

Universidade Federal de Itajubá  
Instituto de Física e Química - IFQ

## **Condições de Neumann Generalizadas**

Dissertação de Mestrado

João Cláudio Fernandes da Silva  
Orientador: Fabricio Augusto Barone Rangel



*Dedico a minha tese à Denise, à Marcelle e ao Pedro Paulo. Pessoas muito presentes na minha vida. Dedico também ao meu pai e ao meu orientador.*

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, meu irmão e minha namorada a força que me deram para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço muito a meu orientador por ter trabalhado comigo. Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

## Abstract

In this work we did a research in a mass scalar field with potential and/or sources external spatially located. The considered models simulate the presence of material boundaries as well as loads in interaction with the field. We review some results obtained previously in the literature and, later, propose a model not yet studied, as far as we know. The proposed model simulates the presence of a material surface located along a hyperplane where, at the boundary where the coupling constant between the field and the surface tends to infinity, we show that the model is equivalent to imposing Neumann conditions under the hyperplane. Thus, we interpret the model as a kind of generalized Neumann condition for the field.

**Key-words:** External potentials, field sources, field theory.

## Resumo

Nesse trabalho fazemos um estudo sobre o campo escalar com massa na presença de potenciais e/ou fontes externos espacialmente localizadas. Os modelos considerados simulam a presença de fronteiras materiais assim como cargas em interação com o campo. Fazemos uma revisão de alguns resultados obtidos anteriormente na literatura e, posteriormente, propomos um modelo ainda não estudado, até onde sabemos. O modelo proposto simula a presença de uma superfície material localizada ao longo de um hiperplano onde, no limite em que a constante de acoplamento entre o campo e a superfície tende a infinito, mostramos que o modelo equivale a impor condições de Neumann sob o hiperplano. Dessa forma, interpretamos o modelo como um tipo de condição de Neumann generalizada para o campo.

**Palavras-chave:** Potenciais externos, fontes de campo, teoria de campo.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Campo de Klein-Gordon na presença de fontes externas</b>	<b>4</b>
<b>3 Condições Generalizadas de Dirichlet</b>	<b>11</b>
3.1 Campo escalar na presença de um potencial externo . . . . .	11
3.2 Potencial delta de Dirac . . . . .	12
3.3 Interação plano - carga . . . . .	15
<b>4 Potencial Pontual</b>	<b>19</b>
4.1 Função de Green do campo escalar com um potencial pontual . . . . .	19
4.2 Interação potencial pontual-carga . . . . .	22
<b>5 Condições generalizadas de Neumann</b>	<b>24</b>
5.1 Função de Green . . . . .	24
5.2 Interação hiperplano - carga . . . . .	29
<b>6 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>35</b>
<b>A Integral Gaussiana</b>	<b>37</b>
<b>B Extensão analítica para integral</b>	<b>39</b>
<b>C Integral para a função de Green</b>	<b>40</b>
<b>D Coordenadas esféricas em n-dimensões</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Teorias de campos encontram uma ampla diversidade de aplicações em física. Elas são usadas desde a descrição de sistemas de matéria condensada, até o chamado Modelo Padrão das Interações Fundamentais, de mecânica dos fluidos até a gravitação (esta última sendo interpretada como uma teoria geométrica de campo).

Um assunto abordado de tempos em tempos em teoria de campos é como se pode simular a presença de objetos em tal teoria. Isto é feito de inúmeras formas e, pelo que conhecemos, podemos classificá-las em quatro categorias: pela introdução de campos auxiliares, pela imposição de condições de contorno nos campos, pela presença de potenciais externos e pela presença de fontes externas.

O caso da presença de fontes externas talvez seja o mais conhecido. Neste contexto, por exemplo, podemos simular a existência de distribuições de cargas e correntes elétricas da eletrodinâmica clássica [1]. Mesmo na eletrodinâmica quântica [2, 3], esse tipo de estudo desempenha um importante papel, assim como em teorias alternativas a eletrodinâmica de Maxwell [4, 5, 6, 7] e outras teorias de campo [8, 9, 10].

No que diz respeito às condições de contorno, a relevância do assunto é indiscutível na eletrodinâmica clássica e na chamada QED de cavidades. Elas, as condições de contorno, são usadas para a descrição de fronteiras materiais, principalmente de fronteiras condutoras [11, 12, 13]. Lembrando que a presença de condutores pode ser considerada também em outras teorias para a eletrodinâmica, como exemplo podemos citar as referências [14, 15].

Uma forma de implementar a presença de superfícies materiais de forma mais realística do que a imposição de condições de contorno é por meio do acoplamento de campos com potenciais externos [16, 12, 11, 17, 18, 19]. Nestes casos, os potenciais considerados são definidos em regiões do espaço.

É um fato bem conhecido na literatura que ao acoplarmos o campo escalar com um potencial tipo delta de Dirac, concentrado ao longo de um plano, podemos simular a presença do que viria a ser um espelho semitransparente para o campo, no plano onde o potencial se concentra. O grau de transparência do espelho é determinado pela constante de acoplamento entre o potencial e o campo. Ao tomarmos o limite onde essa constante de acoplamento tende a infinito, podemos mostrar que o modelo se reduz aquele obtido ao impormos a condição de Dirichlet no campo sob o plano onde o potencial se concentra. Dessa forma, o modelo é visto como uma generalização



da condição de Dirichlet.

Nesse trabalho fazemos um estudo sobre o papel de potenciais externos, estacionários e espacialmente localizados acoplados com o campo escalar.

Iniciamos no capítulo 2 com uma revisão sobre o campo escalar, de modo a tornar o texto acessível para recém formados em física.

No capítulo 3 consideramos um potencial do tipo delta de Dirac concentrado em um plano. O potencial em questão, como já mencionamos, faz o papel de um espelho semitransparente para o campo escalar. No limite em que a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, mostramos que a função de Green do problema tende a função de Green obtida quando tomamos o campo escalar sob condições de Dirichlet sob o plano onde o potencial se concentra. Sendo assim, interpretamos o modelo como sendo um tipo de espelho semitransparente para o campo escalar, cujo grau de transparência é determinado pela constante de acoplamento entre o campo e o potencial.

Consideramos a interação entre o potencial e uma carga para o campo escalar, descrita por uma corrente externa estacionária tipo delta de Dirac localizada em um ponto do espaço. No limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tende a infinito (condições de Dirichlet), mostramos que essa energia fornece a interação de Yukawa de natureza repulsiva entre o espelho e a carga. A natureza repulsiva não é surpresa, pois em se tratando de um campo de spin par (spin 0), sabemos que cargas de sinais opostos devem se repelir, e a carga imagem tem sinal oposto ao da carga original.

No capítulo 4 tomamos um potencial tipo delta de Dirac localizado em um ponto do espaço. Encontramos a função de Green do problema e mostramos, novamente, que no limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, a função de Green do modelo satisfaz a condição de Dirichlet no ponto onde o potencial se concentra. Por fim, calculamos a energia de interação entre o potencial e uma carga pontual estacionária para o campo escalar, simulada por uma corrente externa do tipo delta de Dirac, concentrada em um ponto do espaço.

Os resultados presentes nos capítulos 3 e 4 podem ser encontrados na referência [20].

O capítulo 5 contém resultados originais, neste capítulo consideramos um modelo para o campo escalar em  $D + 1$  dimensões. Tomamos um potencial externo do tipo delta de Dirac acoplado com derivadas do campo escalar. O potencial se concentra em um hiperplano com  $D - 1$  dimensões espaciais. Encontramos a função de Green do modelo e mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tende a infinito, a função de Green tende àquela obtida ao impormos condições de Neumann no campo sob o plano onde o potencial se concentra. Dessa forma, interpretamos o modelo como sendo um certo tipo de condição de Neumann generalizada para o campo escalar.

Consideramos a presença de uma carga pontual para o campo escalar e calculamos a energia de interação entre a carga e o potencial. Descrevemos a carga por meio de uma fonte externa do tipo delta de Dirac concentrada em um ponto do espaço. Para o caso de três dimensões

e no limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tende a infinito, mostramos que a energia de interação tende ao potencial de Yukawa, mas com natureza atrativa. Exatamente o comportamento oposto ao caso do potencial que generaliza a condição de Dirichlet.

É importante ressaltar que todos os resultados foram obtidos exatamente, sem a necessidade de apelar para teorias de perturbação.

Finalizamos o trabalho com nossas conclusões e perspectivas, presentes no capítulo 5, comentando sobre outros resultados originais que obtivemos nessa mesma linha de pesquisa, mas que não constam nessa Dissertação.

Ao longo do trabalho, tratamos de modelos no espaço de Minkowsky em  $3 + 1$  e em  $D + 1$  dimensões, para os quais usamos a métrica  $\eta^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$  e  $(1, -1, -1, -1, \dots, -1)$ , respectivamente.

## Capítulo 2

### Campo de Klein-Gordon na presença de fontes externas

Nesse capítulo fazemos uma breve revisão sobre alguns aspectos do campo de Klein-Gordon. Vamos tratar de alguns tópicos importantes para a compreensão dessa Dissertação e, ao mesmo tempo, estabelecer algumas notações empregadas ao longo de todo esse texto.

Esse capítulo deve servir também para facilitar a compreensão da Dissertação por bacharéis em física recém graduados e por físicos que não sejam da área de Teoria quântica de Campos.

O chamado campo de Klein-Gordon real é um campo escalar quântico e relativístico. Isso significa que estamos falando de uma função do espaço e do tempo, que assume valores escalares reais. Vamos denotar esse campo por

$$\phi(t, \mathbf{x}) , \quad (2.1)$$

sendo  $t$  a coordenada temporal e  $\mathbf{x}$  as coordenadas espaciais.

O campo de Klein-Gordon satisfaz a chamada equação de Klein-Gordon, dada por

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.2)$$

onde  $m > 0$  é a massa do campo.

Utilizando a notação para o operador D'Alembertiano

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \square, \quad (2.3)$$

e definindo a quantidade  $\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \mu$ , podemos escrever

$$(\square + \mu) \phi = 0, \quad (2.4)$$

De agora em diante vamos usar as chamadas unidades naturais, para as quais  $\hbar = c = 1$ . Nesse caso a equação de Klein-Gordon se torna

$$(\square + m^2) \phi = 0. \quad (2.5)$$

É importante ressaltar que, além da solução trivial (de campo nulo), o único tipo de solução que a equação (2.5) admite são as do tipo propagantes, ou seja, soluções de onda.

A equação de Klein-Gordon pode ser obtida por meio de um princípio variacional Lagrangiano. A densidade lagrangiana correspondente é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 . \quad (2.6)$$

Usando o princípio variacional, temos que a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) em (2.7), encontramos a equação dinâmica (2.5).

O tensor momento-energia momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.8)$$

Usando a densidade lagrangiana dada por (2.6) em (2.8) encontraremos o tensor energia momento correspondente à equação de Klein-Gordon. Para isso, consideramos a derivada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi, \quad (2.9)$$

enquanto que

$$\eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.10)$$

Levando ambos os termos acima em (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 \phi^2, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial^0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial^i \phi)^2 + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 \phi^2, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \partial^0 \phi \partial^0 \phi + \frac{1}{2} \partial^i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 \phi^2, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \partial^0 \phi \partial^0 \phi + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 \phi^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde usamos o fato de que  $\partial^0 = \partial_0$

De agora em diante, vamos usar o quadrivetor  $x = (t, \mathbf{x})$  por brevidade de notação.

Podemos também considerar o campo escalar submetido à uma fonte externa. Entendemos por fonte externa uma função prescrita do tempo e do espaço e que se acopla linearmente com o campo escalar  $\phi(t, \mathbf{x})$  na densidade lagrangiana. Nesse caso, a lagrangiana do sistema se escreve

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J \phi. \quad (2.12)$$

Com (2.12), a equação (2.7) nos fornece

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = J(x). \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é não homogênea e sua solução geral é uma combinação da solução da equação homogênea (2.5), do tipo onda, e uma solução particular que depende da fonte  $J$ . A solução particular pode ser encontrada com o método da Função de Green.

A função de Green do operador diferencial presente em (2.13) é definida como aquela que satisfaz a equação diferencial

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_0(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (2.14)$$

A solução particular de (2.13) é dada por

$$\phi(x) = \int G_0(x, y) J(y) dy, \quad (2.15)$$

Essa afirmação pode ser constatada ao substituirmos (2.15) em (2.13) e usando (2.14), como segue

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int G_0(x, y) J(y) dy &= J(x) \\ \int (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G_0(x, y) J(y) dy &= J(x) \\ \int \delta^4(x - y) J(y) dy &= J(x) \\ J(x) &= J(x) \quad C.Q.D. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Temos agora que encontrar a função de Green (2.14). Vamos fazer isso com a transformada de Fourier. Propomos então escrever a função de Green em (2.14) como uma integral de Fourier no espaço de momento

$$G_0(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)}. \quad (2.17)$$

sendo  $p = (p^0, \mathbf{p})$  e  $\tilde{G}_0(p)$  a transformada de  $G_0(x - y)$ , a ser determinada. Usamos também a representação integral de Fourier da função delta de Dirac

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}, \quad (2.18)$$

e substituímos (2.18) e (2.17) em (2.14), como segue

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}, \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) \tilde{G}_0(p) e^{-ip(x-y)} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os integrandos de ambos os lados da equação acima devem ser iguais, portanto

$$\tilde{G}_0(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (2.20)$$

e portanto a função  $G_0(x - y)$  será dada por

$$G_0(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{1}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \right]. \quad (2.21)$$

onde  $p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2$ .

