UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Luiz Henrique de Campos Borges

Energias de Vácuo e Interações de Multipolos em Modelos com Quebra de Simetria de Lorentz.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia.

Orientador: Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel

Novembro de 2011
Itajubá - MG

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Mauá –
Bibliotecária Margareth Ribeiro- CRB_6/1700

B732e

Borges, Luiz Henrique de Campos
Energias de Vácuo e Interações de Multipolos em Modelos com Quebra de Simetria de Lorentz / Luiz Henrique de Campos Borges. -- Itajubá, (MG) : [s.n.], 2011.
52 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Augusto Barone Rangel.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá.

1. Energias de vácuo. 2. Quebra de Lorentz. 3. Multipolos. 4. Campos de fundo. 5. Interações. 6. Anisotropia. I. Rangel, Fabrí_cio Augusto Barone, orient. II. Universidade Federal de Itajubá. III. Título.

Resumo

Essa dissertação é devotada a um estudo sobre interações entre fontes estacionárias intermediadas por campos bosônicos em modelos que exibem quebra explícita da simetria de Lorentz por campos de fundo. Consideramos sempre espaços sem curvatura. Nos concentramos em modelos para o campo escalar e eletromagnético acoplados a campos de fundo do tipo tensoriais, tomados como pequenos (componentes muito menores do que a unidade). A maior parte dos resultados foi obtida para um número arbitrário de dimensões.

Abstract

This thesis is devoted to a study of interactions between stationary sources mediated by bosonic fields in models that exhibit explicit Lorentz symmetry breaking by background fields. We consider only spaces without curvature. We focus on models for the scalar and electromagnetic field coupled to tensor background fields, taken as small (with components much smaller than the unity). Most of the results was obtained for an arbitrary number of dimensions.

Sumário

Capítulo I

Introdução

O desenvolvimento da física do século XX se deu em dois grandes marcos e envolvendo duas inovações conceituais distintas e profundas. A primera delas foi a Teoria da Relatividade Especial desenvolvida em 1905 por Einstein, que levou a uma mecânica consistente com o eletromagnetismo. A segunda, elaborada em sua forma final entre 1925 e 1926, é a Mecânica Quântica que, combinada com as equações de Maxwell, foi capaz de explicar o comportamento do átomo. Além do mais, em 1915, em sua Teoria da Relatividade Geral, Einstein propôs uma nova teoria da gravitação que tem a Teoria de Newton como uma aproximação.

Einstein colocou o seu princípio da Relatividade Restrita sob a forma de dois postulados:

- As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- O módulo da velocidade da luz no vácuo, c, é o mesmo em todas as direções e em todos os referenciais inerciais.

Esses dois postulados se consolidam como uma simetria na natureza, a qual chamamos de simetria de Lorentz, e são evidenciadas com as conhecidas transformações de Lorentz. Atualmente falar em quebrar essa simetria e, portanto, violar os postulados da relatividade restrita, pode nos trazer um desconforto muito grande devido ao fato de que, na física, buscamos sempre simetrias, pois estas nos fornecem quantidades que se conservam. Devemos mencionar também o fato de que estes postulados são os pilares nos quais a física atual se sustenta. Nos dias de hoje, o conhecimento que temos das interações fundamentais, dado pelo Modelo Padrão e pela Relatividade Geral, tem como ingrediente essencial a simetria de Lorentz. Portanto, torna-se importante sabermos até que ponto é válida a simetria de Lorentz e como esta pode vir a ser quebrada. Se caso essa simetria for de fato quebrada, é impotante sabermos também se tal fato pode ser detectado experimentalmente. Para isso devem ser feitos experimentos refinados e específicos para que se possa notar pequenas diferenças que comprovem tal quebra. A verdade é que se tal quebra de simetria ocorre, esta deve ser pequena, caso contrário já haveriam efeitos físicos perceptíveis em experimentos envolvendo, por exemplo, aspectos da Teoria da Relatividade Geral ou da Eletrodinâmica Quântica [1].

Dentre as possibilidades de quebra de simetria de Lorentz, consolidou-se na última década propostas de quebra dessa simetria por um campo de fundo. Chamamos um campo qualquer de campo de fundo quando não temos acesso as fontes desses campos. Em modelos de Teoria Quântica de Campos esses campos de fundo podem causar uma anisotropia no espaço-tempo, dificultando a possibilidade de obtermos qualquer quantidade conservada. Como exemplo, podemos citar o trabalho de B. Altschul que analisou a quebra da simetria de Lorentz em Teoria Quântica de Campos por um tensor simétrico $K^{\mu\nu}$ no setor bosônico no modelo de Yukawa, chegando a forças que não são invariantes de Lorentz [2]. Também existem exemplos de modelos com quebra da simetria de Lorentz para o campo eletromagnético envolvendo um campo de fundo tensorial, como aquele tratado na referência [3].

Teorias e modelos em $(2+1)D$ fazem parte do que chamamos de Física planar. A Teoria de Chern-Simons se encaixa na Física planar e é ultilizada para descrever fenômenos da matéria condensada. Essa teoria é contém um termo de massa topológico que viola as simetrias de reversão temporal e de paridade. Uma maneira de dar dinâmica a esse termo é acoplá-lo ao setor de Maxwell. Devido ao fato de ser uma teoria embutida na Física planar, não podemos defini-la em dimensões pares. Porém, por volta de 1990, S. M. Carrol, G. B. Field e R. Jackiw conseguiram definir a Teoria de Chern-Simons em $(3+1)D$ [4], tendo para isso que violar a simetria de Lorentz através do acoplamento do setor de calibre com um vetor de fundo, o que causou uma anisotropia no espaço-tempo.

As interações da natureza estão divididas em quatro: interação da gravidade, interação fraca, interação forte e interação eletromagnética. A primeira dessas interações é descrita pela Teoria da Relatividade Geral. As três últimas são descritas pelo Modelo Padrão (MP), que descreve as partículas elementares. Uma caracteristica do MP é a chamada simetria CPT. Nesta sigla C representa a operação de conjugação de carga, isto é, transforma matéria em antimatéria e vice-versa, P representa a operação de inversão espacial e por isso representa a paridade e T representa a operação de inversão temporal. Dessa maneira um sistema é dito ter simetria CPT quando as três operações juntas não alteram a física do sistema. No sentido de verificar se é possível compatibilizar uma possível violação da simetria de Lorentz com o comportamento das partículas, e suas interações fundamentais, em um nível de energia no qual temos acesso nos dias de hoje, V. Alan Kostelecky e D. Colladay criaram o chamado Modelo Padrão Estendido (MPE) [5], que possui todas as propriedades de simetrias de calibre do MP, explica o comportamento observado das partículas fundamentais e no qual existe a possibilidade da ocorrência de violações de simetrias de Lorentz e de CPT.

