

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

ESTUDO DO PROBLEMA FOCO-CENTRO,  
GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES

**Warley Ferreira da Cunha**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

ITAJUBÁ, 29 DE FEVEREIRO DE 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

ESTUDO DO PROBLEMA FOCO-CENTRO,  
GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES

**Warley Ferreira da Cunha**

**Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

29 DE FEVEREIRO DE 2012

*Aos meus pais, Washington Luis da Cunha e  
Vilma Ferreira da Cunha (in memoriam).*

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus, nosso eterno Pai, por todas as bênçãos derramadas sobre minha vida. *“Felizes são os que não viram, mas mesmo assim creram”*—João, 20:29.

Ao meu orientador, Luis Fernando, pelo incentivo, confiança e constante aprendizado. A sua experiência como pesquisador e professor tornou possível a realização deste trabalho e muito contribuiu para a minha formação matemática e cultural.

À minha família pelos exemplos de conduta e superação que me inspiram desde a mais tenra idade. Em especial, aos meus pais Washington e Vilma (in memoriam), meus irmãos Kleriston e Darlan, divido com vocês os méritos desta conquista.

À minha namorada Ariane e família, por todo amor verdadeiro, apoio e incentivo. Cheiro, desculpas pela atenção que não lhe foi devidamente dada, pelo tempo de ausência e pelas datas que não pudemos comemorar.

Aos grandes amigos, Adriana (a Doida) e Fernando (Beira-Mar). A amizade sincera, o companheirismo e os nossos estudos muito contribuíram para concluir mais esta etapa.

Aos professores e colegas da UNIFEI/ICE, em especial, à Prof. Mariza, Prof. Fábio e à Prof. Márcia, pela competência, simplicidade e ensinamentos. E, não poderia esquecer de agradecer ao Coordenador do Programa de Mestrado Prof. Fabrício e a secretária Regina, os quais sempre nos atenderam com presteza e competência.

Aos amigos e colegas da E. E. Joseph Hein e UNIMONTES. O incentivo e a ajuda de muitos destes colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

À Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais pelo apoio e incentivo financeiro.

Aos amigos e familiares que, por mensagens ou telefonemas, tornaram meus dias mais alegres durante a execução deste trabalho. Em especial, Cláudia, Miltoninho, Vânia Ávila, Noely, Cláudio(Maozão), Rômulo(Garanhão), Francisco(Chiquim), Renato, Lidiane, João Vithor, Gustavo, Julinha, Vanúbia, Vanessa, Vinha, Marina, Maíra, Renata, Meirinha, Roberta, Michele, Henrique e as tias queridas Vilêda, Vânia, Didi e Noeme.

Enfim, aos amigos e demais familiares que direta ou indiretamente contribuíram para este sonho, meus agradecimentos.

Obrigado!

Warley

“Se não existissem os erros, a humanidade jamais  
saberia que a perfeição é Divina.”

Autor desconhecido.

# Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar e resolver o Problema Foco–Centro para alguns sistemas de equações diferenciais definidos por campos vetoriais quadráticos em  $\mathbb{R}^3$ . Resolveremos tal problema por duas maneiras distintas, mas equivalentes: em que a existência de superfícies algébricas invariantes e múltiplos de Jacobi inversos analíticos confirmam a presença de centros sobre uma variedade central.

**Palavras–chave:** Campos vetoriais quadráticos em  $\mathbb{R}^3$ , problema foco–centro, superfícies algébricas invariantes, múltiplos de Jacobi inversos, variedade central.

# Abstract

The main goal of this work is the study and resolve of the Center–Focus Problem for some systems defined by quadratic vector fields in  $\mathbb{R}^3$ . We solve this problem by two different ways: in which existence of invariant algebraic surfaces and analytic inverse Jacobi multipliers confirm the presence of centers on a center manifold.

**Keywords:** Quadratic vector fields in  $\mathbb{R}^3$ , center–focus problem, invariant algebraic surface, inverse Jacobi multipliers, center manifold.

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Lista de Figuras	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Estrutura da Dissertação . . . . .	4
<b>2 Fundamentos da Teoria Qualitativa dos Sitemas Diferenciais e o Problema Foco–Centro</b>	<b>7</b>
2.1 Preliminares . . . . .	7
2.2 Elementos da Teoria Qualitativa . . . . .	9
2.3 Pontos de Equilíbrio do Tipo Hopf . . . . .	16
2.4 O Problema Foco–Centro no Plano . . . . .	20
2.5 O Problema Foco–Centro Sobre uma Variedade Central em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Centros Sobre uma Variedade Central no Sistema de Lü</b>	<b>27</b>
3.1	Estabilidade e Bifurcações de Hopf no Sistema de Lü . . . . .	28
3.2	Centros Sobre uma Variedade Central . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Centros Sobre uma Variedade Central no Sistema Quadrático Obtido de uma Equação Diferencial Escalar de Terceira Ordem</b>	<b>49</b>
4.1	Análise Linear do Sistema . . . . .	50
4.1.1	Análise Linear em $E_0$ . . . . .	52
4.1.2	Análise Linear em $E_1$ . . . . .	53
4.2	Bifurcações de Hopf do Sistema (4.4) . . . . .	54
4.2.1	Análise das Bifurcações de Hopf para $E_0$ . . . . .	54
4.2.2	Análise das Bifurcações de Hopf para $E_1$ . . . . .	59
4.3	Centros Sobre uma Variedade Central . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>76</b>

# Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Teorema de Hartman–Grobman. . . . .	10
2.2	Variedade central como um gráfico de $z = V(x, y)$ . . . . .	20
3.1	Projeção da superfície de Hopf $\mathcal{S}$ e as regiões $\mathcal{S}_i$ e $\mathcal{U}_i$ , $i = 1, 2, 3$ sobre o plano $ab$ . Figura proveniente da referência bibliográfica [23]. . . . .	33
3.2	Diagrama de bifurcação do sistema (3.1) para o ponto típico $P_1$ sobre $\mathcal{C}_1$ . Figura proveniente da referência [23]. . . . .	34
3.3	Diagrama de bifurcação do sistema (3.1) para o ponto típico $P_2$ sobre $\mathcal{C}_1$ . Figura proveniente da referência [23]. . . . .	34
3.4	Retrato de fase do sistema (3.1) próximo de $\mathcal{Q}_+$ . A figura sugere que $\mathcal{Q}_+$ é um centro para o fluxo do sistema (3.1) restrito a uma variedade central. Figura proveniente da referência [23]. . . . .	35
3.5	Retrato de fase sobre a superfície regrada invariante, a qual contém a variedade central em $\mathcal{Q}_+$ e $\mathcal{Q}_-$ . Figura proveniente da referência [22]. . . . .	40
4.1	A superfície de Hopf $\mathcal{H}_{00} = \mathcal{H}_0 \cap \{a_1 = 0\}$ para $E_0$ , os conjuntos $\mathcal{H}_{01}, \mathcal{H}_{02}, \mathcal{H}_{03}$ e as curvas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ . Figura proveniente de [9]. . . . .	57
4.2	A superfície de Hopf $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H}_1 \cap \{a_0 = 0\}$ para $E_1$ , os conjuntos $\mathcal{H}_{11}, \mathcal{H}_{12}, \mathcal{H}_{13}, \mathcal{H}_{14}$ e as curvas $\mathcal{L}_3$ e $\mathcal{L}_4$ . Figura proveniente de [9]. . . . .	62

4.3	Retrato de fase do sistema (4.11). O equilíbrio $E_0$ é um centro, enquanto o equilíbrio $E_1$ é uma sela. Note o laço homoclínico em $E_1$ limitando a região definida do centro. . . . .	66
4.4	Retrato de fase do sistema definido por (4.10) sobre $\mathcal{A}_{b_0}$ numa vizinhança do equilíbrio $E_0$ . . . . .	67
4.5	Retrato de fase do sistema definido por (4.13) sobre $\mathcal{A}_{a_1}$ numa vizinhança do equilíbrio $\bar{E}_1$ . . . . .	70

# Capítulo 1

## Introdução

Utilizaremos indistintamente os símbolos  $\dot{x}$  ou  $x'$  para as derivadas da função  $x$  com relação à variável  $t$ . O mesmo ocorrerá para as derivadas das demais funções que aparecerão no decorrer desta dissertação. Usaremos indiferentemente os termos: ponto de equilíbrio, ponto singular ou singularidade.

### 1.1 Motivação

Um dos problemas clássicos da Teoria Qualitativa dos Sistemas Diferenciais Analíticos Planares

$$\dot{u} = f(u), \tag{1.1}$$

em que  $u = (x, y)$ ,  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é a caracterização do retrato de fase local próximo do ponto singular isolado  $u_0 \in \mathcal{U}$ , ou seja,  $f(u_0) = 0$ . Usando a técnica de blow-up [11], este problema pode ser resolvido exceto quando a singularidade é monodrômica, isto é, as soluções da equação diferencial giram em torno do ponto singular. Il'yashenko em [16] e Écalle em [13] provaram que um ponto monodrômico de um sistema analítico deve ser um foco ou um centro.

O caso de monodromia mais simples corresponde àquele em que a matriz Jacobiana  $Df(u_0)$  do campo vetorial  $f$  calculada no ponto singular  $u_0$  possui autovalores imaginários puros não nulos. Sob estas hipóteses, queremos saber: *Sob quais condições podemos concluir que o ponto singular é um centro para o sistema não-linear?*

Notemos que, neste caso, o equilíbrio é não hiperbólico e, portanto, o sistema linearizado não descreve necessariamente o comportamento do sistema não-linear próximo do equilíbrio.

O Problema Foco-Centro (não degenerado) é, sob as hipóteses acima, decidirmos se o equilíbrio, o qual sem perda de generalidade pode ser suposto na origem, é um foco (repulsor ou atrator) ou um centro.

Este problema foi parcialmente resolvido por Poincaré e Lyapunov utilizando uma função de Lyapunov  $\mathcal{L}$  da forma

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

definida numa vizinhança da origem, onde os pontos denotam termos de ordem superiores aos quadráticos. Sabemos, veja [6], que a função  $\mathcal{L}$  pode ser construída tal que  $\dot{\mathcal{L}}$ , sua taxa de variação ao longo das trajetórias, é da forma

$$\dot{\mathcal{L}} = \eta_2(x^2 + y^2) + \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \dots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \dots,$$

onde os coeficientes  $\eta_{2k}$  são chamados *valores focais* e são funções polinomiais nos coeficientes do sistema. Se  $\eta_{2k} = 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , mas  $\eta_{2k+2} \neq 0$ , então a estabilidade da singularidade na origem é determinada: se  $\eta_{2k+2} < 0$ , então a singularidade é assintoticamente estável; se  $\eta_{2k+2} > 0$ , a singularidade é instável. Este processo é puramente algébrico, e se após um número finito de etapas determinarmos um valor focal não nulo, então poderemos construir uma função de Lyapunov polinomial para o sistema (1.1), e assim a usarmos para determinar a estabilidade do ponto singular na origem.

*Mas, o que acontece se todos os valores focais forem nulos?*

Esta é uma condição necessária e suficiente para se ter um centro. Mais precisamente, o Teorema do Centro de Lyapunov garante que, se o campo vetorial associado ao sistema (1.1) é analítico e  $\eta_{2k} = 0$ , para  $k = 1, \dots, \infty$ , então a origem é um centro. Neste caso, existe uma *integral primeira analítica* definida numa vizinhança da origem. Por esta razão, tais sistemas são chamados *integráveis*. Como  $\eta_{2k}$  é relevante somente quando  $\eta_{2j} = 0$  para todo  $j < k$ , tomamos  $\eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{2k-2} = 0$  nas expressões de  $\eta_{2k}$ . As quantidades obtidas dessa maneira são chamadas de *coeficientes de Lyapunov* ou *constantes de Lyapunov*, e serão denotadas por  $l_k = \eta_{2k+2}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Mas, a priori, não sabemos quantas destas constantes de Lyapunov precisam ser calculadas para garantir que o sistema possua um centro, com exceção de alguns casos específicos, embora saibamos que este número é finito devido ao Teorema da Base de Hilbert.

O Problema Foco–Centro Planar é completamente compreendido somente no caso de campos quadráticos devido às contribuições sucessivas de H. Dulac [10], W. Kapteyn [17], N. Bautin [1], e outros. Em 1939, usando a forma normal de Kapteyn, N. Bautin conseguiu exibir explicitamente um número finito de condições algébricas necessárias e suficientes para que o ponto de equilíbrio seja um centro.

Portanto, não existem algoritmos eficientes para responder esta questão e geralmente a condição suficiente para existência de um centro baseia-se nas propriedades geométricas e analíticas do sistema, tais como a simetria ou a existência de uma integral primeira analítica próximo da singularidade.

A existência de uma integral primeira pode ser usada para determinar o retrato de fase local do ponto singular isolado  $u_0$ , e em particular caracterizar quando um ponto singular monodrômico é um centro ou um foco. Neste sentido, seria interessante sabermos quando um ponto singular monodrômico é integrável, uma vez que, em tal caso, ele é um centro.

Para sistemas diferenciais analíticos em  $\mathbb{R}^3$ , o Problema Foco–Centro é um problema ainda em aberto, exceto para alguns casos específicos. Mais precisamente, dado um sistema

analítico de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^3$

$$\dot{u} = f(u),$$

em que  $u = (x, y, z)$  e  $f : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , suponha, sem perda de generalidade, que a origem  $(0, 0, 0)$  seja um ponto singular isolado. Além disso, suponha que a matriz Jacobiana calculada na origem tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas.

O Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$  é, sob estas hipóteses, decidir se a origem é um foco ou um centro para o fluxo local deste sistema numa vizinhança da origem restrito a uma variedade central local. Assim, se o campo vetorial associado a tal sistema puder ser definido sobre uma variedade invariante, então seu estudo pode ser reduzido em uma dimensão. Portanto, uma questão natural é: *Dado um campo vetorial sobre uma variedade central, como identificar se este campo vetorial possui uma integral primeira?*

Até hoje esta questão, em geral, ainda não possui uma boa resposta.

Nesta dissertação, trataremos do Problema Foco–Centro para certos campos quadráticos em  $\mathbb{R}^3$ . Confirmaremos a presença de centros sobre uma variedade central. Ou seja, mostraremos por maneiras distintas, mas equivalentes, que os equilíbrios correspondentes são centros não-lineares para os fluxos destes sistemas restritos a uma variedade central local, com algumas restrições nos valores dos parâmetros.

## 1.2 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada como segue:

✓ **CAPÍTULO 2:** Apresentaremos neste capítulo um breve resumo da Teoria Qualitativa dos Sistemas Diferenciais, auxiliando-nos na compreensão do Problema Foco–Centro sobre uma variedade central em  $\mathbb{R}^3$ , o qual também será introduzido neste capítulo.

✓CAPÍTULO 3: Existem alguns sistemas quadráticos caóticos de grande importância que estão intimamente relacionados com o sistema de Lorenz [7], em particular o sistema de Lü,

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases}$$

em que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  são parâmetros reais. Ao longo do últimos anos, foram realizadas algumas investigações e estudos detalhados deste sistema. Por exemplo, o comportamento dinâmico local e global, características do sistema, as bifurcações, as rotas para caos, e outros tópicos relacionados.

Apesar da simplicidade deste sistema, sua dinâmica é bastante complexa. Até agora, seu comportamento dinâmico não foi totalmente compreendido. Para simplificar o problema, muitas vezes consideramos suas superfícies algébricas invariantes sob certas situações. A existência de tais superfícies permite-nos compreender a dinâmica do sistema em todo o espaço através da investigação da dinâmica sobre elas.

Neste capítulo, serão discutidos resultados sobre a existência de centros para o fluxo do sistema de Lü restrito a uma variedade central local de certos equilíbrios isolados.

✓CAPÍTULO 4: Estudaremos a dinâmica não-linear de um sistema quadrático no espaço tridimensional

$$\begin{cases} x' = P(x, y, z) = y, \\ y' = Q(x, y, z) = z, \\ z' = R(x, y, z) = -((a_1x + a_0)z + (b_1x + b_0)y + c_2x^2 + c_1x + c_0), \end{cases}$$

em que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^7$ ,  $c_2 \neq 0$ , são parâmetros reais. O mesmo foi obtido a partir das mudanças de variáveis  $y = x'$  e  $z = x''$

na equação diferencial escalar de terceira ordem,

$$x''' + f(x)x'' + g(x)x' + h(x) = 0,$$

com  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad g(x) = b_1x + b_0, \quad h(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

e  $a_1, a_0, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \neq 0$ .

Mais precisamente, estudamos a estabilidade dos equilíbrios  $E_0$  e  $E_1$  deste sistema quadrático em  $\mathbb{R}^3$  sobre uma variedade central. Daremos respostas afirmativas às questões relacionadas ao Problema Foco–Centro formulado em [9], confirmando a presença de centros para o fluxo do sistema restrito a uma variedade central local [8]. Ao final deste capítulo, apresentaremos outras soluções equivalentes para este problema baseadas na existência de múltiplos de Jacobi inversos analíticos [5].

✓ **CAPÍTULO 5:** Neste capítulo, ressaltaremos apenas algumas sugestões para trabalhos futuros, uma vez que o Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$  é um problema ainda em aberto, exceto para um número crescente de exemplos explícitos.

# Capítulo 2

## Fundamentos da Teoria Qualitativa dos Sistemas Diferenciais e o Problema Foco–Centro

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e teoremas sobre a Teoria Qualitativa dos Sistemas Diferenciais Polinomiais necessários para a compreensão desta dissertação. As definições e os teoremas que apresentaremos no corrente capítulo foram baseados em [6], [12], [18] e [19].

### 2.1 Preliminares

**Definição 2.1.1** *Um sistema dinâmico é uma terna  $\{T, X, \varphi^t\}$ , onde  $T$  é um conjunto ordenado de tempo,  $X$  é um espaço de estado e  $\varphi^t : X \rightarrow X$  é uma família de operadores de evolução parametrizados por  $t \in T$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- 1)  $\varphi^0 = id$ , onde  $id$  é a função identidade em  $X$ ,  $id(x) = x$ , para todo  $x \in X$ ;
- 2)  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ , isto é,  $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$ , para todo  $x \in X$  e para todos  $t, s \in T$ , tal

que ambos os membros desta equação estejam definidos.

**Definição 2.1.2** A *órbita* por  $x_0$

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0, t \in T\},$$

é um subconjunto ordenado do espaço de estados  $X$  com a ordem induzida pelo conjunto de tempo  $T$ .

