

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA**  
**DE EULER-BERNOULLI, VLASOV,**  
**CISALHAMENTO E TIMOSHENKO**  
**COM APOIOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS**

**Autor: Alberto Cardoso Almeida**

**Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Itajubá, Maio de 2012

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA  
DE EULER-BERNOULLI, VLASOV,  
CISALHAMENTO E TIMOSHENKO  
COM APOIOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS**

Autor: **Alberto Cardoso Almeida**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia Mecânica.

Itajubá, Maio de 2012

M.G – Brasil

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
**INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA  
DE EULER-BERNOULLI, VLASOV,  
CISALHAMENTO E TIMOSHENKO  
COM APOIOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS**

Autor: **Alberto Cardoso Almeida**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Composição da Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Juan Francisco Camino – DPM/FEM/UNICAMP**

**Prof. Dr. José Celio Dias - IEM/UNIFEI**

**Prof. Dr. José Juliano de Lima Júnior - IEM/UNIFEI**

## **Dedicatória**

*Aos meus pais Alípio e Iracema, irmãs Elisa e Fernanda, sobrinhas Beatriz e Caroline e a minha namorada Rachel.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ser minha fortaleza, permitindo que não me abatesse diante das dificuldades que não foram poucas.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, pela competência, dedicação, paciência e amizade.

À Universidade Federal de Itajubá, pelo apoio na realização de mais este sonho.

Aos professores do Instituto de Engenharia Mecânica (IEM), pela colaboração.

Aos amigos Julio César Silva de Souza, Aureliano Rodrigues Ribeiro, Nanci Delducca, Luciana Bernardo Justino, Edson Castro Lima, Alexandre Salioni, Luiz de Gonzaga, Alex Combe, Demétrius Cabral, Felipe Eloy pelo permanente incentivo, amizade e companheirismo.

À minha família, minha fonte de inspiração, símbolo do mais sincero amor.

À minha namorada Rachel Bertoldo pelo carinho, pelas palavras de apoio e pelo importante incentivo profissional.

À FAPEMIG, através do Programa de bolsas, pelo apoio financeiro.

*“Cada pessoa que passa em nossa vida, passa sozinha, é porque nenhuma substitui outra. Cada pessoa que passa em nossa vida passa sozinha, e não nos deixa só, porque deixa um pouco de si e leva um pouquinho de nós. Essa é a mais bela responsabilidade da vida e a prova de que as pessoas não se encontram por acaso.”*

*Charles Chaplin.*

## Resumo

**ALMEIDA, A. C. (2012)**, Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko com Apoios Elásticos Variáveis, Itajubá, 131p. Dissertação, Mestrado em Projeto e Fabricação, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

Este trabalho apresenta um estudo dinâmico comparativo entre as frequências naturais dos modelos de viga escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko, com diferentes condições de apoios elásticos e seções variando na forma e dimensão. O desenvolvimento analítico apresenta as equações diferenciais que regem o comportamento dinâmico dos modelos estudados. Simulações numéricas são apresentadas comparando as frequências naturais adimensionais e dimensionais para vibrações transversais entre esses modelos. Os resultados obtidos com base no desenvolvimento teórico apresentado permitem compreender o comportamento dinâmico de vigas escalonadas e as diferenças entre os modelos, em função das frequências naturais e dos índices de esbeltez.

### **Palavras-chave**

Vibrações Mecânicas, Frequências Naturais, Viga Escalonada, Índice de Esbeltez, Seção Variável.

# Abstract

ALMEIDA, A. C. (2012), Dynamic Analysis of a Stepped Beam of Euler-Bernoulli, Vlasov, Shear and Timoshenko with Variables Elastic Supports, Itajubá, 131p. MSc. Dissertation – Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá.

This work presents a dynamic comparative study about the natural frequencies of stepped beam models Euler-Bernoulli, Vlasov, Shear and Timoshenko, with different conditions of elastic supports and sections varying in shape and dimension. The analytical development presents the differential equations that governing the dynamic behavior of the models studied. Numerical simulations are presented comparing the dimensionless and dimensional natural frequencies for transverse vibrations among these models. The results obtained based on the development theory presented allow us to understand the dynamic behavior of stepped beam and differences between the theoretical models in terms of natural frequencies and rates of slenderness.

## Keywords

Mechanical Vibrations, Natural Frequencies, Stepped Beam, Slenderness Ratio, Variable Cross-Section.

# Sumário

<b>SUMÁRIO</b>	<b>I</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>III</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>V</b>
<b>LISTA DE FOTOS</b>	<b>XI</b>
<b>SIMBOLOGIA</b>	<b>XII</b>
<b>LETRAS LATINAS</b>	<b>XII</b>
<b>LETRAS GREGAS</b>	<b>XIII</b>
<b>SUBSCRITOS</b>	<b>XIV</b>
<b>ABREVIATURAS</b>	<b>XV</b>
<b>OPERADORES</b>	<b>XV</b>
<b>SIGLAS</b>	<b>XV</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão da Literatura-----	4
1.2 Contribuição do Trabalho -----	8
1.3 Conteúdo-----	9
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>11</b>
<b>MODELOS DE VIGA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES</b>	<b>11</b>
2.1 Análise Dinâmica de uma Viga Escalonada em Várias Partes-----	11
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>27</b>
<b>VALIDAÇÃO</b>	<b>27</b>
3.1 Comparando Frequências Naturais de Viga Contínua Independente de sua Geometria	30
3.2 Comparando Frequências Naturais de Viga Escalonada em Duas Partes Independente de sua Geometria -----	40
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>45</b>
<b>EXPERIMENTO</b>	<b>45</b>
4.1 Análise Experimental -----	46

4.2 Descrição do Ensaio-----	46
4.3 Frequências Naturais -----	49
<b>CAPÍTULO 5</b> _____	<b>73</b>
<b>RESULTADOS</b> _____	<b>73</b>
5.1 Frequências Naturais Adimensionais de uma Viga Escalonada em Duas Partes-----	74
5.2 Frequências Naturais Adimensionais de uma Viga Escalonada em Três Partes-----	84
<b>CAPÍTULO 6</b> _____	<b>88</b>
<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> _____	<b>88</b>
6.1 Conclusões-----	88
6.2 Perspectivas Futuras-----	89
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> _____	<b>91</b>
<b>APÊNDICE A</b> _____	<b>96</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME DE EULER-BERNOULLI</b> _____	<b>96</b>
A.1 Equacionamento do Modelo de Viga de Euler-Bernoulli-----	96
<b>APÊNDICE B</b> _____	<b>108</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME DE VLASOV</b> _____	<b>108</b>
B.1 Equacionamento do Modelo de Viga de Vlasov -----	108
<b>APÊNDICE C</b> _____	<b>115</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME DE CISALHAMENTO</b> _____	<b>115</b>
C.1 Equacionamento do Modelo de Viga de Cisalhamento -----	115
<b>APÊNDICE D</b> _____	<b>122</b>
<b>MODELO DE VIGA UNIFORME DE TIMOSHENKO</b> _____	<b>122</b>
D.1 Equacionamento do Modelo de Viga de Timoshenko -----	122
<b>APÊNDICE E</b> _____	<b>127</b>
<b>INSTRUMENTAÇÃO</b> _____	<b>127</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Viga escalonada em $n$ partes. -----	12
Figura 3.1 – Fluxograma resumido do programa desenvolvido pelo autor. -----	28
Figura 3.2 – Viga contínua e suportada elasticamente em ambas as extremidades. -----	31
Figura 3.3 – Viga escalonada com uma mudança de seção de área, Tong (1995). -----	40
Figura 4.1 – Representação das vigas utilizadas nos ensaios: tipos (a), (b), (c) e (d). -----	47
Figura 4.2 - Desvio percentual relativo para as três primeiras frequências, $\hat{\beta}_{1,1}$ , $\hat{\beta}_{1,2}$ e $\hat{\beta}_{1,3}$ , de uma viga contínua de Euler-Bernoulli comparada a uma viga de Timoshenko. -----	51
Figura 4.3 - Espectro de frequência - viga uniforme, $\phi 38,04$ mm . -----	55
Figura 4.4 - Espectro de frequência - viga uniforme, $\phi 22,10$ mm . -----	56
Figura 4.5 - Espectro de frequência - viga uniforme, $\phi 12,64$ mm . -----	58
Figura 4.6 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi 38,04$ mm e $1/2 L$ - $\phi 28,66$ mm. -----	59
Figura 4.7 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi 22,10$ mm e $1/2 L$ - $\phi 16,32$ mm. -----	61
Figura 4.8 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi 12,64$ mm e $1/2 L$ - $\phi 9,10$ mm. -----	62
Figura 4.9 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 38,04$ mm e $2/3 L$ - $\phi 28,66$ mm. -----	64
Figura 4.10 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 22,10$ mm e $2/3 L$ - $\phi 16,32$ mm. -----	65
Figura 4.11 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 12,64$ mm e $2/3 L$ - $\phi 9,10$ mm. -----	67
Figura 4.12 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 38,04$ mm, $1/3 L$ - $\phi 28,66$ mm e $1/3 L$ - $\phi 19,02$ mm. -----	68

Figura 4.13 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 22,10$ mm, $1/3 L$ - $\phi 16,32$ mm e $1/3 L$ - $\phi 11,05$ mm.-----	70
Figura 4.14 - Espectro de frequência - viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi 12,64$ mm, $1/3 L$ - $\phi 9,10$ mm e $1/3 L$ - $\phi 6,30$ mm. -----	71
Figura A.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Euler-Bernoulli. -----	98
Figura B.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Vlasov.-----	109
Figura C.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Cisalhamento.-----	116

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua simulada.-----	32
Tabela 3.2 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais em rad/s – viga contínua engastada - pinada.----	33
Tabela 3.3 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e teóricos – viga contínua engastada - pinada. -----	33
Tabela 3.4 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais em rad/s – viga contínua bi-engastada.-----	34
Tabela 3.5 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e teóricos – viga contínua bi-engastada.-----	34
Tabela 3.6 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua simulada.-----	35
Tabela 3.7 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua pinada - pinada.-	35
Tabela 3.8 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua pinada - pinada. -----	36
Tabela 3.9 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua livre - livre.-----	36
Tabela 3.10 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua livre - livre. -----	36
Tabela 3.11 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua engastada - livre. -----	37
Tabela 3.12 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua engastada - livre. -----	37
Tabela 3.13 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua espessa simulada. -----	38
Tabela 3.14 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua espessa pinada - pinada.-----	38
Tabela 3.15 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua espessa pinada - pinada. -----	39
Tabela 3.16 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua espessa engastada - livre. -----	39
Tabela 3.17 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua espessa engastada - livre. -----	39
Tabela 3.18 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada em uma parte.-----	41

Tabela 3.19 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte engastada - livre. -----	41
Tabela 3.20 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - engastada - livre. -----	42
Tabela 3.21 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada em uma parte. -----	42
Tabela 3.22 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte engastada - deslizante. -----	43
Tabela 3.23 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - engastada - deslizante. -----	43
Tabela 3.24 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte pinada - deslizante. -----	44
Tabela 3.25 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - pinada - deslizante. -----	44
Tabela 4.1 – Diâmetro dos trechos das vigas utilizadas nos ensaios. -----	47
Tabela 4.2 – Desvio percentual relativo entre Euler-Bernoulli/Timoshenko - viga livre - livre. -----	51
Tabela 4.3 - Desvio percentual entre valores experimentais e valores teóricos, segundo Traill-Nash e Collar (Han et al, 1999). -----	52
Tabela 4.4 - Viga uniforme - $\phi 38,04$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).-----	55
Tabela 4.5 - Viga uniforme - $\phi 38,04$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais. -----	56
Tabela 4.6 - Viga uniforme - $\phi 22,10$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).-----	57
Tabela 4.7 - Viga uniforme - $\phi 22,10$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais. -----	57
Tabela 4.8 - Viga uniforme - $\phi 12,64$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).-----	58
Tabela 4.9 - Viga uniforme - $\phi 12,64$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais. -----	59

Tabela 4.10 - Viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi_1$ 38,04 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 28,66 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	60
Tabela 4.11 - Viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi_1$ 38,04 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 28,66 mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	60
Tabela 4.12 - Viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi_1$ 22,10 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 16,32 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	61
Tabela 4.13 - Viga escalonada- $1/2 L$ - $\phi_1$ 22,10 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 16,32 mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	62
Tabela 4.14 - Viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi_1$ 12,64 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 9,10 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	63
Tabela 4.15 - Viga escalonada - $1/2 L$ - $\phi_1$ 12,64 mm e $1/2 L$ - $\phi_2$ 9,10 mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	63
Tabela 4.16 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1$ 38,04 mm e $2/3 L$ - $\phi_2$ 28,66 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	64
Tabela 4.17 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1$ 38,04 mm e $2/3 L$ - $\phi_2$ 28,66 mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	65
Tabela 4.18 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1$ 22,10 mm e $2/3 L$ - $\phi_2$ 16,32 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	66
Tabela 4.19 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1$ 22,10 mm e $2/3 L$ - $\phi_2$ 16,32 mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	66

Tabela 4.20 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 12,64$ mm e $2/3 L$ - $\phi_2 9,10$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	67
Tabela 4.21 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 12,64$ mm e $2/3 L$ - $\phi_2 9,10$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	68
Tabela 4.22 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 38,04$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 28,66$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 19,02$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	69
Tabela 4.23 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 38,04$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 28,66$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 19,02$ mm - desvio relativos (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	69
Tabela 4.24 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 22,10$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 16,32$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 11,05$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	70
Tabela 4.25 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 22,10$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 16,32$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 11,05$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	71
Tabela 4.26 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 12,64$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 9,10$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 6,30$ mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz). -----	72
Tabela 4.27 - Viga escalonada - $1/3 L$ - $\phi_1 12,64$ mm, $1/3 L$ - $\phi_2 9,10$ mm e $1/3 L$ - $\phi_3 6,30$ mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.-----	72
Tabela 5.1 – Propriedades geométricas e materiais da viga simulada.-----	74
Tabela 5.2 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Euler-Bernoulli. -----	75
Tabela 5.3 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra - modelo de Vlasov.-----	76

Tabela 5.4 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Cisalhamento. -----	76
Tabela 5.5 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Timoshenko. -----	77
Tabela 5.6 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Euler-Bernoulli. -----	78
Tabela 5.7 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Vlasov. -----	78
Tabela 5.8 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Cisalhamento. -----	79
Tabela 5.9 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Timoshenko. -----	79
Tabela 5.10 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Euler-Bernoulli. -----	80
Tabela 5.11 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Vlasov. -----	81
Tabela 5.12 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Cisalhamento. -----	81
Tabela 5.13 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Timoshenko. -----	82
Tabela 5.14 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Euler-Bernoulli. -----	82
Tabela 5.15 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Vlasov. -----	83
Tabela 5.16 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Cisalhamento. -----	83
Tabela 5.17 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Timoshenko. -----	84
Tabela 5.18 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes - modelo de Euler-Bernoulli. -----	85

Tabela 5.19 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes – modelo de Vlasov -----	86
Tabela 5.20 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes – modelo de Cisalhamento.-----	86
Tabela 5.21 - 1 <sup>a</sup> , 2 <sup>a</sup> e 3 <sup>a</sup> Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes - modelo de Timoshenko. -----	87

## Lista de Fotos

Foto 4.2–Analisador de sinais, Martelo instrumentado e Vibrômetro laser-----	48
Foto 4.3 - Ensaio de flexão -----	53
Foto E.1 – Vista em perspectiva do vibrômetro -----	127
Foto E.2 – Vista frontal do analisador de sinais. -----	128
Foto E.3 – Vista lateral do martelo de impacto. -----	129
Foto E.4 – Medição do diâmetro da viga. -----	130
Foto E.5 – Vista frontal da máquina para ensaio de flexão.-----	131

## Simbologia

### Letras Latinas

$A$	área da seção transversal da viga modelo uniforme.	$m^2$
$b$	base de uma viga de seção retangular.	m
$\{b\}$	vetor de incógnitas.	
$B_i$	constante de integração.	
$C$	co-seno.	
$c$	velocidade de propagação da onda no meio sólido	
$CH$	co-seno hiperbólico.	
$D$	constante da equação temporal.	
$L_a$	distância entre apoios no ensaio de flexão.	m
$E$	modulo de elasticidade longitudinal.	GPa
$F$	força.	N
$f$	frequência natural.	Hz
$G$	modulo de elasticidade transversal.	GPa
$h$	altura da viga.	m
$[H]$	matriz de coeficientes do sistema linear.	
$I$	momento de inércia de área.	$m^4$
$\bar{I}$	relação de momentos de inércia de área de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$k_c$	fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento.	
$k_R$	constante de rigidez de rotação.	Nm/rad
$k_T$	constante de rigidez de translação.	Nm

$K$	constante.	
$L_i$	comprimento dos trechos da viga escalonada.	m
$L$	comprimento total da viga.	m
$\bar{L}$	relação de comprimento entre trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$n$	número de trechos de uma viga escalonada.	
$m$	massa.	kg
$M$	momento fletor.	Nm
$q$	carga distribuída por unidade de comprimento da viga.	N/m
$r$	raio de giração.	m
$\bar{r}_i$	relação de raios de giração de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$R$	constante adimensional inversamente proporcional a rigidez de rotação.	
$S$	seno.	
$SH$	seno hiperbólico.	
$t$	tempo.	s
$T$	função do tempo.	
$T$	constante adimensional inversamente proporcional a rigidez de translação.	
$v$	deslocamento na direção $y$ ou deflexão.	m
$V$	esforço cortante.	N
$\ddot{v}$	aceleração na direção $y$ .	m/s <sup>2</sup>
$X$	modo de vibração.	
$x$	eixo coordenado cartesiano.	
$y$	eixo coordenado cartesiano.	
$z$	eixo coordenado cartesiano.	

## Letras Gregas

$\bar{\beta}_i$	relação de frequências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada.	
$\beta_i$	frequência natural dimensional dos trechos da viga escalonada.	m <sup>-1</sup>

$\hat{\beta}_{1,k}$	$k$ - ésima frequência natural adimensional em relação ao primeiro trecho de uma viga escalonada.	
$\beta_{i,k}$	$k$ - ésima frequência natural dimensional em relação ao primeiro trecho de uma viga escalonada.	(m <sup>-1</sup> )
$\rho$	massa específica.	kg/m <sup>3</sup>
$\nu$	coeficiente de poisson.	
$\omega$	frequência natural angular.	rad/s
$\lambda$	índice de esbeltez.	
$\gamma_{xy}$	tensão de cisalhamento em um ponto arbitrário do material.	N/m <sup>2</sup>
$\psi$	ângulo rotação nos modelos de Vlasov e Timoshenko.	
$\theta$	ângulo de fase.	rad/s
$\mu$	relação entre modulo de elasticidade transversal e o longitudinal.	
$\delta$	deflexão.	m
$\phi$	diâmetro.	m

## Subscritos

1	índice do primeiro trecho da viga.
2	índice do segundo trecho da viga.
$n$	índice do $n$ - ésimo trecho da viga escalonada.
$b_j$	índice da constante de integração para uma viga com infinitos escalonamentos.
$i$	índice de uma viga escalonada com $n$ partes.
$k$	índice que indica a $k$ -ésima frequência natural.
$x$	eixo cartesiano.
$y$	eixo cartesiano.
$z$	eixo cartesiano.
$o$	condição inicial.

## Abreviaturas

MEF      Método dos Elementos Finitos

## Operadores

$\{ \}$       vetor.

$[ ]$       matriz.

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$       segunda derivada com relação ao tempo.

$\frac{\partial^4}{\partial t^4}$       quarta derivada com relação ao tempo.

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$       segunda derivada com relação a  $x$ .

$\frac{\partial^4}{\partial x^4}$       quarta derivada com relação a  $x$ .

## Siglas

IEM      Instituto de Engenharia Mecânica

UNIFEI      Universidade Federal de Itajubá

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO**

A inovação sempre tem acompanhado o homem em sua existência, é assim que durante o transcurso da história, baseando-se nas suas necessidades, as pessoas conseguiram, a partir da observação dos fenômenos e da racionalização dos processos, desenvolver metodologias claras para a solução de problemas específicos.

Todo fenômeno físico da natureza pode ser avaliado com algum grau de precisão, desde que o modelo físico-matemático adotado para representá-lo, descreva adequadamente o comportamento que se quer analisar. De uma forma geral, pode-se expressar tal modelo por meio de uma ou mais equações diferenciais ou integrais. Em análise estrutural é importante conhecer o comportamento de estruturas quando solicitadas por cargas estáticas e/ou dinâmicas.

A partir da análise estática, determinam-se tensões e deformações nas estruturas sob carregamento estático, incluindo seu próprio peso. Essas grandezas devem ficar numa faixa de valores permissíveis a fim de garantir a segurança e a funcionalidade das estruturas. Assim considerável esforço é despendido pelos engenheiros justamente para determinar os carregamentos a que estão sujeitas as estruturas por eles dimensionadas. Poucos são os casos em que soluções analíticas podem ser desenvolvidas nessa tarefa. Frequentes são os casos hiperestáti-

cos e/ou com geometria variável, nos quais ferramentas numéricas são praticamente indispensáveis. O método de elementos finitos, por exemplo, foi desenvolvido nesse contexto para a resolução de problemas complexos da mecânica estrutural (Rosa, 1995).

Embora a análise estática seja necessária, ela não é suficiente para assegurar a integridade das estruturas. De fato, na prática, os carregamentos ou esforços costumam ser constituídos de uma parcela estática e outra dinâmica. Esses esforços dinâmicos induzem vibrações que, além de alterar o quadro geral de tensões e deformações, causam ruídos, interferências em equipamentos ou máquinas apoiadas nessas estruturas, instabilidades de operação, aceleração no desgaste, redução na vida útil, entre outras. A resposta dinâmica de uma estrutura a excitações harmônicas depende, essencialmente, das propriedades como rigidez, massa e amortecimento que influenciam a frequência natural e o modo de vibração. Essas propriedades, por sua vez, resultam da geometria, materiais, condições de vinculação ao meio externo, entre outras. Assim, há situações em que além da caracterização estática, os engenheiros devem investigar características vibratórias e possíveis respostas dinâmicas para variadas condições de carregamento.

A viga é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas, e é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas.

Um relato histórico bastante detalhado e interessante sobre o problema de flexão de vigas é dado por Timoshenko (1953). Partindo dos trabalhos de Galileo, ele descreve os refinamentos sofridos pelas teorias de vigas devido a Bernoulli, Euler, Coulomb, Saint-Venant, Poisson, Kirchhoff, Rayleigh, e a ele próprio, entre outros. Segundo Han et al (1999), as teorias de vigas mais utilizadas na atualidade, ainda usam os mesmos princípios básicos desenvolvidos há várias décadas, ou em certos casos, há séculos atrás.

Foi reconhecido pelos primeiros pesquisadores que o efeito da flexão é o efeito mais importante em uma viga vibrando transversalmente. O modelo de Euler-Bernoulli inclui a energia potencial devido à flexão e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. Esta teoria data do século XVIII. Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu primeiramente que a cur-

vatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento flexural naquele ponto. Daniel-Bernoulli (1700-1782), o sobrinho de Jacob, foi o primeiro a formular a equação diferencial de movimento de uma viga. Posteriormente, a teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler (1707-1783) em suas investigações da forma das vigas elásticas para várias condições de carregamento. Muitos avanços sobre curvas elásticas foram obtidos por Euler, conforme discutido em Timoshenko (1953). A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, pois é menos complexa e fornece aproximações razoáveis para muitos problemas. Porém, esta teoria tende a superestimar as frequências naturais. Este problema é exacerbado para as frequências naturais dos modos de alta frequência (Costa, 2006). Além disso, a predição das frequências também é melhor para vigas finas ou esbeltas do que para as vigas não esbeltas (Lima Jr e Arantes, 2000).

De acordo com Han et al (1999) a teoria de Vlasov ou Rayleigh representa um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por incluir o efeito da inércia de rotação da seção transversal. Como consequência, parcialmente corrige os efeitos da superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as frequências naturais são ainda superestimadas.

Já o modelo de Cisalhamento adiciona distorção de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli e, dessa forma, a estimativa das frequências naturais melhora consideravelmente (Han, 1999).

Timoshenko (1921) propôs uma teoria de viga que adiciona tanto o efeito de cisalhamento quanto o efeito da inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli. O modelo de Timoshenko foi e ainda é a maior melhoria para aproximação da resposta de vigas não esbeltas e para altas frequências, onde os efeitos do cisalhamento e da inércia rotação não podem ser desprezados (Costa, 2006). Seguindo Timoshenko, vários autores têm obtido as equações para frequências e modos de vibração para várias configurações de condições de contorno (Costa, 2006).

Neste trabalho, é apresentado um estudo dinâmico comparativo entre as frequências naturais para os modelos de viga escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko. São determinadas as primeiras frequências naturais adimensionais e dimensionais, ou seja, uma das propriedades física que mais caracteriza uma estrutura. Esse interesse se justifica devido ao bom número de estruturas mecânicas que podem ser aproximadas como vigas escalonadas, entre as quais: estruturas aeronáuticas, civis e mecânicas. Daí o interesse em se levar em consideração as principais mudanças de seção, a fim de uma avaliação mais acurada das possíveis respostas dinâmicas. Logo não há dúvida de que a viga é um dos mais importantes elementos estruturais e sua teoria básica deve ser completamente entendida para melhor dimensionamento de estruturas (Meriam e Kraice, 1999).

## 1.1 REVISÃO DA LITERATURA

A análise de vigas escalonadas tem sido objeto de estudo por diversos autores devido a sua importância na engenharia mecânica estrutural e no controle de estruturas ativas (Vaz, 2008). Pode-se dizer que as vigas são elementos de sustentação criados pelo homem que trabalha em posição horizontal ou inclinada, assentada em um ou mais apoios e que tem a função de suportar os carregamentos normais à sua direção (Meriam e Kraice, 1999).

A viga é tratada como um modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal. Para esta finalidade, geralmente, consideram-se os modelos de viga de Euler-Bernoulli, Vlasov (Rayleigh), Cisalhamento e de Timoshenko.

A diferença básica entre estes modelos está relacionada nas suas formulações. No modelo de Euler-Bernoulli o cisalhamento e a inércia de rotação são desprezados, sendo feita a suposição de que as seções planas permanecem planas e perpendiculares à linha neutra da viga, após a deformação. O modelo de Vlasov continua desprezando o cisalhamento, mas leva em conta a inércia de rotação. Já no modelo de Cisalhamento considera-se apenas a deformação por cisalhamento, supõe-se também que as seções planas permaneçam planas, porém não necessariamente perpendiculares à linha neutra da viga, pois há um giro da seção em relação à

linha neutra, devido ao cisalhamento. Finalmente, no modelo de Timoshenko considera-se a inércia de rotação e a deformação por cisalhamento.

Em Rao (2004) encontra-se com mais pormenores o equacionamento do modelo de viga de Euler-Bernoulli e como determinar suas frequências naturais adimensionais juntamente com aplicações em casos clássicos (pinada-pinada, livre-livre, engastada-engastada, engastada-livre e engastada-pinada). Com a obtenção do modelo matemático da viga é possível trabalhar em casos mais complexos.

