Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Teoria de Semigrupos Não Lineares e Resultados de Compacidade

Fernando Soares Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Itajubá, 24 de Fevereiro de 2012

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Teoria de Semigrupos Não Lineares e Resultados de Compacidade

Fernando Soares Guimarães

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Itajubá – MG
24 de Fevereiro de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

G963t

Guimarães, Fernando Soares
Teoria de semigrupos não lineares e resultados de compacidade / Fernando Soares Guimarães. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2012.
86 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Semigrupos não lineares. 2. Atratores globais. 3. Conjunto w- limite. I. Simsen, Jacson, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

Aos meus pais,

José Alceu Alves Guimarães e

Maria Eunice Soares Guimarães

Agradecimentos

A Deus pela minha vida e pelas vitórias conquistadas.

Aos meus pais, fonte de inspiração, pelo amor, orações e por acreditarem em mim.

A minha família pelo apoio, amizade e confiança.

A Ivone pelo carinho e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jacson Simsen, pela dedicação, competência e paciência na orientação deste trabalho.

Aos professores, Márcia S. Kashimoto, Mariza S. Simsen, Fábio S. Dias e Luis Fernando Mello, pelos ensinamentos e pela competência. Vejo em vocês um exemplo de profissionalismo a ser seguido.

Aos professores do Departamento de Ciências Exatas da UNIMONTES, especialmente aos que foram meus professores na graduação.

Aos amigos Adriana Martins da Silva Castro e Warley Ferreira da Cunha, companheiros no mestrado, pelos momentos de estudos e de alegrias.

Aos amigos, Adenise, Alaide (mami), Aldemira, Alex, Altiere, Carlos, Cezinha, Claudinha, Diego Armando, Dey, Edercio, Edno, Edson (papi), Elinha, Eloi, Eunice, Francis, Geane, Gesiane, Jonas, Joyce, Moisés, Neila, Nelma, Patricia, Rander, Renato, Renno, Rogério, Rosélia, Valério, Vanessa, Vilma, Waldomiro e aos que não lembrei de mencionar, pela amizade.

Aos amigos de república, Celso, Edson (Júnior), Fernando Félix, Hugo e Rafael pela convivência e amizade.

Aos amigos de Itajubá, Néia, Elaine, Rick, Doi, Dona Nina e Vitor, pela amizade e pelo "rango" de cada dia.

Aos amigos de mestrado, Adriano, Cleuber, Edson, Fernando, Franco, PH, Warley Batista, pela amizade e, é claro, pelo futebol aos sábados.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui.

"A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original."
Albert Einstein.

Resumo

Este trabalho apresenta resultados abstratos sobre semigrupos não lineares e uma generalização do Teorema de Baras.

Palavras–chave: semigrupos não lineares, atratores globais, conjunto ω-limite, conjunto invariante, resultados de compacidade.

Abstract

This work shows abstract results about nonlinear semigroups and a generalization of Baras's Theorem.

Keywords: nonlinear semigroups, global attractors, ω-limit set, invariant set, compactness results.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A proposta deste trabalho é reunir num texto resultados abstratos sobre semigrupos não lineares, sendo o artigo [7] a parte central e as referências [4, 5, 12] complementações. São apresentados resultados que garantem a existência do B-atrator global minimal fechado compacto invariante, resultados sobre as formas críticas de atratores minimais fechados, resultados de comparação entre as classes de semigrupos e as condições equivalentes para a existência do B-atrator global minimal fechado que é compacto e invariante. Também são apresentados resultados de caracterização dos atratores globais.

O semigrupo de classe $\mathcal{K}$, geralmente, é usado para provar a existência do B-atrator global minimal fechado para equações de Navier-Stokes e equações diferenciais parciais parabólicas. A classe $A\mathcal{K}$ é bastante usada para equações diferenciais parciais hiperbólicas e do tipo misto.

Por último, estudamos resultados de compacidade, onde o principal resultado é uma generalização do Teorema de Baras, devido a Pereira e Simsen [10].

Neste trabalho adotamos a convenção [ ] para indicar onde as definições e os resultados podem ser encontrados, caso o leitor queira saber mais detalhes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, enunciamos algumas definições e resultados de Análise Funcional, Espaços Métricos e Topologia. No Capítulo 3, apresentamos a teoria de semigrupos não lineares. Finalmente no Capítulo 4, apresentamos resultados de compacidade.

Capítulo 2

Pré-Requisitos

2.1 Uma Coletânia de Resultados

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados que utilizamos ao longo deste trabalho.

Definição 2.1.1 *[11] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é chamado relativamente compacto se o fecho $\overline{A}$ é compacto.*

Teorema 2.1.1 *[11] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é relativamente compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_n\}$ cujos elementos pertencem a A, tem uma subsequência convergente.*

Definição 2.1.2 *[11] Um conjunto A em um espaço métrico (X, d) é chamado precompacto se para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos em X, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que A está contido na união das bolas abertas $B\,(x_i\,,\,\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$, onde*

$$B\,(x_i\,,\,\varepsilon) = \{x : d(x\,,\,x_i) < \varepsilon\}.$$

Teorema 2.1.2 *[11] Um conjunto relativamente compacto em um espaço métrico é precompacto.*

Teorema 2.1.3 *[11] Um conjunto A em um espaço métrico completo (X, d) é relativamente compacto se, e somente se, é precompacto.*

Lema 2.1.1 *(Número de Lebesgue)[8] Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico (X, d). Se X é compacto, existe um $\delta > 0$ (chamado o número de Lebesgue da cobertura*

$\mathcal{A}$) tal que cada subconjunto de X tendo diâmetro menor do que $\delta > 0$ está inteiramente contido em algum elemento de $\mathcal{A}$.

Proposição 2.1.1 *[3]*

(a) Um conjunto A é convexo se, e somente se, sempre que $x_1, \ldots, x_n \in A$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ com $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, então $\sum_{j=1}^{n} t_j x_j \in A$.

(b) Se $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$ é uma coleção de conjuntos convexos, então $\bigcap_{\alpha} A_\alpha$ é convexo.

Definição 2.1.3 *[3] Seja $A \subset X$, a envoltória convexa de A, denotada por $conv(A)$, é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contém A. Se X é um espaço vetorial topológico, então o fecho da envoltória convexa de A, $\overline{conv(A)}$, é a intersecção de todos os subconjuntos convexos fechados de X que contém A.*

Teorema 2.1.4 *(Teorema de Mazur)[3] Se X é um espaço de Banach e K é um subconjunto compacto de X, então $\overline{conv(K)}$ é compacto.*

Proposição 2.1.2 *[3] Seja X um espaço vetorial topológico e seja A um subconjunto convexo de X, então $\overline{A}$ é convexo.*

Definição 2.1.4 *[6] Um espaço métrico (X, d) diz-se conexo por caminhos quando, dados dois pontos quaisquer $a, b \in X$, existe uma função contínua $f : [0,1] \longrightarrow X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Proposição 2.1.3 *[6] Todo conjunto convexo é conexo por caminhos.*

Proposição 2.1.4 *[6] Se o espaço métrico (X, d) é conexo por caminhos, então (X, d) é conexo.*

Proposição 2.1.5 *[6] Todo espaço métrico compacto é completo.*

Definição 2.1.5 *(Propriedade da Intersecção Finita)[8] Uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita ter a propriedade da intersecção finita, se cada subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n})$ de $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem intersecção não vazia.*

Teorema 2.1.5 *[8] $Y \subset X$ é compacto se, e somente se, para uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L} \subset Y$ de fechados possuindo a propriedade da intersecção finita, a intersecção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é não vazia.*

Capítulo 3

Teoria de Semigrupos Não Lineares

Neste capítulo é apresentada a teoria de semigrupos não lineares. A teoria de semigrupos pode ser usada para estudar o comportamento assintótico de soluções de EDP's, isto é, a existência do B-atrator global A.

3.1 Preliminares

Seja (X,d) um espaço métrico completo. Uma família de operadores $\{V_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ X\}$, $V_t : X \longrightarrow X$ contínuo, satisfendo:

$$\begin{cases} V_{t+s} = V_t V_s, \forall\, t,s \geq 0 \\ V_0 = I \text{ (identidade em } X) \end{cases}$$

é chamado um *Semigrupo*. Diremos que o semigrupo é linear quando X for espaço vetorial e $V_t : X \longrightarrow X$ é um operador linear, $\forall\ t \geq 0$. O semigrupo é não linear quando X não for espaço vetorial ou se existe $t_0 > 0$ tal que $V_{t_0} : X \longrightarrow X$ é não linear. A teoria descrita neste capítulo inclui o caso não linear. Também denotaremos um semigrupo por $\{V_t\}_{t\geq 0}$. Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é chamado contínuo (ou C^0-semigrupo) se a aplicação $(t,x) \longmapsto V_t(x)$ de $\mathbb{R}^+ \times X$ em X é contínua.

Dados $x \in X$ e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, as seguintes notações serão frequentemente usadas:

$$\gamma^+(x) := \{V_t(x) : t \in \mathbb{R}^+\} = \bigcup_{t\geq 0} V_t(x);$$

$$\gamma^+_{[t_1,t_2]}(x) := \{V_t(x),\ t \in [t_1,t_2]\};$$

$$\gamma^+_t(x) := \{V_\tau(x) : \tau \in [t,+\infty)\} = \bigcup_{\tau \geq t} V_\tau(x),\ t \geq 0;$$

$$\gamma^+(A) := \bigcup_{x\in A} \gamma^+(x) = \bigcup_{t\geq 0} V_t(A);$$

$$\gamma^+_{[t_1,t_2]}(A) := \bigcup_{x\in A} \gamma^+_{[t_1,t_2]}(x);$$

$$\gamma^+_t(A) := \bigcup_{x\in A} \gamma^+_t(x) = \bigcup_{\tau\geq t} V_\tau(A).$$

O conjunto $\gamma^+(x)$ é chamado a *semi-trajetória positiva do ponto x*. O conjunto $\gamma^+(A)$ é chamado a *semi-trajetória positiva do conjunto A*.

Proposição 3.1.1 *[5] $V_t\left(\gamma^+_s(A)\right) = \gamma^+_{t+s}(A)$, $\forall\, t, s \geq 0$.*

Demonstração: De fato, mostremos que:

(i) $V_t\left(\gamma^+_s(A)\right) \subset \gamma^+_{t+s}(A)$.

Sejam $t \geq 0$ e $s \geq 0$ dados. Se $y \in \gamma^+_s(A)$, então $y \in \bigcup_{x\in A} \gamma^+_s(x)$. Logo, $y \in \gamma^+_s(x)$ para algum $x \in A$. Daí, $y = V_\tau(x)$ para algum $x \in A$ e $\tau \in [s, +\infty)$. Assim, $V_t(y) = V_t\left(V_\tau(x)\right) = V_{t+\tau}(x)$. Logo, $V_t(y) \in \gamma^+_{t+s}(x)$ para algum $x \in A$. Portanto, $V_t(y) \in \gamma^+_{t+s}(A)$.

(ii) $\gamma^+_{t+s}(A) \subset V_t\left(\gamma^+_s(A)\right)$.

Sejam $t \geq 0$ e $s \geq 0$ dados. Se $y \in \gamma^+_{t+s}(A)$, então $y \in \bigcup_{x\in A} \gamma^+_{t+s}(x)$. Logo, $y \in \gamma^+_{t+s}(x)$ para algum $x \in A$. Daí, $y = V_\tau(x)$, $\tau \in [t+s, +\infty)$. Logo, $\tau = t+s+l$ para algum $l \geq 0$. Portanto, $y = V_{t+s+l}(x) = V_t\left(V_{s+l}(x)\right) \in V_t\left(\gamma^+_s(A)\right)$.

$\blacksquare$

Proposição 3.1.2 *[5] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo. Para cada conjunto compacto K e $t \in \mathbb{R}^+$, o conjunto $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é compacto.*

Demonstração: Seja $\{V_{t_n}(x_n)\}$ uma sequência em $\gamma^+_{[0,t]}(K)$, onde $\{x_n\} \subset K$ e $\{t_n\} \subset [0, t]$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ possui uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ tal que $x_{n_j} \longrightarrow x_0 \in K$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Como $[0, t]$ é compacto, $\{t_{n_j}\}$ possui uma subsequência $\left\{t_{n_{j_k}}\right\}$ tal que $t_{n_{j_k}} \longrightarrow t_0 \in [0, t]$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Visto que $x_{n_j} \longrightarrow x_0$ quando $j \longrightarrow +\infty$, temos que $x_{n_{j_k}} \longrightarrow x_0$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim, $\left(t_{n_{j_k}}, x_{n_{j_k}}\right) \longrightarrow (t_0, x_0) \in [0, t] \times K$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é contínuo, temos

$$V_{t_{n_{j_k}}}\left(x_{n_{j_k}}\right) \longrightarrow V_{t_0}(x_0) \in \gamma^+_{[0,t]}(K) \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, $\gamma^+_{[0,t]}(K)$ é compacto.

■

Definição 3.1.1 *[7] Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é positivamente invariante (relativo ao semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$) se $V_t(A) \subset A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$; negativamente invariante se $A \subset V_t(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$; invariante se $V_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 3.1.2 *[5, 7] Sejam A e M subconjuntos não vazios de X. Dizemos que A atrai M (pelo semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$) se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que $V_t(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geq t(\varepsilon, M)$, onde $\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$. Dizemos que A atrai um ponto $x \in X$, se A atrai o conjunto unitário $\{x\}$.*

Definimos

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) := \{B : B \neq \emptyset$ é um conjunto limitado em $X\}$.

$\mathcal{K} = \mathcal{K}(X) := \{K : K \neq \emptyset$ é um conjunto compacto em $X\}$.

Definição 3.1.3 *[5, 7] Seja A um subconjunto não vazio de X. Se A atrai cada ponto $x \in X$, então A é chamado um atrator global de pontos (para o semigrupo); Se A atrai cada conjunto $B \in \mathcal{B}$, então A é chamado um B-atrator global. Se A é um atrator global de pontos fechado (ou um B-atrator global fechado) e qualquer subconjunto próprio fechado de A não é um atrator global de pontos (ou um B-atrator global), então A é chamado um atrator global de pontos minimal fechado (ou um B-atrator global minimal fechado).*

Os símbolos $\hat{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ serão usados para denotar o atrator global de pontos minimal fechado e o B-atrator global minimal fechado, respectivamente.

Definição 3.1.4 *[5, 7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo.*

(i) Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um atrator global de pontos limitado, dizemos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo.

(ii) Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global limitado, dizemos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo.

Definição 3.1.5 *[4] Dizemos que o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo, se existe $B \in \mathcal{B}$ que atrai conjuntos compactos; localmente compacto dissipativo, se existe $B \in \mathcal{B}$ que atrai uma vizinhança de cada conjunto compacto de X.*

Definição 3.1.6 *[5, 7] Seja $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, se para cada $x \in X$ existe um $t(x) \geq 0$ tal que $V_t(x) \in A$ para todo $t \geq t(x)$, então A é chamado absorvente; Se para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $V_t(B) \subset A$ para todo $t \geq t(B)$, então A é chamado B-absorvente.*

Definição 3.1.7 *[7] Para $x \in X$ e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, definimos o conjunto ω-limite de x e de A como*

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(x)} \quad e \quad \omega(A) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(A)}. \tag{3.1}$$

Observação 3.1.1 *[5] Como $\gamma_{t_2}^+(A) \subset \gamma_{t_1}^+(A)$, sempre que $t_2 > t_1$, a interseção sobre todo $t \in \mathbb{R}^+$ em (3.1) pode ser substituida por $\bigcap\limits_{t\geq T}$, com qualquer $T \in \mathbb{R}^+$.*

Lema 3.1.1 *[2, 7] Para um elemento y pertencer ao conjunto ω-limite, $\omega(A)$, é necessário e suficiente que exista uma sequência de elementos $\{x_n\} \subset A$ e uma sequência de números $\{t_n\}$, $t_n \longrightarrow +\infty$, tais que*

$$\lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n) = y.$$

Demonstração: De fato, se $y \in \omega(A)$, então para todo $s \geq 0$

$$y \in \overline{\bigcup_{t\geq s} V_t(A)}.$$

Logo, existe uma sequência $\{V_{t_n}(x_n)\} \subset \bigcup\limits_{t\geq s} V_t(A)$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$, para todo $s \geq 0$. Ou seja, para qualquer $n \geq 0$, existem $x_n \in A$ e $t_n \geq n$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n) = y.$$

Por outro lado, se $y \in X$ e existem sequências $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n) = y$, então para todo $s \geq 0$,

$$y \in \overline{\bigcup_{t\geq s} V_t(A)}.$$

Logo,

$$y \in \bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} V_t(A)}.$$

Portanto, $y \in \omega(A)$.

■

Observação 3.1.2 *[7] Analogamente pode-se mostrar que*

$$\omega(x) = \{y \in X : \text{ existe } t_n \longrightarrow +\infty \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x) = y\}.$$

Definição 3.1.8 *[7] Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado se $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$ para cada $B \in \mathcal{B}$; é B-limitado se para cada $B \in \mathcal{B}$, existe um $t(B) \geq 0$ para o qual $\gamma_{t(B)}^+(B) \in \mathcal{B}$.*

Proposição 3.1.3 *[7] Se um semigrupo é B-dissipativo, então ele é B-limitado e $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) \in \mathcal{B}$.*

Demonstração: Seja B_1 um B-atrator global limitado. Seja $\varepsilon_0 > 0$ fixado. Dado $B \in \mathcal{B}$, existe $t_1(\varepsilon_0, B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t_1(\varepsilon_0,B)}(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1) \in \mathcal{B}$. Dado $B \in \mathcal{B}$, pela definição do conjunto $\omega(B)$, temos que

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_1(\varepsilon_0,B)}(B)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B}.$$

Como B é arbitrário, temos que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B}.$$

Logo,

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) \in \mathcal{B}.$$

■

O lema seguinte é a chave para obter as formas críticas de atratores.

Lema 3.1.2 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e seja $F \neq \emptyset$ um subconjunto fechado de X. Se F atrai um subconjunto $A \neq \emptyset$ de X, então $\omega(A) \subset F$. Em particular, se $\omega(A)$ atrai A, então ele será o conjunto minimal fechado que atrai A.*

Demonstração: Como F atrai A, então dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um $t(\varepsilon, A) \geq 0$ tal que $V_t(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F)$ para todo $t \geq t(\varepsilon, A)$. Portanto, $\gamma^+_{t(\varepsilon,A)}(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F)$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Logo,

$$\overline{\gamma^+_{t(\varepsilon,A)}(A)} \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(F)},\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Pela definição do conjunto ω-limite, temos

$$\omega(A) \subset \overline{\gamma^+_{t(\varepsilon,A)}(A)} \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(F)},\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Como F é fechado, então $\omega(A) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(F)} = \overline{F} = F$.

■

Lema 3.1.3 *[7] Seja A um subconjunto não vazio de X, então $\omega(A)$ é positivamente invariante.*

Demonstração: Devemos mostrar que $V_t(\omega(A)) \subset \omega(A)$, para todo $t \geq 0$. Pela definição de conjunto ω-limite e a continuidade de V_t, temos

$$\begin{aligned} V_t(\omega(A)) &= V_t\left(\bigcap_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(A)}\right) \subset \bigcap_{s\geq 0} V_t\left(\overline{\gamma_s^+(A)}\right) \subset \bigcap_{s\geq 0}\overline{V_t(\gamma_s^+(A))} = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\gamma_{t+s}^+(A)} = \\ &= \bigcap_{s\geq t}\overline{\gamma_s^+(A)} = \omega(A),\ t\geq 0. \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.4 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e $K \neq \emptyset$ um conjunto compacto que atrai $A \neq \emptyset$. Então, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $x_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente.*

Demonstração: Como K atrai A, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um $T := t(k, A) > 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \subset \mathcal{O}_{\frac{1}{k}}(K)$. Agora, suponha que $\{V_{t_n}(x_n)\}$ é uma sequência arbitrária, onde $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$. Podemos escolher uma subsequência $\{t_{n_k}\}$, $t_{n_k} \longrightarrow +\infty$, satisfazendo $t_{n_k} \geq T$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Então, $V_{t_{n_k}}(x_{n_k}) \in \gamma_T^+(A) \subset \mathcal{O}_{\frac{1}{k}}(K)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Logo, temos que, para $k \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $y_k \in K$ tal que

$$d\left(V_{t_{n_k}}(x_{n_k}), y_k\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Como $\{y_k\} \subset K$ e K é compacto, então existe uma subsequência que continuaremos chamando de y_k tal que $y_k \longrightarrow y \in K$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Portanto,

$$d\left(V_{t_{n_k}}(x_{n_k}), y\right) \leq d\left(V_{t_{n_k}}(x_{n_k}), y_k\right) + d(y_k, y) \leq \frac{1}{k} + d(y_k, y) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

■

Lema 3.1.5 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e $A \neq \emptyset$. Se cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente, então $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não vazio que atrai A e $\omega(A)$ é compacto.*

Demonstração: $\omega(A) \neq \emptyset$, pois $A \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\omega(A)$ atrai A. Suponha, por contradição, que $\omega(A)$ não atrai A. Então existem $\varepsilon_0 > 0$, $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$V_{t_n}(x_n) \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\omega(A)),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente, podemos supor que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Então, temos que $y \in \omega(A)$ e $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\omega(A))$. Uma contradição.

Logo, $\omega(A)$ atrai A.

Além disso, pelo Lema 3.1.2, $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado que atrai A.

Agora, seja $\{y_n\} \subset \omega(A)$, então pela definição de $\omega(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in A$ e $t_n > n$ tal que

$$d\left(V_{t_n}(x_n), y_n\right) < \frac{1}{n}.$$

Novamente podemos mostrar que, $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y \in \omega(A)$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$d\left(y_n, y\right) \leq d\left(y_n, V_{t_n}(x_n)\right) + d\left(V_{t_n}(x_n), y\right) < \frac{1}{n} + d\left(V_{t_n}(x_n), y\right) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Logo, $y_n \longrightarrow y \in \omega(A)$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Portanto, $\omega(A)$ é compacto.

■

Obviamente, pelos Lemas 3.1.4 e 3.1.5, obtemos imediatamente que $\omega(A)$ é um conjunto compacto não vazio que atrai A se, e somente se, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente.

Lema 3.1.6 *[4, 7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e $A \neq \emptyset$. Se $\omega(A)$ é compacto e atrai A, então $\omega(A)$ é invariante.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.3, temos que $\omega(A)$ é positivamente invariante, isto é, $V_t\left(\omega(A)\right) \subset \omega(A)$, $\forall\, t \geq 0$. Resta mostrar que $\omega(A) \subset V_t\left(\omega(A)\right)$, $\forall\, t \geq 0$.

De fato, se $\omega(A) = \emptyset$, o resultado segue (por vacuidade). Suponha que $\omega(A) \neq \emptyset$. Seja $y \in \omega(A)$ e $t \geq 0$ dados (arbitrários). Como $y \in \omega(A)$, então existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ com $x_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tais que

$$y = \lim_{n\to\infty} V_{t_n}(x_n).$$

Visto que $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n > t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Considere $\tau_n := t_n - t$, temos que $\tau_n \longrightarrow +\infty$. Como $\omega(A)$ é compacto e atrai A, pelo Lema 3.1.4, existe uma subsequência $\left\{V_{\tau_{n_j}}\left(x_{n_j}\right)\right\}$ de $\{V_{\tau_n}(x_n)\}$ tal que

$$V_{\tau_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow z \in \omega(A) \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Logo,

$$V_t(z) = V_t\left(\lim_{j\to+\infty} V_{\tau_{n_j}}\left(x_{n_j}\right)\right) = \lim_{j\to+\infty} V_{t+\tau_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = \lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = y.$$

■

Teorema 3.1.1 *[4, 7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Seja $K \neq \emptyset$ compacto e atrai $A \neq \emptyset$. Então, $\omega(A)$ é um conjunto minimal fechado não vazio que atrai A e é compacto e invariante.*

Demonstração: Pelo Lema 3.1.4, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $x_n \in A$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente. Então, pelo Lema 3.1.5, $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não vazio que atrai A e $\omega(A)$ é compacto. Pelo Lema 3.1.6, $\omega(A)$ é invariante.