Atualmente é de grande interesse acadêmico saber se a simetria de Lorentz é quebrada na escala de Planck, que é um regime de alta energia, da ordem de $10^{19} GeV$. Acredita-se que nesse regime, efeitos quânticos da interação gravitacional devem ser relevantes, dando origem ao que é conhecido hoje por Gravitação Quântica. Saber se a simetria de Lorentz é ou não quebrada nesse regime de energia poderia trazer grandes avanços nessa área de pesquisa. Dessa maneira os trabalhos de V. Alan Kostelecky, S.Samuel e R.Potting [6] no início da década de 90 que comprovam a ocorrência da quebra de simetria de Lorentz na Teoria de Cordas (altas energias), serviram para indicar uma possível violação da simetria de Lorentz na escala de Planck.

Nos últimos anos surgiu uma vertente teórica relacionando a quebra de Lorentz com teorias não comutativas [7]. Essa linha de pesquisa considera que as coordenadas do espaço-tempo não mais comutam, essa idéia se reflete na Mecânica Quântica como não sendo possível as componentes do operador de posição serem medidos simultâneamente.

A possibilidade da quebra de simetria de Lorentz não se caracteriza apenas por questionamentos teóricos. Existem evidências experimentais de sua possível existência. Como exemplo podemos citar que observações astrnômica do espectro de estrelas [8] indicam que a constante de estrutura fina $\alpha = e^2/\hbar c$ esteja lentamente variando [9]. Uma proposta com violação da simetria CPT também foi proposto para explicar alguns resultados experimentais envolvendo neutrinos [10].

Outro exemplo é dado pelo comportamento observado de Raios Cósmicos além do limite (GZK)- Greisen-Zatsepin-Kuzmin ($E_{GZK} \approx 4.10^{19} eV$) [11], colocando em questionamento as leis que regem o tempo de vida das partículas que compõem estes raios. Seria esperado que essas partículas decairiam antes de chegar na terra porém elas conseguem atingir o sistema solar. Uma possível explicação é que estes raios adquiram velocidades superiores a da luz.

Para explicarmos melhor a idéia de quebra de simetria de Lorentz é preciso compreender a diferença entre transformações de Lorentz do Observdor (TLO) e transformações de Lorentz da Partícula (TLP). Para um entendimanto mais claro, sugerimos a referencia [12]. As TLO se tratam apenas de uma mudança de referencial inercial, onde essa mudança é feita através das transformações de Lorentz conhecidas da relatividade restrita. Dessa maneira nas TLO os pontos pertencentes ao espaço-tempo permanecem inalterados. Nas TLO os campos de fundo também se transformam segundo as transformações de Lorentz da relatividade restrita. Nas TLP os pontos pertencentes ao espaço-tempo não mais permanecem inalterados, pois se trata de uma transformação onde deixamos a base de nosso sistema de referência fixa e quem se movimenta (sofre transformação) são os pontos do espaço-tempo. Nas TLP os campos de fundo não se alteram. Quando comparamos as TLO com as TLP podemos observar que quando não há a presença de campos de fundo essas duas transformações são equivalentes e a física não se altera. Quando consideramos a presença de campos de fundo essas duas transformações não seram mais equivalentes e a física se altera o que acarreta a quebra de simetria de Lorentz.

Como exemplo concreto podemos pensar em um elétron imerso em um capacitor de placas paralelas com campo de fundo sendo o campo elétrico uniforme E gerado pelas placas do capacitor e perpendicular as placas. Para o caso de uma TLO do tipo *boost*, podemos considerar dois referenciais inerciais S e S' imersos no capacitor de modo que S se encontra em repouso em relação as placas do capacitor e S' se move paralelamente em relação ao capacitor com uma velocidade $\mathbf{v}$. Aplicando as transformações de Lorentz vemos que o campo visto por um observador em S' se altera. Para o caso de uma TLP é o elétron que se move, as placas do capacitor ficam paradas, logo o campo elétrico não se altera. Dessa maneira vemos que houve a quebra da simetria de Lorentz pois a física que se observa na TLO é diferente da observada na TLP.

No capítulo (II) desta dissertação fazemos um estudo do campo escalar real com massa em $d+1$ dimensões em um modelo onde houve quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial. Para essa teoria obtemos contribuições para a energia de vácuo do campo que dão origem às interações entre fontes externas. Consideramos apenas os casos onde as fontes externas são estáticas. Por meio dessas contribuições à energia de vácuo estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou dipolos para o campo escalar no modelo com quebra da simetria de Lorentz com um parâmetro tensorial de *rank 2*, $Q^{\mu\nu}$, considerado pequeno, e tomado como um campo tensorial de fundo. Como usual na literatura, nos restringimos à situação onde $Q^{\mu\nu}$ é constante e uniforme. Cabe mencionar que o modelo em questão exibe uma possível anisotropia espaço-temporal. Utilizamos nos cálculos o procedimento proposto na referência [13].

No capítulo (III) desta dissertação consideramos o campo eletomagnético sem massa em $D+d+1$ dimensões em um modelo com quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial de *rank 4*, tomado como um campo tensorial de fundo. Para essa teoria obtemos as contribuições para a energia de vácuo do campo na presença de fontes externas. Novamente nos restringimos ao caso onde o tensor de fundo é constante e uniforme. Estudamos também somente o caso de fontes estacionárias. Os resultados foram obtidos com teoria de pertubação até primeira ordem nos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz. Por meio da energia de vácuo do campo estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou dipolos para o campo eletromagnético no modelo em questão. Consideramos as situações onde as correntes se concentram ao longo de branas paralelas D dimensionais e estáticas.

O último capítulo desta dissertação é dedicado a conclusões e observações finais.

Capítulo II

O Campo Escalar

Nesse capítulo fazemos um estudo do campo escalar real com massa em $d+1$ dimensões em um modelo onde há quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial. Para essa teoria obtemos as contribuições para a energia de vácuo do campo que dão origem às interações entre fontes externas. Por meio dessas contribuições à energia de vácuo estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou multipolos para o campo escalar no modelo com quebra da simetria de Lorentz em questão.

