Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

Escola Federal de Engenharia
Biblioteca MAUÁ
Itajubá

ANEXO I

PRONUNCIAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, nomeada por Portaria nº 159 de 18/05/88, considerando o resultado do Julgamento da Prova de Defesa Pública da Dissertação de Mestrado intitulada: "Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico"

apresenta pronunciamento no sentido de que a Comissão de Pós-Graduação da Escola Federal de Engenharia de Itajubá solicite ao DRA (Departamento de Registros Acadêmicos) a expedição do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Área de Concentração de Máquinas de Fluxo satisfeitas as demais exigências regimentais à MARCO ANTONIO ROSA DO NASCIMENTO.

Itajubá, 21 de maio de 1981

1º Examinador
Prof. Jerzy Tadeusz Sielawa
INPE

2º Examinador
Prof. Nelson Manzanares Filho
EFEI

3º Examinador
Prof. Waldir de Oliveira
EFEI

4º Examinador
Prof. Genésio José Menon
EFEI - Orientador

Campus Universitário - Prof. José Rodrigues Seabra
Tel. (035) 622-1700 — 622-1510 — Bairro Pinheirinho — 37.500 — ITAJUBÁ — M. G.

CLASS. 536.2:518.6(043.2)
CUTT. N244e
TOMBO 519

Ministério da Educação e Cultura
ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ
Reconhecida Lei 3232 - 05/01/1917

A N E X O II

FOLHA DE JULGAMENTO DA COMISSÃO EXAMINADORA

Título da Dissertação: "Estudo Teórico de Convecção Natural em Coletores Concentradores com Absorvedor Cilíndrico"

Autor: MARCO ANTONIO ROSA DO NASCIMENTO

JULGAMENTO

EXAMINADORES	CONCEITO	RUBRICA
1º	A+	
2º	A+	
3º	A+	
4º	A+	

Resultado médio: Conceito A+, ou seja APROVADO COM DISTINÇÃO

Observações:

Itajubá, 21 de maio de 1988.

1º Examinador
Prof. Jerzy Tadeuz Sielawa
INPE

2º Examinador
Prof. Nelson Manzanares Filho
EFEI

3º Examinador
Prof. Waldir de Oliveira
EFEI

4º Examinador
Prof. Genésio José Menon
EFEI - Orientador

ESCOLA FEDERAL DE ENGENHARIA DE ITAJUBÁ

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDO TEÓRICO DE CONVECÇÃO NATURAL EM COLETORES CONCENTRADORES COM ABSORVEDOR CILÍNDRICO

MARCO ANTÔNIO ROSA DO NASCIMENTO

ORIENTADOR:

PROF. DR. GENÉSIO JOSÉ MENON

ITAJUBÁ - MG
1988

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Genésio José Menon, pela amizade, compreensão e dedicação prestadas no decorrer deste trabalho.

Aos professores Nelson Manzanares Filho e Maria Aparecida Sanches Coelho pelas sugestões apresentadas.

A todos os professores e funcionários da EFEI que colaboraram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

A Messias Tadeu Salgado, pela confecção dos desenhos.

A Claudete Coli Junqueira, pelo excelente trabalho de datilografia.

Aos meus pais

Aparecido e Rita

À minha esposa

Marina

Aos meus filhos

Fábio e Felipe

RESUMO

No presente trabalho, é feito um estudo teórico sobre a convecção natural no interior de coletores concentradores com absorvedor cilíndrico. Foram analisadas duas situações: absorvedor totalmente iluminado denominado de caso 1; absorvedor metade iluminado denominado de caso 2. A análise é feita para o regime não permanente e permanente, considerando-se o escoamento bidimensional. Admite-se que o absorvedor seja uma superfície isotérmica quente, a cobertura uma superfície isotérmica fria e as superfícies refletoras isoladas termicamente.

As equações de conservação foram resolvidas utilizando-se o método de elementos finitos para se determinar as distribuições da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros térmicos e geométricos e das propriedades físicas do meio. Os resultados são apresentados para ambos os casos 1 e 2, considerando-se os seguintes parâmetros: fator de concentração 3,64, fator de truncamento 0,5, ângulo de inclinação de 0^{o} a 90^{o}, medidos a partir da horizontal, número de Prandtl 0,733 e número de Grashof na faixa de 10^{5} a 10^{6}.

Os resultados do número de Nusselt, médio, obtidos no presente trabalho para ambos os casos 1 e 2, podem ser relacionados pela seguinte equação:

$$Nu = aRa^{b} ,$$

onde os parâmetros a e b dependem da geometria e do ângulo de inclinação do concentrador.

ABSTRACT

In this work, a theoretical study of the natural convection in enclosures of Concentrated Collectors with Cilindrical absorber, is performed. Two conditions have been analysed: in the 1st case where the absorber is totaly illuminated and in 2nd case where the absorber is partially illuminated. The analysis is made for both steady and unsteady state of bidimensional flow. The absorber is assumed to be a hot isothermal surface, and the cover as a cold isothermal surface and the reflectors surface insulated thermally.

The conservation of energy equations have been solved by the use of finite element method aiming to find the distribution of the stream function, nondimentional temperature, vorticity and the average and local Nusselt number in function of thermal and geometrical parameters and the physical propriertiers of the medium. The results are presented both for the case 1 and 2, considering the following parameters: Concentration Factor 3.64, Truncate Fator 0.5, inclination angle from 0^{o} to 90^{o} measured from the horizontal plane, Prandtl number 0.733 and Grashof number between 10^{5} a 10^{6}.

The results of the average Nusselt number obtained in this work for both cases, may be given by the following equation

$$Nu = aRa^{b}$$

where the parameters a and b depend on the geometry and in the inclination angle of the concentrator.

CONTEÚDO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CONTEÚDO	iii
SIMBOLOGIA	v
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ÍNDICE DE TABELAS	xiii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 - Generalidades	1.1
1.2 - Revisão da Literatura	1.6
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	
2.1 - Análise Teórica	2.1
2.2 - Adimensionalização das Equações	2.4
2.3 - Parâmetros da Análise	2.8
CAPÍTULO 3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO	
3.1 - Desenvolvimento das Equações utilizando o Método de Elementos Finitos	3.1
3.2 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente	3.6
3.3 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional	3.10
3.4 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade	3.14
3.5 - Algoritmo de Solução	3.17

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS

4.1 - Introdução 4.1

4.2 - Comparação de Resultados para Geometria Quadrada 4.1

4.3 - Comparação de Resultados para Geometria Trapezoidal 4.6

4.4 - Resultados Teóricos dos Coletores Concentradores 4.12

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 - Conclusões 5.1

5.2 - Contribuição do Presente Trabalho 5.4

5.3 - Sugestões para Futuros Trabalhos 5.4

APÊNDICE A1 - GEOMETRIA E PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO CONCENTRADOR A1.1

APÊNDICE A2 - NÚMEROS ADIMENSIONAIS A2.1

APÊNDICE A3 - MÉTODO VARIACIONAL PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO A3.1

APÊNDICE A4 - MÉTODO VARIACIONAL PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO A4.1

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS A5.1

SIMBOLOGIA

CARACTERES LATINOS

Símbolo	Designação
A_a	= área do absorvedor
A_c	= área da cobertura
A_r	= razão de aspecto
$\bar{C}$	= fator de concentração geométrico
C	= fator de concentração
$[C^e]$	= matriz capacitância do elemento
c_p	= calor específico a pressão constante
D	= largura da placa da cobertura
$\bar{D}$	= largura da placa da cobertura truncada
E	= número de elementos
g	= aceleração da gravidade
Gr	= número de Grashof
h	= coeficiente local de transferência de calor por convecção
$\bar{h}$	= coeficiente médio de transferência de calor por convecção
$\bar{H}$	= altura do coletor
H	= altura do coletor truncado
I	= funcional
ℓ	= comprimento
K	= condutibilidade térmica do fluido
$[K]^e$	= matriz do elemento
[K]	= matriz global
L	= comprimento do coletor
n	= direção normal a superfície
Δn	= variação na direção normal a superfície

N = função de forma

Nu = número de Nusselt médio

Nu_C = número de Nusselt médio na superfície fria

Nu_H = número de Nusselt médio na superfície quente

Nu_L = número de Nusselt local

$[N^e]$ = matriz função de forma do elemento

m = número de nós do elemento

p = pressão

P = pressão adimensional

Pr = número de Prandtl

q_x = fluxo de calor transferido por convecção na direção x da superfície quente para o ar no interior da cavidade

q_y = fluxo de calor transferido por convecção na direção y da superfície quente para o ar no interior da cavidade

$\vec{q}$ = vetor fluxo de calor por convecção

Q_c = fluxo de calor por convecção da superfície quente para o ar no interior da cavidade

Q_ϕ = função especificada

Q_ψ = função especificada da função corrente

Q_ω = função especificada da vorticidade

Q_θ = função especificada da temperatura

$\{R_\phi\}^e$ = vetor força do elemento da função de campo

$\{R\}^e$ = vetor força do elemento simples

$\{R\}$ = vetor força global

Ra = número de Rayleigh

R = raio do cilindro do absorvedor

S = superfície de contorno

S_1 = superfície do absorvedor

S_2 = superfície da cobertura

S_3 = superfície refletora

T = temperatura

T_c = temperatura da parede fria

T_h = temperatura da parede quente

T_o = temperatura de referência = $(T_h+T_c)/2$

Tr = fator de truncamento

Δt = incremento do tempo

t = tempo

u = velocidade do fluido na direção x

U = velocidade adimensional do fluido na direção X

v = velocidade do fluido na direção y

V = velocidade adimensional do fluido na direção Y

x = coordenada transversal do coletor

X = coordenada adimensional transversal do coletor

y = coordenada transversal do coletor

Y = coordenada adimensional transversal do coletor

z = coordenada longitudinal do coletor

CARACTERES GREGOS

Símbolo	Designação
α	= ângulo de inclinação do coletor
β	= coeficiente de expansão volumétrica do fluido
β_o	= ângulo do arco de circunferência da superfície quente
δ	= parâmetro
Δ	= área do elemento triangular
λ	= parâmetro
η	= superfície fria
ρ	= massa específica
$\rho(\phi)$	= raio de traçado da superfície refletora
τ	= tempo adimensional
$\Delta\tau$	= incremento de tempo adimensional

θ = temperatura adimensional

θ_a = ângulo de incidência

$\theta_{a_{max}}$ = semiângulo de aceitação do coletor concentrador

ϕ = função escalar

ϕ_n = semiângulo não iluminado do absorvedor

Φ = valor da função escalar no ponto nodal

μ = viscosidade dinâmica do fluido

ν = viscosidade cinemática do fluido

ω = vorticidade

Ω = domínio

ψ = função corrente

ψ_o = função corrente a uma distância Δn da parede

ξ = superfície quente

ÍNDICES

w = parede

e = elemento

i = ponto nodal i

j = ponto nodal j

k = ponto nodal k

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Símbolo	Designação	Equação
Pr	= número de Prandtl	(A2.16)
Gr	= número de Grashof baseado na diferença de temperatura (T_h-T_c)	(A2.15)
Nu_L	= número de Nusselt local baseado na diferença de temperatura (T_h-T_c)	(A2.1)
Nu	= número de Nusselt médio baseado na diferença de temperatura (T_h-T_c)	(A2.2)
Ra	Número de Rayleigh baseado na diferença de temperatura (T_h-T_c)	(A2.17)

ÍNDICE DAS FIGURAS

Figura		Página
1.1	Forma tridimensional do coletor concentrador analisado (caso 1)	1.2
1.2	Forma tridimensional do coletor concentrador analisado (caso 2)	1.2
1.3	Forma geométrica da seção do coletor concentrador analisado (caso 1)	1.4
1.4	Forma geométrica da seção do coletor concentrador analisado (caso 2)	1.5
2.1	Geometria dos coletores concentradores e condição de contorno; (a) caso 1; (b) caso 2	2.3
3.1	Domínio para solução das equações	3.3
3.2	Elemento triangular; função de interpolação linear	3.3
3.3	Fluxograma do programa computacional	3.20
4.1	Geometria quadrada e as condições de contorno	4.2
4.2	Malha utilizada para a geometria quadrada	4.2
4.3	Influência do número de elementos no número de Nusselt médio	4.3
4.4	Geometria trapezoidal e condições de contorno	4.7
4.5	Malha utilizada para geometria trapezoidal com	

Figura		Página
	340 elementos	4.8
4.6	Número de Nusselt médio em função do número de Rayleigh para geometria trapezoidal. o - superfície lateral de madeira; ● - superfície lateral de alumínio	4.10
4.7	Malha utilizada na solução do caso 1 com 532 elementos	4.14
4.8	Malha utilizada na solução do caso 2 com 320 elementos	4.14
4.9	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=0^o$; C=3,64	4.15
4.10	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=30^o$; C=3,64	4.16
4.11	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=5x10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=0^o$; C=3,64.	4.17
4.12	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=5x10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=30^o$; C=3,64.	4.18
4.13	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=0^o$; C=3,64.	4.19

Figura		Página
4.14	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=30^o$; $C=3,64$.	4.20
4.15	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=5x10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=0^o$; $C=3,64$	4.21
4.16	(a) Distribuição da função corrente; (b) Distribuição de temperatura adimensional para $Gr=5x10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=30^o$; $C=3,64$	4.22
4.17	Número de Nusselt médio na superfície quente em função do ângulo de inclinação	4.24
4.18	Número de Nusselt médio na superfície quente em função do ângulo de inclinação	4.25
4.19	Número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof	4.26
4.20	Número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof	4.27
4.21	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente ξ; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria η; para Grashof 10^5 e $5x10^5$; ângulo de inclinação 0^o e 30^o	4.29
4.22	(a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente ξ; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria η; para Grashof 10^5 e $5x10^5$; ângulo de inclinação 0^o e 30^o	4.30

Figura		Página
4.23	Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=0^o$, Tr=0,5; C=3,64 ; (a) $Gr=10^5$; (b) $Gr=5x10^5$	4.33
4.24	Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=30^o$; Tr=0,5; C=3,64 ;	4.34
4.25	Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=0^o$; Tr=0,5; C=3,64 ; (a) $Gr=10^5$; (b) $Gr=5x10^5$	4.35
4.26	Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=30^o$; Tr=0,5; C=3,64; (a) $Gr=10^5$; (b) $Gr=5x10^5$	4.36
A1.1	Simbologia principal do coletor concentrador	A1.4
A1.2	Coletores concentradores com absorvedor cilíndrico para C=3,64 e Tr=0,5. (a) Caso 1, $\phi_n=0^o$; (b) Caso 2, $\phi_n=90^o$	A1.5
A2.1	Geometria do coletor e condições de contorno consideradas na análise	A2.2
A2.2	Esquema mostrando o fluxo de calor em duas dimensões	A2.2
A4.1	Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/dt$	A4.5

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela		Página
4.1	Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1; Gr=20.000; Pr=0,733	4.5
4.2	Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1; Pr=0,733	4.5
4.3	Constantes C da equação 4.1	4.11
4.4	Comparação do presente trabalho com a referência [18], para geometria trapezoidal com Pr=0,733	4.11
4.5	Constantes da equação 4.2 para o caso 1	4.31
4.6	Constantes da equação 4.2 para o caso 2	4.31

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

A solução de problemas de convecção natural laminar em espaços confinados é de grande interesse no campo da engenharia. Dentre as várias aplicações, a convecção natural no interior de coletores solares concentradores apresenta particular interesse. Em geral, os trabalhos que tratam dos coletores concentradores, são relativos a projeto e estudo ótico. Estudos de convecção natural no interior da cavidade dos coletores concentradores são raramente encontrados.

Os coletores concentradores têm como elementos básicos duas superfícies refletoras, que direcionam os raios incidentes para o absorvedor e uma cobertura transparente por onde penetram os raios incidentes. Existem vários tipos de coletores concentradores, sendo os mais difundidos: (1) concentrador trapezoidal, onde o absorvedor, a cobertura e os dois refletores são planos; (2) concentrador parabólico composto (CPC), onde a cobertura é plana, os refletores são parabólicos e o absorvedor pode ter formas diversas, sendo mais usuais a plana e a cilíndrica.

As figuras 1.1 e 1.2 mostram as duas geometrias de coletores concentradores analisados no presente trabalho, os quais serão chamados de caso 1 e caso 2. As figuras 1.3 e 1.4 representam, respectivamente, as seções transversais das figuras 1.1 e 1.2. Nas figuras 1.3 e 1.4 os absorvedores têm, respectivamente, a forma circular e semicircular, sendo a cobertura de forma pla

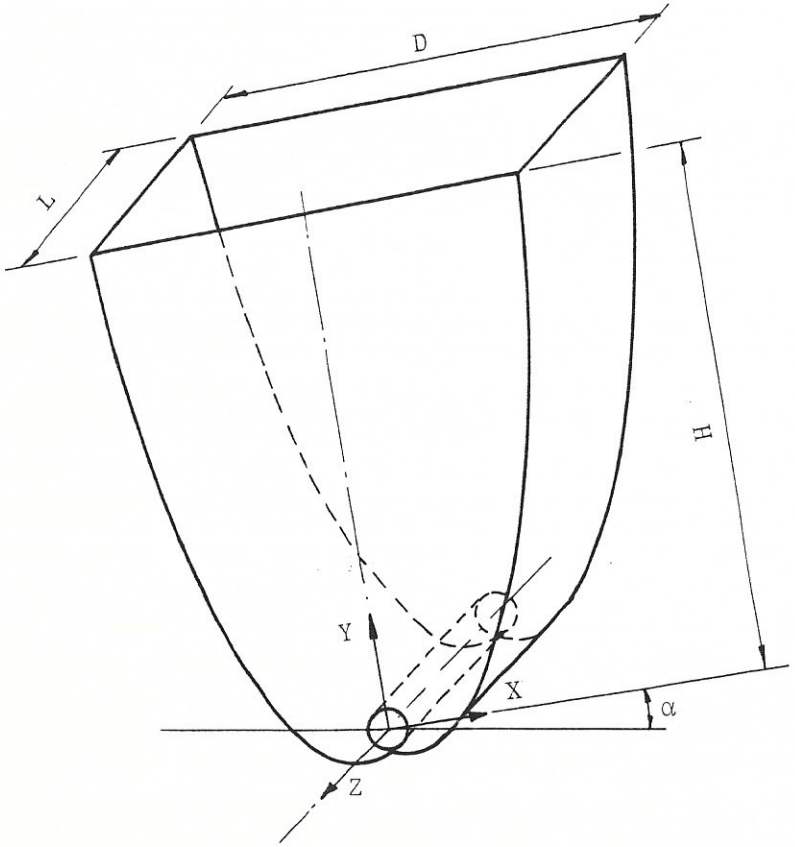


Figura 1.1 - Forma tridimensional do coletor concentrador analisado (caso 1)

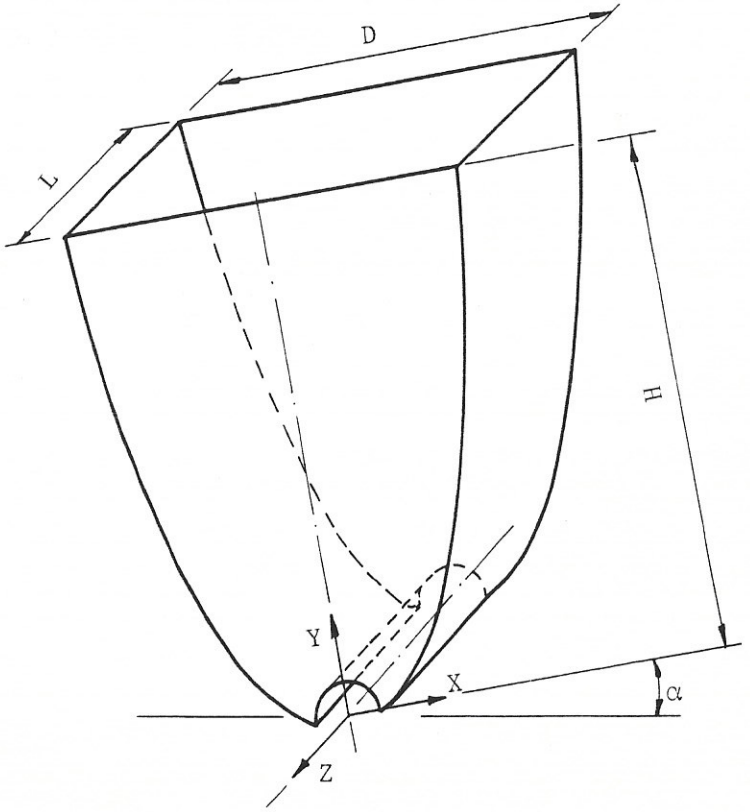


Figura 1.2 - Forma tridimensional do coletor concentrador analisado (caso 2)

na nos dois casos. A principal característica deste tipo de concentrador é que todos os raios incidentes com ângulo θ_a, menor que o semiângulo de aceitação $\theta_{a_{max}}$, atingem o absorvedor diretamente ou após uma ou mais reflexões.

As equações que permitem obter a geometria dos coletores mostrados nas figuras 1.1 até 1.4 foram desenvolvidas por Zaparoli [1]. No apêndice A1 estão apresentadas as principais características geométricas e óticas do coletor concentrador em estudo.

Para a solução de problemas de convecção natural, laminar, bidimensional, como no caso do presente trabalho, é necessária a resolução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. A complexidade matemática limita a possibilidade de se obterem soluções analíticas para o sistema, o que torna conveniente a utilização de Métodos Numéricos.

Para a solução numérica em questão, o método de elementos finitos tem a vantagem de se adaptar às linhas de fronteira do domínio em estudo, simplificando a aplicação das condições de contorno. Nesse método, o domínio em estudo pode ser subdividido em elementos de tamanhos diferentes, o que permite concentrar maior número de elementos nas regiões de maiores gradientes das grandezas envolvidas, melhorando a precisão dos resultados, sem aumento das dificuldades de aplicação do método. A potencialidade do método fica evidenciada nos casos de geometrias irregulares.

O presente trabalho tem como objetivos o estudo teórico da convecção natural, bidimensional em regime permanente e não permanente, para os casos 1 e 2, das figuras 1.3 e 1.4 e o esta

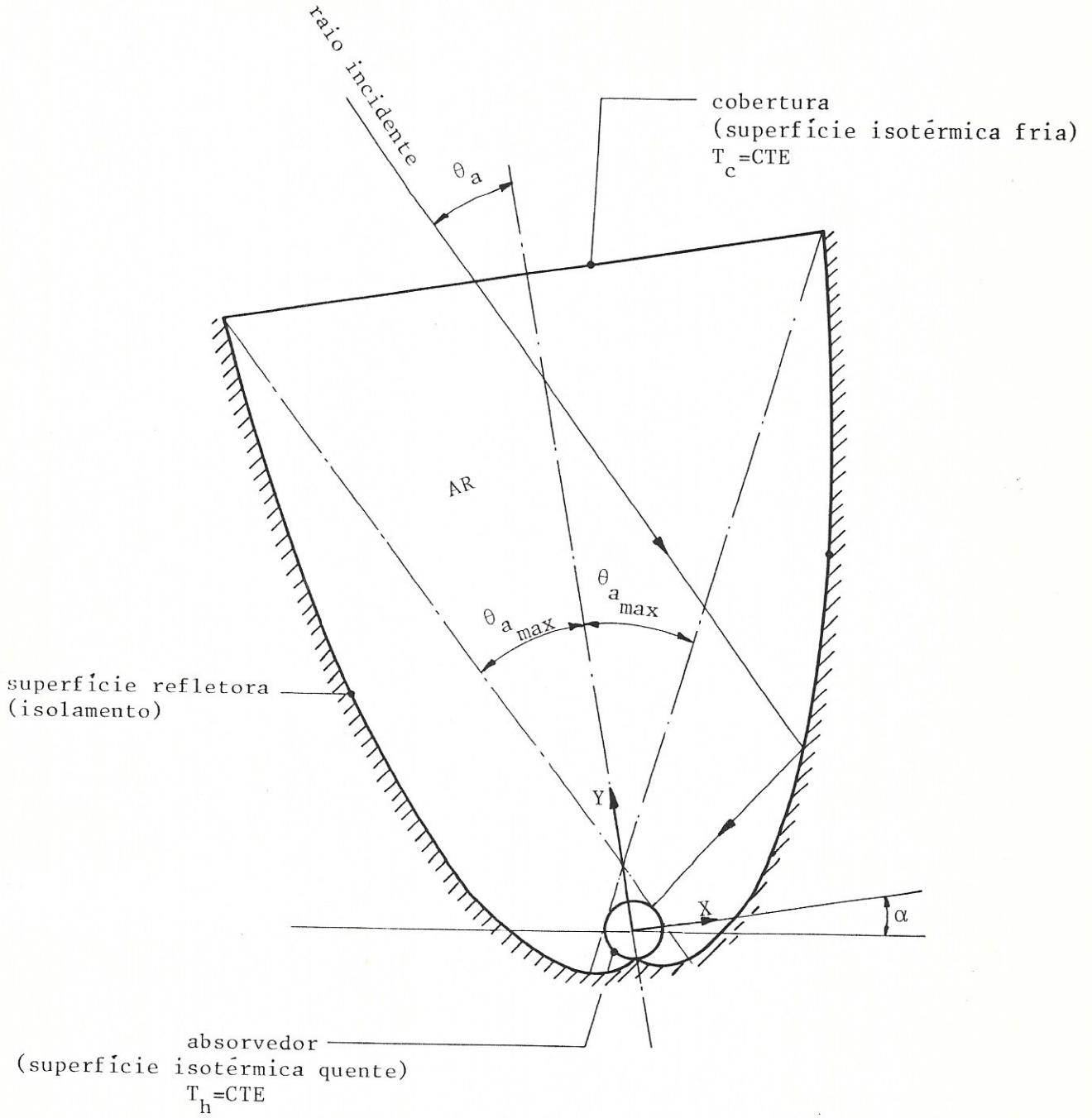


Figura 1.3 - Forma geométrica da seção do coletor concentrador analisado (caso 1)

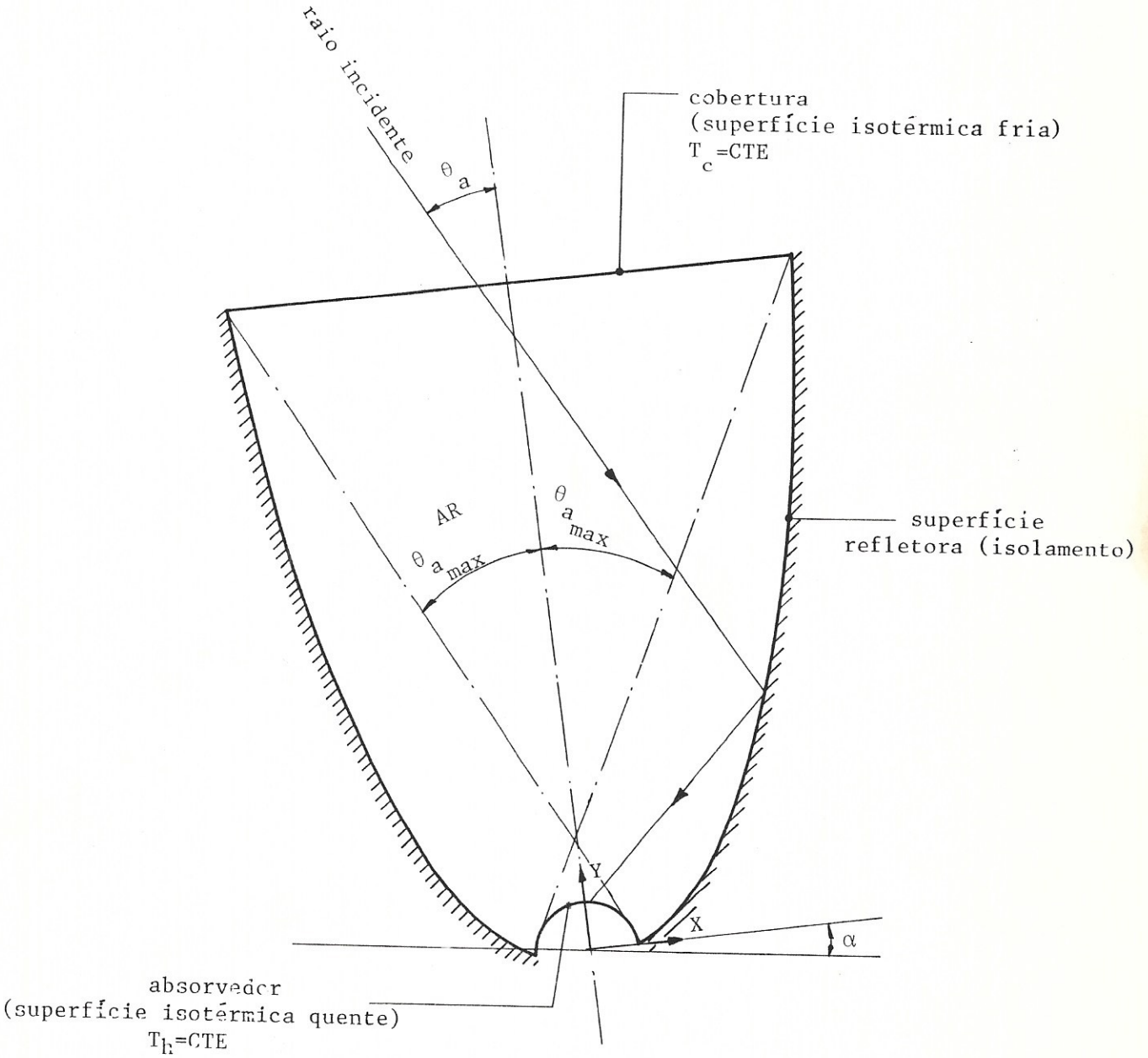


Figura 1.4 - Forma geométrica da seção do coletor concentrador analisado (caso 2)

belecimento de relações entre os coeficientes de transferência de calor médio e local em função dos parâmetros térmicos e geométricos dos concentradores. A posse desses resultados permite calcular as perdas por convecção natural que ocorrem no interior da cavidade.

As equações de conservação são resolvidas utilizando-se o método de elementos finitos para se determinar as distribuições de função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros geométricos e térmicos envolvidos.

Na análise teórica do presente trabalho são considerados para os casos 1 e 2 as seguintes situações: fator de concentração real 3,64, fator de truncamento 0,5, ângulos de inclinação 0^{o}, 30^{o}, 60^{o} e 90^{o}, medidos com relação a horizontal, número de Grashof na faixa de 10^{5} a 10^{6}. O número de Prandtl é fixado em 0,733.

1.2 - Revisão da Literatura

Uma revisão da literatura revela que existe um grande número de referências sobre convecção natural em cavidades. Em geral, a maioria desses trabalhos trata das geometrias regulares, tais como quadrado e retângulo. Devido a isto, os estudos de geometrias regulares são básicos para o estudo do presente trabalho.

Um dos primeiros trabalhos em que se estudou a convecção natural no interior de uma cavidade quadrada, utilizando um método numérico, foi realizado por Poots [2]. Foi utilizada uma série de funções ortogonais para representar a função corrente e a temperatura. Os resultados para o número de Nusselt foram obtidos variando-se Ra até 10^{4} e Pr=0,73. Não foram efetuados estudos so

bre a convergência do método.

Em 1966, Wilkes e Churchill [3] apresentaram um estudo teórico de convecção natural no interior de uma cavidade retangular com duas superfícies horizontais isoladas e duas superfícies verticais isotérmicas, sendo uma mantida na temperatura quente e a outra na temperatura fria. Foi utilizado o método de diferenças finitas para se resolver as equações de conservação na forma bidimensional e não permanente. Foram apresentados resultados para Ar=1, 2 e 3 e Gr até 10^5. Entretanto, para Ar=2 e 3 só foi considerado Gr=$2x10^4$. Os valores obtidos para o número de Nusselt resultaram até 70% maiores que aqueles fornecidos pela equação empírica de Jakob [4]. Deve-se observar, porém, que a equação de Jakob [4] foi obtida com base em resultados experimentais para Ar=3,12 e 4,22, consideravelmente diferentes da situação analisada por Wilkes e Churchill [3].