A integral (2.21) é mal definida, pois exibe pólos na camada de massa, ou seja, sempre que  $p^2 - m^2 = 0$ . Sendo assim essa integral necessita de uma regularização. Regularizações podem ser feitas de diversas formas, levando a diferentes funções de Green. As mais conhecidas são as funções de Green avançada, retardada e a de Feynman. Esta é a mais importante em teoria de campos, cuja representação integral é dada por

$$G_0(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{1}{p^2 - (m - i\epsilon)^2} e^{-ip(x-y)} \right]. \quad (2.22)$$

Daqui por diante, vamos considerar apenas função de Green de Feynman, deixando este fato sempre subentendido. Vamos deixar também o parâmetro  $\epsilon$  subentendido nos cálculos.

Até agora consideramos o campo escalar em primeira quantização, isto é, como uma função de onda.

Ao tomarmos o campo  $\phi$  como um operador quântico, estamos tratando a teoria do campo escalar em segunda quantização. De forma alternativa, podemos proceder a segunda quantização do campo escalar por meio do formalismo de Feynman de integral de caminho. O Formalismo de Feynman se baseia na obtenção do funcional gerador da teoria, dado pela integral funcional

$$Z[J] = \aleph \int \mathcal{D}\phi \exp \left( i \int d^4 x \mathcal{L} \right) \quad (2.23)$$

Usamo então a densidade lagrangiana dada por (2.12) para obtermos

$$Z[J] = \aleph \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4 x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right]. \quad (2.24)$$

Definimos os seguintes termos

$$\begin{aligned} (\phi, A\phi) &= \int d^4 x' \int d^4 x \phi(x') A(x', x) \phi(x), \\ A(x', x) &= (-\partial'_\mu \partial^\mu - m^2) \delta^4(x' - x), \\ (J, \phi) &= \int d^4 x J(x) \phi(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Uma observação é que a primeira equação vem da generalização

$$(\phi, A\phi) = \phi^T A \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i^T A_{ij} \phi_j, \quad (2.26)$$

a segunda pode ser mostrada da mesma forma. Usamos as definições de (2.25) para expressar  $Z[J]$  da seguinte forma

$$Z[J] = \aleph \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2}(\phi, A\phi) + i(J, \phi)}. \quad (2.27)$$

Essa passagem é um pouco demorada pode ser vista claramente em [21] ou também no apêndice A. Temos então

$$Z[J] = Z[0]e^{-\frac{iJ^2}{2A}}. \quad (2.28)$$

Precisamos então usar a definição da primeira equação de (2.25) na equação acima para obtermos

$$Z[J] = Z[0]e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)A^{-1}(x,y)J(y)}. \quad (2.29)$$

Agora precisamos obter o valor de  $A^{-1}(x, y)$ . Essas contas já foram previamente feitas. Vamos obter o resultado a partir de (2.19) usando o seguinte

$$\begin{aligned} A\tilde{G}_0(p) &= (-\partial'_\mu\partial^\mu - m^2)\delta^4(x - y) - \frac{1}{p^2 - m^2}, \\ A\tilde{G}_0(p) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} - \frac{1}{p^2 - m^2} = \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (2.30)$$

No capítulo seguinte trabalharemos diretamente com a equação (3.5), que quando comparado com  $A$  vemos que

$$G_0(x, y) = A^{-1}. \quad (2.31)$$

Portanto obtemos

$$Z[J] = Z[0] \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x, y)J(y)\right). \quad (2.32)$$

A integral acima foi obtida no apêndice A e é dado por (A.14). Podemos mostrar também que o funcional gerador é dado por

$$Z[J] = \exp(iET), \quad (2.33)$$

sendo  $E$  a energia do estado fundamental do sistema e para facilitar fazemos  $Z[0] = 1$  (como feito no apêndice A). Ao compararmos (2.32) e (2.33), e fazendo algumas manipulações simples, podemos escrever

$$E = \frac{i}{T} \ln(Z[0]) + \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x, y)J(y). \quad (2.34)$$

O primeiro termo em (2.34) é independente da fonte externa  $J$ , e existiria mesmo com sua ausência. Esse termo está relacionado com a energia de vácuo livre, por isso podemos desprezá-lo.

A contribuição da energia decorrente da existência da fonte externa é dada por

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x, y)J(y). \quad (2.35)$$

Vamos considerar a seguinte fórmula do valor médio, no vácuo, do quadrado do campo

$$\langle 0|T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))|0\rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (2.36)$$

onde  $T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))$  denota o ordenamento temporal dos termos. Vamos usar a derivada funcional acima para obter a relação da função de Green de dois pontos com o valor médio, no vácuo, do quadrado do campo. Procedemos então da seguinte forma

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z[0] \frac{\exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y [J(x)G_0(x,y)J(y) + 2\epsilon\delta(x-x')G_0(x,y)J(y) + O^2(\epsilon)] \right\}}{\epsilon} +$$

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z[0] \frac{\exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x,y)J(y) \right\}}{\epsilon}, \quad (2.37)$$

tomamos o termo com  $\epsilon^2$  como nulo. Juntamos então todos os termos para obter

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x')} = Z[0] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x,y)J(y) \right] \left\{ \exp \left[ -i \int d^4y \epsilon G_0(x',y)J(y) \right] - 1 \right\}}{\epsilon}, \quad (2.38)$$

Para simplificar a notação usamos

$$\exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)G_0(x,y)J(y) \right] = \vartheta,$$

$$-i \int d^4y G_0(x',y)J(y) = \Upsilon(x') \quad (2.39)$$

Assim sendo podemos escrever

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x')} = Z[0] \vartheta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left\{ \exp [\Upsilon(x')\epsilon] - 1 \right\}}{\epsilon}, \quad (2.40)$$

então precisamos enunciar o limite fundamental

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^{\epsilon x} - 1}{\epsilon x} = \ln a, \quad (2.41)$$

portanto se  $a = e$  esse limite será igual a 1. Assim multiplicamos em cima e embaixo a equação (2.40) por  $\Upsilon(x')$  para usarmos o limite fundamental. Com isso obtemos

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x')} = Z[0] \vartheta \Upsilon(x'). \quad (2.42)$$

As contas seguem análogas quando encontramos a derivada direcional de  $Z[J]$  com respeito a  $J(x'')$ . Encontraremos agora a derivada direcional de  $\Upsilon(x')$  com respeito a  $J(x'')$

$$\frac{\delta \Upsilon(x')}{\delta J(x'')} = -i \int d^4y G_0(x',y) \frac{\delta J(y)}{\delta J(x'')}. \quad (2.43)$$

Usamos então a definição

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x'')} = \delta(y - x''). \quad (2.44)$$

Usando a equação acima em (2.43) e integrando obtemos

$$\frac{\delta \Upsilon(x')}{\delta J(x'')} = -i G_0(x', x''). \quad (2.45)$$



Encontraremos agora (2.36) para  $n = 2$  então temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x'')\delta J(x')} \Big|_{J=0} &= -1 \left[ \frac{\delta [Z[0]\vartheta\Upsilon(x')]}{\delta J(x'')} \right]_{J=0}, \\ -1 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x'')\delta J(x')} \Big|_{J=0} &= -1 \left[ -iZ[0]\vartheta \int d^4y G_0(x'', y)J(y)\Upsilon(x') + -iZ[0]\vartheta G_0(x', x'') \right]_{J=0} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Portanto quando tomarmos  $J = 0$  na fórmula acima encontramos

$$\left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x'')\delta J(x')} \Big|_{J=0} = iZ[0]G_0(x', x'') \quad (2.47)$$

Quando tomarmos  $Z[0] = 1$  e usarmos a definição (2.36) encontramos

$$\langle 0|\phi(x')\phi(x'')|0\rangle = iG_0(x', x'') . \quad (2.48)$$

Na segunda quantização do campo escalar, o tensor energia e momento é tomado como um operador. Seu valor esperado no vácuo é divergente e necessita ser regularizado. Isso pode ser feito com o método da separação de pontos, como segue

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow x'} \frac{1}{2} \partial^0 \phi(x) \partial^{0'} \phi(x') + \frac{1}{2} \nabla \phi(x) \nabla' \phi(x') + \frac{1}{2} m^2 \phi(x) \phi(x'), \\ T^{\mu\nu} &= \lim_{x \rightarrow x'} \left[ \frac{1}{2} \partial^0 \partial^{0'} + \frac{1}{2} \nabla \nabla' + \frac{1}{2} m^2 \right] \phi(x) \phi(x'). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Tomando o valor esperado no vácuo em ambos os lados da equação acima, e usando (2.48) encontramos

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu}(x) \rangle &= \lim_{x \rightarrow x'} \frac{1}{2} \left( \partial^0 \partial^{0'} + \nabla \nabla' + m^2 \right) \langle \phi(x) \phi(x') \rangle \\ &= \lim_{x \rightarrow x'} \frac{1}{2} \left( \partial^0 \partial^{0'} + \nabla \nabla' + m^2 \right) \left( iG_0(x, x') \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Cabe mencionar que quase todos os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos para o campo escalar sem a presença de potenciais externos. No entanto, mesmo com a presença de potenciais externos (ou seja, funções que se acoplam quadraticamente com o campo na densidade lagrangiana), muitos dos resultados obtidos continuam válidos, uma vez que estamos lidando com uma teoria quadrática no campo em questão. Em especial, mesmo na presença de um potencial externo, a equação (2.35) continua válida, bastando-se usar a função de Green do problema ao invés da função de Green  $G_0(x, y)$  do campo livre.

## Capítulo 3

### Condições Generalizadas de Dirichlet

Nesse trabalho consideramos o campo escalar, em  $3 + 1$  dimensões, em interação com um potencial externo localizado em um plano. O potencial em questão é proporcional a uma função delta de Dirac concentrada ao longo do plano.

No limite onde a constante de acoplamento entre a função delta e o campo tende a infinito. O modelo estudado corresponde ao campo escalar submetido a condições de contorno de Dirichlet no plano onde o potencial se concentra. Dessa forma podemos entender o modelo estudado como um certo tipo de espelho semitransparente para o campo escalar, cujo grau de transparência é dado pela constante de acoplamento entre o potencial e o campo.

Os resultados aqui considerados podem ser encontrados na referência [20], onde se trata o mesmo tipo de modelo, só que em um número arbitrário de dimensões espaciais.

#### 3.1 Campo escalar na presença de um potencial externo

Como dito no capítulo anterior, podemos considerar o campo escalar na presença de um potencial externo. Entendemos como potencial externo uma função prescrita do tempo e do espaço que se acopla quadraticamente com o campo na densidade lagrangiana. Nesse caso temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} [m^2 + V(x)] \phi^2 + J\phi, \quad (3.1)$$

onde  $V(x)$  é o potencial externo e consideramos também uma corrente externa.

Com a equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.2)$$

e a densidade lagrangiana (3.1) encontramos a equação de movimento para o campo escalar na presença do potencial e da fonte

$$[\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2 + V(x)] \phi = J. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é não homogênea. A função de Green correspondente deve satisfazer a equação

$$[\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (3.4)$$

Definimos agora a função de Green relacionada a versão homogênea de (3.3) (com  $J = 0$ ) como sendo a função que satisfaz a equação

$$[\partial_\nu \partial^\nu + m^2] G_0(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (3.5)$$

As funções  $G(x, y)$  e  $G_0(x, y)$  estão relacionadas pela equação

$$G(x, y) = G_0(x, y) - \int d^4z G(x, z) V(z) G_0(z, y). \quad (3.6)$$

Isso pode ser demonstrado de forma imediata ao aplicarmos, em ambos os lados de (3.6), o operador presente na equação (3.4) e usando a equação (3.5), como segue

$$\begin{aligned} [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] G(x, y) &= [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] G_0(x, y) \\ &\quad - [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] \int d^4z G(x, z) V(z) G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x) G_0(x, y) \\ &\quad - \int d^4z [\partial_\nu \partial^\nu + m^2 + V(x)] G(x, z) V(z) G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x) G_0(x, y) - \int d^4z \delta^4(x - z) V(z) G_0(z, y) \\ &= \delta^4(x - y) + V(x) G_0(x, y) - V(x) G_0(x, y) \\ &= \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (3.7)$$

o que está em pleno acordo com (3.4).

