

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA**

Maria Fernanda Xavier Pinto Medeiros

**Efeitos da Polarização do Vácuo nas
Imediações de um Solenóide.**

**Dissertação submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física e Matemática Aplicada como
parte dos requisitos para obtenção do Título de
Mestre em Ciências em Física e Matemática
Aplicada.**

**Área de Concentração: Teoria de Campos,
Gravitação e Cosmologia.**

Orientador: Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

**Março de 2012
Itajubá - MG**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Cristiane N. C. Carpinteiro- CRB_6/1702

M488e

Medeiros, Maria Fernanda Xavier Pinto

Efeitos da polarização do vácuo nas imediações de um solenóide. / por
Maria Fernanda Xavier Pinto Medeiros. -- Itajubá (MG) : [s.n.], 2012.

79 p.: il.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Efeito Aharonov-Bohm. 2. Polarização do vácuo. 3. Eletrodinâmica
quântica. I. Rangel, Fabrício Augusto Barone, orient. II. Universidade
Federal de Itajubá. III. Título.

Conteúdo

Sumário	i
I Introdução	3
II O efeito Aharonov Bohm	6
II.1 Efeito Aharonov Bohm e o Experimento de Fenda Dupla	6
II.2 O Potencial de Aharonov Bohm e a Equação de Schrödinger	11
II.3 Efeito Aharonov Bohm na Abordagem de Integral de Caminho de Feynman . . .	13
II.4 Um exemplo simples: uma partícula carregada que se move em torno de um solenóide	16
III Polarização do vácuo e a auto energia do fóton	18
III.1 Cálculo do tensor de polarização da Eletrodinâmica Quântica	18
III.2 Potencial de Uehling	32
IV Polarização do vácuo pela presença do solenóide e consequências	39
IV.1 Correções ao potencial vetor de Aharonov-Bohm	39
IV.2 Fenômenos magnéticos no exterior do solenóide	46
IV.2.1 Efeito Zeeman para um átomo de hidrogênio	46
IV.2.2 Estados ligados de Aharonov-Bohm	50
IV.2.3 Energia e Força de interação entre duas cordas de Dirac	53
V Conclusão	59
A Superposição de dois movimentos harmônicos simples	61
B Efeito Zeeman	62

C	Rotação de Wick	65
D	Notações e Convenções	67
D.1	Unidades	67
D.2	Algumas expansões	67
D.2.1	Binômio de Newton	67
D.2.2	Expansão da exponencial	68
D.2.3	Expansão do logaritmo natural	68
D.3	Relatividade e tensores	68
D.4	Transformadas de Fourier e Distribuições	68
D.5	Regras de Feynman	69
D.6	Regularização por corte no momentum (Cut-off)	70
D.7	Integrais de laço(loop) e Regularização Dimensional	71
D.8	Constantes Físicas	72
D.9	Integrais usadas no texto	73
D.9.1	Integral de π	73
D.9.2	Função de Green tri-dimensional da equação de Helmholtz ($\nabla^2 + k^2$)	73
D.9.3	Função de Green bi-dimensional da equação de Helmholtz modificada ($\nabla^2 - k^2$)	75
D.10	Função Gama	76
	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

II.1	Experimento de interferência de duas fendas.	7
II.2	Função potencial vetor.	8
II.3	Função degrau(II.5)	9
II.4	Função degrau(II.6)	9
II.5	Função campo magnético.	10
II.6	Efeito Aharonov Bohm; um solenóide é colocado entre duas fendas.	13
II.7	Carga movendo-se em anel circular através do qual passa um longo solenóide. . .	16
III.1	Contribuições para o tensor de polarização.	19
III.2	Contribuição total para o propagador do fóton.	21
III.3	Amplitude de espalhamento corrigida.	22
III.4	Integração no plano complexo	30
III.5	Integração sob a parte imaginária	30
III.6	Esquema de pares elétron-pósitron induzidos no vácuo em torno de uma carga 'bare' e_0	38
III.7	$Q(r)$ em função da distância r em unidades de comprimento Compton $\lambda_c =$ $1/m = \lambda/(2\pi)mc \approx 386 fm$	38
IV.1	Esboço da correção do campo magnético fora do solenóide	46
IV.2	Representação do átomo de hidrogênio	47
IV.3	Correção do potencial vetor fora do solenóide	51
IV.4	Disposição dos dois solenóides AB	53
IV.5	Esboço da força entre dois solenóides AB	58
A.1	Amplitude resultante de duas ondas que interferem entre si.	61

C.1	Contorno de integração.	65
D.1	Contornos de integração das equações D.57(a) e D.58(b)	75

Lista de Tabelas

IV.1 Outros valores para o efeito Zeeman	49
--	----

A Deus toda honra e louvor sempre!

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo grande apoio, especialmente minha vó que partiu durante o meu período de estudo.

Agradeço ao professor Fabrício pela oportunidade, por sua paciência durante o desenvolvimento do trabalho, pelo tema proposto, por sua amizade e claro por compartilhar seus ensinamentos comigo.

Agradeço aos meus colegas, Jonas, Marco, Anderson, Luis Henrique, Felipe, Adriano e Mateus pelas excelentes reuniões na sala de estudo que me ajudaram muitíssimo e é claro sem contar no bom humor e amizade.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Agradeço também ao professor Gabriel por tirar minhas dúvidas sobre EDQ.

Ao meu companheiro Lucas pela enorme paciência e ajuda nesta jornada.

A todos os funcionários e outros colegas que indiretamente fizeram parte do processo de aprendizado, meu muito obrigado!

Resumo

O efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno quântico em que a dinâmica de partículas carregadas é influenciada pela existência de campos eletromagnéticos em regiões inacessíveis para a partícula.

Nesse trabalho estudamos fenômenos físicos originados nas imediações de um solenóide infinito e fino, aproximado por uma corda de Dirac, e produzidos pela polarização do vácuo da Eletrodinâmica Quântica.

Em especial, estudamos correções ao efeito Aharonov-Bohm, para o caso de estados ligados, ocasionadas pela polarização do vácuo, o comportamento de átomos nas imediações de um solenóide e a interação entre dois solenóides.

Alguns dos resultados apresentados se caracterizam por serem qualitativos, sendo relevantes para indicar ordens de grandeza para as quantidades calculadas.

Abstract

The Aharonov-Bohm effect is a quantum phenomenon where the dynamics of charged particles is influenced by the existence of electromagnetic fields in regions inaccessible to the particle.

In this work we study physical phenomena arising in the vicinity of an infinite and thin solenoid, taken as a Dirac string, and produced by the vacuum polarization of Quantum Electrodynamics.

In particular, we study corrections to the Aharonov-Bohm effect, for the case of bound states, induced by the vacuum polarization, the behavior of atoms in the vicinity of a solenoid and the interaction between two solenoids.

Some results presented are qualitative and are relevant to indicate orders of magnitude for the calculated quantities.

Capítulo I

Introdução

O efeito Aharonov-Bohm é um fenômeno quântico em que a dinâmica de uma partícula carregada é influenciada pela existência de um campo eletromagnético em regiões nas quais a partícula não pode entrar. A influência destes campos inacessíveis é levado na teoria pelo quadrivetor potencial, o qual aparece na Hamiltoniana e portanto na equação de Schrödinger. Este fenômeno não é intuitivo para muitos físicos pois não possui análogo clássico e também porque muda a percepção convencional de que quantidades físicas no eletromagnetismo podem ser afetadas por campos de Maxwell localizados. Confirmado experimentalmente, o efeito Aharonov-Bohm levanta questões fundamentais a cerca de localidade na mecânica quântica e na interação eletromagnética[1]-[2].

O efeito Aharonov-Bohm foi proposto em 1959 por Yakir Aharonov e David Bohm[3] na qual um feixe coerente de elétrons é direcionado a rodear dois lados de um solenóide e se recombinam novamente em uma área denotada como região de interferência. Existem linhas de indução magnética dentro do solenóide e nenhuma existência delas do lado de fora dele. O efeito se evidencia na região de interferência onde um deslocamento de fase relativo é observado. Na realidade o efeito foi primeiramente testado em 1960[4] e desde então tem sido confirmado em uma série de outros experimentos[5]-[6]-[7].

O experimento não é de fácil realização, pois o solenóide deve ser muito pequeno. Um ferromagneto muito fino chamado de 'whisker' foi usado no experimento original por Chambers (1960) no qual o efeito foi observado e estava de acordo com a predição teórica. Em um novo experimento [8] feito com um aparato diferente que era constituído de um toróide magnético coberto inteiramente com uma camada de supercondutor, fez-se passar sobre ele um feixe

de elétrons. O intuito deste experimento era de fornecer um atestado de validade do efeito Aharonov-Bohm. Assim o resultado experimental detectou um deslocamento de fase relativo, dando evidências conclusivas do efeito Aharonov-Bohm.

É interessante comentar aqui que o efeito Aharonov-Bohm pode ser traduzido em uma versão elétrica e outra versão magnética. No trabalho[9] faz-se um paralelo entre o deslocamento de fase devido a uma linha de dipolos elétricos onde foi primeiramente observado por Matteucci-Pozzi[10] em 1985 e o deslocamento de fase devido a uma linha de dipolos magnéticos, fato observado primeiramente por Chambers em 1960. Existem inúmeros estudos sobre o efeito Aharonov-Bohm mostrando a importância de suas características e aplicações. Um desses estudos é o que acha a amplitude de espalhamento de partículas relativísticas com spin $1/2$ que viajam em regiões que estão sob a influência do potencial de Aharonov-Bohm[11].

Outros fenômenos quânticos também pouco intuitivos do ponto de vista clássico são aqueles relacionados à polarização do vácuo. Classicamente o vácuo é um meio inerte, mas na EDQ o vácuo, dado pelo estado fundamental do campo fermiônico e eletromagnético, pode se comportar como um meio ativo se assemelhando a um meio material [12, 13, 14, 15] no qual podem ocorrer fenômenos físicos como a alteração do potencial coulombiano na interação entre cargas pontuais [12], a birrefringência do vácuo na presença de campos externos [16], o efeito Casimir [17], o efeito Scharnhorst [18], decaimento espontâneo [19], etc.

Essa dissertação se caracteriza por um estudo simples de aspectos relacionados a polarização do vácuo nas imediações de um solenóide infinito. Ao longo do texto vamos tomar o solenóide aproximadamente como uma corda de Dirac, o que equivale a dizer que o solenóide é muito fino.

No capítulo II, introduzimos o efeito Aharonov-Bohm (apenas versão magnética) sob várias abordagens para proporcionar ao leitor uma noção do efeito e suas características.

No capítulo III calculamos o tensor de polarização do vácuo da EDQ. Essa polarização ocorre devido a existência de pares virtuais elétron-pósitron. Usando uma analogia com a eletrodinâmica clássica[20], os físicos assumem heurísticamente que o vácuo é preenchido com dipolos virtuais elétron-pósitron os quais causam uma polarização no vácuo. Não podemos observar diretamente essas flutuações, mas estas podem produzir efeitos físicos de forma indireta, como aqueles mencionados anteriormente.

O capítulo IV é dedicado ao estudo de efeitos de polarização do vácuo da EDQ produzidos

pela presença de fontes externas. Iniciamos com uma discussão do potencial de Uehling que se caracteriza por uma correção ao potencial de Coulomb devido a presença do vácuo fermiônico [12]. Posteriormente consideramos o potencial produzido na região externa de um solenóide muito fino, aproximado por uma corda de Dirac. De certa forma podemos dizer que calculamos a correção no potencial do solenóide de Aharonov-Bohm.

Vale mencionar aqui dois recentes trabalhos [21]-[22] em que se calculou uma modificação no potencial de Coulomb devido a um vácuo fortemente magnetizado. Isto pode ser de grande aplicação para cosmologia visto que muitos dos objetos astronômicos sólidos identificados como estrelas de neutron são fortemente magnetizados.

Com os resultados obtidos no capítulo IV encontramos um campo magnético fora do solenóide. O resultado é consistente com outros encontrados na literatura [23]. Estudamos então alguns aspectos deste campo exterior ao solenóide, como o efeito Zeeman para o átomo de hidrogênio no estado fundamental (aproximando pelo campo médio) e alterações nos níveis de energia de uma partícula restrita a se mover em um anel (correções radiativas ao efeito Aharonov-Bohm de estados ligados). Por fim calculamos a energia de interação entre dois solenóides AB.

Estas são algumas das incontáveis consequências que o surgimento deste campo magnético induzido exterior ao solenóide pode produzir, e caracterizam manifestações físicas exclusivas do vácuo fermiônico.

Capítulo II

O efeito Aharonov Bohm

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma discussão simplificada do efeito Aharonov Bohm, cuja origem é intrinsecamente quântica. Vamos abordar apenas versões magnéticas do efeito¹, causadas pela presença de um solenóide infinito, em suas manifestações de espalhamento e de estado ligado.

Todo este capítulo foi escrito com a intenção de preparar o leitor a se ambientar com o efeito Aharonov Bohm e suas características mais elementares.

Vale lembrar que estamos usando unidades onde $\hbar = c = 1^2$.

II.1 Efeito Aharonov Bohm e o Experimento de Fenda Dupla

No contexto da eletrodinâmica clássica podemos afirmar que o único efeito físico de um campo eletromagnético em uma carga é a força de Lorentz, portanto, esta influência só pode ocorrer em regiões onde \mathbf{E} e/ou \mathbf{B} são não nulos [25].

No contexto da Mecânica Quântica o efeito Aharonov Bohm é uma demonstração de que isto nem sempre é verdade, ou seja, efeitos físicos ocorrem em regiões onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são ambos nulos, mas \mathbf{A} não é.

O efeito Aharonov Bohm foi proposto pela primeira vez [3] em conexão com o experimento

¹Existe uma versão, menos conhecida, do efeito Aharonov-Bohm de origem elétrica [24].

²Ver apêndice D seção 1.

de fenda dupla com elétrons.

Por causa do comportamento ondulatório dos elétrons, quando estes atravessam as fendas e são detectados numa tela, produzem uma imagem de franjas que é uma figura característica da interferência padrão.

Em um experimento típico de fenda dupla, representado na figura (II.1), um feixe de elétrons de comprimento de onda λ , com o correspondente vetor de onda $k = 2\pi/\lambda$, incide perpendicularmente em uma parede de fenda dupla, sendo estas separadas por uma distância a . De acordo com o Princípio de Huygens cada fenda funciona, de forma efetiva, como um emissor de ondas esféricas, emitidas em fase neste caso. Coloca-se um anteparo a uma distância D perpendicular as fendas. No anteparo temos uma onda resultante composta pelas ondas secundárias originadas em cada fenda. A diferença de fase no ponto P , no anteparo, entre os dois caminhos representados na figura abaixo é [26]³

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2), \quad (\text{II.1})$$

o que nos permite concluir

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi, & \text{interferência construtiva} \\ (2n + 1)\pi, & \text{interferência destrutiva} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

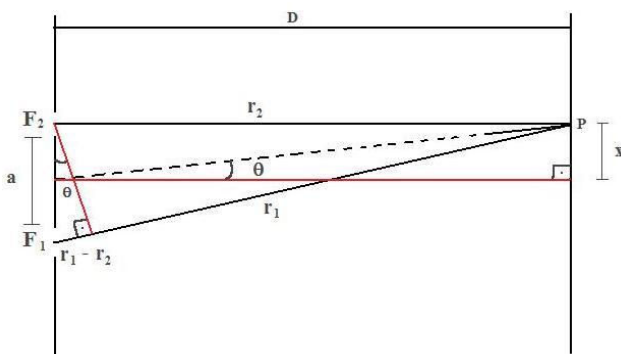


Figura II.1: Experimento de interferência de duas fendas.

Pela figura, temos que $r_1 - r_2 = a \sin \theta$. Com isto,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (\text{II.3})$$

³Para uma breve recordação sugerimos a leitura do Apêndice A.

Se $x \ll D$ então $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D}$: $\delta = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$ e podemos escrever

$$\delta = \frac{ax}{\tilde{\lambda}D} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{D\tilde{\lambda}\delta}{a}, \quad (\text{II.4})$$

onde temos máxima interferência em $\delta = 2n\pi$, e mínima em $\delta = (2n + 1)\pi$.

A idéia de Aharonov Bohm (1959) foi introduzir um pequeno solenóide atrás da parede entre as duas fendas. Existem linhas de indução magnética \mathbf{B} dentro do solenóide e nenhuma do lado de fora. O solenóide é suficientemente fino e considerado impenetrável pelos elétrons, ou seja, os elétrons movem-se sempre em uma região livre de campo magnético. Vale lembrar que o solenide é tomado como sendo suficientemente longo (infinito) tal que o campo magnético é uniforme no seu interior $\mathbf{B}_{int} = \mathbf{B}_0\hat{z}$ e nulo na região exterior $\mathbf{B}_{ext} = 0$.

Vamos agora nos concentrar no campo criado pelo solenóide.

O campo \mathbf{B}_{int} é obtido do rotacional do potencial vetor \mathbf{A}_{int} . Fora do solenóide, apesar do campo magnético ser nulo não podemos ter simplesmente $\mathbf{A}_{ext} = 0$, pois isso resultaria em um potencial descontínuo, dando origem a um campo magnético divergente sob o solenóide. Para termos a continuidade do potencial vetor na região exterior ao solenóide devemos então ter \mathbf{A} em coordenadas cilíndricas, assim

$$\text{dentro do solenóide} \quad \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \frac{B\rho}{2} \end{cases} \quad \text{fora do solenóide} \quad \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \frac{BR^2}{2\rho} \end{cases}$$

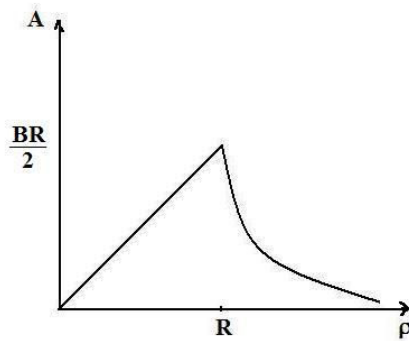


Figura II.2: Função potencial vetor.

onde R é o raio do solenóide.

Com o auxílio da função degrau,

$$\theta(R - \rho) = \begin{cases} 0 & (R < \rho) \\ 1 & (R \geq \rho) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$\theta(\rho - R) = \begin{cases} 0 & (\rho < R) \\ 1 & (\rho \geq R) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

podemos escrever o potencial vetor na forma compacta

$$\mathbf{A} = \left[\frac{B\rho}{2} \theta(R - \rho) + \frac{BR^2}{2\rho} \theta(\rho - R) \right] \hat{\phi}. \quad (\text{II.7})$$

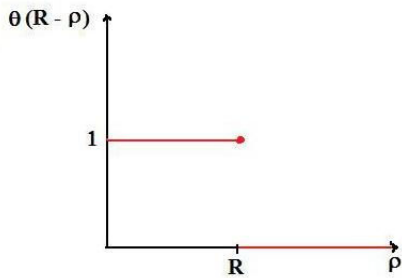


Figura II.3: Função degrau(II.5)

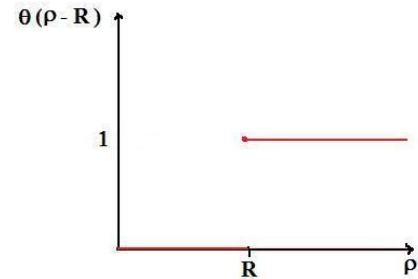


Figura II.4: Função degrau(II.6)

Para encontrar o campo magnético usamos o fato de que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} \hat{z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \left[\frac{B\rho}{2} \theta(R - \rho) + \frac{BR^2}{2\rho} \theta(\rho - R) \right] \right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B\rho^2}{2} \theta(R - \rho) + \frac{BR^2}{2} \theta(\rho - R) \right) \hat{z} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B\rho^2}{2} \theta(R - \rho) \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{BR^2}{2} \theta(\rho - R) \right) \right] \hat{z} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B\rho^2}{2} \right) \theta(R - \rho) + \frac{B\rho^2}{2} \frac{\partial \theta(R - \rho)}{\partial \rho} (-1) + \frac{BR^2}{2} \frac{\partial \theta(\rho - R)}{\partial \rho} \right] \hat{z} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[B\rho \theta(R - \rho) + \frac{B\rho^2}{2} \delta(R - \rho) (-1) + \frac{BR^2}{2} \frac{\partial \theta(\rho - R)}{\partial \rho} \right] \hat{z} \\ &= B\theta(R - \rho) \hat{z}, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

onde foi usado o resultado

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho}(R - \rho) = \delta(R - \rho). \quad (\text{II.9})$$

Assim o campo magnético vem dado por:

$$\text{dentro do solenóide} \quad \begin{cases} B_r = B_\phi = 0 \\ B_z = B_0 \end{cases} \quad \text{fora do solenóide} \quad \begin{cases} \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

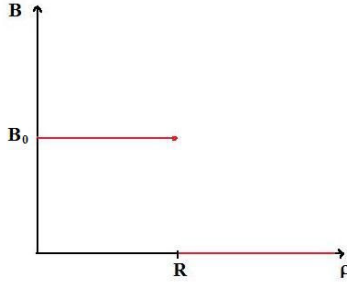


Figura II.5: Função campo magnético.