De Vahl Davis [5] obteve soluções numéricas das equações de conservação para convecção natural em cavidades verticais retangulares com Ar=1 para Ra até $2x10^5$ e Ar=5 para Ra até $1,25x10^6$, com Pr variando na faixa de 10^{-1} a 10^{-3}. Foram considerados dois tipos de condições de contorno para as superfícies horizontais. No primeiro, a temperatura variou linearmente, entre a superfície quente e a fria. No segundo, as superfícies foram consideradas adiabáticas. As equações de conservação apresentadas na forma de função corrente, vorticidade e temperatura foram resolvidas pelo método de diferenças finitas. Para o primeito tipo de condição de contorno, De Vahl Davis [5] verificou que resultados concordam bem com os de Poots [2], mas não com os de Elder [6].

Mallison e outros [7] apresentaram um novo método de solução, chamado método de falso transiente. A equação elíptica

foi transformada em uma forma parabólica pela adição de uma derivada temporal. Foi obtida solução para o problema de convecção natural numa cavidade com forma de paralelepípedo, para Ra $1,5x10^5$ e Pr=1. Foram apresentadas as trajetórias tridimensionais de partículas no interior da cavidade. O método utilizado foi de diferenças finitas.

Ozoe e outros [8] e [9] obtiveram respectivamente as soluções numéricas para convecção natural em cavidades quadrada e retangular, ambas inclinadas. Foi utilizado o método de diferenças finitas para resolver as equações de conservação em termos da vorticidade, função corrente e temperatura adimensional. Em [8] foi considerado Pr=10, Ar=1, Ra até $8x10^3$ e ângulos de inclinação com relação a horizontal de 0^o a 90^o. Em [9] os resultados foram apresentados para Pr=1, Ar=1, 2, 3 e 4, com Ra igual a $2x10^3$, $4x10^3$ e $8x10^3$. Os resultados do número de Nusselt para ângulo de inclinação 90^o foram comparados com aqueles de Wilkes e Churchill [3] e McGregor e Emery[10],mostrando boa concordância.

Em 1977, Mallinson e outros [11] apresentaram a solução numérica das equações de Navier-Stokes, para regime permanente, em cavidades bi e tridimensionais. Para o escoamento bidimensional, foram apresentadas as distribuições de temperatura adimensional e da função corrente, para Ra=$1,5x10^5$ e Pr igual a 0,2, 0,71 e 100, e também para Ra=10^6, Pr=0,71 e Ar=1. Para o escoamento tridimensional os resultados foram apresentados para Ra na faixa de 10^4 a 10^6, Pr=0,2 0,71 e 100, com Ar=1 e 5. Foram apresentadas configurações tridimensionais das trajetórias de partículas do fluido no interior da cavidade. Os números de Nusselt para escoamento tridimensional diferiram do escoamento bidimensional em torno de 5%.

Ozoe e outros [12] estudaram a convecção natural tridi

mensional em cavidades retangulares inclinadas. As equações de conservação foram resolvidas numericamente. Os resultados foram obtidos para Ar=5, $Ra=4x10^3$, Pr=10, e ângulos de inclinação medidos em relação à horizontal de 0^o, 3^o, 5^o e 7^o. As configurações do escoamento concordaram com as fotos tridimensionais apresentadas pelos autores [13].

Ozoe e outros [14-16] apresentaram um estudo de convecção natural em cavidades retangulares e verificaram que o valor mínimo do número de Nusselt ocorre para ângulos de inclinação com a horizontal na faixa de 10^o a 90^o, para diferentes números de Rayleigh. O valor do número de Nusselt mínimo, o qual corresponde a uma taxa mínima de transferência de calor por convecção natural, tende a desaparecer para grandes valores de relação largura e altura, e mantém essa tendência à medida que Rayleigh aumenta. Para relações pequenas de largura e altura, tais como 1 e 3, este valor não desaparece, mesmo que Rayleigh aumente. Ozoe e outros [9] confirmaram experimentalmente que o valor do número de Nusselt mínimo ocorre na mudança do escoamento tridimensional para bidimensional. O escoamento tridimensional é constituído de várias células de convecção e o escoamento bidimensional possui uma célula preferencial de convecção que tem rotação em torno do eixo de maior dimensão do canal.

Iyican e outros [17] estudaram analiticamente a convecção natural dentro de uma cavidade trapezoidal, considerando a superfície superior isotérmica fria, a inferior isotérmica quente e as laterais adiabáticas. O escoamento foi considerado permanente e bidimensional. O ângulo de inclinação, medido com relação a horizontal, variou de 0^o a 180^o, para número de Rayleigh até $2,7x10^6$ e Pr=0,71. O método de Galerkin foi usado para resolver as equações de conservação.

Os resultados teóricos revelaram que o número de Nusselt máximo ocorre para ângulos de inclinação entre 30^{o} e 90^{o}, com números de Rayleigh na faixa de 10^{3} e $2,7x10^{6}$. O regime de condução pura, para qualquer ângulo de inclinação, se mantém até Ra= $=10^{3}$. Para Rayleigh maior que 10^{3} e ângulo de inclinação maior que 90^{o}, verificou-se que o regime convectivo unicelular é dominante, tendendo para o regime condutivo à medida que o ângulo de inclinação se aproxima de 180^{o}. Iyican e outros [18] afirmaram que existe uma região de escoamento tridimensional para ângulos próximos de 0^{o}.

Outro trabalho de convecção natural no interior de uma cavidade trapezoidal foi apresentado por Iyican e outros [18]. O estudo foi experimental e considerou o número de Rayleigh variando na faixa de $2x10^{3}$ até $5x10^{7}$, ângulo de inclinação de 0^{o} a 90^{o} medido em relação a horizontal. Foram também apresentados resultados para ângulo de inclinação de 180^{o}.

O modelo construído para realização das medidas experimentais teve o lado menor da cavidade trapezoidal aquecido eletricamente, o lado oposto resfriado e as superfícies laterais isoladas termicamente. Os resultados experimentais foram correlacionados por meio de uma equação na forma $Nu=CRa^{n}$ e revelaram um valor mínimo do número de Nusselt entre 0^{o} e 90^{o}, de maneira semelhante ao observado em cavidades retangulares. Observou-se que o valor mínimo do número de Nusselt se desloca no sentido crescente de 45 a 90^{o}, à medida que o número de Rayleigh aumenta. Os resultados teóricos de Iycan e outros [17], quando comparados com os seus experimentos [18], ficaram progressivamente piores à medida que o ângulo de inclinação diminui. Iyican e outros [18] sugerem que esse comportamento se deve ao fato do escoamento real não se manter bidimensional para pequenos ângulos

de inclinação.

Abdel e Randall [19] apresentaram um estudo teórico de convecção natural num coletor parabólico composto (CPC), em regime permanente, para números de Rayleigh na faixa de $2x10^3$ até $1,3x10^6$, fator de concentração entre 2 e 10 e fator de truncamento 1/3, 2/3 e 1. Apresentaram resultados para o número de Nusselt no absorvedor nos casos de coletor completo e truncado, em função do número de Rayleigh, considerando ângulo de inclinação fixado em 0^o. Os resultados revelaram que, fixados o número de Rayleigh e o fator de truncamento, o número de Nusselt diminui com o aumento do fator de concentração. O método de elementos finitos, com uma malha de 200 elementos, foi usado na solução das equações diferenciais, em termos de função corrente, vorticidade e temperatura adimensional. Os valores do número de Nusselt obtidos, com uma malha de 200 elementos, foram 10% menores que aqueles obtidos da extrapolação para um número infinito de elementos. Não foram efetuadas comparações entre resultados numéricos e experimentais.

Menon [20] realizou uma análise teórica e experimental de convecção natural em CPC com absorvedor plano. Na análise teórica, considerou o escoamento bidimensional e permanente. O método de elementos finitos foi utilizado para resolver as equações de conservação. Foram apresentados resultados para o número de Nusselt médio e local em função do número de Grashof e dos diversos parâmetros geométricos da cavidade.

Os resultados teóricos foram apresentados para faixas de fator de concentração de 2 a 10, fator de truncamento de 0,3 a 1, ângulo de inclinação de 0^o a 180^o medidos a partir da horizontal, número de Grashof de $2x10^4$ a $3,5x10^6$. O número de Prandtl

foi fixado em 0,71.

Resultados experimentais obtidos em dois modelos de CPC foram comparados com os resultados teóricos, mostrando boa concordância para ângulos de inclinação de 30^{o} a 90^{o}. Nessa faixa de ângulos de inclinação, os resultados foram apresentados por uma equação na forma $Nu=a(Gr\,sen\alpha)^{b}$ e na faixa de ângulo de inclinação entre 0^{o} e 30^{o}, por uma equação na forma $Nu=a[Gr\,sen(60^{o}-\alpha)]^{b}$.

Uma análise experimental de transferência de calor de um coletor concentrador semelhante ao do caso 1 do presente trabalho foi efetuado por Hsieh [21], visando determinar a eficiência desse tipo de coletor. O coletor analisado foi constituído por duas superfícies refletoras, uma cobertura plana e absorvedor formado por um duplo tubo cilíndrico concêntrico e evacuado. No balanço térmico do sistema, a parcela da convecção natural no interior da cavidade foi calculada através de uma equação empírica. Os resultados revelaram que a alta resistência térmica entre o cilindro interno e o externo que formam o absorvedor tornam a eficiência do coletor bastante estável e quase independente dos parâmetros testados.

Não se conhece, até aqui, qualquer trabalho que estude a convecção natural no interior de cavidades de coletores concentradores com absorvedores cilíndricos. Em virtude do crescente interesse de aplicação destes coletores, justifica-se o estudo do presente trabalho.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Análise Teórica

As equações de conservação para o estudo de convecção natural na cavidade dos coletores concentradores apresentados terão as seguintes considerações:

a) regime não permanente;

b) escoamento bidimensional e laminar;

c) escoamento incompressível;

d) a dissipação viscosa foi desprezada;

e) as propriedades do fluido são constantes, exceto a densidade nos termos de empuxo;

f) sem geração interna de calor;

g) os efeitos de compressibilidade são desprezados.

Mediante as considerações acima as equações de conservação são:

i) continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \tag{2.1}$$

ii) quantidade de movimento

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g\beta(T-T_o)\operatorname{sen}\alpha + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \ , \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+g\beta(T-T_o)\cos\alpha+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad (2.3)$$

iii) energia

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{K}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \qquad (2.4)$$

As condições reais de operação de um coletor concentrador se aproximam bem das condições de contorno, que serão consideradas na análise teórica. A figura 2.1 mostra as geometrias dos coletores concentradores e as condições de contorno do problema. A cobertura será considerada uma superfície isotérmica fria com temperatura T_c. O absorvedor será considerado uma superfície isotérmica quente na temperatura T_h. As superfícies refletoras serão consideradas isoladas termicamente, não havendo portanto fluxo de calor através das mesmas. As componentes de velocidade do fluido na parede u_w e v_w são nulas.

As condições iniciais e de contorno da presente análise são:

i) condições iniciais:

para t=0:

$$u = v = 0 \qquad (\text{em } \Omega), \qquad (2.5a)$$

$$T = T_o = \frac{T_c+T_h}{2} \qquad (\text{em } \Omega), \qquad (2.5b)$$

ii) condições de contorno:

para t>0:

$$T = T_h \qquad (\text{em } s_1), \qquad (2.5c)$$

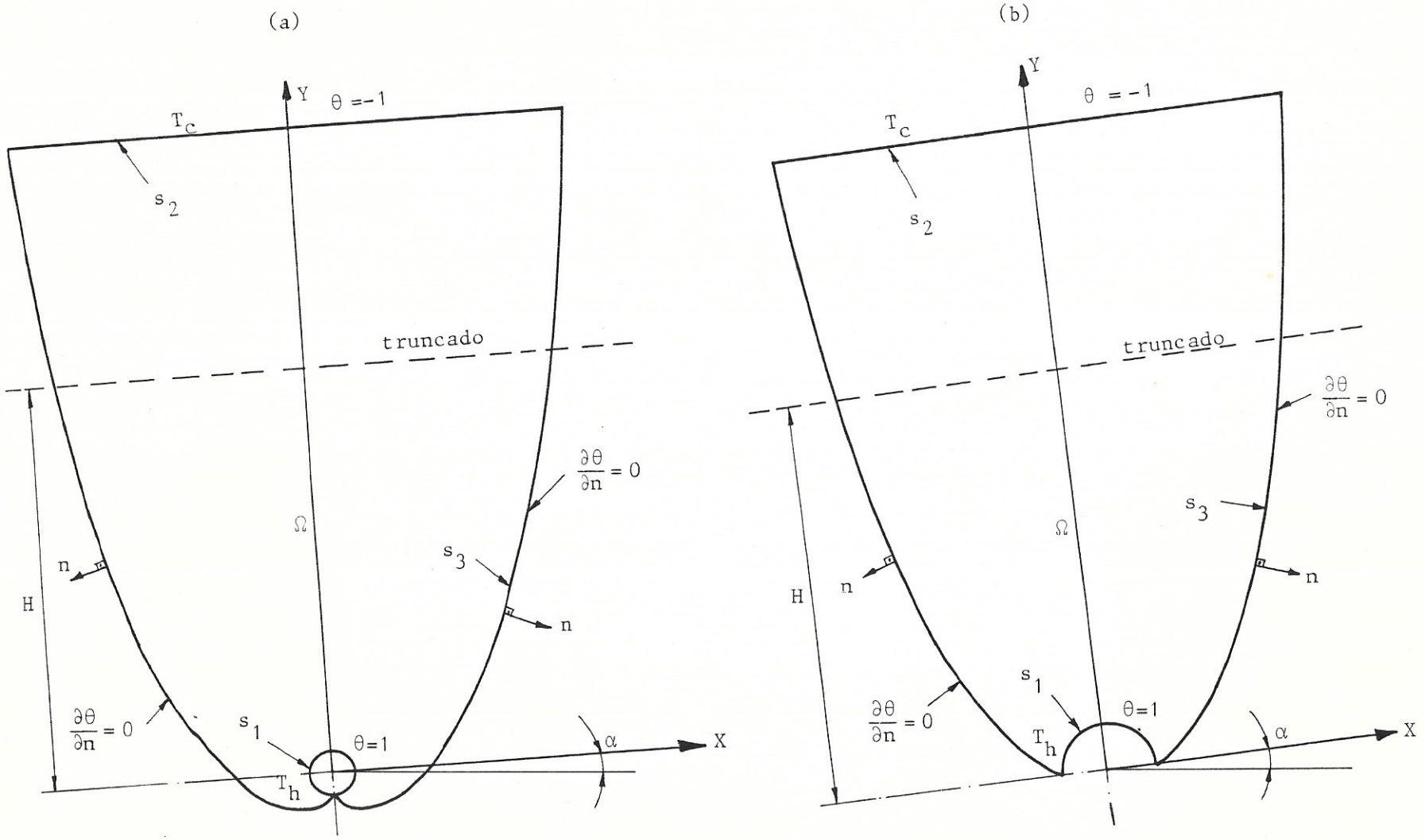


Figura 2.1 – Geometrias dos coletores concentradores e condições de contorno; (a) caso 1; (b) caso 2

$$T = T_c \qquad (\text{em } s_2), \tag{2.5d}$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } s_3), \tag{2.5e}$$

$$u_w = v_w = 0 \qquad (\text{em } s_1+s_2+s_3). \tag{2.5f}$$

Onde s_1, s_2 e s_3 representam as superfícies na fronteira do domínio Ω, mostrado na figura 2.1.

2.2 - Adimensionalização das Equações

Visando generalizar a análise teórica, são introduzidas a seguir as seguintes grandezas adimensionais:

$$\tau = \frac{\nu t}{H^2}, \quad X = \frac{x}{H}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad \theta = \frac{T-T_o}{T_h-T_o},$$

$$U = \frac{uH}{\nu}, \quad V = \frac{vH}{\nu}, \quad P = \frac{pH^2}{\rho\nu^2}. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) em (2.1), resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) em (2.2), resulta:

$$U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{Gr}{2}\theta\,\text{sen}\alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \tag{2.8}$$

onde Gr é o número de Grashof definido pela relação:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h-T_c)H^3}{\nu^2}. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.6) em (2.3), resulta:

$$U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial \tau}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{Gr}{2}\,\theta\cos\alpha+\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\,. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.6) em (2.4), resulta:

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X}+V\frac{\partial \theta}{\partial Y}+\frac{\partial \theta}{\partial \tau}=\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right), \tag{2.11}$$

onde Pr é o número de Prandtl definido pela relação:

$$Pr=\frac{\mu c_p}{K}=\frac{\rho \nu c_p}{K}\,. \tag{2.12}$$

Os termos de pressão que aparecem nas equações (2.8) e (2.10) podem ser eliminados. Isto é conseguido derivando-se a equação (2.8) em relação a Y, e a equação (2.10) em relação a X. Em seguida, as equações são subtraídas, resultando:

$$U\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+V\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right)=\frac{Gr}{2}\cos\alpha\frac{\partial \theta}{\partial X}-$$

$$-\frac{Gr}{2}\,\mathrm{sen}\alpha\frac{\partial \theta}{\partial Y}+\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\right). \tag{2.13}$$

A vorticidade ω é introduzida pela seguinte relação:

$$\omega=\frac{\partial V}{\partial X}-\frac{\partial U}{\partial Y}\,. \tag{2.14}$$

Substituindo (2.14) em (2.13), vem:

$$U\frac{\partial \omega}{\partial X}+V\frac{\partial \omega}{\partial Y}+\frac{\partial \omega}{\partial \tau}=\frac{Gr}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial \theta}{\partial X}-\mathrm{sen}\alpha\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)+\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2}\,. \tag{2.15}$$

A função corrente Ψ é introduzida pela seguinte relação:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \qquad e \qquad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \; . \tag{2.16}$$

Com a definição dada por (2.16), a equação da continuidade (2.7) fica satisfeita.

Das equações (2.14) e (2.16), resulta:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\omega \; . \tag{2.17}$$

Das equações (2.15) e (2.16), vem:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial \omega}{\partial Y} + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{Gr}{2}\left(\cos\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \; . \tag{2.18}$$

Das equações (2.11) e (2.16), vem:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) . \tag{2.19}$$

Reescrevendo as equações (2.17), (2.19) e (2.18), resultam respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \omega = 0 \; , \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial \theta}{\partial X}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \; , \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{Gr}{2}\left(\cos\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \; . \tag{2.22}$$

As equações (2.20), (2.21) e (2.22) representam as equações de conservação em termos da função corrente, temperatura

adimensional e vorticidade, tendo sido eliminada a pressão.

As condições iniciais e de contorno consideradas no item 2.1, na forma adimensional, são:

i) condições iniciais:

para $\tau=0$:

$$\Psi = \theta = \omega = 0 \qquad (\text{em } \Omega), \tag{2.23}$$

ii) condições de contorno:

para $\tau>0$:

$$\theta = 1 \qquad (\text{em } s_1), \tag{2.21a}$$

$$\theta = -1 \qquad (\text{em } s_2), \tag{2.21b}$$

$$q = \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } s_3), \tag{2.21c}$$

$$\Psi_w = 0 \qquad (\text{em } s_1+s_2+s_3), \tag{2.20a}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \qquad (\text{em } s_1+s_2+s_3), \tag{2.20b}$$

$$\omega_w = -\frac{2\psi_o}{(\Delta n)^2} \qquad (\text{em } s_1+s_2+s_3), \tag{2.22a}$$

onde s_1, s_2, s_3 são as superfícies no contorno do domínio Ω, mostrado na figura 2.1. A equação (2.23) estabelece a condição inicial para ψ, θ e ω em todo o domínio Ω. As equações (2.21a) e (2.21b) estabelecem que as temperaturas adimensionais nas superfícies quente e fria são respectivamente 1 e -1. A equação (2.21c) indica que o fluxo de calor através da superfície s_3 é nulo. As equações (2.20a) e (2.20b) estabelecem respectivamente as condições de impermeabilidade e aderência no contorno. Na

equação (2.22a), ω_w representa a vorticidade do fluido junto ao contorno e Ψ_o é o valor da função corrente num ponto situado a pequena distância Δn do contorno.

As equações de conservação (2.20), (2.21) e (2.22) podem ser escritas na seguinte forma condensada:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} + Q_\Psi = 0 \ , \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right) + Q_\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} \ , \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial Y^2} + Q_\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\tau} \ , \tag{2.26}$$

onde:

$$Q_\Psi = \omega \ , \tag{2.24a}$$

$$Q_\theta = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y} - \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X}\right), \tag{2.25a}$$

$$Q_\omega = \frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\omega}{\partial Y} - \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\omega}{\partial X} + \frac{Gr}{2}\left(\cos\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial X} - \operatorname{sen}\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right). \tag{2.26a}$$

2.3 - Parâmetros da Análise

As equações (2.24), (2.25) e (2.26) formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e acopladas. A solução simultânea desse sistema de equações foi obtida através do método de elementos finitos, com o objetivo de determinar as distribuições das funções Ψ, θ e ω. Conhecendo-se essas distribuições é possível calcular o número de Nusselt local e médio em função de parâmetros geométricos e térmicos do problema.

Os números de Nusselt local e médio estão definidos no apêndice A2, pelas seguintes relações:

i) Número de Nusselt local para a superfície s_1:

$$Nu_L = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right)^2}\Bigg|_{s_1} ; \tag{2.27}$$

ii) Número de Nusselt local para a superfície fria s_2:

$$Nu_L = -\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial Y}\Bigg|_{s_2} ; \tag{2.28}$$

iii) Número de Nusselt médio para a superfície s:

$$Nu = \frac{1}{s}\int_s Nu_L\Big|_s \, ds , \tag{2.29}$$

onde s pode ser a superfície s_1 ou s_2.

Os números de Nusselt local e médio podem ser escritos respectivamente na seguinte forma:

$$Nu_L = Nu_L(C, Tr, L/H, \alpha, Pr, Gr), \tag{2.30}$$

$$Nu = Nu(C, Tr, L/H, \alpha, Pr, Gr). \tag{2.31}$$

Os quatro primeiros parâmetros que aparecem nas relações (2.30) e (2.31) são parâmetros geométricos e podem ser vistos nas figuras 1.1 e 1.2, sendo que as suas definições estão apresentadas no apêndice A1.

Os parâmetros Pr e Gr estão definidos no apêndice A2.

Na análise numérica do presente trabalho, para ambos os casos 1 e 2, os parâmetros C, Tr, L/H e Pr assumirão os seguin

tes valores fixos:

$$C = 3,64 \; ; \quad Tr = 0,5 \; ; \quad L/H \to \infty \; ; \; Pr = 0,733$$

Deve ser observado que $L/H \to \infty$ representa uma cavidade de comprimento infinito, onde não se leva em conta os efeitos de extremidade, o que justifica uma análise bidimensional para o problema.

Com base nas considerações anteriores os números de Nusselt local e médio ficam dependentes do ângulo de inclinação e do número de Grashof Gr, e podem ser escritos respectivamente na seguinte forma:

$$Nu_L = Nu_L(\alpha, Gr) \; , \tag{2.32}$$

$$Nu = Nu(\alpha, Gr) \; . \tag{2.33}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE SOLUÇÃO

3.1 - Desenvolvimento das Equações utilizando o Método de Elementos Finitos

As equações (2.24), (2.25) e (2.26) podem ser escritas na seguinte forma geral:

$$\delta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2}\right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \cdot \tag{3.1}$$

Onde ϕ pode ser uma das funções Ψ, θ e ω. Neste caso, Q_ϕ é uma função especificada Q_Ψ, Q_θ e Q_ω, dadas respectivamente pelas equações (2.24a), (2.25a) e (2.26a). O parâmetro λ é igual a zero na equação (2.24) e igual a um nas equações (2.25) e (2.26). O parâmetro δ é igual a 1 nas equações (2.24) e (2.26) e igual a 1/Pr na equação (2.25).

As condições de contorno relativas às equações (2.24) e (2.25) podem ser assim escritas:

$$\phi = \phi(X,Y), \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 . \tag{3.1b}$$

A condição de contorno dada pela equação (2.22a) deve ser tratada separadamente.

Para a solução numérica da equação (3.1), juntamente com as condições de contorno (3.1a) e (3.1b), será usado o método de elementos finitos. A escolha desse método se deve às suas vanta

gens inerentes: a) facilidade de adaptação à fronteira do domínio de solução, simplificando a aplicação das condições de contorno; b) capacidade de se efetuar discretizações seletivas, concentrando maior número de elementos nas regiões onde se esperam maiores variações das incógnitas.

A figura 3.1 mostra o domínio no plano (X,Y) para a solução da equação (3.1). O domínio é dividido em elementos triangulares. A cada triângulo corresponde um elemento e cada vértice do triângulo é denominado ponto nodal ou nó. Para cada ponto nodal associa-se um valor da grandeza ϕ; admite-se que a grandeza ϕ^e varia linearmente em cada elemento, como se mostra na figura 3.2.

A distribuição da grandeza ϕ^e no elemento (e) é aproximada, portanto, pela seguinte equação:

$$\phi^e = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \,. \tag{3.2}$$

Para os pontos nodais i, j, k resultam respectivamente as seguintes equações:

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \,, \tag{3.2a}$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \,, \tag{3.2b}$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_1 X_k + \alpha_3 Y_k \,. \tag{3.2c}$$

Resolvendo o sistema de equações (3.2a), (3.2b) e (3.2c), resulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} \left[(X_i Y_k - X_k Y_i)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k \right] , \tag{3.3a}$$

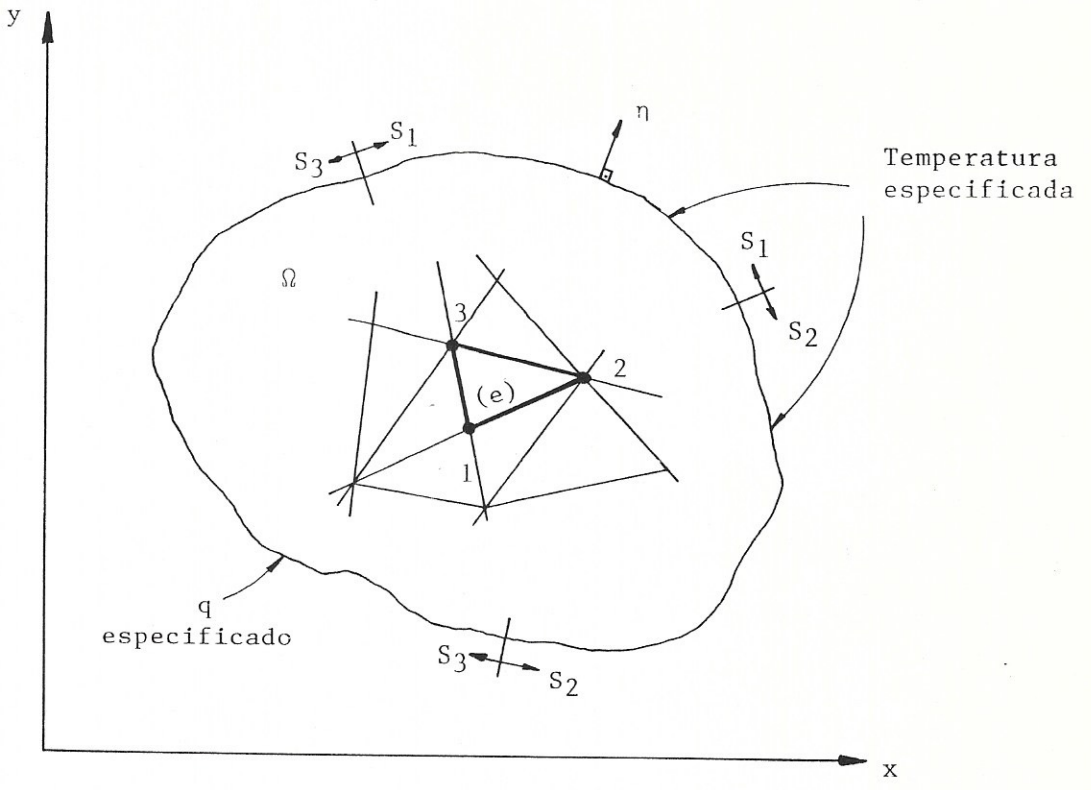


Figura 3.1 - Domínio para a solução das equações

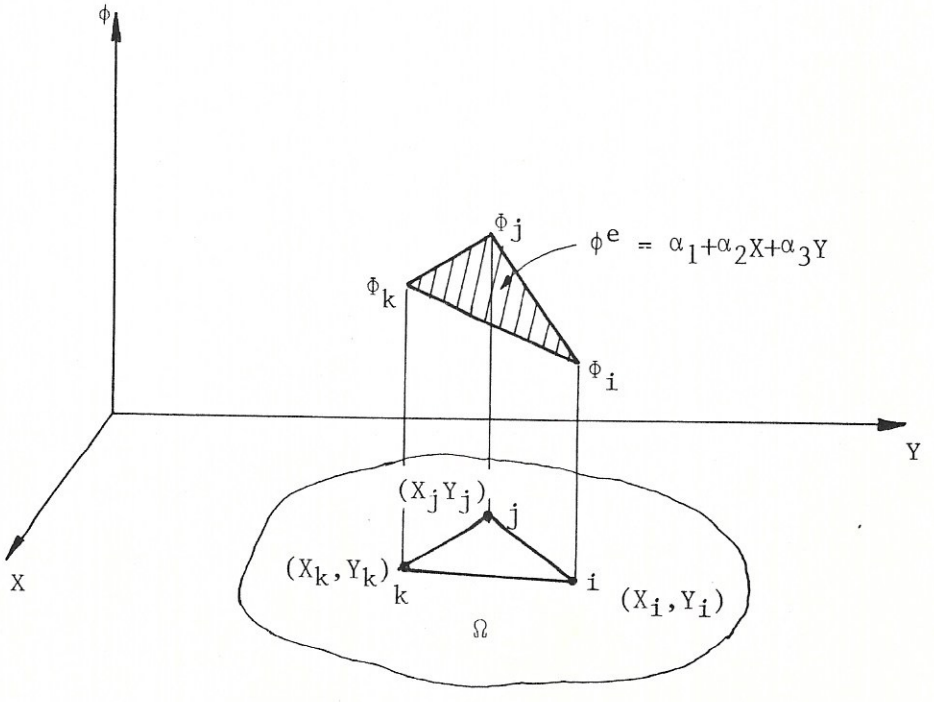


Figura 3.2 - Elemento triangular; função de interpolação linear

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}\left[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k\right] , \tag{3.3b}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta}\left[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_i - X_j)\Phi_k\right] , \tag{3.3c}$$

onde Δ é a área do elemento, dada por:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix} . \tag{3.4}$$

Substituindo as equações (3.3) em (3.2), resulta:

$$\phi^e = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k , \tag{3.5}$$

onde:

$$N_i = \frac{1}{2\Delta}\left[a_i + b_i X + c_i Y\right] , \tag{3.6a}$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j ,$$

$$b_i = Y_j - Y_k ,$$

$$c_i = X_k - X_j ,$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta}\left[a_j + b_j X + c_j Y\right] , \tag{3.6b}$$

$$a_j = X_k Y_i - Y_i X_k ,$$

$$b_j = Y_k - Y_i ,$$

$$c_j = X_i - X_k ,$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} [a_k + b_k X + c_k Y] \quad , \tag{3.6c}$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \quad ,$$

$$b_k = Y_i - Y_j \quad ,$$

$$c_k = X_j - X_i \quad .$$

A equação (3.5) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\phi^e(X,Y) = [N^e] \{\Phi\}^e = [N_i, N_j, N_k] \{\Phi\}^e \quad . \tag{3.7}$$

Se o domínio contém E elementos, a representação completa do campo da grandeza ϕ é dada por:

$$\phi(X,Y) = \sum_{e=1}^{E} \phi^e(X,Y) = \sum_{e=1}^{E} [N^e] \{\Phi\}^e \quad , \tag{3.8}$$

onde se deve considerar que:

$\phi^e = 0$, fora do elemento;

$\phi^e = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$, dentro do elemento e no contorno do elemento.

As funções N_i, N_j e N_k são denominadas funções de forma do elemento, sendo lineares com relação às variáveis X e Y. Desse modo, os gradientes em ambas as direções, X ou Y, serão constantes em cada elemento.