Um dos trabalhos que fornece um tratamento teórico completo para vigas uniformes, com resultados experimentais é dado por Traill-Nash e Collar (1953). O estudo foi realizado, com a equação de Timoshenko e variadas condições clássicas de contorno. Os autores determinaram a equação característica do problema tanto para baixas como para altas frequências. A forma das autofunções ou modos associados foi obtida em termos da natureza das raízes do polinômio característico da equação diferencial modal associada. Foi levado em conta por Traill-Nash e Collar (1953) a possibilidade de que em certos tipos de vigas (engastada-livre) existam dois espectros de frequências separados acima de uma certa frequência natural crítica. Ou seja, podem existir duas frequências diferentes que possuem a mesma autofunção. Isto tem sido denominado o segundo espectro de frequências da equação de Timoshenko.

Han et al (1999) discutem as quatro teorias clássicas para vigas contínuas de uso na engenharia: Euler-Bernoulli, Vlasov (Rayleigh), Cisalhamento e Timoshenko. Segundo Lekar e Sampaio (1999) os três modelos básicos para o estudo de vibrações em vigas são os de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko.

Em Lima Jr e Arantes (2000) encontra-se um estudo sobre a influência do índice de esbeltez nas frequências naturais obtidas a partir dos modelos de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko.

Jang e Bert (1989) estudaram o comportamento de uma viga escalonada. O estudo foi realizado, com a equação de Euler-Bernoulli, condição de contorno engastada-livre e material compósito laminado.

A análise da vibração de vigas com apenas uma mudança de seção e restrita elasticamente em uma das extremidades encontra-se em Maurizi e Bellés (1993a). Esses autores obtiveram uma equação diferencial ordinária de quarta ordem, da viga citada, usando o modelo de Euler-Bernoulli. Por meio da solução da equação homogênea e aplicando o método da separação de variáveis é possível obter o modo de vibração de cada trecho de uma viga escalonada. As condições clássicas de contorno formam a chamada matriz dos coeficientes que compõe o sistema linear homogêneo da qual se obtém as frequências naturais. Maurizi e Bellés (1993a) apresentaram uma tabela com a primeira frequência natural adimensional para casos clássicos de uma viga suportada elasticamente em apenas uma das extremidades e livre na outra. Os parâmetros de rigidez de rotação e de translação variaram entre zero e um valor grande, tendendo para infinito. Trabalho similar pode ser encontrado em Maurizi e Bellés (1993b). Um caso semelhante é encontrado em Rosa (1994), pois o seu trabalho baseou-se em uma viga com uma mudança de seção, porém neste caso, trabalha-se com diferentes condições de apoios elásticos.

Hong e Kim (1999) propõem um modelo de viga não uniforme suportado por dois sistemas massa-mola. Desse modelo obtém-se uma matriz, também conhecida como matriz dinâmica, que é o produto da inversa da matriz de massa com a matriz de rigidez do sistema, por meio da teoria de viga de Timoshenko. Um método de análise modal generalizado é também proposto e aplicado para a derivação da resposta em frequência e da resposta no tempo para qualquer estrutura do tipo viga em geral. Três exemplos são apresentados para validar e ilustrar a metodologia aplicada. No primeiro exemplo numérico é feita uma comparação entre o método proposto com o método de elementos finitos (M.E.F). No segundo exemplo apresentam-se três vigas escalonadas suportadas por sistemas massa-mola.

Posteriormente, Naguleswaran (2002a) utilizou o modelo de Euler-Bernoulli para um modelo de estrutura com apenas uma mudança de seção, mas com condições clássicas de suportes em ambas as extremidades. Do modelo relatado estudaram-se as três primeiras frequências naturais e os modos de vibração para três tipos diferentes de seção transversal de área: a primeira seção considerada é uma seção retangular de altura constante, a segunda é uma seção retangular de base constante e a terceira é uma seção circular.

Vibrações transversais de uma viga uniforme de Euler-Bernoulli com massas concentradas são discutidas em Naguleswaran (2002b). O trabalho consiste de uma viga carregada por  $n$  massas distribuídas ao longo da viga, das quais, duas dessas massas são adicionadas as extremidades. Foram determinadas as três primeiras frequências naturais para 16 combinações de condições clássicas de contorno. Os valores das frequências naturais são apresentados em tabelas.

Após estudar vigas com apenas uma mudança de seção Naguleswaran (2002c) propôs um método analítico utilizando o modelo de Euler-Bernoulli para calcular as frequências de uma viga, agora, com três mudanças de seções. São adotadas condições clássicas de suportes: engastada, pinada, deslizante e livre, bem como, condições gerais de apoio elástico. Considerações especiais frequentemente encontrados em aplicações da engenharia são feitas para três tipos diferentes de seções transversais de vigas escalonadas: a primeira seção é do tipo retangular de altura constante, a segunda seção é retangular de base constante e a terceira é circular. As três primeiras frequências naturais das vigas com duas e três mudanças de seções são tabeladas utilizando 45 tipos diferentes de apoios elásticos. Os resultados tabelados podem ser usados para avaliar as frequências calculadas por métodos numéricos. Seguindo a mesma linha de trabalho Naguleswaran (2003) apresenta por meio de um estudo um pouco mais aprofundado a vibração e a estabilidade de uma viga de Euler-Bernoulli com três mudanças de seções sob a influência de forças axiais.

A meta do trabalho de Dong et al (2005) é investigar as características de vibração de uma viga de compósito laminado escalonado de Timoshenko. Eles determinam a deformação por cisalhamento, a rigidez da flexão e a rigidez do cisalhamento transversal de uma viga laminada. A fim de relatar os efeitos causados pela deformação de cisalhamento e inércia de rotação de uma estrutura escalonada, a teoria de viga de Timoshenko é, então, usada para deduzir a função resposta em frequência. Gráficos da frequência natural e dos modos de vibração são apresentados.

Uma solução analítica para a resposta dinâmica de uma viga escalonada de Euler-Bernoulli com uma mudança de seção é oferecida em Koplów et al (2006). Realizam-se

alguns testes experimentais em vigas do tipo livre-livre para comparar os resultados experimentais com os teóricos.

Vaz (2008) apresentou uma metodologia para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli escalonada em várias partes, com apoios elásticos nas extremidades e de geometria variável. Os resultados foram gerados por um programa computacional desenvolvido pela autora e comparados com ensaios experimentais com vigas escalonadas em até três partes de seção circular e com resultados teóricos obtidos da literatura. O método apresentado elimina a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos e é capaz de gerar bons resultados.

A vibração livre de uma viga engastada com múltiplos escalonamentos é também encontrada em Jaworski e Dowell (2008). Eles comparam resultados experimentais com resultados teóricos, sendo que esse último é obtido por meio da teoria de viga de Euler-Bernoulli, além do método de elementos finitos (M.E.F), através do programa comercial (ANSYS®). O M.E.F é também usado para investigar a viga de Timoshenko em um modelo de casca de duas dimensões e em um modelo de um sólido de três dimensões. Detecta-se uma pequena diferença na primeira frequência natural entre os resultados teóricos de viga com os resultados encontrados pelo M.E.F. e pelos dados experimentais.

## **1.2 CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO**

Baseado nos modelos de viga de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko, este trabalho tem como propósito apresentar uma metodologia para o cálculo das frequências naturais adimensionais e dimensionais de uma viga escalonada em várias partes, com apoios elásticos e geometria variável. Também foi desenvolvido um programa computacional pelo autor capaz de determinar as frequências naturais adimensionais e dimensionais dessa viga para diferentes tipos de seções transversais e condições de contorno.

O programa computacional desenvolvido pelo autor para determinação das frequências naturais adimensionais e dimensionais foi elaborado com base no desenvolvimento ma-

temático apresentado no capítulo 2 e apêndices A, B, C e D. No capítulo 3 encontra-se detalhes do programa.

## 1.3 CONTEÚDO

No capítulo 1, é feito uma revisão dos trabalhos publicados na área de modelagem de vigas escalonadas e ferramentas disponíveis na literatura para a análise dinâmica que fornecem as frequências naturais de estruturas.

No capítulo 2, é feito um estudo de vigas escalonadas em  $n$  partes apoiadas elasticamente nas extremidades. São analisadas suas características mecânicas e dinâmicas, equacionamento de modelos, tais como, a obtenção da equação diferencial de quarta ordem, as condições de contorno e a matriz dos coeficientes.

No capítulo 3, a validação dos resultados numéricos é feita mediante vigas continua e escalonadas em duas partes com diferentes seções transversais e condições de contorno.

No capítulo 4, são apresentados alguns resultados experimentais. Os resultados obtidos são referentes a vigas continua e escalonadas em duas e três partes com condição de apoio livre-livre.

No capítulo 5, são apresentados os resultados gerados com base nas teorias propostas e nos modelos numéricos desenvolvidos e validados pelo autor.

As conclusões da dissertação são apresentadas no capítulo 6, com comentários sobre alguns dos resultados teóricos e experimentais, além de sugestões para trabalhos futuros.

Nos apêndices A, B, C e D são apresentados com mais pormenores todo o equacionamento dos modelos de vigas continua de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko, as considerações feitas para uma viga continua com condição de apoio bi-apoiada, além do procedimento usado para obter as frequências naturais e os modos de vibração. Já no a-

pêndice E são apresentadas as fotos e as especificações técnicas dos equipamentos utilizados nos ensaios experimentais.

## **CAPÍTULO 2**

# **MODELOS DE VIGA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES**

Este capítulo introduz alguns conceitos básicos sobre a modelagem matemática e o equacionamento de vigas escalonadas em várias partes, elasticamente apoiada nas extremidades. Assim, elabora-se a análise dos modelos de viga estudados com diferentes condições de contorno e diferentes relações de momentos de inércia de área das quais se obtém as frequências naturais e os modos de vibração.

## **2.1 ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA ESCALONADA EM VÁRIAS PARTES**

Vigas são elementos estruturais largamente utilizados na engenharia e resistem a esforços de flexão (momentos) o que geram tensões normais e de cisalhamento. Elas são normalmente prismáticas e os carregamentos são aplicados perpendicularmente ao seu comprimento, eixo longitudinal.

As vigas podem ser classificadas de acordo com sua estaticidade e de acordo com suas vinculações. Com relação à estaticidade, elas podem ser divididas em isostáticas e hiperestáticas: a primeira é caracterizada por apresentar um número de equações igual ao número de variáveis, por outro lado, o segundo caso possui um número inferior ao número de variáveis. As vinculações clássicas são: engastada, livre, pinada e deslizante.

Alguns dos tipos de carregamentos mais frequentes na engenharia estrutural são: carga concentrada, carga distribuída uniformemente, carga variando ao longo do comprimento de forma linear e carga variando de forma não linear.

As vigas escalonadas apresentam variações nas áreas das seções transversais. As estruturas mecânicas ou civis classificadas como complexas e com diferentes seções de área podem, como primeira aproximação, serem idealizadas como vigas escalonadas, como já mencionadas no capítulo introdutório.

A partir dos modelos matemáticos de vigas uniforme de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko que nos fornece uma base teórica introdutória para casos mais complexos inicia-se, então, o estudo de viga do tipo escalonada em várias partes e com diferentes suportes elásticos nas extremidades, conforme figura 2.1.

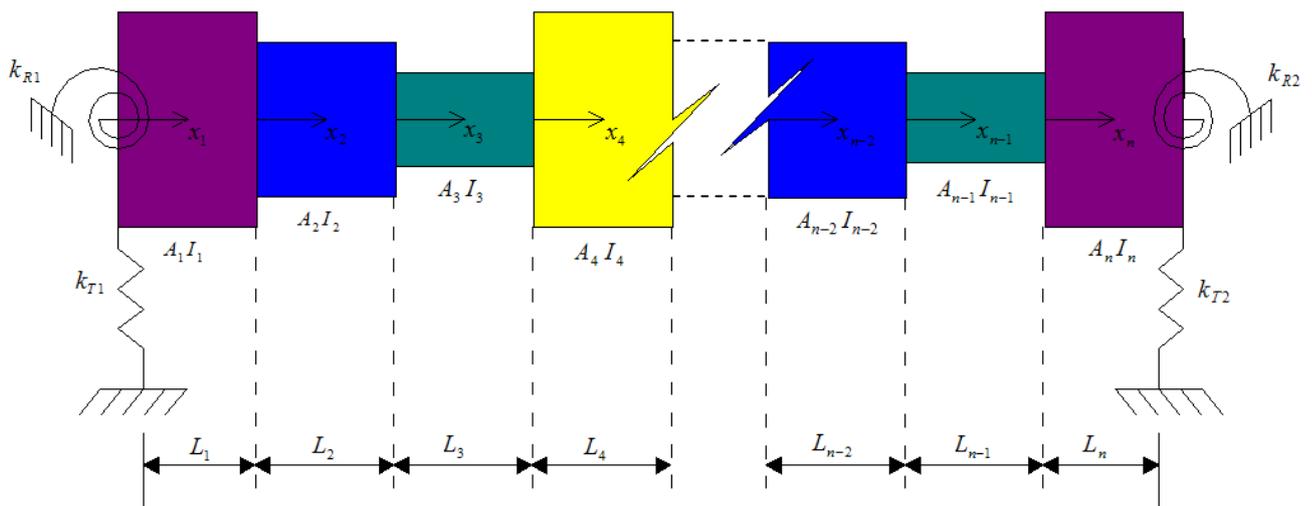


Figura 2.1 – Viga escalonada em  $n$  partes.

com  $A_n$  área da seção transversal do  $n$ -ésimo trecho da viga escalonada ( $\text{m}^2$ ),  $I_n$  momento de inércia de área do  $n$ -ésimo trecho da viga escalonada ( $\text{m}^4$ ),  $k_{R1}, k_{R2}$  e  $k_{T1}, k_{T2}$  constantes de rigidez de rotação ( $\text{Nm/rad}$ ) e translação ( $\text{Nm}$ ), respectivamente.

Nos Apêndices A, B, C e D apresenta-se com mais detalhes todo o equacionamento dos modelos de vigas citados anteriormente e a linha de raciocínio utilizada para obter as equações que são apresentadas neste capítulo.

As equações espaciais das vigas de Euler-Bernoulli, Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko seguindo a sequência citada, são:

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} + \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 r_i^2 \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} + \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 \frac{r_i^2}{k_c \mu} \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} - \left(\frac{\omega}{c_i}\right)^2 X_i(x_i) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^4 X_i(x_i)}{dx_i^4} T(t) + \frac{1}{c_i^2} X_i(x_i) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} - \left(1 + \frac{1}{k_c \mu}\right) \frac{r_i^2}{c_i^2} \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{r_i^2}{c_i^2} \frac{\rho}{k_c G} X_i(x_i) \frac{d^4 T(t)}{dt^4} = 0 \quad (2.4)$$

Definindo:

$$\beta_i^4 = \frac{\omega^2}{c_i^2} = \frac{\rho A_i \omega^2}{EI_i}, \quad r_i = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{G}{E} \quad (2.5)$$

com  $\beta_i$  frequência natural dimensional ( $\text{m}^{-1}$ ),  $\omega$  frequência natural angular ( $\text{rad/s}$ ),  $c_i$  velocidade de propagação da onda no meio sólido,  $\rho$  massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $A_i$  área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ),  $I_i$  momento de inércia de área ( $\text{m}^4$ ),  $r_i$  raio de giração ( $\text{m}$ ),  $\mu$  relação entre

modulo de elasticidade transversal e o longitudinal,  $k_c$  fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento,  $G$  modulo de elasticidade transversal (GPa) e  $E$  modulo de elasticidade longitudinal (GPa).

A solução espacial para cada trecho da viga dos modelos estudados é dado pelas equações (2.6) e (2.7), sendo a solução espacial para o modelo de Euler-Bernoulli é representada pela equação (2.6) e a solução espacial para os modelos de Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko pela equação (2.7). As constantes  $K_{1+2(i-1)}$  e  $K_{2+2(i-1)}$  da equação (2.7) tem valores diferentes para cada modelo e são representadas pelas equações de (2.8) a (2.13).

$$X_i(x_i) = B_{b_1} \text{sen}(\beta_i x_i) + B_{b_2} \cos(\beta_i x_i) + B_{b_3} \text{senh}(\beta_i x_i) + B_{b_4} \cosh(\beta_i x_i) \quad (2.6)$$

$$X_i(x_i) = B_{b_1} \text{sen}(K_{1+2(i-1)} x_i) + B_{b_2} \cos(K_{1+2(i-1)} x_i) + B_{b_3} \text{senh}(K_{2+2(i-1)} x_i) + B_{b_4} \cosh(K_{2+2(i-1)} x_i) \quad (2.7)$$

com  $0 \leq x_i \leq L_i$

- Modelo de Vlasov:

$$K_{1+2(i-1)}^2 = \frac{r_i^2 \beta_i^4 + \sqrt{r_i^4 \beta_i^8 + 4\beta_i^4}}{2} \quad (2.8)$$

$$K_{2+2(i-1)}^2 = \frac{-r_i^2 \beta_i^4 + \sqrt{r_i^4 \beta_i^8 + 4\beta_i^4}}{2} \quad (2.9)$$

- Modelo de Cisalhamento:

$$K_{1+2(i-1)}^2 = \frac{\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + \sqrt{\frac{r_i^4 \beta_i^8}{k_c^2 \mu^2} + 4\beta_i^4}}{2} \quad (2.10)$$

$$K_{2+2(i-1)}^2 = \frac{-\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + \sqrt{\frac{r_i^4 \beta_i^8}{k_c^2 \mu^2} + 4\beta_i^4}}{2} \quad (2.11)$$

- Modelo de Timoshenko:

$$K_{1+2(i-1)}^2 = \frac{\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + r_i^2 \beta_i^4 + \sqrt{\left(\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + r_i^2 \beta_i^4\right)^2 - 4\left(\frac{r_i^2 \beta_i^8}{k_c \mu} - \beta_i^4\right)}}{2} \quad (2.12)$$

$$K_{2+2(i-1)}^2 = \frac{\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + r_i^2 \beta_i^4 - \sqrt{\left(\frac{r_i^2 \beta_i^4}{k_c \mu} + r_i^2 \beta_i^4\right)^2 - 4\left(\frac{r_i^2 \beta_i^8}{k_c \mu} - \beta_i^4\right)}}{2} \quad (2.13)$$

com  $i$  o número de trechos da viga.

Para determinar os índices  $b_1, b_2, b_3$  e  $b_4$  dos coeficientes  $B$  das equações (2.6) e (2.7), define-se:

$$\begin{cases} b_1 = 1 + 4 \times (i - 1) \\ b_2 = 2 + 4 \times (i - 1) \\ b_3 = 3 + 4 \times (i - 1) \\ b_4 = 4 + 4 \times (i - 1) \end{cases} \quad (2.14)$$

com  $i = 1, \dots, n$

As oito condições de contorno para uma viga escalonada em  $n$  partes, equações de (2.15) a (2.22), são obtidas através das equações (A.13) a (A.20).

- Nas extremidades:

Em  $x_1 = 0$ ,

Para momento de flexão:

$$EI_1 \frac{d^2 X_1(x_1)}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = k_{R1} \frac{dX_1(x_1)}{dx_1} \Big|_{x_1=0} \quad (2.15)$$

Para força de cisalhamento:

$$EI_1 \frac{d^3 X_1(x_1)}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0} = -k_{T1} X_1(x_1) \Big|_{x_1=0} \quad (2.16)$$

Em  $x_n = L_n$ ,

Para momento de flexão:

$$EI_n \frac{d^2 X_n(x_n)}{dx_n^2} \Big|_{x_n=L_n} = -k_{R2} \frac{dX_n(x_n)}{dx_n} \Big|_{x_n=L_n} \quad (2.17)$$

Para força de cisalhamento:

$$EI_n \frac{d^3 X_n(x_n)}{dx_n^3} \Big|_{x_n=L_n} = k_{T2} X_n(x_n) \Big|_{x_n=L_n} \quad (2.18)$$

- Nas junções:

Para deflexão:

$$X_i(x_i) \Big|_{x_i=L_i} = X_{i+1}(x_{i+1}) \Big|_{x_{i+1}=0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

Para inclinação:

$$\frac{dX_i(x_i)}{dx_i} \Big|_{x_i=L_i} = \frac{dX_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (2.20)$$

Para momento de flexão:

$$I_i \frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} \Big|_{x_i=L_i} = I_{i+1} \frac{d^2 X_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^2} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (2.21)$$

Para força de cisalhamento:

$$I_i \frac{d^3 X_i(x_i)}{dx_i^3} \Big|_{x_i=L_i} = I_{i+1} \frac{d^3 X_{i+1}(x_{i+1})}{dx_{i+1}^3} \Big|_{x_{i+1}=0} \quad (2.22)$$

As constantes de integração,  $B_{b_1}, B_{b_2}, B_{b_3}$  e  $B_{b_4}$ , que compõem as equações (2.6) e (2.7) formam o vetor de incógnitas,  $\{b\}$ , de ordem  $4n$ . As oito condições de contorno, referentes às extremidades e as junções, nos fornecem um sistema linear de equações homogêneas que formam a chamada matriz de coeficientes,  $[H]$ . Segundo Santos (2007) para que esse sistema tenha uma solução não trivial é necessário que  $\{b\} \neq 0$ , o que implica que  $\det([H]) = 0$ . No caso de uma viga escalonada em  $n$  partes, a matriz de coeficientes tem dimensão  $4n \times 4n$ .

$$[H]\{b\} = \{0\} \quad (2.25)$$

$$\det\left(\left[H\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)\right]\right) = 0 \quad (2.26)$$

com  $\hat{\beta}_{1,k}$   $k$ -ésima frequência natural dimensional que tem como referencia o primeiro trecho da viga escalonada,  $k$  índice que indica a  $k$ -ésima frequência natural e 1 índice de  $\beta$  referente ao primeiro trecho da viga escalonada.

A frequência natural dimensional do 1<sup>a</sup> trecho  $\hat{\beta}_{1,k}$  pode ser relacionada com a frequência natural dimensional do 1<sup>a</sup> trecho  $\beta_{1,k}$  pela equação (2.27).

$$\hat{\beta}_{1,k} = \beta_{1,k} L \quad (2.27)$$

com  $L$  comprimento da viga escalonada (m).

A matriz  $[H]$  é uma função da frequência natural do 1ª trecho, que servirá como base para o cálculo das frequências naturais dos demais trechos pelas equações (2.28) e (2.29).

$$\bar{\beta}_i = \frac{\hat{\beta}_{i+1}}{\hat{\beta}_i} \rightarrow \hat{\beta}_{i+1} = \hat{\beta}_i \bar{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

com  $\bar{\beta}_i$  relação entre frequências naturais de trechos adjacentes de uma viga escalonada e  $\hat{\beta}_i$  e  $\hat{\beta}_{i+1}$  frequências naturais adimensionais referentes aos trechos,  $i$  e  $i+1$ , da viga escalonada.

No cálculo do determinante da equação (2.26) obtém-se a equação característica da qual é possível determinar  $k$  frequências naturais referentes à  $k$  modos de vibração, como foi mostrado no Apêndice A.

Como  $\hat{\beta}_i$  pode assumir diferentes valores para diferentes modos de vibração aplica-se a relação apresentada na equação (2.29). Portanto teremos  $k$  diferentes frequências naturais para  $\hat{\beta}_i$ .

$$\hat{\beta}_{i,k} = \hat{\beta}_i \Big|_{k\text{-ésima freq}} \quad (2.29)$$

Na sequência é apresentado para os modelos de viga escalonada em  $n$  partes uma generalização da matriz de coeficientes  $[H]$ . Como as matrizes são para vigas escalonadas, então  $n > 1$ .

Definindo:

$$\begin{aligned}
S_i &= \text{sen} \beta_i L_i \\
C_i &= \text{cos} \beta_i L_i \\
SH_i &= \text{senh} \beta_i L_i \\
CH_i &= \text{cosh} \beta_i L_i
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\bar{I}_i = \frac{I_{i+1}}{I_i} \tag{2.31}$$

$$R_1 = \frac{EI_1}{k_{R1} L_1} \tag{2.32}$$

$$T_1 = \frac{EI_1}{k_{T1} L_1^3} \tag{2.33}$$

$$R_2 = \frac{EI_n}{k_{R2} L_n} \tag{2.34}$$

$$T_2 = \frac{EI_n}{k_{T2} L_n^3} \tag{2.35}$$

com  $\bar{I}_i$  relação entre momentos de inércia de área de trechos adjacentes de uma viga escalonada,  $I_{i+1}$  e  $I_i$  momentos de inércia de área referentes aos trechos,  $i+1$  e  $i$ , de uma viga escalonada ( $\text{m}^4$ ),  $R_1$  e  $R_2$  constantes adimensionais inversamente proporcionais a rigidez de rotação e  $T_1$  e  $T_2$  constantes adimensionais inversamente proporcionais a rigidez de translação.

- Modelo de Euler- Bernoulli:

1ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$1 \quad R_1(\beta_1 L_1) \quad 1 \quad -R_1(\beta_1 L_1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \tag{2.36}$$

2ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$-T_1\beta_1^3L_1^3 \quad 1 \quad T_1\beta_1^3L_1^3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (2.37)$$

3ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$ :

$$\begin{matrix} -R_2(\beta_n L_n)S_n + C_n & -R_2(\beta_n L_n)C_n - S_n & R_2(\beta_n L_n)SH_n + CH_n & R_2(\beta_n L_n)CH_n + SH \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}, \quad (2.38)$$

4ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$ :

$$\begin{matrix} -T_2\beta_n^3L_n^3C_n - S_n & T_2\beta_n^3L_n^3S_n - C_n & T_2\beta_n^3L_n^3CH_n - SH_n & T_2\beta_n^3L_n^3SH_n - CH_n \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}, \quad (2.39)$$

Das condições de contorno nas junções da viga escalonada, têm-se:

5ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$S_1 \quad C_1 \quad SH_1 \quad CH_1 \quad -S_2 \quad -C_2 \quad -SH_2 \quad -CH_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (2.40)$$

6ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$C_1 \quad -S_1 \quad CH_1 \quad SH_1 \quad -\bar{\beta}_1 C_2 \quad \bar{\beta}_1 S_2 \quad -\bar{\beta}_1 CH_2 \quad -\bar{\beta}_1 SH_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (2.41)$$

7ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$\begin{matrix} -S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 S_2 & \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 C_2 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 SH_2 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 CH_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}, \quad (2.42)$$

8ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$\begin{matrix} -C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 C_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 S_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 CH_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 SH_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}, \quad (2.43)$$

$(4n - 3)^a$  linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad S_{n-1} \quad C_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad -S_n \quad -C_n \quad -SH_n \quad -CH_n \quad (2.44)$$

$(4n - 2)^a$  linha:

$$\begin{aligned} 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad C_{n-1} \quad -S_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad -\bar{\beta}_{n-1}C_n \quad \bar{\beta}_{n-1}S_n \quad , \\ -\bar{\beta}_{n-1}CH_n \quad -\bar{\beta}_{n-1}SH_n \end{aligned} \quad (2.45)$$

$(4n - 1)^a$  linha:

$$\begin{aligned} 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad -S_{n-1} \quad -C_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} S_n \quad \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} C_n \quad , \\ -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} SH_n \quad -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} CH_n \end{aligned} \quad (2.46)$$

$4n^a$  linha:

$$\begin{aligned} 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad -C_{n-1} \quad S_{n-1} \quad CH_{n-1} \quad SH_{n-1} \quad \bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} C_n \quad -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} S_n \quad , \\ -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} CH_n \quad -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} SH_n \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pode-se escrever a matriz dos coeficientes  $[H]$ , como:

$$\begin{bmatrix}
1 & R_1(\beta_1 L_1) & 1 & -R_2(\beta_1 L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
-T_1 \beta_1^3 L_1^3 & 1 & T_1 \beta_1^3 L_1^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & -S_2 & -C_2 & -SH_2 & CH_2 & \dots \\
C_1 & -S_1 & CH_1 & SH_1 & -\bar{\beta}_1 C_2 & \bar{\beta}_1 S_2 & -\bar{\beta}_1 CH_2 & -\bar{\beta}_1 SH_2 & \dots \\
-S_1 & -C_1 & SH_1 & CH_1 & \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 S_2 & \bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 C_2 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 SH_2 & -\bar{\beta}_1^2 \bar{I}_1 CH_2 & \dots \\
-C_1 & S_1 & CH_1 & SH_1 & \bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 C_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 S_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 CH_2 & -\bar{\beta}_1^3 \bar{I}_1 SH_2 & \dots \\
\vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -R_2(\beta_n L_n)S_n + C_n & -R_2(\beta_n L_n)C_n - S_n & R_2(\beta_n L_n)SH_n + CH_n & R_2(\beta_n L_n)CH_n + SH_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & -T_2 \beta_n^3 L_n^3 C_n - S_n & T_2 \beta_n^3 L_n^3 S_n - C_n & T_2 \beta_n^3 L_n^3 CH_n - SH_n & T_2 \beta_n^3 L_n^3 SH_n - CH_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_{n-1} & C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & -S_n & -C_n & -SH_n & -CH_n \\
C_{n-1} & -S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & -\bar{\beta}_{n-1} C_n & \bar{\beta}_{n-1} S_n & -\bar{\beta}_{n-1} CH_n & -\bar{\beta}_{n-1} SH_n \\
-S_{n-1} & -C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} S_n & \bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} C_n & -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} SH_n & -\bar{\beta}_{n-1}^2 \bar{I}_{n-1} CH_n \\
-C_{n-1} & S_{n-1} & CH_{n-1} & SH_{n-1} & \bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} C_n & -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} S_n & -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} CH_n & -\bar{\beta}_{n-1}^3 \bar{I}_{n-1} SH_n
\end{bmatrix}$$

(2.48)

$4n \times 4n$

Definindo:

$$\begin{aligned}
 S_i &= \text{sen} K_{1+2(i-1)} L_i \\
 C_i &= \text{cos} K_{1+2(i-1)} L_i \\
 SH_i &= \text{senh} K_{2+2(i-1)} L_i \\
 CH_i &= \text{cosh} K_{2+2(i-1)} L_i
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\bar{r}_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \tag{2.50}$$

com  $\bar{r}_i$  relação entre raios de giração de trechos adjacentes e  $r_{i+1}$  e  $r_i$  raios de giração referentes aos trechos,  $i+1$  e  $i$ , da viga escalonada (m).

