Universidade Federal de Itajubá

Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada

O Teorema de Mercer para uma Classe de Operadores sobre um Espaço de Krein

Adriana Martins da Silva Castro

Orientador: Prof. Dr. ***Claudemir Pinheiro de Oliveira***

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

O Teorema de Mercer para uma Classe de Operadores sobre um Espaço de Krein

Adriana Martins da Silva Castro

Orientador: Prof. Dr. ***Claudemir Pinheiro de Oliveira***

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada da UNIFEI como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada.

UNIFEI - ITAJUBÁ
Abril/2012

Ao meu amor Jivago.

"Pedi e se vos dará. Buscai e achareis.
Batei e vos será aberto.
Porque todo aquele que pede, recebe.
Quem busca, acha.
A quem bate, abrir-se-á."
Mt 7, 7-8.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais esta vitória em minha vida. Sem Ele, nada disso seria possível.

Ao meu orienatador, professor Claudemir, por todo tempo de dedicação e pela disponibilidade em me auxiliar tantas vezes. Seu apoio, paciência e competência foram fundamentais para eu chegar até aqui. A sua experiência como pesquisador e professor muito contribuiu para a minha formação.

Ao meu esposo Jivago pelo amor, companheirismo, apoio e incetivo dados a mim durante esse período em que estivemos distantes. Não fosse isso, eu teria desistido.

À minha família pelos exemplos de amor, amizade, conduta que até hoje me inspiram. À minha mãe Isa, ao meu pai Valdemir, aos meus irmãos, em especial ao Guga, Vovó e Dinvéi (in memorian) e Vozinha (Có). Divido com vocês os méritos desta conquista.

Aos grandes amigos e companheiros Warley e Fernandinho que me proporcionaram tantos momentos alegres. Aos amigos do peito que muito me apoiaram nos momentos difíceis. Em especial Ricardo Edem, Simone Magalhães, Geraldo Élcio, Clayton, Fredy, Paulo e Manu. Aos amigos e familiares que, por mensagens ou telefonemas, tornaram meus dias mais alegres e me fizeram sentir menos só. Entre esses estão: a família do meu esposo, Ala, Tati, Tia Laíde, Marly, Maria Isabel, tia Neuza, Aninha e Tezinha. Não poderia esquecer de Érika e Bruno.

Aos professores e colegas da UNIFEI/ICE. Especialmente, aos professores Luís Fernando, Mariza, Fábio e Márcia. Seus exemplos de dedicação, simplicidade e competência guardarei sempre comigo. Além de ter me proporcionado um grande aprendizado, vocês foram e serão muito importantes para o meu crescimento pessoal e profissional. Ao Coordenador do Programa, professor Fabrício e à secretária Regina que sempre me atenderam com presteza.

Aos amigos e colegas da UNIMONTES e da Escola Estadual Dona Quita Pereira. O incentivo e a ajuda destes colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

À Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais pelo incentivo e apoio financeiro.

Enfim, a todos que sempre estiveram comigo e que direta ou indiretamente contribuíram para que este sonho tornasse realidade.

Obrigada!
Adriana

Resumo

Este trabalho é dividido em duas partes. Na primeira delas consideramos espaços de Krein. Um espaço de Krein é um espaço vetorial que pode ser decomposto como uma soma direta de dois de seus subespaços, ambos sendo espaços de Hilbert com normas diferentes provindas de uma mesma forma sesquilinear sobre o espaço em questão. Entre outras coisas, discutimos quando um espaço de Hilbert torna-se um espaço de Krein e, vice-versa. Na segunda parte, aplicamos os resultados prévios para obter uma extensão do Teorema de Mercer para uma composição da forma $R \circ (S + T)$, onde R, S e T são operadores integrais sobre o espaço usual $L^2(S^m)$, onde S^m é a esfera unitária de $\mathbb{R}^{m+1}$. A prova desta extensão é baseada na construção de uma estrutura de Krein para $L^2(S^m)$ dependendo de R, S e T.

Palavras-chave: Teorema de Mercer, operador integral, operador positivo, J-espaço, espaços de Krein, teorema espectral.

Abstract

This work is divided in two parts. In the first one we consider Krein spaces. A Krein space is a vector space which can be decomposed as a direct sum of two of its subspaces, both being Hilbert spaces with different norms coming from a same sesquilinear form on the space itself. Among other things, we discuss when a Hilbert space is a Krein space and vice-versa. In the second one, we apply the results from the previous part to obtain an extension of Mercer's theorem to a composition of the form $R \circ (S + T)$, in which R, S e T are integral operators on the usual $L^2(S^m)$, in which S^m is the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$. The proof of this extension is based upon the construction of a Krein space structure for $L^2(S^m)$ depending on R, S and T.

Keywords and phrases. Mercer's theorem, integral operators, positive operators, J-space, Krein spaces, spectral theorem.

Símbolos e Notações

$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos com as operações usuais
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais com as operações usuais
$\mathbb{R}^{m+1}$	espaço euclidiano q-dimensional
S^m	esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$ em relação a norma usual
$(X, \mathcal{M}, \nu)$	espaço de medida
$L^1(S^m)$	espaço das funções integráveis em relação a medida $d\sigma_m$
$L^2(S^m)$	espaço das funções quadrado-integráveis em relação a medida $d\sigma_m$
$\mathcal{V}$	espaço vetorial unitário
Γ	função gama usual
K	núcleo gerador do operador integral
T	transformação linear entre espaços vetoriais
G	operador autoadjunto tal que $G \circ G = I$
J	operador autoadjunto tal que $J \circ J = I$
I	operador identidade
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno
$(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	espaço de Hilbert relativo ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$
q	forma hermitiana sesquilinear
q_G	forma hermitiana sesquilinear dependente de G e $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$(\mathcal{K}, q)$	espaço de Krein munido da forma q
$\langle \cdot, \cdot \rangle_q$	produto interno induzido por uma forma q
$\langle G(\cdot), \cdot \rangle$	produto interno induzido por um operador autoadjunto G tal que $G \circ G = I$
T^*	conceito de adjunto no sentido usual
$T^{[*]}$	conceito de adjunto no sentido de espaço de Krein
δ_{ij}	função delta de Kronecker

ℓ_{00}^{∞}	um subespaço das sequências complexas quadrado-somáveis
$\rho(T)$	resolvente do operador T
$\sigma(T)$	espectro do operador T
$W \oplus W^{\perp}$	soma direta de espaços vetoriais
$Im(T)$	imagem do operador T
$Re(z)$	parte real de um número complexo z
$Img(z)$	parte imaginária de um número complexo z

Índice

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Operadores Lineares em espaços munidos de uma forma sesquilinear hermitiana é um ramo da Análise Funcional aplicada em diversas áreas da Matemática e da Física. Problemas de Mecânica ([27]), Teoria Quântica de Campos ([18]) e Sistemas de Equações Diferenciais Dissipativos Hiperbólicos e Parabólicos ([21, 22]) aparecem nesse cenário.

Embora os físicos teóricos tivessem conhecimento de tais operadores, os matemáticos foram motivados a descrever e esclarecer as propriedades geométricas e topológicas dos espaços, onde esses operadores lineares atuam. Dentre os matemáticos que apareceram nessa formalização destacou-se Pontryagin ([20]). Seus estudos foram continuados por Krein e Iokhvidov ([14, 2]).

Nesta dissertação, estudaremos a teoria de espaços de Krein, cujos conceitos e definições foram baseados em [2]. Em poucas palavras, espaço de Krein é um espaço vetorial obtido pela soma direta de espaços de Hilbert, onde cada somando tem as expressões de seus produtos internos iguais, a menos de sinal e, dependentes da forma sesquilinear hermitiana atuando sobre o espaço. Nesses espaços, estudaremos operadores autoajuntos no sentido de Krein. Tal como na teoria clássica, num espaço de Krein também aparece a versão do teorema espectral para operador limitado e positivo. Esse teorema será usado para encontrarmos a expressão do núcleo do operador integral da forma $R \circ (S+T)$, onde R, S e T são operadores integrais sobre $L^2(S^m)$, o espaço das funções quadrado-integráveis gerado pela medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+1}$ restrita à

S^m, a esfera unitária com centro na origem desse espaço.

Geralmente, as propriedades assumidas para operadores integrais implicam que eles são também compactos autoadjuntos sobre os espaços que eles atuam. Portanto, o Teorema Espectral Clássico é aplicado para gerar uma sequência de funções integráveis e uma sequência numérica que são usadas na composição de uma série que pode convergir uniformemente para o núcleo do operador integral em questão. Essa técnica foi usada primeiramente por Mercer. Também a usaremos aqui para obter a expressão de $R \circ (S + T)$. Isso justifica o título do trabalho que estamos apresentando.

A seguir, cotamos a versão clássica do Teorema de Mercer para compactos da reta([16]).

Teorema 1.0.1 *Seja K uma função em $L^2([a,b]\times[a,b])$. Se K é contínua e o operador integral gerado por K é não negativo, então existe uma sequência de números não negativos $\{\lambda_n\}$ convergindo para 0 e uma sequência $\{\psi_n\}$ ortonormal em $L^2([a,b])$ formada por funções contínuas tal que a soma*

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in [a,b]$$

converge absoluta e uniformemente em $[a,b] \times [a,b]$.

Várias versões deste teorema foram estudados por muitos matemáticos. Sua aplicabilidade está associada a muitos problemas. As referências [5] e [15] fazem uso desse teorema para estudar teoria de operadores. Problemas como: Equações de Volterra [23] e teoria de aproximação ([25, 26]) aparecem naturalmente neste campo da análise.

Versões mais gerais do Teorema de Mercer foram estudadas por outros pesquisadores ([7], [8]). A versão que estudaremos aqui é uma extensão daquela provada em [7].

Teorema 1.0.2 *Sejam R e T operadores integrais autoadjuntos sobre $L^2([a,b])$, ambos gerados por núcleos contínuos. Assuma que -1 não é um autovalor de T. Se R é positivo, então existem sequências $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ em $L^2([a,b])$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x)\overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in [a,b],$$

converge absoluta e uniformemente em $[a,b]\times[a,b]$ *para o núcleo gerador de* $R\circ(I+T)$.

Nossa extensão desse teorema refere-se a dois sentidos. Primeiro que o espaço $L^2([a,b])$ agora é substituído por $L^2(S^m)$ e a classe de operadores que lidaremos é mais geral que a tratada na hipótese do teorema acima. Assim como em Dostanić, nossa prova também baseia-se na construção de uma estrutura de espaço de Krein para $L^2(S^m)$.

O restante da dissertação está organizada como segue: O Capítulo 2 contém uma coletânea de conceitos e propriedades da análise funcional necessários para a compreensão dos resultados que serão abordados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 3, estudaremos o conceito de forma sesquilinear hermitiana e veremos que os espaços vetoriais munidos dessas formas possuem uma estrutura com propriedades semelhantes às que aparecem em espaço vetorial com produto interno. Esse é o capítulo, onde estudaremos espaços de Krein. A questão de sabermos sob que hipóteses espaços de Krein tornam-se um espaço de Hilbert e reciprocamente, também será abordada aqui. Finalmente, abordaremos superficialmente questões da teoria de operados lineares sobre tais espaços como, por exemplo, o conceito de operador adjunto e a relação entre esse e o conceito ordinário.

Finalmente no Capítulo 4, principal da dissertação, será provada a versão do Teorema de Mecer para o núcleo da composição de operadores integrais que comentamos acima. A prova que apresentamos é mais detalhada que aquela de Dostanić.

Capítulo 2

Preliminares

No capítulo presente apresentaremos resultados básicos a serem utilizados nos capítulos 3 e 4. Algumas provas serão apresentadas integralmente, enquanto outras serão substituídas por uma indicação bibliográfica apropriada, quando for o caso.

Embora os títulos dados a cada seção deste capítulo são gerais, não aprofundaremos a teoria que eles sugerem, mas somente os conceitos e resultados que têm relação direta com este trabalho serão abordados com mais detalhe.

2.1 Espaços de Hilbert

Nesta seção, descreveremos algumas propriedades dos espaços de Hilbert. As referências [6], [11] e [12] contém um estudo mais completo desses espaços.

Nos textos subsequentes, a notação $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ indicam o corpo dos números complexos e o corpo dos números reais, respectivamente. Os espaços vetorias sobre $\mathbb{C}$ serão, usualmente, chamados *espaços vetorias unitários*. Usaremos simplesmente a terminologia 'espaço unitário' para designar tais espaços.

Iniciaremos com propriedades básicas de espaços unitários munidos de produto interno.

Teorema 2.1.1 ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Seja $\mathcal{V}$ um espaço unitário* *com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}, \quad x, y \in \mathcal{V}.$$

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$. Então,

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Como o resultado é imediato para $y = 0$, assuma o contrário. Aplicando, agora, a desigualdade anterior para $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$, segue que

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}.$$

Portanto, o resultado segue da última desigualdade. ■

Quando nada for dito, a notação $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ indicará um espaço de Hilbert e $\| \cdot \|$ a norma proveniente do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então,

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \quad x \in \mathcal{H}.$$

O teorema abaixo mostra a continuidade do produto interno, propriedade útil quando se precisa permutar o símbolo de somatório de uma série com o símbolo de integração.

Teorema 2.1.2 *Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências em $\mathcal{H}$ convergentes para $x, y \in \mathcal{H}$, respectivamente, então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.*

Demonstração: Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ como na afirmação do teorema. Então, aplicando-se sequencialmente a desigualdade triangular e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|.$$

A continuidade da norma implica que $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0$. O lema está provado. ■

Os resultados listados na sequência, requerem a definição de base ortonormal de um espaço de Hilbert. No capítulo presente, o conjunto A que aparece nos resultados a seguir representa uma família de índices.

Definição 2.1.3 *Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ um conjunto de $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dizemos que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal quando possui as seguintes propriedades:*
(i) $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$;
(ii) $\|e_\alpha\| = 1$, $\alpha \in A$.
Um conjunto ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ quando:
(iii) Se $x \in \mathcal{H}$ e $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$, $\alpha \in A$, então $x = 0$.

Quando A for o conjunto de inteiros positivos a notação $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ será substituída simplesmente por $\{e_n\}$.

Teorema 2.1.4 (*Desigualdade de Bessel*) *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal em $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, então*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ como na afirmação do teorema. Defina

$$x_{A'} = x - \sum_{\alpha\in A'} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha, \quad x \in \mathcal{H},$$

onde A' é um subconjunto finito de A. Então, para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle x_{A'}, e_\beta\rangle = \left\langle x - \sum_{\alpha\in A'} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha, e_\beta \right\rangle = \langle x, e_\beta\rangle - \left\langle \sum_{\alpha\in A'} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha, e_\beta \right\rangle = 0, \quad \beta \in A'.$$

Como $x_{A'}$ é ortogonal a $x - x_{A'}$, $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x_{A'}\|^2 + \|x - x_{A'}\|^2 \\ &= \|x_{A'}\|^2 + \left\| \sum_{\alpha\in A'} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \right\|^2 \\ &= \|x_{A'}\|^2 + \sum_{\alpha\in A'} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \\ &\geq \sum_{\alpha\in A'} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2, \quad x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Como A' é arbitrário, o teorema está provado. ■

O próximo teorema mostra que igualdade pode ocorrer na expressão da Desigualdade de Bessel. Além disso, ele nos dá uma condição necessária e suficiente para que um conjunto ortonormal seja também uma base do espaço de Hilbert em questão.

Teorema 2.1.5 *Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ um conjunto ortonormal em $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) Se $x \in \mathcal{H}$ e $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$, $\alpha \in A$, então $x = 0$;
(ii) Se $x \in \mathcal{H}$, então a soma

$$\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$$

é $\mathcal{H}$-convergente para x;
(iii) ***(Identidade de Parseval)*** $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$, *$x \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: ([19], p.154). ■

O lema técnico a seguir será usado para provar o próximo teorema.