Os gradientes nas direções X e Y são, respectivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial X} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial X} \Phi_k \ , \tag{3.9a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\partial N_i}{\partial Y} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial Y} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial Y} \Phi_k \ , \tag{3.9b}$$

Mas

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial X} = \frac{b_\beta}{2\Delta} \quad \text{com} \quad \beta=i,j,k \ , \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial Y} = \frac{c_\beta}{2\Delta} \quad \text{com} \quad \beta=i,j,k \ , \tag{3.10b}$$

portanto de (3.9) e (3.10), resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k) \ , \tag{3.11a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k) \ . \tag{3.11b}$$

A seguir serão desenvolvidas as formas discretizadas para as equações de conservação. A técnica utilizada para obtê-las consistiu na minimização do funcional equivalente. Os termos das equações dependentes do tempo foram escritos usando um esquema de diferença finita central. Maiores detalhes poderão ser vistos nos apêndices A3 e A4.

3.2 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Função Corrente

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi=\Psi$, $Q_\phi=Q_\Psi$, $\lambda=0$ e $\delta=1$, resulta:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + Q_\Psi = 0 \ , \tag{3.12}$$

onde Q_Ψ é dado pela equação (2.24a), como sendo:

$$Q_\Psi = \omega \ . \tag{3.12a}$$

No apêndice A3 mostra-se que as equações (3.12) e (3.12a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$[K_\Psi]^e \{\Psi\}^e = -\{R_\Psi\}^e \ . \tag{3.13}$$

Os coeficientes das matrizes nas equações (3.13) são dados pelas equações (A3.12), (A3.13) e (A3.6), na forma:

$$[K_\Psi]^e = \int_{V^e} [B^e]^T [B^e] dV \ , \tag{3.14}$$

$$\{R_\Psi\}^e = - \int_{V^e} Q_\Psi^e [N^e]^T dV + \int_{S^e} q^e [N^e]^T dS \ , \tag{3.15}$$

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial X} & \dfrac{\partial N_j}{\partial X} & \dfrac{\partial N_k}{\partial X} \\ \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial Y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial Y} \end{bmatrix} . \tag{3.16}$$

Substituindo (3.10) em (3.16), vem:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \dfrac{b_i}{2\Delta} & \dfrac{b_j}{2\Delta} & \dfrac{b_k}{2\Delta} \\ \\ \dfrac{c_i}{2\Delta} & \dfrac{c_j}{2\Delta} & \dfrac{c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} , \tag{3.17}$$

$$[B^e]^T = \begin{bmatrix} \frac{b_i}{2\Delta} & \frac{c_i}{2\Delta} \\ \frac{b_j}{2\Delta} & \frac{c_j}{2\Delta} \\ \frac{b_k}{2\Delta} & \frac{c_k}{2\Delta} \end{bmatrix} . \qquad (3.18)$$

substituindo (3.17) e (3.18) em (3.14), vem:

$$[K_\psi]^e = \int_{V^e} \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV =$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} \int_{V^e} dV . \qquad (3.19)$$

Admitindo a espessura do elemento unitária, o elemento volume é dV=1.dS. Assim, tem-se que:

$$\int_{V^e} dV = \int_{S^e} dS = \Delta . \qquad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19), vem:

$$[K_\psi]^e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} . \qquad (3.21)$$

A função Q_ψ^e pode ser escrita na forma:

$$Q_{\psi}^{e} = \omega^{e} = [N^{e}] \{\omega\}^{e}. \tag{3.22}$$

As matrizes $[N^e]$ e $[N^e]^T$ são dadas, respectivamente, por:

$$[N^{e}] = [N_i \quad N_j \quad N_k] , \tag{3.23}$$

$$[N^{e}]^{T} = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} , \tag{3.24}$$

onde N_i, N_j, N_k são dados pelas equações (3.6a), (3.6b) e (3.6c).

Substituindo as equações (3.23) e (3.24) em (3.25), e observando que $q^e=0$ e $dV=1.dS$, resulta a seguinte equação:

$$\{R_{\psi}\}^{e} = - \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dS =$$

$$= - \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} dS \ . \tag{3.25}$$

Da equação (7.34) da referência [22], página 120, tem-se que:

$$\int_{S^e} N_i^a N_j^b N_k^c \, dS = \frac{a!\ b!\ c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \ . \tag{3.26}$$

Das equações (3.25) e (3.26), resulta que:

$$\{R_\psi\}^e = -\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \qquad (3.27)$$

Os resultados obtidos para as equações (3.12) e (3.12a), em termos da função corrente, podem ser resumidos na seguinte forma:

$$[K_\psi]^e \{\psi\}^e = -\{R_\psi\}^e , \qquad (3.28)$$

onde:

$$[K_\psi]^e = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} , \qquad (3.29)$$

$$\{\psi\}^e = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix} , \qquad (3.30)$$

$$\{R_\psi\}^e = -\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} . \qquad (3.31)$$

3.3 - Forma Matricial para os Elementos em Termos de Temperatura Adimensional

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi=\theta$, $Q_\phi=Q_\theta$, $\lambda=1$ e $\delta=1/Pr$, resulta:

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}\right)+Q_\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\ , \tag{3.32}$$

onde Q_θ é dado pela equação (2.25a), como sendo:

$$Q_\theta=\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial X}\ . \tag{3.32a}$$

No apêndice A4 mostra-se que as equações (3.32) e (3.32a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left([K_\theta]^e+\frac{2}{\Delta\tau}[C]^e\right)\{\theta\}^e_{novo}=\frac{2}{\Delta\tau}[C]^e\{\theta\}^e_{velho}-\{R_\theta\}^e\ . \tag{3.33}$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.33) são dados pelas equações (A4.12), (A4.8c) e (A4.8d), na forma:

$$[C]^e=\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

$$[K_\theta]^e=\frac{1}{Pr}\int_{V^e}[B^e]^T[B^e]dV\ , \tag{3.35}$$

$$\{R_\theta\}^e=-\int_{V^e}[N^e]^T Q^e_\theta\,dV+\int_{S^e}[N^e]^T q^e dS\ . \tag{3.36}$$

A resolução da equação (3.35) é obtida de modo semelhante àquele da equação (3.21), resultando:

$$[K_\theta]^e=\frac{1}{4\Delta Pr}\begin{bmatrix}b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k\\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k\\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k\end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

A função Q_θ dada pela equação (3.32a), pode ser escrita para o elemento da seguinte forma:

$$Q_\theta^e = \left(\frac{\partial \Psi^e}{\partial X}\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi^e}{\partial Y}\frac{\partial \theta^e}{\partial X}\right) . \tag{3.38}$$

As funções Ψ^e e θ^e do elemento podem ser assim escritas:

$$\Psi^e = [N^e]\ \{\Psi\}^e , \tag{3.39}$$

$$\theta^e = [N^e]\ \{\theta\}^e . \tag{3.40}$$

Das equações (3.10a) e (3.10b) resulta que:

$$\frac{\partial \Psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\Psi_i + b_j\Psi_j + b_k\Psi_k\right) , \tag{3.41a}$$

$$\frac{\partial \Psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\Psi_i + c_j\Psi_j + c_k\Psi_k\right) , \tag{3.41b}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i\theta_i + b_j\theta_j + b_k\theta_k\right) , \tag{3.41c}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i\theta_i + c_j\theta_j + c_k\theta_k\right) , \tag{3.41d}$$

Substituindo as equações (3.41) em (3.38) e rearranjando vem:

$$Q_\theta^e = \frac{1}{4\Delta^2}\left[\left(b_i\Psi_i+b_j\Psi_j+b_k\Psi_k\right).\left(c_i\theta_i+c_j\theta_j+c_k\theta_k\right)-\left(c_i\Psi_i+c_j\Psi_j+c_k\Psi_k\right).\right.$$

$$\left.\left(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k\right)\right]. \tag{3.42}$$

Da equação (3.36), observando-se que Q_θ^e é constante dentro de cada elemento e que $q^e=0$, vem que:

$$\{R_\theta\}^e = -Q_\theta^e \int_{V^e} [N^e]^T \, dV \, . \tag{3.43}$$

Considerando que dV=1.dS, de (3.43), vem que:

$$\{R_\theta\}^e = -Q_\theta^e \int_{S^e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dS \, . \tag{3.44}$$

Das equações (3.26) e (3.44), vem que:

$$\{R_\theta\}^e = -\frac{\Delta . Q_\theta^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \tag{3.45}$$

Substituindo (3.42) em (3.45) vem:

$$\{R_\theta\}^e = [-\frac{1}{12\Delta}(b_i\Psi_i+b_j\Psi_j+b_k\Psi_k).(c_i\theta_i+c_j\theta_j+c_k\theta_k) + \frac{1}{12\Delta}(c_i\Psi_i+$$

$$+c_j\Psi_j+c_k\Psi_k).(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \tag{3.46}$$

Definem-se os seguintes parâmetros:

$$A_1 = \frac{1}{12\Delta}(b_i\Psi_i+b_j\Psi_j+b_k\Psi_k) \, , \tag{3.47a}$$

$$A_2 = \frac{1}{12\Delta}(c_i\Psi_i+c_j\Psi_j+c_k\Psi_k) \, , \tag{3.47b}$$

$$B_1 = (c_i\theta_i+c_j\theta_j+c_k\theta_k) \, , \tag{3.47c}$$

$$B_2 = (b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k) \, , \tag{3.47d}$$

$$D_1 = A_1B_1 - A_2B_2 \ . \qquad (3.47e)$$

Substituindo as equações (3.47) em (3.46), resulta:

$$\{R_\theta\}^e = -\begin{Bmatrix} A_1B_1 - A_2B_2 \\ A_1B_1 - A_2B_2 \\ A_1B_1 - A_2B_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \ . \qquad (3.48)$$

Os resultados obtidos para as equações (3.32) e (3.32a), em termos da temperatura adimensional, podem ser resumidos na seguinte forma:

$$([K_\theta]^e + \frac{2}{\Delta\tau}\,[C]^e)\{\theta\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\,[C]^e\{\theta\}^e_{velho} - \{R_\theta\}^e \ , \qquad (3.49)$$

onde:

$$[K_\theta]^e = \frac{1}{4\Delta r}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} \ , \qquad (3.50)$$

$$[C]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \qquad (3.51)$$

$$\{R_\theta\}^e = -\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \ . \qquad (3.52)$$

3.4 - Forma Matricial para os Elementos em Termos da Vorticidade

Da equação (3.1) fazendo-se $\phi=\omega$, $Q_\phi=Q$, $\lambda=1$ e $\delta=1$, resul

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial Y^2}+Q_\omega=\frac{\partial\omega}{\partial\tau} \quad , \tag{3.53}$$

onde Q_ω é dado pela equação (2.26a), como sendo:

$$Q_\omega=\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\omega}{\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\omega}{\partial X}+\frac{Gr}{2}\left(\cos\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial X}-\operatorname{sen}\alpha\,\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right) . \tag{3.53a}$$

No apêndice A4 é mostrado que as equações (3.53) e (3.53a) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\left([K_\omega]^e+\frac{2}{\Delta\tau}\,[C]^e\right)\{\omega\}^e_{novo}=\frac{2}{\Delta\tau}\,[C]^e\,\{\omega\}^e_{velho}-\{R_\omega\}^e . \tag{3.54}$$

Os coeficientes das matrizes na equação (3.54) são dados pelas equações (A4.12), (A4.8c) e (A4.8d), e são obtidos de forma semelhante à apresentada no item 3.3, como sendo:

$$[K_\omega]^e=\frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_k+c_ic_k \\ b_jb_i+c_jc_i & b_jb_j+c_jc_j & b_jb_k+c_jc_k \\ b_kb_i+c_kc_i & b_kb_j+c_kc_j & b_kb_k+c_kc_k \end{bmatrix} , \tag{3.55}$$

$$[C]^e=\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{3.56}$$

$$\{R_\omega\}^e=-\int_{S^e}[N^e]^T\,Q^e_\omega\,dS . \tag{3.57}$$

A função Q^e_ω pode ser escrita como sendo:

$$Q^e_\omega=\frac{\partial\Psi^e}{\partial X}\frac{\partial\omega^e}{\partial Y}-\frac{\partial\Psi^e}{\partial Y}\frac{\partial\omega^e}{\partial X}+\frac{Gr}{2}\cos\alpha\,\frac{\partial\theta^e}{\partial X}-\frac{Gr}{2}\operatorname{sen}\alpha\,\frac{\partial\theta^e}{\partial Y} . \tag{3.58}$$

Da equação (3.10) tem-se que:

$$\frac{\partial \Psi^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \Psi_i + b_j \Psi_j + b_k \Psi_k) , \tag{3.59a}$$

$$\frac{\partial \Psi^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \Psi_i + c_j \Psi_j + c_k \Psi_k) , \tag{3.59b}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) , \tag{3.59c}$$

$$\frac{\partial \theta^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) , \tag{3.59d}$$

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial X} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \omega_i + b_j \omega_j + b_k \omega_k) , \tag{3.59e}$$

$$\frac{\partial \omega^e}{\partial Y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) . \tag{3.59f}$$

Das equações (3.26) e (3.57), observando que Q_ω^e é constante para o elemento, vem que:

$$\{R_\omega\}^e = -Q_\omega^e \int_{S^e} [N^e]^T \, dS = -\frac{\Delta Q_\omega^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \tag{3.60}$$

Definem-se os seguintes parâmetros:

$$A_3 = \frac{1}{4\Delta^2} (b_i \Psi_i + b_j \Psi_j + b_k \Psi_k)(c_i \omega_i + c_j \omega_j + c_k \omega_k) , \tag{3.60a}$$

$$A_4 = \frac{1}{4\Delta^2} (c_i \Psi_i + c_j \Psi_j + c_k \Psi_k)(b_i \omega_j + b_j \omega_j + b_k \omega_k) , \tag{3.60b}$$

$$B_3 = \frac{Gr}{4\Delta} \cos\alpha (b_i \theta_i + b_j \theta_j + b_k \theta_k) , \tag{3.60c}$$

$$B_4 = \frac{Gr}{4\Delta} \operatorname{sen}\alpha (c_i \theta_i + c_j \theta_j + c_k \theta_k) , \tag{3.60d}$$

$$D_2 = -\frac{\Delta Q_\omega^e}{3} = -\frac{\Delta}{3}(A_3 - A_4 + B_3 - B_4) \quad . \tag{3.60e}$$

Das equações (3.60) e (3.60a) vem que:

$$\{R_\omega\}^e = \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} . \tag{3.61}$$

Os resultados obtidos para as equações (3.53) e (3.53a) podem ser escritos na seguinte forma matricial:

$$([K_\omega]^e + \frac{2}{\Delta\tau}[C]^e)\{\omega\}^e_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}[C]^e \{\omega\}^e_{velho} - \{R_\omega\}^e \quad , \tag{3.62}$$

onde:

$$[K_\omega]^e = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} , \tag{3.63}$$

$$[C]^e = \frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \tag{3.64}$$

$$\{R_\omega\}^e = \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} . \tag{3.65}$$

3.5 - Algoritmo de Solução

Nos itens 3.2, 3.3 e 3.4 foram obtidas as equações para

os elementos em termos da função corrente, temperatura adimensional e vorticidade. Os apêndices A3 e A4 mostram como as matrizes globais podem ser formadas a partir das equações dos elementos (3.28), (3.49) e (3.62), das quais podem ser escritas, respectivamente, as seguintes matrizes globais:

$$[K_\psi]\ \{\psi\} = -\{R_\psi\}\ , \tag{3.66}$$

$$([K_\theta] + \frac{2}{\Delta\tau}\ [C])\ \{\theta\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\ [C]\ \{\theta\}_{velho} - \{R_\theta\}, \tag{3.67}$$

$$([K_\omega] + \frac{2}{\Delta\tau}\ [C])\ \{\omega\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}\ [C]\ \{\omega\}_{velho} - \{R_\omega\}. \tag{3.68}$$

As equações (3.66), (3.67) e (3.68) podem ser escritas, respectivamente, de forma mais compacta como:

$$[\tilde{K}_\psi]\ \{\psi\}^\tau = \tilde{R}_\psi(\omega^{\tau-\Delta\tau})\ , \tag{3.66a}$$

$$[\tilde{K}_\theta]\ \{\theta\}^\tau = \{\tilde{R}_\theta(\psi^\tau, \theta^{\tau-\Delta\tau})\}\ , \tag{3.67a}$$

$$[\tilde{K}_\omega]\ \{\omega\}^\tau = \{\tilde{R}_\omega(\psi^\tau, \theta^\tau, \omega^{\tau-\Delta\tau})\ . \tag{3.68a}$$

As equações (3.66a), (3.67a) e (3.68a) formam um sistema de equações acopladas. Estas equações serão resolvidas individualmente numa sequência que será comentada brevemente.

As matrizes $[\tilde{K}_\psi]$, $[\tilde{K}_\theta]$ e $[\tilde{K}_\omega]$ terão os seus coeficientes mantidos constantes, pois o incremento de tempo $\Delta\tau$ será um parâmetro que assume um valor fixo para cada corrida. Essas matrizes são simétricas e de banda. Com o objetivo de reduzir a área de armazenamento e o tempo de cálculo computacional, os coeficientes da matriz que compõem a diagonal principal e as diagonais

superiores não nulas, foram armazenadas na forma de uma matriz coluna.

As matrizes $\{\Psi\}^{\tau}$, $\{\theta\}^{\tau}$ e $\{\omega\}^{\tau}$ são incógnitas e devem ser calculadas para cada tempo τ. A matriz $\{\tilde{R}_{\Psi}(\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ possui coeficientes que são dependentes da vorticidade ω, sendo essa avaliada para o tempo $\tau-\Delta\tau$. As matrizes $\{\tilde{R}_{\theta}(\Psi^{\tau},\theta^{\tau-\Delta\tau})\}$ e $\{\tilde{R}_{\omega}(\Psi^{\tau},\theta^{\tau},\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ têm interpretações semelhantes à anterior e indicam a dependência das variáveis Ψ, θ e ω com o tempo para a qual elas devem ser avaliadas.

Um programa computacional foi desenvolvido com o objetivo de resolver as equações (3.66a), (3.67a) e (3.68a) para obter as distribuições das funções Ψ, θ, ω e calcular o número de Nusselt local e médio em função dos parâmetros discutidos no item 2.3.

A figura 3.3 mostra o fluxograma do programa computacional desenvolvido. Os passos da solução numérica e alguns detalhes do programa computacional são apresentados em seguida, na sequência dos blocos do fluxograma (vide figura 3.3).

1) Leitura de dados (bloco 1)

Os dados lidos inicialmente no programa computacional são:

a) número de pontos nodais; b) número de elementos; c) número máximo de iterações; d) fator de concentração; e) fator de truncamento ; f) ângulo de inclinação; g) número de Prandtl; h) número de Grashof.

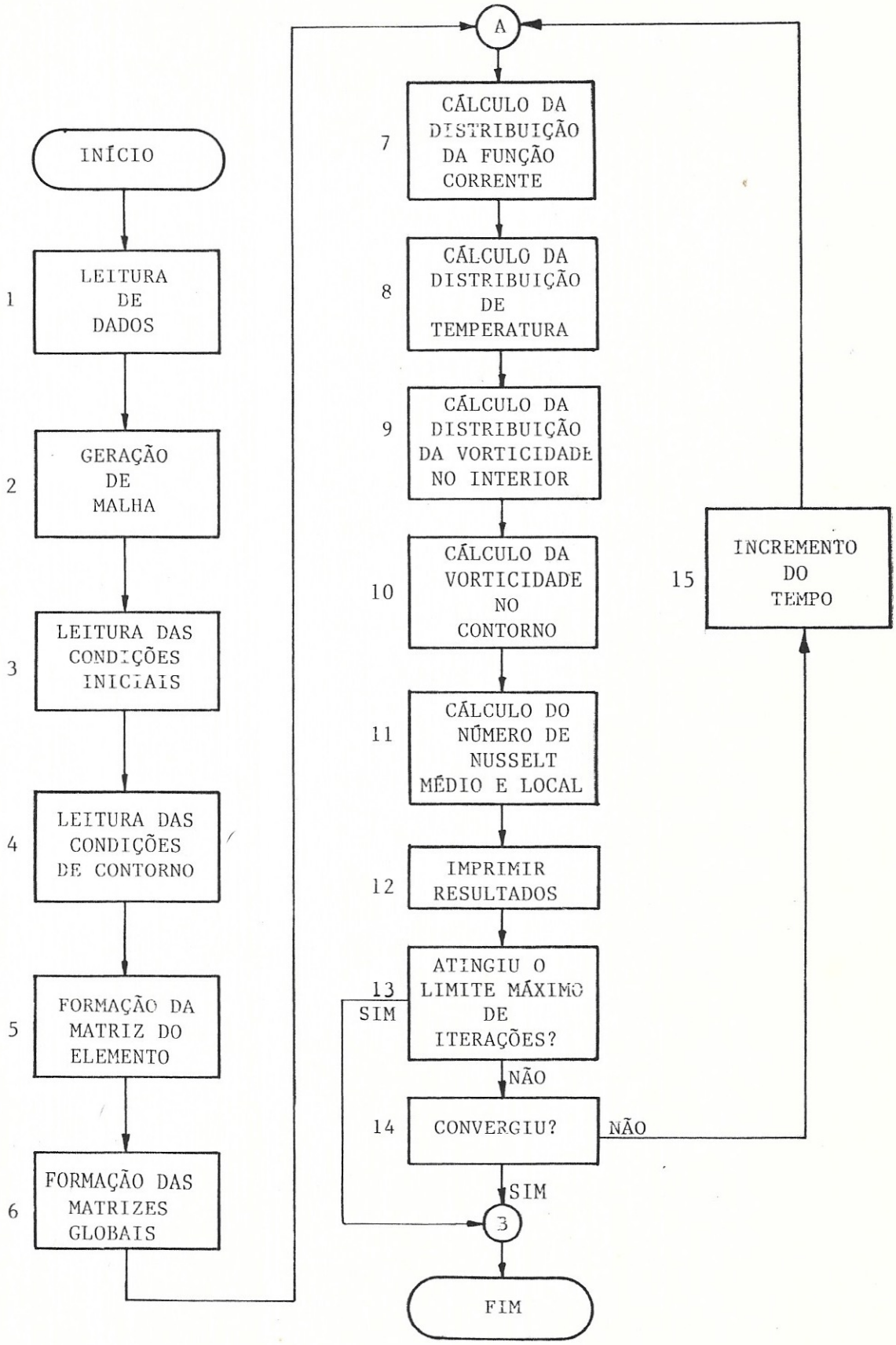


Figura 3.3 - Fluxograma do programa computacional

2) Geração de malha (bloco 2)

O programa computacional possui uma sub-rotina para geração de malha com elementos triangulares. Esta sub-rotina calcula as coordenadas dos pontos nodais, a topologia dos elementos, o número de pontos nodais e o número de elementos. Os resultados obtidos podem ser utilizados para desenhar, com auxílio do "PLOTTER" do computador, a malha da geometria analisada.

É necessário fornecer como dados de entrada para esta sub-rotina: a) o número de pontos nodais no contorno; b) as coordenadas desses pontos nodais. Com a mudança desses dados de entrada torna-se possível modificar a distribuição dos elementos do domínio, o que permite aumentar ou reduzir o número de elementos em certas regiões, conforme a conveniência. De modo geral, observa-se melhor estabilidade na solução numérica quando as seguintes regras são seguidas:

a) Os elementos triangulares equiláteros devem ser preferidos, sempre que possível, devendo ser evitados triângulos com lados muito diferentes;

b) Os elementos devem ser menores nas regiões onde existem maiores gradientes das grandezas analisadas.

3) Leitura das condições iniciais (bloco 3)

De acordo com a equação (2.23) a função corrente, a temperatura adimensional e a vorticidade assumem no início o valor zero em todo o domínio.

4) Leitura das condições de contorno (bloco 4)

Os dados lidos para as condiçẽos de contorno são:

a) número de pontos nodais com temperaturas conhecidas;

b) numeração dos pontos nodais com temperaturas conhecidas;

c) valores das temperaturas para os pontos nodais correspondentes às superfícies fria e quente;

d) número de pontos nodais sobre o contorno;

e) numeração dos pontos nodais sobre o contorno;

f) valor da função corrente para os pontos nodais correspondentes do contorno. A função corrente assumirá o valor zero no contorno, sendo este valor mantido inalterado;

g) valor da vorticidade para os pontos nodais correspondentes do contorno. No início, para o tempo $\tau=0$, a vorticidade é nula no contorno. Para os tempos seguintes a vorticidade no contorno foi calculada pela equação (2.22a), como será discutido no bloco 10.

5) Formação das matrizes dos elementos

As matrizes dos elementos são formadas pelas equações: (3.29), (3.30), (3.31), (3.50), (3.51), (3.52), (3.63), (3.64) e (3.65).

6) Formação das matrizes globais (bloco 6)

As matrizes globais são formadas pelas equações: (3.66), (3.67) e (3.68) ou na sua forma compacta (3.66a), (3.67a) e (3.68a).

7) Cálculo da distribuição da função corrente (bloco 7)

A distribuição da função corrente Ψ para o tempo τ é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela

equação (3.66a). A matriz $\{\tilde{R}_{\Psi}(\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ tem seus coeficientes dependentes da vorticidade ω, a qual deve ser avaliada na iteração anterior, isto é, para o tempo $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.66a) é necessário impor a condição de contorno dada pela equação (3.1a), isto é, a função corrente assume o valor nulo junto ao contorno. A condição de contorno expressa pela equação (3.1b), sendo natural, não precisa ser aplicada.

8) Cálculo da distribuição de temperatura (bloco 8)

A distribuição de temperatura θ para o tempo é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.67a). Os coeficientes da matriz $\{\tilde{R}_{\theta}(\Psi^{\tau},\theta^{\tau-\Delta\tau})\}$ dependem das funções Ψ e θ, onde Ψ e θ devem ser avaliados, respectivamente, para o tempo τ e $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.67a) a condição de contorno dada por (3.1a), foi imposta da seguinte forma: a) sobre a superfície S_1 do contorno $\theta=1$; b) sobre a superfície S_2 do contorno $\theta=-1$. A condição de contorno (3.1b) não necessita ser aplicada pois é uma condição de contorno natural.

9) Cálculo da distribuição da vorticidade no interior (bloco 9)

A distribuição da vorticidade no interior, para o tempo τ, é obtida resolvendo-se o sistema de equações lineares dado pela equação (3.68a). Os coeficientes da matriz $\{\tilde{R}_{\omega}(\Psi^{\tau},\theta^{\tau},\omega^{\tau-\Delta\tau})\}$ dependem de Ψ, θ e ω, onde Ψ e θ devem ser avaliados para o tempo τ e ω para o tempo $\tau-\Delta\tau$.

Na solução da equação (3.68a) consideram-se conhecidas as vorticidades nos pontos nodais do contorno.

10) Cálculo da vorticidade no contorno (bloco 10)

As vorticidades nos pontos nodais do contorno são calculadas pela equação (2.22a). Onde Ψ_o é o valor da função corrende distante Δn do contorno e avaliada para o tempo τ.

11) Cálculo do número de Nusselt local e médio (bloco 11)

Os números de Nusselt locais para as superfícies S_1 e S_2 podem ser calculados, respectivamente, pelas equações (2.27) e (2.28) e os números de Nusselt médios para as superfícies S_1 e S_2 podem ser calculados pela equação (2.29).

Substituindo (3.11a) e (3.11b) em (2.27) e (2.28), resulta:

i) Número de Nusselt local para a superfície quente S_1:

$$Nu_L = \frac{1}{4\Delta} \sqrt{(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k)^2+(c_i\theta_i+c_j\theta_j+c_k\theta_k)^2} \Big|_{S_1} , \qquad (3.69)$$

ii) Número de Nusselt local para a superfície fria S_2:

$$Nu_L = -\frac{1}{4\Delta} \sqrt{(b_i\theta_i+b_j\theta_j+b_k\theta_k)^2} \Big|_{S_2} . \qquad (3.70)$$

O número de Nusselt médio para a superfície S (onde S pode ser S_1 ou S_2) pode ser calculado pela equação:

$$Nu = \frac{1}{S} \int_S Nu_L \Big|_S \, dS . \qquad (3.71)$$

A integral da equação (3.71) foi calculada através da regra de Simpson.

12) Imprimir resultados (bloco 12)

Os resultados para as distribuições de Ψ, θ e ω, bem como os números de Nusselt local e médio podem ser obtidos para o tempo τ.

13) Verificação do limite máximo de iterações (bloco 13)

Neste ponto é feita a verificação do número de iterações realizadas. Quando o número de iterações atinge o limite máximo estabelecido, o programa é interrompido.

14) Verificação de convergência

Considera-se que houve convergência ou que se atingiu o regime permanente quando se verificar o seguinte critério:

$$\sum_{I=1}^{n} \left[Nu^{\tau} - Nu^{\tau-\Delta\tau} \right] \leq 10^{-4} \quad , \tag{3.72}$$

onde a somatória representa a soma dos n últimos valores da iteração. Na maioria dos casos estudados adotou-se $100 \leq n \leq 200$.

15) Incremento do tempo (bloco 15)

Se o critério dado pela equação (3.72) for obedecido, o processo de cálculo é interrompido. Caso contrário, o tempo é incrementado e o processo de cálculo é re-iniciado a partir de A. (vide figura 3.3).

O programa computacional desenvolvido foi processado no computador HP-1000 da Escola Federal de Engenharia de Itajubá. No capítulo seguinte são apresentados os testes do programa para as geometrias quadrada e trapezoidal bem como os resultados para

os casos 1 e 2 da geometria do coletor concentrador.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 - Introdução

Este capítulo apresenta os resultados referentes a convecção natural, obtidos pelo programa computacional, que utiliza o método de elementos finitos para solução das equações de conservação.

Inicialmente, procura-se testar o programa computacional para cavidades de geometria quadrada e trapezoidal, comparando-se os resultados com aqueles publicados na literatura. Após a avaliação do teste, o programa computacional é utilizado para obter os resultados para as geometrias dos casos 1 e 2 do presente trabalho.

4.2 - Comparação de Resultados para Geometria Quadrada

A figura 4.1 mostra a cavidade quadrada e as condições de contorno utilizadas no teste do programa computacional. A superfície isotérmica vertical à esquerda é mantida a uma temperatura fria T_c; a superfície isotérmica vertical à direita é mantida a uma temperatura quente T_h e as superfícies horizontais são isoladas termicamente.

A figura 4.2 mostra a malha utilizada no presente trabalho para se obter os resultados da geometria quadrada.

