

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

Anderson Antunes Nogueira

Aspectos do modelo de Lee-Wick abeliano.

**Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada
Como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Física e
Matemática Aplicada.**

**Área de Concentração: Teoria de Campos,
Gravitação e Cosmologia.**

Orientador: Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

**Abril de 2012
Itajubá - MG**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá ó
Bibliotecária Cristiane N. C. Carpinteiro-CRB_6/1702

N778a

Nogueira, Anderson Antunes
Aspectos do modelo de Lee-wick abeliano. / por Anderson Antunes
Nogueira. -- Itajubá (MG) : [s.n.], 2012.

57 p. : il.

Orientador : Prof. Dr. Fabricio Augusto Barone Rangel.
Dissertação (Mestrado) ó Universidade Federal de Itajubá.

1. Teoria quântica de campos. 2. Teoria de calibre. 3. Lee-wick. I. Rangel, Fabricio Augusto Barone, orient. II. Universidade Federal de Itajubá.
III. Título.

Conteúdo

Sumário	i
I Introdução	1
II O Propagador e Aspectos Clássicos	4
II.1 Obtenção do Propagador	4
II.2 Distribuições de cargas e dipólos em branas paralelas	7
II.3 Campo de uma Corda de Dirac no modelo de Lee-Wick	12
II.4 Ondas para o campo de Lee-Wick	19
III Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de planos condutores.	22
III.1 Plano condutor perfeito e uma carga pontual	23
III.2 Interação entre dois planos condutores perfeitos: o Efeito Casimir	32
III.2.1 Propagador na presença dos condutores	32
III.2.2 Densidade de Energia	38
III.2.3 Força de Casimir	39
IV Conclusões, perspectivas e comentários finais	46
A Método de Fadeev-Popov	49
B Integrais d-dimensionais	51
Referências Bibliográficas	54

Resumo

Nesta dissertação investigamos alguns aspectos da chamada Eletrodinâmica de Lee-Wick, que consiste em uma teoria de calibre abeliana cujo campo de calibre contém massa. Utilizamos o formalismo de integrais de caminho de Feynman.

Na primeira parte deste texto estudamos a interação entre fontes estacionárias para o campo, que simulam a presença de cargas e dipólos em branas paralelas em um número arbitrário de dimensões. Investigamos também o campo magnético produzido por uma corda de Dirac e interação entre duas destas cordas na eletrodinâmica de Lee-Wick. Por fim, estudamos ondas no âmbito de teoria clássica de campos.

A segunda parte da dissertação esta dedicada ao estudo de efeitos oriundos da presença de fronteiras que impõem condições de contorno no campo vetorial na teoria de Lee-Wick. Em específico, estudamos a interação entre um plano condutor perfeito e uma carga pontual e a interação entre dois planos condutores paralelos. Podemos dizer que estudamos correções ao método das imagens e ao efeito Casimir na teoria de Lee-Wick. Nos restringimos sempre a situação onde o parâmetro de massa do campo, característico do modelo, é muito grande.

Abstract

In this dissertation we investigated some aspects of the Lee-Wick electrodynamics, which consists in a gauge theory with a massive gauge field. We employ the Feynman path integral formalism.

In the first part of this text we study the interaction between stationary sources for the field, which simulate the presence of charges and dipoles along parallel branes in arbitrary number of dimensions. We also investigated the magnetic field produced by a Dirac string and the interaction between two Dirac strings in the Lee-Wick electrodynamics. Lastly, we study waves in the context of classical theory of fields.

The second part of this dissertation is devoted to the study of effects due to the presence of boundaries that impose boundary conditions in the vector field in the Lee-Wick theory. In particular, we study the interaction between one perfect conducting plane and one point charge and the interaction between two parallel conducting planes. We can say that we study corrections to the method of images and the Casimir effect in the Lee-Wick theory. We always restrict to the situation where the mass parameter, typical of the model, is very large.

Capítulo I

Introdução

Estamos interessados neste trabalho em estudar alguns aspectos clássicos e quânticos de uma teoria proposta por Lee e Wick(LW) em meados de 1970[1, 2]. A proposta de Lee e Wick se resume apenas numa modificação do propagador do fóton no âmbito de Eletrodinâmica Quântica(QED). Apesar da modificação do propagador do fóton os diagramas de Feynman desta teoria se mantêm invariantes relativísticos, o campo não físico A_μ possui invariância de calibre e a matriz S é unitária. Agora, como conseqüências novas, possui finitude na renormalização da massa, carga e função de onda. A teoria de LW pode ser pensada em uma eletrodinâmica com fótons massivos mas com invariância de calibre. É importante ressaltar que a auto-energia de uma carga pontual nessa teoria é finita.

Existe uma semelhança entre o modelo de LW e a regularização de Pauli-Vilars[7] no sentido de cancelar as divergências quadráticas dos diagramas de Feynman.

Nossa abordagem se resume apenas no campo eletromagnético, apesar deste modelo ser de grande utilidade no contexto de QED onde ampliamos nosso alcance quando acoplamos o campo de Dirac ao campo de LW, buscando compreender pontos como, por exemplo, tempo de vida e espalhamento de partículas, assim como outros fenômenos físicos. No próprio artigo pioneiro de LW[2], estuda-se algumas conseqüências experimentais como por exemplo, o cálculo da secção de choque associada a produção de pares elétron-pósitron e correções na razão giromagnética do muon.

Além dos resultados da QED de LW, também existem estudos sobre teorias de calibre não-abelianas do tipo LW ([3, 4, 5, 6, 8]), para o que conhecemos como modelo padrão de Lee-Wick(LWSM), assunto que tem despertado muito interesse recentemente.

Teorias tipo LW têm importância não somente no contexto microscópico, como também no contexto de grandes escalas. Sabemos que nosso universo passou por um período de altas energias, portanto, uma modificação na descrição da física de pequenas escalas nos leva a uma evolução distinta do Universo. Deste modo, partindo de uma teoria de Lee-Wick do tipo escalar e estudando a cosmologia deste modelo encontramos um universo não singular com uma escala primordial muito menor do que a escala de Planck[9, 10, 11].

Como vimos, existem trabalhos em cosmologia apenas com matéria modelada pelo campo escalar, porém é possível trabalhar em cosmologia apenas com radiação modelada pelo campo vetorial de LW[12].

É um fato bem conhecido na literatura que se quantizarmos a Teoria da Relatividade Geral esta é não renormalizável [13]. Teorias não renormalizáveis podem ser renormalizadas em cada ordem de laços inserindo contra termos na densidade de Lagrangeana, com o objetivo de fazer algumas previsões. No entanto, ao aumentarmos a ordem dos laços necessitamos de mais contra termos. Observamos estudos de LW nesta linha de pesquisa[14, 15], onde o objetivo é acoplar o campo dos gravitons com um campo de calibre, escalar ou fermiônico e cancelar as divergências nos diagramas de Feynman até a ordem de 1-laço.

Um outro tópico muito interessante no qual LW é abordado na literatura é o de Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita[16, 17]. Isto é nada mais nada menos do que a Estatística de Teoria Quântica de Campos[18] cujo intuito é recuperar conceitos de temperatura e variáveis termodinâmicas por meio da função partição. A função partição está intrinsecamente relacionada a amplitude de transição da teoria proposta, ou melhor, a matriz S.

É importante ressaltar que a teoria de LW é renormalizável[19, 20]. De maneira simples, uma teoria renormalizável é aquela a qual podemos obter resultados físicos e testá-los experimentalmente, ou seja, possui um número finito de constantes de acoplamento necessárias para desaparecer com as divergências nos diagramas de Feynman.

No capítulo II desta dissertação iniciamos quantizando a teoria de LW abeliana com o objetivo de obter seu propagador, a partir do qual discutiremos, nas primeiras seções, as interações entre distribuições de cargas e dipólos em dimensões arbitrárias. Discutimos também, algumas propriedades da corda de Dirac no contexto de LW e de ondas planas do ponto de vista de teoria clássica de campos. No capítulo III analisamos efeitos de origem genuinamente quântica, iniciando com a investigação de alterações impostas na teoria de LW (em comparação com a

teoria de Maxwell) entre um plano condutor (espelho perfeito) e uma carga pontual. Em um certo sentido podemos dizer que estudamos perturbações no método das imagens em LW. Estudamos também a interação entre dois planos condutores perfeitos e paralelos entre si no modelo de LW no regime de baixas energias e com o parâmetro de massa grande. Podemos dizer que estudamos correções ao efeito Casimir no modelo de LW. Ao longo do capítulo procedemos a quantização do modelo na presença de um e de dois planos condutores perfeitos (nesse segundo caso os planos são paralelos entre si). O capítulo IV é dedicado as conclusões e comentários finais.

Capítulo II

O Propagador e Aspectos Clássicos

Neste capítulo fazemos um estudo sobre aspectos gerais do modelo de Lee-Wick abeliano. Iniciamos com o tratamento quântico por integrais de caminho, feito de forma não rigorosa, do modelo em questão e calculamos o funcional gerador e o propagador da teoria. É importante lembrar que o tratamento rigoroso da quantização do modelo emprega técnicas sofisticadas de quantização de teorias de calibre [21].

Posteriormente analisamos alguns aspectos clássicos da teoria, como a interação entre fontes estacionárias e a propagação de ondas. Consideramos em especial a interação entre cargas pontuais estacionárias em dimensões arbitrárias. Tivemos um indício, com os resultados obtidos, que o modelo fornece interação não divergente entre duas cargas (no limite quando a distancia entre as mesmas tende a zero) somente até $3 + 1$ dimensões. Estudamos também o campo produzido por um solenóide fino (corda de Dirac) e encontramos a energia de interação entre dois solenóides, paralelos, deste tipo.

Fazemos também um breve estudo sobre soluções de ondas propagantes na ausência de fontes no modelo.

II.1 Obtenção do Propagador

Nesta seção procedemos, sem muito rigor, a quantização do modelo de Lee-Wick abeliano no formalismo de integral de caminho, através do qual obtemos o propagador do modelo em questão, o que caracteriza nosso maior objetivo.

É importante ressaltar que o tratamento rigoroso da quantização por integral de caminho

do modelo de Lee-Wick abeliano pode ser executado com o uso do formalismo BRST, sendo que nesse caso se faz necessário o tratamento de campos com derivadas de ordem superior [22, 23]. A exposição desta abordagem requer o estudo sobre técnicas sofisticadas de quantização de teorias de calibre e está fora do escopo desta dissertação. Apesar disto, pode-se mostrar que [21] a quantização do modelo de Lee-Wick abeliano se dá pela simples introdução de um termo de fixação de calibre, de forma idêntica à teoria de Maxwell.

O modelo de Lee-Wick abeliano é descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} - \frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\xi} - J_\mu A^\mu, \quad (\text{II.1})$$

onde J^μ é um quadri-vetor corrente externa,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \square &= \partial_\mu \partial^\mu \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

é o tensor intensidade de campo eletromagnético, A^μ é o potencial vetor e m é um parâmetro característico da teoria, com dimensão de massa. O termo associado ao parâmetro ξ é advindo do truque de Fadeev-Popov para quantização de sistemas de calibre ¹.

O funcional gerador da teoria pode ser obtido pela integral funcional

$$Z[J_\mu] = \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]. \quad (\text{II.3})$$

Utilizando apenas o teorema da divergência de Gauss e sabendo que nosso campo não físico A_μ se anula nas bordas de nosso espaço-tempo, concluímos que

$$Z[J_\mu] = \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left\{ A_\mu \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{m^2} (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \square \right) A_\nu - J_\mu A^\mu \right\} \right]. \quad (\text{II.4})$$

Com o intuito de simplificar a notação, definimos o operador diferencial,

$$O^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu + \frac{\square}{m^2} (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu), \quad (\text{II.5})$$

e reescrevemos o nosso funcional gerador como

$$Z[J_\mu] = \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right]. \quad (\text{II.6})$$

¹Ressaltamos que a justificativa rigorosa para a utilização do método de Fadeev-Popov requer um tratamento quântico mais elaborado da teoria

Pois bem, como estamos integrando sobre todas as configurações de campo possíveis, podemos fazer uma translação nos campos A^μ (variáveis de integração). Por conveniência fazemos

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \int d^4y D_{\mu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) . \quad (\text{II.7})$$

onde a função $D_{\mu\lambda}(x, y)$ denota a inversa do operador (II.5) no seguinte sentido:

$$O^{\mu\nu} D_{\nu\lambda}(x, y) = \delta^4(x - y) \eta^\mu{}_\lambda . \quad (\text{II.8})$$

Conseqüentemente, temos o seguinte argumento da exponencial de nosso funcional gerador,

$$\left(A_\mu + \int d^4y D_{\mu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) \right) \frac{O^{\mu\nu}}{2} \left(A_\nu + \int d^4y D_{\nu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) \right) - J^\mu \left(A_\mu + \int d^4y D_{\mu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) \right) . \quad (\text{II.9})$$

Translações resultam em jacobianos iguais a identidade, portanto a medida de integração funcional em (II.6) não é alterado.

Observando que o operador diferencial (II.5) tem a liberdade de atuar a esquerda ou a direita, conforme o conveniente², o que pode ser demonstrado com uma sucessão de duas integrais por partes, podemos escrever

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= N \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) \right] \\ Z[0] &= N = \int DA_\mu \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Resta-nos agora encontrar a função $D_{\mu\lambda}(x, y)$, que chamaremos, de agora em diante, de propagador. Para isso, propomos uma transformada de Fourier com o seguinte *ansatz*

$$D_{\nu\lambda}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{\nu\lambda}(p) \exp \left[-ip(x - y) \right] . \quad (\text{II.11})$$

Substituindo (II.11) e a representação de Fourier da função delta de Dirac

$$\delta(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp \left[-ip(x - y) \right] \quad (\text{II.12})$$

em (II.10), temos

$$\left[-\eta^{\mu\nu} p^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu + \frac{p^2}{m^2} (\eta^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \right] D_{\nu\lambda}(p) = \eta^\mu{}_\lambda . \quad (\text{II.13})$$

² $\int d^4x d^4y D_{\mu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) [O^{\mu\nu} A_\nu(x)] = \int d^4x d^4y [O^{\mu\nu} D_{\mu\lambda}(x, y)] J^\lambda(y) A_\nu(x)$ pois $A_\mu(x)$ se anula nas bordas de nosso espaço-tempo.

Reduzimos, então, o problema de encontrar o propagador a um problema algébrico de encontrar $D_{\nu\lambda}(p)$, o qual pode ser resolvido com o seguinte *ansatz*

$$D_{\nu\lambda}(p) = A\eta_{\nu\lambda} + Bp_\nu p_\lambda, \quad (\text{II.14})$$

o que fornece

$$\begin{aligned} A &= \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \\ B &= -\frac{A}{p^2} \left[1 + \xi \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Por fim, concluímos que o propagador da teoria é dado por³

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[1 + \xi \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\} \exp[-ip(x - y)]. \quad (\text{II.16})$$

Com o propagador (II.16) temos o funcional gerador (II.10) da teoria (II.1), o que nos permite calcular quantidades físicas do modelo em questão.

II.2 Distribuições de cargas e dipólos em branas paralelas

Esta seção tem o objetivo de expor como se dá a interação entre fontes estacionárias intermediada pelo campo vetorial no modelo (II.1). Vamos nos restringir ao caso onde as fontes se distribuem ao longo de branas paralelas e D -dimensionais. Primeiramente, como vamos trabalhar em dimensões arbitrárias, definimos a seguinte notação

$$x = (x^0, \mathbf{x}_\perp, \mathbf{x}_\parallel), \quad (\text{II.17})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp &= (x^1, \dots, x^d) \\ \mathbf{x}_\parallel &= (x^{d+1}, \dots, x^{d+D}). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Vamos também utilizar uma notação similar para o momentum p . A assinatura da métrica é dada por $(1, -1, \dots, -1)$.

³No caso do eletromagnetismo o propagador pode ser encontrado de maneira análoga[24, 25].

De imediato vemos que o caso da obtenção do propagador pode ser estendido para dimensões arbitrárias de maneira direta, em relação ao que fizemos na seção anterior. Desse modo, o funcional gerador é escrito como

$$Z[J_\mu] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^{1+d+D}x d^{1+d+D}y J_\mu(x) D^{\mu\nu}(x, y) J_\nu(y) \right] \quad (\text{II.19})$$

com o propagador sendo dado por,

$$D^{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^{1+d+D}p}{(2\pi)^{1+d+D}} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \left[1 + \xi \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\} \exp \left[-ip(x - y) \right]. \quad (\text{II.20})$$

Inserimos agora a seguinte corrente externa

$$J_\mu = \eta_{\mu 0} \sum_{k=1}^N \lambda_k \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k), \quad (\text{II.21})$$

que representa uma distribuição estacionária e uniforme de cargas ao longo de N branas paralelas, como discutido na referencia [26]. A quantidade λ_k é uma constante relacionada a densidade de carga ao longo da brana k .