A densidade de Lagrangeana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi)(\partial_{\mu}\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(\partial_{\nu}\phi)(\partial_{\mu}\phi) + J\phi \ , \tag{II.1}$$

onde ϕ é o campo escalar real, J uma fonte externa e $Q^{\mu\nu}$ um parâmetro tensorial que quebra a simetria de Lorentz simétrico em seus índices.

O parâmetro $Q^{\mu\nu}$ deve ser entendido como um *tensor de fundo*, indicando existir uma anisotropia espaço-temporal exibida pelo modelo. Uma vez que os dados experimentais que temos até o momento confirmam a simetria de Lorentz, o tensor $Q^{\mu\nu}$ deve ser pequeno no sentido que os módulos de todos os seus elementos devem ser muito menores do que a unidade.

A lagrangeana (II.1) pode ser pensada como uma versão simplificada de um modelo que exibe quebra explícita da simetria de Lorentz para o campo eletromagnétio [3] com um termo tipo tensorial. Esse modelo será considerado nessa dissertação no capítulo (III) usando-se teoria de perturbação.

II.1 O Propagador

Para o modelo descrito pela lagrangiana (II.1) não é necessário o uso da teoria de pertubação, uma vez que podemos obter o propagador de maneira exata. O gerador funcional para o campo escalar nesse caso é dado pela integral funcional

$$Z\left[J\right] = N \int D\phi \exp\left[i \int d^{d+1}x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{QL} + J\phi\right)\right] \ . \tag{II.2}$$

Na (II.2) $\mathcal{L}_0$ representa a densidade de Lagrangeana livre para o campo escalar (Lagrangeana de Klein-Gordon) e $\mathcal{L}_{QL}$ o termo que quebra a simetria de Lorentz. Substituindo (II.1) em (II.2) obtemos que

$$Z\left[J\right] = N \int D\phi \exp\left[i \int d^{d+1}x \left(\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(\partial_\nu \phi)(\partial_\mu \phi) + J\phi\right)\right] \ . \tag{II.3}$$

Com uma integração por partes e ultilizando o fato de que no infinito os campos se anulam, reescrevemos o funcional (II.3) da seguinte maneira

$$Z\left[J\right] \ = \ N \int D\phi \exp\left[i \int d^{d+1}x \left(-\frac{1}{2}\phi\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 + Q^{\mu\nu}\partial_\nu \partial_\mu\right)\phi + J\phi\right)\right] \ . \tag{II.4}$$

Por definição escrevemos

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 + Q^{\mu\nu}\partial_\nu \partial_\mu\right) G\left(x,y\right) = -\delta^{d+1}\left(x-y\right) \ , \tag{II.5}$$

onde $G\left(x,y\right)$ na (II.5) representa a função de Green da teoria descrita pela (II.1). Para obter $G\left(x,y\right)$ escrevemos as representações de Fourier

$$\begin{aligned} G\left(x,y\right) \ &= \ \int \frac{d^{d+1}p}{\left(2\pi\right)^{d+1}} \ \widetilde{G}\left(p\right) \ \exp\left[ip\left(x-y\right)\right] \\ \delta^{d+1}\left(x-y\right) \ &= \ \int \frac{d^{d+1}p}{\left(2\pi\right)^{d+1}} \exp\left[ip\left(x-y\right)\right] \ , \end{aligned} \tag{II.6}$$

onde $\widetilde{G}\left(p\right)$ é uma função a ser determinada.

Substituindo (II.6) em (II.5) temos que

$$\begin{aligned} \left(-p^\mu p_\mu - Q^{\mu\nu}p_\nu p_\mu + m^2\right) \widetilde{G}\left(p\right) \ &= \ -1 \\ \Rightarrow \ \widetilde{G}\left(p\right) = \frac{1}{p^\mu p_\mu + Q^{\mu\nu}p_\nu p_\mu - m^2} \ . \end{aligned} \tag{II.7}$$

Finalmente, sbstituindo (II.7) em (II.6) obtemos a forma explícita do propagador

$$G\left(x,y\right) = \int \frac{d^{d+1}p}{\left(2\pi\right)^{d+1}} \frac{\exp\left[ip\left(x-y\right)\right]}{\left(p^\mu p_\mu + Q^{\mu\nu}p_\nu p_\mu - m^2\right)} \ . \tag{II.8}$$

É importante observar que, para garantir a convergência do funcional gerador (II.3), é necessário a introdução de um fator $-i\epsilon\phi^2$ no integrando, procedimento leva ao denominador do propagador (II.8) um fator $-i\epsilon$. Ao final dos cálculos deve-se sempre tomar o limite $\epsilon \to 0$. Deste ponto em diante, no presente capítulo, deixaremos sempre implícito este procedimento de regularização, que será omitido.

Com uma translação no campo ϕ o gerador funcional pode ser escrito em termos da função de Green $G(x, y)$. A translação a ser feita tem a forma

$$\phi \to \widetilde{\phi}(x) = \phi(x) + \int d^{d+1}y \; G(x, y) \, J(y) \quad . \tag{II.9}$$

Com isso o gerador funcional (II.4) da teoria pode ser escrito como

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \; J(x) \, G(x, y) \, J(y)\right) \quad . \tag{II.10}$$

II.2 Energia de Vácuo e Interações entre Cargas

Essa seção se destina ao estudo das interações entre fontes externas estáticas para o campo escalar no modelo com quebra da simetria de Lorentz descrito por (II.1). Consideremos a teoria descrita pela lagrangeana (II.1), porém agora com uma fonte externa J para o campo escalar dada por N funções delta de dimensão d e concentradas em diferentes regiões do espaço. A densidade de Lagrangeana se escreve, então,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi)(\partial_\mu\phi) + \left(\sum_{l=1}^{N}\sigma_l\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{a}_l)\right)\phi \; , \tag{II.11}$$

onde σ_l são parâmetros constantes (no referencial onde estamos procedendo os cálculos) com $l = 1, ..., N$ e $\mathbf{a}_l$ representam N vetores espacias fixos de dimensão d e paralelos entre si. A corrente externa $J_1(x)$ é dada por

$$J_1(x) = \sum_{l=1}^{N}\sigma_l\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{a}_l) \quad . \tag{II.12}$$

O gerador funcional da teoria já foi calculado em (II.10). Para a corrente (II.12) temos

$$Z_1[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\int\int d^{d+1}x d^{d+1}y J_1(x) \, G(x, y) \, J_1(y)\right) \quad . \tag{II.13}$$

O funcional gerador de um sistema quântico com fontes externas estáticas pode ser escrito da seguinte forma [13]

$$Z[J] = \exp(-iET) \quad , \tag{II.14}$$

onde E é a energia do vácuo e está implícito o limite $T \to \infty$ para a variável temporal T.