Uma vez que estamos tratando de uma teoria quadrática, pelos mesmos argumentos empregados no capítulo anterior, podemos escrever contribuição para a energia de vácuo do sistema devido à presença da fonte externa como

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y J(x) G(x, y) J(y). \quad (3.8)$$

### 3.2 Potencial delta de Dirac

Nessa secção tratamos de um modelo para o campo escalar no qual o potencial externo é dado por

$$V(x) = \mu \delta(x^3). \quad (3.9)$$

Note que o potencial acima se concentra no plano  $x^3 = 0$  e é um potencial estacionário, ou seja, não depende do tempo. O parâmetro  $\mu$  é uma constante de acoplamento entre a função delta e o potencial. Como discutido na referência [16], para evitar modos taquiônicos, vamos considerar o parâmetro  $\mu$  como sendo positivo  $\mu > 0$ .

Ao longo desta secção, vamos denotar as coordenadas de um vetor espacial paralelas ao plano onde o potencial se concentra como  $\mathbf{x}_{\parallel} = (x^1, x^2, 0)$ . E de forma semelhante para um vetor de Lorentz,  $x_{\parallel} = (t, x^1, x^2, 0)$ . Usaremos notação semelhante para outros vetores também.

Nosso ponto de partida é a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\nu} \phi \partial^{\nu} \phi - \frac{1}{2} [m^2 + \mu \delta(x^3)] \phi^2 + J \phi, \quad (3.10)$$

cuja função de Green correspondente satisfaz a equação diferencial

$$[\partial_{\nu} \partial^{\nu} + m^2 + V(x)] G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (3.11)$$

que é um caso particular de (3.4) com o potencial dado por (3.9).

Vamos encontrar a função de Green do modelo (3.10). Para isso iniciamos com a função de Green do campo livre (2.22), sem a presença do potencial, escrita como uma integral de Fourier no espaço de momento

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^{\mu} p_{\mu} - m^2} \right] \\ &= - \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left[ \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{e^{ip^3(x^3-y^3)}}{p^{\mu} p_{\mu} - m^2} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definimos agora a função

$$\mathcal{G}_0(\omega, p_{\parallel}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \frac{1}{p^{\mu} p_{\mu} - m^2} e^{ip^3(x^3-y^3)} \quad (3.13)$$

de modo a escrever a equação (3.12) na forma

$$G_0(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (3.14)$$

O operador diferencial presente na equação (3.11) exhibe simetria de translação temporal e nas coordenadas espaciais paralelas,  $x^1$  e  $x^2$ . O lado direito dessa equação também exhibe invariância translacional nessas mesmas coordenadas (e também na coordenada  $x^3$ ), sendo assim, podemos escrever a função de Green desse operador como uma integral de Fourier nas coordenadas paralelas,

$$G(x, y) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.14), (3.15) e (3.9) em (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^3, y^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \\ &- \int d^4 z \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, z^3) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-z_{\parallel})} \mu \delta(z^3) \int \frac{d^3 q_{\parallel}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_0(q_{\parallel}; z^3, y^3) e^{-iq_{\parallel}(z_{\parallel}-y_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Integrando o lado esquerdo de (3.16) em  $d^3 z_{||} = dz^0 dz^1 dz^2$ , usando o fato de que  $2\pi\delta(p-q) = \int dx \exp(i(p-q)x)$ . Integrando em  $d^3 q_{||}$  e, finalmente, integrando em  $dz^3$  podemos escrever

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})} = \\ & = \int \frac{d^3 p_{||}}{(2\pi)^3} [\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) - \mathcal{G}(p_{||}; x^3, 0) \mu \mathcal{G}_0(p_{||}; 0, y^3)] e^{-ip_{||}(x_{||}-y_{||})}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Igualando os integrandos em (3.17),

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) - \mu \mathcal{G}(p_{||}; x^3, 0) \mathcal{G}_0(p_{||}; 0, y^3). \quad (3.18)$$

Atribuindo o valor  $y^3 = 0$  na equação (3.18) acima e efetuando algumas manipulações simples encontramos

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, 0) = \frac{\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, 0)}{1 + \mu \mathcal{G}_0(p_{||}; 0, 0)}. \quad (3.19)$$

Levando o resultado (3.19) em (3.18) obtemos

$$\mathcal{G}(p_{||}; x^3, y^3) = \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) - \frac{\mu \mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, 0) \mathcal{G}_0(p_{||}; 0, y^3)}{1 + \mu \mathcal{G}_0(p_{||}; 0, 0)}. \quad (3.20)$$

Resta agora encontrar a função  $\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3)$ , definida em (3.13). Para isso definimos a quantidade

$$\sigma = \sqrt{-p_{||}^2 + m^2} \quad (3.21)$$

e reescrevemos (3.13) como

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = - \int \frac{dp^3}{2\pi} \frac{1}{(p^3)^2 + \sigma^2} e^{ip^3(x^3-y^3)}. \quad (3.22)$$

A integral em (3.22) exhibe polos em  $p^3 = \pm i\sigma$ . Para  $x^3 \neq y^3$  e  $\sigma$  real ( $m^2 > p_{||}^2$ ), podemos calcular a integral facilmente usando o teorema dos resíduos. A partir daqui vamos suprimir o termo  $\omega$  que aparece dentro de  $\mathcal{G}_0$ , mas que fique claro que ele está implícito dentro de  $\sigma$ . Quando  $x^3 \neq y^3$  e  $\sigma$  for um número imaginário puro ( $m^2 < p_{||}^2$ ), devemos deslocar os polos de acordo com a prescrição de Feynman, fazendo a substituição  $m \rightarrow m - i\epsilon$  e tomando, no final das contas, o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Para todos os casos, o resultado é dado por

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma}, \quad x^3 \neq y^3. \quad (3.23)$$

O caso onde  $x^3 = y^3$  pode ser considerado com o limite da equação (3.23) quando  $x^3 = y^3$  ou, de forma alternativa, com o auxílio das integrais presentes no apêndice (B) com  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $C = \sigma$ . O resultado é

$$\mathcal{G}_0(p_{||}; x^3 = 0, y^3 = 0) = \frac{1}{2\sigma}. \quad (3.24)$$

Com os resultados (3.23) e (3.24), a equação (3.20) se torna

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}}. \quad (3.25)$$

Substituindo a equação (3.25), onde o primeiro termo vem de (3.14) e o segundo de (3.15). Temos finalmente a função de Green na presença do potencial (3.9)

$$G(x, y) = G_0(x, y) - \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (3.26)$$

Um caso especial ocorre quando  $\mu \rightarrow \infty$  onde a equação (3.25) se torna

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|x^3-y^3|}}{2\sigma} - \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{2\sigma}, \quad (3.27)$$

que corresponde a função de Green para o caso onde o campo é submetido à condição de Dirichlet no plano  $x^3 = 0$ . Esse fato pode ser constatado ao avaliarmos a função acima no plano  $x^3 = 0$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^3, y^3) = \frac{e^{-\sigma|y^3|}}{2\sigma} - \frac{e^{-\sigma(|y^3|)}}{2\sigma} = 0. \quad (3.28)$$

fazendo com que a própria função de Green (nesse caso) se anule no plano. Com isso as soluções de campo também serão nulas nesse plano.

### 3.3 Interação plano - carga

Nesta secção consideramos um sistema composto pelo potencial, descrito na secção anterior, e uma fonte pontual para o campo escalar dada por

$$J = \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \quad (3.29)$$

sendo  $\lambda$  uma constante real e  $\mathbf{a}$  um vetor posição.

Sem perda de generalidade, por conveniência, daqui por diante vamos adotar um sistema de coordenadas no qual o vetor  $\mathbf{a}$  só tem a componente não nula perpendicular ao plano onde o potencial se concentra, isto é,  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ .

A fonte acima é estacionária e concentra na posição  $\mathbf{a}$ . Pode-se argumentar que ela faz, para o campo escalar, o papel de uma carga pontual estacionária [8]. Como estamos lidando com uma teoria quadrática, a energia desse sistema pode ser calculada com o auxílio da equação (3.8), onde a função de Green pertinente é dada por (3.26) e a corrente externa por (3.29)

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4 x \int d^4 y \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \left[ G_0(x, y) - \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \right] \lambda \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y \lambda^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) G_0(x, y) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \\
 &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int d^4x \int d^4y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) .
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

O primeiro termo na equação (3.30) é a auto energia da carga. Esse termo divergente está presente mesmo sem a presença do potencial externo e não contribui para a energia de interação entre o potencial e a fonte. O segundo termo é devido à interação entre a fonte e o potencial

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int d^4x \int d^4y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \int \frac{d^3p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\mu}{4\sigma^2} \frac{e^{-\sigma(|x^3|+|y^3|)}}{1 + \frac{\mu}{2\sigma}} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) . \tag{3.31}$$

Quando integramos a equação acima em  $d^3\mathbf{x}$  e  $d^3\mathbf{y}$  usamos uma das propriedades da função delta de Dirac, assim obtemos

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int_{-T/2}^{T/2} dy^0 \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(x^0-y^0)} \int \frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{-2\sigma|a|\mu}}{2\sigma(2\sigma + \mu)} \right], \tag{3.32}$$

onde explicitamos o limite de integração das coordenadas temporais.

Integramos agora em  $dx^0$ . Usamos o fato de que  $2\pi\delta(\omega) = \int dx^0 \exp(-i\omega x^0)$  e integramos em  $d\omega$  de modo a escrever

$$E_{int} = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^2p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{p_{\parallel}^2+m^2}|a|\mu}}{2\sqrt{p_{\parallel}^2+m^2}(2\sqrt{p_{\parallel}^2+m^2} + \mu)} \right]. \tag{3.33}$$

onde usamos o fato de que  $\sigma(\omega = 0) = \sqrt{p_{\parallel}^2 + m^2}$ .

A integral em (3.33) pode ser simplificada usando coordenadas polares. Ao integramos na coordenada angulares somos levados a

$$E_{int} = \frac{\lambda^2}{2} 2\pi \int_0^{\infty} \frac{dr}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{r^2+m^2}|a|r\mu}}{2\sqrt{r^2+m^2}(2\sqrt{r^2+m^2} + \mu)} \right]. \tag{3.34}$$

Com a mudança de variável  $2\sqrt{r^2+m^2} = y$ , obtemos

$$E_{int}(a, m, \mu) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_{2m}^{\infty} dy \left[ \frac{e^{-y|a|\mu}}{4(y + \mu)} \right]. \tag{3.35}$$

Fazemos agora uma nova mudança de variáveis,  $w(2m + \mu) = y + \mu$ , o que resulta em

$$\begin{aligned}
 E_{int}(a, m, \mu) &= \frac{\lambda^2 \mu}{4\pi} \int_1^{\infty} dw (2m + \mu) \left[ \frac{e^{-[w(2m+\mu)-\mu]|a|}}{4w(2m + \mu)} \right] \\
 &= \frac{\lambda^2 \mu e^{\mu|a|}}{16\pi} \int_1^{\infty} dw \left[ \frac{e^{-w(2m+\mu)|a|}}{w} \right].
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Usamos a definição da função exponencial integral

$$Ei(a, z) = \int_1^{\infty} e^{-wz} (w)^{-a} dw, \text{ onde } \text{Re}(z) > 0, \quad (3.37)$$

para identificar a integral presente em (3.36) como

$$E_{int}(a, m, \mu) = \frac{\mu\lambda^2}{16\pi} \{Ei(1, 2m|a| + \mu|a|)e^{\mu|a|}\}. \quad (3.38)$$

O comportamento da energia de interação (3.38) pode ser constatado na figura (3.1). Podemos ver pela figura que a energia cai rapidamente a medida que  $ma$  aumenta e também a medida que  $\mu a$  aumenta.

A massa do campo,  $m$ , funciona como um parâmetro atenuador da interação, o que já era esperado, pois esse é um papel típico exercido pela massa de campos que intermediam interações. O parâmetro  $\mu$ , que dá o grau de transparência do espelho, também desempenha um papel semelhante, funcionando como um atenuador da interação. No limite em que  $\mu = 0$ , a interação se anula.