Utilizando o fato de que o funcional gerador, no limite quando $T \rightarrow \infty$, é dado por ⁴

$$Z = \exp \left[-iET \right], \quad (\text{II.22})$$

sendo E a menor energia de nosso sistema físico (estado fundamental), somos levados ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N \lambda_k \lambda_s \frac{1}{2T} \mathbf{I}_{k,s} \quad s \neq k \\ \mathbf{I}_{k,s} &= \int \int d^{1+d+D}x d^{1+d+D}y \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k) D_{00}(x, y) \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_s), \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

onde descartamos os termos de auto-interação (interação de uma brana consigo mesma) ao desconsiderarmos, na soma acima, os termos com $s = k$.

De maneira explícita temos

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{k,s} &= \int \int d^0x d^0y \int \int d^D \mathbf{x}_\parallel d^D \mathbf{y}_\parallel \int \int d^d \mathbf{x}_\perp d^d \mathbf{y}_\perp \\ &\times \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k) \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_s) \\ &\times \int \frac{dp^0}{2\pi} \int \frac{d^D \mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^D} \int \frac{d^d \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} \end{aligned}$$

⁴ Z representa uma amplitude de transição, qual seja, $Z = \langle f | \hat{U}(t_f, t_i) | i \rangle = \langle 0 | \exp[-i\hat{H}T] | 0 \rangle$.

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left[-ip^0(x^0 - y^0)\right] \exp\left[ip_{\parallel} \cdot (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{y}_{\parallel})\right] \exp\left[ip_{\perp} \cdot (\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp})\right] \\
& \times \left(\frac{-1}{p^{02} - \mathbf{p}_{\parallel}^2 - \mathbf{p}_{\perp}^2} + \frac{1}{p^{02} - \mathbf{p}_{\parallel}^2 - \mathbf{p}_{\perp}^2 - m^2}\right) \\
& \times \left\{1 - \frac{p^{02}}{p^2} \left[1 + \xi \left(\frac{p^2}{m^2} - 1\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{II.24}$$

Integrando em $d^d \mathbf{x}_{\perp}$, $d^d \mathbf{y}_{\perp}$, $d^0 x$ e $d^D \mathbf{x}_{\parallel}$, utilizando o fato de que

$$\delta(p) = \int \frac{dx}{2\pi} \exp[ipx], \tag{II.25}$$

e integrando em dp^0 e $d^D \mathbf{p}_{\parallel}$ temos que

$$\mathbf{I}_{k,s} = \int dy^0 \int d^D \mathbf{y}_{\parallel} \int \frac{d^d \mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{\mathbf{p}_{\perp}^2} - \frac{1}{\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2}\right) \exp\left[ip_{\perp} \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_s)\right]. \tag{II.26}$$

Neste instante temos o problema matemático de efetuar as integrais acima. Isto é feito posteriormente no Apêndice B. O resultado é dado por

$$\mathbf{I}_{k,s} = \begin{cases} TL^D \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left[2^{\left(\frac{d}{2}-2\right)} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) (a_{ks})^{2-d} - m^{d-2} G_d(ma_{ks})\right] & d \neq 2 \\ TL^D \frac{1}{(2\pi)} \left[\ln\left(\frac{ma_{ks}}{2}\right) + \gamma - G_2(ma_{ks})\right] & d = 2 \end{cases} \tag{II.27}$$

onde $G_d(x)$ é definido em termos da função de Bessel K ,

$$G_d(x) = x^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}-1}(x) \tag{II.28}$$

Γ designa a função gamma, γ é a constante de Euler e definimos a distância

$$a_{ks} = |\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_s|, \tag{II.29}$$

e a área das branas $L^D = \int d^D \mathbf{y}_{\parallel}$. Identificamos também $T = \int dy^0$.

Desse modo, com o resultado (II.27) em mãos, podemos escrever a densidade de energia por unidade de área das branas, $\mathcal{E} = E/L^D$ como segue

$$\mathcal{E} = \frac{E}{L^D} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{k \neq s} \lambda_k \lambda_s \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left[2^{\left(\frac{d}{2}-2\right)} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) (a_{ks})^{2-d} - m^{d-2} G_d(ma_{ks})\right] & d \neq 2 \\ \frac{1}{2} \sum_{k \neq s} \lambda_k \lambda_s \frac{1}{(2\pi)} \left[-\ln\left(\frac{ma_{ks}}{2}\right) - \gamma - G_2(ma_{ks})\right] & d = 2 \end{cases} \tag{II.30}$$

A densidade de força sobre a brana α é dada pela expressão abaixo,

$$\mathcal{F}_{\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_{\alpha\beta}}\right) \frac{\mathbf{a}_{\alpha\beta}}{a_{\alpha\beta}}, \quad \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha} - \mathbf{a}_{\beta}. \tag{II.31}$$

Como resultado temos uma única expressão para a força

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_\beta}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} (a_{\alpha\beta})^{d-1}} \left[2^{\left(\frac{d}{2}-1\right)} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) - (ma_{\alpha\beta})^{\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}}(ma_{\alpha\beta}) \right] \frac{\mathbf{a}_{\alpha\beta}}{a_{\alpha\beta}} \quad d = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.32})$$

onde usamos o fato de que

$$\frac{\partial G_d(x)}{\partial x} = -x^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}}(x). \quad (\text{II.33})$$

Os resultados (II.30) e (II.32) indicam que a interação entre as fontes estacionárias se dá como a soma de uma parte coulombiana, de origem repulsiva (cargas de sinais iguais se repelem) e uma contribuição dos modos com massa, de natureza atrativa (cargas de sinais iguais se atraem).

Para este fato ficar mais explícito, vamos tomar o caso de duas branas pontuais em $3 + 1$ dimensões, que corresponde a fazer $d = 1$ e $D = 0$ em (II.30), o que fornece

$$E = \frac{\lambda_k \lambda_s}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{\exp(-ma)}{a} \right). \quad (\text{II.34})$$

O resultado acima se compõe pela energia de interação coulombiana, de longo alcance, de natureza repulsiva, mais uma contribuição tipo Yukawa, mas de natureza atrativa.

É interessante verificar o comportamento da energia (II.30) quando as distâncias $a_{\alpha\beta}$ tendem a zero. Para isso nos restringimos ao caso de duas branas pontuais (o que corresponde a tomar $D = 0$) e consideramos um espaço $1 + 1$, $2 + 1$, $3 + 1$ ou $4 + 1$ dimensional, o que nos fornece

$$\begin{aligned} E(d=1) &= -\lambda_1 \lambda_2 \frac{m}{4} a^2 + \mathcal{O}(a^3) \\ E(d=2) &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{m}{4} \left[\ln\left(\frac{ma}{2}\right) + (\gamma - 1) \right] (ma)^2 + \mathcal{O}[a^4 \ln(ma)] \\ E(d=3) &= -\lambda_1 \lambda_2 \frac{m^2}{8\pi} a + \mathcal{O}(a^2) \\ E(d=4) &= -\lambda_1 \lambda_2 \frac{m^2}{16\pi^2} \left[2 \ln\left(\frac{ma}{2}\right) + (2\gamma - 1) \right] + \mathcal{O}[a^2 \ln(ma)] \\ E(d=5) &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{m^2}{16\pi^2} \frac{1}{a} + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

onde descartamos todos os termos independentes de a uma vez que estes não contribuem para a força entre as branas ⁵.

⁵Isso equivale a descartar um termo constante na energia.

Para $d = 1, 2, 3$ as energias (II.35) não divergem na origem (para $a = 0$). Esse comportamento é conhecido para a Teoria de Lee-Wick no caso $d = 3$. Para os casos $d = 4, 5$ as energias (II.35) continuam a divergir na origem. Pode-se verificar que esse comportamento divergente com a continua a aumentar para valores mais altos de d . Portanto a teoria de Lee-Wick resolve o problema da divergência da carga pontual somente até $3 + 1$ dimensões⁶.

Até onde sabemos, a existência das divergências para $d > 3$ não é um fato conhecido na literatura.

Vamos agora estudar a interação entre distribuições estacionárias de dipolos ao longo de branas paralelas D -dimensionais. Tais distribuições são descritas pela densidade de corrente

$$J_\mu = \eta_{\mu 0} \sum_{k=1}^N V_{(k)}^\nu \partial_\nu [\lambda_k \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k)] \quad (\text{II.36})$$

onde o quadri-vetor $V_{(k)}^\nu$ e o parâmetro λ_k estão relacionados a densidade de momento de dipolo ao longo da brana k .

Procedendo de forma totalmente análoga ao que fizemos no caso de distribuições de cargas, podemos escrever

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N \lambda_k \lambda_s \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{k,s} \quad s \neq k \\ \mathcal{I}_{k,s} &= \int \int d^{1+d+D} x d^{1+d+D} y \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k) \left(V_k^\mu V_s^\nu \partial_\mu \partial_\nu D_{00}(x, y) \right) \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_s). \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

A integral $\mathcal{I}_{k,s}$ acima pode ser calculada como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k,s} &= \int \int d^0 x d^0 y \int \int d^D \mathbf{x}_\parallel d^D \mathbf{y}_\parallel \int \int d^d \mathbf{x}_\perp d^d \mathbf{y}_\perp \\ &\times \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_k) \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_s) \\ &\times \int \frac{dp^0}{2\pi} \int \frac{d^D \mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^D} \int \frac{d^d \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} \\ &\times \exp \left[-ip^0(x^0 - y^0) \right] \exp \left[i\mathbf{p}_\parallel \cdot (\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel) \right] \exp \left[i\mathbf{p}_\perp \cdot (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) \right] \\ &\times \left(\frac{-1}{p^{02} - \mathbf{p}_\parallel^2 - \mathbf{p}_\perp^2} + \frac{1}{p^{02} - \mathbf{p}_\parallel^2 - \mathbf{p}_\perp^2 - m^2} \right) \\ &\times \left\{ 1 - \frac{p^{02}}{p^2} \left[1 + \xi \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) \right] \right\} V_k^\mu p_\mu V_s^\nu p_\nu. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Integrando em $d^d \mathbf{x}_\perp$, $d^d \mathbf{y}_\perp$, $d^0 x$ e $d^D \mathbf{x}_\parallel$ e posteriormente em dp^0 e $d^D \mathbf{p}_\parallel$ temos como resultado

$$\mathcal{I}_{k,s} = \int dy^0 \int d^D \mathbf{y}_\parallel \int \frac{d^d \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2} - \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \right) \left[(\mathbf{V}_{k\perp} \cdot \mathbf{p}_\perp)(\mathbf{V}_{s\perp} \cdot \mathbf{p}_\perp) \right] \exp \left[i\mathbf{p}_\perp \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_s) \right]$$

⁶Fizemos esta verificação até $d = 10$

$$\begin{aligned}
&= -TL^D(\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\nabla_{ks\perp})(\mathbf{V}_{s\perp}\cdot\nabla_{ks\perp})\int\frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d}\left(\frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2}-\frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2+m^2}\right)\exp\left[i\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{a}_{ks}\right] \\
&= -(\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\nabla_{ks\perp})(\mathbf{V}_{s\perp}\cdot\nabla_{ks\perp})\mathbf{I}_{k,s}
\end{aligned} \tag{II.39}$$

onde usamos a definição (II.26).

Usando o resultado (II.27) em (II.39) temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{k,s} &= \frac{2^{(\frac{d}{2}-2)}\Gamma(\frac{d}{2})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}a_{ks}^d}\left[d\left(\frac{\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\mathbf{a}_{ks}}{a_{ks}}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{s\perp}\cdot\mathbf{a}_{ks}}{a_{ks}}\right)-\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\mathbf{V}_{s\perp}\right]+ \\
&- \frac{m^d}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left[(ma_{ks})^{-\frac{d}{2}}K_{\frac{d}{2}}(ma_{ks})\left(\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\mathbf{V}_{s\perp}\right)+\right. \\
&- \left.(ma_{ks})^{-1-\frac{d}{2}}K_{1+\frac{d}{2}}(ma_{ks})\left(\mathbf{V}_{k\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{ks})\right)\left(\mathbf{V}_{s\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{ks})\right)\right] \quad d=1,2,3,\dots \tag{II.40}
\end{aligned}$$

Neste caso com as equações (II.37) e (II.40) encontramos a densidade de energia deste conjunto de dipólos⁷.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \frac{E}{L^D} &= \sum_{k=1}^N\sum_{s=1}^N\frac{2^{(\frac{d}{2}-2)}\Gamma(\frac{d}{2})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}a_{ks}^d}\left[d\left(\frac{\lambda_k\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\mathbf{a}_{ks}}{a_{ks}}\right)\left(\frac{\lambda_s\mathbf{V}_{s\perp}\cdot\mathbf{a}_{ks}}{a_{ks}}\right)-\lambda_k\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\lambda_s\mathbf{V}_{s\perp}\right]+ \\
&- \frac{m^d}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left[(ma_{ks})^{-\frac{d}{2}}K_{\frac{d}{2}}(ma_{ks})\left(\lambda_k\mathbf{V}_{k\perp}\cdot\lambda_s\mathbf{V}_{s\perp}\right)\right. \\
&- \left.(ma_{ks})^{-1-\frac{d}{2}}K_{1+\frac{d}{2}}(ma_{ks})\left(\lambda_k\mathbf{V}_{k\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{ks})\right)\left(\lambda_s\mathbf{V}_{s\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{ks})\right)\right] \tag{II.41}
\end{aligned}$$

O resultado (II.40) se compõe pela contribuição da energia entre distribuições de dipolos intermediada pelo campo de Maxwell subtraída pela energia de interação intermediada pelo campo de Proca.

II.3 Campo de uma Corda de Dirac no modelo de Lee-Wick

Nessa seção temos o objetivo de estudar o campo gerado por um solenóide infinito. Para este fim, vamos iniciar discutindo a teoria de Maxwell. Como sabemos [28], na teoria de Maxwell o

⁷Apenas para se familiarizar com o método proposto por A.Zee[13] de recuperar o limite não-relativístico em Teoria Quântica de Campos sugiro uma breve leitura de [26]. Por motivos de comparação e conhecimento a respeito do assunto é sugestivo a leitura de [27]

4-potencial de um solenóide ideal é dado por⁸

$$A_{AB,M}^\mu(x) = \begin{cases} \frac{B}{2}(0, -y, x, 0) & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ \frac{BR^2}{2(x^2 + y^2)}(0, -y, x, 0) & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Lembre-se que os campos eletromagnéticos são obtidos pelo seguinte par de equações

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

sendo

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}). \quad (\text{II.44})$$

Seja $D_M^{\mu\nu}(x, y)$ o propagador da teoria de Maxwell no sentido que

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\gamma \partial^\gamma D_{\nu\lambda} M(x, y) = \eta^\mu{}_\nu \delta(x - y). \quad (\text{II.45})$$

Uma discussão clássica do problema nos levaria a concluir que, dada uma corrente externa $J^\mu(x)$ acoplada ao campo eletromagnético, a expressão

$$A_M^\mu(x) = \int d^4y D_M^{\mu\nu}(x, y) J_\nu(y), \quad (\text{II.46})$$

é solução das equações dinâmicas não homogêneas (com fontes) de Maxwell, as quais podem ser obtidas pelo princípio da mínima ação,

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu. \quad (\text{II.47})$$

Escrevendo $D_M^{\mu\nu}$ e $J_\nu(y)$ em termos de integrais de Fourier e substituindo em (II.46) temos

$$\begin{aligned} A_M^\mu(x) &= \int d^4y D_M^{\mu\nu}(x, y) J_\nu(y) \\ &= \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_M^{\mu\nu}(p) \exp[-ip(x - y)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{J}_\nu(k) \exp[-iky] \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}_M^{\mu\nu}(p) \tilde{J}_\nu(p) \exp[-ipx]. \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

⁸Os sub-índices AB indicam estarmos tratando com o potencial de Aharonov-Bohm e o sub-índice M indica que estamos trabalhando com a teoria de Maxwell.