■

Lema 3.1.7 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Então, para qualquer $A \neq \emptyset$ e para qualquer $T \geq 0$, temos $\omega\left(\gamma_T^+(A)\right) = \omega(A)$.*

Demonstração: Para qualquer $A \neq \emptyset$ e para qualquer $T \geq 0$, temos pela Proposição 3.1.1 que $V_t\left(\gamma_T^+(A)\right) = \gamma_{t+T}^+(A)$, $\forall\ t \geq 0$. Logo,

$$\gamma_t^+\left(\gamma_T^+(A)\right) = \bigcup_{\tau \geq t} V_\tau\left(\gamma_T^+(A)\right) = \bigcup_{\tau \geq t} \gamma_{\tau+T}^+(A) = \gamma_{t+T}^+(A),\ \forall\ t \geq 0.$$

Portanto, pela definição de conjunto ω-limite,

$$\omega\left(\gamma_T^+(A)\right) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_t^+\left(\gamma_T^+(A)\right)} = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma_{t+T}^+(A)} = \bigcap_{t\geq T} \overline{\gamma_t^+(A)} = \omega(A).$$

■

Lema 3.1.8 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e A, M subconjuntos não vazios de X, $x \in X$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) *A atrai M;*

(ii) *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que $\gamma_{t(\varepsilon,M)}^+(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$;*

(iii) $\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in M} \inf_{y\in A} d\left(V_t(x), y\right) = 0$;

(iv) *Para qualquer $T \geq 0$, A atrai $\gamma_T^+(M)$.*

Demonstração:

$(i) \Leftrightarrow (ii)$: é claro, pela definição de A atrair M.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $t(\varepsilon, M) \geq 0$ tal que

$$\inf_{y\in A} d\left(V_t(x), y\right) = d\left(V_t(x), A\right) < \varepsilon,\ \forall\ t \geq t(\varepsilon, M) \text{ e } x \in M.$$

Logo, $\sup_{x\in M}\inf_{y\in A} d\left(V_t(x),y\right) \leq \varepsilon$, $\forall\ t \geq t\left(\varepsilon, M\right)$. Portanto,

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in M}\inf_{y\in A} d\left(V_t(x),y\right) = 0.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Temos por hipótese que, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{x\in M}\inf\limits_{y\in A} d\left(V_t(x),y\right) = 0$.
Logo, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{x\in M} d\left(V_t(x),A\right) = 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $t\left(\varepsilon, M\right) \geq 0$ tal que $\sup\limits_{x\in M} d\left(V_t(x),A\right) < \varepsilon$. Logo, $d\left(V_t(x),A\right) < \varepsilon$, $\forall\ t \geq t\left(\varepsilon,M\right)$ e $\forall\ x \in M$. Portanto, $\gamma^+_{t(\varepsilon,M)}(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Suponha que A atrai M e seja $T \geq 0$ dado. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $t\left(\varepsilon, M\right) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(\varepsilon,M)}(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$, por (ii). Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $t\left(\varepsilon,M\right) > T$. Logo,

$$\gamma^+_{t(\varepsilon,M)-T}\left(\gamma^+_T(M)\right) = \gamma^+_{t(\varepsilon,M)}(M) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

Por $(ii) \Leftrightarrow (i)$, segue que A atrai $\gamma^+_T(M)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Seja $T \geq 0$. Temos por hipótese que A atrai $\gamma^+_T(M)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $t\left(\varepsilon, M\right) \geq 0$ tal que

$$\gamma^+_{t(\varepsilon,M)+T}(M) = \gamma^+_{t(\varepsilon,M)}\left(\gamma^+_T(M)\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

Logo, por $(ii) \Leftrightarrow (i)$ segue que A atrai M.

■

Lema 3.1.9 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo e $A \neq \emptyset$.*

(i) Se A é positivamente invariante, então $\omega(A) \subset \omega\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$.

(ii) Se A é invariante, então $\omega(A) = \omega\left(\overline{A}\right) = \overline{A}$.

Demonstração:

(i) Primeiramente, mostraremos que $\omega(A) \subset \omega\left(\overline{A}\right)$.

De fato, dado $y \in \omega(A)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tais que

$$y = \lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n).$$

Como $A \subset \overline{A}$, temos que $\{x_n\} \subset \overline{A}$. Logo, $y \in \omega\left(\overline{A}\right)$. Portanto, $\omega(A) \subset \omega\left(\overline{A}\right)$.

Mostremos, agora, que $\omega\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$.

Afirmação: $\overline{A}$ é positivamente invariante, isto é, $V_t\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$, $\forall\ t \geq 0$.

De fato, dado $x \in V_t\left(\overline{A}\right)$. Pela continuidade de V_t, temos que $x \in \overline{V_t(A)}$. Logo, $V_t(A) \cap U_x \neq \emptyset$ para toda vizinhança U_x de x. Como A é positivamente invariante, segue que $A \cap U_x \neq \emptyset$, para toda vizinhança U_x de x. Logo, $x \in \overline{A}$, o que mostra a afirmação.

Assim, $\gamma^+\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$. Segue que $\overline{A}$ atrai $\overline{A}$. Logo $\omega\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$, pelo Lema 3.1.2. Portanto, $\omega(A) \subset \omega\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$.

(ii) Basta mostrar que $\overline{A} \subset \omega(A)$ e o resultado segue por (i). Dado $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência $\{y_n\} \subset A$ tal que $y_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como A é invariante, existem sequências $\{z_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{z_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(z_n) = y_n \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Portanto, $x \in \omega(A)$, pelo Lema 3.1.1.

■

Lema 3.1.10 *[4] Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração: Seja $\{V_{t_k}(x_k)\} \subset \gamma^+(B)$, onde $t_k \longrightarrow +\infty$ e $\{x_k\} \subset B$.
Como $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, existe uma subsequência $\left\{V_{t_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)\right\}$ de $\{V_{t_k}(x_k)\}$ tal que $V_{t_{k_j}}\left(x_{k_j}\right) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Logo, $y \in \omega(B)$ e portanto $\omega(B) \neq \emptyset$.
Por outro lado, $\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} V_t(B)}$. Note que, $V_t(B) \subset \gamma^+(B)$, $\forall\, t \geq 0$.
Assim,

$$\bigcup_{t \geq s} V_t(B) \subset \gamma^+(B)\ ,\ \forall\, s \geq 0.$$

Logo,

$$\overline{\bigcup_{t \geq s} V_t(B)} \subset \overline{\gamma^+(B)}\ ,\ \forall\, s \geq 0.$$

Portanto, $\omega(B) \subset \overline{\gamma^+(B)}$. Como $\omega(B)$ é fechado e $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, segue que $\omega(B)$ é compacto. Portanto, $\omega(B)$ é não vazio e compacto.
Mostremos, agora, que $\omega(B)$ atrai B:
Suponha, por contradição, que $\omega(B)$ não atrai B. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \geq 0$, existe $t_k > k$ e $x_k \in B$ tal que

$$d\left(V_{t_k}(x_k), \omega(B)\right) > \varepsilon_0. \tag{3.2}$$

Note que podemos construir $\{t_k\}$ de forma que $t_k \longrightarrow +\infty$. Observe que, $\{V_{t_k}(x_k)\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$ e como $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, segue que $\{V_{t_k}(x_k)\}$ possui uma subsequência convergente tal que $V_{t_{k_j}}\left(x_{k_j}\right) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow +\infty$ e $y \in \omega(B)$ (pelo Lema 3.1.1), o que contradiz (3.2). Portanto, $\omega(B)$ atrai B.

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, segue do Lema 3.1.6 que $\omega(B)$ é invariante.

$\blacksquare$

Lema 3.1.11 *Suponha que para algum subconjunto $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, e para algum $t_0 > 0$, o conjunto $\bigcup\limits_{t \geq t_0} V_t(A)$ é relativamente compacto em X. Então:*

(i) [12] $\omega(A)$ é não vazio, compacto e invariante;

(ii) [4] $\omega(A)$ atrai A.

Demonstração:

(i) Como A é não vazio, os conjuntos $\bigcup\limits_{t \geq s} V_t(A)$ são não vazios para todo $s \geq 0$. Logo, os conjuntos $\overline{\bigcup\limits_{t \geq s} V_t(A)}$ são compactos, $\forall\ s \geq t_0$. Como $\omega(A) = \bigcap\limits_{s \geq t_0} \overline{\bigcup\limits_{t \geq s} V_t(A)} \subset \overline{\bigcup\limits_{t \geq t_0} V_t(A)}$, temos que $\omega(A)$ é um conjunto fechado contido num compacto e consequentemente é compacto.

Mostremos, agora, que $\omega(A)$ é invariante. Ou seja, $V_t\left(\omega(A)\right) = \omega(A)$, $\forall\ t \geq 0$. Para $t = 0$, o resultado é trival.

(a) $V_t\left(\omega(A)\right) \subset \omega(A)$, $\forall\ t > 0$:

De fato, dado $y \in V_t\left(\omega(A)\right)$, então $y = V_t(x)$, onde $x \in \omega(A)$. Como $x \in \omega(A)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Logo,

$$V_{t+t_n}(x_n) = V_t\left(V_{t_n}(x_n)\right) \longrightarrow V_t(x) = y \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Como $t + t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ e $\{x_n\} \subset A$, concluímos que $y \in \omega(A)$.

(b) $\omega(A) \subset V_t\left(\omega(A)\right)$, $\forall\ t > 0$:

De fato, dado $t > 0$ e $x \in \omega(A)$, então existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$ com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{3.3}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \geq t + t_0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Usando a hipótese, segue que a sequência $\{V_{t_n - t}(x_n)\}$ é relativamente compacta em X. Logo, existe uma subsequência $\left\{V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right)\right\}$ tal que

$$V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow y \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Logo, $y \in \omega(A)$.

Afirmação: $x = V_t(y)$.

De fato, $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = V_t\left(V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right)\right) \longrightarrow V_t(y)$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Por outro lado, por (3.3), temos que $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow x$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Pela unicidade do limite, $V_t(y) = x$. Portanto, $x \in V_t\left(\omega(A)\right)$.

(ii) Suponha, por contradição, que $\omega(A)$ não atrai A. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 0$, existe $t_n > n$ e $x_n \in A$ tal que

$$d\left(V_{t_n}(x_n), \omega(A)\right) > \varepsilon. \tag{3.4}$$

Note que $t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ e que $\{V_{t_n}(x_n)\}_{n > t_0} \subset \bigcup_{t \geq t_0} V_t(A) = \gamma^+_{t_0}(A) \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(A)}$. Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(A)}$ é compacto, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ possui uma subsequência convergente tal que $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow +\infty$ e $y \in \omega(A)$, o que contradiz (3.4). Portanto, $\omega(A)$ atrai A.

■

Lema 3.1.12 *[5] Seja $\{V_t\}_{t \geq 0}$ um semigrupo limitado e pontualmente dissipativo. Então, existe um conjunto limitado B_0 tal que para cada conjunto compacto $K \subset X$ existem $\varepsilon(K) > 0$, $T(K) \geq 0$ tal que*

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)\right) \subset B_0, \quad \textit{para todo} \quad t \geq T(K).$$

e $V_t(B_0) \subset B_0$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Suponha que $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo limitado e pontualmente dissipativo. Em particular, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ possui um atrator global de pontos limitado B_2. Dado $\varepsilon_2 > 0$ fixado, defina $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2)$ e $B_0 := \gamma^+(B_1)$.

Note que B_0 é limitado, pois B_1 é limitado e $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é limitado.

Como B_2 é um atrator global de pontos, então, para cada $x \in X$ existe $T(x) \geq 0$ tal que

$$V_{T(x)}(x) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2) = B_1.$$

Como B_1 é um conjunto aberto e o operador $V_{T(x)}$ é contínuo, temos que existe $\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$, para algum $\varepsilon(x) > 0$, tal que $V_{T(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset B_1$. Logo,

$$V_{t+T(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset V_t(B_1) \subset \gamma^+(B_1) = B_0\ ,\ \forall\, t \geq 0.$$

Note que, $\bigcup_{x\in K} \mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$ forma uma cobertura aberta do conjunto compacto K. Logo, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que

$$V_{t+T(x_i)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i)\right) \subset B_0\ ,\ \forall\, t \geq 0$$

e

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Tome $T(K) := \max\{T(x_1), \ldots, T(x_n)\}$. Pela compacidade de K, existe $\varepsilon(K) = \frac{\delta}{2} > 0$ (onde $\delta > 0$ é o número de Lebesgue) tal que

$$\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Logo, temos que

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)\right) \subset B_0, \quad \text{para todo} \quad t \geq T(K).$$

Além disso,

$$V_t(B_0) = V_t\left(\gamma^+(B_1)\right) = \gamma_t^+(B_1) \subset \gamma^+(B_1) = B_0,\ \forall\, t \geq 0.$$

■

3.2 Formas Críticas de Atratores Minimais Fechados

Nesta seção, vamos provar que $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é o atrator global de pontos minimal fechado e que $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é o B-atrator global minimal fechado.

Teorema 3.2.1 *[7]*

(i) Se $F \subset X$ é um B-atrator global fechado, então

$$\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)} \subset F.$$

Em particular, se $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é um B-atrator global, então ele é o B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$ e $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é positivamente invariante.

(ii) Se $F \subset X$ é um atrator global de pontos fechado, então

$$\overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)} \subset F.$$

Em particular, se $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$ é um atrator global de pontos, então ele é o atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}}$ e $\overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$ é positivamente invariante.

Demonstração:

(i) Seja F um B-atrator global fechado. Seja $B \in \mathcal{B}$. Pelo Lema 3.1.2, temos que $\omega(B) \subset F$. Logo, como B é arbitrário, temos que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B) \subset F$$

Então,

$$\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)} \subset \overline{F} = F.$$

Obviamente, temos que, se $\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)}$ é um B-atrator global, então ele será o B-atrator global minimal fechado.

Mostremos, agora, que $\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)}$ é positivamente invariante.
De fato, seja $t \geq 0$ dado. Pelo Lema 3.1.3, temos que,

$$V_t\left(\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)}\right) \subset \overline{V_t\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)\right)} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} V_t\left(\omega(B)\right)} \subset \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)}.$$

(ii) Análago a (i).

■

Na verdade, o Teorema 3.2.1 dá as formas críticas do atrator global de pontos minimal fechado e do B-atrator global minimal fechado. Em virtude deste teorema as condições suficientes para a existência de $\hat{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ são obtidas imediatamente.

Teorema 3.2.2 *[7] Seja $\{V_t\}_{t \geq 0}$ um semigrupo.*

(i) Se para cada $x \in X$ o conjunto ω-limite de x, $\omega(x)$, atrai x, então $\{V_t\}_{t \geq 0}$ tem um único atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\mathcal{M}}$ é positivamente invariante e

$$\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}.$$

(ii) *Se para cada $B \in \mathcal{B}$ o conjunto ω-limite de B, $\omega(B)$, atrai B, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ tem um único atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}}$ e um único B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ são positivamente invariantes e*

$$\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \quad , \quad \mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}.$$

Demonstração: É suficiente provar (ii). Seja $B \in \mathcal{B}$. Como $\omega(B)$ atrai B, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $t\,(\varepsilon, B) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}\right), \; \forall\, t \geq t\,(\varepsilon, B)\,.$$

Logo, $\overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é um B-atrator global fechado. Portanto, pelo Teorema 3.2.1(i), segue que $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é o B-atrator global minimal fechado e positivamente invariante. Analogamente, se mostra que $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é o atrator global de pontos minimal fechado e positivamente invariante.

■

Como uma consequência imediata do Teorema 3.2.2, obtemos.

Corolário 3.2.1 *[7]*

(i) *Se para cada $B \in \mathcal{B}$, o conjunto ω-limite de B, $\omega(B)$, atrai B e $\omega(B) = \bigcup_{x\in B} \omega(x)$, então $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.*

(ii) *Se para cada $B \in \mathcal{B}$, $\omega(B)$ atrai B e existe um $B_0 \in \mathcal{B}$, tal que $\omega(B_0) \setminus \hat{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, então $\hat{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{M}$.*

Demonstração:

(i) Pelo Teorema 3.2.2(ii), temos que, $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é o atrator global de pontos minimal fechado e $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$ é o B-atrator global minimal fechado.

Mostremos que $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$:

De fato,

$$\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \subset \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)} = \mathcal{M}.$$

Logo, $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$.

Agora, mostremos que $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$:

Com efeito,

$$\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \left(\bigcup_{x\in B} \omega(x) \right)} \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} = \hat{\mathcal{M}}.$$

Logo, $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$. Portanto, $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.

(ii) Já sabemos que $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ e $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$. Como existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\omega(B_0)\backslash\hat{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, temos que existe $y \in \omega(B_0)$ e $y \notin \hat{\mathcal{M}}$. Como $\omega(B_0) \subset \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)} = \mathcal{M}$, temos que $y \in \mathcal{M}$ e $y \notin \hat{\mathcal{M}}$. Portanto, $\hat{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{M}$.

■

3.3 Comparação de Diferentes Classes de Semigrupos

Nesta seção, são introduzidas as classes de semigrupos e será feita uma comparação dessas classes.

Definição 3.3.1 *[5, 7] Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$, se $V_t : X \longrightarrow X$ é um operador compacto para cada $t > 0$, isto é, para cada $B \in \mathcal{B}$, sua imagem $V_t(B)$ é relativamente compacto; de classe $A\mathcal{K}$, se para cada $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente.*

Teorema 3.3.1 *[5] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$. Sejam $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ e $T \in \mathbb{R}^+$. Suponha que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$. Então:*

(i) $\omega(A)$ é não vazio e compacto;

(ii) $\omega(A)$ atrai A;

(iii) $\omega(A)$ é invariante;

(iv) $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado que atrai A;

(v) $\omega(A)$ é conexo, se A é conexo e o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é contínuo.

Demonstração:

(i) Mostremos que $\omega(A)$ é compacto:

De fato, como o semigrupo é de classe $\mathcal{K}$ e $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$, $T \in \mathbb{R}^+$, os conjuntos $V_t\left(\gamma_T^+(A)\right) = \gamma_{t+T}^+(A)$ são relativamente compactos para cada $t > 0$ e $\gamma_{t_2+T}^+(A) \subset \gamma_{t_1+T}^+(A)$, para todo $t_2 > t_1$, então $\omega(A) = \bigcap\limits_{t \geq 1} \overline{\gamma_{t+T}^+(A)} \subset \overline{\gamma_{T+1}^+(A)}$. Como um conjunto fechado contido num compacto é compacto, temos que $\omega(A)$ é compacto.

Mostremos, agora, que $\omega(A)$ é não vazio: De fato, como $\left\{\overline{\gamma_{t+T}^+(A)}\right\}_{t\geq 1} \subset \overline{\gamma_{T+1}^+(A)} \in \mathcal{K}$ satisfaz a propriedade da intersecção finita, temos pelo Teorema 2.1.5 que $\omega(A) \neq \emptyset$.

(ii) Suponha, por contradição, que $\omega(A)$ não atrai A. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer que seja o inteiro positivo k, existe $t_k > k$ e $y_k \in A$ satisfazendo

$$dist\,(V_{t_k}(y_k), \omega(A)) > \varepsilon. \tag{3.5}$$

Ou seja, existe uma sequência $\{V_{t_k}(y_k)\}$, $t_k \longrightarrow +\infty$ quando $k \longrightarrow +\infty$ e $y_k \in A$, que permanece fora da ε-vizinhança de $\omega(A)$. No entanto, visto que o conjunto $\{V_{t_k}(A)\ ,\ k > T+1\} \subset \overline{\gamma_{T+1}^+(A)} \in \mathcal{K}$, então, existe uma subsequência convergente $\left\{V_{t_{k_j}}\left(y_{k_j}\right)\right\}$ de $\{V_{t_k}(y_k)\}$. Como o limite dessa subsequência deve pertencer a $\omega(A)$ (pelo Lema 3.1.1), obtemos uma contradição com (3.5). Portanto, $\omega(A)$ atrai A.

(iii) Mostremos que $V_t\,(\omega(A)) = \omega(A)$, $\forall\, t \geq 0$.

Para $t = 0$, o resultado é trivial.

(a) $V_t\,(\omega(A)) \subset \omega(A)$, $\forall\, t > 0$:

Seja $t > 0$. Dado $y \in \omega(A)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo,

$$V_t(y) = V_t\left(\lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} V_{t+t_n}(x_n).$$

Como $t + t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ e $\{x_n\} \subset A$, $V_t(y) \in \omega(A)$.

(b) $\omega(A) \subset V_t\,(\omega(A))$, $\forall\, t > 0$:

Seja $t > 0$. Dado $x \in \omega(A)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $1 + T + t \leq t_1 < t_2 < \ldots$. Os pontos $y_n = V_{t_n - t}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, pertencem ao conjunto relativamente compacto $\gamma_{T+1}^+(A) = V_1\left(\gamma_T^+(A)\right)$.

Portanto, existe uma subsequência convergente $\{y_{n_j}\}$ de $\{y_n\}$, com $y_{n_j} \longrightarrow y \in \omega(A)$ quando $j \longrightarrow +\infty$.

Afirmação: $x = V_t(y)$.

De fato,

$$\begin{aligned} x &= \lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = \lim_{j\to+\infty} V_t\left(V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right)\right) \\ &= \lim_{j\to+\infty} V_t\left(y_{n_j}\right) \\ &= V_t\left(\lim_{j\to+\infty} y_{n_j}\right) = V_t(y). \end{aligned}$$

Logo, $x \in V_t\left(\omega(A)\right)$.

(iv) Suponha, por contradição, que existe um subconjunto próprio fechado F de $\omega(A)$ que atrai A.

Visto que $\omega(A)$ é compacto, temos que F é compacto. Seja $y \in \omega(A) \setminus F$. Como todo espaço métrico completo é regular, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\mathcal{O}_\varepsilon(F) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y) = \emptyset. \tag{3.6}$$

Como F atrai A, existe $t_1(\varepsilon, A) \geq 0$ tal que

$$V_t(A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F), \ \forall\, t \geq t_1(\varepsilon, A).$$

Por outro lado, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$ (pois $y \in \omega(A)$). Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{t_n}(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(y)$ para todo $n > n_0$. Como $t_n \longrightarrow +\infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_1(\varepsilon, A)$, $\forall\ n \geq n_1$, consequentemente $V_{t_n}(x_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon(F) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y)$ para todo $n \geq n_2 := \max\{n_0, n_1\}$, o que contradiz (3.6). Portanto, não existe subconjunto próprio fechado de $\omega(A)$ que atrai A, ou seja, $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado que atrai A.

(v) Seja A um conjunto conexo e $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo. Suponha, por contradição, que $\omega(A)$ não é conexo.

