-se

$$\psi_x = J(\psi_\xi y_\eta - \psi_\eta y_\xi) \quad (3.46)$$

$$\psi_y = J(\psi_\eta x_\xi - \psi_\xi x_\eta) \quad (3.47)$$

Utilizando as Equações (3.46) e (3.47) nas Equações (3.23) e (3.24), que definem a função corrente  $\psi$ , então,

$$u = \psi_y = J(\psi_\eta x_\xi - \psi_\xi x_\eta) \quad (3.48)$$

$$v = -\psi_x = J(\psi_\eta y_\xi - \psi_\xi y_\eta) \quad (3.49)$$

Na superfície do corpo, como  $\psi_\xi = 0$ , então, as Equações (3.48) e (3.49) são reescritas como

$$u = \psi_y = J \psi_\eta x_\xi \quad (3.50)$$

$$v = -\psi_x = J \psi_\eta y_\xi \quad (3.51)$$

Uma forma de garantir que, na região do bordo de fuga, a linha de corrente tenha a mesma direção do perfil é fazer com que a componente normal da velocidade  $v$  seja nula. Assim, para que isto acontecesse, foi considerado no bordo de fuga que

$$\psi_\eta = 0 \quad (3.52)$$

Derivando a Equação (3.43) em relação a  $\eta$ , pode-se escrever que

$$\psi_\eta(\xi, \eta, F) = \psi_\eta^{(1)}(\xi, \eta) \cos \alpha_\infty + \psi_\eta^{(2)}(\xi, \eta) \sin \alpha_\infty + F \psi_\eta^{(3)}(\xi, \eta) \quad (3.53)$$

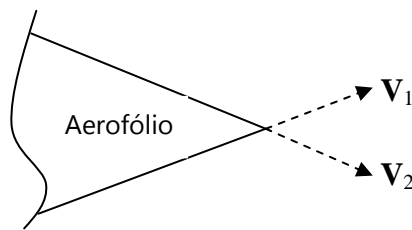
Aplicando a Equação (3.52) na Equação (3.53), para que a condição de Kutta fosse obedecida, o fator  $F$  foi calculado segundo a Equação (3.54).

$$F = \frac{-\psi_\eta^{(1)}(\xi, \eta) \cos \alpha_\infty - \psi_\eta^{(2)}(\xi, \eta) \sin \alpha_\infty}{\psi_\eta^{(3)}(\xi, \eta)} \quad (3.54)$$

Uma vez calculado, este fator  $F$  foi utilizado na Equação (3.43) para determinação da função-corrente em todos os pontos do domínio.

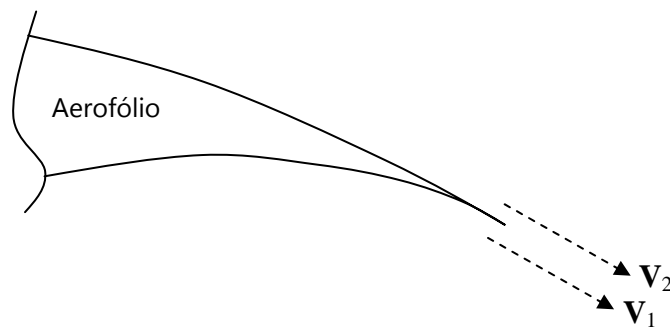
A metodologia aqui utilizada para a imposição da condição de Kutta garante a velocidade nula no bordo de fuga (ponto de estagnação), o que é válido quando o aerofólio tem um ângulo finito no bordo de fuga, conforme ilustrado na Figura 3.12.





**Figura 3.12:** Aerofólio com ângulo finito no bordo de fuga (adaptada de Mohebbi e Sellier, 2014)

Se  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$  são os vetores velocidade no intrabordo e no extrabordo, respectivamente, ter dois valores finitos do módulo destes vetores, em direções diferentes, no mesmo ponto, é impossível. Assim, a única possibilidade é ter ambas as velocidades nulas (Mohebbi e Sellier, 2014). No entanto, se o aerofólio tiver bordo de fuga afilado, esta consideração não é realista. Uma vez que, nesta situação, os vetores velocidade estão na mesma direção, estas grandezas assumem magnitudes finitas e iguais, sendo este valor, diferente de zero, conforme ilustrado na Figura 3.13.



**Figura 3.13:** Aerofólio com bordo de fuga afilado (adaptada de Mohebbi e Sellier, 2014)

### 3.4.3 Cálculo das Velocidades

As Equações (3.48) e (3.49) podem ser utilizadas para a determinação das componentes do vetor velocidade para os pontos do domínio. Já, as Equações (3.50) e (3.51) são válidas para a superfície do corpo, na qual a função-corrente é constante, ou seja,  $\psi_\xi = 0$ .

A Equação (3.55) apresenta a expressão para o vetor velocidade na superfície do corpo.

$$\vec{V} = Jx_{\xi}\psi_{\eta}\hat{i} + Jy_{\xi}\psi_{\eta}\hat{j} \quad (3.55)$$

O vetor unitário tangente à superfície do corpo pode ser escrito como

$$\vec{\tau} = \frac{x_{\xi}\hat{i} + y_{\xi}\hat{j}}{\sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}} \quad (3.56)$$

ou

$$\vec{\tau} = \frac{x_{\xi}\hat{i} + y_{\xi}\hat{j}}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.57)$$

Assim, a componente do vetor velocidade tangente à superfície do corpo pode ser obtida como

$$V_t = \vec{V} \cdot \vec{\tau} = (Jx_{\xi}\psi_{\eta}\hat{i} + Jy_{\xi}\psi_{\eta}\hat{j}) \cdot \frac{x_{\xi}\hat{i} + y_{\xi}\hat{j}}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.58)$$

Então,

$$V_t = J\psi_{\eta}\sqrt{\gamma} \quad (3.59)$$

Na superfície do corpo, as derivadas de  $x$  e  $y$  em relação à  $\xi$  foram aproximadas pelas diferenças centradas de segunda ordem, conforme Equações (2.108) e (2.110), em todos os pontos, exceto nas fronteiras reentrantes, ou seja, em  $i=1$  e em  $i=i_{\max}$  (Thames *et al.* (1977)). Nestas fronteiras, tem-se

$$\left(x_{\xi}\right)_{1,1} = \frac{1}{2}[-x_{3,1} + 4x_{2,1} - 3x_{1,1}] \quad (3.60)$$

$$\left(x_{\xi}\right)_{i_{\max},1} = \frac{1}{2}[x_{i_{\max}-2,1} - 4x_{i_{\max}-1,1} + 3x_{i_{\max},1}] \quad (3.61)$$

Sendo que expressões análogas foram utilizadas para a coordenada  $y$ .

As derivadas, na superfície do corpo, em relação  $\eta$  foram aproximadas utilizando as expressões das diferenças unilaterais de segunda ordem, conforme

$$(x_\eta)_{i,1} = \frac{1}{2}[-x_{i,3} + 4x_{i,2} - 3x_{i,1}] \quad (3.62)$$

$$(y_\eta)_{i,1} = \frac{1}{2}[-y_{i,3} + 4y_{i,2} - 3y_{i,1}] \quad (3.63)$$

$$(\psi_\eta)_{i,1} = \frac{1}{2}[-\psi_{i,3} + 4\psi_{i,2} - 3\psi_{i,1}] \quad (3.64)$$

#### 3.4.4 Cálculo do Coeficiente de Pressão

O coeficiente de pressão,  $C_p$ , é uma grandeza adimensional que relaciona a pressão estática com a pressão dinâmica em um escoamento ideal. É definido como

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad (3.65)$$

onde  $p_\infty$  e  $V_\infty$  são, respectivamente, a pressão e a velocidade do escoamento não-perturbado e  $\rho_\infty$  a massa específica do fluido em escoamento.

Para escoamentos potenciais e incompressíveis, o coeficiente de pressão pode ser expresso em termos de velocidades apenas, a partir da equação de Bernoulli (Anderson, 1985).

Seja o escoamento ao redor de um corpo aerodinâmico. Para um ponto tomado na superfície do corpo, onde  $p$  e  $V$  são, respectivamente, a pressão e a velocidade do escoamento neste ponto, então, aplicando a equação de Bernoulli, tem-se

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (3.66)$$

ou

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (V_\infty^2 - V^2) \quad (3.67)$$

Substituindo a Equação (3.66) na Equação (3.64), obtém-se

$$C_p = 1 - \left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 \quad (3.68)$$

ou

$$C_p = 1 - (V_t)^2 \quad (3.69)$$

onde  $V_t$  é a velocidade tangencial (local) à superfície do corpo, adimensionalizada pela velocidade da corrente livre (escoamento não perturbado).

## Capítulo 4

# Testes Numéricos para Aplicação do MQDL-FBR no escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de Corpos de Geometria Arbitrária

Este capítulo apresenta os testes numéricos realizados e os principais resultados obtidos para a aplicação do MQDL-FBR no escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária, a saber: o cilindro, a elipse, aerofólios Joukowski simétricos e aerofólio NACA 0012.

O programa utilizado para a simulação foi desenvolvido utilizando o *software* MATLAB<sup>®</sup>, tendo como objetivos obter as linhas de função-corrente e avaliar o comportamento do coeficiente de pressão na superfície dos corpos,  $C_p$ . Todos os testes foram realizados utilizando um computador com processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> Duo CPU E7500 @2.93GHz, com memória RAM de 4,00 GB, 64-bit.

O fluxograma utilizado para o desenvolvimento deste programa está apresentado no Apêndice B.

Para análise dos resultados numéricos obtidos, foi avaliado o Erro Médio Quadrático (EMQ) encontrado para o coeficiente de pressão na superfície dos corpos, conforme definido na Equação (4.1), tomando como referências as soluções exatas disponíveis na literatura.

$$EMQ = \frac{1}{i_{\max}} \sum_{n=1}^{n=i_{\max}} (C_{p_{\text{numérico}}} - C_{p_{\text{exato}}})^2 \quad (4.1)$$

Os casos simulados e, neste capítulo apresentados, foram: 1) o cilindro circular, sem sustentação; 2) a elipse com razão de aspecto igual a 0,5 e com ângulos de ataque iguais a 0° e a 5°; 3) os aerofólios Joukowski simétricos com ângulos de ataque 0° e 5° e regiões do bordo de fuga arredondada e afilada; 4) o aerofólio NACA 0012 com diferentes ângulos de ataque.

A validação do programa foi realizada a partir dos resultados obtidos para o cilindro circular, para a elipse e para os aerofólios Joukowski simétricos, que apresentam solução analítica e exata para o do coeficiente de pressão na superfície. Posteriormente, foram realizadas as simulações para o aerofólio NACA 0012.

As simulações foram realizadas para diferentes tamanhos de malhas e diversos valores do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, conforme a Tabela 3.1 (Capítulo 3) e da FBR TPS Modificada (TPSm), apresentada na Equação (3.19). A FBR Multiquádrica, em todas as situações simuladas, apresentou o menor EMQ para o coeficiente de pressão na superfície do cilindro, da elipse e dos aerofólios Joukowski simétricos. Assim, fez-se a opção por, neste capítulo, apresentar os resultados obtidos quando utilizada esta FBR. São comentados os resultados obtidos com a utilização da FBR TPS Modificada, mas as tabelas e os gráficos para esta FBR estão apresentados no Apêndice D.

Com relação às funções de controle da malha,  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ , observou-se que, para todas as geometrias, resultados satisfatórios foram obtidos com valores de  $P(\xi, \eta) = 0$  e de  $Q(\xi, \eta) = 0$ .

## 4.1 Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de um Cilindro Circular

Foi avaliado o escoamento potencial e bidimensional em torno de um cilindro circular fixo, de diâmetro igual a uma unidade de comprimento. Para análise dos

resultados numéricos, foi avaliado o Erro Médio Quadrático (EMQ) tomando como referência a solução teórica apresentada na Equação (4.2), Anderson (1985).

$$C_p = 1 - 4 \text{sen}^2 \theta \quad (4.2)$$

Para avaliar o comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR, foram realizadas simulações com diferentes valores do parâmetro de forma, para três tamanhos diferentes da malha, a saber: 49 x 49, 59 x 59 e 89 x 89 pontos.

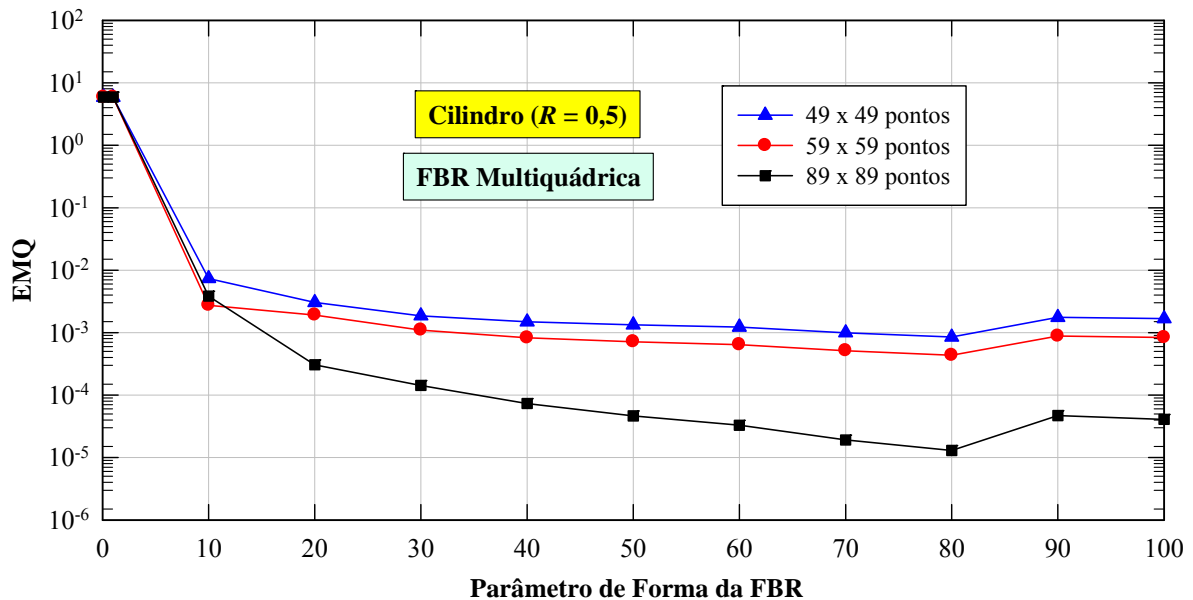
A Tabela 4.1, apresenta os resultados obtidos para o EMQ, com a variação do parâmetro de forma, para as três malhas citadas, quando utilizada a FBR Multiquádrica. Estes resultados estão ilustrados na Figura 4.1.

**Tabela 4.1:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica

| $c$     | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0,100   | $5,877551 \times 10^0$    | $5,898305 \times 10^0$    | $5,932584 \times 10^0$    |
| 1,000   | $5,877512 \times 10^0$    | $5,898304 \times 10^0$    | $5,932584 \times 10^0$    |
| 10,000  | $7,344484 \times 10^{-3}$ | $2,746082 \times 10^{-3}$ | $3,834777 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $3,033909 \times 10^{-3}$ | $1,918531 \times 10^{-3}$ | $3,056215 \times 10^{-4}$ |
| 30,000  | $1,865372 \times 10^{-3}$ | $1,099095 \times 10^{-3}$ | $1,432664 \times 10^{-4}$ |
| 40,000  | $1,487847 \times 10^{-3}$ | $8,264715 \times 10^{-4}$ | $7,321195 \times 10^{-4}$ |
| 50,000  | $1,332925 \times 10^{-3}$ | $7,129800 \times 10^{-4}$ | $4,651111 \times 10^{-5}$ |
| 60,000  | $1,227065 \times 10^{-3}$ | $6,408574 \times 10^{-4}$ | $3,282443 \times 10^{-5}$ |
| 70,000  | $9,968863 \times 10^{-4}$ | $5,140904 \times 10^{-4}$ | $1,912373 \times 10^{-5}$ |
| 80,000  | $8,488411 \times 10^{-4}$ | $4,344269 \times 10^{-4}$ | $1,297786 \times 10^{-5}$ |
| 90,000  | $1,758637 \times 10^{-3}$ | $8,795635 \times 10^{-4}$ | $4,709431 \times 10^{-5}$ |
| 100,000 | $1,678558 \times 10^{-3}$ | $8,349997 \times 10^{-4}$ | $4,095601 \times 10^{-5}$ |

Pode ser observado que, o valor do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica que apresentou um menor erro médio quadrático, foi  $c = 80$ , independentemente do

número de pontos das malhas testadas. O fato do “valor ótimo” do parâmetro de forma não depender da dimensão da malha (distância nodal) é corroborado por Bayona *et al.* (2010).



**Figura 4.1:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro

Para avaliar o comportamento do EMQ com a dimensão da malha, foram realizadas simulações para diferentes dimensões da malha, em número de pontos, 29 x 29, 39 x 39, 49 x 49, 59 x 59, 69 x 69, 79 x 79, 89 x 89, 99 x 99 e 109 x 109. Foi mantido fixo o parâmetro de forma da FBR no valor que apresentou o melhor resultado nas primeiras simulações, ou seja,  $c = 80$ .

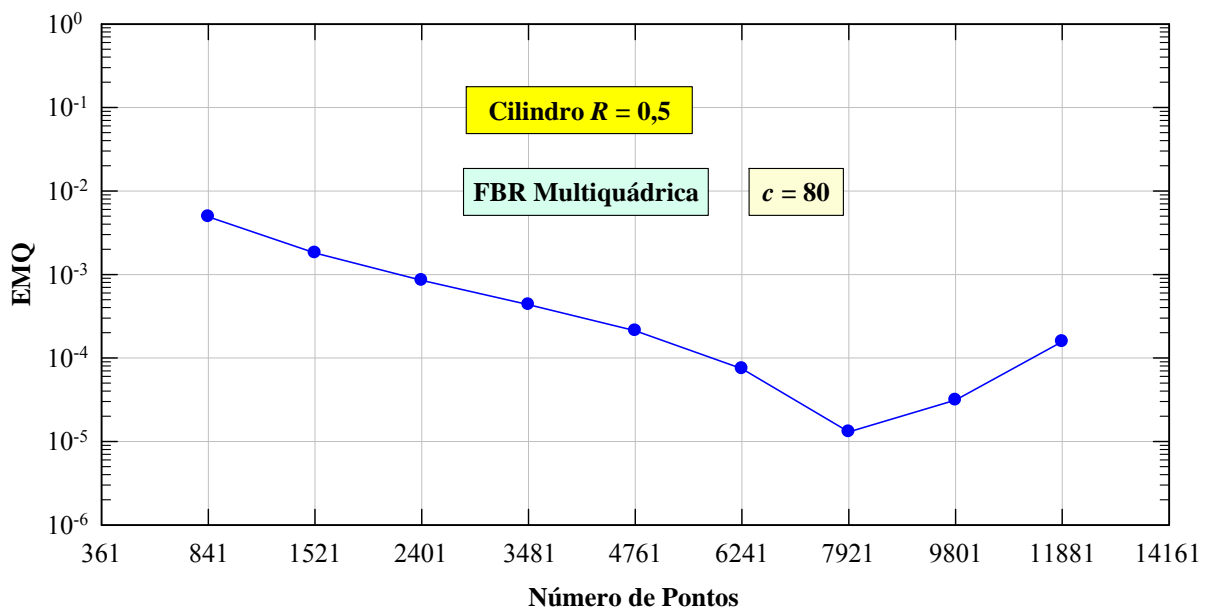
A Tabela 4.2 e a Figura 4.2, apresentam os resultados numéricos e o comportamento do EMQ em função do número de pontos da malha, respectivamente, para um parâmetro de forma da FBR Multiquádrica  $c = 80$ . Pode ser observado que, o menor EMQ foi obtido com uma malha de 89 x 89 pontos, quando considerado um parâmetro de forma  $c = 80$ . Foram realizadas 488 iterações para a geração da malha e os tempos de processamento gastos nesta situação foram de aproximadamente: 1) para a geração da malha: 83 segundos; 2) para cálculo dos



coeficientes de ponderação: 0,1 segundo; 3) para solução do MQDL-FBR: 220 segundos.

**Tabela 4.2:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

| $N \times N$ | EMQ                       |
|--------------|---------------------------|
| 29 x 29      | $4,902913 \times 10^{-3}$ |
| 39 x 39      | $1,801008 \times 10^{-3}$ |
| 49 x 49      | $8,488411 \times 10^{-4}$ |
| 59 x 59      | $4,344269 \times 10^{-4}$ |
| 69 x 69      | $2,114383 \times 10^{-4}$ |
| 79 x 79      | $7,434237 \times 10^{-5}$ |
| 89 x 89      | $1,297786 \times 10^{-5}$ |
| 99 x 99      | $3,119059 \times 10^{-5}$ |
| 109 x 109    | $1,569427 \times 10^{-4}$ |



**Figura 4.2:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

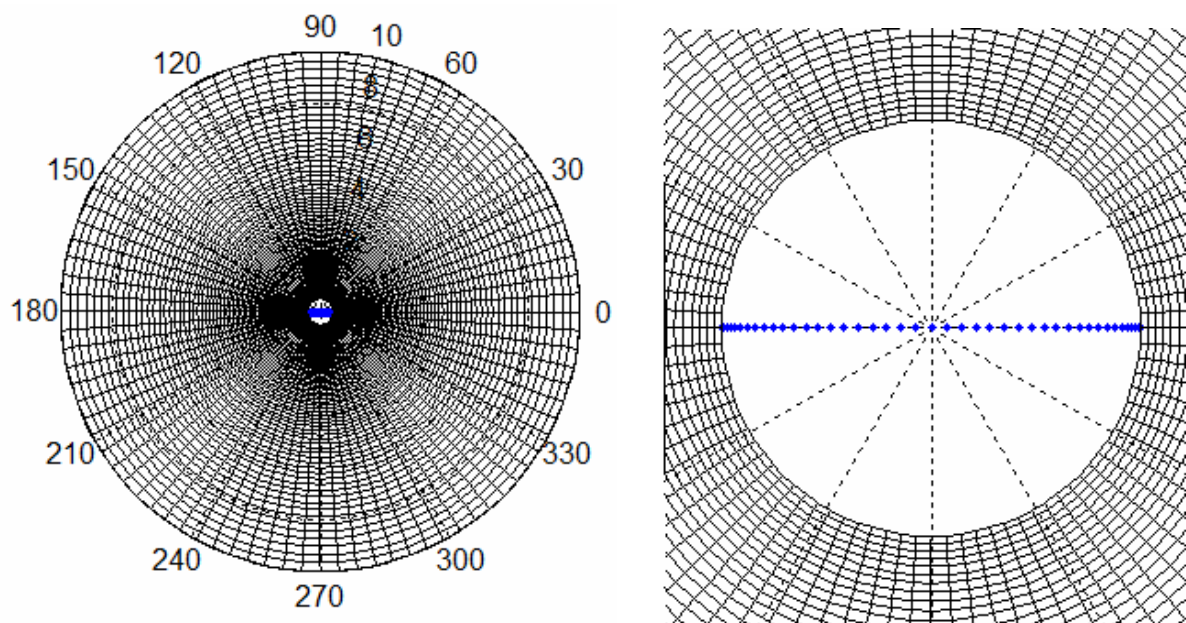
Pode ser observado que, para malhas de dimensão superior a 89 x 89 pontos, o EMQ aumentou. Tal fato é conhecido como "erro de estagnação" ou "saturação",

que ocorre quando o erro não diminui com o refinamento da malha. Uma possível explicação para o fato é que o grau de condicionamento da matriz da FBR pode estar sendo mantido ou piorado. Flyer *et al.* (2016a) e Flyer *et al.* (2016b) apresentam como sugestão para evitar possíveis erros desta natureza, a inclusão de polinômios adicionais ao utilizar a FBR Poliharmônica *Spline*.

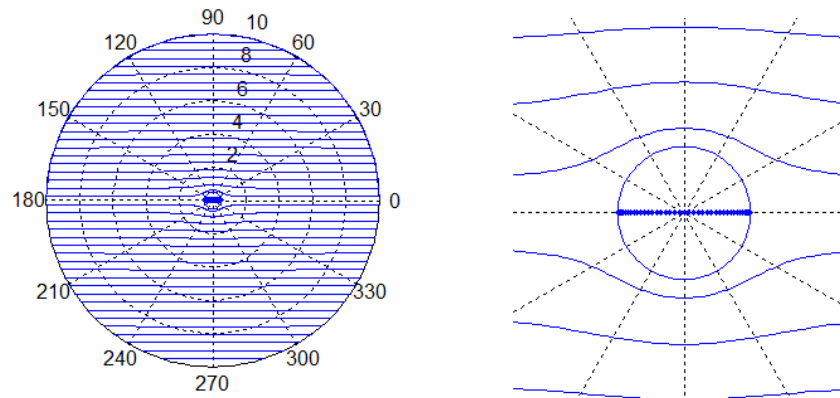
As simulações descritas também foram realizadas utilizando a FBR TPS Modificada. No entanto, foi necessário utilizar valores bastante elevados do parâmetro de forma ( $c$ ) para que fossem obtidos valores do EMQ próximos aos conseguidos quando utilizada a FBR Multiquádrica. O comportamento e os resultados com a sua utilização estão apresentados no Apêndice D.

O menor EMQ, para o escoamento em torno do cilindro, foi obtido quando utilizada a malha de  $89 \times 89$  pontos, com o valor do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica  $c = 80$ . As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 ilustram a malha de  $89 \times 89$  pontos, o comportamento das linhas de corrente e do coeficiente de pressão na superfície do cilindro, respectivamente.

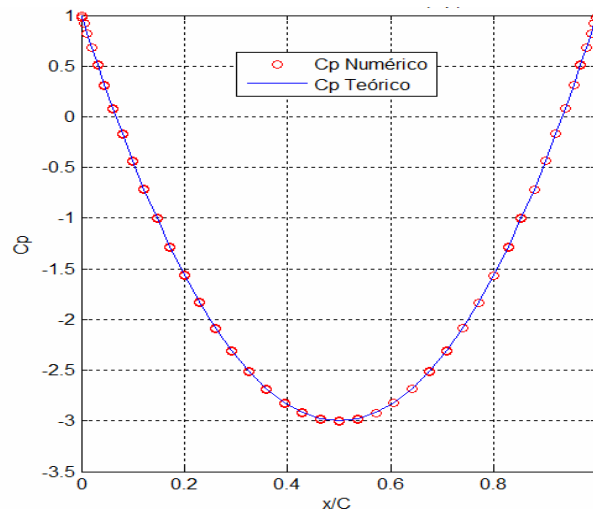
Observa-se uma boa concordância com os resultados analíticos.



**Figura 4.3:** Malha tipo "O" gerada em torno do cilindro,  $89 \times 89$  pontos



**Figura 4.4:** Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro circular, 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$



**Figura 4.5:** Coeficiente de pressão na superfície do cilindro circular, malha de 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

## 4.2 Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de uma Elipse

Para a avaliação do escoamento potencial em torno de uma elipse, foi utilizada a transformação Joukowski para o mapeamento do perfil, conforme detalhada em Lewis (1991).

A solução exata para a velocidade tangencial do escoamento na superfície da elipse é obtida por

$$v_t = \frac{2V_\infty \sin(\theta - \alpha_\infty) + \Gamma / 2\pi r_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{r_0}\right) \cos 2\theta}} \quad (4.3)$$

onde  $r_0$  e  $a$  são, respectivamente, o raio da circunferência (ver Figura 2.10) e uma constante utilizados na transformação de Joukowski,  $\theta$  é o ângulo polar e  $\Gamma$  é a circulação (Lewis, 1991). A relação  $a/r_0$  é função da razão de aspecto,  $\lambda$ , sendo,

$$\frac{a}{r_0} = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \quad (4.4)$$

onde

$$\lambda = \frac{\text{eixo menor}}{\text{eixo maior}} \quad (4.5)$$

e

$$r_0 = \left(\frac{1+\lambda}{4}\right) (\text{eixo maior}) \quad (4.6)$$

No caso da elipse com sustentação, a circulação  $\Gamma$  foi obtida a partir da solução exata, aplicando a condição para que o ponto de estagnação ocorresse no bordo de fuga. Assim, fazendo  $v_t = 0$  quando  $\theta = 0^\circ$  na Equação (4.3), obtém-se

$$\frac{\Gamma}{2\pi r_0} = -2V_\infty \sin(-\alpha_\infty) \quad (4.7)$$

Como  $\sin(-\alpha_\infty) = -\sin(\alpha_\infty)$ , então

$$\Gamma = 4\pi r_0 V_\infty \sin(\alpha_\infty) \quad (4.8)$$

A Equação (4.8) foi então utilizada para o cálculo da circulação no escoamento em torno da elipse com ângulo de ataque diferente de zero. Uma vez obtido o valor, este então foi substituído na Equação (4.3) para obtenção da solução exata da velocidade tangencial.

As simulações foram realizadas considerando elipses com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 0,1$ , para dois valores do ângulo de ataque:  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (sem circulação) e

$\alpha_\infty = 5^\circ$  (com circulação). São apresentados neste capítulo, os resultados obtidos para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ . Os resultados para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , são apresentados no Apêndice E, considerando a FBR Multiquádrica e a FBR TPS Modificada.