**Definição 2.1.3** Um ponto  $x_0 \in X$  é chamado de **equilíbrio** (ou singular) se

$$\varphi^t x_0 = x_0,$$

para todo  $t \in T$ .

**Definição 2.1.4** Um **ciclo** (ou uma órbita fechada) é uma órbita periódica  $L_0$ , ou seja, uma órbita de não equilíbrio de tal forma que, para cada ponto  $x_0 \in L_0$ ,

$$\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0,$$

para algum  $T_0 > 0$ , para todo  $t \in T$ .

**Definição 2.1.5** Uma órbita fechada isolada no conjunto de todos os ciclos é chamada um **ciclo limite**.

**Definição 2.1.6** Um **conjunto invariante** de um sistema dinâmico  $\{T, X, \varphi^t\}$  é um subconjunto  $\mathcal{S} \subset X$  tal que  $x_0 \in \mathcal{S}$  implica que  $\varphi^t x_0 \in \mathcal{S}$  para todo  $t \in T$ . Ou seja, a órbita que passa por  $x_0 \in \mathcal{S}$  permanece em  $\mathcal{S}$ . E ainda,  $\mathcal{S}$  é chamada **variedade invariante**, se  $\mathcal{S}$  é uma variedade.

## 2.2 Elementos da Teoria Qualitativa

Como veremos adiante, nosso Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$  pode ser reduzido ao Problema Foco–Centro Planar, uma vez que os campos vetoriais associados aos sistemas estudados, encontram-se restritos a uma variedade central. Diante disto, apresentaremos nesta seção alguns resultados necessários em  $\mathbb{R}^3$ , e quando o campo vetorial estiver restrito à variedade central, direcionaremos aos resultados em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.2.1** *Consideremos o sistema de equações diferenciais*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

em que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é suave, ou seja,  $C^\infty$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio deste sistema. O ponto de equilíbrio  $x_0$  do sistema (2.1) é dito ser **hiperbólico** se a matriz Jacobiana  $A = Df(x_0)$  possuir todos os autovalores com partes reais diferentes de zero. Se a parte real de algum autovalor for nula o equilíbrio é dito ser não hiperbólico.

**Definição 2.2.2** *Um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$  do sistema (2.1) é dito ser um **foco**, se a matriz Jacobiana  $A = Df(x_0)$  possuir 2 autovalores complexos conjugados com partes reais não nulas. A estabilidade do foco é dada pelo sinal da parte real destes autovalores, se for negativa temos que  $x_0$  é um **foco atrator**, se a parte real for positiva temos que  $x_0$  é um **foco repulsor**.*

**Definição 2.2.3** *Um ponto de equilíbrio  $x_0$  do sistema (2.1) é um **foco fraco**, ou simplesmente um **foco**, se for localmente conjugado a um foco hiperbólico.*

**Definição 2.2.4** *Um ponto de equilíbrio  $x_0$  do sistema (2.1) é dito ser um **centro** se existir uma vizinhança  $\mathcal{U}_{x_0}$  de  $x_0$  totalmente preenchida por órbitas fechadas. Uma condição necessária para isso, mas não suficiente, é a matriz Jacobiana  $A = Df(x_0)$  possuir um par de autovalores imaginários puros e não nulos.*

**Teorema 2.2.1 (Hartman–Grobman)** *Consideremos o sistema  $\dot{x} = f(x)$  com  $f$  suave, ou seja,  $C^\infty$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  como ponto de equilíbrio deste sistema. Consideremos também que este ponto de equilíbrio seja hiperbólico. Então, existem vizinhanças  $V$  de  $x_0$  e  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\dot{x} = f(x)$  (restrito a  $V$ ) é topologicamente conjugado a  $\dot{x} = Df(x_0)x$ , onde  $Df(x_0)$  representa a matriz Jacobiana aplicada no ponto de equilíbrio  $x_0$ .*

A demonstração deste teorema encontra-se em [27].

Uma ilustração do teorema acima pode ser vista na Figura 2.1.

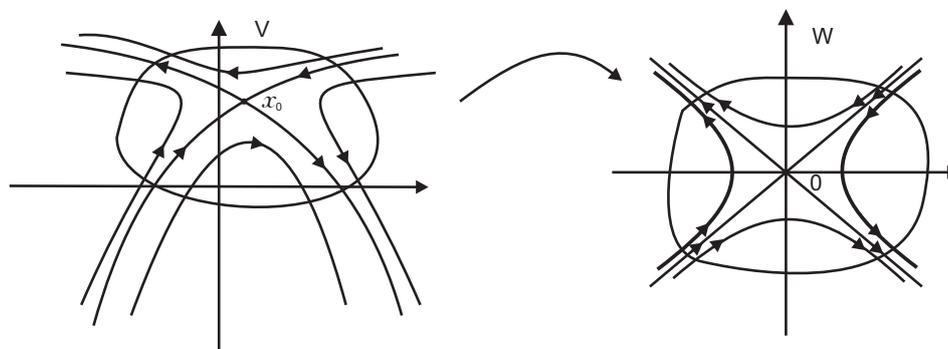


Figura 2.1: Interpretação geométrica do Teorema de Hartman–Grobman.

**Observação 2.2.1** *O Teorema de Hartman–Grobman afirma que, se um equilíbrio for hiperbólico, o sistema linearizado descreve o comportamento do sistema não-linear próximo do ponto de equilíbrio, ou seja, o comportamento numa vizinhança de um ponto de equilíbrio é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.*

Agora, apresentaremos as principais definições e alguns resultados sobre a Teoria de Integrabilidade Algébrica dos sistemas diferenciais polinomiais reais, embora a maioria das definições e teoremas possam ser estendidos para sistemas complexos e sistemas não polinomiais em dimensões arbitrárias.

Consideremos o sistema diferencial *polinomial* real em  $\mathbb{R}^3$  de grau  $m$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{P}(x, y, z), \\ \dot{y} = \mathcal{Q}(x, y, z), \\ \dot{z} = \mathcal{R}(x, y, z), \end{cases} \quad (2.2)$$

em que  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  são polinômios reais nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e

$$m = \max \{ \text{grau}\mathcal{P}, \text{grau}\mathcal{Q}, \text{grau}\mathcal{R} \}.$$

Denotemos o campo vetorial associado ao sistema (2.2) por

$$\mathcal{X}(x, y, z) = (\mathcal{P}(x, y, z), \mathcal{Q}(x, y, z), \mathcal{R}(x, y, z)). \quad (2.3)$$

**Definição 2.2.5** *Seja  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto. Se existe uma função não-constante  $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , a qual é constante sobre toda solução  $(x(t), y(t), z(t))$  do sistema (2.2), ou seja,  $H(x(t), y(t), z(t)) = \text{constante}$  para todos os valores de  $t$  para os quais a solução está definida e contida em  $\mathcal{U}$ , então dizemos que  $H$  é uma **integral primeira** do sistema (2.2) em  $\mathcal{U}$ . Equivalentemente,  $H$  é uma integral primeira do sistema (2.2) se, e somente se,*

$$\mathcal{X}H = \mathcal{P} \frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{Q} \frac{\partial H}{\partial y} + \mathcal{R} \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0 \quad (2.4)$$

em  $\mathcal{U}$ .

**Definição 2.2.6** *Duas integrais primeiras  $H_1$  e  $H_2$  são ditas independentes, se seus gradientes são vetores linearmente independentes para todos os pontos  $(x, y, z) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ , exceto num conjunto de medida nula. Se o sistema (2.2) possui duas integrais primeiras independentes, dizemos que ele é **totalmente integrável**.*

**Observação 2.2.2** (i) *Se o sistema (2.2) é totalmente integrável, então as órbitas do sistema estarão contidas nas curvas*

$$\{(x, y, z) : H_1(x, y, z) = h_1\} \cap \{(x, y, z) : H_2(x, y, z) = h_2\},$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  variam nas imagens de  $H_1$  e  $H_2$ . Daí, a importância de sabermos se um sistema é totalmente integrável.

(ii) Se existe uma integral primeira para um sistema dado, qualquer função dela é também uma integral primeira.

Para sistemas diferenciais planares

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $P, Q$  são polinômios nas variáveis  $x$  e  $y$  com coeficientes reais, a existência de uma integral primeira  $H : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  determina completamente seu retrato de fase, pois as curvas de nível

$$\{(x, y) : H(x, y) = h\} \subseteq \mathcal{U}$$

contém as órbitas do sistema (2.5) em  $\mathcal{U}$ .

**Definição 2.2.7** O sistema (2.5) é dito ser **Hamiltoniano** se existe uma integral primeira  $H$  (chamada função Hamiltoniana) tal que

$$P = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad e \quad Q = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Se  $H$  é de classe  $C^2$ , então isto é equivalente à igualdade

$$\operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0,$$

onde  $\operatorname{div}(P, Q)$  é a divergência do campo vetorial que define (2.6).

Portanto, os campos vetoriais planares mais simples possuindo uma integral primeira são os Hamiltonianos, uma vez que toda função Hamiltoniana é uma integral primeira, ou seja,  $H$  é constante ao longo de toda curva solução.

Agora, veremos pela proposição seguinte que as únicas possibilidades de classificação dos pontos de equilíbrio para um sistema Hamiltoniano são selas ou centros.

**Proposição 2.2.1** *Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  um ponto de equilíbrio para o sistema (2.6). Então, os autovalores do seu sistema linearizado são ou  $\pm\lambda$  ou  $\pm i\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Outra ferramenta importante desta teoria é uma superfície algébrica invariante, a qual nos auxiliará na resolução do Problema Foco–Centro desta dissertação.

**Definição 2.2.8** *Seja  $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ ,  $f$  não identicamente nulo e  $\mathbb{C}[x, y, z]$  denotando o anel de todos os polinômios nas variáveis  $x, y$  e  $z$  com coeficientes complexos. A superfície algébrica  $f(x, y, z) = 0$  é uma **superfície algébrica invariante** do campo vetorial  $\mathcal{X}$  (2.3), se para algum polinômio  $K_f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ , temos*

$$\mathcal{X}f = \mathcal{P} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathcal{Q} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{R} \frac{\partial f}{\partial z} = K_f f. \quad (2.7)$$

O polinômio  $K_f$  é chamado de **cofator** da superfície algébrica invariante  $f = 0$ .

Se  $f$  é um polinômio irreduzível em  $\mathbb{C}[x, y, z]$ , então dizemos que  $f = 0$  é uma superfície algébrica invariante irreduzível. Note que, se o sistema polinomial possui grau  $m$ , qualquer cofator possuirá grau no máximo  $m - 1$ .

**Observação 2.2.3** (i) *Nos pontos da superfície algébrica  $f = 0$ , o gradiente  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$  de  $f$  é ortogonal ao campo vetorial  $\mathcal{X}$ . Veja (2.7). Portanto, para cada ponto de  $f = 0$ , o campo vetorial  $\mathcal{X}$  é tangente à superfície  $f = 0$ , assim a superfície  $f = 0$  contém as trajetórias do campo  $\mathcal{X}$ . Isto justifica o nome “superfície algébrica invariante”, uma vez que ela é invariante pelo fluxo definido por  $\mathcal{X}$ .*

(ii) *Note que na definição de superfície algébrica invariante  $f = 0$  permitimos que esta seja complexa, isto é,  $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$  mesmo no caso de campos vetoriais polinomiais reais.*

Isto se deve ao fato de que, às vezes, para campos vetoriais reais a existência de uma integral primeira real pode ser forçada pela existência de uma superfície algébrica invariante complexa, para maiores detalhes recomendamos o capítulo 8 de [12].

(iii) Para campos vetoriais planares, as superfícies algébricas invariantes são chamadas de curvas algébricas invariantes.

**Lema 2.2.1** *Sejam  $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ . Suponha que  $f$  e  $g$  sejam relativamente primos no anel  $\mathbb{C}[x, y, z]$ . Então para o sistema (2.2),*

$$fg = 0$$

*é uma superfície algébrica invariante com cofator  $K_{fg}$  se, e somente se,*

$$f = 0 \quad e \quad g = 0$$

*são superfícies algébricas invariantes com cofatores  $K_f$  e  $K_g$ , respectivamente. Além disso,*

$$K_{fg} = K_f + K_g.$$

**Demonstração:** É claro que

$$\mathcal{X}(fg) = (\mathcal{X}f)g + f(\mathcal{X}g). \quad (2.8)$$

Suponha que  $fg = 0$  é uma superfície algébrica invariante do sistema (2.2) com cofator  $K_{fg}$ . Então, pela Definição 2.2.8

$$\mathcal{X}(fg) = K_{fg}fg,$$

e da igualdade (2.8) temos,

$$K_{fg}fg = (\mathcal{X}f)g + f(\mathcal{X}g).$$

Portanto, como  $f$  e  $g$  são relativamente primos, obtemos que  $f$  divide  $\mathcal{X}f$ , e  $g$  divide  $\mathcal{X}g$ . Se denotarmos por  $K_f$  o quociente  $\mathcal{X}f/f$  e por  $K_g$  o quociente  $\mathcal{X}g/g$ , então

$$f = 0 \quad \text{e} \quad g = 0$$

são superfícies algébricas invariantes do sistema (2.2) com cofatores  $K_f$  e  $K_g$ , respectivamente, e

$$K_{fg} = K_f + K_g.$$

A prova da recíproca, segue de maneira similar, usando novamente a igualdade (2.8). ■

Uma ferramenta clássica no estudo de sistemas diferenciais planares é o *fator integrante inverso*, pois os mesmos permitem usar técnicas a partir da teoria (local) de equações diferenciais Hamiltonianas. Veremos que para os sistemas dinâmicos  $n$ -dimensional, em particular, tridimensional, os fatores integrantes inversos são chamados de *múltiplos de Jacobi inversos*—veja Definição 2.2.10.

**Definição 2.2.9** *Considere o sistema diferencial planar definido em (2.5). Seja  $\Omega(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  o campo de vetores associado a este sistema. Uma função não-nula  $V : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é um **fator integrante inverso** do sistema (2.5) em  $\mathcal{D}$ , se ela é uma solução da equação diferencial parcial linear*

$$\Omega V = P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = V \operatorname{div} \Omega, \quad (2.9)$$

onde

$$\operatorname{div} \Omega = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

é a divergência do campo vetorial  $\Omega$  que define (2.5).

**Observação 2.2.4** (i) *Da equação (2.9), temos que o gradiente  $\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$  da função  $V$  é ortogonal ao campo vetorial  $\Omega$  ao longo de  $V^{-1}(0)$ . Assim,  $\Omega$  é tangente a*

$$V = 0.$$

Então, esta curva contém trajetórias do campo  $\Omega$ . Além disso,  $V^{-1}(0)$  é uma curva invariante de (2.5) com cofator  $\text{div } \Omega$ .

(ii) Quando uma integral primeira  $H$  e um fator integrante inverso  $V$  do sistema (2.5) satisfaz

$$\frac{P}{V} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{Q}{V} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

dizemos que  $H$  está associado a  $V$ , e vice-versa. Assim, dado um fator integrante inverso  $V$  definido em  $\mathcal{D}$ , podemos determinar a integral primeira no conjunto  $\mathcal{D} \setminus V^{-1}(0)$ .

**Definição 2.2.10** Uma função não-nula  $V : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é dita ser o **último múltiplo de Jacobi inverso** de  $\mathcal{X}$ , se ela satisfaz a equação diferencial parcial linear de primeira ordem

$$\mathcal{X}V = \mathcal{P}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{Q}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathcal{R}\frac{\partial V}{\partial z} = V\text{div}\mathcal{X},$$

onde

$$\text{div}\mathcal{X} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z}$$

é a divergência do campo vetorial  $\mathcal{X}$  que define (2.2).

Por um abuso de linguagem, usaremos indiscriminadamente as expressões: o último múltiplo de Jacobi inverso ou múltiplo de Jacobi inverso.

Para estudos mais profundos e detalhados sobre a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, em particular, integrabilidade, curvas (ou superfícies) algébricas invariantes, fatores integrantes (ou múltiplos de Jacobi) inversos, recomendamos [12], [14], [15] e [19].

## 2.3 Pontos de Equilíbrio do Tipo Hopf

Nesta subseção, apresentaremos algumas definições e o Teorema da Variedade Central, os quais serão necessários para a compreensão do Problema Foco-Centro sobre uma variedade

central em  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.10)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $\mu \in \mathbb{R}^n$  são, respectivamente, as variáveis de estado e parâmetros. Assuma que  $f$  seja de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n$ . Suponha que (2.10) tenha um ponto de equilíbrio  $x = x_0$  quando  $\mu = \mu_0$ , e denotando a variável  $x - x_0$  também por  $x$ , escreveremos

$$F(x) = f(x, \mu_0).$$

Suponha ainda que  $(x_0, \mu_0)$  seja um ponto de equilíbrio de (2.10), onde a matriz Jacobiana

$$A = Df(x_0, \mu_0)$$

possui um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

e o outro autovalor

$$\lambda_1 \neq 0.$$

Seja  $E^c$  o auto-espaço generalizado de  $A$  correspondente aos autovalores  $\lambda_{2,3}$ . Isto significa que  $E^c$  é subespaço não vazio invariante por  $A$  gerado pelos autovetores associados aos autovalores  $\lambda_{2,3}$ .

**Definição 2.3.1** *O ponto de equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$  do sistema (2.10), é chamado **ponto de Hopf**.*

**Definição 2.3.2** *Um **ponto de Hopf de codimensão 1** é um ponto de equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$  tal que a parte linear do campo vetorial  $f$  possui autovalores  $\lambda_2 = \lambda$  e  $\lambda_3 = \bar{\lambda}$  com*

$$\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\eta(\mu),$$

$\gamma(\mu_0) = 0$ ,  $\eta(\mu_0) = \omega_0 > 0$ , o outro autovalor  $\lambda_1(\mu)$  com

$$\lambda_1(\mu_0) \neq 0$$

e o primeiro coeficiente de Lyapunov,  $l_1(\mu_0)$ , é diferente de zero.

**Definição 2.3.3** Um ponto de Hopf **transversal** de codimensão 1 é um ponto de Hopf de codimensão 1 no qual os autovalores complexos dependentes do parâmetro  $\mu$ , interceptam o eixo imaginário com derivadas não nulas quando  $\mu = \mu_0$ .

