

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Modelo cosmológico de FLRW com constante
cosmológica e dominado por um fluido de Yang-Mills**

Adriano Braga Barreto

Itajubá, Abril de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Adriano Braga Barreto

**Modelo cosmológico de FLRW com constante
cosmológica e dominado por um fluido de Yang-Mills**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Gravitação e Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Abril de 2012

Itajubá – MG

Aos meus pais, Oziel e Cremilda, que me garantiram o suficiente, e me forneceram o necessário, para que eu pudesse alcançar o que eles sequer sonharam.

Agradecimentos

Ao orientador, professor Vitorio A. De Lorenci, agradeço por me ensinar não somente a ter uma postura científica, mas também uma boa conduta humana. Buscando sempre ficar bem ajudando os demais a ficar bem também, criando assim uma ótima atmosfera de trabalho e convívio. Um professor esplêndido, um pesquisador formidável e um ser humano inspirador;

Aos meus familiares e velhos amigos agradeço pela admiração superestimada, mas que me incentivou forças para não decepcioná-los. Em especial gostaria de agradecer a existência de Carlene Braga, Cláudio Pascoal e Paulo Henrique Teixeira da Silva (Ph), prima e amigos, os quais tenho vínculos de amizade inquebráveis. Em especial também agradeço a Gabriella Costa por me irritar com suas objeções científicas e por, segundo ela, ter mudado minha vida ao me presentear com a biografia de Albert Einstein;

Aos professores do programa de mestrado em física e matemática aplicada da UNIFEI eu agradeço pela competência com que nos foi mostrada as disciplinas acadêmicas, os seminários e as boas conversas que renderam não somente um direcionamento científico, mas também garantiram boas gargalhadas. Em especial agradeço ao professor Fabrício A. Barone Rangel pelos esforços quase sobre-humanos na coordenação do programa para nos deixar confortáveis para nos preocupar apenas com nossos estudos. Agradeço em especial também ao professor Edisom de Souza Moreira Jr. por me mostrar que podemos crescer quando queremos e que as adversidades são placas de sinalização, e não obstáculos, em nosso caminho;

Aos colegas, novos amigos, agradeço as ajudas fornecidas não somente nos estudos, mas também no clima agradável de irmandade, completando o vazio sentido pelos amigos que estavam distantes. Tenho certeza que as amizades que fiz nessa fase da minha vida se

perpetuarão, e por isso quero deixar aqui registrado os nomes dos meus amigos: Anderson Antunes Nogueira, Cleuber Pereira Ramos (Clê-Clê), Edson do Nascimento Neres Júnior (Pelé), Fernando Félix Oliveira e Silva, Fernando Soares Guimarães, Franco Bassi Rocha (Bombeta), Giancarlo Thales Camilo da Silva (Bichão), Hemily Gomes Marciano, Hugo Costa Pereira e Souza, Jonas Pereira (o qual travo boas discussões sempre com um humor requintado), Marco Aparecido de Brito, Maria Fernanda Xavier Pinto Medeiros, Marina Machado Cunha e Mello, Carlos (namorado da Marina), Marlon Marques da Silva (Pinduca), Warley Mendes Batista (Fofo), Will Robson Monteiro Rocha (Willzinho) e todas as pessoas que conheci nos eventos realizados no restaurante da Néia e nos saudosos bares de Itajubá. Em especial agradeço aos amigos com quem dividi a república junto com Gian, Marlon, Ph e Will, os inenarráveis Lucas Rafael (Piran) e Wander Costa;

Por fim, agradeço ao Programa de Mestrado em Física e Matemática Aplicada da UNIFEI, em especial a secretária do programa, Claudia Ribeiro Gama, que sempre me atendeu com um sorriso no rosto. Agradeço também aos cafezinhos do ICE que nos foi dado com ou sem consentimento, assim como a própria UNIFEI e CAPES pelos auxílios financeiros concedidos.

*Beyond the horizon of the place we lived when we were young
In a world of magnets and miracles
Our thoughts strayed constantly and without boundary
The ringing of the division bell had begun.*

David Gilmour

Resumo

O acoplamento mínimo entre a gravidade e campos de Yang-Mills é investigado no modelo cosmológico, homogêneo e isotrópico, de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, com constante cosmológica positiva ($\Lambda_0 > 0$) e preenchido com um campo de Yang-Mills. O modelo proposto seria aplicável a um estágio primário do universo, onde sua densidade de energia espera-se ser grande. Soluções apresentando uma fase de expansão acelerada são obtidas em um modelo de universo com seção espacial plana. Estas soluções tornam-se singular ou não-singular dependendo da magnitude de alguns parâmetros. A motivação para essa abordagem se baseia nos dados observacionais indicando uma constante cosmológica positiva, mesmo com magnitude muito pequena, e uma seção espacial plana.

Palavras-chave: Relatividade Geral, Universo primordial, Modelos Cosmológicos de FLRW, Fluido de Yang-Mills.

Abstract

The minimal coupling between gravity and Yang-Mills fields is investigated in the homogeneous and isotropic Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker cosmological model with positive cosmological constant ($\Lambda_0 > 0$) and filled with a Yang-Mills field. The proposed model would be applicable to a primary stage of the universe, where its energy density is expected to be large. Solutions presenting a phase of accelerated expansion are obtained in an universe model with flat spatial section. These solutions turn out to be singular or non-singular depending on the magnitude of some parameters. The motivation for this approach relies on the observational data indicating a positive cosmological constant, even with very small magnitude, and a spatial section flat.

Keywords: General Relativity, Very early universe, Friedmann Cosmology, Yang-Mills fluid.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | ii |
| Resumo | v |
| Abstract | vi |
| Conteúdo | vii |
| Lista de Figuras | ix |
| Introdução | 1 |
| 1 Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker | 5 |
| 1.1 Quantidades cinemáticas | 6 |
| 1.2 Evolução das quantidades cinemáticas | 9 |
| 1.2.1 Evolução do fator de expansão Θ | 11 |
| 1.3 Distribuição de energia do fluido | 12 |
| 1.3.1 Conservação do Tensor Momentum-Energia | 13 |
| 1.4 Equação de Raychaudhuri | 14 |
| 1.5 A geometria de Robertson-Walker | 16 |
| 1.5.1 Equação de Friedmann | 19 |
| 2 Conteúdo de matéria-energia do modelo | 20 |
| 2.1 Tensor momento-energia de uma lagrangeana com um parâmetro | 20 |
| 2.2 Lagrangeana Efetiva de Yang-Mills | 24 |
| 2.3 Quantidades Dinâmicas do Fluido de Yang-Mills | 27 |
| 3 Comportamento do fator de escala $A(t)$ | 32 |
| 3.1 Universo Magnético | 33 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.1.1 | Universo Magnético com seção espacial plana | 35 |
| 3.1.2 | Relação entre os parâmetros da teoria e o comportamento de $A(t)$. | 46 |
| | Conclusões | 48 |
| | Bibliografia | 50 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo magnético ($\xi = 0.0$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$ | 29 |
| 2.2 | Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo quasi-magnético ($\xi = 0.1$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$ | 29 |
| 2.3 | Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo semi-magnético ($\xi = 0.5$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$ | 30 |
| 2.4 | Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo quasi-radiação ($\xi = 0.9$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$ | 30 |
| 3.1 | Ao lado de cada curva está a função de A_0 a qual ela está associada. Denominamos por I, II e III, os casos para $a > 2e\Lambda_0/3$, $a = 2e\Lambda_0/3$ e $a < 2e\Lambda_0/3$, respectivamente. Os pontos onde as curvas I, II, ou III interceptam a curva que representa b/A_0^2 , são os pontos de equilíbrio dados pela Eq.(3.16) (Tomamos $b = 1$). | 36 |
| 3.2 | Ao lado de cada curva está o valor usado para Λ_0 . Tomamos $a = eb^2\Lambda_0/3$ e $b = 1$ | 38 |
| 3.3 | Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana sem soluções estacionárias ($a < 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ | 39 |
| 3.4 | Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana sem soluções estacionárias ($a < 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $a = eb^2\Lambda_0/3$, $b = \Lambda_0 = 1$ | 40 |

3.5 Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). A linha tracejada representa a solução de equilíbrio A_0 , enquanto que as curvas acima e abaixo de A_0 representam as soluções numéricas de A_0^+ e A_0^- respectivamente. Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ 42

3.6 Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e a condição inicial $A(t) = A_0^- < A_0$ 43

3.7 Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e a condição inicial $A(t) = A_0^+ > A_0$ 44

3.8 Comportamento de \dot{A} a medida que $A(t)$ cresce a partir de uma singularidade, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana e duas soluções estacionária ($a > 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e $a = 4eb^2\Lambda_0/3$. 44

3.9 Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana e duas soluções estacionárias ($a > 2eb^2\Lambda_0/3$). As retas em vermelho representam as soluções de equilíbrio A_0^a e A_0^b , enquanto que as curvas abaixo de A_0^a e acima de A_0^b representam as soluções numéricas de $A(0) < A_0^a$ e $A(0) > A_0^b$, respectivamente. Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e $a = 4eb^2\Lambda_0/3$ 45

Introdução

As descobertas realizadas na ciência moderna são acusadas de retirar da humanidade o status de centro do universo. Porém a humanidade aprendeu com essas descobertas a ser tão ardilosa quanto aparentemente é o universo e decidiu que se ela não é o centro do universo, logo ninguém mais seria, e assim adotou o Princípio Cosmológico, a hipótese de que todas as posições no universo são essencialmente equivalentes, numa dada época [1]. Ou seja, o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico. É bem verdade, no entanto, que essa é uma valiosa hipótese de trabalho. A importância está em poder estender as observações feitas sob nossa perspectiva para o universo como um todo, tornando possível assim o teste observacional de modelos cosmológicos [2]. Esta é uma via de mão dupla, posto que sendo o universo o objeto de estudo da cosmologia, e tendo definido universo como tudo que existe, logo o estudo sobre a estrutura do universo, como um todo, pode implicar no entendimento de fenômenos locais. Como em um quebra-cabeça quando se torna necessário o vislumbre da imagem completa para se determinar o encaixe correto das peças, das quais temos pouca informação.

Recentemente (no final do Século XX), o princípio cosmológico foi firmado pelos dados observacionais, deixando assim de ser apenas uma hipótese inteligente e se tornando uma boa aproximação sustentada pelos experimentos. Tais dados mostram um universo que se apresenta homogêneo e isotrópico em largas escalas, acima de 100Mpc ($1\text{Mpc} \simeq 3,08 \times 10^{24}\text{cm}$), contudo, segundo a teoria inflacionária, o universo torna-se altamente inhomogêneo quando visto em escalas muito maiores do que o trecho observável, na ordem de 3.000Mpc [2]. Em escalas menores existem consideráveis inhomogeneidades tais como superaglomerados de galáxias. Dessa forma o princípio cosmológico parece válido dentro de um intervalo limitado de escala. Note porém que as inhomogeneidades estão associadas a grandes estruturas de matéria-energia. Contudo, ao se investigar o universo numa era onde o conteúdo dominante de matéria-energia se apresenta constituído de entes que interagem muito fra-

camente, podemos esperar que o universo seja, em essência, homogêneo e isotrópico. Levantamos esta questão, pois estamos interessados em tratar aqui o universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que é homogêneo e isotrópico, numa fase de intensa densidade, onde a formação de grandes estruturas é inviabilizada enquanto valer o regime de altas energias, ao qual os constituintes da matéria estão submetidos. É muito comum na literatura denominar este estágio de intensa densidade por *universo primordial* (no inglês, *the very early universe*). Achemos importante fazer um esclarecimento a respeito do termo “primordial” na denominação desse estágio do universo, visto que ele atribui um caráter de *inicial* ao estágio. A questão da existência de uma singularidade que atribui ao universo uma origem ainda é algo em aberto na cosmologia relativística e tem tantos defensores quanto opositores, igualmente competentes, tentando respondê-la. No entanto, durante boa parte da segunda metade do século XX a hipótese da existência de uma singularidade ganhou *status* de teoria comprovada a qual recebeu o nome de *Teoria do Big Bang* [3]. No modelo padrão da cosmologia, o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître [4, 5], descrito pela geometria de Robertson-Walker [6, 7] com a eletrodinâmica como fonte, leva a uma singularidade em um tempo finito no passado [8]. Denominaremos os estágios logo após essa origem como fases primordiais do universo. Neste domínio, o universo apresenta-se extremamente denso, ocasionando uma curvatura do espaço-tempo extremamente grande. Isso sugere que tal cenário escapa do escopo de previsão da Teoria da Relatividade Geral. Espera-se, portanto, que a formulação de uma teoria quântica para a gravidade, que considere efeitos quânticos relevantes nesta situação, possa esclarecer a questão da singularidade e abrir uma nova janela para a investigação do que há antes desse suposto ponto de mínimo volume do universo. Então quando nos referimos ao universo primordial, estamos em essência tratando do universo em uma fase de extrema densidade, muito próxima do domínio onde as previsões da teoria da relatividade começam a titubear a amizade entre cosmólogos favoráveis e contrários a singularidade primordial.

As propostas de soluções cosmológicas sem singularidade levam o sugestivo nome de *soluções não-singulares* e estão ganhando cada vez mais espaço nas pesquisas sobre a estrutura do universo, reiterando o status da teoria do Big Bang como uma hipótese apenas. A maioria das soluções não-singulares descrevem um universo que colapsa até atingir um volume mínimo no qual fenômenos quânticos seriam responsáveis por incitar uma evolução para um fase de expansão [8]. Tais soluções são chamadas *bouncing cosmology*

[9] e podem ser obtidas ao se considerar mecanismos como, por exemplo, acoplamento não-mínimo da gravidade com os campos de matéria [10], lagrangeanas não-lineares envolvendo termos quadráticos na curvatura [11], termodinâmica fora do equilíbrio [12], entre outros. Recentemente foram feitas propostas onde um fluido de Yang-Mills, sendo a forma de matéria dominante no regime do universo primordial, é a fonte de uma cosmologia inflacionária e de uma expansão acelerada da seção espacial do universo [8, 13, 14, 15]. Tais propostas se valeram de um tratamento de acoplamento mínimo entre gravidade e os campos envolvidos e consideram a constante cosmológica nula. A motivação para se considerar esse fluido como conteúdo dominante no universo primordial está no fato deste ser uma fase da cromodinâmica quântica (QCD), uma teoria que trata das interações entre quarks e gluons, elementos fundamentais da matéria (até agora), existente no regime de altas energias e/ou densidades onde esses quarks e gluons interagiriam apenas fracamente sendo assintoticamente livres. Tal regime é exatamente como se espera ser o universo numa fase primordial [2]. Dados observacionais indicam a existência de uma expansão acelerada atual do universo [2, 16]. No entanto, esperava-se uma expansão desacelerada pela gravidade, que é uma interação atrativa. Com isso, foi atribuído à energia escura a causa dessa aceleração medida, e busca-se entender o que é a energia escura, a qual constituiria uma parte majoritária do universo observável. A possibilidade de realizar medidas de caráter cosmológico possibilitou a cosmologia o merecido status de ciência [3], além de nortear e restringir a pluralidade de soluções obtidas dos modelos de universo. Dentre estas medidas estão os dados do *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) que impõe várias restrições para os modelos que descrevem uma fase inflacionária [17, 18], favorecendo modelos com seção espacial plana, já que as medidas sugerem que o parâmetro de densidade total do universo, Ω_0 é aproximadamente 1. O parâmetro de densidade total do universo é uma quantidade adimensional definida como a razão entre a densidade total do universo e a densidade crítica que tornaria o universo plano, $\Omega_0 = \rho_{univ}/\rho_{cr}$. Além dessa indicação em relação a seção espacial temos ainda que observações do redshift de supernovas tipo Ia sugerem uma constante cosmológica positiva ($\Lambda_0 > 0$) [19], que embora seja esperado ter pequena magnitude $\Lambda_0 \simeq 10^{-55} cm^{-2}$, torna-se substancial em escalas cosmológicas.

Dessa maneira, buscamos neste trabalho considerar uma constante cosmológica positiva dentro da linha de investigação desenvolvida na Ref. [8], ao se considerar um acoplamento

mínimo entre campos efetivos de Yang-Mills e gravidade, motivado pela expectativa que o QGP seja uma boa idealização para o fluido dominante no cenário do universo primordial.