A figura 4.3 mostra a influência do número de elementos no número de Nusselt médio relativo à geometria e condições de contorno dadas pela figura 4.1, considerando Gr=20.000 e

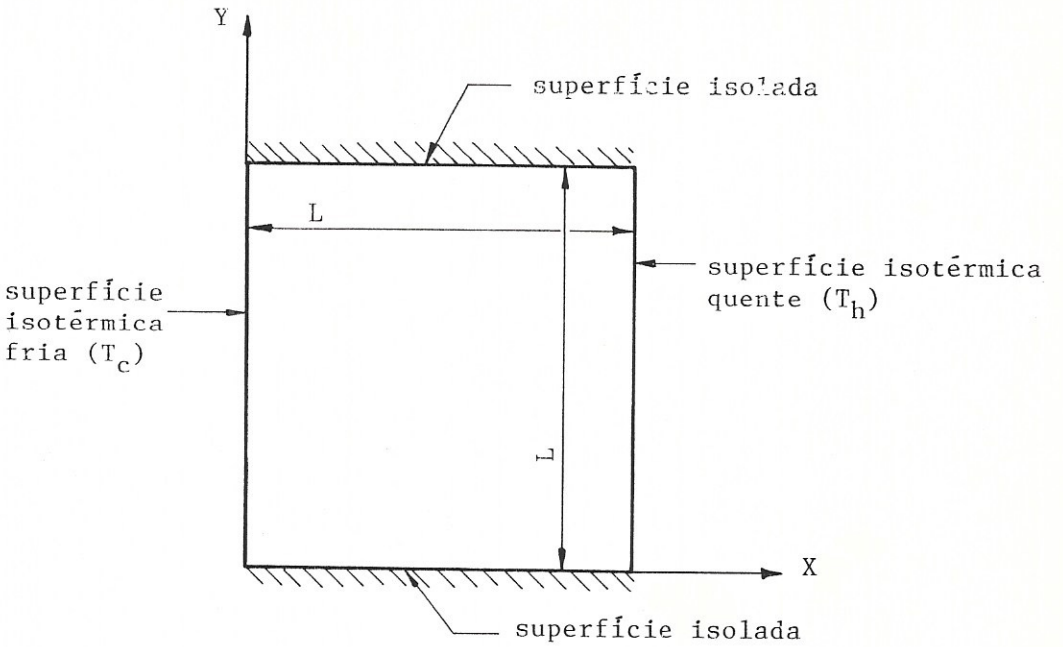


Figura 4.1 - Geometria quadrada e as condições de contorno

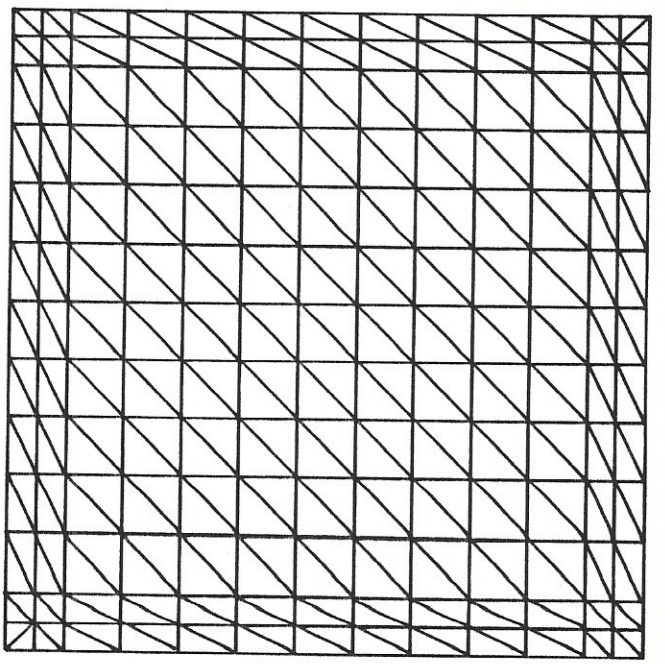


Figura 4.2 - Malha utilizada para a geometria quadrada

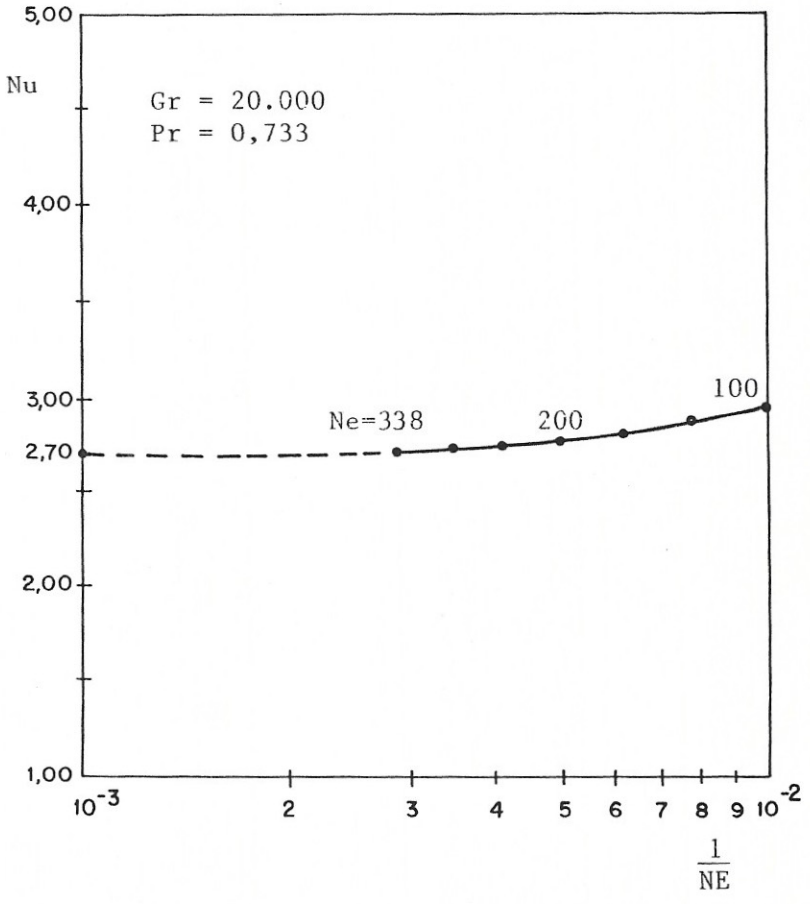


Figura 4.3 - Influência do número de elementos no número de Nusselt médio

e Pr=0,733. Observa-se na figura 4.3 que para malhas com número de elementos superiores a 200 o número de Nusselt médio varia muito pouco e a extrapolação para um número infinito de elementos conduz ao valor do número de Nusselt 2,70.

Com base na figura 4.3 escolheu-se a malha mostrada na figura 4.2, contendo 388 elementos. A escolha levou em conta a área de memória requerida e o custo computacional.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram a comparação dos resultados do número de Nusselt, aqui obtidos, com aqueles de outros trabalhos.

A tabela 4.1 mostra a comparação dos resultados do número de Nusselt médio em relação ao número de Nusselt de outros trabalhos, considerando Gr=20.000 e Pr=0,733. Os desvios mostrados na tabela 4.1 são os seguintes: 0,77% em relação ao valor obtido por Menon [20] que utilizou o método de elementos finitos com uma malha de 100 elementos; 0,69% em relação ao valor de Ozoe e outros [15], sendo este valor experimental; 0,95% em relação ao valor obtido por Tabarrok e outros [23] que utilizaram o método de elementos finitos com uma malha de 200 elementos; 5,32% e 7,53% em relação aos valores obtidos por Wilkes e outros [3] que utilizaram o método de diferenças finitas com malhas de 10x10 e 20x20, respectivamente.

A tabela 4.2 mostra a comparação dos resultados do número de Nusselt médio do presente trabalho com os valores obtidos por Figueredo [24] e Wong [25], para número de Grashof na faixa de $34,11 \times 10^3$ a $341,07 \times 10^3$ e número de Prandtl 0,733. Figueredo [24] e Wong [25] usaram, para solução das equações de conservação, o método de diferenças finitas. Figueredo [24] usou uma

Referência	Nu	desvio	Método Utilizado
Presente Trabalho	2,721	-	Elementos finitos (338 elementos)
Menon [20]	2,70	0,77%	Elementos finitos (100 elementos)
Ozoe e outros [15]	2,74	0,69%	Valor Experimental
Tabarrok e outros [23]	2,695	0,95%	Elementos finitos (200 elementos)
Wilkes e outros [3]	2,874	5,32%	Diferenças finitas (10 x 10)
Wilkes e outros [3]	2,516	7,53%	Diferenças finitas (20 x 20)

Tabela 4.1 - Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1; Gr=20.000; Pr=0,733.

Referência	[24]	Presente Trabalho		[25]	Presente Trabalho	
Gr [X 10^{-3}]	Nu_1 M21	Nu e	$\frac{Nu - Nu_1}{Nu}$ [%]	Nu_2 M22	Nu e	$\frac{Nu - Nu_2}{Nu}$ [%]
34,11	2,884	3,227	10,63	2,972*	3,227	7,90
60	3,468	3,864	10,25	-	-	-
100	4,160	4,554	8,65	-	-	-
136,43	4,686	5,027	6,78	4,51	5,027	10,28
341,07	-	-	-	5,92	6,649	10,96

Tabela 4.2 - Comparação de resultados para a geometria quadrada da figura 4.1; Pr=0,733.

M21 - Resultado para Malha 21x21
M22 - Resultado para Malha 22x22
* - Resultado para Malha 42x42
e - Método de elementos finitos 338 elementos

malha de 21x21 e Wong [24] usou duas malhas: uma de 42x42 para Grashof $34,11x10^3$ e a outra de 22x22 para Grashof de $60x10^3$ a $341,07x10^3$. O maior desvio do número de Nusselt médio foi 10,96% para $Gr=341,07x10^3$ em relação ao valor obtido por Wong [25].

Apesar dos desvios da tabela 4.2 serem maiores que os desvios da tabela 4.1, no geral, os resultados são considerados bons. Assim, o teste do programa computacional é aceitável.

No item seguinte será apresentado o teste do programa computacional para cavidade trapezoidal.

4.3 - Comparação de Resultados para Geometria Trapezoidal

Os resultados do teste do programa computacional para cavidade trapezoidal são comparados com os resultados dos trabalhos de Iyican e outros [17,18]. Eles realizaram um estudo teórico e experimental da convecção natural em cavidade trapezoidal. O estudo teórico [17] utilizou o método de Galerkin para resolver as equações de conservação. A figura 4.4 mostra a geometria e as condições de contorno utilizadas. As superfícies laterais são isoladas termicamente, a superfície inferior é isotérmica mantida a uma temperatura quente T_h e a superfície superior é isotérmica mantida a uma temperatura fria T_c. O ângulo de inclinação é medido a partir da horizontal.

A figura 4.5 mostra a malha utilizada no presente trabalho, com 340 elementos, para se obter os resultados do número de Nusselt médio na superfície quente.

O número de Nusselt médio em função do número de Rayleigh para ângulos de inclinação de 0°, 60°, 75° e 90° é mostra

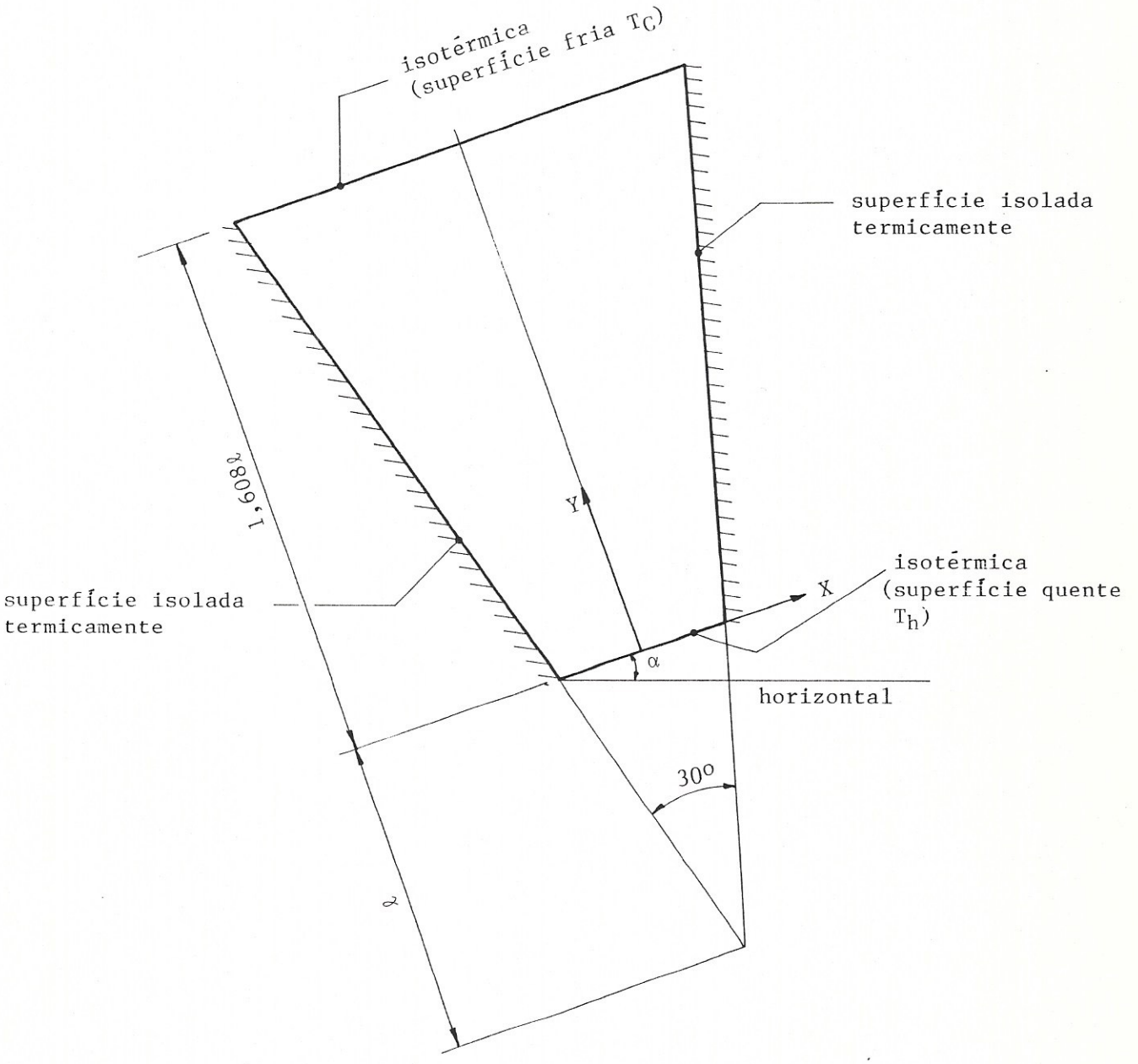


Figura 4.4 - Geometria trapezoidal e condições de contorno

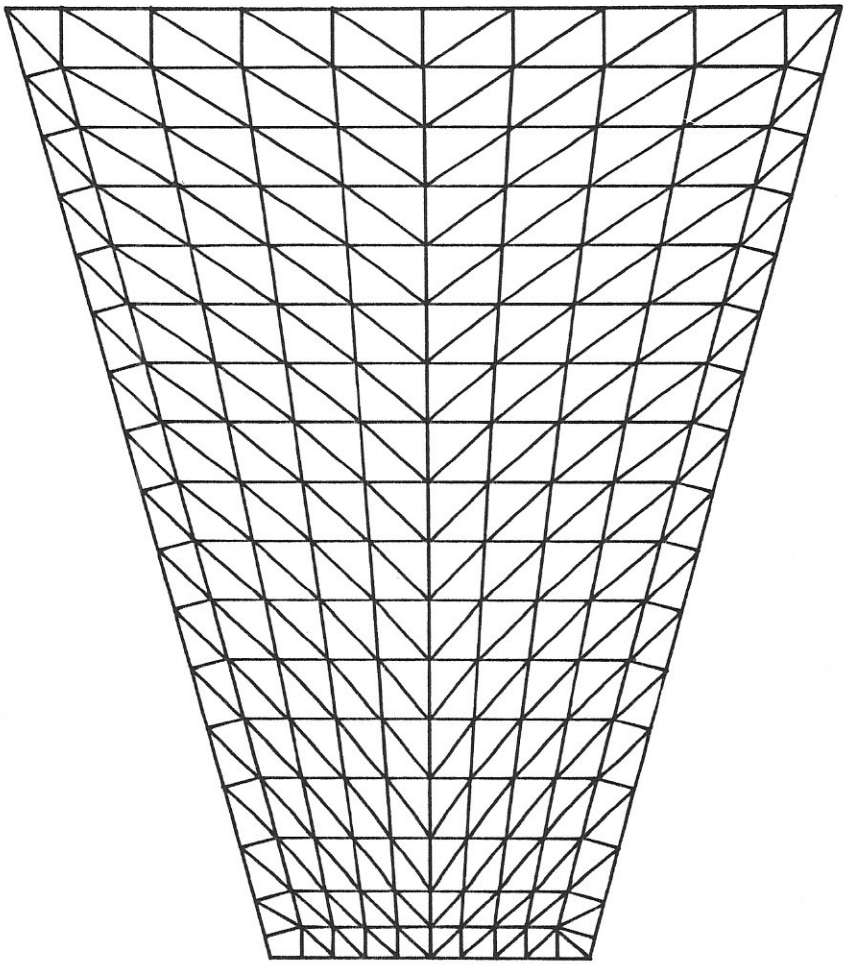


Figura 4.5 - Malha utilizada para a geometria trapezoidal com 340 elementos.

do na figura 4.6. Nessa figura, se faz a comparação dos resultados teóricos e experimentais de Iyican [17,18], com os resultados do presente trabalho. Os resultados teóricos do presente trabalho são obtidos para número de Rayleigh na faixa de $7,33x10^3$ a $7,33x10^5$.

Os resultados teóricos e experimentais do número de Nusselt médio de Iyican [17,18] comparados com os obtidos no presente trabalho, apresentam melhor concordância para o ângulo de 90^o. Para todos os ângulos de inclinação apresentados na figura 4.6, observa-se que os números de Nusselt médio, do presente trabalho, concordam melhor com os resultados experimentais de Iyican [18] a medida que o número de Rayleigh aumenta.

Iyican [17] em seu estudo teórico não apresentou resultados do número de Nusselt para o ângulo de inclinação de 0^o. Segundo ele existe um escoamento tridimensional para pequenos ângulos de inclinação e os resultados teóricos do modelo bidimensional só apresentam boa concordância, como os resultados experimentais, na região onde o escoamento é bidimensional.

Iyican [18] em seu trabalho experimental apresentou uma equação, obtida dos resultados experimentais, para o número de Nusselt médio da forma:

$$Nu = C\ Ra^{0,375} \qquad \text{para} \qquad Ra \geq 10^4 \qquad (4.1)$$

onde C depende do ângulo de inclinação conforme a tabela 4.3.

Uma comparação dos resultados do número de Nusselt, obtidos da equação (4.1), com os resultados do presente trabalho, é apresentada na tabela 4.4, considerando o número de Grashof na faixa de 10^4 a 10^6 e ângulos de inclinação na faixa de 0^o a

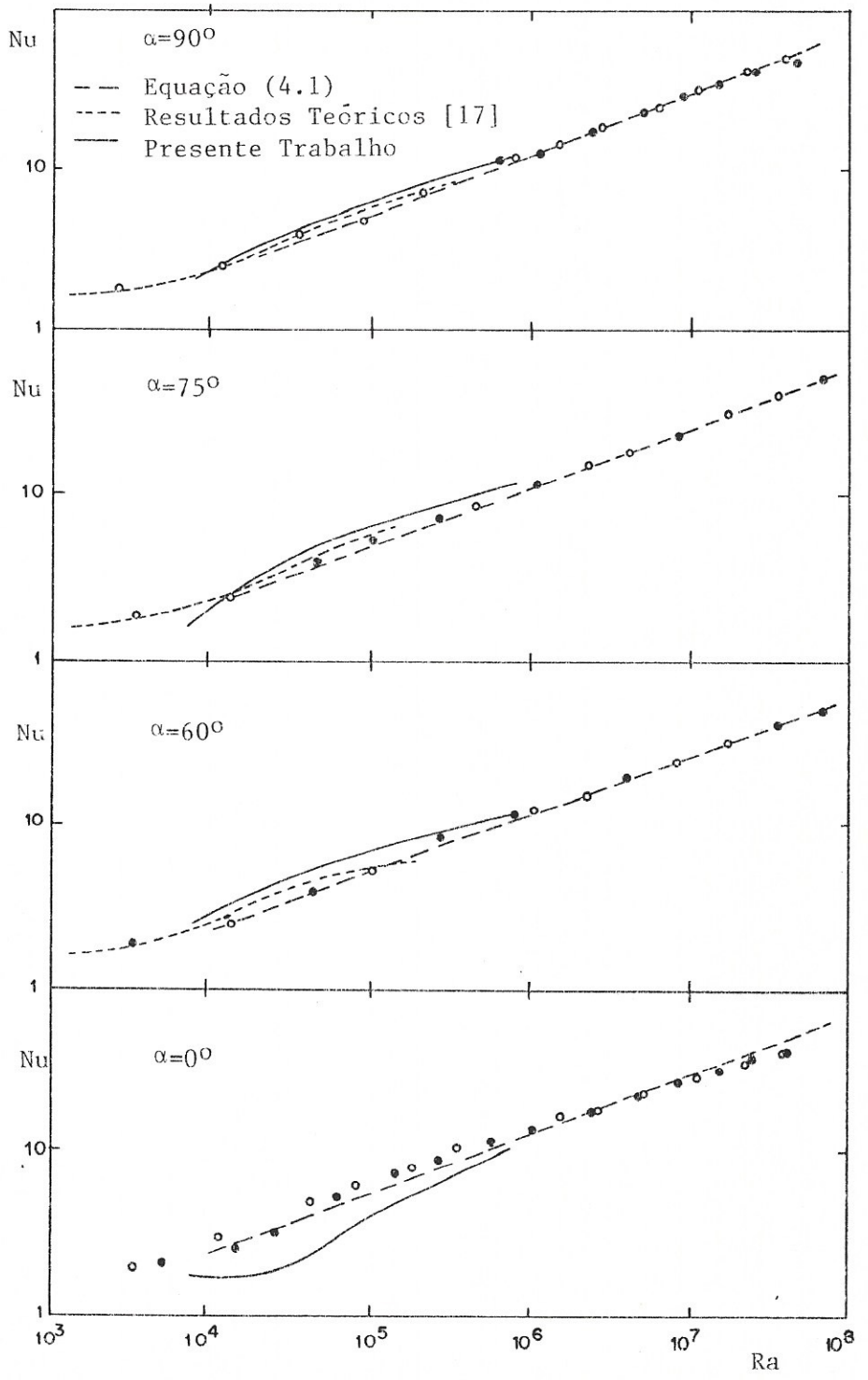


Figura 4.6 - Número de Nusselt médio em função do número de Rayleigh para a geometria trapezoidal.
o - superfície lateral de madeira,
● - superfície lateral de alumínio

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
C	0,074	0,076	0,076	0,073	0,073	0,073	0,070

Tabela 4.3 - Constante C da equação 4.1

α	Gr	Nu calculado pela eq.(4.1)	Nu presente trabalho	desvio %
0°	100 000	4,939	3,255	34,09
	500 000	9,031	8,619	4,56
	1 000 000	11,712	11,540	1,46
15°	100 000	5,072	5,281	3,95
	500 000	9,275	8,045	13,26
	1 000 000	12,028	9,667	19,62
30°	100 000	5,072	5,800	12,55
	500 000	9,275	9,094	1,95
	1 000 000	12,028	10,980	8,71
45°	100 000	4,872	6,154	20,83
	500 000	8,909	9,788	8,98
	1 000 000	11,554	11,836	2,38
60°	100 000	4,872	6,357	29,41
	500 000	8,909	10,341	13,84
	1 000 000	11,554	12,541	7,87
75°	100 000	4,872	6,330	23,03
	500 000	8,909	10,773	17,30
	1 000 000	11,554	13,270	12,93
90°	100 000	4,672	5,823	19,76
	500 000	8,543	10,463	18,35
	1 000 000	11,079	13,011	14,84

Tabela 4.4 - Comparação do presente trabalho com a referência [18], para geometria trapezoidal com Pr=0,733.

90^{o}.

A tabela 4.4 mostra que os desvios máximo e mínimo ocorrem para o ângulo de 0^{o}, sendo estes 34,09% e 1,46%, respectivamente. Para os ângulos de inclinação de 0^{o}, 45^{o}, 60^{o}, 75^{o} e 90^{o}, observa-se que os desvios decrescem à medida que o número de Grashof aumenta e para o ângulo de inclinação de 15^{o} os desvios crescem à medida que o número de Grashof aumenta. Para o ângulo de inclinação 30^{o} os desvios decrescem para número Grashof de 10^{5} a $5x10^{5}$ e crescem para número Grashof de $5x10^{5}$ a 10^{6}.

Os resultados teóricos de Iyican [17] apresentam boa concordância com a experiência para ângulos de inclinação de 30^{o} a 90^{o}; porém, para ângulos de inclinação menores que 30^{o} não apresentaram boa concordância.

Os resultados teóricos do presente trabalho em geral concordam bem com os resultados experimentais de Iyican [18], exceto para ângulo de inclinações pequeno e com baixos números de Rayleigh.

O programa computacional desenvolvido mostrou-se satisfatório para as geometrias quadrada e trapezoidal, sendo a seguir utilizado para se obter os resultados para a geometria dos coletores concentradores.

4.4 - Resultados Teóricos dos Coletores Concentradores

Os resultados teóricos de transferência de calor por convecção natural no interior de coletores concentradores com absorvedor cilíndrico são tratados neste item. São analisados dois casos de coletores concentradores, como mostram as figuras 1.1 e 1.2. Considera-se o regime não permanente e permanente e o es

coamento como sendo bidimensional.

Os capítulos 2 e 3 apresentam toda a formulação teórica, com as condições de contorno e a solução das equações de conservação, obtidas pelo método de elementos finitos.

O programa computacional testado nos itens 4.1 e 4.2 é utilizado para se obter os resultados da função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e os números de Nusselt local e médio. Considera-se em ambos os casos 1 e 2, o número de Grashof na faixa de 10^5 a 10^6, o número de Prandtl fixo em 0,733, fator de concentração 3,64 e fator de truncamento 0,5.

As figuras 4.7 e 4.8 mostram as malhas de elementos finitos para ambos os casos 1 e 2. A malha da figura 4.7 possui 532 elementos e a malha da figura 4.8 possui 320 elementos.

As figuras 4.9 a 4.16 mostram a distribuição da função corrente e da temperatura adimensional para ângulos de inclinação de 0^o a 30^o, com número de Grashof 10^5 e $5x10^5$ em ambos os casos 1 e 2. As figuras 4.9(a), 4.11(a), 4.13(a) e 4.15(a) mostram um escoamento simétrico, em relação ao eixo Y, com duas células preferenciais convectivas para o ângulo de inclinação de 0^o e número de Grashof 10^5 e $5x10^5$. As figuras 4.10(a),4.12(a), 4.14(a) e 4.16(a) mostram um escoamento unicelular preferencial para o ângulo de inclinação de 30^o e número de Grashof 10^5 e $5x10^5$.

As figuras 4.9 a 4.16 revelam que o fluido próximo a superfície quente é aquecida e sobe. O fluido próximo a superfície fria é resfriado e desce. Assim, forma-se um escoamento convectivo, fazendo com que ocorra a transferência de calor por convecção natural da superfície isotérmica quente para a super

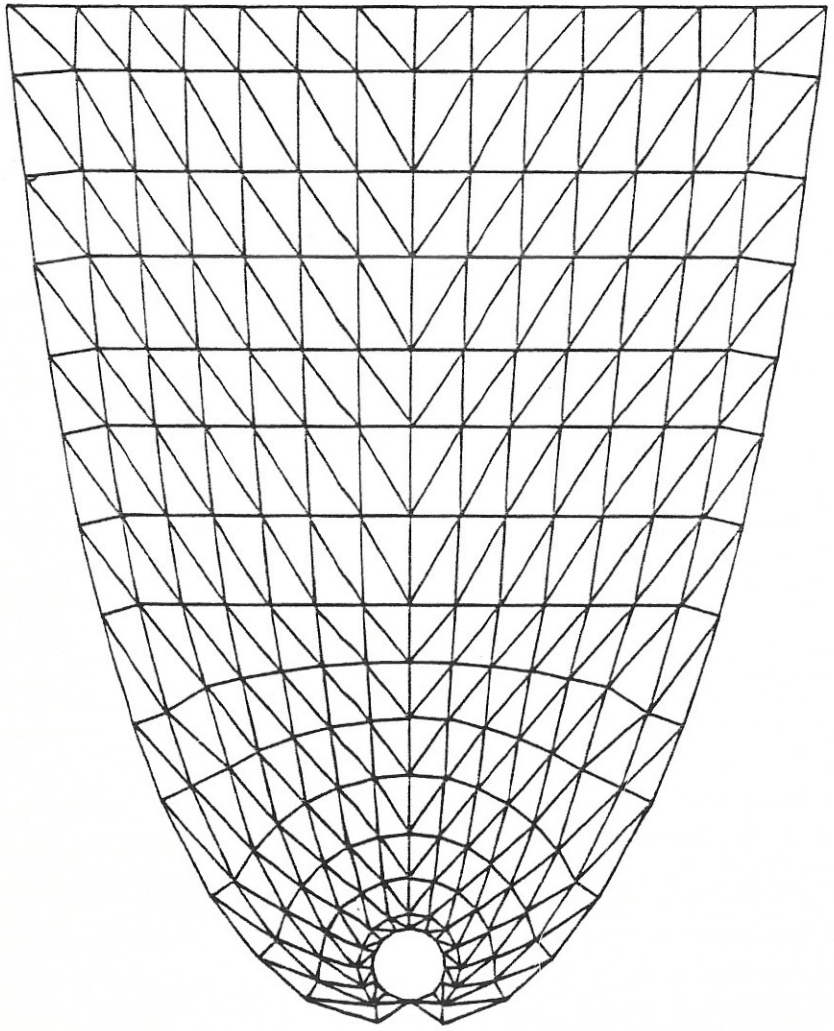


Figura 4.7 - Malha utilizada na solução do caso 1 com 532 elementos

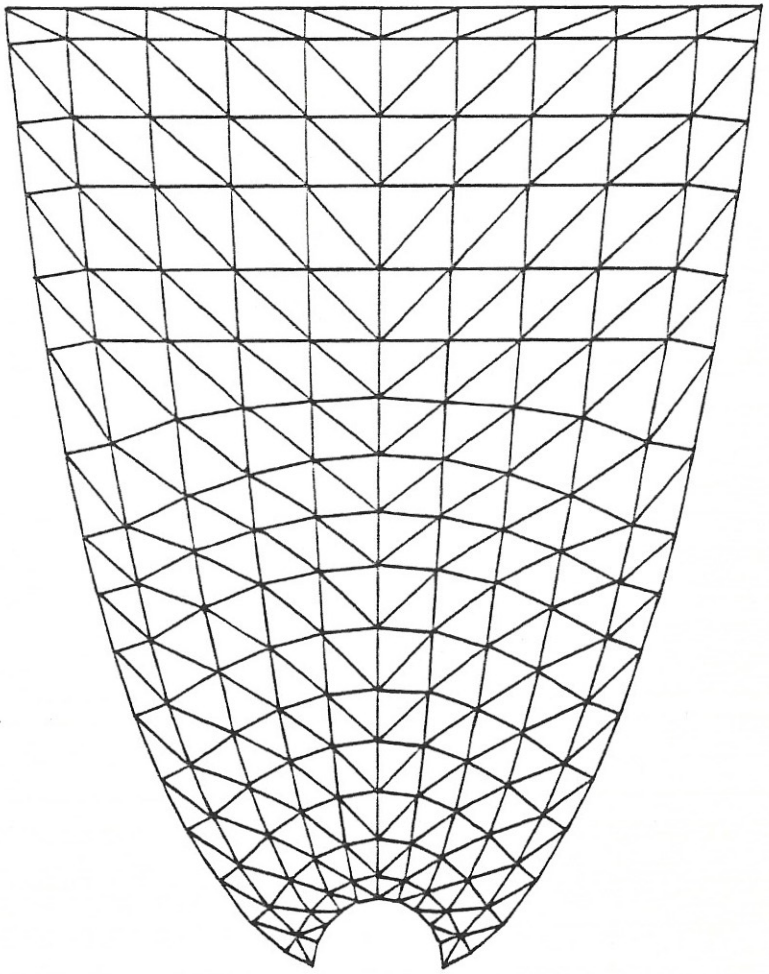


Figura 4.8 - Malha utilizada na solução do caso 2 com 320 elementos

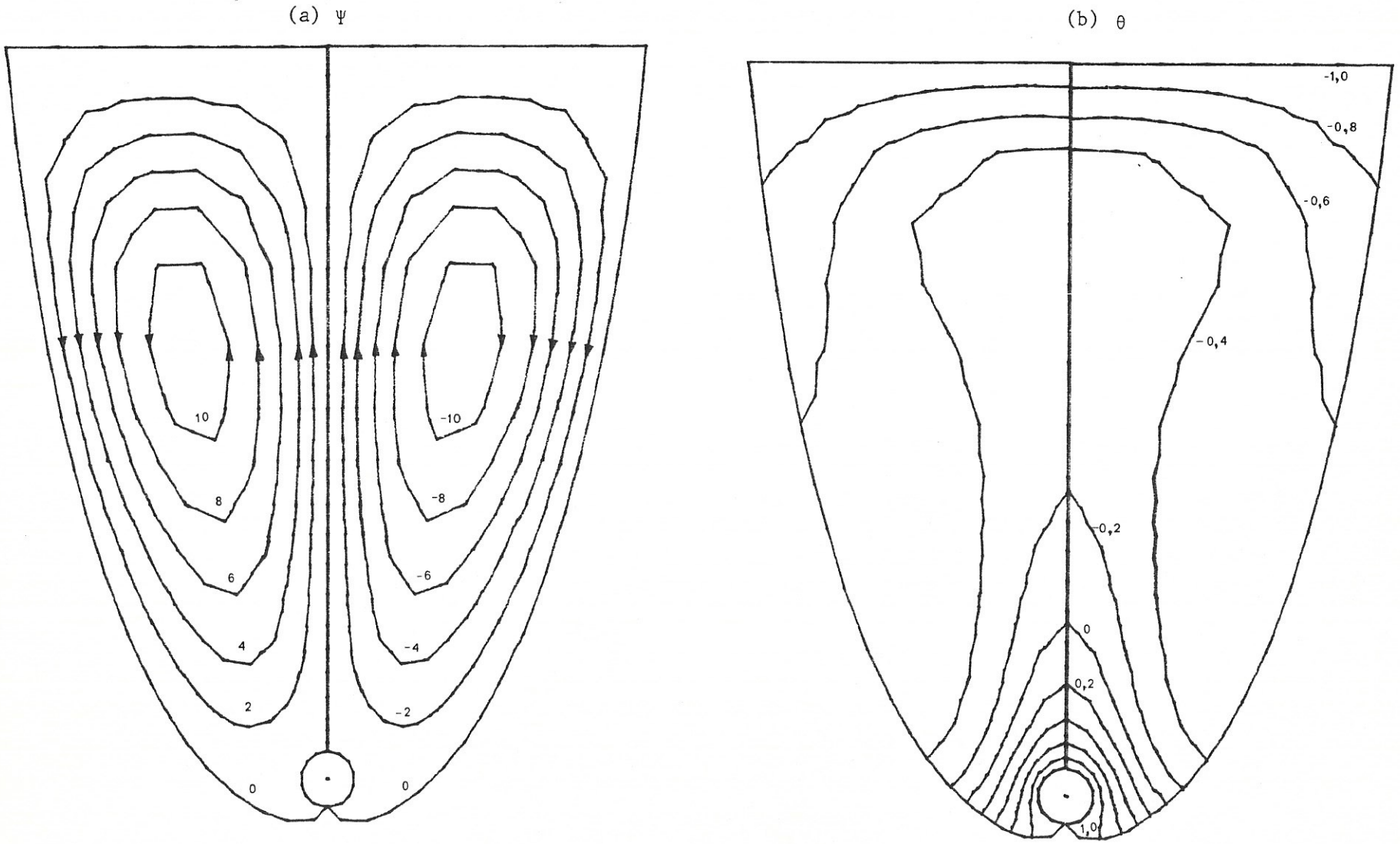


Figura 4.9 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=0^o$; C=3,64.