- Modelo de Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko:

1ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$K_1 \quad R_1(K_1^2 L_1) \quad K_2 \quad -R_1(K_2^2 L_1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \tag{2.51}$$

2ª linha, colunas de 1 até  $4n$  :

$$-T_1(K_1^3 L_1^3) \quad 1 \quad T_1(K_2^3 L_1^3) \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \tag{2.52}$$

3ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$  :

$$\begin{aligned}
 & -R_2 S_n L_n K_{1+2(n-1)}^2 + C_n K_{1+2(n-1)} \quad -R_2 C_n L_n K_{1+2(n-1)}^2 - S_n K_{1+2(n-1)} \quad R_2 S_n L_n K_{2+2(n-1)}^2 + C_n K_{2+2(n-1)} \quad , \\
 & R_2 C_n L_n K_{2+2(n-1)}^2 + S_n K_{2+2(n-1)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

4ª linha, colunas de  $4n-3$  até  $4n$  :

$$\begin{aligned} & -T_2 C_n L_n K_{1+2(n-1)}^3 - S_n \quad T_2 S_n L_n K_{1+2(n-1)}^3 - C_n \quad T_2 C H L_n K_{2+2(n-1)}^3 - S H_n \quad T_2 S H L_n K_{2+2(n-1)}^3 - C H_n \quad , \quad (2.54) \\ & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{aligned}$$

Das condições de contorno nas junções da viga escalonada, têm-se:

5ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$S_1 \quad C_1 \quad S H_1 \quad C H_1 \quad -S_2 \quad -C_2 \quad -S H_2 \quad -C H_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad (2.55)$$

6ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$\begin{aligned} & C_1 K_1 \quad -S_1 K_1 \quad C H_1 K_2 \quad S H_1 K_2 \quad -C_2 K_3 \quad S_2 K_3 \quad -C H_2 K_4 \quad , \quad (2.56) \\ & -S H_2 K_4 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{aligned}$$

7ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$\begin{aligned} & -S_1 K_1^2 \quad -C_1 K_1^2 \quad S H_1 K_2^2 \quad C H_1 K_2^2 \quad S_2 K_3^2 \bar{I}_1 \quad C_2 K_3^2 \bar{I}_1 \quad -S H_2 K_4^2 \bar{I}_1 \quad , \quad (2.57) \\ & -C H_2 K_4^2 \bar{I}_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{aligned}$$

8ª linha, colunas de  $n-1$  até  $7+(n-1)$ :

$$\begin{aligned} & -C_1 K_1^3 \quad S_1 K_1^3 \quad C H_1 K_2^3 \quad S H_1 K_2^3 \quad C_2 K_3^3 \bar{I}_1 \quad -S_2 K_3^3 \bar{I}_1 \quad -C H_2 K_4^3 \bar{I}_1 \quad , \quad (2.58) \\ & -S H_2 K_4^3 \bar{I}_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{aligned}$$

$(4n-3)^a$  linha:

$$0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad S_{n-1} \quad C_{n-1} \quad S H_{n-1} \quad C H_{n-1} \quad -S_n \quad -C_n \quad -S H_n \quad -C H_n \quad (2.59)$$

$(4n-2)^a$  linha:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1}K_{1+2(n-1)} & -S_{n-1}K_{1+2(n-1)} & CH_{n-1}K_{2+2(n-1)} & SH_{n-1}K_{2+2(n-1)} & , \\
-C_nK_{1+2(n-1)} & S_nK_{1+2(n-1)} & & & -CH_nK_{2+2(n-1)} & -SH_nK_{2+2(n-1)} & & & 
\end{array} \quad (2.60)$$

$(4n-1)^a$  linha:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & -S_{n-1}K_{1+2(n-1)}^2 & -C_{n-1}K_{1+2(n-1)}^2 & SH_{n-1}K_{2+2(n-1)}^2 & CH_{n-1}K_{2+2(n-1)}^2 & , \\
S_nK_{1+2(n-1)}^2\bar{I}_n & C_nK_{1+2(n-1)}^2\bar{I}_n & & & -SH_nK_{2+2(n-1)}^2\bar{I}_n & -CH_nK_{2+2(n-1)}^2\bar{I}_n & & & 
\end{array} \quad (2.61)$$

$4n^a$  linha:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & -C_{n-1}K_{1+2(n-1)}^3 & S_{n-1}K_{1+2(n-1)}^3 & CH_{n-1}K_{2+2(n-1)}^3 & SH_{n-1}K_{2+2(n-1)}^3 & , \\
C_nK_{1+2(n-1)}^3\bar{I}_n & & -S_nK_{1+2(n-1)}^3\bar{I}_n & & -CH_nK_{2+2(n-1)}^3\bar{I}_n & -SH_nK_{2+2(n-1)}^3\bar{I}_n & & & 
\end{array} \quad (2.62)$$

Pode-se escrever a matriz dos coeficientes  $[H]$ , como:

$$\begin{bmatrix}
K_1 & R_1(K_1^2 L_1) & K_2 & -R_2(K_2^2 L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
-T_1(K_1^3 L_1^3) & 1 & T_1(K_2^3 L_1^3) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
S_1 & C_1 & SH_1 & CH_1 & -S_2 & -C_2 & -SH_2 & -CH_2 & \dots \\
C_1 K_1 & -S_1 K_1 & CH_1 K_2 & SH_1 K_2 & -C_2 K_3 & S_2 K_3 & -CH_2 K_4 & -SH_2 K_4 & \dots \\
-S_1 K_1^2 & -C_1 K_1^2 & SH_1 K_2^2 & CH_1 K_2^2 & S_2 K_3^2 \bar{I}_1 & C_2 K_3^2 \bar{I}_1 & -SH_2 K_4^2 \bar{I}_1 & -CH_2 K_4^2 \bar{I}_1 & \dots \\
-C_1 K_1^3 & S_1 K_1^3 & CH_1 K_2^3 & SH_1 K_2^3 & C_2 K_3^3 \bar{I}_1 & -S_2 K_3^3 \bar{I}_1 & -CH_2 K_4^3 \bar{I}_1 & -SH_2 K_4^3 \bar{I}_1 & \dots \\
\vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 S_n L_n K_{1+2(n-1)}^2 + C_n K_{1+2(n-1)} & -R_2 C_n L_n K_{1+2(n-1)}^2 - S_n K_{1+2(n-1)} & R_2 S_n L_n K_{2+2(n-1)}^2 + CH_n K_{2+2(n-1)} & R_2 CH_n L_n K_{2+2(n-1)}^2 + SH_n K_{2+2(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -T_2 C_n L_n K_{1+2(n-1)}^3 - S_n & T_2 S_n L_n K_{1+2(n-1)}^3 - C_n & T_2 CH_n L_n K_{2+2(n-1)}^3 - SH_n & T_2 SH_n L_n K_{2+2(n-1)}^3 - CH_n \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_{n-1} & C_{n-1} & SH_{n-1} & CH_{n-1} & -S_n & -C_n & -SH_n & -CH_n \\
C_{n-1} K_{1+2(n-1)} & -S_{n-1} K_{1+2(n-1)} & CH_{n-1} K_{2+2(n-1)} & SH_{n-1} K_{2+2(n-1)} & -C_n K_{1+2(n-1)} & S_n K_{1+2(n-1)} & -CH_n K_{2+2(n-1)} & -SH_n K_{2+2(n-1)} \\
-S_{n-1} K_{1+2(n-1)}^2 & -C_{n-1} K_{1+2(n-1)}^2 & SH_{n-1} K_{2+2(n-1)}^2 & CH_{n-1} K_{2+2(n-1)}^2 & S_n K_{1+2(n-1)}^2 \bar{I}_n & C_n K_{1+2(n-1)}^2 \bar{I}_n & -SH_n K_{2+2(n-1)}^2 \bar{I}_n & -CH_n K_{2+2(n-1)}^2 \bar{I}_n \\
-C_{n-1} K_{1+2(n-1)}^3 & S_{n-1} K_{1+2(n-1)}^3 & CH_{n-1} K_{2+2(n-1)}^3 & SH_{n-1} K_{2+2(n-1)}^3 & C_n K_{1+2(n-1)}^3 \bar{I}_n & -S_n K_{1+2(n-1)}^3 \bar{I}_n & -CH_n K_{2+2(n-1)}^3 \bar{I}_n & -SH_n K_{2+2(n-1)}^3 \bar{I}_n
\end{bmatrix}$$

4n \times 4n

(2.63)

## CAPÍTULO 3

# VALIDAÇÃO

A validação do programa computacional desenvolvido pelo autor, tendo como plataforma o software MATLAB®, foi realizada comparando dados disponíveis na literatura com os dados gerados pelo programa desenvolvido pelo autor. Essas comparações foram importantes, pois na literatura encontram-se valores de frequências naturais para condições de contorno diferentes da que foi utilizada em laboratório, que serviram também como parâmetros de validação do programa.

O programa computacional é dividido em rotinas, sendo a rotina principal responsável pela leitura das sub-rotinas. O desenvolvimento das rotinas foi realizado com base no desenvolvimento matemático apresentados no capítulo 2 e apêndices A, B, C e D. Através do programa obtem-se as frequências naturais adimensionais e dimensionais de uma viga escalonada em  $n$  partes, com diferentes apoios elásticos e de geometria variável.

A figura 3.1 mostra o fluxograma resumido do programa e na sequência alguns comentários sobre as rotinas.

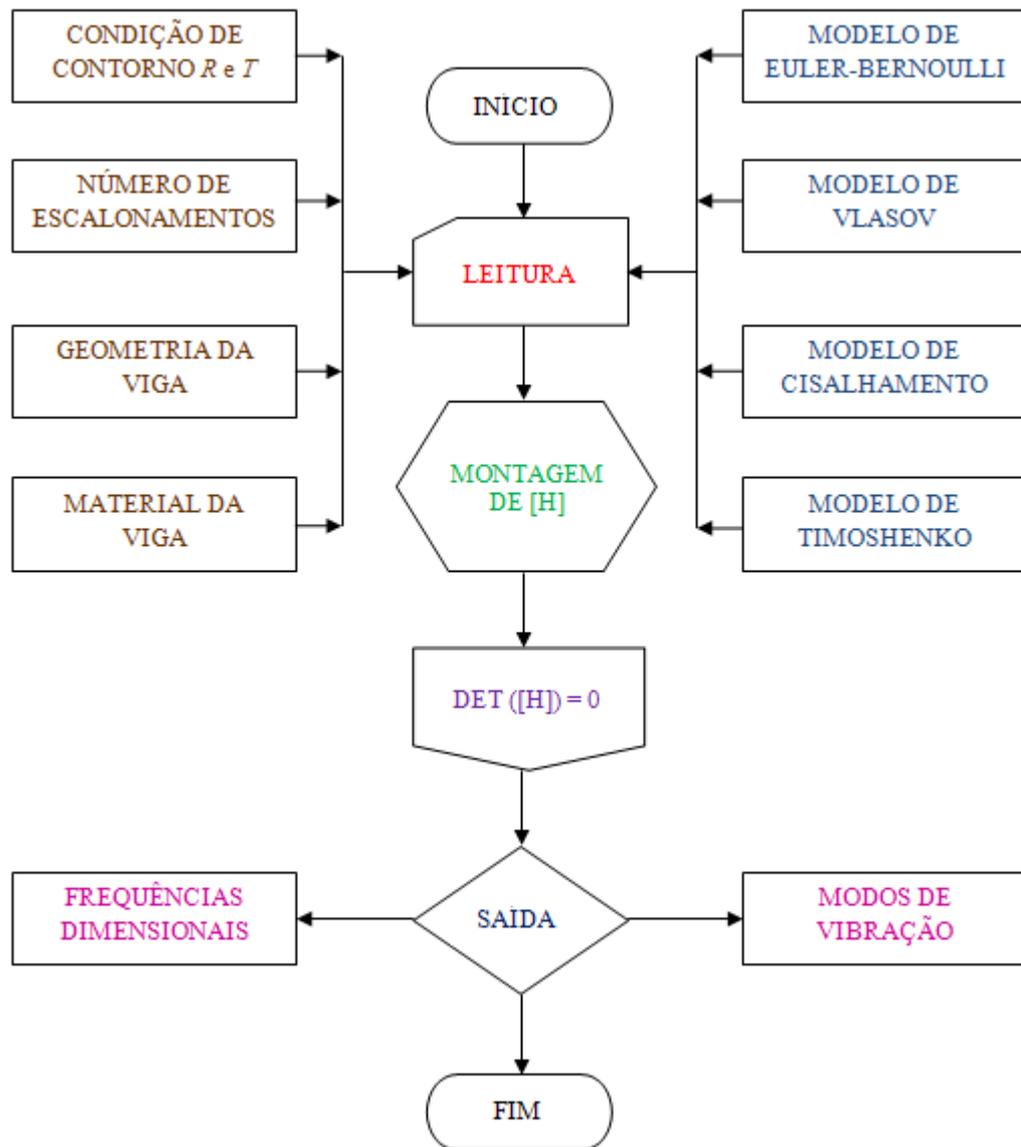


Figura 3.1 – Fluxograma resumido do programa desenvolvido pelo autor.

- Rotina Principal:

A rotina principal é responsável pela leitura das sub-rotinas.

- Sub-rotina Dados:

Na sub-rotina dados entra-se com os valores necessários para obtenção das frequências naturais adimensionais e dimensionais, como:

- ✓ Valores para as constantes adimensionais inversamente proporcionais as rigidezes de rotação e translação ( $R$  e  $T$ ), que são as condições de contorno a serem adotadas;
  - ✓ Modulo de elasticidade longitudinal;
  - ✓ Momento de inércia de área do primeiro trecho da viga;
  - ✓ Relação de momentos de inércia de área de trechos adjacentes;
  - ✓ Massa específica do material;
  - ✓ Área da seção transversal do primeiro trecho;
  - ✓ Comprimento de cada trecho da viga;
  - ✓ Coeficiente de Poisson, embora negligenciado na obtenção dos modelos é utilizado para obtenção do modulo de elasticidade transversal;
  - ✓ Fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento ( $k_c$ ).
- Sub-rotina Matriz:

Encontra-se a matriz dos coeficientes  $[H]$ , criada a partir do sistema de equações lineares provenientes da aplicação das condições de contorno.

- Sub-rotina Busca de Raízes:

Realiza-se a busca das frequências naturais adimensionais através da função *fzero* do Matlab. O algoritmo utilizado na função *fzero* é uma combinação dos métodos da bissecção e da interpolação quadrática inversa. A busca é realizada na função proveniente do determinante da matriz  $[H]$  que é a matriz dos coeficientes.

- Sub-rotina Gauss:

Na sub-rotina Gauss são determinados os coeficientes do vetor incógnita  $\{b\}$ , através da aplicação do método de eliminação de Gauss no sistema de equações lineares.

- Sub-rotina cálculo das frequências naturais dimensionais:

Determinam-se as frequências naturais em Hz e em rad/s. Para obtenção das frequências naturais dimensionais utilizam-se os valores das frequências naturais adimensionais determinadas na sub-rotina Busca de Raízes, do módulo de elasticidade longitudinal, da área da seção transversal do primeiro trecho da viga escalonada, do momento de inércia de área do primeiro trecho da viga escalonada, da massa específica e do comprimento total da viga.

- Sub-rotina Resultados:

Processa os resultados obtidos nas outras sub-rotinas e trabalha-se a forma com que os resultados serão apresentados.

### **3.1 COMPARANDO FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGA CONTÍNUA INDEPENDENTE DE SUA GEOMETRIA**

Os resultados gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor para modelos de viga contínua que serão estudados, são obtidos a partir de um modelo de viga escalonado em duas partes. Para que o modelo de viga escalonado represente um modelo de viga contínua a relação de momento de inércia de área entre trechos adjacentes tem que ser igual a 1, ou seja,  $\bar{I}_1 = I_2 / I_1 = 1$  e o comprimento do segundo trecho foi considerado como 1% do comprimento total da viga.

Para fins de comparação, inicialmente, trabalha-se com viga contínua esbelta e não esbelta e com diferentes condições de apoios elásticos nas extremidades, figura 3.2. Os resultados gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor para uma viga contínua são comparados com os resultados apresentados por Martins (1998), Lima Jr. (2007), Rao (2004) e Oliveira (2008). Os desvios relativos (%) entre os resultados são calculados pela equação 3.1.

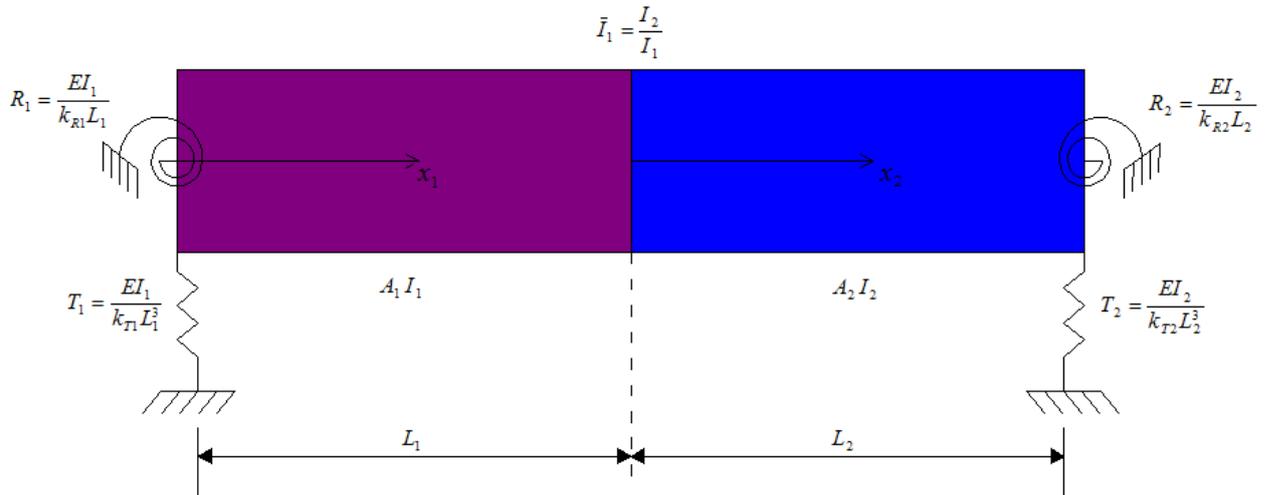


Figura 3.2 – Viga contínua e suportada elasticamente em ambas as extremidades.

com  $\bar{I}_1$  relação entre momentos de inércia de área de trechos adjacentes da viga escalonada,  $I_1$  e  $I_2$  momentos de inércia de área referentes aos trechos da viga ( $m^4$ ),  $A_1$  e  $A_2$  áreas das seções transversais referente aos trechos ( $m^2$ ),  $L_1$  e  $L_2$  comprimento dos trechos da viga escalonada (m),  $k_{R1}$ ,  $k_{R2}$  e  $k_{T1}$ ,  $k_{T2}$  constantes de rigidez de rotação (Nm/rad) e translação (Nm),  $R_1$  e  $R_2$  constantes adimensionais inversamente proporcionais a rigidez de rotação e  $T_1$  e  $T_2$  constantes adimensionais inversamente proporcionais a rigidez de translação.

$$\text{Desvio Relativo (\%)} = \frac{\text{Freq. teóricos} - \text{Freq. calculada}}{\text{Freq. teóricos}} \times 100 \quad (3.1)$$

com  $\text{Freq. teóricos}$  frequências naturais proveniente de trabalhos disponíveis na literatura e  $\text{Freq. calculada}$  frequências naturais calculada pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

Os diferentes apoios elásticos, como apresentado no capítulo 2, são representados por  $R$  e  $T$  pela facilidade de se trabalhar com constantes adimensionais. Essas constantes são inversamente proporcionais à rigidez de rotação e translação,  $k_R$  e  $k_T$ , respectivamente. Assim quando a rigidez de rotação e translação tendem para infinito, as constantes adimensio-

nais  $R$  e  $T$  tendem a zero, ocorrendo o contrario também. Então variando os valores das constantes adimensionais conseguimos simular as várias condições de contorno estudadas.

As tabelas 3.2 a 3.5 apresentam os valores das três primeiras frequências naturais em rad/s e os desvios relativos (%) para os modelos de viga contínua de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko, tendo como base as frequências naturais em rad/s, calculadas por Martins (1998). Das tabelas 3.2 a 3.15 observa-se que os valores das frequências naturais para os modelos de Euler-Bernoulli e Vlasov não apresentaram desvio relativo (%). Já o desvio ocorrido para o modelo de Timoshenko pode ter ocorrido devido o autor utilizar um modelo de viga escalonado em duas partes para representar um modelo de viga contínua.

As propriedades geométricas e de materiais da viga apresentada nas tabelas 3.2 a 3.5 estão na tabela 3.1. Os dados da tabela 3.1 foram obtidos de Martins (1998).

Tabela 3.1 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua simulada.

Grandeza	Valor	Unidade
Área $A$	0,3	m <sup>2</sup>
Momento de Inércia $I$	0,025	m <sup>4</sup>
Comprimento $L$	11,547	m
Massa específica $\rho$	7850	kg/m <sup>3</sup>
Modulo de Young $E$	210	GPa
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	0,85	-

Tabela 3.2 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais em rad/s – viga continua engastada - pinada.

		Viga Continua $\lambda = \frac{r}{L} = 0,025$		
Freq.		EB	V	T
1ª	Martins	172,66	172,04	167,68
	Autor	172,66	172,04	170,21
2ª	Martins	559,51	552,16	518,71
	Autor	559,51	552,16	531,99
3ª	Martins	1167,38	1134,51	1018,97
	Autor	1167,38	1134,51	1053,44

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, T – Timoshenko.

Tabela 3.3 - Desvio relativo (%) entre os valores calculados e teóricos – viga continua engastada - pinada.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Vlasov	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	-1,50	-2,56	-3,38

Tabela 3.4 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais em rad/s – viga contínua bi-engastada.

		Viga Contínua $\lambda = \frac{r}{L} = 0,025$		
Freq.		EB	V	T
1ª	Martins	250,54	249,58	238,45
	Autor	250,54	249,58	246,94
2ª	Martins	690,62	680,89	620,47
	Autor	690,62	680,89	656,02
3ª	Martins	1353,89	1313,87	1137,95
	Autor	1353,89	1313,87	1222,17

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, T – Timoshenko.

Tabela 3.5 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e teóricos – viga contínua bi-engastada.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Vlasov	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	-3,56	-5,72	-7,40

As tabelas 3.7 a 3.12 comparam os valores e os desvios relativos (%) das três primeiras frequências naturais adimensionais para os quatro modelos estudados pelo autor, com os valores analíticos obtidos por Rao (2004), para o modelo de Euler-Bernoulli e valores calculados pelo método dos elementos finitos obtidos por Oliveira (2008), para o modelo de Timoshenko. Das tabelas 3.7 a 3.12 observa-se que os valores das frequências naturais para os modelos de Vlasov e Cisalhamento ficaram na faixa entre os valores dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, o que está de acordo com a literatura (Han et al, 1999). Observa-se também pouca variação entre os resultados obtidos pelo autor com os resultados da literatura. Isto pode ser explicado devido ao número de elementos finitos utilizados por Oliveira (2008)

e a utilização pelo autor de um modelo de viga escalonado em duas partes para representar um modelo de viga contínua.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada nas tabelas 3.7 a 3.12 são apresentadas na tabela 3.6. Os dados da tabela 3.6 foram obtidos de Oliveira (2008). Cabe frisar também que as frequências de corpo rígido não foram apresentadas na tabela 3.9.

Tabela 3.6 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua simulada.

Grandeza	Valor	Unidade
Base $b$	0,075	m
Espessura $h$	0,075	m
Área $A$	$5,625 \times 10^{-3}$	$m^2$
Momento de Inércia $I$	$2,6367 \times 10^{-6}$	$m^4$
Comprimento $L$	1,5	m
Massa específica $\rho$	7800	$kg/m^3$
Modulo de Young $E$	210	GPa
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Tabela 3.7 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga continua pinada - pinada.

Viga Contínua						
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{12} L} = 0,0144$						
Freq.	Rao	Oliveira	Autor			
	EB	T	EB	V	C	T
1ª	3,141	3,135	3,141	3,139	3,136	3,135
2ª	6,283	6,237	6,283	6,270	6,243	6,231
3ª	9,427	9,271	9,427	9,3816	9,293	9,260

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.8 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua pinada - pinada.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	0,00	0,10	0,12

Tabela 3.9 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga contínua livre - livre.

Viga Contínua						
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{12} L} = 0,0144$						
Freq.	Rao	Oliveira	Autor			
	EB	T	EB	V	C	T
1ª	4,730	4,710	4,730	4,727	4,720	4,717
2ª	7,853	7,761	7,853	7,834	7,795	7,778
3ª	10,995	10,750	10,995	10,939	10,825	10,778

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.10 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua livre - livre.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	-0,15	-0,22	-0,26

Tabela 3.11 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga contínua engastada - livre.