Organizamos este trabalho apresentando no Capítulo 1 uma revisão da teoria da relatividade geral aplicada ao modelo de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), obtendo as equações da dinâmica deste modelo. No Capítulo 2 tratamos de apresentar brevemente a lagrangeana que descreve o QGP e derivamos dela o tensor momento-energia do fluido, e conseqüentemente as quantidades dinâmicas relevantes no modelo. De posse destes resultados, fazemos no Capítulo 3 um estudo gráfico para as soluções das equações que obtemos nos capítulos anteriores atrelando o QGP à dinâmica do modelo FLRW. Por fim são feitas algumas considerações dos resultados interpretados nas análises gráficas das soluções. Foram usadas *unidades normais*, $G = \hbar = c = k_B = 1$, com o intuito de aliviar notação. Índices gregos variam de 0 a 3, indicando coordenadas espaçotemporais, enquanto que índices latinos variam de 1 a 3.

Capítulo 1

Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Apresentaremos neste capítulo uma breve revisão sobre os principais pontos do modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), onde aplicaremos as ferramentas matemáticas da teoria da relatividade geral para obter a sua dinâmica. Na Seção 1.1 tratamos de obter as quantidades cinemáticas medidas por uma classe de observadores identificados pelo campo de vetores tangentes a uma curva do espaço-tempo. Definidas tais quantidades, na Seção 1.2 obtemos uma expressão geral para a evolução das mesmas, onde focamos nossa atenção numa expressão para a evolução do fator de expansão, que apresentamos no final da Subseção 1.2.1. Na Seção 1.3 a distribuição de energia-matéria do universo é representada pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, que por sua vez é decomposto e expresso em termos das suas partes irredutíveis. A equação para a conservação da energia de um fluido arbitrário é obtida em termos das quantidades decompostas de $T_{\mu\nu}$ na Sub-seção 1.3.1. De posse das expressões derivadas de $T_{\mu\nu}$, as equações de campo de Einstein são utilizadas com o intuito de obter uma expressão para a evolução do fator de expansão em termos das quantidades cinemáticas e dinâmicas medidas pelo observador v^μ . Tal equação, chamada de Equação de Raychaudhuri, é apresentada na Seção 1.4. Finalmente, na Seção 1.5 derivamos o elemento de linha da métrica de Robertson-Walker, e dessa forma especificamos o modelo de trabalho como o modelo FLRW obtendo então a forma da equação de evolução do fator de expansão e da conservação da energia, dentro do

contexto imposto pelo modelo. O resultado será a equação de Friedmann com constante cosmológica não-nula.

1.1 Quantidades cinemáticas

Todo processo de descrição de sistemas físicos requer a realização de medidas, que por sua vez são feitas por uma determinada classe de observadores. Portanto, para descrever as propriedades físicas do universo é necessário caracterizar cinematicamente e dinamicamente a classe de observadores que realizam as medidas [20]. Primeiramente, sendo estes observadores necessariamente dotados de propriedades materiais eles devem ser quantidades tipo-tempo. Seja $v^\mu \doteq dx^\mu(\tau)/d\tau$ um campo de vetores tipo-tempo tangentes a linha de universo de partículas materiais, onde o parâmetro afim τ é o tempo próprio ($ds^2 = d\tau^2$), podemos identificar uma classe de observadores materiais movendo-se com esta velocidade v^μ . Consequentemente, teremos $v^\mu v_\mu$ normalizado, ou seja

$$g^{\mu\nu} v_\mu v_\nu \equiv v^\nu v_\nu = 1. \quad (1.1)$$

Em cada ponto do espaço-tempo, o quadrivetor velocidade v^μ , por ser um campo de vetores tangentes a este ponto, define um subespaço tridimensional constituído de vetores ortogonais a v^μ [20]. Chamaremos este espaço tridimensional de *hipersuperfície* Σ . A hipersuperfície Σ representa o que entendemos simplesmente por *espaço 3-d*, portanto é em Σ que a classe de observadores mede quantidades tipo-espaço.

Note que o tensor

$$h_{\mu\nu} \doteq g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu, \quad (1.2)$$

pode ser chamado de Tensor de Projeção em Σ (ou simplesmente *projetor*), já que ele atua projetando vetores do espaço-tempo sobre Σ . Comprova-se isso atentando que a quantidade $h_{\mu\nu} v^\nu = 0$, e também que para um dado vetor arbitrário A^ν , temos que $v^\mu (h_{\mu\nu} A^\nu) = 0$. Portanto, a quantidade A^μ_\perp definida como

$$A^\mu_\perp \doteq h^\mu_\nu A^\nu, \quad (1.3)$$

é a componente do vetor arbitrário A^μ na direção perpendicular a v^μ [21], ou a projeção de A^μ em Σ . Além disso, como consequência das definições acima, temos que

$$g_{\mu\nu} A^\mu_\perp B^\nu_\perp \equiv h_{\mu\nu} A^\mu_\perp B^\nu_\perp, \quad (1.4)$$

onde B_{\perp}^{ν} , assim como A_{\perp}^{μ} , é a projeção de um vetor arbitrário B^{ν} em Σ . Concluimos portanto que $h_{\mu\nu}$ desempenha o papel de tensor métrico no subespaço tridimensional que denotamos por hipersuperfície Σ [21]. É imediato demonstrar que $h_{\mu\nu}$ satisfaz a propriedade matemática de um projetor, a saber,

$$h_{\mu\alpha}h^{\alpha}_{\nu} \equiv g_{\mu\nu} - v_{\mu}v_{\nu} = h_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Este tensor de projeção nos será útil para determinar o movimento do meio contínuo (fluido cósmico) que constitui o universo. Para tanto, considere uma região aberta do espaço-tempo na qual se encontram um conjunto de curvas. A este conjunto de curvas damos o nome de congruências. Quando esta congruência é composta de curvas que representam o movimento de partículas não-interagentes, por caminhos que não se interceptam, no espaço-tempo, ou seja, quando as curvas são as geodésicas dos pontos na região aberta do espaço-tempo, damos o nome de *congruência de geodésicas* [22]. Então, seja γ uma congruência de curvas parametrizadas em τ , na qual cada curva intercepta a hipersuperfície Σ em um ponto arbitrário, e seja η^{μ} um vetor que conecta duas curvas vizinhas, com o mesmo parâmetro afim, na congruência (não necessariamente ortogonal às curvas) [20]. Desse modo, para que η^{μ} não varie ao longo de v^{μ} , a derivada de Lie de η^{μ} com respeito a v^{μ} é nula, ou seja

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\eta) \doteq \eta^{\alpha}_{;\mu}v^{\mu} - v^{\alpha}_{;\mu}\eta^{\mu} = 0. \quad (1.6)$$

Isso implica que

$$\eta^{\alpha}_{;\mu}v^{\mu} = v^{\alpha}_{;\mu}\eta^{\mu}. \quad (1.7)$$

Portanto, sendo η^{μ} o vetor que separa duas curvas da congruência em relação a um valor do parâmetro τ em comum, tomaremos a derivada absoluta de η^{μ} para conhecer sua variação ao longo da congruência

$$\dot{\eta}^{\mu} \doteq \frac{D\eta^{\mu}}{d\tau} \equiv \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{D\eta^{\mu}}{dx^{\nu}} = v^{\nu}\eta^{\mu}_{;\nu}. \quad (1.8)$$

Usando a Eq.(1.7) teremos

$$\dot{\eta}^{\mu} = v^{\mu}_{;\nu}\eta^{\nu}, \quad (1.9)$$

como η^{μ} não necessariamente pertence a Σ , podemos obter a distância de dois pontos sobre Σ que são respectivamente interceptados por duas curvas vizinhas da congruência γ , medido pelo observador v^{μ} , projetando η^{μ} em Σ . Ou seja,

$$\eta_{\perp}^{\mu} = h^{\mu}_{\nu}\eta^{\nu}. \quad (1.10)$$

Para obter a variação entre a distância destes dois pontos no decorrer da congruência, que denotaremos simplesmente por $V_{(rel)}^\alpha$, devemos atuar com o projetor $h_{\mu\nu}$ no resultado da derivada da componente de η^μ em Σ , dada pela Eq.(1.10). Teremos então que,

$$V_{(rel)}^\alpha = h^\alpha_\nu v^\nu_{;\beta} \eta^\beta. \quad (1.11)$$

A Eq.(1.11) mostra que é possível encontrar a variação da distância entre dois pontos, referente a interceptação em Σ de duas curvas vizinhas da congruência γ , através de uma transformação linear sobre o vetor de conexão η^μ [20]. Logo podemos escrever,

$$V_{(rel)}^\alpha = Q^\alpha_\mu \eta^\mu, \quad (1.12)$$

onde definimos o tensor $Q_{\mu\nu}$ como,

$$Q^\alpha_\mu \doteq h^\alpha_\nu h^\beta_\mu v^\nu_{;\beta}. \quad (1.13)$$

No tensor $Q_{\mu\nu}$ está a informação da variação da distância entre pontos vizinhos situados em Σ , medidos pela classe de observadores identificados por v^μ . Como qualquer outro tensor de rank 2, pode-se decompor os tensores nas suas partes irredutíveis, ou seja, em uma parte simétrica e outra antissimétrica. A parte simétrica pode ainda ser separada em uma parte com traço e outra sem traço. Dessa forma o tensor $Q_{\mu\nu}$ decomposto nas partes irredutíveis é dado por

$$Q_{\mu\nu} = \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

onde definimos as quantidades cinemáticas:

- $\Theta \Rightarrow$ Traço de $Q_{\mu\nu}$ (fator de expansão);
- $\sigma_{\mu\nu} \Rightarrow$ parte simétrica de $Q_{\mu\nu}$ com traço nulo (*shear* ou cisalhamento);
- $\omega_{\mu\nu} \Rightarrow$ parte antissimétrica de $Q_{\mu\nu}$ (vorticidade).

Logo, de posse dessa definição, podemos evidenciar cada uma dessas quantidades como segue

$$\Theta = h^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu} + Q_{\nu\mu}) - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}) = \frac{1}{2} Q_{[\mu\nu]}. \quad (1.17)$$

Assim as quantidades cinemáticas podem ser expressas em função do quadri vetor v^μ e do tensor de projeção $h_{\mu\nu}$ usando a definição da Eq.(1.13) nas Eqs.(1.15, 1.16, 1.17), obtendo então

$$\Theta = v^\beta_{;\beta}, \quad (1.18)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^\alpha_{(\mu}h^\lambda_{\nu)}v_{\alpha;\lambda} - \frac{1}{3}\Theta h_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h^\alpha_{[\mu}h^\lambda_{\nu]}v_{\alpha;\lambda}. \quad (1.20)$$

1.2 Evolução das quantidades cinemáticas

Agora que estabelecemos as quantidades cinemáticas, vamos encontrar uma expressão para a evolução do fator de expansão Θ ao longo da congruência γ . O comportamento do fator de expansão é imprescindível no estudo de modelos cosmológicos, pois está atrelado a dinâmica da seção espacial do universo. Nesse intuito, iniciaremos derivando uma expressão conveniente para a evolução de $Q_{\mu\nu}$.

Da definição de $Q_{\mu\nu}$, dada na Eq.(1.13), e de $h_{\mu\nu}$, dado na Eq.(1.2), teremos que

$$Q_{\mu\nu} = v_{\mu;\nu} - v_{\mu;\beta}v^\beta v_\nu - v_{\alpha;\nu}v^\alpha v_\mu + v^\alpha v_\mu v^\beta v_\nu v_{\alpha;\beta}. \quad (1.21)$$

Note que,

$$v^\mu_{;\nu}v^\nu \equiv \frac{Dv^\mu}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{Dv^\mu}{d\tau} = \dot{v}^\mu \doteq a^\mu, \quad (1.22)$$

onde a^μ é o quadri vetor aceleração. Portanto $Q_{\mu\nu} = v_{\mu;\nu} - a_\mu v_\nu$, pois $a^\mu v_\mu = 0$, logo podemos escrever,

$$v_{\mu;\nu} = Q_{\mu\nu} + a_\mu v_\nu. \quad (1.23)$$

Por definição, o tensor de curvatura $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ é tal que

$$v_{\alpha;\beta\nu} - v_{\alpha;\nu\beta} = R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu. \quad (1.24)$$

Contraindo a Eq.(1.24) com v^ν , teremos

$$v_{\alpha;\beta\nu}v^\nu - v_{\alpha;\nu\beta}v^\nu = R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.25)$$

Note que, $v_{\alpha;\beta\nu} \equiv (v_{\alpha;\beta})_{;\nu}$, logo análogo a Eq.(1.22) podemos escrever

$$v_{\alpha;\beta\nu}v^\nu \equiv (v_{\alpha;\beta})_{;\nu}v^\nu = \frac{D}{d\tau}(v_{\alpha;\beta}) \equiv \dot{(v_{\alpha;\beta})}. \quad (1.26)$$

Portanto

$$(v_{\alpha;\beta})^\cdot - v_{\alpha;\nu\beta}v^\nu = R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.27)$$

Mas como $v_{\alpha;\nu\beta}v^\nu \equiv (v_{\alpha;\nu}v^\nu)_{;\beta} - v_{\alpha;\nu}v^\nu_{;\beta}$, logo $v_{\alpha;\nu\beta}v^\nu = (\dot{v}_\alpha)_{;\beta} - v_{\alpha;\nu}v^\nu_{;\beta} = a_{\alpha;\beta} - v_{\alpha;\nu}v^\nu_{;\beta}$.

Desse modo obtemos que a Eq.(1.27) ficará

$$(v_{\alpha;\beta})^\cdot - a_{\alpha;\beta} + v_{\alpha;\nu}v^\nu_{;\beta} = R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.28)$$

Projetado em Σ fornece,

$$h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta [(v_{\alpha;\beta})^\cdot - a_{\alpha;\beta} + v_{\alpha;\nu}v^\nu_{;\beta}] = h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu, \quad (1.29)$$

onde podemos substituir $v_{\alpha;\beta}$ usando o resultado da Eq.(1.23), obtendo

$$h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta [(Q_{\alpha\beta} + a_\alpha v_\beta)^\cdot - a_{\alpha;\beta} + (Q_{\alpha\nu} + a_\alpha v_\nu)(Q_\beta^\nu + a^\nu v_\beta)] = h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.30)$$

Esta expressão pode ser consideravelmente reduzida notando que o tensor $Q_{\mu\nu}$, sendo um elemento da hipersuperfície Σ , é ortogonal a v^μ , dessa forma, além dos termos contendo o produto $a^\mu v_\mu$, os termos contendo o produto $Q_{\mu\nu}v^\mu$ também serão nulos. Logo, após identificarmos os termos nulos, iremos obter a expressão

$$h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta \dot{Q}_{\alpha\beta} + h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta a_\alpha a_\beta - h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta a_{\alpha;\beta} + h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta Q_{\alpha\nu}Q_\beta^\nu = h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.31)$$

No lado direito da igualdade da expressão acima, temos a atuação dos tensores de projeção no tensor de curvatura, o qual fornece,

$$h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu = R_{\epsilon\mu\lambda\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.32)$$

Portanto obtemos,

$$h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta \dot{Q}_{\alpha\beta} + a_\epsilon a_\lambda - h_\epsilon^\alpha h_\lambda^\beta a_{\alpha;\beta} + Q_{\epsilon\nu}Q_\lambda^\nu = R_{\epsilon\mu\lambda\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.33)$$

Note que como o projetor $h_{\mu\nu}$ atua nas quantidades que vivem em Σ de forma análoga a atuação do tensor métrico nas quantidades da variedade (no nosso caso, o espaço-tempo), logo a Eq.(1.32) nos sugere que a quantidade $R_{\alpha\mu\beta\nu}v^\mu v^\nu$ vive em Σ . Contudo as derivadas dessas quantidades, que vivem em Σ , não necessariamente pertencem a Σ . Com a Eq.(1.33) podemos obter a equação de evolução de qualquer uma das quantidades cinemáticas derivadas do $Q_{\mu\nu}$. Porém, como será visto no que segue, a única quantidade cinemática que teremos interesse será o fator de expansão, pois no contexto do nosso estudo as demais quantidades são nulas.