**Definição 2.3.4** Um **ponto de Hopf de codimensão 2** é um ponto de equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$  de  $f$  que satisfaz a definição de ponto de Hopf de codimensão 1, exceto para  $l_1(\mu_0) = 0$ , e com a condição adicional de que o segundo coeficiente de Lyapunov,  $l_2(\mu_0)$ , é não nulo. Este ponto é **transversal** se os conjuntos  $\gamma^{-1}(0)$  e  $l_1^{-1}(0)$  possuem interseção transversal.

**Definição 2.3.5** Um **ponto de Hopf de codimensão 3** é um ponto de Hopf de codimensão 2 onde,  $l_2(\mu_0) = 0$ , mas  $l_3(\mu_0) \neq 0$ . Um ponto de Hopf de codimensão 3 é chamado **transversal** se os conjuntos  $\gamma^{-1}(0)$ ,  $l_1^{-1}(0)$  e  $l_2^{-1}(0)$  se interceptam transversalmente.

O próximo teorema nos permitirá melhor entender o Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$  restrito a uma variedade central, visto que, sobre a variedade central, a equação diferencial se comporta como no plano. Mais precisamente, o Teorema da Variedade Central garante a existência de uma variedade invariante bidimensional  $\mathcal{W}^c$  numa vizinhança do ponto de Hopf  $(x_0, \mu_0)$  que é tangente ao auto–espaço central  $E^c$  em  $(x_0, \mu_0)$  e contém todo o comportamento recorrente local do sistema (2.10).

**Teorema 2.3.1 (Teorema da Variedade Central)** Localmente, existe um conjunto invariante  $\mathcal{W}^c$  de (2.10) que é tangente a  $E^c$  em  $(x_0, \mu_0)$ . Tal conjunto é o gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas.

Se  $\varphi^t$  denota o fluxo associado a (2.10), então existe uma vizinhança  $U$  de  $(x_0, \mu_0)$ , tal que, se  $\varphi^t(x) \in U$  para todo  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ), então  $\varphi^t \rightarrow \mathcal{W}^c(x_0, \mu_0)$  para  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Ver Kuznetsov [18].

**Definição 2.3.6**  $\mathcal{W}^c$  é chamado de **variedade central local**. Veja Figura 2.2.

**Observação 2.3.1** (i)  $\mathcal{W}^c$  não é única. O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2), \\ \dot{z} = -z, \end{cases}$$

possui o ponto de equilíbrio  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , e a matriz Jacobiana do sistema na origem possui um autovalor real negativo e um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i,$$

ou seja, o equilíbrio é do tipo Hopf. Neste exemplo, existe uma família de variedades centrais locais bidimensionais do sistema dadas por

$$\mathcal{W}_\beta^c(0) = \{(x, y, z) : z = \phi_\beta(x, y)\},$$

onde

$$\phi_\beta(x, y) = \begin{cases} \beta \exp\left(-\frac{1}{2(x^2 + y^2)}\right), & \text{se } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

(ii) Uma variedade central  $\mathcal{W}^c$  possui a mesma classe de diferenciabilidade (finita) que  $f$  (se  $f \in C^k$  para algum  $k$  finito,  $\mathcal{W}^c$  é também uma variedade de classe  $C^k$ ) em alguma vizinhança  $U$  de  $(x_0, \mu_0)$ . Porém, quando  $k \rightarrow \infty$ , a vizinhança  $U$  pode diminuir, podendo resultar na não-existência de uma variedade  $\mathcal{W}^c$  de classe  $C^\infty$ , para algum sistema  $C^\infty$ .

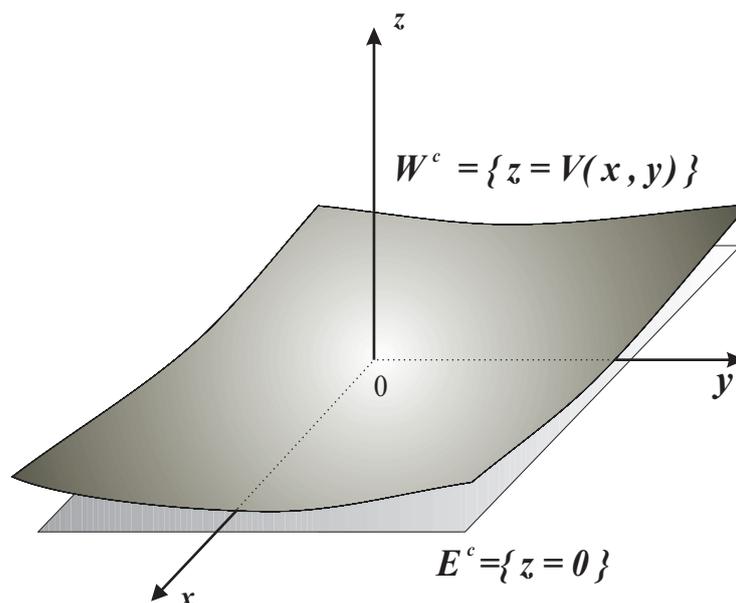


Figura 2.2: Variedade central como um gráfico de  $z = V(x, y)$ .

## 2.4 O Problema Foco–Centro no Plano

Consideremos o sistema analítico de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções analíticas. Considere o campo de vetores  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  associado ao sistema (2.11). Suponha que a origem  $(0, 0)$  seja um ponto de equilíbrio isolado, ou seja, existe uma vizinhança contendo a origem na qual ela é o único ponto de equilíbrio. Suponha que a matriz Jacobiana  $J(0, 0) = DF(0, 0)$  tenha autovalores complexos conjugados. Esta última hipótese garante que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (2.11) circulam a origem.

O Problema Foco–Centro é, sob as hipóteses acima, decidirmos se a origem é um foco (repulsor ou atrator) ou um centro.

Se a origem for um ponto de equilíbrio hiperbólico, ou seja, os autovalores da matriz Jacobiana  $J(0, 0) = DF(0, 0)$  são da forma

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

com  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ , então o Teorema de Hartman–Grobman 2.2.1 nos diz que numa vizinhança suficientemente pequena da origem, o sistema é topologicamente conjugado a sua parte linear, isto é, podemos ignorar os termos de ordem superior. Neste caso, por definição, a origem é um foco atrator ( $\alpha < 0$ ) ou um foco repulsor ( $\alpha > 0$ ).

Considere os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + x^3, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

Em ambos a origem é um equilíbrio não hiperbólico e os autovalores da matriz Jacobiana  $DF(0, 0)$  tem a forma

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

No primeiro caso a origem é um centro, enquanto que no segundo caso é um foco repulsor.

É de nosso interesse o Problema Foco–Centro quando os autovalores da matriz Jacobiana  $J(0, 0) = DF(0, 0)$  são da forma

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta,$$

com  $\beta \neq 0$ . Notemos que a origem neste caso é um equilíbrio não hiperbólico e, portanto, o sistema linearizado não descreve o comportamento do sistema não-linear próximo da origem. Veremos pelo teorema a seguir, como resolver efetivamente este problema para o caso dos campos quadráticos planares. Ou seja, este problema é completamente entendido para o caso dos campos quadráticos planares através do Teorema de Bautin 2.4.1, o qual fornece condições necessárias e suficientes para que um equilíbrio seja um centro.

**Teorema 2.4.1 (Bautin)** *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $\lambda_1 = 0$ , tem a origem como um centro se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

1.  $\lambda_3 = \lambda_6$ ;
2.  $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$ ;
3.  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ ;
4.  $\lambda_5 = \lambda_4 + 5(\lambda_3 - \lambda_6) = \lambda_3 \lambda_6 - \lambda_2^2 - 2\lambda_6^2 = 0$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

## 2.5 O Problema Foco–Centro Sobre uma Variedade Central em $\mathbb{R}^3$

Consideremos o sistema *analítico* de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{F}_1(x, y, z), \\ \dot{y} = \mathcal{F}_2(x, y, z), \\ \dot{z} = \mathcal{F}_3(x, y, z), \end{cases} \quad (2.13)$$

em que  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  são funções analíticas. Suponha que a origem  $(0, 0, 0)$  seja um ponto de equilíbrio isolado. Seja  $\mathcal{Y}(x, y, z) = (\mathcal{F}_1(x, y, z), \mathcal{F}_2(x, y, z), \mathcal{F}_3(x, y, z))$  o campo de vetores associado a (2.13). Suponha que a matriz Jacobiana  $J(0, 0, 0) = D\mathcal{Y}(0, 0, 0)$  tenha um autovalor real não nulo e um par de autovalores complexos conjugados, estes últimos

garantem que numa vizinhança suficientemente próxima da origem, as soluções de (2.13) circulam a origem.

Investigaremos a natureza do fluxo local numa vizinhança da origem restrito a uma variedade central local,  $\mathcal{W}^c$ , na origem. Em particular, sob as hipóteses acima desejamos decidir se a origem é um centro ou um foco. O Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$ , grosseiramente falando, é o de distinguir entre estes dois casos. Veja que este problema é, de fato, um problema bidimensional, uma vez que este pode ser reduzido ao Problema Foco–Centro Planar para campos vetoriais restritos a uma variedade central.

Por esta razão, apresentaremos agora duas soluções bastantes conhecidas para o Problema Foco–Centro em sistemas planares. A primeira solução, o clássico Teorema do Centro de Lyapunov–Poincaré, é dada em termos de uma integral primeira, enquanto que a segunda, Critério de Reeb, é dada em termos de um fator integrante inverso. As demonstrações dos dois teoremas a seguir podem ser encontradas em [24] e [26], respectivamente.

**Teorema 2.5.1** (*Teorema do Centro de Lyapunov–Poincaré*) *O sistema analítico planar*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mathcal{P}_1(x, y), \\ \dot{y} = x + \mathcal{P}_2(x, y), \end{cases} \quad (2.14)$$

onde  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  são funções analíticas com desenvolvimento de Taylor na origem começando com pelo menos termos quadráticos, possui um centro na origem se, e somente se, admite uma integral primeira analítica local da forma

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

numa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^2$ , onde os pontos denotam termos de ordem superiores aos quadráticos.

**Teorema 2.5.2 (Critério de Reeb)** *O sistema analítico planar (2.14) possui um centro na origem se, e somente se, admite um fator integrante inverso local analítico da forma*

$$v(x, y) = 1 + \dots$$

*numa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^2$ , onde os pontos denotam termos pelo menos lineares.*

Portanto, se para o sistema (2.13) conhecermos a variedade central analítica local numa vizinhança da origem, o Problema Foco–Centro possuirá uma resposta via adaptações dos teoremas acima.

É de nosso interesse o Problema Foco–Centro quando os autovalores da matriz Jacobiana  $J(0, 0, 0) = D\mathcal{Y}(0, 0, 0)$  são da forma

$$\lambda_1 = \gamma,$$

com  $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$  e

$$\lambda_{2,3} = \pm i\beta,$$

com  $\beta \neq 0$ . Notemos que a origem neste caso é um equilíbrio não hiperbólico. Por uma mudança linear de coordenadas e um possível reescalonamento no tempo, o sistema de equações diferenciais (2.13) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \bar{\mathcal{F}}_1(x, y, z) = \widetilde{\mathcal{F}}_1(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \bar{\mathcal{F}}_2(x, y, z) = \widetilde{\mathcal{F}}_2(x, y, z), \\ \dot{z} = -\lambda z + \bar{\mathcal{F}}_3(x, y, z) = \widetilde{\mathcal{F}}_3(x, y, z), \end{cases} \quad (2.15)$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ .

Como usualmente, denotaremos

$$\psi(x, y, z) = \left( \widetilde{\mathcal{F}}_1(x, y, z), \widetilde{\mathcal{F}}_2(x, y, z), \widetilde{\mathcal{F}}_3(x, y, z) \right) \quad (2.16)$$

o campo de vetores que define (2.15) numa vizinhança da origem.

Notemos que esta mudança de coordenadas é a que coloca a matriz Jacobiana  $J(0, 0, 0) = D\psi(0, 0, 0)$  na forma canônica de Jordan, e como se trata de uma mudança linear de coordenadas, temos que as hipóteses sobre as funções  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  não se alteram. Logo, podemos decidir a estabilidade do ponto de equilíbrio no Problema Foco–Centro mencionado acima, aplicando os seguintes teoremas.

**Teorema 2.5.3 (Teorema do Centro de Lyapunov)** *A origem é um centro para (2.15) se, e somente se, o sistema (2.15) admite uma integral primeira analítica local da forma*

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$$

*numa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^3$ , onde os pontos denotam termos superiores aos quadráticos. Além disso, quando existe um centro, a variedade central local  $\mathcal{W}^c$  é única e analítica.*

A demonstração deste teorema encontra-se em [3], capítulo 13.

O teorema acima garante que a existência de um centro em  $\psi|_{\mathcal{W}^c}$  é equivalente à existência de uma integral primeira  $H$  para  $\psi$ , ou seja, existe um centro sobre a variedade central se, e somente se, existe uma integral primeira analítica numa vizinhança da origem. Assim, poderíamos restringir nossos esforços na investigação de condições para a existência da mesma, a qual é assumida sem termos constantes, por isso devemos ter a forma  $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots$ .

Portanto, o Problema Foco–Centro para um ponto de Hopf de um sistema analítico em  $\mathbb{R}^3$  possui uma solução clássica pelo Teorema do Centro de Lyapunov, a qual é dada em termos de uma integral primeira analítica  $H$ . Mas, tentar obtê-la é um processo bastante difícil.

Daremos agora, uma nova solução a este problema em termos da existência de um múltiplo de Jacobi inverso analítico  $V$ , numa vizinhança de um ponto de Hopf do tipo centro em  $\mathbb{R}^3$ . Em outras palavras, o próximo teorema pode ser visto como um análogo do Teorema 2.5.2 (Critério de Reeb) em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 2.5.4** *O sistema (2.15) possui um centro na origem se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local da forma*

$$V(x, y, z) = z + \dots$$

*numa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^3$ , onde os pontos denotam termos pelo menos quadráticos. Além disso, quando tal  $V$  existe, a variedade central analítica local  $\mathcal{W}^c \subset V^{-1}(0)$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4].

Nesta dissertação nos direcionaremos em resultados bastantes recentes, [5] e [22], para sistemas particulares de equações diferenciais quadráticas em  $\mathbb{R}^3$ , em que a existência de superfícies algébricas invariantes e múltiplos de Jacobi inversos analíticos nos permitirão obter informações importantes sobre a dinâmica do sistema, confirmando a presença de centros diante de algumas restrições no espaço dos parâmetros.

## Capítulo 3

# Centros Sobre uma Variedade Central no Sistema de Lü

Neste capítulo, o objetivo é estudar resultados recentes acerca de um dos mais importantes problemas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, a saber o Foco–Centro mencionado anteriormente. Em particular, estudaremos este problema no sistema de equações diferenciais não-lineares, chamado sistema de Lü. Confirmaremos por duas maneiras distintas, mas equivalentes, a existência de centros para o fluxo deste sistema restrito a uma variedade central local dos equilíbrios isolados  $\mathcal{Q}_{\pm}$ . Nossos estudos foram baseados em [4], [7], [22] e [23].

### 3.1 Estabilidade e Bifurcações de Hopf no Sistema de Lü

Nesta seção estudaremos a estabilidade e as mudanças qualitativas na dinâmica do sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares em  $\mathbb{R}^3$ , chamado sistema de Lü,

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  parâmetros reais. Em notação vetorial, o sistema (3.1) pode ser escrito como  $\dot{x} = f(x, \zeta)$ , onde

$$f(x, \zeta) = (a(y - x), cy - xz, -bz + xy), \quad (3.2)$$

$x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $\zeta = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Note que o sistema de Lü (3.1) é uma família a 3-parâmetros de equações diferenciais quadráticas no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Apesar de sua simplicidade, mostra-se em [20] que o sistema (3.1) possui um rico comportamento dinâmico, variando de pontos de equilíbrios estáveis à periódicos e até mesmo oscilações caóticas, dependendo dos valores dos parâmetros  $(a, b, c)$ .

O sistema (3.1) possui os pontos de equilíbrio  $\mathcal{Q}_0 = (0, 0, 0)$  o qual existe para quaisquer valores dos parâmetros e um par de equilíbrios simétricos  $\mathcal{Q}_\pm = (\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c)$ , quando  $bc > 0$ . Para o estudo das bifurcações de Hopf em  $\mathcal{Q}_\pm$ , basta realizar a análise para um ou outro equilíbrio, uma vez que eles são simétricos em relação ao eixo  $z$ . Analisemos portanto, para o equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$ .

Fazendo a translação para a origem, segundo a transformação

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$ , com  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , temos

$$\begin{cases} x = x_1 + \sqrt{bc}, \\ y = y_1 + \sqrt{bc}, \\ z = z_1 + c. \end{cases}$$

Derivando (3.3) e fazendo as devidas substituições, podemos escrever o sistema (3.1), em novas coordenadas, como segue

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = c(y_1 + \sqrt{bc}) - (x_1 + \sqrt{bc})(z_1 + c), \\ \dot{z}_1 = -b(z_1 + c) + (x_1 + \sqrt{bc})(y_1 + \sqrt{bc}). \end{cases} \quad (3.4)$$

A linearização de (3.4) em  $\mathcal{Q}_+$ , que agora está na origem, nos dá a seguinte matriz Jacobiana

$$A = Df(\mathcal{Q}_+) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

cujos polinômio característico pode ser escrito como

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + ab\lambda + 2abc.$$

Para o estudo da estabilidade do equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$ , faremos uso do Lema 3.1.1 a seguir, conhecido como critério de *Routh–Hurwitz*, cuja demonstração pode ser encontrada em Pontryagin [25], página 59.

**Lema 3.1.1** *Considere o polinômio  $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ . As raízes de  $p(\lambda)$  têm partes reais negativas se, e somente se,*

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2a_1 > a_0.$$

Segue a seguinte proposição.

**Proposição 3.1.1** *Defina*

$$c_c = \frac{a+b}{3}.$$

- 1) *Se  $a = 0$ , então  $\mathcal{Q}_+$  é equilíbrio degenerado, pois a matriz Jacobiana (3.5) possuirá pelo menos duas raízes nulas. Para tanto, consideremos abaixo os casos em que  $a \neq 0$ ;*
- 2) *Considere  $a \neq 0$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ . Temos as seguintes situações:*
  - 2.1) *Se  $a < 0$ , então o equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  é instável;*
  - 2.2) *Se  $a > 0$  e  $0 < c < c_c$ , (respectivamente,  $c > c_c$ ) então  $\mathcal{Q}_+$  é assintoticamente estável (respectivamente, instável);*
- 3) *Considere  $b < 0$  e  $c < 0$ . Neste caso,  $\mathcal{Q}_+$  é sempre instável, para  $a \neq 0$ .*

O sistema (3.1) é invariante pela mudança de coordenadas  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ . Então a estabilidade do equilíbrio  $\mathcal{Q}_-$  pode ser obtida a partir da estabilidade do equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$ . Da análise linear do sistema (3.1) em  $\mathcal{Q}_+$  temos a seguinte proposição, a qual está provada em [21].