As Tabelas 4.3 e 4.4 apresentam os resultados numéricos obtidos para o EMQ, com a variação do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , considerando os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , respectivamente.

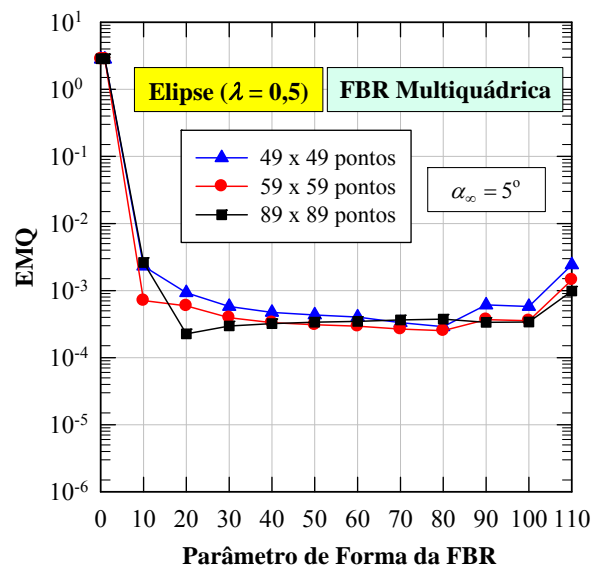
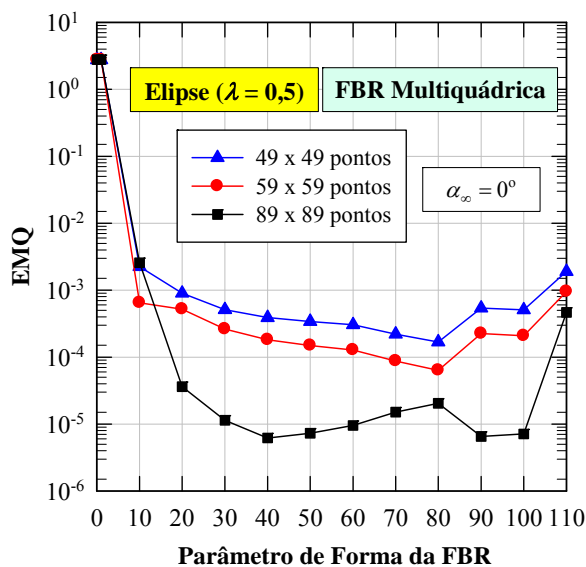
**Tabela 4.3:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR Multiquádrica

| $c$     | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0,100   | $2,755102 \times 10^0$    | $2,764831 \times 10^0$    | $2,780899 \times 10^0$    |
| 1,000   | $2,755087 \times 10^0$    | $2,764830 \times 10^0$    | $2,780899 \times 10^0$    |
| 10,000  | $2,245652 \times 10^{-3}$ | $6,468451 \times 10^{-4}$ | $2,571704 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $8,996323 \times 10^{-4}$ | $5,182707 \times 10^{-4}$ | $3,616873 \times 10^{-5}$ |
| 30,000  | $5,107316 \times 10^{-4}$ | $2,626275 \times 10^{-4}$ | $1,137188 \times 10^{-5}$ |
| 40,000  | $3,883807 \times 10^{-4}$ | $1,811451 \times 10^{-4}$ | $6,190144 \times 10^{-6}$ |
| 50,000  | $3,399073 \times 10^{-4}$ | $1,487256 \times 10^{-4}$ | $7,297962 \times 10^{-6}$ |
| 60,000  | $3,050816 \times 10^{-4}$ | $1,276771 \times 10^{-4}$ | $9,532021 \times 10^{-6}$ |
| 70,000  | $2,203432 \times 10^{-4}$ | $8,721969 \times 10^{-5}$ | $1,512251 \times 10^{-5}$ |
| 80,000  | $1,683791 \times 10^{-4}$ | $6,349256 \times 10^{-5}$ | $2,039943 \times 10^{-5}$ |
| 90,000  | $5,409294 \times 10^{-4}$ | $2,253087 \times 10^{-4}$ | $6,538606 \times 10^{-6}$ |
| 100,000 | $5,078457 \times 10^{-4}$ | $2,089181 \times 10^{-4}$ | $7,104627 \times 10^{-6}$ |
| 110,000 | $1,896223 \times 10^{-3}$ | $9,512416 \times 10^{-4}$ | $4,649227 \times 10^{-4}$ |

Os comportamentos do EMQ para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , considerando os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  estão ilustrados na Figura 4.6, à esquerda e à direita, respectivamente.

**Tabela 4.4:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica

| $c$     | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0,100   | $2,814209 \times 10^0$    | $2,824130 \times 10^0$    | $2,840516 \times 10^0$    |
| 1,000   | $2,814193 \times 10^0$    | $2,824130 \times 10^0$    | $2,840516 \times 10^0$    |
| 10,000  | $2,305163 \times 10^{-3}$ | $7,079083 \times 10^{-4}$ | $2,623961 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $9,266680 \times 10^{-4}$ | $5,915751 \times 10^{-4}$ | $2,257768 \times 10^{-4}$ |
| 30,000  | $5,798241 \times 10^{-4}$ | $3,927163 \times 10^{-4}$ | $2,961604 \times 10^{-4}$ |
| 40,000  | $4,735692 \times 10^{-4}$ | $3,320240 \times 10^{-4}$ | $3,226791 \times 10^{-4}$ |
| 50,000  | $4,320770 \times 10^{-4}$ | $3,087030 \times 10^{-4}$ | $3,374567 \times 10^{-4}$ |
| 60,000  | $4,024179 \times 10^{-4}$ | $2,937719 \times 10^{-4}$ | $3,476961 \times 10^{-4}$ |
| 70,000  | $3,314601 \times 10^{-4}$ | $2,661456 \times 10^{-4}$ | $3,637685 \times 10^{-4}$ |
| 80,000  | $2,895781 \times 10^{-4}$ | $2,515521 \times 10^{-4}$ | $3,761024 \times 10^{-4}$ |
| 90,000  | $6,097798 \times 10^{-4}$ | $3,684851 \times 10^{-4}$ | $3,354368 \times 10^{-4}$ |
| 100,000 | $5,801429 \times 10^{-4}$ | $3,555255 \times 10^{-4}$ | $3,390616 \times 10^{-4}$ |
| 110,000 | $2,415674 \times 10^{-3}$ | $1,440462 \times 10^{-3}$ | $9,836769 \times 10^{-4}$ |

**Figura 4.6:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

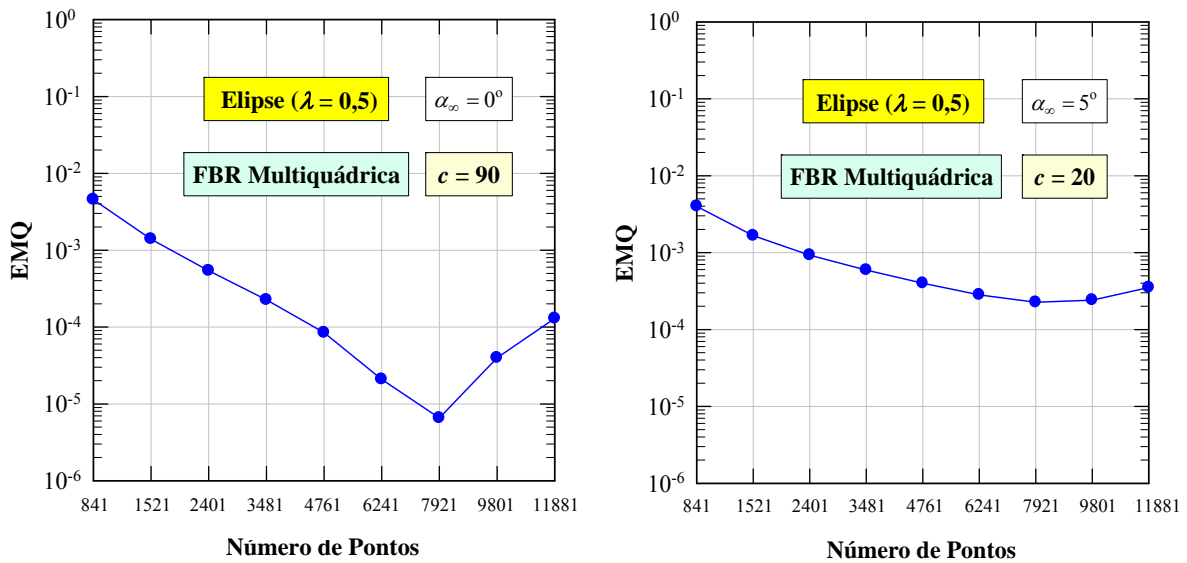
Observa-se que, independentemente do ângulo de ataque, os melhores resultados foram obtidos para a malha de 89 x 89 pontos, sendo  $c = 90$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , e  $c = 20$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ . Assim, para a mesma elipse, o valor "ótimo" do parâmetro de forma foi fortemente dependente do ângulo de ataque, ou seja, das condições de escoamento.

Para avaliar a influência da dimensão da malha, foram fixados os valores do parâmetro de forma  $c = 90$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , e  $c = 20$ , para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ . A Tabela 4.5 apresenta os resultados numéricos e a Figura 4.7 ilustra os comportamentos do EMQ com a dimensão da malha, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , à esquerda e à direita, respectivamente.

**Tabela 4.5:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

| $N \times N$ | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 0^\circ$ ) | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 5^\circ$ ) |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 29 x 29      | $4,554484 \times 10^{-3}$            | $3,995943 \times 10^{-3}$            |
| 39 x 39      | $1,390006 \times 10^{-3}$            | $1,662528 \times 10^{-3}$            |
| 49 x 49      | $5,409294 \times 10^{-4}$            | $9,266680 \times 10^{-4}$            |
| 59 x 59      | $2,253087 \times 10^{-4}$            | $5,915751 \times 10^{-4}$            |
| 69 x 69      | $8,450943 \times 10^{-5}$            | $3,998547 \times 10^{-4}$            |
| 79 x 79      | $2,082087 \times 10^{-5}$            | $2,823170 \times 10^{-4}$            |
| 89 x 89      | $6,538606 \times 10^{-6}$            | $2,257768 \times 10^{-4}$            |
| 99 x 99      | $3,963653 \times 10^{-5}$            | $2,411489 \times 10^{-4}$            |
| 109 x 109    | $1,290041 \times 10^{-4}$            | $3,516942 \times 10^{-4}$            |

Para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , nota-se um comportamento semelhante ao apresentado no cilindro com relação à influência do número de pontos da malha, sugerindo uma estagnação da convergência.



**Figura 4.7:** Comportamentos do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  ( $c = 90$ ) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  ( $c = 20$ )

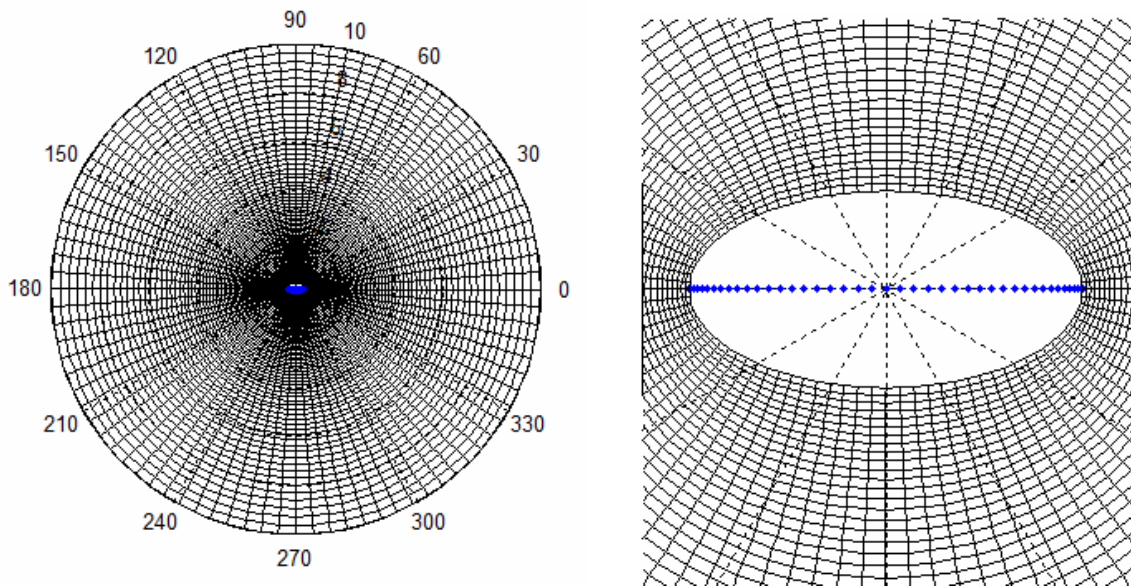
Os melhores resultados obtidos com a utilização da FBR TPS Modificada (Apêndice D) foram com a malha de 89 x 89 pontos e parâmetro de forma  $c = 1 \times 10^5$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , e com a malha de 59 x 59 pontos com o parâmetro de forma  $c = 1 \times 10^4$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

A Figura 4.8 ilustra a malha de 89 x 89 pontos gerada em torno da elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ . As Figuras 4.9 e 4.10 ilustram os comportamentos das linhas de corrente e dos coeficientes de pressão na superfície da elipse, respectivamente, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita).

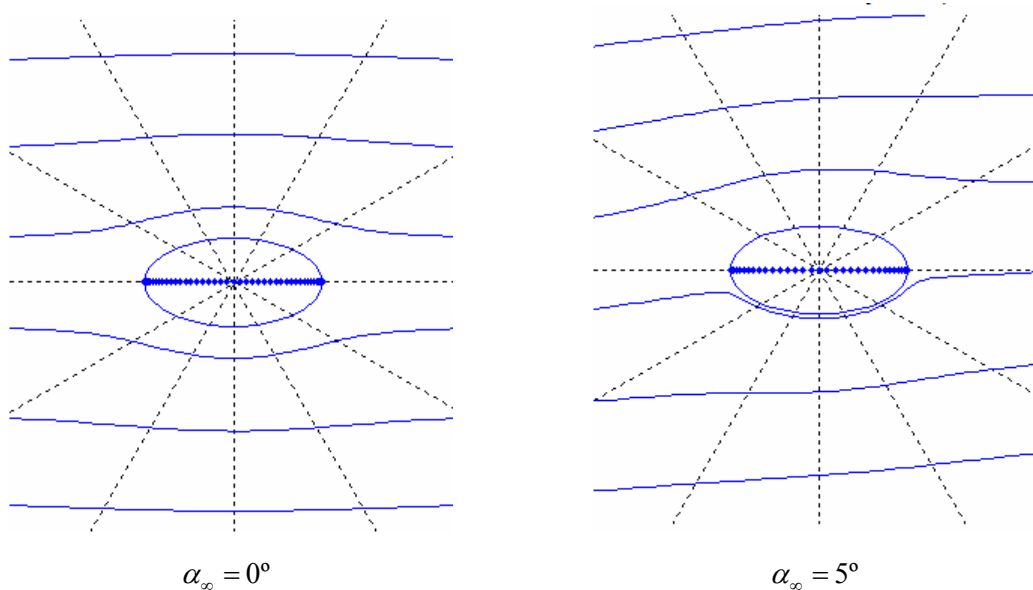
Foram realizadas 523 iterações para a geração da malha e os tempos de processamento gastos para a simulação, independentemente do valor do ângulo de ataque foram de aproximadamente: 1) para a geração da malha: 93 segundos; 2) para cálculo dos coeficientes de ponderação: 0,1 segundo. Para a solução do MQDL-FBR, foram gastos aproximadamente 280 segundos para o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e 230 segundos para o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .



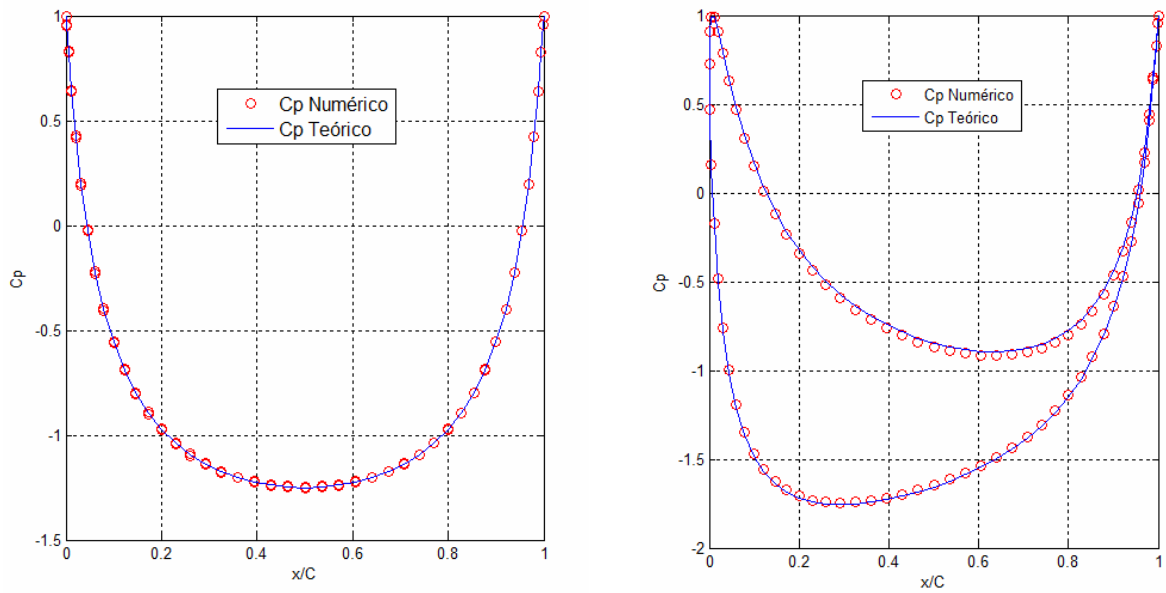
Observa-se uma boa concordância com os resultados analíticos. No entanto, no caso da elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , observa-se pequeno desvio dos resultados numéricos obtidos para o coeficiente de pressão na superfície, com relação aos resultados teóricos, na região mais central, no intradorso da geometria.



**Figura 4.8:** Malha tipo "O" gerada em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ , 89 x 89 pontos



**Figura 4.9:** Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ , FBR Multiquádrica,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  ( $c = 90$ ) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  ( $c = 20$ )

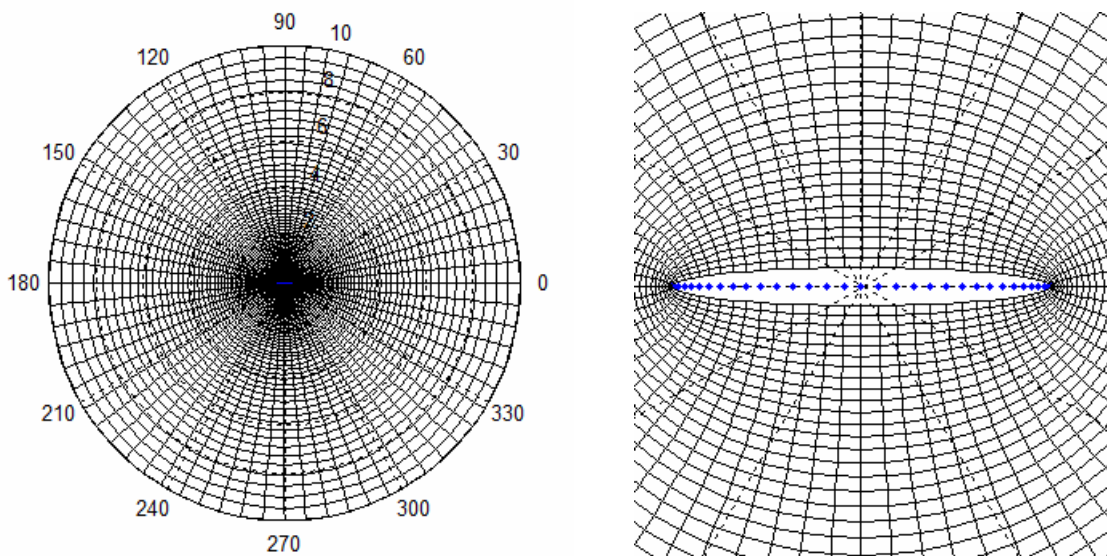


**Figura 4.10:** Coeficiente de pressão na superfície da elipse,  $\lambda = 0,5$ , FBR Multiquádrica,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  ( $c = 90$ ) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  ( $c = 20$ )

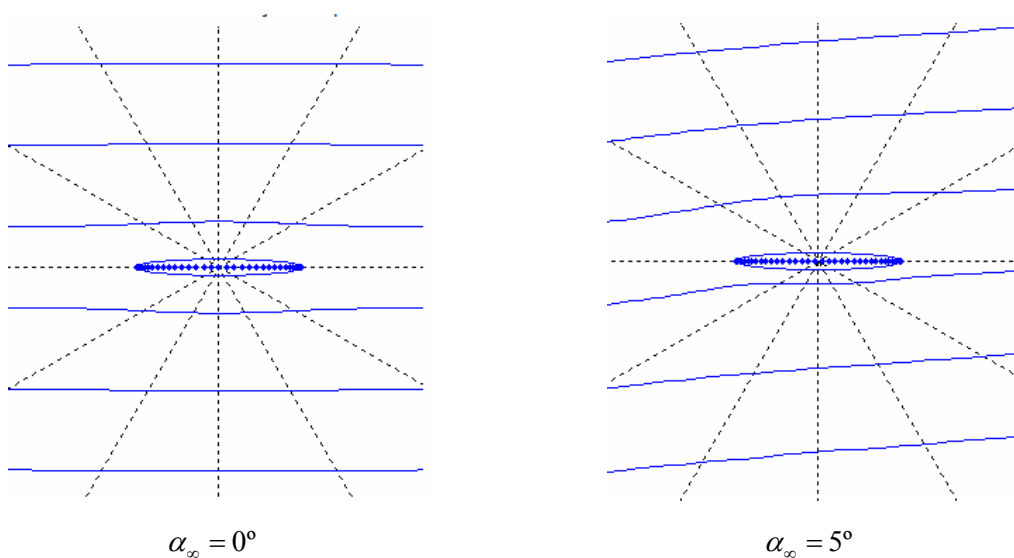
As simulações foram também realizadas para a elipse com maior excentricidade, ou seja, razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , com ângulos de  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (resultados apresentados no Apêndice E). Assim como na elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , com o aumento do ângulo de ataque, o valor do parâmetro de forma que gerou menor EMQ diminuiu, passou de  $c = 80$  para  $c = 10$ , no caso da utilização da FBR Multiquádrica. Com relação à dimensão da malha, para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , o melhor resultado foi obtido para a malha de  $69 \times 69$  pontos. Para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , o melhor resultado foi obtido para a malha de  $79 \times 79$  pontos. Fica evidente nos gráficos que ilustram o comportamento do EMQ com a dimensão da malha, pontos nos quais ocorrem possíveis erros de estagnação. Esses pontos são mais evidentes nas simulações das elipses com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ .

Os testes realizados para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , utilizando a FBR TPS Modificada, com o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$  indicam que o menor EMQ ocorreu para a menor dimensão de malha testada, ou seja,  $29 \times 29$  pontos.

A Figura 4.11 ilustra a malha de 69 x 69 pontos gerada em torno da elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ . As Figuras 4.12 e 4.13 ilustram os comportamentos das linhas de corrente e dos coeficientes de pressão na superfície da elipse, respectivamente, para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita).

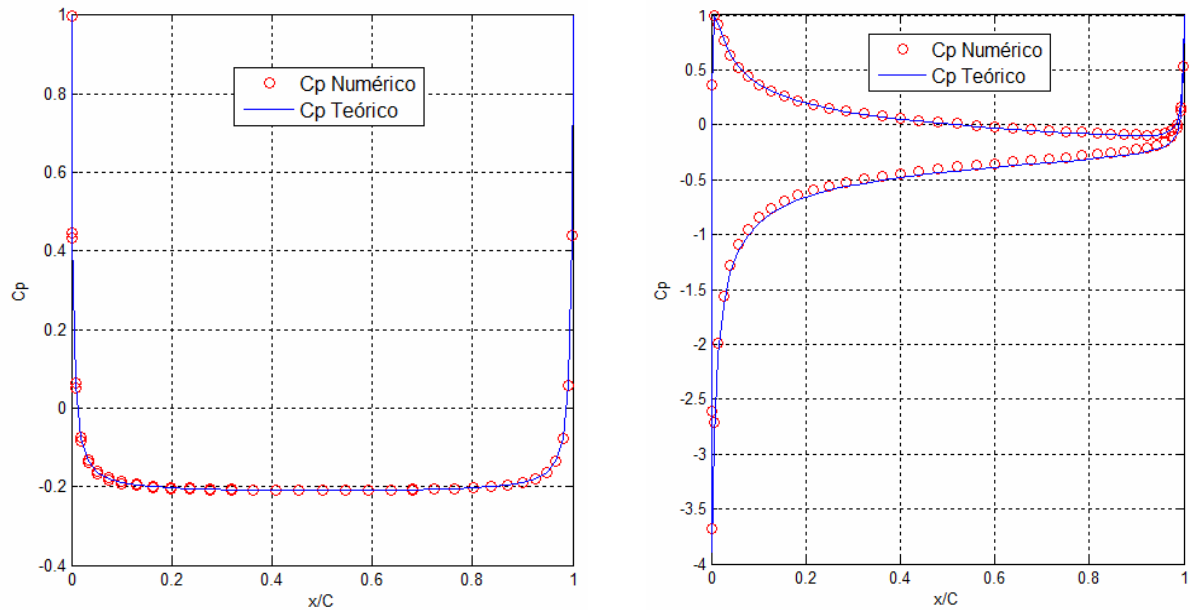


**Figura 4.11:** Malha tipo "O" gerada em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ , 69 x 69 pontos



**Figura 4.12:** Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ , FBR Multiquádrica,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  ( $c = 80$ ) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  ( $c = 10$ )

Observa-se boa concordância dos valores numéricos encontrados para o coeficiente de pressão na superfície da elipse, com os resultados teóricos. No entanto, para o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , um pequeno desvio é observado, no extradorso da elipse, na região afastada dos bordos de ataque e de fuga.



**Figura 4.13:** Coeficiente de pressão na superfície da elipse,  $\lambda = 0,1$ , FBR Multiquádrica,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  ( $c = 80$ ) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  ( $c = 10$ )

### 4.3 Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de um Aerofólio Joukowski

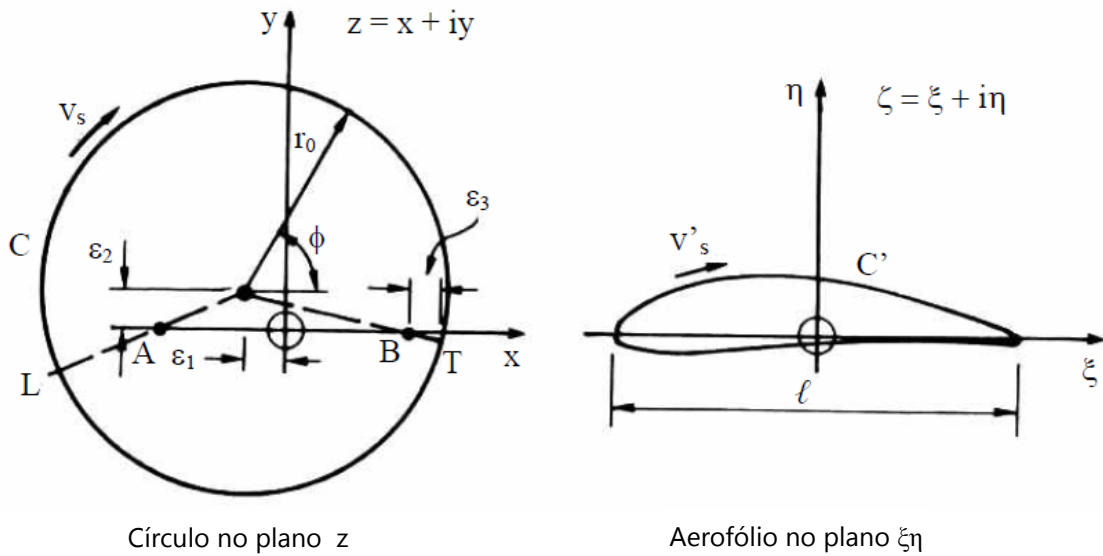
Para avaliar o escoamento potencial em torno de aerofólios Joukowski, foi utilizada a transformação de Joukowski para o mapeamento do perfil, conforme detalhada em Lewis (1991) e ilustrada geometricamente na Figura 4.14 (Figura 2.10 do Capítulo 2).

As coordenadas do aerofólio no plano  $\xi\eta$  são dadas por

$$\xi = \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] (r_0 \cos \phi - \varepsilon_1) \quad (4.9)$$

$$\eta = \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] (r_0 \sin \phi - \varepsilon_2) \quad (4.10)$$

onde  $a$  é uma constante da transformação de Joukowski,  $r$  é a coordenada polar,  $\phi$  é o ângulo tomado no sentido anti-horário a partir do bordo de fuga,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são parâmetros geométricos que controlam a espessura e o arqueamento do aerofólio.