1.2.1 Evolução do fator de expansão Θ

Dada a Eq.(1.33), podemos obter a equação de evolução do fator de expansão Θ ao longo da congruência γ , ou seja, uma equação que determina a dinâmica da seção espacial Σ . Para tanto, precisamos contrair os índices ϵ e λ da Eq.(1.33) para obter uma expressão associada a um escalar (um tensor de ordem zero), logo

$$g^{\epsilon\lambda}(h^\alpha_\epsilon h^\beta_\lambda \dot{Q}_{\alpha\beta} + a_\epsilon a_\lambda - h^\alpha_\epsilon h^\beta_\lambda a_{\alpha;\beta} + Q_{\epsilon\nu} Q^\nu_\lambda) = g^{\epsilon\lambda} R_{\epsilon\mu\lambda\nu} v^\mu v^\nu. \quad (1.34)$$

Atuando com o tensor métrico $g^{\epsilon\lambda}$, contraindo os tensores de projeção com índices somados e usando a definição do tensor de Ricci, no qual $R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu}$, obtemos

$$h^{\alpha\beta} \dot{Q}_{\alpha\beta} + a_\epsilon a^\epsilon - h^{\alpha\beta} a_{\alpha;\beta} + Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \quad (1.35)$$

mas $h^{\alpha\beta} \dot{Q}_{\alpha\beta} = (h^{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta})^\cdot - (h^{\alpha\beta})^\cdot Q_{\alpha\beta}$, logo da Eq.(1.15) teremos

$$h^{\alpha\beta} \dot{Q}_{\alpha\beta} = \dot{\Theta} - Q_{\alpha\beta}(-v^\alpha a^\beta - v^\beta a^\alpha) = \dot{\Theta}, \quad (1.36)$$

pois $Q_{\alpha\beta} v^\alpha = Q_{\alpha\beta} v^\beta = 0$. Então a Eq.(1.35) fica

$$\dot{\Theta} + a_\epsilon a^\epsilon - h^{\alpha\beta} a_{\alpha;\beta} + Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (1.37)$$

Ou seja, já temos em mãos uma expressão com o termo de evolução do fator de expansão Θ medido pela classe de observadores identificado com v^μ , ao longo da congruência de curvas parametrizadas no tempo-próprio τ , porém ainda podemos fazer algumas manipulações a fim de deixar essa expressão em termos das outras quantidades cinemáticas. Atuando o tensor $h^{\alpha\beta}$ que aparece na Eq.(1.37), segundo sua definição, teremos

$$\dot{\Theta} + a_\epsilon a^\epsilon - a^\beta_{;\beta} + a_{\alpha;\beta} v^\alpha v^\beta + Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (1.38)$$

Sendo que $a_{\alpha;\beta} v^\beta = \dot{a}_\alpha$, logo

$$a_{\alpha;\beta} v^\beta v^\alpha \equiv \dot{a}_\alpha v^\alpha = (a_\alpha v^\alpha)^\cdot - a_\alpha a^\alpha = -a_\alpha a^\alpha. \quad (1.39)$$

Portanto a Eq.(1.37) se reduz a

$$\dot{\Theta} - a^\beta_{;\beta} + Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (1.40)$$

O termo $Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon}$ é calculado em termos da decomposição em partes irreduzíveis dada pela Eq.(1.14). teremos,

$$Q_{\epsilon\nu} Q^{\nu\epsilon} = \frac{\Theta^2}{9} h_{\epsilon\nu} h^{\nu\epsilon} + \frac{\Theta}{3} h_{\epsilon\nu} (\sigma^{\nu\epsilon} + \omega^{\nu\epsilon}) + \frac{\Theta}{3} h^{\epsilon\nu} (\sigma_{\nu\epsilon} + \omega_{\nu\epsilon}) + \sigma_{\epsilon\nu} \sigma^{\nu\epsilon} + \omega_{\epsilon\nu} \omega^{\nu\epsilon}. \quad (1.41)$$

Como $\sigma^{\nu\epsilon}$ e $\omega^{\nu\epsilon}$ pertencem a Σ , pois pela Eq.(1.16) e Eq.(1.17) podemos verificar que

$$\sigma^{\nu\epsilon}v_\nu = \omega^{\nu\epsilon}v_\nu = 0, \quad (1.42)$$

e assim o tensor $h_{\nu\epsilon}$ atuará levantando e/ou baixando seus índices. Além disto, é importante lembrar que $h_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$ são simétricos e $\omega_{\mu\nu}$ é antissimétrico. Logo

$$Q_{\epsilon\nu}Q^{\nu\epsilon} = \frac{\Theta^2}{3} + \frac{2\Theta}{3}(\sigma^\epsilon_\epsilon + \omega^\epsilon_\epsilon) + \sigma_{\epsilon\nu}\sigma^{\epsilon\nu} - \omega_{\epsilon\nu}\omega^{\epsilon\nu}. \quad (1.43)$$

Mas por definição, os traços de $\sigma_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$ são nulos. Deste modo, obtemos que

$$Q_{\epsilon\nu}Q^{\nu\epsilon} = \frac{\Theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2), \quad (1.44)$$

onde definimos σ^2 e ω^2 como

$$\sigma^2 \doteq \frac{1}{2}\sigma_{\epsilon\nu}\sigma^{\epsilon\nu}, \quad (1.45)$$

$$\omega^2 \doteq \frac{1}{2}\omega_{\epsilon\nu}\omega^{\epsilon\nu}. \quad (1.46)$$

Usando o resultado da Eq.(1.44) na Eq.(1.40) obtemos a seguinte expressão para a evolução do fator de expansão ao longo da congruência

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a^\beta_{;\beta} = R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \quad (1.47)$$

Veremos que quando usamos as equações de campo de Einstein para substituir o lado direito da igualdade está expressão se torna a chamada *equação de Raychaudhuri* [20], que considera explicitamente as quantidades dinâmicas do fluido na evolução de Θ .

1.3 Distribuição de energia do fluido

Um dos aspectos mais fundamentais da cosmologia relativística é que a gravidade é interpretada pela Teoria da Relatividade Geral como uma curvatura do espaço-tempo causada pela distribuição de matéria-energia do fluido cósmico, que por sua vez é completamente representado pelo Tensor Momentum-Energia $T_{\mu\nu}$ [20]. De modo geral, uma classe de observadores identificados com v^μ irá decompor o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ em suas partes irreduzíveis como segue

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} v_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

onde,

- ρ é a densidade de energia total do fluido;
- p é a pressão isotrópica;
- q^μ é o vetor fluxo de calor;
- $\pi^{\mu\nu}$ é o tensor pressão não-isotrópica.

Com os seguintes vínculos sendo satisfeitos pelos tensores q^μ e $\pi^{\mu\nu}$,

$$q_\mu v^\mu = 0, \quad (1.49)$$

$$\pi_{\mu\nu} v^\nu = 0, \quad (1.50)$$

$$\pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \quad (1.51)$$

$$\pi_{\mu\nu} = \pi_{\nu\mu}. \quad (1.52)$$

Logo, respeitando esses vínculos, podemos explicitar cada uma dessas quantidades contraindo a Eq.(1.48) de forma conveniente, ou seja

$$\rho = T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \quad (1.53)$$

$$p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

$$q_\alpha = T_{\mu\nu} v^\nu h^\mu_\alpha, \quad (1.55)$$

$$\pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu + p h_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

Essa decomposição, como dito inicialmente, é a forma mais geral, logo não estamos neste momento identificando um tipo específico de fluido. No que segue, usaremos um fluido com uma configuração específica, e então obteremos essas quantidades advindas do $T_{\mu\nu}$ associado a este fluido em particular.

1.3.1 Conservação do Tensor Momentum-Energia

A variação local do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ é dado pela derivada covariante do mesmo, ou seja $T^{\mu\nu}_{;\nu}$. Logo, da conservação do $T_{\mu\nu}$, teremos

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (1.57)$$

Projetando a variação de $T_{\mu\nu}$ paralela a v^μ , iremos obter a variação da densidade de energia com o tempo, enquanto que a projeção da mesma na hipersuperfície Σ nos fornece

a variação do momento [20]. Portanto, a conservação da energia do fluido é obtida através da contração

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}v_\mu = 0. \quad (1.58)$$

Usando a Eq.(1.48) na Eq.(1.58),

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{;\nu}v_\mu - (ph^{\mu\nu})_{;\nu}v_\mu + [q^{(\mu}v^{\nu)}]_{;\nu}v_\mu + \pi^{\mu\nu}_{;\nu}v_\mu = 0. \quad (1.59)$$

Calculando cada termo da Eq.(1.59) separadamente obtêm-se a seguinte expressão,

$$\dot{\rho} + \rho\Theta + p\Theta + \dot{q}^\mu v_\mu + q^\nu_{;\nu} - \pi^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} = 0, \quad (1.60)$$

ou ainda,

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \dot{q}^\mu v_\mu + q^\nu_{;\nu} - \pi^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} = 0. \quad (1.61)$$

Portanto, a Eq.(1.61) é a equação mais geral da conservação de energia de um fluido arbitrário medido por uma classe de observadores com velocidade v^μ [20].

1.4 Equação de Raychaudhuri

A equação de Raychaudhuri é obtida quando substituimos o termo na direita da igualdade da Eq.(1.47), conhecido como escalar de Raychaudhuri ($R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$) [22], pelas relações dadas pelas equações de campo da Relatividade Geral. Portanto, seja as equações de campos de Einstein dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda_0 g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^4$ é a constante gravitacional de Einstein, sendo G a constante gravitacional de Newton e c a velocidade da luz. Como neste trabalho estamos utilizando unidades normais ($\hbar = k_b = c = G = 1$), logo $\kappa = 8\pi$. Por conveniência, vamos tomar o traço da Eq.(1.62) de modo a obter uma expressão para o escalar de Ricci ($R \doteq g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$) em termos da constante cosmológica Λ_0 e do traço de $T_{\mu\nu}$.

$$R = 4\Lambda_0 + \kappa T. \quad (1.63)$$

Substituindo a Eq.(1.63) na Eq.(1.62), teremos

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda_0 g_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Agora podemos calcular o escalar de Raychaudhuri contraindo $R_{\mu\nu}$, dado pela Eq.(1.64), com $v^\mu v^\nu$,

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -\kappa \left(T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu - \frac{1}{2}T \right) + \Lambda_0, \quad (1.65)$$

onde recorreremos a Eq.(1.48) para obter as contrações

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \quad , \quad T \doteq g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (1.66)$$

Devido aos vínculos dados pelas Eqs.(1.49, 1.50) na Seção 1.3, teremos

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = \rho, \quad (1.67)$$

e

$$T = \rho - 3p. \quad (1.68)$$

Portanto, substituindo os resultados dados nas Eqs.(1.67, 1.68) na Eq.(1.65), teremos,

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -\kappa\rho + \frac{1}{2}\kappa(\rho - 3p) + \Lambda_0. \quad (1.69)$$

Ou ainda

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -\frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) + \Lambda_0, \quad (1.70)$$

que substituindo o lado direito da Eq.(1.47) fornece,

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a_{;\beta}^\beta + \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) - \Lambda_0 = 0. \quad (1.71)$$

Esta equação é conhecida como a forma generalizada da *Equação de Raychaudhuri* [23], pois a expressão originalmente obtida por Raychaudhuri para a evolução do fator de expansão, foi feito no caso particular de um fluido com pressão nula [24]. É extremamente importante notar que como a Eq.(1.71) expressa a dinâmica do fator de expansão Θ , logo esta carrega implicitamente a característica do universo ser singular ou não-singular. Para analisar suas implicações, vamos definir a função $L(x^\mu)$ tal que [21],

$$\Theta \doteq 3\frac{\dot{L}}{L}, \quad (1.72)$$

onde interpretamos L como o comprimento representativo cujo a escala de volume comóvel ao fluido é dado por L^3 . Dessa forma a taxa de variação do volume L^3 é dada por $(L^3)/L^3 = 3\dot{L}/L$ [23] e o fator de expansão implica na taxa de variação do fator de escala L . Portanto, feita esta definição, e notando que

$$\dot{\Theta} + \frac{\Theta^2}{3} = 3\frac{\ddot{L}}{L}. \quad (1.73)$$

Logo a Eq.(1.71) será expressa como

$$3\frac{\ddot{L}}{L} = -2(\sigma^2 - \omega^2) + a_{;\beta}^{\beta} - \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) + \Lambda_0, \quad (1.74)$$

mostrando que o cisalhamento (σ^2), densidade de matéria (ρ) e pressão (p) contribuem para um valor negativo da segunda derivada de $L(\tau)$, caso estas quantidades sejam positivas. Dessa forma elas atuam desacelerando a evolução do fator de escala, tendendo ao colapso do fluido. Já a vorticidade (ω^2) e uma constante cosmológica positiva ($\Lambda_0 > 0$), contribuem para um valor positivo da segunda derivada de $L(\tau)$, o que implica em uma evolução acelerada do fator de escala [23]. A singularidade cosmológica é então entendida como o anulamento do fator de escala L em um tempo finito no passado.

1.5 A geometria de Robertson-Walker

O universo de Friedmann-Lemaître é tal que se apresenta homogêneo e isotrópico [4, 5], logo precisamos obter o elemento de linha da geometria que representa estas propriedades espacialmente. Como nosso espaço é tridimensional, vamos tomar uma 3-esfera embebida em um espaço euclidiano quadridimensional. A equação da superfície de uma 3-esfera sendo dada por,

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2, \quad (1.75)$$

onde a é o raio da esfera. Vamos diferenciar a Eq.(1.75), obtendo

$$2xdx + 2ydy + 2zdz + 2udu = 0. \quad (1.76)$$

Portanto, resolvendo em termos de du , teremos

$$du = \pm \frac{xdx + ydy + zdz}{[a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]^{1/2}}. \quad (1.77)$$

Sendo a métrica do espaço euclidiano quadridimensional dado por:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2, \quad (1.78)$$

a Eq.(1.77) inserida na Eq.(1.78) fornecerá que,

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{[a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]}. \quad (1.79)$$

Desse modo, a distância entre pontos sobre a 3-esfera ficam determinados pelas coordenadas independentes da própria 3-esfera [2], tal que respeitem a relação

$$x^2 + y^2 + z^2 < a^2. \quad (1.80)$$

Porém, há degenerescências nestas coordenadas, por isso é conveniente usar coordenadas esféricas,

$$x \equiv \sigma \sin \theta \cos \phi, \quad (1.81)$$

$$y \equiv \sigma \sin \theta \sin \phi, \quad (1.82)$$

$$z \equiv \sigma \cos \theta, \quad (1.83)$$

onde $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi < 2\pi$. Tomando o quadrado de x , y e z , dados nas equações acima, e usando relações trigonométricas triviais, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma^2. \quad (1.84)$$

Podemos diferenciar a expressão acima, obtendo $x dx + y dy + z dz = \sigma d\sigma$. Portanto, escrevendo nas coordenadas esféricas, teremos

$$dx = d\sigma \sin \theta \cos \phi + \sigma \cos \phi \cos \theta d\theta - \sigma \sin \theta \sin \phi d\phi, \quad (1.85)$$

$$dy = d\sigma \sin \theta \sin \phi + \sigma \sin \phi \cos \theta d\theta + \sigma \sin \theta \cos \phi d\phi, \quad (1.86)$$

$$dz = d\sigma \cos \theta - \sigma \sin \theta d\theta - \sigma \sin \theta \sin \phi d\phi. \quad (1.87)$$

Resultando que,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.88)$$

Portanto, a Eq.(1.79) ficará

$$dl^2 = d\sigma^2 + \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{\sigma^2 d\sigma^2}{a^2 - \sigma^2}. \quad (1.89)$$

Ou seja,

$$dl^2 = \frac{d\sigma^2}{(1 - \frac{\sigma^2}{a^2})} + \sigma^2 d\Omega^2, \quad (1.90)$$

onde definimos $d\Omega^2 \doteq d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Note que se tomarmos $a^2 \rightarrow \infty$, teremos o caso plano,

$$dl^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\Omega^2. \quad (1.91)$$

Se a^2 é negativo, a métrica descreve um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico com curvatura constante negativa. Este espaço é chamado de *espaço de Lobachevski* (espaço hiperbólico) [2]. Podemos introduzir uma coordenada reescalada $\bar{\sigma} = \sigma / \sqrt{|a^2|}$, e obter

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{d\bar{\sigma}^2}{(1 - \epsilon \bar{\sigma}^2)} + \bar{\sigma}^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.92)$$

onde $\epsilon = \{-1, 0, 1\}$, para $a^2 < 0$, $a^2 \rightarrow \infty$ e $a^2 > 0$, respectivamente. De agora em diante iremos nos referir a estes valores de ϵ como determinando seção espacial do universo, sendo portanto $\epsilon = \{-1, 0, 1\}$ os valores para seções espaciais aberta, plana (ou Euclidiana) e fechada, respectivamente. No espaço curvado, a^2 é interpretado como raio de curvatura [2]. Será conveniente definir uma nova coordenada reescalada tal que [25],

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{r}{1 + \epsilon r^2/4}. \quad (1.93)$$

Dessa forma, iremos obter a seguinte expressão para o elemento de linha espacial dl ,

$$dl^2 = \frac{a^2}{(1 + \epsilon r^2/4)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (1.94)$$

Nesta métrica fica explícita a manifestação de homogeneidade e isotropia espacial, no entanto pode-se considerar um elemento de linha mais geral com $a = A(t)$, dependendo do tempo cósmico, o que preserva a homogeneidade e isotropia espacial na superfície tridimensional $t = \text{constante}$ [16], a qual é ortogonal a classe fundamental de observadores determinada pelo campo de vetores $v^\mu = \delta_0^\mu$. Portanto, se consideramos a dependente do tempo cósmico, iremos denotá-lo por *fator de escala* $A(t)$. Desse modo o elemento de linha para um universo que se apresente espacialmente homogêneo e isotrópico é será dado por,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A^2(t)}{(1 + \epsilon r^2/4)^2} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (1.95)$$

Este é o *elemento de linha de Robertson-Walker* [6, 7]. De posse deste elemento de linha, temos explicitamente as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, logo as quantidades cinemáticas definidas no final da Seção 1.1 podem ser calculadas, visto que estamos considerando estas quantidades avaliadas por uma classe de observadores co-móveis $v^\mu = \delta_0^\mu$. Obtemos então os seguintes resultados

$$\Theta = 3 \frac{\dot{A}}{A}, \quad (1.96)$$

$$\sigma^2 = \omega^2 = a^\beta = 0, \quad (1.97)$$

onde identificamos, como esperado, $A(t)$ com o fator $L(x^\mu)$ apresentado na Eq.(1.72). É também esperado intuitivamente, que neste modelo onde tratamos de observadores co-móveis ao fluido cósmico, que por sua vez é assumido ser espacialmente homogêneo e isotrópico, que as quantidades cinemáticas definidas como vorticidade e cisalhamento, além da aceleração a^β , fossem nulas, pois caso contrário a hipótese de homogeneidade e isotropia seria quebrada.