Então, $\omega(A) = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são conjuntos não vazios, fechados e disjuntos. Como todo espaço métrico completo é normal, existem ε_0-vizinhanças $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1)$ e $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2)$ que não se intersectam para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno. Temos que,

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\omega(A)) = \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1) \cup \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2).$$

Como $\omega(A)$ atrai A, existe $t_1 := t_1(\varepsilon_0, A) \geq 0$ tal que

$$\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\omega(A)), \; \forall \, t \geq t_1.$$

Mas $\gamma_t^+(A)$ é imagem de $[t, +\infty) \times A$ pela aplicação contínua $(\tau, x) \longmapsto V_\tau(x)$. Portanto, $\gamma_t^+(A)$ é conexo.

Assim, para todo $t \geq t_1$, ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1)$ ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2)$, caso contrário seria possível obter uma cisão de $\gamma_t^+(A)$. Como $\gamma_{s_2}^+(A) \subset \gamma_{s_1}^+(A)$, $\forall \, s_2 \geq s_1$, temos que $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1)$, $\forall \, t \geq t_1$ ou $\gamma_t^+(A) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2)$, $\forall \, t \geq t_1$. Como o fecho de conexo é conexo, então $\overline{\gamma_t^+(A)}$ é conexo. Portanto, ou $\overline{\gamma_t^+(A)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1)$ ou $\overline{\gamma_t^+(A)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2)$. Assim, ou $\omega(A) = \bigcap_{t \geq t_1} \overline{\gamma_t^+(A)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_1)$ ou $\omega(A) = \bigcap_{t \geq t_1} \overline{\gamma_t^+(A)} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(F_2)$. Como $\omega(A) = F_1 \cup F_2$, necessariamente ou $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$. Uma contradição. Portanto, $\omega(A)$ é conexo.

■

Teorema 3.3.2 *[5, 7] Seja $\{V_t\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$. Suponha que ele seja B-dissipativo ou limitado e pontualmente dissipativo. Então, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ tem um B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$, que é compacto e invariante. $\mathcal{M}$ é conexo, se existe $B \in \mathcal{B}$ conexo tal que $\mathcal{M} \subset B$. Em particular, se X é um espaço de Banach então $\mathcal{M}$ é conexo.*

Demonstração:

1º Caso: Suponha que o semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é B-dissipativo. Seja B_1 seu B-atrator global limitado. Então, dado $\varepsilon_0 > 0$, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $t(\varepsilon_0, B) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1), \; \forall \, t \geq t(\varepsilon_0, B).$$

Logo, $B_0 := \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)$ é um conjunto B-absorvente global limitado. Então, para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $T(B) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset B_0, \quad \text{para todo} \quad t \geq T(B). \tag{3.7}$$

Em particular, $V_t(B_0) \subset B_0$ para todo $t \geq T(B_0)$ e consequentemente $\gamma_{T(B_0)}^+(B_0) \subset B_0 \in \mathcal{B}$. Pelo Teorema 3.3.1, o conjunto $\omega(B_0)$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante e além disso, $\omega(B_0)$ atrai B_0. Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $t_1(\varepsilon, B_0) \geq 0$ tal que

$$V_t(B_0) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B_0)), \quad \text{para todo} \quad t \geq t_1(\varepsilon, B_0). \tag{3.8}$$

Portanto, de (3.7) e (3.8), dado qualquer $B \in \mathcal{B}$, temos que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(B_0)\right), \quad \text{para todo} \quad t \geq t_1\left(\varepsilon, B_0\right) + T(B).$$

Logo, $\mathcal{M} := \omega(B_0)$ é um B-atrator global fechado que é compacto e invariante.
Seja A um B-atrator global fechado qualquer. Queremos mostrar que $\mathcal{M} \subset A$. Como A é um B-atrator global fechado, para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $t\left(\varepsilon_1, \mathcal{M}\right) \geq 0$ tal que

$$V_t\left(\mathcal{M}\right) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A), \; \forall \, t \geq t\left(\varepsilon_1, \mathcal{M}\right).$$

Visto que $\mathcal{M}$ é invariante, temos que

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\varepsilon_1 > 0} \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A) = \overline{A} = A.$$

Portanto, $\mathcal{M}$ é o conjunto minimal entre todos os B-atratores globais fechados.
2º Caso: Suponha que o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado e pontualmente dissipativo. Em particular, existe um atrator global de pontos limitado B_2. Dado $\varepsilon_2 > 0$ fixado, considere $B_1 := \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2)$ e $B_0 := \gamma^+(B_1)$. Note que B_0 é limitado, pois B_1 é limitado e $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado.
Provemos que $\omega(B_0) = \mathcal{M}$ é o B-atrator global minimal fechado.
De fato, como B_2 é um atrator global de pontos, para cada $x \in X$ existe $T(x) \geq 0$ tal que

$$V_{T(x)}(x) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_2}(B_2) = B_1.$$

Como B_1 é um conjunto aberto e o operador $V_{T(x)}$ é contínuo, temos que existe $\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)$, para algum $\varepsilon(x) > 0$, tal que $V_{T(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset B_1$. Logo,

$$V_{t+T(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset V_t(B_1) \subset \gamma^+(B_1) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Como para cada conjunto limitado B, temos que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$, então, pelo Teorema 3.3.1 $\omega(B)$ atrai B. Portanto, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $t_1 := t_1\left(\varepsilon_1, B\right) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}\left(\omega(B)\right), \quad \text{para todo} \quad t \geq t_1. \tag{3.9}$$

Temos, pelo Teorema 3.3.1(i), que $\omega(B)$ é compacto, logo pelo Lema 3.1.12, existe $\varepsilon\left(\omega(B)\right) > 0$ e $T\left(\omega(B)\right) \geq 0$ tal que

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(\omega(B))}(\omega(B))\right) \subset B_0, \quad \text{para todo} \quad t \geq T\left(\omega(B)\right). \tag{3.10}$$

Aplicando (3.9) e (3.10) para $\varepsilon_1 := \varepsilon\left(\omega(B)\right)$, temos que

$$V_{t+t_1}(B) \subset B_0, \quad \text{para todo} \quad t \geq T\left(\omega(B)\right).$$

Logo, B_0 é um conjunto B-absorvente global limitado. Assim, pelo 1º caso, $\omega(B_0) = \mathcal{M}$ é o B-atrator global minimal fechado que é compacto e invariante.
Suponha, agora, que existe um conjunto conexo limitado B tal que $B \supset \mathcal{M}$, então $V_t(B)$, $t \in \mathbb{R}^+$, são conexos e para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{M} = V_t(\mathcal{M}) \subset V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{M}),$$

para $t \geq t_0$, com algum t_0 suficientemente grande.
Suponha, por contradição, que $\mathcal{M}$ não é conexo. Logo, existem conjuntos disjuntos, fechados, não vazios F_1 e F_2 tais que $\mathcal{M} = F_1 \cup F_2$. Logo, $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(F_2)$. Da conexidade de $V_t(B)$ $(t \geq t_0)$ vem que

$$\mathcal{M} \subset V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} \subset V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_2).$$

Logo, $\mathcal{M} \subset F_1$ ou $\mathcal{M} \subset F_2$. Portanto, $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$. Uma contradição. Assim, $\mathcal{M}$ é conexo.
Em particular, se X é um espaço de Banach, então toda bola é conexa e como $\mathcal{M}$ é limitado, existe uma bola limitada B tal que $\mathcal{M} \subset B$. Portanto, pelo caso anterior, $\mathcal{M}$ é conexo.

■

A seguir daremos uma demonstração alternativa para o Lema 3.1.10. Por conveniência colocamos o enunciado novamente.

Proposição 3.3.1 *[5] Seja K um conjunto tal que $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto, então $\omega(K)$ é um conjunto não vazio, compacto, invariante e atrai K.*

Demonstração: Seja $K_1 := \overline{\gamma^+(K)}$. Como $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto, temos que K_1 é compacto. Note que,

$$V_t(K_1) = V_t\left(\overline{\gamma^+(K)}\right) \subset \overline{V_t\left(\gamma^+(K)\right)} = \overline{\gamma_t^+(K)} \subset \overline{\gamma^+(K)} = K_1, \ \forall\, t \geq 0.$$

Também, temos pela Proposição 2.1.5 que K_1 é um espaço métrico completo.
Consideraremos, agora, o semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$, $V_t : K_1 \longrightarrow K_1$.
Afirmação: Este semigrupo é de classe $\mathcal{K}$.
De fato, seja $t > 0$ e $B \subset K_1$, $B \in \mathcal{B}$. Temos que, $V_t(B) \subset V_t(K_1) \subset K_1$. Isto implica que, $\overline{V_t(B)} \subset \overline{K_1} = K_1$. Como um conjunto fechado contido num compacto é compacto, temos

que $V_t(B)$ é relativamente compacto em K_1. O que prova a afirmação.

Visto que $\gamma^+(K) \subset \overline{\gamma^+(K)} = K_1 \in \mathcal{B}$, temos pelo Teorema 3.3.1 que, $\omega(K)$ é um conjunto não vazio, compacto, invariante e atrai K.

$\blacksquare$

Proposição 3.3.2 *[5] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo de classe $\mathcal{AK}$. Suponha que K é um conjunto compacto tal que $\gamma^+(K)$ é limitado. Então, $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto e assim, $\omega(K)$ é um conjunto não vazio, compacto, invariante e atrai K.*

Demonstração: Seja $\{y_n\}$ uma sequência arbitrária de pontos em $\gamma^+(K)$, isto é, $y_n = V_{t_n}(x_n)$, com $\{x_n\} \subset K$ e $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$.

Se a sequência $\{t_n\}$ é limitada, então $\{y_n\} \subset \gamma^+_{[0,T]}(K)$ para algum $T \geq 0$. Pela Proposição 3.1.2, $\gamma^+_{[0,T]}(K)$ é compacto. Logo, $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente $\{y_{n_j}\}$, com

$$y_{n_j} \longrightarrow y_0 \in \gamma^+_{[0,T]}(K) \subset \gamma^+(K) \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Pelo Teorema 2.1.1, $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto.

Se a sequência $\{t_n\}$ não é limitada, então podemos considerar $t_n \longrightarrow +\infty$. Como $\gamma^+(K)$ é limitado e o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{AK}$, então $\{y_n\} = \{V_{t_n}(x_n)\}$ possui uma subsequência convergente e o resultado segue.

$\blacksquare$

Proposição 3.3.3 *[5] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo de classe $\mathcal{AK}$. Suponha que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$ para algum $B \in \mathcal{B}$. Então, $\omega(B)$ é um conjunto não vazio, compacto, invariante e atrai B. $\omega(B)$ é conexo, se B é conexo.*

Demonstração: Seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$. Como $\gamma^+(x) \in \mathcal{B}$, para cada $x \in B$, temos pela Proposiçao 3.3.2 que $\gamma^+(x)$ é relativamente compacto e, portanto, pela Proposição 3.3.1, $\omega(x)$ é não vazio. Logo, $\omega(B)$ é não vazio.

Mostremos que $\omega(B)$ é invariante, isto é, $V_t(\omega(B)) = \omega(B)$, $\forall\ t \geq 0$. Para $t = 0$, isto é obvio.

(i) $V_t(\omega(B)) \subset \omega(B)$, $\forall\ t > 0$:

Seja $t > 0$. Dado $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo,

$$V_t(y) = V_t\left(\lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(x_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} V_{t+t_n}(x_n).$$

Como $t+t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, concluímos que $V_t(y) \in \omega(B)$. Logo,

$$V_t\left(\omega(B)\right) \subset \omega(B), \ \forall\, t > 0.$$

(ii) $\omega(B) \subset V_t\left(\omega(B)\right), \ \forall\, t > 0$:

Seja $t > 0$. Dado $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \geq t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$V_{t_n}(x_n) = V_t\left(V_{t_n - t}(x_n)\right) \quad \text{e} \quad t_n - t \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo contínuo de classe $A\mathcal{K}$, $\{V_{t_n-t}(x_n)\}$ contém uma subsequência $\left\{V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right)\right\}$ tal que

$$V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow z \in \omega(B) \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Afirmação: $y = V_t(z)$

De fato,

$$V_t(z) = V_t\left(\lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}-t}\left(x_{n_j}\right)\right) = \lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = y.$$

Portanto, $\omega(B) \subset V_t\left(\omega(B)\right), \ \forall\, t \geq 0$.

Mostremos que $\omega(B)$ é compacto.

Seja $\{x_k\}$ uma sequência arbitrária em $\omega(B)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k > k$ e $y_k \in B$ tal que

$$d\left(V_{t_k}(y_k), x_k\right) < \frac{1}{k}.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe $A\mathcal{K}$, existe uma subsequência $\left\{V_{t_{k_j}}\left(y_{k_j}\right)\right\}$ de $\{V_{t_k}(y_k)\}$ tal que

$$V_{t_{k_j}}\left(y_{k_j}\right) \longrightarrow z \in \omega(B) \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Logo,

$$x_{k_j} \longrightarrow z \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, $\omega(B)$ é compacto.

Mostremos, agora, que $\omega(B)$ atrai B. Suponha, por contradição, que $\omega(B)$ não atrai B. Então, podemos escolher uma sequência $\{V_{t_n}(x_n)\}$ com $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$dist\left(V_{t_n}(x_n), \omega(B)\right) \geq \varepsilon \tag{3.11}$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Como o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{AK}$, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência $\left\{V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right)\right\}$, com $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow z \in \omega(B)$ quando $j \longrightarrow +\infty$, o que contradiz (3.11). Portanto, $\omega(B)$ atrai B.

Usando os mesmos argumentos como na demonstração do Teorema 3.3.1(v) podemos mostrar que, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.

■

Teorema 3.3.3 *[5, 7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{AK}$, contínuo, limitado e pontualmente dissipativo. Então, existe o B-atrator global minimal fechado, não vazio, $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ é compacto e invariante. $\mathcal{M}$ é conexo, se existe $B \in \mathcal{B}$ conexo tal que $\mathcal{M} \subset B$. Em particular, se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{M}$ é conexo.*

Demonstração: Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{AK}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado e pontualmente dissipativo, pelo Lema 3.1.12, existe um conjunto limitado B_0 tal que para cada conjunto compacto K,

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)\right) \subset B_0 \quad \text{para todo} \quad t \geq T(K) \tag{3.12}$$

com algum $\varepsilon(K) > 0$ e $T(K) \geq 0$, e além disso, $V_t(B_0) \subset B_0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo limitado, contínuo e de classe $\mathcal{AK}$, pela Proposição 3.3.3, para cada $B \in \mathcal{B}$, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Em particular, isto vale para $\omega(B_0)$.

Afirmação: $\omega(B_0) = \mathcal{M}$.

De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ arbitrário. Temos que, $K := \omega(B)$ é um conjunto não vazio, compacto que atrai B. Por (3.12), existe $\varepsilon := \varepsilon(K) > 0$ e $T(K) \geq 0$ tal que

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)\right) \subset B_0,\ \forall\, t \geq T(K).$$

Como K atrai B, existe $t_0 = t_0\left(\varepsilon(K), B\right) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K),\ \forall\, t \geq t_0.$$

Assim,

$$V_t(B) \subset B_0,\ \forall\, t \geq t_0 + T(K).$$

Visto que $\omega(B_0)$ atrai B_0, temos que B também é atraido por $\omega(B_0)$. Portanto, $\omega(B_0)$ é um B-atrator global fechado.

Mostremos, agora, a minimalidade de $\omega(B_0)$:

Seja A um B-atrator global fechado qualquer. Vamos mostrar que $\omega(B_0) \subset A$. Como A é um B-atrator global fechado, para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe $t\left(\varepsilon_1, \omega(B_0)\right) \geq 0$ tal que

$$V_t\left(\omega(B_0)\right) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A),\ \forall\, t \geq t_1\left(\varepsilon_1, \omega(B_0)\right).$$

Visto que $\omega(B_0)$ é invariante, temos que

$$\omega(B_0) \subset \bigcap_{\varepsilon_1 > 0} \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(A) = \overline{A} = A.$$

Portanto, $\omega(B_0)$ é o B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$, que é compacto e invariante. A prova da conexidade é análoga ao Teorema 3.3.2.

■

Teorema 3.3.4 *[5] Suponha que o semigrupo $\{V_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ M\}$ está definido em um subconjunto M de um espaço de Banach X, com uma norma $\|\cdot\|_X$. Suponha também que V_t pode ser decomposto na soma $W_t + U_t$, onde $\{W_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ M\}$ é uma família de operadores tais que para qualquer conjunto limitado $B \subset M$,*

$$\|W_t(B)\|_X \leq m_1(t) m_2\left(\|B\|_X\right)$$

onde $m_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são contínuos e $m_1(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$, $\|B\|_X := \sup_{x \in B} \|x\|_X$. Os U_t são tais que o conjunto $U_t(B)$ é precompacto para cada conjunto limitado $B \subset M$. Então, $\{V_t,\ t \in \mathbb{R}^+,\ M\}$ é de classe $A\mathcal{K}$.

Demonstração: Seja $B \subset M$ limitado tal que $\gamma^+(B) \subset M$ também é limitada. Seja $B_1 := \{V_{t_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k \longrightarrow +\infty$, $\{x_k\} \subset B$. Queremos mostrar que B_1 é precompacto, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito de B_1, K_ε, tal que B_1 está contido na união finita de bolas fechadas com raio ε e centros pertencentes a K_ε. Seja $\varepsilon > 0$. Como $m_1(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$, existe $l_0 = l_0(\varepsilon) \geq 0$ tal que

$$m_1(l) \leq \frac{\varepsilon}{2 m_2\left(\|\gamma^+(B)\|_X\right)} \tag{3.13}$$

para todo $l \geq l_0$.

Note que $B_1 = B_1' \cup B_1''$, onde $B_1' = \{V_{t_k}(x_k)\}_{k=1}^{k_1},\ t_k < l_0$ e $B_1'' = \{V_{t_k}(x_k)\}_{k=k_1+1}^{\infty},\ t_{k_1+1} \geq l_0$. Note, também, que B_1'' é um subconjunto do conjunto $\gamma_{l_0}^+(B) = V_{l_0}\left(\gamma^+(B)\right)$. Além disso, dado $y \in V_{l_0}\left(\gamma^+(B)\right)$, temos que $y = V_{l_0}(x) = W_{l_0}(x) + U_{l_0}(x)$, onde $x \in \gamma^+(B)$.

Por hipótese, temos que $U_{l_0}(\gamma^+(B))$ é precompacto. Assim, existe um subconjunto finito A de $U_{l_0}(\gamma^+(B))$, tal que $U_{l_0}(\gamma^+(B))$ pode ser coberto pela união finita de bolas fechadas com raio $\frac{\varepsilon}{2}$ e centros em A. Visto que $\gamma^+(B) \subset M$ é limitado, segue das propriedades de W_t que,

$$\|W_l\left(\gamma^+(B)\right)\|_X \leq m_1(l)m_2\left(\|\gamma^+(B)\|_X\right) \leq \frac{\varepsilon}{2m_2\left(\|\gamma^+(B)\|_X\right)}m_2\left(\|\gamma^+(B)\|_X\right) = \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $l \geq l_0$.

Logo, dado $z \in W_l(\gamma^+(B))$, temos

$$\|z\|_X \leq \sup_{x \in W_l(\gamma^+(B))} \|x\|_X = \|W_l\left(\gamma^+(B)\right)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Afirmação: $V_{l_0}(\gamma^+(B))$ pode ser coberto pela união finita de bolas fechadas de raio ε e centros nos pontos de A.

De fato, tome $y \in V_{l_0}(\gamma^+(B))$. Então, $y = V_{l_0}(x) = W_{l_0}(x) + U_{l_0}(x)$ para algum $x \in \gamma^+(B)$. Como $U_{l_0}(\gamma^+(B))$ é coberto pela união finita de bolas fechadas de raio $\frac{\varepsilon}{2}$ e centros nos pontos de A, existe $a \in A$ tal que $U_{l_0}(x) \in \overline{B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y - a\|_X &= \|W_{l_0}(x) + U_{l_0}(x) - a\|_X \\ &\leq \|W_{l_0}(x)\|_X + \|U_{l_0}(x) - a\|_X \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como y foi tomado arbitrariamente em $V_{l_0}(\gamma^+(B))$, concluímos que $V_{l_0}(\gamma^+(B))$ pode ser coberto pela união de finitas bolas fechadas de raio ε e centros nos pontos de A. Como $B_1'' \subset V_{l_0}(\gamma^+(B))$, o mesmo vale para B_1''. B_1' é precompacto, pois B_1' é finito e desta forma basta tomar as bolas fechadas de raio ε centradas em $V_{t_k}(x_k)$, $k = 1, \ldots, k_1$. Tomando $C = B_1' \cup A$, temos que C é finito, pois B_1' e A o são e as bolas fechadas de raio ε e centro nos pontos de C cobrem B_1. Portanto, B_1 é precompacto, o que mostra que o semigrupo $\{V_t\ ,\ t \in \mathbb{R}^+\ ,\ M\}$ é de classe $A\mathcal{K}$.

■

Definição 3.3.2 *[12] Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é chamado uniformemente compacto para t grande, se para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que*

$$\gamma^+_{t(B)}(B) = \bigcup_{t \geq t(B)} V_t(B) \tag{3.14}$$

é relativamente compacto em X.

Lema 3.3.1 *[12] Seja X um espaço Banach. Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande. Se $K \subset X$ é um conjunto compacto e invariante pelo semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ que atrai os conjuntos compactos de X, então K é conexo.*

Demonstração: Temos que $\overline{conv(K)} =: B$ é compacto, pelo Teorema 2.1.4 e conexo, pelas Proposições 2.1.1(b), 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4.

Então, K atrai B. Suponhamos, por contradição, que K não é conexo. Logo, existem dois conjuntos abertos U_1, U_2 com $U_1 \cap K \neq \emptyset$, $U_2 \cap K \neq \emptyset$, $K \subset U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como $K \subset B$, $K = V_t(K) \subset V_t(B)$, para todo $t \geq 0$. Como B é conexo e V_t é contínuo, então, $V_t(B)$ é conexo.

Assim, $U_i \cap V_t(B) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ e $U_1 \cup U_2$ não cobre $V_t(B)$. Portanto, para cada $t > 0$, existe $x_t \in V_t(B)$, $x_t \notin U_1 \cup U_2$.

Considerando $t = n$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência $\{x_n\}$. Como o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande, essa sequência é relativamente compacta. Assim, K atrai $\{x_n\}$ (pois K atrai o compacto $\overline{\{x_n\ ,\ n \geq n_0\}}$) e a sequência $\{x_n\}$ contém uma subsequência $\{x_{n_j}\}$, com $x_{n_j} \longrightarrow x$ quando $j \longrightarrow +\infty$.

Afirmação: $x \in K \subset U_1 \cup U_2$.

De fato, como K atrai B, então $x_{n_j} = V_{n_j}\left(y_{n_j}\right) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{j}}(K)$, onde $\{y_{n_j}\} \subset B$. Logo, existe uma sequência $\{z_j\} \subset K$ tal que

$$d\left(V_{n_j}\left(y_{n_j}\right), z_j\right) < \frac{1}{j},\ j \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Como K é compacto, temos que $\{z_j\}$ possui uma subsequência convergente que continuaremos chamando de $\{z_j\}$ tal que $z_j \longrightarrow z \in K$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Portanto, por (3.15),

$$d\left(V_{n_j}\left(y_{n_j}\right), z\right) \leq d\left(V_{n_j}\left(y_{n_j}\right), z_j\right) + d\left(z_j, z\right) < \frac{1}{j} + d\left(z_j, z\right) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow +\infty.$$

Logo, $x_{n_j} \longrightarrow z$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Pela unicidade do limite, $x = z \in K$. O que contradiz o fato de $x_{n_j} \notin U_1 \cup U_2$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Portanto, K é conexo.