Identificamos então a transformada de Fourier da solução de Maxwell

$$\tilde{A}_M^\mu(p) = \tilde{D}_M^{\mu\nu}(p) \tilde{J}_\nu(p) . \quad (\text{II.49})$$

Usando o fato de que

$$\tilde{D}_M^{\mu\nu}(p) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{p^2} . \quad (\text{II.50})$$

em (II.49), podemos obter

$$\tilde{J}_\nu(p) = -p^2 \eta_{\nu\lambda} \tilde{A}_M^\lambda(p) . \quad (\text{II.51})$$

A idéia principal da nossa abordagem é utilizar o fato de que a corrente no solenóide é a mesma, tanto para o caso do eletromagnetismo de Maxwell quanto para o caso de Lee-Wick.

Nas equações que seguem, o sub-índice LW indicam estarmos tratando com quantidades referentes a teoria de Lee-Wick.

Na teoria de de Lee-Wick temos que

$$\begin{aligned} A_{LW}^\mu(x) &= \int d^4y D^{\mu\nu}(x,y) J_\nu(y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}^{\mu\nu}(p) \tilde{J}_\nu(p) \exp[-ipx] . \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

onde $D^{\mu\nu}(x,y)$ e $\tilde{D}^{\mu\nu}(p)$ podem ser obtidos da equação (II.16).

Substituindo (II.51) em (II.52) podemos escrever

$$A_{LW}^\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} -p^2 \tilde{D}^\mu{}_\lambda(p) \tilde{A}_M^\lambda(p) \exp[-ipx] . \quad (\text{II.53})$$

O resultado acima indica que se conhecermos a transformada de Fourier do potencial vetor da teoria de Maxwell $\tilde{A}_M^\lambda(p)$ correspondente a uma dada fonte externa $J^\mu(x)$, podemos calcular o potencial vetor correspondente a mesma fonte externa na teoria de Lee-Wick, $A_{LW}^\mu(x)$.

De agora em diante vamos escolher o calibre no qual $\xi = 1$ em (II.16). Sendo assim, teremos o propagador

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(p) = \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right\} . \quad (\text{II.54})$$

Apenas como observação, mencionamos que o segundo par das equações dinâmicas do modelo de Lee-Wick são obtidas pelo método variacional da mínima ação. Essas equações são dadas por

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu . \quad (\text{II.55})$$

Estamos interessados em calcular o campo magnético no exterior do solenóide no modelo de Lee-Wick. Para isso, vamos usar a equação (II.53), o que requer a obtenção da transformada de Fourier do potencial vetor na teoria de Maxwell. Para simplificar, vamos pensar em um solenóide muito fino, de modo a aproximá-lo por uma corda de Dirac⁹. Nesse caso, a teoria de Maxwell fornece apenas o potencial vetor na parte externa do solenóide.

Para um potencial que só depende das coordenadas espaciais perpendiculares ao solenóide (componentes espaciais 1 e 2)¹⁰,

$$\begin{aligned}\tilde{A}^\mu(p) &= \int d^4x A^\mu(x) \exp[ipx] \\ &= \int dx^0 dx^3 \exp[ip^0 x^0] \exp[-ip^3 x^3] \int d^2\mathbf{x}_\perp A^\mu(\mathbf{x}_\perp) \exp[-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp] \\ \tilde{A}^\mu(p) &= (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \int d^2\mathbf{x}_\perp A^\mu(\mathbf{x}_\perp) \exp[-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp].\end{aligned}\quad (\text{II.56})$$

Usando a segunda linha de (II.42) e os resultados do apêndice B, temos

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{AB,M}^1(p) &= (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \int d^2\mathbf{x}_\perp \frac{-yBR^2}{2(x^2 + y^2)} \exp\left[-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right] \\ &= (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \frac{-iBR^2}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} \int d^2\mathbf{x}_\perp \frac{1}{\mathbf{x}_\perp^2} \exp\left[-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right] \\ &= (2\pi)^3 \delta(p^0) \delta(p^3) \frac{iBR^2}{2} \frac{\partial}{\partial p_y} \ln(|\mathbf{p}_\perp|),\end{aligned}\quad (\text{II.57})$$

e uma expressão similar para $\tilde{A}_M^2(p)$, que nos permite escrever a transformada de Fourier do potencial vetor para um solenóide na teoria de Maxwell na forma

$$\tilde{A}_{AB,M}^\mu(p) = (2\pi)^3 \delta(p^0) \delta(p^3) I^\mu(\mathbf{p}_\perp) \quad (\text{II.58})$$

onde

$$I^\mu(\mathbf{p}_\perp) = \frac{iBR^2}{2\mathbf{p}_\perp^2} (0, p_y, -p_x, 0). \quad (\text{II.59})$$

Tendo em vista (II.53), (II.54) e (II.58) temos que o potencial vetor do solenóide na teoria de Lee-Wick é dado pela integral

$$A_{AB,LW}^\mu = \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \frac{m^2}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \left(I^\mu - \frac{p^\mu p_\lambda I^\lambda}{m^2} \right) \exp[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp]. \quad (\text{II.60})$$

⁹Uma corda de Dirac[29] pode ser pensada como um solenóide para o qual $BR^2 = g = \text{constante}$ no limite de $R \rightarrow 0$

¹⁰Esta expressão é válida para qualquer potencial que dependa somente de x^1 e x^2

Usando (II.59) e (II.60) podemos escrever

$$\begin{aligned}
A_{AB,LW}^1(\mathbf{x}_\perp) &= \frac{iBR^2}{2} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \frac{m^2}{\mathbf{p}_\perp^2(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)} p_y \exp\left[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right] \\
&= \frac{iBR^2}{2} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \left(\frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2} - \frac{m^2}{(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)} \right) p_y \exp\left[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right] \\
&= A_{AB,M}^1(\mathbf{x}_\perp) - \frac{BR^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \exp\left[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right], \tag{II.61}
\end{aligned}$$

e de maneira análoga,

$$A_{AB,LW}^2 = A_{AB,M}^2 + \frac{BR^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \exp\left[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right]. \tag{II.62}$$

Os resultados (II.61) e (II.62) podem ser colocados na forma compacta

$$\vec{A}_{AB,LW} = \vec{A}_{AB,M} + \frac{R^2}{2} (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \exp\left[i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp\right]. \tag{II.63}$$

Usando os resultados do apêndice B temos que

$$\vec{A}_{AB,LW} = \vec{A}_{AB,M} + \frac{R^2}{2} (\vec{B} \times \vec{\nabla}) K_0(m\sqrt{x^2 + y^2}), \tag{II.64}$$

onde K_0 representa a função de Bessel K de ordem zero.

Pela simetria do nosso problema, escrevemos a equação anterior em coordenadas cilíndricas (r, φ, z) . Neste caso,

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{AB,LW} &= \vec{A}_{AB,M} + \frac{BR^2}{2} \frac{\partial K_0(mr)}{\partial r} \hat{\varphi} \\
&= \frac{BR^2}{2r} \left[1 - mrK_1(mr)\right] \hat{\varphi} \\
&= \vec{A}_M \left[1 - mrK_1(mr)\right]. \tag{II.65}
\end{aligned}$$

Vale destacar que o potencial acima é dado pelo potencial obtido da teoria de Maxwell multiplicado pelo fator $\left[1 - mrK_1(mr)\right]$

Ainda em coordenadas esféricas, e com a relação,

$$\vec{\nabla} \times [f(r)\hat{\varphi}] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rf(r)) \right] \hat{z}, \tag{II.66}$$

fica fácil calcular o campo magnético $\vec{B}_{LW} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{LW}$,

$$\vec{B}_{AB,LW}(r) = \frac{BR^2}{2} mK_0(mr) \hat{z}. \tag{II.67}$$

Na teoria de Lee-Wick temos um campo magnético no exterior do solenóide fino (corda de Dirac), situação totalmente diferente daquela encontrada na teoria de Maxwell.

O campo magnético (II.67) cai rapidamente com a distância do mesmo. O parâmetro de massa m deve ser considerado grande, como discutido previamente. Para argumentos grandes a expressão (II.67) se reduz a

$$\vec{B}_{AB,LW}(r) = \frac{BR^2}{2} m \frac{(2\pi)^{1/2} \exp(-ma)}{(ma)^{1/2}} \hat{z}. \quad (\text{II.68})$$

Uma vez que uma corda de Dirac produz um campo magnético externo na teoria de Lee-Wick é cabível se perguntar sobre a existência de algum tipo de interação entre duas cordas de Dirac. A energia de interação pode ser calculada de forma similar ao que fizemos na seção anterior, com a seguinte expressão

$$E = \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y J_\mu(x) D^{\mu\nu}(x, y) J_\nu(y), \quad (\text{II.69})$$

onde

$$D^{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right\} \exp \left[-ip(x - y) \right]. \quad (\text{II.70})$$

Vamos tomar duas cordas de Dirac paralelas, uma posicionada ao longo do eixo z e outra na posição \mathbf{a}_\perp . A corrente externa, nesse caso, tem a forma

$$J_\mu(x) = J_{(1)\mu}(t, \mathbf{x}_\parallel, \mathbf{x}_\perp) + J_{(2)\mu}(t, \mathbf{x}_\parallel, \mathbf{x}_\perp + \mathbf{a}_\perp). \quad (\text{II.71})$$

Substituindo (II.71) em (II.69), desprezando termos de auto-interação de um solenóide consigo mesmo ¹¹, temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{T} \int d^4x d^4y J_{(1)\mu}(x) D^{\mu\nu}(x, y) J_{(2)\nu}(y) \\ &= \frac{1}{T} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{(1)\mu}(p) \exp \left[-ip(x) \right] \\ &\quad D^{\mu\nu}(x, y) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{(2)\nu}(p') \exp \left[-ip'(y) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

As equações (II.59), (II.58) e (II.51) fornecem a transformada transformada de Fourier para cada uma das correntes acima,

$$\tilde{J}_\mu(p) = -p^2 \eta_{\mu\lambda} \tilde{A}^\lambda(p) (2\pi)^3 \delta(p^0) \delta(p^3) I^\lambda(\mathbf{p}_\perp). \quad (\text{II.73})$$

¹¹Os termos de auto-interação não contribuem para a dinâmica de nenhum dos solenóides, uma vez que não resultam em força sobre os mesmos

Com o auxílio de (II.70) e (II.73), integrando em $dx^0 dx^3 dy^0 dy^3$ e definindo o comprimento (infinito) do solenóide, $L = \int dx^3$, calculamos a energia (II.72) como segue

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{T} \int d^4x d^4y \left(\int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} (\mathbf{p}_\perp)^2 \eta_{\mu\lambda} I^\lambda(\mathbf{p}_\perp) \exp \left[i\mathbf{p}_\perp \mathbf{x}_\perp \right] \right) \times \\
&\times \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p'^2(p'^2 - m^2)} \left\{ \eta^{\mu\nu} - \frac{p'^\mu p'^\nu}{m^2} \right\} \exp \left[-ip'(x - y) \right] \times \\
&\times \left(\int \frac{d^2\mathbf{p}''_\perp}{(2\pi)} (\mathbf{p}''_\perp)^2 \eta_{\nu\theta} I^\theta(\mathbf{p}''_\perp) \exp \left[i\mathbf{p}''_\perp (\mathbf{y}_\perp + \mathbf{a}_\perp) \right] \right) \\
&= L \int d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{y}_\perp \left(\int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)} (\mathbf{p}_\perp)^2 \eta_{\mu\lambda} I^\lambda(\mathbf{p}_\perp) \exp \left[i\mathbf{p}_\perp \mathbf{x}_\perp \right] \right) \times \\
&\times \int \frac{d^2\mathbf{p}'_\perp}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{\mathbf{p}'_\perp{}^2(\mathbf{p}'_\perp{}^2 - m^2)} \left\{ \eta^{\mu\nu} - \frac{p'^\mu p'^\nu}{m^2} \right\} \exp \left[i\mathbf{p}'_\perp (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) \right] \times \\
&\times \left(\int \frac{d^2\mathbf{p}''_\perp}{(2\pi)} (\mathbf{p}''_\perp)^2 \eta_{\nu\theta} I^\theta(\mathbf{p}''_\perp) \exp \left[i\mathbf{p}''_\perp (\mathbf{y}_\perp + \mathbf{a}_\perp) \right] \right). \tag{II.74}
\end{aligned}$$

Integrando agora em $d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{y}_\perp d^2\mathbf{p}'_\perp d^2\mathbf{p}''_\perp$ e usando a definição (II.59),

$$\begin{aligned}
\frac{E}{L} &= \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} (\mathbf{p}_\perp)^2 I^\lambda(\mathbf{p}_\perp) I_\lambda(-\mathbf{p}_\perp) \frac{m^2}{(\mathbf{p}_\perp{}^2 - m^2)} \exp \left[-i\mathbf{p}_\perp \mathbf{a}_\perp \right] \\
&= -\frac{B_1 B_2 (mR_1^2)(mR_2^2)}{4} K_0(ma), \tag{II.75}
\end{aligned}$$

onde usamos resultados do apêndice B.

Portanto a força entre dois solenóides é dada por

$$F = -\frac{dE}{da} = L \frac{B_1 B_2 (mR_1^2)(mR_2^2)}{4} \frac{dK_0(ma)}{da} = -L \frac{B_1 B_2 (mR_1^2)(mR_2^2)}{4} mK_1(ma). \tag{II.76}$$

Ou seja, a força entre os solenóides é atrativa caso o campo magnético dentro destes tenha a mesma direção (B_1 e B_2 com o mesmo sinal nos resultados acima), e repulsiva caso os campos tenham direções opostas (B_1 e B_2 com sinais contrários). É importante ressaltar que esta força cai muito rapidamente com a distancia a entre os solenóides uma vez que, para argumentos grandes, a função de Bessel $K_1(x)$ se comporta como $K_1(x) \cong \exp(-x)/x^{1/2}$ e o parâmetro de massa m deve ser tomado como grande.

Esse comportamento é bem distinto daquele observado na teoria de Maxwell, onde os solenóides jamais poderiam interagir entre si.

II.4 Ondas para o campo de Lee-Wick

Para complementar este capítulo finalizamos com esta seção onde discutimos brevemente ondas no modelo de Lee-Wick.

A interação entre partículas e o campo de Lee-Wick se dá pela mesma ação de acoplamento da teoria de Maxwell. Mais especificamente, seja uma partícula de massa m e carga q , interagindo com um campo externo vetorial seguinte ação. A ação dinâmica da partícula mais a ação dinâmica do acoplamento é dada por

$$S = - \int \left(m ds + q A^\mu dx_\mu \right). \quad (\text{II.77})$$

Aplicando o princípio da mínima ação somos conduzidos a seguinte equação de movimento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (\text{II.78})$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi, \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

sendo

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}). \quad (\text{II.80})$$

Aplicando o divergente na primeira equação de (II.79) e o rotacional na segunda, e usando algumas identidades vetoriais, concluímos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

A dinâmica dos campos é dada pela seguinte ação,

$$S = - \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m^2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \right) d\Omega. \quad (\text{II.82})$$

Neste caso,

$$\delta S = - \int \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m^2} \delta F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m^2} F_{\mu\nu} \square \delta F^{\mu\nu} + J_\mu \delta A^\mu \right) d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(-\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{\square}{m^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu \right) \delta A_\nu d\Omega \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{II.83}$$

Portanto temos como resultado,

$$(1 + \frac{\square}{m^2}) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu . \tag{II.84}$$

Escrevendo em termos dos campos físicos \vec{E} e \vec{B} encontramos o seguinte par de equações:

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \cdot \vec{E} &= \rho \\
(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} .
\end{aligned} \tag{II.85}$$

onde usamos o fato de que o 4-vetor J^μ é dado por

$$J^\mu = (\rho, \vec{j}) . \tag{II.86}$$

Por fim, a dinâmica dos campos \vec{E} e \vec{B} é regida pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} (1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \cdot \vec{E} = \rho & , & \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & , & (1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \end{cases} \tag{II.87}$$

As equações de onda para os campos \vec{E} e \vec{B} no vácuo ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) se obtém facilmente do resultado anterior. Para o campo elétrico podemos operar com $(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \times$ em ambos os lados da equação (II.87) que contém o rotacional do campo elétrico

$$(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla \times \vec{B}] . \tag{II.88}$$

Com a ajuda da identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} , \tag{II.89}$$

e com a equação (II.87) que contém o divergente do campo elétrico, concluimos que

$$(1 + \frac{\square}{m^2}) \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} . \tag{II.90}$$

A equação (II.90) pode ser reescrita na forma

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)\square\vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{II.91})$$

Para o campo magnético operamos com o rotacional na equação (II.87) que contém o rotacional de \vec{B} e usamos a equação (II.87) que contém o rotacional de \vec{E} , fornecendo

$$\left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2}\right)\square\vec{B} = \vec{0}. \quad (\text{II.92})$$

Capítulo III

Eletrodinâmica de Lee-Wick na presença de planos condutores.