Comparando (II.13) com (II.14) pode ser obtido que

$$E_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y J_1(x) G(x,y) J_1(y) \ . \tag{II.15}$$

Substituindo (II.12) em (II.15) encontramos

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2T} \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \sum_{l=1}^{N} \sigma_l \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l) G(x,y) \sum_{n=1}^{N} \sigma_n \delta^d(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n) \\ E_1 &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_l\sigma_n \frac{1}{2T} \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l) G(x,y) \delta^d(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n) \\ E_1 &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_l\sigma_n \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{l,n} \ , \end{aligned} \tag{II.16}$$

onde definimos

$$\mathcal{I}_{l,n} = \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l) G(x,y) \delta^d(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n) \ . \tag{II.17}$$

Na expressão (II.16) encontramos termos para os quais $l = n$. Esses termos trazem contribuições para a energia associados à interação de cada delta com sigo mesma. De fato, tais termos são contribuições para a energia do sistema oriunda das auto-energias das fontes e, sendo assim, serão descartados, uma vez que não contribuem para a força entre as fontes. Levando-se isto em conta, podemos escrever

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_l\sigma_n \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{l,n} - \sum_{l=1}^{N} \sigma_l\sigma_l \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{l,l} \\ E_1 &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_l\sigma_n (1-\delta_{ln}) \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{l,n} \ , \end{aligned} \tag{II.18}$$

onde δ_{ln} representa a delta de Kronecker. Substituindo (II.8) em (II.17) obtemos

$$\mathcal{I}_{l,n} = \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l) \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\exp[ip(x-y)]}{(p^\mu p_\mu + Q^{\mu\nu} p_\nu p_\mu - m^2)} \delta^d(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n) \ , \tag{II.19}$$

Para calcular a integal em (II.19) é necessário separara-la em suas partes temporal e espacial, como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{l,n} &= \int\int d^0x d^0y \int\int d^d\mathbf{x} d^d\mathbf{y} \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l) \delta^d(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n) \int \frac{d^0p}{(2\pi)} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp\left[ip^0\left(x^0-y^0\right)\right] \\ &\times \frac{\exp[-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]}{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 + Q^{00}p_0p_0 + Q^{0q}p_0p_q + Q^{j0}p_jp_0 + Q^{qj}p_qp_j - m^2} \ . \end{aligned} \tag{II.20}$$

Integrando (II.19) em $d^d\mathbf{x}$ e $d^d\mathbf{y}$ obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l,n} &= \int\int d^0x d^0y \int \frac{d^0p}{(2\pi)} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp\left(ip^0x^0\right) \exp\left(-ip^0y^0\right) \\ &\times \frac{\exp\left[-i\mathbf{p}\left(\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_n\right)\right]}{\left(p^0\right)^2 - \mathbf{p}^2 + Q^{00}p_0p_0 + Q^{0q}p_0p_q + Q^{j0}p_jp_0 + Q^{qj}p_qp_j - m^2} \ . \end{aligned} \tag{II.21}$$

Utilizando o fato de que

$$\delta\left(p^o\right) = \int \frac{d^0x}{(2\pi)} \exp\left(ip^0x^0\right) \ ,$$

reescrevemos a Eq. (II.21) na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l,n} &= \int d^0y \int \frac{d^0p}{(2\pi)} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} (2\pi)\, \delta\left(p^o\right) \exp\left(-ip^0y^0\right) \\ &\times \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}\mathbf{a}_{ln}\right)}{\left(p^0\right)^2 - \mathbf{p}^2 + Q^{00}p_0p_0 + Q^{0q}p_0p_q + Q^{j0}p_jp_0 + Q^{qj}p_qp_j - m^2} \ , \end{aligned} \tag{II.22}$$

Onde definimos $\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{ln}$.

Agora, integrando a Eq. (II.22) em d^0p encontramos

$$\mathcal{I}_{l,n} = \int d^0y \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}\mathbf{a}_{ln}\right)}{\left(-\mathbf{p}^2 + Q^{qj}p_qp_j - m^2\right)} \ . \tag{II.23}$$

Com a identificação

$$T = \int d^0y \ ,$$

a (II.23) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l,n} &= -T \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}\mathbf{a}_{ln}\right)}{\left(p_qp_q - Q_{qj}p_qp_j + m^2\right)} \\ \mathcal{I}_{l,n} &= -T \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}\mathbf{a}_{ln}\right)}{\left[p_q\left(\delta_{qj} - Q_{qj}\right)p_j + m^2\right]} \ , \end{aligned} \tag{II.24}$$

onde q e j representam índices espaciais nos quais $q, j = 1, ..., d$ e, no denominador de (II.24), continua válida a soma nos índices q e j pois, foi feito apenas um abaixamento destes índices no tensor de fundo para se chegar no formato de (II.24). Uma vez que todas as coordenadas envolvidas são de natureza espacial, usamos apenas sub-índices.