■

Teorema 3.3.5 *[12] Suponha que o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande. Suponha que existe um conjunto B-absorvente global limitado $\widetilde{B}$. Então o conjunto ω-limite de $\widetilde{B}$, $\mathcal{M} = \omega(\widetilde{B})$, é um B-atrator global, não vazio, compacto e invariante. $\mathcal{M}$ é o conjunto maximal compacto invariante. Além disso, se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{M}$ é conexo.*

Demonstração: Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande, então

$$\overline{\bigcup_{t\geq t_0} V_t(\widetilde{B})} \in \mathcal{K}, \tag{3.16}$$

para algum $t_0 = t_0(\widetilde{B}) \geq 0$. Pelo Lema 3.1.11$(i)$, $\omega(\widetilde{B})$ é um conjunto não vazio, compacto e invariante.

Provemos, então, que $\mathcal{M} = \omega(\widetilde{B})$ é um B-atrator global. Suponha, por contradição, que existe um conjunto limitado B_0 tal que $dist\,(V_t(B_0), \mathcal{M}) \nrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$. Logo, existe $\delta > 0$ e uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$dist\,(V_{t_n}(B_0), \mathcal{M}) \geq \delta > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada n, existe $b_n \in B_0$ tal que

$$dist\,(V_{t_n}(b_n), \mathcal{M}) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.17}$$

Como $\widetilde{B}$ é um conjunto B-absorvente global, então $V_{t_n}(b_n) \in V_{t_n}(B_0) \subset \widetilde{B}$, para todo n suficientemente grande (isto é, $t_n > t_1(B_0)$). Note que,

$$\{V_{t_n}(b_n)\}_{n\geq n_0} \subset \bigcup_{t\geq t_0} V_t(\widetilde{B}) \subset \overline{\bigcup_{t\geq t_0} V_t(\widetilde{B})} \in \mathcal{K}.$$

Logo, $\{V_{t_n}(b_n)\}$ possui uma subsequência $\left\{V_{t_{n_j}}\left(b_{n_j}\right)\right\}$ que converge para um ponto β,

$$\beta = \lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}}\left(b_{n_j}\right) = \lim_{j\to+\infty} V_{t_{n_j}-t_1(B_0)}\left(V_{t_1(B_0)}\left(b_{n_j}\right)\right).$$

Visto que $V_{t_1(B_0)}\left(b_{n_j}\right) \in \widetilde{B}$ e $t_{n_j} - t_1(B_0) \longrightarrow +\infty$ quando $j \longrightarrow +\infty$, temos que

$$\beta \in \mathcal{M} = \omega(\widetilde{B}),$$

o que contradiz (3.17). Portanto, $\mathcal{M} = \omega(\widetilde{B})$ é um B-atrator global.

Mostremos que $\mathcal{M}$ é o maximal entre os B-atratores globais que são compactos e invariantes: Seja A' um B-atrator global compacto invariante. Como A' é invariante,

$$V_t(A') = A' \quad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{3.18}$$

Visto que A' é limitado e que $\widetilde{B}$ é um B-absorvente global, e usando (3.18) para t suficientemente grande, obtemos que $A' \subset \widetilde{B}$.

Afirmação 1: $\omega(A') \subset \omega(\widetilde{B})$.

De fato, dado $x \in \omega(A')$ existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset A'$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $A' \subset \widetilde{B}$, temos que $\{x_n\} \subset \widetilde{B}$ e o resultado segue.

Afirmação 2: $A' = \omega(A')$.

Com efeito,

$$\omega(A') = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} V_t(A')} = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} A'} = \overline{A'} = A'.$$

Assim,

$$A' = \omega(A') \subset \omega(\widetilde{B}) = \mathcal{M}.$$

Mostremos, agora, que se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{M}$ é conexo: De fato, visto que $\mathcal{M}$ é um conjunto compacto invariante que atrai todos os conjuntos limitados de X, temos em particular que $\mathcal{M}$ é um conjunto compacto invariante que atrai todos os conjuntos compactos de X. Logo, pelo Lema 3.3.1, obtemos que $\mathcal{M}$ é conexo.

$\blacksquare$

Corolário 3.3.1 *[12] O Teorema 3.3.5 continua válido se a condição (3.14) for substituida por:*

$$\textit{Para algum } t_1 > 0,\ V_{t_1} \textit{ é compacto.} \tag{3.19}$$

Demonstração: Basta mostrar que a condição (3.19) implica na condição (3.16). Como $\widetilde{B}$ é um B-absorvente global limitado, existe $t_0 > 0$ tal que $V_t(\widetilde{B}) \subset \widetilde{B}$, $\forall\, t \geq t_0$. Considere $t_2 := t_0 + t_1$, temos para todo $t \geq t_2$,

$$V_t(\widetilde{B}) = V_{t_1}\left(V_{t-t_1}(\widetilde{B})\right) \subset V_{t_1}(\widetilde{B}).$$

Logo,

$$\bigcup_{t\geq t_2} V_t(\widetilde{B}) \subset V_{t_1}(\widetilde{B}).$$

O que implica que

$$\overline{\bigcup_{t\geq t_2} V_t(\widetilde{B})} \subset \overline{V_{t_1}(\widetilde{B})} \in \mathcal{K}.$$

Como um conjunto fechado contido num compacto é compacto, obtemos que

$$\overline{\bigcup_{t\geq t_2} V_t(\widetilde{B})} \in \mathcal{K}.$$

Isto é, vale (3.16).

$\blacksquare$

Proposição 3.3.4 *[12] A condição (3.14) pode ser substituida, pela seguinte condição: X é um espaço de Banach e para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $V_t = V_t^1 + V_t^2$, onde os operadores V^1 são uniformemente compactos para t grande (isto é, satisfaz (3.14)) e V^2 é uma aplicação contínua de X em X tal que o seguinte vale:*
Para cada conjunto limitado $C \subset X$, temos

$$r_c(t) := \sup_{y \in C} \|V_t^2(y)\|_X \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad t \longrightarrow +\infty. \tag{3.20}$$

Demonstração: Primeiramente, fazemos a seguinte observação que será usada repetidamente.

Observação 3.3.1 *[12] Se $\{x_n\}$ é limitada e $t_n \longrightarrow +\infty$, então $V_{t_n}^2(x_n) \longrightarrow 0$ e $\{V_{t_n}^1(x_n)\}$ converge se, e somente se, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ converge (nesse caso, os limites são iguais).*

De fato, a norma de $V_{t_n}^2(x_n)$ é limitada por $r_c(t_n)$, onde C é formado pelos elementos da sequência $\{x_n\}$. Logo, $V_{t_n}^2(x_n)$ converge a 0 e

$$V_{t_n}(x_n) = V_{t_n}^1(x_n) + V_{t_n}^2(x_n)$$

converge se, e somente se, $V_{t_n}^1(x_n)$ converge, como queríamos demonstrar.

■

Também, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.3.2 *[12] Seja $\{V_t\}_{t \geq 0}$ um semigrupo satisfazendo (3.20), então para qualquer conjunto, não vazio, limitado B_0 de X, $\omega(B_0)$ é não vazio compacto e invariante.*

Assumindo este lema, concluímos que $\omega(\widetilde{B}) = \mathcal{M}$ é não vazio, compacto e invariante. Mostremos que $\omega(\widetilde{B}) = \mathcal{M}$ é um B-atrator global. Suponha, por contradição, que para algum conjunto limitado B_0,

$$dist\,(V_t(B_0), \mathcal{M}) \nrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Logo, existe $\delta > 0$ e uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$dist\,(V_{t_n}(B_0), \mathcal{M}) \geq \delta > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada n, existe $b_n \in B_0$ tal que

$$dist\,(V_{t_n}(b_n), \mathcal{M}) \geq \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.21}$$

Como $\widetilde{B}$ é um B-absorvente global, então

$$V_{t_n}(b_n) \in V_{t_n}(B_0) \subset \widetilde{B}$$

para todo n suficientemente grande (isto é, $t_n > t_1(B_0)$). Como $\{V^1_{t_n}(b_n)\}$ é relativamente compacta, existe uma subsequência, que denotaremos por ela mesmo, tal que

$$V^1_{t_n}(b_n) \longrightarrow z \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Pela Observação 3.3.1, temos que

$$z = \lim_{n\to+\infty} V_{t_n}(b_n) = \lim_{n\to+\infty} V_{t_n - t_1(B_0)}\left(V_{t_1(B_0)}(b_n)\right).$$

Visto que $V_{t_1(B_0)}(b_n) \in \widetilde{B}$ e $t_n - t_1(B_0) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$, temos que $z \in \mathcal{M} = \omega(\widetilde{B})$, o que contradiz (3.21). Portanto, $\mathcal{M} = \omega(\widetilde{B})$ é um B-atrator global.

Para provar a maximalidade de $\mathcal{M}$, procedemos da mesma forma como na demonstração do Teorema 3.3.5.

■

Observação 3.3.2 *[12] Note que se X é um espaço de Banach, qualquer família de operadores satisfazendo (3.14) também satisfaz (3.20) com $V^2 \equiv 0$.*

Demonstração do Lema 3.3.2: Mostremos, primeiramente, que $\omega(B_0) = \omega_1(B_0)$, onde $\omega_1(B_0) := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} V^1_t(B_0)}$. Note que, $\omega_1(B_0) = \{y \in X :$ existem sequências $\{x_n\} \subset B_0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $\lim_{n\to+\infty} V^1_{t_n}(x_n) = y\}$.

(i) $\omega(B_0) \subset \omega_1(B_0)$: De fato, dado $x \in \omega(B_0)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B_0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Pela Observação 3.3.1, $V^1_{t_n}(x_n)$ também converge para x quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo, $x \in \omega_1(B_0)$.

(ii) $\omega_1(B_0) \subset \omega(B_0)$: Com efeito, dado $x \in \omega_1(B_0)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B_0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que $V^1_{t_n}(x_n) \longrightarrow x$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Devido a Observação 3.3.1, $V_{t_n}(x_n)$ também converge a x quando $n \longrightarrow +\infty$. Portanto, $x \in \omega(B_0)$.

Como B_0 é não vazio, os conjuntos $\bigcup_{t\geq s} V^1_t(B_0)$ são não vazios para todo $s \geq 0$. Como os operadores V^1 são uniformemente compactos para t grande (isto é, satisfaz (3.14)), existe $t_0 := t_0(B_0) \geq 0$ tal que os conjuntos $\overline{\bigcup_{t\geq s} V^1_t(B_0)}$ são compactos não vazios, $\forall\, s \geq t_0$.

Como $\omega_1(B_0) = \bigcap_{s \geq t_0} \overline{\bigcup_{t \geq s} V_t^1(B_0)} \subset \overline{\bigcup_{t \geq t_0} V_t^1(B_0)}$, temos que $\omega_1(B_0)$ é um conjunto fechado contido num compacto e consequentemente é compacto. Portanto, $\omega(B_0)$ é não vazio e compacto.

Mostremos, agora, que $\omega(B_0)$ é invariante. Ou seja, que $V_t(\omega(B_0)) = \omega(B_0)$, $\forall\, t \geq 0$.
Para $t = 0$, o resultado é trivial.

(i) $V_t(\omega(B_0)) \subset \omega(B_0)$, $\forall\, t > 0$:

De fato, seja $t > 0$. Dado $y \in V_t(\omega(B_0))$, então $y = V_t(x)$, para algum $x \in \omega(B_0)$. Como $x \in \omega(B_0)$, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B_0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Logo,

$$V_{t+t_n}(x_n) = V_t(V_{t_n}(x_n)) \longrightarrow V_t(x) = y.$$

Como $t + t_n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ e $\{x_n\} \subset B_0$, concluímos que $y \in \omega(B_0)$.

(ii) $\omega(B_0) \subset V_t(\omega(B_0))$, $\forall\, t > 0$:

Com efeito, seja $t > 0$. Dado $x \in \omega(B_0)$, então, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B_0$ e $t_n \longrightarrow +\infty$ tal que

$$V_{t_n}(x_n) \longrightarrow x \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{3.22}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \geq t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Usando a hipótese, temos que $V_{t_n - t}(x_n) = V^1_{t_n - t}(x_n) + V^2_{t_n - t}(x_n)$ e $V^1_{t_n - t}(x_n)$ é relativamente compacta em X. Logo, existem subsequências $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$, $t_{n_j} - t \longrightarrow +\infty$ e $y \in X$ tais que $V^1_{t_{n_j} - t}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Como $\{x_n\} \subset B_0 \in \mathcal{B}$, pela condição (3.20), $V^2_{t_{n_j} - t}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Pela Observação 3.3.1, $V_{t_{n_j} - t}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Logo, $y \in \omega(B_0)$.

Afirmação: $x = V_t(y)$.
De fato, $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) = V_t\left(V_{t_{n_j} - t}\left(x_{n_j}\right)\right) \longrightarrow V_t(y)$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Por outro lado, por (3.22), temos que $V_{t_{n_j}}\left(x_{n_j}\right) \longrightarrow x$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Pela unicidade do limite, $x = V_t(y)$.
Portanto, $x \in V_t(\omega(B_0))$.

$\blacksquare$

Definição 3.3.3 *[4, 7] O semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é chamado assintoticamente suave*, se para qualquer conjunto fechado, limitado, positivamente invariante, não vazio, $B \subset X$, existe* *um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B. Além disso, se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ for um C^0-semigrupo, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é chamado assintoticamente suave.*

Proposição 3.3.5 *[4] Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave* se, e somente se, dado $B \subset X$ fechado, limitado e não vazio, existe um conjunto compacto $J \subset X$ tal que J atrai $L = L(B) := \{x \in B : V_t(x) \in B, \ \forall\, t \geq 0\}$.*

Demonstração: Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não vazio tal que $V_t(B) \subset B$, $\forall\ t \geq 0$. Suponha, que existe um conjunto compacto $J \subset X$ tal que J atrai L. Mostremos que, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo assintoticamente suave*. Temos que, $L(B) = B$. Temos, por hipótese, que existe um conjunto compacto $J = J(B)$ que atrai B. Pelo Lema 3.1.4, cada sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, possui uma subsequência convergente. Pelo Lema 3.1.5, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B. Note que

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} V_t(B)} \subset \bigcap_{s\geq 0} \overline{B} = \overline{B} = B.$$

Logo, existe um conjunto compacto $\widetilde{J} := \omega(B)$, $\widetilde{J} \subset B$ tal que $\widetilde{J}$ atrai B. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*.

Por outro lado, suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo assintoticamente suave*. Seja $B \subset X$, não vazio, fechado, limitado. Temos que, $V_t(L) \subset L$, $\forall\, t \geq 0$. Logo,

$$V_t\left(\overline{L}\right) \subset \overline{V_t(L)} \subset \overline{L}, \ \forall\, t \geq 0.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*, existe um conjunto compacto $J \subset \overline{L}$ tal que J atrai $\overline{L}$. Portanto, J também atrai $L = L(B)$.

■

Lema 3.3.3 *[4] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo assintoticamente suave e $B \subset X$ não vazio tal que $\gamma^+(B)$ é limitada. Então, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. $\omega(B)$ é conexo, se B é conexo. Em particular, se para algum $x \in X$, $\gamma^+(x)$ é limitada, então $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto, e $\omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante, atrai x e é conexo.*

Demonstração: Claramente $V_t\left(\gamma^+(B)\right) \subset \gamma^+(B)$, $\forall\, t \geq 0$. Pela continuidade do operador V_t, temos que $V_t\left(\overline{\gamma^+(B)}\right) \subset \overline{\gamma^+(B)}$, $\forall\, t \geq 0$. Então, como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, existe $J \subset \overline{\gamma^+(B)}$, J compacto tal que J atrai $\overline{\gamma^+(B)}$. Logo, J atrai B. Portanto, pelo Teorema 3.1.1, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.

A demonstração da conexidade segue igual ao que foi feito no Teorema 3.3.1(v).

Se $x \in X$ e $\gamma^+(x)$ é limitada, então, pela parte anterior com $B = \{x\}$, obtemos que $\omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante, conexo e atrai $\{x\}$.

Afirmação: $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto.

De fato, seja $\{V_{t_k}(x)\}$ uma sequência em $\gamma^+(x)$. Se $\{t_k\}$ for limitada, então existe $T > 0$ tal que $\{V_{t_k}(x)\}$ está na imagem, pela aplicação contínua $(t, x) \longmapsto V_t(x)$, de $[0, T] \times \{x\}$. Logo, pela Proposição 3.1.2, $\{V_{t_k}(x)\}$ tem uma subsequência convergente. Agora, se $t_k \longrightarrow +\infty$, como $\omega(x)$ é compacto e $\omega(x)$ atrai x, então, pelo Lema 3.1.4, $\{V_{t_k}(x)\}$ possui uma subsequência convergente.

■

Lema 3.3.4 *[4] Sejam X um espaço de Banach e J um conjunto compacto invariante por um C^0-semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$. Se J atrai conjuntos compactos, então J é conexo.*

Demonstração: Como J é compacto, pelo Teorema 2.1.4, $\overline{conv(J)}$ é compacto. Em particular, $\overline{conv(J)}$ é limitado. Além disso, pelas Proposições 2.1.1(b), 2.1.3 e 2.1.4, temos que $\overline{conv(J)}$ é conexo.

Suponha, por contradição, que J não é conexo. Então, existem conjuntos abertos U e V tais que $U \cap J \neq \emptyset$, $V \cap J \neq \emptyset$, $J \subset U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Pela continuidade de V_t, os conjuntos $V_t\left(\overline{conv(J)}\right)$ são conexos, $\forall\ t \geq 0$. Como J é invariante e $J \subset \overline{conv(J)}$, então $J = V_t(J) \subset V_t\left(\overline{conv(J)}\right)$, $\forall\ t \geq 0$. Portanto, $\emptyset \neq U \cap J \subset U \cap V_t\left(\overline{conv(J)}\right)$ e $\emptyset \neq V \cap J \subset V \cap V_t\left(\overline{conv(J)}\right)$, para todo $t \geq 0$. Como $V_t\left(\overline{conv(J)}\right)$ é conexo, não podemos ter $V_t\left(\overline{conv(J)}\right) \subset U \cup V$. Ou seja, dado $j > 0$ e $t_j > j$, existe x_j com

$$x_j \in V_{t_j}\left(\overline{conv(J)}\right) \setminus (U \cup V).$$

Agora, J atrai $\overline{conv(J)}$ e J é compacto. Logo, existe uma subsequência $\{x_{j_k}\} \subset \{x_j\}$ tal que

$$x_{j_k} \longrightarrow x \in J \subset U \cup V \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Logo, existe uma bola aberta B_x centrada em x e contida em $U \cap V$ e a sequência $\{x_{j_k}\}$ deveria entrar em B_x (pois $x_{j_k} \longrightarrow x$ quando $k \longrightarrow +\infty$). Assim, obtemos uma contradição, pois $\{x_j\} \nsubseteq U \cup V$.

■

Teorema 3.3.6 *[4] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um C^0-semigrupo e K um conjunto compacto não vazio que atrai compactos. Seja $A := \bigcap\limits_{t\geq 0} V_t(K)$. Então,*

(i) A independe de K e, se X é um espaço de Banach, então A é conexo;

(ii) A é maximal compacto invariante;

(iii) A atrai conjuntos compactos.

Além disso, se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave,

(iv) Para todo H compacto em X existe H_1, vizinhança de H, tal que A atrai H_1.

(v) Se $C \subset X$ e $\gamma^+(C)$ é limitada, então A atrai C.

Demonstração: Seja H um conjunto compacto. Como K atrai H e K é compacto, então usando a Proposiçao 3.1.2 e o Lema 3.1.4, podemos mostrar (analogamente ao que foi feito na prova da afirmação da demonstração do Lema 3.3.3) que $\overline{\gamma^+(H)}$ é compacto. Logo, pela Proposição 3.3.1, $\omega(H)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai H. Pelo Lema 3.1.2, $\omega(H) \subset K$. Em particular, $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto, $\omega(K) \subset K$ e $\omega(K) \neq \emptyset$, compacto, invariante e atrai K.

Afirmação 1: $\omega(K)$ atrai H.

De fato, como $\omega(H)$ é compacto, invariante e $\omega(H) \subset K$,

$$\omega(H) = \overline{\omega(H)} = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s}\omega(H)} = \bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s} V_t\left(\omega(H)\right)} = \omega\left(\omega(H)\right) \subset \omega(K).$$

Como $\omega(H)$ atrai H, dado $\varepsilon > 0$ existe $t\left(\varepsilon, H\right) \geq 0$ tal que

$$V_t(H) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(H)\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(K)\right),\ \forall\, t \geq t\left(\varepsilon, H\right).$$

Portanto, $\omega(K)$ atrai H.

Como H foi arbitrário, segue que $\omega(K)$ atrai conjuntos compactos de X. Se X é um espaço de Banach, pelo Lema 3.3.4, $\omega(K)$ é conexo.

Afirmação 2: $A = \omega(K)$.

De fato,

$$A = \bigcap_{t\geq 0} V_t(K) \quad \text{e} \quad \omega(K) = \bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq t} V_s(K)}.$$

Como $V_t(K) \subset \overline{\bigcup\limits_{s\geq t} V_s(K)}$, $\forall\, t \geq 0$,

$$A = \bigcap_{t\geq 0} V_t(K) \subset \bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcup_{s\geq t} V_s(K)} = \omega(K).$$

Por outro lado, como $\omega(K)$ é invariante e $\omega(K) \subset K$, obtemos

$$\omega(K) = V_t\left(\omega(K)\right) \subset V_t(K), \ \forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$\omega(K) = \bigcap_{t\geq 0} V_t\left(\omega(K)\right) \subset \bigcap_{t\geq 0} V_t(K) = A.$$

Portanto, $A = \omega(K)$.

Assim, já mostramos que A é compacto, invariante, conexo e atrai conjuntos compactos.

Mostremos, agora, que A é independente de K:

Seja K_1 um conjunto compacto que atrai conjuntos compactos. Pela primeira parte da demonstração, temos que $\omega(K)$ e $\omega(K_1)$ são ambos compactos que atraem conjuntos compactos de X. Logo, pelo Lema 3.1.2, $\omega(K) \subset \omega(K_1) \subset \omega(K)$. Portanto, $\omega(K_1) = \omega(K) = A$, isto é, A independe de K.

Afirmação 3: A é maximal compacto invariante.

De fato, seja H um conjunto compacto invariante. Temos pelo Lema 3.1.9(ii) que $H = \omega(H)$. Pela primeira parte da demonstração, $\omega(H) \subset K$. Isto implica que

$$H = \omega(H) = \omega\left(\omega(H)\right) \subset \omega(K) = A.$$

Portanto, A é o conjunto maximal compacto invariante.

Suponhamos, agora, que o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave e provaremos (iv) e (v):

(iv): **Afirmação 4:** Temos que, dada qualquer vizinhança W de A, existe uma vizinhança U de A tal que $V_t(U) \subset W$, $\forall\, t \geq 0$.