Nesse capítulo consideramos o campo vetorial do modelo de Lee Wick na presença de condições de contorno em superfícies planas. Nos restringimos a condições de contorno que, em um certo sentido, simulam a presença de um condutor perfeito para o campo. Estudamos duas situações distintas, a saber: a interação entre uma fonte pontual estática e um plano condutor e a interação entre dois planos condutores perfeitos paralelos. Em ambas as situações restringimos os resultados para o caso onde o parâmetro de massa m é grande.

Para a primeira situação, os resultados podem ser interpretados como correções quânticas para o método das imagens no modelo de Lee Wick.

O segundo resultado se caracteriza por correções quânticas para a energia de Casimir oriundas do acoplamento, característico do modelo, de ordem superior nos campos.

Vale mencionar que poderíamos empregar uma abordagem alternativa para a obtenção dos resultados, na qual o acoplamento em ordens superiores nos campos seria considerado perturbativamente, como é usualmente feito em Teoria Quântica de Campos. Não optamos por este procedimento pois, apesar dos resultados terem sido obtidos perturbativamente, o modelo foi resolvido exatamente, no sentido que todos os propagadores relevantes foram calculados de forma exata. A partir dos propagadores encontrados pode-se estudar qualquer aspecto dos sistemas que consideramos, e não apenas aqueles estudados nesta dissertação. Poderíamos até estudar aspectos dos modelos em ordens mais altas ou até mesmo exatamente. Nesse sentido a abordagem que adotamos é mais vantajosa, pois se tivéssemos usado teoria de perturbação

usual em TQC, estaríamos limitados sempre a uma certa ordem na constante de acoplamento.

III.1 Plano condutor perfeito e uma carga pontual

Nessa dissertação vamos considerar que em um condutor perfeito a força de Lorentz paralela a superfície do condutor seja nula. Como discutido no capítulo anterior, a força de Lorentz no modelo de Lee-Wick abeliano tem a mesma forma da que encontramos na teoria de Maxwell. Sendo assim, a presença de uma superfície condutora para a teoria de Maxwell deve impor condição de contorno sobre o campo vetorial semelhante a condição de contorno imposta por um condutor na teoria de Lee-Wick.

Dessa forma, vamos tomar como um plano condutor perfeito perpendicular ao plano z um objeto que impõe as seguintes condições de contorno

$$\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_S = 0 , \quad (\text{III.1})$$

onde

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} , \quad (\text{III.2})$$

$$\eta^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (\text{III.3})$$

é o vetor perpendicular a superfície condutora e o sub-índice S está nos dizendo que a condição (III.1) é tomada em uma superfície plana S .

Uma outra maneira de analisar a condição de contorno imposta é escrevendo o tensor $F^{*\mu\nu}(x)$ em termos dos campos físicos \vec{E} e \vec{B} , ou seja,

$$F^{*\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Neste caso tendo em vista a condição de contorno,

$$B_z = 0 , \quad E_x = 0 , \quad E_y = 0. \quad (\text{III.5})$$

Manipulando a equação (III.1) encontramos,

$$\eta_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta(x)|_S = 0. \quad (\text{III.6})$$

Por conveniencia vamos definir o operador diferencial

$$\chi^{\nu\beta} = \eta_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha. \quad (\text{III.7})$$

O funcional gerador é dado pela integral funcional gaussiana da ação nos campos. Essa integral deve ser efetuada em todas as configurações de campo que satisfaçam a condição (III.1). Vamos implementar essa restrição utilizando o truque proposto na referencia [30], na qual se introduz um funcional delta como segue

$$Z_c[J_\mu] = \int DA_\mu \delta[\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_S] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right]. \quad (\text{III.8})$$

O funcional delta acima anula todas as contribuições para a integral que não satisfazem a condição (III.1). O funcional delta tem a representação de Fourier funcional

$$\begin{aligned} \delta[\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_S] &= \delta[\chi^{\nu\beta} A_\beta(x)|_S] \\ &= \int DB_\nu \exp \left[i \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

onde

$$B^\nu = (B^0, B^1, B^2) \text{ e } dS = d^4x \delta(x_\perp). \quad (\text{III.10})$$

sendo x_\parallel as coordenadas paralelas ao plano condutor, (x^0, x^1, x^2) , e $x_\perp = x^3$ a coordenada perpendicular a este. B é um campo auxiliar definido apenas sobre o condutor. O papel desse campo auxiliar pode ser entendido como o análogo funcional da variável de Fourier (no espaço recíproco) se pensarmos na conhecida relação para a função delta de Dirac, $\delta(x) \cong \int dk \exp(-ikx)$.

É de fácil demonstração que $B_\nu(x_\parallel)$ possui invariância de calibre, ou seja,

$$B_\nu(x_\parallel) \rightarrow B_\nu(x_\parallel) + \partial_\nu f(x_\parallel). \quad (\text{III.11})$$

Utilizando um procedimento análogo ao proposto por Fadeev-Popov para a quantização de campos de calibre, concluímos que

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu DB_\mu \delta[\partial_\mu B^\mu - f] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) + \right. \\ &\left. + \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Como sabemos, a física é independente da função de calibre f . Procedemos agora com o truque de Gerard't Hooft, inserindo uma função de f e integrando sobre a mesma. Por conveniência escolhemos uma forma gaussianana, como segue

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] \times \\ &\times DB_\mu \exp \left[i \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right] \times \\ &\times Df \delta[\partial_\mu B^\mu - f] \exp \left[-\frac{i}{2\Lambda} \int dS(x) dS(y) f(x_\parallel) Q(x_\parallel - y_\parallel) f(y_\parallel) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

onde inserimos uma função arbitrária $Q(x_\parallel - y_\parallel)$ a ser escolhida convenientemente e Λ é um parâmetro de calibre para o campo auxiliar B .

Efetuando a integral em f temos

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] \times \\ &\times DB_\mu \exp \left[i \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2\Lambda} \int dS(x) dS(y) B^\mu(x_\parallel) \partial_\mu \partial_\nu Q(x_\parallel - y_\parallel) B^\nu(y_\parallel) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

onde efetuamos duas integrações por partes na ultima linha.

Se não fosse a segunda linha na equação acima, na qual temos um acoplamento entre A^μ e B^μ , teríamos duas integrais funcionais gaussianas, uma em A^μ e outra em B^μ .

Para desacoplar A^μ e B^μ efetuamos a translação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda}{}^\rho(y) D_{\rho\mu}(y, x). \quad (\text{III.15})$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu &\rightarrow \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - 2 \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda}{}^\rho(y) D_{\rho\nu}(y, x) + \\ &+ \int d^4x \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda}{}^\rho(y) D_{\rho\mu}(y, x) O^{\mu\nu} \int dS(z) B^\alpha(z_\parallel) \chi_{\alpha}{}^\theta(z) D_{\theta\nu}(z, x). \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Usando o fato de que

$$O^{\mu\nu} D_{\theta\nu}(z, x) = \delta^4(z - x) \eta^\mu{}_\theta, \quad (\text{III.17})$$

temos

$$\begin{aligned} \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu &\rightarrow \int d^4x A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - 2 \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda\rho}(y) A_\rho(y) + \\ &+ \int \int dS(y) dS(z) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda\rho}(y) \chi_\alpha^\theta(z) D_{\rho\theta}(y, z) B^\alpha(z_\parallel). \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

O termo com a corrente em (III.14), após a translação, fica

$$\int d^4x J_\mu A^\mu \rightarrow \int d^4x J_\mu A^\mu - \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda\rho}(y) \int d^4x D_{\rho\mu}(y, x) J^\mu(x). \quad (\text{III.19})$$

O termos de acoplamento entre o campo auxiliar e o campo vetorial toma a forma

$$\begin{aligned} \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) &\rightarrow \int dS(x) B_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) + \\ &- \int \int dS(y) dS(z) B^\lambda(y_\parallel) \chi_{\lambda\rho}(y) \chi_\alpha^\theta(z) D_{\rho\theta}(y, z) B^\alpha(z_\parallel). \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Por conveniência futura definimos a quantidade

$$I_\lambda(y) = \chi_{\lambda\rho}(y) \int d^4x D_{\rho\mu}(y, x) J^\mu(x). \quad (\text{III.21})$$

Com os resultados acima reescrevemos nosso funcional gerador com condições de contorno como

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] DB_\mu \exp \left[i \int dS(y) B^\lambda(y_\parallel) I_\lambda(y) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int \int dS(y) dS(z) B^\lambda(y_\parallel) \left(\chi_{\lambda\rho}(y) \chi_\alpha^\theta(z) D_{\rho\theta}(y, z) + \frac{1}{\Lambda} \partial_\lambda \partial_\alpha Q \right) B^\alpha(z_\parallel) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Agora é importante simplificar a estrutura (III.22). Primeiramente escolhemos $\xi = 1$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} D_{\rho\theta}(y, z) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\rho\theta} - \frac{p_\rho p_\theta}{m^2} \right\} \exp \left[-ip(y - z) \right] \\ &= \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left[\frac{i}{2L} \exp \left[iL(y_\perp - z_\perp) \right] - \frac{i}{2\Gamma} \exp \left[i\Gamma(y_\perp - z_\perp) \right] \right] \times \\ &\times \exp \left[-ip_\parallel(y_\parallel - z_\parallel) \right] \left\{ \eta_{\rho\theta} - \frac{p_\rho p_\theta}{m^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

onde efetuamos a integral em p^3 e definimos

$$L = \sqrt{p_\parallel^2} \text{ e } \Gamma = \sqrt{p_\parallel^2 - m^2}. \quad (\text{III.24})$$

Definindo a quantidade

$$W^{\lambda\alpha} = \chi^{\lambda\rho}(y)\chi^{\alpha\theta}(z)D_{\rho\theta}(y, z) + \frac{1}{\Lambda}\partial^\lambda\partial^\alpha Q, \quad (\text{III.25})$$

temos para o nosso funcional gerador com condição de contorno,

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] DB_\mu \exp \left[i \int d^3y_\parallel B^\lambda(y_\parallel) I_\lambda(y_\parallel) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \int \int d^3y_\parallel d^3z_\parallel B_\lambda(y_\parallel) W^{\lambda\alpha}(y_\parallel, z_\parallel) B_\alpha(z_\parallel) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Note que o funcional acima é composto de duas integrais funcionais independentes, uma no campo A e outra no campo auxiliar B . Cada uma dessas integrais tem a forma gaussiana e pode ser efetada exatamente. A integral em A é a mesma encontrada na teoria sem condições de contorno e discutida no capítulo II. A integral em B requer um pouco mais de trabalho.

Manipulamos agora o primeiro termo do lado direito de (III.25) como segue

$$\begin{aligned} \chi^{\lambda\rho}(y)\chi^{\alpha\theta}(z)D_{\rho\theta}(y, z) &= \epsilon^{3\lambda\mu\rho}\partial_\mu^{(y)}\epsilon^{3\alpha\nu\theta}\partial_\nu^{(z)}D_{\rho\theta}(y_\parallel, z_\parallel) \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \exp \left[-ip_\parallel(y_\parallel - z_\parallel) \right] \{ \epsilon^{3\lambda\mu\rho} p_\mu p_\nu \eta_{\rho\theta} \epsilon^{3\alpha\nu\theta} \} \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \exp \left[-ip_\parallel(y_\parallel - z_\parallel) \right] \{ \eta^{\lambda\alpha} p_\parallel^2 - p^\lambda p^\alpha \}, \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

onde argumentamos que

$$\epsilon^{3\lambda\mu\rho} p_\mu p_\nu \eta_{\rho\theta} \epsilon^{3\alpha\nu\theta} = \eta^{\lambda\alpha} p_\parallel^2 - p^\lambda p^\alpha. \quad (\text{III.28})$$

Como sabemos

$$\begin{aligned} \epsilon^{3\lambda\mu\rho}\eta_{\rho\theta}\epsilon^{3\alpha\nu\theta} &= - \begin{vmatrix} \eta^{33} & \eta^{3\alpha} & \eta^{3\nu} \\ \eta^{\lambda 3} & \eta^{\lambda\alpha} & \eta^{\lambda\nu} \\ \eta^{\mu 3} & \eta^{\mu\alpha} & \eta^{\mu\nu} \end{vmatrix} = -\eta^{33}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\nu} - \eta^{3\alpha}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu 3} - \eta^{3\nu}\eta^{\lambda 3}\eta^{\mu\alpha} + \\ &+ \eta^{33}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\alpha} + \eta^{3\alpha}\eta^{\lambda 3}\eta^{\mu\nu} + \eta^{3\nu}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu 3} = -\eta^{33}\eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\nu} + \eta^{33}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

pois λ, α, μ e $\nu \neq 3$. Portanto a afirmação (III.28) se concretiza.

Sendo Q uma função arbitrária, podemos fazer a seguinte escolha

$$Q(y_\parallel - z_\parallel) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3p_\parallel}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \exp \left[-ip_\parallel(y_\parallel - z_\parallel) \right] e \Lambda = 1. \quad (\text{III.30})$$

Substituindo (III.30) e (III.27) em (III.25) temos que

$$\begin{aligned} W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\Gamma} \right) \exp \left[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel}) \right] \eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} L \left(1 - \frac{L}{\Gamma} \right) \eta^{\lambda\alpha} \exp \left[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Para calcular a integral funcional no campo auxiliar B em (III.26) precisamos encontrar a inversa da função $W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})$, que vamos denotar por $V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})$. Sendo assim,

$$\int d^3 z_{\parallel} W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel}) = \eta^{\lambda}_{\theta} \delta^3(y_{\parallel} - q_{\parallel}). \quad (\text{III.32})$$

Não é difícil mostrar que

$$V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel}) = -2i \int \frac{d^3 p'_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma'}{L'} \left(\frac{1}{\Gamma' - L'} \right) \eta_{\alpha\theta} \exp \left[-ip'_{\parallel}(z_{\parallel} - q_{\parallel}) \right]. \quad (\text{III.33})$$

Agora vamos fazer as seguintes translações de campos,

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \int d^4 y D_{\mu\lambda}(x, y) J^{\lambda}(y)$$

$$B^{\lambda}(y_{\parallel}) \rightarrow B^{\lambda}(y_{\parallel}) + \int d^3 z_{\parallel} V^{\lambda\theta}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) I_{\theta}(z_{\parallel}). \quad (\text{III.34})$$

Inserindo (III.34) em (III.26) encontramos finalmente o funcional gerador

$$\begin{aligned} Z_c[J_{\mu}] &= N_1 N_2 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J^{\mu}(x) D_{\mu\nu}(x, y) J^{\nu}(y) \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int d^3 x_{\parallel} d^3 y_{\parallel} I^{\alpha}(x_{\parallel}) V_{\alpha\theta}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) I^{\theta}(y_{\parallel}) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

onde definimos os seguintes determinantes,

$$\begin{aligned} N_1 &= \int DA_{\mu} \exp \left[\frac{i}{2} \int \int d^4 x d^4 y A_{\mu}(x) \delta^4(y - x) O^{\mu\nu} A_{\nu}(y) \right] \\ N_2 &= \int DB_{\mu} \exp \left[-\frac{i}{2} \int \int d^3 x_{\parallel} d^3 y_{\parallel} B_{\lambda}(x_{\parallel}) W^{\lambda\alpha}(x_{\parallel}, y_{\parallel}) B_{\alpha}(y_{\parallel}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

De posse do funcional (III.35) temos a teoria quântica de Lee-Wick na presença de um plano condutor perfeito no sentido que podemos obter qualquer quantidade física a partir de (III.35).

Estamos interessados na interação de uma carga pontual com um plano condutor infinito. Para isso usamos a conhecida relação [13, 26]

$$Z_c = \exp \left[-iET \right], \quad (\text{III.37})$$

onde E é a energia do estado fundamental¹ do sistema em questão e T o intervalo de tempo.

Vamos considerar a presença de uma carga a uma distância \mathbf{a} do plano condutor, sendo \mathbf{a} um vetor com apenas coordenadas perpendiculares ao condutor. Esta carga pode ser descrita pela corrente [26]

$$J^\mu(x) = \eta^{\mu 0} \lambda \delta^2(x_\parallel) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}) \quad (\text{III.38})$$

Ao substituirmos a corrente (III.38) em (III.35), e usando o resultado (III.37) notamos facilmente que os determinantes N_1 e N_2 fornecem contribuições para a energia E independentes da distância entre o plano e a carga. Essas contribuições existem mesmo sem a presença do condutor e da carga e estão relacionadas as energias de vácuo livre do campo vetorial de Lee-Wick e do campo auxiliar. Após algumas manipulações simples podemos mostrar que a primeira exponencial do lado direito de (III.35) fornece também uma contribuição para a energia independente da distância entre o plano condutor e a carga. Esta contribuição está associada a auto-energia da carga [26]. Vale mencionar que os termos da energia independentes da distância entre o condutor e a carga não contribuem para a força de interação entre as mesmas, uma vez que essa força é obtida pela derivada da energia em relação a esta distância.