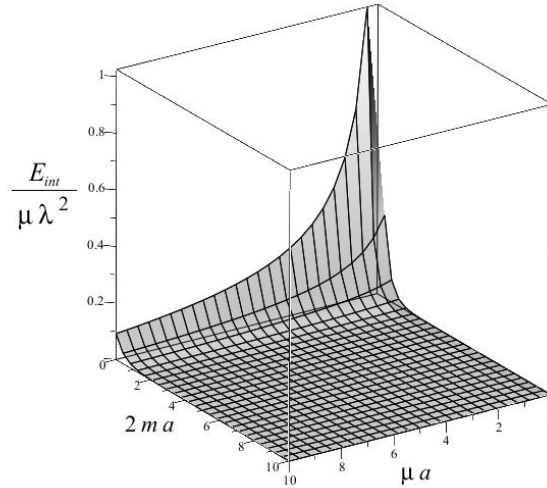


Figura 3.1: Gráfico para a energia (3.38)

Outro caso ocorre no limite para o qual  $m = 0$ ,

$$E_{int}(a, m = 0, \mu) = \frac{\mu\lambda^2 e^{\mu|a|}}{16\pi} Ei(1, \mu|a|) . \quad (3.39)$$

Um outro limite interessante é aquele correspondente à um espelho perfeito, obtido quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Para obter esse limite, voltamos na equação (3.35) e tomamos o limite quando  $\mu \rightarrow \infty$  no integrando,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{e^{-y|a|} \mu}{4(y + \mu)} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{e^{-y|a|} \mu}{4 \left[ \mu \left( \frac{y}{\mu} + 1 \right) \right]}, \text{ onde } y \ll \mu, \quad (3.40)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{e^{-y|a|} \mu}{4(y + \mu)} = \frac{e^{-y|a|}}{4}.$$



Logo, a energia de interação fica

$$E_{int}(a, m, \mu \rightarrow \infty) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_{2m}^{\infty} dy \left[ \frac{e^{-y|a|}}{4} \right], \quad (3.41)$$

que pode ser facilmente integrado

$$E_{int}(a, m, \mu \rightarrow \infty) = \frac{\lambda^2}{16\pi|a|} e^{-2m|a|}. \quad (3.42)$$

A energia (3.42) é o potencial de Yukawa entre a carga e a sua imagem no espelho. Esse potencial é de natureza repulsiva, o que já era de se esperar, pois o campo que intermedia a interação está associado à partículas de spin par (spin zero).

Quando o campo não tem massa, a energia (3.42) se reduz á interação coulombiana de natureza repulsiva.

## Capítulo 4

### Potencial Pontual

Nesta secção consideramos o campo escalar real com massa em  $3 + 1$  dimensões e submetido a um potencial externo estacionário do tipo delta de Dirac. Tomamos um potencial concentrado em um ponto do espaço.

O modelo considerado é descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} [m^2 + \mu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{b})] \phi^2 + J(\mathbf{x}) \phi. \quad (4.1)$$

sendo  $\mathbf{b}$  um vetor espacial. O potencial externo é dado por

$$V(\mathbf{x}) = \mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (4.2)$$

Vamos obter a função de Green do problema assim como a energia de interação entre o potencial e uma carga pontual estacionária. Aqui trabalharemos explicitamente com  $p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  que denotaremos da seguinte forma  $p_\mu = (\omega, -\mathbf{p})$ . Vamos considerar o caso especial para o qual  $\mu \rightarrow \infty$ .

Os resultados apresentados podem ser encontrados na referência [20].

#### 4.1 Função de Green do campo escalar com um potencial pontual

Para encontrar a função de Green do modelo (4.1), procedemos de forma semelhante ao que fizemos no capítulo anterior. Iniciamos escrevendo a função de Green do campo livre (sem a presença do potencial) como uma integral de Fourier no tempo

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^\mu p_\mu - m^2} \\ &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\omega^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2)} \right] e^{-\omega(x^0 - y^0)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Definimos agora a função

$$g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\omega^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2)} \quad (4.4)$$

de modo a reescrever a Função de Green livre como

$$G_0(x, y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)}. \quad (4.5)$$

Vamos também escrever a função de Green para o operador diferencial presente em (4.1) como uma integral de Fourier no tempo. Podemos fazer isso pois, pelas características do operador em questão, este deve exibir simetria de translação temporal. Sendo assim, temos

$$G(x, y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)}. \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) em (3.6) temos que

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G_0(x, y) - \int d^4z G(x, z) V(\mathbf{x}) G_0(z, y) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)} - \int \frac{d\omega}{2\pi} g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\ &\quad - \int dz^0 \int d^3\mathbf{z} \int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) e^{-i\omega(x^0 - z^0)} \mu \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{b}) \int \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} g_0(\tilde{\omega}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) e^{-i\tilde{\omega}(z^0 - y^0)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Efetuada a integração em  $d^3\mathbf{z}$ , em  $dz^0$ , usando o fato de que  $2\pi\delta(\omega - \tilde{\omega}) = \int dz^0 e^{-i(\omega - \tilde{\omega})z^0}$  e integrando em  $d\tilde{\omega}$ , obtemos

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)} = \int \frac{d\omega}{2\pi} g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mu g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{y}) e^{-i\omega(x^0 - y^0)}. \quad (4.8)$$

Igualamos agora os dois integrandos na equação acima,

$$g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{y}). \quad (4.9)$$

Fazemos agora  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  na equação acima, o que fornece

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) &= g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) - g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b}), \\ g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) &= \frac{g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b})}{1 + \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b})}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9) temos que

$$g(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{y})}{1 + \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b})}. \quad (4.11)$$

Substituímos a função (4.11) em (4.6) e usamos a equação (4.5) para escrever

$$G(x, y) = G_0(x, y) - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{y})}{1 + \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b})} e^{-i\omega(x^0 - y^0)}. \quad (4.12)$$

Temos agora que encontrar a função  $g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ , definida em (4.4). Iniciamos essa tarefa usando coordenadas polares na integral de (4.4) e integrando no ângulo sólido. Isso pode ser feito com o auxílio da equação (C.18), com  $f(\mathbf{p}) = 1/[\mathbf{p}^2 + (m^2 - \omega^2)]$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  e  $d = 3$ ,

$$\begin{aligned}
 g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\mathbf{p}^2 + (m^2 - \omega^2)} \\
 &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{(2\pi)^3} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3} \int_0^\infty du u^{3/2} J_{\frac{1}{2}}(u) \frac{1}{\frac{u^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} + (m^2 - \omega^2)} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^\infty du u^{3/2} J_{\frac{1}{2}}(u) \frac{1}{u^2 + (m^2 - \omega^2)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Usamos agora o fato de que

$$J_{1/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin(u) \quad (4.14)$$

para escrever

$$g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^\infty du u \sin(u) \frac{1}{u^2 + [(m - i\epsilon)^2 - \omega^2]|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \quad (4.15)$$

onde deixamos explícita a prescrição de Feynman.

Se  $m > \omega$ , a integral acima pode ser facilmente resolvida com o auxílio de [22]

$$\int_0^\infty d\mu \frac{u \sin(u)}{u^2 + A^2} = \frac{\pi}{2} e^{-A}, \quad \text{Re}(A) > 0. \quad (4.16)$$

Se  $m < \omega$ , também podemos usar esse mesmo resultado para calcular a integral em (4.15), só que devemos ter a cautela de, somente após o término dos cálculos, tomar o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . O resultado final é dado por

$$g_0(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (4.17)$$

Resta-nos agora encontrar

$$\begin{aligned}
 g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (m^2 - \omega^2)} \\
 &= 4\pi \int \frac{dr}{(2\pi)^3} \frac{r^2}{r^2 + (m^2 - \omega^2)} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

onde efetuamos a integração, em coordenadas polares, no ângulo sólido.

Usando a equação (B.2), com  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$  e  $C^2 = (m^2 - \omega^2)$  e usando o fato de que  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  e  $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$ , temos finalmente

$$g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{m^2 - \omega^2}. \quad (4.19)$$

A função  $g_0(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  exhibe uma descontinuidade, o que vai se refletir também em uma descontinuidade na própria função de Green do problema. Levando (4.17) e (4.19) em (4.12) obtemos a função de Green para o modelo (4.1)

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= G_0(x, y) - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{g_0(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{b}) \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{y})}{1 + \mu g_0(\mathbf{p}; \mathbf{b}, \mathbf{b})} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &= G_0(x, y) - \frac{\mu}{16\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}| |\mathbf{b} - \mathbf{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{b} - \mathbf{y}|}}{1 - \frac{\mu}{4\pi} \sqrt{m^2 - \omega^2}} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} \neq \mathbf{b}, \mathbf{y} \neq \mathbf{b} \\
 &= G_0(x, y) + \frac{\mu}{16\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{b} - \mathbf{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{m^2 - \omega^2} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{b} - \mathbf{y}|}}{1 - \frac{\mu}{4\pi} \sqrt{m^2 - \omega^2}} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \neq \mathbf{b} \\
 &= G_0(x, y) + \frac{\mu}{16\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\sqrt{m^2 - \omega^2} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|}}{1 - \frac{\mu}{4\pi} \sqrt{m^2 - \omega^2}} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} \neq \mathbf{b}, \mathbf{y} = \mathbf{b} .
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

O limite da equação (4.20) para o qual  $\mu \rightarrow \infty$  é dado por

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mu \rightarrow \infty} G(x, y) &= G_0(x, y) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}| |\mathbf{b} - \mathbf{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{b} - \mathbf{y}|}}{\sqrt{m^2 - \omega^2}} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} \neq \mathbf{b}, \mathbf{y} \neq \mathbf{b} \\
 &= G_0(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{b} - \mathbf{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{b} - \mathbf{y}|} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \neq \mathbf{b} \\
 &= G_0(x, y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \\
 &\quad \mathbf{x} \neq \mathbf{b}, \mathbf{y} = \mathbf{b} .
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Com o auxílio das equações (4.5), (4.17), (4.19) e (4.21), podemos mostrar ver que

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} G(x, y^0, \mathbf{y} = \mathbf{b}) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} G(x^0, \mathbf{x} = \mathbf{b}, y) = 0 \tag{4.22}$$

## 4.2 Interação potencial pontual-carga

Nessa secção consideramos a presença do potencial pontual, descrito anteriormente, e também a presença de uma fonte pontual estacionária para o campo, dada por

$$J(\mathbf{x}) = \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) . \tag{4.23}$$

A fonte é a mesma que estudamos no capítulo anterior, e faz o papel de uma carga para o campo escalar, localizada no ponto  $\mathbf{a}$ .

Vamos considerar que a carga nunca será posicionada no ponto onde o potencial se concentra, ou seja,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ .

Como estamos lidando com uma teoria quadrática e com uma fonte estacionária, podemos escrever que a energia do estado fundamental do sistema é

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{2T} \int d^4x \int d^4y J(x) G(x, y) J(y). \quad (4.24)$$

Substituindo (4.23) e a segunda equação (4.20) na equação acima e desprezando a contribuição oriunda da função de Green livre  $G_0(x, y)$ , que está relacionada à auto energia da carga e não à interação entre o potencial e a carga, temos a energia de interação entre o potencial e a carga

$$E_{int} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int d^4x \int d^4y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{a}) \frac{\mu}{16\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}| |\mathbf{b} - \mathbf{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{x} - \mathbf{b}|} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} |\mathbf{b} - \mathbf{y}|}}{1 - \frac{\mu}{4\pi} \sqrt{m^2 - \omega^2}} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \quad (4.25)$$

Integrando em  $d^3\mathbf{x}$ ,  $d^3\mathbf{y}$ ,  $dx^0$ , usando o fato de que  $2\pi\delta(\omega) = \int dx^0 e^{-i\omega x^0}$ , integrando em  $d\omega$  e em  $dy^0$  e definindo a distância entre o potencial e a fonte,  $R = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ , obtemos finalmente a energia de interação entre o potencial e a fonte

$$E_{int}(\mu, m, R) = \frac{\lambda^2 \mu}{32\pi^2} \frac{1}{\{1 - [\mu m / (4\pi)]\}} \frac{e^{-2mR}}{R^2}. \quad (4.26)$$

A energia (4.26) exhibe um decaimento mais rápido com a distância  $R$  em comparação com o potencial de Yukawa. Tomando a restrição  $m > 4\pi/\mu$  para evitar instabilidade do vácuo, é fácil mostrar que a energia de interação acima leva sempre a uma força atrativa não divergente entre o potencial e a fonte. Temos também os seguintes casos especiais

$$E_{int}(\mu, m = 0, R) = \frac{\lambda^2 \mu}{32\pi^2} \frac{1}{R^2}, \quad (4.27)$$

$$E_{int}(\mu \rightarrow \infty, m, R) = -\frac{\lambda^2}{8\pi m R^2} e^{-2mR}. \quad (4.28)$$

O primeiro resultado (4.27) é um tipo de potencial centrífugo (para  $m = 0$  nós devemos ter  $\mu < 0$ ) e corresponde ao caso do campo sem massa. O segundo resultado (4.28) é uma força atrativa e corresponde ao caso de um espelho perfeito.

Como discutido na referência [16], o caso do campo sem massa com espelho perfeito leva a instabilidade do vácuo. Nessa situação, temos uma divergência na energia (4.26).

## Capítulo 5

### Condições generalizadas de Neumann

Nesse capítulo consideramos o campo escalar acoplado com um potencial externo estacionário e localizado em uma região do espaço. O potencial considerado que generaliza as condições de Neumann, tendo estas condições como um caso limite.