**Proposição 3.1.2** *Definamos a superfície de Hopf*

$$\mathcal{S} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab > 0, c = c_c = \frac{(a+b)}{3} \right\}.$$

*Se  $(a, b, c) \in \mathcal{S}$  e  $c_c > 0$  (respectivamente,  $c_c < 0$ ) então a matriz Jacobiana de (3.2) em  $\mathcal{Q}_+$  possui um autovalor real negativo (respectivamente, positivo)  $\lambda_1$  e um par de autovalores imaginários puros  $\lambda_{2,3}$ .*

**Observação 3.1.1** *Do Teorema da Variedade Central 2.3.1, para o ponto de Hopf  $\mathcal{Q}_+$  uma variedade bidimensional está bem definida, ela é invariante pelo fluxo gerado por (3.1) e pode ser continuada com classe arbitrária de diferenciabilidade para valores de parâmetros próximos. Veja [18]. A variedade central é atratora (respectivamente, repulsora) quando  $c_c > 0$  (respectivamente,  $c_c < 0$ ). Então, é suficiente estudar a estabilidade de  $\mathcal{Q}_+$  para o fluxo restrito a uma variedade central e sua continuação.*

Assim, estudaremos agora a estabilidade de  $\mathcal{Q}_+$  para parâmetros em  $\mathcal{S}$ . Definimos, os seguintes subconjuntos da superfície de Hopf  $\mathcal{S}$ , veja Figura 3.1.

$$\mathcal{S}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0, a/5 < b < 2a, c = c_c\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < 0, a/5 < b < 0, c = c_c\},$$

$$\mathcal{S}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < 0, b < 2a, c = c_c\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0, 0 < b < a/5, c = c_c\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a > 0, b > 2a, c = c_c\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < 0, 2a < b < a/5, c = c_c\}.$$

Temos o seguinte teorema que encontra-se provado em [7] ou [23].

**Teorema 3.1.1** *Considere o sistema de Lü (3.1). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  para valores de parâmetros em  $\mathcal{S}$  é dado por*

$$l_1(a, b, c) = \frac{243a^2(a - 5b)(2a - b)b}{(4a + b)^2(a^4 + 16a^3b + 60a^2b^2 + 49ab^3 + 4b^4)}. \quad (3.6)$$

*Se  $(a - 5b)(2a - b) \neq 0$ , então o sistema (3.1) possui um ponto de Hopf transversal em  $\mathcal{Q}_+$  para  $(a, b, c) \in \mathcal{S}$ .*

*Mais precisamente, se  $(a, b, c) \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{U}_i$ ,  $i = 1, 2$  e  $3$ , então o sistema tem um ponto de Hopf de codimensão 1 em  $\mathcal{Q}_+$ . Se  $(a, b, c) \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$ , então o ponto de Hopf  $\mathcal{Q}_+$  é*

instável (foco repulsor fraco) e para cada  $0 < c < c_c$ , mas próximo de  $c_c$ , existe um ciclo limite instável próximo do ponto de equilíbrio estável  $\mathcal{Q}_+$ . Se  $(a, b, c) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ , então o ponto de Hopf em  $\mathcal{Q}_+$  é assintoticamente estável (foco atrator fraco) e para cada  $c > c_c$ , mas próximo de  $c_c$ , existe um ciclo limite estável próximo do ponto de equilíbrio instável  $\mathcal{Q}_+$ .

Notemos que o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov é determinado pelo sinal do numerador de (3.6), uma vez que o denominador é positivo.

**Observação 3.1.2** *É fácil ver que o primeiro coeficiente de Lyapunov anula-se sobre as retas*

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \neq 0, b = a/5, c = c_c\}$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \neq 0, b = 2a, c = c_c\}.$$

*Estas retas dividem a superfície de Hopf  $\mathcal{S}$  em seis componentes conexas denotadas por  $\mathcal{S}_i$  e  $\mathcal{U}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , onde  $l_1 < 0$  e  $l_1 > 0$ , respectivamente. Veja Figura 3.1.*

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [7] ou [23], realiza o estudo do sinal do segundo coeficiente de Lyapunov ao longo da reta  $\mathcal{C}_1$ , onde o primeiro coeficiente de Lyapunov se anula.

**Teorema 3.1.2** *Considere o sistema de Lü (3.1). O segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  para valores de parâmetros em  $\mathcal{C}_1$  é dado por*

$$l_2|_{\mathcal{C}_1} = \frac{3625}{83692b^3}.$$

*Como  $b \neq 0$ , então o sistema (3.1) possui um ponto de Hopf transversal de codimensão 2 em  $\mathcal{Q}_+$ . Se  $b > 0$  (respectivamente,  $b < 0$ ) então o ponto de Hopf em  $\mathcal{Q}_+$  é instável (respectivamente, estável) uma vez que  $l_2 > 0$  (respectivamente,  $l_2 < 0$ ).*

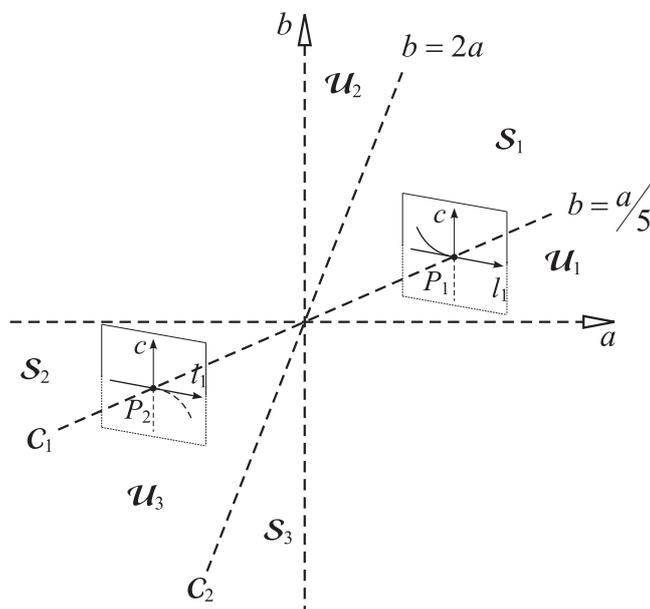


Figura 3.1: Projeção da superfície de Hopf  $\mathcal{S}$  e as regiões  $\mathcal{S}_i$  e  $\mathcal{U}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sobre o plano  $ab$ . Figura proveniente da referência bibliográfica [23].

Os diagramas de bifurcações do sistema (3.1) para os pontos típicos  $P_1$  e  $P_2$  sobre  $\mathcal{C}_1$  estão ilustrados na Figura 3.2 e Figura 3.3, respectivamente. Veja também Figura 3.1.

Agora, no seguinte teorema analisamos o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov ao longo da reta  $\mathcal{C}_2$ , onde o primeiro coeficiente se anula.

**Teorema 3.1.3** *Considere o sistema de Lü (3.1). O segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $Q_+$  ao longo de  $\mathcal{C}_2$  são nulos, ou seja,*

$$l_2|_{\mathcal{C}_2} = l_3|_{\mathcal{C}_2} = 0$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7] ou [23].

Diante da Proposição 3.1.2, da Observação 3.1.2 e do Teorema 3.1.3, temos que para valores de parâmetros em  $\mathcal{C}_2$ , os equilíbrios correspondentes  $Q_{\pm}$  são não hiperbólicos, e ainda os três primeiros coeficientes de Lyapunov se anulam. Diante disto, aparece em [23] a seguinte conjectura.

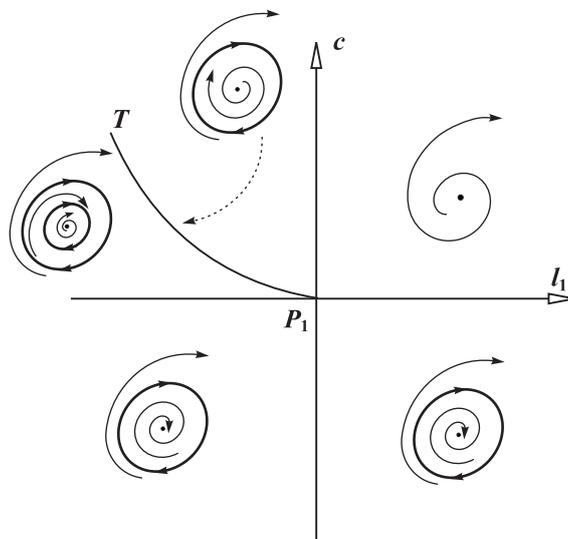


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do sistema (3.1) para o ponto típico  $P_1$  sobre  $\mathcal{C}_1$ . Figura proveniente da referência [23].

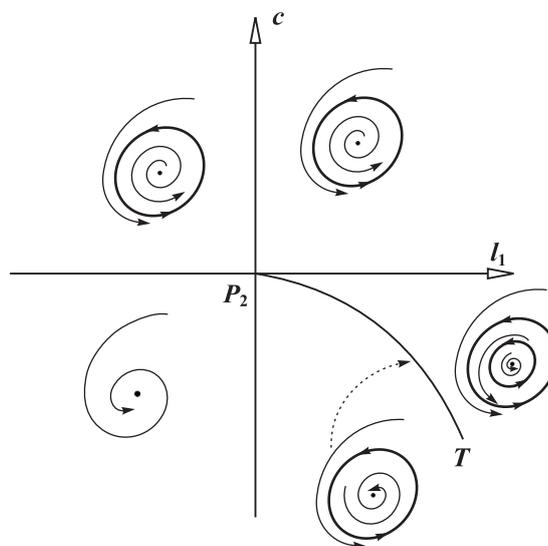


Figura 3.3: Diagrama de bifurcação do sistema (3.1) para o ponto típico  $P_2$  sobre  $\mathcal{C}_1$ . Figura proveniente da referência [23].

**Conjectura 3.1.1** *Considere o sistema de Lü (3.1). Para valores de parâmetros em  $\mathcal{C}_2$  os equilíbrios correspondentes  $\mathcal{Q}_\pm$  são centros não-lineares para o fluxo do sistema (3.1) restrito a uma variedade central local. Veja Figura 3.4.*

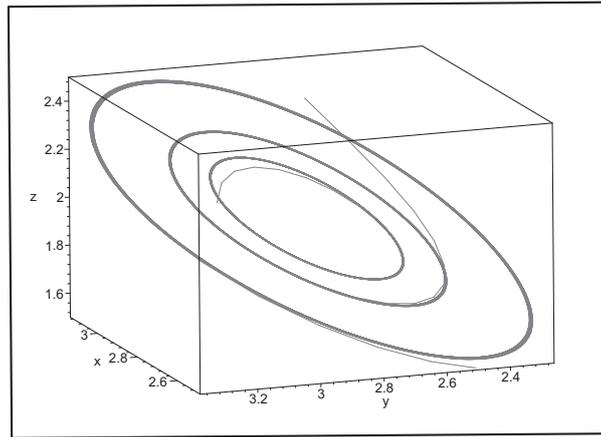


Figura 3.4: Retrato de fase do sistema (3.1) próximo de  $\mathcal{Q}_+$ . A figura sugere que  $\mathcal{Q}_+$  é um centro para o fluxo do sistema (3.1) restrito a uma variedade central. Figura proveniente da referência [23].

Esta questão está relacionada com o Problema Foco-Centro do sistema de Lü (3.1) para os valores de parâmetros  $b = 2a$ ,  $c = a$ ,  $a \neq 0$ , ou seja, ao longo da reta  $\mathcal{C}_2$ . Resultados recentes foram estudados, [4] e [22], os quais deram respostas afirmativas à Conjectura 3.1.1 acima.

Portanto, dedicaremos a próxima seção a estes resultados, os quais confirmarão a existência de centros sobre uma variedade central local dos equilíbrios  $\mathcal{Q}_\pm$  do sistema de Lü (3.1) para valores dos parâmetros em  $\mathcal{C}_2$ .

## 3.2 Centros Sobre uma Variedade Central

Nesta seção, mostraremos por duas maneiras distintas, mas equivalentes, a existência de centros sobre uma variedade central dos equilíbrios  $\mathcal{Q}_\pm$  do sistema de Lü (3.1). Veremos que o sistema de Lü restrito a uma variedade central  $\mathcal{W}^c$  é um sistema Hamiltoniano, donde o resultado segue.

**Teorema 3.2.1** *Para parâmetros em  $\mathcal{C}_2$ , o sistema de Lü (3.1) possui uma família de superfícies algébricas invariantes  $F_a^{-1}(0)$ , onde*

$$F_a(x, y, z) = 4x^2 - 4xz + z^2 - 24az.$$

*Além disso,  $\mathcal{W}^c \subset F_a^{-1}(0)$  e o fluxo do sistema (3.1) restrito a  $F_a^{-1}(0)$  possui um centro em  $\mathcal{Q}_\pm$ .*

**Demonstração:** Como vimos, o sistema (3.1) é invariante pela involução  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ , logo podemos restringir nossa análise no equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$ . Para valores dos parâmetros em  $\mathcal{C}_2$ , o sistema (3.1) possui o ponto de equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  não hiperbólico. Pelo Teorema da Variedade Central 2.3.1, existe uma variedade invariante bidimensional  $\mathcal{W}^c$  numa vizinhança de  $\mathcal{Q}_+$  que é tangente ao auto-espaço central em  $\mathcal{Q}_+$  e contém todo o comportamento recorrente local do sistema.

Ao transladarmos o equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  para a origem, segue que  $\mathcal{W}^c = \{z = h(x, y), \text{ para } (x, y) \text{ numa vizinhança pequena de } (0, 0)\}$  com  $h(0, 0) = 0$  e  $Dh(0, 0) = 0$ . Substituindo  $b = 2a$  e  $c = c_c = a$  no sistema de Lü (3.1), condições necessárias para se ter um centro, temos

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = ay - xz, \\ \dot{z} = -2az + xy. \end{cases} \quad (3.7)$$

Transladando a singularidade  $\mathcal{Q}_+ = (a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$  para a origem, segundo a transformação

$$\begin{cases} u = x - a\sqrt{2}, \\ v = y - a\sqrt{2}, \\ w = z - a, \end{cases} \quad (3.8)$$

obtemos

$$\begin{cases} x = u + a\sqrt{2}, \\ y = v + a\sqrt{2}, \\ z = w + a. \end{cases}$$

Derivando (3.8) e fazendo as devidas substituições, podemos escrever o sistema (3.7), em novas coordenadas, como segue

$$\begin{cases} \dot{u} = a(v - u), \\ \dot{v} = av - uv - ua - a\sqrt{2}w, \\ \dot{w} = -2aw + uv + a\sqrt{2}u + a\sqrt{2}v. \end{cases} \quad (3.9)$$

Usando a mudança linear de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\sqrt{2}u + \frac{1}{3}w, \\ y = -\frac{1}{3}u + v - \frac{\sqrt{2}}{3}w, \\ z = -\frac{2}{3}\sqrt{2}u + \frac{2}{3}w, \end{cases}$$

e o reescalamento no tempo  $t \rightarrow 24t$ , reduzimos o sistema (3.9) para a sua forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = P_1(x, y, z) = 24\sqrt{2}ay + 4x^2 + 4\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}yz - z^2, \\ \dot{y} = P_2(x, y, z) = -24\sqrt{2}ax - 16\sqrt{2}x^2 - 8xy - 6\sqrt{2}xz + 4yz + 7\sqrt{2}z^2, \\ \dot{z} = P_3(x, y, z) = -48az + 8x^2 + 8\sqrt{2}xy - 4\sqrt{2}yz - 2z^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Para o sistema (3.10) existe exatamente uma superfície algébrica invariante

$$F_a(x, y, z) = 4x^2 - 4xz + z^2 - 24az = 0. \quad (3.11)$$

Pois, é fácil ver que

$$\mathcal{X}F_a = kF_a,$$

onde  $\mathcal{X}(x, y, z) = (P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z))$  é o campo vetorial associado ao sistema (3.10) e

$$k(x, y, z) = -48a,$$

é o cofator da superfície algébrica invariante  $F_a = 0$ , pela Definição 2.2.8. E ainda,

$$F_a(0, 0, 0) = 0$$

e

$$\nabla F_a(0, 0, 0) = (0, 0, -24a),$$

com  $a \neq 0$ . Assim, a superfície invariante dada por (3.11) contém o equilíbrio e é tangente ao auto-espaço central, plano  $xy$ , na origem. Portanto, numa vizinhança da origem, existe a variedade central local

$$\mathcal{W}^c \subset F_a^{-1}(0).$$

Note que a superfície algébrica invariante é quadrática em  $z$ . Logo, resolvendo (3.11) em função de  $z$ , encontraremos duas soluções, porém apenas uma delas satisfaz o equilíbrio  $\mathcal{Q}_+$  que agora está na origem. Assim, substituindo esta solução nas duas primeiras equações de (3.10), obtemos o seguinte sistema em coordenadas locais

$$\begin{cases} \dot{x} = -288a^2 - 96ax \\ \quad \quad \quad + 96a\sqrt{3a(3a+x)} + 16x\sqrt{3a(3a+x)} + 8y\sqrt{6a(3a+x)}, \\ \dot{y} = 2016\sqrt{2}a^2 + 576\sqrt{2}ax + 48ay \\ \quad \quad \quad - 672a\sqrt{6a(3a+x)} - 88x\sqrt{6a(3a+x)} - 16y\sqrt{3a(3a+x)}, \end{cases}$$

o qual não é invariante pela involução  $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$ . Fazemos a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u^2 = 12ax + 36a^2, \\ y = y, \end{cases}$$

a qual é válida numa vizinhança da origem e muda o equilíbrio de interesse para

$$(u, y) = (6|a|, 0),$$

com  $a \neq 0$ . Transladando novamente o equilíbrio para a origem e fazendo o reescalamento no tempo  $t \rightarrow 3at$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = 72\sqrt{2}a^2y + 12au^2, \\ \dot{y} = -72\sqrt{2}a^2u - 54\sqrt{2}au^2 - 24a uy - 11\sqrt{2}u^3. \end{cases}$$

Mas, este sistema, é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(u, y) = -\sqrt{2} \left( 36a^2u^2 + 18au^3 + \frac{11}{4}u^4 \right) - 12au^2y - 36\sqrt{2}a^2y^2.$$

E isto finda a prova do teorema, e confirma que a Conjectura 3.1.1 da seção anterior é verdadeira. Portanto, o equilíbrio na origem, o qual poderia ser um foco ou um centro, é de fato um centro. ■

**Observação 3.2.1** (i) *A variedade central local é uma superfície algébrica regrada, que por várias transformações de coordenadas pode ser escrita explicitamente. Além disso, ela contém ambos os equilíbrios  $\mathcal{Q}_{\pm}$  e é única no espaço de estados. Este fato está ilustrado no retrato de fase mostrado na Figura 3.5. A existência de laços homoclínicos delimitando os centros é provada pela análise da função Hamiltoniana.*

(ii) *Como consequência do Teorema do Centro de Lyapunov 2.5.3, o sistema de Lü (3.1), admite uma integral primeira numa vizinhança de  $\mathcal{Q}_{\pm}$ , embora ela e o seu domínio de definição ainda não sejam conhecidos explicitamente.*

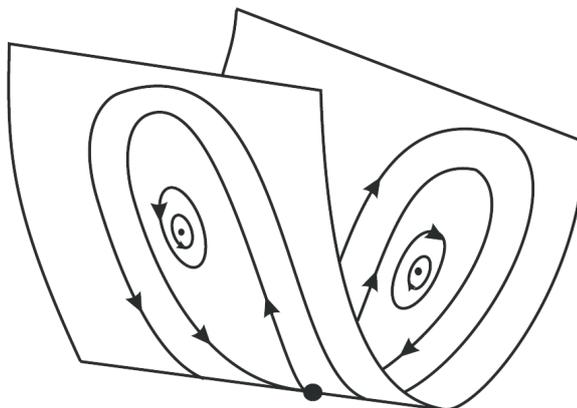


Figura 3.5: Retrato de fase sobre a superfície regrada invariante, a qual contém a variedade central em  $\mathcal{Q}_+$  e  $\mathcal{Q}_-$ . Figura proveniente da referência [22].