A contribuição para a energia oriunda da segunda exponencial em (III.35),

$$E = -\frac{1}{2T} \int d^3x_\parallel d^3y_\parallel I^\alpha(x_\parallel) V_{\alpha\theta}(x_\parallel, y_\parallel) I^\theta(y_\parallel), \quad (\text{III.39})$$

vai nos dar a interação entre o plano condutor e a carga pontual.

A quantidade I^α na equação acima tem sua definição dada em (III.21). Com a corrente (III.38) temos

$$\begin{aligned} I^\alpha(x_\parallel) &= \epsilon^{3\alpha\mu\nu} \partial_\mu \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\nu s} - \frac{p_\nu p_s}{m^2} \right\} \exp\left[-ipz + ip_\parallel x_\parallel\right] J_s(z) \\ &= i \int d^4z \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \epsilon^{3\alpha\mu s} p_\mu \exp\left[-ipz + ip_\parallel x_\parallel\right] \right] J_s(z) \\ &= i\lambda \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\vec{p}^2(\vec{p}^2 + m^2)} \epsilon^{3\alpha\mu 0} p_\mu \exp\left[ip_\perp a - ip_\parallel \vec{x}_\parallel\right]. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Substituindo (III.40) em (III.39) temos

$$E = -\frac{\lambda^2}{2T} \int d^3x_\parallel d^3y_\parallel \left\{ i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\vec{p}^2(\vec{p}^2 + m^2)} \epsilon^{3\alpha\mu 0} p_\mu \exp\left[ip_\perp a - ip_\parallel \vec{x}_\parallel\right] \right\} \times$$

¹Por estado fundamental queremos dizer o estado na ausência de partículas (vácuo), ou “quanta” do campo.

$$\begin{aligned}
& \times -2i \int \frac{d^3 p'_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma'}{L'} \left(\frac{1}{\Gamma' - L'} \right) \eta_{\alpha\theta} \exp \left[-ip'_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right] \times \\
& \times \left\{ i \int \frac{d^3 \vec{p}''}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\vec{p}''^2 (\vec{p}''^2 + m^2)} \epsilon^{3\theta\nu 0} p''_{\nu} \exp \left[ip''_{\perp} a - ip''_{\parallel} \vec{y}_{\parallel} \right] \right\} \\
& = -\lambda^2 \int d^2 \vec{x}_{\parallel} d^2 \vec{y}_{\parallel} \left\{ \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\vec{p}^2 (\vec{p}^2 + m^2)} \epsilon^{3\alpha\mu 0} p_{\mu} \exp \left[ip_{\perp} a - ip_{\parallel} \vec{x}_{\parallel} \right] \right\} \times \\
& \times \int \frac{d^2 \vec{p}'_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\vec{p}'_{\parallel}{}^2 + m^2}}{\sqrt{\vec{p}'_{\parallel}{}^2}} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}'_{\parallel}{}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{p}'_{\parallel}{}^2}} \eta_{\alpha\theta} \exp \left[-ip'_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right] \times \\
& \times \left\{ \int \frac{d^3 \vec{p}''}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\vec{p}''^2 (\vec{p}''^2 + m^2)} \epsilon^{3\theta\nu 0} p''_{\nu} \exp \left[ip''_{\perp} a - ip''_{\parallel} \vec{y}_{\parallel} \right] \right\} \\
& = -\lambda^2 \left[\int \frac{d^2 \vec{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}{}^2 + m^2}}{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}{}^2}} \frac{\vec{p}_{\parallel}{}^2}{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}{}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{p}_{\parallel}{}^2}} \right] \times \\
& \times \left[\int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m^2)} \exp \left[ip_{\perp} a \right] \right]^2. \tag{III.41}
\end{aligned}$$

A partir deste ponto tendo em vista a complexidade da integral na última linha da equação (III.41), vamos tratar o problema perturbativamente. Neste caso tomamos o parâmetro m como sendo uma quantidade grande.

O termo entre colchetes na última linha da equação (III.41) pode ser calculado como segue

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m^2)} \exp \left[ip_{\perp} a \right] = \\
& = \int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{1}{(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)} \exp \left[ip_{\perp} a \right] - \int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{1}{(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m^2)} \exp \left[ip_{\perp} a \right] \\
& = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2}} \exp \left[-\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2} a \right] - \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2 + m^2}} \exp \left[-\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2 + m^2} a \right], \tag{III.42}
\end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos frações parciais e na terceira linha usamos os resultados do apêndice B.

Uma vez que estamos nos restringindo ao caso onde ma é suficientemente grande, vamos desconsiderar a contribuição com m presente no argumento da exponencial na última linha da equação (III.42). Sendo assim

$$\int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)(\vec{p}_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m^2)} \exp \left[ip_{\perp} a \right] \cong \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2}} \exp \left[-\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2} a \right]. \tag{III.43}$$

Substituindo (III.43) em (III.41) obtemos

$$\begin{aligned}
E &\cong -\lambda^2 \left[\int \frac{d^2 \vec{p}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2 + m^2}}{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2}} \frac{\vec{p}_{\parallel}^2}{\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2 + m^2} - \sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2}} \right] \frac{1}{4\vec{p}_{\parallel}^2} \exp \left[-2\sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2} a \right] \\
&= -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^{\infty} dp \left[\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{\sqrt{p^2 + m^2} - p} \right] \exp \left[-2p a \right], \tag{III.44}
\end{aligned}$$

onde efetuamos uma integração em coordenadas polares e definimos $p = \sqrt{\vec{p}_{\parallel}^2}$.

Para valores de momento p altos, a contribuição para a integral (III.44) é cada vez menos relevante. Dessa forma é legítimo pensarmos em um momento de corte $p = \Lambda$ como limite superior da integral (III.44). O que também torna legítimo introduzirmos um momento de corte é o fato de que, para momentos altos, o plano passa a se tornar transparente [31].

Vamos tomar o momento de corte tal que, para todo o intervalo de integração $0 < p < \Lambda$, seja legítimo fazer $p \ll m$. Isso equivale a dizer que $m \gg \Lambda$ com isso podemos expandir o termo entre colchetes em (III.44),

$$\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{\sqrt{p^2 + m^2} - p} \cong 1 + \frac{p}{m} + \frac{p^2}{m^2}. \tag{III.45}$$

Substituindo (III.45) em (III.44) temos que

$$E \cong -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^{\Lambda} dp \left[1 + \frac{p}{m} + \frac{p^2}{m^2} \right] \exp \left[-2p a \right] \tag{III.46}$$

O integrando acima é muito pequeno para $p > \Lambda$, dessa forma, se fizermos $\Lambda \rightarrow \infty$ na integral acima estaremos introduzindo uma contribuição irrelevante, portanto

$$\begin{aligned}
E &\cong -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int_0^{\infty} dp \left[1 + \frac{p}{m} + \frac{p^2}{m^2} \right] \exp \left[-2p a \right] \\
&\cong -\frac{\lambda^2}{16\pi a} \left(1 + \frac{1}{2ma} + \frac{1}{2(ma)^2} \right) + \mathcal{O}(m^{-3}). \tag{III.47}
\end{aligned}$$

A força é obtida como a derivada da energia em relação a distância a , como segue,

$$F \cong -\frac{dE}{da} = -\frac{\lambda^2}{4\pi(2a)^2} \left[1 + \frac{1}{ma} + \frac{3}{2(ma)^2} \right] + \mathcal{O}(m^{-3}). \tag{III.48}$$

O primeiro termo em (III.48) corresponde ao método das imagens, onde temos uma interação tipo Coulomb para a carga e sua imagem em relação ao condutor.

É interessante notar que a força (III.48) não se caracteriza pela soma de uma contribuição do setor massivo e do setor não massivo para o campo, como ocorre no caso de interações entre

fontes estacionárias, discutido na seção anterior. Esse fato poderia ser percebido previamente se tivéssemos escrito o propagador do modelo com condições de contorno (a partir da expressão (III.35)).

III.2 Interação entre dois planos condutores perfeitos: o Efeito Casimir

Nesta seção estudamos a energia de interação entre dois planos condutores paralelos entre si, em uma configuração típica de Casimir, no modelo de Lee-Wick. Pelo procedimento adotado quantizamos a teoria na presença dos planos condutores, obtendo o propagador neste caso, e a energia de Casimir.

Nos restringimos a situação onde o parâmetro de massa m é muito grande.

III.2.1 Propagador na presença dos condutores

Como vimos anteriormente, um plano condutor perfeito é introduzido na teoria por meio de uma condição de contorno a qual o campo $A_\mu(x)$ deve satisfazer. No presente problema temos dois condutores paralelos, e a condição de contorno a ser imposta é dada por,

$$\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_{S_k} = 0 \quad k = 1, 2, \quad (\text{III.49})$$

onde S_k , $k = 1, 2$ designam dois planos paralelos entre si, $\eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$ é o 4-vetor perpendicular aos planos e $F^{*\mu\nu}(x) = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético dual.

Podemos escrever as condições acima de forma conveniente

$$\chi^{\nu\beta}A_\beta(x)|_{S_k} = 0 \quad \text{onde} \quad \chi^{\nu\beta} = \eta_\mu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha. \quad (\text{III.50})$$

Nosso funcional gerador com condições de contorno é dado pela integral funcional gaussiana da ação somente sobre as configurações de campo que satisfazem as condições (III.50). Essa integração funcional pode ser implementada pela introdução de funcionais delta de Dirac, como segue

$$Z_c[J_\mu] = \int DA_\mu \prod_k \delta[\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_{S_k}] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right]. \quad (\text{III.51})$$

Vamos tomar os planos condutores nas posições $(0, 0, 0, a_{(k)})$, $k = 1, 2$ de modo que a distância entre estes seja $|a_{(2)} - a_{(1)}|$.

As deltas funcionais acima têm uma representação funcional de Fourier dada por

$$\begin{aligned} \delta[\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_{S_k}] &= \delta[\chi^{\nu\beta} A_\beta(x)|_{S_k}] \\ &= \int DB^{(k)}_\nu \exp \left[i \int dS^{(k)}(x) B^{(k)}_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

onde $B^{(k)}_\nu(x_\parallel)$ são campos auxiliares e definimos $dS^{(k)}(x) = d^4x \delta(x_\perp - a_k)$, com $x_\perp = (0, 0, 0, x^3)$.

Sabemos que nossos campos auxiliares $B^{(k)}_\mu(x_\parallel)$ possuem invariância de calibre, deste modo, procedendo da mesma forma que fizemos na seção anterior, somos conduzidos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \prod_k \delta[\eta_\mu F^{*\mu\nu}(x)|_{S_k}] &= \left[\prod_k DB^{(k)}_\mu \right] \exp \left[i \sum_k \int dS^{(k)}(x) B^{(k)}_\nu(x_\parallel) \chi^{\nu\beta} A_\beta(x) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2\Lambda} \sum_k \int dS^{(k)}(x) dS^{(k)}(y) B^{(k)\mu}(x_\parallel) \partial_\mu \partial_\nu Q(x_\parallel - y_\parallel, 0) B^{(k)\nu}(y_\parallel) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

onde Λ é um parâmetro de calibre e Q uma função arbitrária a ser definida.

Substituindo (III.53) em (III.51) e fazendo a seguinte translação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \sum_k \int dS^{(k)}(y) B^{(k)\lambda}(y_\parallel) \chi_\lambda^\rho(y) D_{\rho\mu}(y, x), \quad (\text{III.54})$$

podemos escrever o funcional gerador com condições de contorno na forma

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] \int \left[\prod_k DB^{(k)}_\mu \right] \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{k,l} \int \int dS^{(k)}(y) dS^{(l)}(z) B^{k\lambda}(y_\parallel) \left(\chi_\lambda^\rho(y) \chi_\alpha^\theta(z) D_{\rho\theta}(y, z) + \frac{\delta_{kl}}{\Lambda} \partial_\lambda \partial_\alpha Q \right) B^{l\alpha}(z_\parallel) \right] \times \\ &\times \exp \left[i \sum_k \int dS^{(k)}(y) B^{k\lambda}(y_\parallel) I_\lambda(y) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.55})$$

onde definimos

$$I_\lambda(y) = \chi_\lambda^\rho(y) \int d^4x D_{\rho\mu}(y, x) J^\mu(x). \quad (\text{III.56})$$

Por conveniência escolhemos Q como sendo,

$$Q(y, z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \exp \left[-ip(y - z) \right]. \quad (\text{III.57})$$

Vamos agora simplificar o termo quadrático em B na equação (III.55)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l} \int \int dS^{(k)}(y) dS^{(l)}(z) B^{k\lambda}(y_{\parallel}) \left(\chi_{\lambda}^{\rho}(y) \chi_{\alpha}^{\theta}(z) D_{\rho\theta}(y, z) + \frac{\delta_{kl}}{\Lambda} \partial_{\lambda} \partial_{\alpha} Q \right) B^{l\alpha}(z_{\parallel}) = \\
& = \sum_{k,l} \int \int d^3 y_{\parallel} d^3 z_{\parallel} B_{k\lambda}(y_{\parallel}) \left(\epsilon^{3\lambda\mu\rho} \partial_{\mu}^{(y)} \epsilon^{3\alpha\nu\theta} \partial_{\nu}^{(z)} D_{\rho\theta}(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l) + \right. \\
& \left. + \frac{\delta_{kl}}{\Lambda} \partial^{\lambda} \partial^{\alpha} Q(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l) \right) B_{l\alpha}(z_{\parallel}). \tag{III.58}
\end{aligned}$$

Definindo

$$W_{kl}^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) = \epsilon^{3\lambda\mu\rho} \partial_{\mu}^{(y)} \epsilon^{3\alpha\nu\theta} \partial_{\nu}^{(z)} D_{\rho\theta}(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l) + \frac{\delta_{kl}}{\Lambda} \partial^{\lambda} \partial^{\alpha} Q(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l), \tag{III.59}$$

temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l} \int \int dS^{(k)}(y) dS^{(l)}(z) B^{k\lambda}(y_{\parallel}) \left(\chi_{\lambda}^{\rho}(y) \chi_{\alpha}^{\theta}(z) D_{\rho\theta}(y, z) + \frac{\delta_{kl}}{\Lambda} \partial_{\lambda} \partial_{\alpha} Q \right) B^{l\alpha}(z_{\parallel}) = \\
& = \sum_{k,l} \int \int d^3 y_{\parallel} d^3 z_{\parallel} B_{k\lambda}(y_{\parallel}) W_{kl}^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) B_{l\alpha}(z_{\parallel}). \tag{III.60}
\end{aligned}$$

De agora em diante vamos usar os calibres onde $\xi = 1$ e $\Lambda = 1$.