Lema 2.1.6 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço unitário munido com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Assuma que $x, y \in \mathcal{V}$. Então, $\langle x, y\rangle = 0$ se e somente se*

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq \langle x, x\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: ([19], p.123). ■

Teorema 2.1.7 ***(Teorema da Decomposição Ortogonal)*** *Seja W um subespaço vetorial fechado de $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, então $\mathcal{H} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$, onde*

$$\mathcal{W}^\perp := \{x \in \mathcal{H} \,:\, \langle x, y\rangle = 0,\, y \in \mathcal{W}\}.$$

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{H}$. Defina $\delta = \inf_{z\in W}\|x - z\|$. Logo, existe uma sequência $\{y_n\}$ em W tal que $\|x - y_n\| \to \delta$. Pela Lei do Paralelogramo ([11], p.173),

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2, \quad m, n = 1, 2, \ldots.$$

Como $(y_n + y_m)/2 \in W$, $m, n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|(y_n + y_m)/2 - x\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2.\end{aligned}$$

Então, $\{y_n\}$ é uma sequência de Cauchy em W. Como W é fechado e $\mathcal{H}$ é completo, a sequência $\{y_n\}$ converge para algum $y \in W$. Então,

$$\delta \leq \|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\|, \quad z \in W,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

A continuidade da norma implica que $\|y_n - y\| \to 0$. Como $\|x - y_n\| \to \delta$, concluímos que $\|x - y\| = \delta$. Uma vez que W é um subespaço de $\mathcal{H}$, $\lambda z - y \in W$, $z \in W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo,

$$\|(x - y) + \lambda z\| = \|x + (\lambda z - y)\| \geq \|x - y\|.$$

Pelo lema anterior, $\langle x - y, z\rangle = 0$, $z \in W$. Assim,

$$x = y + (x - y), \quad y \in W,\ x - y \in W^{\perp}.$$

Como a unicidade desta decomposição vem da igualdade $W \cap W^{\perp} = \{0\}$, o teorema está provado. ∎

Operador adjunto, definido a seguir, aparece no estudo da teoria espectral.

Definição 2.1.8 *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços unitários com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W}$, respectivamente. A adjunta da transformação linear $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é a única transformação linear $T^* : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ tal que $\langle T(x), y\rangle_W = \langle x, T^*(y)\rangle_{\mathcal{V}}$, $x \in \mathcal{V}$ e $y \in \mathcal{W}$.*

Um caso particular desta definição ocorre quando os dois espaços unitários envolvidos na definição acima coincidem. Neste caso, o *adjunto* do operador linear T sobre $\mathcal{V}$ é o único operador T^* sobre $\mathcal{V}$ satisfazendo a igualdade

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle, \quad x, y \in \mathcal{V}.$$

Quando $T^* = T$ dizemos que T é um operador linear *autoadjunto* sobre $\mathcal{H}$.

Salientamos que no restante deste trabalho a expressão 'operador linear' será substituída por 'operador'.

Para o próximo teorema recordamos que um operador T sobre um espaço unitário normado é *compacto* quando a imagem da bola unitária do domínio do operador é um conjunto de fecho compacto no contradomínio.

Teorema 2.1.9 *Seja T um operador limitado sobre $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. As afirmações seguintes são equivalentes:*
(i) T é compacto;
(ii) T^* é compacto;
(iii) Existe uma sequência $\{T_N\}$ de operadores de posto finito tal que $\|T - T_N\| \to 0$.

Demonstração: ([6], p.42). ■

O conceito abaixo facilitará a escrita no restante da dissertação.

Definição 2.1.10 *Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert. Uma sequência (λ_n, e_n) em $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$ é compatível com um operador T sobre $\mathcal{H}$ quando para cada $x \in \mathcal{H}$, a soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

é $\mathcal{H}$-convergente para $T(x)$.

Note que não estamos exigindo unicidade do operador na representação acima. Além disso, como nem toda soma do tipo que aparece na Definição 2.1.10 é $\mathcal{H}$-convergente, nem toda sequência (λ_n, e_n) em $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$ é compatível com algum operador sobre $\mathcal{H}$. No entanto, o Teorema 2.1.5 garante que quando $\{e_n\}$ for uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, a sequência $(1, e_n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$ é compatível com o operador identidade I sobre $\mathcal{H}$.

O teorema abaixo, mostra que a expressão que define o operador T^* é conhecida quando a soma que define o operador T sobre o espaço de Hilbert em questão, também é conhecida.

Teorema 2.1.11 *Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert, T um operador sobre $\mathcal{H}$ e (λ_n, e_n) uma sequência dupla em $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$ compatível com T. Assuma que $\{e_n\}$ é um* *conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$ e $\{\lambda_n\}$ é limitada. Então, a sequência $(\overline{\lambda_n}, e_n)$ é compatível com T^*.*

Demonstração: Considere todas as afirmações do teorema. Pelo Teorema 2.1.2, notamos que

$$\langle T(x), y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Agora, seja S o operador sobre $\mathcal{H}$ para o qual a sequência $(\overline{\lambda_n}, e_n)$ é compatível. Então, usando uma vez mais o Teorema 2.1.2, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle x, S(y)\rangle &= \langle x, \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \overline{\lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n\rangle \\
&= \lim_{p\to\infty} \langle x, \sum_{n=1}^{p} \overline{\lambda_n}\langle y, e_n\rangle e_n\rangle \\
&= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \langle e_n, y\rangle\langle x, e_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, y\rangle\langle x, e_n\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Então, $\langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, S(y)\rangle$, $x, y \in \mathcal{H}$. Assim, a afirmação segue pela unicidade da definição de adjunto. ■

2.2 Critério de Cauchy para Convergência Uniforme

Esta seção contém resultados relacionados à convergência de séries. Aproveitamos a oportunidade para um teorema da topologia que recorda uma caracterização de continuidade de função atuando em espaços métricos.

Teorema 2.2.1 *Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Uma função $f : M_1 \to M_2$ é contínua em M_1 se e somente se $f^{-1}(F)$ é fechado em M_1 para todo conjunto fechado F de M_2.*

Demonstração: Suponha que a função f como no enunciado do teorema é contínua. Seja F um conjunto fechado em M_2. Seja $p \in M_1$ tal que $f(p) \notin F$. Como $M_2 - F$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in M_2 \, : \, d_2(f(p), y) < \varepsilon\} \subset M_2 - F. \tag{2.1}$$

Por outro lado, a continuidade de f em p implica que existe $\delta > 0$ tal que $d_2(f(p), f(x)) < \varepsilon$, sempre que $d_1(p, x) < \delta$ com $x \in M_1$. Da última afirmação e de (2.1), seque que $\{x \in M_1 \, : \, d_2(p, x) < \delta\} \subset M_1 - f^{-1}(F)$. Portanto, o cojunto $f^{-1}(F)$ é fechado em M_1.
Para a recíproca, assuma que $f^{-1}(F)$ é fechado em M_1, para todo conjunto fechado F em M_2. Sejam $p \in M_1$ e $\varepsilon > 0$. Considere o conjunto aberto de M_2 definido por $B_2 = \{y \in M_2 \, : \, d_2(y, f(p)) < \varepsilon\}$. Então, a hipótese revela que $f^{-1}(M_2 - B_2) = M_1 - f^{-1}(B_2)$ é fechado em M_1. Como $p \in f^{-1}(B_2)$, existe $\delta > 0$ satisfazendo $B_1 = \{x \in M_1 \, : \, d_1(p, x) < \delta\} \subset f^{-1}(B_2)$. Logo, $f(x) \in B_2$, $x \in B_1$. Assim, a função f é contínua em p. Como p é arbitrário em M_1, a prova do teorema está completa. ■

O Critério de Cauchy para convergência de sequências é dado a seguir ([13], p. 16).

Teorema 2.2.2 *Seja $\{e_n\}$ uma sequência em $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Então, $\{e_n\}$ converge se e somente se dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que*

$$\|e_m - e_n\| < \varepsilon, \quad m, n \geq N.$$

O Critério de Cauchy para convergência uniforme tem a contrapartida seguinte.

Teorema 2.2.3 *Sejam Ω um conjunto não vazio e $\{f_n\}$ uma sequência de funções $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. A sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente se e somente se para cada $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que*

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon, \quad m, n \geq N, \, z \in \Omega \tag{2.2}$$

Demonstração: Assuma que $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função f em Ω. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N,\, z \in \Omega.$$

Agora, a desigualdade triangular implica na desigualdade (2.2). Reciprocamente, suponha que para $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon, \quad m, n \geq N,\, z \in \Omega.$$

Então, pelo teorema anterior, para cada $z \in \mathbb{C}$, a sequência $\{f_n(z)\}$ de $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ é convergente. Seja, então,

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in \Omega.$$

Fixando n e fazendo $m \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon, \quad n \geq N,\, z \in \Omega.$$

Esta desigualdade estabelece a convergência uniforme de $\{f_n\}$ em Ω para f.

2.3 Teoria Espectral

Nesta seção, destacaremos propriedades espectrais de operadores agindo em espaços de Hilbert.

Definição 2.3.1 *Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e T um operador sobre $\mathcal{H}$. O resolvente de T é o conjunto*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda I - T \text{ é injetor},\ Im(\lambda I - T) = \mathcal{H}\}.$$

O espectro de T é o conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda I - T \text{ não é injetor}\}.$$

Na definição precedente, $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado um *autovalor* de T associado aos *autovetores* de T que compõem o subespaço $\ker(\lambda I - T)$ de $\mathcal{H}$.

O teorema a seguir mostra que 0 é o único ponto de acumulação do espectro de certos operadores lineares.

Teorema 2.3.2 *Seja T um operador compacto sobre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Se $\{\lambda_n\}$ é uma sequência de elementos distintos de $\sigma(T)$, então $\lambda_n \to 0$.*

Demonstração: ([23], p.100). ∎

Corolário 2.3.3 *Seja T é um operador compacto sobre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Então, $\sigma(T)$ é um conjunto enumerável (talvez finito) e seu único ponto de acumulação possível é $\lambda = 0$.*

Mais propriedades espectrais estão no teorema a seguir ([23], p.108-109).

Teorema 2.3.4 *Seja T um operador sobre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Se T é limitado e autoadjunto, então:*
(i) $\sigma(T)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$;
(ii) Os autovetores correspondentes aos autovalores distintos são ortogonais;
(iii) Pelo menos um dos números $\|T\|$ ou $-\|T\|$ pertence a $\sigma(T)$ e

$$\|T\| = \sup\{|\lambda_n| : \lambda_n \in \sigma(T)\}.$$

Exibiremos a seguir uma versão do Teorema Espectral ([23], p.109).

Teorema 2.3.5 *Seja T um operador sobre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Assuma que T é limitado, compacto e autoadjunto. Então:*
(i) Existem sequências $\{\lambda_n\}$ em $\sigma(T) \setminus \{0\}$ e $\{e_n\}$ em $\mathcal{H}$ tais que a sequência (λ_n, e_n) em $\mathbb{C} \times \mathcal{H}$ é compatível com T;
(ii) O conjunto $\{e_n\}$ é ortonormal e $T(e_n) = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$;
(iii) Se $\sigma(T)$ é infinito, então $\|T_N - T\| \to 0$, onde

$$T_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in \mathcal{H},\ N = 1, 2, \ldots.$$

2.4 Teoria da Medida

Nesta seção, alguns fatos básicos de teoria da medida serão abordados, onde recordaremos os espaços L^p e os resultados relacionados a eles que de alguma forma nos serão úteis. A teoria não mencionada aqui que o leitor julgar necessária sobre esse assunto, poderá ser encontrada em [4] e [11].

Inicialmente, lembramos que a notação $(X, \mathcal{M}, \nu)$ refere-se a um *espaço de medida*. Então, o conjunto não vazio X está munido de uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ e ν é uma medida definida em $\mathcal{M}$, cuja imagem é um elemento em $\mathbb{C} \cup \infty$ ou em $\mathbb{R} \cup \infty$. Quando $\nu(X)$ é um número finito dizemos que o espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \nu)$ é *σ-finito*.

Teorema 2.4.1 ***(Teorema da Decomposição de Hahn-Jordan)*** *Seja $(X, \mathcal{M}, \nu)$ um espaço de medida, onde ν tem imagem em $\mathbb{R}$. Valem:*
(i) Existem conjuntos $M, N \in \mathcal{M}$ tais que $X = M \cup N$, $\nu(M) \geq 0$, $\nu(N) \leq 0$ e M e N são disjuntos;
(ii) Existem únicas medidas positivas ν^+ e ν^- tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$, onde $\nu^+(E) = \nu(E \cap M)$ e $\nu^-(E) = -\nu(E \cap N)$, $E \in \mathcal{M}$. Além disso, $\nu^+(N) = 0$ e $\nu^-(M) = 0$.

Demonstração: ([11], p.86). ■

Os espaços L^p tornam-se espaços normados conforme segue.

Definição 2.4.2 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \nu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \, : \, f \text{ é } \nu - \text{mensurável e} \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p d\nu(x), \quad f \in L^p(X). \tag{2.3}$$

No caso particular em que $X = \mathbb{R}$, o elemento $d\nu(x)$ é usualmente denotado por dx e $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra de Lebesgue. Um elemento $f \in L^1(\mathbb{R})$ é chamado uma *função Lebesgue-integrável*.

Os conjuntos $(L^p(X), \nu) := L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$ tornam-se espaços unitários munidos da norma $\| \cdot \|_p$ quando duas funções f e g desse espaço que são iguais a menos de um conjunto de medida ν-nula são identificadas. Nesse caso, é usual dizer que f e g são iguais quase sempre. Equivalentemente, $f = g$ q.s..

Uma definição análoga a anterior cabem aos espaços $(L^p(X \times Y), \mu \times \nu) := L^p(X \times Y)$, $1 \leq p < \infty$ correspondentes aos espaços de medida $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Duas propriedades dos espaços L^p estão presentes no teorema que segue ([11]).

Teorema 2.4.3 *Seja $1 \leq p < \infty$. Nas notações desta seção, valem as seguintes propriedades:*
(i) A aplicação $f \in L^p(X) \mapsto \| \cdot \|_p$ definida em (2.3) é uma norma sobre $L^p(X)$ que torna este espaço unitário, um espaço completo;
(ii) $(L^2(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ é um espaço de Hilbert, onde

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_X f(x)\overline{g(x)}d\nu(x), \quad f, g \in L^2(X).$$

Alertamos, neste ponto, que não faremos distinção entre as notações de protudo interno referentes aos espaços $L^2(X)$ e $L^2(X \times Y)$.

Uma base do espaço produto é conhecida quando se conhece a base de cada espaço que compõe o produto ([19], p.194).

Teorema 2.4.4 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medidas σ-finitos. Então:*
(i) Se $\{e_m\}$ e $\{f_n\}$ são sequências ortonormais em $L^2(X)$ e $L^2(Y)$, respectivamente, então o conjunto $\{\overline{e_m} f_n\}$ é ortonormal em $L^2(X \times Y)$, onde

$$(\overline{e_m} f_n)(x, y) := \overline{e_m(x)} f_n(y), \quad (x, y) \in X \times Y;$$

(ii) Se $\{e_m\}$ e $\{f_n\}$ são bases ortonormais de $L^2(X)$ e $L^2(Y)$, respectivamente, então o conjunto $\{\overline{e_m} f_n\}$ é uma base ortonormal de $L^2(X \times Y)$.

A desigualdade a seguir é uma ferramenta útil quando lidamos com espaços L^p ([11], p.182).

Teorema 2.4.5 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \nu)$ um espaço de medida e $1 < p, q < \infty$ tais que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se f e g são funções ν-mensuráveis em X, então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Em particular, onde $fg \in L^1(X)$ quando $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in X$.