Agora, veremos alguns resultados que serão necessários no decorrer desta dissertação. Diante destes resultados, daremos uma outra solução ao Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$  que surge no sistema de Lü (3.1). Ou seja, com o intuito de dar uma resposta afirmativa à Conjectura 3.1.1, deteremos–nos no sistema *analítico* de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{F}_1(x, y, z), \\ \dot{y} = \mathcal{F}_2(x, y, z), \\ \dot{z} = \mathcal{F}_3(x, y, z), \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  são funções analíticas nas variáveis  $x, y$  e  $z$ .

Fazendo uma mudança linear de coordenadas e um possível reescalonamento no tempo, podemos supor que o sistema (3.12), em uma vizinhança da origem, tem a forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \bar{\mathcal{F}}_1(x, y, z), \\ \dot{y} = x + \bar{\mathcal{F}}_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Bz + \bar{\mathcal{F}}_3(x, y, z), \end{cases} \quad (3.13)$$

em que  $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\bar{\mathcal{F}} = (\bar{\mathcal{F}}_1, \bar{\mathcal{F}}_2, \bar{\mathcal{F}}_3) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo analítico real numa vizinhança da origem  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  com  $\bar{\mathcal{F}}(0) = 0$ , e cuja matriz Jacobiana  $D\bar{\mathcal{F}}(0) = 0$ .

Consideremos ainda o campo de vetores

$$\mathcal{X}(x, y, z) = (-y + \overline{\mathcal{F}}_1(x, y, z), x + \overline{\mathcal{F}}_2(x, y, z), Bz + \overline{\mathcal{F}}_3(x, y, z)) \quad (3.14)$$

que define o sistema (3.13).

**Observação 3.2.2** *Vimos que quando o sistema (3.13) possui um centro, o Teorema do Centro de Lyapunov 2.5.3 garante a existência de uma integral primeira analítica*

$$H(x, y, z) = x^2 + y^2 + \dots,$$

*enquanto o Teorema 2.5.4 garante a existência de um múltiplo de Jacobi inverso analítico*

$$V(x, y, z) = z + \dots.$$

*Sabe-se, veja [2], que o produto entre um múltiplo de Jacobi inverso e uma integral primeira é outro múltiplo de Jacobi inverso. Portanto, existem múltiplos de Jacobi inversos analíticos da forma*

$$V(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^k + \dots,$$

*para algum  $k \geq 0$ , quando o sistema (3.13) possui um centro.*

Daremos agora algumas propriedades dos múltiplos de Jacobi inversos. Para maiores detalhes, recomendamos [2].

Somente o teorema a seguir desta seção é dado para campos vetoriais mais gerais, pois os demais referem-se ao sistema (3.13).

**Teorema 3.2.2** *Seja  $\mathcal{Y}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$  um campo vetorial suave, ou seja,  $C^\infty$ , definido num conjunto aberto  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ . Suponha que exista um múltiplo de Jacobi inverso  $C^\infty$  da forma*

$$V(x, y, z) = (z - h(x, y)) W(x, y, z)$$

com  $W(x, y, h(x, y)) \neq 0$ . Então,

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathcal{D} : z = h(x, y)\}$$

é uma variedade invariante de  $\mathcal{Y}$  e

$$v(x, y) = W(x, y, h(x, y))$$

é um fator integrante inverso do campo vetorial restrito

$$\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}} = (f_1(x, y, h(x, y)), f_2(x, y, h(x, y))).$$

**Demonstração:** Se  $V$  é um múltiplo de Jacobi inverso do campo vetorial  $\mathcal{Y}$ , então  $V$  é solução da equação

$$\mathcal{Y}V = V \operatorname{div} \mathcal{Y},$$

pela Definição 2.2.10. É claro que  $V = 0$  define uma superfície invariante de  $\mathcal{Y}$ . Assim, pelo Lema 2.2.1

$$F = z - h(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad W = 0$$

também são superfícies invariantes de  $\mathcal{Y}$ , e conseqüentemente existem os cofatores suaves associados  $K(x, y, z)$  e  $L(x, y, z)$ , respectivamente. Logo, temos que

$$\mathcal{Y}F = KF, \quad \mathcal{Y}W = LW$$

e além disso,

$$\operatorname{div} \mathcal{Y} = K + L.$$

Definindo a função

$$v(x, y) = W(x, y, h(x, y))$$

e calculando a derivada sobre  $\mathcal{M}$ , obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}})v &= f_1 \frac{\partial v}{\partial x} + f_2 \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + f_2 \left( \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ &= f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + \left( f_1 \frac{\partial h}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned}$$

Da igualdade  $\mathcal{Y}F = KF$ , temos que

$$\mathcal{Y}F = -f_1 \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} - f_2 \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} + f_3,$$

quando restrito à variedade  $\mathcal{M}$ , segue que

$$f_1 \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} + f_2 \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = f_3.$$

Portanto,

$$(\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}})v = f_1 \frac{\partial W}{\partial x} + f_2 \frac{\partial W}{\partial y} + f_3 \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Note que o lado direito desta expressão coincide com o lado esquerdo de

$$\mathcal{Y}W = LW$$

quando restrito a  $\mathcal{M}$ . Assim, obtemos a seguinte expressão

$$(\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}})v = LW = Lv. \tag{3.15}$$

Calculando as derivadas com respeito a  $z$  em

$$\mathcal{Y}F = KF$$

e posteriormente restringindo a  $\mathcal{M}$ , obtemos

$$K = -\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Substituindo esta expressão na identidade

$$L = \operatorname{div} \mathcal{Y} - K,$$

obtemos

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} - \left( -\frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= \operatorname{div} (\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}}). \end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.15) se reduz a

$$(\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}}) v = \operatorname{div} (\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}}) v.$$

Logo,  $v(x, y)$  é um fator integrante inverso do campo vetorial restrito  $\mathcal{Y}|_{\mathcal{M}}$ , pela Definição 2.2.9. E isto finda a prova do teorema. ■

**Proposição 3.2.1** *Qualquer múltiplo de Jacobi inverso não-flat e localmente  $C^\infty$  do sistema (3.13) possui a forma*

$$V(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^k + \dots,$$

para algum  $k \geq 0$ .

A demonstração desta proposição encontra-se em [4].

**Observação 3.2.3** *Veja que a proposição acima garante que os polinômios homogêneos não-nulos de menor grau na expansão de Taylor em torno da origem de algum múltiplo de Jacobi inverso  $C^\infty$  não podem ser quaisquer polinômios.*

Existe uma relação especial entre variedades centrais e múltiplos de Jacobi inversos, e esta será dada no próximo teorema. Quando a origem do sistema (3.13) é um centro, a situação está completamente compreendida: qualquer múltiplo de Jacobi inverso  $C^\infty$ , deve anular-se sobre a variedade central. No caso da origem ser um foco, a situação pode ser um pouco mais complicada. Para maiores detalhes, recomendamos [4].

**Teorema 3.2.3** *Seja  $V$  um múltiplo de Jacobi inverso local  $C^\infty$  do sistema (3.13) e*

$$\mathcal{W}^c = \{z = h(x, y)\}$$

*uma variedade central local  $C^\infty$  na origem. Considere a função restrita à variedade central*

$$V|_{\mathcal{W}^c} : (x, y) \mapsto V(x, y, h(x, y)).$$

Então, as seguintes afirmações são asseguradas:

(i)  $V|_{\mathcal{W}^c}$  é uma função flat na origem;

(ii) Quando  $\mathcal{W}^c \subset V^{-1}(0)$ , isto é,

$$V|_{\mathcal{W}^c} \equiv 0,$$

existe uma função  $W(x, y, z)$ , de classe  $C^\infty$ , tal que

$$W(x, y, h(x, y)) \neq 0,$$

e a seguinte fatoração ocorre

$$V(x, y, z) = (z - h(x, y))W(x, y, z).$$

Além disso,

$$v(x, y) = W|_{\mathcal{W}^c} = W(x, y, h(x, y))$$

é um fator integrante inverso de  $\mathcal{X}|_{\mathcal{W}^c}$ ;

(iii) Se o sistema (3.13) possui um centro na origem, temos que  $\mathcal{W}^c \subset V^{-1}(0)$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4].

O próximo corolário, é uma consequência direta do Teorema 2.5.4, e será de extrema importância na demonstração do nosso principal resultado.

**Corolário 3.2.1** *Considere o sistema tridimensional analítico*

$$\dot{u} = f(u) \tag{3.16}$$

o qual possui um ponto de Hopf em  $u = u^* \in \mathbb{R}^3$ . Este sistema possui um centro em  $u = u^*$  se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local  $V$  em  $u^*$  com

$$\text{grad } V(u^*) \neq 0,$$

onde  $\text{grad } V(u^*)$  é o vetor gradiente de  $V$  em  $u^*$ .

**Demonstração:** Usando a mudança de coordenadas linear inversível

$$\xi = P(u - u^*)$$

e um reescalonamento no tempo, o sistema (3.16) pode ser transformado num sistema da forma (3.13), cuja parte linear está na forma canônica de Jordan. Se denotarmos por  $V$  um múltiplo de Jacobi inverso do sistema (3.16), então

$$\tilde{V}(\xi) = (\det P) V (P^{-1}\xi + u^*)$$

é um múltiplo de Jacobi inverso do sistema transformado. A recíproca também é verdadeira. Em particular, deduzimos que

$$\nabla \tilde{V}(0) = (\det P) \nabla V(u^*) P^{-1}. \quad (3.17)$$

Temos as seguintes equivalências: o sistema (3.16) possui um centro em

$$u = u^*$$

se, e somente se, o sistema transformado da forma canônica (3.13) possui um centro em

$$\xi = 0$$

se, e somente se, admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local  $\tilde{V}$  tal que

$$\nabla \tilde{V}(0) \neq 0$$

se, e somente se, o sistema (3.16) admite um múltiplo de Jacobi inverso analítico local  $V$ , tal que

$$\nabla V(u^*) \neq 0.$$

Ao estabelecer estas equivalências, usamos o Teorema 2.5.4 e a relação (3.17). ■

O próximo teorema confirma a existência de centros para o fluxo do sistema de Lü (3.1) restrito a uma variedade central para os valores dos parâmetros sobre a reta  $\mathcal{C}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a \neq 0, b = 2a, c = c_c\}$  do espaço dos parâmetros.

Equivalentemente ao Teorema 3.2.1, temos que a variedade central a menos de uma mudança de coordenadas são equivalentes. Assim, segue o principal resultado.

**Teorema 3.2.4** *Considere o sistema de Lü (3.1). Os equilíbrios  $\mathcal{Q}_{\pm}$  são centros se, e somente se,  $(a, b, c) \in \mathcal{C}_2$ . Além disso, quando  $(a, b, c) \in \mathcal{C}_2$ ,*

$$V(x, y, z) = x^2 - 2az$$

*é um múltiplo de Jacobi inverso (global),*

$$V(x, y, z) = 0$$

*é uma variedade central (global) para ambos os equilíbrios  $\mathcal{Q}_{\pm}$  e o sistema restrito à variedade central é Hamiltoniano.*

**Demonstração:** Se  $(a, b, c) \in \mathcal{C}_2$ , vimos que o sistema de Lü (3.1) tem a forma (3.7), e os pontos de equilíbrios  $\mathcal{Q}_{\pm}$  são não hiperbólicos. É fácil ver que a função polinomial

$$V(x, y, z) = x^2 - 2az$$

é solução da equação diferencial parcial de primeira ordem

$$a(y - x) \frac{\partial V}{\partial x} + (ay - xz) \frac{\partial V}{\partial y} + (-2az + xy) \frac{\partial V}{\partial z} = -2aV,$$

logo, ela é um múltiplo de Jacobi inverso de (3.7), pela Definição 2.2.10. Temos que

$$\nabla V(\mathcal{Q}_{\pm}) = (\pm 2|a|\sqrt{2}, 0, -2a),$$

o qual não é o vetor nulo. Pelo Corolário 3.2.1, segue que os equilíbrios correspondentes  $\mathcal{Q}_{\pm}$  são centros.

Denote por  $\mathcal{W}^c$  a variedade central em  $\mathcal{Q}_+$  (ou  $\mathcal{Q}_-$ ). Pelo Teorema 3.2.3 (iii), temos que

$$\mathcal{W}^c \subset V^{-1}(0).$$

Esta é uma propriedade geométrica, não importa se o sistema está ou não na forma canônica de Jordan. Portanto,

$$\mathcal{W}^c = x^2 - 2az = 0$$

é de fato uma variedade central (global) para ambas as singularidades  $\mathcal{Q}_\pm$ . Pelo Teorema 3.2.2, segue que

$$v(x, y) = 1$$

é um fator integrante inverso para o sistema de Lü (3.1) restrito a  $\mathcal{W}^c$ . Resolvendo  $\mathcal{W}^c$  em função de  $z$  e substituindo nas duas primeiras equações do sistema (3.7), obtemos o seguinte sistema restrito à variedade central

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = ay - \frac{1}{2a}x^3, \end{cases}$$

o qual é Hamiltoniano, com função Hamiltoniana

$$H(x, y) = axy - \frac{a}{2}y^2 - \frac{1}{8a}x^4.$$

■

Portanto, o Teorema 3.2.4 acima é realmente equivalente ao Teorema 3.2.1, uma vez que ambos confirmam que os equilíbrios  $\mathcal{Q}_\pm$  são centros do sistema de Lü (3.1) ao longo da reta  $\mathcal{C}_2$  do espaço dos parâmetros, dando respostas afirmativas à Conjectura 3.1.1 formulada em [23].

Diante destes resultados, estudaremos no próximo capítulo problemas semelhantes ao encontrado no sistema de Lü (3.1). Em particular, resolveremos o Problema Foco–Centro para uma família a 4–parâmetros de um sistema diferencial quadrático em  $\mathbb{R}^3$ , obtido de uma equação diferencial escalar de terceira ordem. Nossas provas resultaram no artigo [8].

## Capítulo 4

### Centros Sobre uma Variedade

### Central no Sistema Quadrático

### Obtido de uma Equação Diferencial

### Escalar de Terceira Ordem

Neste capítulo estudaremos a dinâmica não-linear de um sistema quadrático no espaço tridimensional, o qual pode ser obtido a partir de uma equação diferencial escalar de terceira ordem. Mais precisamente, estudaremos a estabilidade dos equilíbrios  $E_0$  e  $E_1$  deste sistema quadrático em  $\mathbb{R}^3$  sobre uma variedade central. Daremos respostas afirmativas às questões relacionadas ao Problema Foco-Centro suscitadas em [9], confirmando a presença de centros para o fluxo deste sistema restrito a uma variedade central local [8]. No final deste capítulo, apresentaremos outras soluções distintas, mas equivalentes, para este problema baseadas na existência de múltiplos de Jacobi inversos analíticos [5].

## 4.1 Análise Linear do Sistema

Consideremos a equação diferencial escalar de terceira ordem

$$x''' + f(x)x'' + g(x)x' + h(x) = 0, \quad (4.1)$$

com  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad g(x) = b_1x + b_0, \quad h(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

e  $a_1, a_0, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \neq 0$ . Definindo as variáveis  $y = x'$  e  $z = x''$ , a equação diferencial (4.1) pode ser escrita como o sistema de equações diferenciais não-lineares

$$\begin{cases} x' = P(x, y, z) = y, \\ y' = Q(x, y, z) = z, \\ z' = R(x, y, z) = -((a_1x + a_0)z + (b_1x + b_0)y + c_2x^2 + c_1x + c_0), \end{cases} \quad (4.2)$$

em que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^7$ ,  $c_2 \neq 0$  são parâmetros reais. A escolha de funções afins reais para  $f$  e  $g$ , e uma função quadrática para  $h$  implica que o campo vetorial que define (4.2),

$$\Gamma(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)), \quad (4.3)$$

é um campo vetorial quadrático em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, o sistema (4.2) é uma família a 7-parâmetros de equações diferenciais quadráticas no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Apesar de sua simplicidade, o sistema (4.2) possui um rico comportamento dinâmico local apresentando algumas bifurcações degeneradas.