**Figura 4.14:** Transformação geométrica de Joukowski  $\zeta = z + a^2/z$ , Lewis (1991)

No caso de aerofólio Joukowski com região arredondada próxima ao bordo de fuga,  $r_0$  nas Equações (4.9) e (4.10) assume a seguinte forma (Lewis, 1991):

$$r_0 = \sqrt{(a + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2)^2} \quad (4.11)$$

onde  $\varepsilon_3$  é o parâmetro geométrico que controla o arredondamento da região próxima ao bordo de fuga.

As coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  do círculo, no plano  $z$ , são calculadas a partir das Equações (4.12) e (4.13).

$$r = \sqrt{(r_0 \cos \phi - \varepsilon_1)^2 + (r_0 \sin \phi + \varepsilon_2)^2} \quad (4.12)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{r_0 \operatorname{sen} \phi + \varepsilon_2}{r_0 \operatorname{cos} \phi - \varepsilon_1} \right) \quad (4.13)$$

A solução exata para a velocidade tangencial do escoamento no contorno do aerofólio foi obtida a partir da Equação (4.14), Lewis (1991).

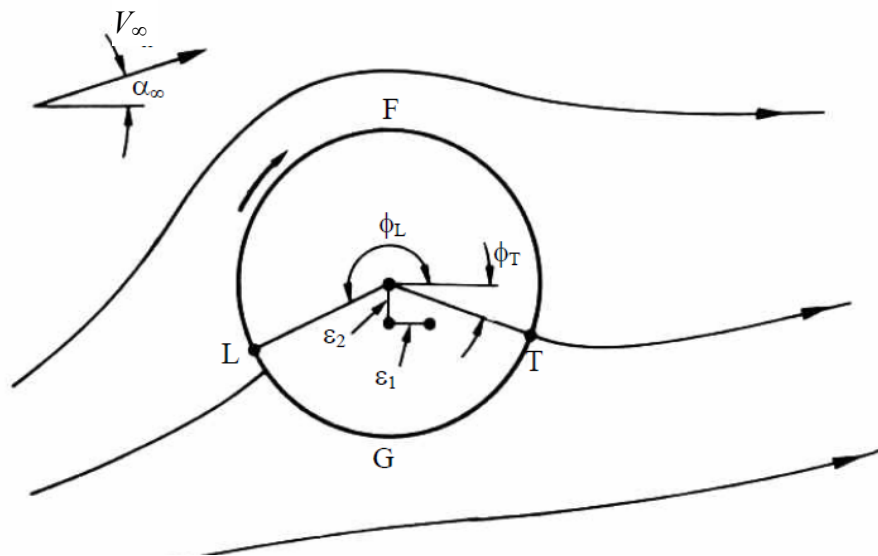
$$v_t = \frac{2V_\infty \operatorname{sen}(\phi - \alpha) + \Gamma / 2\pi r_0}{\sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos 2\theta \right]^2 + \left( \frac{a}{r} \right)^4 \operatorname{sen}^2 2\theta}} \quad (4.14)$$

onde  $r_0$  é o raio da circunferência utilizado na transformação de Joukowski,  $\theta$  é o ângulo polar e  $\Gamma$  é a circulação, sendo esta, calculada por

$$\Gamma = 4\pi r_0 V_\infty \operatorname{sen}(\alpha_\infty - \phi_T) \quad (4.15)$$

onde  $\phi_T$  é o ângulo tomado em relação ao bordo de fuga (ponto T na Figura 4.15) do no círculo no plano  $z$ , que ilustra a condição de Kutta no bordo de fuga, sendo este ângulo calculado conforme a Equação (4.16).

$$\phi_T = -\operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\varepsilon_2}{a + \varepsilon_1} \right) \quad (4.16)$$



**Figura 4.15:** Condição de Kutta no bordo de fuga, transformação Joukowski, Lewis (1991)

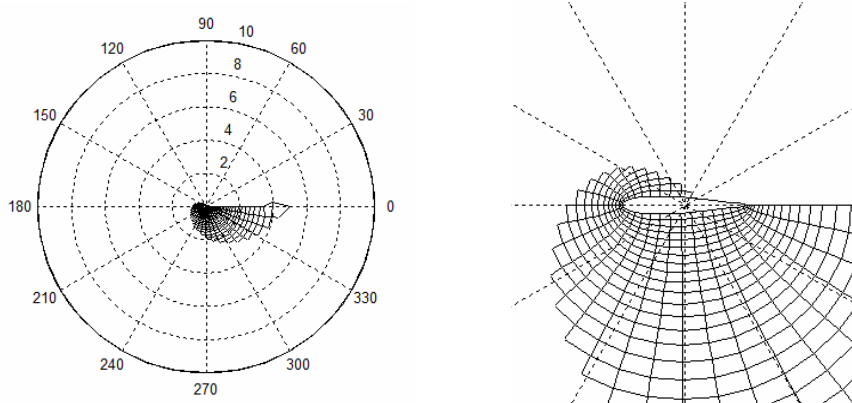
Foram realizadas simulações do escoamento potencial em torno de aerofólios Joukowski, considerando um aerofólio simétrico e arredondado e um aerofólio simétrico e afilado.

As simulações realizadas mostraram uma forte dependência do número de pontos da malha e da escolha adequada do raio da circunferência na transformação de Joukowski ( $r_0$ ).

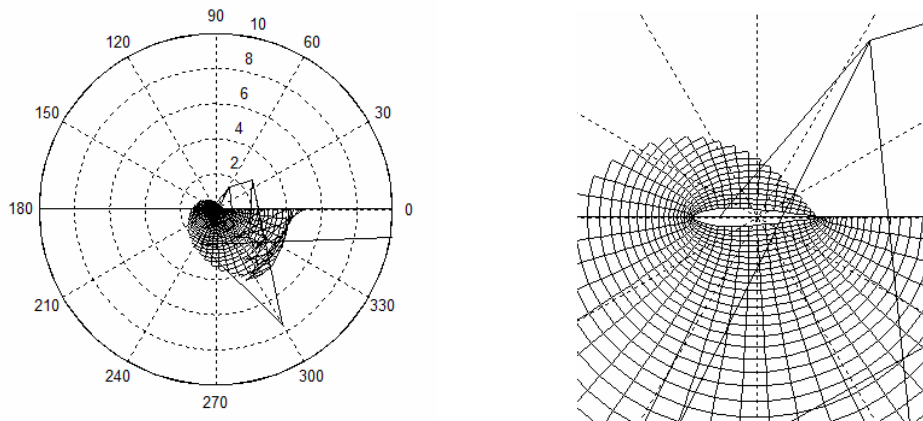
#### 4.3.1 Testes com a FBR Multiquádrica para o Aerofólio Joukowski Simétrico e Arredondado

Para o aerofólio simétrico e arredondado na região próxima ao bordo de fuga, foi considerado  $r_0 = 0,25$ , sendo utilizados os seguintes valores dos parâmetros geométricos da transformação de Joukowski:  $\varepsilon_1 = 0,02$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$  e  $\varepsilon_3 = 0,01$ . Cabe aqui ressaltar que, nenhum destes parâmetros geométricos devem ser zerados, uma vez que é gerada singularidade na matriz do Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial (MQDL-FBR). As simulações para este aerofólio foram realizadas para ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

Foi observado que para malhas de dimensões inferiores a  $39 \times 39$  pontos e superiores a  $45 \times 45$  pontos, as mesmas não foram geradas corretamente. As Figuras 4.16 e 4.17 ilustram as ocorrências para as malhas de  $37 \times 37$  pontos e de  $47 \times 47$  pontos, respectivamente.



**Figura 4.16:** Ocorrência na geração da malha de dimensão  $37 \times 37$  pontos, aerofólio Joukowski simétrico e arredondado



**Figura 4.17:** Ocorrência na geração da malha de dimensão 47 x 47 pontos, aerofólio Joukowski simétrico e arredondado

Os resultados numéricos para o EMQ, obtidos nas simulações com a FBR Multiquádrica, para o aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, considerando os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  estão apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.7, respectivamente.

**Tabela 4.6:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR Multiquádrica

| $C$     | EMQ<br>(Malha 39 x 39)    | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1,000   | $1,158829 \times 10^0$    | $1,345357 \times 10^0$    | $1,347521 \times 10^0$    | $1,349450 \times 10^0$    |
| 10,000  | $1,702704 \times 10^{-3}$ | $1,441991 \times 10^{-3}$ | $1,225471 \times 10^{-3}$ | $9,070373 \times 10^{-4}$ |
| 20,000  | $6,014775 \times 10^{-4}$ | $5,165612 \times 10^{-4}$ | $4,559242 \times 10^{-4}$ | $3,329013 \times 10^{-4}$ |
| 30,000  | $3,867758 \times 10^{-4}$ | $3,221737 \times 10^{-4}$ | $2,780544 \times 10^{-4}$ | $1,843400 \times 10^{-4}$ |
| 40,000  | $3,187686 \times 10^{-4}$ | $2,607754 \times 10^{-4}$ | $2,219104 \times 10^{-4}$ | $1,399381 \times 10^{-4}$ |
| 50,000  | $2,942828 \times 10^{-4}$ | $2,382999 \times 10^{-4}$ | $2,010729 \times 10^{-4}$ | $1,235228 \times 10^{-4}$ |
| 60,000  | $2,697096 \times 10^{-4}$ | $2,169909 \times 10^{-4}$ | $1,822605 \times 10^{-4}$ | $1,094800 \times 10^{-4}$ |
| 70,000  | $1,761130 \times 10^{-4}$ | $1,405632 \times 10^{-4}$ | $1,184893 \times 10^{-4}$ | $6,571140 \times 10^{-5}$ |
| 80,000  | $1,209355 \times 10^{-4}$ | $9,580569 \times 10^{-5}$ | $8,130006 \times 10^{-5}$ | $4,172812 \times 10^{-5}$ |
| 90,000  | $6,273140 \times 10^{-4}$ | $5,042208 \times 10^{-4}$ | $4,171073 \times 10^{-4}$ | $2,775906 \times 10^{-4}$ |
| 100,000 | $5,856171 \times 10^{-4}$ | $4,700065 \times 10^{-4}$ | $3,885458 \times 10^{-4}$ | $2,562102 \times 10^{-4}$ |



**Tabela 4.7:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica

| $C$     | EMQ<br>(Malha 39 x 39)    | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1,000   | $1,826139 \times 10^0$    | $1,829821 \times 10^0$    | $1,832939 \times 10^0$    | $1,835640 \times 10^0$    |
| 10,000  | $2,916352 \times 10^{-3}$ | $2,451288 \times 10^{-3}$ | $2,047448 \times 10^{-3}$ | $1,456389 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $1,213710 \times 10^{-3}$ | $1,026727 \times 10^{-3}$ | $8,741345 \times 10^{-4}$ | $5,936780 \times 10^{-4}$ |
| 30,000  | $8,637400 \times 10^{-4}$ | $7,116519 \times 10^{-4}$ | $5,898319 \times 10^{-4}$ | $3,680635 \times 10^{-4}$ |
| 40,000  | $7,497259 \times 10^{-4}$ | $6,091328 \times 10^{-4}$ | $4,974051 \times 10^{-4}$ | $2,965991 \times 10^{-4}$ |
| 50,000  | $7,080564 \times 10^{-4}$ | $5,710016 \times 10^{-4}$ | $4,625583 \times 10^{-4}$ | $2,696974 \times 10^{-4}$ |
| 60,000  | $6,660570 \times 10^{-4}$ | $5,346447 \times 10^{-4}$ | $4,308615 \times 10^{-4}$ | $2,464788 \times 10^{-4}$ |
| 70,000  | $5,019248 \times 10^{-4}$ | $4,007339 \times 10^{-4}$ | $3,204309 \times 10^{-4}$ | $1,718106 \times 10^{-4}$ |
| 80,000  | $3,998434 \times 10^{-4}$ | $3,179029 \times 10^{-4}$ | $2,525227 \times 10^{-4}$ | $1,281107 \times 10^{-4}$ |
| 90,000  | $1,252151 \times 10^{-3}$ | $1,004909 \times 10^{-3}$ | $8,122544 \times 10^{-4}$ | $5,137903 \times 10^{-4}$ |
| 100,000 | $1,185248 \times 10^{-3}$ | $9,500484 \times 10^{-4}$ | $7,667744 \times 10^{-4}$ | $4,804308 \times 10^{-4}$ |

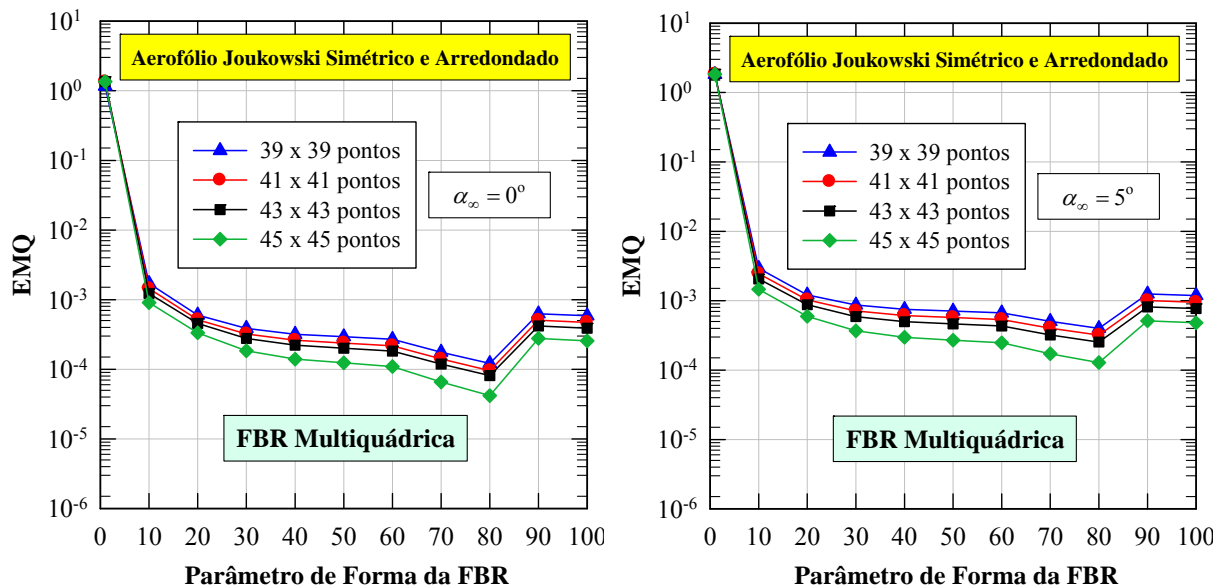
Foram utilizados os mesmos valores do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica utilizados nas simulações do cilindro e da elipse. No entanto, para o parâmetro de forma  $c = 0,1$ , ocorreu mal-condicionamento da matriz do MQDL-FBR (para  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e para  $\alpha_\infty = 5^\circ$ ).

A Figura 4.18 ilustra os comportamentos do EMQ obtidos para o coeficiente de pressão na superfície do aerofólio, em função do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita).

Observa-se que, independentemente da dimensão da malha, o valor do parâmetro de forma que apresentou os melhores resultados foi  $c = 80$ . Nota-se também, uma pequena influência da dimensão da malha na precisão dos resultados.

O menor EMQ foi obtido com a malha de dimensão 45 x 45 pontos, quando utilizado o parâmetro de forma  $c = 80$ , independentemente do valor do ângulo de ataque. Foram realizadas 177 iterações para a geração da malha e os tempos de processamento gastos para a simulação, independentemente do valor do ângulo de

ataque foram de aproximadamente: 1) para a geração da malha: 8 segundos; 2) para cálculo dos coeficientes de ponderação: 0,1 segundo; 3) para solução do MQDL-FBR: 8 segundos.

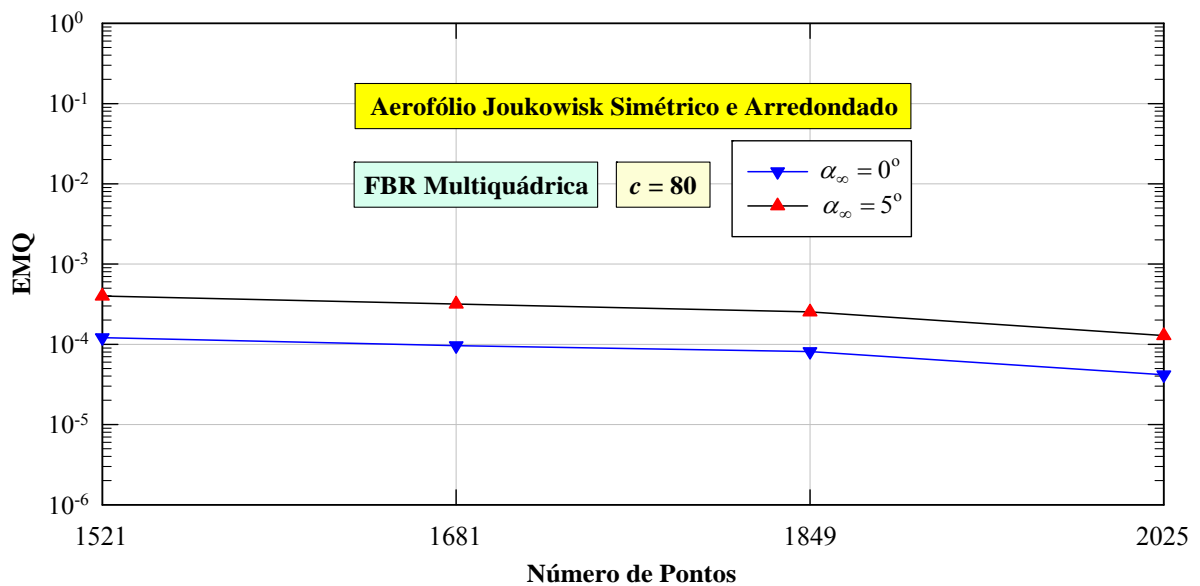


**Figura 4.18:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$  e  $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$

A Figura 4.19 ilustra o comportamento do EMQ com a dimensão da malha, para o valor do parâmetro de forma  $c = 80$ , para os ângulos de ataque  $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$  e  $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ .

Os testes para esse aerofólio também foram realizados utilizando a FBR TPS Modificada (resultados no Apêndice D) para os ângulos de ataque  $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$  e  $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ . Para os dois valores de ângulos de ataque testados, os melhores resultados foram obtidos para a malha de 45 x 45 pontos, quando utilizado o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada  $c = 1 \times 10^4$ .

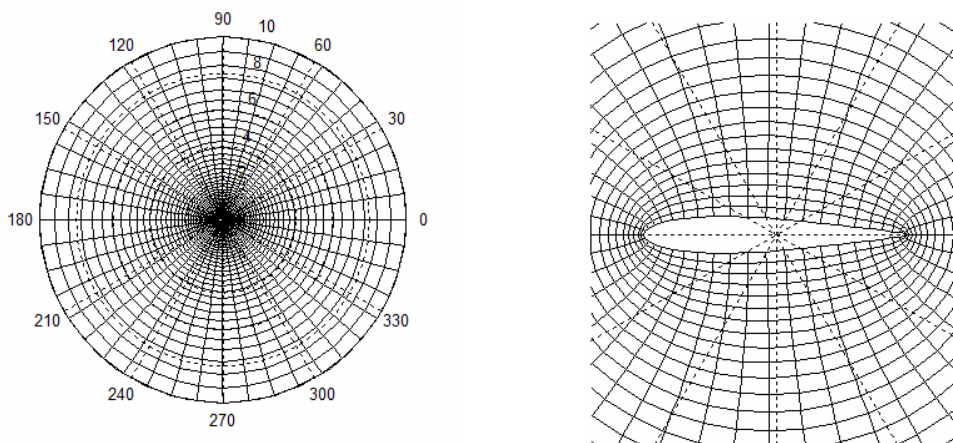
Os gráficos que descrevem o comportamento do EMQ com a dimensão da malha não apresentaram pontos de estagnação da convergência.



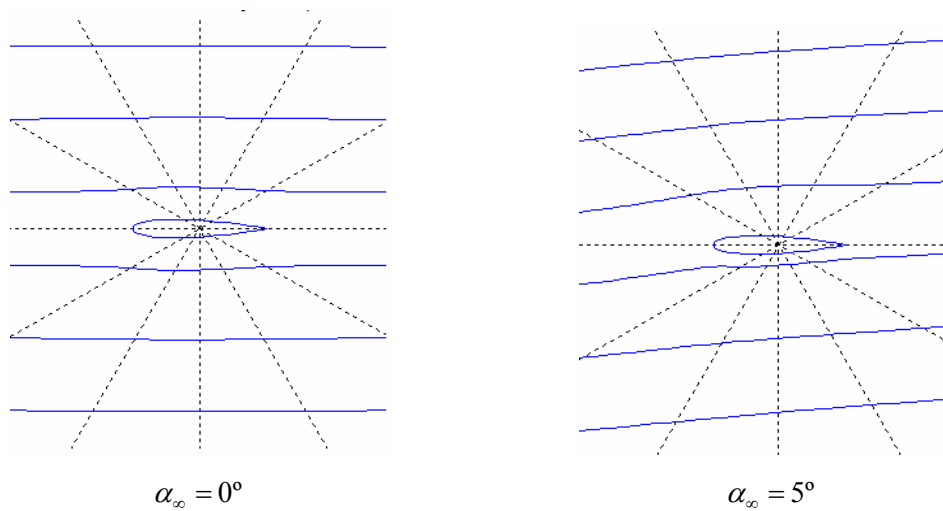
**Figura 4.19:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, FBR Multiquádrica

A Figura 4.20 ilustra a malha tipo "O", de 45 x 45 pontos, gerada para o aerofólio Joukowski simétrico e arredondado.

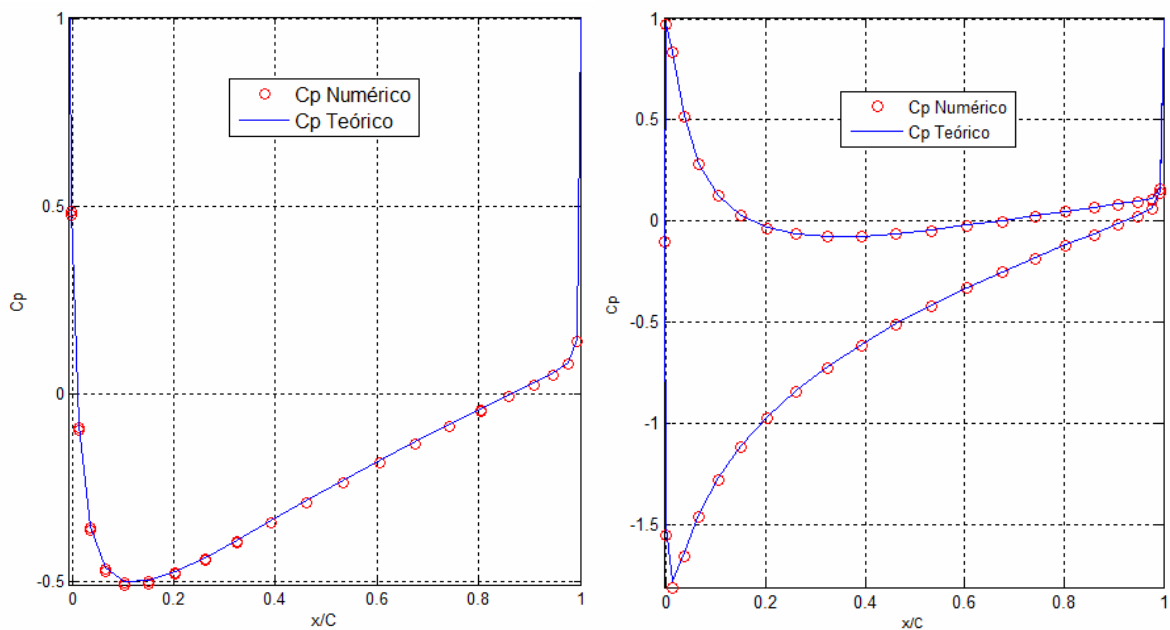
As Figuras 4.21 e 4.22 ilustram o comportamento das linhas de corrente e dos coeficientes de pressão exato e numérico na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, respectivamente, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita). Estes resultados foram obtidos utilizando a FBR Multiquádrica, com parâmetro de forma  $c = 80$ .



**Figura 4.20:** Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, 45 x 45 pontos



**Figura 4.21:** Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$



**Figura 4.22:** Coeficiente de pressão na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , malha de 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

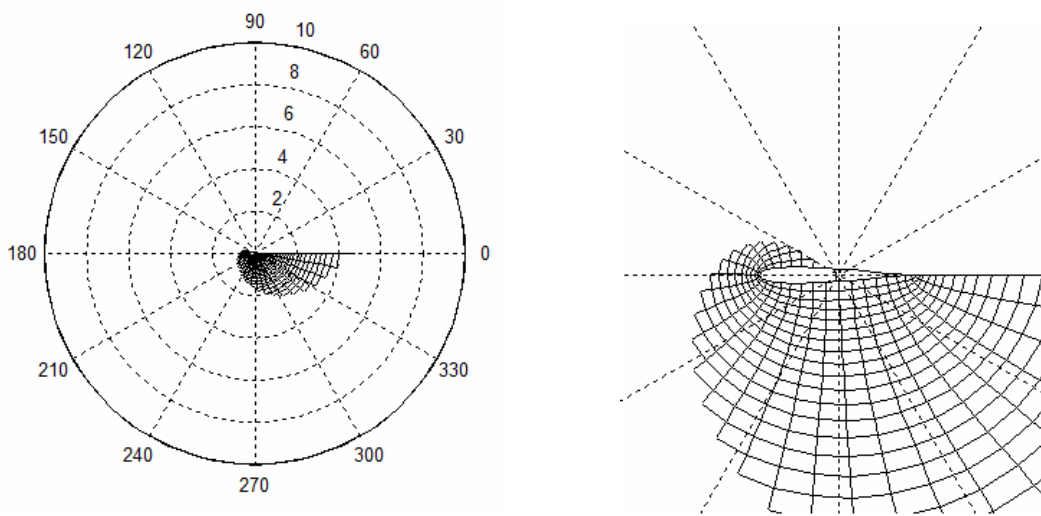
#### 4.3.2 Testes com a FBR Multiquádrica para o Aerofólio Joukowski Simétrico e Afilado

Para o aerofólio simétrico e afilado, foi considerado  $r_0 = 0,25$ , sendo utilizados os seguintes valores dos parâmetros geométricos da transformação de Joukowski:

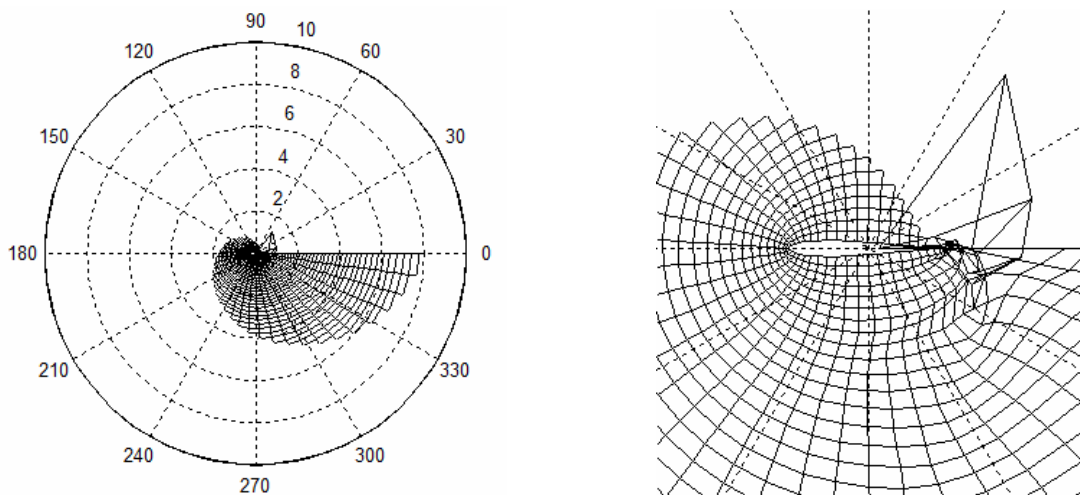
$\varepsilon_1 = 0,02$ ;  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$  e  $\varepsilon_3 = 10^{-6}$ . As simulações foram realizadas para ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

Foi observado que para malhas de dimensões inferiores a  $41 \times 41$  pontos e superiores a  $45 \times 45$  pontos, as mesmas não foram geradas corretamente.

As Figuras 4.23 e 4.24 ilustram as ocorrências para as malhas de  $39 \times 39$  pontos e de  $47 \times 47$  pontos, respectivamente.



**Figura 4.23:** Ocorrência na geração da malha de dimensão  $39 \times 39$  pontos, aerofólio Joukowski simétrico e afilado



**Figura 4.24:** Ocorrência na geração da malha de dimensão  $47 \times 47$  pontos, aerofólio Joukowski simétrico e afilado

Os resultados numéricos para o EMQ, obtidos nas simulações para o aerofólio Joukowski simétrico e afilado, utilizando a FBR Multiquádrica, considerando os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  estão apresentados nas Tabelas 4.8 e 4.9, respectivamente.