Fechamos esta seção com o teorema que assegura a mudança de ordem de integração nas integrais duplas ([11]).

Teorema 2.4.6 ***(Teorema de Fubini-Tonelli)*** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(X, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos. Se $f \in L^1(X \times Y)$, então $f(x, \cdot) \in L^1(Y)$, para quase todo x, $f(\cdot, y) \in L^1(X)$, para quase todo y e, as funções definidas quase sempre*

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y) \in L^1(X), \quad h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x) \in L^1(Y)$$

e

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

2.5 Operadores Lineares sobre $L^2(S^m)$

A seção presente trata dos conceitos e resultados relativos a operadores lineares agindo sobre o espaço das funções quadrado integráveis sobre a esfera unitária centrada na origem do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m+1}$.

Sejam m um inteiro positiro e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$. A *esfera unitária* centrada na origem de $\mathbb{R}^{m+1}$ é definida e denotada por

$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \; : \; \langle x, x \rangle = 1\}.$$

O conjunto S^m é compacto em $\mathbb{R}^{m+1}$ em relação à topologia oriunda da norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+1}$ restrita à S^m será denotada por σ_m. Denotando a função gama por Γ, a medida

$$\sigma_m(S^m) = \frac{2\pi^{(m+1)/2}}{\Gamma((m+1)/2)}$$

faz do espaço de medida descrito acima, um espaço σ_m-finito ([17], p.7). Recordamos que a norma de $L^2(S^m)$ é

$$\|f\|_2 = \left(\int_{S^m} |f(x)|^2 d\sigma_m(x) \right)^{1/2}, \quad f \in L^2(S^m)$$

induzida pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{S^m} f(x)\overline{g(x)} d\sigma_m(x), \quad f, g \in L^2(S^m).$$

As propriedades abaixo já foram citadas no decorrer da Seção 2.4 em situações mais gerais. No entanto, resumiremos no teorema a seguir aquelas mais usadas no capítulo final da dissertação.

Teorema 2.5.1 *Em $L^2(S^m)$ valem as seguintes propriedades:*
(i) $(L^2(S^m), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ é um espaço de Hilbert;
*(ii) **(Desigualdade de Hölder)** $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$, $f, g \in L^2(S^m)$;*
(iii) $L^2(S^m) \subset L^1(S^m)$.

Definimos abaixo a classe dos operadores lineares sobre $L^2(S^m)$ que surge naturalmente quando estudamos Teoria Espectral nestes espaços.

Definição 2.5.2 *Seja T um operador sobre $L^2(S^m)$.*
(i) Dizemos que T é não negativo sobre $L^2(S^m)$ quando

$$\langle T(f), f \rangle_2 \geq 0, \quad f \in L^2(S^m).$$

(ii) Dizemos que T é positivo sobre $L^2(S^m)$ quando

$$\langle T(f), f \rangle_2 > 0, \quad f \in L^2(S^m) \setminus \{0\}.$$

É uma consequência óbvia da definição precedente que todo operador positivo sobre $L^2(S^m)$ é também não negativo sobre $L^2(S^m)$.

Sendo $L^2(S^m)$ um espaço unitário, operadores positivos agindo sobre ele é também autoadjunto.

Teorema 2.5.3 *Se T é um operador não negativo sobre $L^2(S^m)$, então T é autoadjunto.*

Demonstração: Suponha que T é um operador não negativo sobre $L^2(S^m)$. Então,

$$\langle T(f), f\rangle_2 = \overline{\langle T(f), f\rangle_2} = \overline{\langle f, T^*(f)\rangle_2} = \langle T^*(f), f\rangle_2, \quad f \in L^2(S^m).$$

Equivalentemente, $\langle (T - T^*)(f), f\rangle_2 = 0$, $f \in L^2(S^m)$. Em particular,

$$0 = \langle (T - T^*)(f + g), f + g\rangle_2 = \langle (T - T^*)(f), g\rangle_2 + \langle (T - T^*)(g), f\rangle_2, \quad f, g \in L^2(S^m)$$

e

$$0 = \langle (T-T^*)(-if+g), -if+g\rangle_2 = -i\langle (T-T^*)(f), g\rangle_2 + i\langle (T-T^*)(g), f\rangle_2,\ f, g \in L^2(S^m).$$

As duas igualdades anteriores implicam que $\langle (T - T^*)(f), g\rangle_2 = 0$, $f, g \in L^2(S^m)$. Portanto, $T = T^*$. ∎

Teorema 2.5.4 *Seja (λ_n, ψ_n) uma sequência de $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatível com um operador T sobre $L^2(S^m)$. Se a sequência $\{\lambda_n\}$ é não negativa, então T é não negativo sobre $L^2(S^m)$. Em particular, T é autoadjunto.*

Demonstração: Assuma que $\{\lambda_n\}$ é não negativa. Então, pelo Teorema 2.1.2,

$$\begin{aligned}
\langle T(f), f\rangle_2 &= \int_{S^m} T(f)(x)\overline{f(x)}\, d\sigma_m(x)\\
&= \int_{S^m} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \psi_n\rangle_2 \psi_n(x)\overline{f(x)}\, d\sigma_m(x)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|\langle f, \psi_n\rangle_2\right|^2, \quad f \in L^2(S^m).
\end{aligned}$$

Portanto, T é não negativo sobre $L^2(S^m)$. A última afirmação é uma consequência do Teorema 2.5.3. ∎

É uma consequência imediata do teorema anterior que se $\{\lambda_n\}$ for positiva, o operador T como no teorema será também positivo.

Teorema 2.5.5 *Sejam S e T operadores sobre $L^2(S^m)$. Se S é compacto e T é limitado, então $S \circ T$ e $T \circ S$ são operadores compactos sobre $L^2(S^m)$.*

Demonstração: Sejam S e T como na afirmação do teorema. Pelo Teorema 2.1.9, existe uma sequência $\{S_N\}$ em $L^2(S^m)$, onde cada S_N tem posto finito e $\|S_N - S\| \to 0$. Então, cada $S_N \circ T$ tem posto finito e $\|S_N \circ T - S \circ T\| \leq \|S_N - S\|\|T\| \to 0$. Novamente, pelo Teorema 2.1.9, o operador $S \circ T$ é compacto. Para finalizar a prova, note que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Como S^* é compacto e T^* é limitado, pela primeira parte da prova, $(T \circ S)^*$ é compacto. Portanto, $T \circ S$ é compacto. ■

Finalizamos o capítulo definindo uma classe de operadores sobre $L^2(S^m)$ que será amplamente usada no capítulo final.

Definição 2.5.6 *Seja K uma função de $L^2(S^m \times S^m)$. O operador integral sobre $L^2(S^m)$ gerado por K será denotado e definido por*

$$T_K(f) := \int_{S^m} K(\cdot, y) f(y)\, d\sigma_m(y), \quad f \in L^2(S^m). \tag{2.4}$$

A função K é denominada núcleo gerador do operador T_K.

Mais geralmente, a definição acima também faz sentido para operadores integrais agindo sobre $L^2(X)$, onde X é um espaço de medida.

Capítulo

3

Operadores Adjuntos sobre Espaços de Krein

Este capítulo será dedicado ao estudo pormenorizado do conceito de espaço de Krein. Investigaremos quando um espaço de Krein torna-se um espaço de Hilbert e quando um espaço de Hilbert pode tornar-se um espaço de Krein. Uma vez que espaços de Krein possuem uma estrutura semelhante a um espaço de Hilbert, aproveitamos, ainda, para abordar o conceito de operador adjunto nestes espaços.

3.1 Forma Hermitiana Sesquilinear

Estudaremos aqui o conceito e exemplos de certas formas sobre espaços vetoriais que não são, em geral, produtos internos. O espaço unitário munido dessas formas impõe uma estrutura sobre eles com propriedades análogas as que aparecem em espaços com produto interno. Conforme já comentamos no capítulo introdutório, essa teoria teve seu início com os trabalhos de Azizov que pode ser conferido consultando [1, 2, 3].

Definição 3.1.1 *Seja $\mathcal{V}$ um espaço unitário. Uma aplicação $q : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ é uma forma hermitiana sesquilinear sobre $\mathcal{V}$ se:*
(i) $q(\lambda x + y, z) = \lambda q(x, z) + q(y, z)$, $x, y, z \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
(ii) $q(x, y) = \overline{q(y, x)}$, $x, y \in \mathcal{V}$.

A forma hermitiana sesquilinear q é um produto interno sobre $\mathcal{V}$ se ela também satisfaz (iii) $q(x,x) \geq 0$, $x \in \mathcal{V}$.
Um espaço unitário $\mathcal{V}$ munido de uma forma sesquilinear hermitiana q é chamado um q-espaço.

Quando não houver perigo de confusão, por simplicidade de nomenclatura, alertamos o leitor que daqui em diante o termo 'forma hermitiana sesquilinear' da definição será substituído simplesmente por 'forma'.

Destacamos duas observações sobre uma forma q. A primeira refere-se à igualdade de *semi-linearidade* de q na segunda variável dada por

$$q(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} q(x,y) + q(x,z), \quad x,y,z \in \mathcal{V}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

A segunda observação alerta que a definição de forma não exige continuidade.

Um exemplo de uma forma sesquilinear, mas não hermitiana é obtida quando fixamos um operador T sobre um espaço unitário $\mathcal{V}$ munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ e definimos

$$q_{_T}(x,y) := \langle T(x), y \rangle_{\mathcal{V}}, \quad x,y \in \mathcal{V}.$$

Em particular, $q_{_T}$ será contínua em $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ quando T for limitada sobre $\mathcal{V}$. Basta notar que, neste caso, existe uma constante positiva C tal que

$$|q_{_T}(x,y)|^2 \leq C \langle x,x \rangle_{\mathcal{V}} \langle y,y \rangle_{\mathcal{V}}, \quad x,y \in \mathcal{V}.$$

De modo mais geral uma forma q sobre $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}})$ é *limitada* se existir uma constante M tal que

$$|q(x,y)|^2 \leq M \langle x,x \rangle_{\mathcal{V}} \langle y,y \rangle_{\mathcal{V}}, \quad x,y \in \mathcal{V}.$$

O teorema abaixo exibe uma condição necessária e suficiente para que $q_{_T}$ seja hermitiana justificando o termo 'hermitiana' da definição anterior.

Teorema 3.1.2 *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço unitário com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ uma função. Então, $\mathcal{V}$ é um $q_{_T}$-espaço se e somente se T é um operador autoadjunto.*

Demonstração: Seja $q_{_T}$ uma forma sobre $\mathcal{V}$. Então, é imediato que a função T é linear e as igualdades abaixo justificam que ele também é autoadjunto

$$\langle T(x), y\rangle_{\mathcal{V}} = q_{_T}(x,y) = \overline{q_{_T}(y,x)} = \overline{\langle T(y), x\rangle_{\mathcal{V}}} = \langle x, T(y)\rangle_{\mathcal{V}}, \quad x, y \in \mathcal{V}.$$

Assim, T é um operador autoadjunto sobre $\mathcal{V}$. Como a recíprova tem prova imediata, o teorema está provado. ■

O próximo teorema mostra que algumas formas sobre espaços de Hilbert são caracterizadas por operadores autoadjuntos. Usaremos o seguinte lema técnico.

Lema 3.1.3 *Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert. Se $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo, então existe um único $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: ([6], p. 12). ■

Teorema 3.1.4 *Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e $q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ uma função contínua na primeira variável quando a segunda é fixada. Então, $\mathcal{H}$ é um q-espaço se e somente se existe um único operador T sobre $\mathcal{H}$, autoadjunto tal que $q = q_{_T}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}$ um q-espaço. Para cada $y \in \mathcal{H}$, definimos $L_y : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ por $L_y(x) = q(x,y)$, $x \in \mathcal{H}$. Então, L_y é linear e $|L_y(x)| \leq M_y\|x\|$, $x \in \mathcal{H}$, onde M_y é o limitante para o operador $q(\cdot, y)$. Pelo Lema 3.1.3, existe um único $z \in \mathcal{H}$ tal que $L_y(x) = \langle x, z\rangle$, $x \in \mathcal{H}$. Então, seja $T(y) = z$. A unicidade de z mostra que T é um operador sobre $\mathcal{H}$. Além disso,

$$\langle x, T(y)\rangle = q(x,y) = \overline{q(y,x)} = \overline{\langle y, T(x)\rangle} = \langle T(x), y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Logo, T é autoadjunto e $q = q_{_T}$. A unicidade de T segue de cálculos elementares usando propriedades de produto interno. Como a recíproca é óbvia, o teorema está provado. ■

Temos a seguinte consequência do teorema anterior.

Corolário 3.1.5 *Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert. Se q é uma forma limitada sobre $\mathcal{H}$, então existe um único operador T sobre $\mathcal{H}$, limitado e autoadjunto tal que $q = q_{_T}$.*

Demonstração: Seja q uma forma limitada sobre $\mathcal{H}$ com limitante M. Então pelo teorma anterior, existe um único operador autoadjunto T sobre $\mathcal{H}$ tal que $q = q_T$. Usando as notações daquele teorema, segue que

$$\|T(y)\|^2 = \|z\|^2 = |L_y(z)| = |q(z,y)| \leq M\|z\|\|y\| \leq M\|T(y)\|\|y\|, \quad y, z \in \mathcal{H}.$$

A prova está terminada. ∎

A seguir fornecemos o primeiro exemplo de forma sobre um subespaço do espaço unitário formado pelas sequências complexas quadrado-somáveis.

Exemplo 3.1.6 *Seja*

$$\ell_{00}^{\infty} = \{x = \{x_n\} \subset \mathbb{C} \,:\, x_n = 0,\, n > N_x\},$$

onde N_x é algum inteiro positivo dependente de x. Esse conjunto munido das operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço unitário. Fixe $\alpha = \{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ e defina

$$q_\alpha(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \overline{y}_j, \quad x, y \in \ell_{00}^{\infty}.$$

Então, o espaço ℓ_{00}^{∞} é um q_α-espaço. ∎

A versão deste exemplo para o caso contínuo terá a seguinte formulação.

Exemplo 3.1.7 *O conjunto*

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ é função contínua}\}$$

munido das operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço unitário. Então, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ é um q_c-espaço, onde

$$q_c(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \tag{3.1}$$

é uma forma sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Destacamos os seguintes subconjuntos de um q-espaço $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}^{++} := \{x \in \mathcal{V} \,:\, q(x,x) > 0\}, \quad \mathcal{V}^{--} := \{x \in \mathcal{V} \,:\, q(x,x) < 0\},$$

$$\mathcal{V}^{0} := \{x \in \mathcal{V} \,:\, q(x,x) = 0\}.$$

Segue, então, que $(\mathcal{V}^{++} \cup \mathcal{V}^{0}) \cap (\mathcal{V}^{--} \cup \mathcal{V}^{0}) = \mathcal{V}^{0}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{++} \cup \mathcal{V}^{--} \cup \mathcal{V}^{0}$. Os conjuntos $\mathcal{V}^{++} \cup \mathcal{V}^{0}$, $\mathcal{V}^{--} \cup \mathcal{V}^{0}$ e $\mathcal{V}^{0}$ não são, necessariamente, subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$. No entanto, eles podem conter subespaços vetoriais conforme ilustra o Exemplo 3.1.9.

Definição 3.1.8 *Sejam $\mathcal{V}$ um q-espaço e $\mathcal{L}$ um subespaço de $\mathcal{V}$. Dizemos que $\mathcal{L}$ é:*
(i) definido não-negativo se $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^{++} \cup \mathcal{V}^{0}$;
(ii) definido não-positivo se $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^{--} \cup \mathcal{V}^{0}$;
(iii) definido neutro se $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^{0}$;
(iv) definido positivo se $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^{++} \cup \{0\}$;
(v) definido negativo se $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^{--} \cup \{0\}$;
(vi) indefinido se $\mathcal{L} \cap \mathcal{V}^{++} \neq \emptyset$ e $\mathcal{L} \cap \mathcal{V}^{--} \neq \emptyset$.