Agora vamos retornar ao problema inicial e nos perguntar como este campo pode afetar um elétron. Para responder a esta questão usamos o fato de que a função de onda de um elétron em um espaço livre é dada por

$$\Psi = |\Psi| \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \equiv |\Psi| \exp(i\alpha) . \quad (\text{II.10})$$

O efeito da presença de um potencial eletromagnético é mudar \mathbf{p} para

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A} , \quad (\text{II.11})$$

onde e é a carga negativa de um elétron. A fase α da função de onda, então, muda de acordo com

$$\alpha \rightarrow \alpha - e\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} , \quad (\text{II.12})$$

acarretando uma mudança de fase sobre uma trajetória inteira

$$\Delta\alpha = -e \int_{\text{trajetoria}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} . \quad (\text{II.13})$$

Para cada uma das trajetórias 1 e 2 oriundas das funções de onda relacionadas às fontes vindas das fendas 1 e 2, respectivamente, temos a diferença de fase $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha_1 = -e \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \Delta\alpha_2 = -e \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} . \quad (\text{II.14})$$

Sendo assim, a mudança na diferença de fase δ entre as duas funções de onda referentes às duas fendas serão

$$\Delta\delta = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = e \oint_{2-1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = e \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot ds = e \int_s \mathbf{B} \cdot ds = e\Phi_B \quad (\text{II.15})$$

onde $\Phi_B = \pi R^2 B$ é o fluxo magnético através do solenóide.

O padrão de interferência, portanto, tem seus máximos deslocados por uma quantidade ascendente Δx calculada como segue. Seja $x + \Delta x$ as posições dos novos máximos, então

$$x + \Delta x = \frac{D\tilde{\lambda}(\delta + \Delta\delta)}{a} \Rightarrow \Delta x = \frac{D\tilde{\lambda}\Delta\delta}{a} = \frac{D\tilde{\lambda}}{a} e\Phi_B, \quad (\text{II.16})$$

onde usamos o resultado (II.4).

O efeito final, então, se traduz no fato de que a presença do solenóide causa um deslocamento na interferência padrão, ainda que os elétrons apenas se movem através de regiões sem nenhum campo magnético presente. O significado deste efeito é que, no contexto da Mecânica Quântica, um elétron é influenciado pelo potencial vetor \mathbf{A} , ainda que ele viaje inteiramente em regiões onde $\mathbf{B} = 0$. Por outro lado, os efeitos físicos dependem somente do rotacional de \mathbf{A} , então deduzimos que um elétron é influenciado por campos não nulos em regiões inacessíveis a ele.

O efeito Aharonov Bohm é uma importante ilustração da existência das chamadas fases não integráveis [27] e constata a relevância de teorias de calibre em Mecânica Quântica.

II.2 O Potencial de Aharonov Bohm e a Equação de Schrödinger

Considere então uma partícula de carga elétrica q que se move em uma região onde não há campo magnético, ou seja $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$, mas tal que \mathbf{A} em si seja não nulo.

A Hamiltoniana clássica da partícula é dada por [28]

$$H = \frac{1}{2m}(p - q\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}, t), \quad (\text{II.17})$$

onde $V(\mathbf{r}, t)$ é a energia potencial da partícula, que pode, eventualmente, incluir uma contribuição elétrica $q\varphi$. O operador Hamiltoniano associado é obtido de H acima via regras de quantização, de modo que a equação de Schrödinger para a partícula na representação de coordenadas fica dada por

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (\text{II.18})$$

Esta equação pode ser simplificada realizando a seguinte transformação

$$\Psi = e^{if}\Psi', \quad (\text{II.19})$$

onde definimos a fase

$$f(\mathbf{r}) \equiv q \int_{\mathbf{r}_{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' , \quad (\text{II.20})$$

sendo \mathbf{r}_{ref} algum ponto de referência arbitrário. Uma vez que $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, o caminho de integração acima pode ser escolhido arbitrariamente, excluindo-se os casos onde este circunde possíveis singularidades do potencial.

Em termos de Ψ' , o gradiente de Ψ se escreve

$$\nabla \Psi = \nabla(e^{if})\Psi' + e^{if}(\nabla \Psi') = (i\nabla f)e^{if}\Psi' + e^{if}\nabla \Psi' = iq\mathbf{A}\Psi + e^{if}\nabla \Psi' , \quad (\text{II.21})$$

onde no último passo foi usado que $\nabla f = q\mathbf{A}$, como pode ser visto diretamente de Eq.(II.20).

Desse modo, segue que

$$\left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\Psi = \frac{1}{i}(\nabla \Psi - iq\mathbf{A}\Psi) = \frac{1}{i}e^{if}\nabla \Psi' . \quad (\text{II.22})$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2 \Psi &= \left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\Psi = \left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\left(\frac{1}{i}e^{if}\nabla \Psi'\right) \\ &= \frac{1}{i}\left[\frac{1}{i}\nabla \cdot (e^{if}\nabla \Psi') - qe^{if}\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi'\right] \\ &= -1^2 e^{if} [(iq\mathbf{A}) \cdot \nabla \Psi' + \nabla^2 \Psi' - iq\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi'] \\ &= -e^{if}\nabla^2 \Psi' . \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Finalmente, inserindo o resultado (II.23) na equação de Schrödinger (II.18) obtemos

$$\frac{1}{2m}(-e^{if}\nabla^2 \Psi') + Ve^{if}\Psi' = ie^{if}\frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

ou ainda, cancelando o fator comum e^{if} ,

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2 \Psi' + V\Psi' = i\frac{\partial \Psi'}{\partial t} . \quad (\text{II.25})$$

Concluimos assim que Ψ' satisfaz a equação de Schrödinger sem a presença do potencial vetor \mathbf{A} . Se pudermos resolver a equação (II.25) para Ψ' , a solução da equação (II.18) com um potencial vetor (irrotacional) \mathbf{A} , na qual estamos interessados, é obtida de Ψ' simplesmente adicionando o fator de fase $e^{if(\mathbf{r})}$.

Note que não há campo magnético envolvido, por hipótese. É a presença do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ que provoca, de acordo com a mecânica quântica, uma variação de fase local $f(\mathbf{r})$ na função de onda da partícula que está em sua presença.

II.3 Efeito Aharonov Bohm na Abordagem de Integral de Caminho de Feynman

Nesta seção reanalisamos o efeito Aharonov-Bohm em sua abordagem de espalhamento, no contexto de integrais de caminho de Feynman.

Considere uma partícula de carga e que passa acima ou abaixo de um longo cilindro impenetrável[29], como mostra a figura (II.6)

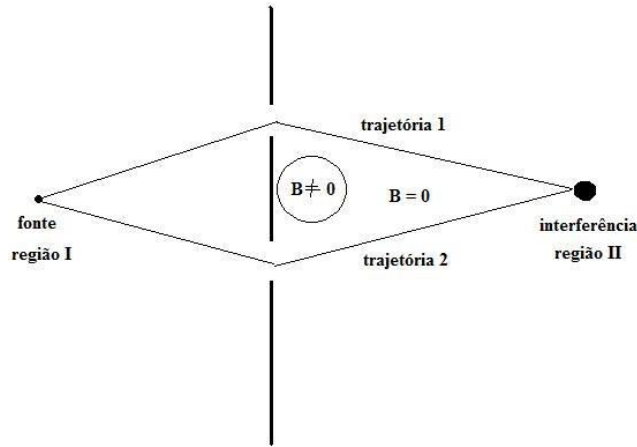


Figura II.6: Efeito Aharonov Bohm; um solenóide é colocado entre duas fendas.

Dentro do cilindro temos um campo magnético paralelo ao eixo do cilindro e normal ao plano da figura (II.6). Nosso objetivo é estudar como a probabilidade de encontrar a partícula na região de interferência II depende do fluxo magnético gerado pelo solenóide.

Da mecânica clássica relembremos que a lagrangiana na presença do campo magnético pode ser obtida da lagrangiana em que o campo magnético está ausente, denotada por $L_{classica}^{(0)}$, como segue

$$L_{classica}^{(0)} = \frac{M}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 \longrightarrow L_{classica}^{(0)} + e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{A} , \quad (\text{II.26})$$

o que acarreta uma mudança na ação, avaliada entre dois pontos, dada por

$$S^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F] \longrightarrow S^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F] + e \int dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{A} . \quad (\text{II.27})$$

Reparametrizando a integral acima, temos que

$$e \int dt \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{A} = e \int_{\mathbf{x}_F}^{\mathbf{x}_I} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} , \quad (\text{II.28})$$

onde $d\mathbf{s}$ é o elemento diferencial de linha ao longo do segmento da trajetória.

A amplitude de transição para a partícula sair do ponto \mathbf{x}_I e atingir o ponto \mathbf{x}_F pode ser representada como uma integral de trajetória de Feynman

$$A(i \rightarrow f) = \int D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]] \left\{ \exp \left[(ie) \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] \right\}. \quad (\text{II.29})$$

Por conveniência, separamos as contribuições das trajetórias que passam por cima e por baixo do solenóide, de acordo com a figura (II.6). Vamos também ignorar as contribuições das trajetórias que circundam o solenóide, uma vez que estas se distanciam muito das trajetórias clássicas e, portanto, contribuem pouco para a amplitude de transição (II.29). Com isto, podemos reescrever a integral (II.29) como

$$\begin{aligned} A(i \rightarrow f) &= \int_{acima} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]] \left\{ \exp \left[(ie) \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{acima} \right\} \\ &+ \int_{abaixo} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]] \left\{ \exp \left[(ie) \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{abaixo} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Cada integral de linha acima contém um fator exponencial que depende do campo magnético através do potencial vetor, ou seja $\exp (ie \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})$. Devido ao fato de que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$ na região de fora do solenóide, onde as trajetórias estão localizadas, as integrais de linha de \mathbf{A} acima do solenóide dependem somente dos pontos extremos \mathbf{x}_I e \mathbf{x}_F e não de uma trajetória específica entre eles. O mesmo raciocínio vale para as integrais abaixo do solenóide. Portanto as exponenciais que contêm \mathbf{A} são independentes das trajetórias sob as quais se está integrando. Com isto temos que

$$\begin{aligned} A(i \rightarrow f) &= \exp \left[ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{acima} \int_{acima} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{acima} \\ &+ \exp \left[ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{abaixo} \int_{abaixo} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{abaixo}. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

A probabilidade da partícula sair do ponto \mathbf{x}_I e atingir o ponto \mathbf{x}_F é dada pelo quadrado do módulo da amplitude de transição ⁴,

$$\begin{aligned} P(i \rightarrow f) &= |A(i \rightarrow f)|^2 \\ &= \left| \exp \left[ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{acima} \int_{acima} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{acima} \right|^2 \end{aligned}$$

⁴ $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + 2Re(z_1 z_2^*)$

$$\begin{aligned}
& + \left| \exp \left[ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{\text{abaixo}} \int_{\text{abaixo}} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{\text{abaixo}} \right|^2 \\
& + 2Re \left[\exp \left(ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \Big|_{\text{acima}} \right) \exp \left(-ie \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \Big|_{\text{abaixo}} \right) \right. \\
& \quad \times \int_{\text{acima}} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{\text{acima}} \\
& \quad \left. \times \left(\int_{\text{abaixo}} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{\text{abaixo}} \right)^* \right]. \tag{II.32}
\end{aligned}$$

As exponenciais na segunda e terceira linha da equação acima não trazem contribuição e podem ser descartadas. As exponenciais na quarta linha podem ser combinadas, de modo a formar uma integral de linha fechada do potencial vetor em torno do solenóide. Esta integral de linha pode ser facilmente calculada como segue

$$\left[(ie) \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{\text{acima}} - \left[(ie) \int_{\mathbf{x}_I}^{\mathbf{x}_F} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right]_{\text{abaixo}} = (ie) \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \pi R^2 ie B = ie \Phi_B, \tag{II.33}$$

onde identificamos o fluxo magnético dentro do solenóide $\Phi_B = \pi R^2 B$.

É importante lembrar que não podemos usar o Teorema de Stokes para transformar a integral $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ em uma integral de superfície do rotacional de $\nabla \times \mathbf{A}$, pois tal teorema não se aplica a um campo com derivadas descontínuas [30].

Usando o resultado (II.33) em (II.32) e as definições

$$\begin{aligned}
A_{\text{abaixo}}(i \rightarrow f) &= \int_{\text{abaixo}} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{\text{abaixo}} \\
A_{\text{acima}}(i \rightarrow f) &= \int_{\text{acima}} D[x(t)] \exp [iS^{(0)}[\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_F]]_{\text{acima}}, \tag{II.34}
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
P(i \rightarrow f) &= |A_{\text{acima}}(i \rightarrow f)|^2 + |A_{\text{abaixo}}(i \rightarrow f)|^2 \\
&\quad + 2Re \left(\exp(ie\Phi_B) A_{\text{acima}}(i \rightarrow f) A_{\text{abaixo}}^*(i \rightarrow f) \right). \tag{II.35}
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos na equação (II.35) correspondem a probabilidade da partícula percorrer uma trajetória acima ou abaixo do solenóide, respectivamente. A segunda linha da equação é um termo de interferência e exibe dependência no campo magnético através do fluxo Φ_B .

O resultado (II.35) mostra como o campo magnético pode influenciar na dinâmica das partículas carregadas muito embora este não esteja definido na região onde as partículas viajam ou, de forma mais correta, onde as funções de onda estão definidas. Enfatizamos que o efeito de interferência discutido aqui é puramente quântico. Note que a interferência pode ser controlada pela variação do fluxo magnético no solenóide. Isto é mais notável porque neste arranjo experimental idealizado, as partículas nunca entram na região onde \mathbf{B} é não nulo. Classicamente, o comportamento dinâmico de partículas carregadas depende unicamente da força de Lorentz, que é zero onde os campos são nulos; já na mecânica quântica, efeitos observáveis dependem da intensidade do campo magnético mesmo que este seja nulo no domínio da função de onda.

II.4 Um exemplo simples: uma partícula carregada que se move em torno de um solenóide

Nesta seção discutimos um exemplo simplificado do efeito Aharonov-Bohm em sua versão de estados ligados.

Seja uma partícula carregada, restrita a mover em um anel de raio b [31]. Perpendicular ao plano do anel, e concêntrico a este, temos um solenóide de raio $R < b$, produzindo um campo magnético \mathbf{B} . Se o solenóide é extremamente longo como já vimos, o campo dentro deste é uniforme e o campo do lado de fora é nulo. O potencial vetor do lado de fora do solenóide é não nulo e igual a

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (r > R) \quad (\text{II.36})$$

onde $\Phi_B = \pi R^2 B$ é o fluxo magnético através do solenóide.

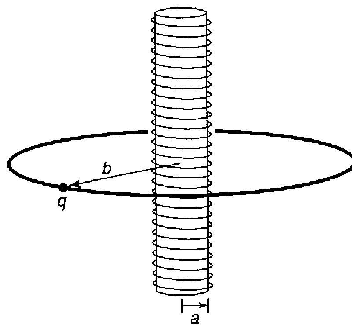


Figura II.7: Carga movendo-se em anel circular através do qual passa um longo solenóide.

Se não existe densidade de cargas, então o potencial escalar é zero. Neste caso a hamiltoniana torna-se

$$H = \frac{1}{2m} [-\nabla^2 + q^2 A^2 + 2iq\mathbf{A} \cdot \nabla] . \quad (\text{II.37})$$

Pela simetria do problema, percebemos que a função de onda depende somente do ângulo azimutal ϕ , ($\theta = \frac{\pi}{2}$) e ($r = b$) então o operador $\nabla \rightarrow \left(\frac{\hat{\phi}}{b} \frac{d}{d\phi}\right)$ e a equação de Schrödinger fica

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{1}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \left(\frac{q\Phi}{2\pi b}\right)^2 + \frac{iq\Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\phi} \right] \Psi(\phi) = E\Psi(\phi) , \quad (\text{II.38})$$

que caracteriza uma equação diferencial linear com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d\Psi}{d\phi} + \epsilon\Psi = 0 , \quad (\text{II.39})$$

onde

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi} \quad \epsilon \equiv 2mb^2 E - \beta^2 . \quad (\text{II.40})$$

As soluções são da forma $\Psi = Ae^{i\lambda\phi}$. Com

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm b\sqrt{2mE} . \quad (\text{II.41})$$

A continuidade de $\Psi(\phi)$, em $\phi = 2\pi$, requer que λ seja um inteiro, portanto

$$\beta \pm b\sqrt{2mE} = n , \quad (\text{II.42})$$

de onde podemos concluir que,

$$E_n = \frac{1}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 , \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) . \quad (\text{II.43})$$

O resultado (II.43) indica que o solenóide quebra a dupla degenerescência da energia da carga em um anel: n positivo representa uma partícula viajando na mesma direção da corrente no solenóide e corresponde a uma energia mais baixa (assumindo q positivo) em comparação com o caso onde não temos o solenóide; n negativo descreve uma partícula viajando em direção oposta à corrente do solenóide. É importante ressaltar que as energias permitidas dependem claramente do campo dentro do solenóide.

Capítulo III

Polarização do vácuo e a auto energia do fóton

Este capítulo é dedicado ao estudo do tensor de polarização do vácuo (fermiônico) e seu conteúdo é conhecido na literatura. Optamos por fazer esta exposição por completeza e para apresentar o assunto de forma didática e auto-consistente de modo a possibilitar a compreensão de leitores iniciantes.

É necessário que o leitor tenha familiaridade com integrais de caminho na teoria do espalhamento em Eletrodinâmica Quântica. Para quem conhece o assunto, esta seção pode ser totalmente omitida.

Obtemos o tensor de polarização do vácuo renormalizado através do método de regularização dimensional.

III.1 Cálculo do tensor de polarização da Eletrodinâmica Quântica

No calibre de Feynman, o propagador do campo eletromagnético livre no espaço de momenta é dado por

$$iD_{F\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} g_{\mu\nu} . \quad (\text{III.1})$$

Na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) considera-se o acoplamento do campo vetorial com o campo dos férmions. Estamos interessados em correções à eletrodinâmica de Maxwell produzi-

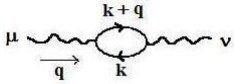
das pelo campo dos férmions, estando este em estado de vácuo. Podemos então integrar o funcional gerador da EDQ no campo de Dirac de modo a obter uma acao contendo apenas o campo vetorial. Infelizmente isso não é possível, uma vez que obteremos um determinante funcional que não pode ser calculado de forma exata. O melhor que podemos fazer é efetuar a integraao nos férmions perturbativamente na constante de acoplamento com o campo vetorial.