1.5.1 Equação de Friedmann

Temos obtido então que as considerações feitas no modelo de universo FLRW, o qual tratamos na seção anterior, apresenta o universo como uma sequência ordenada temporalmente de superfícies tridimensionais tipo-espaço, homogêneas e isotrópicas, ortogonais a v^0 . Além dessas características, temos ainda que a curvatura da superfície tridimensional, que denotamos por seção espacial, é apresentada em 3 classes diferentes determinada pelo parâmetro ϵ . Portanto, os resultados obtidos até aqui já nos permitem consideráveis simplificações das expressões dadas pelas Eqs.(1.61, 1.74), que no modelo FLRW tomam a seguinte forma

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{A}}{A} = 0, \quad (1.98)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda_0}{3}. \quad (1.99)$$

Note que sendo $(A^2\dot{\rho}) = -\dot{A}A(\rho + 3p)$, logo a Eq.(1.99) fica

$$\ddot{A}\dot{A} = \frac{\kappa(A^2\dot{\rho})}{6} + \dot{A}A\frac{\Lambda_0}{3}. \quad (1.100)$$

Mas como $\dot{A}\ddot{A} \equiv \frac{1}{2}(\dot{A}^2)'$, teremos

$$\frac{1}{2}(\dot{A}^2)' = \frac{\kappa(A^2\dot{\rho})}{6} + A\dot{A}\frac{\Lambda_0}{3}, \quad (1.101)$$

a qual a integral primeira fornece,

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 = \frac{\kappa\rho}{3} + \frac{\Lambda_0}{3} - \frac{\epsilon}{A^2}. \quad (1.102)$$

Esta é a *Equação de Friedmann* com constante cosmológica $\Lambda_0 \neq 0$. Temos então que o comportamento para $A(t)$ fica evidenciado desde que a densidade de energia seja conhecida. Ou seja, a evolução de $A(t)$ será determinada pelo conteúdo de matéria-energia do modelo cosmológico considerado, o qual está incluso as considerações sobre curvatura da seção espacial e valor da constante cosmológica. No próximo capítulo trataremos do conteúdo de energia-matéria que estamos interessados.

Capítulo 2

Conteúdo de matéria-energia do modelo

Neste capítulo trataremos de apresentar as quantidades dinâmicas advindas da hipótese de que o universo numa fase de elevada densidade tem como conteúdo dominante o fluido de Yang-Mills. Dessa forma começamos, na Seção 2.1, assumindo uma classe específica de lagrangeana que descreva tal sistema, e derivamos a expressão para o $T_{\mu\nu}$ desta classe de lagrangeanas. Seguimos na mesma seção realizando um procedimento de médias necessário para que os campos considerados sejam fontes de uma geometria isotrópica e homogênea, e assim possamos trabalhar dentro do regime estabelecido pelo modelo FLRW. Feito isso, derivamos a expressão para o $T_{\mu\nu}$ de um fluido perfeito, assim como as expressões para a densidade de energia (ρ) e pressão isotrópica (p) em termos dos campos da teoria. Na Seção 2.2 adotamos a lagrangeana efetiva de Yang-Mills no contexto da Cromodinâmica Quântica como a lagrangeana que descreve o conteúdo de matéria-energia do nosso modelo e na Seção 2.3 usamos os resultados das seções anteriores para obter as quantidades dinâmicas relevantes no comportamento de $A(t)$. Nesta última seção investigamos as peculiaridades do fluido através de um estudo gráfico qualitativo destas quantidades dinâmicas.

2.1 Tensor momento-energia de uma lagrangeana com um parâmetro

Vamos assumir que o conteúdo de matéria-energia do sistema é descrito por uma densidade de lagrangeana invariante de calibre, a qual é uma função geral do escalar de Lorentz F ,

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F)$. Este parâmetro F é definido por

$$F \doteq F^{(a)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(a)}, \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu}^{(a)}$ é o tensor campo de intensidade cujo índice a está associado a uma simetria interna do sistema, no caso a carga cor da QCD. Portanto, a QCD, que descreve as interações entre quarks, é uma teoria de calibre invariante sob o grupo $SU(3)$ [2]. Temos que $F_{\mu\nu}^{(a)}$ se relaciona com o campo de calibre $A_\mu^{(a)}$ pela expressão [26]

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^{(a)} - \partial_\nu A_\mu^{(a)} + C^{abc} A_\mu^{(b)} A_\nu^{(c)}, \quad (2.2)$$

onde C^{abc} são as constantes para um grupo de Lie compacto [26]. É conveniente expressar a Eq.(2.2) em termos dos campos não-abelianos elétrico $E_\mu^{(a)}$ e magnético $B_\mu^{(a)}$. Estes são quantidades vetoriais resultantes da contração do tensor $F_{\mu\nu}^{(a)}$ com v^ν [20]

$$E_\mu^{(a)} \doteq F_{\mu\nu}^{(a)} v^\nu, \quad (2.3)$$

$$B_\mu^{(a)} \doteq F_{\mu\nu}^{*(a)} v^\nu, \quad (2.4)$$

com $F_{\mu\nu}^{*(a)}$, o dual de $F_{\mu\nu}^{(a)}$, definido por $F_{\mu\nu}^{*(a)} \doteq \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} F^{(a)\alpha\beta}$, onde o pseudo-tensor $\eta_{\mu\nu\alpha\beta}$ é construído a partir do objeto completamente antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ pela relação

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

Como $F_{\mu\nu}^{(a)}$ é, por definição, um tensor antissimétrico, logo as contrações

$$E_\mu^{(a)} v^\mu \doteq F_{\mu\nu}^{(a)} v^\nu v^\mu = 0, \quad (2.6)$$

$$B_\mu^{(a)} v^\mu \doteq F_{\mu\nu}^{*(a)} v^\nu v^\mu = 0, \quad (2.7)$$

são nulas, pois $v^\nu v^\mu$ é um tensor simétrico de ordem 2. Estas contrações nulas implicam que tanto $E_\mu^{(a)}$ quanto $B_\mu^{(a)}$ vivem reclusos na hipersuperfície Σ , sendo portanto vetores tipo-espaço. Agora escrevendo a Eq.(2.2) em termos de $E_\mu^{(a)}$ e $B_\mu^{(a)}$, definidos nas Eqs.(2.3, 2.4), ficaremos com [20]

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = E_\mu^{(a)} v_\nu - E_\nu^{(a)} v_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta^{(a)}. \quad (2.8)$$

Portanto podemos obter o parâmetro F , definido na Eq.(2.1), através da expressão de $F_{\mu\nu}^{(a)}$, dado na Eq.(2.8), como

$$F = 2(B^2 - E^2), \quad (2.9)$$

onde definimos $E^2 \doteq -E^\nu_a E_\nu^a$ e $B^2 \doteq -B^\nu_a B_\nu^a$.

O tensor momento-energia do sistema descrito por um dada densidade de lagrangeana é obtido do *princípio de mínima ação*, que em coordenadas curvilíneas [25] é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right]. \quad (2.10)$$

Contudo, como $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F)$, onde $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$, logo a Eq.(2.10) se reduz a

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \right], \quad (2.11)$$

pois $\mathcal{L}(F)$ não possui termos com $g^{\mu\nu}_{,\alpha}$. Dessa forma, tomando a derivada em relação a $g^{\mu\nu}$, representando a derivada da densidade de lagrangeana em relação ao parâmetro F por \mathcal{L}_F e lembrando que $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, teremos

$$T_{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_F F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu - \mathcal{L} g_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

É importante frisar que para obter uma configuração homogênea e isotrópica de geometria, compatível com o cenário do modelo de FLRW, precisamos tomar um procedimento de médias sobre os campos [27, 28, 29]. Portanto, definindo a média espacial de um quantidade X em um tempo t como sendo dado por,

$$\langle X \rangle \doteq \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int d^3x \sqrt{-g} X, \quad (2.13)$$

com $V = \int d^3x^i \sqrt{-g}$, e sendo V_0 o 3-volume suficientemente grande para que a homogeneidade seja verificada e o procedimento e médias faça sentido [29]. Logo, nesta proposta os campos poderem gerar o universo do modelo de FLRW, para isso o sistema deve satisfazer os seguintes requerimentos [8]:

- (i) a média volumétrica espacial da intensidade do campo de cor não depende de direção;
- (ii) É igualmente provável que o produto $E^i E^j$, $B^i B^j$ (com $i \neq j$), em qualquer tempo, tome valores positivos ou negativos;
- (iii) não existe fluxo resultante de energia medido por observadores co-móveis.

Expressando estes requerimentos matematicamente em termos dos campos E^i e B^i , teremos

$$\langle E_i \rangle = 0, \quad \langle B_i \rangle = 0, \quad (2.14)$$

$$\langle E_i B_j \rangle = -\frac{1}{3}(\vec{E} \cdot \vec{B})g_{ij} \implies \langle E_i B_j - B_i E_j \rangle = 0, \quad (2.15)$$

$$\langle E_i E_j \rangle = -\frac{1}{3}E^2 g_{ij}, \quad (2.16)$$

$$\langle B_i B_j \rangle = -\frac{1}{3}B^2 g_{ij}. \quad (2.17)$$

Sabendo que $T_{\mu\nu}$, de modo geral, decomposto pelo observador v^μ nas suas partes irredutíveis é expresso como na Eq.(1.48), podemos então calcular estas partes via Eq.(2.12), considerando os requerimentos do procedimento de médias sobre os campos. Vamos obter que as únicas quantidades não nulas serão ρ e p . Como era de se esperar, o fluido que gera a geometria homogênea e isotrópica é um fluido perfeito. Desse modo, teremos

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\rho + p)v_\mu v_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

onde obtemos, em termos dos campos,

$$\rho = -4\mathcal{L}_F E^2 - \mathcal{L}, \quad (2.19)$$

$$p = \frac{4}{3}(E^2 - 2B^2)\mathcal{L}_F + \mathcal{L}. \quad (2.20)$$

Note que no caso da eletrodinâmica de Maxwell, onde $\mathcal{L} = -F/4$, teríamos obtido

$$\rho = \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \equiv 3p, \quad (2.21)$$

sendo aqui E e B os campos abelianos elétrico e magnético. Portanto, tanto a densidade de energia quanto a pressão sendo positivas definidas todo o tempo, evidenciam a natureza singular do modelo de FLRW com eletrodinâmica clássica como fonte. As equações de Einstein para a configuração de matéria-energia representada pela densidade de lagrangeana de Maxwell levam [30] à solução clássica do fator de escala $A(t) = \sqrt{A_0^2 t - \epsilon t^2}$, onde A_0 é uma constante arbitrária. Já no caso da eletrodinâmica não-linear descrita por $\mathcal{L} = -F/4 + \alpha F^2 + \beta G^2$, e na ausência de campo elétrico ($E^2 = 0$), é obtido [29] que,

$$\rho = \frac{B^2}{2}(1 - 8\alpha B^2), \quad (2.22)$$

$$p = \frac{B^2}{6}(1 - 40\alpha B^2). \quad (2.23)$$

Este *toy model* apresenta soluções exibindo um comportamento não-singular do fator de escala, porém alguns cuidados devem ser tomados na aplicação de tal modelo na descrição do universo primordial. Termos de mais alta ordem vindos da expansão na lagrangeana efetiva a 1-loop não podem ser negligenciados no regime de campos intensos, o qual se espera ocorrer no cenário do universo primordial. Contudo, poderia ser considerado uma era específica onde os termos acima, na densidade de lagrangeana, corresponderiam aos termos dominantes na lagrangeana efetiva da QED [8].

Retomando o caso geral, dentro da classe de teorias a um parâmetro, a Eq(1.98) ficará, usando os resultados dados nas Eqs.(2.19, 2.20), na forma

$$\frac{4\mathcal{L}_{FF}}{\mathcal{L}_F} E^2 \frac{\partial}{\partial t} (B^2 - E^2) + (B^2 + E^2) \frac{\partial}{\partial t} \ln[(B^2 + E^2)A^4] = 0. \quad (2.24)$$

Ou seja, o comportamento do fator de escala $A(t)$, no modelo cosmológico de FLRW dominado por um fluido perfeito representado pelas Eqs.(2.19, 2.20), é determinado pelas Eqs.(1.102, 2.24).

É esperado que a conteúdo energético dominante na época onde o universo era extremamente denso seja um plasma de quark-gluons (QGP), que ocorreria quando as temperaturas excedessem o valor $\Lambda_{QCD} \cong 200\text{MeV}$ [2]. Neste regime, o acoplamento forte é pequeno e a maioria dos quarks e gluons interagem só fracamente. Portanto, com o objetivo de examinar o universo homogêneo e isotrópico de FLRW, com constante cosmológica, nesta era muito densa, seguiremos na próxima seção a análise do comportamento do fator de escala $A(t)$ no modelo em que a lagrangeana efetiva de Yang-Mills para a cromodinâmica quântica (QCD), com um invariante, será considerada para descrever o conteúdo de matéria-energia do universo.

2.2 Lagrangeana Efetiva de Yang-Mills

A densidade de lagrangeana efetiva para QCD em termos do parâmetro F do campo de fundo pode ser apresentada [26] na forma,

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} \frac{F}{\bar{g}(\gamma)^2}, \quad \gamma \doteq \log \frac{F}{\mu^4}. \quad (2.25)$$

Onde o acoplamento efetivo $\bar{g}(\gamma)$ é implicitamente dado por meio de

$$\gamma = \int_g^{\bar{g}(\gamma)} \frac{dg}{\beta(g)}, \quad (2.26)$$

com $\beta(g)$ sendo a função β de Callan-Symanzik, μ a massa de renormalização e g a constante de acoplamento do campo de calibre que aparece na lagrangeana básica da QCD. Esta densidade de lagrangeana efetiva será tomada como um modelo clássico que incorpora diversas características do problema quântico. Ela dá uma descrição suficientemente correta do vácuo quântico, abrindo uma janela pra o exame de configurações fisicamente importantes [26]. Esta densidade de lagrangeana deriva de um *Ansatz* que leva em consideração somente um dos vários invariantes da teoria de Yang-Mills (no caso, F), e impõe consistência a anomalia do traço para o tensor momento-energia [31]. A densidade de lagrangeana dada na Eq.(2.25) é determinada uma vez que $\beta(g)$ é conhecida.

Para o caso de acoplamento fraco, temos [32, 33, 34, 35]

$$\beta(g) = -\frac{1}{2}b_0g^3 + b_1g^5 + \dots, \quad (2.27)$$

onde b_0 e b_1 são os coeficientes da função β definidos nas correções radiativas a 1-loop e 2-loop, respectivamente.

$$b_0 = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{1}{3}\right) C_2(G), \quad b_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(-\frac{34}{3}\right) C_2^2(G). \quad (2.28)$$

Portanto, no limite de campo intenso ($F \rightarrow \infty$, ou seja $\gamma \rightarrow \infty$), teremos, da Eq.(2.26) que

$$\frac{1}{\bar{g}(\gamma)^2} = b_0\gamma - 2\frac{b_1}{b_0}\log\gamma + \dots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{g^2}\right). \quad (2.29)$$

Por outro lado, foi argumentado [36, 37] que esta expansão fornece os mesmos dois principais termos na ação efetiva para o regime de campo fraco, devido a magnitude da constante de acoplamento efetiva $\bar{g}(\gamma)$ ser pequena em ambos os regimes, sugerindo então que a *Constante Dielétrica Efetiva* ($\bar{\epsilon}_0$), definida como,

$$\bar{\epsilon}_0 \doteq -4\frac{\partial\mathcal{L}_{eff}}{\partial F} \equiv -4\mathcal{L}_F \quad (2.30)$$

muda de sinal entre os regimes de campo fraco e forte, que é uma característica essencial responsável pelo confinamento na QCD.