Assim como ocorreu para o aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, para o parâmetro de forma  $c = 0,1$ , ocorreu mal-condicionamento da matriz do MQDL-FBR.

**Tabela 4.8:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR Multiquádrica

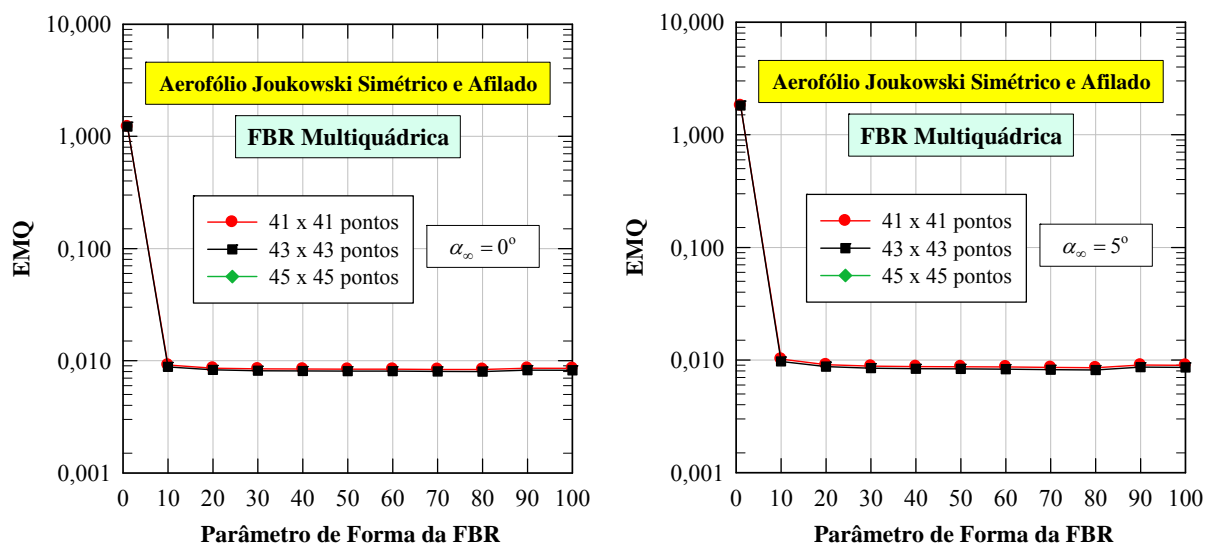
| $c$     | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1,000   | $1,215961 \times 10^0$    | $1,217665 \times 10^0$    | $1,219211 \times 10^0$    |
| 10,000  | $9,968120 \times 10^{-3}$ | $9,162755 \times 10^{-3}$ | $8,827329 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $9,165660 \times 10^{-3}$ | $8,588667 \times 10^{-3}$ | $8,287152 \times 10^{-3}$ |
| 30,000  | $8,999673 \times 10^{-3}$ | $8,468319 \times 10^{-3}$ | $8,148916 \times 10^{-3}$ |
| 40,000  | $8,947742 \times 10^{-3}$ | $8,432860 \times 10^{-3}$ | $8,105821 \times 10^{-3}$ |
| 50,000  | $8,928835 \times 10^{-3}$ | $8,420195 \times 10^{-3}$ | $8,089761 \times 10^{-3}$ |
| 60,000  | $8,910932 \times 10^{-3}$ | $8,409008 \times 10^{-3}$ | $8,075922 \times 10^{-3}$ |
| 70,000  | $8,847220 \times 10^{-3}$ | $8,373686 \times 10^{-3}$ | $8,032018 \times 10^{-3}$ |
| 80,000  | $8,810635 \times 10^{-3}$ | $8,356220 \times 10^{-3}$ | $8,007180 \times 10^{-3}$ |
| 90,000  | $9,156087 \times 10^{-3}$ | $8,562790 \times 10^{-3}$ | $8,239099 \times 10^{-3}$ |
| 100,000 | $9,126656 \times 10^{-3}$ | $8,543004 \times 10^{-3}$ | $8,218608 \times 10^{-3}$ |

A Figura 4.25 ilustra o comportamento do EMQ obtido para o coeficiente de pressão na superfície do aerofólio, em função do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita).

Os resultados obtidos foram ligeiramente melhores para a malha de 45 x 45 pontos, com parâmetro de forma da FBR  $c = 80$ , independentemente do ângulo de ataque. Observa-se que, a influência do parâmetro de forma para valores acima de  $c = 10$  foi muito pequena na precisão dos resultados.

**Tabela 4.9:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica

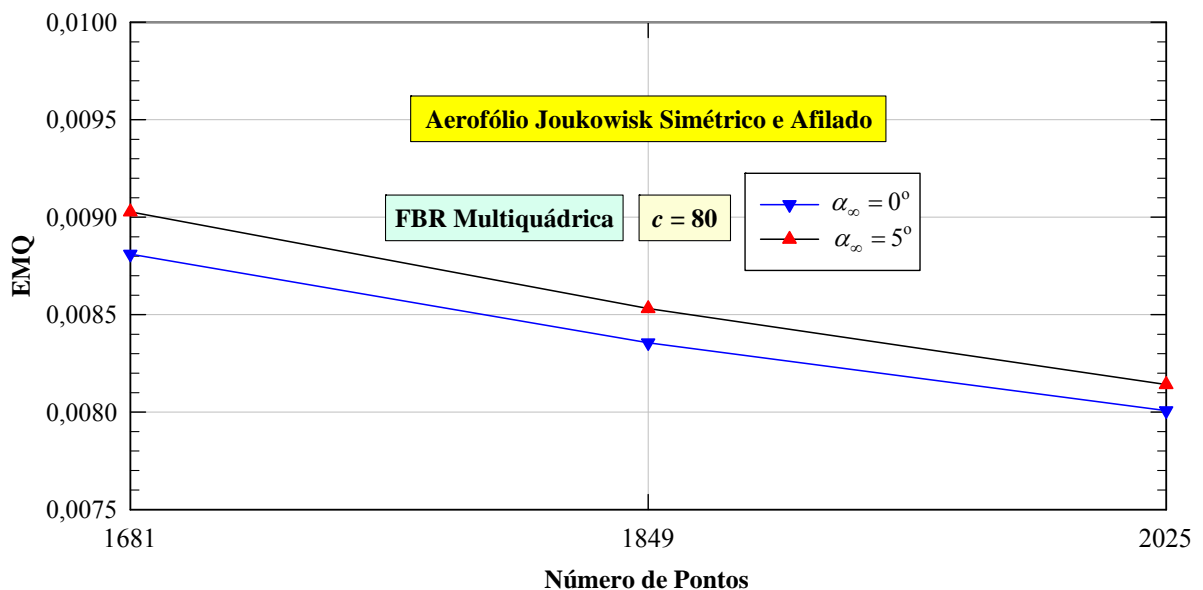
| $c$     | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1,000   | $1,812717 \times 10^0$    | $1,816596 \times 10^0$    | $1,819886 \times 10^0$    |
| 10,000  | $1,121241 \times 10^{-2}$ | $1,017822 \times 10^{-2}$ | $9,714520 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $9,763802 \times 10^{-3}$ | $9,084689 \times 10^{-3}$ | $8,730752 \times 10^{-3}$ |
| 30,000  | $9,439373 \times 10^{-3}$ | $8,826875 \times 10^{-3}$ | $8,458446 \times 10^{-3}$ |
| 40,000  | $9,333109 \times 10^{-3}$ | $8,744376 \times 10^{-3}$ | $8,368851 \times 10^{-3}$ |
| 50,000  | $9,293456 \times 10^{-3}$ | $8,713507 \times 10^{-3}$ | $8,334467 \times 10^{-3}$ |
| 60,000  | $9,255580 \times 10^{-3}$ | $8,685580 \times 10^{-3}$ | $8,304398 \times 10^{-3}$ |
| 70,000  | $9,115152 \times 10^{-3}$ | $8,589434 \times 10^{-3}$ | $8,204242 \times 10^{-3}$ |
| 80,000  | $9,027335 \times 10^{-3}$ | $8,531635 \times 10^{-3}$ | $8,141904 \times 10^{-3}$ |
| 90,000  | $9,742099 \times 10^{-3}$ | $9,028288 \times 10^{-3}$ | $8,636585 \times 10^{-3}$ |
| 100,000 | $9,685567 \times 10^{-3}$ | $8,986751 \times 10^{-3}$ | $8,596334 \times 10^{-3}$ |

**Figura 4.25:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ 

Na simulação do escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, utilizando a FBR Multiquádrica, foram realizadas 198 iterações para a geração da malha. Os tempos de processamento para a situação que apresentou o menor

EMQ, independentemente do valor do ângulo de ataque foram de aproximadamente: 1) para a geração da malha: 9 segundos; 2) para cálculo dos coeficientes de ponderação: 0,1 segundo; 3) para solução do MQDL-FBR: 8 segundos.

A Figura 4.26 ilustra o comportamento do EMQ com a dimensão da malha, para o valor do parâmetro de forma  $c = 80$ , para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .



**Figura 4.26:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, FBR Multiquádrica

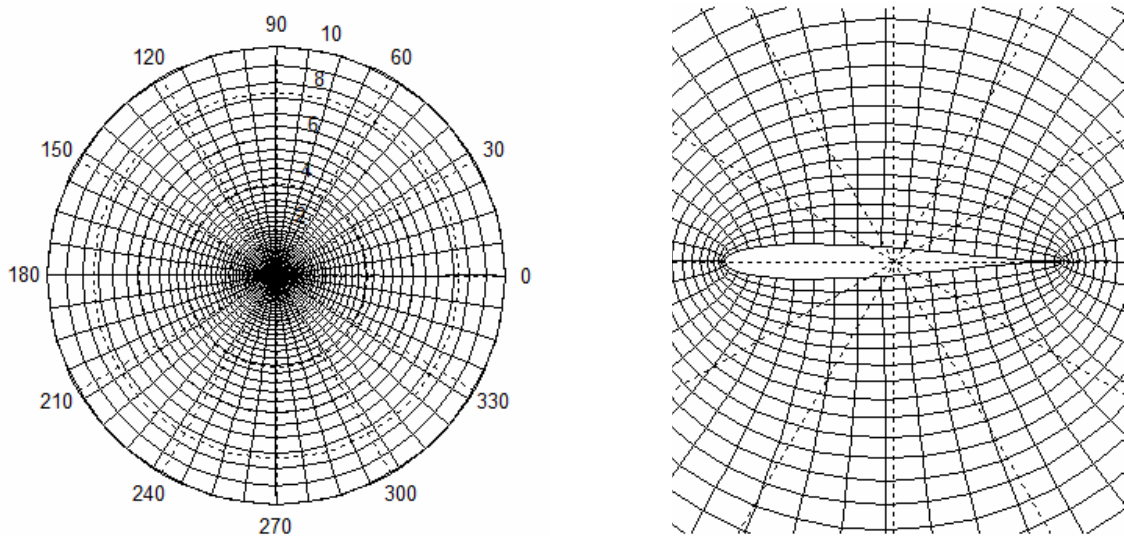
Observa-se que os resultados são menos sensíveis à variação do parâmetro de forma da FBR e à dimensão da malha, quando comparados com os resultados obtidos para o aerofólio Joukowski simétrico e arredondado.

Os resultados das simulações para o aerofólio Joukowski simétrico e afilado, utilizando a FBR TPS Modificada, são apresentados no Apêndice D. O EMQ foi ligeiramente menor para a malha de 45 x 45 pontos, com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada  $c = 1 \times 10^4$ , independentemente do ângulo de ataque.

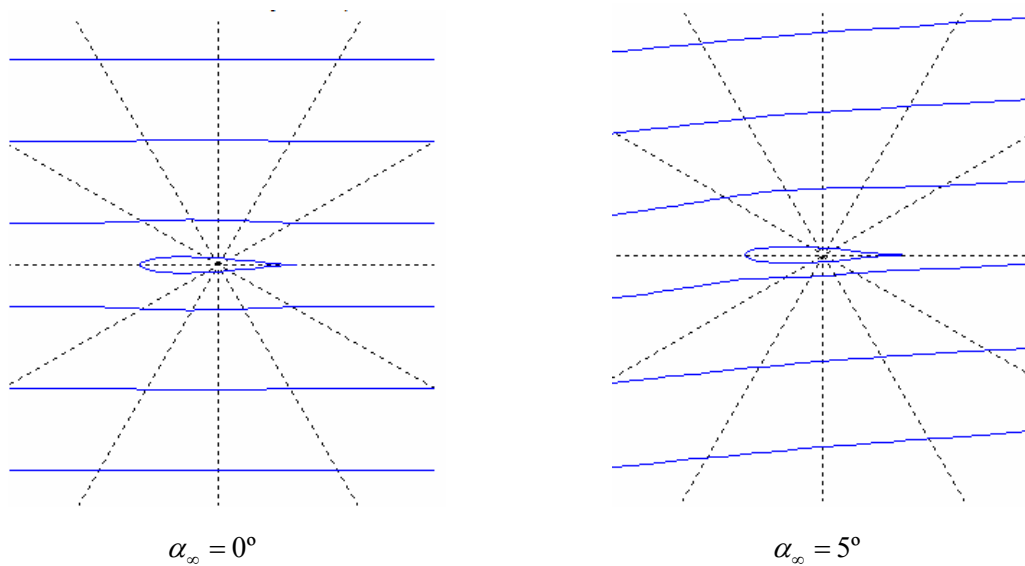
A Figura 4.27 ilustra a malha tipo "O", de 45 x 45 pontos, gerada para o aerofólio Joukowski simétrico e afilado.



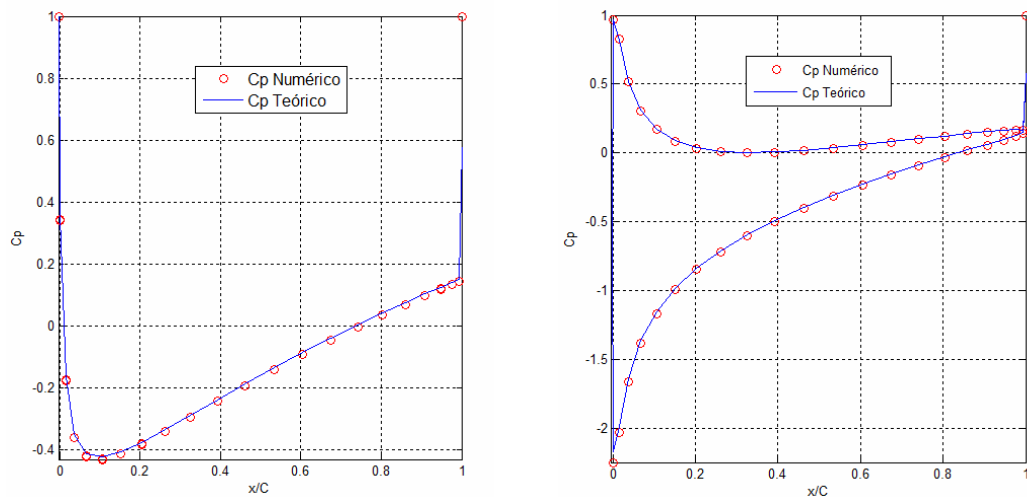
As Figuras 4.28 e 4.29 ilustram o comportamento das linhas de corrente e dos coeficientes de pressão exato e numérico na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, respectivamente, para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  (à esquerda) e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  (à direita). Estes resultados foram obtidos utilizando a FBR Multiquádrica, com parâmetro de forma  $c = 80$ .



**Figura 4.27:** Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, 45 x 45 pontos



**Figura 4.28:** Linhas de função corrente no escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$



**Figura 4.29:** Coeficiente de pressão na superfície do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , malha de 45 x 45 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

Pode-se observar que um valor encontrado numericamente no bordo de fuga, não tem concordância com o resultado teórico. Tal fato retrata a metodologia utilizada para a imposição da condição de Kutta, metodologia válida para regiões do bordo de fuga com ângulos finitos, nas quais ocorrem pontos de estagnação. No caso do aerofólio afilado, sabe-se que não há ponto de estagnação no bordo de fuga, conforme abordado no sub-item 3.4.2 deste trabalho.

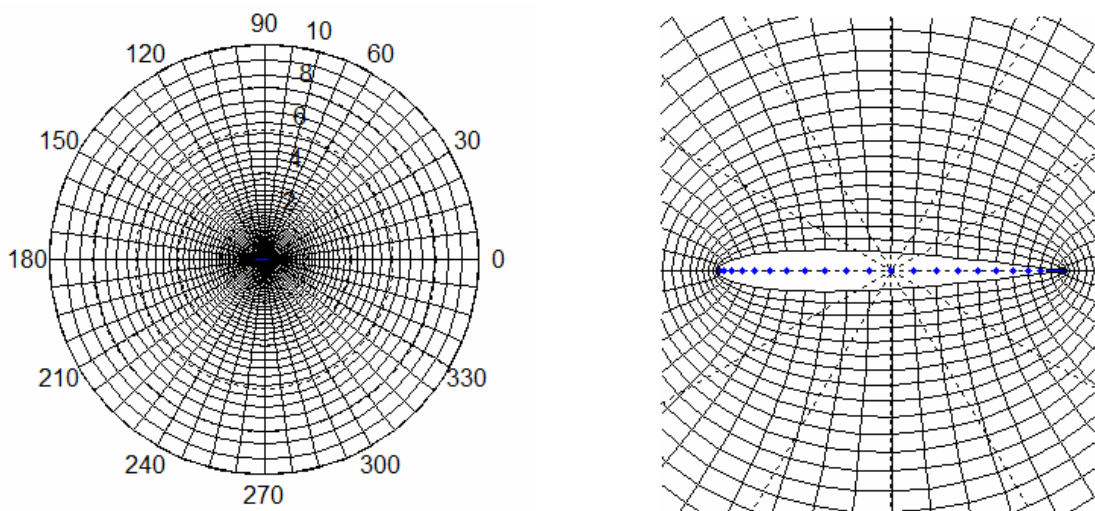
#### 4.4 Escoamento Potencial e Bidimensional em Torno de um Aerofólio NACA 0012

O aerofólio simétrico NACA 0012, com corda igual a uma unidade de comprimento, foi posicionado no centro da circunferência que limita o domínio físico e teve o seu perfil gerado utilizando a função descrita pela Equação (2.121) do Capítulo 2.

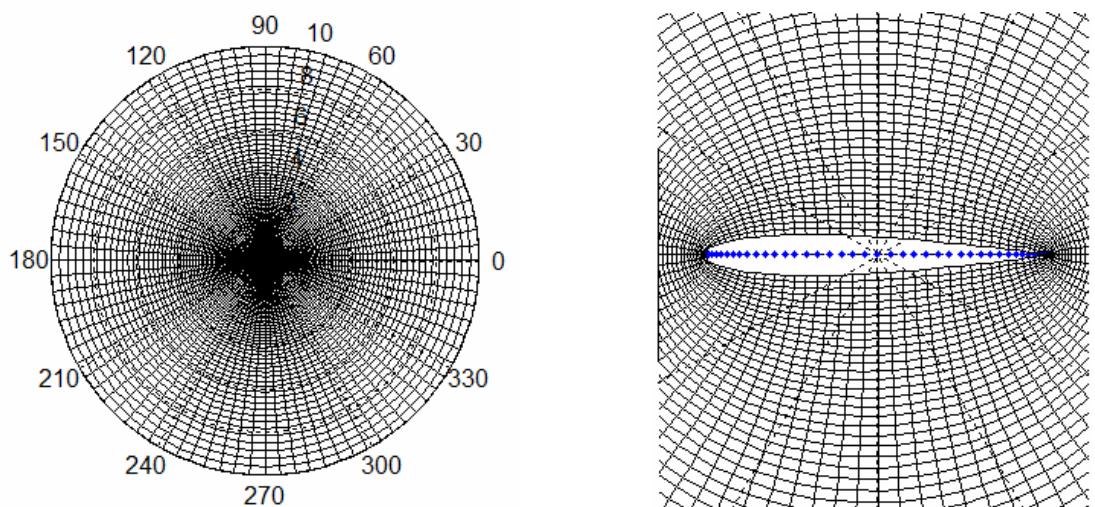
As simulações foram feitas para o aerofólio NACA 0012, para diversos ângulos de ataque, a saber:  $0^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  e  $9^\circ$ . Os resultados obtidos para o coeficiente de pressão no aerofólio foram comparados graficamente com os resultados obtidos pelo Método dos Painéis, disponíveis na literatura (Lima, 2006).

As simulações foram realizadas utilizando a FBR Multiquádrica e a FBR TPS Modificada, para duas dimensões de malhas, a saber, 49 x 49 pontos e 89 x 89 pontos. Neste capítulo são apresentados os resultados para a FBR Multiquádrica. Os resultados para a FBR TPS Modificada estão apresentados no Apêndice D.

As Figuras 4.30 e 4.31 ilustram as malhas tipo "O", de 49 x 49 pontos e de 89 x 89 pontos, respectivamente, geradas para o aerofólio NACA 0012. Para a malha de 49 x 49 pontos, foram necessárias 221 iterações e para a malha de 89 x 89 pontos, 565 iterações.



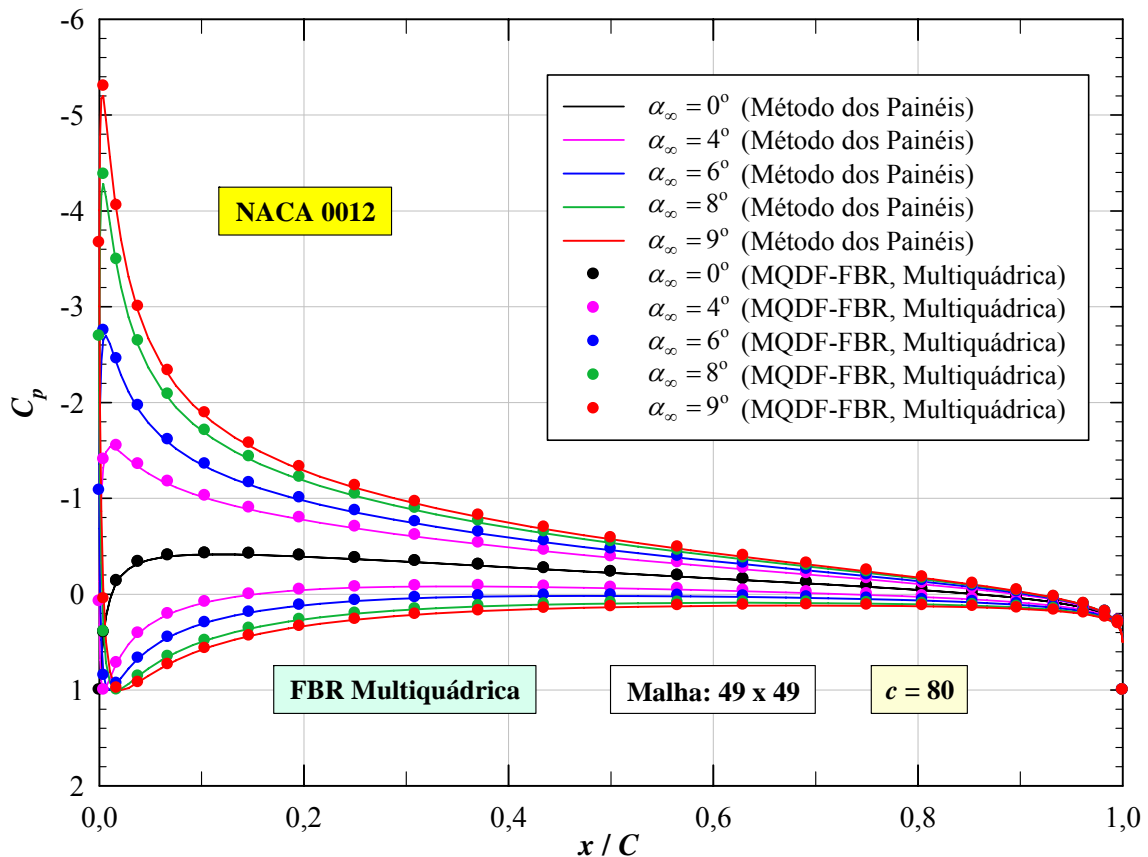
**Figura 4.30:** Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio NACA 0012, 49 x 49 pontos



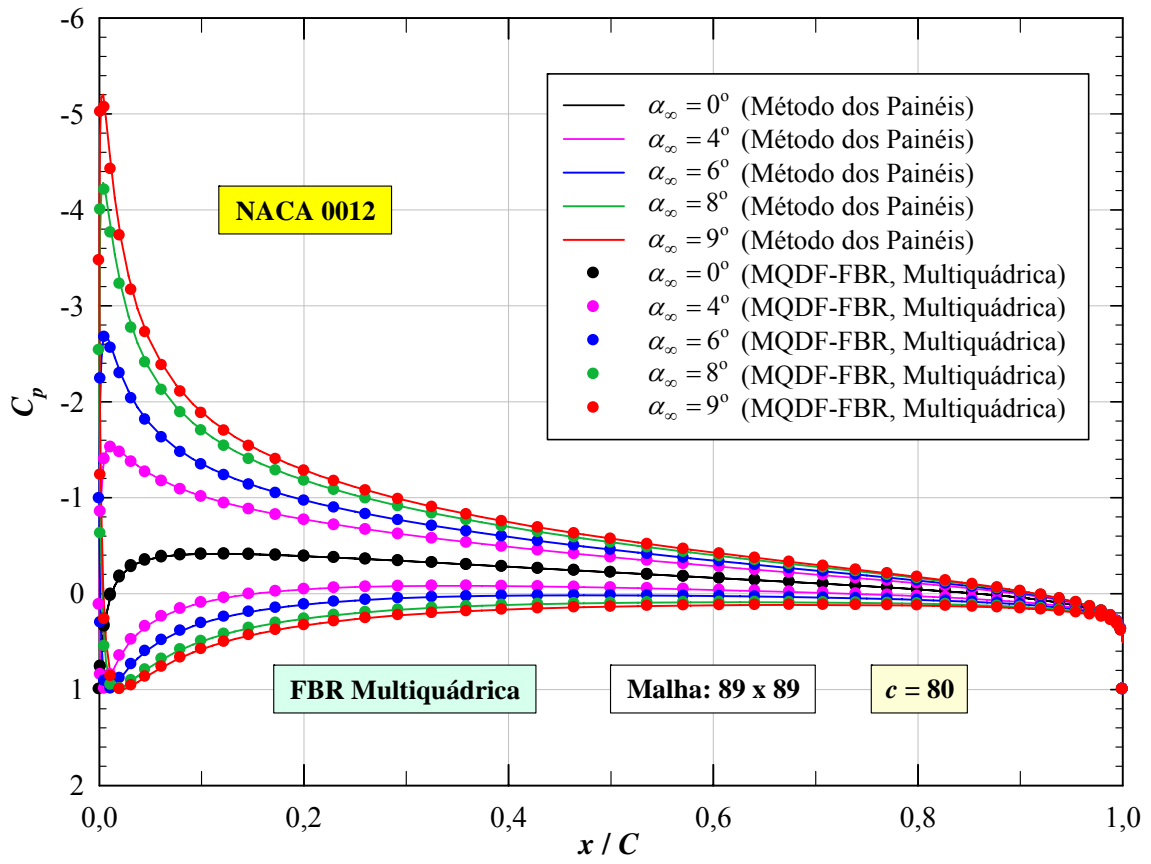
**Figura 4.31:** Malha tipo "O" gerada em torno do aerofólio NACA 0012, 89 x 89 pontos

As simulações para o NACA 0012, utilizando a FBR Multiquádrica, foram realizadas para o valor do parâmetro de forma  $c = 80$ , uma vez que este foi o valor que, para o aerofólio Joukowski, apresentou os melhores resultados, independentemente do ângulo de ataque. As Figuras 4.32 e 4.33 ilustram os resultados obtidos pelo MQDL-FBR, utilizando a FBR Multiquádrica, para a malha de  $49 \times 49$  pontos e de  $89 \times 89$  pontos, respectivamente, bem como os resultados obtidos por Lima (2006) utilizando o Método dos Painéis.

Observa-se que, para a malha de  $89 \times 89$  pontos, houve uma maior concordância dos resultados obtidos pelo MQDL-FBR utilizando a FBR Multiquádrica, com os resultados obtidos por Lima (2006), sendo este fato mais visível na região extradorso, próxima ao bordo de ataque do aerofólio.