Viga Contínua						
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{12} L} = 0,0144$						
Freq.	Rao	Oliveira	Autor			
	EB	T	EB	V	C	T
1ª	1,875	1,873	1,875	1,875	1,875	1,875
2ª	4,694	4,665	4,694	4,690	4,683	4,680
3ª	7,854	7,743	7,854	7,836	7,797	7,780

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.12 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua engastada - livre.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	-0,11	-0,32	-0,48

As tabelas 3.14 a 3.17 apresentam os valores das três primeiras frequências naturais adimensionais para vigas espessas ou não esbeltaz. De acordo com Lima Jr. (2007) quando se trabalha com esse tipo de estrutura é possível avaliar a influência dos efeitos do cisalhamento e da inércia de rotação na dinâmica da mesma e os resultados obtidos pelo modelo Timoshenko são mais próximos da realidade do que o modelo de Euler-Bernoulli. Observa-se nas tabelas 3.14 e 3.16 que os modelos de Cisalhamento e Timoshenko calculados pelo autor apresenta, se comparados, pequeno desvio relativo (%), 0,45% para primeira frequência, 1,28% para segunda e 1,84% para terceira frequência natural, para uma viga pinada – pinada. Já para uma viga engastada – livre, 0,00% para primeira frequência, 0,50% para segunda e 1,07% para terceira frequência natural. Logo para esse tipo de estrutura com esbeltez maior que 0,029, viga espessa, pode se conseguir bons resultados com o modelo de Cisalhamento.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada nas tabelas 3.14 a 3.17 são apresentadas na tabela 3.13. Os dados da tabela 3.13 foram obtidos de Lima Jr. (2007).

Tabela 3.13 – Propriedades geométricas e materiais da viga contínua espessa simulada.

Grandeza	Valor	Unidade
Base $b$	0,0381	m
Espessura $h$	0,010	m
Área $A$	$3,81 \times 10^{-4}$	$m^2$
Momento de Inércia $I$	$3,175 \times 10^{-9}$	$m^4$
Comprimento $L$	0,0635	m
Massa específica $\rho$	7800	$kg/m^3$
Modulo de Young $E$	66	GPa
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Tabela 3.14 - 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> Frequências naturais adimensionais – viga contínua espessa pinada - pinada.

Viga Contínua Espessa						
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{12} L} = 0,045$						
Freq.	Rao	Lima Jr.	Autor			
	EB	T	EB	V	C	T
1 <sup>a</sup>	3,141	3,079	3,141	3,126	3,093	3,079
2 <sup>a</sup>	6,283	5,861	6,283	6,161	5,937	5,861
3 <sup>a</sup>	9,427	8,262	9,427	9,036	8,416	8,261

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.15 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua espessa pinada - pinada.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	0,00	0,00	0,01

Tabela 3.16 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga contínua espessa engastada - livre.

Viga Contínua Espessa						
$\lambda = \frac{h}{\sqrt{12} L} = 0,045$						
Freq.	Rao	Lima Jr.	Autor			
	EB	T	EB	V	C	T
1ª	1,875	1,857	1,875	1,875	1,877	1,877
2ª	4,694	4,418	4,694	4,662	4,597	4,574
3ª	7,854	6,956	7,854	7,678	7,360	7,281

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.17 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga contínua espessa engastada - livre.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,00	0,00	0,00
Timoshenko	-1,08	-3,53	-4,67

### 3.2 COMPARANDO FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES INDEPENDENTE DE SUA GEOMETRIA

Em Tong (1995) encontram-se os valores das três primeiras frequências naturais adimensionais para uma viga com uma mudança de seção e condição clássica de suporte (engastada - livre), figura 3.3. Os valores foram calculados através do método dos elementos finitos, utilizando o modelo Timoshenko.

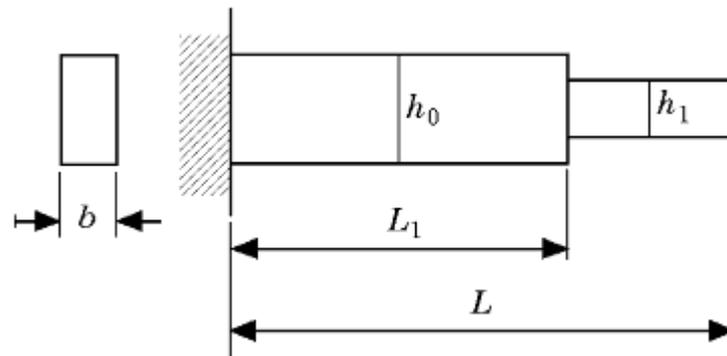


Figura 3.3 – Viga escalonada com uma mudança de seção de área, Tong (1995).

As tabelas 3.19 e 3.20 apresentam os valores e os desvios relativos (%) das três primeiras frequências naturais adimensionais para três diferentes índices de esbeltez. Os valores calculados pelo autor são comparados com os valores obtidos por Tong (1995). Observa-se nas tabelas 3.20 e 3.21 uma pequena variação entre os valores. Isto pode ser explicado devido ao número de elementos finitos utilizados por Tong (1995) nas simulações.

De acordo com Lima Jr e Arantes (2000) e Han et al (1999) quando a relação  $\lambda \leq 0,029$  para uma viga de seção retangular é satisfeita, obtém-se ótimos resultados no 1º modo de vibração e os resultados obtidos mediante o modelo de viga de Euler-Bernoulli concordam satisfatoriamente com os resultados apresentados pelo modelo de Timoshenko. Isto pode ser observado na tabela 3.20 através dos resultados obtidos pelo autor.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada nas tabelas 3.19 e 3.20 são apresentadas na tabela 3.19. Os dados da tabela 3.18 foram obtidos de Tong (1995).

Tabela 3.18 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada em uma parte.

Grandeza	Valor	Unidade
Base $b$	$b_1 = b_0$	m
Espessura $h$	$h_1 / h_0 = 0,8$	m
Comprimento $L$	$L_1 / L = 2/3$	m
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Os valores de  $b_0$ ,  $h_0$  e  $L$ , para tabelas 3.19, 3.22 e 3.24 são escolhidos de maneira que satisfaça o índice de esbeltez das tabelas e mantenha suas respectivas relações.

Tabela 3.19 - 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> Freqüências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte engastada - livre.

Viga Escalonada						
$\lambda_i = \frac{h_0}{\sqrt{12} L}$	Freq.	Tong $\hat{\beta}_{1,k}$		Autor $\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)^2$		
		T	EB	V	C	T
$\lambda_1 = 0,0133$	1 <sup>a</sup>	3,821	3,972	3,972	3,972	3,972
	2 <sup>a</sup>	21,354	22,335	22,306	22,259	22,231
	3 <sup>a</sup>	55,040	58,308	58,049	57,668	57,486
$\lambda_2 = 0,02667$	1 <sup>a</sup>	3,803	3,972	3,972	3,972	3,972
	2 <sup>a</sup>	20,728	22,335	22,240	22,033	21,939
	3 <sup>a</sup>	51,685	58,308	57,289	55,860	55,234
$\lambda_3 = 0,0400$	1 <sup>a</sup>	3,771	3,972	3,972	3,972	3,972
	2 <sup>a</sup>	19,803	22,335	22,118	21,669	21,503
	3 <sup>a</sup>	47,354	58,308	56,115	53,187	52,222

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.20 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - engastada - livre.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Timoshenko - $\lambda_1$	-3,95	-4,11	-4,44
Timoshenko - $\lambda_2$	-4,44	-5,84	-6,87
Timoshenko - $\lambda_3$	-5,33	-8,58	-10,28

As tabelas 3.22 a 3.25 apresentam os valores e os desvios relativos (%) das três primeiras frequências naturais adimensionais para duas diferentes relações de comprimento entre trechos adjacentes. Os valores calculados pelo autor são contrastados com os valores obtidos por Gutierrez (1990).

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada nas tabelas 3.23 e 3.26 são apresentadas na tabela 3.22. Os dados da tabela 3.21 foram obtidos de Gutierrez (1990).

Tabela 3.21 – Propriedades geométricas e materiais da viga escalonada em uma parte.

Grandeza	Valor	Unidade
Base $b$	$b_1 = b_0$	m
Espessura $h$	$h_1 / h_0 = 0,8$	m
Comprimento $L$	$L_1 / L = 0,25$ e $0,50$	m
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,3	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	5/6	-

Tabela 3.22 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte engastada - deslizante.

Viga Escalonada						
$\lambda = \frac{h_0}{\sqrt{12} L} = 0,0036$						
Relação de Comprimento	Freq.	Gutierrez $\hat{\beta}_{1,k}$	Autor $\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)^2$			
		T	EB	V	C	T
$L_1 = 0,25L$	1ª	5,299	5,616	5,616	5,616	5,616
	2ª	25,938	27,667	27,562	27,457	27,457
	3ª	61,172	65,772	65,125	64,802	64,480
$L_1 = 0,50L$	1ª	5,374	5,712	5,712	5,712	5,712
	2ª	25,620	27,772	27,457	27,040	26,832
	3ª	58,883	68,558	66,096	63,840	62,726

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.23 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - engastada - deslizante.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Timoshenko - 0,25L	-5,98	-5,86	-5,41
Timoshenko - 0,50L	-6,29	-4,73	-6,53

Tabela 3.24 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais adimensionais – viga escalonada em uma parte pinada - deslizante.

Viga Escalonada						
$\lambda = \frac{h_0}{\sqrt{12} L} = 0,0036$						
Relação de Comprimento	Freq.	Gutierrez $\hat{\beta}_{1,k}$	Autor $\left(\hat{\beta}_{1,k}\right)^2$			
		T	EB	V	C	T
$L_1 = 0,25L$	1ª	1,970	2,073	2,073	2,073	2,073
	2ª	18,110	19,009	19,009	18,922	18,922
	3ª	51,055	54,169	53,728	53,290	52,998
$L_1 = 0,50L$	1ª	2,018	2,102	2,102	2,102	2,102
	2ª	19,540	20,611	20,430	20,070	19,980
	3ª	50,254	56,100	54,316	52,562	51,552

EB – Euler-Bernoulli, V – Vlasov, C – Cisalhamento, T – Timoshenko.

Tabela 3.25 – Desvio relativo (%) entre os valores calculados e os valores teóricos – viga escalonada em uma parte - pinada - deslizante.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Timoshenko - 0,25L	-5,23	-4,48	-3,81
Timoshenko - 0,50L	-4,16	-2,25	-2,58

## CAPÍTULO 4

### EXPERIMENTO

A análise modal vem sendo muito utilizada em programas de monitoramento de estruturas, pois alterações nas propriedades dinâmicas das estruturas implicam em alterações do comportamento estrutural. Ainda segundo Sardinha (2006), as formas mais utilizadas para a determinação das propriedades dinâmicas das estruturas são a partir do método dos elementos finitos e análise modal experimental.

Os métodos de análise modal experimental são fundamentados em modelos matemáticos. Esses modelos visam determinar as características dinâmicas da estrutura por meio de análise de sinais. Os sinais são obtidos por meio de ensaios de vibração que podem ser realizados em laboratórios (modelos reduzidos da estrutura) ou em campo (estrutural real) (Ferreira Neto, 2005).

Na análise modal experimental de estruturas, dois tipos de testes são possíveis: o de vibração livre e o de vibração forçada. Tradicionalmente os métodos de análise modal são agrupados a partir do domínio em que são tratados, sendo eles de domínio no tempo ou de domínio na frequência. Independentemente do tipo de ensaio utilizado, ou de técnica empregada para análise modal, é necessário coletar os dados experimentais com boa precisão, pois só assim será possível obter características dinâmicas satisfatórias.

## 4.1 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Os ensaios do presente trabalho foram realizados no Laboratório de Vibrações Mecânica do IEM da UNIFEI. A finalidade dessa etapa consiste em levantar experimentalmente as propriedades dinâmicas de vigas uniformes e escalonadas a fim de comparar as frequências naturais calculadas pelo programa desenvolvido pelo autor com as frequências medidas no laboratório.

## 4.2 DESCRIÇÃO DO ENSAIO

Foram realizados ensaios em doze vigas de alumínio com comprimento médio de 497,77 mm, das quais três são vigas uniformes com diâmetros  $\phi$  38,04 mm,  $\phi$  22,10 mm e  $\phi$  12,64 mm. Os escalonamentos foram realizados a partir das vigas contínuas. A figura 4.1 e a tabela 4.1 apresentam os tipos de vigas utilizadas no ensaio experimental.

Após a realização dos ensaios das vigas contínuas, foram realizados os três primeiros escalonamentos, com dois trechos de mesmo comprimento, ficando: a primeira viga com os  $\phi$  38,04 mm e  $\phi$  28,66 mm, a segunda viga com  $\phi$  22,10 mm e  $\phi$  16,32 mm e a terceira viga com  $\phi$  12,64 mm e  $\phi$  9,10 mm. Na sequência tem-se o segundo escalonamento que também possui dois trechos, mais agora um dos trechos fica com  $2/3$  do comprimento total da viga, mantendo-se os menores diâmetros do escalonamento anterior (primeiro escalonamento) nos trechos de maior comprimento. Finalizando temos o terceiro escalonamento com três trechos iguais, ou seja, ficando cada trecho com  $1/3$  do comprimento total da viga, tendo os dois primeiros trechos os mesmos diâmetros do escalonamento anterior (segundo escalonamento) e os terceiros trechos com os seguintes diâmetros:  $\phi$  19,02 mm;  $\phi$  11,05 mm e  $\phi$  6,30 mm. Os valores dos diâmetros apresentados foram medidos com um paquímetro digital e referem-se às médias de algumas medições.

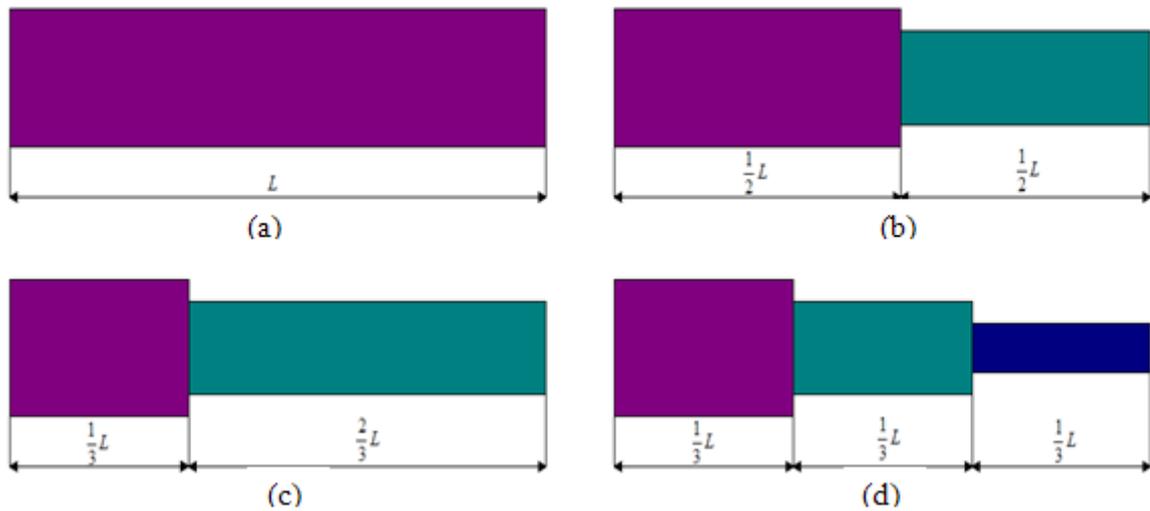


Figura 4.1 – Representação das vigas utilizadas nos ensaios: tipos (a), (b), (c) e (d).

Tabela 4.1 – Diâmetro dos trechos das vigas utilizadas nos ensaios.

Vigas de Alumínio			
Tipo	Diâmetro dos Trechos (mm)		
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>
(a)	38,04	-	-
	22,10	-	-
	12,64	-	-
(b)	38,04	28,66	-
	22,10	16,32	-
	12,64	9,10	-
(c)	38,04	28,66	-
	22,10	16,32	-
	12,64	9,10	-
(d)	38,04	28,66	19,02
	22,10	16,32	11,05
	12,64	9,10	6,30

As estruturas do tipo vigas foram suspensas com auxílio de elementos flexíveis (fio de nylon). A condição de contorno é a livre-livre. As estruturas são colocadas em oscilação livre mediante a aplicação de um impulso no plano perpendicular ao plano de fixação da viga. O impulso foi aplicado usando um martelo instrumentado com o intuito de obter as frequências naturais. O sinal de velocidade do movimento da viga é captado pelo vibrômetro, posicionado no mesmo plano de aplicação da força impulsiva e transmitido ao analisador de sinais, conforme foto 4.1. O analisador é capaz de receber e armazenar um número bastante grande de sinais do vibrômetro em curtos intervalos de tempo, permitindo a obtenção dos gráficos de espectro de frequência.

A resolução utilizada na obtenção dos gráficos de espectro de frequência foi de 15,96 Hz e a frequência de amostragem de 12.800 Hz.

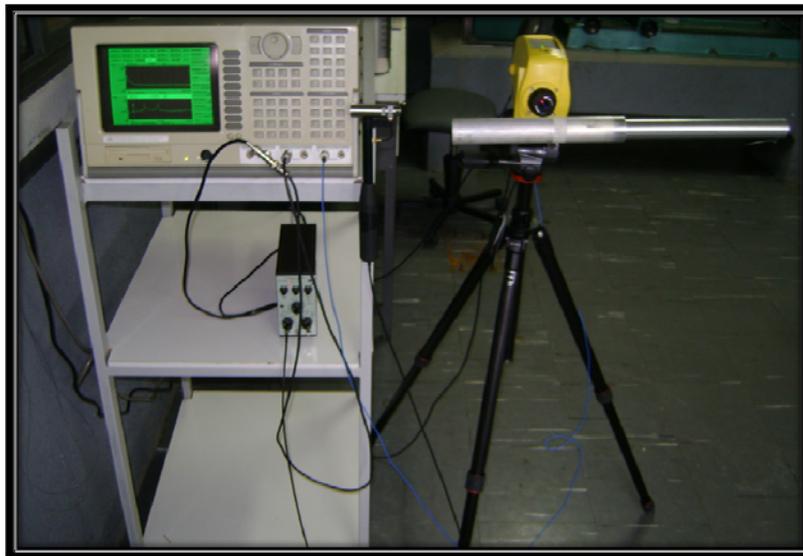


Foto 4.1—Analisador de sinais, Martelo instrumentado e Vibrômetro laser.

Para cada viga foram realizados 30 ensaios, calculando-se 1 média para cada 10 ensaios obtidos. A média mais representativa foi escolhida para ser apresentada em forma de gráfico.

### 4.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS

Os ensaios no laboratório objetivaram a determinação das propriedades dinâmicas das vigas, ou seja, suas frequências naturais. Essas grandezas são úteis para a previsão do comportamento dinâmico de máquinas em funcionamento e para o estabelecimento de regiões seguras (aceitáveis) de operação, acima e abaixo das frequências naturais (Vaz, 2008). Para se determinar essas frequências em laboratório, excitou-se as vigas com um martelo instrumentado em um determinado ponto e mediu-se a sua resposta impulsiva utilizando o vibrômetro laser.

As tabelas (4.4) a (4.27) comparam os resultados obtidos nos ensaios com os valores gerados pelo programa computacional desenvolvido pelo autor. Há uma boa concordância entre os resultados calculados e os experimentais. As frequências medidas em laboratório apresentam-se em Hertz, enquanto que o programa computacional permite a obtenção dos valores em rad/s, Hz e valores adimensionais,  $\hat{\beta}_{1,k}$ , que é substituído na equação (4.1) para o cálculo das frequências em rad/s e posteriormente utilizando a equação (4.2) obtém-se as frequências em Hz, que será utilizada para comparação.

➤ Cálculo da frequência natural:

$$\omega_k = \left( \frac{\hat{\beta}_{1,k}}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_1}{\rho A_1}} \quad (4.1)$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (4.2)$$

com  $\omega_k$   $k$ -ésima frequência natural angular (rad/s),  $\hat{\beta}_{1,k}$   $k$ -ésima frequência natural adimensional que tem como referencia o primeiro trecho da viga escalonada,  $L$  comprimento total da viga (m),  $E$  modulo de elasticidade longitudinal (GPa),  $I_1$  momento de inércia de área do primeiro trecho da viga escalonada (m<sup>4</sup>),  $\rho$  massa específica (kg/m<sup>3</sup>),  $A_1$  área da seção trans-

versal do primeiro trecho da viga escalonada ( $m^2$ ),  $f_k$   $k$ -ésima frequência natural (Hz),  $k$  índice que indica a  $k$ -ésima frequência natural e 1 índice de  $\beta$ ,  $I$  e  $A$  referente ao primeiro trecho da viga escalonada.

➤ Cálculo do índice de esbeltez:

$$\lambda_i = \frac{r_i}{L_i} \quad (4.3)$$

$$r_i = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} \quad (4.4)$$

com  $\lambda_i$  índice de esbeltez de cada trecho da viga escalonada,  $r_i$  raio de giração de cada trecho da viga escalonada (m),  $L_i$  comprimento de cada trecho da viga escalonada (m),  $I_i$  momento de inércia de área de cada trecho da viga escalonada ( $m^4$ ),  $A_i$  área da seção transversal de cada trecho da viga escalonada ( $m^2$ ) e  $i$  índice de  $\lambda_i$ ,  $I_i$  e  $A_i$  referente ao número de trechos da viga escalonada.

De acordo com Lima Jr. e Arantes (2000) e Han et al (1999) quando se utiliza o modelo de viga de Euler-Bernoulli com  $\lambda_i \leq 0,025$ , seção circular, os resultados obtidos mediante o modelo de viga de Euler-Bernoulli concordam satisfatoriamente com os resultados apresentados pelo modelo de Timoshenko, conforme figura 4.2 e tabela 4.2.

A figura 4.2 apresenta o desvio relativo (%) entre os resultados obtidos pelo modelo de Euler-Bernoulli e os de Timoshenko para diferentes valores de índice de esbeltez,  $\lambda$  (Lima Jr. e Arantes, 2000). Analisando a primeira frequência natural adimensional,  $\hat{\beta}_{1,1}$ , observa-se que para a relação  $\lambda_i \leq 0,025$ , já é possível obter bons resultados, com desvio em torno de 1,58%, como mostrado na tabela 4.2. Entretanto, ao analisar a segunda frequência natural adimensional,  $\hat{\beta}_{1,2}$ , o desvio sobe para aproximadamente 3,67%, que é um valor, ainda, aceitável dentro dos padrões da engenharia. Observa-se também que quando o índice de esbeltez

cai para valores como 0,010, os desvios entre os modelos Euler-Bernoulli e Timoshenko são praticamente desprezíveis.

Tabela 4.2 – Desvio percentual relativo entre Euler-Bernoulli/Timoshenko - viga livre - livre.

$\hat{\beta}_{1,k}$	$\lambda$	Desvio %
$\hat{\beta}_{1,1}$	0,025	1,58
$\hat{\beta}_{1,2}$	0,025	3,67
$\hat{\beta}_{1,3}$	0,025	6,96

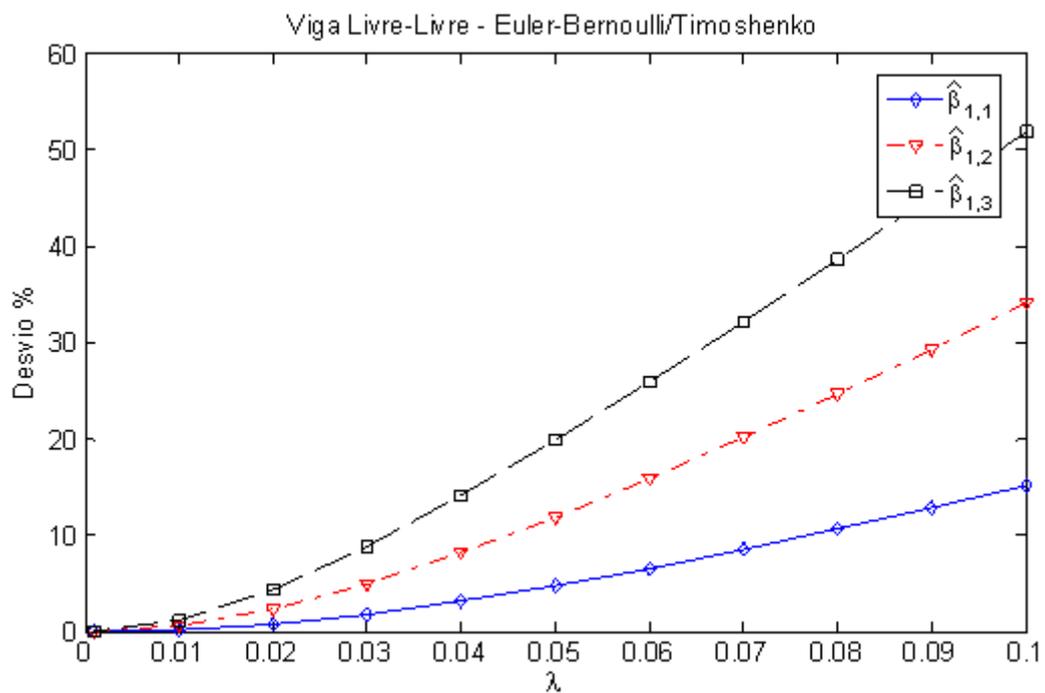


Figura 4.2 - Desvio percentual relativo para as três primeiras frequências,  $\hat{\beta}_{1,1}$ ,  $\hat{\beta}_{1,2}$  e  $\hat{\beta}_{1,3}$ , de uma viga contínua de Euler-Bernoulli comparada a uma viga de Timoshenko.

O desvio percentual dos valores experimentais em relação aos valores teóricos dos modelos como Euler-Bernoulli, Cisalhamento e Timoshenko são apresentados na tabela 4.3, de acordo com Traill-Nash & Collar (1953) apud Han et al (1999). Os ensaios experimentais para o cálculo dos desvios da tabela 4.3 basearam-se em vigas espessas. Porém, como primeira aproximação, a tabela 4.3 pode ser utilizada para comparar e analisar a qualidade dos resultados do autor.

Tabela 4.3 - Desvio percentual entre valores experimentais e valores teóricos, segundo Traill-Nash e Collar (Han et al, 1999).

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	+14% a +26%	+78% a +133%
Cisalhamento	0% a +3%	-1% a +6%
Timoshenko	-1% a +2%	-1% a +6%

O módulo de Elasticidade,  $E$ , utilizado no cálculo das frequências naturais é determinado através do ensaio de flexão. Inicialmente aplica-se sobre a viga biapoiada uma pré-carga, na região central entre os apoios da viga. A máquina de ensaio universal, foto 4.2, é preparada para o ensaio de flexão. A força é aplicada na viga através de uma esfera posicionada na extremidade da haste da máquina. A máquina é equipada com uma célula de carga que fornece a força aplicada. O valor da flexa da viga é obtido pelo deslocamento da haste do defletoômetro eletrônico posicionado no vão central da viga. Nesta técnica de obtenção do módulo de elasticidade deve-se atentar para o fato que o modulo de elasticidade longitudinal varia com o cubo da distância entre apoios. Recomenda-se utilizar o maior vão possível entre os apoios, mantendo-se o comportamento linear da viga sobre flexão.