Consideramos um espaço tempo com  $D + 1$  dimensões no espaço de Minkowsky, sendo o vetor de Lorentz dado por  $x = (t, \mathbf{x})$ , com as coordenadas espaciais  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^D)$ . Precisamos então levar em consideração uma generalização do sistema de coordenadas (como o feito no apêndice D).

Vamos tomar o potencial externo concentrado ao longo do plano  $x^D = a$ . As coordenadas espaciais paralelas ao plano onde o potencial de concentra serão denotadas por  $\mathbf{x}_{\parallel} = (x^1, \dots, x^{D-1})$ .

Definimos o vetor de Lorentz perpendicular ao plano onde o potencial se concentra

$$\eta^\alpha = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad (5.1)$$

O modelo que propomos é descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \mu (\eta^\alpha \partial_\alpha \phi) (\eta^\beta \partial_\beta \phi) \delta(x^D - a) . \quad (5.2)$$

A equação de movimento do sistema pode ser obtida com a equação de Euler-Lagrange aplicada a densidade lagrangiana (5.2)

$$\{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) + \mu \eta^\alpha \partial_\alpha [\delta(x^D - a) \eta^\beta \partial_\beta]\} \phi = 0. \quad (5.3)$$

A seguir vamos calcular a função de Green para esta densidade lagrangiana.

#### 5.1 Função de Green

Nesta secção calculamos a função de Green do modelo proposto. Iniciamos considerando a equação diferencial

$$\{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) + \mu \partial_\alpha [\eta^\alpha \delta(x^D - a) \eta^\beta \partial_\beta]\} G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (5.4)$$

Por conveniência, vamos definir o operador diferencial

$$V(x) = \mu \eta^\alpha \partial_\alpha [\delta(x^D - a) \eta^\beta \partial_\beta] \quad (5.5)$$

e reescrevemos a equação (5.4) como

$$[\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2 + V(x)]G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (5.6)$$

Vamos agora verificar se a equação (3.6) é satisfeita pela função de Green escrita em (5.6), mesmo no caso onde  $V(x)$  não é uma função, mas um operador diferencial, como aquele definido em (5.5). Temos então a proposta de escrever a função de Green como

$$G(x, x') = G_0(x, x') - \int d^{D+1}y G(x, y)V(y)G_0(y, x'), \quad (5.7)$$

o potencial  $V(y)$  é dado por (5.5) quando trocamos a variável  $x$  por  $y$ . Atuando como operador diferencial presente na equação (5.4) dos dois lados da equação acima,

$$\begin{aligned} \{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) + V(x)\} G(x, x') &= \{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) + V(x)\} G_0(x, x') \\ &- \int d^{D+1}y \{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) + V(x)\} G(x, y)V(y)G_0(y, x') \\ &= \{(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2)\} G_0(x, x') + V(x)G_0(x, x') \\ &\quad - \int d^{D+1}y \delta^4(x - y)V(y)G_0(y, x') \\ &= \delta^4(x - x') + V(x)G_0(x, x') - V(x)G_0(x, x') \\ &= \delta^4(x - x'). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Portanto, a equação (5.7) é válida para o modelo proposto, onde  $V(\mathbf{x})$  é um operador diferencial

Substituindo em (5.7) o operador  $V(x)$  dado por (5.5), temos que

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G_0(x, x') - \int d^{D+1}y G(x, y)\mu\eta^\alpha \partial_{(y)\alpha} [\delta(y^D - a)\eta^\beta \partial_{(y)\beta} G_0(y, x')] \\ &= G_0(x, x') + \mu \int d^{D+1}y \delta(y^D - a) (\eta^\alpha \partial_{(y)\alpha} G(x, y)) (\eta^\beta \partial_{(y)\beta} G_0(y, x')) \\ &\quad - \mu \int d^{D+1}y \eta^\alpha \partial_{(y)\alpha} [G(x, y)\delta(y^D - a)\eta^\beta \partial_{(y)\beta} G_0(y, x')] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Consideramos que a função de Green deva ir a zero no infinito, o que implica na condição  $\lim_{y^D \rightarrow \pm\infty} G(x, y) = 0$ . Com isso o último termo na equação acima deve ser nulo. Portanto

$$G(x, y) = G_0(x, x') + \mu \int d^{D+1}y \delta(y^D - a) (\eta^\alpha \partial_{(y)\alpha} G(x, y)) (\eta^\beta \partial_{(y)\beta} G_0(y, x')) \quad (5.10)$$

Vamos escrever as funções de Green na presença do plano e livre como integrais de Fourier nas coordenadas paralelas ao plano

$$G(x, x') = \int \frac{d^D p_{||}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}(p_{||}; x^D, x'^D) e^{-ip_{||}(x_{||} - x'_{||})},$$



$$G_0(x, x') = \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})}, \quad (5.11)$$

A função de Green livre,  $G_0(x, y)$ , pode ser escrita dessa forma e o cálculo de  $\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D)$  será feito posteriormente sem maiores dificuldades. A função  $G(x, y)$  exibe invariância de translação nas coordenadas paralelas, o que justifica escrevê-la nessa estrutura.

Substituindo as integrais (5.11) em ambos os lados da equação (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})} &= \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})} + \\ &+ \mu \int d^D y_{\parallel} \int dy^D \delta(y^D - a) \\ \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial y^D} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, y^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} &\int \frac{d^D q_{\parallel}}{(2\pi)^D} \frac{\partial}{\partial y^D} \mathcal{G}_0(q_{\parallel}; y^D, x'^D) e^{-iq_{\parallel}(y_{\parallel} - x'_{\parallel})} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Integramos agora em  $dy^D$ , em  $d^D y_{\parallel}$ , usamos o fato de que

$$(2\pi)^D \delta^D(p_{\parallel} - q_{\parallel}) = \int d^D y_{\parallel} e^{i(p_{\parallel} - q_{\parallel})y_{\parallel}}, \quad (5.13)$$

e integrando em  $d^D q_{\parallel}$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})} \\ &= \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) + \mu \frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, x'^D)}{\partial a} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - x'_{\parallel})} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Podemos agora igualar os integrandos acima

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) + \mu \frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, x'^D)}{\partial a}. \quad (5.15)$$

Tomando  $x'^D = b$  na equação (5.15) e derivando em relação a  $b$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, b)}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, b)}{\partial b} + \mu \frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a \partial b}. \quad (5.16)$$

Agora tomamos o limite  $b \rightarrow a$  na equação acima, que fornece

$$\frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} + \mu \frac{\partial \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} \lim_{b \rightarrow a} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a \partial b}. \quad (5.17)$$

Com algumas manipulações simples da equação (5.17), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a) \left[ 1 - \mu \lim_{b \rightarrow a} \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b) \right] &= \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, a) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, a) &= \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, a) \left\{ 1 - \mu \lim_{b \rightarrow a} \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

Levando o resultado (5.18) na equação (5.15) obtemos

$$\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D) = \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) + \mu \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, a)}{\partial a} \frac{\partial \mathcal{G}_0(p_{\parallel}, a, x'^D)}{\partial a} \left\{ 1 - \mu \lim_{b \rightarrow a} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a \partial b} \right\}^{-1}. \quad (5.19)$$

Nesse ponto, devemos encontrar a função  $\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, y^D)$ . Lembrando que essa função de Green livre deve satisfazer a equação

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) G_0(x - y) = \delta^{D+1}(x - y), \quad (5.20)$$

podemos mostrar que sua solução, em termos de uma integral de Fourier, é dada por

$$G_0(x - y) = \int \frac{d^{D+1}p}{(2\pi)^{D+1}} - \frac{1}{p^2 - (m - i\epsilon)^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.21)$$

onde deixamos explícita a escolha da representação de Feynman.

Por conveniência, escrevemos a função de Green livre como

$$\begin{aligned} G_0(x - y) &= \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ \int \frac{dp^D}{2\pi} - \frac{1}{p_{\parallel}^2 - (p^D)^2 - m^2} e^{ip^D(x^D - y^D)} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \\ &= \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, y^D) e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})} \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde definimos a função

$$\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, y^D) = \int \frac{dp^D}{2\pi} \frac{1}{(p^D)^2 + (m^2 - p_{\parallel}^2)} e^{ip^D(x^D - y^D)}. \quad (5.23)$$

A integral da equação (5.23) é exatamente a mesma estudada no capítulo 3 e, portanto, pode ser resolvida da mesma forma, com o método dos resíduos

$$\mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, y^D) = \frac{e^{-\sigma|x^D - y^D|}}{2\sigma} \quad \sigma = \sqrt{m^2 - p_{\parallel}^2}. \quad (5.24)$$

Ao substituirmos a equação (5.24) em (5.19), vamos precisar tomar derivadas do módulo  $|x^D - y^D|$ . Isso é feito da seguinte forma

$$\frac{\partial |x^D - y^D|}{\partial x^D} = \frac{\partial}{\partial x^D} \left[ \sqrt{(x^D - y^D)^2} \right] = \frac{(x^D - y^D)}{|x^D - y^D|} = \text{sgn}(x^D - y^D). \quad (5.25)$$

Da mesma forma, temos também a relação

$$\frac{\partial |x^D - y^D|}{\partial y^D} = \frac{\partial}{\partial y^D} \left[ \sqrt{(x^D - y^D)^2} \right] = \frac{(y^D - x^D)}{|x^D - y^D|} = \text{sgn}(y^D - x^D). \quad (5.26)$$

Usando as equações (5.24), (5.25) e (5.26), podemos obter as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, x'^D) = \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-\sigma|a - x'^D|}}{2\sigma} = -\text{sgn}(a - x'^D) \frac{e^{-\sigma|a - x'^D|}}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, a) = \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-\sigma|x^D-a|}}{2\sigma} = -\operatorname{sgn}(a-x^D) \frac{e^{-\sigma|x^D-a|}}{2}. \quad (5.27)$$

Para encontrar a derivada segunda presente na equação (5.19) utilizamos a definição (5.24), como segue

$$\begin{aligned} \lim_{b=a} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a \partial b} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^D}{2\pi} \frac{(-ip^D)(ip^D)}{(p^D)^2 [(m^2 - p_{\parallel})^2]} e^{ip^D(a-b)} \Big|_{b=a}, \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dp^D}{2\pi} \frac{(p^D)^2}{(p^D)^2 + [m^2 - (p_{\parallel})^2]}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usamos agora a fórmula (B.2) e obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \lim_{b=a} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; a, b)}{\partial a \partial b} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dp^D}{2\pi} \frac{(p^D)^2}{(p^D)^2 - [(m^2 - p_{\parallel})^2]} \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)(m^2 - p_{\parallel}^2)^{-1/2}} \frac{1}{2\pi} \\ &= -\frac{\pi\sigma}{2\pi} = -\frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Agora calculamos  $\mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D)$  a partir de (5.19) e usando (5.29) e (5.27),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p_{\parallel}; x^D, x'^D) &= \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) + \\ &+ \mu \frac{1}{1 + \mu\sigma/2} \frac{e^{-\sigma|x^D-a|}}{2} \frac{e^{-\sigma|a-x'^D|}}{2} \frac{(a-x^D)(a-x'^D)}{|a-x^D||a-x'^D|}, \\ &= \mathcal{G}_0(p_{\parallel}; x^D, x'^D) + \mu \frac{e^{-\sigma|x^D-a|} e^{-\sigma|a-x'^D|}}{4 + 2\mu\sigma} \frac{(a-x^D)(a-x'^D)}{|a-x^D||a-x'^D|}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) na primeira equação (5.11) e usando a segunda equação (5.11) obtemos a função de Green do modelo

$$G(x, x') = G_0(x, x') + \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \mu \frac{e^{-\sigma|x^D-a|} e^{-\sigma|a-x'^D|}}{4 + 2\mu\sigma} \frac{(a-x^D)(a-x'^D)}{|a-x^D||a-x'^D|} e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-x'_{\parallel})}. \quad (5.31)$$

Vamos agora estudar algumas características da função de Green (5.31) nas proximidades do plano onde o potencial se concentra. Com a segunda equação (5.11) e a equação (5.24) podemos reescrever a equação (5.31) na forma

$$G(x, y) = \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ \frac{e^{-\sigma|x^D-y^D|}}{2\sigma} + \mu \frac{e^{-\sigma|x^D-a|} e^{-\sigma|a-y^D|}}{4 + 2\mu\sigma} \frac{(a-x^D)(a-y^D)}{|a-x^D||a-y^D|} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (5.32)$$

Tomando o limite em que  $\mu \rightarrow \infty$ ,

$$G(x, y) = \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ \frac{e^{-\sigma|x^D-y^D|}}{2\sigma} + \frac{e^{-\sigma|x^D-a|} e^{-\sigma|a-y^D|}}{2\sigma} \frac{(a-x^D)(a-y^D)}{|a-x^D||a-y^D|} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (5.33)$$

Derivando ambos os membros em relação a  $x^D$  e efetuando algumas manipulações simples,

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x^D} = \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ -\frac{e^{-\sigma|x^D-y^D|}}{2} \frac{x^D - y^D}{|x^D - y^D|} + \frac{1}{2} \frac{(a - y^D)}{|a - y^D|} e^{-\sigma|x^D-a|} e^{-\sigma|a-y^D|} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})}. \quad (5.34)$$

Se avaliarmos a equação acima no plano onde o potencial se concentra, ou seja,  $x^D = a$ , temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial x^D} \right|_{x^D=a} &= \int \frac{d^D p_{\parallel}}{(2\pi)^D} \left[ -\frac{e^{-\sigma|a-y^D|}}{2} \frac{a - y^D}{|a - y^D|} + \frac{1}{2} \frac{(a - y^D)}{|a - y^D|} e^{-\sigma|a-y^D|} \right] e^{-ip_{\parallel}(x_{\parallel}-y_{\parallel})} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

ou seja, no limite  $\mu \rightarrow \infty$ , a função de Green do modelo proposto satisfaz à condição de Neumann no plano onde o potencial se concentra.