De fato, suponha, por absurdo, que isto não acontece. Então, existe uma vizinhança W de A tal que para toda vizinhança U de A, existe $t_u \geq 0$ e $x_u \in U$ tal que $V_{t_u}(x_u) \notin W$. Em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $t_j \geq 0$ e $x_j \in \mathcal{O}_{\frac{1}{j}}(A)$ tal que $V_{t_j}(x_j) \notin W$. Como $x_j \in \mathcal{O}_{\frac{1}{j}}(A)$, existe $y_j \in A$ tal que $d\left(x_j, y_j\right) < \frac{1}{j}$. Como A é compacto, existe uma subsequência $\{y_{j_k}\}$ de $\{y_j\}$ e $x \in A$ tais que $y_{j_k} \longrightarrow x$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$d\left(x_{j_k}, x\right) \leq d\left(x_{j_k}, y_{j_k}\right) + d\left(y_{j_k}, x\right) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, $x_{j_k} \longrightarrow x \in A$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim, temos que A atrai o compacto $H := \{x_{j_k}\} \cup \{x\}$.

1º Caso: Se $t_j \longrightarrow +\infty$: Como A é compacto e atrai H, temos pelo Lema 3.1.4 que $\{V_{t_j}(x_j)\}$ tem uma subsequência que converge para algum $z \in \omega(A) = A$, o que é um absurdo, pois $V_{t_j}(x_j) \notin W$.

2º Caso: $\{t_j\}$ é limitada: Neste caso, $\{t_j\} \subset [0, T_0]$ para algum $T_0 > 0$. Como $[0, T_0]$ é um subconjunto compacto da reta, existe uma subsequência $\{t_{j_k}\}$ de $\{t_j\}$ tal que $t_{j_k} \longrightarrow \tau$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Logo, $(t_{j_k}, x_{j_k}) \longrightarrow (\tau, x)$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Como o semigrupo é contínuo, segue que $V_{t_{j_k}}(x_{j_k}) \longrightarrow V_\tau(x)$ quando $k \longrightarrow +\infty$, o que é um absurdo, pois pela invariância de A temos que $V_\tau(x) \in A$, mas $V_{t_{j_k}}(x_{j_k})$ está fora de W que é uma vizinhança de A. Portanto, vale a Afirmação 4.

Assim, dado $\varepsilon_0 > 0$ e considerando a vizinhança $W_0 := \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A) \in \mathcal{B}$, existe uma vizinhança U de A tal que $V_t(U) \subset W_0$, $\forall\ t \geq 0$. Logo, considerando $U' := \gamma^+(U)$ teremos que $A \subset U' \subset W_0$ e $V_t(U') \subset U'$, $\forall\, t \geq 0$. Então,

$$V_t(\overline{U'}) \subset \overline{V_t(U')} \subset \overline{U'},\ \forall\, t \geq 0.$$

Seja H um conjunto compacto (arbitrário) em X. Visto que A atrai conjuntos compactos de X, existe $T_0 = T_0(H, U') \geq 0$ tal que $V_t(H) \subset int(U')$, $\forall\ t \geq T_0$. Em particular, $V_{T_0}(H) \subset int(U')$. Logo, para cada $h \in H$, $V_{T_0}(h)$ é ponto interior de U'. Como V_{T_0} é um operador contínuo em X, existe uma bola aberta B_h centrada em $V_{T_0}(h)$ e inteiramente contida em $int(U')$ e temos que $\{V_{T_0}^{-1}(B_h)\}_{h \in H}$ é uma cobertura aberta de H que tem subcobertura finita $\{V_{T_0}^{-1}(B_{h_i})\}_{i=1,\ldots,p}$.

Considere $H_1 := V_{T_0}^{-1}(B_{h_1}) \cup \ldots \cup V_{T_0}^{-1}\left(B_{h_p}\right)$. Temos que, H_1 é uma vizinhança aberta de H e

$$V_{T_0}(H_1) = V_{T_0}\left(\bigcup_{i=1}^{p} V_{T_0}^{-1}(B_{h_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{p} V_{T_0}\left(V_{T_0}^{-1}(B_{h_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_{h_i} \subset int(U') \subset U' \in \mathcal{B}.$$

Como $V_t(U') \subset U'$, $\forall\, t \geq 0$, segue que

$$V_t(H_1) \subset U',\ \forall\, t \geq T_0 \quad \text{e} \quad \gamma^+(U') \subset U' \in \mathcal{B}.$$

Daí, como $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente suave temos, pelo Lema 3.3.3, que $\omega(U')$ é não vazio, compacto, invariante e atrai U'. Mas A atrai conjuntos compactos, logo A atrai $\omega(U')$. Daí, pelo Lema 3.1.2 e Lema 3.1.9(ii), segue que $\omega(U') = \omega\left(\omega(U')\right) \subset A$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t\,(\varepsilon, U') \geq 0$ tal que

$$V_t(U') \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(U')\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A),\ \forall\, t \geq t\,(\varepsilon, U').$$

Logo, A atrai U'. Como $V_t(H_1) \subset U'$, $\forall\, t \geq T_0$, temos que

$$V_t(H_1) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A),\ \forall\, t \geq T_0 + t\,(\varepsilon, U').$$

Portanto, A atrai H_1.

(v): Seja $C \subset X$ tal que $\gamma^+(C)$ é limitada. Queremos mostrar que A atrai C.

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, segue do Lema 3.3.3 que $\omega(C)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai C. Visto que A atrai conjuntos compactos, A atrai $\omega(C)$ e como A é compacto, segue do Lema 3.1.2 que $\omega\left(\omega(C)\right) \subset A$.

Por outro lado, como $\omega(C)$ é fechado e invariante, temos pelo Lema 3.1.9(ii) que $\omega(C) = \omega\left(\omega(C)\right)$. Portanto, $\omega(C) \subset A$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $t\left(\varepsilon, C\right) \geq 0$ tal que

$$V_t(C) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(C)\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A), \; \forall\, t \geq t\left(\varepsilon, C\right).$$

Portanto, A atrai C, o que prova (v).

$\blacksquare$

Corolário 3.3.2 *[4] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe um conjunto compacto que atrai todos os conjuntos compactos de X;

(ii) Existe um conjunto compacto que atrai uma vizinhança de cada conjunto compacto de X.

Demonstração: $(i) \Longrightarrow (ii)$: Temos por hipótese, que existe um conjunto compacto que chamaremos de K, que atrai conjuntos compactos. Considerando $A := \bigcap_{t\geq 0} V_t(K)$, pelo Teorema 3.3.6, $A = \omega(K)$ é um conjunto compacto e para todo H compacto, existe uma vizinhança H_1 de H tal que A atrai H_1. Portanto, (ii) é satisfeito.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Temos por hipótese, que existe um conjunto compacto, que chamaremos de K, que atrai uma vizinhança de cada conjunto compacto de X. Em particular, K atrai todos os compactos. Considerando $A := \bigcap_{t\geq 0} V_t(K)$, pelo Teorema 3.3.6, $A = \omega(K)$ é um conjunto compacto que atrai todos os conjuntos compactos de X. Portanto, (i) é satisfeito.

$\blacksquare$

Para aplicar o Teorema 3.3.6, precisamos de procedimentos práticos para a verificação de suas hipóteses. Um passo nessa direção é o seguinte resultado.

Lema 3.3.5 *[4] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave e compacto dissipativo, então existe um conjunto compacto que atrai conjuntos compactos de X. Logo, valem as conclusões do Teorema 3.3.6.*

Demonstração: Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo, existe um conjunto limitado C que atrai conjuntos compactos de X. Daí, $\overline{C}$ também é limitado e atrai conjuntos compactos de X (pois toda ε-vizinhança de $\overline{C}$ é uma $\widetilde{\varepsilon}$-vizinhança de C). Logo, podemos considerar $C=\overline{C}$. Seja H um conjunto compacto. Sendo C um conjunto fechado que atrai H, pelo Lema 3.1.2, $\omega(H)\subset C$.

Afirmação: $\gamma^+(H)$ é limitada.

De fato, seja $\varepsilon_0>0$. Como C atrai H, temos pelo Lema 3.1.8 que, existe $t_0=t_0\left(\varepsilon_0,H\right)\geq 0$ tal que $\gamma^+_{t_0}(H)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(C)\in\mathcal{B}$. Então, $\gamma^+(H)=\gamma^+_{[0,t_0]}(H)\cup\gamma^+_{t_0}(H)$. Pela Proposição 3.1.2, temos que $\gamma^+_{[0,t_0]}(H)$ é compacto. Em particular, $\gamma^+_{[0,t_0]}(H)\in\mathcal{B}$. Portanto, $\gamma^+(H)\in\mathcal{B}$ e a afirmação está provada.

Daí, pelo Lema 3.3.3, $\omega(H)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai H.

Seja $B:=\{x\in C\ ;\ V_t(x)\in C,\ \forall\ t\geq 0\}$. Temos que, $B\in\mathcal{B}$ (pois $B\subset C\in\mathcal{B}$) e $V_t(B)\subset B$, $\forall\, t\geq 0$. Logo, $V_t(\overline{B})\subset\overline{V_t(B)}\subset\overline{B}$, $\forall\, t\geq 0$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, existe um conjunto compacto $K\subset\overline{B}$ tal que K atrai $\overline{B}$. Como $\omega(H)\subset C$ e é invariante, temos que $\omega(H)\subset B\subset\overline{B}$. Logo, K atrai o compacto $\omega(H)$. Usando o Lema 3.1.9(ii) e o Lema 3.1.2, segue que

$$\omega(H)=\omega\left(\omega(H)\right)\subset K.$$

Daí, dado $\varepsilon>0$, existe $t\left(\varepsilon,H\right)\geq 0$ tal que

$$V_t(H)\subset\mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(H)\right)\subset\mathcal{O}_\varepsilon(K),\ \forall\, t\geq t\left(\varepsilon,H\right).$$

Logo, K atrai H. Portanto, K é um conjunto compacto que atrai conjuntos compactos de X. Logo, considerando $A:=\bigcup\limits_{t\geq 0}V_t(K)$, valem as conclusões do Teorema 3.3.6, entre elas, que $A=\omega(K)$ é compacto, invariante e que atrai conjuntos compactos de X.

∎

O próximo resultado relata os diferentes tipos de dissipatividade.

Lema 3.3.6 *[4] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo assintoticamente suave e pontualmente dissipativo. Se para qualquer conjunto compacto L tivermos que $\gamma^+(L)\in\mathcal{B}$, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é localmente compacto dissipativo. Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ for limitado, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo.*

Demonstração: Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo, então existe um conjunto limitado $B\subset X$ tal que B atrai cada ponto de X. Sem perda de generalidade, podemos assumir B fechado, pois caso contrário basta tomar $\overline{B}$ ao invés de B. Defina

$$\mathcal{U} := \{x \in B \; ; \; \gamma^+(x) \subset B\}.$$

Afirmação 1: $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

De fato, seja $x \in X$. Como B atrai x, dado $\varepsilon_0 > 0$, existe $t(\varepsilon_0, x) \geq 0$ tal que

$$V_t(x) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B), \; \forall \; t \geq t(\varepsilon_0, x).$$

Isto implica que,

$$\gamma^+_{t(\varepsilon_0,x)}(x) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B) \in \mathcal{B}.$$

Por outro lado, segue da Proposição 3.1.2 que $\gamma^+_{[0,t(\varepsilon_0,x)]}(x)$ é compacto. Logo, $\gamma^+_{[0,t(\varepsilon_0,x)]}(x)$ é limitado. Portanto, $\gamma^+(x)$ é limitado. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, pelo Lema 3.3.3, $\omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai x. Além disso, como B atrai x, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(\varepsilon)}(x) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$. Então, $\overline{\gamma^+_{t(\varepsilon)}(x)} \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(B)}$. Logo,

$$\omega(x) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma^+_s(x)} \subset \overline{\gamma^+_{t(\varepsilon)}(x)} \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(B)}, \; \forall \; \varepsilon > 0.$$

Portanto,

$$\omega(x) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(B)} = \overline{B} = B.$$

Ou seja, $\omega(x) \subset B$. Assim, dado $y \in \omega(x) \subset B$, $V_t(y) \in V_t(\omega(x)) = \omega(x) \subset B$, $\forall \; t \geq 0$. Logo, $\gamma^+(y) \subset B$. Isto implica que $\omega(x) \subset \mathcal{U}$. Como $\omega(x)$ é não vazio e $\omega(x) \subset \mathcal{U}$, segue que $\mathcal{U} \neq \emptyset$, o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: $V_t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$, $\forall \; t \geq 0$.

Com efeito, seja $z \in \mathcal{U}$. Então, $z \in B$ e $\gamma^+(z) \subset B$. Tome $t \geq 0$ e seja $\widetilde{z} = V_t(z)$. Temos que, $\widetilde{z} = V_t(z) \in \gamma^+(z) \subset B$. Logo, $\widetilde{z} \in B$ e

$$V_s(\widetilde{z}) = V_s(V_t(z)) = V_{t+s}(z) \in \gamma^+(z) \subset B, \; \forall \; s \geq 0.$$

Logo, $\gamma^+(\widetilde{z}) \subset B$. Assim, $\widetilde{z} = V_t(z) \in \mathcal{U}$. Portanto, $V_t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$, $\forall \; t \geq 0$. O que prova a Afirmação 2.

Logo, pela continuidade de V_t, $V_t(\overline{\mathcal{U}}) \subset \overline{V_t(\mathcal{U})} \subset \overline{\mathcal{U}}$, $\forall \; t \geq 0$. Como $\mathcal{U} \subset B$ e B é fechado e limitado, segue que $\overline{\mathcal{U}} \subset \overline{B} = B$ e portanto $\overline{\mathcal{U}}$ é limitado.

Mas $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave, logo existe um conjunto compacto $K \subset \overline{U}$ tal que K atrai $\overline{U}$.

Afirmação 3: K atrai pontos de X.

De fato, da primeira parte ($\mathcal{U} \neq \emptyset$), concluímos que para todo $x \in X$, $\omega(x) \neq \emptyset$, $\omega(x) \subset \mathcal{U}$ e $\omega(x)$ é invariante, compacto e atrai x. Como K atrai $\mathcal{U}$ e $\omega(x) \subset \mathcal{U}$, então, em particular, K atrai $\omega(x)$, $\forall\, x \in X$. Visto que K é compacto, pelo Lema 3.1.2, $\omega\left(\omega(x)\right) \subset K$.

Por outro lado, $\omega(x)$ é compacto e invariante. Logo, $\omega\left(\omega(x)\right) = \omega(x)$. Portanto, $\omega(x) \subset K$, $\forall\, x \in X$. Visto que, $\omega(x)$ atrai x, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $t\,(\varepsilon, x) \geq 0$ tal que para todo $t \geq t\,(\varepsilon, x)$, $V_t(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega(x)\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K)$. Logo K atrai x, qualquer que seja $x \in X$. Portanto, K atrai pontos de X.

Afirmação 4: K atrai K.

De fato, como K atrai $\overline{\mathcal{U}}$ e $K \subset \overline{\mathcal{U}}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon) \geq 0$ tal que para todo $t \geq t(\varepsilon)$, $V_t(K) \subset V_t(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K)$. Portanto, K atrai K.

Com procedimento análogo ao que foi feito na prova da Afirmação no Lema 3.3.3, podemos provar a seguinte

Afirmação 5: $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto.

Daí, pelo Lema 3.1.10, $J := \omega(K)$ é um conjunto compacto, invariante e atrai K. Como K atrai pontos de X, J atrai pontos de X.

Suponhamos, agora, que $\gamma^+(L) \in \mathcal{B}$ para qualquer conjunto compacto L.

Afirmação 6: Existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma^+(V) \in \mathcal{B}$.

De fato, suponha que isto não acontece. Logo, existem sequências $x_j \in X$ e $t_j \longrightarrow +\infty$ e $y \in J$ tal que $x_j \longrightarrow y$ e $\mid V_{t_j}(x_j) \mid \longrightarrow +\infty$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Daí, teremos que $\overline{\{x_j\ ;\ j \geq 1\}}$ é um conjunto compacto com $\gamma^+\left(\overline{\{x_j\ ;\ j \geq 1\}}\right)$ não limitado. Isto contradiz a hipótese. Portanto, vale a afirmação 6.

Visto que J atrai pontos de X e $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é contínuo, para qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $T_0 \geq 0$ tal que $V_t\left(\mathcal{O}_x\right) \subset V \subset \gamma^+(V)$, $\forall\, t \geq T_0$. Logo, $\gamma^+(V)$ atrai $\mathcal{O}_x$. Com um procedimento análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.3.6(iv) mostra-se que para qualquer conjunto compacto H em X, existe um aberto H_1 contendo H tal que $\gamma^+(V)$ atrai H_1. Portanto, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é localmente compacto dissipativo.

Suponha, agora, que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$. Então, $\gamma^+(K) \in \mathcal{B}$ para qualquer conjunto compacto K e, segue da parte anterior que $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é localmente compacto dissipativo e, consequentemente, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é compacto dissipativo. Pelo Lema 3.3.5, existe um conjunto compacto que atrai conjuntos compactos de X. Pelo Teorema 3.3.6, existe um conjunto maximal compacto invariante A que atrai conjuntos limitados ($B \in \mathcal{B} \Longrightarrow \gamma^+(B) \in \mathcal{B}$, Teorema 3.3.6$(v) \Longrightarrow A$ atrai B). Assim, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é B-dissipativo.

$\blacksquare$

Teorema 3.3.7 *[4] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo assintoticamente suave, limitado e pontualmente dissipativo, então existe um B-atrator global maximal compacto invariante.*

Demonstração: Pelo Lema 3.3.6, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo. Em particular, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é compacto dissipativo. Daí, pelo Lema 3.3.5, existe um conjunto compacto que atrai compactos. Logo, pelo Teorema 3.3.6, existe um conjunto maximal compacto invariante que atrai conjuntos limitados.

■

Proposição 3.3.6 *O B-atrator global maximal compacto invariante coincide com o B-atrator global minimal fechado que é compacto e invariante.*

Demonstração: De fato, suponha que exista o B-atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{A}$. Seja C um B-atrator global fechado. Então, C atrai o limitado $\mathcal{A}$. Pelo Lema 3.1.2, $\omega(\mathcal{A}) \subset C$. Como $\mathcal{A}$ é fechado e invariante, pelo Lema 3.1.9(ii), $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{A})$. Logo, $\mathcal{A} \subset C$. Portanto, $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{A}$ também é o B-atrator global minimal fechado que é compacto e invariante.

Por outro lado, seja $\mathcal{D}$ um B-atrator global compacto e invariante. Pelos Lemas 3.1.2 e 3.1.9(ii), $\mathcal{D} = \omega(\mathcal{D}) \subset \mathcal{M}$. Portanto, $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{M}$ é o B-atrator global maximal compacto invariante.

■

Definição 3.3.4 *[7] Dizemos que um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP (B-asymptotically compact property) se para qualquer $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+_{t_1(B)}(B) \in \mathcal{B}$ para um certo $t_1(B) > 0$, existe um $t_2(B) \geq t_1(B)$ tal que para qualquer $t \geq t_2(B)$, existem um conjunto compacto $K(B,t) \subset X$ e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo*

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}\left(K(B,t)\right) \quad e \quad \varepsilon(B,t) \longrightarrow 0 \quad quando \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Definição 3.3.5 *[7] Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$\mathcal{K}$ se para qualquer $B \in \mathcal{B}$, existe $t(B) \geq 0$ tal que $V_t(B)$ é relativamente compacto para qualquer $t > t(B)$. Um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$ se $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$ para um certo $t(B) \geq 0$, então para quaisquer sequências $\{x_n\}$ e $\{t_n\}$, com $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente.*

Lema 3.3.7 *[7] Seja $\{L_n\}$ uma sequência decrescente de conjuntos em X: $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$, satisfazendo a seguinte condição. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um conjunto compacto $K_n \subset X$ e um número $\varepsilon_n > 0$ tal que*

$$L_n \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(K_n) \quad e \quad \varepsilon_n \longrightarrow 0 \quad quando \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Então, para cada $y_n \in L_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{y_n\}$ contém uma subsequência convergente.

Os seguintes teoremas melhoram os resultados correspondentes dados em [5, 12, 4].

Teorema 3.3.8 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe B-ACP e $A \neq \emptyset$. Suponha que existe um $T \geq 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$. Então, $\omega(A)$ é o conjunto minimal fechado não vazio que atrai A compacto e invariante.*

Demonstração: Seja $B := \gamma_T^+(A)$ e considere $t_1 := T + 1$. Então,

$$\gamma_{t_1}^+(B) = \gamma_{t_1}^+\left(\gamma_T^+(A)\right) = \gamma_{t_1+T}^+(A) \subset \gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}.$$

Considere qualquer sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$.
Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, existem $t_2(B) \geq t_1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $t_n \geq t_2(B)$, $\forall\, n \geq n_0$, existem um conjunto compacto $K(B, t_n) \subset X$ e $\varepsilon(B, t_n) > 0$, satisfazendo

$$V_{t_n}(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t_n)}\left(K(B, t_n)\right), \; \forall\, n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \varepsilon(B, t_n) \longrightarrow 0 \; (n \longrightarrow +\infty).$$

Como $B = \gamma_T^+(A)$ é positivamente invariante, pois

$$V_t\left(\gamma_T^+(A)\right) = \gamma_{t+T}^+(A) \subset \gamma_T^+(A), \; \forall\, t \geq 0,$$

então, $\{V_{t_n}(B)\}$ é uma sequência decrescente de conjuntos em X, pois

$$V_{t_n+1}(B) = \gamma_{t_n+1+T}^+(A) \subset \gamma_{t_n+T}^+(A) = V_{t_n}(B), \; \forall\, n \geq n_0 \quad \text{e} \quad V_{t_n}(x_n) \in V_{t_n}(B), \; \forall\, n > n_0.$$

Pelo Lema 3.3.7, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente. Pelo Lema 3.1.5, $\omega(B)$ é um conjunto minimal fechado não vazio que atrai B e é compacto. Pelo Lema 3.1.6, temos que $\omega(B)$ é invariante. Pelo Lema 3.1.7, $\omega(B) = \omega\left(\gamma_T^+(A)\right) = \omega(A)$. Pelo Lema 3.1.8, $\omega(A)$ atrai A. Assim, $\omega(A)$ é um conjunto, não vazio, compacto e invariante que atrai A. Pelo Lema 3.1.2, $\omega(A)$ é o minimal fechado que atrai A.

■

Teorema 3.3.9 *[7] Sejam $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $A\mathcal{K}$ (ou de classe B-$A\mathcal{K}$) e $A \neq \emptyset$. Suponha que existe um $T \geq 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$. Então, $\omega(A)$ é um conjunto minimal fechado não vazio que atrai A e é compacto e invariante.*

Demonstração: Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $A\mathcal{K}$. Considere qualquer sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset A$ e $t_n \longrightarrow +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \geq T$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\gamma^+\left(\gamma_T^+(A)\right) = \bigcup_{t\geq 0} V_t\left(\gamma_T^+(A)\right) = \bigcup_{t\geq 0} \gamma_{t+T}^+(A) \subset \gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$$

e

$$V_{t_n}(x_n) = V_{t_n - T}\left(V_T(x_n)\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{onde} \quad V_T(x_n) \in \gamma_T^+(A) \quad \text{e} \quad t_n - T \longrightarrow +\infty.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe $A\mathcal{K}$, $\{V_{t_n-T}\left(V_T(x_n)\right)\}$ contém uma subsequência convergente, isto é, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente. Pelo Lema 3.1.5, $\omega(A)$ é um conjunto minimal fechado, não vazio, que atrai A e $\omega(A)$ é compacto. Pelo Lema 3.1.6, $\omega(A)$ é invariante.
Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe B-$A\mathcal{K}$, a demonstração é análoga, basta tomar $t\left(\gamma_T^+(A)\right) := 0$.