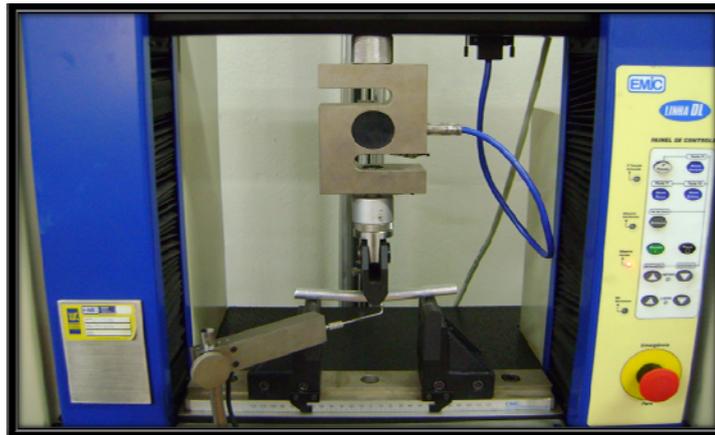


Foto 4.2 - Ensaio de flexão

- Cálculo do módulo de elasticidade

$$E = \frac{FL_a^3}{48I\delta} \quad (4.5)$$

com,

$$\begin{aligned} F &= 978,057 \text{ N} \\ \delta &= 0,400 \text{ mm} \\ D &= 11,110 \text{ mm} \\ L_a &= 100 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.6)$$

com  $\delta$  deflexão (mm),  $L_a$  distância entre os apoios da viga (mm),  $I$  momento de inércia de área (m<sup>4</sup>) e  $D$  diâmetro da viga (mm).

Portanto,

$$E = 68,11 \text{ GPa} \quad (4.7)$$

- Cálculo da massa específica:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4.8)$$

$$V = AL \quad (4.9)$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (4.10)$$

com,

$$\begin{aligned} m &= 35,62 \text{ g} \\ L &= 136,97 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.11)$$

com  $\rho$  massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $m$  massa (g),  $L$  comprimento total da viga (mm),  $A$  área da seção transversal da viga ( $\text{m}^2$ ) e  $V$  volume ( $\text{m}^3$ ).

Logo,

$$\rho = 2682,6 \text{ kg/m}^3 \quad (4.12)$$

A figura 4.3 e as tabelas 4.4 e 4.5 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga contínua de diâmetro  $\phi 38,04 \text{ mm}$ , respectivamente. Os desvios relativos (%) para todas as tabelas a seguir são calculados pela equação (4.13) e os valores das frequências de laboratório tabeladas são retirados das figuras de espectro de frequência.

$$\text{Desvio Relativo (\%)} = \frac{\text{Freq}_{\text{experimental}} - \text{Freq}_{\text{calculada}}}{\text{Freq}_{\text{experimental}}} \times 100 \quad (4.13)$$

com  $\text{Freq}_{\text{experimental}}$  frequências naturais proveniente dos ensaios e  $\text{Freq}_{\text{calculada}}$  frequências naturais calculada pelo programa computacional desenvolvido pelo autor.

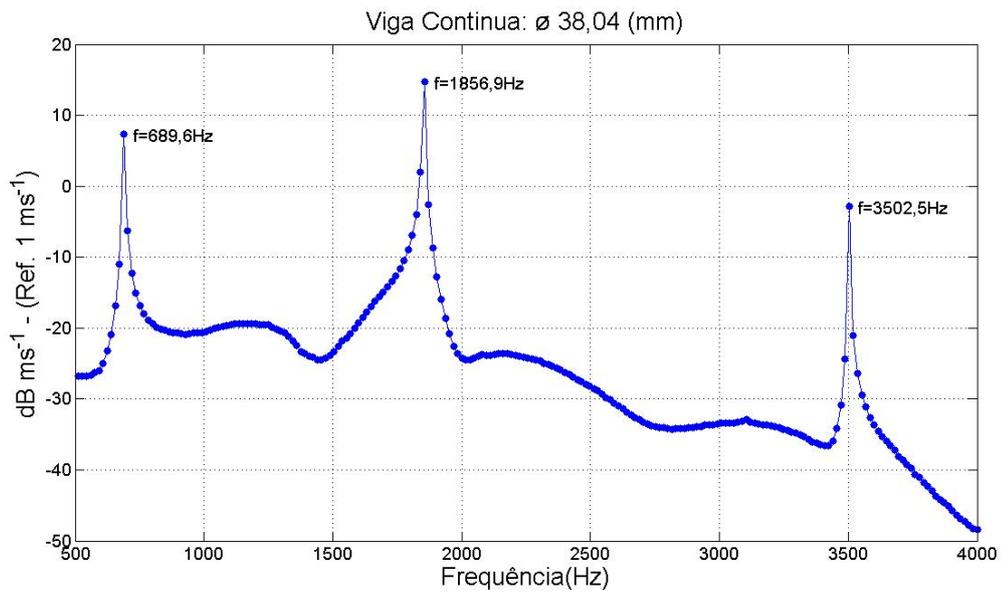


Figura 4.3 - Espectro de frequência - viga uniforme,  $\phi$ 38,04 mm .

Tabela 4.4 - Viga uniforme -  $\phi$ 38,04 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Uniforme $\phi$ 38,04 mm					
Índice de Esbeltez: $\lambda = \frac{\phi}{4L} = 0,0191$					
Valor Experimental		Valor Calculado			
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	689,6	684,6	683,1	680,1	678,7
2 <sup>a</sup>	1856,9	1887,1	1871,5	1842,1	1828,8
3 <sup>a</sup>	3502,5	3699,4	3634,7	3517,5	3469,3

Tabela 4.5 - Viga uniforme -  $\phi 38,04$  mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,72	-1,62	-5,62
Vlasov	0,94	-0,78	-3,77
Cisalhamento	1,37	0,79	-0,42
Timoshenko	1,58	1,51	0,94

A figura 4.4 e as tabelas 4.6 e 4.7 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga contínua de diâmetro  $\phi 22,10$  mm .

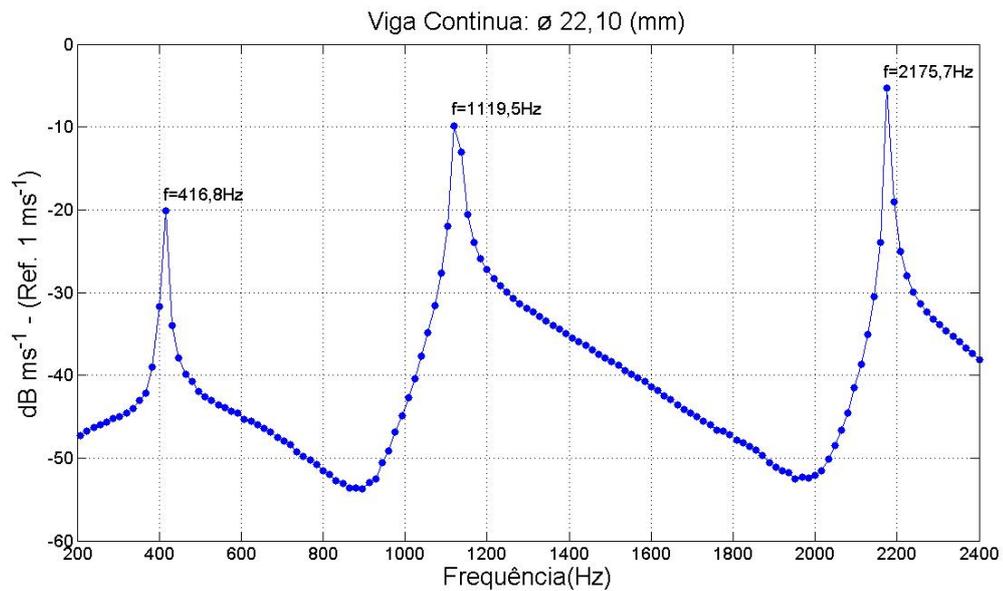


Figura 4.4 - Espectro de frequência - viga uniforme,  $\phi 22,10$  mm .

Tabela 4.6 - Viga uniforme -  $\phi 22,10$  mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Uniforme $\phi 22,10$ mm					
Índice de Esbeltez: $\lambda = \frac{\phi}{4L} = 0,0111$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	416,8	405,8	405,5	404,9	404,6
2 <sup>a</sup>	1119,5	1118,6	1115,4	1109,2	1106,1
3 <sup>a</sup>	2175,7	2192,8	2179,4	2153,8	2141,8

Tabela 4.7 - Viga uniforme -  $\phi 22,10$  mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	2,63	0,08	-0,78
Vlasov	2,71	0,36	-0,17
Cisalhamento	2,85	0,92	1,00
Timoshenko	2,92	1,19	1,55

A figura 4.5 e as tabelas 4.8 e 4.9 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga contínua de diâmetro  $\phi 12,64$  mm. Neste caso, observa-se uma melhora no desvio relativo em relação às vigas de diâmetro  $\phi 38,04$  mm e  $\phi 22,10$  mm. Isso se deve a diminuição da rigidez e do raio de giração da estrutura, isto é, a diminuição do índice de esbeltez.

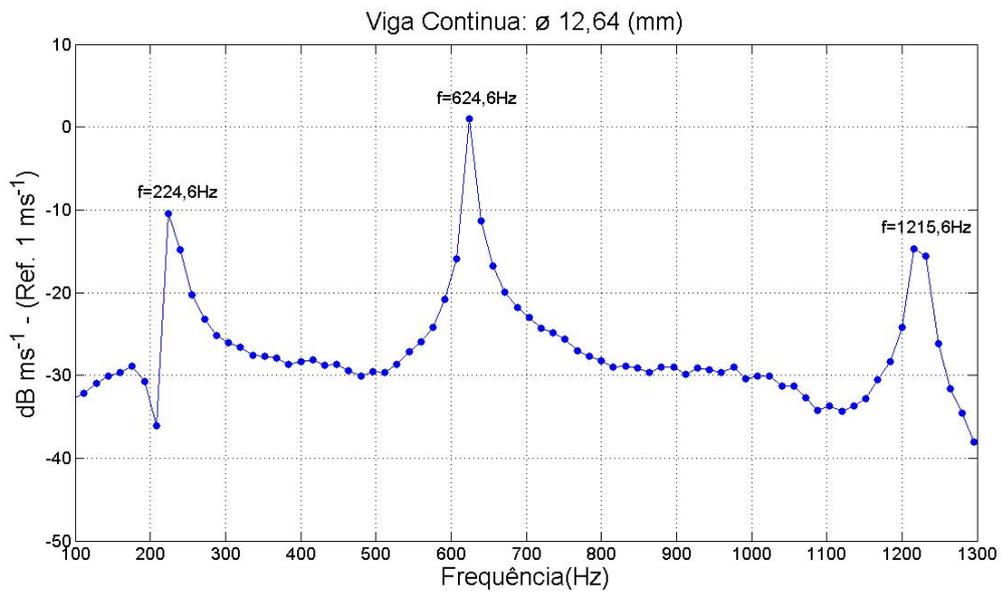


Figura 4.5 - Espectro de frequência - viga uniforme,  $\phi$ 12,64 mm.

Tabela 4.8 - Viga uniforme -  $\phi$ 12,64 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Uniforme $\phi$ 12,64 mm					
Índice de Esbeltez: $\lambda = \frac{\phi}{4L} = 0,0063$					
Freq.	Valor Experimental		Valor Calculado		
	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	224,6	226,9	226,9	226,8	226,8
2 <sup>a</sup>	624,6	625,6	625,1	623,9	623,4
3 <sup>a</sup>	1215,6	1226,5	1224,1	1219,4	1217,1

Tabela 4.9 - Viga uniforme -  $\phi 12,64$  mm - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-1,02	-0,16	-0,89
Vlasov	-1,02	-0,08	-0,69
Cisalhamento	-0,97	0,11	-0,31
Timoshenko	-0,97	0,19	-0,12

A figura 4.6 e as tabelas 4.10 e 4.11 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/2 L - \phi_1 38,04$  mm e  $1/2 L - \phi_2 28,66$  mm. Comparando as tabelas 4.10 e 4.4 observa-se uma diminuição nos valores das frequências naturais, isso se deve a mudança da seção transversal ao longo da viga, o que deixa a estrutura mais flexível. O mesmo fenômeno ocorre quando comparamos as tabelas 4.12 e 4.14 com as tabelas 4.6 e 4.8.

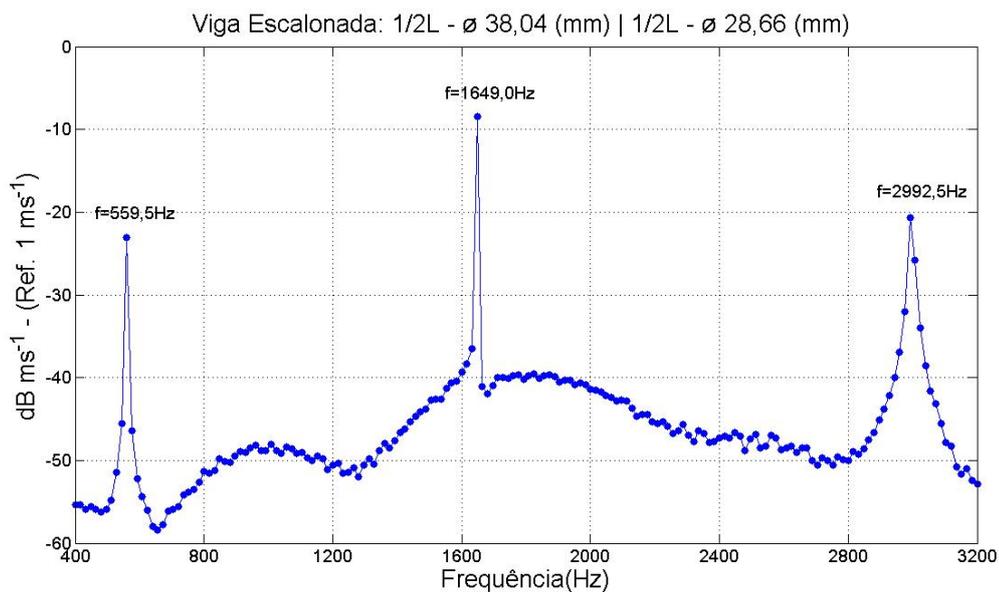


Figura 4.6 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/2 L - \phi 38,04$  mm e  $1/2 L - \phi 28,66$  mm.

Tabela 4.10 - Viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{2} L = L_1 - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ e $\frac{1}{2} L = L_2 - \phi_2 28,66 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0382$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0288$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	559,5	557,4	556,1	555,1	554,2
2 <sup>a</sup>	1649,0	1674,5	1659,6	1644,1	1634,7
3 <sup>a</sup>	2992,5	3135,2	3077,2	3023,8	2992,6

Tabela 4.11 - Viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,37	-1,54	-4,76
Vlasov	0,60	-0,64	-2,83
Cisalhamento	0,78	0,29	-1,04
Timoshenko	0,94	0,86	0,00

A figura 4.7 e as tabelas 4.12 e 4.13 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/2 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$ .

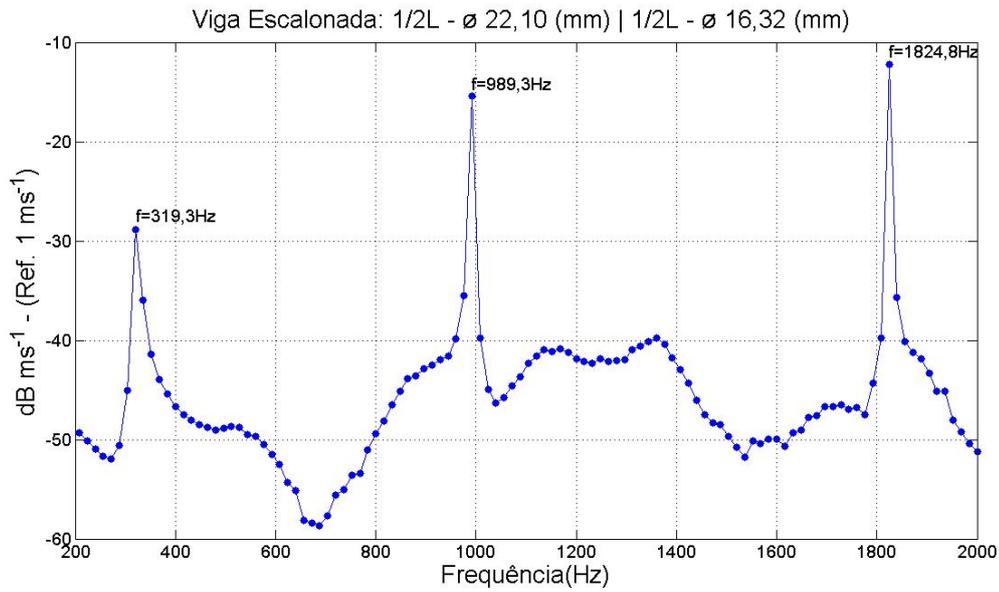


Figura 4.7 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/2 L - \phi 22,10 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi 16,32 \text{ mm}$ .

Tabela 4.12 - Viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{2} L = L_1 - \phi_1 22,10 \text{ mm}$ e $\frac{1}{2} L = L_2 - \phi_2 16,32 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0222$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0164$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	319,3	324,2	323,9	323,7	323,6
2 <sup>a</sup>	989,3	984,9	981,9	978,8	976,8
3 <sup>a</sup>	1824,8	1835,3	1823,7	1812,7	1805,5

Tabela 4.13 - Viga escalonada- $1/2 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-1,53	0,44	-0,57
Vlasov	-1,44	0,74	0,06
Cisalhamento	-1,37	1,06	0,66
Timoshenko	-1,34	1,26	1,05

A figura 4.8 e as tabelas 4.14 e 4.15 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/2 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$ .

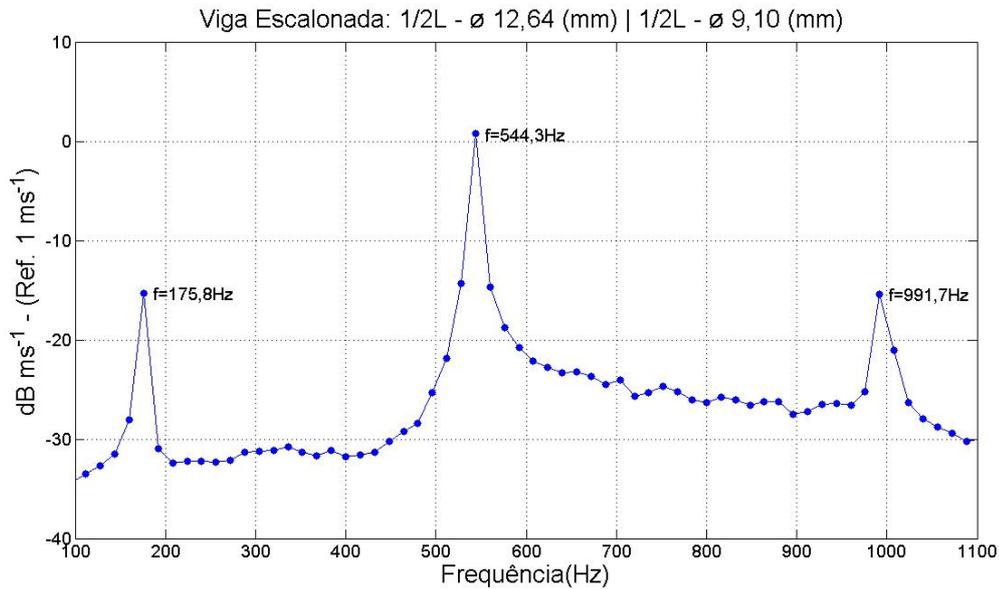


Figura 4.8 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/2 L - \phi 12,64 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi 9,10 \text{ mm}$ .

Tabela 4.14 - Viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{2} L = L_1 - \phi_1 12,64 \text{ mm}$ e $\frac{1}{2} L = L_2 - \phi_2 9,10 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0127$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0091$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	175,8	176,9	176,8	176,8	176,8
2 <sup>a</sup>	544,3	545,5	544,9	544,4	544,1
3 <sup>a</sup>	991,7	1010,6	1008,6	1006,7	1005,4

Tabela 4.15 - Viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-0,62	-0,22	-1,90
Vlasov	-0,56	-0,11	-1,70
Cisalhamento	-0,56	-0,01	-1,51
Timoshenko	-0,56	0,03	-1,38

A figura 4.9 e as tabelas 4.16 e 4.17 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$ . Neste caso, observa-se um comportamento dinâmico semelhante ao apresentado pela tabela 4.10, onde temos uma viga escalonada -  $1/2 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $1/2 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$ . O mesmo comportamento é observado quando comparamos as tabelas 4.18 e 4.20 com as tabelas 4.12 e 4.14.

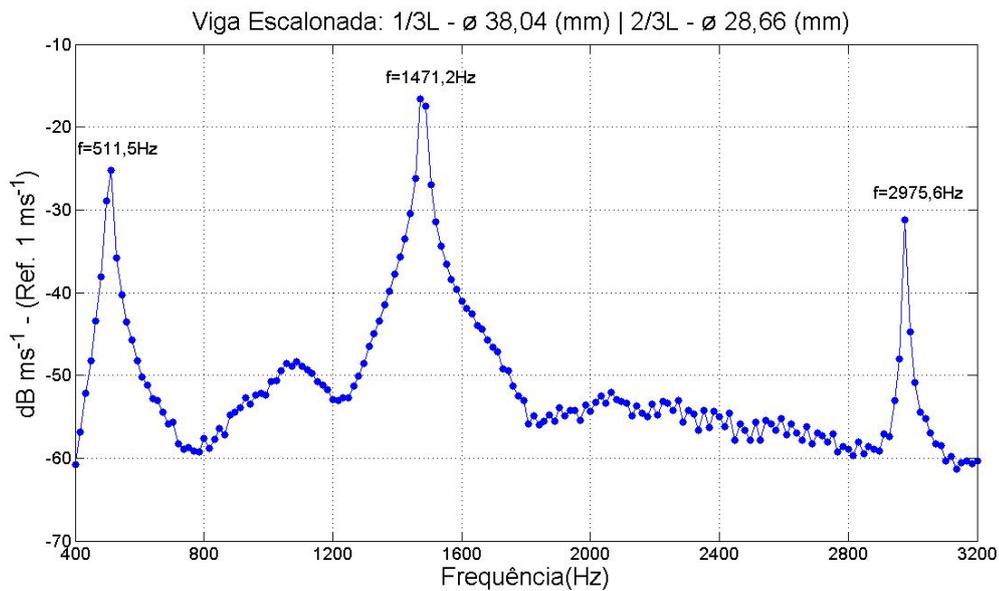


Figura 4.9 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi 38,04 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi 28,66 \text{ mm}$ .

Tabela 4.16 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ e $\frac{2}{3} L = L_2 - \phi_2 28,66 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0573$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0216$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	511,5	494,5	493,2	492,5	491,9
2 <sup>a</sup>	1471,2	1466,7	1453,1	1444,5	1437,6
3 <sup>a</sup>	2975,6	3035,5	2976,1	2934,4	2905,6

Tabela 4.17 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	3,32	0,30	-2,01
Vlasov	3,57	1,23	-0,01
Cisalhamento	3,71	1,81	1,38
Timoshenko	3,83	2,28	2,35

A figura 4.10 e as tabelas 4.18 e 4.19 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$ .

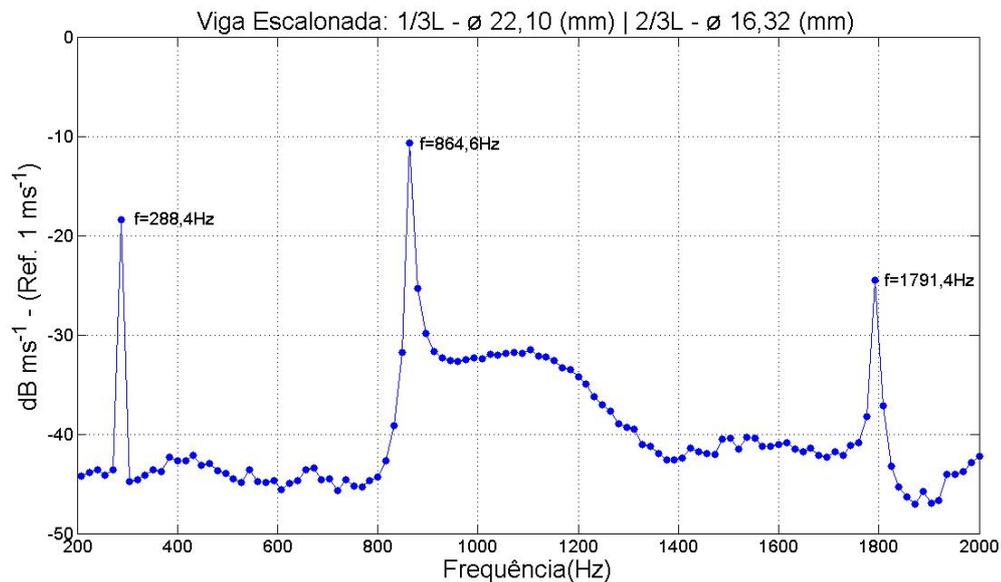


Figura 4.10 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi 22,10 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi 16,32 \text{ mm}$ .

Tabela 4.18 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi_1 22,10 \text{ mm}$ e $\frac{2}{3} L = L_2 - \phi_2 16,32 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0333$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0123$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	288,4	286,2	285,9	285,8	285,7
2 <sup>a</sup>	864,6	851,9	849,2	847,5	846,1
3 <sup>a</sup>	1791,4	1770,9	1759,1	1750,6	1744,2

Tabela 4.19 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,76	1,46	1,14
Vlasov	0,86	1,78	1,80
Cisalhamento	0,90	1,97	2,27
Timoshenko	0,93	2,13	2,63

A figura 4.11 e as tabelas 4.20 e 4.21 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$ .

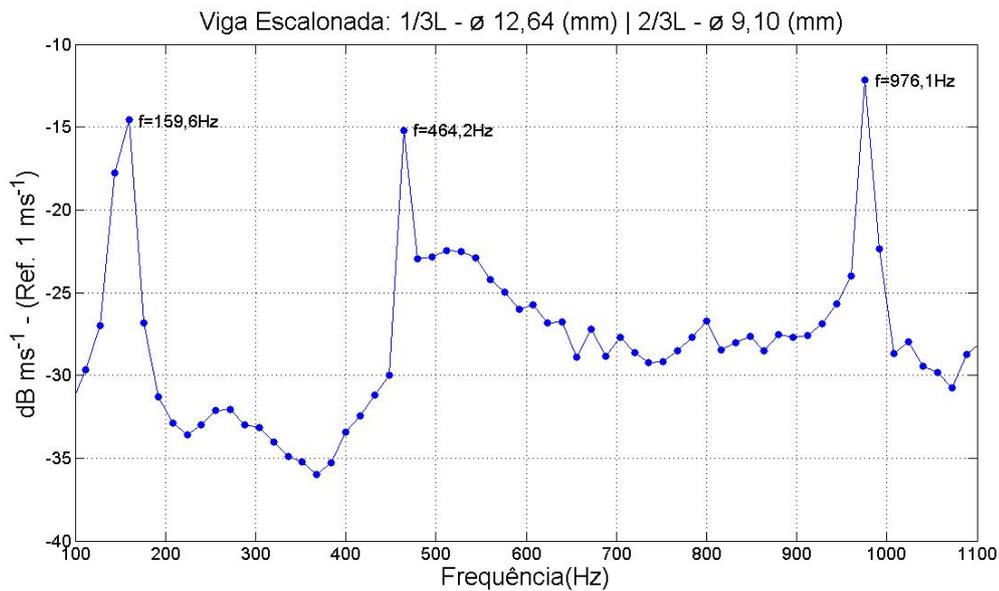


Figura 4.11 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi 12,64 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi 9,10 \text{ mm}$ .