Dessa forma podemos dizer que o modelo proposto generaliza as condições de Neumann. Por um abuso de linguagem, vamos chamar esse plano de um espelho Neumann semitransparente com grau de transparência dado pela constante de acoplamento  $\mu$ .

## 5.2 Interação hiperplano - carga

Nessa secção vamos investigar como se dá a interação entre o potencial descrito na secção anterior com uma fonte pontual estacionária para o campo. Vamos usar a fonte que descreve o que viria a ser o análogo à uma carga para o campo escalar

$$J(\mathbf{x}) = \lambda \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{B}) \quad (5.36)$$

sendo  $\mathbf{B}$  um vetor espacial fixo.

O modelo proposto é descrito por uma densidade lagrangiana quadrática. Sendo assim, a energia de interação entre a fonte e o potencial pode ser obtida por meio da equação

$$E = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int d^{D+1}x d^{D+1}y J(\mathbf{x}) G(x, y) J(\mathbf{y}). \quad (5.37)$$

Substituindo (5.31) e (5.36) em (5.37), usando a definição de  $\sigma$  dada em (5.24) e descartando a contribuição da função de Green livre  $G_0(x, y)$ , que está relacionada à auto energia da carga pontual e que não contribui para a interação entre o plano e a carga, temos que

$$\begin{aligned} E_{int} &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2T} \int dx^0 dy^0 \int d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{y} \int \frac{dp^0}{(2\pi)} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{D-1}} \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{B}) \delta^D(\mathbf{y} - \mathbf{B}) \\ &\mu \frac{e^{-\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 - (p^0)^2}|x^D-a|} e^{-\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 - (p^0)^2}|a-y^D|}}{4 + 2\mu \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2 - (p^0)^2}} \frac{(a - x^D)(a - y^D)}{|a - x^D||a - y^D|} e^{-ip^0(x^0-y^0)} e^{i\mathbf{p}_{\parallel}(\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{y}_{\parallel})}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Integrando em  $d^D \mathbf{x}$ ,  $d^D \mathbf{y}$ ,  $dx^0$ , usando o fato de que

$$(2\pi)\delta(p^0) = \int dx^0 e^{-ip^0 x^0}, \quad (5.39)$$

e integrando em  $dy^0$  levando em conta que  $\int_{-T/2}^{T/2} dy^0 = T$ , temos

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{D-1}} \mu \frac{e^{-\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2} |B^D - a|} e^{-\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2} |a - B^D|}}{4 + 2\mu\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2}} \frac{(a - B^D)(a - B^D)}{|a - B^D| |a - B^D|} \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{p}_{\parallel}}{(2\pi)^{D-1}} \mu \frac{e^{-2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2} |a - B^D|}}{4 + 2\mu\sqrt{m^2 + \mathbf{p}_{\parallel}^2}}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Definindo a distância entre o plano onde o potencial se concentra e a carga pontual

$$R = |B^D - a| \quad (5.41)$$

e integrando em coordenadas esféricas em  $D - 1$  dimensões, temos

$$E_{int} = -\frac{\lambda^2}{2} \int d\Omega_{D-2} \int \frac{dr}{(2\pi)^{D-1}} r^{D-2} \frac{e^{-2\sqrt{m^2 + r^2} R}}{\frac{4}{\mu} + 2\sqrt{m^2 + r^2}}, \quad (5.42)$$

onde designamos por  $d\Omega_{D-2}$  o elemento de ângulo sólido em  $D - 1$  dimensões.

Pelos resultados do apêndice (B), temos a integral no ângulo sólido

$$\int d\Omega_{D-2} = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma[(D-1)/2]}, \quad (5.43)$$

o que nos permite escrever a energia (5.42)

$$E_{int} = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{dr}{(2\pi)^{D-1}} r^{D-2} \frac{e^{-2\sqrt{m^2 + r^2} R}}{\frac{4}{\mu} + 2\sqrt{m^2 + r^2}}. \quad (5.44)$$

Com a mudança de variáveis

$$\beta = 2\sqrt{m^2 + r^2} \quad (5.45)$$

a energia (5.44) se torna

$$E_{int}(m, \mu, D) = -\frac{\lambda^2}{4(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{2m}^\infty d\beta \frac{\beta e^{-\beta R}}{\frac{4}{\mu} + \beta} \left[ \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{\frac{D-3}{2}}. \quad (5.46)$$

Não conseguimos resolver a integral em (5.46) de forma geral. Sendo assim, vamos considerar alguns casos especiais.

Para o campo sem massa, a equação (5.46) se torna

$$E_{int}(m = 0, \mu, D) = -\frac{\lambda^2}{2^{D-1} (4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-\beta R}}{\frac{4}{\mu} + \beta} \beta^{D-2}. \quad (5.47)$$

Observando que

$$\begin{aligned}\beta e^{-\beta R} &= -1 \frac{d}{dR}(e^{-\beta R}), \\ \beta^{D-2} e^{-\beta R} &= (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}}(e^{-\beta R}).\end{aligned}\quad (5.48)$$

e definindo

$$\frac{d^{-1}}{dR^{-1}} e^{-\beta R} = \int_{\infty}^R du e^{-\beta u} \quad (5.49)$$

temos

$$\begin{aligned}E_{int}(m=0, \mu, D) &= -\frac{\lambda^2}{2^{D-1}(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} d\beta \frac{1}{\frac{4}{\mu} + \beta} (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}}(e^{-\beta R}) \\ &= -\frac{\lambda^2}{2^{D-1}(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}} \int_0^{\infty} d\beta (e^{-\beta R}) \frac{1}{\frac{4}{\mu} + \beta}.\end{aligned}\quad (5.50)$$

A última etapa consiste na mudança de variável de integração  $\frac{4}{\mu} u' = \frac{4}{\mu} + \beta$ ,

$$\begin{aligned}E_{int}(m=0, \mu, D) &= -\frac{\lambda^2}{2^{D-1}(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}} \int_1^{\infty} du' e^{-\frac{4}{\mu}(u'-1)R} \frac{\frac{4}{\mu}}{\frac{4u'}{\mu}}, \\ &= -\frac{\lambda^2}{2^{D-1}(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}} \left[ e^{\frac{4R}{\mu}} \int_1^{\infty} du' e^{-\frac{4}{\mu}u'R} \frac{1}{u'} \right]\end{aligned}\quad (5.51)$$

e no uso da definição (3.37) para encontrar

$$E_{int}(m=0, \mu, D) = -\frac{\lambda^2}{2^{D-1}(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} (-1)^{D-2} \frac{d^{D-2}}{dR^{D-2}} \left[ e^{\frac{4R}{\mu}} Ei(1, 4R/\mu) \right]. \quad (5.52)$$

No caso especial de  $D = 3$  dimensões espaciais, a equação (5.52) fornece

$$\begin{aligned}E(m=0, \mu, D=3) &= -\frac{\lambda^2}{4(4\pi)\Gamma(1)} (-1) \frac{d}{dR} \left[ e^{\frac{4R}{\mu}} Ei(1, 4R/\mu) \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{(16\pi)} \left[ e^{\frac{4R}{\mu}} \frac{4}{\mu} Ei(1, 4R/\mu) - \frac{1}{R} \right],\end{aligned}\quad (5.53)$$

que no limite  $\mu \rightarrow \infty$ , que corresponde a impor as condições de Neumann no plano  $x^3 = 0$ , se reduz a

$$E_{int}(m=0, \mu \rightarrow \infty, D=3) = -\frac{\lambda^2}{(16\pi)R}. \quad (5.54)$$

É importante ressaltar que a energia (5.54) é a interação entre a carga e sua imagem refletida no plano! Porém essa interação é de natureza atrativa, exatamente o contrário do que foi obtido com as condições de Dirichlet generalizadas (estudadas no capítulo 2).

Lembramos aqui que, como estamos lidando com um campo bosônico de spin par (spin zero), a natureza das interações entre fontes é atrativa. Para o campo escalar cargas iguais se atraem.

Podemos interpretar então, a carga imagem refletida no espelho tipo Neumann, como tendo o mesmo sinal da carga original. Situação oposta ao que ocorre com espelhos tipo Dirichlet.

Usando a expansão

$$Ei(1, x) \approx -\gamma - \ln(x) \quad , \quad x \ll 1 \quad (5.55)$$

podemos escrever a energia (5.54) para  $4R/\mu \ll 1$ ,

$$E_{int}(m = 0, \mu, D = 3) \Big|_{4R/\mu \ll 1} = -\frac{\lambda^2}{(16\pi)} \left\{ \frac{1}{R} + 4\frac{1}{\mu} \left[ \gamma + \ln\left(\frac{4R}{\mu}\right) \right] \right\}. \quad (5.56)$$

Outro caso especial importante é dado pelo limite das condições de Neumann, quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Nesse caso, a energia (5.46) se torna

$$\begin{aligned} E_{int}(m, \mu \rightarrow \infty, D) &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{2m}^{\infty} d\beta \frac{\beta e^{-\beta R}}{4\beta} \left[ \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - m^2 \right]^{\frac{D-3}{2}} \\ &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} 2m \int_{2m}^{\infty} \frac{d\beta}{2m} \frac{1}{4} e^{-\frac{\beta 2mR}{2m}} \left[ \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - 1 \right]^{\frac{D-3}{2}} m^D \end{aligned} \quad (5.57)$$

Trocamos de variável de integração por  $v = \beta/(2m)$  em (5.57) obtemos

$$E_{int}(m, \mu \rightarrow \infty, D) = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} 2m \int_1^{\infty} dv \frac{1}{4} e^{-v 2mR} [(v)^2 - 1]^{\frac{D-3}{2}} m^{D-3}. \quad (5.58)$$

Usando novamente a referência [22] temos a relação

$$\begin{aligned} \frac{K_\nu(z) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1/2) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu} &= \int_1^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad \text{onde} \\ \left[ \operatorname{Re}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) > 0, |\arg z| < \pi/2; \text{ ou } \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \nu = 0 \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Identificando  $v = t$ ,  $2mR = z$  e  $\nu = (D - 2)/2$  em (5.59), podemos calcular a integral em (5.58)

$$\begin{aligned} E_{int}(m, \mu \rightarrow \infty, D) &= -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} m^{D-2} \frac{K_\nu(z) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1/2) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu} \\ &= -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} m^{D-2} \frac{K_{\frac{D-2}{2}}(2mR) \Gamma\left(\frac{D-2}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1/2) \left(\frac{2mR}{2}\right)^{(D-2)/2}} \\ &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{D/2}} K_{\frac{D-2}{2}}(2mR) \left(\frac{m}{R}\right)^{\frac{D-2}{2}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

O caso de três dimensões espaciais,  $D = 3$ , pode ser obtido facilmente, usando o fato de que

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (5.61)$$

portanto

$$\begin{aligned}
 E_{int}(m, \mu \rightarrow \infty, D = 3) &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{3/2}} K_{\frac{1}{2}}(2mR) \left(\frac{m}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{4mR}} e^{-2mR} \\
 &= -\frac{\lambda^2}{(16\pi)R} e^{-2mR}.
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Note que a energia (5.62) é o potencial de Yukawa entre a carga e sua imagem no espelho.