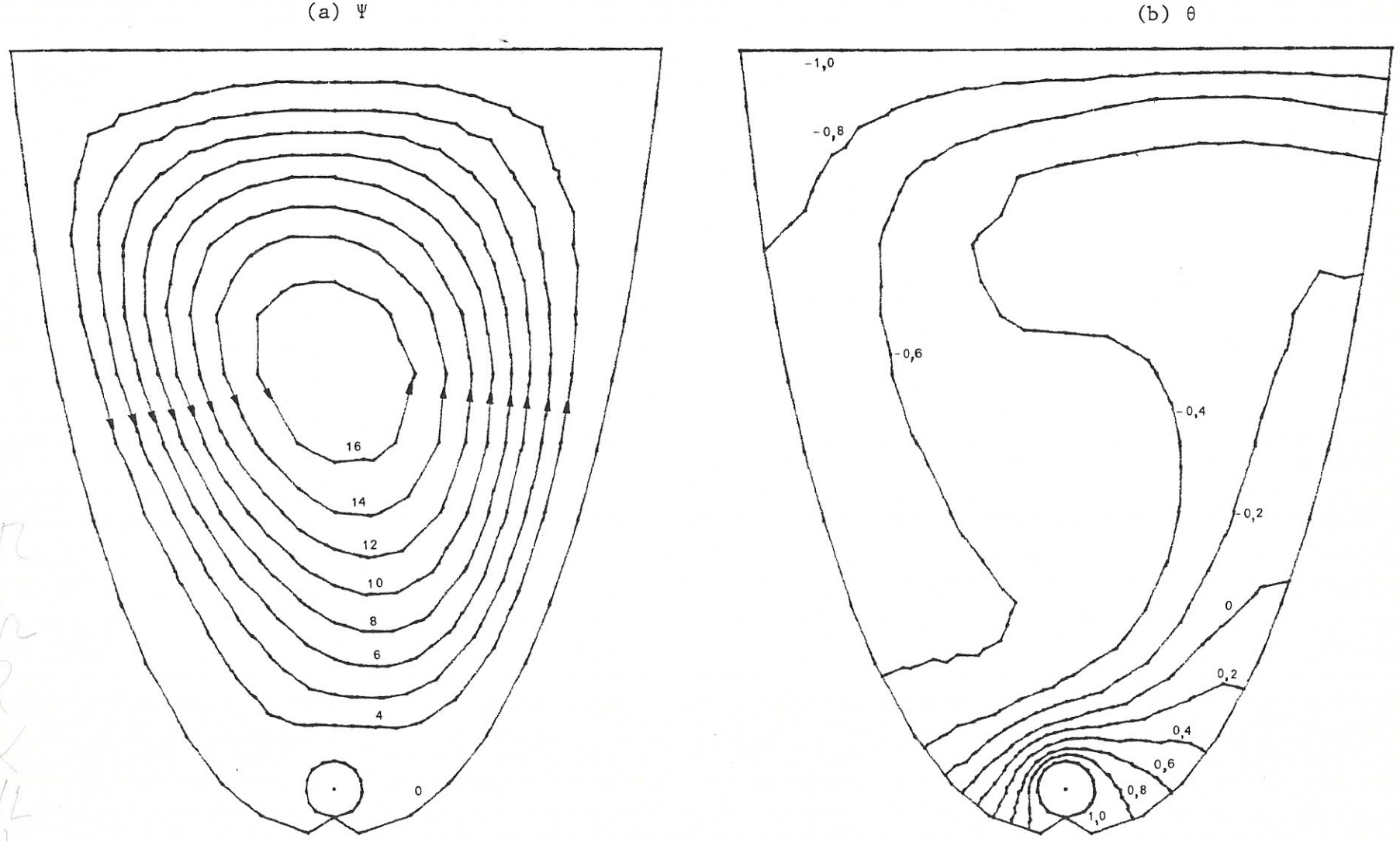


Figura 4.10 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=30^o$; C=3,64.

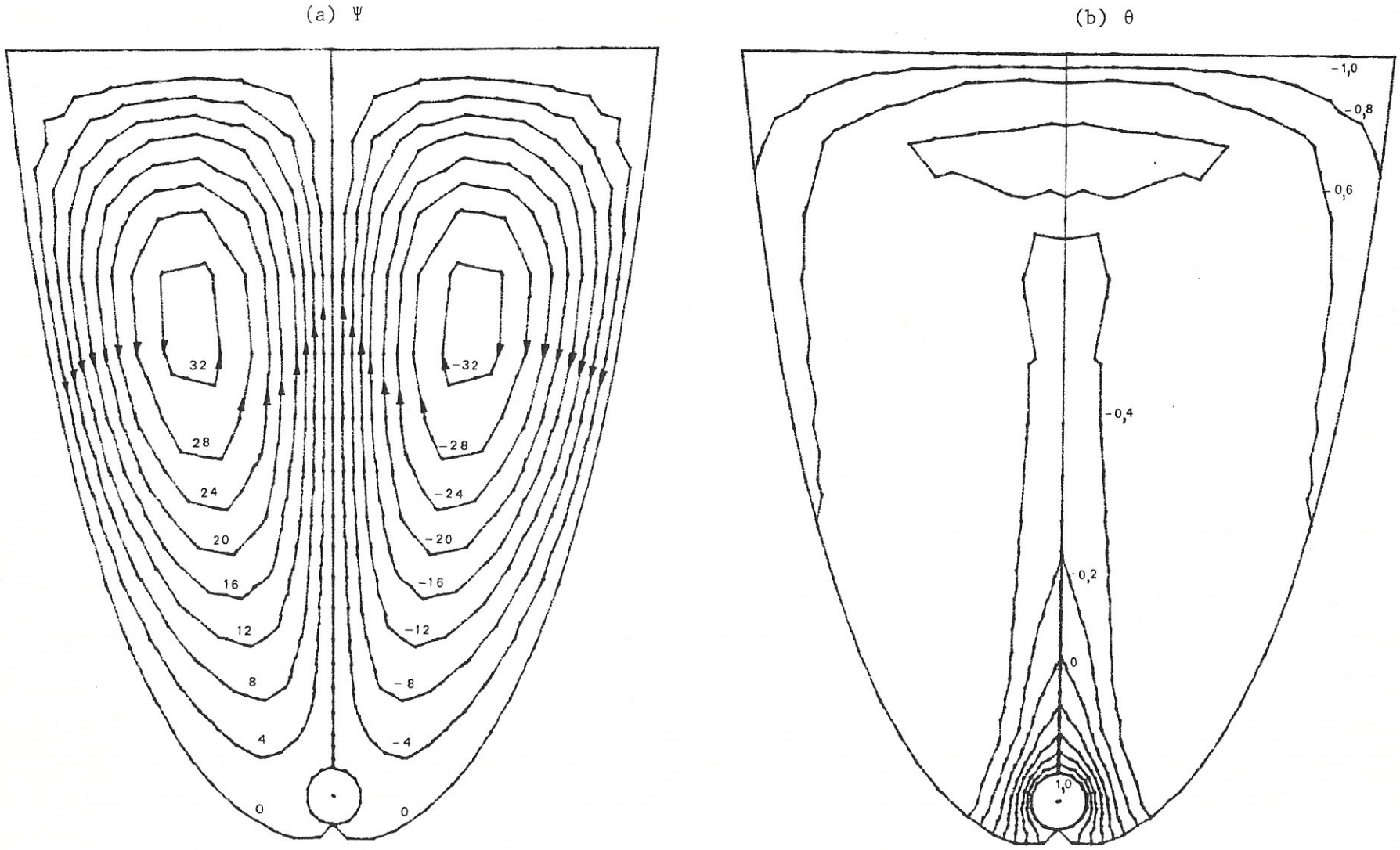
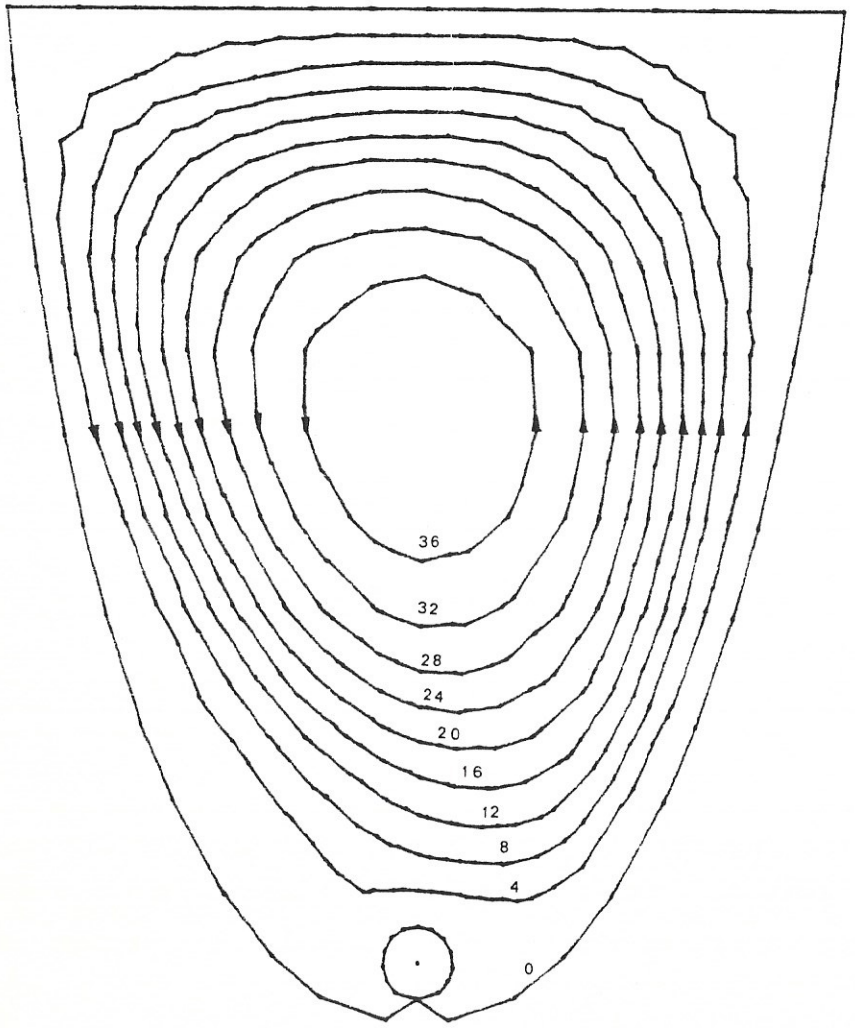


Figura 4.11 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=5x10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=0^o$; $C=3,64$.

(a) Ψ



(b) θ

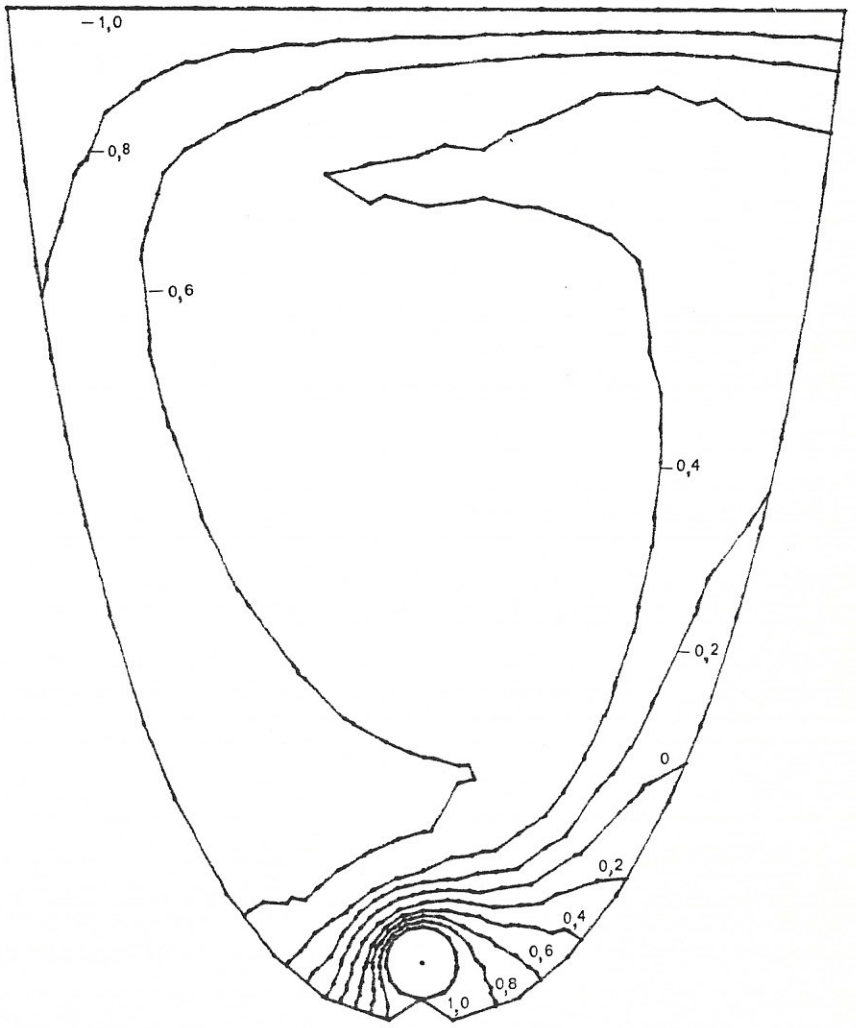
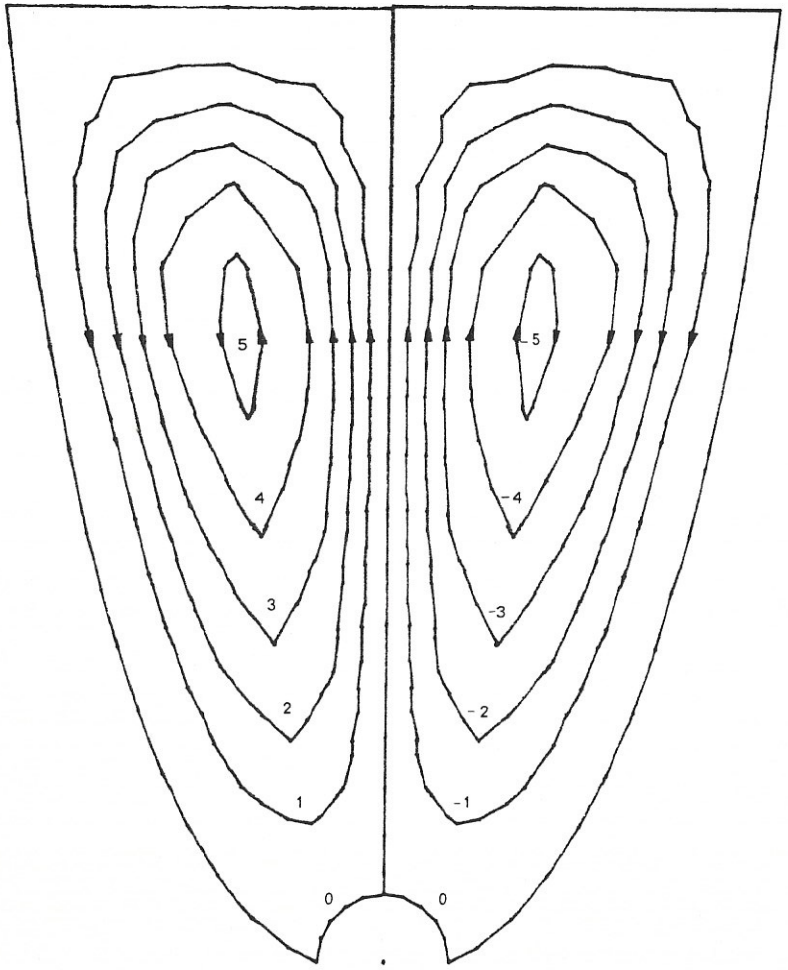


Figura 4.12 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=5x10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=30^o$; $C=3,64$.

(b) Ψ



(b) θ

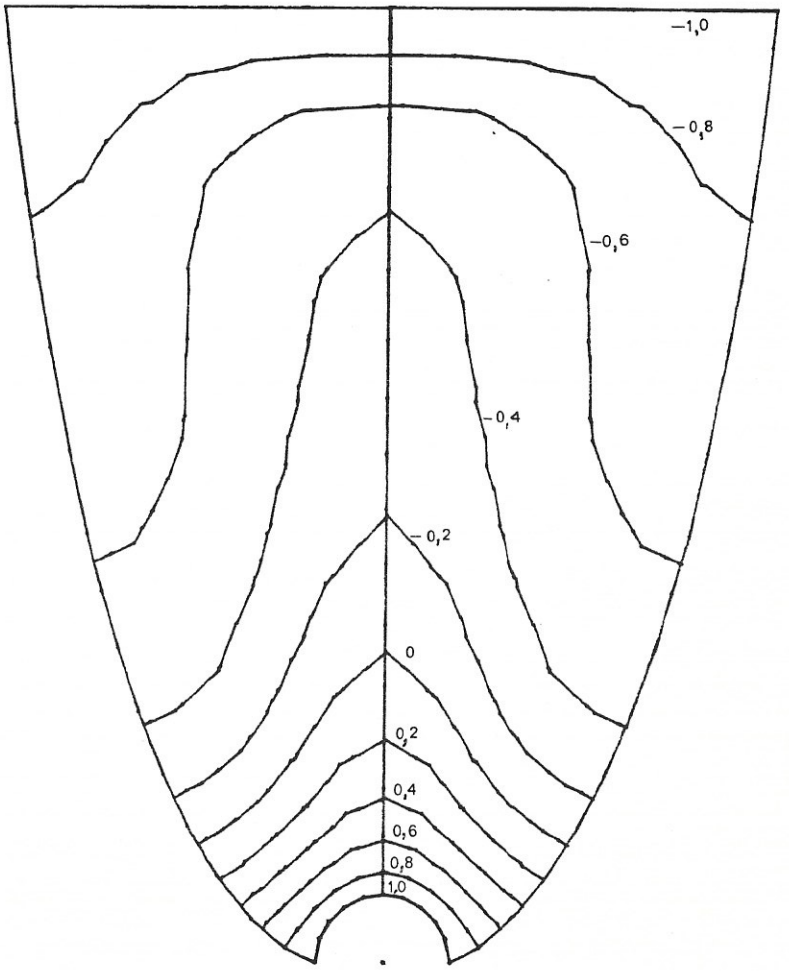
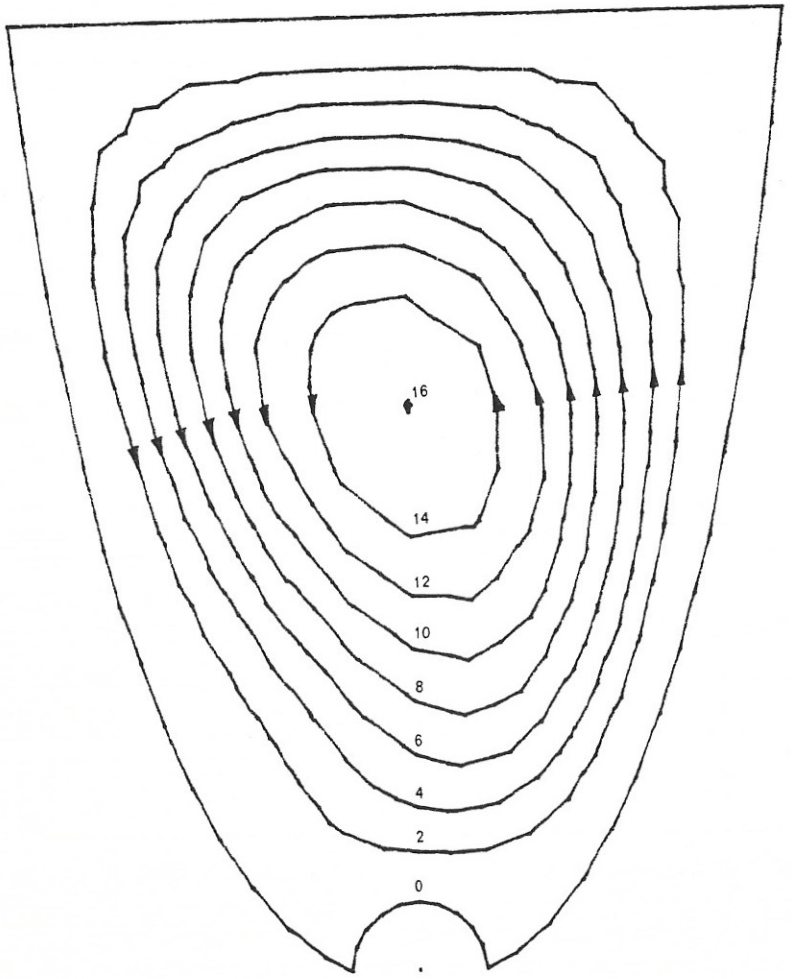


Figura 4.13 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=0^o$; $C=3,64$.

(a) Ψ



(b) θ

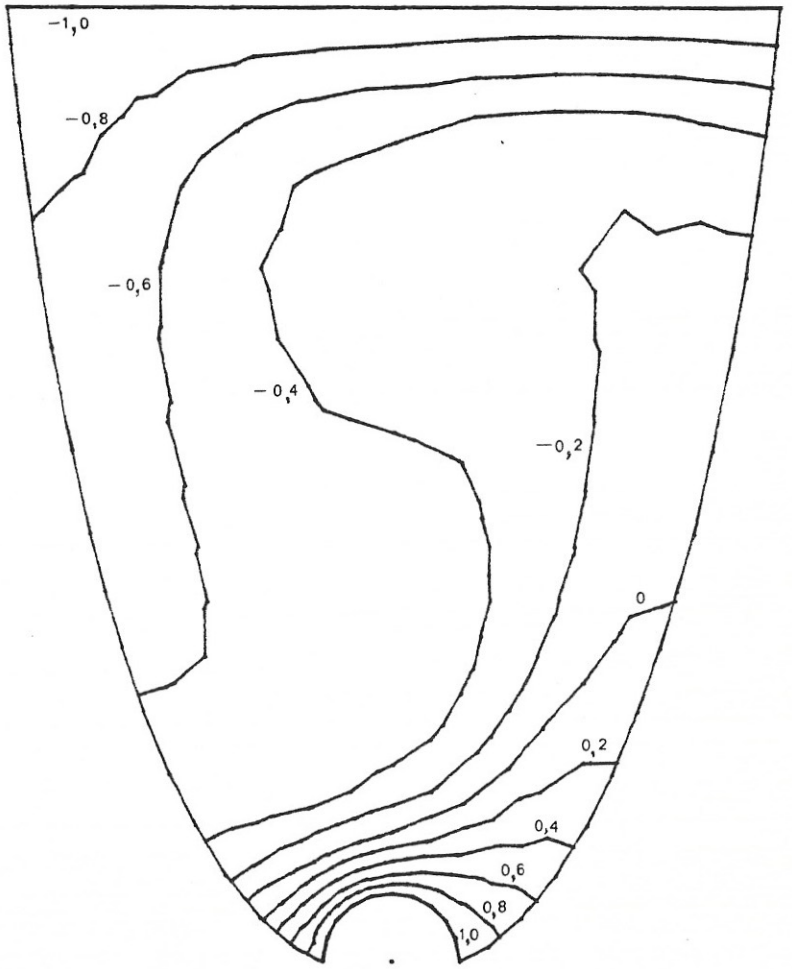


Figura 4.14 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=30^o$; $C=3,64$.

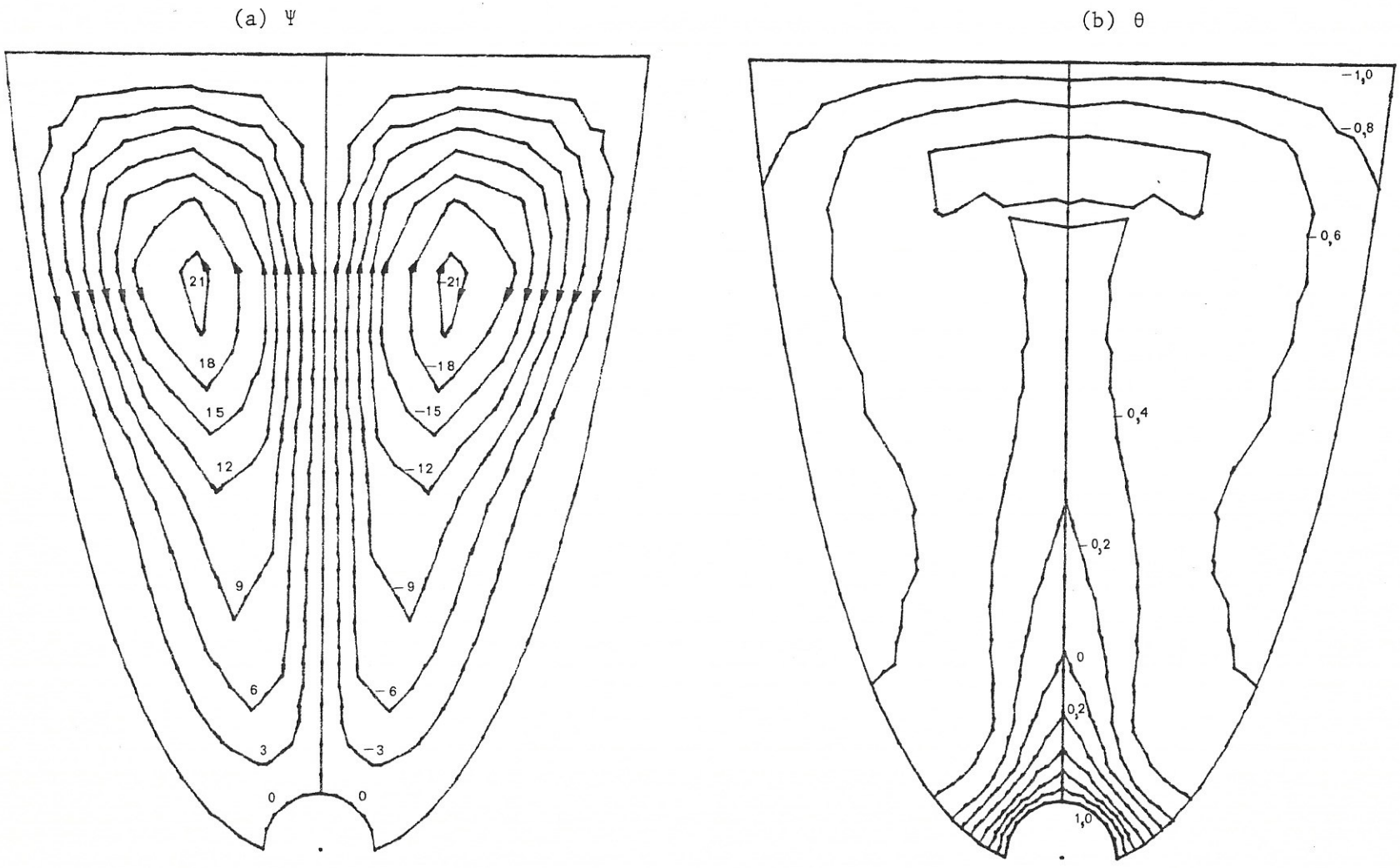
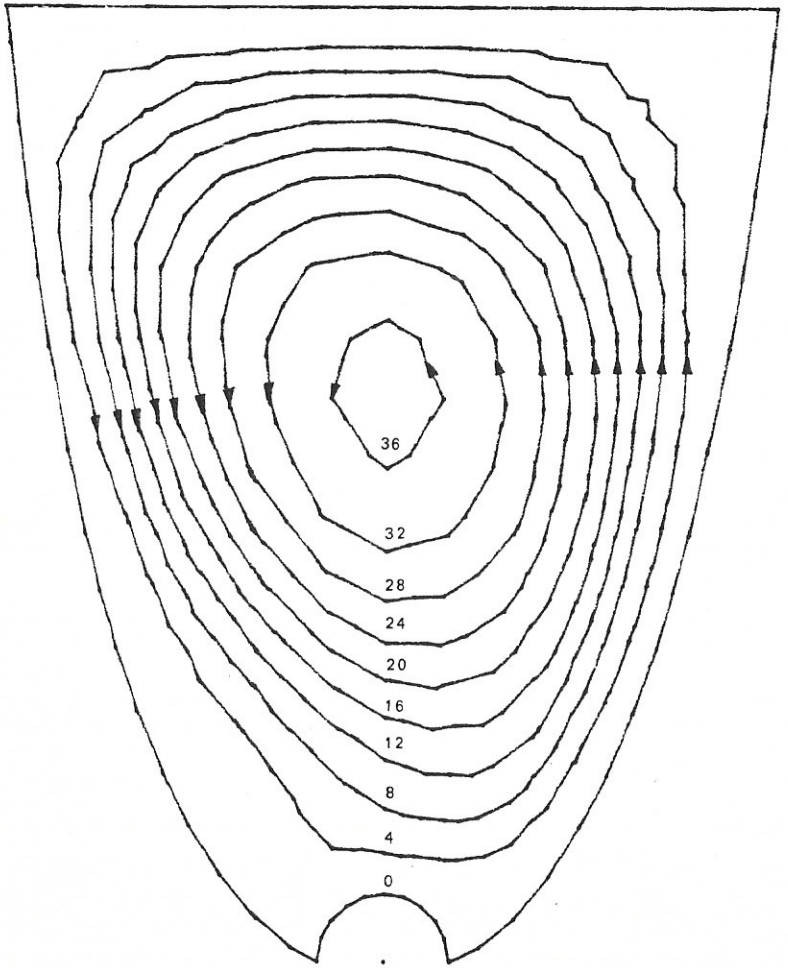


Figura 4.15 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=5x10^5$; $Pr=0,733$; $Tr=0,5$; $\alpha=0^o$; $C=3,64$.