Uma consequência da definição anterior é o fato que todo subespaço definido neutro também é definido não-positivo e definido não-negativo.

Exemplo 3.1.9 *No Exemplo 3.1.6, considere $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_n = 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, \ldots) \in \ell^{\infty}_{00}$. Então:*
(i) O subespaço de ℓ^{∞}_{00} gerado por e_1 é um subconjunto de $(\ell^{\infty}_{00})^{--} \cup (\ell^{\infty}_{00})^{0}$;
(ii) O subespaço de ℓ^{∞}_{00} gerado por e_2 é um subconjunto de $(\ell^{\infty}_{00})^{++} \cup (\ell^{\infty}_{00})^{0}$;
(iii) O subespaço ℓ^{∞}_{00} gerado pelos vetores e_1, e_2 é indefinido.

O teorema a seguir revela que os subespaços indefinidos possuem elementos não nulos de $\mathcal{V}^{0}$.

Teorema 3.1.10 *Sejam $\mathcal{V}$ um q-espaço e $\mathcal{L}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$. Se $\mathcal{L}$ for indefinido, então $\mathcal{L} \cap \mathcal{V}^{0}$ tem elementos não nulos.*

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathcal{L}$ tais que $q(x,x) > 0$ e $q(y,y) < 0$. Defina a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(t) = q((1-t)x + ty, (1-t)x + ty), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A continuidade de φ é consequência da igualdade

$$\varphi(t) = (1-t)^2 q(x,x) + t(1-t)(q(x,y)+q(y,x)) + t^2 q(y,y), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(1) = q(y,y) < 0$ e $\varphi(0) = q(x,x) > 0$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\varphi(t_0) = 0$. Obviamente, $z = (1-t_0)x + t_0 y \in \mathcal{V}^0 \cap \mathcal{L}$. Para ver que z é não nulo, vamos mostrar que x e y formam um conjunto linearmente independente. De fato, suponha que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo tal que $x = \lambda y$. Então, $0 < q(x,x) = |\lambda|^2 q(y,y) < 0$, que é uma contradição. ■

Como $\mathcal{V}^0 \cap \mathcal{V}^{++}$ é vazio e $\mathcal{V}^0$ pode conter subespaço não trivial de $\mathcal{V}$, a recíproca da torema anterior não é verdadeira.

Os resultados enumerados nessa seção sobre q-espaços são suficientes para o nosso objetivo. Outros conceitos e propriedades envolvendo tais espaços são encontrados em [2].

3.2 Espaço de Krein

Nesta seção, estudaremos uma generalização do conceito de espaço de Hilbert conhecido como espaço de Krein.

Definição 3.2.1 *Seja $\mathcal{K}$ um q-espaço. A estrutura $(\mathcal{K}, q)$ é chamada um espaço de Krein quando existirem subespaços $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$ de $\mathcal{K}$ para os quais as seguintes afirmações são verdadeiras:*
(i) $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ + \mathcal{K}^-$;
(ii) O espaço unitário $(\mathcal{K}^+, q)$ é um espaço de Hilbert;
(iii) O espaço unitário $(\mathcal{K}^-, -q)$ é um espaço de Hilbert;
(iv) Os espaços $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$ são q-ortogonais; i. e., $q(x,y) = 0$, $x \in \mathcal{K}^+, y \in \mathcal{K}^-$.

A definição acima não descarta a possibilidade de $\mathcal{K}^+$ ou $\mathcal{K}^-$ serem subespaços triviais de $\mathcal{K}$.

Recordando a Definição 3.1.8, vemos que $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$ são subespaços definidos positivo e negativo de $\mathcal{K}$, respectivamente.

Daqui em diante assumiremos que as componentes canônicas de um espaço de Krein $(\mathcal{K}, q)$ serão sempre denotadas por $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$. Neste caso, a soma do item (i) da definição anterior é chamada *decomposição canônica* de $\mathcal{K}$.

Exemplo 3.2.2 *No Exemplo 3.1.6, considere* $\alpha = (1, 1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, *onde* $\alpha_{k+l} = -1$, $l = 1, 2, \ldots$, *para algum inteiro positivo* k. *Então,* $(\ell_{00}^\infty, q_\alpha)$ *é um espaço de Krein, onde* $(\ell_{00}^\infty)^+$ *é isomorfo a* $\mathbb{C}^k$.

Fechamos essa seção com outro exemplo de espaço de Krein no contexto de teoria de medida. Esse exemplo não é o que vamos precisar para fechar o último capítulo desse trabalho, mas ele enquadra-se na classe do tipo de espaço de Krein que estamos interessados.

Exemplo 3.2.3 *Seja* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$\int_K |u(x)| dx < \infty,$$

sobre todos os compactos K *de* $\mathbb{R}$. *Suponha que* u *assume tanto valores positivos quanto valores negativos sobre conjuntos de medida Lebesgue-positiva. Seja* $\nu = u\, dx$ *e defina*

$$L^{2,u}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ é } \nu\text{−mensurável e} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 |u(x)| dx < \infty \right\}.$$

O conjunto $L^{2,u}(\mathbb{R})$ *torna-se um espaço unitário em relação às operações usuais, onde duas funções que são iguais a menos de conjunto de* $u\, dx$*-medida nula são identificadas. Adicionalmente,* $L^{2,u}(\mathbb{R})$ *é um espaço de Krein em relação a forma contínua*

$$q(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} d\nu(x), \quad f, g \in L^{2,u}(\mathbb{R}).$$

Demonstração: A verificação de que $L^{2,u}(\mathbb{R})$ é um espaço unitário em relação às operações usuais é um fato conhecido da Análise Funcional ([11]). Seguindo, pelo Teorema 2.4.3,

$$|q(f, g)| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 |u(x)| dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 |u(x)| dx \right)^{1/2} < \infty, \quad f, g \in L^{2,u}(\mathbb{R}).$$

Logo, q é uma função contínua, enquanto que cálculo direto leva-nos a concluir que q é uma forma sobre $L^{2,u}(\mathbb{R})$. Resta mostrar que $L^{2,u}(\mathbb{R})$ decompõe-se numa soma de espaços de Hilbert q-ortogonais. Pelo Teorema 2.4.1, vemos que $\mathbb{R} = M \cup N$, onde $\nu(M) \geq 0$ e $\nu(N) \leq 0$. Além disso, pelo mesmo teorema existem únicas medidas não-negativas ν^+ e ν^- tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$, onde $\nu^+(N) = 0$ e $\nu^-(M) = 0$. Então,

$$L^2(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ é } \nu^+ - \text{mensurável e} \int_M |f(x)| d\nu^+(x) < \infty \right\}$$

e

$$L^2(N) = \left\{ f : N \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ é } \nu^- - \text{mensurável e} \int_N |f(x)| d\nu^-(x) < \infty \right\}$$

são espaços de Hilbert em relação aos seguintes respectivos produtos internos

$$q(f,g) = \int_M f(x)\overline{g(x)} d\nu^+(x), \quad f, g \in L^1(M) \tag{3.2}$$

e

$$-q(f,g) = \int_N f(x)\overline{g(x)} d\nu^-(x), f, g \in L^1(N). \tag{3.3}$$

Notamos ainda que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, d\nu(x) = \int_M |f(x)|^2 d\nu^+(x) - \int_N |f(x)|^2 d\nu^-(x), \quad f \in L^{2,u}(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

Os produtos internos (3.2), (3.3) e a decomposição (3.4) mostram que

$$L^2(M, \nu^+), L^2(N, \nu^-) \subset L^{2,u}(\mathbb{R}).$$

Finalmente, a decomposição $L^{2,u}(\mathbb{R}) = L^2(M) + L^2(N)$ agora é óbvia e, a prova está terminada. ■

3.3 Espaço de Hilbert e Espaço de Krein

Como vimos na seção anterior, espaços de Krein são aqueles dados por uma soma de dois espaços de Hilbert. Então, é natural que espaços de Krein possam ser vistos como espaços de Hilbert, onde o produto interno depende da forma associada a eles. De fato, mostraremos que todo espaço de Krein implica num espaço de Hilbert, cuja estrutura provém daquele. Também abordaremos a recíproca desse resultado.

Começamos com a proposição abaixo.

Proposição 3.3.1 *Se $(\mathcal{K}, q)$ é um espaço de Krein, então a decomposição $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ + \mathcal{K}^-$ é uma soma direta.*

Demonstração: Parte da prova vem do item (i) da Definição 3.2.1. Para a segunda parte da prova seja $x \in \mathcal{K}^+ \cap \mathcal{K}^-$. Então, o item (iv) da mesma definição mostra que $q(x, x) = 0$. Como q é um produto interno em $\mathcal{K}^+$, $x = 0$. ■

Uma vez que a soma direta referida na proposição precedente é dependente da forma q, escreveremos

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus_q \mathcal{K}^-.$$

Consequentemente, a decomposição de elementos de $\mathcal{K}$ será representada como

$$x = x^+ + x^-, \quad x \in \mathcal{K},\, x^+ \in \mathcal{K}^+,\, x^- \in \mathcal{K}^-.$$

A primeira conexão entre espaços de Krein e espaços de Hilbert será feita a seguir. A notação $\oplus$ refere-se à soma direta usual em espaços vetoriais unitários.

Teorema 3.3.2 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. Então:*
(i) $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_q)$ é um espaço de Hilbert, onde

$$\langle x, y \rangle_q := q(x^+, y^+) - q(x^-, y^-), \quad x^+, y^+ \in \mathcal{K}^+,\, x^-, y^- \in \mathcal{K}^-; \tag{3.5}$$

(ii) O conjunto $\mathcal{K}^+$ é ortogonal a $\mathcal{K}^-$ em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$. Em particular, $\{x \in \mathcal{K} : \langle x, y \rangle_q = 0,\, y \in \mathcal{K}^+\} = \mathcal{K}^-$ e $\{x \in \mathcal{K} : \langle x, y \rangle_q = 0,\, y \in \mathcal{K}^-\} = \mathcal{K}^+$.

Demonstração: A não negatividade de $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ vem da Definição 3.2.1. As demais propriedades de produto interno vêm da definição de q e das igualdades

$$(\lambda x)^+ = \lambda x^+, \quad (\lambda x)^- = \lambda x^-, \quad \lambda \in \mathbb{C},\, x \in \mathcal{K},\, x^+ \in \mathcal{K}^+,\, x^- \in \mathcal{K}^-.$$

Resta mostrar que o espaço $\mathcal{K}$ é completo em relação à norma $\|x\|_q := \sqrt{\langle x, x\rangle_q}$. De fato, seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{K}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que

$$\|x_m^+ - x_n^+\|_q^2 \leq \|x_m^+ - x_n^+\|_q^2 + \|x_m^- - x_n^-\|_q^2 = \|x_m - x_n\|_q^2 < \varepsilon, \quad m, n > n_0.$$

Uma desigualdade análoga a anterior vale para a sequência $\{x_n^-\}$ de $\mathcal{K}^-$. Como $(\mathcal{K}^+, q)$ e $(\mathcal{K}^+, -q)$ são espaços de Hilbert, $x_n^+ \to x^+ \in \mathcal{K}^+$ e $x_n^- \to x^- \in \mathcal{K}^-$ implicando que $x_n \to x^+ + x^- \in \mathcal{K}$. Portanto, $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_q)$ é um espaço de Hilbert.
O item (ii) é consequência direta de (3.5). ■

Seguindo, investigaremos a recíproca do Teorema 3.3.2.

Teorema 3.3.3 *Sejam $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{W}$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Valem as seguintes propriedades:*
(i) $\mathcal{H}$ é um q-espaço munido da forma

$$q(x, y) = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle, \quad x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in \mathcal{H},\, x_1, y_1 \in \mathcal{W},\, x_2, y_2 \in \mathcal{W}^\perp;$$

(ii) $\mathcal{W}$ é um subespaço definido positivo do q-espaço $\mathcal{H}$;
(iii) $\mathcal{W}^\perp$ é um subespaço definido negativo do q-espaço $\mathcal{H}$;
(iv) $(\mathcal{H}, q)$ é um espaço de Krein.

Demonstração: O Teorema 2.1.7 implica na decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$, justificando as expressões

$$(\lambda x) = (\lambda x)_1 + (\lambda x)_2, \quad (\lambda x)_1 = \lambda x_1, \quad (\lambda x)_2 = \lambda x_2, \quad \lambda \in \mathbb{C},\, x \in \mathcal{K},\, x_1 \in \mathcal{W},\, x_2 \in \mathcal{W}^\perp.$$

Estas igualdades e as propriedades de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, provam o item (i).
Relembrando a Definição 3.1.8, $q(x, y) = \langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathcal{W}$ e $q(x, y) = -\langle x, y\rangle$, $x, y \in$

$\mathcal{W}^{\perp}$. Logo, as inclusões $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}^{++} \cup \{0\}$ e $\mathcal{W}^{\perp} \subset \mathcal{H}^{--} \cup \{0\}$ seguem. Como $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}^{\perp}$ são subespaços vetoriais fechados de $\mathcal{H}$, os itens (ii) e (iii) estão provados.
Para provar (iv), resta mostrar que $(\mathcal{W}, q)$ e $(\mathcal{W}^{\perp}, -q)$ são espaços de Hilbert. De fato, seja $\{w_n\}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{W}, q)$. Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, $\{w_n\}$ converge para um ponto $x \in \mathcal{H}$. Então, para todo $z \in \mathcal{W}^{\perp}$, $\langle x, z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle w_n, z\rangle = 0$, mostrando que $x \in (\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$. Como $q(x,y) = \langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathcal{W}$, $(\mathcal{W}, q)$ é um espaço de Hilbert. Uma vez que $\mathcal{W}^{\perp}$ é fechado, o argumento acima pode ser repetido para provar que $(\mathcal{W}^{\perp}, -q)$ é um espaço de Hilbert. ■

Na próxima seção, outras conexões entre espaços de Hilbert e Krein serão obtidas.

3.4 Simetria Canônica

Motivados pela seção anterior, a teoria estudada nesta seção abordará o conceito de espaço de Krein à luz das projeções canônicas. Usaremos essas projeções para continuar estudando a conexão entre espaços de Krein com espaços de Hilbert.

Definição 3.4.1 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. A decomposição (3.5) sugere a definição das projeções canônicas $P : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^{+}$ e $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^{-}$ dadas por*

$$P(x) = x^{+}, \quad Q(x) = x^{-}, \quad x \in \mathcal{K}.$$

As letras P e Q sempre denotarão esses operadores lineares. Algumas propriedades de P e Q estão listadas a seguir. Para tanto, recordando a Definição 2.1.8, lembramos que o símbolo P^{*} refere-se ao conceito usual de operador autoadjunto no espaço de Hilbert $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_q)$.

Teorema 3.4.2 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. Então:*
(i) $P + Q = I$, onde I é o operador identidade sobre $\mathcal{K}$;
(ii) P e Q são projeções; Isto é, $P \circ P = P$ e $Q \circ Q = Q$;
(iii) P e Q são sobrejetoras;
(iv) $\langle P(x), Q(y)\rangle_q = 0$, $x, y \in \mathcal{K}$;
(v) $P^{*} = P$ e $Q^{*} = Q$;
(vi) $P \circ Q \equiv 0$ e $Q \circ P \equiv 0$.