Por fim, consideramos o caso especial de três dimensões espaciais. Tomamos então a equação (5.46) com  $D = 3$ ,

$$E_{int}(m, \mu, D = 3) = -\frac{\lambda^2}{(16\pi)} (-1) \frac{d}{dR} \int_{2m}^{\infty} d\beta \frac{e^{-\beta R}}{\frac{4}{\mu} + \beta}. \tag{5.63}$$

Coma mudança de variável de integração  $\frac{4}{\mu} + \beta = u(2m + \frac{4}{\mu})$ , temos que

$$\begin{aligned}
 E_{int}(m, \mu, D = 3) &= -\frac{\lambda^2}{(16\pi)} (-1) \frac{d}{dR} \int_1^{\infty} du \left(2m + \frac{4}{\mu}\right) \frac{e^{-[u(2m + \frac{4}{\mu}) - \frac{4}{\mu}]R}}{u \left(2m + \frac{4}{\mu}\right)} \\
 &= -\frac{\lambda^2}{(16\pi)} (-1) \frac{d}{dR} e^{\frac{4}{\mu}R} Ei \left(1, \frac{4R}{\mu} + 2mR\right) \\
 &= \frac{\lambda^2}{(16\pi)} \left[ \frac{4}{\mu} e^{\frac{4}{\mu}R} Ei \left(1, \frac{4R}{\mu} + 2mR\right) - \frac{e^{-2mR}}{R} \right].
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Note o resultado (5.64) consiste na interação de Yukawa acrescida de um termo que cai rapidamente com a distância. Esse termo também cai rapidamente à medida que a constante de acoplamento  $\mu$  aumenta. No limite em que  $\mu \rightarrow \infty$ , esse termo tende a zero, e a energia passa a ser dada apenas pelo o potencial de Yukawa. Ressaltamos novamente que essa interação do tipo Yukawa é de natureza atrativa, o que nos faz interpretar a carga imagem, refletida no espelho, como tendo o mesmo sinal da carga original no caso de um espelho tipo Neumann (lembre-se de que, para o campo escalar, cargas com o mesmo sinal se atraem).

A figura (5.1) ilustra o comportamento da energia (5.64) em função de  $2mR$  e de  $4R/\mu$ . Para grandes valores dessas variáveis, a energia tende a zero.



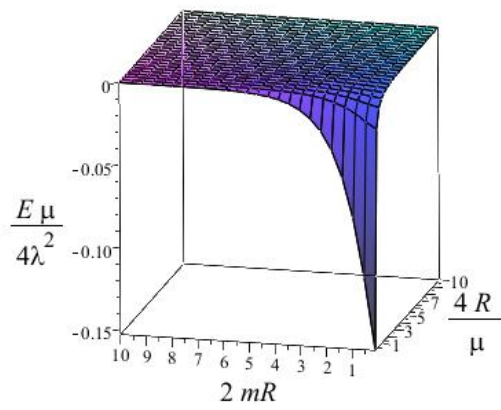


Figura 5.1: Gráfico para a energia (5.64)

## Capítulo 6

### Conclusões e Perspectivas

Nessa dissertação fizemos um estudo sobre o campo escalar real na presença de potenciais externos espacialmente localizados. Consideramos diversos modelos, cada um deles descrito por um tipo de potencial.

No capítulo 2 iniciamos por fazer uma breve revisão do campo de Klein-Gordon real. Com isso estabelecemos notação e alguns conceitos usados ao longo de todo o trabalho. Esperamos também que este capítulo sirva para tornar a leitura mais acessível para iniciantes, principalmente para bacharéis em física recém formados. Neste capítulo estudamos um modelo no qual o campo escalar com massa se acopla à um potencial externo estacionário do tipo delta de Dirac concentrado num ponto. Calculamos a função de Green do sistema e mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, o modelo equivale a impor condições de Dirichlet sob o campo no ponto onde o potencial se concentra.

No capítulo 3 estudamos um modelo no qual o campo escalar com massa se acopla à um potencial externo estacionário do tipo delta de Dirac concentrado ao longo de um plano. Calculamos a função de Green do sistema e mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, o modelo equivale a impor condições de Dirichlet sob o campo no plano onde o potencial se concentra. Os resultados presentes nos capítulos 2 e 3 podem ser encontrados na referência [20].

Consideramos também a situação na qual o campo, além de estar na presença do potencial tipo delta de Dirac, está na presença de uma fonte externa pontual do tipo delta de Dirac. Calculamos a energia de interação entre o potencial e a fonte. A energia esta intermediada pelo acoplamento do campo com essas duas estruturas. No limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tende a infinito, mostramos que essa energia se reduz à interação de Yukawa, de natureza repulsiva, entre a fonte e sua imagem refletida no plano onde o potencial se concentra.

O fato da interação ser repulsiva não é uma surpresa, pois no caso do campo escalar, cargas de sinais opostos se repelem.

No capítulo 4 consideramos o campo escalar com massa na presença de um potencial estacionário tipo delta de Dirac, mas concentrado em um ponto do espaço. Mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, o modelo equivale a impor condições de Dirichlet com o campo no ponto onde o potencial se concentra.

Calculamos a energia de interação entre o potencial e uma fonte externa de campo estacionária e pontual do tipo delta de Dirac.

O capítulo 5 contém resultados que ainda não foram considerados na literatura, até onde sabemos. Nesse capítulo consideramos um modelo para o campo escalar real com massa em  $D + 1$  dimensões (sendo  $D$  o número de dimensões espaciais). Nesse modelo, o campo está acoplado a um potencial externo estacionário concentrado ao longo de um hiperplano com  $D - 1$  dimensões. O potencial tem a estrutura de uma função delta de Dirac, mas o acoplamento se dá com derivadas do campo.

Encontramos a função de Green do modelo e mostramos que, no limite onde a constante de acoplamento entre o campo e o potencial tende a infinito, a função de Green se reduz àquela encontrada, quando impomos condições de Neumann no campo e no plano onde o potencial se concentrava. Desta forma, interpretamos o modelo em questão como um certo tipo de condições de Neumann semitransparentes, ou generalizadas, onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo controla o grau de transparência do hiperplano (para condições de Neumann).

Consideramos também o campo acoplado a uma fonte pontual estacionária do tipo delta de Dirac. Encontramos, em forma de quadratura, a energia de interação entre o potencial e a fonte. Obtivemos essa energia de forma exata em diversas situações, as de destaque são aquelas onde a constante de acoplamento e o campo tende a infinito e as soluções para um espaço  $3 + 1$  dimensional.

No caso do limite onde a constante de acoplamento e o campo tendem a infinito, em  $3 + 1$  dimensões, a energia entre o plano e a fonte é a dada pela interação de Yukawa de caráter atrativo. Exatamente o oposto do que se encontra ao tomarmos um espelho.

Como perspectiva futura esperamos redigir um artigo de cunho científico, a ser submetido para publicação, com os resultados presentes no capítulo 5. Assim como outros resultados que obtivemos, considerando um modelo no qual o campo escalar está acoplado com um potencial tipo delta de Dirac concentrado em um ponto do espaço. Neste modelo, tomando o limite onde a constante de acoplamento entre o potencial e o campo tende a infinito, a função de Green do sistema satisfaz as condições de Neumann no ponto onde o potencial se concentra.

## Apêndice A

### Integral Gaussiana

Vamos mostrar aqui a origem da equação (2.32) e também demonstrar a seguinte igualdade

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right] = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2}(\phi, A\phi) + i(J, \phi)}. \quad (\text{A.1})$$

Vamos trabalhar do lado direito da equação. Antes precisamos mostrar que o primeiro termo que aparece na exponencial de (2.27) é compatível com (2.24), já que o segundo (termo de fonte) visivelmente é compatível. Então vamos mostrar que

$$\int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = \int d^4x' \int d^4x \phi(x') A(x', x) \phi(x). \quad (\text{A.2})$$

Vamos então trabalhar no lado direito da equação. Começamos usando as definições dadas em (2.25)

$$\int d^4x' \int d^4x \phi(x') A(x', x) \phi(x) = \int d^4x' \int d^4x \phi(x') (\partial'_\mu \partial^\mu - m^2) \delta^4(x' - x) \phi(x). \quad (\text{A.3})$$

Vamos trocar a posição das integrais, do lado direito, para integrar primeiro na variável  $x'$ . Começamos com o termo massivo

$$- \int d^4x' \phi(x') (m^2) \delta^4(x' - x) \phi(x) = -(m^2) \phi^2(x). \quad (\text{A.4})$$

Agora vamos trabalhar do lado direito da equação efetuando uma integração por partes, no termo com função delta de Dirac. Começamos definindo  $\phi(x') = v$ , assim obtemos

$$d^4x' (\partial'_\mu \partial^\mu) \delta^4(x' - x) \phi(x) = dv,$$

$$\phi(x') = v,$$

$$\int v du = vu - \int u dv. \quad (\text{A.5})$$

A integral deverá ser tomada em todo o espaço. Devemos notar que a variável  $x'$  possui quatro dimensões, portanto obtemos

$$[\phi(x') (\partial'^\mu) \delta^4(x' - x) \phi(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int d^4x' \delta^4(x' - x) (\partial'^\mu) \phi(x) \partial'_\mu \phi(x'), \quad (\text{A.6})$$

aqui vemos que o primeiro termo vai se anular devido a função delta de Dirac ser nula nos pontos avaliados. Assim que integrarmos em  $x'$  obtemos a equação (A.2). É interessante ver que os termos da exponencial do lado esquerdo podem ser rearranjados da seguinte forma, aqui não estamos muito interessados em deixar as coordenadas explícitas

$$i \left[ \frac{1}{2}(\phi A \phi) + J \phi \right] = iA \left[ \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{A}J\phi \right], \quad (\text{A.7})$$

a partir daqui vamos simplesmente ocultar o  $i$  para obtermos

$$A \left( \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{A}J\phi \right) = A \left( \phi + \frac{J}{A} \right)^2 - \frac{J^2}{A} \quad (\text{A.8})$$

Usando esse artifício obtemos a integral

$$\int D\phi e^{\frac{i}{2}[(\phi, A\phi) + 2(J, \phi)]} = \int D\phi e^{\frac{i}{2} \left[ A \left( \phi + \frac{J}{A} \right)^2 - \frac{J^2}{A} \right]} \quad (\text{A.9})$$

Fazemos uma translação dada por  $\phi' = \phi + \frac{J}{A}$  onde obtemos

$$d\phi' = d\phi, \quad (\text{A.10})$$

os limites de integração envolvem o espaço todo e portanto não serão mudados. Assim a integral em A.9 se torna

$$e^{-\frac{iJ^2}{2A}} \int D\phi' e^{\frac{i}{2}(A\phi'^2)}. \quad (\text{A.11})$$

Podemos notar que com ausência de fontes a nossa integral em (A.1) se torna

$$\int D\phi e^{\frac{i}{2}(A\phi^2)}, \quad (\text{A.12})$$

que terá o mesmo resultado de (A.11). Como estamos interessados no componente da fonte colocamos a mão  $Z[J = 0] = 1$  em (2.27), assim obtemos

$$Z[J = 0] = \mathfrak{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2}(\phi, A\phi)} = 1. \quad (\text{A.13})$$

Com isso nosso resultado final será dado por

$$Z[J] = e^{-\frac{iJ^2}{2A}}, \quad (\text{A.14})$$

ou ainda

$$Z[J] = Z[0] e^{-\frac{iJ^2}{2A}}. \quad (\text{A.15})$$

Chegamos portanto na equação que queríamos demonstrar

## Apêndice B

### Extensão analítica para integral

Nesse apêndice consideramos a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{\beta} dr}{(r^2 + C^2)^{\alpha}}, \quad (\text{B.1})$$

usada na obtenção de vários resultados ao longo dessa Dissertação. Não vamos obter o resultado da integral. Vamos apenas apresentar o resultado e justificá-lo.

Em primeiro lugar, é importante notar que a integral acima é função das variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $C$ . É também imediato perceber que, dependendo dos valores atribuídos para essas variáveis, essa integral é divergente. Restringindo as variáveis para valores em que a integral seja convergente, temos que [23]

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{\beta} dr}{(r^2 + C^2)^{\alpha}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1 + \beta)\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}(1 + \beta)\right)}{2(C^2)^{\alpha - (1 + \beta)/2} \Gamma(\alpha)}. \quad (\text{B.2})$$

O lado direito da equação (B.2) é bem definido para um domínio maior das variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $C$ , portanto, podemos considerar o resultado acima como uma extensão analítica da integral do lado esquerdo da equação.