Com esse procedimento, o propagador do fóton (no espaço de momenta) é modificado. Se contabilizarmos as contribuioes dos gráficos irredutíveis a uma partícula, escrevemos o propagador do fóton como

$$iD'_{F\mu\nu}(q) = iD_{F\mu\nu}(q) + iD_{F\mu\lambda}(q)i\Pi^{\lambda\sigma}(q)iD_{F\sigma\nu}(q) \quad (\text{III.2})$$

onde $\Pi^{\lambda\sigma}$ é chamado de tensor de polarizaao do vácuo. Pela equaao acima podemos perceber que $\Pi^{\lambda\sigma}(q) = \Pi^{\sigma\lambda}(q)$.

Em ordem mais baixa o tensor $\Pi^{\lambda\sigma}$ so tem a contribuiao de um laço (*loop*) fermiônico[15, 12]:



$$= (-ie)^2 \underbrace{(-1)}_{\uparrow} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\gamma^\mu \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - m} \gamma^\nu \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu + \gamma^\mu q_\mu - m} \right] \equiv i\Pi_2^{\mu\nu}(q). \quad (\text{III.3})$$

Em nossa abordagem, $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ designa a contribuiao de 2^a ordem em e (ordem mais baixa) para $\Pi^{\mu\nu}(q)$.

De forma mais geral, o tensor de polarizaao $i\Pi^{\mu\nu}(q)$ é dado pela contribuiao de todos os gráficos irredutíveis por uma partícula, como indicado na figura (III.1).

Figura III.1: Contribuioes para o tensor de polarizaao.

Vamos iniciar analisando todo o tensor $\Pi^{\mu\nu}(q)$.

A quantidade $\Pi^{\mu\nu}(q)$ é um tensor de *rank* 2 e depende do 4-vetor q^μ . A forma mais geral que $\Pi^{\mu\nu}(q)$ pode ter é dada por

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} f_1(q^2) + q^\mu q^\nu f_2(q^2), \quad (\text{III.4})$$

sendo $f_1(q^2)$ e $f_2(q^2)$ são funçoes a serem determinadas.

Uma dada corrente externa J^μ se acoplada ao campo eletromagnético de acordo com o termo de interação, $-\int d^4x A^\mu J_\mu$ para a ação. A solução clássica para as equações de movimento de Maxwell na presença de fontes é dada por

$$A^\mu(x) = \int d^4y D_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) . \quad (\text{III.5})$$

No espaço de momenta temos que

$$A^\mu(q) = D_{F\mu\nu}(q) J^\nu(q) . \quad (\text{III.6})$$

A invariância de calibre da teoria se traduz no fato de que podemos fazer a alteração

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \quad (\text{III.7})$$

que a teoria continua inalterada, onde $\Lambda(x)$ é uma função escalar arbitrária do espaço-tempo. No espaço de momenta a equação acima se escreve

$$A^\mu(q) \rightarrow A^\mu(q) - iq^\mu \Lambda(q) . \quad (\text{III.8})$$

As correções da EDQ que estamos considerando corrigem a equação (III.6) para

$$\begin{aligned} A'_\mu(q) &= D'_{F\mu\nu}(q) J^\nu(q) \\ &= D_{F\mu\lambda}(q) J^\nu(q) + D_{F\mu\lambda}(q) i\Pi^{\lambda\sigma}(q) D_{F\sigma\nu}(q) J^\nu(q) . \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Substituindo (III.6) em (III.9) obtemos

$$A'_\mu(q) = A_\mu(q) + D_{F\mu\lambda}(q) i\Pi^{\lambda\sigma}(q) A_\sigma(q) . \quad (\text{III.10})$$

Imaginamos agora uma transformação de calibre na forma (III.10), que pode ser implementada pela substituição de (III.8) em (III.10) o que resulta em

$$\begin{aligned} A'_\mu(q) &\rightarrow \left(A_\mu(q) - iq_\mu \Lambda(q) \right) + D_{F\mu\lambda}(q) i\Pi^{\lambda\sigma}(q) A_\sigma(q) + D_{F\mu\lambda}(q) \Pi^{\lambda\sigma}(q) q_\sigma \Lambda(q) \\ &\rightarrow \left(A'_\mu(q) - iq_\mu \Lambda(q) \right) + D_{F\mu\lambda}(q) \Pi^{\lambda\sigma}(q) q_\sigma \Lambda(q) . \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Para que a teoria corrigida pela EDQ continue a exibir invariância de calibre, devemos ter que $A'_\mu(q) \rightarrow A'_\mu(q) - iq_\mu \Lambda(q)$, o que será válido somente se o último termo em (III.11) for nulo. Uma vez que Λ é arbitrário e que $D_{F\mu\lambda}(q)$ não é nulo, devemos ter

$$\Pi^{\lambda\sigma}(q) q_\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0 , \quad (\text{III.12})$$

onde usamos a simetria do tensor de polarização e o resultado obtido é conhecido como identidade de Ward.

Multiplicando a equação (III.4) por q_μ e levando em conta a segunda relação (III.12) somos levados a concluir que

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (\text{III.13})$$

onde $\Pi(q^2)$ é uma função regular em $q^2 = 0$, a ser determinada. Com a definição do operador $\Delta_\nu^\rho \equiv \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}$ o tensor (III.13) pode ser reescrito na forma compacta

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) = q^2 \Delta^{\mu\nu} \Pi(q^2) . \quad (\text{III.14})$$

O propagador exato do fóton (função de dois pontos) deve levar em conta as contribuições de todos os gráficos, como indicado na figura (III.1). Isso pode ser implementado como segue

$$\begin{aligned} D'^{F\mu\nu}(q) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} \\ &+ \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\sigma\lambda}}{q^2} [i(q^2 g^{\lambda\gamma} - q^\lambda q^\gamma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\gamma\nu}}{q^2} \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi^2(q^2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

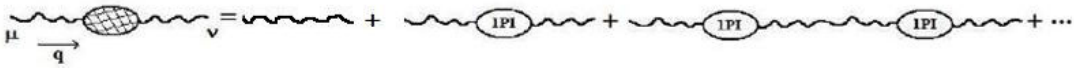


Figura III.2: Contribuição total para o propagador do fóton.

Usando a propriedade $\Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma = \Delta_\nu^\rho$ podemos mostrar que o resultado de todos os produtos envolvendo operadores $\Delta^{\mu\nu}$ e a métrica $g^{\mu\nu}$ que aparecem na equação (III.15) fornecem $\Delta^{\mu\nu}$. Com isso manipulamos a equação (III.15) como segue

$$\begin{aligned} D'^{F\mu\nu}(q) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(g_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{iq_\mu q_\nu}{q^2 q^2} \right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{iq_\mu q_\nu}{q^2 q^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \right) + \frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{iq_\mu q_\nu}{q^2 q^2} \left(\frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \right) - \frac{iq_\mu q_\nu}{q^2 q^2} \\
&= -\frac{i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] - \frac{i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \tag{III.16}
\end{aligned}$$

onde usamos a definição de $\Delta^{\mu\nu}$ e a expansão $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$.

Pode-se mostrar que [15] os termos proporcionais a $q^\mu q^\nu$ não fornecem contribuições físicas, portanto podemos abreviar:

$$D'_{F\mu\nu}(q) = -\frac{i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} g_{\mu\nu}. \tag{III.17}$$

Uma vez que $\Pi(q^2)$ é regular em $q^2 = 0$, o propagador exato tem sempre um pólo em $q^2 = 0$ e o fóton, portanto, permanece sem massa em todas as ordens em teoria de perturbações. Definindo o resíduo do pólo em $q^2 = 0$ como

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} \equiv Z_3 \tag{III.18}$$

a amplitude de espalhamento para $q^2 = 0$ fica corrigida por esse fator,

$$\dots \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots \rightarrow \dots \frac{Z_3 e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots \tag{III.19}$$

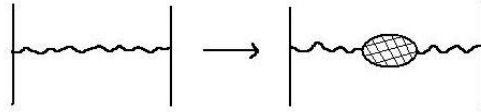


Figura III.3: Amplitude de espalhamento corrigida.

Essa correção pode ser levada em conta escrevendo $e \rightarrow \sqrt{Z_3}e$ que representa a renormalização da carga elétrica. Note em particular que a carga física do elétron medida nos experimentos é $\sqrt{Z_3}e$ a qual chamamos simplesmente de e . De agora em diante, vamos nos referir a carga 'bare' como sendo a quantidade que multiplica o termo $A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ na lagrangiana da eletrodinâmica quântica¹ como e_0 . Temos então

$$\text{carga física} = e = \sqrt{Z_3}e_0 = \sqrt{Z_3} \cdot (\text{carga 'bare'}). \tag{III.20}$$

¹ $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e_0 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$

Além de alterar a intensidade da carga elétrica, o tensor de polarização também introduz uma dependência em q^2 na carga elétrica. Vejamos: considere um processo de espalhamento com q^2 não nulo, e suponha que temos calculado $\Pi(q^2)$ em ordem mais baixa em α^2 , então $\Pi(q^2) \approx \Pi_2(q^2)$. Assim em primeira ordem em α :

$$\frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} \approx \frac{e^2}{Z_3 (1 - \Pi_2(q^2))} \quad (\text{III.21})$$

e

$$Z_3 \equiv \frac{1}{1 - \Pi(0)} \cong \frac{1}{1 - \Pi_2(0)}. \quad (\text{III.22})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} &= \frac{e^2}{[1 - \Pi_2(q^2)] [1 - \Pi_2(0)]^{-1}} \\ &= \frac{e^2}{[1 - \Pi_2(q^2)] [1 + \Pi_2(0) + \Pi_2^2(0) + \dots]} \\ &= \frac{e^2}{[1 - \Pi_2(q^2) + \Pi_2(0) + \dots]}. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Assim, a amplitude para o processo com q^2 diferente de zero deve conter

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e_0^2}{1 - \Pi(q^2)} \right) \underbrace{\equiv}_{\mathcal{O}(\alpha^2)} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e^2}{1 - [\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0)]} \right). \quad (\text{III.24})$$

A quantidade em parênteses pode ser interpretada como uma carga elétrica dependente de q^2 , visto que a correção devido a polarização do vácuo introduz o tensor $\Pi(q^2)$ na expressão da amplitude de espalhamento.

Para calcular o tensor de polarização do vácuo renormalizado em segunda ordem procedemos como segue

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\gamma^\mu k_\mu + \gamma^\mu q_\mu + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Usamos agora as identidades

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(z+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}$$

²constante de estrutura fina

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{[xA+yB]^{n+1}}, \quad (\text{III.26})$$

onde x e y são chamados parâmetros de Feynman, para manipular o denominador da equação (III.25) como segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \\ &\times \frac{1}{[y(k^2 - m^2) + x((k+q)^2 - m^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \\ &\times \frac{1}{[yk^2 - ym^2 + xk^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - xm^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \\ &\times \frac{1}{[(y+x)k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - (y+x)m^2]^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Fazemos agora um deslocamento do momento do laço fermiônico definindo $l^\mu = k^\mu + xq^\mu$ e $l^2 = (k+xq)^2 = k^2 + 2xk \cdot q + x^2q^2$ e uma rotação de Wick³, $l^0 = il_E^0$ ⁴, de modo a escrever a equação (III.25) na forma

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{-1}{2}g^{\mu\nu}l_E^2 + g^{\mu\nu}l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \quad (\text{III.28})$$

onde $\Delta = m^2 - x(1-x)q^2$.

Se usarmos um cut-off $l_E = \Lambda$ para regular a integral acima vemos que ela diverge como

$$\int d^4p \frac{1}{p^2} \sim \int_0^\Lambda dp p \sim \Lambda^2. \quad (\text{III.29})$$

Essa integral é quadraticamente divergente e para computá-la, devemos regularizá-la para isolar a divergência. A forma ingênua de regular a integral através de um corte em um momento grande Λ^5 violaria a identidade de Ward⁶. Outras regularizações preservam a identidade de

³Ver apêndice C.

⁴E(Espaço Euclidiano).

⁵Ver apêndice D seção 6.

⁶No processo de regularização da integral divergente, a invariância de gauge dada pela condição $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$, deve ser mantido.

Ward, como a de Pauli-Villars, onde se faz-se a exigência da introdução de vários férmions tornando o método um tanto complicado. Neste trabalho usaremos um método mais simples, a regularização dimensional. A regularização dimensional preserva as simetrias da Eletrodinâmica Quântica (EDQ) e de várias teorias de calibre (gauge) mais gerais. É um bom momento introduzi-la:

Regularização dimensional⁷

- os diagramas de Feynman são calculados como uma função analítica da dimensão do espaço-tempo $d = 4 - \epsilon$,
- para ϵ suficientemente pequeno, as integrais devem convergir e a identidade de Ward é respeitada,
- no final, qualquer observável deve ter um limite bem definido para $d \rightarrow 4$.

Como exemplo vamos calcular a integral abaixo em um espaço-tempo com 1 dimensão temporal e $(d - 1)$ dimensões espaciais. Iniciamos com uma rotação de Wick, como segue

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \cdot \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{III.30})$$

O primeiro fator acima contém a área de uma esfera unitária em d -dimensões. Para encontrá-la usamos o truque

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int dx e^{-x^2} \right)^d \\ &= \int d^d x \exp \left(- \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(x^2) (x^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-(x^2)} \\ &= \left(\int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

onde usamos uma representação integral para a função Γ [32].

⁷Ver apêndice D seção 7.

Portanto a área de uma esfera unitária d-dimensional é

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (\text{III.32})$$

Esta fórmula reproduz os casos especiais familiares:

d	$\Gamma(\frac{1}{2})$	$\int d\Omega_d$	(III.33)
1	$\sqrt{\pi}$	2	
2	1	2π	
3	$\sqrt{\pi}/2$	4π	
4	1	$2\pi^2$	

Tomando agora apenas a integral na parte radial de (III.30)

$$\int_0^\infty dl \frac{l^{d-1}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l^2) \frac{(l^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l^2 + \Delta)^2} \quad (\text{III.34})$$

e implementamos a mudança de variável

$$x = \frac{\Delta}{l^2 + \Delta} \quad l^2 = \frac{\Delta}{x} - \Delta \quad dl^2 = -\frac{\Delta}{x^2} dx \quad l^2 \Big|_0^\infty \longrightarrow x \Big|_1^0 \quad (\text{III.35})$$

de modo a obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(l^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{\Delta}{x^2} dx \frac{(\Delta/x - \Delta)^{\frac{d}{2}-1}}{(\Delta/x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} (\Delta)^{\frac{d}{2}-1} \int dx \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-\frac{d}{2}} \int dx x^{1-\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}, \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

onde usamos a definição da função Beta [32]

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (\text{III.37})$$

Usando os resultados (III.32) e (III.36) a integral (III.30) é finalmente calculada

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-\frac{d}{2}}. \quad (\text{III.38})$$

Uma vez que $\Gamma(z)$ tem pólos isolados em $z = 0, -1, -2, \dots$, esta integral tem pólos isolados em $d = 4, 6, 8, \dots$. Vamos nos concentrar com o comportamento próximo de $d = 4$, isto é, $\epsilon = 4 - d$ próximo de zero. O fator com Δ é analisado como segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} &= \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{(4-\epsilon)}{2}} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-2+\frac{\epsilon}{2}} = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} = \Delta^{\frac{-\epsilon}{2}} = \exp\left(\ln \Delta^{\frac{-\epsilon}{2}}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\epsilon}{2} \ln \Delta\right) \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \Delta + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

O fator com 4π pode ser expandido de forma semelhante

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{(4-\epsilon)}{2}}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{1}{4\pi} + \dots\right] \\ &\approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} (\ln 1 - \ln 4\pi) + \dots\right] \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi + \dots\right]. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Para o termo em (III.38) que contém a função Γ temos

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2 - \frac{(4-\epsilon)}{2}\right) = \Gamma\left(2 - 2 + \frac{\epsilon}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \quad (\text{III.41})$$

Usando a propriedade $\Gamma(\delta + 1) = \delta \Gamma(\delta)$ e expandindo $\Gamma(\delta + 1)$ em Taylor temos

$$\begin{aligned} \Gamma(\delta + 1) &= 1 + \Gamma'(1)\delta + \frac{1}{2}\Gamma''(1)\delta^2 + \dots \\ &= 1 - \gamma_E \delta + \frac{1}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) \delta^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0,577, \quad (\text{III.43})$$

logo

$$\frac{\Gamma(\delta + 1)}{\delta} = \Gamma(\delta) = \frac{1}{\delta} - \gamma_E + \frac{1}{2} \left(\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) \delta + \dots = \frac{1}{\delta} - \gamma + \mathcal{O}(\delta). \quad (\text{III.44})$$

Usando o resultado acima, com $\delta = \epsilon/2$, em (III.41) encontramos

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{III.45})$$

Com as expansões acima, a integral (III.38) pode ser escrita como

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right). \quad (\text{III.46})$$

O mesmo procedimento pode ser usado para mostrar que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \\ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}. \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Voltando ao cálculo do tensor de polarização do vácuo (III.28), utilizamos os resultados (III.47) e (III.38) de modo a escrever

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = i\Pi_2(q^2) (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \quad (\text{III.48})$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_2(q^2) &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \\ \Pi_2(q^2) \xrightarrow{d \rightarrow 4} &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Como já vimos, o deslocamento da carga elétrica é dado por $\Pi(0)$,

$$e = \sqrt{Z_3} e_0 \quad Z_3 \equiv \frac{1}{1 - \Pi(0)}. \quad (\text{III.50})$$

Em ordem α temos

$$\begin{aligned} \Pi_2(0) &\underset{d \rightarrow 4}{\approx} -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln m^2 \right) \\ &\approx -\frac{4\alpha}{\epsilon\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \approx -\frac{4\alpha}{\epsilon\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) \\ &\approx -\frac{4\alpha}{\epsilon\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \approx -\frac{4\alpha}{\epsilon\pi} \frac{1}{6} \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

A carga 'bare' é infinitamente maior que a carga observada, mas essa diferença não é observável. O que pode ser observado é a dependência em q^2 da carga elétrica efetiva ou, de forma equivalente, na contante de estrutura fina α ,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \rightarrow \alpha_{eff}(q^2) &= \frac{e_0^2}{4\pi(1 - \Pi(q^2))} = \frac{e^2}{Z_3 4\pi(1 - \Pi(q^2))} = \frac{\alpha(1 - \Pi_2(0))}{1 - \Pi(q^2)} \\ &\approx \frac{\alpha}{[1 - \Pi(q^2)][1 + \Pi_2(0)]} \approx \frac{\alpha}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi_2(0)]} = \frac{\alpha}{1 - \Pi^R(q^2)} \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

onde usamos a definição

$$\begin{aligned}\Pi_2^R(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) &\approx -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln [m^2 - x(1-x)q^2] - \frac{2}{\epsilon} + \ln m^2 \right) \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right),\end{aligned}\quad (\text{III.53})$$

que é independente de ϵ no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Chamaremos, daqui por diante, a quantidade $\Pi^R(q^2)$ definida em (III.53) de função de polarização. Após uma simples mudança de variável esta quantidade pode ser reescrita como

$$\Pi_2^R(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left[1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2} \right]. \quad (\text{III.54})$$

Fazendo a integração por partes

$$\begin{aligned}u = \ln \left[1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2} \right] &\rightarrow du = -\frac{\frac{q^2}{m^2} (1-2\beta) d\beta}{1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2}} \\ dv = d\beta\beta(1-\beta) &\rightarrow v = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3}\end{aligned}\quad (\text{III.55})$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta\beta(1-\beta) \ln \left[1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2} \right] &= uv \Big|_{\beta=0}^{\beta=1} - \int_{\beta=0}^{\beta=1} v du \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{3}\beta^3 \right) \frac{1}{1 - \beta(1-\beta) \frac{q^2}{m^2}} \left[-\frac{q^2}{m^2} (1-2\beta) \right].\end{aligned}\quad (\text{III.56})$$

Com uma nova transformação de variável de integração, $v = 2\beta - 1$, e após algumas manipulações simples, temos

$$\Pi^R(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3}v^2\right)}{v^2 + \frac{4m^2}{q^2} - 1}. \quad (\text{III.57})$$

Vamos começar com a seguinte integral

$$\int \frac{dv}{v^2 - c} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\sqrt{c}} \ln \left| \frac{v - \sqrt{c}}{v + \sqrt{c}} \right| & \text{para } c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan \frac{v}{\sqrt{-c}} & \text{para } c < 0 \end{array} \right\}, \quad (\text{III.58})$$

que é válida se o intervalo de integração satisfaz $v \neq \pm c$.