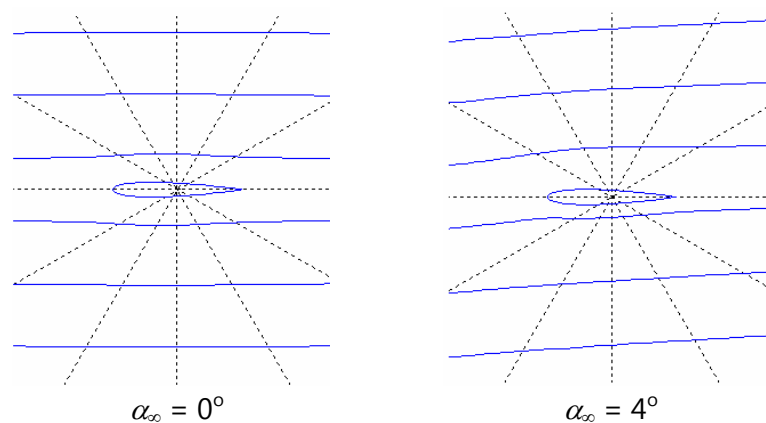


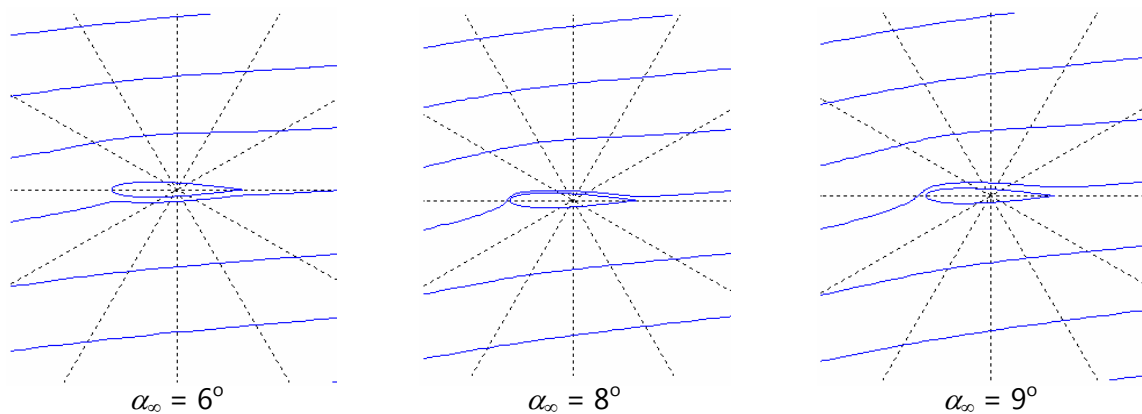
**Figura 4.32:** Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, malha tipo "O",  $49 \times 49$  pontos, FBR Multiquádrica



**Figura 4.33:** Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica

A Figura 4.34 ilustra as linhas de corrente para o escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio NACA 0012, obtidas nas simulações com a FBR Multiquádrica, com parâmetro de forma  $c = 80$ , para os ângulos de ataque  $0^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  e  $9^\circ$ , da esquerda para a direita.





**Figura 4.34:** Linhas de corrente para os ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ$  e  $9^\circ$ , NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR Multiquádrica,  $c = 80$

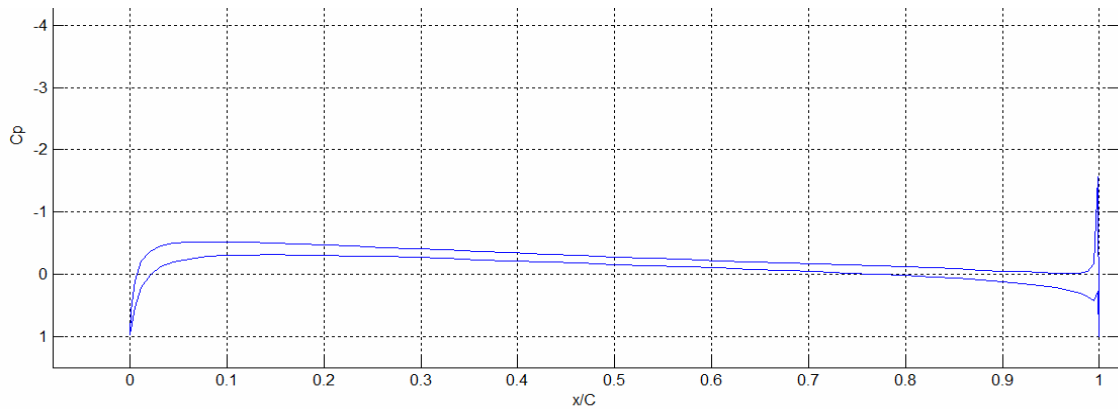
Os resultados das simulações utilizando a FBR TPS Modificada, estão apresentados no Apêndice D.

#### 4.4.1 A Equação da Espessura de Perfis NACA de 4 Dígitos

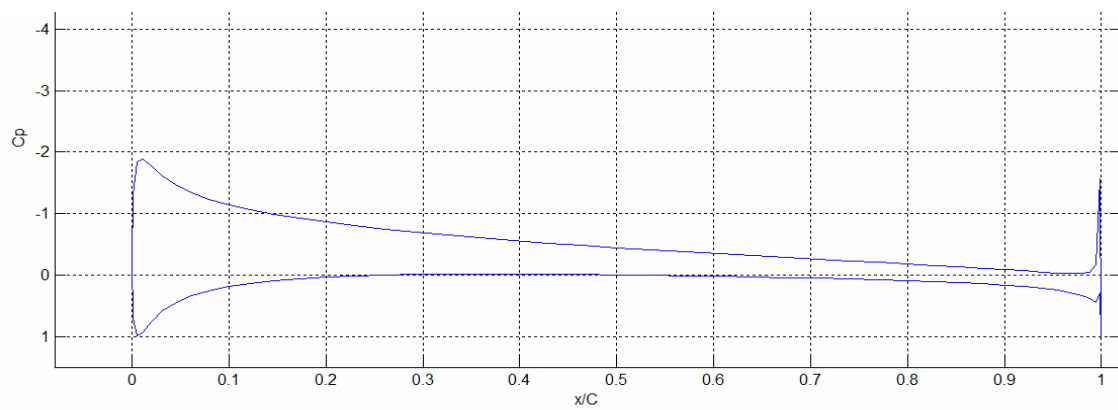
A equação da espessura de perfis NACA de quatro dígitos apresenta divergências na literatura quanto ao valor da constante do terceiro termo. Neste trabalho, essa constante foi utilizada conforme Moran (1984), apresentada na Equação (2.121) do Capítulo 2.

Testes foram realizados considerando o valor da constante do terceiro termo da Equação (2.121) igual a  $-0,3516$ , conforme apresentada por Abbott e Doenhoff (1959). No entanto, ao utilizar tal valor, os resultados apresentados evidenciaram problemas na região do bordo de fuga e não foram coerentes com os esperados para o escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio NACA 0012.

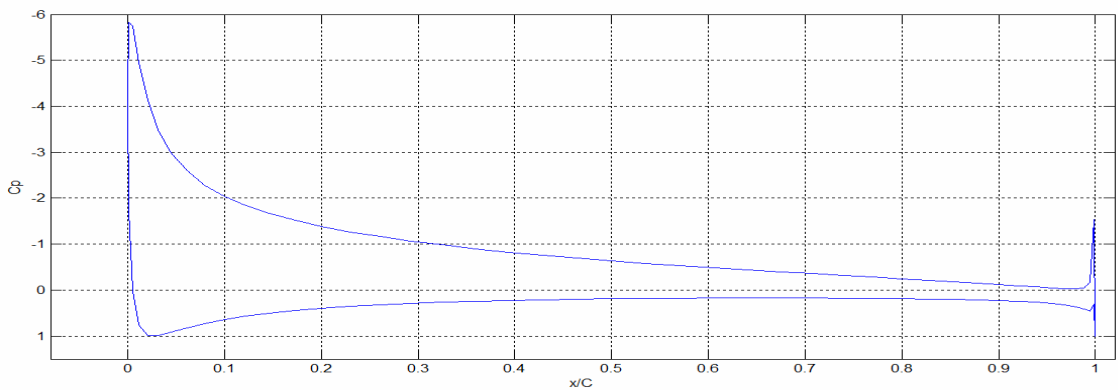
As Figuras 4.35, 4.36, 4.37 ilustram as distribuições do coeficiente de pressão obtidas para os ângulos de ataque  $0^\circ, 4^\circ$  e  $9^\circ$ , respectivamente, ao utilizar tal valor ( $-0,3516$ ) para a terceira constante da equação de geração do perfil NACA 0012. O comportamento do coeficiente de pressão afasta-se do esperado e obtido por Lima (2006). Surge uma pequena diferença na geometria do aerofólio, não "fechando" o bordo de fuga, resultando em uma instabilidade numérica.



**Figura 4.35:** Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica,  $c = 80$ ,  $89 \times 89$  pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a  $-0,3516$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$



**Figura 4.36:** Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica,  $c = 80$ ,  $89 \times 89$  pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a  $-0,3516$ ,  $\alpha_\infty = 4^\circ$



**Figura 4.37:** Distribuição do coeficiente de pressão, NACA 0012, FBR Multiquádrica,  $c = 80$ ,  $89 \times 89$  pontos, valor da constante do terceiro termo da equação de mapeamento igual a  $-0,3516$ ,  $\alpha_\infty = 9^\circ$

## 4.5 Tabelas de Consolidação dos Resultados Obtidos ao Utilizar a FBR Multiquádrica

As simulações indicaram valores diferentes de dimensões da malha e parâmetro de forma da FBR Multiquádrica que resultaram em menores EMQ, em função da geometria. No caso da elipse, as variações também ocorreram em função da razão de aspecto e do ângulo de ataque.

A Tabela 4.10 apresenta as dimensões da malha e os valores do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica que apresentaram os melhores resultados nas simulações.

**Tabela 4.10:** Dimensões da malha e dos valores do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica que resultaram nos menores EMQ

| Geometria  | $N \times N$ | $c$ |
|--|--------------|-----|
| Cilindro   | 89 x 89      | 80  |
| Elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$                    | 89 x 89      | 90  |
| Elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$                    | 89 x 89      | 20  |
| Elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$                    | 69 x 69      | 80  |
| Elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$                    | 79 x 79      | 10  |
| Aerofólio Joukowski Simétrico e Arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ | 45 x 45      | 80  |
| Aerofólio Joukowski Simétrico e Arredondado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ | 45 x 45      | 80  |
| Aerofólio Joukowski Simétrico e Afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$     | 45 x 45      | 80  |
| Aerofólio Joukowski Simétrico e Afilado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$     | 45 x 45      | 80  |

O número de iterações para a geração da malha e os tempos gastos nas simulações foram diferentes, principalmente em função da geometria considerada e da dimensão da malha. A Tabela 4.11 apresenta o número de iterações necessário para gerar a malha e os tempos aproximados das simulações que apresentaram os menores valores de EMQ. Nessa tabela, o tempo 1 corresponde ao tempo gasto na geração da malha; o tempo 2, o tempo necessário para o cálculo dos coeficientes de ponderação e o tempo 3, o tempo gasto para a solução do sistema de equações do MQDL-FBR. Todos estes tempos são dados em segundos.



**Tabela 4.11:** Número de iterações para a geração da malha e tempos gastos nas simulações que apresentaram menor EMQ

| Geometria  | Iterações | Tempo 1 | Tempo 2 | Tempo 3 |
|--|-----------|---------|---------|---------|
| Cilindro   | 488       | 83,83   | 0,09    | 218,75  |
| Elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$          | 523       | 92,57   | 0,07    | 280,44  |
| Elipse, $\lambda = 0,5$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$          | 523       | 92,92   | 0,08    | 236,19  |
| Elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$          | 381       | 40,15   | 0,08    | 59,55   |
| Elipse, $\lambda = 0,1$ , $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$          | 470       | 63,86   | 0,08    | 126,26  |
| Aer. Joukowski Sim. e Arredondado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$ | 177       | 8,24    | 0,08    | 7,83    |
| Aer. Joukowski Sim. e Arredondado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ | 177       | 7,76    | 0,08    | 8,02    |
| Aer. Joukowski Sim. e Afilado, $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$     | 198       | 8,62    | 0,07    | 7,70    |
| Aer. Joukowski Sim. e Afilado, $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$     | 198       | 8,77    | 0,08    | 7,90    |

O número de iterações para a geração da malha e os tempos gastos, em segundos, nas simulações do aerofólio NACA 0012 estão expressos em segundos na Tabela 4.12. Estes valores foram funções apenas da dimensão da malha.

**Tabela 4.12:** Número de iterações para a geração da malha e tempos gastos nas simulações do NACA 0012

| Dimensão da Malha ( $N \times M$ ) | Iterações | Tempo 1 | Tempo 2 | Tempo 3 |
|------------------------------------|-----------|---------|---------|---------|
| 49 x 49                            | 221       | 12,00   | 0,08    | 10,94   |
| 89 x 89                            | 565       | 100,85  | 0,08    | 251,54  |

# Capítulo 5

## Conclusões e Sugestões

O Método da Quadratura Diferencial Local utilizando Função de Base Radial (MQDL-FBR) foi aplicado neste trabalho, para simular o escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometrias arbitrárias, a saber, o cilindro, a elipse, aerofólios Joukowski simétricos e o aerofólio NACA 0012.

Com o objetivo de reduzir o custo computacional, fez-se a opção por utilizar pontos obtidos a partir da geração de uma malha estruturada, ao invés de utilizar uma nuvem de pontos obtida por uma geração não-estruturada.

Este capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

### 5.1 Conclusões

#### 5.1.1 Sobre a Geração da Malha

1) Por se tratar de simulação de escoamento em torno de corpos de geometria complexa, fez-se a opção por gerar malhas que se ajustam aos corpos (*boddy-fitted*

*grid*), sendo utilizado o sistema de coordenadas generalizadas, coincidente com as fronteiras (*boundary-fitted coordinates*). Os corpos considerados foram: a) um cilindro com diâmetro igual a uma unidade de comprimento, b) uma elipse com eixo maior horizontal de uma unidade de comprimento, c) aerofólios Joukowski simétricos e aerofólio NACA 0012, todos com corda igual a uma unidade de comprimento. Estas geometrias foram localizadas no centro de uma circunferência com raio igual a dez unidades de comprimento e foi desenvolvido um programa utilizando o *software* MATLAB<sup>®</sup> para a geração das malhas.

2) Fez-se a opção pela geração de malhas estruturadas que, apesar de serem mais complexas no processo de geração, apresentam como vantagens o fato de não ser necessário o armazenamento de um grande número de informações e por permitirem um maior controle na geração. Dentre os tipos de malhas estruturadas, optou-se por malhas tipo "O", por permitirem uma distribuição precisa de pontos nas regiões dos bordos de ataque e de fuga de perfis aerodinâmicos. As malhas foram geradas utilizando o método diferencial elíptico, resultando em soluções suaves. Como este método de geração não garante a ortogonalidade das linhas da malha, as malhas geradas apresentavam diferenças dos espaçamentos nas regiões próximas aos bordos de fugas dos perfis aerodinâmicos, comprometendo a precisão da solução numérica. Foi então imposta, na fronteira reentrante, a condição de ortogonalidade.

3) Para a geração da malha torna-se necessário estabelecer uma distribuição inicial de pontos no domínio físico. Este trabalho utilizou a interpolação transfinita, que se destaca como método algébrico de baixo custo computacional. O domínio físico foi então discretizado utilizando o Método das Diferenças Finitas e o sistema de equações resultante foi resolvido utilizando o Método de Sobre-relaxação Sucessiva (SOR). Testes numéricos foram realizados e, para todos os casos, o valor do fator de relaxação igual a 1,85 resultou em um menor número de iterações necessárias para a convergência, sendo esta definida para uma tolerância de  $10^{-5}$ .

4) No processo de geração de malhas estruturadas, podem ser aplicadas funções,  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ , que têm como objetivo controlar a distribuição de pontos no interior das malhas, podendo atrair as linhas para outras linhas ou pontos específicos. Estas funções são conhecidas como funções de controle e diversas expressões são apresentadas na literatura. Nesta Tese de Doutorado, foi avaliada a influência dos valores atribuídos a estas funções de controle, a influência da condição de ortogonalidade, bem como a influência do número de pontos da malha. Os testes foram realizados com as malhas geradas para os aerofólios Joukowski simétricos e para o aerofólio NACA 0012.

5) Quanto à influência dos valores das funções de controle, observou-se que, para o aerofólio NACA 0012, deformações ocorreram para valores de  $P(\xi, \eta) = \pm 0,15$  e quebras das malhas ocorreram para valores de  $P(\xi, \eta) \leq -0,43$ ,  $P(\xi, \eta) \geq 0,5$ ,  $Q(\xi, \eta) \leq -0,23$  e  $Q(\xi, \eta) \geq 1,57$ . Ao variar  $Q$ , as malhas não se deformaram até atingir os valores de "quebra", apenas tiveram as suas linhas aproximadas ( $Q(\xi, \eta) < 0$ ) ou afastadas ( $Q(\xi, \eta) > 0$ ) do corpo. Já as malhas geradas para os aerofólios Joukowski simétricos, foram bastante sensíveis aos valores atribuídos a  $P(\xi, \eta)$  e a  $Q(\xi, \eta)$ . Para o aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, deformações e quebras das malhas ocorreram para valores de  $P(\xi, \eta) \leq -0,02$ ,  $P(\xi, \eta) \geq 0,02$ ,  $Q(\xi, \eta) \leq -0,07$  e  $Q(\xi, \eta) \geq 1,55$ . Para o aerofólio Joukowski simétrico e afilado, as deformações e quebras só não ocorreram para valores nulos de  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$ .

6) Para verificar a influência da condição de ortogonalidade, as malhas foram geradas considerando nulos os valores das funções de controle. Ficou evidente que não aplicar a condição de ortogonalidade gera afastamentos e variações do espaçamento das malhas, que comprometem a precisão das soluções numéricas. A condição foi aplicada na fronteira reentrante, no domínio físico.

7) Quanto à influência do número de pontos das malhas, observou-se que, para o aerofólio NACA 0012, o número de pontos distribuídos não comprometeu a

geração das malhas, mas foi observado um aumento significativo de tempo gasto para a convergência, para dimensões superiores a 49 x 49 pontos. Para os aerofólios Joukowski simétricos, ocorreu mal condicionamento dos sistemas de equação resultantes na geração, para determinadas distribuições de pontos. Para o aerofólio Joukowski arredondado e simétrico, problemas ocorreram para dimensões inferiores a 39 x 39 pontos e superiores a 45 x 45 pontos. A geração da malha em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado mostrou-se ainda mais sensível ao número de pontos distribuídos. Para este aerofólio, problemas ocorreram para dimensões da malha inferiores a 41 x 41 pontos e superiores a 45 x 45 pontos.

### 5.1.2 Sobre a Aplicação do MQDL-FBR

1) A aplicação do MQDL-FBR foi realizada no domínio computacional regular. A aplicação não foi realizada no domínio físico, pelo fato de se estar trabalhando com geometrias complexas e, portanto, ser necessário utilizar, estruturas de suporte não centradas e de dimensões diversas, o que implicaria em um maior custo computacional.

2) Para a aplicação do MQDL-FBR, foram utilizados das malhas geradas, apenas os pontos de interseção (nós de referência) e, após o mapeamento para o domínio computacional regular, foi definida uma estrutura de suporte fixa e centrada, contendo nove nós de suporte. Foram realizadas simulações considerando o escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, da elipse com duas razões de aspecto ( $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 0,1$ ) a dois ângulos de ataque diferentes ( $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ ), dos aerofólios Joukowski simétricos (arredondado e afilado na região próxima ao bordo de fuga) a ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$  e do aerofólio NACA 0012 a ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ ,  $\alpha_\infty = 4^\circ$ ,  $\alpha_\infty = 6^\circ$ ,  $\alpha_\infty = 8^\circ$  e  $\alpha_\infty = 9^\circ$ .

3) Foram utilizadas duas FBRs, a FBR Multiquádrica e a FBR TPS Modificada. Em todas as simulações, foi observado que resultados satisfatórios para a FBR

Multiquádrica ocorriam para valores do parâmetro de forma entre  $c = 10$  e  $c = 110$ . No entanto, para a FBR TPS Modificada, resultados razoáveis foram obtidos para valores do parâmetro de forma ( $c$ ) bem mais elevados. Para avaliação dos resultados foi utilizado o Erro Médio Quadrático (EMQ) para os valores do coeficiente de pressão na superfície do cilindro, das elipses e dos aerofólios Joukowski simétricos, tomando como referência a solução exata para o escoamento potencial e bidimensional. Os resultados do aerofólio NACA 0012 foram comparados graficamente com os resultados obtidos por Lima (2010), que utilizou o Método dos Painéis. Com o refinamento da malha, os resultados apresentaram boa concordância.

4) Foram realizados diversos testes numéricos para verificação do melhor valor do parâmetro de forma das FBRs Multiquádrica e TPS Modificada. Foi avaliada também a influência da dimensão da malha na precisão dos resultados. Em todas as simulações realizadas, os resultados obtidos com a utilização da FBR Multiquádrica foram melhores que os resultados obtidos com a utilização da FBR TPS Modificada.

5) Observando os melhores resultados obtidos com a FBR Multiquádrica, nota-se que, quanto maior a excentricidade do corpo, menor a dimensão da malha para a obtenção de resultados com menor EMQ. Para o cilindro e para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , a dimensão da malha que apresentou os melhores resultados foi de  $89 \times 89$  pontos, independente do ângulo de ataque da elipse. Para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , o menor EMQ foi obtido com a malha de  $69 \times 69$  pontos, quando considerado o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e com a malha de  $79 \times 79$  pontos quando considerado o ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

6) Tanto no cilindro, quanto na elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , na análise da influência da dimensão da malha, foram observados erros de estagnação ou de saturação, que ocorrem quando o EMQ não diminui com o refinamento da malha.

7) Nas simulações do escoamento em torno da elipse, percebeu-se uma forte influência do parâmetro de forma da FBR Multiquádrica com o ângulo de ataque do escoamento. Ao aumentar o ângulo de ataque, o valor do parâmetro de forma que resultou em valores menores do EMQ foi sensivelmente reduzido.

8) Nos resultados obtidos para o escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, notou-se uma divergência do valor numérico em relação ao teórico, no bordo de fuga. Tal divergência ocorreu devido à metodologia empregada para a imposição da condição de Kutta, que previa no bordo de fuga um ponto de estagnação. Sabe-se que, para perfis afilados, no bordo de fuga não ocorre ponto de estagnação.

9) Os tempos de processamento sofreram variações em função da geometria do corpo e da dimensão da malha. Considerando as simulações que resultaram em um menor EMQ, apresentadas nas tabelas de consolidação dos resultados, Tabelas 4.10 e 4.11, pode-se observar que: a) para o cilindro e para a elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , gerar a malha de 89 x 89 pontos gastou em média, 28% do tempo total necessário para obtenção do valor da função corrente e, solucionar o sistema final para obtenção da função, gastou cerca de 72%; b) com o aumento da excentricidade da elipse, gerar a malha de dimensão menor gastou percentualmente um tempo maior, cerca de 40% do tempo necessário para a obtenção do valor da função corrente, considerando o ângulo de ataque  $\alpha_{\infty} = 0^{\circ}$  e cerca de 34%, considerando o ângulo de ataque  $\alpha_{\infty} = 5^{\circ}$ ; c) para os aerofólios Joukowski simétricos, mesmo com malhas de dimensão menor (45 x 45 pontos), o tempo gasto para gerar a malha correspondeu a cerca de 50% do tempo total gasto para a obtenção do valor da função corrente. Assim, conclui-se que, o aumento da excentricidade da geometria foi determinante no aumento percentual do tempo gasto para a geração da malha.

10) Para o aerofólio NACA 0012, com o aumento da dimensão da malha, de 49 x 49 pontos para 89 x 89 pontos, os percentuais aproximados dos tempos gastos em relação ao tempo total para a obtenção do valor da função corrente foram alterados: a) para a geração da malha: de 52% para 29%; b) para a solução do sistema final do MQDL-FBR: de 48% para 71%. Assim, para a mesma geometria, o refinamento da malha não implicou em maior tempo percentual para a sua geração,

mas sim, em um aumento do tempo percentual para a obtenção dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR.

11) Em todas as simulações realizadas, o tempo gasto para a determinação dos coeficientes de ponderação do MQDL-FBR não ultrapassou a 0,05% do tempo total.

12) Os resultados das simulações, com as FBRs Multiquádrica e TPS Modificada, para o aerofólio NACA 0012 apresentaram boa concordância com os resultados obtidos pelo Método dos Painéis, disponíveis na Literatura (Lima, 2010). O refinamento da malha contribuiu para a maior concordância, mais evidente na região do bordo de ataque.

13) Diferenças nos valores encontrados na literatura, na constante do terceiro termo da expressão que define a distribuição de espessura de perfis NACA de 4 dígitos chamou a atenção. Apesar de a divergência existir nas terceira e quarta casas decimais desta constante, ficou evidenciado que resultados equivocados podem ser obtidos, caso não seja utilizado o valor correto da constante. Como a condição de Kutta está sendo aplicada exatamente no bordo de fuga, o “não fechamento” do perfil, nesta região, leva a cálculos numéricos divergentes.

14) Conclui-se que o MQDL-FBR é um método eficiente, flexível e bastante interessante para ser utilizado em problemas que envolvam geometrias complexas, apresentando um baixo custo computacional. Permite trabalhar com grande número de pontos, podendo ser potencialmente utilizado em aplicações que envolvam dinâmica dos fluidos.

## **5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros**

Algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas com base nos resultados encontrados nesta Tese de Doutorado.



- 1) Análise da distribuição inicial de pontos para a geração de malhas estruturadas em torno de perfis aerodinâmicos

No presente trabalho, foi utilizada a interpolação transfinita para obtenção da distribuição inicial de pontos para a geração da malha estruturada tipo "O". Em torno dos aerofólios Joukowski simétricos, ocorreu uma restrição à quantidade de pontos para ser possível a geração das malhas. Tal restrição foi ainda maior no caso do aerofólio afilado. No sentido de investigar tal fato, um estudo sobre as possibilidades para se obter a distribuição inicial de pontos e, a influência do método utilizado, na geração da malha em função da geometria, seria bastante útil (Hirsch, 2007, Mohebbi, 2014).

- 2) Estudo do controle dos pontos internos ao domínio, na geração de malhas estruturadas

Sabe-se que diversas propostas para as funções de controle de pontos, na geração da malha, estão propostas na literatura. Um estudo sobre estas funções e as suas influências em diversas configurações de malhas estruturadas, seria interessante para aplicar métodos numéricos em problemas que envolvam geometrias complexas (Thompson *et al.*, 1977a, Thompson *et al.*, 1977b).

- 3) Análise da influência do ângulo de ataque do escoamento em torno da elipse

No presente trabalho, uma das geometrias utilizadas foi a elipse. Foram utilizadas elipses com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 0,1$ , sendo realizadas simulações considerando dois valores do ângulo de ataque, a saber:  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ . Os melhores resultados, como quando utilizadas as outras geometrias, foram obtidas com a FBR Multiquádrica. Chamou a atenção o fato dos resultados que apresentaram o menor EMQ terem sido fortemente influenciados pelo ângulo de ataque do escoamento, merecendo uma maior investigação.

- 4) Aplicação do MQDL-FBR no escoamento potencial e bidimensional, diretamente no domínio físico

No trabalho aqui apresentado, fez-se a opção por, a partir de um mapeamento, aplicar o MQDL-FBR no escoamento potencial e bidimensional no plano regular computacional. A metodologia utilizada apresentou um baixo custo computacional. No entanto, pode-se avaliar aplicar o MQDL-FBR no espaço físico irregular, mas, com utilização de estruturas de suporte não centradas e de dimensões variáveis, o que, possivelmente irá dispende maior memória e tempo de processamento.

#### 5) Análise da taxa de convergência em função da dimensão da malha

Os testes realizados no presente trabalho sugeriram a existência de erros de estagnação ou de saturação em algumas situações. Tais erros ocorrem quando, ao se refinar a malha, a precisão dos resultados diminui. Possivelmente, nestas situações, o grau de condicionamento da matriz do MQDL-FBR está piorando, diminuindo a taxa de convergência. Assim, a análise da taxa de convergência das soluções, em função da dimensão da malha, é um estudo interessante para justificar os erros de estagnação ou de saturação.

#### 6) Estudo da convergência na aplicação do MQDL-FBR no escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária, para diferentes FBRs

Este trabalho utilizou duas FBRs e uma única estrutura de suporte centrada para a aplicação do MQDL-FBR no domínio computacional regular. A utilização de outras FBRs e um estudo da convergência em função da FBR utilizada é interessante. Estruturas de suporte diferenciadas poderiam ser utilizadas e o estudo teria como objetivo avaliar a convergência das funções, identificando o comportamento das mesmas em relação às estruturas de suporte utilizadas, determinando qual a situação ideal a fim de obter a maior precisão possível. O estudo poderia verificar se o aumento da dimensão do suporte implica necessariamente no aumento da precisão dos resultados.

- 7) Aplicação do MQDL-FBR em problemas de escoamentos em torno de perfis afilados e a aplicação da condição de Kutta

No presente trabalho, a metodologia utilizada para a aplicação da condição de Kutta assegura um ponto de estagnação no bordo de fuga. No entanto, para perfis afilados, sabe-se que no bordo de fuga, não ocorre estagnação. A aplicação de outra metodologia para a imposição da condição de Kutta para perfis afilados torna-se então, muito interessante, para que se obtenha resultados numéricos precisos do coeficiente de pressão no bordo de fuga desses perfis (Mohebbi e Sellier, 2014).