## Apêndice C

### Integral para a função de Green

Nesse apêndice vamos tratar a integral

$$I_d = \int d^d \mathbf{p} f(p) e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}} , \quad (\text{C.1})$$

onde o diferencial da integral é da forma

$$d^d \mathbf{p} = (p)^{d-1} dp \prod_{i=1}^{d-1} \sin^{d-(i+1)} \theta_i d\theta_i . \quad (\text{C.2})$$

Colocando tudo dentro da integral obtemos

$$I_d = \int dp (p)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} d\theta_i \sin^{d-(i+1)} \theta_i e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}} f(p) , \quad (\text{C.3})$$

onde o vetor  $\mathbf{a}$  é dado por

$$\mathbf{a} = (0, 0, \dots, a) , \quad (\text{C.4})$$

portanto dentro da exponencial temos

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} \text{se } \mathbf{p} \text{ e } \mathbf{a} \text{ são representados no mesmo sistema de coordenadas : } p^1 a_1 + p^2 a_2 + \dots + p^n a_n \\ \text{caso contrário : } pa \cos \theta_1 , \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

onde  $\cos \theta_1$  corresponde a correlação entre os vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{a}$  que pode ser obtida por

$$\frac{|\mathbf{a} + \mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{a}|^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{a}|} = \cos \theta_1 \quad (\text{C.6})$$

Usarei o segundo caso, assim a integral fica

$$\begin{aligned} I_d &= \int dp (p)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} d\theta_i \sin^{d-(i+1)} \theta_i e^{\pm i p a \cos \theta_1} f(p) , \\ &= \int dp (p)^{d-1} \left( \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2} \theta_1 e^{\pm i p a \cos \theta_1} \right) f(p) \times \\ &\times \left( \int_0^\pi d\theta_2 \sin^{d-3} \theta_2 \right) \left( \int_0^\pi d\theta_3 \sin^{d-4} \theta_3 \right) \dots \left( \int_0^\pi d\theta_{d-2} \sin \theta_{d-2} \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta_{d-1} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

A função de Bessel de primeira espécie pode facilitar um pouco a nossa vida. Vou enunciá-la

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm ix \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta, \text{ para } \nu > -\frac{1}{2}. \quad (\text{C.8})$$

Incorporando as propriedades da função de Bessel podemos reescrever (C.8) da seguinte forma

$$\int_0^\pi e^{\pm ix \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta = \pi^{\frac{1}{2}} \left(\nu - \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x). \quad (\text{C.9})$$

Usando a propriedade da função Gamma temos

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{C.10})$$

Assim a integral em  $d\theta_1$  fica

$$\left( \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2} \theta_1 e^{\pm ipa \cos \theta_1} \right), \quad (\text{C.11})$$

fazendo as substituições seguinte

$$\theta_1 = \theta, \text{ pa} = x, \text{ d} - 2 = 2\nu \longrightarrow \nu = \frac{\text{d} - 2}{2} \longrightarrow \nu = \frac{\text{d}}{2} - 1, \quad (\text{C.12})$$

passamos então da integral que envolve a função de Bessel para a integral em  $d\theta_1$  original

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2\nu} \theta e^{\pm ix \cos \theta} &= \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x) \\ \left( \int_0^\pi d\theta_1 \sin^{d-2} \theta_1 e^{\pm ipa \cos \theta_1} \right) &= \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\text{d}}{2} + \frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{pa}{2}\right)^{-\left(\frac{\text{d}}{2}-1\right)} J_{\frac{\text{d}}{2}-1}(pa) \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\text{d} - 1}{2}\right) \left(\frac{2}{pa}\right)^{\left(\frac{\text{d}}{2}-1\right)} J_{\frac{\text{d}}{2}-1}(pa). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Para resolvermos as integrais de  $d\theta_i$ , onde  $i \neq 1$ , usaremos a seguinte relação

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+2)\right)}. \quad (\text{C.14})$$



Fazendo uso dela chegamos em

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin^{d-3} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{d-(d-2)} \theta_{d-3} d\theta_{d-3} \int_0^\pi \sin^{d-(d-1)} \theta_{d-2} d\theta_{d-2} = \\
 & = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(d-2))}{\Gamma(\frac{1}{2}(d-1))} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(d-3))}{\Gamma(\frac{1}{2}(d-2))} \dots \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}3)}{\Gamma(\frac{1}{2}4)} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}2)}{\Gamma(\frac{1}{2}3)}, \\
 & = (\pi)^{\frac{d-3}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}.
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Juntando agora todas equações obtemos

$$\begin{aligned}
 I_d & = \int dp(p)^{d-1} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \left(\frac{2}{pa}\right)^{\frac{d}{2}-1} J_{\frac{d}{2}-1}(pa) (\pi)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} 2\pi f(p), \\
 & = 2^{d/2} \pi^{d/2} \int_0^\infty dp(p)^{d-1} J_{\frac{d}{2}-1}(pa) \left(\frac{1}{pa}\right)^{\frac{d}{2}-1} f(p), \\
 & = (2\pi)^{d/2} a^{-d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{\frac{d}{2}-1}(\mu) f(u/a),
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde, na última linha, fizemos a transformação de variáveis

$$u = pa, \tag{C.17}$$

para não confundir com a transformação que fiz antes, quando passei da função de Bessel para a fórmula da integral em  $d\theta_1$ , usei variáveis diferentes. Temos portanto o resultado final para a integral

$$\int d^d \mathbf{p} f(\mathbf{p}) e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}} = (2\pi)^{d/2} a^{-d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{\frac{d}{2}-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right), \quad d > 2. \tag{C.18}$$

Portanto essa é a fórmula geral que usamos em um dos capítulos.

## Apêndice D

### Coordenadas esféricas em n-dimensões

Nesse apêndice vamos explorar um conceito que é bem citado na dissertação, o sistema de coordenadas n-esférico. Esse sistema de coordenadas nada mais é do que uma generalização do famoso sistema de coordenadas esféricas tridimensional. Vale lembrar que a base desse sistema de coordenadas, em três dimensões, é a coordenada espacial radial “ $r$ ” e dois ângulos que caracterizam localidade “ $\theta$ ” e “ $\phi$ ”. Portanto para generalizarmos o sistema de coordenadas tridimensional para um outro com “ $n$ ” dimensões tomaremos “ $n - 1$ ” ângulos e uma coordenada radial “ $r$ ”, mantendo assim uma coordenada radial para distância.

Para completarmos nossa generalização vamos considerar que o sistema de coordenadas n-esférico se relaciona com um outro sistema cartesiano generalizado de “ $n$ ” dimensões com coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}x^1 &= r \cos \theta_1, \\x^2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\x^3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\&\vdots \\&\vdots \\&\vdots \\x^{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\x^n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Utilizando as fórmulas acima podemos chegar numa forma simples e geral de expressar a transformação de uma coordenada  $x^j$

$$x^j = r \prod_{i=1}^{j-1} \sin \theta_i \cos \theta_j, \text{ para } n > j > 1.\tag{D.2}$$

Devemos observar que as relações acima mantêm a ideia seguinte

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 + (x^n)^2}.\tag{D.3}$$

A variação dos ângulos é dada por

$$\begin{aligned}0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad \text{para } i \leq n - 2, \\0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi.\end{aligned}\tag{D.4}$$

É interessante notar que alguns textos denotam o ângulo “ $\theta_{n-1}$ ” como sendo “ $\phi$ ”, mas por comodidade eu mantereí assim. A variação da coordenada radial se dá como

$$0 \leq r \leq \infty. \quad (\text{D.5})$$

Antes de usarmos o jacobiano iremos declarar as coordenadas do sistema de coordenadas  $n$ -esférico como sendo

$$\begin{aligned} F^1 &= r, \\ F^2 &= \theta_1, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ F^n &= \theta_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Como podemos ver abaixo essa notação facilita muita a formulação do jacobiano

$$\frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(F^1, F^2, \dots, F^n)} = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial x^1}{\partial F^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x^1}{\partial F^n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^n}{\partial F^1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial x^n}{\partial F^n} \end{array} \right\| \quad (\text{D.7})$$

Agora voltaremos a denotar as coordenadas do sistema de coordenadas  $n$ -esférico como  $\theta$  e  $r$ . Usando um programa computacional podemos chegar na seguinte fórmula para o jacobiano, este que será denotado pela letra  $J$ , de transformações entre os sistemas de coordenadas

$$\begin{aligned} J &= r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin^{n-n+1} \theta_{n-2} \sin^{n-n} \theta_{n-1}, \\ J &= r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{n-(i+1)} \theta_i, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Podemos ainda mudar o índice  $i$  para  $i+1$ , com isso  $i$  passa a iniciar do número  $i=2$  e termina em  $n-1$ . Fazendo as mudanças obtemos a seguinte equação

$$J = r^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^{n-i} \theta_{i-1}. \quad (\text{D.9})$$

O elemento do  $n$ -volume será dado por

$$\begin{aligned} d^n V &= |J| dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}, \\ d^n V &= r^{n-1} \prod_{i=2}^n \sin^{n-i} \theta_{i-1} dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}, \\ d^n V &= r^{n-1} dr \prod_{i=2}^n \sin^{n-i} \theta_{i-1} d\theta_{i-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Note que o último termo do produto ( $i = n$ ) possui uma parte sendo a função seno e a outra parte contendo a diferencial. Embora a função seno seja elevada a zero, e portanto seja igual a 1, a parte diferencial, que é dada por  $d\theta_{n-1}$ , aparece. Então separamos a parte radial da parte do ângulo sólido, este será denotado por

$$d\Omega_{d-1} = \prod_{i=2}^n \sin^{n-i} \theta_{i-1} d\theta_{i-1}. \quad (\text{D.11})$$

Se as relações (D.1) funcionam podemos a partir delas encontrar o sistema de coordenadas esférico tridimensional

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta_1, \\ x^2 &= r \cos \theta_2 \sin \theta_1, \\ x^3 &= r \sin \theta_2 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Como foi falado antes “ $\theta_{n-1}$ ”, no nosso caso “ $\theta_2$ ”, é conhecido por “ $\phi$ ”. Fazendo essa substituição e chamando “ $\theta_1$ ” de “ $\theta$ ” temos

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta = z, \\ x^2 &= r \cos \phi \sin \theta = x, \\ x^3 &= r \sin \phi \sin \theta = y. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Com isso podemos ver que nossa generalização contempla até o caso mais simples.

## Bibliografia

- [1] JACKSON, J.D. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [2] GREINER, W. ; REINHARDT, J. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [3] MEDEIROS , M.F.X.P. Efeitos da polarização do vácuo nas imediações de um solenóide. Master's thesis, UNIFEI, 2011.
- [4] NOGUEIRA, A.A. Aspectos do modelo de lee-wick abeliano. Master's thesis, UNIFEI, 2011.
- [5] BARONE, F. A.; FLORES-HIDALGO, G.; NOGUEIRA, A. A. External sources in lee-wick theories. *Phys. Rev. D*, **88**(105031), Nov 2013.
- [6] BORGES, L.H.C.; BARONE, F.A.; HELAYËL-NETO, J.A. Field sources in a lorentz-symmetry breaking scenario with a single background vector. *The European Physical Journal C*, **74**(2937), 2014. Particles and Fields.
- [7] BORGES, L.H.C.; FERRARI, A.F.; BARONE, F.A. New effects in the interaction between electromagnetic sources mediated by nonminimal lorentz violating interactions. *The European Physical Journal C*, **76**(599), 2016. Particles and Fields.
- [8] BARONE, F.A. ; FLORES-HIDALGO, G. Vacuum energies due to delta-like currents: simulating classical objects along branes with arbitrary codimensions. *Phys. Rev. D*, **78**(125003), 2008.
- [9] BARONE, F.A.; FLORES-HIDALGO, G. Vacuum energies and multipole interactions. *Brazilian Journal of Physics*, **40**:188–194, 2010.
- [10] HELAYËL-NETO, J.A.; BARONE, F.A.; BARONE, F.E. Charged brane interactions via the kalb-ramond field. *Phys. Rev. D*, **84**(065026), 2011. Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology.
- [11] MILTON, K.A. *The Casimir Effect, Physical Manifestations of Zero-Point Energy*. World Scientific, 2001.

- 
- [12] MILTON, K.A. Casimir energies and pressures for  $\delta$ -function potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37**(6391), 2004.
- [13] BORDAG, M.; ROBASCHIK, D., WIECZOREK, E. Quantum field theoretic treatment of the casimir effect. *Annals of Physics*, **165**:192–213, 1985.
- [14] BARONE, F.A. ; NOGUEIRA, A.A. A conducting surface in lee-wick electrodynamics. *The European Physical Journal C*, **75**(339), 2015. Particles and Fields.
- [15] BORGES, L.H.C. and BARONE, F.A. A perfectly conducting surface in electrodynamics with lorentz symmetry breaking. *The European Physical Journal C*, **77**(693), 2017.
- [16] SCARDICCHIO , A. Casimir dynamics: Interactions of surfaces with codimension  $> 1$  due to quantum fluctuations. *Phys. Rev. D*, **72**(065004), 2005.
- [17] BARONE, F.A.; BARONE, F.E. Field theoretic description of electromagnetic boundaries. *The European Physical Journal C*, **74**(3113), 2014. Particles and Fields.
- [18] BARONE, F.A.; BARONE, F.E. Field theoretic description of partially reflective surfaces. *Phys. Rev. D*, **89**(065020), Mar 2014.
- [19] OLIVEIRA, H.L. de. Modelos tipo chern-simons para a descrição de fronteiras materiais. Master's thesis, UNIFEI, 2011.
- [20] CAMILO, G.T.; BARONE, F.A.; BARONE, F.E. Interactions between delta-like sources and potentials. *Phys. Rev. D*, **87**(025011), Jan 2013.
- [21] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [22] GRADSHTEYN, I. S. and RYZHIK, I.M. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [23] Michio Kaku. *Quantum field theory*. Oxford University Press Oxford, 1993.