Definindo a matriz simétrica S, como segue,

$$S_{qj} = \delta_{qj} - Q_{qj} \tag{II.25}$$

reescrevemos (II.24) na forma

$$\mathcal{I}_{l,n} = -T \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}\mathbf{a}_{ln}\right)}{(p_q S_{qj} p_j + m^2)} \ . \tag{II.26}$$

Presumindo que $|Q_{qj}| << 1$, podemos fazer uma rotação ortogonal de coordenadas de modo que, nessas novas coordenadas, S_{qj} torne-se uma matriz diagonal. Denotando por R a matriz de rotação que diagonaliza S, temos que nas cooredenadas rodadas o momento $\mathbf{p}'$ se escreve

$$p_q \to p'_q = R_{qm}\ p_m \ \Rightarrow\ p_q = R^{-1}_{qm}\ p'_m\ ,\ R^{-1} = R^t\ .$$

Nas novas coordenadas

$$p_q S_{qj} p_j = R^{-1}_{q\ell}\ p'_\ell\ S_{qj}\ R^{-1}_{jn}\ p'_n = p'_\ell \Big(R_{\ell q}\ S_{qj}\ R^{-1}_{jn}\Big) p'_n = p'_\ell\ S'_{\ell n}\ p'_n, \tag{II.27}$$

onde definimos

$$S'_{\ell n} = R_{\ell q}\ S_{qj}\ R^{-1}_{jn}\ . \tag{II.28}$$

A matriz de rotação R é escolhida de tal forma que S' seja diagonal, com isso a Eq. (II.27) toma a forma

$$p_q S_{qj} p_j = p'_1\ S'_{11}\ p'_1 + p'_2\ S'_{22}\ p'_2 + ... + p'_d\ S'_{dd}\ p'_d\ . \tag{II.29}$$

Logo (II.26) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\mathcal{I}_{l,n} = -T \int \frac{d^d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\mathbf{p}'\mathbf{a}'_{ln}\right)}{(p'_1 S'_{11} p'_1 + ... + p'_d S'_{dd} p'_d + m^2)}\ . \tag{II.30}$$

Com a mudança de variáveis em (II.26)

$$\bar{p}_q = \sqrt{S'_{qq}} p'_q \tag{II.31}$$

em (II.31) obtemos que

$$\begin{aligned} d^d p' &= \frac{d\bar{p}_1}{\sqrt{S'_{11}}} \frac{d\bar{p}_2}{\sqrt{S'_{22}}} .... \frac{d\bar{p}_d}{\sqrt{S'_{dd}}} \\ d^d p' &= \frac{d^d \bar{p}}{\sqrt{S'_{11} S'_{22} .... S'_{dd}}} \\ d^d p' &= \frac{d^d \bar{p}}{\sqrt{\det S}}\ . \end{aligned} \tag{II.32}$$

Em (II.32) foi utilizado o fato de que $\det S' = S'_{11} S'_{22} .... S'_{dd} = \det S$, uma vez que o determinante não depende da mudança de coordenadas. Da mesma maneira

$$p'_1 S'_{11} p'_1 + ... + p'_d S'_{dd} p'_d = \frac{\bar{p}_1}{\sqrt{S'_{11}}} S'_{11} \frac{\bar{p}_1}{\sqrt{S'_{11}}} + ... + \frac{\bar{p}_d}{\sqrt{S'_{dd}}} S'_{dd} \frac{\bar{p}_d}{\sqrt{S'_{dd}}}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{p}_1^2 + ... + \bar{p}_d^2 \\ &= \bar{\mathbf{p}}^2 \ . \end{aligned} \tag{II.33}$$

Para o produto interno $\mathbf{p}'.\mathbf{a}'_{ln}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{a}'_{ln} &= p'_1 \left(a'_{ln}\right)_1 + ... + p'_d \left(a'_{ln}\right)_d \\ &= \bar{p}_1 \frac{\left(a'_{ln}\right)_1}{\sqrt{S'_{11}}} + ... + \bar{p}_d \frac{\left(a'_{ln}\right)_d}{\sqrt{S'_{dd}}} \ . \end{aligned} \tag{II.34}$$

Fazendo

$$\left(\bar{a}_{ln}\right)_q = \frac{\left(a'_{ln}\right)_q}{\sqrt{S'_{qq}}} \tag{II.35}$$

pode ser escrito que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{a}'_{ln} &= \bar{p}_1 \left(\bar{a}_{ln}\right)_1 + ... + \bar{p}_d \left(\bar{a}_{ln}\right)_d \\ \mathbf{p}'.\mathbf{a}'_{ln} &= \bar{\mathbf{p}}.\bar{\mathbf{a}}_{ln} \ . \end{aligned} \tag{II.36}$$

Substituindo (II.32), (II.33), (II.36) em (II.30) será obtido que

$$\mathcal{I}_{l,n} = -T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \int \frac{d^d \bar{\mathbf{p}}}{(2\pi)^d} \frac{\exp\left(-i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{a}}_{ln}\right)}{\left(\bar{\mathbf{p}}^2 + m^2\right)} \ . \tag{II.37}$$

Definindo

$$\mathcal{I}_d = \int d^d \bar{\mathbf{p}} \frac{\exp\left(-i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{a}}_{ln}\right)}{\left(\bar{\mathbf{p}}^2 + m^2\right)} \ , \tag{II.38}$$

temos que

$$\mathcal{I}_{l,n} = -T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{I}_d \ . \tag{II.39}$$

Para resolver a integral em (II.38) será necessário utilizar o fato de que

$$\int d^d \bar{\mathbf{p}} f\left(\bar{p}\right) \exp\left(\pm i\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{a}}_{ln}\right) = (2\pi)^{d/2} \frac{1}{\left(\bar{a}_{ln}\right)^d} \int_0^\infty du u^{d/2} J_{(d/2)-1}\left(u\right) f\left(\frac{u}{\bar{a}_{ln}}\right) \ . \tag{II.40}$$

Para o presente caso temos

$$\begin{aligned} f\left(\bar{p}\right) &= \frac{1}{\bar{p}^2 + m^2} \\ f\left(\frac{u}{\bar{a}_{ln}}\right) &= \frac{\left(\bar{a}_{ln}\right)^2}{u^2 + m^2 \left(\bar{a}_{ln}\right)^2} \ . \end{aligned} \tag{II.41}$$

Dessa maneira, a Eq. (II.38) pode ser escrita da seginte forma

$$\mathcal{I}_d = (2\pi)^{d/2} \left(\bar{a}_{ln}\right)^{2-d} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u)}{u^2 + m^2 \left(\bar{a}_{ln}\right)^2} \ . \tag{II.42}$$

Ultilizando o fato de que

$$\int_0^\infty du \frac{u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u)}{u^2 + m^2 \left(\bar{a}_{ln}\right)^2} = \left(m\bar{a}_{ln}\right)^{(d/2)-1} K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ , \tag{II.43}$$

a Eq. (II.42) toma a seguinte forma

$$\mathcal{I}_d = (2\pi)^{d/2} \left(\bar{a}_{ln}\right)^{2-d} \left(m\bar{a}_{ln}\right)^{(d/2)-1} K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ , \tag{II.44}$$

onde $K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right)$ representa a função de Bessel K [14].