Tabela 4.20 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi 12,64 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi 9,10 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi 12,64 \text{ mm}$ e $\frac{2}{3} L = L_2 - \phi 9,10 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0190$ e $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0068$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	159,6	160,4	160,3	160,3	155,3
2 <sup>a</sup>	464,2	477,2	476,7	476,4	463,2
3 <sup>a</sup>	976,1	991,7	989,6	988,0	965,8

Tabela 4.21 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$  e  $2/3 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	-0,50	-2,80	-1,59
Vlasov	-0,43	-2,69	-1,38
Cisalhamento	-0,43	-2,62	-1,21
Timoshenko	2,69	0,21	1,05

A figura 4.12 e as tabelas 4.22 e 4.23 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 19,02 \text{ mm}$ . Verifica-se que com o aumento do número de escalonamentos ocorre uma diminuição nos valores das frequências naturais, porém, haverá um aumento no desvio percentual entre os valores experimentais e calculados.

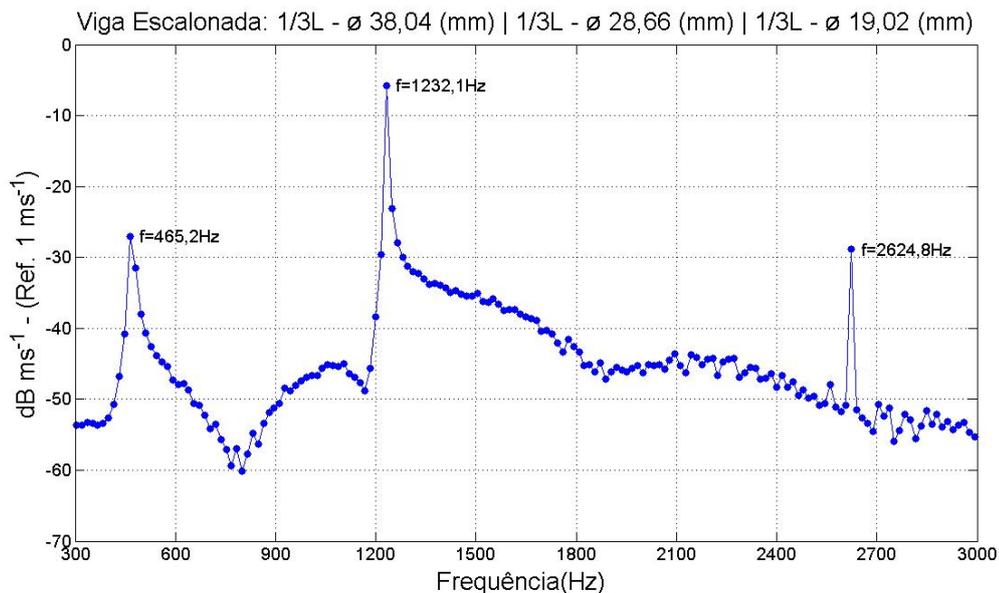


Figura 4.12 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi 38,04 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi 28,66 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 19,02 \text{ mm}$ .

Tabela 4.22 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 19,02 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ , $\frac{1}{3} L = L_2 - \phi_2 28,66 \text{ mm}$ e $\frac{1}{3} L = L_3 - \phi_3 19,02 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0573$ , $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0432$ e $\lambda_3 = \frac{\phi_3}{4L_3} = 0,0286$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	465,2	433,3	433,9	434,3	434,4
2 <sup>a</sup>	1232,1	-	-	-	-
3 <sup>a</sup>	2624,8	2892,7	2869,7	2855,7	2844,0

Tabela 4.23 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 38,04 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 28,66 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 19,02 \text{ mm}$  - desvio relativos (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	6,85	-	-10,21
Vlasov	6,72	-	-9,33
Cisalhamento	6,66	-	-8,79
Timoshenko	6,64	-	-8,35

A figura 4.13 e as tabelas 4.24 e 4.25 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 11,05 \text{ mm}$ .

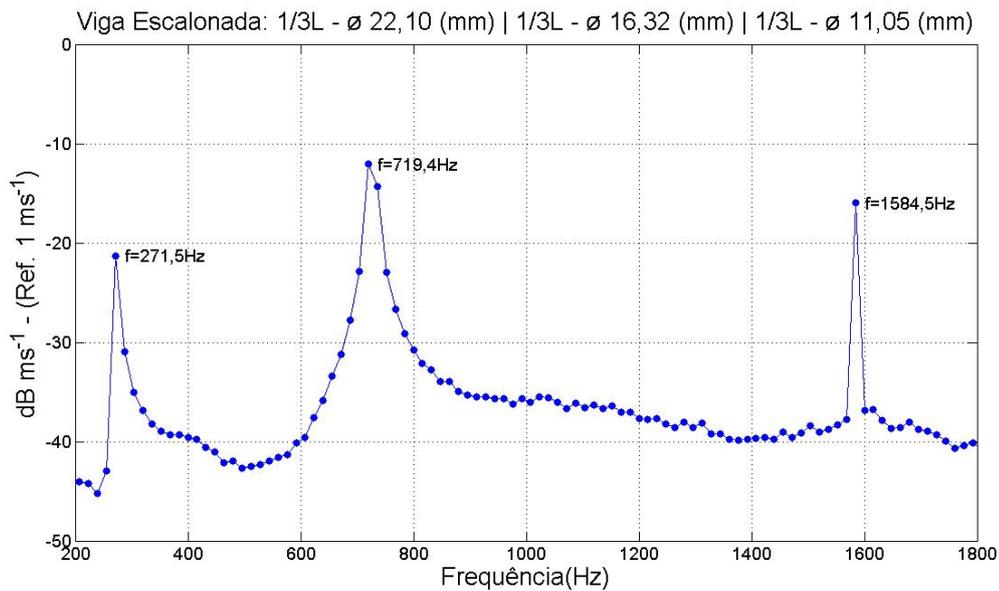


Figura 4.13 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi$  22,10 mm ,  $1/3 L - \phi$  16,32 mm e  $1/3 L - \phi$  11,05 mm .

Tabela 4.24 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi$  22,10 mm ,  $1/3 L - \phi$  16,32 mm e  $1/3 L - \phi$  11,05 mm - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi_1$ 22,10 mm , $\frac{1}{3} L = L_2 - \phi_2$ 16,32 mm e $\frac{1}{3} L = L_3 - \phi_3$ 11,05 mm					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0333$ , $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0246$ e $\lambda_3 = \frac{\phi_3}{4L_3} = 0,0167$					
Valor Experimental		Valor Calculado			
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	271,5	256,9	256,9	257,0	257,9
2 <sup>a</sup>	719,4	-	-	-	-
3 <sup>a</sup>	1584,5	1714,73	1709,9	1706,9	1704,7

Tabela 4.25 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 22,10 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 16,32 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 11,05 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1ª Frequência Natural	2ª Frequência Natural	3ª Frequência Natural
Euler-Bernoulli	5,37	-	-8,21
Vlasov	5,37	-	-7,91
Cisalhamento	5,34	-	-7,72
Timoshenko	5,00	-	-7,58

A figura 4.14 e as tabelas 4.26 e 4.27 apresentam o espectro de frequência do ensaio, as frequências naturais e os desvios relativos (%) entre os valores de frequências naturais experimentais e calculadas, referente à viga escalonada de diâmetro:  $1/3 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 6,30 \text{ mm}$ .

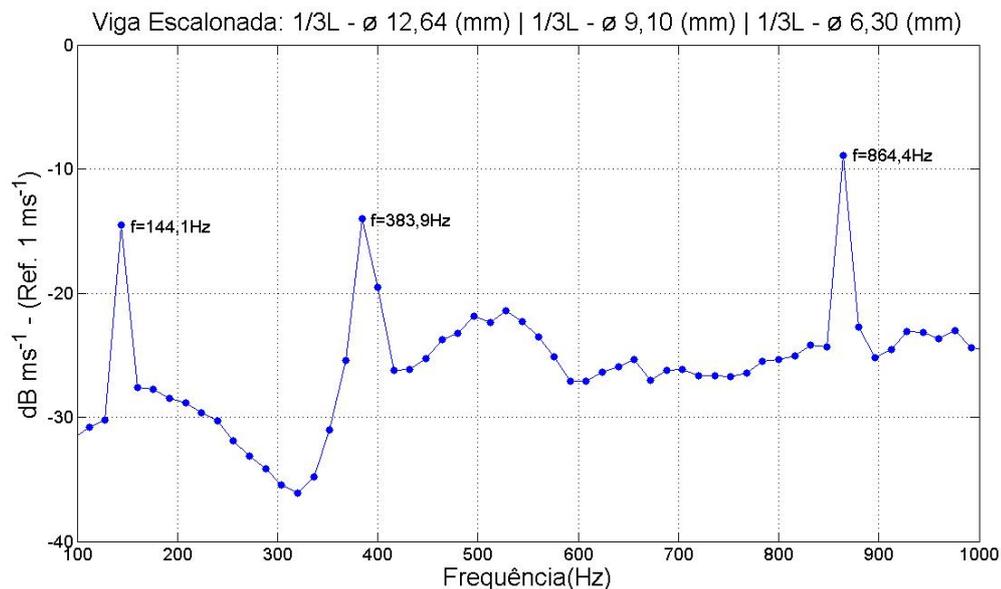


Figura 4.14 - Espectro de frequência - viga escalonada -  $1/3 L - \phi 12,64 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi 9,10 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi 6,30 \text{ mm}$ .

Tabela 4.26 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 6,30 \text{ mm}$  - valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais (Hz).

Viga Escalonada: $\frac{1}{3} L = L_1 - \phi_1 12,64 \text{ mm}$ , $\frac{1}{3} L = L_2 - \phi_2 9,10 \text{ mm}$ e $\frac{1}{3} L = L_3 - \phi_3 6,30 \text{ mm}$					
Índice de Esbeltez: $\lambda_1 = \frac{\phi_1}{4L_1} = 0,0190$ , $\lambda_2 = \frac{\phi_2}{4L_2} = 0,0137$ e $\lambda_3 = \frac{\phi_3}{4L_3} = 0,0095$					
Valor Experimental			Valor Calculado		
Freq.	Laboratório	Euler-Bernoulli	Vlasov	Cisalhamento	Timoshenko
1 <sup>a</sup>	144,1	143,3	143,3	143,3	143,8
2 <sup>a</sup>	383,9	-	-	-	-
3 <sup>a</sup>	864,4	956,4	955,5	954,9	954,5

Tabela 4.27 - Viga escalonada -  $1/3 L - \phi_1 12,64 \text{ mm}$ ,  $1/3 L - \phi_2 9,10 \text{ mm}$  e  $1/3 L - \phi_3 6,30 \text{ mm}$  - desvio relativo (%) entre os valores experimentais e os valores calculados da primeira, segunda e terceira frequências naturais.

Modelos de Viga	1 <sup>a</sup> Frequência Natural	2 <sup>a</sup> Frequência Natural	3 <sup>a</sup> Frequência Natural
Euler-Bernoulli	0,55	-	-10,64
Vlasov	0,55	-	-10,53
Cisalhamento	0,55	-	-10,46
Timoshenko	0,20	-	-10,42

Para o caso particular das tabelas 4.22 a 4.27 não foi possível determinar a 2<sup>a</sup> frequência natural utilizando o programa desenvolvido pelo autor.

## **CAPÍTULO 5**

### **RESULTADOS**

Neste capítulo apresentam-se as frequências naturais adimensionais de vigas escalonadas em duas e três partes com apoios elásticos nas extremidades.

Os resultados apresentados neste capítulo foram gerados através do programa computacional desenvolvido pelo autor e alguns desses resultados não se encontram ainda disponível na literatura. Assim esses resultados poderão servir de base para o estudo de outros autores.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada são apresentadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades geométricas e materiais da viga simulada.

Grandeza	Valor	Unidade
Diâmetro do Primeiro Trecho $\phi_1$	0,03804	m
Área do Primeiro Trecho $A_1$	$1,136503815 \times 10^{-3}$	m <sup>2</sup>
Momento de Inércia do Primeiro Trecho $I_1$	$1,027855187 \times 10^{-7}$	m <sup>4</sup>
Comprimento Total da Viga $L$	1,5	m
Massa específica $\rho$	2682,6	kg/m <sup>3</sup>
Modulo de Young $E$	68,11	GPa
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,33	-
Coefficiente de cisalhamento $k_c$	0,9	-

## 5.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM DUAS PARTES

As frequências naturais para diferentes tipos de apoio elástico encontram-se nas tabelas 5.2 a 5.17. Inicialmente, variaram-se as condições de apoios e as relações dos momentos de inércia para verificar a influência desse comportamento nas frequências naturais. As frequências naturais obtidas nas tabelas 5.2 a 5.17 são baseadas nas relações de momentos de inércia de área de trechos adjacentes,  $\bar{I}_1 = I_2 / I_1$ , para uma viga escalonada em duas partes.

$$L_1 = L_2 = L/2 \Rightarrow \text{condição estabelecida para as tabelas 5.2 a 5.13.} \quad (5.1)$$

$$L_1 = \frac{2L}{3} \text{ e } L_2 = \frac{L}{3} \Rightarrow \text{condição estabelecida para as tabelas 5.14 a 5.17.} \quad (5.2)$$

Nas tabelas 5.2 a 5.5 encontram-se os resultados numéricos obtidos na determinação das duas primeiras frequências naturais adimensionais de uma viga apoiada elasticamente em uma das extremidades e livre na outra. Verifica-se nas tabelas 5.2 a 5.5 que quando

$R_1 = R_2 = T_1 = T_2 = \infty$  tem-se uma viga com condição de contorno livre - livre e as frequências naturais são nulas para qualquer relação de momento de inércia de área, ou seja, frequências naturais de corpo rígido. Verifica-se também, que com a diminuição das constantes adimensionais de rigidez do suporte elástico de apenas uma das extremidades, acarreta em um aumento gradual de suas frequências naturais adimensionais. Isto ocorre devido aos apoios irem ficando mais rígidos. Pode-se observar também que as primeiras frequências naturais para os quatro modelos estudados tendem a serem iguais, devido os valores do índice de esbeltez ser pequeno, ou seja,  $\lambda = \frac{\phi}{4L} \leq 0,025$ . O mesmo é observado nas demais tabelas que apresentam essa relação de esbeltez.

Tabela 5.2 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Euler-Bernoulli.

Modelo de Euler-Bernoulli					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127$	$\lambda_2 = 0,0072$	$\lambda_1 = 0,0127$	$\lambda_2 = 0,023$
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
$\infty$	$\infty$	0	0	0	0
500	$\infty$	0,3482	0,6232	0,2297	0,5312
50	$\infty$	0,6186	1,1035	0,4080	0,9424
5	$\infty$	1,0908	1,8861	0,7158	1,6409
0,5	$\infty$	1,7869	2,7359	1,1430	2,6165
0,05	$\infty$	2,1751	3,6115	1,3883	3,8379
0	$\infty$	2,2355	3,9696	1,4363	4,5928

Tabela 5.3 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra - modelo de Vlasov.

Modelo de Vlasov					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
$\infty$	$\infty$	0	0	0	0
500	$\infty$	0,3482	0,6232	0,2297	0,5312
50	$\infty$	0,6186	1,1035	0,4080	0,9424
5	$\infty$	1,0908	1,8861	0,7158	1,6408
0,5	$\infty$	1,7869	2,7359	1,1430	2,6164
0,05	$\infty$	2,1751	3,6114	1,3883	3,8376
0	$\infty$	2,2355	3,9694	1,4363	4,5918

Tabela 5.4 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Cisalhamento.

Modelo de Cisalhamento					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
$\infty$	$\infty$	0	0	0	0
500	$\infty$	0,3482	0,6232	0,2297	0,5312
50	$\infty$	0,6186	1,1035	0,4080	0,9424
5	$\infty$	1,0908	1,8860	0,7158	1,6408
0,5	$\infty$	1,7869	2,7358	1,1430	2,6163
0,05	$\infty$	2,1751	3,6113	1,3883	3,8372
0	$\infty$	2,2355	3,9693	1,4363	4,5907

Tabela 5.5 - 1ª e 2ª Freqüências naturais – viga livre em uma extremidade ( $R_2 = T_2 = \infty$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Timoshenko.

Modelo de Timoshenko					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
$\infty$	$\infty$	0	0	0	0
500	$\infty$	0,3482	0,6232	0,2297	0,5312
50	$\infty$	0,6186	1,1035	0,4080	0,9424
5	$\infty$	1,0908	1,8860	0,7158	1,6408
0,5	$\infty$	1,7869	2,7357	1,1430	2,6162
0,05	$\infty$	2,1751	3,6113	1,3883	3,8369
0	$\infty$	2,2356	3,9691	1,4363	4,5901

As tabelas 5.6 a 5.9 apresentam as duas primeiras freqüências adimensionais para uma viga engastada em uma das extremidades e apoiada elasticamente na outra. Neste caso, procura-se diminuir as constantes adimensionais de rotação e de translação da extremidade restrita elasticamente ( $R_2 = T_2$ ) para que no final da simulação obtenha-se uma viga do tipo biengastada ( $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = 0$ ). Observa-se que à medida que se diminui as constantes  $R_2$  e  $T_2$ , ou seja, à medida que os apoios elásticos tornam-se mais rígidos os valores das freqüências naturais tendem a aumentar.

Tabela 5.6 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Euler-Bernoulli.

Modelo de Euler-Bernoulli					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
0	$\infty$	2,2355	3,9696	1,4363	4,5928
0	500	2,2366	3,9702	1,4594	4,5955
0	50	2,2466	3,9754	1,6273	4,6193
0	5	2,3317	4,0239	2,2983	4,8302
0	0,5	2,7006	4,3004	3,4080	5,7599
0	0,05	3,4254	4,8839	4,7495	7,2773
0	0	3,9453	6,9285	5,2612	9,2393

Tabela 5.7 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Vlasov.

Modelo de Vlasov					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
0	$\infty$	2,2355	3,9694	1,4363	4,5918
0	500	2,2366	3,9700	1,4594	4,5945
0	50	2,2466	3,9752	1,6273	4,6183
0	5	2,3317	4,0236	2,2983	4,8291
0	0,5	2,7006	4,3000	3,4077	5,7573
0	0,05	3,4254	4,8832	4,7495	7,2719
0	0	3,9452	6,9261	5,2608	9,2286

Tabela 5.8 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Cisalhamento.

Modelo de Cisalhamento					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
0	$\infty$	2,2355	3,9693	1,4363	4,5908
0	500	2,2367	3,9698	1,4594	4,5934
0	50	2,2466	3,9751	1,6273	4,6172
0	5	2,3317	4,0235	2,2983	4,8279
0	0,5	2,7006	4,2997	3,4075	5,7552
0	0,05	3,4254	4,8827	4,7492	7,2682
0	0	3,9451	6,9236	5,2600	9,2187

Tabela 5.9 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga fixa em uma extremidade ( $R_1 = T_1 = 0$ ) e apoiada elasticamente na outra – modelo de Timoshenko.

Modelo de Timoshenko					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
0	$\infty$	2,2356	3,9691	1,4363	4,5901
0	500	2,2367	3,9698	1,4594	4,5928
0	50	2,2466	3,9750	1,6273	4,6166
0	5	2,3317	4,0234	2,2982	4,8271
0	0,5	2,7006	4,2995	3,4073	5,7537
0	0,05	3,4254	4,8823	4,7491	7,2652
0	0	3,9450	6,9220	5,2597	9,2120

Já nas tabelas 5.10 a 5.13 encontram-se os valores das duas primeiras frequências adimensionais para uma viga apoiada elasticamente nas duas extremidades. Das tabelas 5.10 a 5.13 observa-se que uma viga biengastada não possui engaste perfeitamente rígido. A primeira frequência natural de uma viga, por exemplo, de coeficientes do tipo  $R_1 = T_1 = R_2 = T_2 = 0,005$  se assemelha a frequência de uma viga biengastada.

Tabela 5.10 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Euler-Bernoulli.

Modelo de Euler-Bernoulli					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127 \mid \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
500	500	0,3803	0,6428	0,5071	0,8572
50	50	0,6760	1,1399	0,9015	1,5201
5	5	1,1980	1,9756	1,5976	2,6345
0,5	0,5	2,0740	3,0866	2,7657	4,1160
0,05	0,05	3,2150	4,4868	4,2872	5,9832
0,005	0,005	3,8415	6,2660	5,1227	8,3559

Tabela 5.11 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades  
– modelo de Vlasov.

Modelo de Vlasov					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
500	500	0,3803	0,6428	0,5071	0,8572
50	50	0,6760	1,1399	0,9015	1,5201
5	5	1,1980	1,9756	1,5976	2,6344
0,5	0,5	2,0740	3,0865	2,7658	4,1153
0,05	0,05	3,2150	4,4864	4,2874	5,9815
0,005	0,005	3,8414	6,2649	5,1226	8,3508

Tabela 5.12 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades  
– modelo de Cisalhamento.

Modelo de Cisalhamento					
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
500	500	0,3803	0,6428	0,5071	0,8572
50	50	0,6760	1,1399	0,9015	1,5201
5	5	1,1980	1,9756	1,5976	2,6344
0,5	0,5	2,0740	3,0863	2,7658	4,1147
0,05	0,05	3,2150	4,4860	4,2874	5,9799
0,005	0,005	3,8413	6,2637	5,1220	8,3461

Tabela 5.13 - 1ª e 2ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades – modelo de Timoshenko.

Modelo de Timoshenko					
		$\bar{I}_1 = 0,1$		$\bar{I}_1 = 10$	
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,0072$		$\lambda_1 = 0,0127   \lambda_2 = 0,023$	
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$
500	500	0,3803	0,6428	0,5071	0,8572
50	50	0,6760	1,1399	0,9015	1,5201
5	5	1,1980	1,9756	1,5976	2,6344
0,5	0,5	2,0740	3,0862	2,7658	4,1143
0,05	0,05	3,2150	4,4858	4,2875	5,9789
0,005	0,005	3,8413	6,2630	5,1218	8,3430

As tabelas 5.14 a 5.17 apresentam a primeira frequência natural adimensional para quatro casos diferentes de condições clássicas de contorno. A condição estabelecida para os comprimentos dos trechos da viga encontra-se na equação (5.2). As frequências de corpo rígido não são apresentadas nas tabelas.

Tabela 5.14 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Euler-Bernoulli.

Modelo de Euler-Bernoulli								
		$\bar{I}_1 = 0,1$			$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$		
CC	$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,012$	$\lambda = 0,006$	$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,038$	
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	
1,2	0	0	$\infty$	$\infty$	2,2493	1,8751	1,4678	
2,2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,5870	4,7300	4,4913	
1,3	0	0	0	$\infty$	2,3915	2,3650	2,2298	
1,4	0	0	$\infty$	0	3,3741	3,9266	3,8168	

CC – Condições de Contorno, 1 - Engastada, 2 - Livre, 3 - Deslizante, 4 - Pinada.

Tabela 5.15 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Vlasov.

Modelo de Vlasov									
CC	$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$		
					$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,012$	$\lambda = 0,006$	$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,038$		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
1,2	0	0	$\infty$	$\infty$	2,2493	1,8751	1,4678		
2,2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,5870	4,7294	4,4907		
1,3	0	0	0	$\infty$	2,3915	2,3649	2,2296		
1,4	0	0	$\infty$	0	3,3739	3,9261	3,8163		

CC – Condições de Contorno, 1 - Engastada, 2 - Livre, 3 - Deslizante, 4 - Pinada.

Tabela 5.16 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Cisalhamento.

Modelo de Cisalhamento									
CC	$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$		
					$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,012$	$\lambda = 0,006$	$\lambda_1 = 0,009   \lambda_2 = 0,038$		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
1,2	0	0	$\infty$	$\infty$	2,2493	1,8751	1,4678		
2,2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,5862	4,7283	4,4897		
1,3	0	0	0	$\infty$	2,3915	2,3648	2,2295		
1,4	0	0	$\infty$	0	3,3737	3,9252	3,8155		

CC – Condições de Contorno, 1 - Engastada, 2 - Livre, 3 - Deslizante, 4 - Pinada.

Tabela 5.17 - 1ª Frequência natural – condições clássicas de contorno – modelo de Timoshenko.

Modelo de Timoshenko									
CC	$R_1$	$T_1$	$R_2$	$T_2$	$\bar{I}_1 = 0,1$	$\bar{I}_1 = 1$	$\bar{I}_1 = 10$		
					$\lambda_1 = 0,009 \mid \lambda_2 = 0,012$	$\lambda = 0,006$	$\lambda_1 = 0,009 \mid \lambda_2 = 0,038$		
					$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,1}$		
1,2	0	0	$\infty$	$\infty$	2,2493	1,8751	1,4678		
2,2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4,5859	4,7277	4,4891		
1,3	0	0	0	$\infty$	2,3915	2,3647	2,2295		
1,4	0	0	$\infty$	0	3,3736	3,9248	3,8151		

CC – Condições de Contorno, 1 - Engastada, 2 - Livre, 3 - Deslizante, 4 - Pinada.

## 5.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS DE UMA VIGA ESCALONADA EM TRÊS PARTES

Trabalha-se, agora, com vigas escalonadas em três partes, ou seja, com duas mudanças de seções. As frequências naturais obtidas são baseadas nas relações de momentos de inércia de área de trechos adjacentes, como no item anterior, mas devido o número de escalonamentos serem maior, teremos:  $\bar{I}_1 = I_2 / I_1$  e  $\bar{I}_2 = I_3 / I_2$ . A condição estabelecida para os comprimentos dos trechos da viga escalonada encontra-se na equação (5.3).

$$L_1 = L_2 = L_3 = L/3 \Rightarrow \text{condição estabelecida para as tabelas 5.18 a 5.21.} \quad (5.3)$$

As tabelas 5.18 a 5.21 apresentam os valores das três primeiras frequências naturais adimensionais para uma viga escalonada em três partes, com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes e apoiada elasticamente nas duas extremidades. Nas tabelas 5.18 a 5.21 procura-se aumentar os valores das constantes adimensionais de rotação e translação para que no final da simulação obtenha-se uma viga do tipo livre-livre. Observa-se nas tabelas 5.18 a 5.21 que à medida que aumentam-se as constantes adimensionais de rotação e transla-

ção as frequências naturais tendem a diminuir devido os apoios ficarem mais flexíveis. Verifica-se também que a 1ª frequência natural para os modelos de Euler-Bernoulli a Timoshenko tendem a aumentar. Isto pode ter ocorrido devido à viga ter trechos espessos, ou seja, possuir índice de esbeltez bem maior que  $\lambda > 0,025$  para o segundo e terceiro trechos.

Tabela 5.18 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes - modelo de Euler-Bernoulli.

Modelo de Euler - Bernoulli				
		$\bar{I}_1 = 10 - \bar{I}_2 = 20$		
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\lambda_1 = 0,019 \mid \lambda_2 = 0,034 \mid \lambda_3 = 0,071$		
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	11,1395	14,0491	23,5081
0,01	0,01	10,4114	11,3913	17,4306
1	1	4,3191	6,3810	9,7104
100	100	1,3696	3,2628	5,5392
10000	10000	0,4331	1,0315	5,5309
$\infty$	$\infty$	0	0	5,5308

Tabela 5.19 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes – modelo de Vlasov.