Identificando $c = 1 - 4m^2/q^2$ onde temos que distinguir três regiões separadas do momento quadrado,

$$\begin{aligned}
 \text{Regiao I} \quad -\infty < q^2 < 0 & : & 1 < c < \infty \\
 \text{Regiao II} \quad 0 < q^2 \leq 4m^2 & : & -\infty < c \leq 0 \\
 \text{Regiao III} \quad 4m^2 < q^2 < \infty & : & 0 < c < 1.
 \end{aligned} \tag{III.59}$$

A região III é de particular interesse desde de que aqui um dos pólos do integrando entra no intervalo de integração $v \in [0, 1]$. Para obter um resultado bem definido devemos separar a integral em duas partes: uma parte principal na qual é feita a integração no eixo real e a outra parte na qual a integração é feita contornando o pólo com um semicírculo infinitesimal de raio $i\epsilon$.

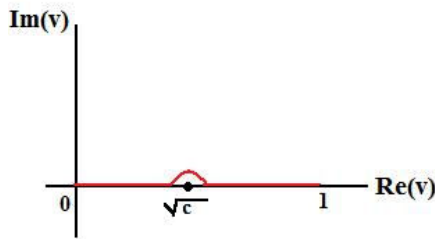


Figura III.4: Integração no plano complexo

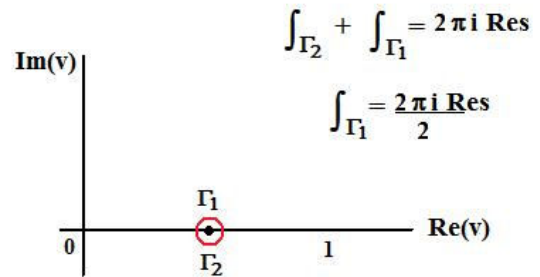


Figura III.5: Integração sob a parte imaginária

Ou seja, a integral definida consiste de uma parte principal mais metade do resíduo do pólo em $v = \sqrt{c}$.

Como estamos considerando somente o intervalo de integração $v \in [0, 1]$, iremos considerar somente o resíduo positivo $v = \sqrt{c}$,

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^1 dv \frac{1}{v^2 - c - i\epsilon} \\
 &= \left[\int_0^{v_0 - \epsilon} + \int_{v_0 + \epsilon}^1 \right] dv \frac{1}{v^2 - c} + \frac{1}{2} 2\pi i \text{Res} \frac{1}{v^2 - c} \Big|_{v_0} \\
 &= P \int_0^1 dv \frac{1}{v^2 - c} + \pi i \frac{1}{2v_0}.
 \end{aligned} \tag{III.60}$$

Então nós obtemos nas três regiões de interesse

$$I_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v - \sqrt{c}}{v + \sqrt{c}} \right| \Big|_0^{v_0 - \epsilon} + \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v - \sqrt{c}}{v + \sqrt{c}} \right| \Big|_{v_0 + \epsilon}^1 & \text{para } 1 < c < \infty \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan \frac{1}{\sqrt{-c}} \Big|_0^{v_0 - \epsilon} + \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan \frac{1}{\sqrt{-c}} \Big|_{v_0 + \epsilon}^1 & \text{para } -\infty < c \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v - \sqrt{c}}{v + \sqrt{c}} \right| \Big|_0^{v_0 - \epsilon} + \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v - \sqrt{c}}{v + \sqrt{c}} \right| \Big|_{v_0 + \epsilon}^1 + \pi i \frac{1}{2v_0} & \text{para } 0 < c < 1 \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Simplificando,

$$I_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{c} - 1}{\sqrt{c} + 1} & \text{para } 1 < c < \infty \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan \frac{1}{\sqrt{-c}} & \text{para } -\infty < c \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}} + i \frac{\pi}{2\sqrt{c}} & \text{para } 0 < c < 1 \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

A integral de classe

$$I_n = \int_0^1 dv \frac{v^n}{v^2 - c - i\epsilon} \quad (\text{III.63})$$

pode ser encontrada a partir de I_0 usando a relação de recorrência

$$I_n - cI_{n-2} = \int_0^1 dv v^{n-2} = \frac{1}{n-1}. \quad (\text{III.64})$$

Para a equação (III.57) temos

$$\begin{aligned} \Pi^R(q^2) &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2 (1 - \frac{1}{3}v^2)}{v^2 + \frac{4m^2}{q^2} - 1} \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2}{v^2 - \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)} - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)v^4}{v^2 - \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Sendo

$$I_2 - cI_0 = \frac{1}{2-1} = 1 \quad I_2 = 1 + I_0 \quad (\text{III.66})$$

e

$$I_4 - cI_2 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \quad I_4 = \frac{1}{3} + cI_2 \quad (\text{III.67})$$

a função (III.65) pode ser manipulada como segue

$$\Pi^R(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi} \left[\int_0^1 dv \frac{v^2}{v^2 - \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)} - \int_0^1 dv \frac{\left(\frac{1}{3}\right)v^4}{v^2 - \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha}{\pi} \left[1 + cI_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + cI_2 \right) \right] \\
&= -\frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{8}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{4m^2}{q^2} + cI_0 \left(1 - \frac{c}{3} \right) \right] \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \left[-\frac{5}{9} - \frac{4}{3} \frac{m^2}{q^2} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) f(q^2) \right], \tag{III.68}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
f(q^2) &= \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1}, \quad q^2 < 0 \\
&= 2\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1} \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}}, \quad 0 < q^2 \leq 4m^2 \\
&= \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} - i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}, \quad 4m^2 < q^2. \tag{III.69}
\end{aligned}$$

O resultado (III.68), bem conhecido na literatura, será de fundamental importância para o desenvolvimento do próximo capítulo.

III.2 Potencial de Uehling

Nesta seção calculamos a correção devido a polarização do vácuo ao potencial produzido por uma carga pontual dada por $-Ze$ [12]. Calcularemos os desvios no potencial de Coulomb a uma distância próxima e a uma distância grande da carga e por fim encontraremos a densidade da carga induzida devido a polarização do vácuo, para isto iniciamos com a identidade

$$(\nabla^2 - \mu^2) \frac{e^{-\mu r}}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{x}). \tag{III.70}$$

A densidade de carga que gera o potencial vem dada por

$$j_\mu(x) = -Ze\delta^3(\mathbf{x})\delta_{\mu 0} = (-Ze\delta^3(\mathbf{x}), 0, 0, 0). \tag{III.71}$$

Com o auxílio do propagador do fóton corrigido $D'_F(x - y)$, calculado na seção anterior, podemos encontrar o potencial corrigido pela polarização do vácuo. Nesse caso é conveniente trabalhar no espaço dos momenta

$$A'_\mu(x) = \int d^4y D'_{F\mu\nu}(x - y) j_\nu(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{F\mu\nu}(p) e^{-ip(x-y)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{j}^\nu(q) e^{-iqy} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{F\mu\nu}(p) \tilde{j}^\nu(q) e^{-ipx} \int d^4y e^{i(p-q)y} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{F\mu\nu}(p) \tilde{j}^\nu(p) e^{-ipx} (2\pi)^4 \delta^4(p-q) \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{F\mu\nu}(p) \tilde{j}^\nu(p) e^{-ipx} .
\end{aligned} \tag{III.72}$$

Utilizando a expressão do propagador do fóton modificado em termos da função de polarização de vácuo renormalizado

$$D'_{F\mu\nu}(q) = -\frac{i}{q^2(1 - \Pi(q^2))} g_{\mu\nu} \approx -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (1 + \Pi^R(q^2)), \tag{III.73}$$

o potencial modificado (III.72) fica

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} (1 + \Pi^R(q^2)) D_{F\mu\nu}(q) j^\nu(q) \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} (1 + \Pi^R(q^2)) A_\mu(q).
\end{aligned} \tag{III.74}$$

onde identificamos a transformada de Fourier do potencial vetor não modificado, $A_\mu(q) = D_{F\mu\nu}(q) j^\nu(q)$.

Se a fonte é estacionária, então: $j^\nu(x) = j^\nu(\bar{x})$. A dependência q_0 em (III.74) torna-se trivial, como segue

$$\begin{aligned}
j^\nu(q) &= \int d^4y e^{iq \cdot y} j^\nu(y) = \int dy_0 e^{iq_0 y_0} \int d^3y e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{y}} j^\nu(\mathbf{y}) \\
&= 2\pi \delta(q_0) j^\nu(\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{III.75}$$

Então (III.74) é reduzida a

$$\begin{aligned}
A'_\mu(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} (1 + \Pi^R(-\mathbf{q}^2)) D_{F\mu\nu}(0, \mathbf{q}) j^\nu(\mathbf{q}) \\
&= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} (1 + \Pi^R(-\mathbf{q}^2)) A_\mu(\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{III.76}$$

onde

$$q^2 = q^\mu q_\nu = q^0 q_0 + q^i q_i = (q^0)^2 - (q^i)^2. \tag{III.77}$$

No caso de uma carga pontual eletroestática (III.71) temos

$$j^\nu(\mathbf{q}) = \int d^3y e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} (-Ze\delta_{\nu 0}\delta^3(\mathbf{y})) = -Ze\delta_{\nu 0} \quad (\text{III.78})$$

então (III.76) torna-se

$$\begin{aligned} A'_\mu(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} (1 + \Pi^R(-\mathbf{q}^2)) D_{F\mu\nu}(0, \mathbf{q}) j^\nu(\mathbf{q}) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} (1 + \Pi^R(-\mathbf{q}^2)) D_{F\mu\nu}(0, \mathbf{q}) (-Ze\delta_{\nu 0}) \\ &= -Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} (1 + \Pi^R(-\mathbf{q}^2)) D_{F\mu 0}(0, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Com a inserção da função de polarização na sua forma integral (III.54) e usando o fato de que $D_{F\mu 0}(0, \mathbf{q}) = -g_{\mu 0}/q^2$ o potencial (III.79) fica agora

$$\begin{aligned} A'_0(\mathbf{x}) &= -Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{q}^2} \\ &\times \left[1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left(1 + \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \beta(1-\beta) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

A transformada de Fourier do primeiro termo produz apenas o potencial de Coulomb,

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{q}^2} = \frac{1}{4\pi r}. \quad (\text{III.81})$$

Para o termo de correção é conveniente eliminar o logaritmo por integração por partes e introduzir uma nova variável de integração $v = 2\beta - 1$. De acordo com (III.57), isto nos leva a

$$\Pi^R(-\mathbf{q}^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2} \int_0^1 dv \frac{v^2 (1 - \frac{1}{3}v^2)}{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1 - v^2)}. \quad (\text{III.82})$$

Depois da troca da ordem de integração em (III.80) a integral de Fourier pode ser resolvida. Para fazer isto, usamos a fórmula⁸

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{q}^2 + a^2} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ar)}{r}, \quad (\text{III.83})$$

a qual é resolvida por integração por resíduo. O potencial se torna então

$$A'_0(x) = -Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{q}^2} [1 + \Pi(-\mathbf{q}^2)]$$

⁸Ver apêndice D.9 seção 2.

$$\begin{aligned}
&= -Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{q}^2} - Ze \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{q}^2} \Pi(-\mathbf{q}^2) \\
&= -\frac{Ze}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{m^2} \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3}v^2\right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}{1 + \frac{\mathbf{q}^2}{4m^2}(1-v^2)} \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{m^2} \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3}v^2\right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}{\frac{1-v^2}{4m^2} \left(\frac{4m^2}{(1-v^2)} + \mathbf{q}^2\right)} \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{\alpha}{m^2} \int_0^1 dv v^2 \frac{(1 - \frac{1}{3}v^2)}{(1-v^2)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})}{\left(\frac{4m^2}{(1-v^2)} + \mathbf{q}^2\right)} \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + 4\alpha \int_0^1 dv v^2 \frac{(1 - \frac{1}{3}v^2)}{(1-v^2)} \frac{1}{4\pi r} \exp\left(\frac{-2mr}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2(1 - \frac{1}{3}v^2)}{1-v^2} \exp\left(\frac{-2mr}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right]. \tag{III.84}
\end{aligned}$$

Uma transformação $\zeta = (1-v^2)^{-1/2}$ ou $v^2 = 1-1/\zeta^2$ com $v dv = \zeta^{-3} d\zeta$ simplifica o expoente acima,

$$v = 1 \rightarrow \zeta = \infty \quad v = 0 \rightarrow \zeta = 1$$

$$\begin{aligned}
A'_0(r) &= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^3} v \frac{(3-v^2)}{(1-v^2)} e^{-2m\zeta r} \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{3} \int_1^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^4} \zeta^2 \sqrt{\zeta^2-1} 2 e^{-2m\zeta r} \right] \\
&= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\zeta \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right) \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2} e^{-2m\zeta r} \right]. \tag{III.85}
\end{aligned}$$

Esta é a representação integral comumente usada para o potencial de Uehling. A integral acima não pode ser calculada exatamente. Neste caso, faremos uma análise do comportamento do termo de correção achando expressões assintóticas para os casos onde $mr \ll 1$ e $mr \gg 1$.

Caso $mr \ll 1$

Primeiro dividimos a primeira integral em (III.85) no ponto τ em duas partes:

$$\int_1^\infty d\zeta e^{-2mr\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2} \equiv \int_1^\tau \dots + \int_\tau^\infty \dots \equiv I_1 + I_2 \tag{III.86}$$

onde escolhemos o intervalo de τ da forma: $1/mr \gg \tau \gg 1$.

Na integral I_1 a exponencial pode ser aproximada como constante, ($\exp(-2mr\zeta) \approx 1$),

$$I_1 \cong \int_1^\tau d\zeta \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} = \left[-\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} + \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right]_1^\tau \cong \ln(2\tau) - 1. \quad (\text{III.87})$$

Na segunda integral podemos aproximar $\sqrt{\zeta^2 - 1} \approx \zeta$, pois o intervalo de integração agora é muito maior que 1 e então

$$I_2 \approx \int_\tau^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} e^{-2mr\zeta}. \quad (\text{III.88})$$

Depois de uma integração por partes temos,

$$\begin{aligned} I_2 &\cong e^{-2mr\zeta} \ln \zeta \Big|_\tau^\infty + 2mr \int_\tau^\infty d\zeta \ln \zeta e^{-2mr\zeta} \\ &= -e^{-2mr\tau} \ln \tau + \int_{2mr\tau}^\infty du \ln \frac{u}{2mr} e^{-u} \\ &\cong -\ln \tau + \int_0^\infty du \ln u e^{-u} + \ln \frac{1}{2mr} \int_0^\infty du e^{-u} \\ &= -\ln \tau - C - \ln 2 + \ln \frac{1}{mr}, \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

onde usamos o fato de que $\int_0^\infty du \ln u \exp(-u) = C = 0,5772\dots$ é a constante negativa de Euler. Portanto

$$I_2 \cong -\ln 2\tau + \ln \frac{1}{mr} - C. \quad (\text{III.90})$$

Quando I_1 e I_2 , dados por (III.87) e (III.90), são acrescidos a dependência no valor de τ se cancela.

A integral remanescente em (III.85), que não tem ainda sido levada em conta em (III.86), não causa qualquer problema pois esta converge para ζ . Tomando a exponencial como constante temos

$$\int_1^\infty d\zeta e^{-2mr\zeta} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\zeta^4} \cong \int_1^\infty d\zeta \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\zeta^4} = \frac{1}{2} \frac{(\zeta^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3\zeta^3} \Big|_1^\infty = \frac{1}{6}. \quad (\text{III.91})$$

Os resultados (III.87) (III.90) e (III.91) fornecem a aproximação assintótica para o potencial

$$\begin{aligned} A'_0(r) &= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\zeta \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} \right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} e^{-2m\zeta r} \right] \\ &= -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(+\ln \frac{1}{mr} - C - 1 + \frac{1}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cong -\frac{Ze}{4\pi r} \underbrace{\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{1}{mr} - \frac{5}{6} - C\right)\right]}_{Q(r)} \quad mr \ll 1, \quad (\text{III.92})$$

É comum interpretar o resultado (III.92) como o potencial de Coulomb de uma carga efetiva dependente da distância, $-ZeQ(r)$.

Caso $mr \gg 1$

Neste caso somente a região $0 \leq \zeta - 1 \ll 1/mr$ contribui a integral em (III.85), o que justifica aproximar $\zeta \cong 1$,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty d\zeta \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} e^{-2mr\zeta} &\cong \int_1^\infty d\zeta \frac{3}{2} \sqrt{\zeta + 1} \sqrt{\zeta - 1} e^{-2mr\zeta} \\ &\cong \int_1^\infty d\zeta \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{\zeta - 1} e^{-2mr\zeta} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-2mr} \int_0^\infty d\zeta' \sqrt{\zeta'} e^{-2mr\zeta'}, \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

onde fizemos a transformação de variável $\zeta' = \zeta - 1$ na última linha.

Com a representação integral da função gamma

$$\int_0^\infty dt e^{-at} t^{z-1} = a^{-z} \Gamma(z), \quad (\text{III.94})$$

o resultado $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ e a aproximação (III.93), o potencial (III.85) se torna

$$\begin{aligned} A'_0(r) &\cong -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-2mr} \int_0^\infty d\zeta' \sqrt{\zeta'} e^{-2mr\zeta'}\right)\right] \\ &\cong -\frac{Ze}{4\pi r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-2mr} (2mr)^{-3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right] \\ &\cong -\frac{Ze}{4\pi r} \underbrace{\left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right]}_{Q(r)} \quad mr \gg 1 \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

onde $Q(r)$ é uma função que tende a 1 muito rapidamente para grandes distâncias, de acordo com (III.95). O resultado (III.95) pode ser interpretado como sendo o potencial coulombiano de uma carga efetiva $-ZeQ(r)$.

Os desvios do potencial coulombiano são perceptíveis somente se r é menor do que o comprimento de onda Compton do elétron. Portanto, somente a distâncias extremamente pequenas a função $Q(r)$ desvia consideravelmente do valor 1. Esse fato pode ser visto na figura (III.7).