■

Proposição 3.3.7 *Se A é conexo e $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é contínuo de classe $A\mathcal{K}$ (ou B-$A\mathcal{K}$ ou B-ACP) e existe $T \geq 0$ tal que $\gamma_T^+(A) \in \mathcal{B}$, então $\omega(A)$ é conexo.*

Demonstração: Análoga ao que foi feito no Teorema 3.3.1(v).

■

O teorema a seguir é um resultado de comparação entre as diversas classes de semigrupos.

Teorema 3.3.10 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo, então*

(i) $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $\mathcal{K} \Rightarrow \{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* B-$\mathcal{K} \Rightarrow \{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $A\mathcal{K}$.

(ii) $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* B-$ACP \Leftrightarrow \{V_t\}_{t\geq 0}$ *é assintoticamente suave** $\Leftrightarrow \{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* $A\mathcal{K} \Leftrightarrow \{V_t\}_{t\geq 0}$ *é de classe* B-$A\mathcal{K}$.

(iii) $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é uniformemente compacto para* t *grande* $\Leftrightarrow$ $\{V_t\}_{t\geq 0}$ *é* B*-limitado e de classe* B*-*$\mathcal{K}$*.*

Demonstração: Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo.

(i) Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$, então para cada $B \in \mathcal{B}$, $V_t(B)$ é relativamente compacto para cada $t > 0$. Tomando $t(B) = 0$, temos que para todo $t > t(B)$, $V_t(B)$ é relativamente compacto. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$\mathcal{K}$.

Agora, suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$\mathcal{K}$ e $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$, então existe um $T := t\left(\gamma^+(B)\right) + 1 > 0$ tal que $V_t\left(\gamma^+(B)\right)$ é relativamente compacto para qualquer $t \geq T$. Seja $\{V_{t_n}(x_n)\}$ uma sequência arbitrária, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n \geq T$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Então,

$$V_{t_n}(x_n) = V_T\left(V_{t_n - T}(x_n)\right) \in V_T\left(\gamma^+(B)\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$.

(ii) (a) Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, mostraremos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*.

De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ um conjunto, não vazio, fechado e positivamente invariante. Visto que, $V_t(B) \subset B$, $\forall\ t \geq 0$. Então, $\gamma^+(B) \subset B$. Assim, $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP pelo Teorema 3.3.8, existe um conjunto, não vazio, compacto $J := \omega(B)$ que atrai B. Pelo Lema 3.1.9(i), $J = \omega(B) \subset \overline{B} = B$. Isto mostra que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*.

(b) Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*, mostraremos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$.

De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+(B) \in \mathcal{B}$. Note que $\gamma^+(B)$ é positivamente invariante, pois $V_t\left(\gamma^+(B)\right) = \gamma_t^+(B) \subset \gamma^+(B)$, $\forall\ t \geq 0$. Logo, $\overline{\gamma^+(B)} \in \mathcal{B}$ é um conjunto não vazio, fechado e positivamente invariante. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*, existe um conjunto não vazio, compacto $J \subset \overline{\gamma^+(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+(B)}$. Consequentemente, J atrai $\gamma^+(B)$. Assim, pelo Lema 3.1.8, J atrai B. Portanto, pelo Lema 3.1.4, qualquer sequência da forma $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, contém uma subsequência convergente. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$.

(c) Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$. Mostraremos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$. De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$ para um certo $t(B) \geq 0$. Considere a sequência $\{V_{t_n}(x_n)\}$, onde $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \longrightarrow +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $t_n > t(B)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Note que,

$$\gamma^+\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right) = \gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad V_{t_n}(x_n) = V_{t_n - t(B)}\left(V_{t(B)}(x_n)\right),\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

onde $V_{t(B)}(x_n) \in \gamma^+_{t(B)}(B)$ e $t_n - t(B) \longrightarrow +\infty$.
Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$, $\left\{V_{t_n - t(B)}\left(V_{t(B)}(x_n)\right)\right\}$ contém uma subsequência convergente, isto é, $\{V_{t_n}(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente. Isto mostra que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$.

(d) Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$. Mostraremos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP.
De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^+_{t_1(B)}(B) \in \mathcal{B}$ para um certo $t_1(B) > 0$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$, pelo Teorema 3.3.9, $\omega(B)$ é um conjunto, não vazio, compacto que atrai B. Escolha uma sequência $\{\varepsilon_n\}$ de números positivos tal que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $t_n > 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\omega(B)),\ \forall\, t \geq t_n.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\{t_n\}$ é monótona estritamente crescente (e $t_n \longrightarrow +\infty$). Como $t_n \longrightarrow +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow t_n \geq t_1(B)$. Assim, tome $t_2(B) = t_{n_0}$. Então, para qualquer $t \geq t_2(B)$ existe um $n \geq n_0$ tal que $t_n \leq t < t_{n+1}$. Seja $K(B,t) := \omega(B)$ e $\varepsilon(B,t) := \varepsilon_n$, então

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}\left(K(B,t)\right)$$

e $\varepsilon(B,t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow +\infty$ (pois $t \longrightarrow +\infty \Rightarrow n \longrightarrow +\infty$).
Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP.

(iii) $(\Rightarrow)$ Suponha que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande, então para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que

$$\gamma^+_{t(B)}(B) = \bigcup_{\tau \geq t(B)} V_\tau(B)$$

é relativamente compacto em X, ou seja, $\overline{\gamma^+_{t(B)}(B)} \in \mathcal{K}$. Em particular,

$$\gamma^+_{t(B)}(B) \subset \overline{\gamma^+_{t(B)}(B)} \in \mathcal{B}.$$

Logo, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado.

Seja $\tau > t(B)$, temos que $V_\tau(B) \subset \gamma^+_{t(B)}(B)$. Isto implica que

$$\overline{V_\tau(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t(B)}(B)} \in \mathcal{K}.$$

Como um conjunto fechado contido num compacto é compacto, então $V_\tau(B)$ é relativamente compacto. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Suponha, agora, que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado e de classe B-$\mathcal{K}$, então para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$, e assim existe um $t\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right) \geq 0$ tal que

$$\gamma^+_{t(B)+t\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right)}(B) = V_{t\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right)}\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right)$$

é relativamente compacto. Tome

$$t_1(B) := t(B) + t\left(\gamma^+_{t(B)}(B)\right)$$

isto é, $\gamma^+_{t_1(B)}(B)$ é relativamente compacto. Isto mostra que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é uniformemente compacto para t grande.

■

3.4 Existência dos Atratores $\mathcal{M}$ e $\hat{\mathcal{M}}$ e Relações entre eles

Nesta seção, as condições suficientes para que um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possua um B-atrator global compacto invariante $\mathcal{M}$ e um atrator global de pontos $\hat{\mathcal{M}}$ são discutidas e algumas relações entre $\mathcal{M}$ e $\hat{\mathcal{M}}$ são dadas. Os semigrupos que aparecem nos lemas e teoremas seguintes são assumidos de classe B-ACP. Usando o Teorema 3.3.10, vemos que o Lema 3.4.1, os Teoremas 3.4.1 e 3.4.2 e a Proposição 3.4.1 são válidos para as várias classes de semigrupos que aparecem no Teorema 3.3.10.

O seguinte Teorema 3.4.1 é uma consequência natural combinando o Teorema 3.3.8 e o Teorema 3.2.2.

Teorema 3.4.1 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe B-ACP.*

(i) Se para cada $x \in X$, existe um $t(x) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(x)}(x) \in \mathcal{B}$, então $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui o atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ e $\hat{\mathcal{M}}$ é positivamente invariante.

(ii) Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado, então existe o atrator global de pontos minimal fechado, não vazio, $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ e o B-atrator global minimal fechado, não vazio, $\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)}$, e ambos $\hat{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ são positivamente invariantes.

Demonstração: Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe B-ACP.

(i) Como para cada $x \in X$, existe um $t(x) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(x)}(x) \in \mathcal{B}$, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(x)$ atrai x. Portanto, pelo Teorema 3.2.2(i), segue o resultado.

(ii) Para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$. Pelo Teorema 3.3.8, $\omega(B)$ atrai B. Portanto, pelo Teorema 3.2.2(ii), segue o resultado.

■

Para provar o seguinte Teorema 3.4.2, precisamos dos seguintes lemas.

Lema 3.4.1 *[7] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe B-ACP e $A \in \mathcal{B}$ um conjunto invariante, então $\overline{A}$ é compacto e invariante.*

Demonstração: Seja $T \in \mathbb{R}^+$. Assim,

$$\gamma^+_T(A) = \bigcup_{\tau\geq T} V_\tau(A) = \bigcup_{\tau\geq T} A = A \in \mathcal{B}.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(A)$ é um conjunto, não vazio, compacto e invariante. Como A é invariante, pelo Lema 3.1.9(ii), temos que $\overline{A} = \omega\left(\overline{A}\right) = \omega(A)$ é compacto e invariante.

■

O próximo lema é uma adaptação do Lema 3.1.12.

Lema 3.4.2 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo B-limitado. Então, para cada atrator global de pontos $B_0 \in \mathcal{B}$ e cada $\delta > 0$ existe um $T\left(B_0, \delta\right) \geq 0$ tal que*

$$\gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right) \in \mathcal{B}.$$

Além disso, para cada conjunto compacto $K \subset X$ existem $T\left(K, B_0, \delta\right) \geq 0$ e $\varepsilon\left(K, B_0, \delta\right) > 0$ tais que

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K,B_0,\delta)}(K)\right) \subset \gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T\left(K, B_0, \delta\right).$$

Demonstração: Sejam $B_0 \in \mathcal{B}$ e $\delta > 0$ dados. Então, $B_1 := \mathcal{O}_\delta(B_0) \in \mathcal{B}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado existe $T(B_1) := T(B_0, \delta) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{T(B_0,\delta)}(\mathcal{O}_\delta(B_0)) \in \mathcal{B}$.

Visto que B_0 é um atrator global de pontos, para cada $x \in X$, existe $t(x) \geq 0$ tal que $V_{t(x)}(x) \in \mathcal{O}_\delta(B_0) = B_1$. Como B_1 é um conjunto aberto e $V_{t(x)}$ é contínuo, então

$$V_{t(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset B_1 \quad \text{para algum} \quad \varepsilon(x) > 0.$$

Logo,

$$V_{t+t(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset V_t(B_1) = V_t\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq 0.$$

Em particular,

$$V_{t+t(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset V_t\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T\left(B_0, \delta\right).$$

Logo,

$$V_{t+t(x)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right) \subset \gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T\left(B_0, \delta\right).$$

Assim, dado um conjunto compacto $K \subset X$, é claro que $\left\{\mathcal{O}_{\varepsilon(x)}(x)\right\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K, da qual se pode extrair uma subcobertura finita. Portanto, existem $x_1, \ldots, x_k \in K$ e $t(x_1), \ldots, t(x_k)$ tais que

$$V_{t+t(x_i)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i)\right) \subset \gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T\left(B_0, \delta\right)$$

e

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Portanto, tomando $T(K) = \max\{t(x_1), \ldots, t(x_k)\}$, da compacidade de K segue que existe $\varepsilon(K) = \frac{\sigma}{2} > 0$ (onde σ é o número de Lebesgue) tal que

$$\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\varepsilon(x_i)}(x_i).$$

Logo,

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K)\right) \subset \gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T(K) + T\left(B_0, \delta\right).$$

Tomando $T\left(K, B_0, \delta\right) := T(K) + T\left(B_0, \delta\right)$ e $\varepsilon\left(K, B_0, \delta\right) := \varepsilon(K) > 0$, temos que

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K,B_0,\delta)}(K)\right) \subset \gamma^+_{T(B_0,\delta)}\left(\mathcal{O}_\delta(B_0)\right), \ \forall\, t \geq T\left(K, B_0, \delta\right).$$

$\blacksquare$

Teorema 3.4.2 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe B-ACP, B-limitado e pontualmente dissipativo. Então, temos o seguinte:*

(i) Ambos $\hat{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{M}$ no Teorema 3.4.1 são compactos, invariantes e $\mathcal{M} = \omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right)$, onde $\delta > 0$ é um número suficientemente pequeno.

(ii) Se $\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}}) \setminus \hat{\mathcal{M}}\right) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}}) \setminus \hat{\mathcal{M}}} \omega(x)$, então $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Se $\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}}) \setminus \hat{\mathcal{M}}\right) \setminus \hat{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, então $\hat{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{M}$.

(iii) Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é contínuo, então $\mathcal{M}$ é conexo desde que $\hat{\mathcal{M}}$ é conexo; ou se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global fechado e limitado conexo, então $\mathcal{M}$ é conexo, em particular, se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{M}$ é conexo.

Demonstração:

(i) Seja $x \in X$ dado. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado, existe um $t(x) \geq 0$ tal que

$$\gamma^+_{t(x)}(x) \in \mathcal{B}.$$

Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(x)$ é um conjunto invariante.

Afirmação 1: $\bigcup_{x\in X} \omega(x)$ é invariante.

De fato,

$$V_t\left(\bigcup_{x\in X} \omega(x)\right) = \bigcup_{x\in X} V_t\left(\omega(x)\right) = \bigcup_{x\in X} \omega(x),\ \forall\, t \geq 0.$$

Afirmação 2: $\bigcup_{x\in X} \omega(x)$ é limitado.

De fato, como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo, temos que existe um atrator global de pontos limitado B_1. Seja $\varepsilon_0 > 0$ fixado. Logo, para cada $x \in X$, existe um $t(x) \geq 0$ tal que

$$V_t(x) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1), \quad \text{para todo} \quad t \geq t(x).$$

Como $\gamma^+_t(x) = \bigcup_{\tau\geq t} V_\tau(x)$, então $\gamma^+_t(x) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)$, $\forall\, t \geq t(x)$ e $\forall\, x \in X$. Logo,

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq t(x)} \overline{\gamma^+_t(x)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B},\ \forall\, x \in X.$$

Isto implica que

$$\bigcup_{x\in X} \omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B}.$$

Portanto, pelo Lema 3.4.1, $\hat{\mathcal{M}} = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é compacto e invariante.

Agora, provemos que $\mathcal{M}$ é compacto e invariante.

De fato, aplicando o Lema 3.4.2 para o atrator global de pontos compacto e invariante

$\hat{\mathcal{M}}$, para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno e para cada conjunto compacto $K \subset X$, existem $T\left(\hat{\mathcal{M}}, \delta\right) \geq 0$, $T\left(K, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right) \geq 0$ e $\varepsilon\left(K, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right) > 0$ tais que

$$\gamma^+_{T\left(\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right) \in \mathcal{B}$$

e

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon(K,\hat{\mathcal{M}},\delta)}(K)\right) \subset \gamma^+_{T\left(\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right), \ \forall\, t \geq T\left(K, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right) \tag{3.23}$$

Tome $\widetilde{B} := \gamma^+_{T\left(\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right)$. Vamos provar que $\widetilde{B}$ é um conjunto B-absorvente global.

De fato, como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(B)$ é um conjunto, não vazio, compacto que atrai B. Por (3.23),

$$V_t\left(\mathcal{O}_{\varepsilon\left(\omega(B),\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}(\omega(B))\right) \subset \widetilde{B}, \ \forall\, t \geq T\left(\omega(B), \hat{\mathcal{M}}, \delta\right)$$

e existe um $t(B) \geq 0$ tal que

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon\left(\omega(B),\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}(\omega(B)) \quad \text{para todo} \quad t \geq t(B).$$

Tome $T_0\left(B, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right) := t(B) + T\left(\omega(B), \hat{\mathcal{M}}, \delta\right)$, então para todo $t \geq T_0\left(B, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right)$,

$$V_t(B) = V_{t-t(B)}\left(V_{t(B)}(B)\right) \subset V_{t-t(B)}\left(\mathcal{O}_{\varepsilon\left(\omega(B),\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}(\omega(B))\right) \subset \widetilde{B}.$$

Note que $\omega\left(\widetilde{B}\right)$ é o conjunto minimal fechado que atrai $\widetilde{B}$, não vazio, compacto e invariante. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $t\left(\varepsilon, \widetilde{B}\right) \geq 0$ tal que

$$V_t\left(\widetilde{B}\right) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega\left(\widetilde{B}\right)\right), \quad \text{para todo} \quad t \geq t\left(\varepsilon, \widetilde{B}\right).$$

Logo,

$$V_t(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\left(\omega\left(\widetilde{B}\right)\right), \ \forall\, t \geq T_0\left(B, \hat{\mathcal{M}}, \delta\right) + t\left(\varepsilon, \widetilde{B}\right).$$

Portanto, $\omega\left(\widetilde{B}\right)$ é um B-atrator global (compacto). Pelos Teoremas 3.4.1(ii) e 3.2.1(i),

$$\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)} \subset \omega\left(\widetilde{B}\right) \subset \mathcal{M}.$$

Portanto, $\mathcal{M} = \omega\left(\widetilde{B}\right)$ é compacto e invariante. Pelo Lema 3.1.7, temos que

$$\omega(\widetilde{B}) = \omega\left(\gamma^+_{T\left(\hat{\mathcal{M}},\delta\right)}\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right)\right) = \omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right).$$

(ii) Usando o fato que $\hat{\mathcal{M}}$ é fechado e invariante, segue que

$$\begin{aligned}
\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right) &= \omega\left(\hat{\mathcal{M}}\right)\bigcup\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right)\\
&= \hat{\mathcal{M}}\bigcup\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right)\\
&= \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}\bigcup\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right).
\end{aligned}$$

Por (i), $\mathcal{M}=\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\right)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}\bigcup\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right)\\
&= \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}\bigcup\left(\bigcup_{x\in\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}}\omega(x)\right)\\
&= \overline{\bigcup_{x\in X}\omega(x)}=\hat{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Se $\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right)\setminus\hat{\mathcal{M}}\neq\emptyset$, existe $y\in\omega\left(\mathcal{O}_\delta(\hat{\mathcal{M}})\setminus\hat{\mathcal{M}}\right)\subset\mathcal{M}$ e $y\notin\hat{\mathcal{M}}$. Portanto, $\hat{\mathcal{M}}\subsetneq\mathcal{M}$.

(iii) Análoga ao do Teorema 3.3.1(v) e ao do Teorema 3.3.2.

■

Proposição 3.4.1 *[7] Se um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP e é B-limitado, então:*

(a) $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo se, e somente se, $\bigcup_{x\in X}\omega(x)\in\mathcal{B}$.

(b) $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo se, e somente se, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\omega(B)\in\mathcal{B}$.

Demonstração:

(a) $(\Rightarrow)$: Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo, existe um atrator global de pontos limitado A. Seja $\varepsilon_0>0$. Logo, para cada $x\in X$, existe um $t(x)\geq 0$ tal que

$$V_t(x)\in\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A),\ \forall\, t\geq t(x).$$

Como $\gamma^+_{t(x)}(x)=\bigcup_{\tau\geq t(x)}V_\tau(x)$, então $\gamma^+_{t(x)}(x)\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A)$, $\forall\, x\in X$. Logo,

$$\omega(x)=\bigcap_{t\geq t(x)}\overline{\gamma^+_t(x)}\subset\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A)}\in\mathcal{B},\ \forall\, x\in X.$$

Portanto,

$$\bigcup_{x\in X}\omega(x)\subset\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(A)}\in\mathcal{B}.$$

($\Leftarrow$): Seja $x \in X$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado, existe um $t(x) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(x)}(x) \in \mathcal{B}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(x)$ atrai x.

Logo, $\bigcup_{x\in X} \omega(x)$ é um atrator global de pontos limitado. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é pontualmente dissipativo.

(b) ($\Rightarrow$): Seja B_1 um B-atrator global limitado. Seja $\varepsilon_0 > 0$. Dado $B \in \mathcal{B}$, existe um $t(B, \varepsilon_0) \geq 0$ tal que

$$\gamma^+_{t(B,\varepsilon_0)}(B) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1) \in \mathcal{B}.$$

Pela definição de $\omega(B)$,

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma^+_t(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t(B,\varepsilon_0)}(B)} \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B}.$$

Como B é arbitrário, temos que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(B_1)} \in \mathcal{B}.$$

($\Leftarrow$): Dado $B \in \mathcal{B}$, existe um $t(B) \geq 0$ tal que $\gamma^+_{t(B)}(B) \in \mathcal{B}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, pelo Teorema 3.3.8, $\omega(B)$ atrai B. Logo, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)$ é um B-atrator global limitado. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo.

$\blacksquare$

3.5 Condições Equivalentes de Existência do B-Atrator Global Compacto Invariante $\mathcal{M}$

Nesta seção, vamos provar que a condição suficiente do Teorema 3.4.2 para que um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ tenha o B-atrator global minimal fechado, não vazio, compacto invariante, $\mathcal{M}$, isto é, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-limitado, pontualmente dissipativo e de classe B-ACP, é também necessária. Pelo Teorema 3.3.10, obtemos imediatamente uma série de condições equivalentes a existência do B-atrator global compacto invariante $\mathcal{M}$. Portanto, cada uma dessas condições é também a condição mais fraca para que um semigrupo tenha o B-atrator global minimal fechado, não vazio, compacto invariante $\mathcal{M}$.

Lema 3.5.1 *[7] Se um semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global compacto, não vazio, então ele é assintoticamente suave* e B-dissipativo.*

Demonstração: Seja $K \subset X$ um B-atrator global compacto não vazio. Em particular, K é também um B-atrator global limitado. Logo, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo.
Mostremos, agora, que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*.
Seja $B \in \mathcal{B}$ um conjunto fechado e positivamente invariante, então, pelo Lema 3.1.9(i),

$$J := \omega(B) \subset \overline{B} = B.$$

Note que o conjunto compacto K atrai B (pois K é um B-atrator global compacto). Logo, pelo Teorema 3.1.1, $J = \omega(B)$ é um conjunto compacto não vazio que atrai B. Portanto, $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*.

■

Teorema 3.5.1 *[7] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave* e B-dissipativo;*

(ii) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$ e B-dissipativo;*

(iii) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$ e B-dissipativo;*

(iv) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP e é B-dissipativo;*

(v) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave*, B-limitado e pontualmente dissipativo;*

(vi) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$, B-limitado e pontualmente dissipativo;*

(vii) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$, B-limitado e pontualmente dissipativo;*

(viii) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP, e é B-limitado e pontualmente dissipativo;*

(ix) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global minimal fechado, não vazio, que é compacto e invariante.*

(x) *$\{V_t\}_{t\geq 0}$ possui um B-atrator global compacto não vazio;*

Demonstração: É fácil ver que B-dissipativo implica em B-limitado e pontualmente dissipativo.
Pelo Teorema 3.3.10(ii), temos que $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-ACP $\Leftrightarrow$ $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente suave* $\Leftrightarrow$ $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $A\mathcal{K}$ $\Leftrightarrow$ $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe B-$A\mathcal{K}$.
Assim, temos que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii) \Leftrightarrow (viii)$.
Pelo Teorema 3.4.2(i), $(viii) \Rightarrow (ix)$. É obvio que $(ix) \Rightarrow (x)$. Pelo Lema 3.5.1, $(x) \Rightarrow (i)$.

■

3.6 Caracterização dos Atratores Globais

Para caracterizar os atratores globais precisamos ver mais alguns conceitos.

Definição 3.6.1 *[5] Uma trajetória completa $\gamma(x)$ através do ponto x é a curva $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, satisfazendo as seguintes condições:*
$x(t) \in X$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = x$, $V_\tau(x(t)) = x(t+\tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\tau \in \mathbb{R}^+$.

O conjunto $\gamma^-(x) := \{x(t)\ ,\ -\infty < t \leq 0\}$ é chamado de semi-trajetória negativa de x.