Modelo de Vlasov				
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 10 - \bar{I}_2 = 20$		
		$\lambda_1 = 0,019   \lambda_2 = 0,034   \lambda_3 = 0,071$		
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	11,1470	14,0306	23,4199
0,01	0,01	10,4277	11,3833	17,4086
1	1	4,3198	6,3805	9,6774
100	100	1,3697	3,2553	5,5403
10000	10000	0,4331	1,0292	5,5319
$\infty$	$\infty$	0	0	5,5318

Tabela 5.20 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes – modelo de Cisalhamento.

Modelo de Cisalhamento				
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 10 - \bar{I}_2 = 20$		
		$\lambda_1 = 0,019   \lambda_2 = 0,034   \lambda_3 = 0,071$		
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	11,1498	14,0001	23,2396
0,01	0,01	10,4351	11,3747	17,3366
1	1	4,3201	6,3801	9,6609
100	100	1,3697	3,2516	5,5414
10000	10000	0,4331	1,0281	5,5330
$\infty$	$\infty$	0	0	5,5329

Tabela 5.21 - 1ª, 2ª e 3ª Frequências naturais – viga apoiada elasticamente nas duas extremidades e com duas relações entre momentos de inércia de trechos adjacentes - modelo de Timoshenko.

Modelo de Timoshenko				
$R_1 = T_1$	$R_2 = T_2$	$\bar{I}_1 = 10 - \bar{I}_2 = 20$		
		$\lambda_1 = 0,019 \mid \lambda_2 = 0,034 \mid \lambda_3 = 0,071$		
		$\hat{\beta}_{1,1}$	$\hat{\beta}_{1,2}$	$\hat{\beta}_{1,3}$
0	0	11,1574	13,9836	23,1587
0,01	0,01	10,4462	11,3685	17,3076
1	1	4,3204	6,3798	9,6453
100	100	1,3698	3,2477	5,5422
10000	10000	0,4331	1,0268	5,5337
$\infty$	$\infty$	0	0	5,5336

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

## 6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, as frequências naturais foram calculadas de acordo com quatro modelos dinâmicos: modelo de Euler-Bernoulli, modelo de Vlasov, modelo de Cisalhamento e modelo de Timoshenko.

Através dos resultados obtidos foi possível verificar a eficácia do modelo matemático proposto que é capaz de gerar bons resultados. O método utilizado elimina a necessidade do uso de malhas na solução de problemas dinâmicos.

A validação dos resultados calculados foi efetiva, pois se verificou concordância entre os valores gerados pelo programa computacional com os resultados obtidos da literatura e de ensaios experimentais.

Para vigas escalonadas com índice de esbeltez  $\lambda \leq 0,025$  os resultados apresentados pelos 4 modelos propostos se aproximam, para 1ª frequência natural. Já para as demais frequências existe discrepância entre os modelos, sendo que o modelo de Timoshenko é o mais preciso.

Para conseguir bons resultados no cálculo da 2ª frequência natural utilizando os modelos de Euler-Bernoulli e Vlasov, o índice de esbeltez deve ser menor  $\lambda < 0,012$  e para 3ª frequência natural  $\lambda < 0,005$ . O modelo de Vlasov é um modelo alternativo ao modelo de Euler-Bernoulli, mas não tão eficiente quanto o modelo de Cisalhamento.

Para vigas continua e escalonada com índice de esbeltez  $\lambda > 0,025$  os resultados obtidos pelos modelos de Euler-Bernoulli e Vlasov se comparados com o modelo de Timoshenko são discrepantes. Já os resultados obtidos pelo modelo de Cisalhamento apresentam pequeno desvio em relação ao modelo de Timoshenko que é o mais preciso. Assim o efeito do cisalhamento é mais dominante que o efeito da inércia de rotação.

Conclui-se que o modelo de Cisalhamento é um modelo que apresenta os melhores resultados quando comparado com o modelo de Timoshenko.

## 6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Tendo em vista o desenvolvimento matemático e simulações realizadas neste trabalho como, por exemplo, em vigas com diferentes apoios elásticos, somente nas extremidades, poder-se-ia futuramente estudar o comportamento dinâmico de vigas com vários suportes elásticos distribuídos ao longo do corpo da estrutura com a inclusão do amortecimento.

Outro estudo que pode ser realizado é submeter à estrutura a diferentes forças externas em diferentes posições.

Pode-se, ainda, adicionar massas concentradas nas vigas, o que simula diversos rotores de sistemas mecânicos e a influência dos acoplamentos na frequência do mesmo.

Uma outra proposta é realizar um estudo comparativo entre vigas em repouso e vigas com velocidade de rotação.

Pode também realizar estudos com vigas de material compósito laminado.

Por fim, sugere-se que sejam realizados ensaios com outras condições de contorno no intuito de validar os modelos teóricos desenvolvidos variando-se os tipos de suportes elásticos e o número de escalonamentos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COSTA, S. N. J. (2006)**, *O Modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*, Porto Alegre, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 274p.
- DONG, X. J., MENG, G., LI, H. G., YE, L. (2005)**, “Vibration Analysis of a Stepped Laminated Composite Timoshenko Beam”, *Mechanical Research Communications*, vol. 32, pp. 572-581.
- FERREIRA NETO, L. S. (2005)**, *Um Método para Análise Modal de Estruturas Submetidas à Excitação Ambiente*, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, 105p.
- GUTIERREZ, H. R., LAURA, A. A. P., ROSSI, E. R. (1990)**, “Natural Frequencies of a Timoshenko Beams of Non-Uniform Cross-Section Elastically Restrained at One End and Guided at the Other”, *Journal of Sound and Vibration*, vol 141, n 1, pp 174–179.
- HAN, S. M., BENAROYA, H., WEI, T. (1999)**, “Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, vol 225, n 5, pp 935–988.
- HONG, S. W., KIM, J. W. (1999)**, “Modal Analysis of Multi-Span Timoshenko Beams Connected or Supported by Resilient Joints with Damping”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, n 4, pp. 787-806.
- INMAN, D. J. (2001)**, *Engineering Vibration*, 2º ed., Prentice Hall, New Jersey, USA, 654p.

- JANG, S. K., BERT, C. W. (1989)**, “Free Vibration of Stepped Beams: Higher Mode Frequencies and Effects of Steps on Frequency”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 132, pp. 164-168.
- JAWORSKI, J. W., DOWELL, E.H. (2008)**, “Free Vibration of a Cantilevered Beam with Multiple Steps: Comparison of Several Theoretical Methods with Experiment”, *Journal of Sound and Vibration*, vol 312, pp. 713-725.
- KOPLow, M. A., BHATTACHARYYA, A., MANN, B. P. (2006)**, “Closed form Solutions for the Dynamics Response of Euler-Bernoulli Beams with Step Changes in Cross Section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, pp. 214-225.
- LECKAR, H., SAMPAIO, R.(1999)**, “Comparação entre Diferentes Modelos de Vibrações Transversais de Vigas”, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 99*, Águas de Lindóia, Brasil, 9p.
- LIMA JR., J. J. (2007)**, “Análise das Frequências em Estruturas do Tipo Viga”, *Boletim Interno, BI/PF-CPGM-01/07*, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 22p.
- LIMA JR., J. J., ARANTES, R. F. (2000)**, “Estudo Dinâmico Adimensional dos Modelos de Viga de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko”, *Anais do IX Congresso Chileno de Engenharia Mecânica e IV Congresso Nacional de Energia*, Valparaiso, Chile, 6p.
- MAURIZI, M. J., BELLÉS, P. M. (1993a)**, “Free Vibration of Stepped Beams Elastically Restrained Against Translation and Rotation at One End”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 163, n 1, pp. 188-191.
- MAURIZI, M. J., BELÉS, P. M. (1993b)**, “Natural Frequencies of One-Span with Stepwise Variable Cross-Section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 168, n 1, pp. 184-188.

- MARTINS, F. J. (1998)**, *Influência da Inércia de Rotação e da Força Cortante nas Frequências Naturais e na Resposta Dinâmica de Estruturas de Barras*, São Carlos, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 158p.
- MERIAM, J. L. & KRAICE, L. G. (1999)**, *Mecânica Estática*, 4<sup>a</sup> Ed, Rio de Janeiro, LTC– Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, 360p.
- NAGULESWARAN, S. (2002a)**, “Natural Frequencies, Sensitivity and Mode Shape Details of an Euler-Bernoulli Beam With One-Step Change in Cross-Section and with Ends on Classical Supports”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 252, n 4 pp. 751-767.
- NAGULESWARAN, S. (2002b)**, “Transversal Vibrations of an Euler-Bernoulli Uniform Beam Carrying Several Particles”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2463-2478.
- NAGULESWARAN, S. (2002c)**, “Vibration of an Euler-Bernoulli on Elastic end Supports and with up to Three Step Changes in Cross-Section”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 2541-2555.
- NAGULESWARAN, S. (2003)**, “Vibration and Stability of an Euler-Bernoulli Beam with up to Three Step Changes in Cross-Section an Axial Force”, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45, pp. 2563-2579.
- OLIVEIRA, A. S. (2008)**, *Estudo do Posicionamento de Atuadores Piezelétricos em Estruturas Inteligentes*, Tese de Doutorado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 193 p.
- RAO, S. S. (2004)**, *Mechanical Vibration*, 4<sup>a</sup> ed., Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA, 420p.

- ROSA, M. A. (1994)**, “Free Vibrations of Stepped Beams with Elastic Ends”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, n 4, pp. 563-567.
- ROSA, M. A. (1995)**, “Free Vibrations of Stepped Beams with Flexible Ends, in the Presence of Follower Forces at the Step”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 194, n 4, pp. 631-635.
- SANTOS, N. M. (2007)**, *Vetores e Matrizes: Uma Introdução à Álgebra Linear*, 4<sup>a</sup> ed., Thomson Learning, São Paulo, 287p.
- SARDINHA, B. I. (2006)**, “Monitoramento de Estruturas para Identificação de Parâmetros Modais”, *Anais do XXVII Iberian Latin American Congresso on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 06*, Belém, Brasil, 10p.
- TIMOSHENKO, S. (1921)**, “On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars”, *Philosophical Magazine*, 41, 744–746.
- TIMOSHENKO, S. (1953)**, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, New York, 452p.
- TIMOSHENKO, S., YOUNG, D. Y. (1961)**, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Edition, D. van Nostrand, New York, pp. 329–331.
- TONG, X., TABARROK, B. (1995)**, “Vibration Analysis of Timoshenko Beams with Non-homogeneity and Varying Cross-Section”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, n 5, pp. 821-835.
- TRAILL-NASH, R. W., COLLAR, A. R. (1953)**, “The Effects of Shear Flexibility and Rotatory Inertia on the Bending Vibrations of Beams”, *Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 9, n 2, pp. 186-222.

**VAZ, J. D. C. (2008)**, *Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com Apoios Elasticamente Variáveis*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 94p.

## **APÊNDICE A**

### **MODELO DE VIGA UNIFORME DE EULER-BERNOULLI**

Neste modelo somente deslocamentos produzidos por flexão pura são considerados. Os deslocamentos, produzidos por força cortante e as forças inerciais originadas pela rotação da seção transversal (inércia de rotação) são desprezados. Este modelo, conhecido também como teoria elementar, aplica-se para o caso de vigas esbeltas e para baixas frequências naturais.

#### **A.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI**

Este Apêndice apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Euler-Bernoulli, ilustrada na figura A.1, considerando-se as seguintes hipóteses:

- As seções planas de uma viga permanecem planas e normais à linha neutra após a viga ser submetida à flexão;

- O valor do comprimento da viga é maior do que o valor das outras dimensões;
- Os deslocamentos verticais, eixo  $y$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $z$  é nulo;
- A influência do cisalhamento é desprezível e a hipótese de seções planas é satisfeita, para os casos onde o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é menor que 0,025 para seção circular e 0,029 para seção retangular;
- A inércia de rotação é desprezível;
- A viga é composta por material elástico linear, homogêneo e isotrópico sem carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson é negligenciável;
- Não é considerado as forças dissipativas.

A figura A.1 ilustra uma viga engastada com vibração na direção do eixo  $y$ . Na viga de Euler-Bernoulli, a vibração na direção do eixo  $y$  é geralmente chamada de vibração transversal ou vibração flexional. A viga em questão possui seção retangular  $A(x)$ , base  $b$ , altura  $h$ , comprimento  $L$  e rigidez de flexão  $EI(x)$ , de acordo com Inman (2001).

O momento fletor,  $M(x, t)$ , apresentado na equação (A.2) foi obtido através da equação diferencial para a deflexão de vigas elásticas, equação (A.1), desprezando o quadrado da inclinação da curva elástica.

$$\frac{M(x, t)}{EI(x)} = \frac{\partial^2 v(x, t) / \partial x^2}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{A.1})$$

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{A.2})$$

com  $M(x,t)$  momento fletor (Nm),  $E$  módulo de elasticidade longitudinal (GPa),  $I(x)$  momento de inércia de área com relação ao eixo  $z$  ( $m^4$ ) e  $v(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $y$  (m).

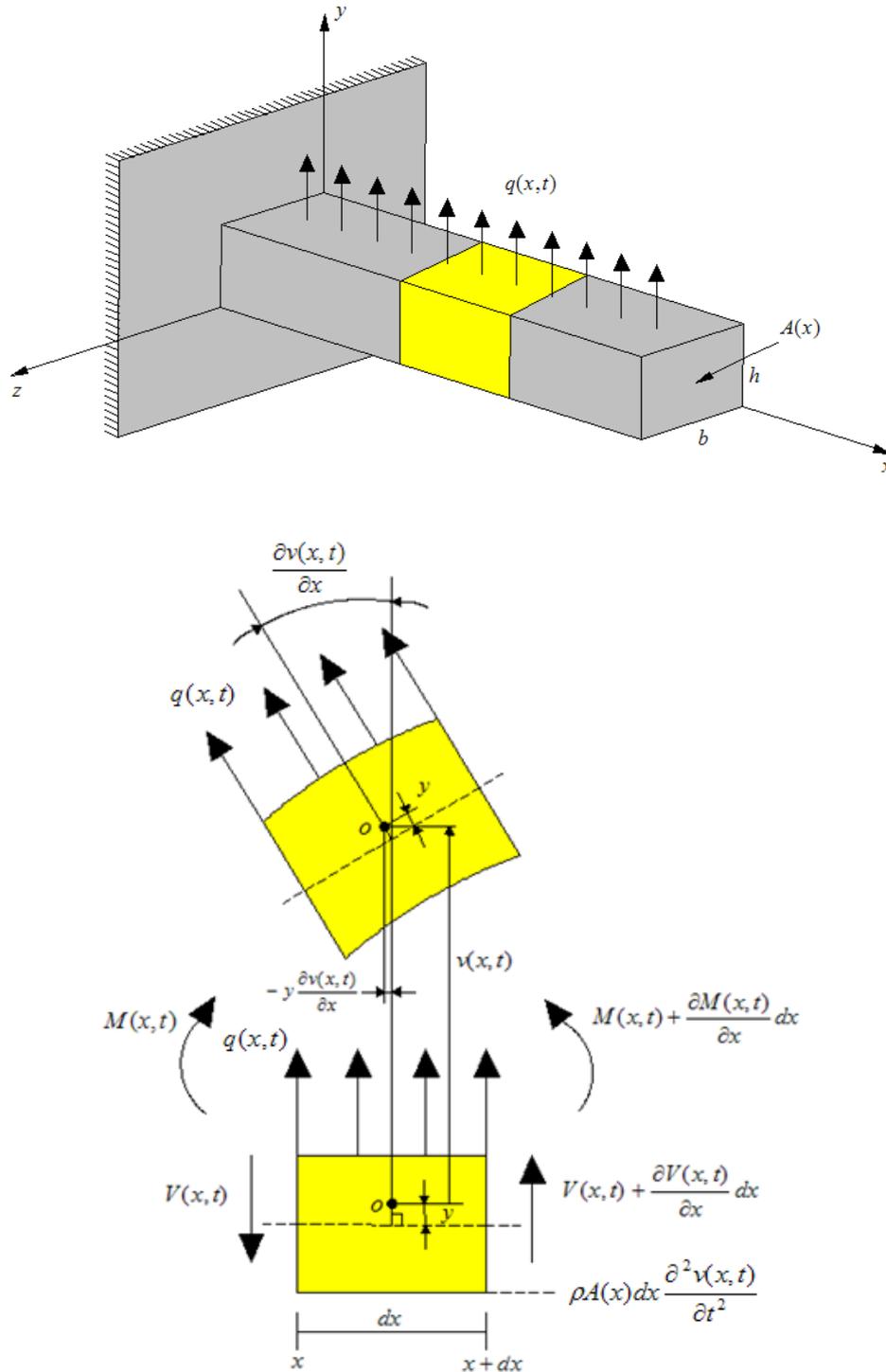


Figura A.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Euler-Bernoulli.

Através da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de um modelo de viga de Euler-Bernoulli, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $y$ .

$$\sum F_y = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.3})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.5})$$

com  $V(x,t)$  esforço cortante (N),  $\rho$  massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $A(x)$  área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ) e  $q(x,t)$  força distribuída por unidade de comprimento (N/m).

Somatório de momentos:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx) \frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t) \frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx + \left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2} \right) (dx)^2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (\text{A.9})$$

Isso mostra que a força cortante é proporcional à derivada do momento fletor em relação à  $x$ . A substituição da equação (A.9) na equação (A.5) produz:

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx + q(x,t)dx = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.10})$$

A substituição adicional da equação (A.2) na equação (A.10), dividindo-se toda a equação por  $dx$ , leva a:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = q(x,t) \quad (\text{A.11})$$

Se nenhuma força externa for aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ ,  $EI(x)$  e  $A(x)$  são admitidos constantes ao longo da viga, a equação (A.11) simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{A.12})$$

com  $c$  velocidade de propagação da onda no meio sólido.

Observa-se que a equação da vibração livre, equação (A.12), é uma equação diferencial de quarta ordem, logo exigindo quatro condições de contorno ao se determinar a solução. A presença das derivadas temporais de segunda ordem requer que sejam especificadas duas condições iniciais, uma para a deflexão e outra para a inclinação.

As condições de contorno necessárias para resolver a equação (A.12) no contexto de uma solução por separação de variáveis são obtidas considerando-se a deflexão  $v(x,t)$ , a derivada da deflexão  $\partial v(x,t)/\partial x$ , o momento fletor  $EI \partial^2 v(x,t)/\partial x^2$ , e a força cortante  $\partial[EI \partial^2 v(x,t)/\partial x^2]/\partial x$  em cada extremidade da viga, isto é, aplicando as devidas condições de contorno.

As equações (A.13) a (A.20) são as condições de contorno clássicas, a saber: livre, engastada, pinada e deslizante.

Se uma viga em vibração transversal é livre em uma extremidade, as condições de contorno para a força cortante e o momento fletor devem ser nulos.

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ (momento fletor)} \quad (\text{A.13})$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ (força cortante)} \quad (\text{A.14})$$

Se, por outro lado, a extremidade da viga for engastada, a condição de contorno impõe que a deflexão e a inclinação devem ser nulas nesse extremo.

$$v(x,t) = 0 \text{ (deflexão)} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ (inclinação)} \quad (\text{A.16})$$

Em uma extremidade simplesmente apoiada (pinada), a deflexão e o momento de flexão são nulos.

$$v(x,t) = 0 \text{ (deflexão)} \quad (\text{A.17})$$

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ (momento fletor)} \quad (\text{A.18})$$

Em um apoio deslizante, a inclinação e a força cortante são nulos.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ (inclinação)} \quad (\text{A.19})$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ (força cortante)} \quad (\text{A.20})$$

Condições não clássicas de contorno são possíveis, sendo que a equação de movimento para essas condições são determinadas por balanços de forças e de momentos dinâmicos.

Além das quatro condições de contorno, a solução da equação (A.12), para a vibração livre, só pode ser calculada se duas condições iniciais forem especificadas.

$$v(x,t)|_{t=0} = v_0(x) \quad , \quad \left. \frac{dv(x,t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dv_0(x)}{dt} \quad (\text{A.21})$$

considerando que  $t = 0$  é o tempo inicial. Sabe-se que  $v_0(x)$  e  $dv_0(x)/dt$  não podem ser ambos nulos, ou não haveria movimento resultante.

A solução da equação (A.12) sujeita a quatro condições de contorno e duas condições iniciais seguem os passos convencionais usados nos problemas de contorno e de valor inicial, ou seja, são usadas para se obter um sistema de equações que determinam as constantes da solução geral. Aqui será admitida a possibilidade de escrever a solução na forma de separação de variáveis como na equação (A.22), lembrando que a solução geral da equação (A.12) é dada por superposição modal, equação (A.23).

$$v(x,t) = X(x)T(t) \quad (\text{A.22})$$

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) [D \cos(\omega t - \theta)] \quad (\text{A.23})$$

Substituindo a equação (A.22) na equação (A.12), obtém-se:

$$c^2 \frac{d^4 X(x)}{dx^4} \frac{1}{X(x)} = - \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \frac{1}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{A.24})$$

A escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , é feita de maneira que a equação temporal tenha solução harmônica e que  $\omega$  seja a frequência natural angular.

Tomando o lado direito da equação (A.24), equação temporal, vem:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{A.25})$$

A solução para essa equação é dada na forma:

$$T(t) = D \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{A.26})$$

As constantes  $D$  e  $\theta$  são determinadas usando-se as condições iniciais especificadas e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação espacial surge do rearranjo da equação (A.24), o que leva a:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{A.27})$$

Definindo:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (\text{A.28})$$

com  $\beta$  frequência natural dimensional, ( $\text{m}^{-1}$ ).

Assumindo para equação (A.27) uma solução na forma:

$$v(x, t) = Ce^{ax} \quad (\text{A.29})$$

tem-se:

$$(a^4 - \beta^4)Ce^{ax} = 0 \quad (\text{A.30})$$

como  $Ce^{ax} \neq 0$  para todo  $x$ , então:

$$(a^4 - \beta^4) = 0 \quad (\text{A.31})$$

que é uma equação polinomial do quarto grau cuja solução, é:

$$a_{1,2} = \pm\beta \text{ e } a_{3,4} = \pm i\beta \quad (\text{A.32})$$

A solução espacial da equação (A.27), é:

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (\text{A.33})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (A.33), tem-se a equação (A.38).

$$\text{sen}(\beta x) = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \quad (\text{A.34})$$

$$\text{cos}(\beta x) = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \quad (\text{A.35})$$

$$\text{sinh}(\beta x) = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \quad (\text{A.36})$$

$$\cosh(\beta x) = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \quad (\text{A.37})$$

$$X(x) = B_1 \sin(\beta x) + B_2 \cos(\beta x) + B_3 \sinh(\beta x) + B_4 \cosh(\beta x) \quad (\text{A.38})$$

Com a aplicação das condições de contorno na viga a ser modelada obtém-se um sistema de equações lineares, equação (A.39), que é função de  $\beta$  e  $\{b\}$ . Devido o sistema linear ser homogêneo, existe uma combinação linear entre as equações, sendo que uma das constantes que compõe o vetor  $\{b\} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]^T$  deve ter o seu valor arbitrado.

Para melhor compreensão aplicam-se as condições clássicas de contorno das equações (A.17) e (A.18), pinada-pinada, na equação (A.38) para  $x = 0$  e para  $x = L$ . Assim obtém-se as equações de (A.40) a (A.43) que formam o sistema de equações lineares, equação (A.44).

$$[H(\beta)]\{b\} = \{0\} \quad (\text{A.39})$$

em  $x = 0$ ,

$$X(0) = 0 \Rightarrow B_2 + B_4 = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$EI \frac{\partial^2 X(0)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow -B_2 \beta^2 + B_4 \beta^2 = 0 \quad (\text{A.41})$$

em  $x = L$ ,

$$X(L) = 0 \Rightarrow B_1 \sin(\beta L) + B_2 \cos(\beta L) + B_3 \sinh(\beta L) + B_4 \cosh(\beta L) = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$EI \frac{\partial^2 X(L)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \beta^2 (-B_1 \sin(\beta L) - B_2 \cos(\beta L) + B_3 \sinh(\beta L) + B_4 \cosh(\beta L)) = 0 \quad (\text{A.43})$$

A matriz  $[H]$  é a matriz dos coeficientes e  $\{b\}$  é o vetor de incógnitas. Para que o sistema tenha solução não trivial é necessário que  $\{b\} \neq \{0\}$ , o que implica que o determinante da matriz  $[H]$  é igual há zero, equação (A.46).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \beta^2 \\ \sin(\beta L) & \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) & \cosh(\beta L) \\ \beta^2(-\sin(\beta L)) & \beta^2(-\cos(\beta L)) & \beta^2(\sinh(\beta L)) & \beta^2(\cosh(\beta L)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

A matriz  $[H]$  é uma função de  $\beta L$ , então fazendo

$$\hat{\beta} = \beta L \quad (\text{A.45})$$

podemos determinar seu valor, tal que

$$\det\left(\left[H\left(\hat{\beta}\right)\right]\right) = 0 \quad (\text{A.46})$$

com  $\hat{\beta}$  frequência natural adimensional,  $\beta$  frequência natural dimensional ( $\text{m}^{-1}$ ) e  $L$  comprimento total da viga (m).

No cálculo do determinante da equação (A.46) obtém-se a equação característica (A.47), da qual é possível determinar  $k$  frequências naturais adimensionais referentes à  $k$  modos de vibração.

$$\text{sen}\left(\hat{\beta}_k\right) = 0 \quad (\text{A.47})$$

Então:

$$\hat{\beta}_k = k\pi \quad , \quad k = 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{A.48})$$

com  $k$   $k$ -ésima frequência natural.

De posse dos valores de  $\hat{\beta}_k$  é possível encontrar a solução do sistema da equação (A.44) que fornecem as constantes da equação (A.38). Conhecendo os valores das constantes do vetor  $\{b\}$ , obtêm-se os  $k$ -modos de vibração  $X_k(x)$ , que para o caso em estudo é representado pela equação (A.49).

$$X_k(x) = \text{sen} \left( \frac{\hat{\beta}_k x}{L} \right) \quad (\text{A.49})$$

Para o cálculo das frequências naturais dimensionais em rad/s substituímos  $\hat{\beta}_k$  na equação (A.50) e posteriormente utilizando a equação (A.50) na equação (A.51) obtêm-se as frequências naturais em Hz.

$$\omega_k = \left( \frac{\hat{\beta}_k}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{A.50})$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (\text{A.51})$$

com  $\omega_k$   $k$ -ésima frequência natural angular (rad/s),  $\hat{\beta}_k$   $k$ -ésima frequência natural adimensional,  $L$  comprimento total da viga (m),  $E$  modulo de elasticidade longitudinal (GPa),  $I$  momento de inércia de área (m<sup>4</sup>),  $\rho$  massa específica (kg/m<sup>3</sup>),  $A$  área da seção transversal (m<sup>2</sup>),  $f_k$   $k$ -ésima frequência natural (Hz) e  $k$  índice que indica a  $k$ -ésima frequência natural.

## APÊNDICE B

### MODELO DE VIGA UNIFORME DE VLASOV

O modelo de Vlasov despreza o efeito da deformação de cisalhamento e adiciona o efeito da inércia de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli.

#### B.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA DE VLASOV

Este Apêndice apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Vlasov, ilustrada na figura B.1. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses:

- As seções planas de uma viga permanecem planas e normais à linha neutra após a viga ser submetida à flexão;
- O valor do comprimento da viga é maior do que o valor das outras dimensões;
- Os deslocamentos verticais, eixo  $y$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $z$  é nulo;

- A influência do cisalhamento é desprezível e a hipótese de seções planas é satisfeita, para os casos onde o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é menor que 0,025 para seção circular e 0,029 para seção retangular;
- A inércia de rotação é considerada;
- A viga é composta por material elástico linear, homogêneo e isotrópico sem carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson é negligenciável;
- Não é considerado as forças dissipativas.