Substituindo (II.44) em (II.39) será encontrado que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{l,n} &= -T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \frac{1}{(2\pi)^d} (2\pi)^{d/2} \left(\bar{a}_{ln}\right)^{2-d} \left(m\bar{a}_{ln}\right)^{(d/2)-1} K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \\
\mathcal{I}_{l,n} &= -T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m^{d-2} \left(m\bar{a}_{ln}\right)^{1-(d/2)} K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \\
\mathcal{I}_{l,n} &= -T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m^{d-2} G_d\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ .
\end{aligned} \tag{II.45}$$

onde definimos

$$G_d\left(m\bar{a}_{ln}\right) = \left(m\bar{a}_{ln}\right)^{1-(d/2)} K_{(d/2)-1}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ . \tag{II.46}$$

Substituindo (II.45) em (II.18) será obtido que

$$\begin{aligned}
E_1 &= -\sum_{l=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_l \sigma_n \left(1 - \delta_{ln}\right) \frac{1}{2T} T \frac{1}{\sqrt{\det S}} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m^{d-2} G_d\left(m\bar{a}_{ln}\right) \\
E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det S}} \sum_{l=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_l \sigma_n \left(1 - \delta_{ln}\right) G_d\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ .
\end{aligned} \tag{II.47}$$

O caso em que $d = 3$ e $N = 2$ corresponde a duas cargas pontuais, e a (II.47) se torna

$$\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{m^{3-2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\det S}} \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \sigma_l \sigma_n \left(1 - \delta_{ln}\right) G_3\left(m\bar{a}_{ln}\right) \\
E_1 &= -\frac{1}{2} \frac{m}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\det S}} \left[\sigma_1 \sigma_2 G_3\left(m\bar{a}_{12}\right) + \sigma_2 \sigma_1 G_3\left(m\bar{a}_{21}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$E_1 = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\det S}}\frac{m}{(2\pi)^{3/2}}G_3(m\bar{a}) \ , \tag{II.48}$$

onde definimos $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \bar{a}$.

De (II.46) temos

$$G_3(m\bar{a}) = (m\bar{a})^{-1/2} K_{1/2}(m\bar{a}) = (m\bar{a})^{-1/2}\frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}\frac{\exp(-m\bar{a})}{(m\bar{a})^{1/2}} \ . \tag{II.49}$$

Logo a (II.48) pode ser escrita da seguinte maneira

$$E_1 = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi\sqrt{\det S}}\frac{\exp(-m\bar{a})}{\bar{a}} \ . \tag{II.50}$$

O resultado obtido em (II.47) está escrito em função de $\bar{a}_{ln}$, porém é de interesse que esse resultado seja colocado em termos das coordenadas originais a_{ln}. Já foi visto que $|Q_{qj}| << 1$, logo o $\det S$ pode ser expandido em primeira ordem em Q_{qj}. Para expandir $\det S$ é preciso ser lembrado que $\delta_{qj} - Q_{qj} = S_{qj}$. Logo a expansão para $\det S$ fica

$$\begin{aligned}
\det S &= \exp[tr(\ln S)] \\
\det S &= \exp[tr\ln(1-Q)] \\
\det S &\approx \exp[tr(-Q)] \\
\det S &\approx \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} Q_{jj}\right) \\
\det S &\approx 1 - \sum_{j=1}^{d} Q_{jj} \ .
\end{aligned} \tag{II.51}$$

Utilizando (II.51) pode ser escrito que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det S}} &\approx \left(1 - \sum_{j=1}^{d} Q_{jj}\right)^{-1/2} \\
\frac{1}{\sqrt{\det S}} &\approx 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} Q_{jj} \ .
\end{aligned} \tag{II.52}$$

Sabendo que $\bar{a}_{ln} = \sqrt{(\bar{a}_{ln})_j(\bar{a}_{ln})_j}$ e utilizando a (II.35) podemos escrever

$$\bar{a}_{ln} = \sqrt{\frac{1}{S'_{jj}}(a'_{ln})_j(a'_{ln})_j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(S'^{-1}\right)_{jj}\left(a'_{ln}\right)_j\left(a'_{ln}\right)_j} \\
&= \sqrt{\left(S'^{-1}\right)_{qj}\left(a'_{ln}\right)_q\left(a'_{ln}\right)_j}\ . \qquad \text{(II.53)}
\end{aligned}
$$

Assim como $\det S$, a quantidade em (II.53) não depende da mudança de coordenadas, logo podemos escrever que

$$
\bar{a}_{ln} = \sqrt{\left(S^{-1}\right)_{qj}\left(a_{ln}\right)_q\left(a_{ln}\right)_j}\ . \qquad \text{(II.54)}
$$

Utilizando o fato de que, em primeira ordem em Q vale a relação $\left(S^{-1}\right)_{qj} = \delta_{qj} + Q_{qj}$ e realizando uma expansão em primeira ordem em Q_{qj}, a (II.54) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{ln} &= \sqrt{\left(\delta_{qj} + Q_{qj}\right)\left(a_{ln}\right)_q\left(a_{ln}\right)_j} \\
\bar{a}_{ln} &= \sqrt{\left(a_{ln}\right)_q\left(a_{ln}\right)_q + Q_{qj}\left(a_{ln}\right)_q\left(a_{ln}\right)_j} \\
\bar{a}_{ln} &= \sqrt{\left(a_{ln}\right)^2\left[1 + \frac{Q_{qj}\left(a_{ln}\right)_q\left(a_{ln}\right)_j}{\left(a_{ln}\right)^2}\right]} \\
\bar{a}_{ln} &= a_{ln}\sqrt{1 + Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j} \\
\bar{a}_{ln} &\approx a_{ln}\left[1 + \frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j\right]\ , \qquad \text{(II.55)}
\end{aligned}
$$

onde $\hat{a}_{ln}$ representa o vetor unitário $\mathbf{a}_{ln}/a_{ln}$ na direção de $\mathbf{a}_{ln}$.