Nesta dissertação, focalizaremos nossos estudos nas bifurcações de Hopf que ocorrem no sistema (4.2) para certos pontos de equilíbrios. Para maiores detalhes das outras bifurcações do tipo Bogdanov–Takens e fold–Hopf, que também ocorrem neste sistema, recomendamos [9].

Os equilíbrios do sistema (4.2) são dados por  $E_* = (x_*, 0, 0)$ , onde  $x_*$  são os zeros reais da função  $h$ , isto é,  $h(x_*) = 0$ . Como  $h$  é uma função quadrática, podemos ter 0, 1 ou 2 zeros reais. O que implica que o sistema (4.2) possuirá 0, 1 ou 2 pontos de equilíbrio, respectivamente. O comportamento local do fluxo deste sistema é trivial quando não existe ponto de equilíbrio. Porém, o comportamento global do fluxo pode ser muito interessante com o estudo, por exemplo, dos ciclos limites de grandes amplitudes, que são os ciclos limites fora de partes compactas do  $\mathbb{R}^3$ .

Nosso interesse nesta dissertação está somente no caso em que o sistema (4.2) tem 2 pontos de equilíbrio. Portanto, suponha que este sistema possua dois equilíbrios. Então, a função  $h$  tem a forma

$$h(x) = c_2(x - x_0)(x - x_1),$$

com  $c_2 \neq 0$ . Pela seguinte mudança de coordenadas e reparametrização no tempo

$$x = x, \quad y = c_2^{1/3}y, \quad z = c_2^{2/3}z, \quad t = c_2^{1/3}\tau,$$

o sistema (4.2) pode ser escrito com a função  $h$  da forma

$$h(x) = (x - x_0)(x - x_1).$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar  $x_0 = 0$  e  $x_1 = -1$ . Daí, segue-se que o sistema (4.2) possui os equilíbrios  $E_0 = (0, 0, 0)$  e  $E_1 = (-1, 0, 0)$ , e pode ser escrito como

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = -((a_1x + a_0)z + (b_1x + b_0)y + x(x + 1)), \end{cases} \quad (4.4)$$

em que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as variáveis de estado e  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4$  são parâmetros reais.

### 4.1.1 Análise Linear em $E_0$

Estudaremos a estabilidade do equilíbrio  $E_0$  do sistema (4.4) a partir do ponto de vista linear. Considere o conjunto de parâmetros

$$\mathcal{W} = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Segue a seguinte proposição.

**Proposição 4.1.1** *Defina os seguintes subconjuntos de  $\mathcal{W}$*

$$\mathcal{W}_1 = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : a_0 \leq 0\} \cup \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : b_0 \leq 0\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 b_0 < 1\},$$

$$\mathcal{W}_3 = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 b_0 > 1\}.$$

*Então as seguintes afirmações são válidas:*

- (1) *Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_1$ , então o equilíbrio  $E_0$  é instável;*
- (2) *Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_2$ , então o equilíbrio  $E_0$  é instável;*
- (3) *Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_3$ , então o equilíbrio  $E_0$  é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (4.4) em  $E_0$  é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a_0 \lambda^2 + b_0 \lambda + 1.$$

Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_1$ , então o coeficiente  $a_0$  e  $b_0$  de  $p(\lambda)$  são não positivos. Do Lema de *Routh–Hurwitz* 3.1.1 segue que o equilíbrio  $E_0$  é instável. Isto prova o item (1) da proposição. Diante do mesmo Lema 3.1.1, o equilíbrio  $E_0$  é localmente assintoticamente estável se os coeficientes do polinômio característico satisfazem

$$a_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad a_0 b_0 > 1.$$

Assim, se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_2$ , então  $E_0$  é instável e se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}_3$ , então  $E_0$  é localmente assintoticamente estável. Isto prova os itens (2) e (3) da proposição. ■

Defina o conjunto

$$\mathcal{H}_0 = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : a_0 > 0, b_0 > 0, a_0 b_0 = 1\}. \quad (4.5)$$

Então,

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 \cup \mathcal{H}_0.$$

Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0$ , então o equilíbrio  $E_0$  é não hiperbólico, isto é, a matriz Jacobiana do sistema (4.4) em  $E_0$  possui um autovalor real negativo e um par de autovalores imaginários puros

$$\lambda_1 = -\frac{1}{b_0} < 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{b_0}.$$

O conjunto  $\mathcal{H}_0$  é chamado *hipersuperfície de Hopf* do equilíbrio  $E_0$ . Do Teorema da Variedade Central 2.3.1, para o ponto de Hopf  $E_0$  uma variedade central local bidimensional está bem definida, ela é invariante pelo fluxo gerado por (4.4) e pode ser continuada com alta classe de diferenciabilidade para valores de parâmetros próximos. Veja [18].

A variedade central local é atratora, uma vez que  $\lambda_1 < 0$ . Assim, é suficiente estudar a estabilidade de  $E_0$  para o fluxo da família restrito à variedade central.

### 4.1.2 Análise Linear em $E_1$

Agora, estudaremos a estabilidade do equilíbrio  $E_1 = (-1, 0, 0)$  do sistema (4.4) também do ponto de vista linear. O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (4.4) em  $E_1 = (-1, 0, 0)$  é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a_0 - a_1)\lambda^2 + (b_0 - b_1)\lambda - 1.$$

O coeficiente  $-1$  de  $p(\lambda)$  é negativo. Do Lema 3.1.1, segue-se que o equilíbrio  $E_1$  é instável para todos os valores dos parâmetros  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W}$ .

Defina o conjunto

$$\mathcal{H}_1 = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{W} : (a_0 - a_1) < 0, (a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = -1\}. \quad (4.6)$$

Se  $(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_1$ , então a matriz Jacobiana do sistema (4.4) em  $E_1$  possui autovalores

$$\theta_1 = (a_1 - a_0) > 0, \quad \theta_{2,3} = \pm i \frac{1}{\sqrt{a_1 - a_0}}.$$

O conjunto  $\mathcal{H}_1$  é chamado *hipersuperfície de Hopf* do equilíbrio  $E_1$ . Do Teorema da Variedade Central 2.3.1, para o ponto de Hopf  $E_1$  uma variedade central local bidimensional está bem definida, ela é invariante pelo fluxo gerado por (4.4) e pode ser continuada com alta classe de diferenciabilidade para valores de parâmetros próximos.

A variedade central local é repulsora, uma vez que  $\theta_1 > 0$ . Estamos interessados em estudar a estabilidade de  $E_1$  para o fluxo da família restrito à variedade central.

## 4.2 Bifurcações de Hopf do Sistema (4.4)

### 4.2.1 Análise das Bifurcações de Hopf para $E_0$

Nesta subseção, estudaremos as bifurcações de Hopf que ocorrem no equilíbrio  $E_0$  para parâmetros no conjunto  $\mathcal{H}_0$  definido em (4.5). Defina o parâmetro crítico

$$a_{0c} = \frac{1}{b_0} > 0.$$

**Teorema 4.2.1** *Considere o sistema (4.4). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_0$  para valores de parâmetros em  $\mathcal{H}_0$  é dado por*

$$l_1(a_{0c}, b_0, a_1, b_1) = \frac{N(a_{0c}, b_0, a_1, b_1)}{2(b_0 + 5b_0^4 + 4b_0^7)}, \quad (4.7)$$

onde

$$N(a_{0c}, b_0, a_1, b_1) = b_1 - b_0 \left( 2 + b_0 (16b_0^2 + a_1^2 b_0 (-3 + 8b_0^3) - 10b_0 b_1 + b_1^2 + a_1 (1 + 12b_0^2 (-2b_0 + b_1))) \right).$$

Se  $\xi_0 = (a_{0c}, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0$  é tal que  $l_1(\xi_0) \neq 0$ , então o sistema (4.4) possui um ponto de Hopf transversal em  $E_0$  para o vetor de parâmetros  $\xi_0$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9].

Note que o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov (4.7) é determinado pelo sinal do numerador (4.7),  $N(a_{0c}, b_0, a_1, b_1)$ , uma vez que o denominador é positivo.

Se  $\xi_0 = (a_{0c}, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0$  é tal que  $l_1(\xi_0) \neq 0$ , então o sistema (4.4) possui um ponto de Hopf transversal em  $E_0$  para o vetor de parâmetros  $\xi_0$ . Mais precisamente, se  $\xi_0 = (a_{0c}, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0$  é tal que

$$l_1(\xi_0) < 0,$$

então o ponto de Hopf em  $E_0$  é assintoticamente estável (foco atrator fraco para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e para um adequado  $\xi$  próximo de  $\xi_0$ , existe um ciclo limite estável próximo do ponto de equilíbrio instável  $E_0$ . Se  $\xi_0 = (a_{0c}, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0$  é tal que

$$l_1(\xi_0) > 0,$$

então o ponto de Hopf  $E_0$  é instável (foco repulsor fraco para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e para um adequado  $\xi$  próximo de  $\xi_0$ , existe um ciclo limite instável próximo do ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $E_0$ .

A partir de agora, estudaremos a estabilidade do equilíbrio  $E_0$  com a restrição

$$a_1 = 0.$$

Assim, definimos o seguinte subconjunto  $\mathcal{H}_{00}$  da hipersuperfície  $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_{00} = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_0 : a_1 = 0\}.$$

**Corolário 4.2.1** *Considere o sistema (4.4) com valores de parâmetros em  $\mathcal{H}_{00}$ . Se*

$$b_1 = b_{11} = \frac{1 + 8b_0^3}{b_0^2} \quad \text{ou} \quad b_1 = b_{12} = 2b_0,$$

*então, o primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_0$  anula-se, isto é,*

$$l_1(a_{0c}, b_0, 0, b_{11}) = l_1(a_{0c}, b_0, 0, b_{12}) = 0.$$

**Demonstração:** Veja [9], página 11. ■

**Observação 4.2.1** *Do Corolário 4.2.1 acima, é possível verificar que o primeiro coeficiente de Lyapunov anula-se sobre as curvas*

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ (a_0, b_0, b_1) \in \mathcal{H}_{00} : a_0 = \frac{1}{b_0}, b_1 = \frac{1 + 8b_0^3}{b_0^2} \right\}$$

e

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ (a_0, b_0, b_1) \in \mathcal{H}_{00} : a_0 = \frac{1}{b_0}, b_1 = 2b_0 \right\}.$$

Veja Figura 4.1. É simples ver que as curvas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  não se interceptam e dividem a superfície de Hopf  $\mathcal{H}_{00}$  em três componentes conexas

$$\mathcal{H}_{01} = \left\{ (a_0, b_0, b_1) \in \mathcal{H}_{00} : b_1 > \frac{1 + 8b_0^3}{b_0^2} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{02} = \left\{ (a_0, b_0, b_1) \in \mathcal{H}_{00} : 2b_0 < b_1 < \frac{1 + 8b_0^3}{b_0^2} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{03} = \{(a_0, b_0, b_1) \in \mathcal{H}_{00} : b_1 < 2b_0\},$$

onde o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_0$  é fixo, ou seja,

$$l_1(a_{0c}, b_0, 0, b_1) > 0$$

sobre  $\mathcal{H}_{02}$  e

$$l_1(a_{0c}, b_0, 0, b_1) < 0$$

sobre  $\mathcal{H}_{01} \cup \mathcal{H}_{03}$ . Veja Figura 4.1.

O diagrama de bifurcação para  $l_1 < 0$  pode ser encontrado em [18], página 161.

**Observação 4.2.2** *Sabemos que o primeiro coeficiente de Lyapunov é uma função contínua dos parâmetros. Portanto, se  $\xi_{00} = (a_{0c}, b_0, 0, b_1) \in \mathcal{H}_{01}$  então existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_{\xi_{00}}$  de  $\xi_{00}$  na hipersuperfície de Hopf  $\mathcal{H}_0$  tal que  $l_1(\xi_0) < 0$  para todo  $\xi_0 \in \mathcal{V}_{\xi_{00}}$ , uma vez que  $l_1(\xi_{00}) < 0$ . Conclusões análogas são válidas para os outros subconjuntos  $\mathcal{H}_{02}$  e  $\mathcal{H}_{03}$ .*

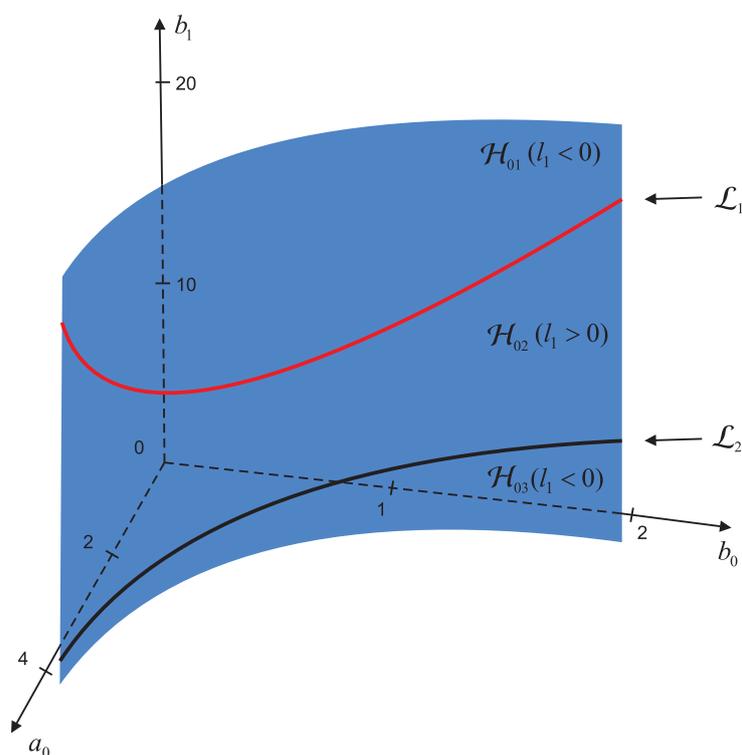


Figura 4.1: A superfície de Hopf  $\mathcal{H}_{00} = \mathcal{H}_0 \cap \{a_1 = 0\}$  para  $E_0$ , os conjuntos  $\mathcal{H}_{01}$ ,  $\mathcal{H}_{02}$ ,  $\mathcal{H}_{03}$  e as curvas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ . Figura proveniente de [9].

Nos dois próximos teoremas, daremos a estabilidade do equilíbrio  $E_0$  para parâmetros sobre as curvas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , respectivamente, os quais encontram-se demonstrados em [9].

**Teorema 4.2.2** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_1$ . Então, o segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_0$  é dado por*

$$l_2(a_{0c}, b_0, 0, b_{11}) = -\frac{9 + 121b_0^3 + 570b_0^6 + 1008b_0^9}{3b_0^5(1 + 14b_0^3 + 49b_0^6 + 36b_0^9)}.$$

Como  $b_0 > 0$ , então  $l_2(a_{0c}, b_0, 0, b_{11}) < 0$  e o sistema (4.4) possui um ponto de Hopf transversal de codimensão 2 em  $E_0$ , o qual é um ponto de equilíbrio estável. O diagrama de bifurcação do sistema (4.4) para um ponto típico sobre a curva  $\mathcal{L}_1$  pode ser encontrado em [18], página 313.

Do Teorema 4.2.2 o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_0$  é sempre negativo em  $\mathcal{L}_1$ . Então, o equilíbrio  $E_0$  é um foco atrator fraco (para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e existem dois ciclos limites, um estável e o outro instável, próximo do equilíbrio  $E_0$  para valores adequados dos parâmetros.

**Teorema 4.2.3** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_2$ . Veja Figura 4.1. Então, o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $E_0$  anulam-se, isto é,*

$$l_2(a_{0c}, b_0, 0, b_{12}) = l_3(a_{0c}, b_0, 0, b_{12}) = 0.$$

Vimos na seção anterior que o equilíbrio  $E_0$  é não hiperbólico quando os parâmetros estão restritos à curva  $\mathcal{L}_2$ , e da Observação 4.2.1 e Teorema 4.2.3, segue que os três primeiros coeficientes de Lyapunov se anulam. Diante de tais condições, surge em [9] a seguinte questão.

**Questão 4.2.1** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_2$ . O equilíbrio  $E_0$  é um centro para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central?*

Esta questão está relacionada com o Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$ . Daremos na seção 4.3 uma resposta afirmativa à esta questão, estudando a existência de uma superfície algébrica invariante e de um múltiplo de Jacobi inverso analítico.

### 4.2.2 Análise das Bifurcações de Hopf para $E_1$

Nesta subseção, estudaremos as bifurcações de Hopf que ocorrem no equilíbrio  $E_1$  para parâmetros no conjunto  $\mathcal{H}_1$  definido em (4.6). Defina o parâmetro crítico

$$b_{0c} = \frac{1}{a_1 - a_0} + b_1.$$

**Teorema 4.2.4** *Considere o sistema (4.4). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  para valores dos parâmetros em  $\mathcal{H}_1$  é dado por*

$$l_1(a_0, b_{0c}, a_1, b_1) = \frac{D(a_0, b_{0c}, a_1, b_1)}{2(-4 + (a_0 - a_1)^3)(-1 + (a_0 - a_1)^3)}, \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} D(a_0, b_{0c}, a_1, b_1) = & \\ & a_0(a_0 - a_1)(2a_0(-8 + a_0^3) + 8a_1 - 11a_0^3a_1 + 21a_0^2a_1^2 - 17a_0a_1^3 + 5a_1^4) \\ & - (a_0 - a_1)^3((a_0 - a_1)^4 - 2a_1 - 10a_0)b_1 - (a_0 - a_1)^5b_1^2. \end{aligned}$$

Se  $\xi_1 = (a_0, b_{0c}, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_1$  é tal que  $l_1(\xi_1) \neq 0$ , então o sistema (4.4) possui um ponto de Hopf transversal em  $E_1$  para o vetor de parâmetros  $\xi_1$ .

**Demonstração:** Veja [9], página 15. ■

Note que o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov (4.8) no Teorema 4.2.4 é determinado pelo sinal da função  $D(a_0, b_{0c}, a_1, b_1)$ , o numerador de  $l_1$ , uma vez que o denominador é positivo.