Ao substituir a lagrangeana da teoria de Yang-Mills por uma lagrangeana efetiva, incorporando os efeitos de correções radiativas, a constante de acoplamento g é substituída por esta constante de acoplamento efetiva $\bar{g}(\gamma)$, a qual, considerando até correções a 1-loop, é dada por [37]

$$\bar{g}^2(\gamma) = \frac{g^2}{1 + b_0 g^2 \log(F/\mu^4)}, \quad (2.31)$$

onde estamos considerando o termo de ordem g^2 para incluir a condição de contorno $\bar{g}(0) = g$ [26]. O coeficiente b_0 da função β é conhecida com a *constante de liberdade assintótica*. Na QCD, grupo $SU(3)$, com N_f sabores de férmions não-massivos, o coeficiente b_0 é tal que [2]

$$b_0 = \frac{1}{8\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right). \quad (2.32)$$

Note que no caso em que $F = \mu^4$ a constante de acoplamento efetiva $\bar{g}(\gamma) = g$, e temos que a lagrangeana fica tipo-Maxwell, $\mathcal{L}_{eff} = -F/4g$.

Da Eq.(2.31) podemos escrever a lagrangeana efetiva, com correções a 1-loop, dada na Eq.(2.25), como

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F \left(b_0 \log \frac{F}{\mu^4} + \frac{1}{g^2} \right), \quad (2.33)$$

a qual deixa nítido que no comportamento da lagrangeana para os regimes onde $F \gg \mu^4$ o primeiro termo é dominante, enquanto que no caso onde $F = \mu^4$ a lagrangeana só possuirá o termo tipo-Maxwell. As correções do termo tipo-Maxwell não são determinadas pelos argumentos do grupo de renormalização [26] e são altamente não locais, pois dependem das derivadas do campo. Logo tais termos não-locais serão relevantes no limite ultravioleta (curtas distâncias), mas em relação aos termos locais, no limite infravermelho (longas distâncias), eles ficam irrelevantes [37].

Será conveniente definir o parâmetro invariante do grupo de renormalização a 1-loop [13, 37] dado por

$$\lambda^2 \doteq \frac{\mu^4 e^{-1/b_0 g^2}}{2e}, \quad (2.34)$$

que é a escala de renormalização com dimensão de massa ao quadrado $[\lambda] = (M^2)$. Desse modo a Eq.(2.31) ficará

$$\frac{1}{\bar{g}(\gamma)^2} = b_0 \log \left(\frac{F}{2e\lambda^2} \right), \quad (2.35)$$

e teremos a densidade de lagrangeana efetiva de Yang-Mills a 1-loop dada por

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{b_0}{4} F \log \left(\frac{F}{2e\lambda^2} \right). \quad (2.36)$$

Usaremos a equação acima para determinar o $T_{\mu\nu}$ do nosso modelo de trabalho, que tem um fluido de Yang-Mills como conteúdo dominante do universo numa fase de alta densidade. Na próxima seção iremos obter as quantidades dinâmicas relevantes do nosso modelo.

2.3 Quantidades Dinâmicas do Fluido de Yang-Mills

Sem perda de generalidade e com o intuito de aliviar notação, vamos definir um parâmetro ξ tal que,

$$E^2 = \xi^2 B^2. \quad (2.37)$$

Logo, $F = 2(B^2 - E^2) \equiv 2B^2(1 - \xi^2)$. Desse modo a eq.(2.36) ficará,

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{b_0}{2} B^2 (\xi^2 - 1) \log \left[\frac{B^2}{e\lambda^2} (1 - \xi^2) \right], \quad (2.38)$$

que através da eq.(2.30) fornece,

$$\bar{\epsilon}_0 = b_0 \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right]. \quad (2.39)$$

Sendo $b_0 > 0$, logo a condição de positividade da Constante Dielétrica Efetiva $\bar{\epsilon}_0$ depende do argumento do logaritmo, ou seja

$$\bar{\epsilon}_0 > 0 \iff B^2 > \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)}. \quad (2.40)$$

Obtendo agora a densidade de energia (ρ) e a pressão isotrópica (p) para esse sistema, via Eqs.(2.19, 2.20), teremos

$$\rho = \frac{b_0 B^2}{2} \left\{ (\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right] - (1 - \xi^2) \right\}, \quad (2.41)$$

$$p = \frac{b_0 B^2}{2} \left\{ \frac{(\xi^2 + 1)}{3} \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right] + (1 - \xi^2) \right\}. \quad (2.42)$$

Conseqüentemente, as expressões para as condições de energia [22], que são interessantes neste contexto, resultam:

- *Condição de energia fraca* (WEC), $\rho + p \geq 0$, onde

$$\rho + p = \frac{2b_0 B^2}{3} (\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right]. \quad (2.43)$$

- *Condição de energia forte (SEC), $\rho + 3p \geq 0$, onde*

$$\rho + 3p = b_0 B^2 \left\{ (\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right] + (1 - \xi^2) \right\}. \quad (2.44)$$

Portanto, as condições de positividade para as quantidades definidas pelas Eqs.(2.41, 2.42, 2.43, 2.44) são tais que,

- *Condição de positividade para ρ :*

$$\rho > 0 \iff B^2 > \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)} \exp \left[\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right]; \quad (2.45)$$

- *Condição de positividade para p :*

$$p > 0 \iff B^2 > \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)} \exp \left[-3 \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right) \right]; \quad (2.46)$$

- *Condição de positividade para **WEC**:*

$$\rho + p > 0 \iff B^2 > \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)}; \quad (2.47)$$

- *Condição de positividade para **SEC**:*

$$\rho + 3p > 0 \iff B^2 > \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)} \exp \left[- \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right) \right]. \quad (2.48)$$

Temos então que a dinâmica destas quantidades são determinadas pela evolução do campo $B(t)$ no modelo tratado. Portanto plotamos os gráficos destas quantidades contra $B(t)$ para visualizar melhor esta dinâmica. Como o parâmetro ξ estabelece uma razão entre os campos elétrico e magnético de cor, vamos plotar os casos onde ξ assume os valores $\xi = 0$, o qual denominaremos por universo magnético; $\xi = 0.1$, o qual denominaremos por universo quasi-magnético; $\xi = 0.5$, o qual denominaremos por universo semi-magnético; e $\xi = 0.9$, o qual denominaremos por universo quasi-radiação. Na Figura 2.1 estudamos o caso de universo magnético, onde as quantidades dinâmicas assumem valores negativos em certos regimes.

Esta peculiaridade está atrelado a forma funcional da densidade de lagrangeana que descreve o fluido que estamos considerando como fonte de curvatura. A presença do termo logaritmo possibilita a mudança do sinal das quantidades de acordo com a relação entre os parâmetros em seu argumento.

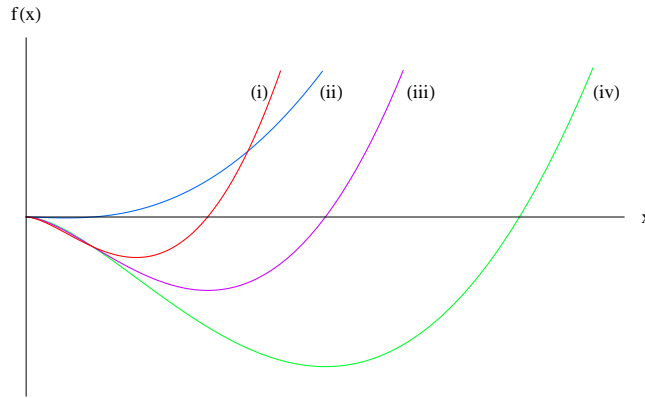


Figura 2.1: Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo magnético ($\xi = 0.0$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$.

Logo o que temos nos gráficos apresentados nas Figuras 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, a grosso modo, é o ponto onde a relação entre estes parâmetros deixa o fluido com um caráter exótico, visto que convencionalmente espera-se que ρ seja sempre positivo.

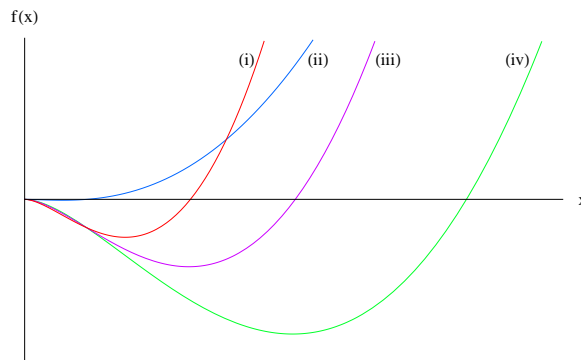


Figura 2.2: Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo quasi-magnético ($\xi = 0.1$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$.

Como pode ser presumido das Eqs.(2.45, 2.46, 2.47, 2.48), a medida que ξ cresce, o regime onde as quantidades dinâmicas assumem valores negativos é deslocado para valores de x próximos. Ou seja, podemos presumir que ξ age aproximando quantitativamente os regimes de negatividade das quantidade dinâmica. Nas Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 isto fica claro. Vemos então que o comportamento destas quantidades não muda muito a medida que aumentamos ξ , salvo que os regimes de negatividade das quantidades ficam mais próximos.

Por outro lado, podemos usar a equação de estado dada pela relação $p = w(\rho)\rho$, onde, no

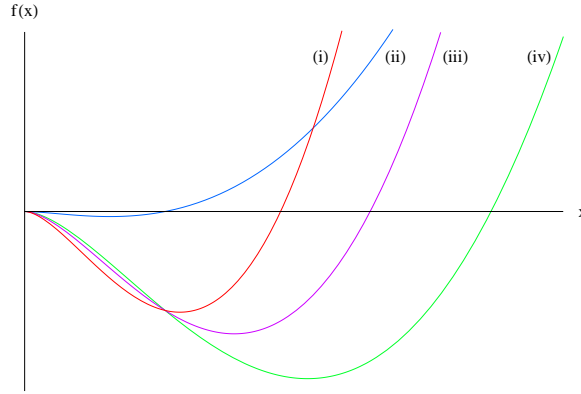


Figura 2.3: Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo semi-magnético ($\xi = 0.5$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$.

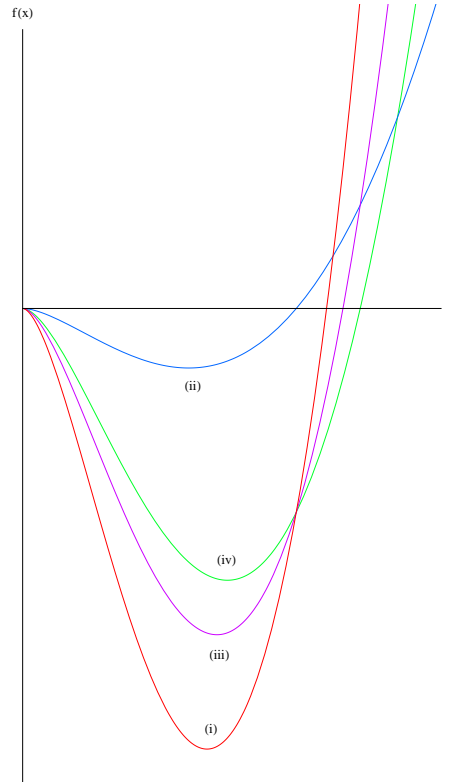


Figura 2.4: Comportamento das quantidades dinâmicas no modelo de universo quasi-radiação ($\xi = 0.9$), onde: (i) $\frac{\rho+3p}{b_0\lambda^2}$; (ii) $\frac{p}{b_0\lambda^2}$; (iii) $\frac{\rho+p}{b_0\lambda^2}$; (iv) $\frac{\rho}{b_0\lambda^2}$; e $x \doteq \frac{B}{\lambda^2}$.

caso estudado, w é dado por

$$w = \frac{\frac{1}{3}(\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2}(1 - \xi^2) \right] + (1 - \xi^2)}{(\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2}(1 - \xi^2) \right] - (1 - \xi^2)}, \quad (2.49)$$

e obter os regimes onde o fluido apresenta uma configuração específica, como, por exemplo, matéria incoerentemente distribuída (poeira) [20] ou com a mesma equação de estado da constante cosmológica Λ_0 , onde $w = -1$ [14, 15]. Dessa forma, vamos obter as seguintes

restrições:

- $E^2 = B^2$ (ou $\xi^2 = 1$). Neste caso teremos,

$$w = 1/3. \quad (2.50)$$

Ou seja, um fluido numa configuração onde $E^2 = B^2$ apresenta a equação de estado $p = 3\rho$. Contudo, um sistema com essa equação de estado não é descrito pela lagrangeana efetiva de YM. O que temos aqui é a manifestação de uma metaestabilidade do vácuo, onde uma região do sistema ao desenvolver grandes campos elétricos, decai rapidamente para um configuração onde $B^2 > E^2$ [8, 26].

- Poeira (ou $p = 0$). Neste caso teremos,

$$w = 0. \quad (2.51)$$

Portanto, obtemos

$$B^2 = \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)} \exp \left[-3 \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right) \right]. \quad (2.52)$$

- Constante Cosmológica Λ_0 (onde $w = -1$). Neste caso teremos duas soluções,

$$\xi^2 = -1, \quad (2.53)$$

$$B_{(w=-1)}^2 = \frac{\lambda^2}{(1 - \xi^2)}. \quad (2.54)$$

A primeira solução, com ξ imaginário, não nos interessa, visto que, por definição, ξ é real. Logo só a segunda solução nos será útil.

Agora, note que das Eqs.(2.41, 2.42), a equação acima implica que para $\rho > 0$ é necessário que $\xi^2 > 1$, ou seja $E^2 > B^2$, caso contrário, para $E^2 \leq B^2 \implies \rho \leq 0$. Se assumirmos o caso em que ξ^2 é definido no intervalo $[0, 1[$, então podemos afirmar,

$$B_{(w=0)}^2 = B_{(w=-1)}^2 \exp \left[-3 \left(\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Portanto,

$$B_{(w=-1)}^2 > B_{(w=0)}^2. \quad (2.56)$$

Com a perspectiva de que $B(t)$ seja uma função decrescente no tempo, como trataremos no próximo capítulo, podemos sugerir que o universo evolui de uma era dominada por um fluido satisfazendo a mesma equação de estado da constante cosmológica ($w = -1$) para uma era dominada por um fluido no estado de poeira ($w = 0$).

Capítulo 3

Comportamento do fator de escala

$A(t)$

Ao se considerar um sistema descrito pela densidade de lagrangeana tipo-Maxwell (o modelo linear da eletrodinâmica de Maxwell) descrevendo o conteúdo de matéria-energia no modelo cosmológico FLRW, as quantidades dinâmicas não assumem valores negativos em nenhum regime. Considerar teorias não-lineares, como a lagrangeana dada na Eq.(2.36), traz a tona propriedades exóticas relevantes [20] do fluido cósmico. Portanto, neste capítulo iremos relacionar as equações e argumentos obtidos nos capítulos anteriores para obter como o fator de escala, $A(t)$, do universo FLRW se comporta.

De posse das expressões que obtemos para as quantidades dinâmicas do modelo em questão, podemos agora usar as equações do Capítulo 1 para determinar a evolução do fator de escala $A(t)$. Portanto, usando o resultado das Eqs.(2.41, 2.42), a Eq.(1.98) será dada por

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{\frac{\dot{B}}{B} \left\{ (\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right] + 2\xi^2 \right\} + \xi \dot{\xi} \left\{ \log \left[\frac{eB^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right] - \left(\frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \right) \right\}}{2(\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right]}. \quad (3.1)$$

Iremos assumir que ξ seja constante, ou ainda que seja uma variável adiabática, no sentido que varia muito lentamente, logo sua derivada temporal é praticamente nula. Dessa maneira a Eq.(3.1) fica reduzida a seguinte expressão

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{\dot{B}}{2B} \left[1 + \frac{2\xi^2}{(\xi^2 + 1) \log \left[\frac{B^2}{\lambda^2} (1 - \xi^2) \right]} \right]. \quad (3.2)$$

Desse modo, sendo $0 \leq \xi^2 < 1$, nós podemos resolver a Eq.(3.2) obtendo uma expressão que relacione $A(t)$ e $B(t)$. Logo, nos valendo desta relação, podemos escrever a Eq.(1.102)

em termos de uma das variáveis dependentes, $A(t)$ ou $B(t)$, e resolvê-la para ter a evolução temporal dessas variáveis. No nosso caso estamos interessados em obter o comportamento de $A(t)$. No caso onde $\xi = 0$, que denotamos por universo magnético, a Eq.(3.2) pode ser resolvida analiticamente e obtido que,

$$B(t) = \frac{B_0}{A^2(t)}, \quad (3.3)$$

onde B_0 é uma constante de integração que definimos como $B_0 \doteq B(t=0)A^2(t=0)$. Embora tenhamos mostrado que o comportamento das quantidades dinâmicas tratadas na Seção 2.3 a medida que $B(t)$ sejam qualitativamente similares, ou seja, que ξ atuava *calibrando* $B(t)$, ou reescalando o gráfico do comportamento destas quantidades, nós temos que para valores não nulos de ξ a Eq.(3.2) só pode ser resolvida numericamente. Tal solução numérica só se torna viável quando se considera um sistema de equações constituído pelas Eqs.(1.102, 3.2). Nós nos deteremos a tratar apenas do caso de universo magnético.