(a) Ψ



(b) θ

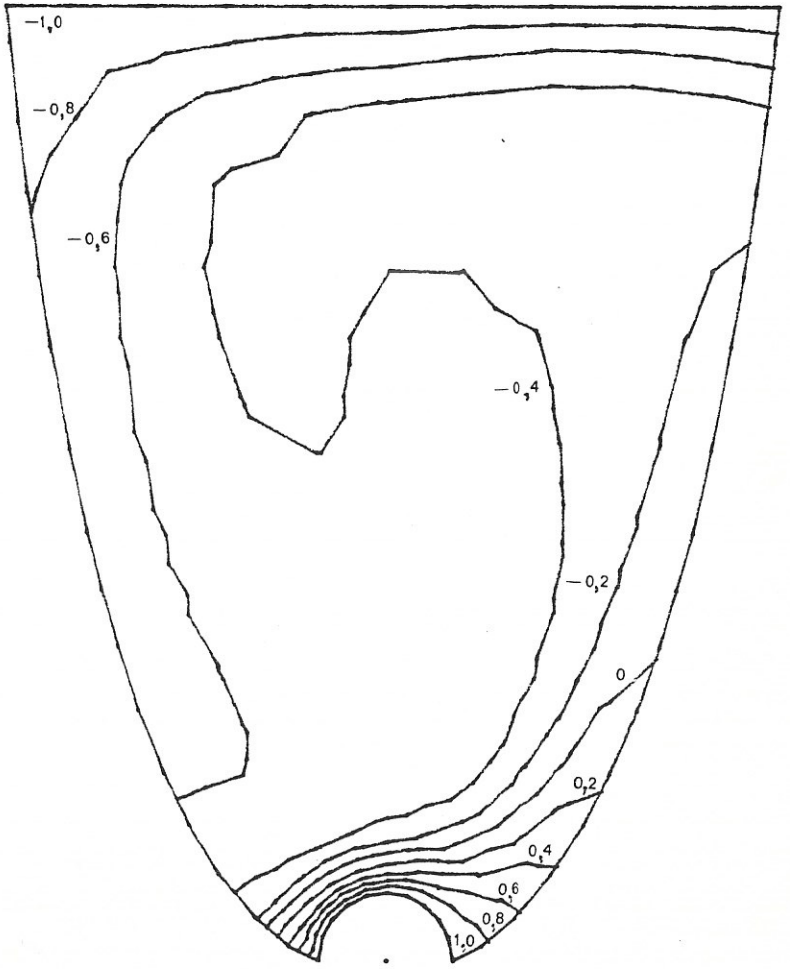


Figura 4.16 - (a) Distribuição da função corrente, (b) Distribuição de temperatura adimensional, para $Gr=5x10^5$; Pr=0,733; Tr=0,5; $\alpha=30^o$; C=3,64.

fície isotérmica fria. Observando-se que a convecção é mais acentuada quando se aumenta o número de Grashof.

As figuras 4.9(b) a 4.16(b) mostram as linhas de temperatura adimensional constante. Para o ângulo de inclinação de 0^o essas linhas são simétricas em relação ao eixo Y e para o ângulo de inclinação de 30^o são assimétricas em relação ao eixo Y, para ambos os casos 1 e 2.

As figuras 4.17 e 4.18 mostram o número de Nusselt médio na superfície quente em função do ângulo de inclinação para número de Grashof 10^5, $5x10^5$ e 10^6. Observa-se nessas figuras que para número de Grashof $5x10^5$ e 10^6, os valores mínimos do número de Nusselt médio ocorrem para o ângulo de inclinação de 30^o. Isto representa uma perda mínimo de calor por convecção em relação a outras posições. Para número de Grashof 10^5, os valores mínimos dos números de Nusselt médios, para os casos 1 e 2, ocorrem para ângulos de inclinação 90^o e 0^o, respectivamente.

As figuras 4.19 e 4.20 apresentam o número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof para os ângulos de inclinação de 0^o, 30^o, 60^o e 90^o. Na figura 4.19 os valores mínimos do número de Nusselt médio ocorrem para o ângulo de inclinação de 90^o, com número de Grashof na faixa de 10^5 a $1.8x10^5$ e para o ângulo de inclinação de 30^o, com número de Grashof na faixa de $1,8x10^5$ a 10^6. Na figura 4.20 os valores mínimos do número de Nusselt médio ocorrem para o ângulo de inclinação de 0^o, com número de Grashof na faixa de 10^5 a $2,7x10^5$ e para o ângulo de inclinação de 30^o, com número de Grashof na faixa de $2,7x10^5$ a 10^6.

Os valores do número de Nusselt médio, mostrados na fi

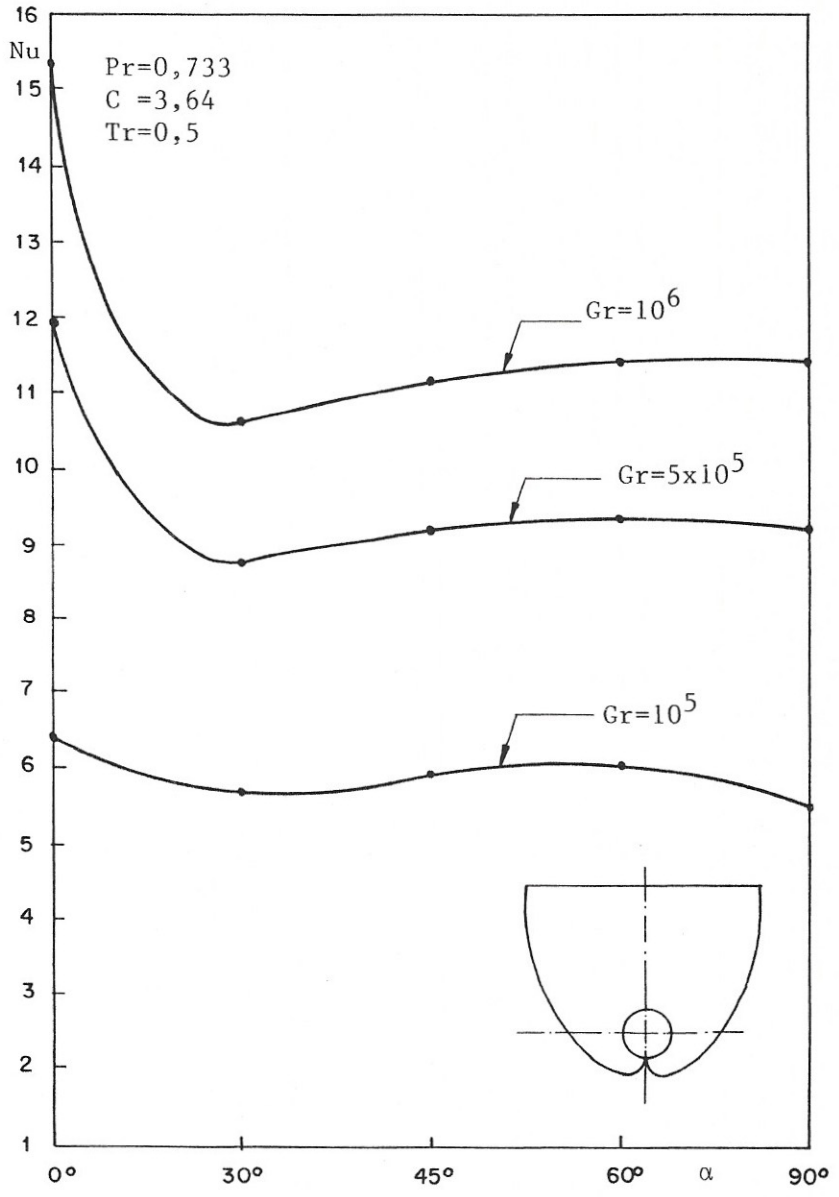


Figura 4.17 - Número de Nusselt médio na superfície quente em função do ângulo de inclinação

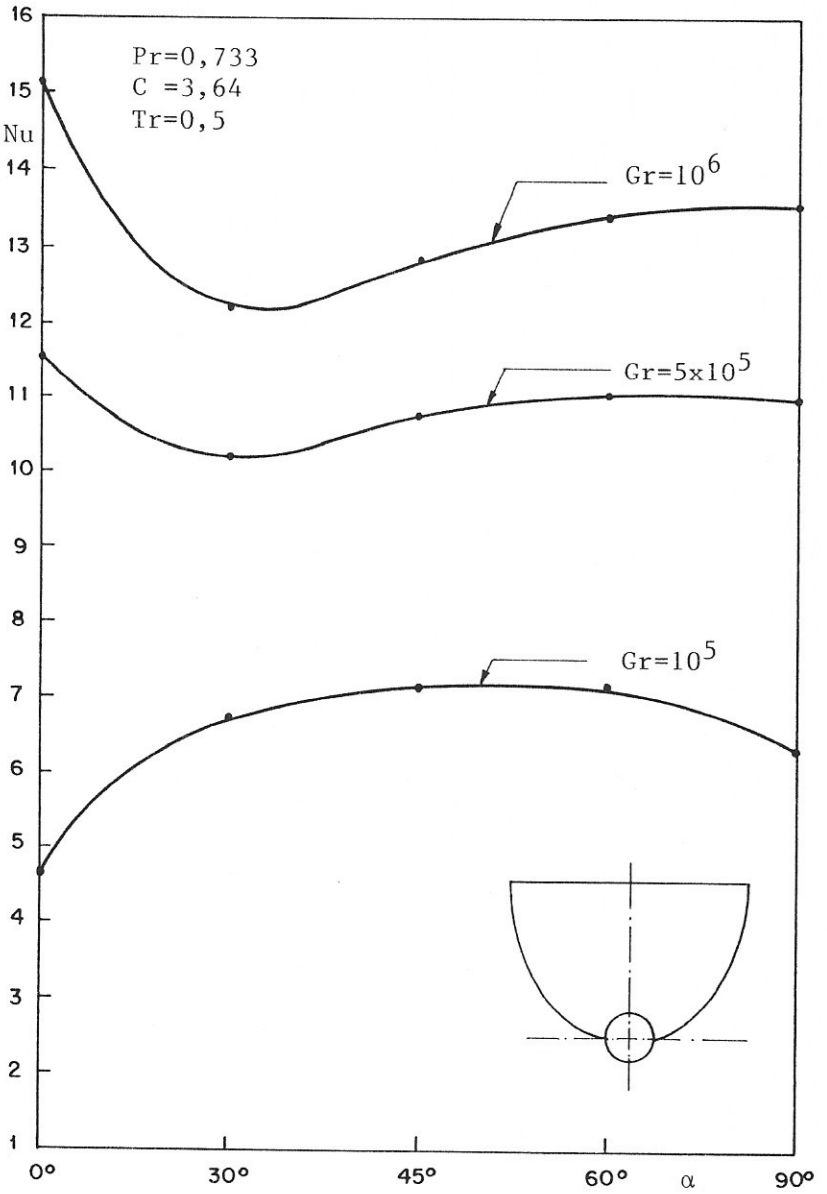


Figura 4.18 - Número de Nusselt médio na superfície quente em função do ângulo de inclinação.

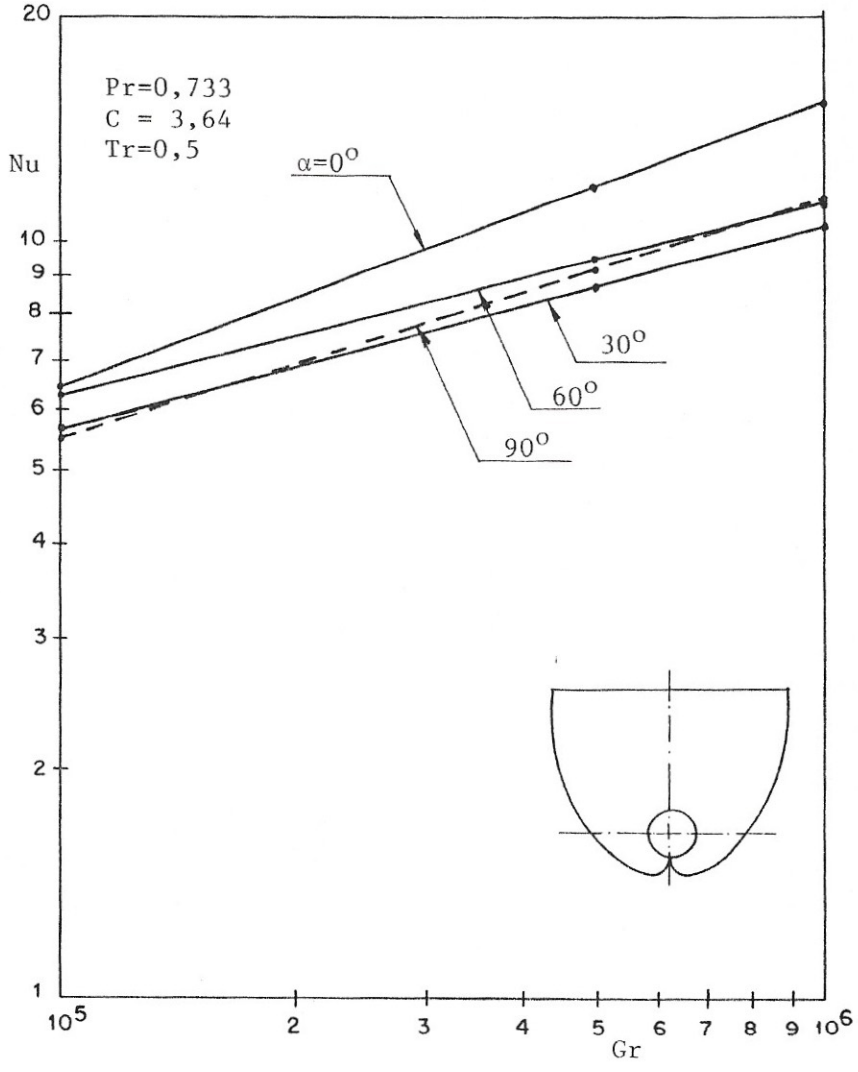


Figura 4.19 - Número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof

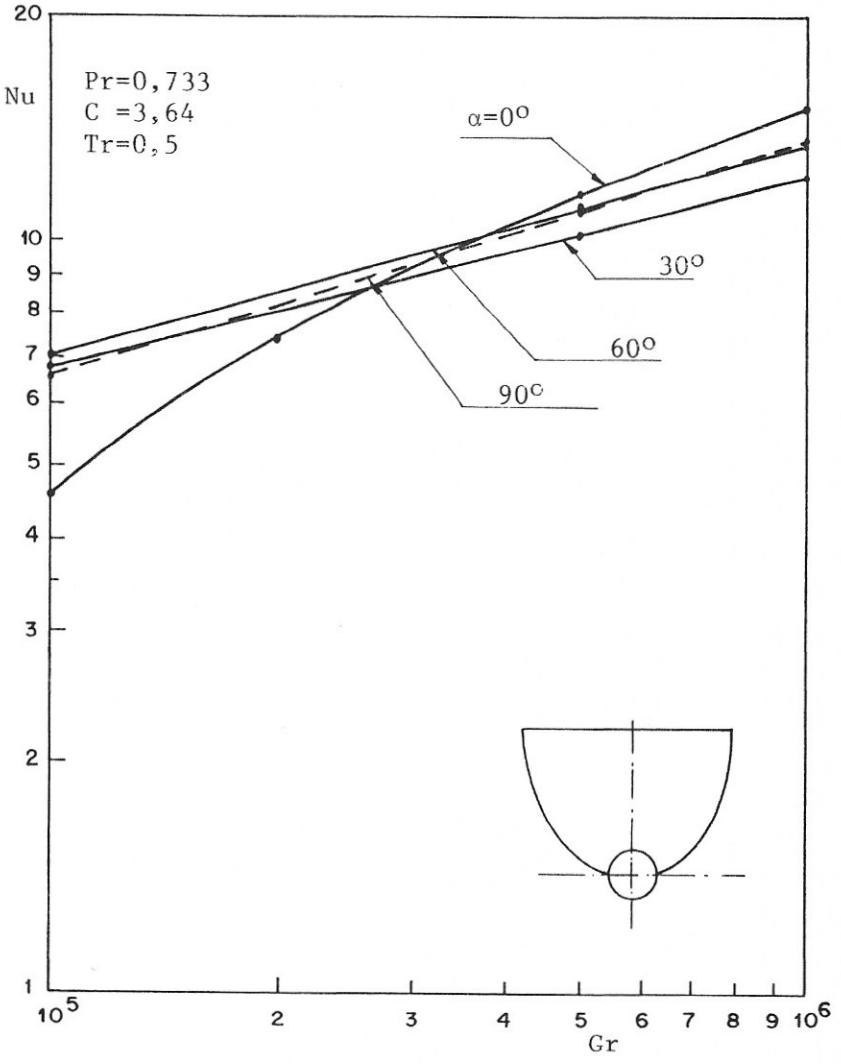


Figura 4.20 - Número de Nusselt médio na superfície quente em função do número de Grashof

guras 4.19 e 4.20 podem ser correlacionados pela seguinte equação:

$$Nu = aRa^b \qquad \text{para} \qquad 10^5 \leqq Gr \leqq 10^6 , \tag{4.2}$$

onde a e b são mostrados nas tabelas 4.5 e 4.6 para os casos 1 e 2, respectivamente.

As figuras 4.21 e 4.22 mostram o número de Nusselt médio e local na superfície quente ξ (ou β_o) e na superfície fria η para os ângulos de inclinação 0^o e 30^o e número de Grashof 10^5 e $5x10^5$. As retas horizontais correspondem ao número de Nusselt médio.

As figuras 4.21(a) e 4.21(b) mostram que o número de Nusselt local, para o ângulo de inclinação de 0^o e número de Grashof 10^5 e $5x10^5$, têm valores máximos na superfície quente para β_o nas faixas de 45^o a 70^o e -45^o a -70^o e na superfície fria para η na faixa de -0,001 e 0,001, com as curvas simétricas em relação ao eixo Y. Para o ângulo de inclinação de 30^o e número de Grashof 10^5 e $5x10^6$, o número de Nusselt local tem valores máximos, na superfície quente para β_o na faixa de 0^o a -30^o e na superfície fria para β_o na faixa de 0,02 a 0,03, com as curvas assimétricas em relação ao eixo Y.

A figura 4.22(a) mostra que o número de Nusselt local, para o ângulo de inclinação de 0^o, tem valores máximos na superfície quente para β_o $\pm 45^o$ com número de Grashof $5x10^5$, β_o $\pm 35^o$ com número de Grashof 10^5 e um valor mínimo para β_o na faixa de -10^o a 10^o, com número de Grashof $5x10^5$. Para o ângulo de inclinação de 30^o, o valor máximo do número de Nusselt local na superfície quente está na faixa de β_o de -20^o a -10^o, com número

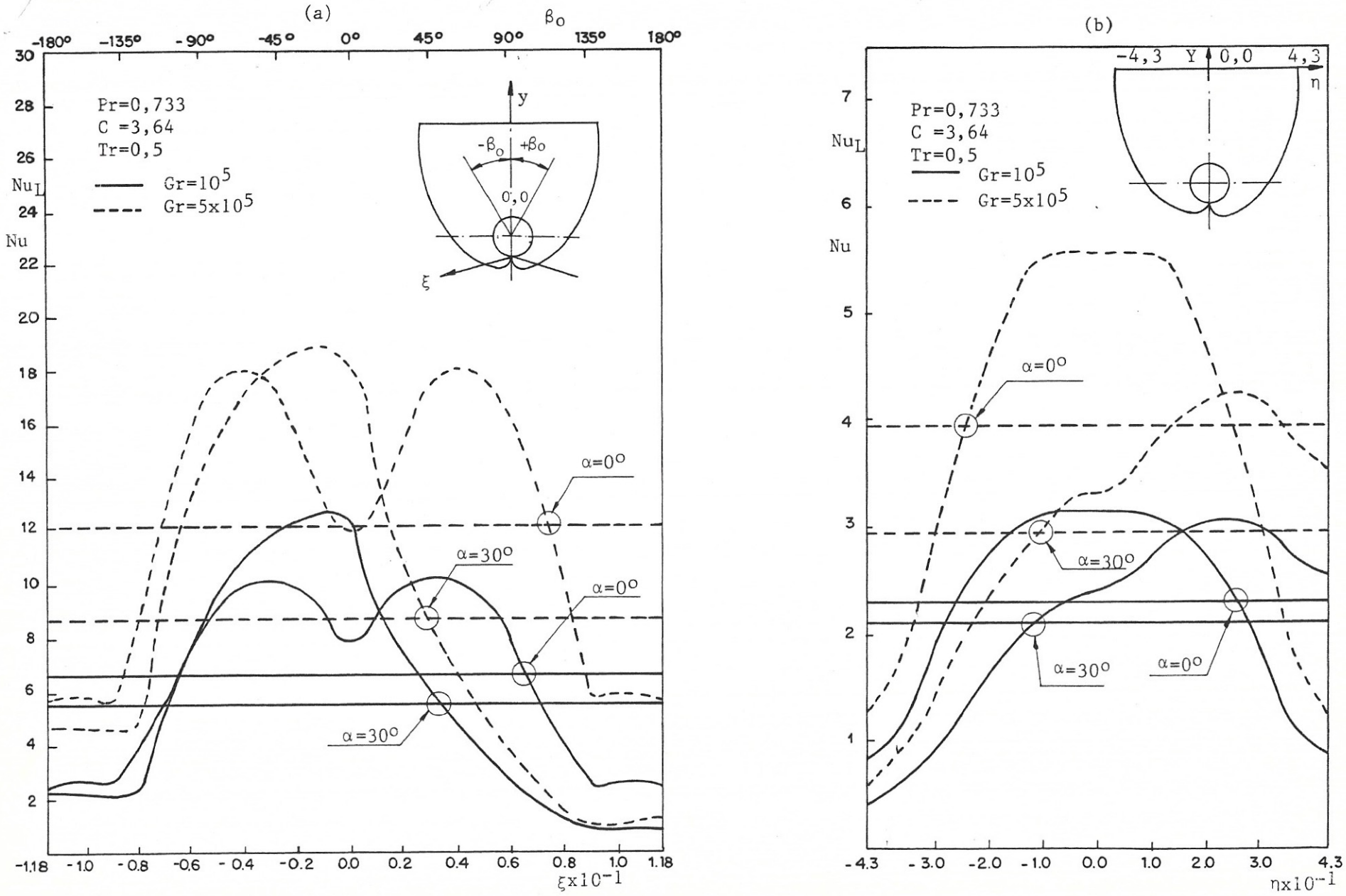


Figura 4.21 - (a) Número de Nusselt local e médio na superfície quente ξ; (b) Número de Nusselt local e médio na superfície fria η; para Grashof 10^5 e $5x10^5$; ângulo de inclinação 0° e 30°.

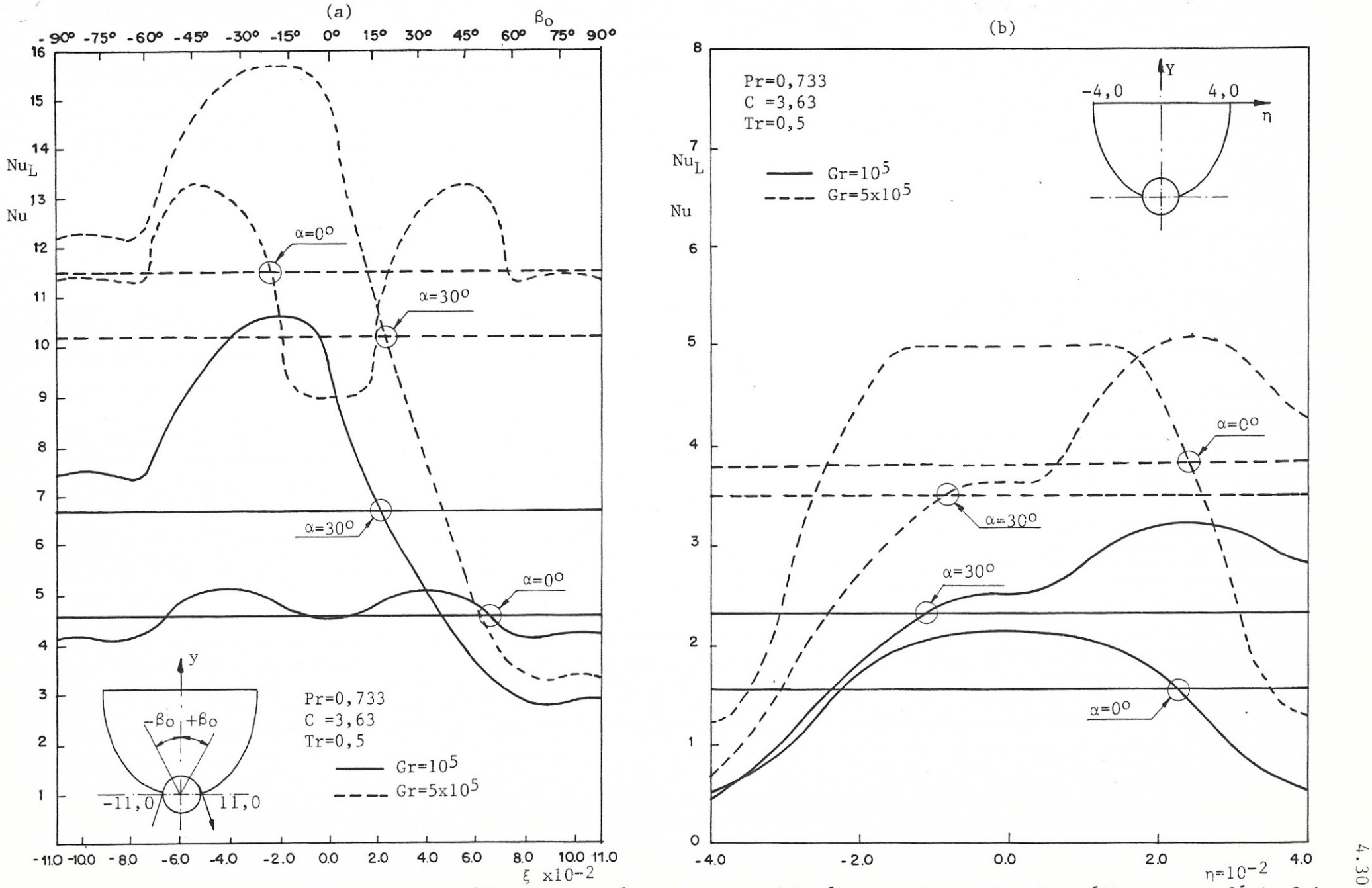


Figura 4.22 - (a) Número de Nussel local e médio na superfície quente ξ; (b) Número de Nussel local e médio na superfície fria η; Para Gr=10^5 e $5x10^5$; ângulo de inclinação 0° e 30°.

α	0°	30°	60°	90°
a	0,0925	0,2739	0,3395	0,1677
b	0,3788	0,2706	0,2598	0,3129

Tabela 4.5 - Constantes da equação 4.2 para o caso 1

α	0°	30°	60°	90°
a	0,0740*	0,3808	0,3440	0,2014
b	0,3938*	0,2569	0,2713	0,3120

Tabela 4.6 - Constantes da equação 4.2 para o caso 2

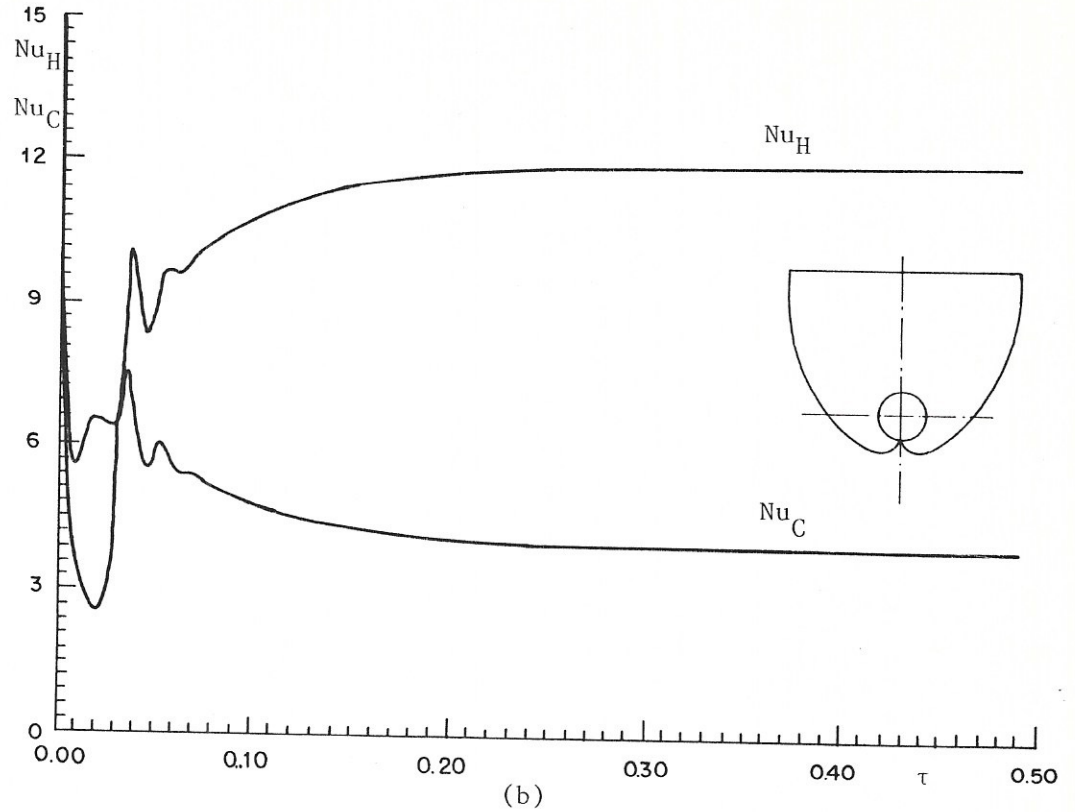
* Valores válidos para $3,5 \times 10^5 \leq Gr \leq 10^6$

de Grashof 10^5 e $5x10^6$ e o valor mínimo do número de Nusselt ocorre para $\beta_o=70^o$, com número de Grashof 10^5 e $5x10^5$.

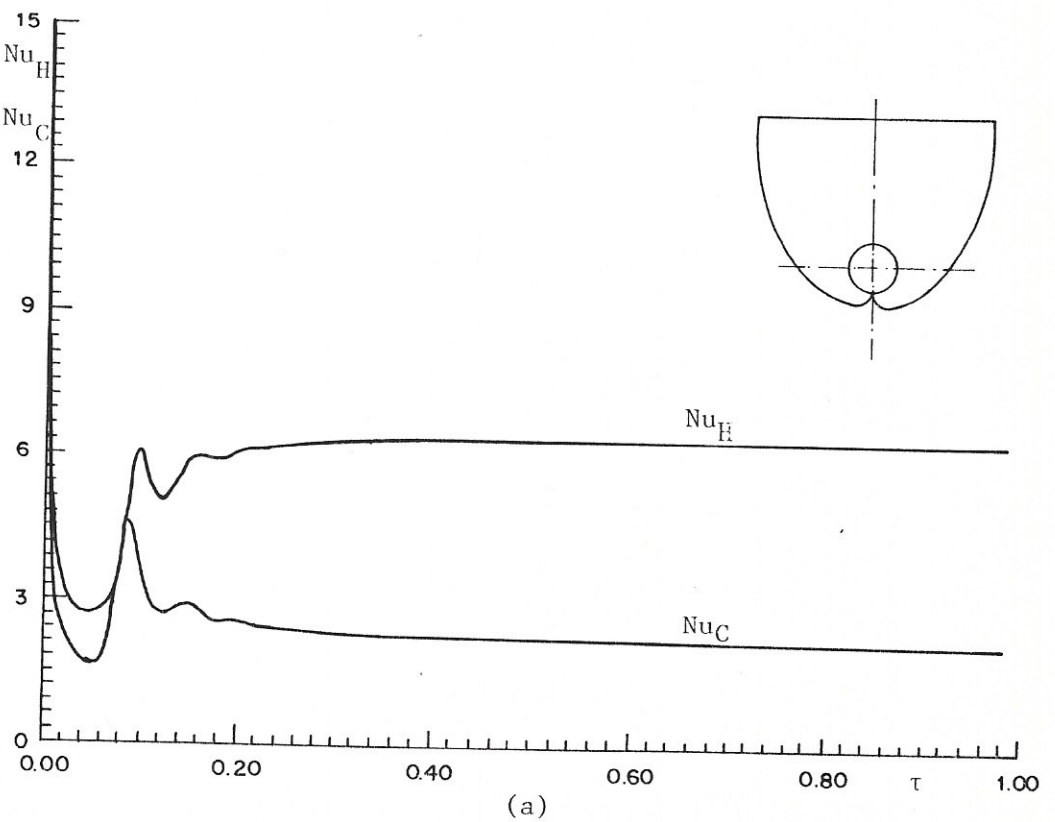
A figura 4.22(b) mostra que o número de Nusselt local, para ângulo de inclinação de 0^o, tem valores máximos na superfícies fria, para $-0,013<\eta<0,013$ com número de Grashof $5x10^5$ e $\eta=0$ para número de Grashof 10^5. Para o ângulo de inclinação de 30^o, os valores máximos do número de Nusselt local na superfície fria ocorrem para $\eta=0,025$ e número de Grashof 10^5 e $5x10^5$. Os valores mínimos do número de Nusselt local na superfície fria ocorrem para $\eta=-0,04$ com número de Grashof de 10^5 a $5x10^5$.