Usando a definição

$$D_{\rho\theta}(y, z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left(\eta_{\rho\theta} - \frac{p_{\rho} p_{\theta}}{m^2} \right) \exp[-ip(y - z)], \tag{III.61}$$

podemos mostrar facilmente que

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{3\lambda\mu\rho} \partial_{\mu}^{(y)} \epsilon^{3\alpha\nu\theta} \partial_{\nu}^{(z)} D_{\rho\theta}(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \left(\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 - p^{\lambda} p^{\alpha} \right) \exp[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel})] \times \\
& \times \int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \exp[ip_{\perp}(a_k - a_l)]. \tag{III.62}
\end{aligned}$$

Com a definição (III.57) também temos

$$\begin{aligned}
& \partial^{\lambda} \partial^{\alpha} Q(y_{\parallel} - z_{\parallel}; a_k - a_l) = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} p^{\lambda} p^{\alpha} \exp[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel})] \times \\
& \times \int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \exp[ip_{\perp}(a_k - a_l)]. \tag{III.63}
\end{aligned}$$

Usamos agora o fato de que²

$$\int \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \exp[ip_{\perp} a] = \frac{i}{2L} \exp[iLa] - \frac{i}{2\Gamma} \exp[i\Gamma a], \tag{III.64}$$

²A integral proposta pode ser resolvida apenas separando o integrando por frações parciais e utilizando o teorema dos pólos e resíduos[32].

onde

$$L = \sqrt{p_{\parallel}^2} \text{ e } \Gamma = \sqrt{p_{\parallel}^2 - m^2}. \quad (\text{III.65})$$

Com os resultados (III.53), (III.63) e (III.64) a função (III.59) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} W_{kl}^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel}) &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel})\right] \times \\ &\times \left[\left(\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 - p^{\lambda} p^{\alpha} \right) \left(\frac{i}{2L} \exp\left[iLa_{kl}\right] - \frac{i}{2\Gamma} \exp\left[i\Gamma a_{kl}\right] \right) + \delta_{kl} p^{\lambda} p^{\alpha} \left(\frac{i}{2L} - \frac{i}{2\Gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Por conveniência de notação, definimos a matriz $[W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})]$ cujos elementos são dados por $W_{kl}^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})$,

$$[W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})] = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ip_{\parallel}(y_{\parallel} - z_{\parallel})\right] \begin{pmatrix} g\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 & f\left(\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 - p^{\lambda} p^{\alpha}\right) \\ f\left(\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 - p^{\lambda} p^{\alpha}\right) & g\eta^{\lambda\alpha} p_{\parallel}^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.67})$$

onde definimos

$$f = \left(\frac{i}{2L} \exp\left[iLa_{kl}\right] - \frac{i}{2\Gamma} \exp\left[i\Gamma a_{kl}\right] \right) \text{ e } g = \left(\frac{i}{2L} - \frac{i}{2\Gamma} \right). \quad (\text{III.68})$$

Futuramente vamos precisar da inversa de $[W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})]$, que denotamos por $[V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})]$,

$$\int d^3 z_{\parallel} [W^{\lambda\alpha}(y_{\parallel}, z_{\parallel})][V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \eta^{\lambda\theta} \delta^3(y_{\parallel} - q_{\parallel}). \quad (\text{III.69})$$

Vamos propor uma solução para $[V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})]$ na seguinte forma

$$[V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})] = \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ip_{\parallel}(z_{\parallel} - q_{\parallel})\right] \begin{pmatrix} s_{\alpha\theta} & v_{\alpha\theta} \\ v_{\alpha\theta} & s_{\alpha\theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.70})$$

Resolvendo (III.69) com a proposta (III.70) temos

$$\begin{aligned} [V_{\alpha\theta}(z_{\parallel}, q_{\parallel})] &= \int \frac{d^3 p_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ip_{\parallel}(z_{\parallel} - q_{\parallel})\right] \left\{ \frac{g}{p_{\parallel}^2(g^2 - f^2)} \left[\eta_{\alpha\theta} - \frac{f^2}{g^2} \frac{p_{\alpha} p_{\theta}}{p_{\parallel}^2} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \right. \\ &\left. - \frac{f}{p_{\parallel}^2(g^2 - f^2)} \left[\eta_{\alpha\theta} - \frac{p_{\alpha} p_{\theta}}{p_{\parallel}^2} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Definindo matrizes $[B_\alpha(z_\parallel)]$ e $[I_\lambda(y_\parallel)]$ com elementos dados por $B_{l\alpha}(z_\parallel)$ e $I_\lambda(y_\parallel, a_k)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \sum_k \int d^3 y_\parallel B^{k\lambda}(y_\parallel) I_\lambda(y_\parallel, a_k) - \frac{i}{2} \sum_{k,l} \int \int d^3 y_\parallel d^3 z_\parallel B_{k\lambda}(y_\parallel) W_{kl}^{\lambda\alpha}(y_\parallel, z_\parallel) B_{l\alpha}(z_\parallel) \right] = \\ & = \exp \left[i \int d^3 y_\parallel [B^\lambda(y_\parallel)] [I_\lambda(y_\parallel)] - \frac{i}{2} \int \int d^3 y_\parallel d^3 z_\parallel [B_\lambda(y_\parallel)] [W^{\lambda\alpha}(y_\parallel, z_\parallel)] [B_\alpha(z_\parallel)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Com as equações (III.59), (III.60) e (III.72) o propagador (III.55) toma a forma

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= \int DA_\mu \exp \left[i \int d^4 x \left(\frac{1}{2} A_\mu O^{\mu\nu} A_\nu - J_\mu A^\mu \right) \right] \times \\ &\times \left[\prod_k DB^{(k)}_\mu \right] \exp \left[i \int d^3 y_\parallel [B^\lambda(y_\parallel)] [I_\lambda(y_\parallel)] \right] \times \\ &\times \exp \left[- \frac{i}{2} \int \int d^3 y_\parallel d^3 z_\parallel [B_\lambda(y_\parallel)] [W^{\lambda\alpha}(y_\parallel, z_\parallel)] [B_\alpha(z_\parallel)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

Agora estamos aptos a fazer as seguintes translações nos campos,

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \int d^4 y D_{\mu\lambda}(x, y) J^\lambda(y) \\ [B^\lambda(y_\parallel)] &\rightarrow [B^\lambda(y_\parallel)] + \int d^3 z_\parallel [V^{\lambda\theta}(y_\parallel, z_\parallel)] [I_\theta(z_\parallel)], \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

de modo a escrever a equação (III.73), após algumas manipulações, como

$$\begin{aligned} Z_c[J_\mu] &= N_1 N_2 \exp \left[- \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) \right] \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int d^3 x_\parallel d^3 y_\parallel [I^\alpha(x_\parallel)] [V_{\alpha\theta}(x_\parallel, y_\parallel)] [I^\theta(y_\parallel)] \right], \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

onde definimos os determinantes

$$\begin{aligned} N_1 &= \int DA_\mu \exp \left[\frac{i}{2} \int \int d^4 x d^4 y A_\mu(x) \delta^4(y-x) O^{\mu\nu} A_\nu(y) \right] \\ N_2 &= \int DB_\mu \exp \left[- \frac{i}{2} \int \int d^3 x_\parallel d^3 y_\parallel [B_\lambda(x_\parallel)] [W^{\lambda\alpha}(x_\parallel, y_\parallel)] [B_\alpha(y_\parallel)] \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Utilizando o resultado (III.71) e a definição (III.56) podemos escrever o funcional (III.75) como³

$$Z_c[J_\mu] = Z_c[0] \exp \left[- \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) \left(D_{\mu\nu}(x, y) - \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) \right) J^\nu(y) \right], \quad (\text{III.77})$$

³Uma abordagem interessante para o Efeito Casimir pode ser vista em [30]. Esta por sinal está no contexto de QED onde temos um acoplamento do campo eletromagnético com o campo de Dirac.

com $\bar{D}_{\mu\nu}(x, y)$ sendo dado por

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) &= \sum_{k,l} d^4 z d^4 \omega \left(\delta(z_{\perp} - a_k) \int \chi_{\alpha}^{\rho}(z) D_{\rho\mu}(z, x) \right) V_{kl}^{\alpha\theta}(z_{\parallel}, \omega_{\parallel}) \times \\ &\times \left(\delta(\omega_{\perp} - a_l) \chi_{\theta}^{\lambda}(\omega) D_{\lambda\nu}(\omega, y) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

Para simplificar a correção ao propagador dada acima, usamos o resultado (III.71), o propagador livre (III.61) e a definição de $\chi^{\nu\beta}$ dada em (III.50), como segue,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) &= \int d^3 z_{\parallel} d^3 w_{\parallel} \sum_{k,l} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{p^2(p^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\rho\mu} - \frac{p_{\rho} p_{\mu}}{m^2} \right\} \epsilon^3_{\alpha}{}^{\beta\rho} \partial_{\beta} \times \\ &\times \exp \left[-ip_{\parallel}(z_{\parallel} - x_{\parallel}) \right] \exp \left[ip_{\perp}(x_{\parallel} - a_k) \right] \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} V_{kl}^{\alpha\theta}(k_{\parallel}) \exp \left[-ik_{\parallel}(z_{\parallel} - \omega_{\parallel}) \right] \times \\ &\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{q^2(q^2 - m^2)} \left\{ \eta_{\lambda\nu} - \frac{p_{\lambda} p_{\nu}}{m^2} \right\} \epsilon^3_{\theta}{}^{\sigma\lambda} \partial_{\sigma} \exp \left[-iq_{\parallel}(\omega_{\parallel} - y_{\parallel}) \right] \times \\ &\times \exp \left[iq_{\perp}(y_{\perp} - a_l) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mu\nu}(x, y) &= \sum_{k,l} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \frac{dp_{\perp}}{(2\pi)} \frac{dq_{\perp}}{(2\pi)} (\epsilon^3_{\alpha}{}^{\beta\mu}) (\epsilon^3_{\theta}{}^{\sigma\nu}) k_{\beta} k_{\sigma} V_{kl}^{\alpha\theta}(k_{\parallel}) \exp \left[-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right] \times \\ &\times \exp \left[ip_{\perp}(x_{\perp} - a_k) \right] \exp \left[iq_{\perp}(y_{\perp} - a_l) \right] \times \\ &\times \frac{m^2}{(k_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2)(k_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2 - m^2)} \frac{m^2}{(k_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2)(k_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Efetando as integrais em dp_{\perp} e dq_{\perp} e fazendo algumas manipulações simples, podemos escrever $\bar{D}^{\mu\nu}(x, y)$ em uma estrutura matricial,

$$\begin{aligned} \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) &= \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp \left[-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right] \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k_{\parallel}^2} \right) \frac{1}{4(g^2 - f^2)} \times \\ &\times \left(\frac{e^{iL|x_{\perp}-a_1|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}-a_1|}}{\Gamma} \quad \frac{e^{iL|x_{\perp}-a_2|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}-a_2|}}{\Gamma} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} g & -f \\ -f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{iL|y_{\perp}-a_1|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_{\perp}-a_1|}}{\Gamma} \\ \frac{e^{iL|y_{\perp}-a_2|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_{\perp}-a_2|}}{\Gamma} \end{pmatrix} \\ &\mu, \nu \neq 3, \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

com a ressalva de que $\bar{D}^{\mu\nu}(x, y) = 0$ quando $\mu, \nu = 3$.

Uma observação interessante a se fazer é que, se nos fixarmos nas proximidades de uma das placas e tomarmos o limite da outra se distanciando ao infinito recuperamos o caso de uma placa discutido anteriormente na primeira secção deste capítulo.

De posse do funcional (III.77) podemos calcular qualquer quantidade física do sistema.

III.2.2 Densidade de Energia

A partir deste momento estamos aptos a estudar como condições de contorno perturbam a energia de vácuo. Neste sentido precisamos do tensor energia-momento da teoria proposta. Uma vez que temos termos com derivadas de ordem superior é mais conveniente encontrar o tensor energia momento da teoria pelo acoplamento do campo com a métrica[33]. Sendo assim é de nosso conhecimento que

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} d\Omega, \quad (\text{III.82})$$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \frac{1}{2} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} T_{\mu\nu} d\Omega. \quad (\text{III.83})$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento energia e $d\Omega = d^4x$.

Deste modo, variando a ação (III.82) ⁴

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left(-\frac{1}{2} \mathcal{L} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} g_{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu}]} \right) d\Omega. \quad (\text{III.84})$$

Nossa densidade de lagrangeana de Lee-Wick em um espaço-tempo curvo é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} g^{\lambda\alpha} g^{\theta\beta} F_{\alpha\beta} F_{\lambda\theta} - \frac{1}{4m^2} g^{\lambda\alpha} g^{\theta\beta} g^{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \partial_p \partial_\sigma F_{\lambda\theta} - \frac{g^{\lambda\alpha} g^{\theta\beta} \partial_\alpha A_\lambda \partial_\beta A_\theta}{2\xi} \quad (\text{III.85})$$

Substituindo (III.85) em (III.84) e comparando com (III.83) obtemos que

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\theta} \left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) F^\theta{}_\nu + \frac{\eta_{\mu\nu}}{4} \left[F_{\lambda\theta} \left(1 + \frac{\square}{m^2} \right) F^{\lambda\theta} + 2 \frac{\partial^\lambda A_\lambda \partial^\theta A_\theta}{\xi} \right] - \frac{1}{2m^2} F^{\lambda\theta} \partial_\mu \partial_\nu F_{\lambda\theta} +$$

$$- 2 \frac{\partial_\mu A_\nu \partial_\theta A^\theta}{\xi}. \quad (\text{III.86})$$

Estamos interessados na densidade de energia, dada pela componente T_{00} do tensor energia momento

$$T_{00} = F_{0\theta} F^\theta{}_0 - 2 \frac{\partial_0 A_0 \partial_\theta A^\theta}{\xi} + \frac{1}{4} \left[F_{\lambda\theta} F^{\lambda\theta} + 2 \frac{\partial^\lambda A_\lambda \partial^\theta A_\theta}{\xi} \right] +$$

⁴ $\delta(\det[g^{\mu\nu}]) = \det[g_{\mu\nu}] g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\det[g_{\mu\nu}] g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, consequência do fato de a métrica ser simétrica.

$$+F_{0\theta}\left(\frac{\square}{m^2}\right)F^\theta_0 + F_{\lambda\theta}\left(\frac{\square}{4m^2}\right)F^{\lambda\theta} - \frac{1}{2m^2}F^{\lambda\theta}\partial_0\partial_0F_{\lambda\theta}. \quad (\text{III.87})$$

A energia do sistema é dada pela integral em todo espaço de T^{00} . Sendo assim, podemos somar uma 4-divergência a quantidade T^{00} que a energia não será alterada. Dessa forma podemos escrever a densidade de energia de forma mais conveniente

$$\begin{aligned} T_{00} &= A^\lambda \left[-2\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\eta_\theta^0\partial_\lambda\partial_0 + \eta_{\theta\lambda}\partial_0\partial_0 + \eta_{\lambda 0}\eta_{\theta 0}\square \right] A^\theta + \\ & - \frac{1}{2}A^\lambda \left[\eta_{\lambda\theta}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\lambda\partial_\theta \right] A^\theta + A^\lambda \left[-2\eta_\theta^0\partial_\lambda\partial_0 + \eta_{\theta\lambda}\partial_0\partial_0 + \eta_{\lambda 0}\eta_{\theta 0}\square \right] \frac{\square}{m^2}A^\theta + \\ & - \frac{1}{2}A^\lambda \left[\eta_{\lambda\theta}\square - \partial_\lambda\partial_\theta \right] \frac{\square}{m^2}A^\theta + A^\lambda \left[\eta_{\lambda\theta}\square - \partial_\lambda\partial_\theta \right] \frac{\partial_0\partial_0}{m^2}A^\theta. \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Definindo o operador diferencial tensorial

$$\begin{aligned} M_{\lambda\theta} &= \left[-2\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\eta_\theta^0\partial_\lambda\partial_0 + \eta_{\theta\lambda}\partial_0\partial_0 + \eta_{\lambda 0}\eta_{\theta 0}\square \right] - \frac{1}{2}\left[\eta_{\lambda\theta}\square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\lambda\partial_\theta \right] + \\ & + \left[-2\eta_\theta^0\partial_\lambda\partial_0 + \eta_{\theta\lambda}\partial_0\partial_0 + \eta_{\lambda 0}\eta_{\theta 0}\square \right] \frac{\square}{m^2} - \frac{1}{2}\left[\eta_{\lambda\theta}\square - \partial_\lambda\partial_\theta \right] \frac{\square}{m^2} + \\ & + \left[\eta_{\lambda\theta}\square - \partial_\lambda\partial_\theta \right] \frac{\partial_0\partial_0}{m^2}, \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

reescrevemos a densidade de energia como

$$T_{00} = A^\lambda M_{\lambda\theta} A^\theta = \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) \left[A^\theta(x) A^\lambda(y) \right]. \quad (\text{III.90})$$

III.2.3 Força de Casimir

Pois bem, depois das discussões anteriores estamos preparados para encontrar a energia do campo de Lee-Wick no estado de vácuo na presença das placas condutoras perfeitas. Para esse fim iniciamos com a expressão

$$E(a) = \int d^3\mathbf{x} \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle \quad (\text{III.91})$$

Com o auxílio de (III.90) podemos escrever

$$E(a) = \int d^3\mathbf{x} \langle 0 | \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) \left[A^\theta(x) A^\lambda(y) \right] | 0 \rangle$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) \langle 0 | \left[A^\theta(x) A^\lambda(y) \right] | 0 \rangle. \quad (\text{III.92})$$

O valor esperado no vácuo acima pode ser calculado com o funcional gerador (III.77) calculado previamente. Para isso usamos o fato de que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \left[A^\theta(x) A^\lambda(y) \right] | 0 \rangle &= -\frac{1}{Z_c[J_\mu]} \frac{\delta^2 Z_c[J_\mu]}{\delta J_\theta(x) \delta J_\lambda(y)} \\ &= i \left[D^{\theta\lambda}(x, y) - \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

onde usamos o resultado (III.77). Portanto,

$$E(a) = \int d^3\mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) i \left[D^{\theta\lambda}(x, y) - \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) \right]. \quad (\text{III.94})$$

Uma vez que $D^{\theta\lambda}(x, y)$ não depende da distância entre as placas, sua contribuição na energia acima não produz nenhuma força entre as placas. A contribuição de $D^{\theta\lambda}(x, y)$ para a energia está associada a energia de vácuo livre (sem a presença das placas), podendo então ser desprezada. Sendo assim,

$$E(a) = -i \int d^3\mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) \quad (\text{III.95})$$

Por conveniência futura vamos definir a seguinte quantidade⁵,

$$\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & -f \\ -f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{iL|y_\perp|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_\perp|}}{\Gamma} \\ \frac{e^{iL|y_\perp-a|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_\perp-a|}}{\Gamma} \end{pmatrix} \frac{1}{(g^2 - f^2)}. \quad (\text{III.96})$$

Agora vamos estabelecer quatro resultados importantes e escreve-las em termos da quantidade (III.96) definida acima.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) &= -i \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} \exp \left[-ik_\parallel(x_\parallel - y_\parallel) \right] \left(k_\mu \eta^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k^\mu k^\nu}{k_\parallel^2} \right) \frac{1}{4(g^2 - f^2)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{e^{iL|x_\perp|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x_\perp|}}{\Gamma} & \frac{e^{iL|x_\perp-a|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|x_\perp-a|}}{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & -f \\ -f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{iL|y_\perp|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_\perp|}}{\Gamma} \\ \frac{e^{iL|y_\perp-a|}}{L} - \frac{e^{i\Gamma|y_\perp-a|}}{\Gamma} \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.97})$$

$$\square \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3k_\parallel}{(2\pi)^3} \exp \left[-ik_\parallel(x_\parallel - y_\parallel) \right] \frac{m^2}{4} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k_\parallel^2} \right) \left(\frac{e^{i\Gamma|x_\perp|}}{\Gamma} R + \frac{e^{i\Gamma|x_\perp-a|}}{\Gamma} S \right). \quad (\text{III.98})$$

⁵Escolhemos $a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a$.