A partir de agora, estudamos a estabilidade do equilíbrio  $E_1$  com a restrição

$$a_0 = 0.$$

Assim, definimos o seguinte subconjunto da hipersuperfície de Hopf  $\mathcal{H}_1$  para  $E_1$

$$\mathcal{H}_{10} = \{(a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_1 : a_0 = 0\}.$$

**Corolário 4.2.2** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{H}_{10}$ . Então, o primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  é dado por*

$$l_1(0, b_{0c}, a_1, b_1) = \frac{a_1^4 b_1 (-2 + a_1^3 + a_1 b_1)}{2(4 + 5a_1^3 + a_1^6)}.$$

Se

$$b_1 = b_{13} = 0 \quad \text{ou} \quad b_1 = b_{14} = \frac{2 - a_1^3}{a_1},$$

então, o primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  anula-se, isto é,

$$l_1(0, b_{0c}, a_1, b_{13}) = l_1(0, b_{0c}, a_1, b_{14}) = 0.$$

A demonstração deste corolário pode ser encontrada em [9].

Do Corolário 4.2.2, segue que o primeiro coeficiente de Lyapunov anula-se sobre as curvas

$$\mathcal{L}_3 = \left\{ (b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_0 = \frac{1}{a_1}, \quad b_1 = 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{L}_4 = \left\{ (b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_0 = \frac{3 - a_1^3}{a_1}, \quad b_1 = \frac{2 - a_1^3}{a_1} \right\}.$$

Veja Figura 4.2. Estas curvas possuem um único ponto de interseção, a saber

$$P_1 = ((\sqrt[3]{2})^{-1}, \sqrt[3]{2}, 0)$$

e divide a superfície de Hopf  $\mathcal{H}_{10}$  em quatro componentes conexas

$$\mathcal{H}_{11} = \left\{ (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_1 > 0, \quad b_0 > \frac{3 - a_1^3}{a_1} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{12} = \left\{ (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_1 > 0, \quad b_0 < \frac{3 - a_1^3}{a_1} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{13} = \left\{ (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_1 < 0, \quad b_0 < \frac{3 - a_1^3}{a_1} \right\},$$

$$\mathcal{H}_{14} = \left\{ (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{H}_{10} : b_1 < 0, \quad b_0 > \frac{3 - a_1^3}{a_1} \right\},$$

onde o primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  possui sinal fixo:

$$l_1(0, b_{0c}, a_1, b_1) > 0$$

sobre  $\mathcal{H}_{11} \cup \mathcal{H}_{13}$  e

$$l_1(0, b_{0c}, a_1, b_1) < 0$$

sobre  $\mathcal{H}_{12} \cup \mathcal{H}_{14}$ . Veja Figura 4.2.

No próximo teorema, analisamos a estabilidade do equilíbrio  $E_1$  para valores dos parâmetros sobre a curva  $\mathcal{L}_3$ . A sua demonstração encontra-se em [9].

**Teorema 4.2.5** *Considere o sistema (4.4) com valores de parâmetros em  $\mathcal{L}_3$ . Então, o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $E_1$  anulam-se, isto é,*

$$l_2(0, b_{0c}, a_1, b_{13}) = l_3(0, b_{0c}, a_1, b_{13}) = 0.$$

De forma análoga ao equilíbrio  $E_0$ , temos que o equilíbrio  $E_1$  é não hiperbólico para valores dos parâmetros restritos à curva  $\mathcal{L}_3$ , e além disso, os três primeiros coeficientes de Lyapunov se anulam. Diante de tais condições, surge também em [9] a seguinte questão.

**Questão 4.2.2** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_3$ . O equilíbrio  $E_1$  é um centro para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central local?*

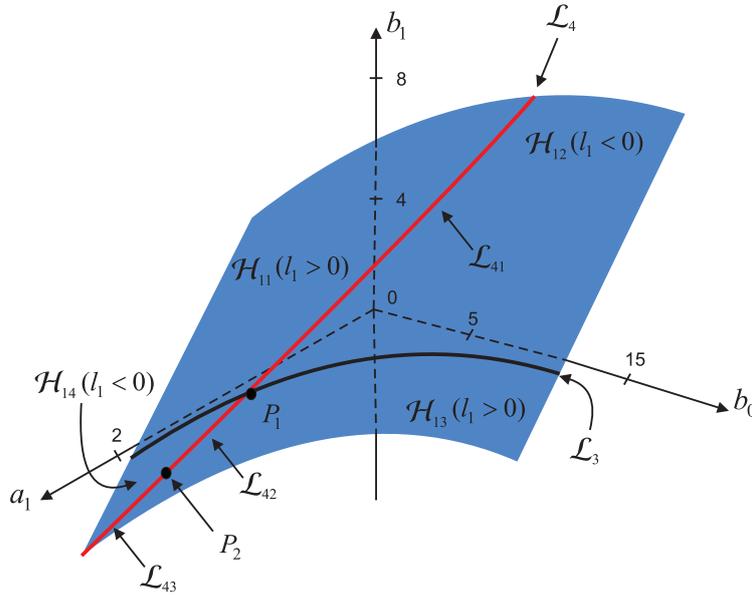


Figura 4.2: A superfície de Hopf  $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H}_1 \cap \{a_0 = 0\}$  para  $E_1$ , os conjuntos  $\mathcal{H}_{11}, \mathcal{H}_{12}, \mathcal{H}_{13}, \mathcal{H}_{14}$  e as curvas  $\mathcal{L}_3$  e  $\mathcal{L}_4$ . Figura proveniente de [9].

Esta questão também está relacionada com o Problema Foco–Centro em  $\mathbb{R}^3$ , e daremos uma resposta afirmativa à esta questão na seção 4.3.

No próximo teorema, estudamos a estabilidade do equilíbrio  $E_1$  para valores dos parâmetros sobre a curva  $\mathcal{L}_4$ . A sua demonstração encontra-se em [9].

**Teorema 4.2.6** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_4$ . Então, o segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  é dado por*

$$l_2(0, b_{0c}, a_1, b_{14}) = -\frac{2a_1^5(a_1^3 - 2)(a_1^6 + 22a_1^3 - 105)}{3(36 + a_1^3(7 + a_1^3))^2}.$$

**Observação 4.2.3** *Quando  $a_0 = 0$ , temos  $a_1 > 0$ , uma vez que  $a_1 - a_0 > 0$  em  $\mathcal{H}_1$ . Assim,*

$$l_2(0, b_{0c}, a_1, b_{14}) = 0$$

*se, e somente se,*

$$a_1 = a_{11} = \sqrt[3]{2} \quad \text{ou} \quad a_1 = a_{12} = \sqrt[3]{\sqrt{226} - 11}.$$

Do Teorema 4.2.6 e Observação 4.2.3 segue que os conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{41} &= \left\{ (b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{L}_4 : 0 < a_1 < \sqrt[3]{2} \right\}, \\ \mathcal{L}_{42} &= \left\{ (b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{L}_4 : \sqrt[3]{2} < a_1 < \sqrt[3]{\sqrt{226} - 11} \right\}, \\ \mathcal{L}_{43} &= \left\{ (b_0, a_1, b_1) \in \mathcal{L}_4 : a_1 > \sqrt[3]{\sqrt{226} - 11} \right\},\end{aligned}$$

são arcos da curva  $\mathcal{L}_4$ , onde o segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  é não nulo. Mais especificamente,

$$l_2(0, b_{0c}, a_1, b_1) < 0$$

sobre  $\mathcal{L}_{41} \cup \mathcal{L}_{43}$  e

$$l_2(0, b_{0c}, a_1, b_1) > 0$$

sobre  $\mathcal{L}_{42}$ . Veja Figura 4.2.

Para os pontos

$$P_1 = \left( (\sqrt[3]{2})^{-1}, \sqrt[3]{2}, 0 \right)$$

e

$$P_2 = \left( \frac{\sqrt{226} - 14}{\sqrt[3]{\sqrt{226} - 11}}, \frac{13 - \sqrt{226}}{\sqrt[3]{\sqrt{226} - 11}}, \sqrt[3]{\sqrt{226} - 11} \right),$$

os segundos coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $E_1$  anulam-se.

Do Teorema 4.2.6, segue que o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  é negativo sobre  $\mathcal{L}_{41} \cup \mathcal{L}_{43}$ . Portanto, o equilíbrio  $E_1$  é um foco atrator fraco (para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e existem dois ciclos limites, um estável e outro instável, próximo do equilíbrio  $E_1$  para valores adequados dos parâmetros. Por outro lado, o sinal do segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio  $E_1$  é positivo sobre  $\mathcal{L}_{42}$ . Portanto, o equilíbrio  $E_1$  é um foco repulsor fraco (para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e existem dois ciclos limites, um instável e outro estável, próximo do equilíbrio  $E_1$  para valores adequados dos parâmetros.

Nos dois próximos teoremas, estudamos a estabilidade do equilíbrio  $E_1$  para parâmetros em  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. As demonstrações dos mesmos podem ser encontradas em [9].

**Teorema 4.2.7** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros para  $P_1$ . Então, o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $E_1$  anulam-se, isto é,*

$$l_2(P_1) = l_3(P_1) = 0.$$

**Teorema 4.2.8** *Considere o sistema (4.4) com valores dos parâmetros para  $P_2$ . Então, o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov associados ao equilíbrio  $E_1$  são dados por*

$$l_2(P_2) = 0$$

e

$$l_3(P_2) = \frac{1728 (\sqrt{226} - 11)^{7/3} (1775502296303\sqrt{226} - 26691643307570)}{144 (430054 - 28843\sqrt{226})^2 (72 + \sqrt{226})} > 0.$$

Do Teorema 4.2.8, segue que o equilíbrio  $E_1$  é um foco repulsor fraco (para o fluxo do sistema (4.4) restrito a uma variedade central) e existem três ciclos limites, um estável e dois instáveis, próximos do equilíbrio  $E_1$  para valores adequados dos parâmetros. Veja o diagrama de bifurcação em [28].

### 4.3 Centros Sobre uma Variedade Central

Nesta seção responderemos às Questões 4.2.1 e 4.2.2 da seção anterior. A primeira resposta, baseou-se na existência de superfícies algébricas invariantes para o sistema (4.4). Nossas provas resultaram no artigo [8]. As outras respostas, as quais são distintas, mas equivalentes à primeira, serão dadas em termos da existência de múltiplos de Jacobi inversos e foram baseadas em [5].

Mostraremos a existência de centros sobre uma variedade central para os equilíbrios  $E_0$  e  $E_1$  do sistema (4.4), dando respostas afirmativas às Questões 4.2.1 e 4.2.2. Como vimos, para valores dos parâmetros em  $\mathcal{L}_2$  ( $\mathcal{L}_3$ , respectivamente), o sistema (4.4) possui um ponto de equilíbrio não hiperbólico em  $E_0$  ( $E_1$ , respectivamente). Portanto, pelo Teorema da Variedade Central 2.3.1, existe uma variedade invariante local bidimensional  $\mathcal{W}_0^c$  ( $\mathcal{W}_1^c$ , respectivamente) numa vizinhança de  $E_0$  ( $E_1$ , respectivamente) que é tangente ao auto-espaço central  $E_0^c$  em  $E_0$  ( $E_1^c$  em  $E_1$ , respectivamente) e contém todo o comportamento recorrente local do sistema. A variedade central  $\mathcal{W}_0^c$  ( $\mathcal{W}_1^c$ , respectivamente) é atratora (repulsora, respectivamente), uma vez que  $\lambda_1 < 0$  ( $\theta_1 > 0$ , respectivamente).

**Teorema 4.3.1** *Para parâmetros em  $\mathcal{L}_2$ , o sistema (4.4) possui uma família de superfícies algébricas invariantes  $\mathcal{A}_{b_0} = F_{b_0}^{-1}(0)$ ,  $b_0 > 0$ , em que*

$$F_{b_0}(x, y, z) = b_0x + z + b_0x^2. \quad (4.9)$$

Além disso,  $\mathcal{W}_0^c \subset \mathcal{A}_{b_0}$  e o fluxo do sistema (4.4) restrito a  $\mathcal{A}_{b_0}$  possui um centro em  $E_0$ .

**Demonstração:** Para parâmetros em  $\mathcal{L}_2$ , temos o campo vetorial associado ao sistema (4.4)

$$\mathcal{X}_{b_0}(x, y, z) = \left( y, z, -(x + b_0y + \frac{1}{b_0}z + x^2 + 2b_0xy) \right). \quad (4.10)$$

É simples ver que

$$\mathcal{X}_{b_0}F_{b_0} = KF_{b_0}$$

para  $F_{b_0}$  em (4.9) e cofator

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{b_0}.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}_{b_0} = F_{b_0}^{-1}(0)$$

é uma superfície algébrica invariante do sistema definido por (4.10) para cada  $b_0 > 0$ , pela Definição 2.2.8. É imediato que  $E_0 \in \mathcal{A}_{b_0}$ . O auto-espaço central  $E_0^c$  em  $E_0$  é gerado pelos

vetores

$$V_{b_0}^1 = \left( -\frac{1}{b_0}, 0, 1 \right), \quad V_{b_0}^2 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{b_0}}, 0 \right).$$

O gradiente de  $F_{b_0}$  em  $E_0$  é dado por

$$\nabla F_{b_0}(E_0) = (b_0, 0, 1).$$

Logo,  $\nabla F_{b_0}(E_0)$  é ortogonal aos vetores  $V_{b_0}^1$  e  $V_{b_0}^2$ . Isto implica que  $W_0^c \subset \mathcal{A}_{b_0}$ .

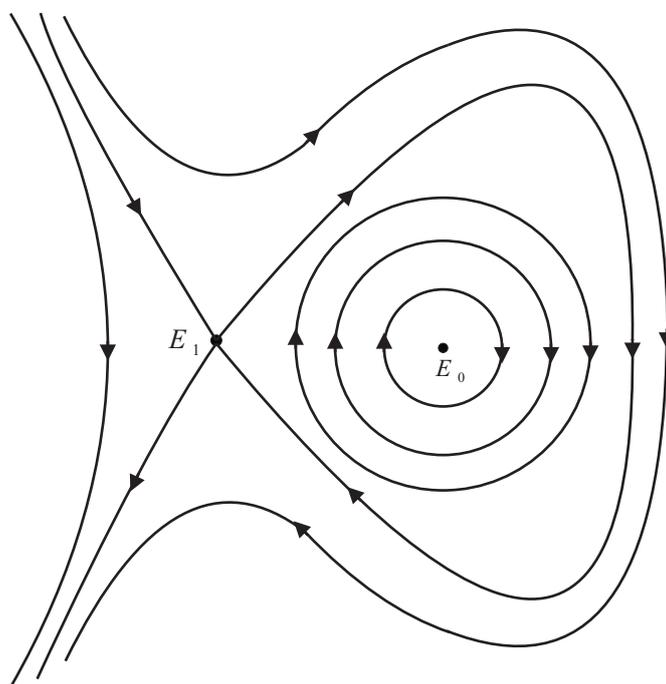


Figura 4.3: Retrato de fase do sistema (4.11). O equilíbrio  $E_0$  é um centro, enquanto o equilíbrio  $E_1$  é uma sela. Note o laço homoclínico em  $E_1$  limitando a região definida do centro.

Resolvendo  $F_{b_0} = 0$  para a variável  $z$  em termos de  $x$  e substituindo nas duas primeiras equações do sistema definido por (4.10), obtemos o sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -b_0x - b_0x^2, \end{cases} \quad (4.11)$$

o qual é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{b_0}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{b_0}{3}x^3.$$

Portanto, o equilíbrio  $E_0$ , o qual poderia ser um foco ou um centro (Problema Foco-Centro), é de fato um centro. E isto responde afirmativamente à Questão 4.2.1 da seção anterior. ■

O retrato de fase do sistema (4.11) está ilustrado na Figura 4.3, a qual pode ser vista como a projeção no plano  $xy$  do retrato de fase do sistema definido por (4.10) sobre a superfície algébrica invariante  $\mathcal{A}_{b_0}$  para cada  $b_0 > 0$ . O retrato de fase do sistema definido por (4.10) em  $\mathcal{A}_{b_0}$  está retratado na Figura 4.4.

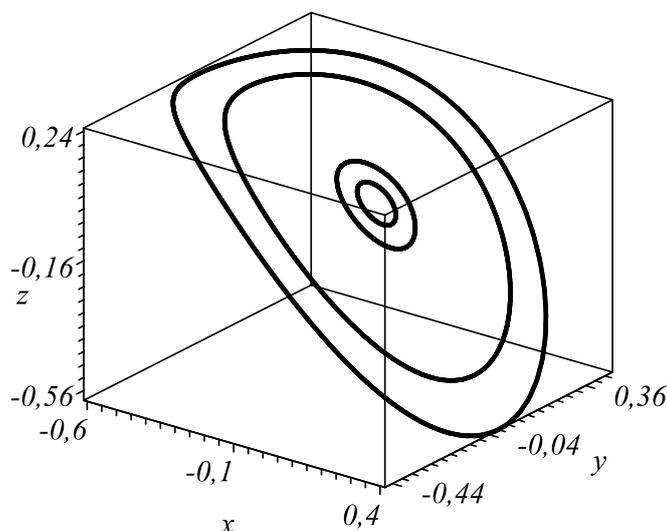


Figura 4.4: Retrato de fase do sistema definido por (4.10) sobre  $\mathcal{A}_{b_0}$  numa vizinhança do equilíbrio  $E_0$ .

O próximo teorema dará uma resposta afirmativa à Questão 4.2.2 da seção anterior.

Para sua demonstração, faremos a seguinte mudança de variáveis

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x, y, z) - (-1, 0, 0),$$

a qual translada o equilíbrio  $E_1 = (-1, 0, 0)$  para  $\bar{E}_1 = (0, 0, 0)$ .

**Teorema 4.3.2** *Para parâmetros em  $\mathcal{L}_3$ , o sistema (4.4), com a mudança de variáveis acima, possui uma família de superfícies algébricas invariantes  $\mathcal{A}_{a_1} = F_{a_1}^{-1}(0)$ ,  $a_1 > 0$ , em que*

$$F_{a_1}(x, y, z) = x + a_1 z. \quad (4.12)$$

Além disso,  $W_1^c \subset \mathcal{A}_{a_1}$  e o fluxo do sistema (4.4), com a mudança de variáveis acima, restrito a  $\mathcal{A}_{a_1}$  possui um centro em  $\bar{E}_1$ .