Demonstração: Somente a prova do item (v) merece atenção, uma vez que os demais itens são imediatos. Para ver que P é autoadjunta seguem das igualdades

$$\langle P(x), y\rangle_q = \langle x^+, y^+ + y^-\rangle_q = \langle x^+, y^+\rangle_q = \langle x^+ + x^-, y^+\rangle_q = \langle x, P(y)\rangle_q, \quad x, y \in \mathcal{K}.$$

A prova para Q é análoga. ■

A partir de P e Q, introduzimos o operador $J : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ dado por

$$J := P - Q.$$

As duas propriedades de J que devem ser destacadas no estudo de espaços de Krein estão na proposição abaixo.

Proposição 3.4.3 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. Considere o espaço de Hilbert $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_q)$ como no Teorema 3.3.2. Então:*
(i) $J^* = J$;
(ii) $J \circ J = I$.

Demonstração: As provas seguem da definição de J e das igualdades $P \circ Q = 0$ e $Q \circ P = 0$. ■

Nós observamos que o operador J com as propriedades acima foi construído a partir de um espaço de Krein, onde ele está definido. A questão colocada aqui é:
Seja $\mathcal{V}$ um espaço unitário munido com produto interno. Dado um operador sobre $\mathcal{V}$ com as duas propriedades de J, provadas na proposição anterior, que hipóteses devemos acrescentar a fim de que $\mathcal{V}$ torne-se um espaço de Krein dependente do operador dado? O restante desta seção, investigará essa questão.

Definição 3.4.4 *Um operador G sobre um espaço unitário $\mathcal{V}$ munido com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ satisfazendo $G^* = G$, $G \circ G = I$ é chamado uma simetria canônica sobre $\mathcal{V}$.*

Dentre as simetrias canônicas possíveis de um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, destacamos aquelas oriundas por decomposições desse espaço em uma soma direta usual da forma $\mathcal{H} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$, onde cada uma dessas componentes é um subespaço de $\mathcal{H}$. Se

P_1 e P_2 são as projeções de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, respectivamente, então $G = P_1 - P_2$ é uma simetria canônica. Pelo Teorema 3.1.2, q_G é uma forma sobre $\mathcal{H}$. O q_G-espaço $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ obtido dessa forma é denominado um *J-espaço.*

O próximo teorema mostra que apenas simetrias canônicas não são suficientes para estabelecer uma estrutura de Krein em um J-espaço, mesmo que ele seja um espaço de Hilbert.

Teorema 3.4.5 *Seja G uma simetria canônica sobre um espaço unitário $\mathcal{V}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$. Então, existem supespaços vetoriais $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ de $\mathcal{V}$ satisfazendo:*
(i) q_G e $-q_G$ são produtos internos em $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, respectivamente;
(ii) $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$;
(iii) $\mathcal{W}_1$ é q_G-ortogonal a $\mathcal{W}_2$;
(iv) $q_G(x,y) = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle$, $x_1, y_1 \in \mathcal{W}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{W}_2$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.2, q_G é uma forma sobre $\mathcal{V}$. A seguir, defina os operadores lineares P_1 e P_2 sobre $\mathcal{V}$ por

$$P_1 = \frac{I+G}{2}, \quad P_2 = \frac{I-G}{2}. \tag{3.6}$$

Defina $\mathcal{W}_1 = P_1(\mathcal{V})$ e $\mathcal{W}_2 = P_2(\mathcal{V})$. A não negatividade de q_G e $-q_G$ sobre $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, respectivamente, vem das igualdades

$$q_G(P_1(x), P_1(x)) = \langle P_1(x), P_1(x)\rangle_{\mathcal{V}} \geq 0, \quad x \in \mathcal{V}, \tag{3.7}$$

$$q_G(P_2(x), P_2(x)) = -\langle P_2(x), P_2(x)\rangle_{\mathcal{V}} \leq 0, \quad x \in \mathcal{V}. \tag{3.8}$$

Assim, as formas q_G e $-q_G$ são produtos internos em $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, respectivamente.
Parte da conclusão da prova de (ii) vem da soma $P_1 + P_2 = I$. Para completar, seja $x \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ e mostremos que $x = 0$. De fato, existem $y, z \in \mathcal{V}$ tais que $x = P_1(y) = P_2(z)$. Como $G \circ G = I$, $P_1(x) = (P_1 \circ P_2)(z) = 0$ e $P_2(x) = (P_2 \circ P_1)(y) = 0$. Então, $x = P_1(x) + P_2(x) = 0$.
A afirmação (iii) segue das igualdades

$$q_G(P_1(x), P_2(y)) = \langle P_1(x), P_2(y)\rangle_{\mathcal{V}} = \langle x, (P_1 \circ P_2)(y)\rangle_{\mathcal{V}} = 0, \quad x, y \in \mathcal{V},$$

enquanto (iv) é consequência das igualdades

$$\begin{aligned} q_G(x,y) &= \langle G(x), y\rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle (P_1 - P_2)(x), (P_1 + P_2)(y)\rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle P_1(x), P_1(y)\rangle_{\mathcal{V}} - \langle P_2(x), P_2(y)\rangle_{\mathcal{V}}, \quad x, y \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

A prova está concluída. ■

Note que as inclusões $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{V}^{++} \cup \{0\}$ e $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{V}^{--} \cup \{0\}$ também são imediatas da prova anterior.

A seguir, acrescentamos hipóteses ao teorema anterior de modo que $(\mathcal{W}_1, q_G)$ e $(\mathcal{W}_2, -q_G)$ sejam completos e, assim $\mathcal{V}$ será um espaço de Krein.

Teorema 3.4.6 *Se G é uma simetria canônica contínua sobre o espaço de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, então $(\mathcal{H}, q_G)$ é um espaço de Krein.*

Demonstração: Seja G como na afirmação do teorema. A identidade $P_1 + P_2 = I$ revela que $\mathcal{W}_1 = P_1(\mathcal{H}) = \ker(I - P_2) = (I - P_2)^{-1}(\{0\})$. Como G é contínuo, pelo Teorema 2.2.1, $\mathcal{W}_1$ é fechado. A conclusão da prova segue do Teorema 3.3.3. ■

A relação entre produto interno, formas e simetrias canônicas pode ser tirada do próximo teorema.

Teorema 3.4.7 *Sejam $\mathcal{V}$ um espaço unitário com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$, $G : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ uma função satisfazendo $G \circ G = I$ e $q : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ uma função. São equivalentes:*
(i) $q(x,y) = \langle G(x), y\rangle_{\mathcal{V}}$, $x, y \in \mathcal{V}$;
(ii) $\langle x, y\rangle_{\mathcal{V}} = q(G(x), y)$, $x, y \in \mathcal{V}$.

Demonstração: A equivalência segue da propriedade $G \circ G = I$. ■

Explicitamos abaixo propriedades envolvendo J, q e $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$. A prova de cada item ou é imediata ou decorre de propriedades já demonstradas.

Teorema 3.4.8 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein e $J = P - Q$. Então:*
(i) $\|x\|_q^2 = q(J(x), x)$, $x \in \mathcal{K}$;
(ii) $q(x,y) = \langle J(x), y\rangle_q$, $x, y \in \mathcal{K}$;

(iii) J é uma isometria; Isto é, $\langle J(x), J(y)\rangle_q = \langle x, y\rangle_q$, $x, y \in \mathcal{K}$;
(iv) $\|J\| = 1$ em relação à topologia dada pelo produto interno (3.5);
(v) $q(J(x), J(y)) = q(x, y)$, $x, y \in \mathcal{K}$;
(vi) $q(J(x), y) = q(x, J(y))$, $x, y \in \mathcal{K}$;
(vii) $|q(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$, $x, y \in \mathcal{K}$;
(viii) q é uma forma contínuo em $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Finalizamos esta seção com o teorema a seguir. Ele identifica os operadores lineares sobre $\mathcal{K}$ que deixam os subespaços $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$ invariantes.

Teorema 3.4.9 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. Se T é um operador sobre $\mathcal{K}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $T \circ J = J \circ T$;
(ii) $T \circ P = P \circ T$;
(iii) $T \circ Q = Q \circ T$;
(iv) Os espaços são $\mathcal{K}^+$ e $\mathcal{K}^-$ são T-invariantes; isto é, $T(\mathcal{K}^+) \subset \mathcal{K}^+$ e $T(\mathcal{K}^-) \subset \mathcal{K}^-$.

Demonstração: A estrutura da prova da proposição consistirá em mostrarmos que (i) é equivalente a (ii), (iii) e (iv). Para provar que (i) equivale a (ii) e a (iii), basta notar que

$$P = \frac{I + J}{2}, \quad Q = \frac{I - J}{2},$$

onde I é o operador identidade sobre $\mathcal{K}$.
Para mostrar que (i) é equivalente a (iv), primeiro assuma que (i) ocorre. Da parte anterior da prova, (ii) e (iii) também ocorrem. Então, as inclusões

$$T(\mathcal{K}^+) = T(P(\mathcal{K})) = P(T(\mathcal{K})) \subset \mathcal{K}^+, \quad T(\mathcal{K}^-) = T(Q(\mathcal{K})) = Q(T(\mathcal{K})) \subset \mathcal{K}^-$$

justificam a primeira metade da prova. Para a recíproca, seja $x \in \mathcal{K}$. Pelo Teorema 3.4.2,

$$(P + Q)(T(x)) = T(x) = T(P + Q)(x) = T(P(x)) + T(Q(x)).$$

De (iv), segue que $T(P(x)) \in \mathcal{K}^+$ e $T(Q(x)) \in \mathcal{K}^-$. Pela unicidade da decomposição de elementos de $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, $P(T(x)) = T(P(x))$. Logo, o item (i) segue e, a prova está concluída. ■

3.5 Operadores Adjuntos sobre Espaços de Krein

O estudo sobre espaços de Krein feito nas seções anteriores do presente capítulo, oferece suporte para abordar, agora, questões relacionadas a teoria de operados sobre tais espaços. O leitor interessado em fazê-lo tem na referência [1], um bom suporte. Como esse não é o foco do nosso trabalho, optamos por abordar nessa última seção do Capítulo 3, somente o conceito de operador adjunto que tenha alguma relação com o que faremos no Capítulo 4.

Aproveitamos a oportunidade para relacionar o conceito usual de transformação linear adjunta com o conceito de transformação linear adjunta em espaços de Krein.

Definição 3.5.1 *Sejam* $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *um espaço de Hilbert e* $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador limitado autoadjunto. O espaço unitário* $(\mathcal{H}, q_{_L})$ *é chamado um* L*-espaço.*

O leitor não deve confundir L-espaço com o conceito de J-espaço dado antes do Teorema 3.4.5.

No contexto da Definição 3.5.1, o par ordenado $(\mathcal{H}, q_{_L})$ não é um espaço de Krein. No entanto, existe um procedimento que permite completá-lo para que ele venha a tornar-se um espaço de Krein([1], p. 40). Isso não será tratado aqui, uma vez que tal abordagem fugirá dos nossos objetivos.

Uma outra forma de tornar $(\mathcal{H}, q_{_L})$ um espaço de Krein é seguir o procedimento apresentado no Teorema 3.4.6.

Definição 3.5.2 *Sejam* $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ *e* $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$*,* L_1*-espaço e* L_2*-espaço, respectivamente, onde* L_1 *e* L_2 *são injetores. A transformação linear* $T^{[*]} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ *é chamada* (L_1, L_2)*-adjunta da transformação linear* $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *se*

$$\langle (L_2 \circ T)(x), y \rangle_2 = \langle L_1(x), T^{[*]}(y) \rangle_1,\ x \in \mathcal{H}_1,\ y \in \mathcal{H}_2.$$

Usando as formas $q_{_{L_1}}$ e $q_{_{L_2}}$, a identidade acima pode ser expressas como

$$q_{L_2}(T(x), y) = q_{L_1}(x, T^{[*]}(y)),\ x \in \mathcal{H}_1,\ y \in \mathcal{H}_2.$$

A Definição 3.5.2 aplicada a operadores tem uma formulação mais simplificada. De fato, seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um L-espaço, onde L é injetor. Então, o operador L-*adjunto* $T^{[*]}$ é o único operador sobre $\mathcal{H}$ definido por

$$q_L(T(x), y) = q_L(x, T^{[*]}(y)),\ x, y \in \mathcal{H}.$$

Neste caso, o operador T é chamado L-*autoadjunto* quando $T = T^{[*]}$.

A conexão entre $T^{[*]}$ com o operador adjunto usual T^* está no teorema que segue.

Teorema 3.5.3 *Sejam $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ um L_1-espaço e $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ um L_2-espaço, onde L_1 e L_2 são injetores. Se $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é uma transformação linear, então:*
(i) $T^{[*]} = L_1^{-1} \circ T^* \circ L_2$, onde L_1^{-1} é a inversa à esquerda de L_1;
(ii) Se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ é um J-espaço, então $T^{[*]} = J \circ T^* \circ J$.

Demonstração: Seja T como na afirmação do teorema. Usando a definição de (L_1, L_2)-adjunto e manipulação algébrica, vemos que

$$\begin{aligned}
\langle L_1(x), T^{[*]}(y)\rangle_1 &= \langle (L_2 \circ T)(x), y\rangle_2 \\
&= \langle T(x), L_2(y)\rangle_2 \\
&= \langle x, (T^* \circ L_2)(y)\rangle_1 \\
&= \langle L_1(x), (L_1^{-1} \circ T^* \circ L_2)(y)\rangle_1, \quad x \in \mathcal{H}_1, \quad y \in \mathcal{H}_2.
\end{aligned}$$

O primeiro item segue das igualdades precedentes usando a injetividade de L_1, enquanto o segundo é consequência do primeiro. ■

As equivalênicas apresentadas no Teorema 3.4.9 são complementadas no teorema a seguir. Veremos para que tipo de operador T, a identidade $T^* = T^{[*]}$, faz sentido.

Teorema 3.5.4 *Seja T um operador sobre o J-espaço $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Se T é um operador sobre $\mathcal{H}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $T \circ J = J \circ T$;

(ii) $T \circ P = P \circ T$;

(iii) $T \circ Q = Q \circ T$;

(iv) Os espaços são $\mathcal{H}^+$ *e* $\mathcal{H}^-$ *são* T*-invariantes; isto é,* $T(\mathcal{H}^+) \subset \mathcal{H}^+$ *e* $T(\mathcal{H}^-) \subset \mathcal{H}^-$;

(v) $T^{[*]} = T^*$.

Demonstração: As equivalências de (i) a (iv) é o Teorema 3.4.9, enquanto a equivalência entre (i) e (v) vem do Teorema 3.5.3. ■

Capítulo 4

O Teorema de Mercer para uma Classe de Operadores sobre o Espaço de Krein $L^2(S^m)$

O objetivo principal deste capítulo é estudar o Teorema de Mercer para uma composição da forma $R\circ(S+T)$, onde R, S e T são operadores integrais sobre $L^2(S^m)$. Usaremos a teoria desenvolvida no Capítulo 3 para construir uma estrutura de Krein para $L^2(S^m)$, a qual dependerá de certas propriedades assumidas para R, S e T.

4.1 Operadores Integrais sobre $L^2(S^m)$

Recordando a Definição 2.5.6, os resultados apresentados nesta seção destacarão certas propriedades dos operadores integrais que serão usadas daqui por diante.

A prova da primeira propriedade a seguir mostra que T_K está bem definido. Quando necessário, para cada $x \in S^m$, usaremos a função $K^x(y) := K(x,y)$, $y \in S^m$.

Teorema 4.1.1 *Seja K uma função de $L^2(S^m \times S^m)$. Então:*
(i) T_K é limitado;
(ii) T_K é compacto.