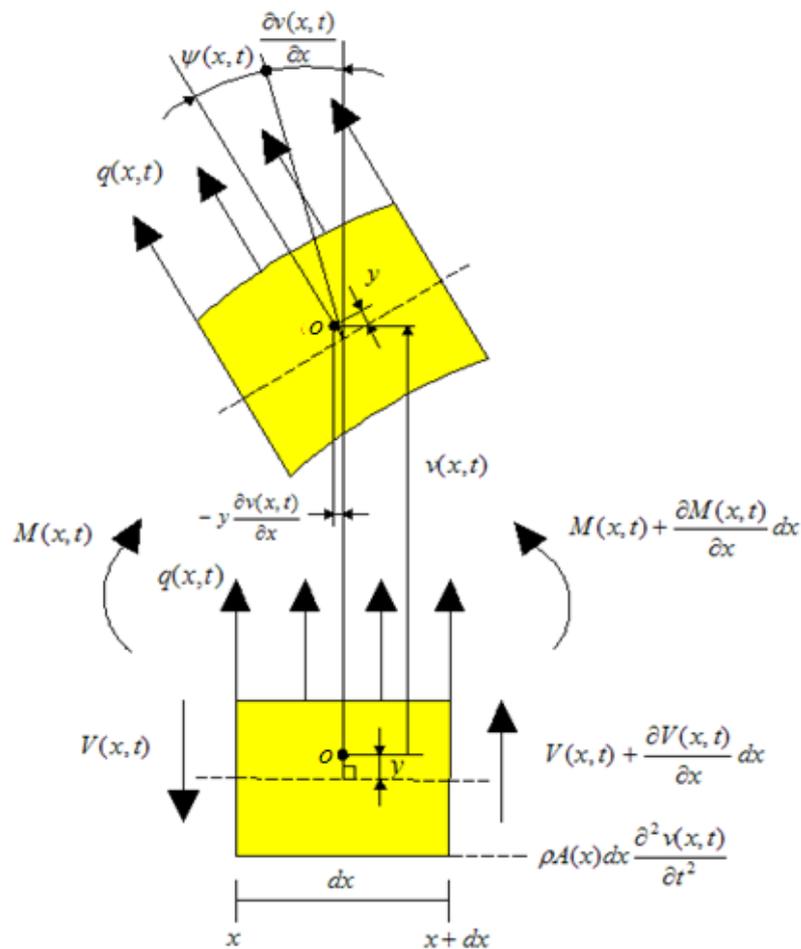


Figura B.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Vlasov

Através da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de um modelo de viga de Vlasov, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $y$ .

$$\sum F_y = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.1})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.3})$$

com  $v(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $y$  (m),  $V(x,t)$  esforço cortante (N),  $\rho$  massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $A(x)$  área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ) e  $q(x,t)$  força distribuída por unidade de comprimento (N/m).

O momento fletor,  $M(x,t)$  é o mesmo apresentado na equação (A.2). A diferença do modelo de Vlasov em relação ao modelo de Euler-Bernoulli é o acréscimo da inércia de rotação.

Somatório de momentos:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx) \frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = \rho I(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t) \frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = \rho I(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx + \left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2} \right) dx^2 = \rho I(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.6})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento tem-se:

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx = \rho I(x) dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{B.7})$$

A substituição da expressão do momento fletor equação (B.7) na equação (B.3), admitindo

$$\psi(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (\text{B.8})$$

temos:

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx + \rho I(x) dx \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + q(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.9})$$

A substituição adicional da equação (A.2) na equação (B.9), dividindo-se toda a equação por  $dx$ , leva a:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) - \rho I(x) \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = q(x,t) \quad (\text{B.10})$$

Definindo  $r$  como raio de giração (m), vem:

$$r = \sqrt{\frac{I(x)}{A(x)}} \quad (\text{B.11})$$

com  $I(x)$  momento de inércia de área com relação ao eixo  $z$  ( $\text{m}^4$ ) e  $A(x)$  área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ).

Rearranjando a equação (B.10), temos:

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) - \rho A(x) r^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = q(x,t) \quad (\text{B.12})$$

Se nenhuma força externa for aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ ,  $EI(x)$  e  $A(x)$  são admitidos constantes ao longo da viga a equação (B.12) simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - r^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{B.13})$$

com  $c$  velocidade de propagação da onda no meio sólido.

Assim como no Apêndice A aqui será admitida a possibilidade de escrever a solução da equação (B.13) na forma de separação de variáveis. Para isso substitui a equação (A.22) na equação (B.13) e obtém-se:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - r^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = - \frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{B.14})$$

Lembrando que a solução geral da equação (B.13) é dada por superposição modal, equação (A.23).

A escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , é feita de maneira que a equação temporal tenha solução harmônica e que  $\omega$  seja a frequência natural angular.

Tomando o lado direito da equação (B.14), equação temporal, vem:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{B.15})$$

A solução para equação (B.15) é dada na forma:

$$T(t) = D \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{B.16})$$

As constantes  $D$  e  $\theta$  são determinadas usando-se as condições iniciais especificadas no Apêndice A, equação (A.21), e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação espacial surge do rearranjo da equação (B.14), o que leva a:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - r^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = \omega^2 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 r^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{B.18})$$

Definindo:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (\text{B.19})$$

com  $\beta$  frequência natural dimensional, ( $\text{m}^{-1}$ ).

Aplicando a equação (B.19), na equação (B.18), vem:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \beta^4 r^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \beta^4 X(x) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Assumindo para equação (B.20) uma solução dada pela equação (A.29), tem-se:

$$(a^4 + \beta^4 r^2 a^2 - \beta^4) C e^{ax} = 0 \quad (\text{B.21})$$

como  $C e^{ax} \neq 0$  para todo  $x$ , então:

$$(a^4 + \beta^4 r^2 a^2 - \beta^4) = 0 \quad (\text{B.22})$$

que é uma solução polinomial do quarto grau cuja solução é:

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{-K_1^2} = \pm iK_1 \text{ e } a_{3,4} = \pm\sqrt{K_2^2} = \pm K_2 \quad (\text{B.23})$$

Definindo:

$$K_1^2 = \frac{r^2 \beta^4 + \sqrt{r^4 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \text{ e } K_2^2 = \frac{-r^2 \beta^4 + \sqrt{r^4 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \quad (\text{B.24})$$

A solução espacial fica:

$$X(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_2 e^{-iK_1 x} + C_3 e^{K_2 x} + C_4 e^{-K_2 x} \quad (\text{B.25})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (B.25), vem:

$$X_B(x) = B_1 \sin K_1 x + B_2 \cos K_1 x + B_3 \sinh K_2 x + B_4 \cosh K_2 x \quad (\text{B.26})$$

Os valores para  $\beta$  e para as quatro constantes de integração  $B_1, B_2, B_3, B_4$  são determinadas como mostrado no Apêndice A, utilizando as equações (A.39) e (A.46). Para o cálculo das frequências naturais em rad/s e em Hz utiliza-se as equações (A.50) e (A.51).

## APÊNDICE C

### MODELO DE VIGA UNIFORME DE CISALHAMENTO

Este modelo adiciona o efeito do cisalhamento, mas não inércia de rotação, ao modelo de Euler-Bernoulli. A força de cisalhamento dá origem a uma deformação chamada distorção.

#### C.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA DE CISALHAMENTO

Este Apêndice apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Cisalhamento, ilustrada na Figura C.1. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses:

- As seções planas de uma viga permanecem planas a linha neutra após a viga ser submetida à flexão, porém não necessariamente perpendiculares a esta linha, pois há um giro da seção em relação à linha neutra, devido ao cisalhamento;
- O valor do comprimento da viga é maior do que o valor das outras dimensões;
- Os deslocamentos verticais, eixo  $y$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $z$  é nulo;

- A influência do cisalhamento não é desprezível quando o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é maior que 0,025 para seção circular e 0,029 para seção retangular;
- A inércia de rotação é desconsiderada;
- A viga é composta por material elástico linear, homogêneo e isotrópico sem carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson é negligenciável;
- Não é considerado as forças dissipativas.

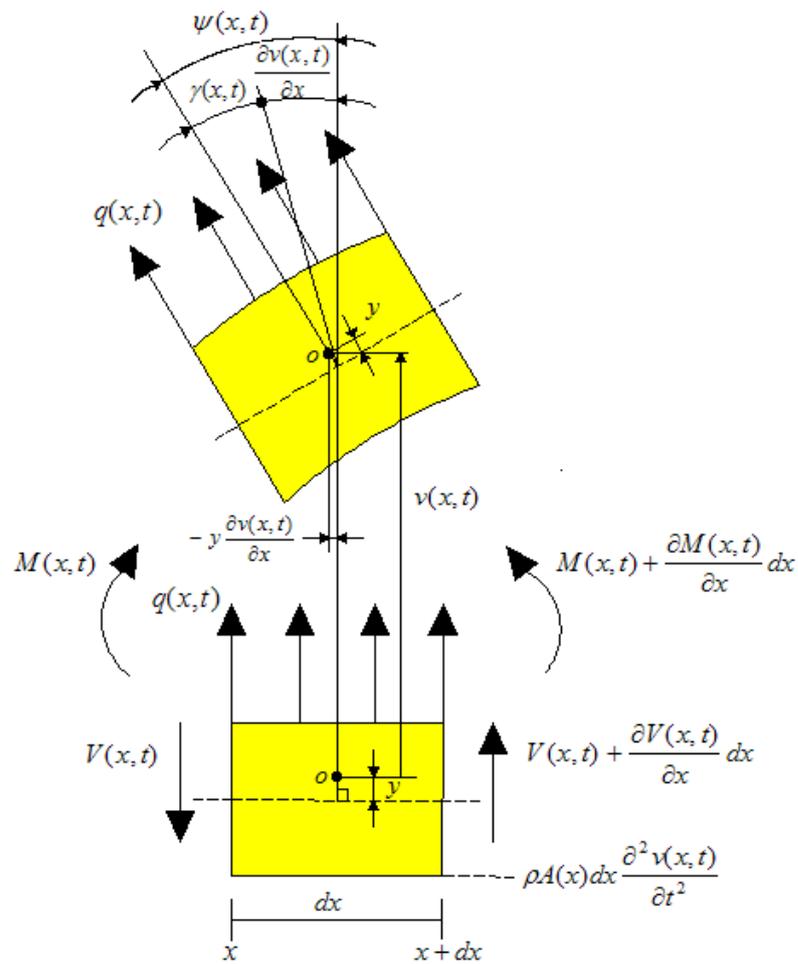


Figura C.1 – Elemento infinitesimal de um modelo de viga de Cisalhamento.

O momento fletor,  $M(x,t)$  e o esforço cortante,  $V(x,t)$  são apresentados nas equações (C.1) e (C.2).

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (\text{C.1})$$

$$V(x,t) = k_c A(x) G \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right) \quad (\text{C.2})$$

com  $M(x,t)$  momento fletor (Nm),  $E$  módulo de elasticidade longitudinal (GPa),  $I(x)$  momento de inércia de área com relação ao eixo  $z$  ( $\text{m}^4$ ),  $\psi(x,t)$  rotação da seção transversal,  $V(x,t)$  esforço cortante (N),  $k_c$  fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento,  $A(x)$  área da seção transversal ( $\text{m}^2$ ),  $G$  módulo de elasticidade transversal (GPa) e  $v(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $y$  (m).

Através da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de um modelo de viga de Cisalhamento, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $y$ .

$$\sum F_y = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{C.3})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{C.4})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{C.5})$$

com  $\rho$  massa específica ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) e  $q(x,t)$  força distribuída por unidade de comprimento (N/m).

Simplificando a equação (C.5), temos:

$$\left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{C.6})$$

Fazendo a substituição da equação (C.2) na equação (C.6), temos:

$$k_c G \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) dx - k_c G \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \psi(x,t)) dx + q(x,t) dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{C.7})$$

Somatório de momentos:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx) \frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t) \frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx + \left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2} \right) dx^2 = 0 \quad (\text{C.10})$$

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$V(x,t) = - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (\text{C.11})$$

Isso mostra que a força cortante é proporcional à derivada do momento fletor em relação à  $x$ . A substituição da expressão do momento fletor equação (C.1) e do esforço cortante equação (C.2) na equação (C.11), produz:

$$kA(x)G \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dx - k_c A(x)G \psi(x,t) dx + E \frac{\partial}{\partial x} \left( I(x) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (\text{C.12})$$

O acoplamento das equações (C.7) e (C.12), dividindo-se toda a expressão por  $dx$ , admitindo  $EI(x)$  e  $A(x)$  constantes ao longo da viga e multiplicando toda expressão por  $EI$ , leva a:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \frac{I\rho}{k_c \mu} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + q(x,t) = 0 \quad (\text{C.13})$$

com  $\mu$  relação entre modulo de elasticidade transversal (G) e modulo de elasticidade longitudinal (E).

Se nenhuma força externa for aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ , a equação (C.13) simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{C.14})$$

com  $c$  velocidade de propagação da onda no meio sólido e  $r$  raio de giração (m).

Assim como no Apêndice A aqui será admitida a possibilidade de escrever a solução da equação (C.14) na forma de separação de variáveis. Para isso substitui a equação (A.22) na equação (C.14) e obtém-se:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = - \frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = \omega^2 \quad (\text{C.15})$$

Lembrando que a solução geral da equação (C.14) é dada por superposição modal, equação (A.23).

A escolha da constante de separação,  $\omega^2$ , da equação (C.15) é feita de maneira que a equação temporal tenha solução harmônica e que  $\omega$  seja a frequência natural angular.

Tomando o lado direito da equação (C.15), equação temporal, vem:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{C.16})$$

A solução para equação (C.16) é dada na forma:

$$T(t) = D \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{C.17})$$

As constantes  $D$  e  $\theta$  são determinadas usando-se as condições iniciais especificadas no Apêndice A, equação (A.21), e posteriormente combinando-as com a solução da equação em  $x$ .

A equação espacial surge do rearranjo da equação (C.15), o que leva a:

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x) - \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}} = \omega^2 \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (\text{C.19})$$

Definindo:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (\text{C.20})$$

com  $\beta$  frequência natural dimensional, ( $\text{m}^{-1}$ ).

Aplicando a equação (C.20), na equação (C.19), vem:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + \beta^4 \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \beta^4 X(x) = 0 \quad (\text{C.21})$$

Assumindo para equação (C.21) uma solução dada pela equação (A.29), tem-se:

$$\left( a^4 + \beta^4 \frac{r^2}{k_c \mu} a^2 - \beta^4 \right) C e^{ax} = 0 \quad (\text{C.22})$$

como  $Ce^{ax} \neq 0$  para todo  $x$ , então:

$$\left( a^4 + \beta^4 \frac{r^2}{k_c \mu} a^2 - \beta^4 \right) = 0 \quad (\text{C.23})$$

que é uma solução polinomial do quarto grau cuja solução é:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{-K_1^2} = \pm iK_1 \text{ e } a_{3,4} = \pm \sqrt{K_2^2} = \pm K_2 \quad (\text{C.24})$$

Definindo:

$$K_1^2 = \frac{\frac{r^2}{k_c \mu} \beta^4 + \sqrt{\left(\frac{r^2}{k_c \mu}\right)^2 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \text{ e } K_2^2 = \frac{-\frac{r^2}{k_c \mu} \beta^4 + \sqrt{\left(\frac{r^2}{k_c \mu}\right)^2 \beta^8 + 4\beta^4}}{2} \quad (\text{C.25})$$

A solução espacial fica:

$$X(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_2 e^{-iK_1 x} + C_3 e^{K_2 x} + C_4 e^{-K_2 x} \quad (\text{C.26})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (C.26), vem:

$$X_B(x) = B_1 \sin K_1 x + B_2 \cos K_1 x + B_3 \sinh K_2 x + B_4 \cosh K_2 x \quad (\text{C.27})$$

Os valores para  $\beta$  e para as quatro constantes de integração  $B_1, B_2, B_3, B_4$  são determinadas como mostrado no Apêndice A, utilizando as equações (A.39) e (A.46). Para o cálculo das frequências naturais em rad/s e em Hz utiliza-se as equações (A.50) e (A.51).

## APÊNDICE D

### MODELO DE VIGA UNIFORME DE TIMOSHENKO

O modelo proposto por Timoshenko para vigas é mais completo do que o modelo proposto pela teoria de Euler-Bernoulli, (Timoshenko e Young, 1961). Tal refinamento se deve a contribuição do efeito da inércia de rotação e da distorção de cisalhamento.

#### D.1 EQUACIONAMENTO DO MODELO DE VIGA DE TIMOSHENKO

Este Apêndice apresenta o equacionamento dinâmico do modelo de viga de Timoshenko, ilustrada na Figura C.1. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses:

- As seções planas de uma viga permanecem planas a linha neutra após a viga ser submetida à flexão, porém não necessariamente perpendiculares a esta linha, pois há um giro da seção em relação à linha neutra, devido ao cisalhamento;
- O valor do comprimento da viga é maior do que o valor das outras dimensões;
- Os deslocamentos verticais, eixo  $y$ , de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos;
- O deslocamento lateral segundo o eixo  $z$  é nulo;

- A influência do cisalhamento não é desprezível quando o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é maior que 0,025 para seção circular e 0,029 para seção retangular;
- A inércia de rotação é considerada;
- A viga é composta por material elástico linear, homogêneo e isotrópico sem carregamento axial;
- O coeficiente de Poisson é negligenciável;
- Não é considerado as forças dissipativas.

Através da 2ª Lei de Newton aplicada a um elemento infinitesimal de um modelo de viga de Timoshenko, obtém-se o seguinte somatório de forças na direção  $y$ .

$$\sum F_y = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{D.1})$$

$$V(x+dx,t) - V(x,t) + q(x,t)dx = dm \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{D.2})$$

$$\left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{D.3})$$

Simplificando a equação (D.3), temos:

$$\left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{D.4})$$

Fazendo a substituição da equação (C.2) na equação (D.4), temos:

$$k_c G \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) dx - k_c G \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \psi(x,t)) dx + q(x,t)dx = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{D.5})$$

com  $v(x,t)$  deflexão ao longo do eixo  $y$  (m),  $V(x,t)$  esforço cortante (N),  $q(x,t)$  força distribuída por unidade de comprimento (N/m),  $\rho$  massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ),  $A(x)$  área da seção

transversal ( $m^2$ ),  $k_c$  fator numérico que depende da forma da seção transversal no cisalhamento e  $G$  módulo de elasticidade transversal (GPa).

Somatório de momentos:

$$M(x+dx,t) - M(x,t) + (q(x,t)dx)\frac{dx}{2} + V(x+dx,t)dx = \rho I(x)dx \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (D.6)$$

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + q(x,t)\frac{dx^2}{2} + \left( V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) dx = \rho I(x)dx \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (D.7)$$

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx + \left( \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{q(x,t)}{2} \right) dx^2 = \rho I(x)dx \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (D.8)$$

com  $M(x,t)$  momento fletor (Nm),  $I(x)$  momento de inércia de área com relação ao eixo  $z$  ( $m^4$ ) e  $\psi(x,t)$  rotação da seção transversal.

Desprezando-se o termo diferencial de ordem superior ( $dx^2 \cong 0$ ) para o momento, tem-se:

$$\left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right) dx = \rho I(x)dx \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (D.9)$$

A substituição da expressão do momento fletor equação (C.1) e do esforço cortante equação (C.2) na equação (D.9), dividindo-se toda a expressão por  $dx$ , admitindo  $EI(x)$  e  $A(x)$  constantes ao longo da viga e multiplicando toda expressão por  $EI$ , leva a:

$$k_c GA \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - k_c GA \psi(x,t) + EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (D.10)$$

O acoplamento das equações (D.5) e (D.10), assumindo que nenhuma força externa é aplicada, ou seja,  $q(x,t) = 0$ , a equação acoplada simplifica-se de modo que a vibração livre é governada por:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - r^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{r^2}{k_c \mu} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho r^2}{k_c G} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial t^4} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{D.11})$$

com  $c$  velocidade de propagação da onda no meio sólido,  $r$  raio de giração (m) e  $\mu$  relação entre modulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e modulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ).

Assim como no Apêndice A aqui será admitida a possibilidade de escrever a solução da equação (D.11) na forma de separação de variáveis. Para isso substitui a equação (A.22) na equação (D.11) e obtém-se:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} T(t) + \frac{1}{c^2} X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} - \left(1 + \frac{1}{k_c \mu}\right) \frac{r^2}{c^2} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{r^2}{c^2} \frac{\rho}{k_c G} X(x) \frac{d^4 T(t)}{dt^4} = 0 \quad (\text{D.12})$$

Lembrando que a solução geral da equação (D.11) é dada por superposição modal, equação (A.23).

Aplicando a equação (C.20) e (D.13), na equação (D.12), vem:

$$v(x,t) = Ce^{ax} \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{D.13})$$

$$\left[ a^4 + \left(1 + \frac{1}{k_c \mu}\right) \beta^4 r^2 a^2 + \left(\frac{\beta^8 r^4}{k_c \mu} - \beta^4\right) \right] Ce^{ax} \cos(\omega t - \theta) = 0 \quad (\text{D.14})$$

como  $Ce^{ax} \neq 0$  para todo  $x$  e  $\cos(\omega t - \theta)$  não é igual a zero para todo  $t$ , então:

$$\left[ a^4 + \left(1 + \frac{1}{k_c \mu}\right) \beta^4 r^2 a^2 + \left(\frac{\beta^8 r^4}{k_c \mu} - \beta^4\right) \right] = 0 \quad (\text{D.15})$$

que é uma solução polinomial do quarto grau cuja solução é:

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{-K_1^2} = \pm iK_1 \quad \text{e} \quad a_{3,4} = \pm \sqrt{K_2^2} = \pm K_2 \quad (\text{D.16})$$

Definindo:

$$K_1^2 = \frac{\frac{r^2 \beta^4}{k_c \mu} + r^2 \beta^4 + \sqrt{\left(\frac{r^2 \beta^4}{k_c \mu} + r^2 \beta^4\right)^2 - 4\left(\frac{r^4 \beta^8}{k_c \mu} - \beta^4\right)}}{2} \quad (\text{D.17})$$

$$K_2^2 = \frac{\frac{r^2 \beta^4}{k_c \mu} + r^2 \beta^4 - \sqrt{\left(\frac{r^2 \beta^4}{k_c \mu} + r^2 \beta^4\right)^2 - 4\left(\frac{r^4 \beta^8}{k_c \mu} - \beta^4\right)}}{2} \quad (\text{D.18})$$

A solução espacial fica:

$$X(x) = C_1 e^{iK_1 x} + C_2 e^{-iK_1 x} + C_3 e^{K_2 x} + C_4 e^{-K_2 x} \quad (\text{D.19})$$

Aplicando as relações de Euler, equações (A.34) a (A.37), na equação (D.19), vem:

$$X_B(x) = B_1 \sin K_1 x + B_2 \cos K_1 x + B_3 \sinh K_2 x + B_4 \cosh K_2 x \quad (\text{D.20})$$

Os valores para  $\beta$  e para as quatro constantes de integração  $B_1, B_2, B_3, B_4$  são determinadas como mostrado no Apêndice A, utilizando as equações (A.39) e (A.46). Para o cálculo das frequências naturais em rad/s e em Hz utiliza-se as equações (A.50) e (A.51).

## APÊNDICE E

# INSTRUMENTAÇÃO

### ➤ **Vibrômetro**

Descrição: Vibrômetro OMETRON

Modelo: VQ-500-D

Faixa de frequência: 0,5 Hz à 22 kHz

Faixa de medição: 20 mm/s, 100 mm/s e 500 mm/s

Melhor resolução:  $0,02 \mu\text{m/s}/(\text{Hz}^{0,5})$



Foto E.1 – Vista em perspectiva do vibrômetro laser.

➤ **Analisador de sinais**

Descrição: Analisador de sinais - SRS (*Stanford Research Systems*)

Modelo: SR 780

Largura de banda: 102,4 kHz

Gama Dinâmica: 90 dB

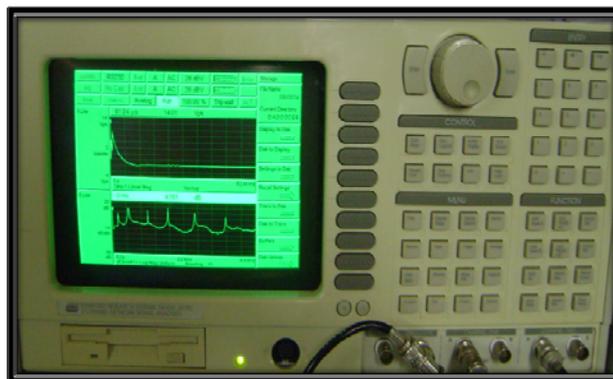


Foto E.2 – Vista frontal do analisador de sinais.

➤ **Martelo de impacto**

Descrição: Martelo de impacto - BRUEL & KJAER

Modelo: 8202

Serial: 1291241

Sensibilidade: 1,02 pC/N



Foto E.3 – Vista lateral do martelo de impacto.

➤ **Paquímetro digital**

Descrição: Paquímetro digital - DIGIMESS

Modelo: 100.178 BL

Resolução: 0,01

Capacidade: 300 mm

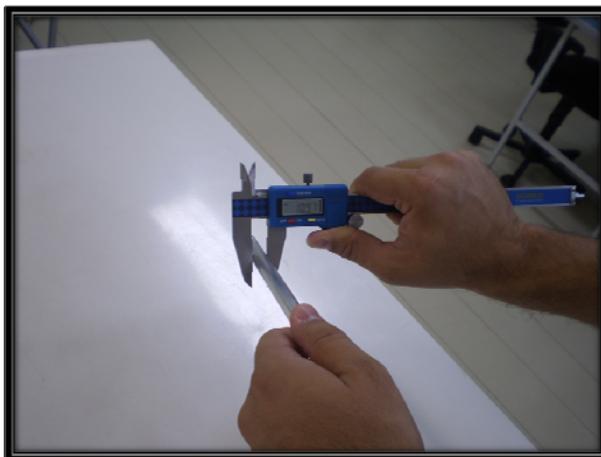


Foto E.4 – Medição do diâmetro da viga.

➤ **Máquina para ensaio de flexão**

Descrição: Máquina para ensaio de flexão - EMIC

Modelo: DL 3.000

Capacidade máxima: 30 kN

Tipo: Bifuso de bancada

Faixa de velocidade: 0,01 à 1000 mm/min

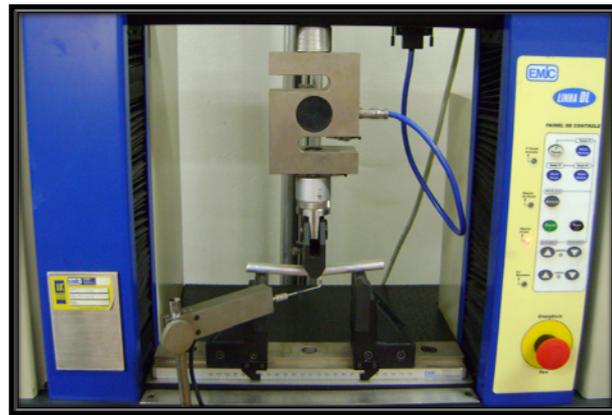


Foto E.5 – Vista frontal da máquina para ensaio de flexão.