Observação 3.6.1 *Note que $\gamma(x) = \gamma^-(x) \cup \gamma^+(x)$, pois $x(\tau) = V_\tau(x(0)) = V_\tau(x)$, $\forall\ \tau \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 3.6.2 *[4]*

(a) Uma órbita negativa por x é a curva $\gamma_\phi^-(x) = \{\phi(t)\ ;\ t \in (-\infty, 0]\}$, onde $\phi : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ é uma função tal que $\phi(0) = x$ e para todo $s \leq 0$,

$$V_t\left(\phi(s)\right) = \phi(t+s),\ 0 \leq t \leq -s.$$

(b) A órbita negativa por x, $\sigma^-(x)$, é a união de todas as órbitas negativas por x, isto é,

$$\sigma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$$H(t,x) = \{y \in X\ ;\ \textit{existe uma órbita negativa}\ \phi\ \textit{por}\ x\ \textit{tal que}\ \phi(-t) = y\}.$$

(c) A órbita completa por x é,

$$\sigma(x) = \sigma^-(x) \cup \gamma^+(x).$$

Proposição 3.6.1 *Sejam ϕ uma órbita negativa passando por x e $\{V_t\}_{t \geq 0}$ um semigrupo. Considere $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \longrightarrow X$ definida por*

$$\widetilde{\phi}(s) := \begin{cases} \phi(s),\ s \leq 0 \\ V_s(x),\ s \geq 0 \end{cases}$$

Então, $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x) = \{\widetilde{\phi}(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ é uma trajetória completa passando por x.

Demonstração: Mostraremos que, $V_l\left(\widetilde{\phi}(s)\right) = \widetilde{\phi}(l+s),\ \forall\ s \in \mathbb{R}$ e $l \geq 0$.

Seja $l \geq 0$. Se $s \geq 0$, o resultado é trivial. Seja $s < 0$. Se $0 \leq l \leq -s$, o resultado segue da definição de órbita negativa. Se $l > -s$, então $l = \tau + (-s)$ com $\tau > 0$. Logo, $\tau = l + s$. Temos que,

$$V_l\left(\widetilde{\phi}(s)\right) = V_\tau\left(V_{-s}(\phi(s))\right) = V_\tau(\phi(0)) = V_\tau(x) = \widetilde{\phi}(\tau) = \widetilde{\phi}(l+s).$$

■

Definição 3.6.3 *[4] Dado $B \subset X$ e ϕ uma órbita negativa por x, definimos*

$$\alpha_\phi(x) = \{y \in X\ ;\ y = \lim_{k \to +\infty} \phi(-t_k),\ t_k \longrightarrow +\infty \quad quando \quad k \longrightarrow +\infty\}$$

e

$$\alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\sigma_s^-(B)},$$

onde $\sigma_s^-(B) = \bigcup_{t \geq s} H(t, B)$.

Observação 3.6.2 *[4]*

(i) $\alpha(B) = \{y \in X\ ;$ *existem sequências* $t_k \longrightarrow +\infty$ *quando* $k \longrightarrow +\infty$ *e* $\{y_k\}$, *com* $y_k \in H(t_k, B)$ *e* $y_k \longrightarrow y$ *quando* $k \longrightarrow +\infty\}$.

(ii) $\bigcup\{\alpha_\phi(x)\ ;\ \phi$ *é uma órbita negativa por* $x\} \subset \alpha(x)$.

Em geral, para $x \in X$ arbitrário, uma trajetória completa $\gamma(x)$ pode não existir e mesmo se existir, ela pode não ser única. Porém, vale o seguinte resultado.

Lema 3.6.1 *[5] Seja A um conjunto invariante. Então, para cada $x \in A$, existe uma trajetória completa $\gamma(x)$ através do ponto x que está inteiramente contida em A. Se o semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é pontualmente contínuo, então a trajetória $\gamma(x)$ é uma curva contínua em A. Se os operadores V_t, $t \in \mathbb{R}^+$, são inversíveis em A, então por cada $x \in A$, passa uma única trajetória $\gamma(x)$.*

Demonstração: Seja $x \in A$. Suponhamos que $V_t(A) = A, \forall\ t \geq 0$. Mostremos que existe uma trajetória completa ϕ, através de x inteiramente contida em A.

Seja x_{-n} uma sequência construída da seguinte forma:

$x_0 = x$. Existe $x_{-1} \in A$ tal que $V_1(x_{-1}) = x_0$. Existe $x_{-2} \in A$ tal que $V_1(x_{-2}) = x_{-1}$ e assim por diante. Ou seja, dado $x_{-n} \in A$, existe $x_{-(n+1)} \in A$ tal que $V_1\left(x_{-(n+1)}\right) = x_{-n}$. Note que,

$$V_0\left(x_{-n}\right) = x_{-n}$$

$$V_1\left(x_{-n}\right) = x_{-(n-1)}$$

$$V_2\left(x_{-n}\right) = V_1\left(V_1\left(x_{-n}\right)\right) = V_1\left(x_{-(n-1)}\right) = x_{-(n-2)}$$

$$\vdots$$

$$V_r\left(x_{-n}\right) = x_{-(n-r)}\ ,\ 0 \leq r \leq n$$

$$\vdots$$

$$V_n\left(x_{-n}\right) = x_0.$$

Definamos $\phi : (-\infty, \infty) \longrightarrow A$ por

$$\begin{cases} \phi(-t) = x_{-t}\ ,\ t \in \mathbb{N} \\ \phi(t) = V_t(x_0)\ ,\ t \geq 0 \\ \phi(-t) = V_{-t+n+1}\left(\phi(-(n+1))\right)\ ,\ t \in [n, n+1] \end{cases}$$

Observe que os três itens da definição acima são compatíveis em $t = 0$ e em $-t$, com $t \in \mathbb{N}$, em particular se $-t = -(n+1)$,

$$\phi(-t) = V_{-t+n+1}\left(\phi(-(n+1))\right) = V_0\left(\phi(-(n+1))\right) = \phi(-(n+1)) = x_{-(n+1)}$$

e se $-t = -n$, $\phi(-t) = V_{-t+n+1}\left(\phi(-(n+1))\right) = V_1\left(x_{-(n+1)}\right) = x_{-n}$. Como $\phi(t) \in A$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, concluímos que ϕ está bem definida.

Mostremos, agora, que $V_t(\phi(s)) = \phi(t+s)$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

O caso $s \geq 0$ é trivial pois,

$$V_t(\phi(s)) = V_t\left(V_s(x_0)\right) = V_{t+s}(x_0) = \phi(t+s).$$

Agora, sejam $n, m \in \mathbb{N}$, temos que

$$V_n(\phi(-m)) = V_n(x_{-m}) = \begin{cases} x_{-(m-n)} = \phi(n-m)\ , \quad \text{se} \quad n < m \\ V_{n-m+m}(x_{-m}) = V_{n-m}\left(V_m(x_{-m})\right) \\ \qquad\qquad = V_{n-m}(x_0) = \phi(n-m)\ , \quad \text{se} \quad n \geq m. \end{cases}$$

Suponhamos, agora, que $-s \in [-(n+1), -n]$ e $t \in [0,1]$. Então,

$$V_t(\phi(-s)) = V_t\left(V_{-s+n+1}\left(\phi\left(-(n+1)\right)\right)\right).$$

Suponhamos que $t-s \in [-(n+1), -n]$, então

$$V_t(\phi(-s)) = V_{t-s+(n+1)}(\phi(-(n+1))) = \phi(t-s)$$

e se $t-s \geq -n$

$$\begin{aligned} V_t(\phi(-s)) &= V_{t-s+n+1}(\phi(-(n+1))) = V_{t-s+n}(V_1(\phi(-(n+1)))) \\ &= V_{-(s-t)+n}\left(V_1\left(x_{-(n+1)}\right)\right) = V_{-(s-t)+n}(x_{-n}) = V_{-(s-t)+n}(\phi(-n)). \end{aligned}$$

Afirmação: $s-t \in [n-1, n]$.

De fato, como $t-s \geq -n$ então $s-t \leq n$. Resta mostrar que $s-t \geq n-1$. Como $t \leq 1$, isto implica que $1-t \geq 0$. Visto que $-s \leq -n$, obtemos $s \geq n$. Logo, $s-t+1 \geq n$. Portanto, $s-t \geq n-1$.

Assim, $V_t(\phi(-s)) = V_{-(s-t)+n}(\phi(-n)) = \phi(-(s-t)) = \phi(t-s)$.

Se $t > 1$, existe, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 0$, tal que $n_0 \leq t \leq n_0+1$. Então, $t-n_0 \in [0,1]$. Logo,

$$\begin{aligned} V_t(\phi(-s)) &= V_{n_0}(V_{t-n_0}(\phi(-s))) = V_{n_0}(\phi(t-n_0-s)) \\ &= V_{n_0}(\phi(t-s-n_0)) = V_{n_0-1}(V_1(\phi(t-s-n_0))) \\ &= V_{n_0-1}(\phi(1+(t-s-n_0))) = V_{n_0-1}(\phi(1-n_0+t-s)) \\ &= V_{n_0-2}(V_1(\phi(1-n_0+t-s))) = V_{n_0-2}(\phi(1+(1-n_0+t-s))) \\ &= V_{n_0-2}(\phi(-n_0+2+t-s)) = \cdots = V_0(\phi(t-s)) = \phi(t-s). \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é uma trajetória completa.

Se o semigrupo for pontualmente contínuo, então pelo Lema da Colagem a trajetória é uma curva contínua.

Suponha, agora, que os operadores V_t, $t \in \mathbb{R}^+$, são inversíveis em A. Mostraremos que, para cada $x_0 \in A$, passa uma única trajetória $\gamma(x)$.

De fato, seja $x_0 \in A$. Suponha que existem duas trajetórias completas ϕ e ψ passando por x_0. Então,

$$V_\tau(\phi(t)) = \phi(t+\tau), \ \forall\, \tau \geq 0, \ t \in \mathbb{R}$$

e

$$V_\tau(\psi(t)) = \psi(t+\tau), \ \forall\, \tau \geq 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $t=0$ temos $\phi(\tau) = V_\tau(x_0) = \psi(\tau)$, $\forall\, \tau \geq 0$. Seja $t < 0$. Considere $\tau = -2t > 0$. Temos que

$$\phi(-t) = \phi(t-2t) = \phi(t+\tau) = V_\tau(\phi(t)).$$

Então, $V_\tau^{-1}(\phi(-t)) = \phi(t)$. Visto que $\phi(-t) = \psi(-t)$, então $\phi(t) = V_\tau^{-1}(\psi(-t))$. Visto que, $\psi(-t) = \psi(t-2t) = \psi(t+\tau) = V_\tau(\psi(t))$, então $V_\tau^{-1}(\psi(-t)) = \psi(t)$. Logo, $\phi(t) = V_\tau^{-1}(\psi(-t)) = \psi(t)$. Portanto, $\phi(t) = \psi(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Proposição 3.6.2 *[5] Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{K}$ e suponha que ele é B-dissipativo. Então, o B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$ do Teorema 3.3.2 pode ser caracterizado da seguinte forma:*

(i) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} \omega(B)$;

(ii) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{K\in\mathcal{K}} \omega(K)$;

(iii) *$\mathcal{M}$ é a união de todas as trajetórias completas limitadas em X;*

(iv) *$\mathcal{M}$ é a união de todas as trajetórias completas relativamente compactas em X;*

(v) *$\mathcal{M}$ é o conjunto maximal limitado invariante em X.*

Demonstração:

(i) Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é B-dissipativo, para cada conjunto limitado B, existe $t_0 \geq 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(B) \in \mathcal{B}$. Pelo Teorema 3.3.1$(ii)$, $\omega(B)$ atrai B. Como $\mathcal{M}$ é um B-atrator global, $\mathcal{M}$ atrai B. Pelo Teorema 3.3.1(iv), $\omega(B)$ é o conjunto minimal fechado que atrai B. Logo, $\omega(B) \subset \mathcal{M}$. Como B é arbitrário, temos que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) \subset \mathcal{M}.$$

Agora, sendo $\mathcal{M}$ compacto e invariante, temos pelo Lema 3.1.9 que

$$\omega\left(\mathcal{M}\right) = \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}.$$

Visto que $\mathcal{M}$ é limitado (pois é compacto), temos

$$\mathcal{M} = \omega\left(\mathcal{M}\right) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B).$$

Portanto,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B).$$

(ii) Visto que para cada $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ e $\omega(B)$ são compactos e invariantes, (ii) segue de (i) pois,

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B) = \mathcal{M} = \omega(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \omega(K).$$

(iii) e (iv) Como $\mathcal{M}$ é invariante, pelo Lema 3.6.1, para cada ponto $x \in \mathcal{M}$, passa uma trajetória completa $\gamma(x) \subset \mathcal{M}$. Logo, $\gamma(x)$ é limitada [e relativamente compacta pois, $\overline{\gamma(x)} \subset \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$]. Portanto, $\mathcal{M}$ está contido na união de todas as trajetórias completas limitadas [e relativamente compactas] em X.

Por outro lado, seja $\gamma(x) = \{x(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ uma trajetória completa limitada [relativamente compacta] passando por algum ponto $x = x(0) \in X$.

Afirmação 1: $\gamma(x)$ é invariante.

De fato,

$$V_\tau(\gamma(x)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} V_\tau(x(t)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} x(t+\tau) = \gamma(x),\ \forall\ \tau \geq 0.$$

Afirmação 2: $\overline{\gamma(x)}$ é compacto.

De fato, [no caso da letra (iv) isto é hipótese] seja $T \in \mathbb{R}^+$. Como $\gamma(x)$ é invariante, temos que $\gamma_t^+(\gamma(x)) = \gamma(x) \in \mathcal{B}$, $\forall\ t \geq 0$. Assim,

$$\omega(\gamma(x)) = \bigcap_{t \geq T} \overline{\gamma_t^+(\gamma(x))} = \overline{\gamma(x)}. \tag{3.24}$$

Pelo Teorema 3.3.1(i), $\overline{\gamma(x)} = \omega(\gamma(x))$ é compacto.

Afirmação 3: $\overline{\gamma(x)}$ é invariante.

De fato, seja $y \in B := \overline{\gamma(x)}$. Logo, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \gamma(x)$ tal que $y_n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Logo,

$$V_t(y) = V_t\left(\lim_{n \to +\infty} y_n\right) = \lim_{n \to +\infty} V_t(y_n),\ t \geq 0.$$

Como $\gamma(x)$ é invariante e $\{y_n\} \subset \gamma(x)$, temos que $V_t(y_n) \in \gamma(x)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Logo, $V_t(y) \in B = \overline{\gamma(x)}$. Portanto, $V_t(B) \subset B$, $\forall\ t \geq 0$.

Mostremos, agora, que $B \subset V_t(B)$, para todo $t \geq 0$.

Seja $y \in B := \overline{\gamma(x)}$. Logo, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \gamma(x)$ tal que $y_n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Como $V_t(\gamma(x)) = \gamma(x)$, $\forall\ t \geq 0$, existe uma sequência $\{x_n\} \subset \gamma(x)$ tal que $V_t(x_n) = y_n$. Como $\overline{\gamma(x)}$ é compacto, existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$x_{n_j} \longrightarrow x \in B$ quando $j \longrightarrow +\infty$. Assim,

$$y = \lim_{j\to+\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to+\infty} V_t\left(x_{n_j}\right) = V_t\left(\lim_{j\to+\infty} x_{n_j}\right) = V_t(x),\ t \geq 0.$$

Portanto,

$$B \subset V_t(B),\ \forall\, t \geq 0.$$

Como em (3.24),

$$\omega\left(\overline{\gamma(x)}\right) = \overline{\overline{\gamma(x)}} = \overline{\gamma(x)}.$$

Assim,

$$x \in \gamma(x) \subset B = \overline{\gamma(x)} = \omega\left(\overline{\gamma(x)}\right) \subset \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \omega(K) = \mathcal{M}.$$

(v) Seja A um conjunto limitado e invariante em X. Pelo Lema 3.1.9(ii), $A \subset \overline{A} = \omega(A)$. Logo,

$$A \subset \omega(A) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B) = \mathcal{M}.$$

Portanto, $\mathcal{M}$ é o conjunto maximal limitado invariante em X.

$\blacksquare$

Definição 3.6.4 *[5] O conjunto de todos os pontos estacionários de $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é definido por $Z = \{z \in X\ ;\ z = V_t(z),\ \forall\, t \geq 0\}$. Z também é chamado o conjunto dos pontos de equilíbrio.*

Teorema 3.6.1 *[5] Suponha que o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é de classe $\mathcal{K}$ e $\gamma^+(x) \in \mathcal{B}$ para qualquer $x \in X$. Se para este semigrupo existe uma função contínua $\mathcal{L} : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ estritamente decrescente ao longo de cada $\gamma^+(x)$ (isto é, $\mathcal{L}\left(V_t(x)\right) \searrow$ quando $t \nearrow$) exceto, é claro, nos pontos estacionários, então seu atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}}$ é não vazio e coincide com o conjunto Z de todos os pontos estacionários. Se Z é um conjunto limitado e $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado, então o semigrupo tem um B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$ tendo as propriedades indicadas no Teorema 3.3.2. Ambas as extremidades de uma trajetória completa $\gamma(x) \subset \mathcal{M}$, tendem a Z (quando $t \longrightarrow \pm\infty$, respectivamente). Se X é um espaço de Banach e Z não é conexo, então Z é uma parte própria de $\mathcal{M}$ e o B-atrator global $\mathcal{M}$ consiste de trajetórias completas que ligam pontos de Z.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Pelo Teorema 3.3.1(i) e (ii), $\omega(x)$ é não vazio, compacto e atrai x. Como $\mathcal{L}\left(V_t(x)\right)$ é estritamente decrescente e

$$0 \leq \mathcal{L}\left(V_t(x)\right) \leq \mathcal{L}\left(x\right),\ \forall\, t \geq 0, \tag{3.25}$$

temos que existe $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{L}\left(V_t(x)\right) := l_+(x)$. Pela continuidade de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}\mid_{\omega(x)} \equiv l_+(x) = c$, onde $c \geq 0$ é uma constante e isto implica que $\omega(x) \subset Z$, pois se $z \in \omega(x)$,

$$V_t(z) = V_t\left(\lim_{n \to +\infty} V_{t_n}(x)\right) = \lim_{n \to +\infty} V_{t+t_n}(x) \in \omega(x).$$

Logo, $\mathcal{L}\left(V_t(z)\right) = l_+(x)$ e daí, $l_+(x) = \mathcal{L}\left(V_t(z)\right) \leq \mathcal{L}(z) = l_+(x)$, $\forall\ t \geq 0$. Logo, $V_t(z) = z$, $\forall\, t \geq 0$. Portanto, $z \in Z$.

Assim, x também é atraído por Z. Note que Z é fechado, pois dado $y \in \overline{Z}$, existe uma sequência $\{z_n\} \subset Z$ tal que $z_n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Temos que,

$$V_t(y) = V_t\left(\lim_{n \to +\infty} z_n\right) = \lim_{n \to +\infty} V_t(z_n) = \lim_{n \to +\infty} z_n = y,\ \forall\, t \geq 0.$$

Logo, $y \in Z$.

Pelo Teorema 3.2.2, $\{V_t\}_{t \geq 0}$ tem um único atrator global de pontos minimal fechado $\hat{\mathcal{M}}$. Pela minimalidade de $\hat{\mathcal{M}}$, temos que $\hat{\mathcal{M}} \subset Z$.

Por outro lado, se $z \in Z$, então para t grande

$$z = V_t(z) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\hat{\mathcal{M}}),\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Isto implica que

$$z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{O}_\varepsilon(\hat{\mathcal{M}}) = \overline{\hat{\mathcal{M}}} = \hat{\mathcal{M}}.$$

Portanto, $Z = \hat{\mathcal{M}}$. Como $\omega(x) \subset Z = \hat{\mathcal{M}}$ e $\omega(x)$ é não vazio, temos que $\hat{\mathcal{M}}$ é não vazio.

Suponhamos, agora, que Z é um conjunto limitado e que $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é limitado. Sendo Z limitado, teremos que o semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$ é pontualmente dissipativo ($Z = \hat{\mathcal{M}}$ será um atrator global de pontos limitado para o semigrupo $\{V_t\}_{t \geq 0}$). Então, o Teorema 3.3.2 garante a existência de um B-atrator global minimal fechado $\mathcal{M}$, o qual é compacto e invariante.

Pelo Lema 3.6.1, para cada $x \in \mathcal{M}$, podemos tomar uma trajetória completa $\gamma(x) = \{\phi(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,\ \phi(0) = x\}$, com $\gamma(x) \subset \mathcal{M}$.

Agora, determinaremos seu conjunto α-limite, isto é,

$$\alpha_\phi\left(\gamma(x)\right) := \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma_\tau^-(x)},$$

onde $\gamma_\tau^-(x) := \{\phi(t)\ ,\ t \leq \tau\}$. Este conjunto α-limite, como o $\omega(x)$, é não vazio e invariante e temos que $\phi(t) \longrightarrow \alpha_\phi\left(\gamma(x)\right)$ quando $t \longrightarrow -\infty$.

Afirmação: $\alpha_\phi(\gamma(x)) \subset Z$.

De fato, temos de (3.25) que existe o $\lim_{t\to-\infty} \mathcal{L}(\phi(t)) = l_-(x)$. Pela continuidade de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}\mid_{\alpha_\phi(\gamma(x))} \equiv l_-(x) = k,$$

onde $k \geq 0$ é uma constante.

Se $z \in \alpha_\phi(\gamma(x))$, então existe uma sequência $t_n \longrightarrow -\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$ tal que $z = \lim_{n\to+\infty} \phi(t_n)$. Logo,

$$V_t(z) = V_t\left(\lim_{n\to+\infty} \phi(t_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} V_t(\phi(t_n)) = \lim_{n\to+\infty} \phi(t_n + t) \in \alpha_\phi(\gamma(x)),\ t \geq 0.$$

Logo, $\mathcal{L}(V_t(z)) = l_-(x)$ e daí,

$$l_-(x) = \mathcal{L}(V_t(z)) \leq \mathcal{L}(z) = l_-(x),\ \forall\, t \geq 0.$$

Logo, $z \in Z$. Portanto, $\alpha_\phi(\gamma(x)) \subset Z$. Portanto, podemos dizer que ambas as extremidades das trejetórias $\gamma(x)$ tendem a Z.

Suponhamos, agora, que X é um espaço de Banach e que Z não é conexo. Neste caso, podemos decompor Z como $Z = Z_1 \cup Z_2$, onde Z_1 e Z_2 são conjuntos fechados, disjuntos e não vazios. Como $\mathcal{M}$ é conexo (pois X é Banach), $\mathcal{M}$ contém não somente pontos de Z, mas trajetórias completas ligando pontos de Z. Portanto, Z é menor do que $\mathcal{M}$.

$\blacksquare$

Teorema 3.6.2 *[5] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo contínuo, limitado e de classe $A\mathcal{K}$ e existe uma função contínua $\mathcal{L} : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ estritamente decrescente ao longo de cada $\gamma^+(x)$, exceto nos pontos estacionários, então todas as afirmações do Teorema 3.6.1 são verdadeiras para ele.*

Demonstração: Seja $\{V_t\}_{t\geq 0}$ um semigrupo contínuo, limitado e de classe $A\mathcal{K}$. Como $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é limitado, então para cada $x \in X$, $\gamma^+(x) \in \mathcal{B}$. Pela Proposição 3.3.3, $\omega(x)$ é não vazio, compacto e atrai x.