As figuras 4.23 a 4.26 mostram os números de Nusselt médios na superfície quente Nu_H e na superfície fria Nu_C, em função do tempo adimensional, para os casos 1 e 2. Nessas figuras se considera a influência dos ângulos de inclinação 0^o e 30^o, e dos números de Grashof 10^5 e $5x10^5$. Observa-se nessas figuras que os números de Nusselt na superfície fria Nu_C são sempre menores que os números de Nusselt na superfície quente Nu_H, considerando os mesmos parâmetros.

Os resultados apresentados para o caso 1 e 2, do presente trabalho, não foram confrontados com resultados de outros trabalhos porque não se conhece até o presente momento trabalhos que estudam a convecção natural neste tipo de coletor concentrador.

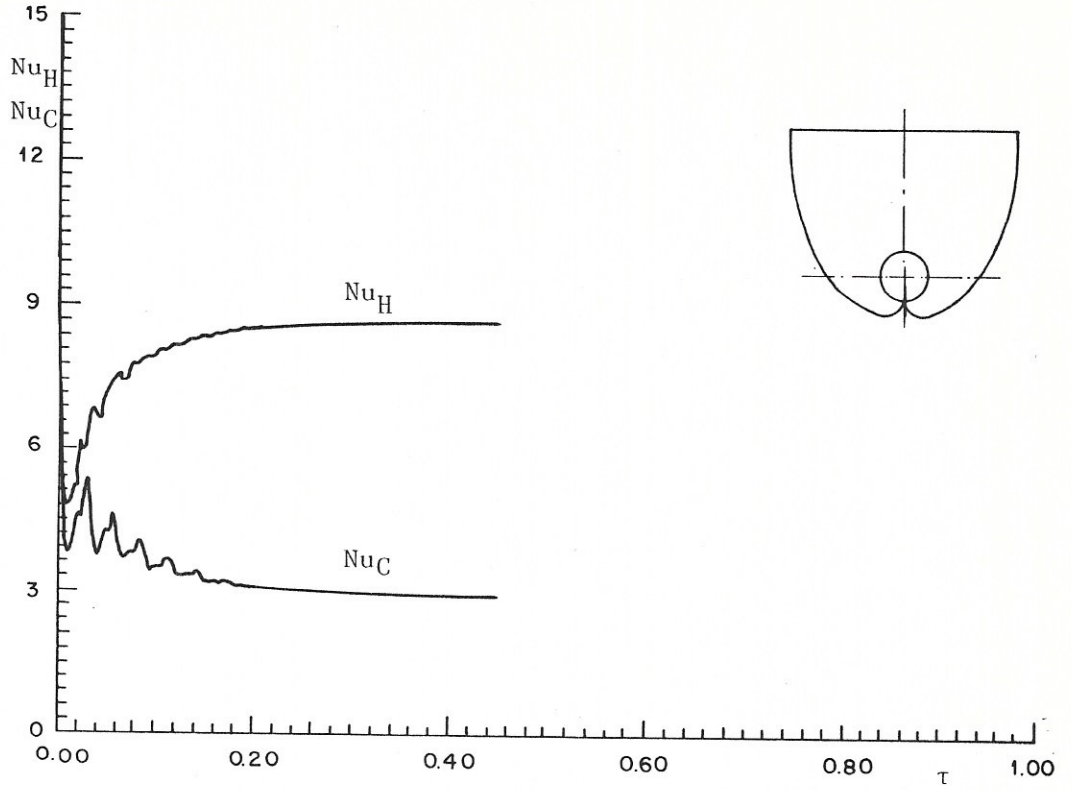


(b)

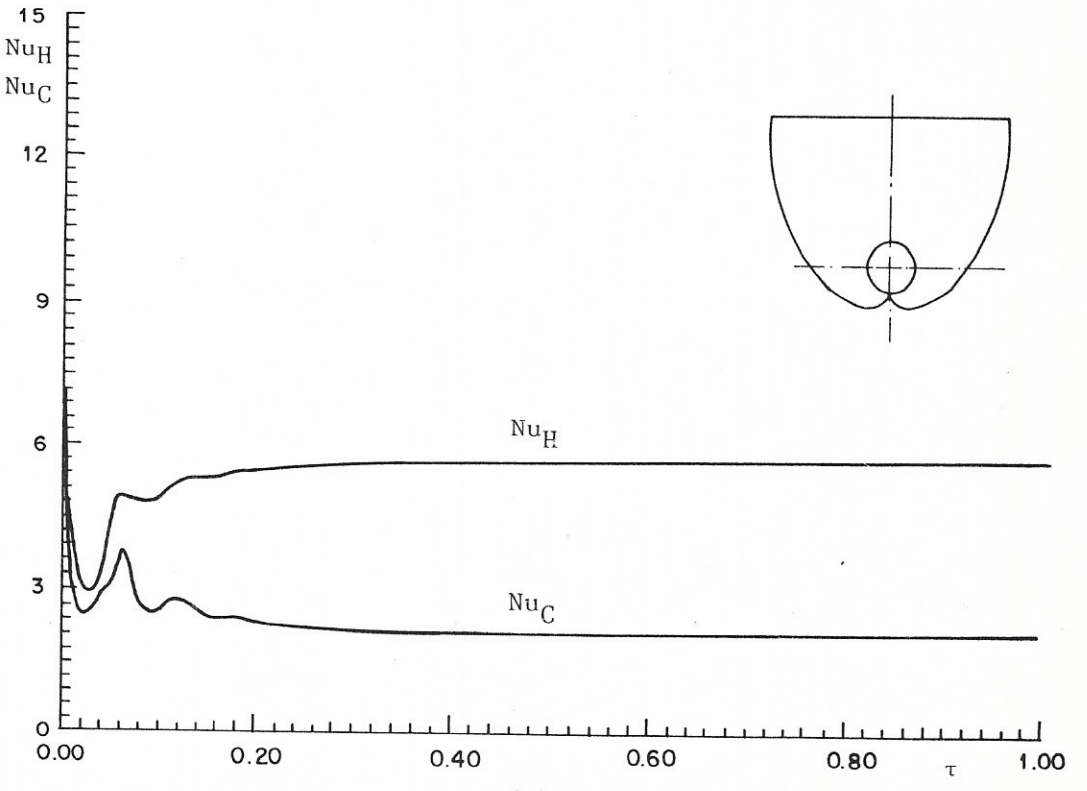


(a)

Figura 4.23 - Número de Nusselt médio versus tempo adimensional , para Pr=0,733;α=0°; Tr=0,5; C=3,64;
(a) Gr=10^5; (b)=$5x10^5$

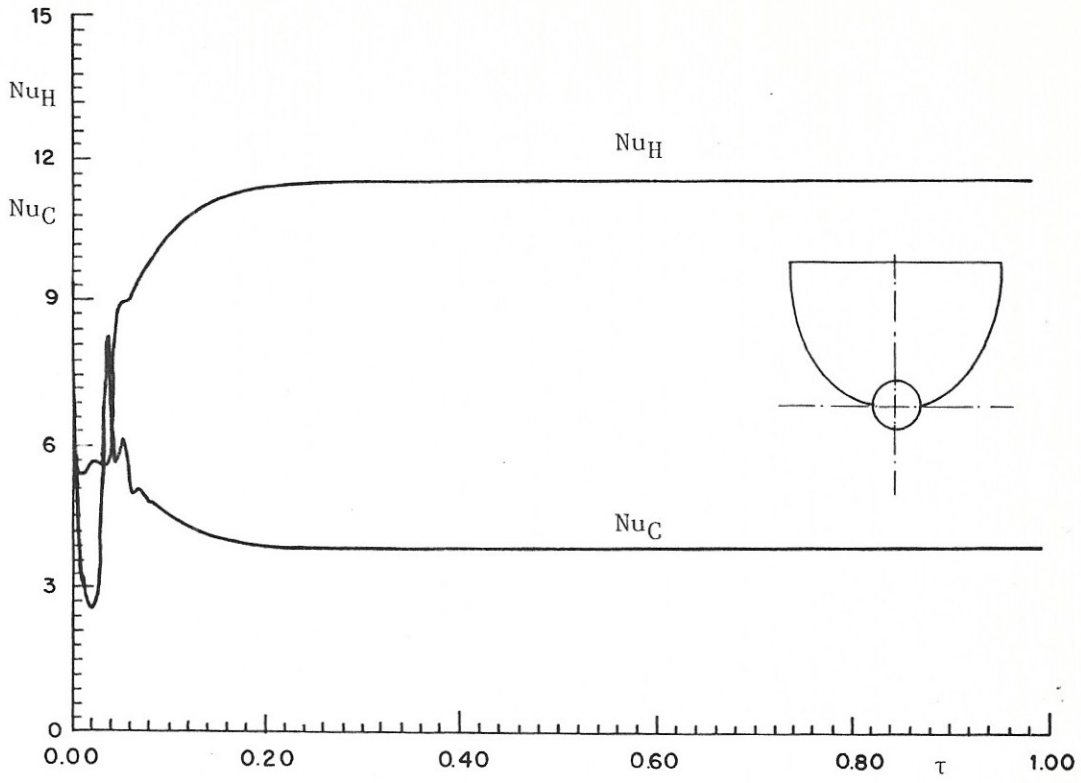


(b)

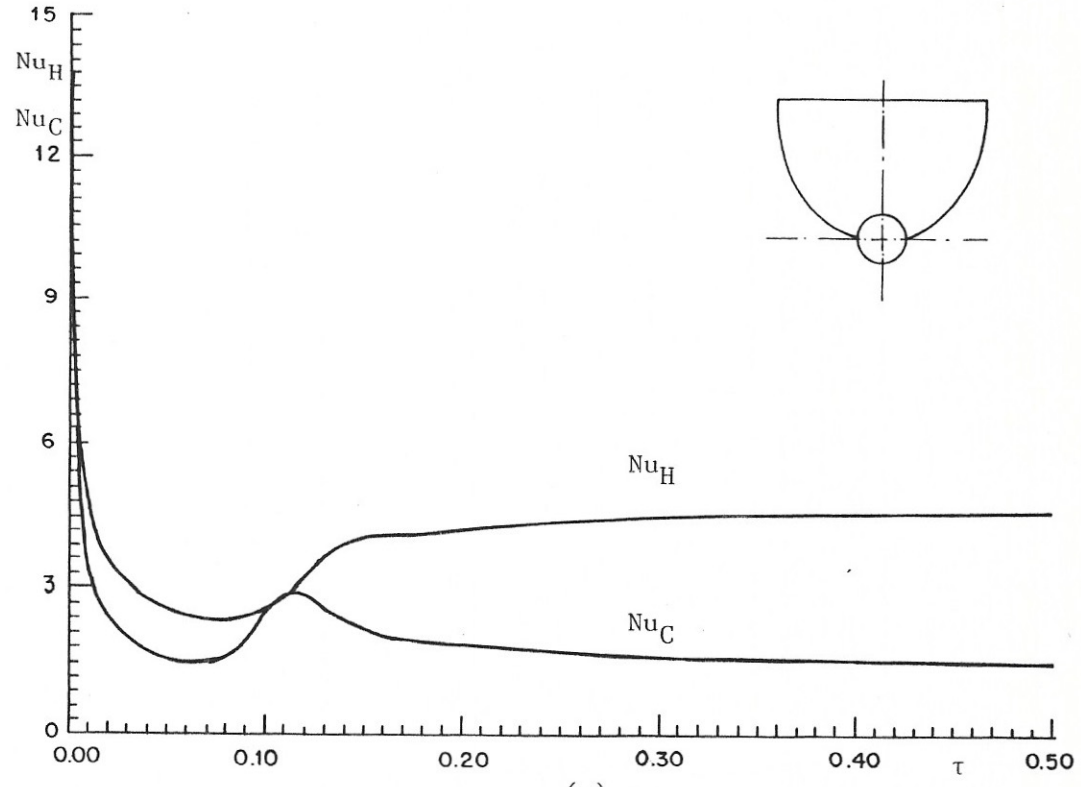


(a)

Figura 4.24 - Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=30^{o}$, Tr=0,5; C=3,64;
(a) $Gr=10^{5}$; (b) $Gr=5x10^{5}$

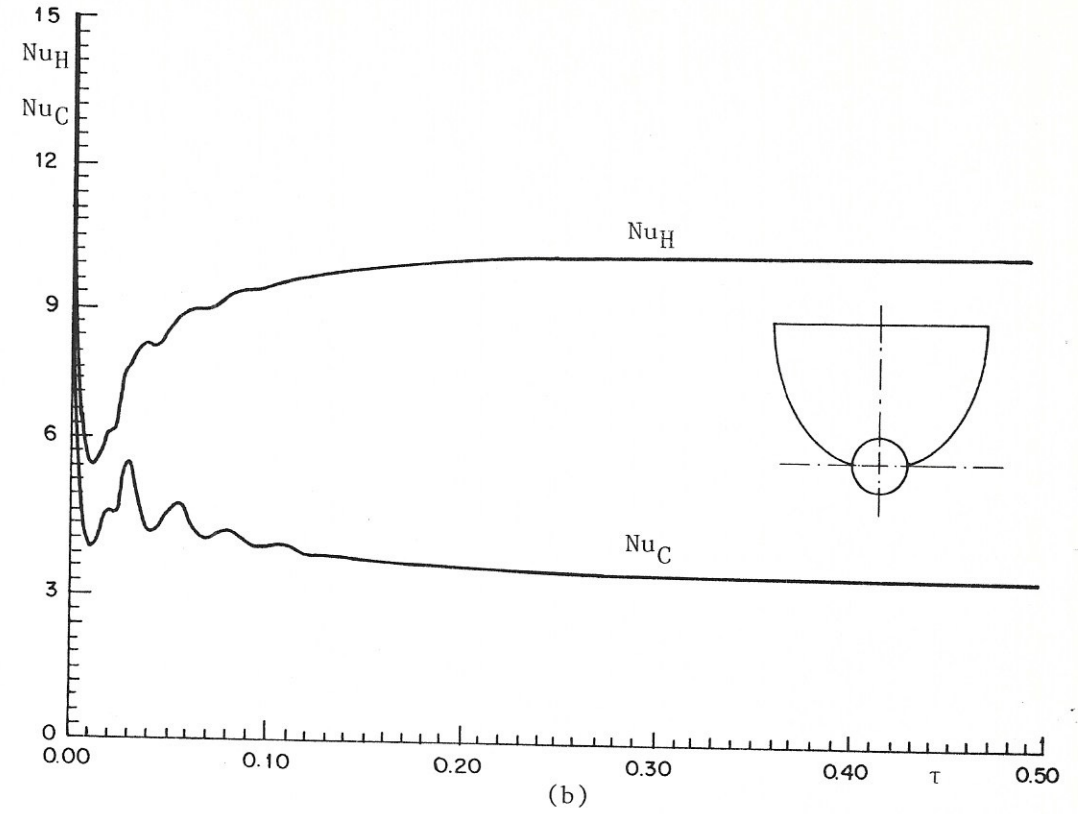


(b)

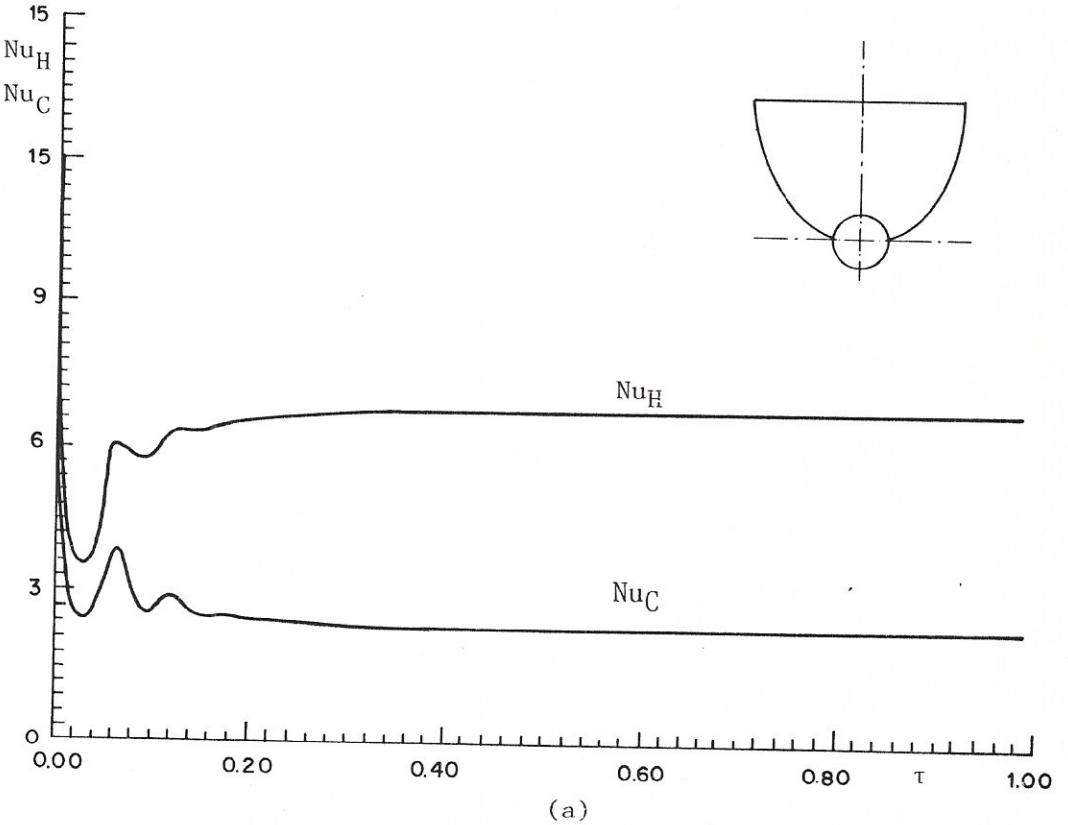


(a)

Figura 4.25 – Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733; $\alpha=0^{o}$; Tr=0,5; C=3,64
(a) $Gr=10^{5}$; (b) $Gr=5x10^{5}$.



(b)



(a)

Figura 4.26 - Número de Nusselt médio versus tempo adimensional, para Pr=0,733, $\alpha=30^{o}$; Tr=0,5; C=3,64
(a) $Gr=10^{5}$; (b) $Gr=5x10^{5}$

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 - Conclusões

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de convecção natural, bidimensional em regime permanente e não permanente, no interior dos coletores concentradores mostrados nas figuras 1.3 e 1.4.

O método de elementos finitos foi utilizado para resolver as equações de conservação. Um programa computacional em FORTRAN foi desenvolvido para obter a solução dessas equações em termos de função corrente, temperatura adimensional, vorticidade e determinar o número de Nusselt médio e local.

Com a finalidade de testar o programa computacional desenvolvido no presente trabalho, utilizou-se para comparação os resultados de convecção natural publicados para cavidades quadrada e trapezoidal.

Inicialmente o programa computacional foi testado em cavidade quadrada conforme item 4.1. As tabelas 4.1 e 4.2 mostram a comparação dos resultados do programa computacional do presente trabalho com aqueles publicados na literatura. Esta comparação revela que a concordância dos resultados é boa, apresentando desvios máximos de 0,753% na tabela 4.1 e 10,98% na tabela 4.2.

Um outro teste foi realizado para convecção natural em cavidade trapezoidal conforme item 4.2. Os resultados do presen

te trabalho comparados com os resultados experimentais de Iyican [18] revelaram boa concordância, exceto para o número de Rayleigh na faixa de 10^4 a 10^5 e ângulo de inclinação de 0^o.

No geral os testes revelaram que o programa computacional produziram resultados com boa concordância para as geometrias quadrada e trapezoidal.

Os resultados da convecção natural no interior dos coletores concentradores do presente trabalho são tratados no item 4.3. As figuras 4.9 a 4.16 mostram a distribuição da função corrente e as linhas de temperatura constante no interior das cavidades dos casos 1 e 2. Estas figuras revelam que o escoamento é formado por duas células convectivas simétricas em relação ao eixo Y quando o ângulo de inclinação é 0^o; para o ângulo de inclinação de 30^o o escoamento é formado por uma única célula convectiva assimétrica.

As figuras 4.17 e 4.18 mostram que o valor mínimo do número de Nusselt está em torno do ângulo de inclinação de 30^o, para os valores do número de Grashof $5x10^5$ e 10^6 em ambos os casos 1 e 2. Além disso, para o caso 1, os valores mínimos do número de Nusselt são bem menores que os do caso 2, para os respectivos números de Grashof 10^5 e 10^6. Para número de Grashof igual a 10^5, o número de Nusselt mínimo do caso 1, ocorre para o ângulo de 90^o e para o caso 2, ocorre para o ângulo de 0^o.

A figura 4.19 mostra que os números de Nusselt mínimos do caso 1 ocorrem para ângulo de inclinação de 90^o para $10^5 \leq Gr \leq 1{,}8x10^5$ e ângulo de inclinação de 90^o para $1{,}8x10^5 \leq Gr \leq 10^6$.

A figura 4.20 mostra que os números de Nusselt mínimos do caso 2 ocorrem para ângulo de inclinação de 0º para $10^5 \leq Gr \leq 2{,}7x10^5$ e ângulo de inclinação de 30º para $2{,}7x10^5 \leq Gr \leq 10^6$.

Os números de Nusselt médio e local nas superfícies quente e fria para os casos 1 e 2 são mostrados nas figuras 4.21 e 4.22, respectivamente. Para o ângulo de inclinação 0º os valores do número de Nusselt local apresentam simetria em relação ao eixo Y, caracterizando o escoamento simétrico. Para o ângulo de inclinação de 30º os valores do número de Nusselt não apresentam simetria. O seu valor máximo está deslocado para a esquerda na superfície quente e para a direita na superfície fria.

Os números de Nusselt médios nas superfícies quente e fria em função do tempo adimensional são mostrados nas figuras 4.23 a 4.26 para os casos 1 e 2. Elas revelam que para o tempo adimensional zero o número de Nusselt médio possui um valor elevado, devido o fluido estar submetido a uma grande diferença de temperatura imposta pelas condições iniciais. Em seguida, à medida em que o tempo adimensional aumenta, este valor do número de Nusselt médio decresce até um valor mínimo. A partir de um determinado tempo adimensional, os números de Nusselt assumem valores constantes, o que significa que o regime permanente foi atingido.

Embora os resultados teóricos de convecção natural para os casos 1 e 2 do presente trabalho não possam até o presente momento serem comparados com outros resultados teóricos e experimentais, devido à inexistência de dados, acredita-se ter conseguido algum avanço no conhecimento do estudo da convecção na

tural em geometrias complexas.

5.2 - Contribuições do Presente Trabalho

A principal contribuição do presente trabalho foi obter resultados para o número de Nusselt em coletores concentradores com absorvedor cilíndrico e possibilitar o cálculo das perdas de calor por convecção natural no interior da cavidade.

Uma contribuição significante foi o estudo do escoamento que ocorre no interior da cavidade, visualizando as distribuições de temperaturas e o escoamento com uma ou mais de uma célula de convecção.

Uma outra contribuição não menos importante foi o desenvolvimento sistemático das equações para aplicação do método de elementos finitos. O programa computacional desenvolvido utilizou reduzida área de memória.

5.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente trabalho levantou questões que sugerem temas para futuros trabalhos:

a) Estudar experimentalmente a convecção natural nos coletores concentradores dos casos 1 e 2.

b) Estudar a influência do fator de concentração, fator de truncamento e do ângulo de inclinação no número de Nusselt para os coletores concentradores dos casos 1 e 2.

c) Verificar a influência do número de elementos nos resultados para os casos 1 e 2 do presente trabalho.

d) Estudar o comportamento da convecção natural do caso 1 e 2, com a temperatura do absorvedor variando em função do tempo adimensional.

e) Estudar a convecção natural em coletores concentradores com absorvedor triangular e outras formas.

APÊNDICE A1

GEOMETRIA E PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO CONCENTRADOR

A1.1 - Parâmetros Geométricos

A figura A1.1 mostra a secção transversal do coletor concentrador com absorvedor cilíndrico e a simbologia principal.

Definem-se os seguintes fatores de concentração do coletor:

i) fator de concentração geométrico ($\bar{C}$)

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}_c}{A_a} = \frac{1}{\text{sen}(\theta_{a_{max}})} , \qquad (A1.1)$$

ii) fator de concentração (C)

$$C = \frac{A_c}{A_a} , \qquad (A1.2)$$

onde A_c e $\bar{A}_c$ são as áreas das coberturas, A_a a área do absorvedor e $\theta_{a_{max}}$ é o semiângulo de aceitação do coletor concentrador. Qualquer raio incidente com ângulo θ_a maior que $\theta_{a_{max}}$ não atinge o absorvedor.

Quando se realiza o truncamento do coletor concentrador reduz-se consideravelmente as superfícies refletoras, sem perda considerável na eficiência ótica. Desta forma, consegue-se boa redução na quantidade de material gasto para a construção do coletor concentrador.

Define-se o fator de truncamento (Tr) pela relação:

$$Tr = \frac{H}{\bar{H}} , \qquad (A1.3)$$

onde $\bar{H}$ e H são, respectivamente, as alturas do coletor integral e do coletor truncado, conforme a figura A1.1.

Um aspecto importante desse tipo de coletor concentrador é que sua operação dispensa o rastreamento contínuo, bastando apenas alguns ajustes anuais no seu posicionamento.

A1.2 - Equações para Construção dos Refletores

O coletor concentrador com absorvedor cilíndrico, com toda a circunferência do absorvedor iluminada, apresentado por Rabl [26], possui uma região de difícil fabricação no encontro das duas superfícies refletoras com o absorvedor.

A solução apresentada por Zaparoli [1] resolve esse problema fazendo com que as superfícies refletoras encontrem o absorvedor com um pequeno arco de circunferência não iluminada que é função do ângulo ϕ_n conforme mostra a figura A1.1. A figura A1.2(a) mostra a geometria do caso 1, onde $\phi_n = 0^o$ e a figura A1.2 (b) mostra a geometria do caso 2, onde $\phi_n = 90^o$.

As equações desenvolvidas por Zaparoli [1] que permitem obter a geometria das superfícies refletoras do coletor concentrador com absorvedor cilíndrico, total ou parcialmente iluminado, são as seguintes:

$$\rho(\phi) = R(\phi - \phi_n) , \qquad (A1.4)$$

para $\phi_n \leq \phi \leq \pi/2 + \theta_{a_{max}}$;

$$\rho(\phi) = R\left[\frac{\phi+\theta_{a_{max}} + \pi/2 - 2\phi_n - \cos(\phi-\theta_{a_{max}})}{1 + \operatorname{sen}(\phi-\theta_{a_{max}})}\right] , \qquad \text{(A1.5)}$$

para $\quad \pi/2 + \theta_{a_{max}} \leq \phi \leq 3\pi/2 - \theta_{a_{max}}$,

onde R é o raio do tubo absorvedor e as demais variáveis são mostradas na figura A1.1.

As coordenadas X, Y dos pontos da superfície refletora são dadas por:

$$X = R\operatorname{sen}\phi - \rho\cos\phi \ , \qquad \text{(A1.6)}$$

$$Y = -R\cos\phi - \rho\operatorname{sen}\phi \ . \qquad \text{(A1.7)}$$

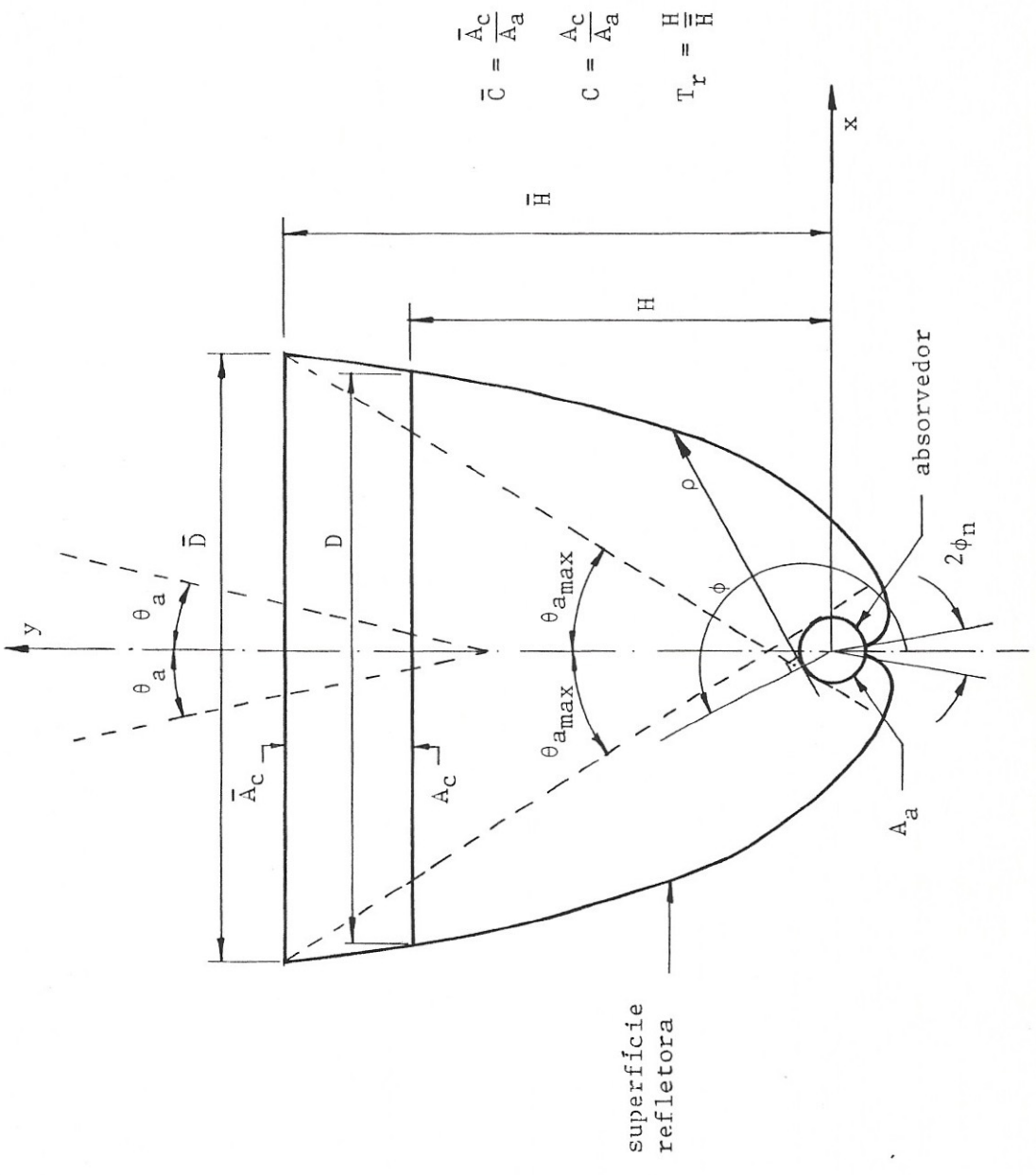


Figura Ai.1 - Simbologia principal do coletor concentrador.