Do conhecimento do potencial $A_0(\mathbf{x})$ podemos encontrar a correspondente densidade de carga de polarização, com o uso da equação de Poisson. Portanto, com a representação de integral (III.85) do potencial de Uehling a distribuição de carga da polarização do vácuo temos

$$\begin{aligned}\rho_{vp}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 A_0^{vp} \\ &= -\frac{1}{4\pi}(-Ze)\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty d\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\nabla^2\left(\frac{e^{-2mr\zeta}}{r}\right).\end{aligned}\quad (\text{III.96})$$

Da identidade (III.70) temos que

$$\begin{aligned}(\nabla^2 - \mu^2)\frac{e^{-\mu r}}{r} &= -4\pi\delta^3(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\frac{e^{-\mu r}}{r} - \mu^2\frac{e^{-\mu r}}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \nabla^2\frac{e^{-\mu r}}{r} &= -4\pi\delta^3(\mathbf{x}) + \mu^2\frac{e^{-\mu r}}{r},\end{aligned}\quad (\text{III.97})$$

e fazendo $\mu = 2m\zeta$, a equação (III.96) fornece

$$\rho_{vp}(\mathbf{x}) = -Ze\frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^\infty d\zeta\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\left[\delta^3(\mathbf{x}) - \frac{m^2}{\pi}\zeta^2\frac{e^{-2mr\zeta}}{r}\right].\quad (\text{III.98})$$

A carga de vácuo induzida então consiste de duas componentes: existe uma carga positiva e uma carga negativa que se estende sobre uma região do tamanho do comprimento de onda Compton $1/m$, lembrando que nesta ordem de grandeza que a polarização do vácuo é perceptível. A figura (III.6) mostra uma representação esquemática da distribuição dos pares virtuais e^+e^- induzidos no vácuo.

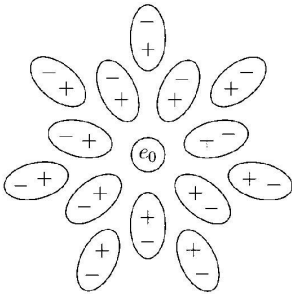


Figura III.6: Esquema de pares elétron-pósitron induzidos no vácuo em torno de uma carga 'bare' e_0 .

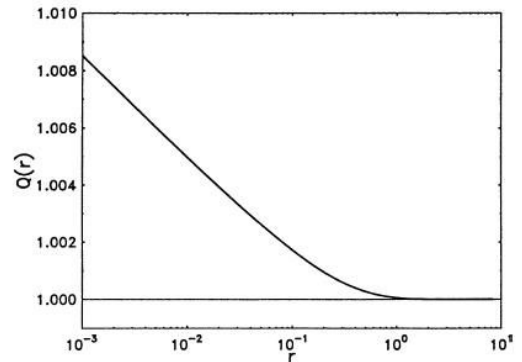


Figura III.7: $Q(r)$ em função da distância r em unidades de comprimento Compton $\lambda_c = 1/m = \lambda/(2\pi)mc \approx 386fm$

Capítulo IV

Polarização do vácuo pela presença do solenóide e consequências

Neste capítulo consideramos correções ao potencial eletromagnético produzidas pela polarização do vácuo no exterior de um solenóide infinito e muito fino, aproximado por uma corda de Dirac. Consideramos as correções para o campo eletromagnético e algumas de suas consequências físicas. Em específico, consideramos as alterações nos níveis de energia de um átomo de hidrogênio, correções ao efeito Aharonov-Bohm na versão de estados ligados e por fim estudamos a interação entre dois solenóides finos.

Todos os efeitos são muito pequenos, uma vez que os campos no lado exterior ao solenóide diminuem muito rapidamente com a distância do mesmo.

IV.1 Correções ao potencial vetor de Aharonov-Bohm

Vamos iniciar calculando correções ao potencial de Aharonov-Bohm introduzidas pela polarização do vácuo da EDQ. Estaremos sempre nos restringindo à situação de um solenóide muito fino, de modo que vamos aproximá-lo por uma corda de Dirac. Essa aproximação justifica-se se estivermos suficientemente afastados do solenóide, de modo a desprezar seu raio. Os resultados obtidos podem ser considerados sem restrições se estivermos pensando em uma corda de Dirac genuína.

Começemos pela expressão do potencial vetor de AB (Aharonov-Bohm) fora do solenóide

$$\mathbf{A} = \frac{BR^2}{2\rho} \hat{\phi}, \quad (\text{IV.1})$$

onde R é o raio do solenóide. Escrevendo este potencial para coordenadas cartesianas

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} = -\frac{y}{\rho} \hat{x} + \frac{x}{\rho} \hat{y}, \quad (\text{IV.2})$$

então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{BR^2}{2\rho} \left(-\frac{y}{\rho} \hat{x} + \frac{x}{\rho} \hat{y} \right), \quad \rho = x^2 + y^2 \\ &= \frac{BR^2}{2\rho^2} (-y\hat{x} + x\hat{y}) \\ &= \frac{BR^2}{2} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{y} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Assim, o quadrivetor potencial se escreve

$$\begin{aligned} A^\mu = A^\mu(\vec{x}_\perp) &= \frac{BR^2}{2} \left(0, -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \\ &= \frac{\Phi}{2\pi} \left(0, -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

onde $\Phi = B\pi R^2$ é o fluxo magnético de dentro do solenóide.

O quadrivetor no espaço dos momenta vem dado por,

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}^\mu(p) e^{-ip \cdot x}. \quad (\text{IV.5})$$

Por transformada de Fourier temos,

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\mu(p) &= \int d^4x A^\mu(x) e^{ip \cdot x} = \int d^4x A^\mu(\vec{x}_\perp) e^{ip \cdot x} \\ &= \int dx^0 e^{ip^0 x^0} \int dx^3 e^{-ip^3 x^3} \int d^2\vec{x}_\perp A^\mu(\vec{x}_\perp) e^{-i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \int d^2\vec{x}_\perp A^\mu(\vec{x}_\perp) e^{-i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp), \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

onde definimos

$$\mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) = \int d^2\vec{x}_\perp A^\mu(\vec{x}_\perp) e^{-i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}. \quad (\text{IV.7})$$

Assim, a segunda componente do quadrivetor $\mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp)$ pode ser calculada como segue,

$$\mathcal{A}^1(\vec{p}_\perp) = \frac{\Phi}{2\pi} \int dx dy \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) e^{-ip_x x} e^{-ip_y y}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Phi}{2\pi} \int dx dy \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial p_y} \right) \frac{1}{x^2 + y^2} e^{-ip_x x} e^{-ip_y y} \\
&= -i \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_y} \int dx dy \frac{1}{x^2 + y^2} e^{ip_x x} e^{ip_y y} \\
&= -i \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_y} \int d^2 \vec{x}_\perp \frac{1}{\vec{x}_\perp^2} e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\
&= -i \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_y} \lim_{m \rightarrow 0} \int d^2 \vec{x}_\perp \frac{1}{\vec{x}_\perp^2 + m^2} e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\
&= -i \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_y} \lim_{m \rightarrow 0} [2\pi K_0(m|\vec{p}_\perp|)] , \tag{IV.8}
\end{aligned}$$

onde introduzimos um parâmetro regularizador m , usamos o resultado presente na referência [33] para a integral acima, K_0 designa a função de Bessel K de ordem zero e definimos o momento perpendicular ao solenóide

$$\vec{p}_\perp = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} . \tag{IV.9}$$

Expandindo a função de Bessel K_0 , designando a constante de Euler por γ_E e introduzindo um parâmetro arbitrário P com dimensão de momento, podemos manipular o resultado (IV.8) como segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^1(\vec{p}_\perp) &= -\Phi i \frac{\partial}{\partial p_y} \lim_{m \rightarrow 0} \left(-\gamma_E - \ln \left(\frac{m|\vec{p}_\perp|}{2} \right) + \ln P - \ln P \right) \\
&= -\Phi i \frac{\partial}{\partial p_y} \lim_{m \rightarrow 0} \left(-\gamma_E - \ln \frac{m}{2} + \ln |\vec{p}_\perp| + \ln P - \ln P \right) \\
&= -\Phi i \frac{\partial}{\partial p_y} \lim_{m \rightarrow 0} \left(-\gamma_E - \ln \frac{m}{2} P - \ln \frac{|\vec{p}_\perp|}{P} \right) \\
&= i\Phi \frac{p_y}{|\vec{p}_\perp|^2} . \tag{IV.10}
\end{aligned}$$

De forma semelhante, o mesmo ocorre para terceira componente do quadri vetor $\mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp)$,

$$\mathcal{A}^2(\vec{p}_\perp) = -i\Phi \frac{p_x}{|\vec{p}_\perp|^2} . \tag{IV.11}$$

Com os resultados (IV.10) e (IV.11) temos

$$\mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) = i\Phi \frac{1}{|\vec{p}_\perp|^2} (0, p_y, -p_x, 0) , \tag{IV.12}$$

e o potencial vetor (IV.6) se torna

$$\tilde{A}^\mu(p) = (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) = (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) i\Phi \frac{1}{|\vec{p}_\perp|^2} (0, p_y, -p_x, 0). \quad (\text{IV.13})$$

Com os mesmos argumentos usados na seção (III.2) para justificar a equação (III.74), e o potencial (IV.13) podemos escrever

$$\begin{aligned} A'^\mu(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [1 + \Pi^R(p^2)] \tilde{A}^\mu(p) e^{-ip \cdot x} \\ &= \int \frac{dp^0}{(2\pi)} \int \frac{dp^3}{(2\pi)} \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} [1 + \Pi^R((p^0)^2, \vec{p}_\perp^2, (p^3)^2)] \\ &\quad \times (2\pi)^2 \delta(p^0) \delta(p^3) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{-ip^0 x^0} e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{ip^3 x^3}, \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

logo o quadrivetor potencial toma a forma

$$\begin{aligned} A'^\mu(\vec{x}_\perp) &= \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} [1 + \Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0)] \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} + \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \left(\int d^2 \vec{y}_\perp \mathcal{A}^\mu(\vec{y}_\perp) e^{-i\vec{p}_\perp \cdot \vec{y}_\perp} \right) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} + \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{y}_\perp \mathcal{A}^\mu(\vec{y}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{y}_\perp)} + \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= A^\mu(\vec{x}_\perp) + \Delta A^\mu(\vec{x}_\perp), \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

onde a última parcela corresponde ao termo de correção do quadrivetor potencial e expressa-se

$$\Delta A^\mu(\vec{x}_\perp) = \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0) \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}. \quad (\text{IV.16})$$

É importante ressaltar que o potencial vetor no exterior do solenóide (IV.15) é dado pelo potencial vetor sem correções $A^\mu(\vec{x}_\perp)$ mais um acréscimo (IV.16) originado pela polarização do vácuo.

Para encontrarmos explicitamente a correção (IV.16), vamos escrever o tensor de polarização do vácuo

$$\Pi^R(p^2) = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left[1 - \beta(1-\beta) \frac{p^2}{m^2} \right] \quad (\text{IV.17})$$

em uma forma mais conveniente. Para isso iniciamos com uma integração por partes,

$$u = \ln \left[1 - \beta(1 - \beta) \frac{p^2}{m^2} \right], \quad (\text{IV.18})$$

$$du = \frac{1}{1 - \beta(1 - \beta) \frac{p^2}{m^2}} (2\beta - 1) \frac{p^2}{m^2} d\beta \quad (\text{IV.19})$$

e

$$dv = d\beta \beta(1 - \beta) \quad v = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \quad (\text{IV.20})$$

assim o tensor adquire a forma

$$\Pi^R(p^2) = -\frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \right) (2\beta - 1) \frac{1}{1 - \beta(1 - \beta) \frac{p^2}{m^2}} \frac{p^2}{m^2}. \quad (\text{IV.21})$$

Procedemos agora com a transformação de variáveis,

$$s = 2\beta - 1 \Rightarrow \beta = \frac{s+1}{2} \Rightarrow d\beta = \frac{1}{2} ds, \quad (\text{IV.22})$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \Pi^R(p^2) &= -\frac{2e^2}{\pi} \int_{-1}^1 ds \frac{(2s + 3s^2 - s^4)}{3 \cdot 16} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(1 - s^2) \frac{p^2}{m^2}} \frac{p^2}{m^2} \\ &= -\frac{2e^2}{\pi} \int_{-1}^1 ds \frac{1}{8} \left(\frac{s}{3} + \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{6} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(1 - s^2) \frac{p^2}{m^2}} \frac{p^2}{m^2} \\ &= -\frac{e^2}{\pi} \frac{p^2}{m^2} \frac{1}{8} \int_{-1}^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(1 - s^2) \frac{p^2}{m^2}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Um vez que estamos interessados em $\Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0)$, temos

$$\Pi^R(0, \vec{p}_\perp^2, 0) = \frac{e^2}{\pi} \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3} \right) \frac{1}{1 + (1 - s^2) \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2}}. \quad (\text{IV.24})$$

Substituindo agora o resultado (IV.24) em (IV.16) obtemos

$$\Delta A^\mu(\vec{x}_\perp) = \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{\pi} \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3} \right) \frac{1}{1 + (1 - s^2) \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2}} \mathcal{A}^\mu(\vec{p}_\perp) e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}. \quad (\text{IV.25})$$

Os resultados (IV.12) e (IV.25) nos permitem calcular a componente 1 do quadrivetor $\Delta A^\mu(\vec{x}_\perp)$, como segue,

$$\Delta A^1(\vec{x}_\perp) = \int \frac{d^2 \vec{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{\pi} \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3} \right) \frac{1}{1 + \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2} (1 - s^2)} i\Phi \frac{p_y}{\vec{p}_\perp^2} e^{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2 \Phi}{2^4 \pi^3} \frac{1}{m^2} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \int d^2 \vec{p}_\perp i p_y \frac{e^{i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{1 + \frac{\vec{p}_\perp^2}{4m^2} (1 - s^2)} \\
&= \frac{e^2 \Phi}{2^4 \pi^3} \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \int d^2 \vec{p}_\perp \frac{e^{i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\frac{(1-s^2)}{4m^2} \left(\frac{4m^2}{1-s^2} + \vec{p}_\perp^2\right)} \\
&= \frac{e^2 \Phi}{2^2 \pi^3} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{(1-s^2)} \int d^2 \vec{p}_\perp \frac{e^{i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\frac{4m^2}{1-s^2} + \vec{p}_\perp^2}. \tag{IV.26}
\end{aligned}$$

De forma totalmente análoga temos também

$$\Delta A^2(\vec{x}_\perp) = -\frac{e^2 \Phi}{2^2 \pi^3} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{(1-s^2)} \int d^2 \vec{p}_\perp \frac{e^{i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\frac{4m^2}{1-s^2} + \vec{p}_\perp^2} \tag{IV.27}$$

A integral presente nas equações (IV.26) e (IV.27) pode ser calculada com os resultados do apêndice D.9, seção 3,

$$\int d^2 \vec{p}_\perp \frac{e^{i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}}{\frac{4m^2}{1-s^2} + \vec{p}_\perp^2} = 2\pi K_0 \left(\frac{2m}{\sqrt{1-s^2}} |\vec{x}_\perp| \right). \tag{IV.28}$$

Assim os termos de correção para o quadrivetor potencial referentes às duas componentes não nulas serão

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A^1(\vec{x}_\perp) = \frac{e^2 \Phi}{2^2 \pi^3} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{(1-s^2)} 2\pi K_0 \left(\frac{2m}{\sqrt{1-s^2}} |\vec{x}_\perp| \right) \\ \Delta A^2(\vec{x}_\perp) = -\frac{e^2 \Phi}{2^2 \pi^3} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{(1-s^2)} 2\pi K_0 \left(\frac{2m}{\sqrt{1-s^2}} |\vec{x}_\perp| \right) \end{array} \right. \tag{IV.29}$$

Para o cálculo da integral das expressões acima fazemos a transformação de variáveis

$$\xi = \frac{1}{(1-s^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 = \frac{1}{1-s^2} \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \tag{IV.30}$$

$$ds = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{2}{\xi^3}\right) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi^2}{\xi^2 - 1}} \left(\frac{2}{\xi^3}\right) d\xi = \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{2}{\xi^3}\right) d\xi \tag{IV.31}$$

e

$$s ds = \frac{1}{\xi^3} d\xi, \tag{IV.32}$$

assim

$$\begin{aligned}
ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{1-s^2} &= \frac{1}{\xi^3} d\xi \left[1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)\right] \xi^2 \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \\
&= \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi \tag{IV.33}
\end{aligned}$$

As expressões (IV.29) se escrevem, então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A^1(\vec{x}_\perp) = \frac{e^2\Phi}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} K_0(2m\xi|\vec{x}_\perp|) \\ \Delta A^2(\vec{x}_\perp) = -\frac{e^2\Phi}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} K_0(2m\xi|\vec{x}_\perp|) \end{array} \right. \quad (\text{IV.34})$$

Operando com as derivadas e compactando as duas componentes numa única expressão vetorial, obtemos finalmente a correção ao potencial vetor no exterior do solenóide,

$$\boxed{\Delta \vec{A} = \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} K_1(2m\xi\rho) \hat{\phi}} \quad (\text{IV.35})$$

Como podemos ver, o resultado (IV.35) depende da distância ao solenóide ρ e tem a direção do vetor unitário $\hat{\phi}$.

O campo magnético pode ser obtido a partir de (IV.35) e com a relação $\Delta \vec{B} = \nabla \times (\Delta \vec{A})$. Dessa forma temos então

$$\begin{aligned} \Delta \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} K_1(2m\xi\rho) \right) \hat{z} \\ &= \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho K_1(2m\xi\rho)] \hat{z} \\ &= \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \frac{1}{\rho} \left[K_1(2m\xi\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} K_1(2m\xi\rho) \right] \hat{z} \\ &= \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \times \\ &\quad \left[\frac{K_1(2m\xi\rho)}{\rho} - 2m\xi K_0(2m\xi\rho) - \frac{K_1(2m\xi\rho)}{\rho} \right] \hat{z} \\ &= -\frac{4e^2\Phi m^2}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} K_0(2m\xi\rho) \hat{z}. \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Note que o campo magnético no exterior do solenóide tem a mesma direção que o campo magnético no interior deste (paralelo a \hat{z}) e seu módulo depende apenas da distância ao solenóide ρ . A integral acima pode ser efetuada exatamente com o auxílio do Maple

$$\Delta \vec{B} = -\frac{4e^2\Phi m^2}{3\pi^2} \left[\frac{1}{4} (K_1(m\rho))^2 - \frac{1}{8} (2m\rho)^2 (K_0(m\rho))^2 + \frac{1}{8} (2m\rho)^2 (K_1(m\rho))^2 \right]$$

$$- \frac{4e^2\Phi m^2}{3\pi^2} \left[-\frac{1}{4}(2m\rho)K_0(m\rho)K_1(m\rho) \right] \hat{z}. \quad (\text{IV.37})$$

Para grandes e pequenas distâncias temos¹

$$\Delta\vec{B} \approx \begin{cases} -\frac{4e^2\Phi}{3\pi^2} \frac{1}{\rho^2} \hat{z} & (m\rho \ll 1) \\ -\frac{e^2\Phi}{\pi} \frac{e^{-2m\rho}}{\rho^2} \hat{z} & (m\rho \gg 1) \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

O campo (IV.37) diverge para $\rho = 0$ e cai muito rapidamente com ρ , como indicado na figura (IV.1)

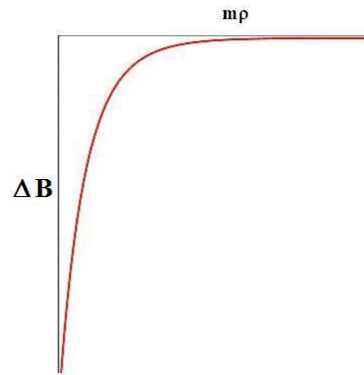


Figura IV.1: Esboço da correção do campo magnético fora do solenóide

O efeito da polarização do vácuo tem relevância em distâncias da ordem do comprimento de onda Compton $\lambda_c = \frac{1}{m} = \frac{\hbar}{mc} \approx 386 \times 10^{-15}$.