3.1 Universo Magnético

O modelo de Universo Magnético, onde $E^2 = 0$, ou seja $\xi^2 = 0$, é plenamente possível na cosmologia [28], pois o fluido que preenche o universo primordial atuaria amortecendo o campo elétrico de cor, enquanto as linhas de campo magnético de cor permanecem “congeladas” [38]. Outra propriedade relevante é que tal universo pode ser associado a um conjunto de fluidos perfeitos sem interação. Logo tanto a Eq.(3.1) quanto Eq.(3.2), ao se considerar o contexto do Universo Magnético, podem ser resolvidas para se obter a Eq.(3.3). Isto evidencia um importante resultado [20, 28], a saber:

Teorema 3.1.1 *Qualquer teoria não-linear de calibre, cuja lagrangeana é da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F)$, no contexto cosmológico do tipo universo magnético, se caracteriza pelo fato de que o campo B possui a mesma dependência com o fator de escala, independente da forma da lagrangeana. A evolução do campo magnético em termos do fator de expansão é dado por $B(t) = B_0 A^{-2}(t)$*

Logo, trabalhando nesse sentido, teremos que a Eq.(1.102), utilizando o resultado da Eq.(2.41), será dada por,

$$\dot{A}^2 = \frac{b_0 \kappa}{6} \left(\frac{B_0}{A(t)} \right)^2 \log \left[\frac{B_0^2}{e \lambda^2 A^4(t)} \right] + A^2(t) \frac{\Lambda_0}{3} - \epsilon. \quad (3.4)$$

Vamos definir os seguintes parâmetros:

$$a \doteq \frac{b_0 \kappa B_0^2}{3}, \quad (3.5)$$

$$b \doteq \frac{B_0}{\sqrt{e\lambda}}, \quad (3.6)$$

e expressar a equação para \dot{A}^2 como

$$\dot{A} = \pm \left[\frac{a}{A^2} \log \left(\frac{b}{A^2} \right) + \frac{\Lambda_0}{3} A^2 - \epsilon \right]^{1/2}. \quad (3.7)$$

Onde omitimos a dependência de A com o tempo t para aliviar a notação. Da mesma forma, podemos então calcular a expressão para as quantidades dinâmicas tratadas na Seção 2.3 em termos de a, b e A . Logo teremos que,

$$\rho = \frac{3a}{\kappa A^4} \log \left(\frac{b}{A^2} \right), \quad (3.8)$$

$$p = \frac{a}{\kappa A^4} \log \left(\frac{e^2 b}{A^2} \right), \quad (3.9)$$

$$\rho + p = \frac{4a}{\kappa A^4} \log \left(\frac{\sqrt{e} b}{A^2} \right), \quad (3.10)$$

$$\rho + 3p = \frac{6a}{\kappa A^4} \log \left(\frac{e b}{A^2} \right). \quad (3.11)$$

Tais expressões serão úteis quando tivermos de posse do comportamento de $A(t)$, pois poderemos apresentar num único gráfico a evolução de $A(t)$ e o comportamento das quantidades dinâmicas, podendo assim associá-los. A Eq.(3.7) pode ser derivada novamente a fim de que tendo uma expressão para a derivada segunda de $A(t)$ possamos fazer um estudo analítico sobre $A(t)$, como por exemplo obter pontos críticos. Portanto, derivando a Eq.(3.7), a expressão para \ddot{A} é dada por (para $\dot{A} \neq 0$),

$$\ddot{A} = -\frac{a}{A^3} \left[\log \left(\frac{e b}{A^2} \right) - \frac{\Lambda_0}{3a} A^4 \right]. \quad (3.12)$$

Note que da Eq.(3.7), temos que, dado o valor de ϵ , uma solução real só é obtida se,

$$\frac{a}{A^2} \log \left(\frac{b}{A^2} \right) + \frac{\Lambda_0}{3} A^2 - \epsilon \geq 0, \quad (3.13)$$

sendo que a igualdade estabelece o ponto de equilíbrio $\dot{A} = 0$ da Eq.(3.7). Nestes pontos de equilíbrio temos que,

$$\frac{b}{A_{equil}^2} = \exp \left[\frac{A_{equil}^2}{a} \left(\epsilon - \frac{\Lambda_0 A_{equil}^2}{3} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Como podemos ver, a ausência da constante cosmológica reduz a expressão para um conjunto de casos determinados pelo tipo de seção espacial do modelo, especificado pelo

parâmetro ϵ . Este tratamento é apresentado em (De Lorenci, 2010), onde é obtido que apenas o universo com seção espacial aberta, $\epsilon = -1$, apresenta uma fase de expansão acelerada. Mas agora, com a presença da constante cosmológica o que temos é que para qualquer tipo de seção espacial, o comportamento obtido por De Lorenci (2010) é possível para as demais classes geometrias, e não somente para $\epsilon = -1$. O que pode vir a mudar de um caso para outro será a relação entre os parâmetros da teoria, codificados em a e b , e a constante cosmológica Λ_0 , para que um determinado comportamento seja possível. Contudo, para os casos de seção espacial aberta e fechada ($\epsilon = \{-1, 1\}$) só é possível resolver a Eq.(3.14) numericamente. Portanto é necessário atribuir valores numéricos as quantidades a e b , o que se torna inconveniente no tratamento qualitativo que estamos realizando neste trabalho. Porém, nos valeremos dos dados observacionais do WMAP que indicam, com uma margem de erro de 0,5%, que o universo tem seção espacial plana [39], como mencionado na introdução deste trabalho. Logo, focaremos nosso estudo ao modelo de universo com seção espacial plana ($\epsilon = 0$), o qual possibilita uma solução algébrica da Eq.(3.14) onde podemos relacionar os parâmetros a , b e Λ_0 qualitativamente. Dessa forma, vamos nos ater a tratar com um modelo FLRW com seção espacial plana.

3.1.1 Universo Magnético com seção espacial plana

Ao considerar o caso do universo com seção espacial plana, vamos denotar por A_0 o ponto de equilíbrio do fator de escala $A(t)$, A_{equil} , para o caso com seção espacial plana ($\epsilon = 0$). Portanto,

$$\frac{b}{A_0^2} = \exp \left[- \frac{\Lambda_0 A_0^4}{3a} \right]. \quad (3.15)$$

Note que como A_0 aparece na Eq.(3.15) elevado a potências pares, logo as soluções da Eq.(3.15) para A_0 irão apresentar raízes positivas e negativas, mas como o fator de escala é positivo definido as raízes negativas serão desconsideradas, desde que não corresponde a qualquer resultado físico [8]. Portanto, resolvendo a Eq.(3.15) para A_0 obtemos que, descartando as expressões para A_0 negativo,

$$A_0 = \left[- \frac{3a}{2\Lambda_0} W \left(- \frac{2b^2\Lambda_0}{3a} \right) \right]^{1/4}, \quad (3.16)$$

onde $W(z)$ representa a função de Lambert [40]¹. Porém, a Eq.(3.16) ainda pode fornecer um valor imaginário caso a função de Lambert seja positiva. Dessa forma, para que te-

¹A função de Lambert $W(z)$ representa as soluções para W da equação $z = We^W$. No software Wolfram Mathematica esta função é denotada por ProductLog.

nhamos uma solução de equilíbrio A_0 real, devemos ter que $W\left(-\frac{2b^2\Lambda_0}{3a}\right) < 0$, pois $A_0 = 0$ não é permitido devido a Eq.(3.15). Portanto, para A_0 ser real é necessário que

$$\frac{2b^2\Lambda_0}{3a} \leq \frac{1}{e}. \quad (3.17)$$

Ou seja, se tomarmos por conveniência $b = 1$, teremos que a condição para A_0 ser real é tal que,

$$a \geq \frac{2e\Lambda_0}{3}. \quad (3.18)$$

A conveniência de tomar $b = 1$ está no fato de termos visto nos gráficos da Seção 2.3 que as quantidades dinâmicas tem suas positivities violadas quando $B(t)$ assume valores próximos de λ . Portanto, pela definição de b dada na Eq.(3.6), temos que $b = 1$ implica em $B_0 = \sqrt{e}\lambda$, que é um valor para $B(t)$ dentro do domínio onde as características exóticas do fluido ficam evidentes.

Dessa forma, assim como feito em De Lorenci (2010), podemos seguir analisando os três possíveis casos separadamente, onde teremos, de acordo com a Figura 3.1:

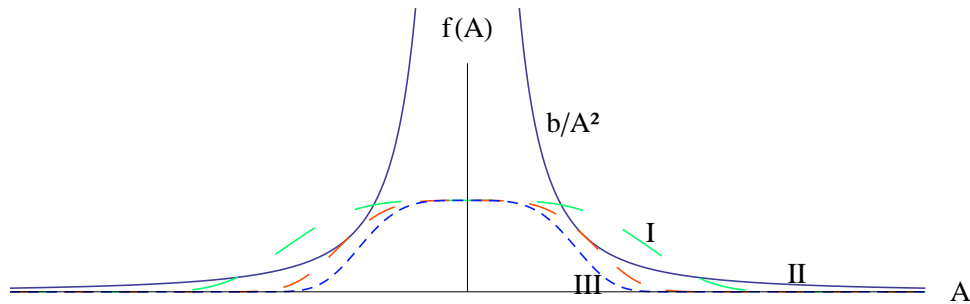


Figura 3.1: Ao lado de cada curva está a função de A_0 a qual ela está associada. Denominamos por I, II e III, os casos para $a > 2e\Lambda_0/3$, $a = 2e\Lambda_0/3$ e $a < 2e\Lambda_0/3$, respectivamente. Os pontos onde as curvas I, II, ou III interceptam a curva que representa b/A_0^2 , são os pontos de equilíbrio dados pela Eq.(3.16) (Tomamos $b = 1$).

(I) - Se $a > 2e\Lambda_0/3$, há duas soluções positivas de equilíbrio;

(II) - Se $a = 2e\Lambda_0/3$, há uma solução positiva de equilíbrio;

(III) - Se $a < 2e\Lambda_0/3$, não há pontos de equilíbrio.

Ou seja, temos que os pontos de interseção das curvas I, II e III com a curva da função b/A^2 são os pontos de equilíbrio A_0 . Vamos tratar separadamente cada um destes domínios dos parâmetros do modelo para resolver graficamente a Eq.(3.7). Porém, antes de seguir é importante esclarecer que a Figura 3.1 apresenta os valores positivos e negativos de A_0 , mas como já foi dito os valores negativos não tem significado físico visto que $A(t)$ é uma grandeza por definição positiva. Um outro ponto a esclarecer é a respeito da Eq.(3.7) apresentar uma raiz positiva e outra negativa, já que tínhamos \dot{A}^2 . Nesta questão, iremos descartar a raiz negativa já que $\dot{A} < 0$ implica que $A(t)$ é uma função decrescente, o que não está de acordo com os dados observacionais citados na introdução deste trabalho, que indicam que o universo está expandido, logo $A(t)$ deve ser crescente, ou seja $\dot{A} > 0$

Caso sem soluções de equilíbrio, $a < 2eb^2\Lambda_0/3$:

Neste caso, como não há soluções reais para a Eq.(3.16), não teremos pontos de equilíbrio ($\dot{A} \neq 0$). No entanto, a Eq.(3.12) mostra que a expansão de $A(t)$ é inicialmente desacelerada, quando tivermos que,

$$\log\left(\frac{eb}{A^2}\right) > \frac{\Lambda_0 A^4}{3a}, \quad (3.19)$$

e se torna acelerada quando,

$$\log\left(\frac{eb}{A^2}\right) < \frac{\Lambda_0 A^4}{3a} \quad \text{ou} \quad A^2 > eb. \quad (3.20)$$

Notamos então uma importância fundamental de se ter $\Lambda_0 \neq 0$ na dinâmica da evolução de $A(t)$, porém pode-se perceber que a existência deste ponto de inflexão (onde $\ddot{A} = 0$) não depende da magnitude de Λ_0 , já que este está presente na relação para o parâmetro a que citamos acima. O que muda em relação a magnitude de Λ_0 é que este ponto de inflexão leva mais tempo para ocorrer. Para ilustrar isto, nós plotamos na Figura 3.2 a solução numérica $A(t)$, neste caso assumindo $a = e\Lambda_0/3$ (pois estamos no caso onde $a < 2e\Lambda_0/3$), $b = 1$ e $\Lambda_0 = \{1, 0.1, 0.01\}$.

Era de se esperar tal comportamento, já que mesmo que Λ_0 tenha um valor muito pequeno, como ele aparece na Eq.(3.7) multiplicando $A^2(t)$, então sua influência é relevante para grandes valores de $A(t)$. E como estamos tratando do universo, tais valores são facilmente obtidos.

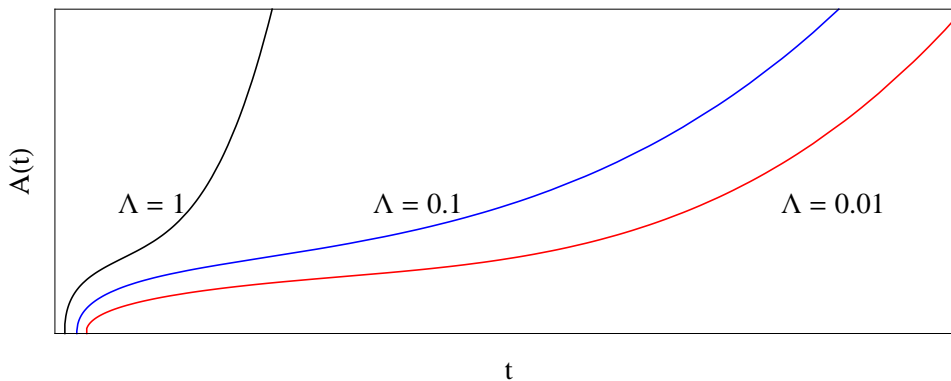


Figura 3.2: Ao lado de cada curva está o valor usado para Λ_0 . Tomamos $a = eb^2\Lambda_0/3$ e $b = 1$

Ou seja, sendo $\Lambda_0 \neq 0$, e dados os valores para dos parâmetros a e b , o ponto de inflexão, $A(t) \equiv A_{\text{inflex}}$, sempre ocorrerá. No entanto, quanto menor for o valor de Λ_0 , maior será o tempo para $A(t)$ atingir o ponto de inflexão, A_{inflex} . Notamos assim que em uma escala gráfica apropriada, a evolução de $A(t)$ tem o mesmo comportamento pra qualquer valor positivo de Λ_0 . Portanto, por praticidade, vamos adotar $\Lambda_0 = 1$ de agora em diante nas soluções numéricas dos gráficos que apresentaremos.

Neste caso, obtemos um comportamento singular do fator de escala, no sentido que ele se anula para um tempo finito. Vemos, da Eq.(3.12), que $A(t)$ inicialmente expande de forma desacelerada, até que atinge um ponto de inflexão e passa a expandir aceleradamente. Segue na Figura 3.3 a solução numérica de $A(t)$ juntamente com o campo de direções obtido da Eq.(3.7) com os mesmos valores para a , b e Λ_0 usados na solução numérica de $A(t)$

Vemos então que qualquer que seja a condição de contorno considerada, sempre haverá um tempo t_0 onde $A(t_0)=0$, sendo então uma solução singular, onde o fator de escala anula-se em um tempo finito. Por esse motivo podemos considerar t_0 como um tempo inicial da expansão que inicia desacelerada e depois torna-se acelerada no instante onde, segundo as Eqs.(3.19, 3.20), é satisfeita a seguinte relação que anula a Eq.(3.12),

$$\log\left(\frac{eb}{A^2}\right) = \frac{\Lambda_0 A^4}{3a}. \quad (3.21)$$

Logo isso estabelece uma relação entre os parâmetros da teoria e o ponto de inflexão de $A(t)$. Resolvendo a equação acima obtemos A_{inflex} . Teremos então que,

$$A_{\text{inflex}} = \left[\frac{3a}{2\Lambda_0} W\left(\frac{2b^2 e^2 \Lambda_0}{3a}\right) \right]^{1/4}, \quad (3.22)$$

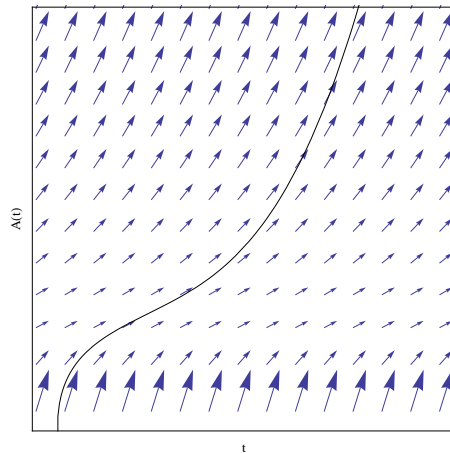


Figura 3.3: Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana sem soluções estacionárias ($a < 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$.

onde temos que para qualquer a e b que satisfaçam a condição do caso em questão, teremos A_{inflex} real, pois a função de Lambert $W(z) > 0$ se $z > 0$.