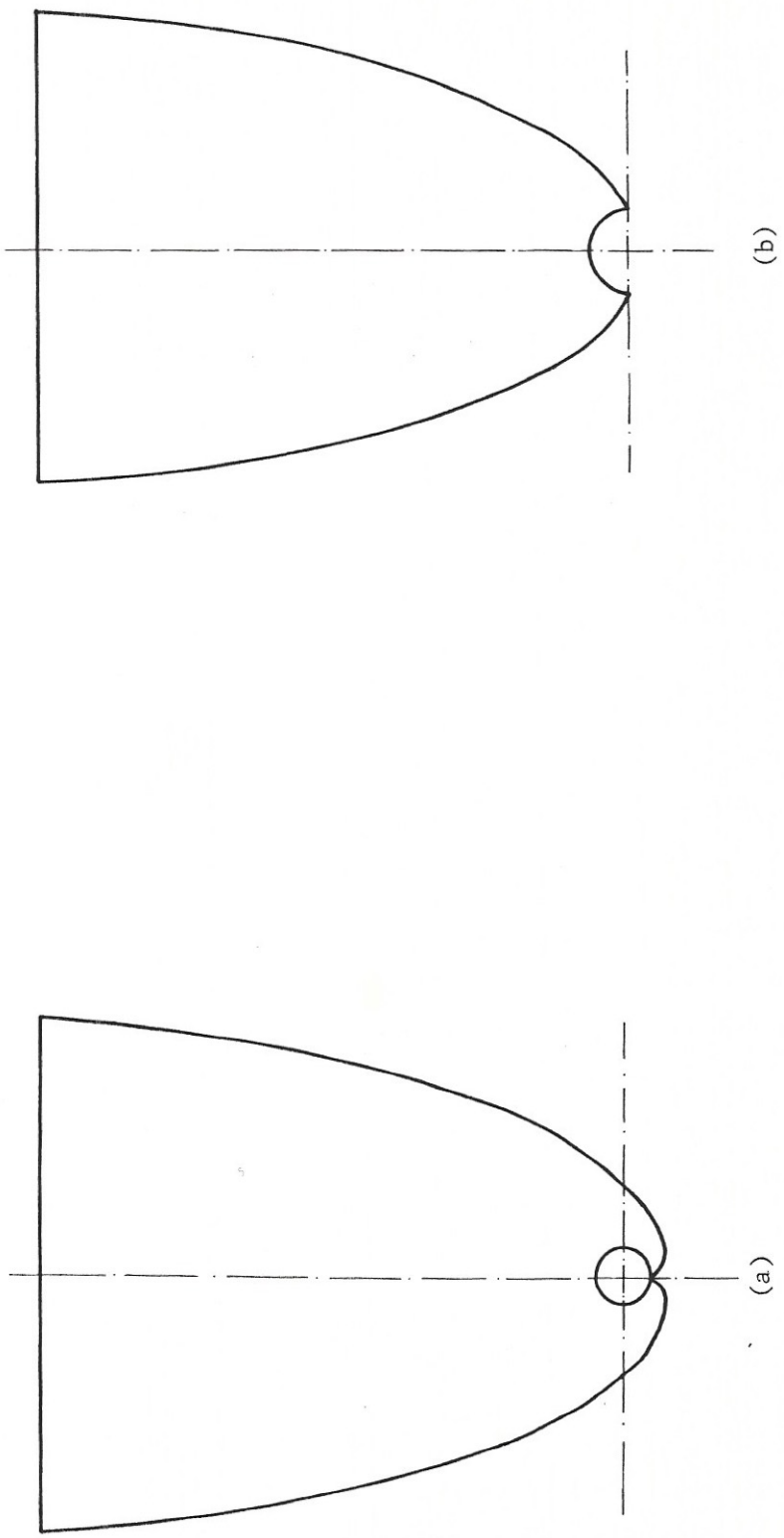


Figura A1.2 - Coletores concentradores com absorvedores cilíndricos para C=3,64 e T_r=0.5.
(a) Caso 1, ϕ_n=0º; (b) Caso 2, ϕ_n=90º

APÊNDICE A2

NÚMEROS ADIMENSIONAIS

Os parâmetros adimensionais utilizados neste trabalho são discutidos neste apêndice.

A figura A2.1 mostra a geometria do coletor concentrador e as condições de contorno consideradas na análise. A seguir são apresentados vários números adimensionais de interesse.

A2.1 - Número de Nusselt

Os números de Nusselt local e médio são definidos como:

$$Nu_L = \frac{hH}{K} \quad , \tag{A2.1}$$

$$Nu = \frac{\bar{h}H}{K} \quad , \tag{A2.2}$$

onde h é o coeficiente local de transferência de calor por convecção, $\bar{h}$ é o coeficiente médio de transferência de calor por convecção e K é a condutividade térmica do meio.

Os coeficientes de transferência de calor local e médio são definidos como:

$$h = \frac{q}{T_h - T_c} \quad , \tag{A2.3}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} h \, dS_1 \quad , \tag{A.2.4}$$

onde S_1 é a área do absorvedor e dS_1 é a área elementar sobre a

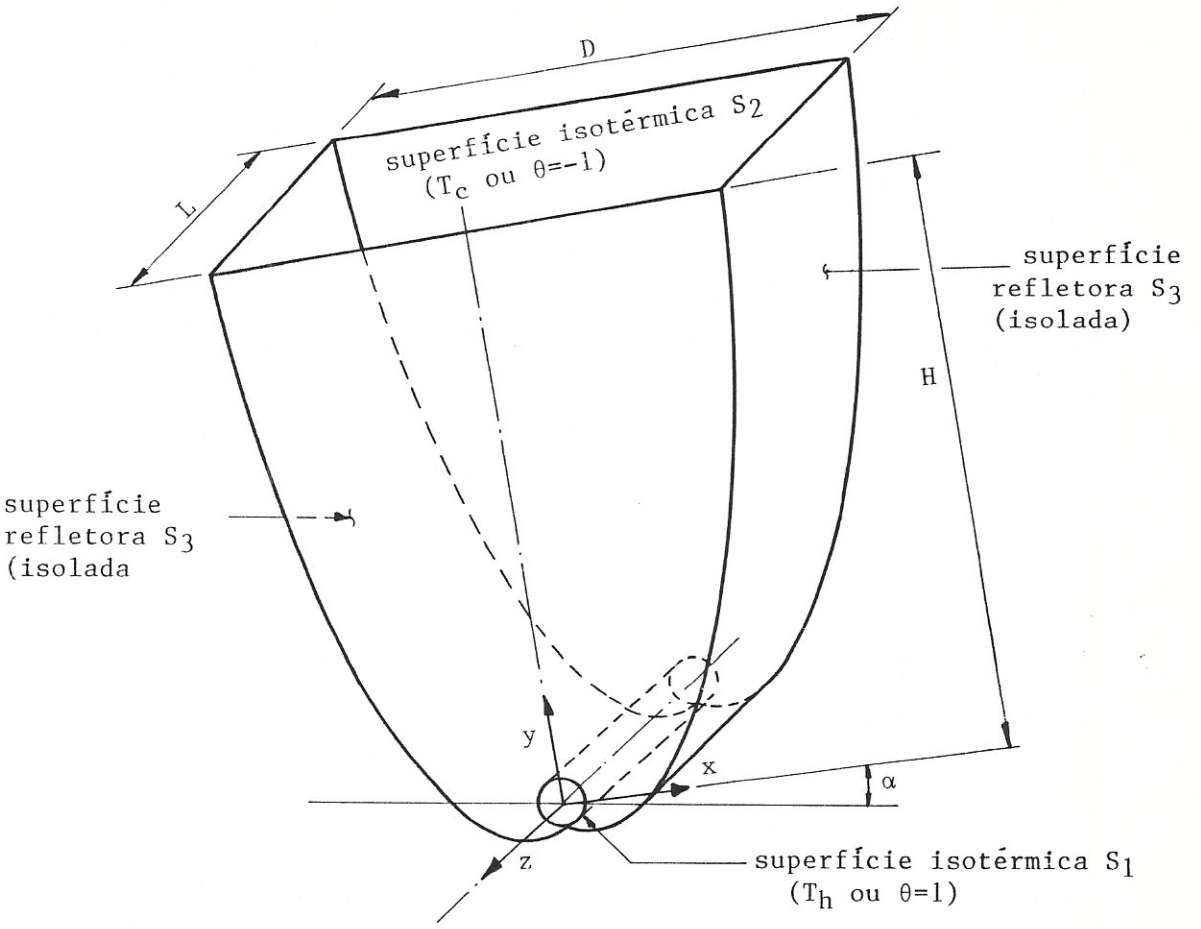


Figura A2.1 - Geometria do coletor e condições de contorno consideradas na análise

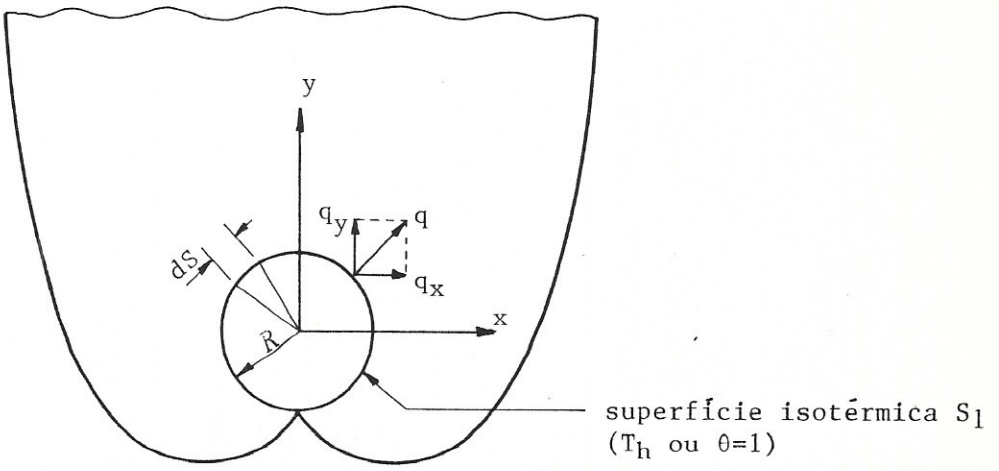


Figura A2.2 - Esquema mostrando o fluxo de calor em duas dimensões

superfície S_1, assim, $dS_1 = LdS$, conforme as figuras A2.1 e A2.2.

A figura A2.2 mostra o vetor fluxo de calor $\vec{q}$ que sai da superfície S_1 e a decomposição desse vetor nas suas componentes q_x e q_y. Aplicando a lei de Fourier nas direções x, y e normal à superfície, vem:

$$q_x = \frac{dQ_x}{dS_{1x}} = -K \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{S_1} , \tag{A2.5}$$

$$q_y = \frac{dQ_y}{dS_{1y}} = -K \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{S_1} , \tag{A2.6}$$

$$q = \frac{dQ}{dS_1}\Big|_{S_1} = K \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{S_1} . \tag{A2.7}$$

onde dQ (energia/tempo) representa um elemento de taxa de calor trocado entre o fluido e a superfície elementar de área dS_1.

Para o cálculo de q, deve-se compor vetorialmente q_x e q_y, resultando:

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} . \tag{A2.8}$$

Substituindo as equações (A2.5), (A2.6) e (A2.7) em (A2.3), vem:

$$h = \frac{q}{T_h - T_c} = \frac{K}{(T_h - T_c)} \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\Big|_{S_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\Big|_{S_1}} . \tag{A2.9}$$

Substituindo (A2.9) em (A2.1), vem:

$$Nu_L = \frac{hH}{K} = \frac{H}{(T_h - T_c)} \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\Big|_{S_1} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\Big|_{S_1}} . \tag{A2.10}$$

Substituindo os parâmetros adimensionais $Y=y/H$, $X=x/H$ e $\theta=(T-T_o)/(T_h-T_o)$, na equação (A2.10), resulta a seguinte equação para o número de Nusselt local no absorvedor:

$$Nu_L = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right)^2}\Bigg|_{S_1} . \qquad (A2.11)$$

Observando-se que $(\partial\theta/\partial x)$ é nulo na superfície S_2, o número de Nusselt local na cobertura pode ser obtido pela seguinte equação:

$$Nu_L = -\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial Y}\Bigg|_{S_2} . \qquad (A2.12)$$

O número de Nusselt médio para a superfície S é dado pela seguinte equação:

$$Nu = \frac{1}{S}\int_S Nu_L \Big|_S dS , \qquad (A2.13)$$

onde S pode ser a superfície S_1 ou S_2.

O fluxo de calor trocado por convecção natural na superfície do absorvedor é dado por:

$$Q_c = \bar{h}\, S_1 (T_h - T_c) = \frac{NuK}{H} S_1 (T_h - T_c) \qquad (A2.14)$$

A2.2 - Número de Grashof

O número de Grashof é definido como:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2} \qquad (A2.15)$$

A2.3 - Número de Prandtl

O número de Prandtl é definido pela equação:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} = \frac{\rho \nu C_p}{K} \qquad (A2.16)$$

A2.4 - Número de Rayleigh

O número de Rayleigh é definido pela equação:

$$Ra = Gr.Pr = \frac{\rho \beta C_p (T_h - T_c) H^3}{\nu K} \qquad (A2.17)$$

APÊNDICE A3

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL INDEPENDENTE DO TEMPO

A3.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional independente do tempo:

$$\delta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right) + Q_\phi = 0 \quad , \tag{A3.1a}$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_o(X,Y) \quad , \tag{A3.1b}$$

$$q = \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad , \tag{A3.1c}$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_o(X,Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo através da superfície S do contorno e δ é um parâmetro que assume valor constante.

A3.2 - Método Variacional

Do cálculo variacional sabe-se que o funcional equivalente das equações (A3.1) é dado por:

$$I = \int_v \frac{1}{2}\left[\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)^2 - 2Q_\phi.\phi\right]dv + \int_s q\phi dS \quad . \tag{A3.2}$$

A função ϕ que minimiza o funcional dado pela equação

(A3.2) é a solução das equações (A3.1).

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{v^e} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\frac{\partial \phi^e}{\partial X}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial \phi^e}{\partial Y}\right)^2\right] dV - \int_{v^e} Q_\phi^e . \phi^e dV + \int_{S^e} q^e . \phi^e dS \quad . \quad (A3.3)$$

A equação (A3.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I^e = \delta \int_{v^e} \frac{1}{2} \{\Phi\}^{eT} [B^e]^T [B^e] \{\Phi\}^e dV - \int_{v^e} Q_\phi^e [N^e] \{\Phi\}^e dv +$$

$$+ \int_{s^e} q^e [N^e] \{\Phi\}^e \, ds \quad , \qquad (A3.4)$$

onde:

$$\phi^e = [N^e] \{\Phi\}^e \quad , \qquad (A3.5)$$

$$\{g^e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi^e}{\partial X} \\ \\ \frac{\partial \phi^e}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial X} & \frac{\partial N_2^e}{\partial X} & \cdots & \frac{\partial N_m^e}{\partial X} \\ \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial Y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial Y} & \cdots & \frac{\partial N_m^e}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_m \end{Bmatrix}^e \qquad (A3.6)$$

ou na forma condensada:

$$\{g^e\} = [B^e]\{\Phi\}^e \quad , \qquad (A3.7)$$

onde m é o número de pontos nodais do elemento, $[B^e]$ contém as derivadas das funções de forma do elemento.

A minimização do funcional I^e é dado por:

$$\frac{\partial I^e}{\partial \{\Phi\}^e} = 0 \quad , \qquad (A3.8)$$

Substituindo a equação (A3.4) na equação (A3.8), obtém-se para cada termo:

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}^e}\int_{v^e}\delta\frac{1}{2}\{\Phi\}^{eT}[B^e]^T[B^e]\{\Phi\}^e dv = \int_{v^e}\delta[B^e]^T[B^e]\{\Phi\}^e dv \quad , \tag{A3.9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}^e}\int_{v^e} Q_\phi^e [N^e]\{\Phi\}^e dv = \int_{v^e}[N^e]^T Q_\phi^e dv \quad , \tag{A3.9b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}^e}\int_{s^e} q^e[N^e]\{\Phi\}^e ds = \int_{s^e}[N^e]^T q^e ds \quad . \tag{A3.9c}$$

Somando-se os segundos membros das equações (A3.9), vem:

$$\frac{\partial I^e}{\partial\{\Phi\}^e} = \int_{v^e}\delta[B^e]^T[B^e]\{\Phi\}^e dv - \int_{v^e}[N^e]^T Q_\phi^e dv + \int_{s^e}[N^e]^T q^e ds = 0 \quad . \tag{A3.10}$$

A equação (A3.10) pode ser escrita na seguinte forma condensada:

$$[K]^e\{\Phi\}^e + \{R\}^e = 0 \quad , \tag{A3.11}$$

onde:

$$[K]^e = \delta\int_{v^e}[B^e]^T[B^e]dv \quad , \tag{A3.12}$$

$$\{R\}^e = \int_{v^e} -[N^e]^T Q_\phi^e dv + \int_{s^e}[N^e]^T q^e ds \quad . \tag{A3.13}$$

A minimização do funcional I é dado por:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \sum_{e=1}^{E} I^e = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial \{\Phi\}^e} = 0 \quad . \tag{A3.14}$$

Substituindo a equação (A3.11) em (A3.14) resulta:

$$\frac{\partial I}{\partial \{\Phi\}} = \sum_{e=1}^{E} ([K]^e \{\Phi\}^e + \{R\}^e) = 0 \quad . \tag{A3.15}$$

A equação (A3.15) pode ser escrita na seguinte forma matricial global:

$$[K] \{\Phi\} + \{R\} = 0 \quad , \tag{A3.16}$$

onde:

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} \delta \int_{V^e} [B^e]^T [B^e] \, dV \quad , \tag{A3.17}$$

$$[R] = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^e} -[N^e]^T Q_\phi^e \, dV + \sum_{e=1}^{E} \int_{S^e} [N^e]^T q^e dS \quad . \tag{A3.18}$$

APÊNDICE A4

MÉTODO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DEPENDENTE DO TEMPO

A4.1 - Introdução

Seja a equação diferencial bidimensional dependente do tempo:

$$\delta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right) + Q_\phi = \lambda \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \quad , \tag{A4.1a}$$

com as condições de contorno:

$$\phi = \phi_o(X,Y) \quad , \tag{A4.1b}$$

$$q = \frac{\partial\phi}{\partial n} \quad , \tag{A4.1c}$$

onde ϕ é uma função escalar, $\phi_o(X,Y)$ uma função especificada no contorno, Q_ϕ é uma função especificada no domínio, q é o fluxo através da superfície S do contorno, λ e δ são parâmetros que assumem valores constantes e τ é o tempo adimensional.

A4.2 - Método Variacional

A equação (A4.1a) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\delta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right) + \left(Q_\phi - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right) = 0 \quad . \tag{A4.2}$$

O funcional equivalente das equações (A4.1) é dado por:

$$I = \int_v \frac{1}{2} \left[\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)^2 - 2\left(Q_\phi - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)\phi\right]dv + \int_s q\phi ds \quad , \tag{A4.3}$$

A função ϕ que minimiza o funcional é a solução da equação (A4.1) e $(Q_\phi - \lambda\partial\phi/\partial\tau)$ é uma função especificada.

O funcional para o elemento (e) é dado por:

$$I^e = \int_{v^e} \frac{1}{2} \left[\delta\left(\frac{\partial\phi^e}{\partial X}\right)^2 + \delta\left(\frac{\partial\phi^e}{\partial Y}\right)^2\right]dV + \int_{s^e} q^e\phi^e dS + \int_{v^e} -\left[Q_\phi^e - \lambda\frac{\partial\phi^e}{\partial\tau}\right]\phi^e dV. \tag{A4.4}$$

A equação (A4.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \sum_{e=1}^{E} \frac{\delta}{2} \int_{V^e} \{\Phi\}^{eT} [B^e]^T [B^e]\{\Phi\}^e \, dV + \sum_{e=1}^{E} \int_{S^e} q^e [N]^e \{\Phi\}^e ds + I_Q \quad , \tag{A4.5a}$$

onde $\phi^e = [N^e]\{\Phi\}^e$, $[B^e]$ é definido pela equação (A3.6) e I_Q é dado por:

$$I_Q = \sum_{e=1}^{E} \left\{\int_{V^e} -[N^e]\{\Phi\}^e Q_\phi^e \, dV + \int_{V^e} \lambda [N^e]\{\Phi\}^e [N^e] \frac{\partial\{\Phi\}^e}{\partial\tau} dV\right\} . \tag{A4.5b}$$

A minimização da equação (A4.5a) é dada por:

$$\frac{\partial I}{\partial\{\Phi\}} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I^e}{\partial\{\Phi\}^e} = 0 \tag{A4.6}$$

A minimização do termo I_Q é dado por:

$$\frac{\partial I_Q}{\partial\{\Phi\}} = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^e} -Q_\phi^e [N^e]^T dV + \sum_{e=1}^{E} \left[\int_{V^e} \lambda [N^e]^T [N^e] dV\right] \frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\tau} \quad . \tag{A4.7}$$

O primeiro e o segundo termo da equação (A4.5a), já minimizados, conforme mostra o apêndice 3, somados à equação (A4.7),

produzem o resultado:

$$[C]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\tau} + [K]\{\Phi\} + \{R\} = 0 \quad , \tag{A4.8a}$$

onde:

$$[C] = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^e} \lambda[N^e]^T [N^e] dV \quad , \tag{A4.8b}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^e} \delta[B^e]^T [B^e] dV \quad , \tag{A4.8c}$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^e} -Q_\phi^e [N^e]^T dV + \sum_{e=1}^{E} \int_{S^e} q^e [N^e]^T dS \quad . \tag{A4.8d}$$

A3.3 - Matriz do Elemento $[C^e]$

A matriz do elemento $[C^e]$ é dada por:

$$[C^e] = \int_{V^e} \lambda[N^e]^T [N^e] dV \quad . \tag{A4.9}$$

A matriz de forma para um elemento triangular é dada pela equação (3.7) da seguinte forma:

$$[N^e] = [N_i \quad N_j \quad N_k] \quad , \tag{A4.10}$$

onde N_i, N_j e N_k são dados pelas equações (3.6a), (3.6b) e (3.6c).

Considerando o elemento de espessura unitária, tem-se que dV=1.dS. Assim, das equações (A4.9) e (A4.10) vem:

$$[C^e] = \int_S \lambda \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} [N_i \quad N_j \quad N_k] \, dS \quad . \tag{A4.11}$$

Das equações (3.26) e (A4.11), vem:

$$[C^e] = \frac{\lambda\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \qquad (A4.12)$$

onde Δ é área do elemento dada pela equação (3.4).

A4.4 - Aproximação do termo $d\{\Phi\}/d\tau$

A figura A4.1 mostra os valores Φ_o e Φ_1 assumidos pela função ϕ, respectivamente, no tempo τ e $\tau+\Delta\tau$.

Usando-se um esquema de diferença finita central o termo $d\phi/d\tau$ pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\Phi_1 - \Phi_o}{\Delta\tau} \qquad (A4.13)$$

A derivada da grandeza ϕ para os pontos nodais no domínio do tempo pode ser calculada pela equação:

$$\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\tau} = \frac{d\{\Phi\}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau}\left(\{\Phi\}_1 - \{\Phi\}_o\right) = \{\dot{\Phi}\} \qquad (A4.14)$$

As matrizes $\{\Phi\}$ e $\{R\}$ devem ser avaliadas como:

$$\{\Phi\}^* = \frac{1}{2}\left(\{\Phi\}_1 + \{\Phi\}_o\right) , \qquad (A4.15)$$

$$\{R\}^* = \frac{1}{2}\left(\{R\}_1 + \{R\}_o\right) . \qquad (A4.16)$$

Substituindo (A4.15) e (A4.16) em (A4.8a), vem:

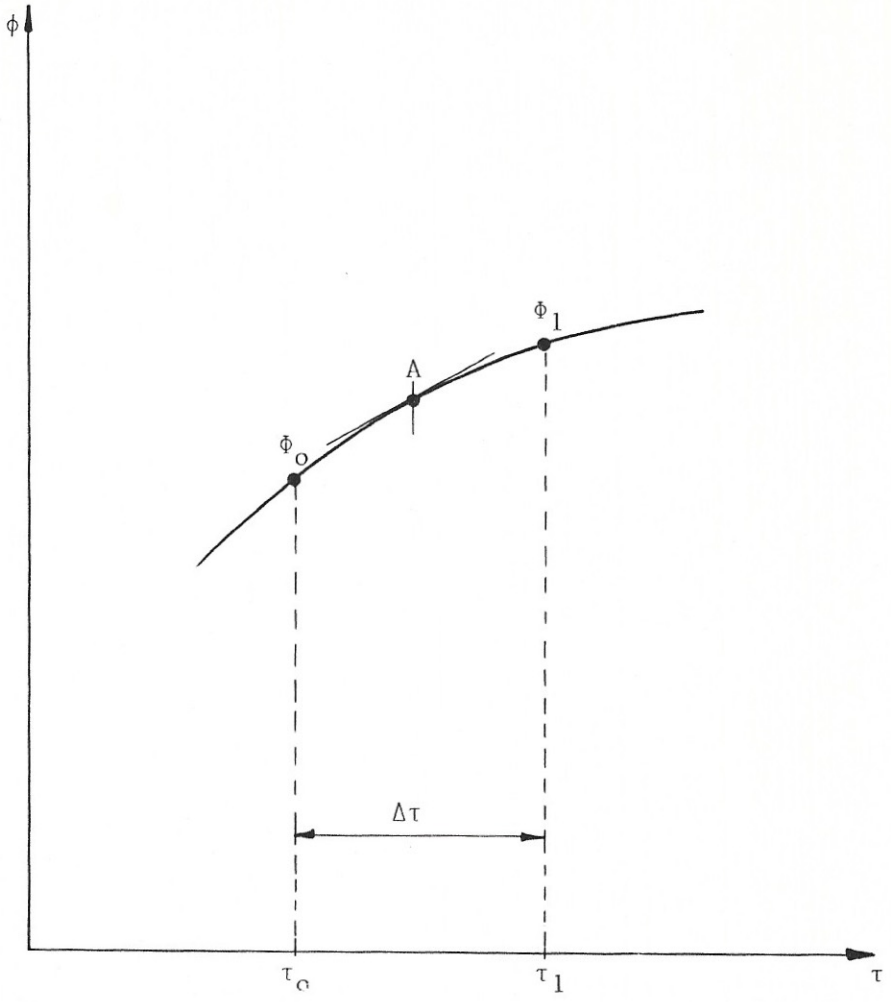


Figura A4.1 - Esquema de diferença finita central para a derivada $d\phi/d\tau$

$$\frac{1}{\Delta\tau}[C]\{\Phi\}_1 - \frac{1}{\Delta\tau}[C]\{\Phi\}_o + \frac{1}{2}[K]\{\Phi\}_1 + \frac{1}{2}[K]\{\Phi\}_o + \{R\}^* = 0 \qquad (A4.17)$$

A equação (A4.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[[K] + \frac{2}{\Delta\tau}[C]]\{\Phi\}_1 = [\frac{2}{\Delta\tau}[C] - [K]]\{\Phi\}_o - 2\{R\}^* \qquad (A4.18)$$

Das equações (A4.15) e (A4.18), resulta:

$$[[K] + \frac{2}{\Delta\tau}[C]]\{\Phi\}^* = \frac{2}{\Delta\tau}\{\Phi\}_o - \{R\}^* \qquad (A4.19)$$

A equação (A4.19) pode ser escrita na seguinte forma final:

$$[[K] + \frac{2}{\Delta\tau}[C]]\ \{\Phi\}_{novo} = \frac{2}{\Delta\tau}[C]\ \{\Phi\}_{velho} - \{R\} \qquad (A4.20)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ZAPAROLI, E.L., Concentrador Ideal para Absorvedor Cilíndrico com arco de Círculo não Iluminado, In: VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia,pp 365-375,1983.

[2] POOTS, G., Heat Transfer by Laminar Free Convection in Enclosed Plane Gas Layers, Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 11, Part 3, pp. 2567-2573, 1958.

[3] WILKES, J.O. e CHURCHILL, S.W., The Finite - Difference Computation in a Rectangular Enclosures, AIChE Journal, Vol. 12, No. 2, pp. 161-166, 1966.

[4] JAKOB, M., Free Heat Convection Through Enclosed Plane Gas Layers, Transactions of ASME, Vol. 63, pp. 189-193, 1946.

[5] DE VAHL DAVIS, G., Laminar Natural Convection in an Enclosed Rectangular Cavity, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 11, pp. 1675-1693, 1968.

[6] ELDER, J.W., Laminar Free Convection in a Vertical Slot, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 23, Part 1, pp. 77-98, 1965.

[7] MALLISON, G.D. e DE VAHL DAVIS, G., The Method of the False Transient for the Solution of Coupled Elliptic Equations, Journal of Computational Physics, Vol. 12, pp. 435-461, 1973.

[8] OZOE, H., SAYAMA, H. e CHURCHILL, S.W., Natural Convection in an Inclined Square Channel, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 17, pp. 401-406, 1974.

[9] OZOE, H., YAMAMOTO, K., SAYAMA, H. e CHURCHILL, S. W. , Natural Circulation in an Inclined Rectangular Channel Heated on One Side an Cooled on the Opposing Side, Int. J. Heated Mass Transfer, Vol. 17, pp. 1209-1217, 1974.

[10] MACGREGOR, R. K. e EMERY, A. F., Free Convection Through Vertical Plane Layers - Moderate and High Prandtl Number Fluids, Journal of Heat Transfer, Vol. 91, No. 3, pp. 391-403, 1969.

[11] MALLINSON, G.D. e DE VAHL DAVIS, G., Three-Dimensional Natural Convection in a Box: A Numerical Study, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 83, Part 1, pp. 1-31, 1977.

[12] OZOE, H., YAMAMOTO, K., SAYAMA, H. e CHURCHILL, S. W., Natural Convection Patterns in a Long Inclined Rectangular Box Heated From Below, Part II. Three-Dimensional Numerical Results, In. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 131-139, 1977.

[13] OZOE, H., SAYAMA, H. and CHURCHILL, S.W.,Natural Convection Patterns in a Long Inclined Rectangular Box Heated From Below. Part I, Three-Directional Photography, In. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, pp. 123-129, 1977.

[14] OZOE, H., YAMAMOTO, K., CHURCHILL, S. W. e SAYAMA, H. , Three-Dimensional Numerical Analysis of Laminar Natural

Convection in a Confined Fluid Heated from Below, ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 98, pp. 202-207, 1976.

[15] OZOE, H., YAMAMOTO, K. e CHURCHILL, S. W., Natural Convection in a Inclined Retangular Channel et Various Aspect Ratios and Angles-Experimentals Measurements, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 18, pp. 1425-1431, 1975.

[16] OZOE, H. YAMAMOTO, K. e CHURCHILL, S.W., Three- Dimensional Numerical Analysis of Natural Convection in an Inclined Channel with a Square Cross Section, AIche Journal, vol. 25, pp. 709-716, 1979.

[17] IYICAN, L., BAYAZITOGLU, Y. e WITTE, L.C., An Analytical Study of Natural Convective Heat Transfer Within a Trapezoidal Enclosure. Journal of Heat Transfer, vol. 102, pp. 640-647, 1980.

[18] IYICAN, L., WITTE, L.C. e BAYAZITOGLU, Y., An Experimental Study of Natural Convection in Trapezoidal Enclosure. Journal of Heat Transfer, Vol. 102, pp. 648-653, 1980.

[19] ABDEL-KHALIK, S.I., e RANDALL, K.R., Natural Convection in Compound Parabolic Concentrators - A Finite Element Solution, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 199 -204, 1978.

[20] MENON, G.J., Convecção Natural no Interior de Coletores Solares Concentradores de Parábolas Compostas. Tese de Doutoramento, ITA, São José dos Campos, 1984.

[21] HSIEH, C.K., Thermal Analysis of CPC Collectors, Solar Energy, Vol. 27, pp. 19-29, 1981.

[22] ZIENKIEWICZ, O.C., The finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.

[23] TABARROK, B., e LIN, R.C., Finite Element Analysis of Free Convection Flow, Int. J. Heat Transfer, Vol. 20, pp. 945-952, 1977.

[24] FIGUEREDO, J.R., GANZAROLLI, M.M. e ALMEIDA. P.I.F., Convec ção Natural em Cavidades Retangular - Solução Numérica, In: II Congresso Latinoamericano de Transferência de Calor e Matéria, São Paulo, pp. 62-73, 1986.

[25] WONG, H.H. e G.D. RAITHBY, Improved Finite - Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Aproximation Erros, Numerical Heat Transfer, Vol. 2, pp. 139-163, 1979.

[26] RABL, A., Solar Concentrators with Maximal Concentration for Cylindrical Absorbers, Applied Optics, Vol. 15, pp. 1871-1873, 1976.

DAT 26 / 08 / 19 88
PR.
PRA. PPG
LIV.
NCrS DOAÇÃO

EFEI / BIBLIOTECA

ESTE LIVRO DEVE SER DEVOLVIDO NA ÚLTIMA DATA CARIMBADA.

29.12.2005		
04.11.2005		

EFEI - BIBLIOTECA MAUÁ
8200519
NÃO DANIFIQUE ESTA ETIQUETA