Demonstração: A hipótese sobre K revela que a função

$$(x,y) \in S^m \times S^m \mapsto |K(x,y)|^2$$

pertence a $L^1(S^m \times S^m)$. Logo, pelo Teorema de Fubini-Tonelli, a família de funções K^x está contida em $L^2(S^m)$, quase sempre. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|T_K(f)\|_2^2 &= \int_{S^m} |T_K(f)(x)|^2\, d\sigma_m(x) \\
&= \int_{S^m} \left|\langle K^x, \overline{f}\rangle_2\right|^2\, d\sigma_m(x) \\
&\leq \int_{S^m} \left(\int_{S^m} |K^x(y)|^2\, d\sigma_m(y)\right) \|f\|_2^2 d\sigma_m(x) \\
&= \|f\|_2^2 \int_{S^m} \left(\int_{S^m} |K(x,y)|^2\, d\sigma_m(y)\right) d\sigma_m(x), \quad f \in L^2(S^m).
\end{aligned}$$

Novamente, o Teorema de Fubini-Tonelli mostra que a última integral dupla é $\|K\|_2^2$. Então, $\|T_K\| \leq \|K\|_2$. Assim, o item (i) do teorema está provado.
Para provar que T_K é compacto partiremos de dois fatos: O espço $L^2(S^m)$ é separável; Isto é, ele possui uma base ortonormal da forma

$$\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}. \tag{4.1}$$

Também a Definição 2.1.8 revela que

$$T_K^*(f) := \int_{S^m} \overline{K(y,\cdot)} f(y)\, d\sigma_m(y), \quad f \in L^2(S^m), \tag{4.2}$$

é o operador integral adjunto de T_K sobre $L^2(S^m)$. Pelo item anterior, $T_K(f) \in L^2(S^m)$, $f \in L^2(S^m)$. Devido ao Teorema 2.1.5,

$$T_K(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T_K(f), f_n\rangle_2 f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_K^*(f_n)\rangle_2 f_n, \quad f \in L^2(S^m). \tag{4.3}$$

Considere agora $\{T_{K_N}\}$ a sequência, cujos termos são operadores sobre $L^2(S^m)$ definidos por

$$T_{K_N}(f) = \sum_{n=1}^{N} \langle f, T_K^*(f_n)\rangle_2 f_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

De (4.3) e da definição de T_{K_N}, segue que $T_K - T_{K_N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \cdot, T_K^*(f_n)\rangle_2 f_n$. Então, usando a Identidade de Parseval e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|T_K(f) - T_{K_N}(f)\|_2^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle f, T_K^*(f_n)\rangle_2|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|T_K^*(f_n)\|_2^2 \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(S^m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|T_K - T_{K_N}\| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T_K^*(f_n)\|_2^2 \right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

Na sequência, provaremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_K^*(f_n)\|_2^2 < \infty.$$

De fato, aplicando mais uma vez o Teorema de Fubini-Tonelli, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T_K^*(f_n), f_l\rangle_2 &= \int_{S^m} T_K^*(f_n)(x)\overline{f_l(x)}\, d\sigma_m(x) \\ &= \int_{S^m}\int_{S^m} \overline{K(y,x)} f_n(y)\overline{f_l(x)}\, d\sigma_m(y) d\sigma_m(x) \\ &= \langle \overline{K}, \overline{f_n} f_l\rangle_2, \quad n, l = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

onde $(\overline{f_n} f_l)(x,y) := \overline{f_n(y)} f_l(x)$, $x, y \in S^m$. Pelo Teorema 2.4.4, o conjunto $\{\overline{f_n} f_l\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m \times S^m)$. Então, aplicando o Teorema 2.1.5 e, em seguida, o Teorema 2.1.4, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_K^*(f_n)\|_2^2 = \sum_{l,n=1}^{\infty} |\langle T_K^*(f_n), f_l\rangle_2|^2 = \sum_{l,n=1}^{\infty} |\langle \overline{K}, \overline{f_n} f_l\rangle_2|^2 \leq \|K\|_2^2 < \infty.$$

A conclusão anterior junto com (4.4) revelam que $\|T_K - T_{K_N}\| \to 0$. Como cada T_N é um operador sobre $L^2(S^m)$ de posto, no máximo N, pelo Teorema 2.1.9, T_K é compacto. Portanto, a prova está terminada. ∎

O resultado a seguir mostra que operadores integrais gerados por núcleos contínuos têm conjunto imagem contínuo.

Teorema 4.1.2 *Se K é uma função contínua de $L^2(S^m \times S^m)$, então a imagem de T_K é um conjunto de funções contínuas.*

Demonstração: Seja K como no enunciado do teorema. Assuma que $x_0 \in S^m$ e $f \in L^2(S^m)$ estão fixados. Considere $\{x_n\}$ uma sequência em S^m tal que $x_n \to x_0$. A compacidade de S^m implica que K é uniformemente contínua em $S^m \times S^m$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que $|K(x_0, y) - K(x_n, y)| < \varepsilon$, $n \geq N$, $y \in S^m$ e

$$|T_K(f)(x_0) - T_K(f)(x_n)| \leq \varepsilon \int_{S^m} |f(y)| d\sigma_m(y), \quad n \geq N,\ f \in L^2(S^m).$$

Como $L^2(S^m) \subset L^1(S^m)$, o resultado segue. ∎

Os núcleos hermitianos geradores de operadores integrais estão associados à propriedades espectrais destes operadores.

Definição 4.1.3 *Um elemento K de $L^2(S^m \times S^m)$ é chamado hermitiano quando $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ quase sempre.*

Sejam K uma função definida em $S^m \times S^m$ e f uma função com domínio S^m. Para cada $u \in S^m$, definimos as funções K_u e $Kf\overline{f}$ pelas igualdades

$$K_u(x) := K(x, u), \quad (Kf\overline{f})(x, y) = K_y(x) f(x) \overline{f(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

Teorema 4.1.4 *Seja K uma função definida em $S^m \times S^m$. Então:*
(i) Se $K \in L^2(S^m \times S^m)$, então $Kf\overline{f} \in L^1(S^m \times S^m)$, $f \in L^2(S^m)$;
(ii) Se K é uma função hermitiana de $L^2(S^m \times S^m)$, então para cada $f \in L^2(S^m)$

$$\int_{S^m} \int_{S^m} K(x, y) f(x) \overline{f(y)} d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) = \int_{S^m} \int_{S^m} Re[K(x, y) f(x) \overline{f(y)}] d\sigma_m(x) d\sigma_m(y).$$

Demonstração: Para provar (i), sejam $K \in L^2(S^m \times S^m)$ e $f \in L^2(S^m)$. A Desigualdade de Hölder aplicada ao produto de funções $x \in S^m \mapsto K_y(x)f(x)$ mostra que

$$\begin{aligned}
\|Kf\overline{f}\|_1 &= \int_{S^m}\int_{S^m} |K(x,y)f(x)\overline{f(y)}|\, d\sigma_m(x)d\sigma_m(y) \\
&= \int_{S^m} |\overline{f(y)}| \left(\int_{S^m} |K_y(x)f(x)|d\sigma_m(x)\right) d\sigma_m(y) \\
&\leq \|f\|_2 \int_{S^m} |f(y)|\|K_y\|_2\, d\sigma_m(y) \\
&= \|f\|_2 \int_{S^m} |f(y)g(y)|\, d\sigma_m(y),
\end{aligned}$$

onde $g(y) = \|K_y\|_2$, $y \in S^m$. Novamente, a Desigualdade de Hölder revela que

$$\|Kf\overline{f}\|_1 \leq \|f\|_2^2\|g\|_2 = \|f\|_2^2\|K\|_2 < \infty.$$

A arbitrariedade de $f \in L^2(S^m)$ implica na afirmação (i).
Para o item (ii) assuma que $K \in L^2(S^m \times S^m)$ é hermitiana e $f \in L^2(S^m)$. Uma mudança de variável mostra que

$$\int_{S^m}\int_{S^m} K(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma_m(x)d\sigma_m(y) = \int_{S^m} \overline{f(x)}\left(\int_{S^m} K(y,x)f(y)d\sigma_m(y)\right) d\sigma_m(x).$$

Por outro lado, como $Kf\overline{f} \in L^1(S^m \times S^m)$, pelo Teorema de Fubini-Tonelli,

$$\overline{\int_{S^m}\int_{S^m} K(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma_m(x)d\sigma_m(y)} = \int_{S^m} \overline{f(x)}\left(\int_{S^m} K(y,x)f(y)d\sigma_m(y)\right) d\sigma_m(x).$$

Assim, das duas igualdades anteriores, concluímos que

$$\int_{S^m}\int_{S^m} K(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma_m(x)d\sigma_m(y) = \int_{S^m}\int_{S^m} \overline{K(x,y)f(x)\overline{f(y)}}d\sigma_m(x)\, d\sigma_m(y).$$

Equivalentemente,

$$\int_{S^m}\int_{S^m} \mathrm{Img}\,[K(x,y)f(x)\overline{f(y)}]d\sigma_m(x)\, d\sigma_m(y) = 0, \text{ q.s..}$$

Portanto, o teorema está provado. ■

O teorema a seguir mostra que peradores integrais não negativos são gerados por núcleos hermitianos.

Teorema 4.1.5 *Seja K uma função de $L^2(S^m \times S^m)$. Se T_K é não negativo, então o núcleo K é hermitiano.*

Demonstração: Assuma que T_K tem a propriedade da afirmação do teorema. Então, pelo Teorema 2.5.3,

$$\int_{S^m} (T_K(f) - T_K^*(f))(x)\overline{f(x)}d\sigma_m(x) = 0, \quad f \in L^2(S^m).$$

Recordando a equação (4.2), segue que

$$\int_{S^m}\int_{S^m} (K(x,y) - \overline{K(y,x)})f(y)\overline{f(x)}\, d\sigma_m(y)d\sigma_m(x) = 0, \quad f \in L^2(S^m).$$

Em particular, usando a base (4.1),

$$\int_{S^m}\int_{S^m} (K(x,y) - \overline{K(y,x)})f_n(y)\overline{f_l(x)}\, d\sigma_m(y)d\sigma_m(x) = 0, \quad f \in L^2(S^m),\ n,l = 1,2,\ldots.$$

Então, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, quase sempre. Portanto, K é hermitianoa. ■

Teorema 4.1.6 *Seja K uma função de $L^2(S^m \times S^m)$. Se T_K é não negativo sobre $L^2(S^m)$ e a função $(x,x) \in S^m \times S^m \mapsto K(x,x)$ é contínua, então $K(x,x) \geq 0$, $x \in S^m$.*

Demonstração: Primeiramente, $K = K_1 + iK_2$, onde K_1 e K_2 são funções reais em $S^m \times S^m$. Suponha que T_K é não negativo. Logo, pelo Teorema 4.1.5,

$$K_1(x,y) = K_1(y,x), \quad K_2(x,y) = -K_2(y,x), \tag{4.5}$$

quase sempre em $S^m \times S^m$. Agora, se $x \in S^m \mapsto K(x,x)$ é contínua, então $K(x,x) = K_1(x,x)$, $x \in S^m$. Assuma, por contradição, que $K(x_0,x_0) < 0$, para algum $x_0 \in S^m$.

A continuidade da função $(x, x) \in S^m \times S^m \mapsto K_1(x, x)$, assegura a existência de uma vizinhança V_0 de x_0 tal que $K_1(x, y) < 0$, $x, y \in V_0$. A função χ_{V_0} pertence a $L^2(S^m)$ e

$$\langle T_K(\chi_{V_0}), \chi_{V_0} \rangle_2 = \int_{V_0} \int_{V_0} K_1(x, y) d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) + i \int_{V_0} \int_{V_0} K_2(x, y) d\sigma_m(x) d\sigma_m(y).$$

Então, por (4.5),

$$\langle T_K(\chi_{V_0}), \chi_{V_0} \rangle_2 = \int_{V_0} \int_{V_0} K_1(x, y) d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) < 0.$$

Isto contradiz a não negatividade de T_K. ■

4.2 Operadores Integrais e Sequências

Nesta seção, estudaremos os operadores integrais que são compatíveis com sequências conforme a Definição 2.1.10. Este é o primeiro passo para a compreensão do Teorema de Mercer.

Teorema 4.2.1 *Seja (λ_n, ψ_n) uma sequência de $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatível com um operador T. Assuma que $\{\lambda_n\}$ é não negativa e $\{\psi_n\}$ é composta de funções contínuas. Se $T = T_K$, para algum $K \in L^2(S^m \times S^m)$ tal que a função $(x, x) \in S^m \times S^m \mapsto K(x, x)$ é contínua, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n(x)|^2 \leq K(x, x), \quad x \in S^m.$$

Demonstração: Suponha que K é o núcleo do operador integral T como na hipótese do teorema. Seja p um inteiro positivo e defina

$$K_p(x, y) := K(x, y) - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \psi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

Claramente, $K_p \in L^2(S^m \times S^m)$. A hipótese sobre T revela que

$$\begin{aligned}
\langle T_{K_p}(f), f\rangle_2 &= \int_{S^m} T_{K_p}(f)(x)\overline{f(x)}\, d\sigma_m(x) \\
&= \int_{S^m} \left[\int_{S^m} \left(K(x,y) - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}\right) f(y)\, d\sigma_m(y)\right] \overline{f(x)}\, d\sigma_m(x) \\
&= \int_{S^m} \left[T_K(f)(x) - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \langle f, \psi_n\rangle_2 \psi_n(x)\right] \overline{f(x)}\, d\sigma_m(x) \\
&= \int_{S^m} \left[\sum_{n=p+1}^{\infty} \lambda_n \langle f, \psi_n\rangle_2 \psi_n(x)\right] \overline{f(x)}\, d\sigma_m(x) \\
&= \sum_{n=p+1}^{\infty} \lambda_n |\langle f, \psi_n\rangle_2|^2, \quad f \in L^2(S^m).
\end{aligned}$$

Como $x \in S^m \mapsto K_p(x,x)$ é uma função contínua, o Teorema 4.1.6 é aplicável. Portanto, $K_p(x,x) \geq 0$, $x \in S^m$. A prova está concluída. ■

Teorema 4.2.2 *Seja (λ_n, ψ_n) uma sequência de $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatível com um operador T. Assuma que $\{\lambda_n\}$ é não negativa e $\{\psi_n\}$ é composta de funções contínuas. Se $T = T_K$, com $x \in S^m \mapsto K(x,x)$ é contínua, então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}$ é absoluta e uniformemente convergente em S^m com respeito a uma variável, enquanto a outra é fixada.*

Demonstração: Fixe $y \in S^m$ e defina a sequência $\{f_n\}$, onde

$$f_n = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \psi_\nu \overline{\psi_\nu(y)}.$$

Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo Teorema 4.2.1,

$$
\begin{aligned}
|f_p(x) - f_q(x)|^2 &= \left| \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu \psi_\nu(x) \overline{\psi_\nu(y)} \right|^2 \\
&\leq \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu |\psi_\nu(x)|^2 \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu |\psi_\nu(y)|^2 \\
&\leq K(x,x) \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu |\psi_\nu(y)|^2 \\
&\leq \left(\sup_{\eta \in S^m} K(\eta,\eta) \right) \sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu |\psi_\nu(y)|^2, \ x \in S^m, \ q \geq p \geq 1.
\end{aligned}
$$

Pelo teorema anterior, a última série é convergente. Logo, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $(L^2(S^m), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$. Pelo Teorema 2.2.3, a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n \overline{\psi_n(y)}$ converge absoluta e uniformemente em S^m. A mesma conclusão vale fixando-se $x \in S^m$. Assim, o teorema está provado. ■

4.3 Teoremas de Mercer

Na seção presente, apresentaremos algumas versões do Teorema de Mercer que aparecem na literatura, incluindo a versão clássica provada por Mercer. Começamos com a versão envolvendo compactos da reta.