Agora, o resto da demonstração é completamente análogo à demonstração do Teorema 3.6.1.

$\blacksquare$

Definição 3.6.5 *[4] Um C^0-semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um sistema gradiente, se* *(i) Cada órbita positiva limitada é precompacta;*

(ii) Existe uma função de Lyapunov para o semigrupo $\{V_t\}_{t\geq 0}$, isto é, existe uma função contínua $\mathcal{L} : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com as propriedades

(a) $\mathcal{L}$ é limitada inferiormente;

(b) $\mathcal{L}(x) \longrightarrow +\infty$ quando $\mid x \mid \longrightarrow +\infty$;

(c) $\mathcal{L}\left(V_t(x)\right)$ é estritamente decrescente em $t \in \mathbb{R}^+$ para cada $x \in X$;

(d) Se $\mathcal{L}\left(V_t(x)\right) = \mathcal{L}(x)$ para algum $t > 0$, então x é um ponto de equilíbrio.

Fazendo um procedimento análogo ao que foi feito no Teorema 3.6.1, obtemos o seguinte.

Lema 3.6.2 *[4] Se $\{V_t\}_{t\geq 0}$ é um sistema gradiente, então $\omega(x)$ está contido em Z para cada $x \in X$. Além disso, se ϕ é uma órbita negativa por x e $\gamma_\phi^-(x)$ é precompacta, então $\alpha_\phi(x) \subset Z$.*

Teorema 3.6.3 *[4] Suponha que existe um B-atrator global maximal compacto invariante $\mathcal{M}$ para $\{V_t\}_{t\geq 0}$, então*

$$\mathcal{M} = W^u(Z),$$

onde $W^u(Z) := \{y \in X;$ existe uma órbita negativa ϕ por y e $\phi(-t) \longrightarrow Z$ quando $t \longrightarrow +\infty\}$.

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ é invariante, então pelo Lema 3.6.1, existe uma trajetória completa (em particular, órbita negativa) ϕ por x contida em $\mathcal{M}$. Pelo Lema 3.6.2, $\phi(-t) \longrightarrow \alpha_\phi(x) \subset Z$ quando $t \longrightarrow +\infty$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t(\varepsilon) > 0$ tal que $\phi(-t) \in \mathcal{O}_\varepsilon\left(\alpha_\phi(x)\right)$. Caso contrário, existiria um $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{t_k\}$, $t_k \longrightarrow +\infty$, tal que

$$\phi(-t_k) \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}\left(\alpha_\phi(x)\right).$$

Como $\{\phi(-t_k)\} \subset \mathcal{M} \in \mathcal{K}$, $\phi(-t_k)$ tem uma subsequência convergente para algum ponto de $\alpha_\phi(x)$. Logo, $x \in W^u(Z)$. Portanto, $\mathcal{M} \subset W^u(Z)$.

Por outro lado, seja $x \in W^u(Z)$. Logo, existe uma órbita negativa ϕ por x e

$$\phi(-t) \longrightarrow Z \subset \mathcal{M} \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Assim, dado $\varepsilon_0 > 0$, existe $T_0 \geq 0$ tal que

$$V_t(x) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{M}) \quad \text{e} \quad \phi(-t) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{M}),\ t > T_0. \tag{3.26}$$

Considere

$$\widetilde{\phi}(s) := \begin{cases} \phi(s),\ s \leq 0 \\ V_s(x),\ s \geq 0 \end{cases}$$

Afirmação: $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x)$ é limitada.

De fato, seja $x_0 = \widetilde{\phi}(-T_0)$. Por (3.26), temos que $\gamma^-_{T_0}(x) := \{\widetilde{\phi}(-t),\ t \geq T_0\} \in \mathcal{B}$ e $\gamma^+_{T_0}(x) \in \mathcal{B}$. Temos que, $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x) = \gamma^-_{T_0}(x) \cup \gamma^+(x_0)$. Como $V_{T_0}(x_0) = V_{T_0}\left(\widetilde{\phi}(-T_0)\right) = x$, segue que

$$\gamma^+(x_0) = \gamma^+_{[0,T_0]}(x_0) \cup \gamma^+(x) \in \mathcal{B},$$

pois

$$\gamma^+(x) = \gamma^+_{[0,T_0]}(x) \cup \gamma^+_{T_0}(x) \in \mathcal{B}.$$

($\gamma^+_{[0,T_0]}(x) \in \mathcal{B}$, pela Proposição 3.1.2). O que mostra a afirmação.

Logo, $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x) \subset \mathcal{M}$. ($\mathcal{M}$ atrai $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x)$, pois $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x)$ é limitado e como $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x)$ é invariante, $\gamma_{\widetilde{\phi}}(x) \subset \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$). Em particular, $x \in \mathcal{M}$ (pois $x \in \gamma_{\widetilde{\phi}}(x)$). Portanto, $W^u(Z) \subset \mathcal{M}$.

■

Capítulo 4

Resultados de Compacidade

O objetivo deste capítulo é mostrar que o semigrupo também aparece em outros contextos que não necessariamente visem a existência de atrator global.

4.1 Alguns Resultados Preliminares

Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Um operador é uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$ (conjunto das partes de H). Se para todo $x \in H$, o conjunto Ax contém no máximo um elemento, dizemos que A é unívoco, caso contrário dizemos que A é multívoco. O domínio de A é o conjunto $\mathcal{D}(A) = \{x \in H \; ; \; Ax \neq \emptyset\}$ e a imagem de A é o conjunto $\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in H} Ax$.

Identificaremos A com o seu gráfico em $H \times H$, isto é, $A = \{(x, y) \; ; \; y \in Ax\}$. O operador A^{-1} é o operador cujo gráfico é simétrico ao de A, isto é, $y \in A^{-1}x \Longleftrightarrow x \in Ay$.

O conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão dos gráficos: $A \subset B$ se, e somente se, para todo $x \in H$, $Ax \subset Bx$.

Definição 4.1.1 *[1] Dizemos que um operador A em H é monótono, se para todo x_1 , $x_2 \in \mathcal{D}(A)$,*

$$\langle Ax_1 - Ax_2 \; , \; x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

ou mais precisamente, para todo $y_1 \in Ax_1$ e para todo $y_2 \in Ax_2$,

$$\langle y_1 - y_2 \; , \; x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Definição 4.1.2 *[1] O operador monótono A em H é maximal monótono, se ele não está propriamente contido em qualquer outro operador monótono em H.*

Explicitemos esta definição: A é maximal monótono se, e somente se, A é monótono e, se $(x, y) \in H \times H$ for tal que

$$\langle y - A\xi \ , \ x - \xi \rangle \geq 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{D}(A)$ (ou mais precisamente, $\langle y - \eta \ , \ x - \xi \rangle \geq 0$ para todo $(\xi, \eta) \in A$), então $y \in Ax$.

Definição 4.1.3 *[6] Sejam (M, d) e (N, ρ) espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \longrightarrow N$. O conjunto E diz-se equicontínuo no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $\rho\left(f(x), f(a)\right) < \varepsilon$, seja qual for $f \in E$. O conjunto E chama-se equicontínuo, quando é equicontínuo em todos os pontos de M.*

Definição 4.1.4 *[13] Um subconjunto K em $L^1\left(a, b; X\right)$ é uniformemente integrável se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_E \|f(t)\|_X dt \leq \varepsilon$$

para cada subconjunto mensurável E em $[a, b]$ cuja medida de Lebesgue é menor que $\delta(\varepsilon)$, e uniformemente para $f \in K$.

Observação 4.1.1 *[1] Como $[a, b]$ é compacto, cada subconjunto uniformemente integrável em $L^1\left(a, b; X\right)$ é limitado na norma de $L^1\left(a, b; X\right)$.*

Definição 4.1.5 *[1, 9] Considere o problema de valor inicial (p.v.i):*

$$(P) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

onde $x \in \mathcal{D}(A)$ e $A \subset H \times H$ é possivelmente multívoco.
Seja $T > 0$. Dizemos que uma aplicação $u : [0, T] \longrightarrow H$ é uma solução do p.v.i. (P) se u satisfaz as seguintes condições:

(i) $u \in \mathcal{C}\left([0, T]; H\right)$ *e* $u(0) = x$.

(ii) u *é Lipschitz contínua em* $[0, T]$.

(iii) a inclusão $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$ é satisfeita qtp em $[0, T]$, (ou seja, existe η tal que $\eta(t) \in Au(t)$ qtp e $\frac{du}{dt} + \eta = 0$).

Teorema 4.1.1 *[1] Seja A um operador maximal monótono. Dado $T > 0$, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ o p.v.i*

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

tem uma única solução em $[0, T]$.

Definição 4.1.6 *[1] Seja A um operador em H e $f \in L^1(0, T; H)$. Chamamos de solução forte da inclusão $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, toda função $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ e absolutamente contínua sobre todo compacto de $(0, T)$ tal que $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ e $\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni f(t)$ qtp em $(0, T)$.*

Definição 4.1.7 *[1] Dizemos que $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ é solução fraca da inclusão $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, se existem sequências $f_n \in L^1(0, T; H)$ e $u_n \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ tais que u_n é solução forte da inclusão*

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$$

onde $f_n \longrightarrow f$ em $L^1(0, T; H)$ e $u_n \longrightarrow u$ uniformemente em $[0, T]$.

Teorema 4.1.2 *[1] Seja A um operador maximal monótono em H. Para toda $f \in L^1(0, T; H)$ e todo $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, existe uma solução fraca única, u, da inclusão $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ tal que $u(0) = u_0$.*

Corolário 4.1.1 *[1] Seja A um operador maximal monótono em H e u e v as soluções fracas em $[0, T]$ de*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

respectivamente. Então:

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(s) - v(s)\| + \int_s^t \|f(\tau) - g(\tau)\| d\tau$$

para todo $0 \leq s < t \leq T$.

Teorema 4.1.3 *(Ascoli-Arzelà)[6] Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \longrightarrow N$, onde K é compacto em X e N um espaço normado. A fim de que $E \subset \mathcal{C}(K, N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

(i) E seja equicontínuo;

(ii) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x) := \{f(x);\ f \in E\}$ seja relativamente compacto em N.

Teorema 4.1.4 *(Baras)[13, 9] Se $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ é um operador maximal monótono, A gera um semigrupo compacto, u_0 é um elemento fixo em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, e K é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1(0,T;H)$, então o conjunto $M(K) = \{u^f\ ;\ f \in K\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,T];H)$.*

4.2 Generalização do Teorema de Baras

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos um resultado de compacidade, que é uma adaptação do Teorema de Baras (veja Teorema 4.2.2). Este teorema refere-se às propriedades de compacidade do conjunto de soluções de uma família de equações diferenciais. Naturalmente, assim como outros importantes resultados de compacidade existentes na literatura, este também se apóia no clássico Teorema de Ascoli-Arzelà.

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$(P_{f_n}) \begin{cases} \dfrac{du^n}{dt} + Au^n \ni f_n \\ u^n(0) = u_{0_n} \end{cases}$$

onde A é maximal monótono em um espaço de Hilbert H, $f_n \in K \subset L^1(0,T;H)$ e $u_{0_n} \in \overline{\mathcal{D}(A)}$.

Fazendo f_n e u_{0_n} variar obtemos uma família de problemas e portanto uma família de soluções. Defina $M(K) = \{u^n; u^n$ é a única solução fraca de $(P_{f_n}),$ com $f_n \in K\}$.

Estamos interessados em estabelecer condições para que o conjunto $M(K)$ possua alguma propriedade de compacidade.

Teorema 4.2.1 *[10] Sejam $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, $\{u_{0_n}\} \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$ com $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ e $K = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto uniformemente integrável em $L^1(0,T;H)$. Seja u^n a única solução fraca de (P_{f_n}) em $[0,T]$. Se para cada $t \in [0,T]$, o conjunto $M(K)(t) = \{u^n(t); u^n \in M(K)\}$ é relativamente compacto em H, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,T];H)$.*

Demonstração: Nosso primeiro passo será mostrar que $M(K)$ é equicontínuo em $[0,T]$. Seja $\{V_t; V_t : \overline{\mathcal{D}(A)} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}(A)}, t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por A em $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $u^n(0) = u_{0_n} \longrightarrow u_0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u^n(0) - u_0\| \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{se} \quad n > n(\varepsilon).$$

Por outro lado, para cada $n \in \{1, 2, ..., n(\varepsilon)\}$ existe $\delta_n(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|u^n(t) - u^n(0)\| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad | \ t \ | < \delta_n(\varepsilon)$$

pois u^n é contínua. Seja $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), ..., \delta_n(\varepsilon)\}$. Suponha, agora, que $n > n(\varepsilon)$. Como $V_{(.)}(u_0)$ é contínua na origem, para este ε, existe $\widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|V_t(u_0) - u_0\| < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{sempre que} \quad | \ t \ | < \widetilde{\delta}(\varepsilon).$$

Além disso, como K é uniformemente integrável, existe $\widetilde{\widetilde{\delta}}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_0^t \|f_n(s)\| ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad | \ t \ | < \widetilde{\widetilde{\delta}}(\varepsilon),$$

uniformemente para $f_n \in K$.

Seja $\delta'(\varepsilon) = \min\{\widetilde{\delta}(\varepsilon), \widetilde{\widetilde{\delta}}(\varepsilon)\}$. Então para cada $t \in [0, T]$, tal que $| \ t \ | < \delta'(\varepsilon)$ temos, pelo Corolário 4.1.1

$$\begin{aligned}
\|u^n(t) - u^n(0)\| &= \|u^n(t) - u_{0_n}\| \\
&\leq \|u^n(t) - V_t\left(u_{0_n}\right)\| + \|V_t\left(u_{0_n}\right) - u_{0_n}\| \\
&\leq \|V_t\left(u_{0_n}\right) - u_{0_n}\| + \textstyle\int_0^t \|f_n(s)\| ds \\
&\leq \|V_t\left(u_{0_n}\right) - V_t(u_0)\| + \|V_t(u_0) - u_0\| \\
&+ \|u_{0_n} - u_0\| + \textstyle\int_0^t \|f_n(s)\| ds \\
&\leq 2\|u_{0_n} - u_0\| + \|V_t(u_0) - u_0\| \\
&+ \textstyle\int_0^t \|f_n(s)\| ds < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\|u^n(t) - u^n(0)\| < \varepsilon$ sempre que $| \ t \ | < \delta''(\varepsilon) = \min\{\delta(\varepsilon), \delta'(\varepsilon)\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $M(K)$ é equicontínuo em $t = 0$.

Agora, sejam $t \in (0, T)$ e $\varepsilon > 0$. Escolha $\lambda > 0$ tal que $t - \lambda \in [0, T]$, e, em adição

$$\int_E \|f_n(s)\| ds \leq \frac{\varepsilon}{20} \tag{4.1}$$

para cada subconjunto mensurável E em $[0, T]$ cuja medida de Lebesgue $m(E)$ é menor do que ou igual a 2λ e uniformemente para $f_n \in K$. Como $t - \lambda \in [0, T]$, então $M(K)(t - \lambda)$ é relativamente compacto em H. Logo, $M(K)(t - \lambda)$ é precompacto em H. Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma família finita $\{f_1, f_2, ..., f_{m(\varepsilon)}\}$ em K com a propriedade que, dado $f_n \in K$, existe $i \in \{1, 2, ..., m(\varepsilon)\}$ tal que

$$\|u^n(t-\lambda) - u^i(t-\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2}$$

Note que a família $\{u^1, u^2, ..., u^{m(\varepsilon)}\}$ é equicontínua em t, pois ela é finita. Então, segue da continuidade de u^i que existe $0 < \delta_1(\varepsilon) \in (0, \lambda)$ tal que

$$\|u^i(t+h) - u^i(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.3}$$

para cada $i \in \{1, 2, ..., m(\varepsilon)\}$ e $h \in \mathbb{R}$ com $| h |\leq \delta_1(\varepsilon)$, e $t + h \in [0, T]$.

Por outro lado, para toda $f_n \in K$ e $h \in \mathbb{R}$ com $t + h \in [0, T]$, temos pelo Corolário 4.1.1,

$$\begin{aligned}
\|u^n(t+h) - u^n(t)\| &\leq \|u^n(t+h) - u^i(t+h)\| \\
&+ \|u^i(t+h) - u^i(t)\| \\
&+ \|u^n(t) - u^i(t)\| \;\leq\; 2\|u^n(t-\lambda) - u^i(t-\lambda)\| \\
&+ \|u^i(t+h) - u^i(t)\| + \textstyle\int_{t-\lambda}^{t+h} \|f_n(s) - f_i(s)\|ds \\
&+ \textstyle\int_{t-\lambda}^{t} \|f_n(s) - f_i(s)\|ds \\
&\leq 2\|u^n(t-\lambda) - u^i(t-\lambda)\| + \|u^i(t+h) - u^i(t)\| \\
&+ \textstyle\int_{t-\lambda}^{t+h} (\|f_n(s)\| + \|f_i(s)\|)\, ds \\
&+ \textstyle\int_{t-\lambda}^{t} (\|f_n(s)\| + \|f_i(s)\|)\, ds \\
&= 2\|u^n(t-\lambda) - u^i(t-\lambda)\| + \|u^i(t+h) - u^i(t)\| \\
&+ \textstyle\int_{t-\lambda}^{t+h} \|f_n(s)\|ds + \int_{t-\lambda}^{t+h} \|f_i(s)\|ds \\
&+ \textstyle\int_{t-\lambda}^{t} \|f_n(s)\|ds + \int_{t-\lambda}^{t} \|f_i(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Logo, se $0 < h < \min\{\delta_1(\varepsilon), \lambda\}$ e $t + h \in [0, T]$, temos por (4.1), (4.2) e (4.3) que

$$\|u^n(t+h) - u^n(t)\| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 4 \cdot \frac{\varepsilon}{20} = \frac{19}{20}\varepsilon < \varepsilon.$$

Portanto, $\|u^n(t+h) - u^n(t)\| < \varepsilon$ uniformemente para $f_n \in K$, o que mostra que $M(K)$ é equicontínuo em $(0, T)$.

No caso $t = T$, basta tomar $h < 0$ e tudo segue de forma análoga ao caso $t \in (0, T)$.

Como para cada $t \in [0, T]$, o conjunto $M(K)(t) = \{u^n(t) \; ; \; u^n \in M(K)\}$ é relativamente compacto em H. Então, pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0, T]; H)$.

■

Lema 4.2.1 *[13, 9] Sejam $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ um operador maximal monótono, $\{V_t;\ V_t : \overline{\mathcal{D}(A)} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}(A)},\ t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por A em $\overline{\mathcal{D}(A)}$, $f \in L^1(0,T;H)$, $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ e u a única solução do seguinte p.v.i*

$$(P_f) \begin{cases} \dfrac{du^f}{dt} + Au^f \ni f \\ u^f(0) = u_0 \end{cases}$$

em $[0,T]$ correspondente a f e a u_0. Então, para cada $t \in (0,T]$, $s \in [0,T)$ e $h > 0$ com $t-h \in [0,T]$, $s+h \in [0,T]$, temos

$$\|V_h(u(t-h)) - u(t)\| \leq \int_{t-h}^{t} \|f(s)\| ds$$

e

$$\|V_h(u(s)) - u(s+t)\| \leq \int_{s}^{t+h} \|f(s)\| ds.$$

Teorema 4.2.2 *[10] Se $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow \mathcal{P}(H)$ é um operador maximal monótono, A gera um semigrupo compacto $\{V_s\}_{s\geq 0}$, $\{u_{0_n}\} \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$ com $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ e $K = \{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto uniformemente integrável em $L^1(0,T;H)$, então o conjunto $M(K)$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,T];H)$.*

Demonstração: Devemos mostrar que para cada $t \in [0,T]$ o conjunto

$$M(K)(t) = \{u^n(t)\ ;\ u^n \in M(K)\}$$

é relativamente compacto em H, e logo após usar o Teorema 4.2.1.

Seja $t \in (0,T]$. Tome $h > 0$ tal que $t-h \in [0,T]$. Pelo Lema 4.2.1, temos que

$$\|V_h(u^n(t-h)) - u^n(t)\| \leq \int_{t-h}^{t} \|f_n(\tau)\| d\tau, \tag{4.4}$$

para cada $f_n \in K$. Defina o operador $T_h : M(K)(t) \longrightarrow H$ por

$$T_h(u^n(t)) = V_h(u^n(t-h)),$$

para cada $u^n(t) \in M(K)(t)$. Como A gera um semigrupo compacto, segue que V_h é um operador compacto. Além disso, $M(K)(\tau)$, $\tau \in [0,T]$, é limitado em H.

De fato, como $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u_{0_n}\|_H \leq c,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Seja $u^n(\tau) \in M(K)(\tau)$. Então,

$$\begin{aligned}
\|u^n(\tau)\| &\leq \|u^n(0)\| + \textstyle\int_0^\tau \|f_n(s)\|ds \\
&= \|u_{0_n}\| + \textstyle\int_0^\tau \|f_n(s)\|ds \\
&< c + \textstyle\int_0^T \|f_n(s)\|ds \\
&= c \ + \|f_n\|_{L^1(0,T;H)} \leq c_1.
\end{aligned}$$

Em particular, $M(K)(t-h)$ é limitado em H. Logo, $V_h\left(M(K)(t-h)\right)$ é relativamente compacto em H. Isto mostra que os operadores T_h levam limitados em relativamente compactos. Por (4.4),

$$\|T_h\left(u^n(t)\right) - I\left(u^n(t)\right)\| = \|V_h\left(u^n(t-h)\right) - I\left(u^n(t)\right)\| \leq \int_{t-h}^t \|f_n(\tau)\|d\tau$$

Isto mostra que $\lim_{h\to 0} T_h = I$, uniformemente em $M(K)(t)$.
Como limite de operadores compactos é compacto, temos que

$$I : M(K)(t) \longrightarrow M(K)(t)$$

é um operador compacto. Visto que $M(K)(t)$ é limitado, segue que $M(K)(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in (0,T]$. Note que, $M(K)(0) = \{u_{0_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, pois u_{0_n} é convergente. Portanto, $M(K)$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}\left([0,T];H\right)$.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] Brézis, H., *Operateurs maxímaux monotones: et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holand Publishing Company, Amsterdam, 1973.

[2] Cholewa, J.W., Dotko, T., *Global attractors in abstract parabolic problems.* Cambridge University Press, 2000.

[3] Conway, J.B., *A course in functional analysis.* Springer-Verlag. New York, 1990.

[4] Hale, J.K., *Asymptotic behavior of dissipative systems.* Providence, RI:AMS, 1988.

[5] Ladyzhenskaya, O., *Attractors for semigroup and evolution equations.* Cambridge University Press, 1991.

[6] Lima, E. L., *Espaços métricos.* Projeto Euclides, 4ª edição, IMPA. Rio de Janeiro, 2005.

[7] Liu, De., *The critical forms of the attractors for semigroups and the existence of critical attractors.* Proc. R. Soc. Lond. Ser. A v.454, p.2157-2171, 1998.

[8] Munkres, J.R., *Topology.* Prentice Hall, 2ª edição. 2000.

[9] Pereira, A.C., *Sistemas de inclusões diferenciais governadas pelo p-laplaciano.* Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSCar, 2004.

[10] Pereira, A.C., Simsen, J., *Sistemas de inclusões diferenciais.* 59º Seminário Brasileiro de Análise, Ribeirão Preto, 2004.

[11] Taylor, A.E., *General theory of functions and integration.* Dover Science, 1985.

[12] Temam, R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[13] Vrabie, I.I., *Compactness methods for nonlinear evolutions.* Second Editon, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, New York, 1995.