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \square \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) = 0. \quad (\text{III.99})$$

$$\left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \bar{D}^{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})\right] \frac{1}{4} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k_{\parallel}^2}\right) \left(\frac{e^{iL|x_{\perp}|}}{L} R + \frac{e^{iL|x_{\perp}-a|}}{L} S\right). \quad (\text{III.100})$$

Com (III.97), (III.98), (III.99) e (III.100) e tendo em vista a equação (III.89), podemos concluir que a estrutura tensorial $M_{\lambda\theta}(x)$ aplicada em $\bar{D}^{\mu\nu}(x, y)$ é simplificada de tal forma que⁶

$$M_{\lambda\theta}(x) \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) = \left[\frac{\square}{m^2} \partial_0 \partial_0 \eta_{\lambda\theta} + \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_0 \partial_0 \eta_{\lambda\theta}\right] \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y). \quad (\text{III.101})$$

Sendo assim, a energia no estado de vácuo (III.95) entre as placas se torna

$$\begin{aligned} E(a) &= -i \int d^3 \mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} M_{\lambda\theta}(x) \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) \\ &= -i \int d^3 \mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{\square}{m^2} \partial_0 \partial_0 \eta_{\lambda\theta} + \left(1 + \frac{\square}{m^2}\right) \partial_0 \partial_0 \eta_{\lambda\theta}\right] \bar{D}^{\theta\lambda}(x, y) \\ &= -i \int d^3 \mathbf{x} \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} \exp\left[-ik_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel})\right] \frac{(k_0)^2}{2} \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{e^{iL|x_{\perp}|}}{L} + \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}|}}{\Gamma}\right) R + \left(\frac{e^{iL|x_{\perp}-a|}}{L} + \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}-a|}}{\Gamma}\right) S\right] = \\ &= \frac{A}{2} \int_0^a dx_{\perp} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} (k^0)^2 i \left[\left(\frac{e^{iL|x_{\perp}|}}{L} + \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}|}}{\Gamma}\right) R + \left(\frac{e^{iL|x_{\perp}-a|}}{L} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{e^{i\Gamma|x_{\perp}-a|}}{\Gamma}\right) S\right]. \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

onde usamos o resultado (III.81) e a definição (III.96). No resultado acima fizemos a integração apenas na região entre as placas, $0 < x_{\perp} < a$, uma vez que estamos interessados na energia de vácuo somente nessa região. Nós definimos ainda a área das placas como $A = \int d^2 \mathbf{x}_{\parallel}$.

Efetuada a integral em dx_{\perp} e usando a definição (III.96) temos

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{A}{2} \int_0^a dx_{\perp} \int \frac{d^3 k_{\parallel}}{(2\pi)^3} (k^0)^2 \frac{-i}{(g^2 - f^2)} \left[g \left\{ \frac{1}{iL^3} \left(e^{2iLa} - 1\right) - \frac{1}{i\Gamma^3} \left(e^{2i\Gamma a} - 1\right) \right\} + \right. \\ &\quad \left. - 2fa \left(\frac{e^{iLa}}{L^2} - \frac{e^{i\Gamma a}}{\Gamma^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.103})$$

No integrando em (III.103) introduzimos uma parte imaginária negativa pequena na massa, $m \rightarrow m - i\varepsilon$. Com esse procedimento deslocamos os pólos do integrando na variável k^0 de

⁶Observe que os termos de calibre são irrelevantes.

modo que nas regiões $\Re k^0 \geq 0$, $\Im k^0 \geq 0$ e $\Re k^0 \leq 0$, $\Im k^0 \leq 0$ não existem pólos. Dessa forma podemos realizar uma rotação de Wick,

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \mathbf{p}_{\parallel} \quad , \quad k^0 = ip^0 \quad , \quad \mathbf{p} = (p^0, \mathbf{p}_{\parallel}) = (p^0, p^1, p^2) \quad , \quad (\text{III.104})$$

o que implica em

$$L = ip \quad , \quad \Gamma = i\sqrt{p^2 + m^2} \quad , \quad d^3k_{\parallel} = id^3p$$

$$f = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-\sqrt{p^2+m^2}a}}{\sqrt{p^2+m^2}} \right] \quad , \quad g = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}} \right] \quad . \quad (\text{III.105})$$

Após a rotação de Wick tomamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Podemos então escrever nossa energia de vácuo entre as duas placas condutoras perfeitas (III.103) como sendo

$$\begin{aligned} E(a) &= -\frac{A}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (p^0)^2 \frac{1}{(g^2 - f^2)} \left[\frac{g}{p^3} (e^{-2pa} - 1) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{(p^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\sqrt{p^2+m^2}a} - 1) + 2fa \left(\frac{e^{-pa}}{p^2} - \frac{e^{-\sqrt{p^2+m^2}a}}{p^2 + m^2} \right) \right] = \\ &= \frac{A}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dp d\theta d\phi}{(2\pi)^3} p^2 \sin\theta p^2 \cos^2\theta \Omega(p) \quad , \quad (\text{III.106}) \end{aligned}$$

onde na terceira linha usamos coordenadas esféricas, sendo p^0 o eixo polar, e definimos

$$\begin{aligned} \Omega(p) &= \frac{1}{(g^2 - f^2)} \left[g \left\{ \frac{1}{p^3} (e^{-2pa} - 1) - \frac{1}{(p^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\sqrt{p^2+m^2}a} - 1) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2fa \left(\frac{e^{-pa}}{p^2} - \frac{e^{-\sqrt{p^2+m^2}a}}{p^2 + m^2} \right) \right] \quad . \quad (\text{III.107}) \end{aligned}$$

Podemos integrar (III.106) facilmente na parte angular,

$$\begin{aligned} E(a) &= -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^4 \frac{1}{(g^2 - f^2)} \left[g \left\{ \frac{1}{p^3} (e^{-2pa} - 1) - \frac{1}{(p^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\sqrt{p^2+m^2}a} - 1) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2fa \left(\frac{e^{-pa}}{p^2} - \frac{e^{-\sqrt{p^2+m^2}a}}{p^2 + m^2} \right) \right] \\ &= -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^{\infty} dp p^4 \Omega(p) \quad . \quad (\text{III.108}) \end{aligned}$$

A equação acima representa o valor médio da energia no estado de vácuo entre as duas placas condutoras e é conhecida na literatura como sendo a energia de Casimir (neste caso, para a eletrodinâmica de Lee-Wick).

Um teste simples de consistência é tomar o limite do parâmetro m indo ao infinito. Fazendo isto concluímos que

$$\begin{aligned} E(a) &= -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^\infty dp p^4 \frac{1}{4p^2(1-e^{-2pa})} \left[\frac{1}{2p^4}(e^{-2pa}-1) + \frac{ae^{-2pa}}{p^3} \right] \\ &= -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^\infty dp \left[-2p^2 + \frac{4p^3 ae^{-2pa}}{1-e^{-2pa}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.109})$$

Calculando a integral em (III.109) utilizando o Maple obtemos

$$E(a) = -\frac{A\pi^2}{720a^3} + \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Ap^3}{18\pi^2}, \quad (\text{III.110})$$

implicando na conhecida força de Casimir [34]

$$F = -\frac{dE}{da} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{A}{a^4}. \quad (\text{III.111})$$

O termo divergente do lado direito de (III.110) está associado a auto-energia das placas e não a interação entre estas, como discutido em (III.111).

A integral (III.108) não pode ser resolvida de maneira exata. Vamos então tratar o problema de forma perturbativa.

A contribuição de momentos altos (p grande) para a energia de interação em (III.108) é pequena. Introduzimos então um momento de corte, Λ e realizamos a integral no intervalo $0 < p < \Lambda$. Na eletrodinâmica de Maxwell a introdução de um corte para momentos altos pode ser interpretada devido ao fato de que as placas começam a se tornar transparentes para altas frequências. No caso da eletrodinâmica de Lee-Wick esse ponto requer mais discussões.

Sendo o parâmetro m grande, escolhemos tomar $\Lambda < m$. Vamos ainda considerar que, em todo o intervalo de integração, seja válida a condição $p/m \ll 1$. Com isso torna-se legítimo expandir $p^4\Omega(p)$ para m grande,

$$\begin{aligned} p^4\Omega(p) &\cong p^4 \left[\frac{4p^2}{(1-e^{-2pa})} + \frac{8p^3}{m(1-e^{-2pa})^2} \right] \left[\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2m} \right) \left\{ \frac{(e^{-2pa}-1)}{p^3} \right\} + \frac{ae^{-2pa}}{p^3} \right] \\ &\cong -2p^2 + \frac{4p^3 ae^{-2pa}}{(1-e^{-2pa})} + \frac{1}{m} \left\{ 2p^3 + \frac{4p^3 [2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1]}{(1-e^{-2pa})^2} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.112})$$

Portanto, a energia de Casimir (III.108) pode ser escrita como

$$E(a) \cong -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^\Lambda dp \left[-2p^2 + \frac{4p^3 ae^{-2pa}}{(1-e^{-2pa})} + \frac{1}{m} \left\{ 2p^3 + \frac{4p^3 [2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1]}{(1-e^{-2pa})^2} \right\} + \right]$$

$$+\mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)]. \quad (\text{III.113})$$

Desconsideramos agora os termos que não contribuem para força de Casimir (independentes de a). Consideramos também o intervalo de integração $\Lambda \rightarrow \infty$, uma vês que a contribuição nos momentos altos é muito pequena para a energia de interação,

$$E(a) \cong -\frac{A}{12\pi^2} \int_0^\infty dp \left[\frac{4p^3 a e^{-2pa}}{(1 - e^{-2pa})} + \frac{4p^3 [2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1]}{m(1 - e^{-2pa})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right) \right]. \quad (\text{III.114})$$

Novamente temos uma integral não trivial envolvida no problema. Efetuando esta integral utilizando o Maple temos o resultado,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp \frac{4p^3 [2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1]}{m(1 - e^{-2pa})^2} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{20ma^4(1 - e^{-2pa})} \left[-\pi^4 e^{-2pa} + \pi^4 + \right. \\ &-20p^4 a^4 - 60p^4 a^4 e^{-2pa} + 120p^3 a^3 (1 - e^{-2pa}) \ln(e^{-pa} + 1) + \\ &-360p^2 a^2 (1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(2, -e^{-pa}) - 720pa(1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(3, -e^{-pa}) + \\ &-720(1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(4, -e^{-pa}) + 120p^3 a^3 (1 - e^{-2pa}) \ln(1 - e^{-pa}) + \\ &-360p^2 a^2 (1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(2, e^{-pa}) - 720pa(1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(3, e^{-pa}) + \\ &\left. -720(1 - e^{-2pa}) \text{polylog}(4, -e^{-pa}) \right]. \quad (\text{III.115}) \end{aligned}$$

sendo $\text{polylog}(N, z)$ a função polilogarítmica, definida pela soma

$$\text{polylog}(N, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^N}. \quad (\text{III.116})$$

De uma maneira geral precisamos calcular o seguinte limite,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} (pa)^k \text{polylog}(N, \alpha e^{-pa}) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k \alpha^n p^k e^{-npa}}{n^N} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^k \alpha^n}{n^N} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} p^k e^{-npa} \right) = 0, \quad (\text{III.117}) \end{aligned}$$

onde permutamos o limite pelo somatório pois a soma acima é uma sequência de Cauchi.

Com o resultado (III.117) temos a integral (III.115)

$$\int_0^\infty dp \frac{4p^3 \left[2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1 \right]}{m(1 - e^{-2pa})^2} = \frac{\pi^4}{20ma^4}. \quad (\text{III.118})$$

Substituindo (III.118) em (III.114) temos a energia de Casimir

$$E(a) \cong -\frac{A\pi^2}{720} \left[\frac{1}{a^3} + \frac{3}{ma^4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right), \quad (\text{III.119})$$

a partir da qual obtemos a força de Casimir entre os dois planos condutores perfeitos,

$$F \cong -\frac{dE}{da} \cong -\frac{A\pi^2}{240a^4} \left[1 + \frac{4}{ma} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right). \quad (\text{III.120})$$

Os resultados até ordem m^{-2} podem ser obtidos da mesma forma. Expandindo $p^4\Omega(p)$ até ordem m^{-2} e calculando as integrais utilizando o Maple temos

$$\begin{aligned} p^4\Omega(p) &\cong -2p^2 + \frac{4p^3ae^{-2pa}}{(1 - e^{-2pa})} + \frac{1}{m} \left\{ 2p^3 + \frac{4p^3 \left[2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1 \right]}{(1 - e^{-2pa})^2} \right\} + \\ &+ \frac{1}{m^2(1 - e^{-2pa})} \left\{ 2p^2 \left[\frac{p^2}{(1 - e^{-2pa})} + \frac{4p^2}{(1 - e^{-2pa})^2} \right] \left[2pae^{-2pa} + e^{-2pa} - 1 \right] + 4p^4 \right\} + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.121})$$

Utilizando o mesmo procedimento exposto anteriormente, encontramos a seguinte força de Casimir⁷

$$F \cong -\frac{A\pi^2}{240a^4} \left[1 + \frac{4}{ma} + \frac{10(1 + \frac{60\zeta(5)}{\pi^2})}{m^2a^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right). \quad (\text{III.122})$$

Na equação acima a força de Casimir está escrita como a força obtida na eletrodinâmica de Maxwell multiplicada por uma função, entre colchetes, dada pela identidade mais termos de correção em potências de ma . De imediato observamos um aumento da força de Casimir no modelo de Lee-Wick em comparação com o eletromagnetismo de Maxwell.

É interessante notar que a energia de Casimir para a eletrodinâmica de Lee-Wick não se caracteriza pela soma das energias de Casimir do setor massivo e não massivo, como no caso das interações entre fontes, estudado no capítulo anterior.

⁷Para maiores conhecimentos a respeito do efeito Casimir, sugiro a leitura de [34].

Capítulo IV

Conclusões, perspectivas e comentários finais

Finalizamos esta investigação com observações sobre os principais resultados abordados em cada capítulo e também com algumas perspectivas para os futuros trabalhos associados aos assuntos aqui descritos.

Em síntese, discutimos nesta dissertação interações entre objetos físicos num contexto mais fundamental de Teoria Quântica de Campos, uma vez que todos os resultados foram obtidos a partir do funcional gerador de nossa teoria, com exceção do tópico sobre ondas.