Teorema 4.3.1 *Sejam a e b números reais e K uma função real contínua em $[a,b] \times [a,b]$. Se K é hermitiana e T_K é não negativo sobre $L^2([a,b])$, então existe uma base ortonormal $\{\psi_n\}$ de $L^2([a,b])$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais não negativos tais que (λ_n, ψ_n) é compatível com T_K e a soma*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in [a,b],
$$

converge absoluta e uniformemente para $K(x,y)$.

Demonstração: ([23], p.126). ■

A formulação seguinte foi provada em [10].

Teorema 4.3.2 *Sejam X um espaço topológico localmente compacto munido de uma medida σ-finita e K uma função de $L^2(X \times X)$. Se K é contínua e T_K é não negativo, então existe uma base ortonormal $\{\psi_n\}$ de $L^2(X)$ composta por funções contínuas e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números não negativos tais que (λ_n, ψ_n) é compatível com T_K e a soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

converge absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de $X \times X$.

Uma versão para espaços métricos munido de uma medida de Borel será dada no teorema a seguir([9]).

Teorema 4.3.3 *Sejam X um espaço métrico munido de uma medida de Borel ν e K uma função contínua em $L^2(X \times X)$ tal que a função $x \in X \mapsto K(x,x)$ pertence a $L^1(X)$. Suponha que a sequência (λ_n, ψ_n) é compatível com T_K sobre $L^2(X)$. Assuma que a restrição de ν a $Y := supp(\nu)$ é estritamente positiva e $\nu(X \setminus Y) = 0$. Se $\{\psi_n\}$ é um conjunto $L^2(X)$-ortonormal e $\{\lambda_n(T)\}$ está contida em um setor circular de centro na origem de $\mathbb{C}$ com ângulo central menor que π, então a soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in Y$$

converge absoluta e uniformemente em compactos de $Y \times Y$ para K. Além disso, T_K é compacto e cada $\lambda_n \psi_n$ é contínua em X.

A versão seguinte já foi cotada no Capítulo 1. Incluiremos novamente nesta seção por questão de completude para que o leitor tenha a oportunidade de compará-la com as demais ([7]).

Teorema 4.3.4 *Sejam R e T operadores integrais autoadjuntos sobre $L^2([a,b])$, ambos gerados por núcleos contínuos. Assuma que -1 não pertence a $\sigma(T)$. Se R é positivo,* *então existem sequências $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ em $L^2([a,b])$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad x, y \in [a,b],$$

converge absoluta e uniformemente em $[a,b] \times [a,b]$ para o núcleo gerador do operador integral $R \circ (I+T)$.

Encerramos esta seção apresentando a versão do Teorema de Mercer, objeto central desta dissertação. Ela generaliza a versão precedente, onde $[a,b]$ é substituído por S^m. Sua demonstração encerrará este trabalho na Seção 4.6. Muitas das condições assumidas no seu enunciado já foram estudas até aqui, enquanto que outras ainda serão abordadas.

Teorema 4.3.5 *Sejam R, S e T operadores integrais em $L^2(S^m)$ tais que R e $S+T$ são gerados por núcleos contínuos em $S^m \times S^m$. Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Assuma qie $\{\psi_n\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada e satisfaz*

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_k + \beta_k < 0 < \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \leq \cdots,$$

para algum inteiro k. Se R é compacto e positivo, então existe uma sequência (λ_n, ϕ_n) em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatível com R tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n \phi_n(x) \overline{(S+T)(\phi_n(y))}$$

converge absoluta e uniformemente em $S^m \times S^m$ para o núcleo gerador do operador integral $R \circ (S+T)$.

4.4 Uma Estrutura de Krein para $L^2(S^m)$

Em vista do objetivo do trabalho, abordaremos daqui em diante a classe de operadores sobre $L^2(S^m)$ que impõe uma estrutura de Krein sobre este espaço.

A teoria exposta nesta seção dependerá da análise seguinte. A condição sobre o operador T do Teorema 4.3.4 equivale afirmar que o espectro $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, onde os termos podem ser ordenados como

$$\lambda_1 + 1 < \lambda_2 + 1 < \cdots \lambda_k + 1 < 0 < \lambda_{k+1} + 1 < \lambda_{k+2} + 1 < \cdots, \tag{4.6}$$

para algum inteiro k. Note que o escalar 1 que aparece na desigualdade anterior pode ser interpretado como a sequência dos autovalores do operador identidade I sobre $L^2([a,b])$; Isto é, $\sigma(I) = \{1, 1, \cdots\}$.

A proposta de extensão deste trabalho leva em conta o operador T, agora, sobre $L^2(S^m)$ e substitui I por um operador integral S sobre $L^2(S^m)$. Logo, levamos em conta as sequências não decrescentes dadas por $\sigma(S) = \{\alpha_n\}$ e $\sigma(T) = \{\beta_n\}$. Neste caso, a condição (4.6) dará lugar à cadeia ordenada

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_k + \beta_k < 0 < \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \leq \cdots, \tag{4.7}$$

para algum inteiro positivo k.

Teorema 4.4.1 *Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com os operadores S e T, respectivamente. Assuma que $\{\alpha_n + \beta_n\}$ satisfaz (4.7). Se $\{\psi_n\}$ é base ortonormal de $L^2(S^m)$, então existe uma forma q dependendo apenas de $S + T$ tal que $(L^2(S^m), q)$ é um espaço de Krein.*

Demonstração: Suponha que $\{\psi_n\}$ é uma base ortonormal. Claramente, a sequência $(\alpha_n + \beta_n, \psi_n)$ é compatível com o operador $S + T$. A condição (4.7) implica que a sequência $(|\alpha_n + \beta_n|^{-1}, \psi_n)$ é compatível com um operador U sobre $L^2(S^m)$. Defina, então, $G := (S+T) \circ U$. Recordando a Definição 3.4.4, provemos que G é uma simetria canônica sobre $(L^2(S^m), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$. Primeiramente, notemos que

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \left\langle \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{k} |\alpha_m + \beta_m|^{-1} \langle f, \psi_m \rangle_2 \psi_m, \psi_n \right\rangle_2 \psi_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

O Teorema 2.1.2 justifica a igualdade

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m + \beta_m|^{-1} \langle f, \psi_m \rangle_2 \langle \psi_m, \psi_n \rangle_2 \psi_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

A ortonormalidade de $\{\psi_n\}$ implica que

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)|\alpha_n + \beta_n|^{-1} \langle f, \psi_n \rangle_2 \psi_n, \quad f \in L^2(S^m). \tag{4.8}$$

A condição (4.7) implica na decomposição $G = P_1 - P_2$, onde

$$P_1 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \langle \cdot, \psi_n \rangle_2 \psi_n, \qquad P_2 = \sum_{n=1}^{k} \langle \cdot, \psi_n \rangle_2 \psi_n.$$

Agora é fácil ver que P_1 e P_2 são projeções autoadjuntas, $P_1 \circ P_2$ e $P_2 \circ P_1$ são identicamente nulas. Logo, G é autoadjunto e $G \circ G = I$. Assim, estas duas propriedades de G implicam na afirmação sobre ele. Para finalizar a prova, defina a função $q(f, g) = \langle G(f), g \rangle_2$, $f, g \in L^2(S^m)$. Assim, pelo Teorema 3.4.6, $(L^2(S^m), q)$ é um espaço de Krein. ■

Assuma que a sequência $\{\alpha_n + \beta_n\}$ satifaz (4.7) e defina o operador V sobre $L^2(S^m)$ para o qual a sequência $(|\alpha_n + \beta_n|^{1/2}, \psi_n)$ é compatível. O operador V é obviamente invertível e o Teorema 2.5.4 mostra que V é positivo e, portanto autoadjunto.

Dado R, um operador adicional sobre $L^2(S^m)$, seja

$$A := R \circ (S + T).$$

Como V é um operador invertível, a composição

$$B := V \circ A \circ V^{-1},$$

também faz sentido.

Teorema 4.4.2 *Sejam S e T os operadores do Teorema 4.4.1. Se S e T são limitados e R é um operador compacto sobre $L^2(S^m)$, então A e B são compactos sobre $L^2(S^m)$.*

Demonstração: Assuma que S e T são limitados sobre $L^2(S^m)$. Então, $S + T$, V e V^{-1} são limitados. Se R é um operador compacto sobre $L^2(S^m)$, então a compacidade de A vem do Teorema 2.5.5 e, portanto B também é compacto. ■

Como o uso do Teorema 2.1.2 será frequente daqui por diante, não mais o invocaremos. Ele aparece sempre que os símbolos de somatório e da integral precisam ser permutados.

Teorema 4.4.3 *Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Seja R um operador limitado sobre $L^2(S^m)$. Assuma que $\{\psi_n\}$ é base ortonormal de $L^2(S^m)$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada e satifaz a condição (4.7). Se G é o operador definido em (4.8) e R é autoadjunto, então B é G-autoadjunto.*

Demonstração: Assuma as hipóteses do teorema e que G é o operador definido em (4.8). Então,

$$B(f) \;=\; (V \circ R \circ (S+T))\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2}\langle f, \psi_\nu\rangle_2 \psi_\nu\right), \quad f \in L^2(S^m).$$

A limitação dos operadores R e $S+T$ nos permitem escrever

$$B(f) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2}|\alpha_\mu + \beta_\mu|^{1/2}\langle f, \psi_\nu\rangle_2\langle R(\psi_\nu), \psi_\mu\rangle_2\psi_\mu, \quad f \in L^2(S^m).$$

A definição de G e a ortonormalidade de $\{\psi_n\}$ mostram que para cada $f \in L^2(S^m)$,

$$(G \circ B)(f) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\mu + \beta_\mu)|\alpha_\mu + \beta_\mu|^{-1/2}(\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2}\langle f, \psi_\nu\rangle_2\langle R(\psi_\nu), \psi_\mu\rangle_2\psi_\mu.$$

Logo, para cada $f, g \in L^2(S^m)$ o produto interno $\langle (G \circ B)(f), g\rangle_2$ tem a expressão

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\mu + \beta_\mu)|\alpha_\mu + \beta_\mu|^{-1/2}(\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2}\langle f, \psi_\nu\rangle_2\langle R(\psi_\nu), \psi_\mu\rangle_2\langle \psi_\mu, g\rangle_2.$$

Como R é autoadjunto, a última expressão também pode ser obtida calculando-se $\langle G(f), B(g)\rangle_2$, $f, g \in L^2(S^m)$. Assim,

$$\langle (G \circ B)(f), g\rangle_2 = \langle G(f), B(g)\rangle_2, \quad f, g \in L^2(S^m).$$

Portanto, pela Definição 3.5.2, o operador B é G-autoadjunto. ■

A extensão da Definição 2.5.2 para G-espaços tem a formulação a seguir.

Definição 4.4.4 *Seja G uma simetria canônica sobre $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e considere um operador T sobre $\mathcal{H}$.*
(i) Dizemos que T é G-não negativo quando

$$\langle (G \circ T)(f), f \rangle \geq 0, \quad f \in \mathcal{H};$$

(ii) Dizemos que T é G-positivo quando

$$\langle (G \circ T)(f), f \rangle > 0, \quad f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}.$$

O teorema abaixo fornece um exemplo de operador G-não negativo de interesse no restante deste trabalho.

Teorema 4.4.5 *Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Sejam R um operador limitado sobre $L^2(S^m)$ e G o operador definido em (4.8). Assuma que $\{\psi_n\}$ é base ortonormal de $L^2(S^m)$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada e satifaz a condição (4.7). Então:*
(i) Se R é não negativo, então B é G-não negativo sobre $L^2(S^m)$;
(ii) Se R é positivo, então B é G-positivo sobre $L^2(S^m)$.

Demonstração: Sejam G e B como no teorema. Fixe $f \in L^2(S^m)$ e calculemos $C := \langle (G \circ B)(f), f \rangle_2$. Usando a expressão de $G \circ B$ obtida na prova do teorema anterior, vemos que

$$\begin{aligned} C &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\mu + \beta_\mu)|\alpha_\mu + \beta_\mu|^{-1/2} (\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2} \overline{\langle f, \psi_\mu \rangle}_2 \langle f, \psi_\nu \rangle_2 \langle R(\psi_\nu), \psi_\mu \rangle_2 \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)|\alpha_\nu + \beta_\nu|^{-1/2} \langle f, \psi_\nu \rangle_2 \langle R(\psi_\nu), ((S+T) \circ V^{-1})(f) \rangle_2. \end{aligned}$$

A limitação de R, agora, mostra que

$$C = \langle R(g), g \rangle_2, \quad g = ((S+T) \circ V^{-1})(f) \in L^2(S^m).$$

Assim, a não negatividade de R sobre $L^2(S^m)$, implica que $C \geq 0$. Portanto, o item (i) está provado.

Assuma, agora, que R é positivo sobre $L^2(S^m)$. A prova anterior, revela que (ii) segue mostrando-se que $(S+T)\circ V^{-1}(f) \neq 0$, $f \in L^2(S^m)\setminus\{0\}$. Então, suponha que $((S+T)\circ V^{-1})(f) = 0$, para algum $f \in L^2(S^m)$. Como $S+T$ e V^{-1} são operadores invertíveis, $f = 0$. ∎

4.5 Duas Bases Especiais para $L^2(S^m \times S^m)$

O fechamento deste trabalho na próxima seção dependerá da seção presente, onde a partir da classe de operadores que lidamos anteriormente, duas bases especiais serão construídas para o espaço produto $L^2(S^m \times S^m)$.

Na definição a seguir a notação δ_{ij} representa a função *delta de Kronecker.*

Definição 4.5.1 *Seja $(\mathcal{K}, q)$ um espaço de Krein. Um conjunto $\{e_n\}$ de $\mathcal{K}$ é chamado q-ortonormal se*

$$q(e_i, e_j) = \begin{cases} \delta_{ij}, & se \quad e_i, e_j \in \mathcal{K}^+; \\ -\delta_{ij}, & se \quad e_i, e_j \in \mathcal{K}^-. \end{cases}$$

O Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos sobre espaços de Krein pode ser enunciado como segue ([2], p.231).

Teorema 4.5.2 *Seja G uma simetria canônica sobre $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Seja T um operador limitado sobre $\mathcal{H}$ tal que $\sigma(T)$ tenha um único ponto de acumulação. Se T é G-positivo, então existe uma base $\{e_n\}$ de $\mathcal{H}$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números complexos tal que $\{e_n\}$ é q_G-ortonormal e $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Em adição, a soma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n q_G(f, e_n) e_n, \quad f \in \mathcal{H}$$

é $\mathcal{H}$-uniformemente convergente para $T(f)$.

Sob as hipóteses descritas no teorema anterior,

$$0 < q_G(T(e_m), e_m) = \lambda_m q_G(e_m, e_m) = (\operatorname{sign} \lambda_m)\, \lambda_m, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Logo, a sequência $\{\lambda_n\}$ é formada por números reais não nulos.