IV.2 Fenômenos magnéticos no exterior do solenóide

IV.2.1 Efeito Zeeman para um átomo de hidrogênio

Nosso objetivo é investigar o que ocorre com um átomo de hidrogênio nas imediações de um solenóide infinito. Mais especificamente, estamos interessados no efeito causado pelo campo magnético produzido no exterior do solenóide sobre o átomo.

Os resultados obtidos devem ser considerados qualitativamente, se prestando a expor alguns efeitos em ordem de grandeza.

Façamos primeiro duas considerações importantes:

¹Unidades: $\Delta\vec{B} = \frac{m^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}}{m^2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1} = T(\text{tesla})$

1. o átomo é colocado numa região bem afastada do solenóide, onde $\rho \gg \lambda_c$;
2. vamos aproximar o campo magnético percebido pelo átomo como sendo o campo médio sob este.

Para entender melhor a última consideração vejamos a figura (IV.2.1), que se refere ao átomo de hidrogênio. Vamos considerar que o centro do átomo está a uma distância ρ_0 do solenóide.

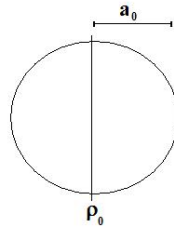


Figura IV.2: Representação do átomo de hidrogênio

Sabemos que o raio deste átomo é o raio de Bohr, a_0 . Uma vez que estamos interessados apenas em resultados qualitativos, tomamos o campo médio ao longo do átomo,

$$\begin{aligned}
 B_{med} &= \frac{1}{a_0} \int_{\rho_0-a_0}^{\rho_0+a_0} B d\rho = -\frac{1}{a_0} \frac{e^2\Phi}{\pi} \int_{\rho_0-a_0}^{\rho_0+a_0} \frac{e^{-2m\rho}}{\rho^2} d\rho \\
 &= -\frac{1}{a_0} \frac{e^2\Phi}{\pi} \left[-\frac{e^{-2m\rho}}{\rho} \Big|_{\rho_0-a_0}^{\rho_0+a_0} - 2m \int_{\rho_0-a_0}^{\rho_0+a_0} \frac{e^{-2m\rho}}{\rho} \right] d\rho . \quad (IV.39)
 \end{aligned}$$

O campo magnético médio se escreve então

$$\mathbf{B}_{med} = \frac{1}{a_0} \frac{e^2\Phi}{\pi} \frac{e^{-2m\rho_0}}{(\rho_0)^2 - (a_0)^2} [\rho_0(e^{2ma_0} - e^{-2ma_0}) + a_0(e^{-2ma_0} + e^{2ma_0})] \hat{z} . \quad (IV.40)$$

Para o estado fundamental do átomo do hidrogênio temos os números quânticos ($n = 1, l = 0, j = \frac{1}{2}$) e, portanto, o fator de g-Landé será

$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}}{2j(j+1)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) + \frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} = 2 , \quad (IV.41)$$

assim, como discutido no apêndice B, o estado fundamental dividi-se em dois níveis dados por

$$E = -13,6 \text{ eV} \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \pm \mu_B B_{med} , \quad (IV.42)$$

com sinal (+) para $m_j = \frac{1}{2}$ e sinal (-) para $m_j = -\frac{1}{2}$.

Vamos aplicar este resultado em dois experimentos reais para sabermos a ordem de grandeza do efeito Zeeman. Utilizamos os valores dos fluxos magnéticos dos experimentos feitos em [4] e [8], respectivamente dados por

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 1,700 \times 10^{-4} G \text{ cm}^2 \\ \Phi_2 &= 2,400 \times 10^{-6} G \text{ cm}^2.\end{aligned}\tag{IV.43}$$

O primeiro fluxo se refere ao experimento realizado em 1960 por Robert G. Chambers, onde foi utilizado um solenóide muito fino (whisker). Já o segundo fluxo se refere ao experimento [8] de 1986 em que se fabricou um fino toróide ferromagnético por uma técnica chamada fotolitografia e depois foi recoberto inteiramente por uma camada de supercondutor. Apesar do segundo experimento não se referir a um solenóide, podemos pensar que estamos muito perto do toróide de modo a aproximar seu campo pelo de um solenóide. De qualquer forma, já que estamos interessados em aspectos qualitativos, em ordem de grandeza os resultados se justificam.

Vamos considerar que o átomo de hidrogênio se encontra a uma distância $\rho_0 = 1 \text{ cm}$. Assim, aplicando os resultados na expressão do campo magnético médio obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned}B_{med(1)} &= 1,389 \times 10^{-42} G \\ B_{med(2)} &= 1,960 \times 10^{-44} G\end{aligned}\tag{IV.44}$$

logo a energia total com suas respectivas correções são

$$\begin{aligned}E_1 &= -13,6 \left(1 + 1,225 \times 10^{-5}\right) \pm 8,039 \times 10^{-51} eV \\ E_2 &= -13,6 \left(1 + 1,225 \times 10^{-5}\right) \pm 1,134 \times 10^{-52} eV.\end{aligned}\tag{IV.45}$$

Podemos notar que a correção devido ao efeito Zeeman nos dois casos é de ordem muito menor que a correção de fina estrutura, assim podemos entender porque esta correção é imperceptível macroscopicamente.

Vamos agora verificar a intensidade do efeito para distâncias ρ_0 bem próximas da corda de Dirac. Nesse caso não podemos considerar a aproximação do solenóide por uma corda de Dirac. Para os mesmos valores de fluxo dados anteriormente, temos os valores dados na tabel (IV.2.1)

Podemos confirmar o comportamento da expressão (IV.38) obtida anteriormente onde o campo médio se intensifica em módulo para valores de distância muito próximos do solenóide. Quanto mais ρ_0 se aproxima do valor de uma unidade do comprimento de onda Compton do

Tabela IV.1: Outros valores para o efeito Zeeman

	Fluxo Magnético($G\text{ cm}^2$)	$\rho_0(\text{cm})$	Campo Médio(G)	Efeito Zeeman(eV)
1	Φ_1	10^{-8}	$-1,928 \times 10^{-26}$	$\mp 1,116 \times 10^{-34}$
2	Φ_1	10^{-11}	$-4,958 \times 10^{-26}$	$\mp 2,869 \times 10^{-34}$
3	Φ_2	10^{-8}	$-2,723 \times 10^{-28}$	$\mp 1,576 \times 10^{-36}$
4	Φ_2	10^{-11}	$-7,000 \times 10^{-28}$	$\mp 4,051 \times 10^{-36}$

elétron, maior o valor do campo médio e a energia do correspondente efeito Zeeman aumentam em valor absoluto.

O valor do Lamb Shift correspondente a diferença de energia dos estados $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ no átomo do hidrogênio é dado por

$$Lamb\ Shift = -1,123 \times 10^{-7} eV. \quad (IV.46)$$

Temos também que a estrutura hiperfina² do estado fundamental do átomo de hidrogênio é,

$$\Delta E_{eh} = 5,880 \times 10^{-6} eV. \quad (IV.47)$$

Comparando os valores conhecidos na literatura com os valores calculados na tabela (IV.2.1) para o efeito Zeeman, podemos perceber que, de fato, as alterações nos níveis de energia são de ordem muito menor que o deslocamento Lamb e as correções da estrutura hiperfina. Outro fato importante a ser notado é que, para distâncias próximas ao solenóide, as correções referentes ao efeito Zeeman aumenta significativamente em valor absoluto.

É interessante observar que o átomo sofre uma força ocasionada pela presença do solenóide. Essa força pode ser calculada tomando o gradiente (com sinal negativo) da energia (IV.42). Sendo assim, fazendo $\rho_0 \rightarrow \rho$ temos que

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial}{\partial \rho}(\pm \mu_B B_{med}) \\ &= \mp \mu_B \frac{1}{a_0} \frac{e^2 \Phi}{\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{e^{-2m\rho}}{\rho^2 - (a_0)^2} [\rho(e^{2ma_0} - e^{-2ma_0}) + a_0(e^{-2ma_0} + e^{2ma_0})] \right] \\ &= \pm \mu_B \frac{1}{a_0} \frac{e^2 \Phi}{\pi} \frac{e^{-2m\rho}(e^{2ma_0} - e^{-2ma_0})}{(\rho^2 - (a_0)^2)^2} [\rho^2 + (a_0)^2 + 2m\rho(\rho^2 - (a_0)^2)]. \quad (IV.48) \end{aligned}$$

Nota-se que a força tem dependência em ρ . Seu caráter é atrativo (sinal -) para estados com $m_j = -1/2$ e repulsivo (sinal +) para $m_j = 1/2$.

²Efeitos relacionados à interação magnética entre o momentum angular do elétron e o spin nuclear.

IV.2.2 Estados ligados de Aharonov-Bohm

Nessa seção estudamos novamente o efeito Aharonov-Bohm em sua versão de estados ligados, abordado na seção II.4, mas desta vez levamos em conta efeitos da polarização do vácuo. Tomamos a versão simplificada do problema, na qual uma partícula de carga q é restrita a se mover em um círculo de raio b . Perpendicular ao círculo e, concêntrico a este, temos um solenóide de raio $a < b$, com um campo magnético interno \mathbf{B} . O solenóide é extremamente longo, o campo magnético dentro dele é uniforme e o campo do lado de fora agora vem dado pela equação (IV.38). Consideramos o solenóide muito fino de modo a aproximá-lo por uma corda de Dirac

Como visto anteriormente, a correção do potencial vetor é dado pela expressão,

$$\Delta \vec{A} = \frac{2e^2 \Phi m}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} K_1(2m\xi\rho) \hat{\phi}. \quad (\text{IV.49})$$

Resolvendo a integral com o auxílio do Maple temos,

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \frac{2e^2 \Phi m}{3\pi^2} \left[m\rho \left(\frac{(m\rho)^2}{3} + \frac{1}{4} \right) (K_0(m\rho))^2 - \frac{m\rho}{3} \left((m\rho)^2 + \frac{5}{4} \right) (K_1(m\rho))^2 \right] \\ &+ \frac{2e^2 \Phi m}{3\pi^2} \left[\left(\frac{(m\rho)^2}{3} + \frac{1}{2} \right) K_0(m\rho) K_1(m\rho) \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

As expansões série para $m\rho \ll 1$ e $m\rho \gg 1$ são³,

$$\Delta \vec{A} \approx \begin{cases} -\frac{e^2 \Phi \ln(m\rho)}{3\pi^2 \rho} \hat{\phi} & (m\rho \ll 1) \\ \frac{e^2 \Phi e^{-2m\rho}}{8\pi (m\rho)\rho} \hat{\phi} & (m\rho \gg 1) \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

Logo o potencial vetor do lado de fora do solenóide se torna então

$$\mathbf{A} \approx \begin{cases} \frac{\Phi}{2\pi\rho} - \frac{e^2 \Phi \ln(m\rho)}{3\pi^2 \rho} \hat{\phi} & (m\rho \ll 1) \\ \frac{\Phi}{2\pi\rho} + \frac{e^2 \Phi e^{-2m\rho}}{8\pi (m\rho)\rho} \hat{\phi} & (m\rho \gg 1) \end{cases} \quad (\text{IV.52})$$

No figura (IV.2.2) plotamos a expressão (IV.50) referente à correção do potencial vetor no exterior do solenóide. Notamos no gráfico que, para $m\rho \rightarrow 0$ temos $A \rightarrow +\infty$, e para $m\rho \rightarrow +\infty$ temos $A \rightarrow 0$. Estes resultados estão de acordo com as expressões assintóticas obtidas em (IV.51).

³Unidades: $\Delta \vec{A} = \frac{m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}}{m} = m \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}$

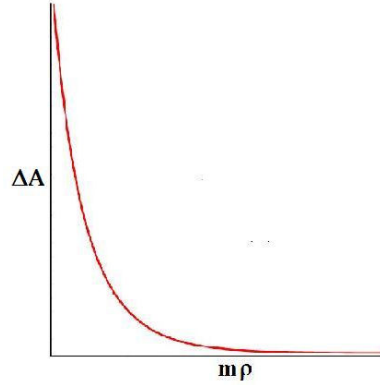


Figura IV.3: Correção do potencial vetor fora do solenóide

Estando o solenóide descarregado, o potencial escalar correspondente é zero. Neste caso a hamiltoniana da partícula torna-se

$$H = \frac{1}{2m} \left[-\nabla^2 + q^2(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})^2 + 2iq(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \cdot \nabla \right] \quad (\text{IV.53})$$

onde \mathbf{A} é o potencial vetor dado pela expressão (II.36) e $\Delta\mathbf{A}$ é a correção do potencial dado por (IV.50).

Definindo

$$\delta f = |\Delta\mathbf{A}| \quad (\text{IV.54})$$

e

$$f' = |\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}| = f + \delta f \quad (\text{IV.55})$$

onde f é a função referente ao módulo da expressão (II.36) e δf é a função referente ao módulo da correção ao potencial vetor dado por (IV.50),

$$\begin{aligned} \delta f = & \left| \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \left[m\rho \left(\frac{(m\rho)^2}{3} + \frac{1}{4} \right) (K_0(m\rho))^2 - \frac{m\rho}{3} \left((m\rho)^2 + \frac{5}{4} \right) (K_1(m\rho))^2 \right] \right| \\ & + \left| \frac{2e^2\Phi m}{3\pi^2} \left[\left(\frac{(m\rho)^2}{3} + \frac{1}{2} \right) K_0(m\rho)K_1(m\rho) \right] \right|. \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Sabendo que a função de onda depende somente do ângulo azimutal ϕ , ($\theta = \frac{\pi}{2}$) e ($r = b$) então $\nabla \rightarrow \left(\frac{\hat{\phi}}{b} \frac{d}{d\phi} \right)$ assim a equação de Schrödinger fica

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{1}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + q^2 f'^2(b) + 2iq \frac{f'(b)}{b} \frac{d}{d\phi} \right] \Psi(\phi) = E\Psi(\phi) \quad (\text{IV.57})$$

onde $f'(b)$ é dado por

$$f'(\rho) = f'(b) = f(b) + \delta f(b) \quad (\text{IV.58})$$

pois a partícula está restrita a mover-se num raio fixo b .

A equação (IV.57) é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes e pode ser resolvida como segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[-\frac{1}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} + q^2 f'^2(b) + 2iq \frac{f'(b)}{b} \frac{d}{d\phi} \right] \Psi(\phi) &= E\Psi(\phi) \\ \frac{-1}{2mb^2} \frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + \frac{1}{2m} q^2 f'^2(b) \Psi + \frac{iq}{m} \frac{f'(b)}{b} \frac{d\Psi}{d\phi} &= E\Psi(\phi) \\ \frac{d^2\Psi}{d\phi^2} - 2iqbf'(b) \frac{d\Psi}{d\phi} + (2mb^2E - b^2q^2 f'^2(b)) \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

onde definimos

$$\beta \equiv qbf'(b) \quad \epsilon \equiv 2mb^2E - \beta^2. \quad (\text{IV.60})$$

As soluções são da forma $\Psi = Ae^{i\lambda\phi}$ com

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon} = \beta \pm b\sqrt{2mE}. \quad (\text{IV.61})$$

A continuidade de $\Psi(\phi)$, em $\phi = 2\pi$, requer que λ seja um inteiro,

$$\lambda = \beta \pm b\sqrt{2mE} = n. \quad (\text{IV.62})$$

Comparando (IV.61) e (IV.62) temos os níveis de energia

$$E_n = \frac{1}{2mb^2} (n - qbf(b) - qb\delta f(b))^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (\text{IV.63})$$

O resultado acima indica que a dupla degenerescência da carga em um anel continua a ser quebrada. A energia ainda continua dependendo do fluxo do campo dentro do solenóide e depende também da correção do potencial vetor fora do solenóide dada por $\delta f(b)$ em (IV.56).

Considerando um elétron movendo-se em torno deste solenóide num raio fixo dado por $b = 1\text{cm}$, um fluxo magnético $\Phi = 1,700 \times 10^{-4} G \text{ cm}^2$ e $n = 0$ obtemos

$$E_0 = \frac{1}{2mb^2} (-4,334 \times 10^{-24} - 1,005 \times 10^{-41})^2 = 5,967 \times 10^{-26} eV \quad (\text{IV.64})$$

Podemos notar que a correção da energia referente à correção do potencial vetor é muito menor que a correção devido a presença do solenóide, sem a polarização do vácuo.

IV.2.3 Energia e Força de interação entre duas cordas de Dirac

Dos resultados obtidos anteriormente podemos nos indagar sobre uma possível interação entre duas cordas de Dirac, pois ambas produzem campo magnético em uma mesma região do espaço, originado pela polarização do vácuo.

Para encontrar energia dessa interação imaginemos duas cordas de Dirac paralelas entre si e separadas por um vetor \mathbf{a} perpendicular aos seus eixos, como mostra a figura (IV.4)

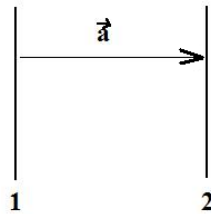


Figura IV.4: Disposição dos dois solenóides AB

O funcional gerador do campo eletromagnético referente aos dois solenóides tem a representação de integral funcional

$$Z[j] = \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j^\nu(y)\right) \quad (\text{IV.65})$$

Usando o fato de que $Z[j] = \exp(-iET)$, sendo E a energia de vácuo do sistema, e comparando com a equação (IV.65) temos,

$$E = -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y j^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j^\nu(y). \quad (\text{IV.66})$$

No nosso caso, a corrente j é dada pela presença dos dois solenóides, cada um produzindo sua respectiva corrente, j_1 e j_2 ,

$$j^\mu(x) = j_1^\mu(x) + j_2^\mu(x) \quad j^\nu(y) = j_1^\nu(y) + j_2^\nu(y) \quad (\text{IV.67})$$

Dito isto, a energia de interação agora se torna

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y [j_1^\mu(x) + j_2^\mu(x)] D'_{\mu\nu}(x, y) [j_1^\nu(y) + j_2^\nu(y)] \\ &= -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y \left[\underbrace{j_1^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_1^\nu(y)}_{\text{auto-energia}} + j_1^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_2^\nu(y) \right] + \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2T} \int d^4x d^4y \left[j_2^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_1^\nu(y) + \underbrace{j_2^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_2^\nu(y)}_{\text{auto-energia}} \right]. \quad (\text{IV.68})$$

Os termos marcados se referem a contribuições de auto-energia dos solenóides 1 e 2, respectivamente. Esses termos não contribuem para a energia de interação entre os solenóides e, portanto, serão desconsiderados de agora em diante. Assim só restam os seguintes termos

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y [j_1^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_2^\nu(y) + j_2^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_1^\nu(y)] \\ &= -\frac{1}{2T} \int d^4x d^4y [2 j_1^\mu(x) D'_{\mu\nu}(x, y) j_2^\nu(y)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.69})$$

onde usamos as simetrias da função de Green $D'_{\mu\nu}(x, y)$.