No capítulo 1, logo após a obtenção do propagador por meio do formalismo das integrais de Feynman, estudamos o conceito de força entre distribuições de cargas e dipólos ao longo de branas paralelas, observando que o regime no qual trabalhamos é não relativístico. Uma consequência interessante do estudo foi resolver o problema da divergência na energia da carga pontual em até 3+1 dimensões. No caso de dimensões maiores do que quatro os resultados apresentados indicam que a energia da carga pontual diverge. O fato da teoria de Lee-Wick tornar finita a auto energia da carga pontual em 3 + 1 dimensões é conhecida na literatura, mas o fato dessa divergência ainda persistir para dimensões maiores do que 4, até o que sabemos, ainda não foi investigado. Esse é um assunto que requer mais investigação e uma demonstração formal deste fato é bem vinda [35].

Ainda no capítulo 1 estudamos o campo magnético gerado por um solenóide infinito no modelo de Lee-Wick. Para simplificar os cálculos consideramos o solenóide na aproximação de uma corda de Dirac, que corresponde a considerar o raio do solenóide muito pequeno. Encon-

tramos um campo magnético externo que diminui rapidamente a medida que nos distanciamos da corda. Tendo em vista o resultado anterior nos perguntamos na possibilidade de interação entre duas cordas de Dirac e acabamos encontrando uma solução para este problema. Encontramos uma força entre duas cordas de Dirac paralelas (atração ou repulsão; dependendo do fluxo do campo magnético nos solenóides) que diminui rapidamente a medida que distanciamos uma corda da outra. Seria muito interessante estender esses resultados levando em conta um raio não desprezível para os solenóides.

Por fim, discutimos alguns aspectos de teoria clássica de campos associados a ondas eletromagnéticas. Obtivemos as equações de Maxwell deste modelo. Uma implicação das novas equações de Maxwell foi obter a equação de onda na ausência de fontes. Esta equação de onda contém como solução as funções de onda do eletromagnetismo usual de Maxwell, além de outras soluções.

No capítulo 2 consideramos a presença de condutores na teoria de Lee-Wick. Em específico estudamos a interação entre uma carga pontual e um plano condutor perfeito e a interação entre dois planos condutores perfeitos. Podemos dizer que calculamos correções para o método das imagens e para o efeito Casimir no modelo de Lee-Wick. Como resultado deste estudo observamos um aumento da força entre esses objetos, em comparação com o eletromagnetismo usual. Nos dois casos obtivemos esta força de interação de forma perturbativa, salientado que nosso parâmetro m é uma quantidade grande. É importante mencionar que os resultados não se caracterizam pela soma das energias (ou de forma equivalente, pela soma das forças) do setor massivo e sem massa, como no caso de fontes externas.

Seria interessante proceder um estudo sobre a energia de Casimir para planos infinitamente permeáveis. Essa configuração produz uma energia de Casimir para eletrodinâmica de Maxwell exatamente igual a obtida no caso de placas condutoras. É pertinente nos perguntarmos se essa igualdade se mantém para a eletrodinâmica de Lee-Wick. Uma terceira condição de contorno a ser elaborada seria a composta por uma placa condutora e outra permeável. Para a eletrodinâmica de Maxwell essa configuração produz uma força repulsiva.

Outro aspecto da teoria de Lee-Wick que nos interessa está relacionado ao campo fermiônico. Pretendemos investigar se um termo do tipo Lee-Wick na lagrangiana de Dirac pode originar modos para o campo fermiônico com relação de dispersão que permitam propagação superluminal [36]. Isso poderia caracterizar um modelo que permitisse velocidades maiores do que c para

férmions, o que seria bem vindo nos dias atuais, uma vez que dados experimentais indicam esse fato para neutrinos.

Acreditamos que seja possível a imposição de uma quota inferior ao parâmetro de massa da eletrodinâmica de Lee-Wick ao estudarmos o átomo de hidrogênio. Uma vez que conhecemos as incertezas relacionadas as energias e suas correções para o átomo de hidrogênio (estrutura fina, hiper-fina, etc) podemos considerar correções impostas pela eletrodinâmica de Lee-Wick nos níveis de energia desse átomo. Os resultados podem ser comparados com os dados experimentais para esse átomo de modo a impormos limitantes para m [37].

Apêndice A

Método de Fadeev-Popov

Seja o seguinte funcional,

$$Z[J_\mu] = \int DA_\mu Q[A_\mu, J_\mu]. \quad (\text{A.1})$$

Suponha que o nosso campo A_μ não seja distinto perante a seguinte transformação,

$$A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x). \quad (\text{A.2})$$

Neste caso reconhecemos que não devemos integrar sobre todas as configurações de campo pois temos o que chama-se em física de invariância de calibre. Uma maneira de fixar o calibre é impondo uma equação para o campo A_μ , qual seja,

$$F(A_\mu) = f(x). \quad (\text{A.3})$$

Se não for o caso escolhemos um θ tal que

$$F(A_\mu^\theta) = f(x). \quad (\text{A.4})$$

Com o intuito de extrair o volume devido a invariância de calibre definimos

$$\Delta[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] = 1. \quad (\text{A.5})$$

A afirmação acima implica em

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int \prod_x d\alpha(x) \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)]. \quad (\text{A.6})$$

Como vemos temos a seguinte invariância por translação funcional

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \Delta^{-1}[A_\mu^\theta]. \quad (\text{A.7})$$

Agora vamos inserir a identidade (A.5) em (A.1)

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu] &= \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu] \\
&= \int \prod_x d\alpha(x) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu] \\
&= \left(\int \prod_x d\alpha(x) \right) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu]. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Pois bem, observando a seguinte propriedade da equação acima

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu] &= \left(\int \prod_x d\alpha(x) \right) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \{ \delta[F(A_\mu(x)) - f_1(x)] + \delta[F(A_\mu(x)) - f_2(x)] \} \times \\
&\times Q[A_\mu, J_\mu] = 2 \left(\int \prod_x d\alpha(x) \right) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu]. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

E utilizando o conceito de normalização

$$\frac{Z[J_\mu]}{Z[0]} = \frac{\int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu]}{\int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu(x)) - f(x)] Q[A_\mu, 0]}, \tag{A.10}$$

concluimos que o funcional $Z[J_\mu]$ não depende da escolha de f . Neste caso,

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu] &= \left(\int \prod_x d\alpha(x) \right) \int Df L[f] \int DA_\mu \Delta[A_\mu] \delta[F(A_\mu(x)) - f(x)] Q[A_\mu, J_\mu] \\
&= \left(\int \prod_x d\alpha(x) \right) \int DA_\mu \Delta[A_\mu] L[F(A_\mu(x))] Q[A_\mu, J_\mu]. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}[A_\mu] &= \int \prod_x d\alpha(x) \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \\
&= \int \prod_x dF \delta[F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)] \det\left(\frac{\delta\alpha}{\delta F}\right) \\
&= \det\left(\frac{\delta\alpha}{\delta F}\right) \Big|_{F(A_\mu^\alpha(x))=f(x)}. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\Delta[A_\mu] = \det\left(\frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta\alpha}\right) \Big|_{F(A_\mu^\alpha(x))=f(x)} = \det\left(\frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta\alpha}\right) \Big|_{\alpha=0}. \tag{A.13}$$

Apêndice B

Integrais d-dimensionais

Temos como objetivo neste apêndice calcular integrais do tipo

$$I_d(a) = \int d^d \mathbf{p} f(p) \exp \left[\pm i \mathbf{p} \mathbf{a} \right] \quad p = |\mathbf{p}|. \quad (\text{B.1})$$

Primeiramente vamos considerar o caso onde $d > 2$. É apropriado utilizar coordenadas esféricas em d-dimensões,

$$\begin{aligned} p^1 &= p \cos(\theta_1) \\ p^2 &= p \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ p^3 &= p \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ &\vdots \\ p^{d-1} &= p \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \cdots \operatorname{sen}(\theta_{d-2}) \cos(\theta_{d-1}) \\ p^d &= p \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \cdots \operatorname{sen}(\theta_{d-2}) \operatorname{sen}(\theta_{d-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, ..., $0 \leq \theta_{d-2} \leq \pi$ e $0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$. Neste caso temos que,

$$d^d \mathbf{p} = p^{d-1} dp \prod_{l=1}^{d-1} \operatorname{sen}^{d-l-1}(\theta_l) d\theta_l. \quad (\text{B.3})$$

Convenientemente vamos escolher $\mathbf{a} = (a, 0, \dots, 0)$. Sendo assim a equação (B.1) é escrita como

$$\begin{aligned} I_d(a) &= \left[\int_0^\infty dp p^{d-1} f(p) \left(\int_0^\pi d\theta_1 \operatorname{sen}^{d-2}(\theta_1) \exp \left[\pm i p a \cos(\theta_1) \right] \right) \right] \times \\ &\times \left(\int_0^\pi d\theta_2 \operatorname{sen}^{d-3}(\theta_2) \right) \times \left(\int_0^\pi d\theta_3 \operatorname{sen}^{d-4}(\theta_3) \right) \times \dots \end{aligned}$$

$$(B.4) \quad \times \left(\int_0^\pi d\theta_{d-2} \text{sen}(\theta_{d-2}) \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{d-1} \right).$$

É de nosso conhecimento que

$$\int_0^\pi d\theta \text{sen}^{2s}(\theta) \exp \left[\pm i p \text{acos}(\theta) \right] = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{pa}{2} \right)^{-s} J_s(pa) \quad s > -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi d\theta \text{sen}^r(\theta) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2}(r+1) \right]}{\Gamma \left[\frac{1}{2}(r+2) \right]} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (B.5)$$

Portanto depois de algumas manipulações e fazendo a seguinte mudança de variáveis $u=ap$ concluímos que

$$I_d(a) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{a^d} \int_0^\infty du u^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d-1}{2}}(u) f\left(\frac{u}{a}\right) \quad d > 2. \quad (B.6)$$

Podemos estender o resultado anterior para os casos onde $d=1$ e $d=2$.

Agora seja $f(p) = (p^2 + m^2)^{-1}$. Com a ajuda do seguinte fato,

$$\int_0^\infty du \frac{u^{s+1} J_s(u)}{u^2 + x^2} = x^s K_s(x) \quad x > 0 \quad -1 < s < \frac{3}{2}, \quad (B.7)$$

chegamos ao seguinte resultado

$$I_d(a) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} m^{d-2} (ma)^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d-1}{2}}(ma)$$

$$= (2\pi)^{\frac{d}{2}} m^{d-2} G_d(ma) \quad m > 0 \quad 0 < d < 5. \quad (B.8)$$

Como o lado direito de (B.8) é definido para todo numero inteiro positivo vamos dizer que a equação é válida para todo inteiro positivo por argumentos de extensão analítica.

Por fim seja $f(p) = p^{-2}$. Neste caso vamos utilizar o seguinte fato,

$$\int_0^\infty du u^s J_r(u) = 2^s \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + \frac{s}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{s}{2} \right)} \quad -r-1 < s < \frac{1}{2}. \quad (B.9)$$

Conseqüentemente,

$$I_d(a) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{d}{2}-2} \Gamma \left(\frac{d}{2} - 1 \right) a^{2-d} \quad 2 < d < 5. \quad (B.10)$$

Podemos estender (B.10) para $d \neq 2$. O caso onde $d = 2$ pode ser contornado tomando o limite de $m \rightarrow 0$ em (B.8) juntamente com a seguinte identidade,

$$K_0(z \rightarrow 0) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma. \quad (B.11)$$

Sendo assim,

$$I_d(a) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{d}{2}-2} \Gamma(\frac{d}{2} - 1) a^{2-d} & d \neq 2 \\ -2\pi [\ln(\frac{ma}{2}) + \gamma] & d = 2. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Qualquer resultado matemático deste apêndice pode ser encontrado em [32] e [38].

Bibliografia

- [1] T.Lee and G.Wick *Negative Metric and the Unitarity of the S-Matrix*, Nuclear Physics **B9**, 209-243 (1969).
- [2] T.Lee and G.Wick *Finite Theory of Quantum Electrodynamics*, Physical Review D **2**, 1033 (1970).
- [3] B.Grinstein, D.O'Connell, and M.Wise *The Lee-Wick standard model*, Physical Review D **77**, 025012 (2008).
- [4] Christopher D.Carone, Richard F.Lebed *Minimal Lee-Wick extension of the Standard Model*, Physics Letters B. **668**, 221-225 (2008).
- [5] Christopher D.Carone, Richard F.Lebed *A higher-derivative Lee-Wick standard model*, J.High Energy Phys.01 **041**, (2009).
- [6] Christopher D.Carone, *Higher-Derivative Lee-Wick unification*, Physics Letters B. **677**, 306-310 (2009).
- [7] W.Pauli and F.Villars, *On the invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Reviews of Modern Physics . **21**, 434 (1949).
- [8] José Ramón Espinosa, Benjamín Grinstein, Donal O'Connell and Mark B.Wise *Neutrino masses in the Lee-Wick standard model* Physical Review D. **77**, 085002 (2008).
- [9] Yi-Fu, Taotao Qiu, Robert Brandenberger and Xinmen Zhang *Nonsingular cosmology with a scale-invariant spectrum of cosmological perturbations from Lee-Wick theory*, Physical Review D. **80**, 023511 (2009).
- [10] TaoTao Qiu and Kwei-Chow Yang, *Perturbations in matter bounce with non-minimal coupling*, Journal of Cosmology and Astroparticles Physics (2010).

- [11] Johanna Karouby, Taotao Qiu and Robert Brandenberger, *Instability of the Lee-Wick bounce*, Physical Review D. **84**, 043505 (2011).
- [12] Johanna Karouby and Robert Brandenberger, *Radiation bounce from the Lee-Wick construction?*, Physical Review D. **82**, 063532 (2010).
- [13] A.Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, University of California at Santa Barbara, (2003).
- [14] Feng Wu, Ming Zhong, *The Lee-Wick fields out of gravity*, Physics Letters B. **659**, 694-697 (2008).
- [15] Andreas Rodigast and Theodor Schuster, *No Lee-Wick fields out of gravity*, Physical Review D. **79**, 125017 (2009).
- [16] Bartoz Fornal, Benjamín Grinstein, Mark B.Wise, *Lee-Wick Theories at high temperatures*, Physics Letters B. **674**, 330-335 (2009).
- [17] Kaushik Bhattacharya and Suratna Das, *Thermodynamics of the Lee-Wick partners: An alternative approach*, Physical Review D. **84**, 045023 (2011).
- [18] Roger Dashen, Shang-Keng Ma and Herbert J.Bernstein *S-Matrix Formulation of Statistical Mechanics*, Physical Review D. **167**, 345 (1969).
- [19] Benjamín Grinstein and Donal O´Connell, *One-loop renormalization of Lee-Wick gauge theory*, Physical Review D. **78**, 105005 (2008).
- [20] R.Sekhar Chivukula, Arsham Farzinnia, Roshan Foadi and Elizabeth H.Simmons, *Global symmetries and renormalizability of Lee-Wick theories*, Physical Review D. **82**, 035015 (2010).
- [21] F.A. Barone, *The Abelian Lee-Wick Quantization*, em andamento.
- [22] João Barcelos Neto, *Eletrodinâmica Quântica*, IF/UFRJ/Monografia/M88/03.
- [23] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univer. Press (1992).

- [24] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder *An Quantum Field Theory*, Perseus Books Publishing (1995).
- [25] Ashok Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific, University of Rochester USA, (2008).
- [26] F. A. Barone and G. Flores-Hidalgo, *Vacuum energies due to delta-like currents: Simulating classical objects along branes with arbitrary codimensions*, Physical Review D. **78**, 125003 (2008).
- [27] Antonio Accioly, Patrício Gaete, José Helayël-Neto, Esley Scatena and Rodrigo Turcati, *Exploring Lee-Wick finite electrodynamics*, (2010) [arXiv:physics/1012.1045v2].
- [28] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2^a ed., Cambridge Univ. Press. (2001).
- [29] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, University of California, (1999).
- [30] M. Bordag, D. Robaschik and E. Wieczorek, *Quantum Field Theoretic Treatment of the Casimir Effect*, Annals of Physics. **165** 192-213 (1985).
- [31] V. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir Effect And Its Applications*, Oxford University Press, USA (1997).
- [32] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, (1995).
- [33] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Institute of Physical Problems, USSR Academy of Sciences, (1951).
- [34] K.A. Milton, *The Casimir Effect, Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore (2001).
- [35] A. Nogueira and F.A. Barone, *External sources for Lee-Wick Electrodynamics*, em andamento.
- [36] A. Nogueira and F.A. Barone, em andamento.
- [37] A. Nogueira and F.A. Barone, em andamento.

- [38] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, (2000).