Substituindo (II.52) e (II.55) em (II.47) encontramos

$$
\begin{aligned}
E_1 &\approx -\frac{1}{2}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} Q_{jj}\right)\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\sigma_l\sigma_n\left(1 - \delta_{ln}\right) \\
&\times\ G_d\left(ma_{ln}\left(1 + \frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j\right)\right)\ . \qquad \text{(II.56)}
\end{aligned}
$$

Fazendo uma aproximação em primeira ordem de Q_{qj}, com o auxílio de (II.46), podemos escrever

$$
G_d\left(ma_{ln}\left(1 + \frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j\right)\right) \approx G_d(ma_{ln})
$$

$$-\frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j\left(ma_{ln}\right)^{2-(d/2)}K_{d/2}(ma_{ln}). \tag{II.57}$$

Substituindo (II.57) em (II.56) encontramos, em primeira ordem em Q_{qj},

$$\begin{aligned} E_1 \;\approx\; & -\frac{1}{2}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\sigma_l\sigma_n\left(1-\delta_{ln}\right)\left[\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}Q_{jj}\right)\left(ma_{ln}\right)^{1-(d/2)}K_{(d/2)-1}(ma_{ln})\right. \\ & \left.-\frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j\left(ma_{ln}\right)^{2-(d/2)}K_{d/2}(ma_{ln})\right]. \end{aligned} \tag{II.58}$$

Procedendo da mesma forma com a Eq. (II.50) chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} E_1 &\approx -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}\right)\exp\left[-ma\left(1+\frac{1}{2}Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right)\right]\left[a\left(1+\frac{1}{2}Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right)\right]^{-1} \\ E_1 &\approx -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}\right)\exp\left(-ma\right)\left(1-\frac{1}{2}maQ_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right)\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right) \\ E_1 &\approx -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\frac{\exp\left(-ma\right)}{a}\left[1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}-\frac{1}{2}\left(1+ma\right)Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right], \end{aligned} \tag{II.59}$$

que poderia ser obtido diretamente de (II.58) com $d = 3$.

Vale destacar que nos resultados (II.58) e (II.59) os termos de segunda ordem em Q_{qj} foram desprezados.

Fazendo $m = 0$ em (II.59) temos o resultado para duas cargas pontuais de massa nula em $3 + 1$ dimensões

$$E_1 \;\approx\; -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi a}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}-\frac{1}{2}Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j\right). \tag{II.60}$$

O resultado (II.60) se caracteriza por uma correção a lei de Coulomb. Uma vez que o tensor Q é pequeno, o caráter atrativo da força entre cargas de sinais iguais não é alterado[1]. O segundo termo no perêntese em (II.60) é o traço do tensor Q. Sua presença pode ser interpretada como uma correção na carga das partículas efetivamente detectada na interação e não altera o comportamento radial da força.

O terceiro termo no parêntese em (II.60) introduz uma possível anisotropia na energia de interação entre as cargas, pois sua presença faz com que a força entre as cargas não dependa apenas da distância entre as mesmas, mas também dependa da orientação no espaço do vetor **a**

[1] No caso do campo escalar, cargas de sinais iguais se atraem [13, 15]

que liga as duas cargas assim como do tensor Q. Dessa forma, a verificação do comportamento radial da lei de Coulomb é um mecanismo para a imposição de quotas superiores para o tensor de quebra da simetria de Lorentz Q.

II.3 Energia de Vácuo e Interações entre Distribuições de Dipolos

Nessa seção estudamos a interação entre distribuições de dipolos estáticos para o modelo de campo escalar com quebra da simetria de Lorentz com termo tipo tensorial. A densidade de Lagrangeana em questão é dada por

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi)(\partial_\mu\phi) + \left(\sum_{l=1}^{N} V_{\beta(l)}\partial^\beta\left[\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l\right)\right]\right)\phi\ , \tag{II.61}$$

onde $V_{\beta(l)}$ é um quadri-vetor fixo e estático no sistema de referência no qual os calculos estão sendo realizado. Repare que no modelo acima temos a fonte

$$J_2\left(x\right) = \sum_{l=1}^{N} V_{\beta(l)}\partial^\beta\left[\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l\right)\right] \tag{II.62}$$

acoplada ao campo escalar ϕ.

Como discutido nas referências [15, 16] cada termo na soma da fonte (II.62) representa um dipolo estático. O vetor $\mathbf{V}$ representa a intensidade do dipolo.

Procedemos de maneira idêntica ao que foi feito para obtermos (II.18), mas agora, estamos interessados na energia de interação entre distribuições de dipolos, E_2. Dessa forma somos levados a expressão

$$E_2 = \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\delta_{ln}\right)\frac{1}{2T}\mathcal{J}_{l,n}\ , \tag{II.63}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{l,n} &= \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y V^\beta_{(l)}\partial_{\beta(x)}\left[\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l\right)\right]G\left(x,y\right)V^\theta_{(n)}\partial_{\theta(y)}\left[\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n\right)\right]\\
\mathcal{J}_{l,n} &= \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l\right)\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n\right)V^\beta_{(l)}V^\theta_{(n)}\partial_{\beta(x)}\partial_{\theta(y)}G\left(x,y\right)\ .
\end{aligned} \tag{II.64}$$

Na segunda linha acima fizemos uma integração por partes.

Substituindo (II.8) em (II.64) podemos escrever

$$\mathcal{J}_{l,n} = \int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_l\right)\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_n\right)\left(V^\theta_{(n)}\partial_{\theta(y)}\right)\left(V^\beta_{(l)}\partial_{\beta(x)}\right)G(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{l,n} &= -\int\int d^{d+1}x d^{d+1}y \delta^{d}\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_{l}\right)\delta^{d}\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_{n}\right)\left(V_{(l)}^{\beta}\partial_{\beta(x-y)}\right) \\
&\times \left(V_{(n)}^{\theta}\partial_{\theta(x-y)}\right)\int\frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}}\frac{\exp\left[ip\left(x-y\right)\right]}{\left(p^{\mu}p_{\mu}+Q^{\mu\nu}p_{\nu}p_{\mu}-m^{2}\right)} \ . \qquad \text{(II.65)}
\end{aligned}
$$

Efetuando a integral do lado direito de (II.65) em dx^0, dy^0, dp^0, $d^d\mathbf{x}$ e $d^d\mathbf{y}$, procedendo da mesma forma como em (II.19), na secção anterior, e definindo $\mathbf{a}_{ln}=\mathbf{a}_l-\mathbf{a}_n$ encontramos

$$
\mathcal{J}_{l,n}=-\left(V_{(l)}^{q}\partial_{q(\mathbf{a}_{l}-\mathbf{a}_{n})}\right)\left(V_{(n)}^{j}\partial_{j(\mathbf{a}_{l}-\mathbf{a}_{n})}\right)T\int\frac{d^{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^{d}}\frac{\exp\left[-i\mathbf{p}\left(\mathbf{a}_{l}-\mathbf{a}_{n}\right)\right]}{\left(-\mathbf{p}^{2}+Q^{qj}p_{q}p_{j}-m^{2}\right)} \ . \qquad \text{(II.66)}
$$