Portanto, tomando a raiz positiva da Eq.(3.7), apresentamos na Figura 3.4 a solução numérica para $A(t)$ e as curvas com os comportamentos das quantidades dinâmicas avaliadas nos valores que $A(t)$ assume na solução numérica.

Temos então neste gráfico que as quantidades dinâmicas começam divergindo no começo singular da expansão de $A(t)$ e passam a decrescer a medida que $A(t)$ expande seguindo o comportamento mostrado na Figura 3.4 até que tornam-se nulas. Em comparação com os resultados obtidos por De Lorenci (2010), a transição de fase de uma expansão desacelerada para uma acelerada, no caso com seção espacial aberta, era obtido quando $A(t) = \sqrt{e}b$, e as expressões para as quantidades dinâmicas deveriam ser similares as nossas, já que, em essência, a mesma lagrangeana está sendo usada, a menos do fator λ que leva em conta o regime onde a lagrangiana fica tipo-Maxwell, o qual é o estado fundamental da teoria efetiva de Yang-Mills [26]. No nosso tratamento, ao considerarmos $\Lambda_0 \neq 0$, obtemos na equação de Raychaudhuri no contexto do modelo FLRW, Eq.(1.99), um termo com constante cosmológica, acoplado a $A(t)$ e que contribui acelerando a expansão, desde que Λ_0 seja positiva. Portanto, somente a violação de SEC ($\rho + 3p < 0$) é suficiente para que o modelo apresente uma fase acelerada, porém não necessária já que no contexto da

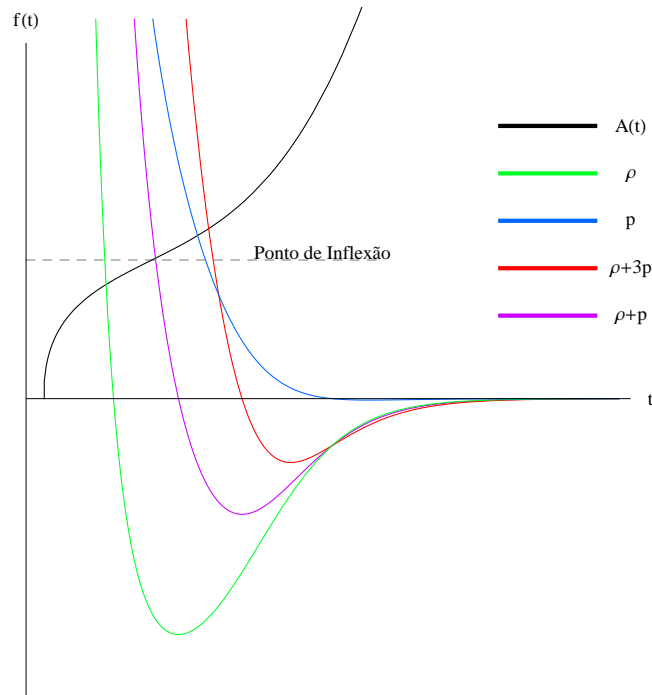


Figura 3.4: Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana sem soluções estacionárias ($a < 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $a = eb^2\Lambda_0/3$, $b = \Lambda_0 = 1$.

Eq.(1.99) a condição para $\ddot{A} > 0$ é tal que,

$$\Lambda_0 > \frac{\kappa}{2}(\rho + 3p), \quad (3.23)$$

a qual, por fim, é a mesma relação obtida na Eq.(3.20), só que em termos de a e b . Porém, na relação acima fica mais fácil interpretar em termos das quantidades dinâmicas o que ocorre nas proximidades do ponto de inflexão. O que temos é que este ponto de inflexão está associado ao balanceamento entre a atração gravitacional providenciada pela densidade de massa gravitacional ativa [23], $\rho_{grav} = \rho + 3p$, e a repulsão gravitacional proporcionada por uma constante cosmológica positiva, $\Lambda_0 > 0$. Temos então que o universo evolui expandindo de um ponto singular $A(\tau_0) = 0$, onde as quantidades dinâmicas divergem e a constante Λ_0 fica irrisória, para um $A(t) > A(\tau_0)$. No decorrer da expansão as quantidades dinâmicas decrescem no tempo, pois elas dependem de $B(t)$, que por sua vez é tal que $B(t) \propto A^{-2}(t)$, e a constante Λ_0 fica cada vez mais relevante a medida que $A(t)$ cresce. Portanto, é atingindo um ponto na expansão, A_{inflex} , onde o termo de repulsão supera o termo de atração gravitacional e o expansão passa de uma fase desacelerada pra uma fase acelerada. Podemos concluir então que neste caso uma expansão que inicia desacelerada e depois evolui para uma fase acelerada é providenciada não só devido a natureza do

fluido considerado, o qual tem a positividade de suas quantidades dinâmicas violadas em certos regimes no decorrer da expansão, mas também devido a presença de uma constante cosmológica positiva que tende a dominar a dinâmica da evolução a medida que $A(t)$ cresce e as quantidades dinâmicas anulam-se.

Caso com uma solução de equilíbrio, $a = 2eb^2\Lambda_0/3$:

Neste caso, como há uma solução real positiva para a Eq.(3.16), logo teremos uma solução de equilíbrio ($\dot{A} = 0$). Como estamos nos valendo da observada expansão do universo, vamos tratar novamente apenas da raiz positiva da Eq.(3.7), portanto isso implica que quando \dot{A} não for nulo, ele é maior que zero, implicando portanto que $A(t)$ é uma função crescente no tempo, excluindo obviamente o ponto de equilíbrio. É possível ainda usar na Eq.(3.16) a condição para este caso, $a = 2eb^2\Lambda_0/3$, e obter que,

$$A_0^2 = \sqrt{e}b, \quad (3.24)$$

onde podemos usar este resultado da Eq.(3.24) e a condição do caso, $a = 2eb^2\Lambda_0/3$, na Eq.(3.12) para comprovar que A_0 neste caso é realmente um ponto de equilíbrio, já que iremos obter $\ddot{A} = 0$. Contudo, ao tomar valores menores, $A_0^- < \sqrt{e}b$, na Eq.(3.12), teremos que $\ddot{A} < 0$. Analogamente, ao tomar valores maiores, $A_0^+ > \sqrt{e}b$, na Eq.(3.12), teremos que $\ddot{A} > 0$. Dessa forma, podemos concluir que dada esta condição, $A(t)$ cresce desaceleradamente até alcançar a solução de equilíbrio A_0 , ou cresce aceleradamente partindo da solução de equilíbrio A_0 . Quem estabelecerá um comportamento ou o outro é a condição inicial de $A(0)$, para o qual teremos,

- se $A(0) < A_0 \rightarrow A(t)$ expande desaceleradamente;
- se $A(0) > A_0 \rightarrow A(t)$ expande aceleradamente.

Na Figura 3.5 apresentamos o gráfico da solução numérica de $A(t)$ neste caso junto com o campo de direções obtido da Eq.(3.7) que é o mesmo comportamento obtido por De Lorenci (2010) no caso de seção espacial aberta com uma solução de equilíbrio, onde dependendo da condição inicial para $A(t)$, seja ele menor ou maior que A_0 , ele pode evoluir expandindo desacelerado ou acelerado, como pudemos supor ao avaliar a Eq.(3.12) neste contexto. Temos então que caso $A(0) < A_0$, então $A(t)$ expandirá a partir de uma singularidade $A(\tau_0) = 0$ desaceleradamente até atingir o valor de A_0 e então permanecerá estacionado neste valor. Portanto esta solução descreve um modelo de universo singular

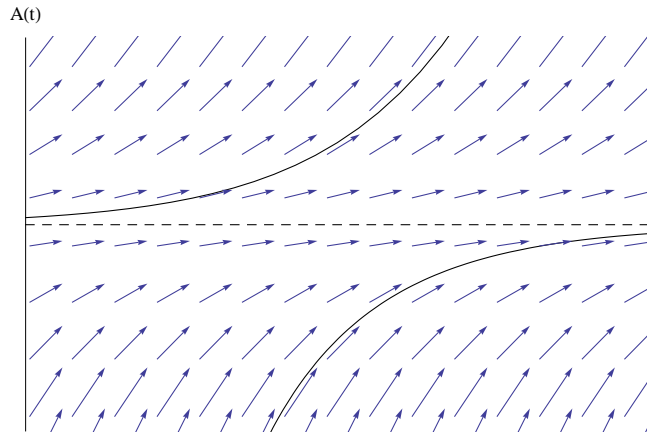


Figura 3.5: Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). A linha tracejada representa a solução de equilíbrio A_0 , enquanto que as curvas acima e abaixo de A_0 representam as soluções numéricas de A_0^+ e A_0^- respectivamente. Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$.

expandindo desaceleradamente. Na outra possibilidade, $A(0) > A_0$, teremos um modelo que descreve um universo não-singular, posto que $A(t) > A_0 \forall t$, expandindo aceleradamente. Portanto, essas duas soluções são separadas pela solução de equilíbrio A_0 , que atuará como atratora quando $A(0) < A_0$, e fonte quando $A(0) > A_0$ [8]. Apesar de A_0 ser uma solução estacionária, desde que pequenas flutuações sejam permitidas a $A(t)$ no domínio de instabilidade onde $A(t) > A_0$, seria possível uma situação onde um modelo de universo singular expandindo desaceleradamente a partir de uma singularidade evoluísse para uma expansão acelerada.

Tal comportamento novamente só é possível no caso com seção espacial plana quando se toma $\Lambda_0 > 0$. Como no caso sem soluções de equilíbrio, a relação implícita entre a , b e Λ_0 , torna a magnitude de Λ_0 irrelevante em relação a existência dos pontos críticos de $A(t)$ quando se fixa b (e se estabelece a de modo a satisfazer cada caso). O que pode mudar com a magnitude de Λ_0 é o tempo para que $A(t)$ atinja o ponto crítico.

Para visualizar o que ocorre com as quantidades dinâmicas neste cenário, iremos plotar o gráfico com as soluções numéricas de $A(t)$ e das quantidades dinâmicas avaliadas nos valores obtidos na solução numérica de $A(t)$. Na Figura 3.6 temos solução numérica de A_0^- , onde as condições iniciais são tais que $A_0^- < A_0$.

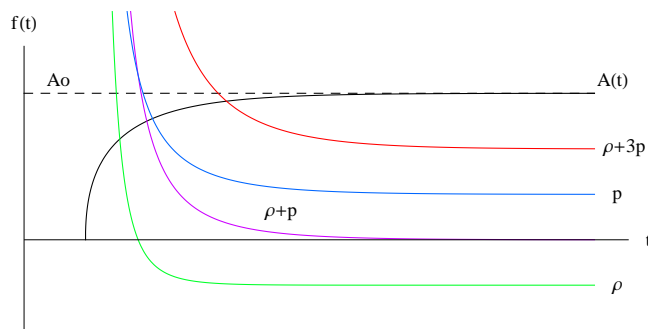


Figura 3.6: Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e a condição inicial $A(t) = A_0^- < A_0$.

Temos então que como consequência da singularidade as quantidades dinâmicas iniciam divergentes, e a medida que o universo se expande, elas vão decrescendo com o tempo até que a densidade ρ se torna negativa, devido as características do fluido em questão, e então $A(t)$ atinge a solução estacionária. Podemos considerar da Eq.(1.98) que $\dot{A} = 0$ quando $\dot{\rho} = 0$, que é o que podemos comprovar na Figura 3.6.

Já no caso da condição inicial satisfazendo $A(0) > A_0$ teremos o comportamento das quantidades dinâmicas apresentado junto com a solução numérica de $A(t)$ na Figura 3.7.

De acordo com o gráfico apresentado na Figura 3.7 podemos interpretar que sendo inicialmente $\dot{\rho} \geq 0$ e $\rho + p \leq 0 \quad \forall t$, logo, da Eq.(1.98), $\dot{A} > 0 \quad \forall t$, implicando então que $A(t)$ seja crescente. O comportamento acelerado, como já vimos, é devido ao termo com constante cosmológica que antecipa a aceleração antes que SEC seja violada ($\rho + 3p < 0$). Depois de um certo tempo todas as quantidades dinâmicas vão a zero e a expansão é dirigida por $\Lambda_0 > 0$. Este cenário apresenta uma configuração para o fluido tal que no volume mínimo A_{min}^3 tenhamos $\rho < 0$ e $\rho \simeq -p$. Esta configuração é uma característica do sistema descrito pela densidade de lagrangeana dada pela Eq.(2.36).

Caso com duas soluções de equilíbrio, $a > 2eb^2\Lambda_0/3$:

Por fim, temos o caso que implica em duas soluções de equilíbrio. Na Figura 3.8 vemos que no intervalo entre as duas soluções de equilíbrio há uma descontinuidade, ou seja, neste intervalo entre as duas soluções de equilíbrio, $A_0^a < A(t) < A_0^b$, nenhuma solução real pode

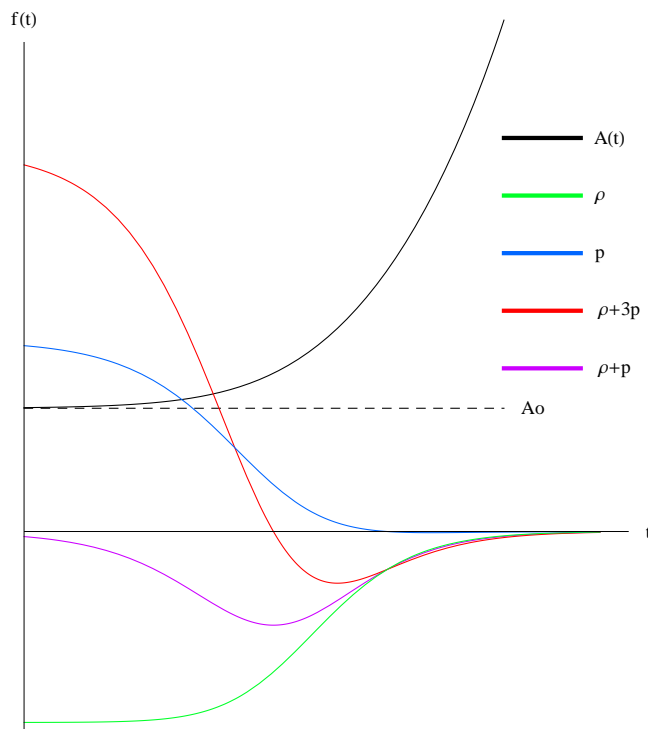


Figura 3.7: Comportamento de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana com uma solução estacionária ($a = 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e a condição inicial $A(t) = A_0^+ > A_0$.

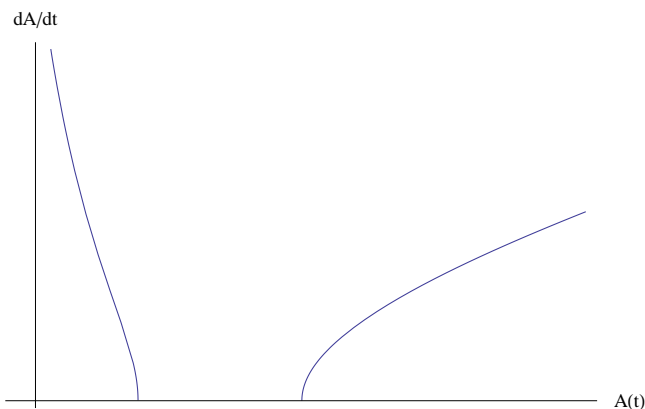


Figura 3.8: Comportamento de \dot{A} a medida que $A(t)$ cresce a partir de uma singularidade, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana e duas soluções estacionária ($a > 2eb^2\Lambda_0/3$). Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e $a = 4eb^2\Lambda_0/3$.

ser obtida, como pode ser concluído através da Eq.(3.7). Esse intervalo sem soluções reais tende a zero a medida que a fica igual a $2eb^2\Lambda_0$, onde se configurando o caso com uma solução estacionária, $A_0^a = A(t) = A_0^b$. Portanto, podemos esperar que o comportamento de $A(t)$ seja idêntico ao caso anterior a menos de uma região sem soluções permitidas para $A(t)$, um *gap* entre as duas soluções de equilíbrio que cresce a medida que a seja maior

que $2eb^2\Lambda_0$. Novamente plotamos a solução numérica deste caso junto com o campo de direções obtido da Eq.(3.7), e confirmamos a análise que fizemos acima, como pode ser visto na Figura 3.9.