Escrevendo $D'_{\mu\nu}(x, y)$ e $j_2^\nu(y)$ como integrais de Fourier obtemos

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2}{2T} \int d^4x d^4y j_1^\mu(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{j}_2^\nu(q) e^{-iqy} \\ &= -\frac{2}{2T} \int d^4x j_1^\mu(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{\mu\nu}(k) \tilde{j}_2^\nu(k) e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (\text{IV.70})$$

Usando o propagador (III.1) e a equação (III.6) podemos escrever

$$E = -\frac{2}{2T} \int d^4x j_1^\mu(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}'_{\mu\nu}(k) (-k^2) \tilde{A}^\nu(k) e^{-ikx}, \quad (\text{IV.71})$$

como auxílio de (IV.6) manipulamos a expressão acima como segue

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{T} \int d^4x j_1^\mu(x) \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{dk^3}{2\pi} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(k) (-k^2) (2\pi)^2 \delta(k^0) \delta(k^3) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{-ikx} \\ &= -\frac{1}{T} \int d^4x j_1^\mu(x) \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) (\vec{k}_\perp^2) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= -\frac{1}{T} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-q^2 \tilde{A}^\mu(q)) e^{-iq(x-a)} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) (\vec{k}_\perp^2) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= -\frac{1}{T} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-q^2) (2\pi)^2 \delta(q^0) \delta(q^3) \mathcal{A}^\mu(\vec{q}_\perp) e^{-iq^0(x-a)} e^{-iq^3(x-a)} e^{i\vec{q}_\perp \cdot (\vec{x}_\perp - \vec{a}_\perp)} \\ &\quad \times \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) (\vec{k}_\perp^2) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\ &= -\frac{1}{T} \int d^4x \int \frac{d^2\vec{q}_\perp}{(2\pi)^2} (\vec{q}_\perp^2) \mathcal{A}^\mu(\vec{q}_\perp) e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) (\vec{k}_\perp^2) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{T} \int_{-t/2}^{t/2} d^0x \int_{L/2}^{L/2} dx^3 \int d^2\vec{x}_\perp \int \frac{d^2\vec{q}_\perp}{(2\pi)^2} (\vec{q}_\perp^2) \mathcal{A}^\mu(\vec{q}_\perp) e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&\times \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) (\vec{k}_\perp^2) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp} \\
&= -\frac{TL}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp^4 \mathcal{A}^\mu(-\vec{k}_\perp) \tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp}, \tag{IV.72}
\end{aligned}$$

onde definimos o comprimento do solenóide $L = \int_{-L/2}^{L/2} dx^3$.

Usando os resultados $\tilde{D}'_{\mu\nu}(\vec{k}_\perp) = \frac{-\eta_{\mu\nu}}{-\vec{k}_\perp^2} [1 + \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0)]$ e (IV.11), e o fato de que temos o fluxo Φ_1 para o solenóide 1 e Φ_2 para o solenóide 2, podemos manipular a equação acima como segue

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{TL}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp^4 \mathcal{A}^\mu(-\vec{k}_\perp) \frac{-\eta_{\mu\nu}}{-\vec{k}_\perp^2} [1 + \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0)] \mathcal{A}^\nu(\vec{k}_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&= -\frac{TL}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\vec{k}_\perp^4}{\vec{k}_\perp^2} \mathcal{A}^\mu(-\vec{k}_\perp) \mathcal{A}_\nu(\vec{k}_\perp) [1 + \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0)] e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&= -\frac{TL}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^2} \vec{k}_\perp^2 i^2 \Phi_1 \Phi_2 \frac{1}{\vec{k}_\perp^4} (0, k_y, -k_x, 0) (0, k_y, -k_x, 0) [1 + \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0)] e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&= -\frac{TL\Phi_1\Phi_2}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} (-1) \frac{\vec{k}_\perp^4}{\vec{k}_\perp^4} [1 + \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0)] e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&= \frac{TL}{T} \Phi_1 \Phi_2 \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} + \frac{TL\Phi_1\Phi_2}{T} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} \Pi^R(0, \vec{k}_\perp, 0) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp} \\
&= \frac{L\Phi_1\Phi_2}{4\pi^2} \delta^{(2)}(\vec{a}_\perp) + L\Phi_1\Phi_2 \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{\pi} \frac{\vec{k}_\perp^2}{4m^2} \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp}}{1 + (1-s^2) \frac{\vec{k}_\perp^2}{4m^2}}. \tag{IV.73}
\end{aligned}$$

onde $\Phi_1 = \pi B_1 R_1$ e $\Phi_2 = \pi B_2 R_2$ são os fluxos magnéticos referentes aos solenóides 1 e 2 respectivamente.

O primeiro termo do lado direito da última linha em (IV.73) é sempre nulo, uma vez que $\mathbf{a}_\perp \neq 0$, sendo assim a energia de interação vem dada por

$$\begin{aligned}
E &= L\Phi_1\Phi_2 \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{e^2}{\pi} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} \frac{\vec{k}_\perp^2}{4m^2} \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp}}{1 + (1-s^2) \frac{\vec{k}_\perp^2}{4m^2}} \\
&= L\Phi_1\Phi_2 \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{1-s^2} \frac{e^2}{\pi} \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} \vec{k}_\perp^2 \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp}}{\frac{4m^2}{1-s^2} + \vec{k}_\perp^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L\Phi_1\Phi_2 \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{1-s^2} \frac{e^2}{\pi} (-\vec{\nabla}_\perp^2) \int \frac{d^2\vec{k}_\perp}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{a}_\perp}}{\frac{4m^2}{1-s^2} + k_\perp^2} \\
&= -\frac{L\Phi_1\Phi_2 e^2}{2^2\pi^3} \vec{\nabla}_\perp^2 \int_0^1 ds s^2 \left(1 - \frac{s^2}{3}\right) \frac{1}{1-s^2} (2\pi) K_0\left(\frac{2ma}{\sqrt{1-s^2}}\right). \tag{IV.74}
\end{aligned}$$

no qual a última integral da penúltima linha em (IV.74), fez-se o uso da expressão (IV.28) já usada anteriormente.

Com a mudança de variável

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}; \tag{IV.75}$$

temos

$$E = -\frac{L\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \vec{\nabla}_\perp^2 \int_1^\infty \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi K_0(2ma\xi). \tag{IV.76}$$

Nesse momento é conveniente definir a energia de interação por unidade de comprimento

$\mathcal{E} = E/L$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{E}{L} = -\frac{\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \left[a \frac{\partial K_0(2ma\xi)}{\partial a} \right] \\
&= -\frac{\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{1}{a} \left[a \frac{\partial^2 K_0(2ma\xi)}{\partial a^2} + \frac{\partial K_0(2ma\xi)}{\partial a} \right]. \tag{IV.77}
\end{aligned}$$

Com o auxílio das seguintes derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_0(2ma\xi)}{\partial a} &= -2m\xi K_1(2ma\xi) \\
\frac{\partial^2 K_0(2ma\xi)}{\partial a^2} &= 4m^2\xi^2 K_0(2ma\xi) + \frac{2m\xi}{a} K_1(2ma\xi). \tag{IV.78}
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{1}{a} [4m^2 a \xi^2 K_0(2ma\xi) + 2m\xi K_1(2ma\xi)] + \\
&\quad - \frac{\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{1}{a} [-2m\xi K_1(2ma\xi)] \\
&= -\frac{\Phi_1\Phi_2 e^2}{2\pi^2} \int_1^\infty d\xi \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} 4m^2 K_0(2ma\xi) \\
&= -\frac{4m^2\Phi_1\Phi_2 e^2}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \sqrt{\xi^2 - 1} K_0(2ma\xi). \tag{IV.79}
\end{aligned}$$

A integral presente na expressão acima já foi calculada com a utilização do Maple, como podemos ver em (IV.37). Trazendo este resultado para a expressão acima obtemos finalmente a energia de interação por unidade de comprimento

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{4m^2\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} \left[\frac{1}{4}(K_1(ma))^2 - \frac{1}{8}(2ma)^2(K_0(ma))^2 + \frac{1}{8}(2ma)^2(K_1(ma))^2 \right] + \\ &- \frac{4m^2\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} \left[-\frac{1}{4}(2ma)K_0(ma)K_1(ma) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.80})$$

Podemos notar que a energia de interação entre dois solenóides AB depende da distância a que os separam. É interessante observar que, exceto por um fator numérico, a dependência funcional com a da energia de interação entre dois solenóides é idêntica a dependência funcional com ρ da correção ao campo magnético no exterior do solenóide.

Por fim podemos agora achar a força de interação entre os dois solenóides AB,

$$F = -\frac{dE}{da} \quad (\text{IV.81})$$

ou, de forma equivalente, a força por unidade de comprimento,

$$\mathcal{F} = \frac{F}{L} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} = -\frac{d\mathcal{E}}{da}. \quad (\text{IV.82})$$

Sendo assim, usando a equação (IV.79), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{4m^2\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \sqrt{\xi^2 - 1} 2m\xi(-1)K_1(2ma\xi) \\ &= -\frac{2m^3\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} \int_1^\infty d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \sqrt{\xi^2 - 1} \xi K_1(2ma\xi) \\ &= -\frac{2m^3\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} [-ma(K_1(ma))^2 + K_0(ma)K_1(ma)] + \\ &- \frac{2m^3\Phi_1\Phi_2e^2}{3\pi^2} \left[\frac{(K_1(ma))^2}{ma} + ma(K_0(ma))^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.83})$$

onde efetuamos a integral acima utilizando o Maple.

Como já esperado, a força depende da distância entre os solenóides e cai muito rapidamente a medida que a aumenta. A força acima exibe um caráter atrativo se os fluxos têm o mesmo sinal (o que significa que os campos magnéticos internos têm a mesma direção), e sinais contrários se os fluxos têm sinais opostos.

Abaixo podemos visualizar o comportamento da força entre os dois solenóides AB. Observando o gráfico abaixo vemos que a força cai rapidamente quando os solenóides se afastam. Por outro lado, o módulo da força aumenta quando os solenóides ficam muito próximos um do outro.

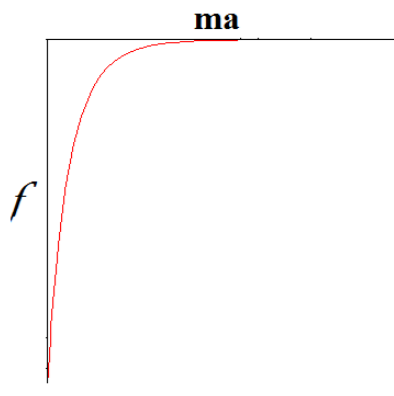


Figura IV.5: Esboço da força entre dois solenóides AB

Capítulo V

Conclusão

Nessa dissertação revisamos alguns aspectos do efeito Aharonov-Bohm e da polarização do vácuo da EDQ. Para o segundo tópico utilizamos regularização dimensional. Esses tópicos serviram de base para o principal tema abordado, a saber, efeitos da polarização do vácuo devidos a presença de um solenóide.

Em todos os resultados obtidos consideramos desprezível o raio do solenóide. Os resultados podem ser tomados como exatos para uma corda de Dirac.

Após os tópicos de revisão, iniciamos pelo estudo do potencial vetor produzido no exterior do solenóide levando em conta correções produzidas pela polarização do vácuo, os resultados obtidos são compatíveis com outros já presentes na literatura. Com o potencial vetor corrigido encontramos o campo magnético no exterior do solenóide. Vale destacar que tal campo tem origem na polarização do vácuo, sendo proporcional a \hbar e se caracterizando por um fenômeno genuinamente quântico, sem análogo clássico (na teoria clássica não existe campo no exterior do solenóide).

Investigamos o efeito produzido em um átomo de hidrogênio por este campo magnético, exterior ao solenóide. Os resultados foram obtidos de forma qualitativa, dentro da aproximação de dipolo com o campo médio tomado sobre o átomo, e indicam haver um tipo de efeito Zeeman nas imediações do solenóide implicando na quebra de degenerescência do átomo de hidrogênio no número quântico m_j . Tal efeito é muito pequeno e está muito distante do alcance de experimentos atualmente.

Os resultados referentes ao efeito Zeeman também indicam haver uma força sobre átomos nas imediações de um solenóide. A natureza atrativa ou repulsiva da força depende do sinal do

número quântico m_j do átomo.

Também estudamos as alterações nos níveis de energia de uma partícula quântica carregada restrita a se mover em um círculo ao redor de um solenóide. Neste caso podemos dizer que calculamos correções oriundas da polarização do vácuo ao efeito Aharonov-Bohm em sua versão de estados ligados. Tais correções também se revelam extremamente pequenas.

Por fim, e como último tema abordado, estudamos a interação entre duas cordas de Dirac paralelas. Esses resultados não devem ser pensados como uma aproximação para a interação entre solenóides muito finos, estudada na referência [34], pois nesse segundo caso, existem termos em ordem mais alta que contribuem para tal interação. No caso de cordas de Dirac, os cálculos aqui apresentados se aplicam perfeitamente.

Calculamos a energia de interação entre duas cordas de Dirac e a correspondente força (por unidade de comprimento dos solenóides) entre as mesmas. Verificamos que tal força é atrativa caso os fluxos magnéticos dos solenóides tenham o mesmo sinal, e repulsiva se os sinais dos fluxos forem contrários.

É interessante observar que a expressão para a energia de interação entre os dois solenóides AB possui comportamento semelhante ao campo magnético no exterior do solenóide corrigido, e a expressão da força de interação se assemelhava ao comportamento do potencial vetor corrigido.

Dados todos os resultados discutidos acima, concluímos que a polarização do vácuo nas imediações de um solenóide pode realmente produzir fenômenos físicos intrinsecamente quânticos, alguns dos quais se caracterizam por serem exclusivamente decorrentes da polarização do vácuo. Infelizmente tais efeitos são pequenos demais para serem verificados em laboratório nos dias atuais.

Como perspectiva futura, temos a intenção de investigar a deflexão de feixes de partículas clássicas nas proximidades de um solenóide, assim como a deflexão de feixes de átomos de hidrogênio.

É relevante o desenvolvimento de um estudo mais elaborado sobre a interação de um átomo com um solenóide, considerando a variação do campo ao longo do átomo. Isso requer o tratamento de perturbações de multipolos para o campo no exterior do solenóide atuando sob o átomo em questão. Esse procedimento deve trazer resultados quantitativos para o sistema.

Seria interessante também reconsiderar os cálculos desenvolvidos nesta dissertação levando em conta o raio finito do solenóide. Isso tornaria mais realístico muitos dos resultados expostos.

Apêndice A

Superposição de dois movimentos harmônicos simples

Vamos considerar duas fontes pontuais de onda S_1 e S_2 que oscilam em fase com a mesma frequência angular ω e amplitudes ξ_{01} e ξ_{02} . Suas respectivas ondas esféricas são

$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1) \quad \xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2) \quad (\text{A.1})$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias de qualquer ponto a S_1 e S_2 .

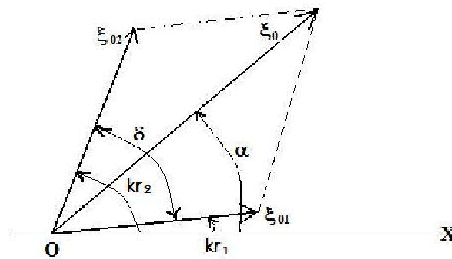


Figura A.1: Amplitude resultante de duas ondas que interferem entre si.

O eixo X foi tomado como linha de referência. A amplitude ξ_0 e a fase α do movimento ondulatório resultante são dadas pela sua resultante vetorial. Portanto podemos expressar a amplitude da perturbação resultante em um ponto P por:

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos \delta}. \quad (\text{A.2})$$

No caso em que temos um reforço máximo de dois movimentos ondulatórios (interferência construtiva): $\cos \delta = +1$, $\delta = 2n\pi$.

No caso em que temos atenuação máxima de dois movimentos ondulatórios (interferência destrutiva): $\cos \delta = -1$, $\delta = (2n + 1)\pi$.

Apêndice B

Efeito Zeeman

Quando um átomo é colocado na presença de um campo magnético externo uniforme, temos a quebra de algumas degenerescências. Esse fenômeno é o chamado Efeito Zeeman.

Para um único elétron a perturbação é¹:

$$H_z = -(\vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s) \cdot \mathbf{B}_{ext} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{S} \quad (\text{B.2})$$

é o momento de dipolo magnético associado com o spin do elétron, e

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m}\mathbf{L} \quad (\text{B.3})$$

é o momento de dipolo associado com o movimento orbital do elétron. Então:

$$\begin{aligned} H_z &= -\left(-\frac{e}{m}\mathbf{S} - \frac{e}{2m}\mathbf{L}\right) \cdot \mathbf{B}_{ext} \\ &= \frac{e}{2m}(2\mathbf{S} + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{B}_{ext}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A natureza do efeito Zeeman depende criticamente da intensidade do campo magnético externo em comparação com o campo interno (\mathbf{B}_{int}). O campo interno para um átomo de hidrogênio, da perspectiva do elétron, seria um campo magnético produzido pelo próton que gira em torno do elétron (corrente contínua). Pela lei de Biot-Savart temos

$$\mathbf{B}_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{mc^2 r^3} \mathbf{L} \quad (\text{B.5})$$

¹Consideramos o acoplamento \mathbf{L} e \mathbf{S} (Efeito Zeeman anômalo).

onde m é a massa do próton, \mathbf{L} é o seu momento angular orbital e r é o raio da órbita do próton.

Se $B_{ext} \ll B_{int}$, então a estrutura fina² domina, e H_z pode ser tratado como uma pequena perturbação.

Se $B_{ext} \gg B_{int}$, então o efeito Zeeman domina e a estrutura fina torna-se a perturbação. Na zona intermediária, onde os dois campos são comparáveis, precisamos do mecanismo completo da teoria de perturbação degenerada, sendo necessário diagonalizar a porção relevante da Hamiltoniana.

Nessa dissertação estamos interessados na situação de campo fraco.

Efeito Zeeman: Campo fraco

Se $B_{ext} \ll B_{int}$, então a estrutura fina domina com os respectivos níveis de energia

$$E_{nj} = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (\text{B.6})$$

Vale encionar que os números quânticos relevantes são: n, l, j e m_j (e não m_l e m_s , pois na presença do acoplamento de spin-órbita - \mathbf{L} e \mathbf{S} não são separadamente conservados).

Em primeira ordem da teoria de perturbação, a correção Zeeman para a energia é:

$$E_z^1 = \langle n \ l \ j \ m_j | H_z | n \ l \ j \ m_j \rangle = \frac{e}{2m} \mathbf{B}_{ext} \cdot \langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle. \quad (\text{B.7})$$

Agora $\mathbf{L} + 2\mathbf{S} = \mathbf{J} + \mathbf{S}$, onde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Infelizmente não conhecemos o valor esperado de \mathbf{S} . O momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ é constante; \mathbf{L} e \mathbf{S} precessam rapidamente a cerca deste vetor fixo \mathbf{J} . Em particular, o valor médio de \mathbf{S} é apenas a sua projeção ao longo de \mathbf{J} :

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{J^2} \mathbf{J}. \quad (\text{B.8})$$

Na presença do acoplamento de spin-órbita, \mathbf{L} e \mathbf{S} não são separadamente conservados; eles precessam sobre o momento angular total \mathbf{J} fixo. Mas $\mathbf{L} = \mathbf{J} - \mathbf{S}$, então $L^2 = J^2 + S^2 - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ e

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2) = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \quad (\text{B.9})$$

do qual segue que:

$$\langle \mathbf{L} + 2\mathbf{S} \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{J})}{J^2} \right) \mathbf{J} \right\rangle = \left[1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}}{2j(j+1)} \right] \langle \mathbf{J} \rangle. \quad (\text{B.10})$$

²Correções na Hamiltoniana devido à dois mecanismos distintos: correção relativística e acoplamento spin-órbita.

O termo no colchetes é conhecido como fator g-Landé, g_J . Escolhendo o eixo z seguindo ao longo de \mathbf{B}_{ext} , então

$$E_z^1 = \mu_B g_J B_{ext} m_j, \quad (\text{B.11})$$

onde $\mu \equiv \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} \frac{eV}{T}$ é o chamado magneton de Bohr.

A energia total é a soma da parte da estrutura fina e a contribuição de Zeeman,

$$\begin{aligned} E &= E_{n_j} + E_z^1 \\ &= -\frac{13,6 eV}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] + \mu_B g_J B_{ext} m_j \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Exemplo: O estado fundamental do átomo do hidrogênio ($n = 1, l = 0, j = \frac{1}{2},$)

Nesse caso temos

$$\begin{aligned} g_J &= 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}}{2j(j+1)} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) + \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} = 2 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

e o estado de energia dividi-se em dois níveis

$$E = -13,6 eV \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) \pm \mu_B B_{ext} \quad (\text{B.14})$$

com sinal (+) para $m_j = \frac{1}{2}$ e sinal (-) para $m_j = -\frac{1}{2}$.