- 8) Aplicação do MQDL-FBR em problemas de escoamento compressível em torno de geometrias complexas

O presente trabalho aplicou o MQDL-FBR no problema do escoamento potencial e bidimensional em torno de corpos de geometria arbitrária. Seria interessante aplicar o método a problemas de escoamento em torno de corpos de geometria complexa, considerando os efeitos de compressibilidade.

- 9) Aplicação do MQDL-FBR a problemas de escoamento interno

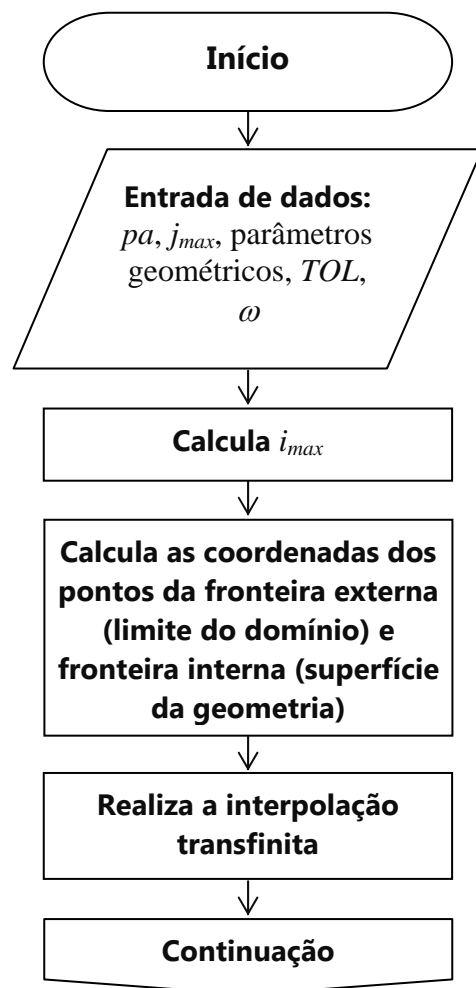
Na área de turbomáquinas, um trabalho de grande contribuição, seria a aplicação do MQDL-FBR no escoamento em um canal definido por duas pás na grade linear representativa de rotor axial. Deixa-se aqui a sugestão para utilizar como pontos de referência, os pontos de interseção de uma malha estruturada tipo "H", gerada entre as pás (Gostelow, 1965, Ahmed *et al.*, 1998, Chiang e Fleeter, 1988, Carstens, 1988, Flutt, 2008).

# Apêndice A

## Fluxograma da Geração de Malha

### Legenda:

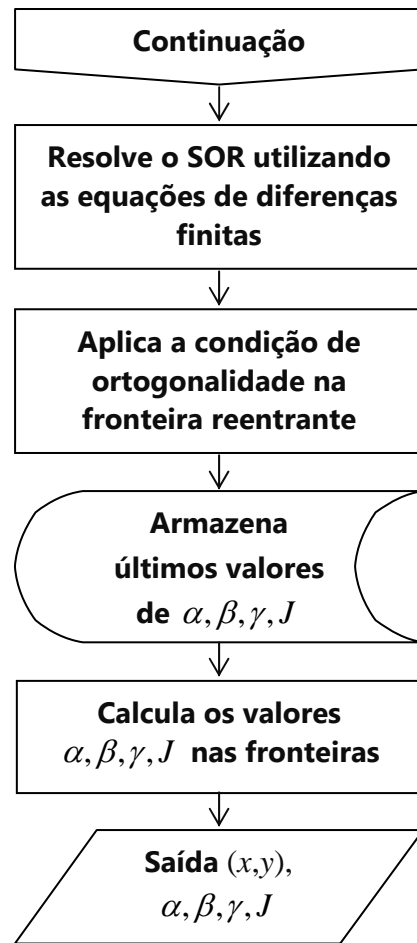
|           |   |
|-----------|---|
| $pa$      | Número de pontos no eixo da geometria ou corda do aerofólio |
| $j_{max}$ | Número máximo de linhas de $\eta$ constante                 |
| $TOL$     | Tolerância  |
| $\omega$  | Fator de relaxação  |
| $i_{max}$ | Número máximo de linhas de $\xi$ constante                  |



**Figura A.1:** Fluxograma da sub-rotina para a geração da malha

**Legenda** (continuação):

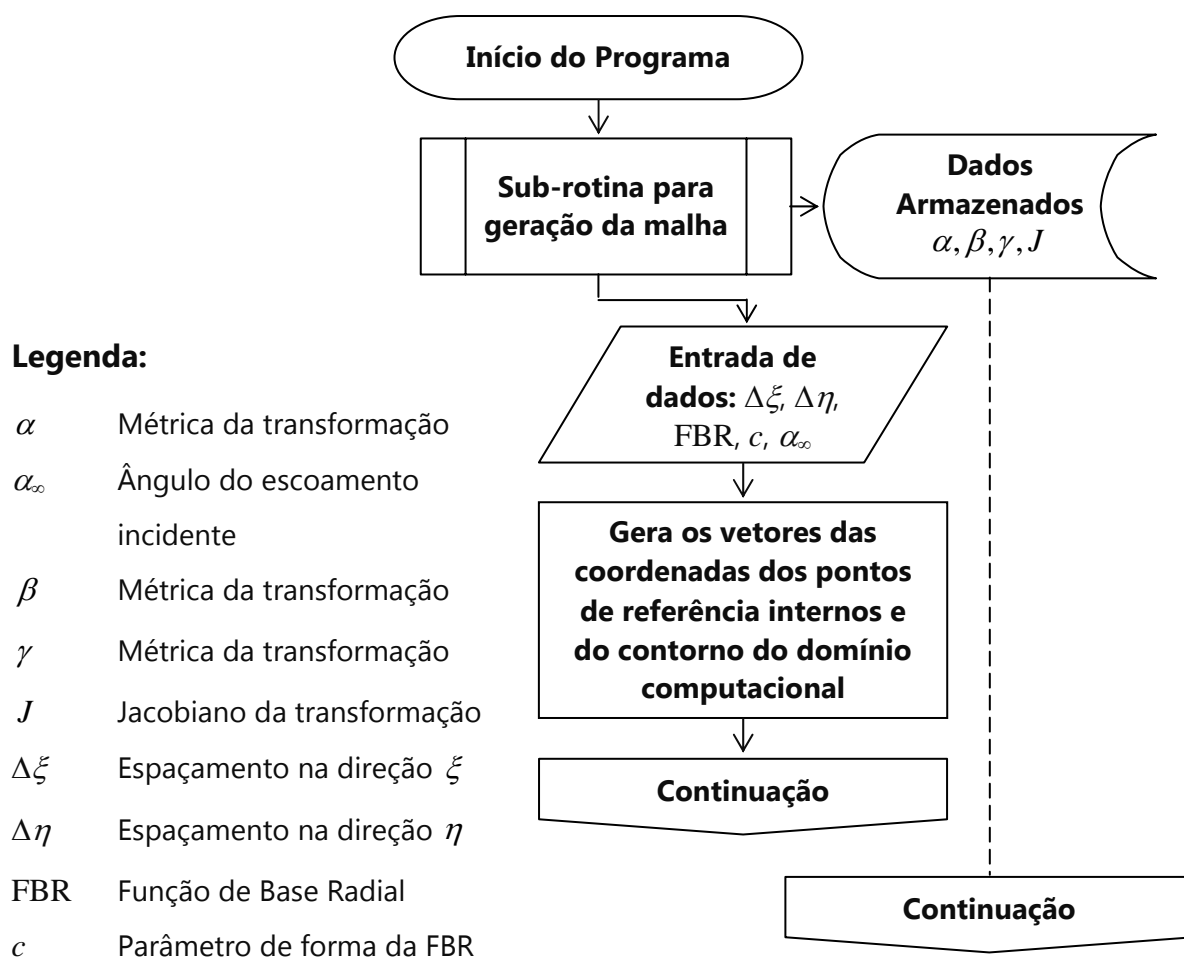
- SOR Método de sobre-relaxação sucessiva
- $\alpha$  Métrica da transformação
- $\beta$  Métrica da transformação
- $\gamma$  Métrica da transformação
- $J$  Jacobiano da transformação
- $(x,y)$  Coordenadas dos pontos de interseção no plano físico



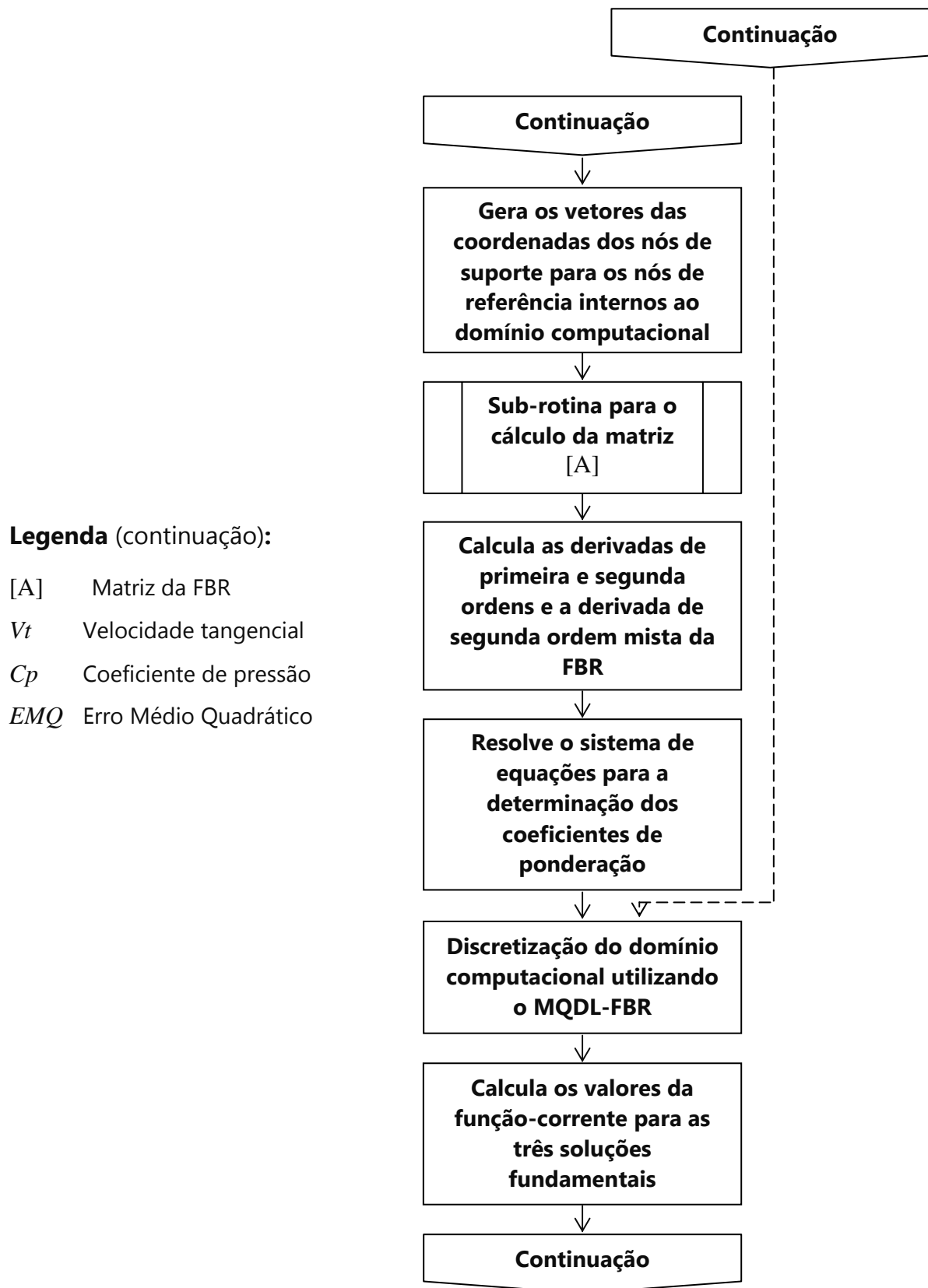
**Figura A.1:** Fluxograma da sub-rotina para a geração da malha (continuação)

## Apêndice B

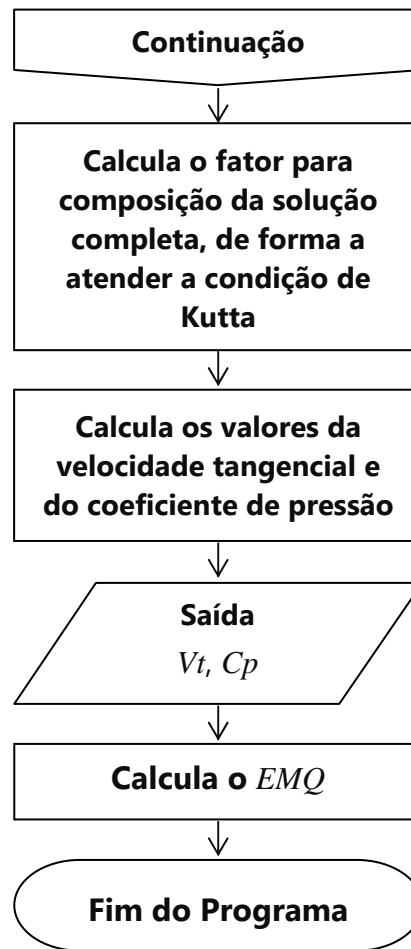
### Fluxograma do Programa Principal



**Figura B.1:** Fluxograma do programa principal



**Figura B.1:** Fluxograma do programa principal (continuação)



**Figura B.1:** Fluxograma do programa principal (continuação)



## Apêndice C

### Derivadas das FBRs Multiquádrica e TPS Modificada

#### C.1 FBR Multiquádrica

$$\phi = \sqrt{r^2 + c^2} \quad (\text{C.1})$$

A distância  $r$ , em duas dimensões, é dada pela equação (C.2).

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (\text{C.2})$$

A primeira derivada de  $r$  em relação a  $x$  é

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x - x_i)}{r} \quad (\text{C.3})$$

A primeira derivada de  $\phi$  em relação a  $x$  é calculada pela equação (C.4).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} 2r \frac{1}{2} \frac{1}{r} 2(x - x_i) = \frac{(x - x_i)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad (\text{C.4})$$

Assim,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(x - x_i)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad (\text{C.5})$$

Um procedimento análogo conduz a primeira derivada de  $\phi$  em relação a  $y$ , dada pela equação (C.6).

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{(y - y_i)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad (C.6)$$

A segunda derivada de  $\phi$  em relação a  $x$  é calculada pela equação (C.7).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{r^2 + c^2} - \frac{(x - x_i)}{\sqrt{r^2 + c^2}}(x - x_i)}{\left(\sqrt{r^2 + c^2}\right)^2} \quad (C.7)$$

ou,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(r^2 + c^2) - (x - x_i)^2}{\left(\sqrt{r^2 + c^2}\right)^{3/2}} \quad (C.8)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} - \frac{(x - x_i)^2}{(r^2 + c^2)^{3/2}} \quad (C.9)$$

Um procedimento análogo conduz à segunda derivada de  $\phi$  em relação a  $y$ , dada pela Equação (C.10).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} - \frac{(y - y_i)^2}{(r^2 + c^2)^{3/2}} \quad (C.10)$$

A segunda derivada mista de  $\phi$  pode ser calculada derivando a Equação (C.5) em relação a  $y$ , conforme a Equação (C.11).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = (x - x_i) \left( -\frac{1}{2} \right) (r^2 + c^2)^{-3/2} 2r \frac{(y - y_i)}{r} \quad (C.11)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = -\frac{(x - x_i)(y - y_i)}{(r^2 + c^2)^{3/2}} \quad (C.12)$$

## C.2 FBR TPS Modificada

$$\phi = r^2 \ln(r^2 + c) \quad (\text{C.13})$$

A distância  $r$ , em duas dimensões, é dada pela Equação (C.2) e a primeira derivada em relação a  $x$  é dada pela Equação (C.3).

A primeira derivada de  $\phi$  em relação a  $x$  é calculada pela Equação (C.14).

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2r \frac{(x - x_i)}{r} \ln(r^2 + c) + \frac{1}{r^2 + c} 2r \frac{(x - x_i)}{r} r^2 \quad (\text{C.14})$$

Assim,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2(x - x_i) \left( \ln(r^2 + c) + \frac{r^2}{r^2 + c} \right) \quad (\text{C.15})$$

Um procedimento análogo conduz à primeira derivada de  $\phi$  em relação a  $y$ , dada pela Equação (C.16).

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2(y - y_i) \left( \ln(r^2 + c) + \frac{r^2}{r^2 + c} \right) \quad (\text{C.16})$$

A segunda derivada de  $\phi$  em relação a  $x$  é calculada pela Equação (C.17).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = & 2 \left( \ln(r^2 + c) + \frac{r^2}{r^2 + c} \right) + \left[ \frac{1}{(r^2 + c)} 2r \frac{(x - x_i)}{r} + \right. \\ & \left. + \frac{2r \frac{(x - x_i)}{r} (r^2 + c) - 2r \frac{(x - x_i)}{r} r^2}{(r^2 + c)^2} \right] 2(x - x_i) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 \left( \ln(r^2 + c) + \frac{r^2}{r^2 + c} \right) + \left( \frac{2}{(r^2 + c)} - \frac{r^2}{(r^2 + c)^2} \right) 4(x - x_i)^2 \quad (\text{C.18})$$

Um procedimento análogo conduz à segunda derivada de  $\phi$  em relação a  $y$ , dada pela Equação (C.19).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 \left( \ln(r^2 + c) + \frac{r^2}{(r^2 + c)} \right) + \left( \frac{2}{(r^2 + c)} - \frac{r^2}{(r^2 + c)^2} \right) 4(y - y_i)^2 \quad (\text{C.19})$$

A segunda derivada mista de  $\phi$  pode ser calculada derivando a Equação (C.15) em relação a  $y$ , conforme a Equação (C.20).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 2(x - x_i) \left[ \frac{2r \frac{(y - y_i)}{r}}{r^2 + c} + \frac{2r \frac{(y - y_i)}{r} (r^2 + c) - 2r \frac{(y - y_i)}{r} r^2}{(r^2 + c)^2} \right] \quad (\text{C.20})$$

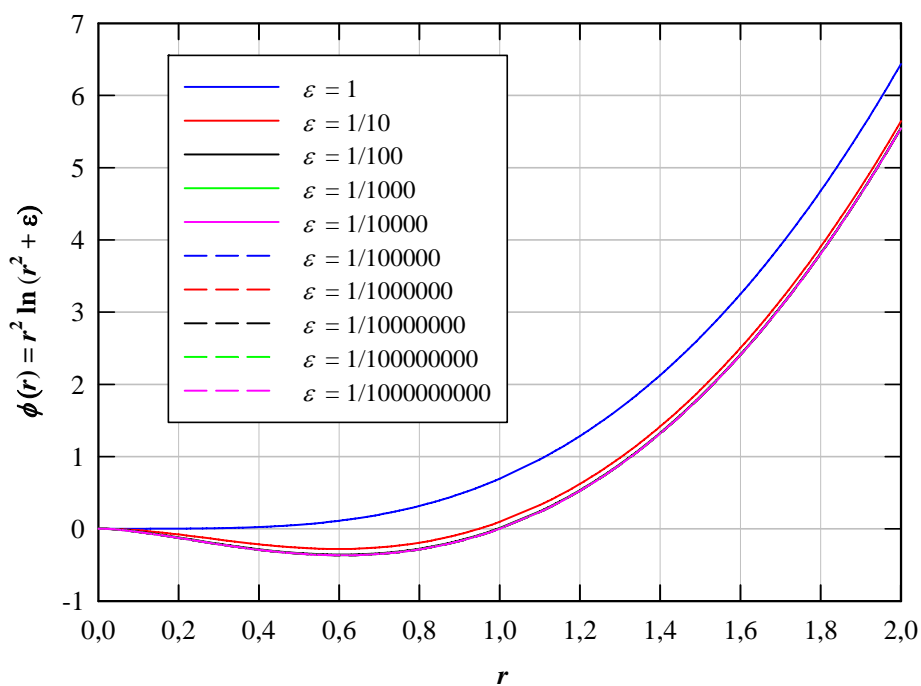
Assim,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 4(x - x_i)(y - y_i) \frac{r^2 + 2c}{(r^2 + c)^2} \quad (\text{C.21})$$

## Apêndice D

### Comportamento da FBR TPS Modificada e Resultados Obtidos com a sua Utilização

#### D.1 Comportamento da FBR TPS Modificada



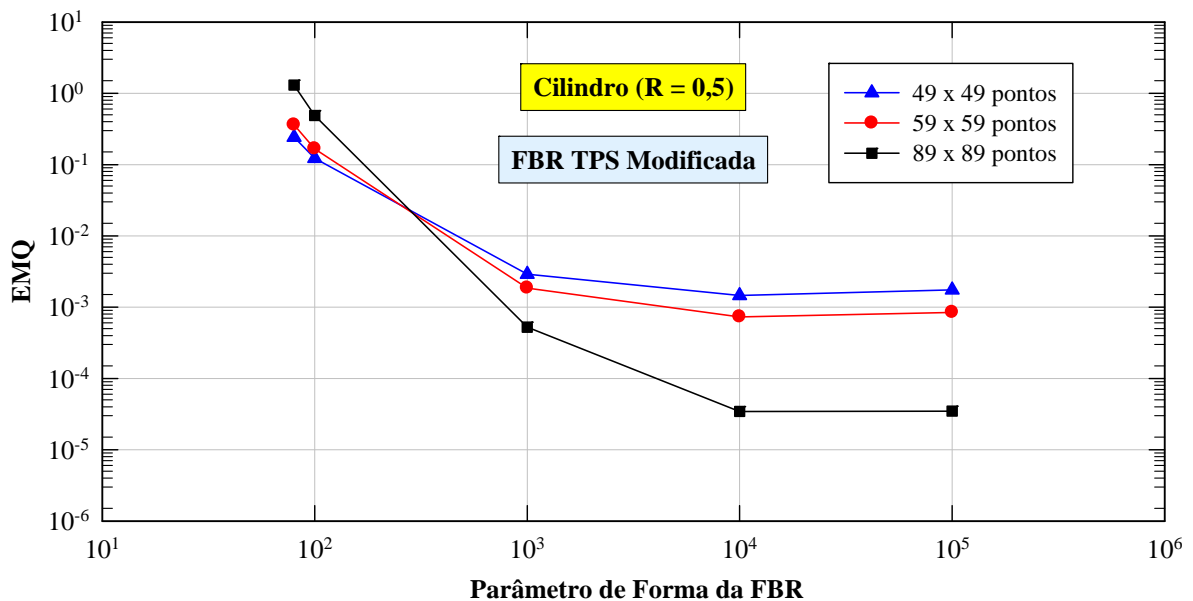
**Figura D.1:** Comportamento da FBR TPS Modificada para alguns valores do parâmetro de forma  $\varepsilon$

## D.2 Resultados dos Testes com o Cilindro

Resultados do comportamento do EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma ( $c$ ) da FBR TPS Modificada, para as malhas de 49 x 49 pontos, 59 x 59 pontos e 89 x 89 pontos.

**Tabela D.1:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada

| $c$               | EMQ (Malha 49 x 49)       | EMQ (Malha 59 x 59)       | EMQ (Malha 89 x 89)       |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,0 \times 10^1$ | $2,411290 \times 10^{-1}$ | $3,604945 \times 10^{-1}$ | $1,300902 \times 10^0$    |
| $1,0 \times 10^1$ | $1,221657 \times 10^{-1}$ | $1,666588 \times 10^{-1}$ | $4,860625 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^3$ | $2,887578 \times 10^{-3}$ | $1,848757 \times 10^{-3}$ | $5,247036 \times 10^{-4}$ |
| $1,0 \times 10^4$ | $1,453178 \times 10^{-3}$ | $7,318669 \times 10^{-4}$ | $3,435805 \times 10^{-5}$ |
| $1,0 \times 10^5$ | $1,740111 \times 10^{-3}$ | $8,434726 \times 10^{-4}$ | $3,472097 \times 10^{-5}$ |

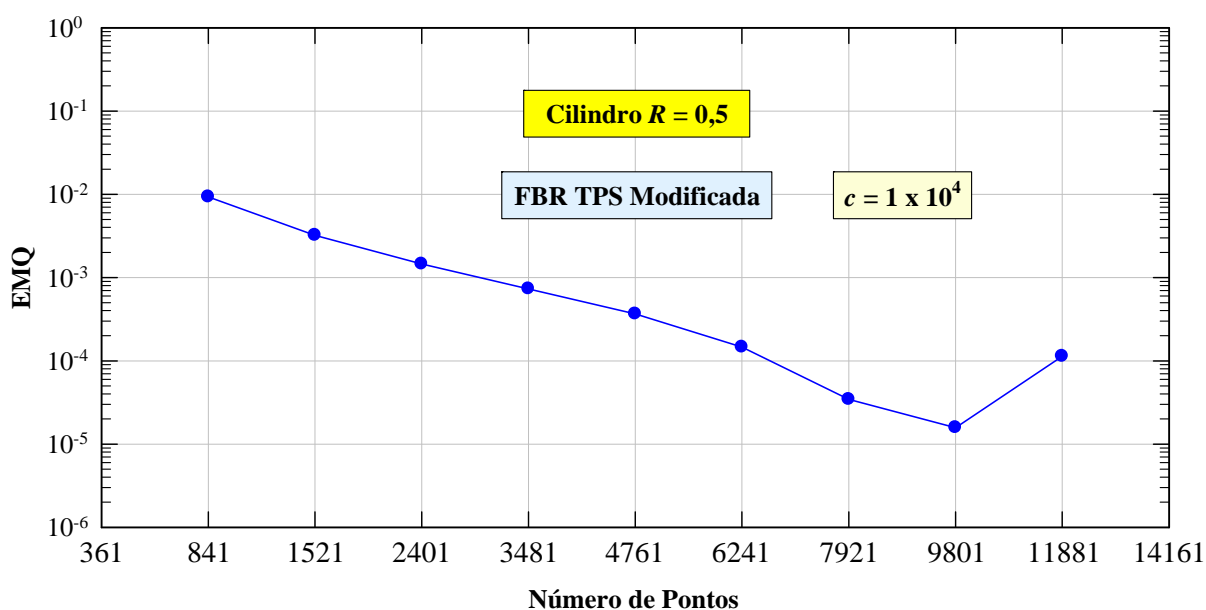


**Figura D.2:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro

Resultados da influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados. Foi fixado o valor do parâmetro de forma da FBR TPS Modificada que apresentou os melhores resultados nos testes anteriores ( $c = 1 \times 10^4$ ).