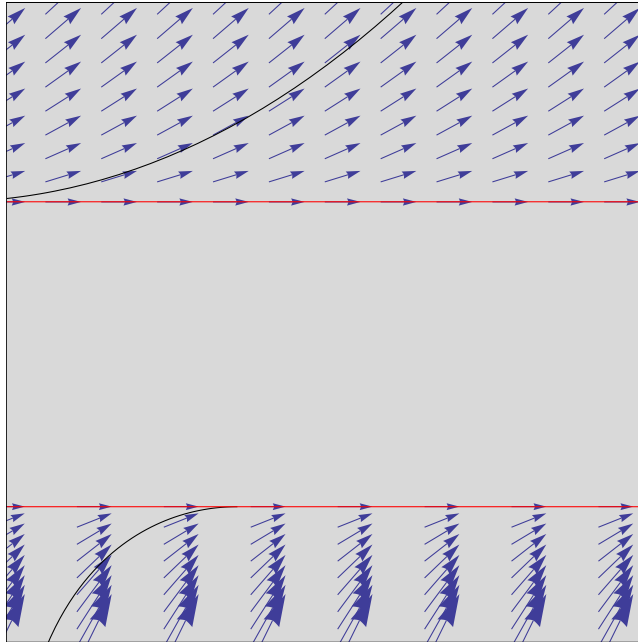


Figura 3.9: Gráfico da solução numérica e campo de direções de $A(t)$, raiz positiva, no caso do Universo Magnético com seção espacial plana e duas soluções estacionárias ($a > 2eb^2\Lambda_0/3$). As retas em vermelho representam as soluções de equilíbrio A_0^a e A_0^b , enquanto que as curvas abaixo de A_0^a e acima de A_0^b representam as soluções numéricas de $A(0) < A_0^a$ e $A(0) > A_0^b$, respectivamente. Tomamos $b = \Lambda_0 = 1$ e $a = 4eb^2\Lambda_0/3$.

Dessa maneira, a mesma análise feita no caso anterior sobre as quantidades dinâmicas pode ser repetido aqui atentando apenas para o fato que agora temos uma região de separação entre as duas soluções de equilíbrio existentes, para o qual não há soluções reais de $A(t)$. Portanto as duas soluções de equilíbrio não estão conectadas e pequenas flutuações em $A(t)$ no domínio entre elas não ocasionaria uma transição de fase de uma para a outra. Logo, da Figura 3.9, temos o mesmo comportamento que foi obtido por De Lorenci (2010) para o caso de seção espacial aberta contendo duas soluções de equilíbrio, mas novamente tivemos que $\Lambda_0 > 0$ possibilitou tal comportamento no caso com seção espacial plana. A solução A_0^a funciona como atratora para soluções satisfazendo $A(0) < A_0^a$, enquanto que A_0^b funciona como fonte para soluções satisfazendo $A(0) > A_0^b$. Temos que para $A(0) < A_0^a$ um modelo descrevendo uma expansão desacelerada a partir de uma singularidade. Já para

$A(0) > A_0^b$ temos um modelo descrevendo uma expansão acelerada a partir de um valor não-nulo A_0^b . Este modelo corresponde portanto a um modelo cosmológico não-singular expandindo aceleradamente.

3.1.2 Relação entre os parâmetros da teoria e o comportamento de $A(t)$

As análises do comportamento de $A(t)$ foram feitas qualitativamente em termos de a e b , que por sua vez foram definidos nas Eqs.(3.5, 3.6). Obtemos que devido a existência de uma constante cosmológica não-nula os parâmetros da teoria, b_0 , λ e B_0^2 , influenciam fortemente o comportamento de $A(t)$ para as três geometrias, $\epsilon = \{-1, 0, 1\}$, implicando em soluções singulares, ou não-singulares, e a classificação de pontos críticos, como soluções estacionárias ou pontos de inflexão. Todos esses aspectos foram esclarecidos no tratamento numérico feito acima. No entanto, se usamos as Eqs.(3.5, 3.6) para escrever as condições tratadas na seção anterior em termos dos parâmetros da teoria, obtemos o surpreendente resultado de que o comportamento de $A(t)$ não depende do campo magnético de cor primordial, B_0 , mas sim da escala de renormalização da teoria. Ou seja, vimos que cada caso tratado estava associado a aos seguintes vínculos:

$$a < \frac{2eb^2\Lambda_0}{3} \quad , \quad a = \frac{2eb^2\Lambda_0}{3} \quad e \quad a > \frac{2eb^2\Lambda_0}{3}. \quad (3.25)$$

Das Eq.s.(3.5, 3.6) teremos que as relações acima podem ser escritas em termos apenas dos seguintes parâmetros do modelo

$$\lambda^2 < \frac{2\Lambda_0}{b_0\kappa} \quad , \quad \lambda^2 = \frac{2\Lambda_0}{b_0\kappa} \quad e \quad \lambda^2 > \frac{2\Lambda_0}{b_0\kappa}. \quad (3.26)$$

Portanto,

- (I) - Se $\lambda^2 > 2\Lambda_0/b_0\kappa$, há duas soluções positivas de equilíbrio;
- (II) - Se $\lambda^2 = 2\Lambda_0/b_0\kappa$, há uma solução positiva de equilíbrio;
- (III) - Se $\lambda^2 < 2\Lambda_0/b_0\kappa$, não há pontos de equilíbrio.

Posto dessa forma, sendo λ o parâmetro de renormalização da teoria com correção a 1-loop e sendo Λ_0 a constante cosmológica, que por sua vez tem uma magnitude muito pequena, podemos advogar em defesa do caso **I**, que apresenta duas soluções estacionárias. Além do mais, temos que apenas o ramo que descreve um universo não-singular expandindo

aceleradamente é respaldado pelos dados observacionais. Assim como em (De Lorenci, 2010), é importante notar que ao se considerar a raiz negativa da Eq.(3.7), podemos conectá-la à raiz positiva tratada aqui e conceber um cenário de universo que evolui de uma fase colapsante para uma fase de expansão acelerada ao atingir o valor de $A(t)$ para a solução estacionária A_0^b . Produzindo um modelo não-singular apresentando um *bouncing* [8]. Analisando um pouco mais este caso em específico nós poderíamos nos preocupar com o fato dessa expansão acelerada continuar indefinidamente, porém como mostramos que no modelo de universo magnético a relação entre $B(t)$ e $A(t)$ é tal que $B(t) \propto A(t)^{-2}$, logo o campo decai durante a expansão e inevitavelmente sai do regime de aplicabilidade atendido pela densidade de lagrangeana que estamos usando para descrever o fluido cósmico dominante. De fato, temos que no regime onde a intensidade de F é próximo da massa de renormalização da teoria μ^4 , o termo dominante na densidade de lagrangeana é um termo tipo-Maxwell, o qual viabiliza um comportamento de expansão desacelerada. Ou seja, torna-se naturalmente possível dessa forma uma fase inflacionária em um universo não-singular, homogêneo e isotrópico com o acoplamento mínimo entre campos de Yang-Mills e a cosmologia de FLRW [8] com seção espacial plana. Portanto, estamos respaldando a hipótese de que as soluções obtidas neste trabalho tratam de descrever o comportamento de $A(t)$ numa fase primitiva do universo. A medida que o universo expande o plasma dominante evolui estruturando outras formas mais convencionais de matéria (como por exemplo, radiação), que se tornariam o conteúdo dominante no universo numa próxima fase da evolução [8].

Conclusões

Neste trabalho investigamos as implicações cosmológicas do acoplamento mínimo entre gravidade e campos efetivos de Yang-Mills como feito em (De Lorenci, 2010), porém consideramos a teoria da relatividade geral com constante cosmológica $\Lambda_0 > 0$. Tal consideração resultou na possibilidade de uma expansão acelerada de $A(t)$ para as demais classe topológicas, e não somente para o universo com seção espacial aberta, como obtido em (De Lorenci, 2010), o qual considerou $\Lambda_0 = 0$. Contudo, nos casos com seção espacial aberta e fechada, $\epsilon = \{-1, 1\}$, somente um tratamento numérico era possível para obter os pontos críticos $A(t)$, nos obrigando a atribuir valores numéricos aos parâmetros envolvidos sem o conhecimento das relações entre eles. Dessa forma, nos valendo dos dados observacionais que medem uma seção espacial aproximadamente plana, $\epsilon \simeq 0$, tratamos o modelo no contexto de $\epsilon = 0$ e apresentamos todos os possíveis comportamentos da função crescente $A(t)$.

Em síntese, obtemos três casos distintos que relacionam os possíveis valores dos parâmetros da teoria e implicam no comportamento de $A(t)$ caracterizando-o como singular ou não-singular e identificando seus pontos críticos. O caso onde $a < 2eb^2\Lambda_0/3$, obtemos um modelo com singularidade inicial, que se expande desaceleradamente até atingir um ponto de inflexão, dado pela Eq.(3.22), onde passa a se expandir aceleradamente. Isso ocorre não somente devido a densidade de energia (ρ) do fluido apresentar-se negativa, mas também devido ao caráter repulsivo de Λ_0 , que passa a reger a expansão quando as quantidades dinâmicas tornam-se nulas. No caso onde $a = 2eb^2\Lambda_0/3$, $A(t)$ apresenta uma solução estacionária A_0 que separa as soluções com expansão acelerada das desaceleradas. Obviamente, esta propriedade é estabelecida pela Eq.(3.12) e fornece que as soluções com condição inicial satisfazendo $A(0) < A_0$ descrevem uma expansão desacelerada, enquanto que as que satisfazem $A(0) > A_0$ descrevem uma expansão acelerada. Por fim, no caso onde $a > 2eb^2\Lambda_0/3$, duas soluções estacionárias são obtidas, porém o intervalo entre elas

não apresenta soluções reais para $A(t)$. Neste caso teremos um *gap* entre as duas soluções estacionárias. Análogo ao caso com uma solução estacionária, teremos que as soluções que satisfazem $A(0) < A_0^a$ descrevem uma expansão desacelerada, enquanto que as que satisfazem $A(0) > A_0^b$ descrevem uma expansão acelerada, onde $A_0^a < A_0^b$. Nestes dois últimos casos, as soluções que descrevem uma expansão desacelerada são singulares, enquanto que as que descrevem uma expansão acelerada são não-singulares, com o valor mínimo para $A(\tau_0) = A_0$, no caso com uma solução estacionária, e $A(\tau_0) = A_0^b$ no caso com duas soluções estacionárias.

Apesar do modelo proposto neste trabalho se aplicar a uma fase primordial do universo, onde o regime de altas energias do fluido cósmico pode ser descrito pela lagrangeana efetiva de Yang-Mills, temos a expectativa de que esta lagrangeana seja também candidata a descrever o fluido cósmico atual. Isto pode ser inferido a partir dos comportamentos de $A(t)$ apresentados neste trabalho. Obtivemos casos que se enquadram qualitativamente com o comportamento indicado pelos dados observacionais. Desta forma, as relações entre os valores dos parâmetros implicariam em restrições sobre as possíveis soluções para $A(t)$ que concordam com o comportamento medido. Nesta perspectiva, pode-se sugerir que o fluido cósmico atual deve ser descrito por uma lagrangeana não-linear para os campos envolvidos.

Concluimos então que ao se considerar uma constante cosmológica positiva em um modelo de universo dominado por um fluido de Yang-Mills, é possível obter soluções inflacionárias nos modelos não-singulares com seção espacial plana² ($\epsilon = 0$). Tal resultado tornou-se possível devido a motivação observacional para se considerar uma constante cosmológica positiva, que embora possa ter uma magnitude muito pequena, tem sua relevância intensificada pelo valor do fator de escala que cresce durante a evolução.

²Soluções apresentando uma fase inflacionária em modelos com seção espacial plana foi obtido em (Zhang, 1994), ao se considerar um condensado elétrico [13].

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York: John Wiley and Sons, (1972).
- [2] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge: Cambridge University, (2005).
- [3] M. Novello. *O que é Cosmologia? - A revolução do Pensamento Científico*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., (2006).
- [4] A. Friedmann *Z. Phys.*, **10**, 377 (1922);
A. Friedmann *Z. Phys.*, **21**, 326 (1924).
- [5] G. Lemaître, *Ann. Soc. Sci. Brux. A*, **47**, 49 (1927).
- [6] H.P. Robertson, *Astrophys. J.*, **82**, 248 (1935).
- [7] A.G. Walker *Proc. Lond. Math. Soc* **42**, 90 (1936).
- [8] V.A. De Lorenci, *Class. Quantum Grav.*, **27**, 065007 (2010).
- [9] M. Novello e S.E. Bergliaffa , *Phys. Rep.*, **463**, 127 (2008).
- [10] M. Novello e J.M. Salim , *Phys. Rev.*, **20**, 377 (1979).
- [11] V. Mukhanov e R. Brandenberg , *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1969 (1992).
- [12] H.P. de Oliveira e J.M. Salim , *Acta Phys. Pol. B*, **19**, 649 (1988).
- [13] Y. Zhang, *Phys. Lett. B* **340**, 18 (1994).
- [14] W. Zhao e Y. Zhang, *Class. Quantum Grav.*, **23**, 3405 (2006).
- [15] Y. Zhang, T.Y. Xia e W. Zhao, *Class. Quantum Grav.*, **24**, 3309 (2007).

- [16] J.V. Narlikar, *An Introduction to Cosmology*, Cambridge: Cambridge University Press, (2002).
- [17] D.N. Spergel *et al*, *Astrophys. J. Suppl.*, **170**, 377, (2007).
- [18] U. Kirchner e G.F.R. Ellis, arXiv:astro-ph/0302597, (2003).
- [19] Y.B. Zel'dovich, *Soviet Physics Uspekhi*, **11**, 381 (1968).
- [20] M. Novello. *Cosmologia*. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2010). (Coleção CBPF - Tópicos em física).
- [21] J. Plebanski e A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge: Cambridge University Press, (2006).
- [22] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, (2003).
- [23] G.F.R. Ellis, *On the Raychaudhuri equation*, *Pramana* **69**, 2007, p. 15–22.
- [24] A. Raychaudhuri, *Phys. Rev.*, **98**, 1123 (1955).
- [25] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, New York: Pergamon Press, (1971).
- [26] H. Pagels e E. Tamboulis, *Nucl. Phys. B*, **143**, 485 (1977).
- [27] R.C. Tolman e P. Ehrenfest, *Phys. Rev.*, **36**, 1791 (1930).
- [28] M. Novello e E. Goulart. *Eletrodinâmica Não Linear*. São Paulo: Editora Livraria da Física, (2010). (Coleção CBPF - Tópicos em física).
- [29] V.A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello e J.M. Salim *Phys. Rev. D* **65**, 063501 (2002).
- [30] H.P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.*, **5**, 62 (1933)
D. Edwards, *Astrophys. Space Sci.*, **24**, 563 (1973).
- [31] J.C. Collins, A. Duncan, S.D. Joglekar, *Phys. Rev. D*, **16**, 438 (1977).
- [32] D.J. Gross e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343 (1973).

- [33] H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346 (1973).
- [34] D.R.T. Jones, *Nucl. Phys. B*, **75**, 531 (1974).
- [35] W.E. Caswell, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 244 (1974).
- [36] S.L. Adler, *Phys. Rev. D*, **23**, 2905 (1981).
- [37] S.L. Adler e T.Piran , *Rev. Mod. Phys.*, **56**, 1 (1984).
- [38] D. Lemoine e M. Lemoine, *Phys. Rev. D*, **52**, 1955 (1995).
- [39] M. Demianski, N. Sánchez e Y. Parijskij, *Topology of the universe and the cosmic microwave background radiation. The Early Universe and the Cosmic Microwave Background: Theory and Observations*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. The early universe and the cosmic microwave background: theory and observations. Springer, **130** (2003).
- [40] E.W. Weisstein, *Concise Encyclopedia of Mathematics*, Boca Raton/FL: CRC Press, (1998).