Teorema 4.5.3 *Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Seja R um operador compacto e positivo sobre $L^2(S^m)$. Assuma que $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada, satifaz a condição (4.7) e $\{\psi_n\}$ é base ortonormal de $L^2(S^m)$. Então:*
(i) Existe uma sequência (λ_n, ϕ_n) em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ tal que $((\operatorname{sign} \lambda_n)\lambda_n, \phi_n)$ é compatível com R;
(ii) $\langle (S+T)(\phi_m), \phi_n \rangle_2 = (\operatorname{sign} \lambda_m)\, \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, \ldots$;
(iii) $R \circ (S+T)(\phi_m) = \lambda_m \phi_m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Demonstração: Considere o operador B definido na seção anterior. Um cálculo direto mostra que $B \circ G = G \circ B$, onde G é o operador definido em (4.8). Recordando o Teorema 2.5.3, vemos que R é autoadjunto. Logo, pelo Teorema 4.4.3, $G \circ B = B \circ G$ é autoadjunto e $G \circ B = G \circ B^*$. Uma vez que $G \circ G = I$, fica claro que $B = B^*$. Em adição, o Teorema 4.4.2 implica que B também é compacto. Então, pelo Teorema 2.3.2, concluímos que 0 é o único ponto de acumulação de $\sigma(B)$. Por outro lado, o Teorema 4.4.5 nos informa que B é um operador G-positivo sobre $L^2(S^m)$. Então, pelo teorema anterior, existe uma sequência (λ_n, e_n) em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ de modo que $\{e_n\}$ é q_G-ortonormal, $B(e_n) = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$ e

$$B(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n\, q_G(f, e_n) e_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

Pela composição que define B, segue que

$$(V \circ A \circ V^{-1})(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n\, q_G(f, e_n) e_n,\ f \in L^2(S^m).$$

A limitação de V^{-1}, mostra que

$$(A \circ V^{-1})(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n\, q_G(f, e_n) V^{-1}(e_n), \quad f \in L^2(S^m).$$

Então, usando as funções $\phi_n := V^{-1}(e_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ e a autoadjuntês de V, segue que

$$\begin{aligned}(A \circ V^{-1})(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle G(f), V(\phi_n)\rangle_2 \phi_n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle (V \circ (S+T) \circ U)(f), \phi_n\rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(S^m).\end{aligned}$$

Como $V \circ (S+T) \circ U = (S+T) \circ V^{-1}$,

$$(A \circ V^{-1})(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle ((S+T) \circ V^{-1})(f), \phi_n\rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

Agora, a invertibilidade de V^{-1} justifica a seguinte modificação da fórmula anterior.

$$\begin{aligned}A(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle (S+T)(f), \phi_n\rangle_2 \phi_n, \; f \in L^2(S^m) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle f, (S+T)(\phi_n)\rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(S^m).\end{aligned}$$

Como R e $(S+T)$ são autoadjuntos, das igualdades acima, segue que

$$((S+T) \circ R)(f) = A^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle f, \phi_n\rangle_2 (S+T)(\phi_n), \quad f \in L^2(S^m).$$

Finalmente, a invertibilidade de $S+T$ mostra que

$$R(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \langle f, \phi_n\rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(S^m).$$

Assim, o item (i) está provado.

O segundo item do teorema segue das igualdades seguintes, usando propriedades já mencionadas acima para os operadores envolvidos nos cálculos.

$$\begin{aligned}\langle \phi_m, (S+T)(\phi_n)\rangle_2 &= \langle V^{-1}(e_m), ((S+T)\circ V^{-1})(e_n)\rangle_2\\ &= \langle ((S+T)\circ V^{-1})(e_m), V^{-1}(e_n)\rangle_2\\ &= \langle (V^{-1}\circ(S+T)\circ V^{-1})(e_m), e_n\rangle_2\\ &= \langle ((S+T)\circ U)(e_m), e_n\rangle_2\\ &= \langle G(e_m), e_n\rangle_2 = q_{_G}(e_m, e_n) = (\operatorname{sign}\lambda_m)\delta_{mn}, \quad m,n = 1,2,\ldots.\end{aligned}$$

Para a última afirmação do teorema, use a expansão do operador $A = R\circ(S+T)$ obtida na prova do item (i) para escrever

$$(R\circ(S+T))(\phi_m) = \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{sign}\lambda_n)\,\lambda_n\langle \phi_m, (S+T)(\phi_n)\rangle_2\phi_n, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Então, pelo item (ii),

$$(R\circ(S+T))(\phi_m) = (\operatorname{sign}\lambda_m)\lambda_m\langle \phi_m, (S+T)(\phi_m)\rangle_2\phi_m = \lambda_m\phi_m, \quad m = 1,2,\ldots.$$

A prova está finalizada. ■

No último teorema desta seção, usaremos duas sequências de funções definidas a partir das notações precedentes:

$$\Psi_{mn}(x,y) := \phi_m(x)\overline{(S+T)(\phi_n)(y)}, \quad x,y\in S^m,\ m,n = 1,2,\ldots$$

e

$$\Phi_{pq}(x,y) := \overline{\Psi_{qp}(y,x)}, \quad x,y\in S^m,\ p,q = 1,2,\ldots.$$

O texto que colocamos no início desta seção refere-se ao teorema a seguir.

Teorema 4.5.4 *Assuma as hipóteses do teorema anterior para os operadores lineares R, S e T. Assuma que R é compacto e positivo sobre $L^2(S^m)$. Então:*
(i) As sequências $\{\Psi_{mn}\}$ e $\{\Phi_{pq}\}$ são bases de $L^2(S^m\times S^m)$;
(ii) As bases $\{\Psi_{mn}\}$ e $\{\Phi_{pq}\}$ satisfazem a igualdade

$$\langle \Psi_{mn}, \Phi_{pq}\rangle_2 = (\operatorname{sign}\lambda_m)\delta_{mp}(\operatorname{sign}\lambda_n)\delta_{nq}, \quad m,n,p,q = 1,2\ldots.$$

Demonstração: Para a prova de ambos os itens assuma a hipótese do teorema. Como V^{-1} e $S+T$ são operadores injetores e $\{e_n\}$ é uma base de $L^2(S^m)$, $\{\phi_n\}$ e $\{(S+T)(\phi_n)\}$ são bases de $L^2(S^m)$. O Teorema 2.4.4 prova o item (i).
O segundo item segue das igualdades abaixo usando o teorema anterior.

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi_{mn}, \Phi_{pq} \rangle_2 &= \int_{S^m} \int_{S^m} \Psi_{mn}(x,y) \overline{\Phi_{pq}(x,y)}\, d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \\
&= \int_{S^m} \int_{S^m} \phi_m(x) \overline{(S+T)(\phi_n)(y)}\, \phi_q(y) \overline{(S+T)(\phi_p)(x)}\, d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \\
&= \left(\int_{S^m} (\phi_m)(x) \overline{(S+T)(\phi_p)(x)}\ d\sigma_m(x) \right) \left(\int_{S^m} \phi_q(y) \overline{(S+T)(\phi_n)(y)}\, d\sigma_m(y) \right) \\
&= \langle \phi_m, (S+T)(\phi_p) \rangle_2 \, \langle \phi_q, (S+T)(\phi_n) \rangle_2 \\
&= (\operatorname{sign} \lambda_m) \delta_{mp} (\operatorname{sign} \lambda_n) \delta_{nq}, \quad m, n, p, q = 1, 2 \ldots.
\end{aligned}
$$

O teorema está provado. ■

4.6 O Teorema de Mercer para $R \circ (S+T)$

Por fim, nesta seção, a versão do Teorema de Mercer proposta na Seção 4.3 será demonstrada.

O teorema seguinte é o Teorema 4.2.1 aplicado para a classe de operadores que estamos trabalhando nas últimas seções.

Teorema 4.6.1 *Sejam R, S e T operadores integrais sobre $L^2(S^m)$ tais que R e $S+T$ são gerados por núcleos contínuos em $S^m \times S^m$. Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Assuma que $\{\psi_n\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada e satisfaz (4.7). Se R é compacto e positivo, então existe uma sequência (λ_n, ϕ_n) tal que $\{\phi_n\}$ é composta de funções contínuas e as somas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n |\phi_n(x)|^2, \quad x \in S^m \tag{4.9}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\lambda_n |(S+T)(\phi_n)(x)|^2, \quad x \in S^m \tag{4.10}$$

convergem absoluta e uniformemente em S^m.

Demonstração: Seja R o operador integral compacto e positivo como na hipótese do teorema. Então, a existência da sequência (λ_n, ϕ_n) é consequência do Teorema 4.5.3. Pelo mesmo teorema, a sequência $((\mathrm{sign}\lambda_n), \phi_n)$ é compatível com R. Por outro lado, a expressão do operador A obtida na prova daquele teorema mostra que a sequência $((\operatorname{sign} \lambda_n)\lambda_n, (S+T)(\phi_n))$ é compatível com $(S+T) \circ A$ sobre $L^2(S^m)$. Como os núcleos geradores dos operadores R e $(S+T) \circ A$ são contínuos sobre $S^m \times S^m$, pelo Teorema 4.1.2, as imagens desses operadores são compostas por funções contínuas. Uma vez que $(\operatorname{sign} \lambda_n)\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, as afirmações (4.9) e (4.10), seguem do Teorema 4.2.1. Isto completa a prova do teorema. ■

Agora, estamos de posse de todos os ingredientes necessários para provar o teorema principal deste trabalho.

Teorema 4.6.2 *Sejam R, S e T operadores integrais em $L^2(S^m)$ tais que R e $S+T$ são gerados por núcleos contínuos em $S^m \times S^m$. Sejam (α_n, ψ_n) e (β_n, ψ_n) sequências em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatíveis com S e T, respectivamente. Assuma que $\{\psi_n\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ é limitada e satisfaz (4.7). Se R é compacto e positivo, então existe uma sequência (λ_n, ϕ_n) em $\mathbb{C} \times L^2(S^m)$ compatível com R tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n)\, \lambda_n \phi_n(x) \overline{(S+T)(\phi_n)(y)}, \quad x, y \in S^m \tag{4.11}$$

converge absoluta e uniformemente em $S^m \times S^m$ para o núcleo gerador de $R \circ (S+T)$.

Demonstração: Assuma a afirmação do teorema para os operadores R, S e T. Como a sequência $\{\lambda_n\}$ é real, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_n \phi_n(x) \overline{(S+T)(\phi_n)(y)}\right|^2 &\leq \sum_{n=p}^{q} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n |\phi_n(x)|^2 \sum_{n=p}^{q} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n |(S+T)(\phi_n)(y)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n |\phi_n(x)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n |(S+T)(\phi_n)(y)|^2,\end{aligned}$$

onde $q \geq p \geq 1$, $x, y \in S^m$. Pelo Teorema 4.6.1, cada fator do produto anterior é convergente. Logo, pelo Critério de Cauchy para convergência uniforme dado no Teorema 2.2.3, a série (4.11) converge absoluta e uniformemente em $S^m \times S^m$. Para finalizar a prova, mostraremos que, na verdade, essa série converge para o núcleo gerador $L \in L^2(S^m \times S^m)$ do operador $R \circ (S+T)$. Usando os conjuntos $\{\Psi_{mn}\}$ e $\{\Phi_{pq}\}$, pelo Teorema 4.5.4,

$$L(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle L, \Phi_{mn} \rangle_2 \Psi_{mn}(x,y), \quad x, y \in S^m. \tag{4.12}$$

O coeficiente de Fourier desta expansão será calculada na sequência usando o Teorema de Fubini-Tonelli.

$$\begin{aligned}\langle L, \Phi_{mn} \rangle_2 &= \int_{S^m} \int_{S^m} L(x,y) \overline{\Phi_{mn}(x,y)} d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} \int_{S^m} L(x,y) \phi_n(y) \overline{(S+T)(\phi_m)(x)} d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} (R \circ (S+T))(\phi_n)(x) \overline{(S+T)(\phi_m)(x)} d\sigma_m(x) \\ &= \langle R \circ (S+T)(\phi_n), (S+T)(\phi_m) \rangle_2, \quad m, n = 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 4.5.3,

$$\begin{aligned}\langle L, \Phi_{mn} \rangle_2 &= \lambda_n \langle \phi_n, (S+T)(\phi_m) \rangle_2 \\ &= (\operatorname{sign} \lambda_m) \lambda_m \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$

Finalmente, retornando em (4.12) concluímos que

$$L(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n \Psi_{nn}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sign} \lambda_n) \lambda_n \phi_n(x) \overline{(S+T)(\phi_n)(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

Assim, o teorema está provado. ■

Finalizamos o trabalho observando que o teorema anterior é extensível a um espaço topológico X munido de uma medida localmente finita em lugar de S^m. Neste caso, o resultado que obtemos é uma extensão do contido em [7], onde as seqüências $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ satisfazem: a seqüência $\{\beta_n\}$ é limitado em $\mathbb{R}$ tal que

$$\beta_1 + 1 \leq \ldots \leq \beta_k + 1 < 0 < \beta_{k+n} + 1 \leq \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para algum inteiro k e $\{\alpha_n\}$ é a seqüência constante com entradas iguais a 1. A comparação detalhada é deixada ao leitor.

Bibliografia

[1] Azizov, T. Ya; Iokhvidov, I. S.; Shtraus, V. A., *Operators in Krein Spaces*. Mathematical Notes, v. 76, nº 3, 306 -314(2004).

[2] Azizov, T. Ya.; Iokhvidov, I. S., *Linear operators in spaces with an indefinite metric*. Translated from the Russian by E. R. Dawson. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1989.

[3] Bognár, J., *Indefinite inner product spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 78. Springer–Verlag, New York–Heidelberg, 1974.

[4] Brézis, H., *Análisis funcional: teoría y aplicaciones.* Versión española de *Juan Ramon Esteban*. Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[5] Conway, J. B., *A course in operator theory*. Graduate Studies in Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] Conway, J. B., *A course in functional analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 96. Second Edition. Springer, 1990.

[7] Dostanić, M., *Generalization of the Mercer theorem.* Publications de L'institut Mathématique, Nouvelle série, tome 54(68), 63-70(1993).

[8] Ferreira, J. C., Menegatto, V. A., *Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels*. Integral Equations Operator Theory 64, nº. 1, 61-81(2009).

[9] Ferreira, J. C., Menegatto, V. A., *Eigenvalue decay rates for positive integral operators*. Ann. Mat. Pura Appl., DOI: 10.1007/s10231-012-0256-z(2011).

[10] Ferreira, J. C., V. A. Menegatto and C. P. Oliveira, *On the nuclearity of integral operators*. Positivity, 13, n^o 3, 519-541(2009).

[11] Folland, Gerald B., *Real analysis: modern techniques and their applications*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience publication [John Wiley & Sons], second edition, New York, 1999.

[12] Groemer, H., Geometric aplications of Fourrier series and spherical harmonics. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1996.

[13] Honig, C. S., Análise funcional e o problema de Sturm-Liouville. Editora Edgard Blucher Ltda, 1978.

[14] Iokhvidov, I. S., Krein, M. G., *Spectral theory of operators in space with an metric*, II (Russ.), Trudy Moskov, Mat. Obshch, 8, 413-496; Amer. Math. Soc. Translations (2), 34, 283-373(1969).

[15] Lax, P. D., *Functional analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[16] Mercer, J., *Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations*. Phil. Trans. Royal Soc. A 209 (1909), 415-446.

[17] Müller, C., Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces. Applied Mathema-tical Sciences, 129. Springer-Verlag, New York, 1998.

[18] Nagy, K., *State spaces with indefinite metric in quantum field theory*. (Russian translation), Mir, Moscow (1969).

[19] Oliveira, C. R. de, *Introdução à análise funcional*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[20] Pontryagin, L. S., *Hermitian operator in spaces with indefinite metric*. Izvestiya Akad. Nauk (Rússia),Ser. Matem, 8, 243-280(1944).

[21] Phillips, R., *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc., 90(2), 193-254(1959).

[22] Phillips, R., *Dissipative operators and parabolic partial differential equations.* Communs. Pure and Math., 1959, 12(2), 249-76(1959).

[23] Porter, D. Stirling, D. S. G. *Integral equations: a practical treatment, from spectral theory to applications.* Cambridge University Press, 1996.

[24] Rudin, Walter, *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, Third Edition, 1976.

[25] Schaback, R., - Native Hilbert spaces for radial basis functions I. *New developments in approximation theory.* (Dortmund, 1998), 255–282, Internat. Ser. Numer. Math., 132, Birkhäuser, Basel, 1999.

[26] Schaback, R.,-A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II. *Numerical analysis in the 20th century, vol. I, Approximation theory.* J. Comput. and Appl. Math. 121, nº. 1-2, 165-177(2000).

[27] Sobolev, S. L., *On the motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid.* Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz., No. 3, 20-55(1960).

Índice