**Tabela D.2:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada,  $c = 1 \times 10^4$

| $N \times N$ | EMQ                       |
|--------------|---------------------------|
| 29 x 29      | $9,294410 \times 10^{-3}$ |
| 39 x 39      | $3,215777 \times 10^{-3}$ |
| 49 x 49      | $1,453178 \times 10^{-3}$ |
| 59 x 59      | $7,318669 \times 10^{-4}$ |
| 69 x 69      | $3,650832 \times 10^{-4}$ |
| 79 x 79      | $1,461762 \times 10^{-4}$ |
| 89 x 89      | $3,435805 \times 10^{-5}$ |
| 99 x 99      | $1,572419 \times 10^{-5}$ |
| 109 x 109    | $1,131205 \times 10^{-4}$ |



**Figura D.3:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do cilindro, FBR TPS Modificada,  $c = 1 \times 10^4$

### D.3 Resultados dos Testes com a Elipse com Razão de Aspecto Igual a 0,5

Resultados das simulações para o escoamento potencial em torno da elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , utilizando a FBR TPS Modificada, considerando ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

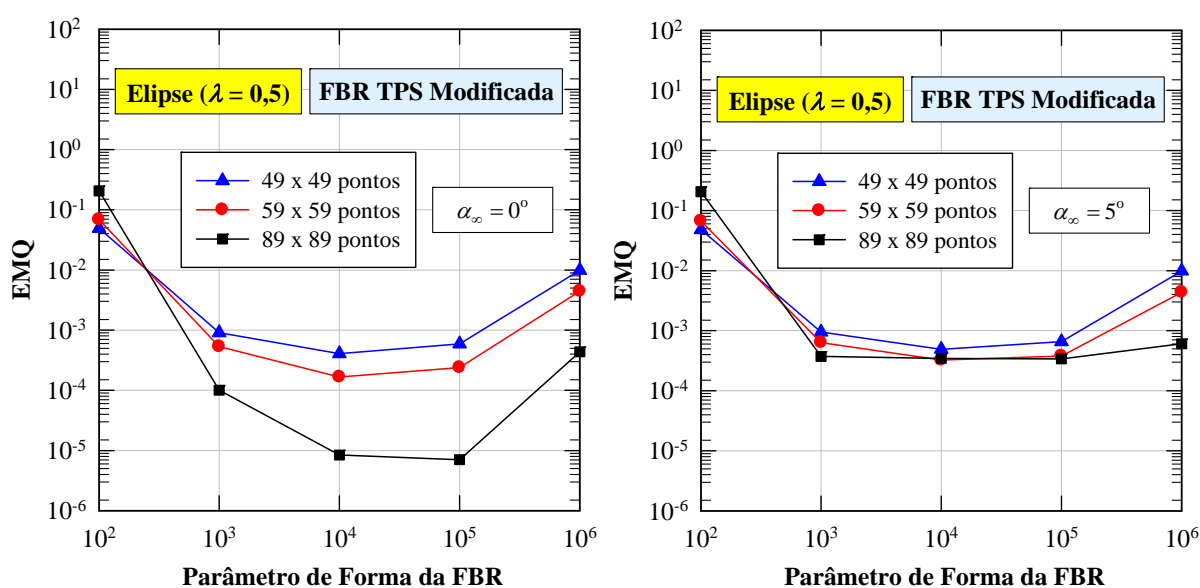
**Tabela D.3:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$               | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,0 \times 10^1$ | $9,891846 \times 10^{-2}$ | $1,500651 \times 10^{-1}$ | $5,565047 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^2$ | $4,928409 \times 10^{-2}$ | $6,826729 \times 10^{-2}$ | $2,061002 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^3$ | $9,064360 \times 10^{-4}$ | $5,310830 \times 10^{-4}$ | $1,008739 \times 10^{-4}$ |
| $1,0 \times 10^4$ | $4,073248 \times 10^{-4}$ | $1,668077 \times 10^{-4}$ | $8,434631 \times 10^{-6}$ |
| $1,0 \times 10^5$ | $5,918926 \times 10^{-4}$ | $2,385460 \times 10^{-4}$ | $7,047843 \times 10^{-6}$ |
| $1,0 \times 10^6$ | $9,896599 \times 10^{-3}$ | $4,422598 \times 10^{-3}$ | $4,375903 \times 10^{-4}$ |

**Tabela D.4:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$               | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,0 \times 10^1$ | $9,604447 \times 10^{-2}$ | $1,460079 \times 10^{-1}$ | $6,076189 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^2$ | $4,803284 \times 10^{-2}$ | $6,653924 \times 10^{-2}$ | $2,067183 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^3$ | $9,477888 \times 10^{-4}$ | $6,345734 \times 10^{-4}$ | $3,723317 \times 10^{-4}$ |
| $1,0 \times 10^4$ | $4,911814 \times 10^{-4}$ | $3,231181 \times 10^{-4}$ | $3,453648 \times 10^{-4}$ |
| $1,0 \times 10^5$ | $6,557460 \times 10^{-4}$ | $3,790762 \times 10^{-4}$ | $3,387726 \times 10^{-4}$ |
| $1,0 \times 10^6$ | $9,827433 \times 10^{-3}$ | $4,354713 \times 10^{-3}$ | $6,051271 \times 10^{-4}$ |



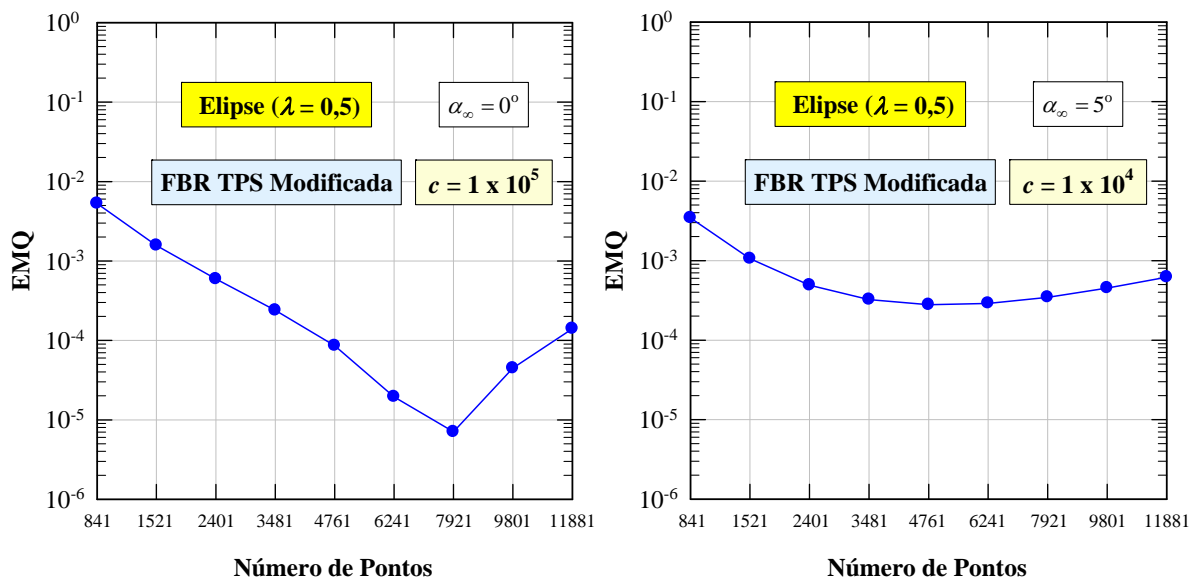


**Figura D.4:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno da elipse,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

Resultados dos testes para avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados. Foram fixados os valores do parâmetro de forma em  $c = 1 \times 10^5$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , e em  $c = 1 \times 10^4$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela D.5:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

| $N \times N$ | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 0^\circ$ ) | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 5^\circ$ ) |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 29 x 29      | $5,292195 \times 10^{-3}$            | $3,430330 \times 10^{-3}$            |
| 39 x 39      | $1,567311 \times 10^{-3}$            | $1,054553 \times 10^{-3}$            |
| 49 x 49      | $5,918926 \times 10^{-4}$            | $4,911814 \times 10^{-4}$            |
| 59 x 59      | $2,385460 \times 10^{-4}$            | $3,231181 \times 10^{-4}$            |
| 69 x 69      | $8,570419 \times 10^{-5}$            | $2,782374 \times 10^{-4}$            |
| 79 x 79      | $1,946839 \times 10^{-5}$            | $2,900547 \times 10^{-4}$            |
| 89 x 89      | $7,047843 \times 10^{-6}$            | $3,453648 \times 10^{-4}$            |
| 99 x 99      | $4,463180 \times 10^{-5}$            | $4,507827 \times 10^{-4}$            |
| 109 x 109    | $1,403638 \times 10^{-4}$            | $6,195628 \times 10^{-4}$            |



**Figura D.5:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

### D.4 Resultados dos Testes com o Aerofólio Joukowski Simétrico e Arredondado

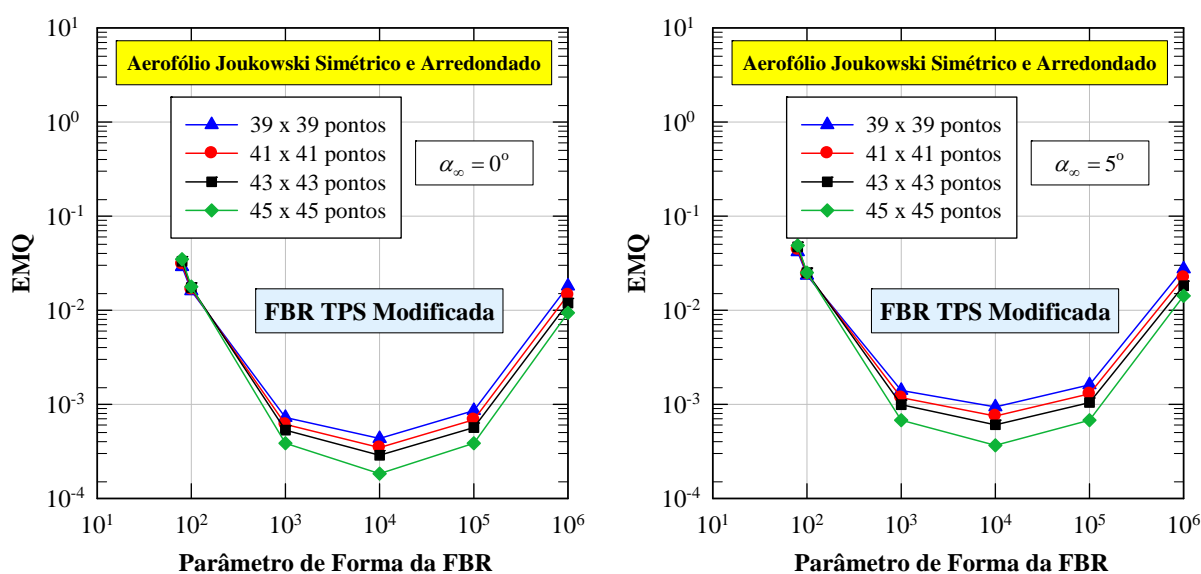
Resultados das simulações para o escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, utilizando a FBR TPS Modificada, considerando ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela D.6:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$                | EMQ (Malha 39 x 39)       | EMQ (Malha 41 x 41)       | EMQ (Malha 43 x 43)       | EMQ (Malha 45 x 45)       |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,00 \times 10^1$ | $2,902022 \times 10^{-2}$ | $3,087907 \times 10^{-2}$ | $3,313021 \times 10^{-2}$ | $3,487085 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^2$ | $1,603992 \times 10^{-2}$ | $1,662914 \times 10^{-2}$ | $1,741924 \times 10^{-2}$ | $1,777571 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^3$ | $7,224307 \times 10^{-4}$ | $6,108661 \times 10^{-4}$ | $5,312557 \times 10^{-4}$ | $3,842671 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^4$ | $4,317939 \times 10^{-4}$ | $3,463342 \times 10^{-4}$ | $2,873934 \times 10^{-4}$ | $1,829377 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^5$ | $8,565371 \times 10^{-4}$ | $6,860293 \times 10^{-4}$ | $5,635559 \times 10^{-4}$ | $3,845013 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^6$ | $1,801433 \times 10^{-2}$ | $1,453920 \times 10^{-2}$ | $1,189005 \times 10^{-2}$ | $9,395407 \times 10^{-3}$ |

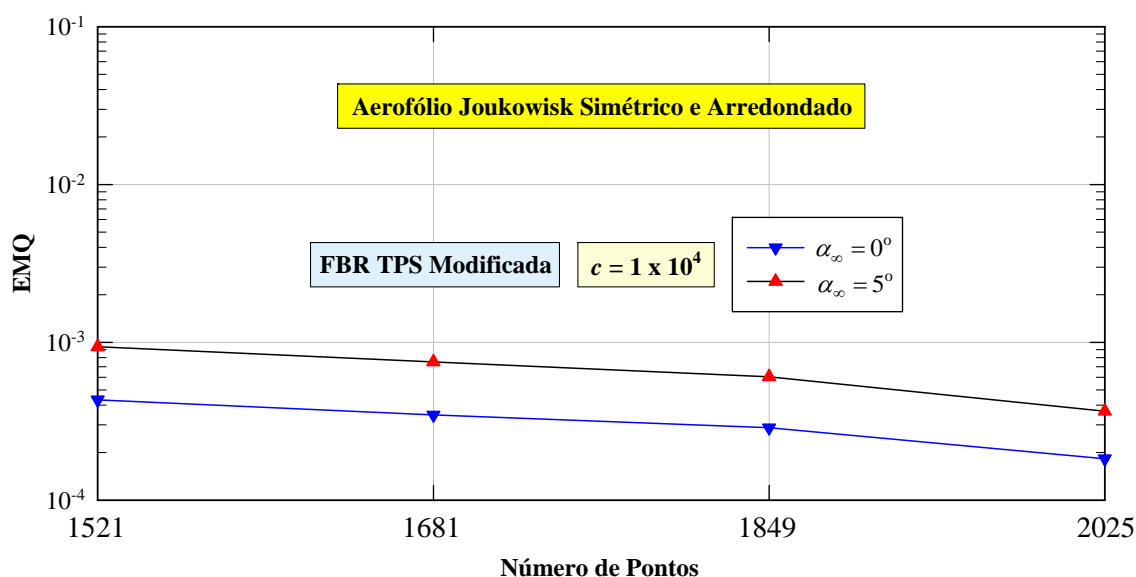
**Tabela D.7:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$                | EMQ<br>(Malha 39 x 39)    | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,00 \times 10^1$ | $4,178910 \times 10^{-2}$ | $4,413267 \times 10^{-2}$ | $4,694965 \times 10^{-2}$ | $4,877022 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^2$ | $2,351623 \times 10^{-2}$ | $2,415550 \times 10^{-2}$ | $2,503124 \times 10^{-2}$ | $2,510957 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^3$ | $1,404511 \times 10^{-3}$ | $1,174763 \times 10^{-3}$ | $9,915725 \times 10^{-4}$ | $6,777516 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^4$ | $9,368450 \times 10^{-4}$ | $7,505266 \times 10^{-4}$ | $6,047979 \times 10^{-4}$ | $3,655796 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^5$ | $1,613696 \times 10^{-3}$ | $1,291265 \times 10^{-3}$ | $1,041361 \times 10^{-3}$ | $6,775678 \times 10^{-4}$ |
| $1,00 \times 10^6$ | $2,750243 \times 10^{-2}$ | $2,223052 \times 10^{-2}$ | $1,815881 \times 10^{-2}$ | $1,420095 \times 10^{-2}$ |



**Figura D.6:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

Resultados dos testes para avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados, foi fixado o valor do parâmetro de forma em  $c = 1 \times 10^4$ , tanto para o aerofólio com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , quanto com ângulo ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .



**Figura D.7:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e arredondado, FBR TPS Modificada

## D.5 Resultados dos Testes com o Aerofólio Joukowski Simétrico e Afilado

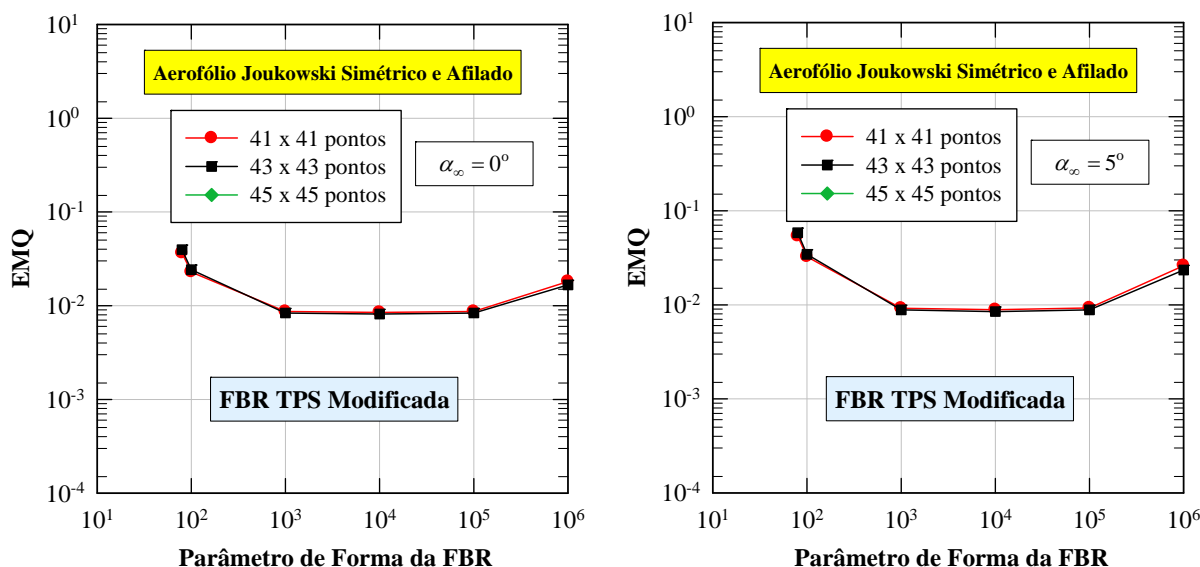
Resultados das simulações para o escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, utilizando a FBR TPS Modificada, considerando ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela D.8:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$                | EMQ (Malha 41 x 41)       | EMQ (Malha 43 x 43)       | EMQ (Malha 45 x 45)       |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,00 \times 10^1$ | $3,610611 \times 10^{-2}$ | $3,638957 \times 10^{-2}$ | $3,963846 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^2$ | $2,342091 \times 10^{-2}$ | $2,280437 \times 10^{-2}$ | $2,417644 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^3$ | $9,247419 \times 10^{-3}$ | $8,642766 \times 10^{-3}$ | $8,340014 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^4$ | $9,020643 \times 10^{-3}$ | $8,474878 \times 10^{-3}$ | $8,147922 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^5$ | $9,313274 \times 10^{-3}$ | $8,667227 \times 10^{-3}$ | $8,340981 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^6$ | $2,160270 \times 10^{-2}$ | $1,813001 \times 10^{-2}$ | $1,662297 \times 10^{-2}$ |

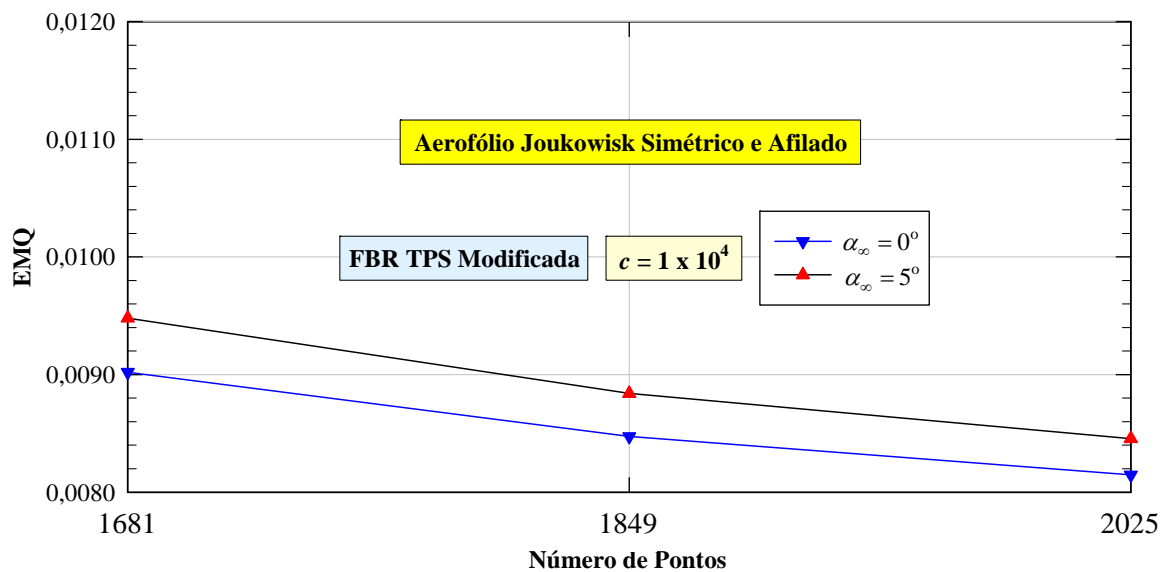
**Tabela D.9:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$                | EMQ<br>(Malha 41 x 41)    | EMQ<br>(Malha 43 x 43)    | EMQ<br>(Malha 45 x 45)    |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,00 \times 10^1$ | $5,274359 \times 10^{-2}$ | $5,366040 \times 10^{-2}$ | $5,834484 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^2$ | $3,289280 \times 10^{-2}$ | $3,233368 \times 10^{-2}$ | $3,428509 \times 10^{-2}$ |
| $1,00 \times 10^3$ | $9,915886 \times 10^{-3}$ | $9,192207 \times 10^{-3}$ | $8,830121 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^4$ | $9,479846 \times 10^{-3}$ | $8,840394 \times 10^{-3}$ | $8,455841 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^5$ | $1,003655 \times 10^{-2}$ | $9,239981 \times 10^{-3}$ | $8,830924 \times 10^{-3}$ |
| $1,00 \times 10^6$ | $3,140457 \times 10^{-2}$ | $2,603368 \times 10^{-2}$ | $2,340730 \times 10^{-2}$ |



**Figura D.8:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

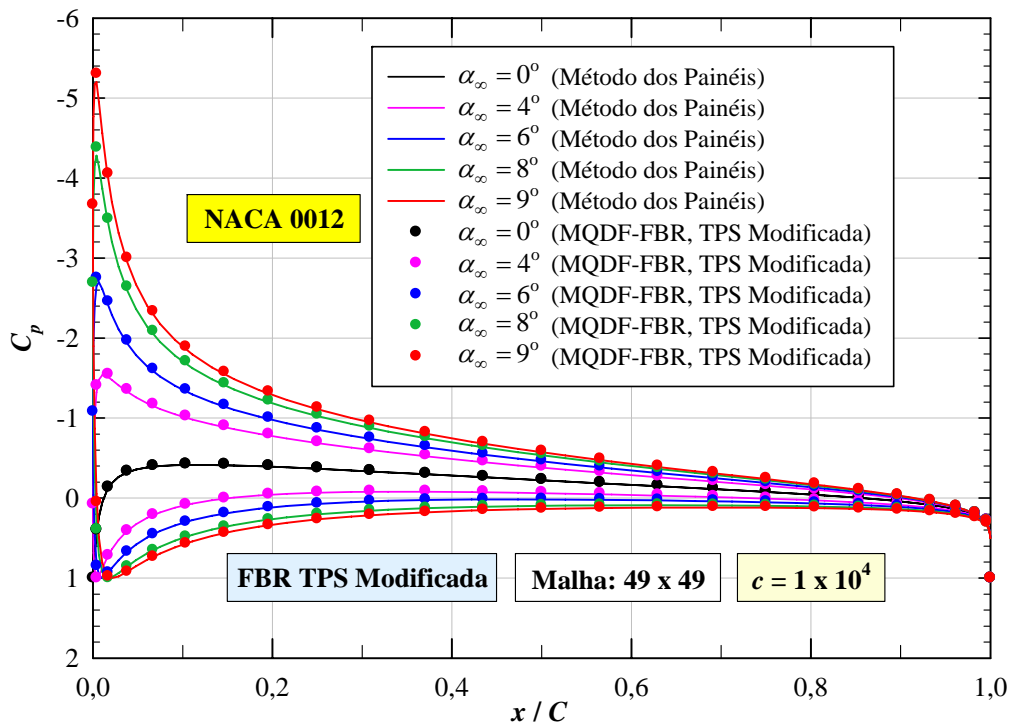
Para avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados, foi fixado o valor do parâmetro de forma em  $c=1 \times 10^4$ , tanto para o aerofólio com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , quanto com ângulo ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .



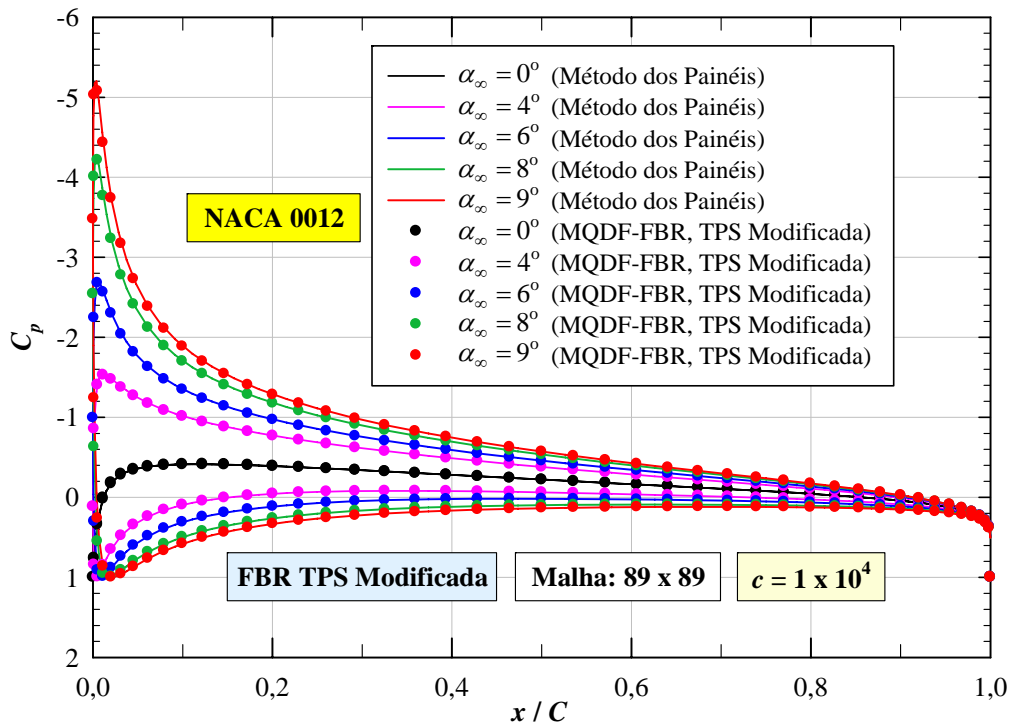
**Figura D.9:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno do aerofólio Joukowski simétrico e afilado, FBR TPS Modificada

## D.6 Resultados dos Testes com o Aerofólio NACA 0012

Resultados das simulações para o aerofólio NACA 0012, considerando o parâmetro de forma  $c = 1 \times 10^4$ . São apresentados também os resultados numéricos obtidos por Lima (2006) ao utilizar o Método dos Painéis. Em cada painel foi adotada uma distribuição uniforme de vórtices. Foram utilizados 100 painéis planos distribuídos na superfície do aerofólio. Os comprimentos dos painéis foram obtidos por meio de série geométrica na razão 1,05, de modo a concentrar mais painéis de comprimentos menores nas regiões próximas aos bordos de ataque e de fuga do aerofólio.