Apêndice C

Rotação de Wick

Da integral,

$$I = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0^+}. \quad (\text{C.1})$$

Podemos fazer,

$$I = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{dp_0}{(2\pi)} \frac{1}{(p_0 - (w_p - i\epsilon))(p_0 + (w_p - i\epsilon))} \quad (\text{C.2})$$

onde $w_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

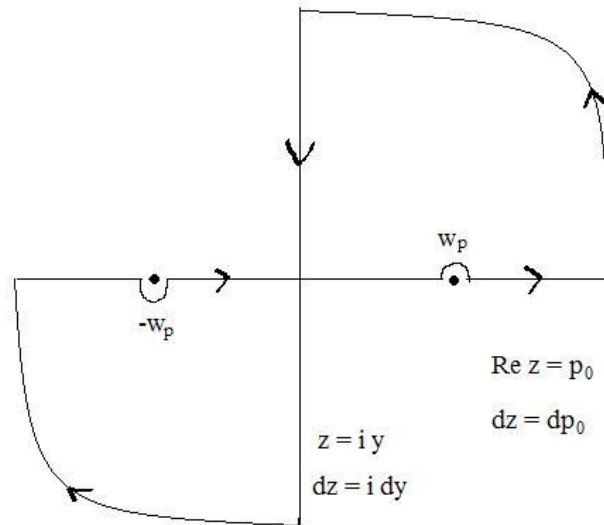


Figura C.1: Contorno de integração.

$$\oint \frac{dz}{(z - (w_p - i\epsilon))(z + (w_p - i\epsilon))} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{(p_0 - (w_p - i\epsilon))(p_0 + (w_p - i\epsilon))} + i \int_{\infty}^{-\infty} dy \frac{1}{-y^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} = 0 \quad (\text{C.4})$$

assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} &= \frac{(-i)}{(-1)} \int_{\infty}^{-\infty} dy \frac{1}{y^2 + \vec{p}^2 + m^2 + i\epsilon} \\ &= (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{y^2 + \vec{p}^2 + m^2 + i\epsilon} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{y^2 + \vec{p}^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Fazendo a substituição $y \rightarrow p_0$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (\text{C.6})$$

onde

$$p_0 \rightarrow ip_0, \quad dp_0 \rightarrow idp_0, \quad d^4 p \rightarrow id^4 p. \quad (\text{C.7})$$

Apêndice D

Notações e Convenções

D.1 Unidades

Neste presente trabalho foi utilizada unidades onde

$$\hbar = c = 1. \quad (\text{D.1})$$

Neste sistema,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}. \quad (\text{D.2})$$

A massa (m) de uma partícula é portanto igual a sua energia de repouso (mc^2), e também ao seu inverso de comprimento de onda Compton $(mc)/\hbar$.

D.2 Algumas expansões

D.2.1 Binômio de Newton

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots, \quad (x^2 < 1), \quad (\text{D.3})$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \dots, \quad (x^2 < 1). \quad (\text{D.4})$$

D.2.2 Expansão da exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{D.5})$$

D.2.3 Expansão do logaritmo natural

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (|x| < 1). \quad (\text{D.6})$$

D.3 Relatividade e tensores

O tensor métrico usado neste trabalho foi

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

com índices gregos que vão de 0 a 3 e índices romanos i, j , *etc* que vão de 1 a 3 denotando somente as três componentes espaciais. Quadri-vetores são escritos de forma normal sem destaque, já tri-vetores são denotados em **negrito** ou por uma seta sobre ele, por exemplo,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, \vec{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}) = (x^0, -\vec{x}); \quad (\text{D.8})$$

$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{D.9})$$

D.4 Transformadas de Fourier e Distribuições

Neste trabalho frequentemente usamos a função degrau de Heaviside $\theta(x)$ e a função Delta de Dirac $\delta(x)$, definidas como se segue:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x). \quad (\text{D.11})$$

A função delta em n dimensões, denotada $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ é zero em qualquer lugar exceto em $\mathbf{x} = 0$ e satisfaz,

$$\int d^n x \delta^{(n)}(x) = 1. \quad (\text{D.12})$$

Os fatores 2π nas transformadas de Fourier sempre aparecem com a integral momentum. Por exemplo, em quatro dimensões,

$$f(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{f}(k); \quad (\text{D.13})$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4 x e^{ik \cdot x} f(x). \quad (\text{D.14})$$

Em transformadas tri-dimensionais os sinais nos expoentes serão $+$ e $-$, respectivamente. O til em $\tilde{f}(k)$ às vezes serão omitidos quando não existir potencial para confundir. Outro fator importante de 2π para lembrar aparecerá na identidade,

$$\int d^4 x e^{ik \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k). \quad (\text{D.15})$$

D.5 Regras de Feynman

Eletrodinâmica Quântica: $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e_0 \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu$

Propagador de Dirac

$$\begin{array}{c} \longleftarrow \\ \text{p} \end{array} = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Fóton propagador

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \longleftarrow \\ \text{p} \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

D.6 Regularização por corte no momentum (Cut-off)

$$I = \int d^N x \frac{1}{(x^2 + a^2)^A}, \quad x = (x_1, \dots, x_N). \quad (\text{D.16})$$

Métrica euclidiana, estamos integrando em todo \mathbb{R}^N .

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \quad (\text{D.17})$$

$$0 < \theta_i \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \infty. \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} x_{N-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2} \cos \phi \\ x_N &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{N-2} \sin \phi \end{aligned}$$

logo,

$$d^N x = r^{N-1} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{N-2} d\phi \quad (\text{D.20})$$

onde

$$d\Omega = \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{N-2} d\phi. \quad (\text{D.21})$$

Assim,

$$I = \underbrace{\int d\Omega}_{S_N} \int dr \frac{r^{N-1}}{(r^2 + a^2)^A}; \quad (\text{D.22})$$

a segunda integral do termo acima é finita para: $r^{N-1}/r^{2A} = r^{N-1-2A}$, $N - 1 - 2A < -1 \rightarrow N - 2A < 0$. E

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{N-2} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2}. \quad (\text{D.23})$$

Finalmente

$$I_\Lambda = S_N \int_0^\Lambda dr \frac{r^{N-1}}{(r^2 + a^2)^A} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty}. \quad (\text{D.24})$$

D.7 Integrais de laço(loop) e Regularização Dimensional

Para combinar denominadores propagadores, introduzimos integrais sobre parâmetros de Feynman:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (\text{D.25})$$

No caso de somente dois fatores, esta fórmula se reduz:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (\text{D.26})$$

Feito isto, a quantidade nos colchetes no denominador será uma função quadrática de variáveis no integrando p_i^μ . Depois, completa-se o quadrado e desloca-se as variáveis de integração absorvendo os termos lineares em p_i^μ . Para uma integral de um laço(loop), existe uma única integração no momentum p^μ , o qual é deslocado a um momentum variável l^μ . Depois deste deslocamento, o denominador assume a forma $(l^2 - \Delta)^n$. No numerador, termos com número ímpar de potências de l desaparecem por integração simétrica. Simetria também permiti substituir

$$l^\mu l^\nu \rightarrow \frac{1}{2} l^2 g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.27})$$

(Aqui d é a dimensão do espaço tempo.) A integral é mais convenientemente avaliada após uma Rotação de Wick ao espaço Euclidiano, com a substituição

$$l^0 = i l_E^0 \quad l^2 = -l_E^2. \quad (\text{D.28})$$

Se a integral converge, podemos colocar $d = 4$ do começo. Se a integral diverge, o comportamento próximo $d = 4$ pode ser extraído por expansão

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = 1 - \left(2 - \frac{d}{2}\right) \ln \Delta + \dots \quad (\text{D.29})$$

Também precisamos da expansão de $\Gamma(x)$ próximo de seus pólos:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) \quad (\text{D.30})$$

próximo de $x = 0$, e

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right) \quad (\text{D.31})$$

próximo de $x = -n$. Aqui γ é a constante de Euler-Mascheroni, $\gamma \approx 0,5772$. A combinação seguinte dos termos frequentemente aparece nos cálculos:

$$\frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \quad (\text{D.32})$$

com $\epsilon = 4 - d$.

D.8 Constantes Físicas

$$c = 2,998 \times 10^{10} \text{ cm/s}; \quad (\text{D.33})$$

$$\hbar = 6,582 \times 10^{-22} \text{ MeV.s}; \quad (\text{D.34})$$

$$e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad (\text{D.35})$$

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ Kg}; \quad (\text{D.36})$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137,04} = 0,00730. \quad (\text{D.37})$$

Combinações úteis: Raio de Bohr:

$$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5,292 \times 10^{-9} \text{ cm}; \quad (\text{D.38})$$

Comprimento de onda Compton do elétron

$$\tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,862 \times 10^{-11} \text{ cm}; \quad (\text{D.39})$$

Constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \approx 0,577216 \dots \quad (\text{D.40})$$

D.9 Integrais usadas no texto

D.9.1 Integral de π

Seja I uma integral dada por

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \quad (\text{D.41})$$

e

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

passando a integral acima em coordenadas polares temos: $dx dy = dA = r dr d\theta$ e $r^2 = x^2 + y^2$, logo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} &= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2 \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\infty} d\theta \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

Assim,

$$I^2 = \pi, \quad I = \sqrt{\pi}. \quad (\text{D.44})$$

D.9.2 Função de Green tri-dimensional da equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)$$

Suponha que queremos encontrar uma função $G(\mathbf{r})$ que resolva a equação de Helmholtz com uma função delta (fonte):

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r}) \quad (\text{D.45})$$

onde $G(\mathbf{r})$ é chamada função de Green para a equação de Helmholtz. Nossa primeira tarefa é resolver a equação (D.45) para $G(\mathbf{r})$. Isto é facilmente realizado através de uma transformada de Fourier, o qual torna a equação diferencial em uma equação algébrica. Temos

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} g(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s}. \quad (\text{D.46})$$

Então

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [(\nabla^2 + k^2)e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}] g(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} \quad (\text{D.47})$$

mas

$$\nabla^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} = -\mathbf{s}^2 e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{D.48})$$

e

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{s}, \quad (\text{D.49})$$

então a equação (D.45) fica

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (-\mathbf{s}^2 + k^2) e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} g(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{s}. \quad (\text{D.50})$$

Isto segue que

$$g(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(k^2 - \mathbf{s}^2)} \quad (\text{D.51})$$

colocando este resultado de volta na equação (D.46) nós encontramos:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{(k^2 - \mathbf{s}^2)} d^3\mathbf{s}. \quad (\text{D.52})$$

Agora, \mathbf{r} está fixo, no que diz respeito a integração de \mathbf{s} , assim podemos escolher bem as coordenadas esféricas (s, θ, ϕ) com o eixo polar ao longo de \mathbf{r} . Então $\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} = sr \cos \theta$, a integral em ϕ é trivial (2π) e a integral em θ é:

$$\int_0^\pi e^{isr \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{e^{isr \cos \theta}}{isr} \Big|_0^\pi = \frac{2 \sin(sr)}{sr}. \quad (\text{D.53})$$

Então

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{s \sin(sr)}{k^2 - s^2} ds. \quad (\text{D.54})$$

A integral não é simples, para isto revertemos a notação exponencial e fatoramos o denominador:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{s e^{isr}}{(s-k)(s+k)} ds - \int_{-\infty}^\infty \frac{s e^{-isr}}{(s-k)(s+k)} ds \right]$$

$$= \frac{i}{8\pi^2 r} (I_1 - I_2). \quad (\text{D.55})$$

Estas duas integrais podem ser avaliadas usando a fórmula integral de Cauchy:

$$\oint \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (\text{D.56})$$

Para cada integral na equação (D.55) devemos ter um contorno fechado de tal maneira que o semicírculo no infinito não contribua nada. No caso de I_1 , o fator e^{isr} vai a zero quando s tem uma grande parte positiva imaginária; para isto nós fechamos o contorno por cima como mostra a figura (D.1). O contorno circunda somente a singularidade em $s = +k$, então

$$I_1 = \oint \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right] \frac{1}{s-k} ds = 2\pi i \left[\frac{se^{isr}}{s+k} \right]_{s=k} = i\pi e^{ikr}. \quad (\text{D.57})$$

No caso de I_2 , o fator e^{-isr} vai a zero quando s tem uma grande parte negativa imaginária; para isto fechamos o contorno por baixo como mostra a figura (D.1). O contorno circunda somente a singularidade em $s = -k$,

$$I_2 = \oint \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right] \frac{1}{s+k} ds = -2\pi i \left[\frac{se^{-isr}}{s-k} \right]_{s=-k} = -i\pi e^{ikr}. \quad (\text{D.58})$$

Finalmente a equação de Green para a equação de Helmholtz é

$$G(\mathbf{r}) = \frac{i}{8\pi^2 r} [(i\pi e^{ikr}) - (-i\pi e^{ikr})] = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (\text{D.59})$$

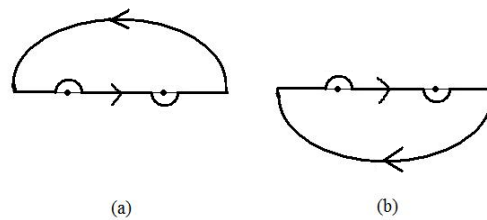


Figura D.1: Contornos de integração das equações D.57(a) e D.58(b)

D.9.3 Função de Green bi-dimensional da equação de Helmholtz modificada ($\nabla^2 - k^2$)

Da equação

$$\int d^d \mathbf{p} f(p) e^{\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} = (2\pi)^{d/2} a^{-d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{d/2-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right), \quad d > 2. \quad (\text{D.60})$$

E sendo

$$f(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (\text{D.61})$$

então

$$f\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + m^2} = \frac{a^2}{u^2 + (ma)^2} \quad (\text{D.62})$$

assim a equação (D.60) fica sendo,

$$\begin{aligned} \int d^d \mathbf{p} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{\pm i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}} &= (2\pi)^{d/2} a^{-d} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2} J_{d/2-1}(u) a^2}{u^2 + (ma)^2} \\ &= (2\pi)^{d/2} a^{2-d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{d/2-1}(u) \frac{1}{u^2 + (ma)^2} \\ &= (2\pi)^{d/2} a^{2-d} (ma_{pq})^{d/2-1} K_{d/2-1}(ma_{pq}), \quad 1 \leq d \leq 4 \\ &= (2\pi)^{d/2} m^{d-2} (ma)^{2-d} (ma_{pq})^{d/2-1} K_{d/2-1}(ma_{pq}), \quad 1 \leq d \leq 4 \\ &= (2\pi)^{d/2} m^{d-2} (ma_{pq})^{1-d/2} K_{d/2-1}(ma_{pq}). \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

D.10 Função Gama

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt; \quad \text{Re } z > 0 \quad (\text{Euler}), \quad (\text{D.64})$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{Euler}), \quad (\text{D.65})$$

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (\text{Wierstrass}), \quad (\text{D.66})$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \mathcal{O}(z). \quad (\text{D.67})$$

Bibliografia

- [1] M. Peshkin and A. Tonomura , *The Aharonov-Bohm Effect*, Vol. 340 of Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [2] S. Olariu and I. Iovitzu Popescu *The quantum effects of electromagnetic fluxes*, Rev. Mod. Phys., Vol. 57, n^0 2, April 1985.
- [3] Y. Aharonov and D. Bohm *Significance of Eletromagnetic Potentials in Quantum Theory*, The Physical Review, second series volume 115(3), 1 Agosto 1959.
- [4] R. G. Chambers *Shift of an Electron Interference Pattern by enclosed Magnetic Flux*, Physical Review Letters, volume 5(1), 1 de Julho 1960.
- [5] *Möllenstedt*, G. and B. W., Naturwissenschaften, 1962. 49:p.81.
- [6] Bayh, W., Zeitschrift Physik, 1962. 169:p.492.
- [7] Schaal, V. G., C. Jönsson, and E. F. Krimmel, *Weitgetrennte Kohärente Elektronen-Wellenzüge und Messung des Manetflunsses*. Optik, 1966/1967.29(5):p.529-538.
- [8] Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Sinichiro Yano and Hiroji Yamada *Evidence Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave*, Physical Review Letters, volume 56(8), 24 de Fevereiro 1986.
- [9] Timothy H. Boyer *Semiclassical Explanation of the Matteucci-Pozzi and Aharonov-Bohm Phase Shifts*, Foundations of Physics, 2002. 32: p.41-50.
- [10] G. Matteucci and G. Pozzi, *New Diffraction Experiment on the Electrostatic Aharonov-Bohm Effect*, Physical Review Letters, volume 54(2469 – 2470), 1985.

- [11] C. R. Hagen *Aharonov-Bohm Scattering of Particles with Spins*, Physical Review Letters, volume 64(5), 30 de Outubro 1989.
- [12] W. Greiner, J. Reinhart *Quantum Electrodynamics*, Third Edition, Springer (2003).
- [13] W. Dittrich and M. Reuter, *Lectures Notes in Physics 220: Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*, Springer (1985).
- [14] A. Zee *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2003).
- [15] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995).
- [16] W. Dittrich and H. Giess, Phys. Rev. **D58**, 025004 (1998)
W. Dittrich and H. Giess (1998) [arXiv:hep-ph/9806417].
S. I. Kruglov, Phys. Rev. **D75**, 117301 (2007).
- [17] H.B.G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
Kimball A. Milton, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, R209 (2004), [hep-th/0406024].
K.A. Milton, *The Casimir Effect, Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, Singapore (2001).
M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001);
G. Plunien, B. Muller and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 89 (1986).
- [18] K. Scharnhorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).
G. Barton, Phys. Lett. B **237**, 559 (1990).
C. Farina and F. A. Barone, Phys. Rev. **D71**, 067701, (2005).
- [19] Peter W. Milonni *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Elettrodynamics*, Academic Press (1994).
- [20] Eberhard Zeidler *Quantum Field Theory II: Quantum Electrodynamics*, 1^a ed., Springer (2009).
- [21] Anatoly E. Shabad and Vladimir V. Usov *Modified Coulomb Law in a Strongly Magnetized Vacuum*, Physical Review Letters, PRL 98, 180403 2 May 2007.

- [22] A. E. Shabad and V. V. Usov *Electric field of a pointlike charge in a strong magnetic field and ground state of a hydrogenlike atom*, Physical Review D, Volume 77, 025001 (2008).
- [23] L.C. de Albuquerque, M. Gomes, and A. J. da Silva *Radiative corrections to the Aharonov-Bohm scattering*, Physical Review D, Volume 61, 016003 Published 7 December 1999.
- [24] M. Peshkin and A. Tonomura, *Lectures Notes in Physics 340: The Aharonov-Bohm Effect*, Springer (1989).
- [25] Lewis H. Ryder , *Quantum Field Theory*, 2^a ed., Cambridge University Press (1996).
- [26] Marcelo Alonso and Edward J. Finn *Física Um Curso Universitário*, Editora Edgard Blücher (1972).
- [27] T.T. Wu and C.N. Yang, Phys. Rev. D **12**, 3845 (1975).
- [28] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3^a ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999).
- [29] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Rev. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc (1994).
- [30] G. T. C. Silva, *Potenciais não-globais e a quantização da carga elétrica*, trabalho de conclusão de curso, Física Bacharelado, UNIFEI, (2010).
- [31] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey (1995).
- [32] George B. Arfken, Hans J. Weber *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, 6^a ed. (2005).
- [33] F. A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Phys. Rev. D **78**, 125003 (2008).
- [34] I. H. Duru, Found. Phys. **23**, 809 (1993).