**Demonstração:** Para parâmetros em  $\mathcal{L}_3$ , com a mudança de variáveis  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x, y, z) - (-1, 0, 0)$ , onde por um abuso de linguagem, retiramos as barras, obtemos o campo vetorial associado ao sistema (4.4)

$$\mathcal{X}_{a_1}(x, y, z) = \left( y, z, -\left(-x + \frac{1}{a_1}y - a_1 z + x^2 + a_1 x z\right) \right). \quad (4.13)$$

É simples ver que

$$\mathcal{X}_{a_1} F_{a_1} = K F_{a_1}$$

para  $F_{a_1}$  em (4.12) e cofator

$$K(x, y, z) = a_1 - a_1 x.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}_{a_1} = F_{a_1}^{-1}(0)$$

é uma superfície algébrica invariante do sistema definido por (4.13) para cada  $a_1 > 0$ . É imediato que  $\bar{E}_1 \in \mathcal{A}_{a_1}$ . O auto-espaço central  $E_1^c$  em  $\bar{E}_1$  é gerado pelos vetores

$$V_{a_1}^1 = (-a_1, 0, 1), \quad V_{a_1}^2 = (0, -\sqrt{a_1}, 0).$$

O gradiente de  $F_{a_1}$  em  $\bar{E}_1$  é dado por

$$\nabla F_{a_1}(\bar{E}_1) = (1, 0, a_1).$$

Logo,  $\nabla F_{a_1}(\bar{E}_1)$  é ortogonal a  $V_{a_1}^1$  e  $V_{a_1}^2$ . Isto implica que  $W_1^c \subset \mathcal{A}_{a_1}$ .

Resolvendo  $F_{a_1} = 0$  para a variável  $z$  em termos de  $x$  e substituindo na primeira e segunda equações do sistema definido por (4.13), temos as seguintes equações diferenciais

$$x' = y, \quad y' = -\frac{1}{a_1}x, \quad (4.14)$$

que é um sistema linear Hamiltoniano, com função Hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{1}{2a_1}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Portanto, o equilíbrio  $E_1$  que agora está na origem, o qual poderia ser um foco ou um centro, é de fato um centro. ■

O retrato de fase do sistema definido por (4.13) sobre  $\mathcal{A}_{a_1}$  está representado na Figura 4.5.

**Observação 4.3.1** *As demonstrações dos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2 mostram-nos que as variedades centrais locais dos equilíbrios  $E_0$  e  $E_1$  são superfícies algébricas regradas. Em particular, as variedades centrais locais do equilíbrio  $E_1$  são planos coincidentes com o auto-espaço central  $E_1^c$ , para cada parâmetro  $a_1 > 0$ . Este é um resultado inesperado.*

Agora, confirmaremos por duas outras maneiras distintas, mas equivalentes à primeira, a existência de centros para valores dos parâmetros sobre as curvas  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  do espaço dos parâmetros, definidas na seção anterior. Ou seja, o próximo Teorema 4.3.3 também dará respostas afirmativas às Questões 4.2.1 e 4.2.2, mostrando a existência de múltiplos de Jacobi inversos analíticos.

Antes de demonstrá-lo, enunciaremos o Corolário 4.3.1, o qual é uma simples consequência do Teorema 2.5.4.

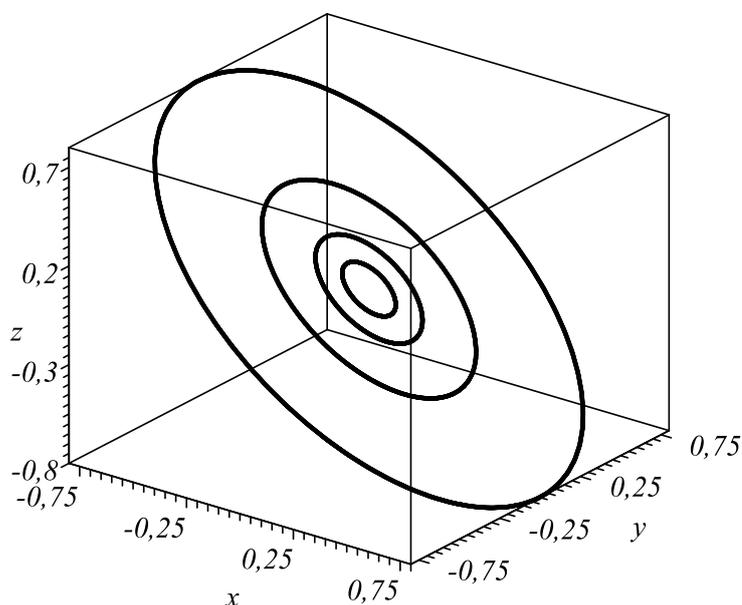


Figura 4.5: Retrato de fase do sistema definido por (4.13) sobre  $\mathcal{A}_{a_1}$  numa vizinhança do equilíbrio  $\bar{E}_1$ .

**Corolário 4.3.1** *Suponha que a parte linear do campo vetorial  $\mathcal{X}$  (3.14) em  $\mathbb{R}^3$  associado ao sistema (3.13) possui a representação*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix},$$

onde  $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e que exista o último múltiplo de Jacobi inverso não-flat e suave  $V(x, y, z)$  de  $\mathcal{X}$  próximo da origem. Se temos a seguinte expansão de Taylor

$$V(x, y, z) = z + \dots,$$

onde os pontos indicam termos de ordem dois ou superiores, então a origem é um centro para  $\mathcal{X}$ .

**Teorema 4.3.3** *Considere a família a 4-parâmetros (4.4) do sistema de equações diferenciais quadráticas em  $\mathbb{R}^3$ . Valem as seguintes afirmações:*

(i) *O equilíbrio  $E_0 = (0, 0, 0)$  é um centro do sistema (4.4) se*

$$b_0 > 0, \quad a_0 = \frac{1}{b_0}, \quad a_1 = 0 \quad e \quad b_1 = 2b_0,$$

*ou seja, ao longo da curva  $\mathcal{L}_2$ .*

(ii) *O equilíbrio  $E_1 = (-1, 0, 0)$  é um centro do sistema (4.4) se*

$$a_0 = b_1 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{a_1} \quad e \quad a_1 > 0,$$

*ou seja, ao longo da curva  $\mathcal{L}_3$ .*

**Demonstração:** Como vimos anteriormente, os equilíbrios do sistema (4.4) são dados por  $E_0 = (0, 0, 0)$  e  $E_1 = (-1, 0, 0)$ . Além disso, estes pontos singulares são pontos de Hopf nos seguintes casos:

✓ Se  $b_0 > 0$  e  $a_0 = \frac{1}{b_0}$ , veja (4.5), o equilíbrio  $E_0$  do sistema (4.4) possui os autovalores associados

$$\lambda_1 = -\frac{1}{b_0}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{b_0}.$$

✓ Se  $a_0 - a_1 < 0$  e  $(a_0 - a_1)(b_0 - b_1) = -1$ , veja (4.6), o equilíbrio  $E_1$  do sistema (4.4) possui os autovalores associados

$$\theta_1 = (a_1 - a_0) > 0, \quad \theta_{2,3} = \pm i \frac{1}{\sqrt{a_1 - a_0}}.$$

Sob as restrições dos parâmetros em (i), o sistema (4.4) possui o último múltiplo de Jacobi inverso

$$V(x, y, z) = z + b_0x(x + 1),$$

pois, pela Definição 2.2.10, verifica-se facilmente que esta função é uma solução da equação diferencial parcial linear

$$y \frac{\partial V}{\partial x} + z \frac{\partial V}{\partial y} - \left( \frac{z}{b_0} + b_0(2x + 1)y + x(x + 1) \right) \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{b_0}V.$$

Fazendo a mudança linear de variáveis

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{1+b_0^3} \begin{pmatrix} -b_0 & 0 & b_0^3 \\ -b_0^5/2 & -(1+b_0^3)b_0^1/2 & -b_0^3/2 \\ b_0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e o reescalonamento no tempo  $t \rightarrow -\sqrt{b_0}t$ , obtemos o sistema (4.4) na sua forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{1}{1+b_0^3} \left( b_0^{1/2}x^2 + 2b_0^2xy - 2b_0^5yz - b_0^{13/2}z^2 \right), \\ \dot{y} = x + \frac{1}{1+b_0^3} \left( -b_0^{-1}x^2 - 2b_0^{1/2}xy + 2b_0^{7/2}yz + b_0^5z^2 \right), \\ \dot{z} = b_0^{-3/2}z + \frac{1}{1+b_0^3} \left( b_0^{-5/2}x^2 + 2b_0^{-1}xy - 2b_0^2yz - b_0^{7/2}z^2 \right), \end{cases} \quad (4.15)$$

possuindo o último múltiplo de Jacobi inverso

$$V(x, y, z) = z + \frac{(x - b_0^3z)^2}{(b_0(1 + b_0^3))}.$$

Aplicando o Corolário 4.3.1, a origem é um centro para o sistema (4.15) e consequentemente do sistema (4.4), provando a afirmação (i).

Sob as restrições dos parâmetros em (ii), o sistema (4.4) possui o último múltiplo de Jacobi inverso

$$V(x, y, z) = 1 + x + a_1z,$$

pois, verifica-se facilmente que esta função é uma solução da equação diferencial parcial linear

$$y \frac{\partial V}{\partial x} + z \frac{\partial V}{\partial y} - \left( a_1xz + \frac{y}{a_1} + x(x+1) \right) \frac{\partial V}{\partial z} = -a_1xV.$$

Transladando o equilíbrio  $(-1, 0, 0)$  para a origem segundo a transformação

$$(x, y, z) \rightarrow (x + 1, y, z),$$

fazendo a mudança linear de variáveis

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{1 + a_1^3} \begin{pmatrix} -a_1^2 & 0 & 1 \\ -a_1^{1/2} & a_1^{-1/2} + a_1^{5/2} & -a_1^{3/2} \\ a_1^2 & 0 & a_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e o reescalonamento no tempo  $t \rightarrow a_1^{-1/2} t$ , reduzimos o sistema (4.4) para a sua forma canônica

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{1}{a_1^{7/2}} z(a_1^3 x - z), \\ \dot{y} = x - a_1 x z + \frac{z^2}{a_1^2}, \\ \dot{z} = \frac{z(a_1^2 + a_1^3 x - z)}{\sqrt{a_1}}. \end{cases} \quad (4.16)$$

o qual possui o último múltiplo de Jacobi inverso

$$V(x, y, z) = z.$$

Pelo Corolário 4.3.1, segue que a origem deste sistema é um centro, e isto finda a prova da afirmação (ii). ■

Faremos agora uma prova alternativa do Teorema 4.3.3. A idéia principal da prova consiste primeiramente obter a partir de  $V$ , a expressão explícita da variedade central analítica  $\mathcal{W}^c(0)$ , para depois verificar se o equilíbrio do sistema restrito à variedade central é de fato um centro.

**Demonstração alternativa:** Para a afirmação (i), resolveremos o Problema Foco–Centro para o sistema equivalente (4.15). Vimos que este sistema admite o último múltiplo de Jacobi inverso

$$V(x, y, z) = b_0(1 + b_0^3)z + (x - b_0^3 z)^2.$$

Portanto,

$$V(x, y, z) = 0$$

define uma superfície algébrica invariante de (4.15), a qual contém a origem e é tangente ao plano  $\{z = 0\}$  neste ponto. Em particular, isto significa que a superfície algébrica invariante é tangente ao auto-espaço central, o plano  $xy$ , na origem. Então, numa vizinhança da origem, existe a variedade central local

$$\mathcal{W}^c \subset V^{-1}(0).$$

Resolvendo  $V = 0$  em função de  $z$  e substituindo nas duas primeiras equações de (4.15), obtemos o sistema (4.15) restrito à variedade central em coordenadas locais

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -y + \frac{1}{4b_0^{7/2}(1+b_0^3)} f_+(x) g(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) = x + \frac{1}{4b_0^5(1+b_0^3)} f_-(x) g(x, y), \end{cases}$$

onde

$$f_{\pm}(x) = \pm 1 \pm b_0^3 \mp \sqrt{1+b_0^3} \sqrt{1+b_0^3-4b_0^2x}$$

e

$$g(x, y) = -1 - b_0^3 + 4b_0^2x + \sqrt{1+b_0^3} \sqrt{1+b_0^3-4b_0^2x} + 4b_0^{7/2}y.$$

Pelo Teorema 3.2.2, segue que a função

$$v(x, y) = \sqrt{1+b_0^3-4b_0^2x} \tag{4.17}$$

é um fator integrante inverso deste sistema restrito, ou seja, o sistema reescalado

$$\dot{x} = \frac{P(x, y)}{v(x, y)}, \quad \dot{y} = \frac{Q(x, y)}{v(x, y)}$$

é Hamiltoniano, donde o resultado segue.

Para a afirmação (ii), notemos que para o sistema equivalente (4.16), a origem é trivialmente um centro. De fato,

$$\mathcal{W}^c(0) = \{z = 0\},$$

e o sistema restrito à variedade central

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x,$$

é um centro linear. Portanto, a afirmação (ii) está provada.

■

**Observação 4.3.2** *Note que  $v(x, y)$  em (4.17) é uma função analítica não nula próxima da origem, isto implica que o sistema restrito à variedade central possui uma integral primeira analítica em torno da origem. Veja o Teorema 2.5.2 (Critério de Reeb) e o Teorema do Centro de Lyapunov–Poincaré 2.5.1. Portanto, a origem é de fato um centro.*

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Nesta dissertação exibimos soluções particulares para o Problema Foco–Centro sobre uma variedade central em  $\mathbb{R}^3$ . Tais soluções foram exibidas por maneiras distintas, mas equivalentes. Isto foi feito mostrando a existência de superfícies algébricas invariantes e múltiplos de Jacobi inversos analíticos, os quais permitiram confirmar a presença de centros para alguns campos vetoriais quadráticos em  $\mathbb{R}^3$ , diante de algumas restrições nos valores dos parâmetros.

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

✓ Resolver o problema foco–centro em  $\mathbb{R}^3$ : exibindo um número finito de condições algébricas para que um ponto de equilíbrio de um sistema diferencial analítico quadrático em  $\mathbb{R}^3$  seja um centro para o fluxo do sistema restrito a uma variedade central.

✓ Estudar o problema foco–centro para sistemas cúbicos de equações diferenciais no plano e em  $\mathbb{R}^3$ .

# Bibliografia

- [1] BAUTIN, N.N., *On the number of limit cycles appearing with variations of the coefficients from an equilibrium state of the type of a focus or a center*, Amer. Math. Soc. Translations, **100** (1954), 1–19.
- [2] BERRONE, L.R. E GIACOMINI, H., *Inverse Jacobi multipliers*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **52** (2003), 77–130.
- [3] BIBIKOV, Y.N., *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 702, Springer–Verlag, New York, 1979.
- [4] BUICA, A., GARCIA, I.A. E MAZA, S., *Existence of inverse Jacobi multipliers around Hopf points in  $\mathbb{R}^3$  : Emphasis on the center problem*, Preprint, (2011).
- [5] BUICA, A., GARCIA, I.A. E MAZA, S., *Centers in a quadratic system obtained from a scalar third order differential equation*, Preprint, (2011).
- [6] CHICONE, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, second edition, Springer–Verlag, New York, 2006.
- [7] COELHO, SINVAL FERREIRA, *Estudo da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf em um Sistema Tipo Lorenz*, Dissertação de Mestrado do Instituto de Ciências Exatas, UNIFEI, 2008.

- [8] CUNHA, W.F. DA, DIAS, F.S. E MELLO, L.F., *Centers on center manifolds in a quadratic system obtained from a scalar third-order differential equation*, Electron. J. Differential Equations, vol. **2011** (2011), No. 136, 1–6.
- [9] DIAS, F.S. E MELLO, L.F., *Analysis of a quadratic system obtained from a scalar third order differential equation*, Electron. J. Differential Equations, vol. **2010** (2010), No. 161, 1–25.
- [10] DULAC, H., *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, J. de l'École Polytechnique, **9** (1904), 1–25.
- [11] DUMORTIMER, F., *Singularities of vector fields on the plane*, J. Differential Equations, **23** (1977) 53–106.
- [12] DUMORTIMER, F., LLIBRE, J. E ARTÉS, J.C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer–Verlag, New York, 2006.
- [13] ÉCALLE, J., *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualites Math., Hermann, Paris, 1992.
- [14] GARCÍA, I.A. E GRAU, M., *A survey on the inverse integrating factor*, Qual. Theory Dyn. Syst., **9** (2010), 115–166.
- [15] GARCIA, I.A. E MAZA, S., *A new approach to center conditions for simple analytic monodromic singularities*, J. Differential Equations, **248** (2010), 363–380.
- [16] IL'YASHENKO, Y.S., *Finiteness Theorems for Limit Cycles*, translated from the Russian by H. H. McFaden, Transl. Math.Monogr., vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

- [17] KAPTEYN, W., *On the centra of the integral curves which satisfy differential equations of the first order and the first degree*, Proc. Kon. Akad. Wet., **13** (1911), 1241–1252.
- [18] KUZNETSOV, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, second edition, Springer–Verlag, New York, 1998.
- [19] LLIBRE, J., *On the integrability of the differential systems in dimension two and of the polynomial differential systems in arbitrary dimension*, Journal of Applied Analysis and Computation, **1** (2011), 33–52.
- [20] LÜ, J. E CHEN, G., *A new chaotic attractor coined*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., **12** (2002), 659–661.
- [21] LÜ, Z. E DUAN, L., *Codimension–2 Bautin bifurcation in the Lü system*, Phys. Lett. A, **366** (2007), 442–446.
- [22] MAHDI, A., PESSOA, C. E SHAFER, D.S., *Centers on center manifolds in the Lü system*, Phys. Lett. A, **375** (2011), 3509–3511.
- [23] MELLO, L.F. E COELHO, S.F., *Degenerate Hopf bifurcations in the Lü system*, Phys. Lett. A, **373** (2009), 1116–1120.
- [24] MOUSSU, R., *Une démonstration d’un théorème de Lyapunov–Poincaré*, Astérisque **98–99** (1982), 216–223
- [25] PONTRYAGIN, L.S., *Ordinary Differential Equations*, Addison–Wesley Publishing Company Inc., 1962.
- [26] REEB, G., *Sur Certaines Propriétés Topologiques des Variétés Feuilletées* in: W.T. Wu, G. Reeb (Eds.), *Sur les Espaces Fibrés et les Variétés Feuilletées*, Tome XI, in: *Actualités Sci. Indust.*, vol. 1183, Hermann et Cie, Paris, 1952.

- [27] SOTOMAYOR, J., Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [28] SOTOMAYOR, J., MELLO, L.F. E BRAGA, D.C., *Bifurcation analysis of the Watt governor system*, Comp. Appl. Math., **26** (2007), 19–44.