**Figura D.10:** Distribuição do coeficiente de pressão na superfície, NACA 0012, malha tipo "O", 49 x 49 pontos, FBR TPS Modificada



**Figura D.11:** Distribuição do coeficiente de pressão na superfície, NACA 0012, malha tipo "O", 89 x 89 pontos, FBR TPS Modificada

## Apêndice E

### Resultados dos Testes Numéricos Realizados para a Elipse com Razão de Aspecto Igual a 0,1

#### E.1 Utilizando a FBR Multiquádrica

Resultados para o escoamento potencial em torno da elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , utilizando a FBR Multiquádrica, considerando ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela E.1:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR Multiquádrica

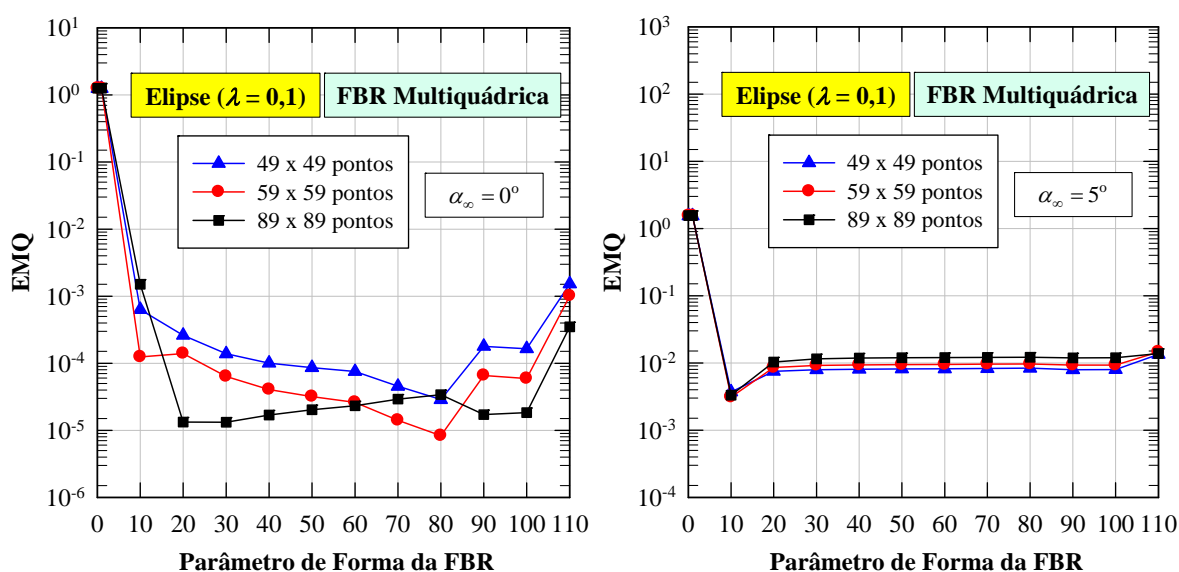
| $c$    | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|--------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0,100  | $1,246781 \times 10^0$    | $1,250203 \times 10^0$    | $1,256350 \times 10^0$    |
| 1,000  | $1,246775 \times 10^0$    | $1,250202 \times 10^0$    | $1,256350 \times 10^0$    |
| 10,000 | $6,326507 \times 10^{-4}$ | $1,242734 \times 10^{-4}$ | $1,503382 \times 10^{-3}$ |
| 20,000 | $2,609372 \times 10^{-4}$ | $1,393501 \times 10^{-4}$ | $1,329446 \times 10^{-5}$ |
| 30,000 | $1,381186 \times 10^{-4}$ | $6,363061 \times 10^{-5}$ | $1,319334 \times 10^{-5}$ |
| 40,000 | $1,004154 \times 10^{-4}$ | $4,051425 \times 10^{-5}$ | $1,693814 \times 10^{-5}$ |
| 50,000 | $8,612593 \times 10^{-5}$ | $3,183727 \times 10^{-5}$ | $2,029415 \times 10^{-5}$ |
| 60,000 | $7,510064 \times 10^{-5}$ | $2,603551 \times 10^{-5}$ | $2,319155 \times 10^{-5}$ |
| 70,000 | $4,527111 \times 10^{-5}$ | $1,414747 \times 10^{-5}$ | $2,921488 \times 10^{-5}$ |



|         |                           |                           |                           |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 80,000  | $2,869561 \times 10^{-5}$ | $8,323093 \times 10^{-6}$ | $3,411301 \times 10^{-5}$ |
| 90,000  | $1,789401 \times 10^{-4}$ | $6,550823 \times 10^{-5}$ | $1,716104 \times 10^{-5}$ |
| 100,000 | $1,649453 \times 10^{-4}$ | $5,925752 \times 10^{-5}$ | $1,830169 \times 10^{-5}$ |
| 110,000 | $1,522890 \times 10^{-3}$ | $1,007556 \times 10^{-3}$ | $3,494696 \times 10^{-4}$ |

**Tabela E.2:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR Multiquádrica

| $c$     | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0,100   | $1,537561 \times 10^0$    | $1,547991 \times 10^0$    | $1,558179 \times 10^0$    |
| 1,000   | $1,537543 \times 10^0$    | $1,547990 \times 10^0$    | $1,558179 \times 10^0$    |
| 10,000  | $3,698136 \times 10^{-3}$ | $3,109514 \times 10^{-3}$ | $3,304379 \times 10^{-3}$ |
| 20,000  | $7,488202 \times 10^{-3}$ | $8,539749 \times 10^{-3}$ | $1,030902 \times 10^{-2}$ |
| 30,000  | $7,930646 \times 10^{-3}$ | $9,167311 \times 10^{-3}$ | $1,150362 \times 10^{-2}$ |
| 40,000  | $8,061462 \times 10^{-3}$ | $9,343568 \times 10^{-3}$ | $1,180654 \times 10^{-2}$ |
| 50,000  | $8,113016 \times 10^{-3}$ | $9,413272 \times 10^{-3}$ | $1,192255 \times 10^{-2}$ |
| 60,000  | $8,150832 \times 10^{-3}$ | $9,458774 \times 10^{-3}$ | $1,198620 \times 10^{-2}$ |
| 70,000  | $8,265507 \times 10^{-3}$ | $9,564244 \times 10^{-3}$ | $1,207205 \times 10^{-2}$ |
| 80,000  | $8,354338 \times 10^{-3}$ | $9,642465 \times 10^{-3}$ | $1,213137 \times 10^{-2}$ |
| 90,000  | $7,922898 \times 10^{-3}$ | $9,263488 \times 10^{-3}$ | $1,189664 \times 10^{-2}$ |
| 100,000 | $7,946669 \times 10^{-3}$ | $9,288908 \times 10^{-3}$ | $1,192035 \times 10^{-2}$ |
| 110,000 | $1,340877 \times 10^{-2}$ | $1,455072 \times 10^{-2}$ | $1,374160 \times 10^{-2}$ |



**Figura E.1:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR Multiquádrica, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

Resultados dos testes para avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados. Foram fixados os valores do parâmetro de forma em  $c = 80$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , e em  $c = 10$  para a elipse com ângulo de ataque  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela E.3:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

| $N \times N$ | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 0^\circ$ ) | EMQ<br>( $\alpha_\infty = 5^\circ$ ) |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 29 x 29      | $3,458374 \times 10^{-4}$            | $4,277038 \times 10^{-3}$            |
| 39 x 39      | $9,317403 \times 10^{-5}$            | $3,996497 \times 10^{-3}$            |
| 49x 49       | $2,869561 \times 10^{-5}$            | $3,698136 \times 10^{-3}$            |
| 59 x 59      | $8,323093 \times 10^{-6}$            | $3,109514 \times 10^{-3}$            |
| 69 x 69      | $4,888083 \times 10^{-6}$            | $2,632420 \times 10^{-3}$            |
| 79 x 79      | $1,296345 \times 10^{-5}$            | $2,594167 \times 10^{-3}$            |
| 89 x 89      | $3,411301 \times 10^{-5}$            | $3,304379 \times 10^{-3}$            |
| 99 x 99      | $7,212630 \times 10^{-4}$            | $5,034046 \times 10^{-3}$            |
| 109 x 109    | $1,341525 \times 10^{-4}$            | $8,051737 \times 10^{-3}$            |

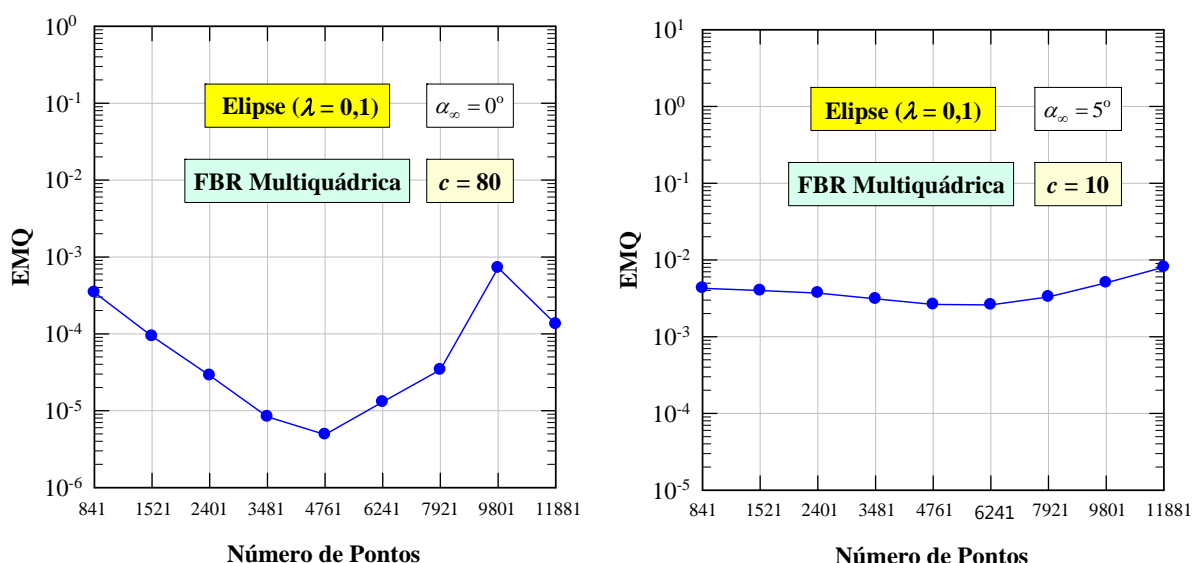


Figura E.2: Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR Multiquádrica,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

## E.2 Utilizando a FBR TPS Modificada

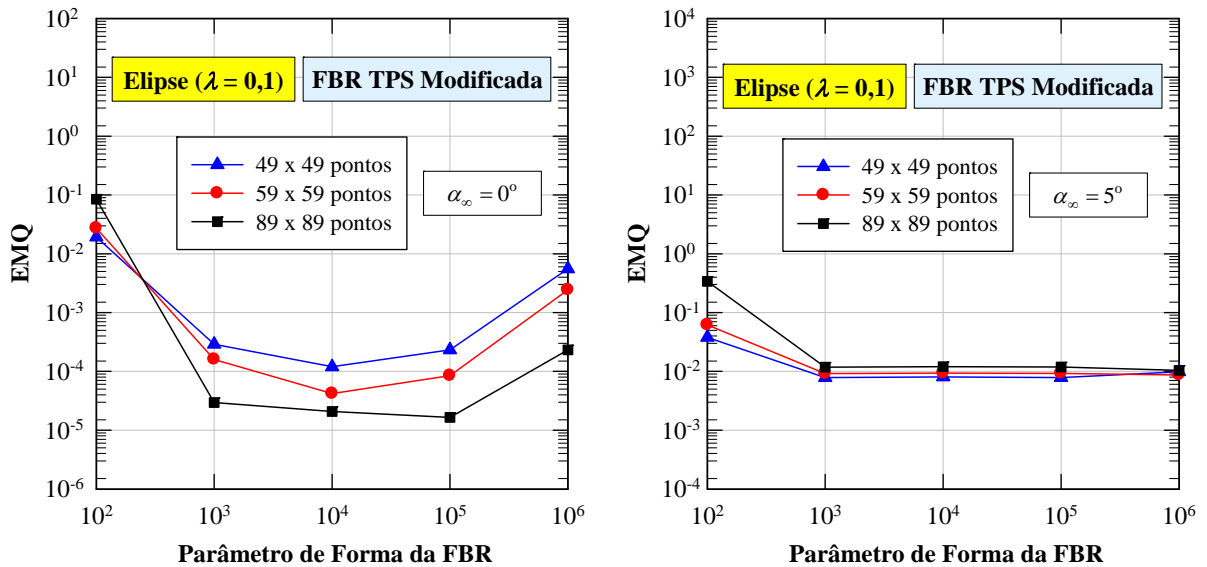
Resultados para o escoamento potencial em torno da elipse com razão de aspecto  $\lambda = 0,1$ , utilizando a FBR TPS Modificada, considerando ângulos de ataque  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

Tabela E.4: EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$               | EMQ (Malha 49 x 49)       | EMQ (Malha 59 x 59)       | EMQ (Malha 89 x 89)       |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,0 \times 10^1$ | $3,925248 \times 10^{-2}$ | $6,055214 \times 10^{-2}$ | 2,311642 E-01             |
| $1,0 \times 10^2$ | $1,926018 \times 10^{-2}$ | $2,715739 \times 10^{-2}$ | $8,501125 \times 10^{-2}$ |
| $1,0 \times 10^3$ | $2,902288 \times 10^{-4}$ | $1,595231 \times 10^{-4}$ | $2,942325 \times 10^{-5}$ |
| $1,0 \times 10^4$ | $1,198702 \times 10^{-4}$ | $4,188239 \times 10^{-5}$ | $2,075684 \times 10^{-5}$ |
| $1,0 \times 10^5$ | $2,326731 \times 10^{-4}$ | $8,418442 \times 10^{-5}$ | $1,651471 \times 10^{-5}$ |
| $1,0 \times 10^6$ | $5,570440 \times 10^{-3}$ | $2,435089 \times 10^{-3}$ | $2,320594 \times 10^{-4}$ |

**Tabela E.5:** EMQ para diferentes valores do parâmetro de forma, escoamento em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 5^\circ$ , FBR TPS Modificada

| $c$               | EMQ<br>(Malha 49 x 49)    | EMQ<br>(Malha 59 x 59)    | EMQ<br>(Malha 89 x 89)    |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $8,0 \times 10^1$ | $7,597019 \times 10^{-2}$ | $1,472237 \times 10^{-1}$ | $2,514072 \times 10^0$    |
| $1,0 \times 10^2$ | $3,788787 \times 10^{-2}$ | $6,169884 \times 10^{-2}$ | $3,402191 \times 10^{-1}$ |
| $1,0 \times 10^3$ | $7,880576 \times 10^{-3}$ | $9,163829 \times 10^{-3}$ | $1,175747 \times 10^{-2}$ |
| $1,0 \times 10^4$ | $8,035963 \times 10^{-3}$ | $9,370377 \times 10^{-3}$ | $1,196859 \times 10^{-2}$ |
| $1,0 \times 10^5$ | $7,850138 \times 10^{-3}$ | $9,198551 \times 10^{-3}$ | $1,188237 \times 10^{-2}$ |
| $1,0 \times 10^6$ | $9,850138 \times 10^{-3}$ | $8,690343 \times 10^{-3}$ | $1,044828 \times 10^{-2}$ |

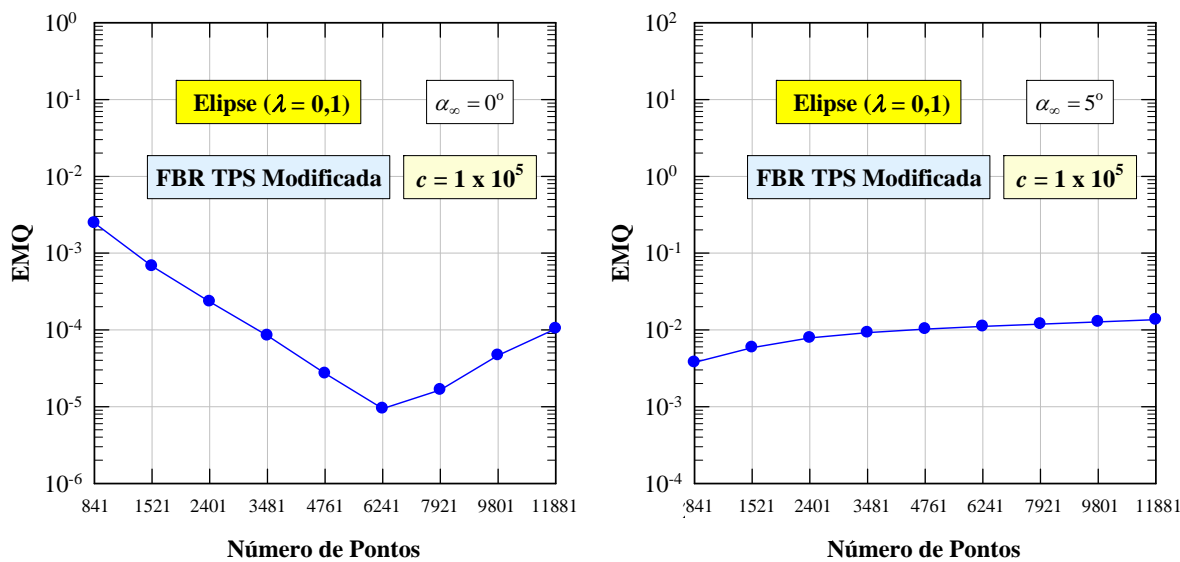


**Figura E.3:** Comportamento do EMQ com o parâmetro de forma da FBR TPS Modificada, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

Resultados dos testes para avaliar a influência do número de pontos da malha na precisão dos resultados. Foi fixado o valor do parâmetro de forma em  $c = 1 \times 10^5$  para a elipse com ângulos de ataques  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$ .

**Tabela E.6:** EMQ para diferentes dimensões da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

| $N \times N$ | EMQ<br>(Malha $\alpha_\infty = 0^\circ$ ) | EMQ<br>(Malha $\alpha_\infty = 5^\circ$ ) |
|--------------|---|---|
| 29 x 29      | $2,466520 \times 10^{-3}$                 | $3,769769 \times 10^{-3}$                 |
| 39 x 39      | $6,746990 \times 10^{-4}$                 | $5,871797 \times 10^{-3}$                 |
| 49 x 49      | $2,326731 \times 10^{-4}$                 | $7,848742 \times 10^{-3}$                 |
| 59 x 59      | $8,418442 \times 10^{-5}$                 | $9,198551 \times 10^{-3}$                 |
| 69 x 69      | $2,704613 \times 10^{-5}$                 | $1,022234 \times 10^{-2}$                 |
| 79 x 79      | $9,416510 \times 10^{-6}$                 | $1,107849 \times 10^{-2}$                 |
| 89 x 89      | $1,651471 \times 10^{-5}$                 | $1,188237 \times 10^{-2}$                 |
| 99 x 99      | $4,652127 \times 10^{-5}$                 | $1,268862 \times 10^{-2}$                 |
| 109 x 109    | $1,035325 \times 10^{-4}$                 | $1,355288 \times 10^{-2}$                 |



**Figura E.4:** Comportamento do EMQ com a dimensão da malha, escoamento potencial e bidimensional em torno da elipse, FBR TPS Modificada,  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha_\infty = 0^\circ$  e  $\alpha_\infty = 5^\circ$

## Referências Bibliográficas

- Abbott e Doenhoff (1959)** I. H. Abbott, A. E. Doenhoff. *Theory of Wing Sections*. Dover Publication, Inc., New York, pp. 693.
- Afiatdoust e Esmailbeigi (2015)** F. Afiatdoust, M. Esmailbeigi. Optimal variable shape parameters using genetic algorithm for radial basis function approximation. *Ain Shams Engineering Journal*, 6: 639 – 647.
- Ahmed et al. (1998)** N. Ahmed, B. S. Yilbas, M. O. Budair. Computational study into the flow field developed around a cascade of NACA 0012 airfoils. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167: 17 – 32.
- Anderson (1985)** J. D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Book Company, Singapore, pp. 563.
- Bhatia e Arora (2016)** G. S. Bhatia, G. Arora. Radial basis function methods for solving partial differential equations – a review. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(45): 1 – 18.
- Bayona et al. (2010)** V. Bayona, M. Moscoso, M. Carretero, M. Kindelan. RBF-FD formulas and convergence properties. *Journal of Computational Physics*, 229: 8281 – 8295.
- Bayona et al. (2011)** V. Bayona, M. Moscoso, M. Kindelan. Optimal constant shape parameter for multiquadric based RBF-FD method. *Journal of Computational Physics*, 229: 8281 – 8295.

- Bellman et al. (1972)** E. Bellman, G. Kashef, J. Casti. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 230: 7384 – 7399.
- Carey e Kim (1983)** G. F. Carey, S. W. Kim. Lifting aerofoil calculation using the boundary element method. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 3: 481 – 492.
- Carstens (1988)** V. Carstens. *Two-Dimensional Elliptic Grid Generation for Airfoils and Cascades*. DFVLR, Institut für Aeroelastik, Göttingen, pp. 73.
- Cecil et al. (2004)** T. Cecil, J. Qian, S. Osher. Numerical methods for high dimensional Hamilton-Jacobi equations using radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, 196: 327-347.
- Cheng (2012)** A. H. –D. Cheng. Multiquadric and its shape parameter - A numerical investigation of error estimate, condition number, and round-off error by arbitrary precision computation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(2): 220 – 239.
- Chiang e Fleeter (1988)** H. W. D. Chiang, S. Fleeter. Locally analytical prediction of the steady inviscid incompressible flow through an airfoil cascade. *Computers and Mathematics with Applications*, 15: 221 – 233.
- Dehghan e Nikpour (2013)** M. Dehghan, A. Nikpour. Numerical solution of the system of second-order boundary value problems using the local radial basis functions based differential quadrature collocation method. *Applied Mathematical Modelling*, 37: 8578 – 8599.
- Ding et al. (2006)** H. Ding, C. Shu, S. Yeo, D. Xu. Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadric differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196: 516 – 533.

- Esmailbeigi e Hosseini (2014)** M. Esmailbeigi, M. M. Hosseini. A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method. *Applied Mathematics and Computation*, 249: 419 – 428.
- Fasshauer (1997)** G. E. Fasshauer. Solving partial differential equations by collocation with radial basis function, A. Le Méhauté, C. Rabut and L. L. Schumaker (eds.). *Surface Fitting and Multiresolutions Methods*, 2: 131 – 138.
- Fasshauer e Zhang (2007)** G. E. Fasshauer, J. G. Zhang. On choosing "optimal" shape parameters for RBF approximation. *Numerical Algorithms*, 45: 345 – 368.
- Fasshauer (2007)** G. F. Fasshauer. Meshfree Approximation Methods with MATLAB. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA.
- Ferreira e Fico (2004)** S. B. Ferreira, N. G. C. R. Fico. *Análise do escoamento sobre aerofólios usando a técnica dos volumes Finitos*. Trabalho de Iniciação Científica, Instituto Tecnológico da Aeronáutica. [http://www.bibl.ita.br/xiencita/Artigos/Aer\\_03.pdf](http://www.bibl.ita.br/xiencita/Artigos/Aer_03.pdf).
- Fletcher (1988)** C. A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Vol. 2, Springer Verlag, New York, pp. 482.
- Floater e Iske (1996)** M. S. Floater, A. Iske. Multistep Scattered Data Interpolation Using Compactly Supported Radial Basis Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 73: 65 – 78.
- Flutt (2008)** A. F. Flutt. *Estudo Numérico do Escoamento ao Redor de um Aerofólio Montado em uma Grade Linear de Turbomáquina*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Flyer et al. (2016a)** N. Flyer, G. A. Barnett, L. J. Wicker. Enhancing finite differences with radial basis functions: Experiments on the Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 316: 39 – 62.



- Flyer et al. (2016b)** N. Flyer, B. Fornberg, V. Bayona, G. Barnett. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. Interpolation and accuracy. *Journal of Computational Physics*, 321: 21 – 38.
- Fornberg e Piret (2008)** B. Fornberg e C. Piret. A stable algorithm for flat radial basis functions on a sphere. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1):60 – 80.
- Fornberg et al. (2011)** B. Fornberg, E. Larsson, N. Flyer. Stable computations with Gaussian radial basis functions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(2):869 – 892.
- Fornberg et al. (2013)** B. Fornberg, E. Lehto, Collin Powell. Stable calculation of Gaussian-based RBF-FD stencils. *Computers and Mathematics with Applications*, 65(4): 627 – 637.
- Fortuna (2012)** A. O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, pp. 426.
- Golbabai e Seifollahi (2006)** A. Golbabai, S. Seifollahi. An iterative solution for the second kind integral equations using radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 181: 903 – 907.
- Gonçalves (2007)** N. D. F. Gonçalves. *Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Gostelow (1965)** J. P. Gostelow. *Potential Flow through Cascades - A Comparison between Exact and Approximate Solutions*. Her Majesty's Stationery Office, Liverpool, pp. 33.
- Hardy (1971)** L. Hardy. Multiquadric equations of topo - topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophys*, 76: 1905 – 1915.
- Hashemi e Hatam (2011)** M. R. Hashemi, F. Hatam. Unsteady seepage analysis using local radial basis function-based differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 35: 4934 – 4950.

- Hirsch (2007)** C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1 *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. John Wiley & Sons, 2a. edition, pp. 696.
- Hon e Shaback (2001)** Y. Hon, R. Shaback. On unsymmetric collocation by radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 119: 177 – 186.
- Kansa (1990a)** E. J. Kansa. Multiquadrics – a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics I: surface approximations and partial derivative estimates. *Computers and Mathematics with Applications*, 19: 127-145.
- Kansa (1990b)** E. J. Kansa. Multiquadrics – a scattered data approximations and scheme with applications to computational fluid dynamics II: solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 37: 147-161.
- Larsson e Fornberg (2003a)** E. Larsson, B. Fornberg. A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs. *Computers and Mathematics with Applications*, 46: 891 – 902.
- Larsson e Fornberg (2003b)** E. Larsson, B. Fornberg. *Theoretical and computational aspects of multivariate interpolation with increasingly flat radial basis functions*. The Swedish Foundation for International Cooperation in Research.
- Larsson et al. (2013)** E. Larsson, E. Lehto, A. Heryudono, B. Fornberg. Stable computation of differentiation matrices and scattered node stencils based on Gaussian radial basis functions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(4): A2096 – A2119.
- Lewis (1991)** R. I. Lewis. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, pp.566.

- Lima (2006)** F. S. Lima. *Características Aerodinâmicas de Aerofólios de Alto Desempenho*. Projeto Final de Graduação. Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.
- Lima (2010)** F. S. Lima. *Método das Soluções Fundamentais Baseado em Vórtices para Problemas de Aerodinâmica Bidimensional*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.
- Lopes et al. (2001)** A. M. G. Lopes, A. C. M. Sousa, D. X. Viegas. *GRID3D - Um Código para a Geração Numérica de Malhas Generalizadas Estruturadas*. <https://www.researchgate.net/publication/241436677>.
- Maliska (1995)** C. R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, pp. 424.
- Michelli (1986)** C. A. Micchelli. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2: 11 – 22.
- Mohebbi (2014)** F. Mohebbi. *Optimal shape design based on body-fitted grid generation*. Tese de doutorado, University of Canterbury, Christchurch, New Zeland.
- Mohebbi e Sellier (2014)** F. Mohebbi, M. Sellier. On the kutta condition in potencial flow over airfoil. *Journal of Aerodynamics*, 2014, pp. 10.
- Moran (1984)** J. Moran. *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*. John Wiley & Sons, pp. 464.
- Nguyen et al. (2008)** V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot. Meshless methods: a review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79: 763 - 813.

- Pereira (2005)** L. H. G. Pereira. *Análise do Desempenho do Método dos Painéis de Ordem Superior para o Cálculo do escoamento em Torno de um Aerofólio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Pires Júnior (1977)** F. C. M. Pires Júnior. *Solução de Problemas Bidimensionais de Superfície Livre Segundo o Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Piret (2007)** C. Piret. *Analytical and Numerical Advances in Radial Basis Function*. Tese de Doutorado, University of Colorado, Denver, E.U.A.
- Power (2002)** H. Power. A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 43: 551 – 583.
- Ramos (2010)** A. Ramos. *Development of a Meshless Method to Solve Compressible Potential Flows*. Dissertação de Mestrado, Faculty of California Polytechnic State University, San Luis Obispo, USA.
- Santos (2012)** L. G. C. Santos. *Método da Quadratura Diferencial com Funções de Base Radial em Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.
- Santos (2016)** L. G. C. Santos. *Esquemas sem Malha Baseados no Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial para Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.
- Sarra e Kansa (2009)** S. A. Sarra, E. J. Kansa. Multiquadric Radial Basis Function Approximation methods for the numerical solution of partial differential equations. *Advances in Computational Mechanics*, 2.

- Shen (2010)** Q. Shen. Local RBF-based differential quadrature collocation method for the boundary layer problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34: 213 – 228.
- Shu et al. (2003)** C. Shu, H. Ding, S. Yeo. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192: 941 – 954.
- Siladic (1987)** M. F. Siladic. *Numerical Grid Generation and Potential Airfoil Analysis and Design*. Dissertação de Mestrado, University of Texas, Austin, USA.
- Silva (2014)** J. R. Silva. *Método de Quadratura Diferencial Local com Funções de Base Radial: Uma Abordagem com Nuvens de Pontos e Aplicações em Dinâmica dos Fluidos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.
- Soleinami et al. (2010)** S. Soleimani, M. Jalaal, H. Bararnia, E. Ghasemi, D. D. Ganji, F. Mohammadi. Local RBF-DQ method for two-dimensional transient heat conduction problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37: 1411 – 1418.
- Soleinami et al. (2011)** S. Soleimani, D. D. Ganji, E. Ghasemi, M. Jalaal, H. Bararnia. Meshless local RBF-DQ for 2-D heat conduction: a comparative study. *Thermal Science*, 15(1): S117 – S121.
- Sonar (1989)** T. Sonar. *Grid Generation Using Elliptic Partial Differential Equations*. Forschungsbericht, Institut für Entwurfsaerodynamik, Braunschweig.
- Sorenson e Steger (1977)** R. L. Sorenson, J. L. Steger. *Simplified Clustering of Nonorthogonal Grids Generated by Elliptic Partial Differential Equations*. NASA Technical Memorandum 73252, Califórnia.
- Sorenson (1980)** R. L. Sorenson. *A Computer Program to Generate Two-Dimensional Grids About Airfoils and Other Shapes by the Use of Poisson's Equation*. NASA Technical Memorandum 81198, Califórnia.

- Tannehill et al. (1997)** J. C. Tannehill, D. A. Anderson, A. A. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, Washington, pp. 792.
- Thames et al. (1977)** F. C. Thames, J. F. Thompson, C. W. Mastin, R. L. Walker. Numerical solutions for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinate systems. *Journal of Computational Physics*, 24: 245 – 273.
- Thompson et al. (1974)** J. F. Thompson, F. C. Thames, C. W. Mastin. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 15: 299 – 319.
- Thompson et al. (1977a)** J. F. Thompson, F. C. Thames, C. W. Mastin. TOMCAT – A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 24: 274 – 302.
- Thompson et al. (1977b)** J. F. Thompson, F. C. Thames, C. W. Mastin. *Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies*. NASA CR-2729.
- Thompson et al. (1985)** J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. *Numerical Grid Generation – Foundations and Applications*, Mississippi State, Mississippi, pp. 334.
- Tiago e Leitão (2002)** C. M. Tiago, V. M. A. Leitão. Utilização de funções de base radial em problemas unidimensionais de análise estrutural. *Métodos Numéricos em Ingeniería V*, J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor y G. Bugeda (Eds.), Espanha.
- Tota e Wang (2007)** P. V. Tota, Z. J. Wang. Meshfree Euler Solver using Radial Basis Functions for inviscid Compressible Flows. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*.

- Vilela et al. (2015)** M. S. C. Vilela, W. Oliveira, N. Manzanares. Aplicação do método da quadratura diferencial local com funções de base radial no problema de infiltração transiente bidimensional. *CIBIM XII, Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, Guayaquil, Equador.
- Wendland (1995)** H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4: 389 – 396.
- Wilkinson (1967)** D. Wilkinson. A numerical solution of the analysis and design problems for the flow past one or more aerofoils or cascades. ARC Report & Memorandum, 3545.
- Wright (2003)** G. B. Wright. *Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments*. Tese de Doutorado, University of Colorado, Boulder.
- Yongyuan (2010)** S. Yongyuan. *Further Development of Local MQ-DQ Method and its Application in CFD*. Tese de Doutorado, National University of Singapore, Singapore.
- Yu (2001)** Z. W. Yu. Surface interpolation from irregularly distributed points using surface splines, with Fortran program”, *Computers and Geosciences*, Vol. 27, pp. 877 – 882.
- Zheleznyakova e Surzhikov (2013)** A. L. Zheleznyakova, S. T. Surzhikov. Molecular dynamics-based unstructured grid generation method for aerodynamic applications. *Computer Physics Communications*, 184: 2711 – 2727.