Ultilizando (II.23) e o fato de que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln} &= V_{(l)}^{q}\partial_{q(\mathbf{a}_{l}-\mathbf{a}_{n})} \ , \\
\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln} &= V_{(n)}^{j}\partial_{j(\mathbf{a}_{l}-\mathbf{a}_{n})} \ , \qquad \text{(II.67)}
\end{aligned}
$$

reescevemos a Eq. (II.66) na seguinte forma

$$
\mathcal{J}_{l,n}=-\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)\mathcal{I}_{l,n} \ , \qquad \text{(II.68)}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{(l)} &= \left(V_{(l)}^{1},....,V_{(l)}^{d}\right) \ ; \\
\nabla_{ln} &= \left(\frac{\partial}{\partial a_{ln}^{1}},....,\frac{\partial}{\partial a_{ln}^{d}}\right) \ . \qquad \text{(II.69)}
\end{aligned}
$$

O resultado de $\mathcal{I}_{l,n}$ já foi obtido em (II.45), dessa maneira podemos escrever a Eq. (II.68) na forma

$$
\mathcal{J}_{l,n}=\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)T\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}G_{d}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ . \qquad \text{(II.70)}
$$

Substituindo (II.70) em (II.63) encontramos

$$
\begin{aligned}
E_{2} &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\delta_{ln}\right)\frac{1}{2T}\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)T\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}G_{d}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \\
E_{2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\delta_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)G_{d}\left(m\bar{a}_{ln}\right) \ . \qquad \text{(II.71)}
\end{aligned}
$$

De agora em diante vamos nos restringir a aproximação em primeira ordem no parâmetro de quebra da simetria de Lorentz Q. Para isso, levamos em conta a aproximação (II.57) para escrevermos (II.71) como,

$$
E_{2} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\delta_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)\Big[G_{d}(ma_{ln})
$$

$$-\frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j(ma_{ln})^{2-(d/2)}K_{d/2}(ma_{ln})\Big]. \tag{II.72}$$

Utilizando o fato de que

$$\frac{\partial G_d\left(z\right)}{\partial z} = -z^{1-(d/2)}K_{d/2}\left(z\right) \ , \tag{II.73}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)G_d\left(ma_{ln}\right) &= -m^2\left(ma_{ln}\right)^{-d/2}K_{d/2}\left(ma_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}\right) \ ; \\
\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)G_d\left(ma_{ln}\right) &= -m^2\Big[\left(ma_{ln}\right)^{-d/2}K_{d/2}\left(ma_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{V}_{(n)}\right) \\
&\quad -m^2\left(ma_{ln}\right)^{-1-(d/2)}K_{1+(d/2)}\left(ma_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}\right)\Big] \ .
\end{aligned} \tag{II.74}$$

Definindo

$$\Delta\left(a_{ln}\right) = \left(\hat{a}_{ln}\right)_q\left(\hat{a}_{ln}\right)_j(ma_{ln})^{2-(d/2)}K_{d/2}(ma_{ln}) \ , \tag{II.75}$$

escrevemos também que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)\Delta\left(a_{ln}\right) &= m^2\left(ma_{ln}\right)^{-d/2}\Big[\Big((V_{(n)})_q(a_{ln})_j + (V_{(n)})_j(a_{ln})_q\Big)K_{d/2}\left(ma_{ln}\right) \\
&\quad -m\frac{(a_{ln})_q(a_{ln})_j}{a_{ln}}\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}\right)\Big] \ ; \\
\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\nabla_{ln}\right)\left(\mathbf{V}_{(n)}\cdot\nabla_{ln}\right)\Delta\left(a_{ln}\right) &= m^2\left(ma_{ln}\right)^{-d/2}\Bigg[K_{d/2}\left(ma_{ln}\right)\Big((V_{(n)})_q(V_{(l)})_j + (V_{(n)})_j(V_{(l)})_q\Big) \\
&\quad -mK_{(d/2)+1}\left(ma_{ln}\right)\Bigg[\left(\frac{\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)\Big((V_{(n)})_q(a_{ln})_j \\
&\quad +(V_{(n)})_j(a_{ln})_q\Big) + \left(\frac{\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)\Big((V_{(l)})_q(a_{ln})_j \\
&\quad +(V_{(l)})_j(a_{ln})_q\Big) + \left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{V}_{(n)}\right)\frac{(a_{ln})_q(a_{ln})_j}{a_{ln}}\Bigg] \\
&\quad +m^2K_{(d/2)+2}\left(ma_{ln}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)
\end{aligned}$$

$$\times \quad \left(\frac{\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)(a_{ln})_q(a_{ln})_j\Bigg] \, . \tag{II.76}$$

Substituindo (II.52), (II.74) e (II.76) em (II.72) e utilizando o fato de que Q_{qj} é simétrico nos índices q e j temos a energia de interação entre distribuições estáticas de dipolos,

$$\begin{aligned}
E_2 \;\approx\; & \frac{1}{2}\frac{m^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}(1-\delta_{ln})\frac{1}{(a_{ln})^{d/2}}\Bigg\{K_{d/2}(ma_{ln})\Big[-\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{V}_{(n)}\right)\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}Q_{jj}\Big)\\
& -Q_{qj}(V_{(n)})_q(V_{(l)})_j\Big]+mK_{(d/2)+1}(ma_{ln})\Bigg[a_{ln}\left(\frac{\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}Q_{jj}\Big)\\
& +\frac{1}{2}Q_{qj}\Big[2\left(\frac{\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)(V_{(n)})_q(a_{ln})_j+2\left(\frac{\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)(V_{(l)})_q(a_{ln})_j\\
& +\left(\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{V}_{(n)}\right)\frac{(a_{ln})_q(a_{ln})_j}{a_{ln}}\Big]\Bigg]-m^2K_{(d/2)+2}(ma_{ln})\frac{1}{2}Q_{qj}(a_{ln})_q(a_{ln})_j\\
\times\; & \left(\frac{\mathbf{V}_{(l)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(n)}\cdot\mathbf{a}_{ln}}{a_{ln}}\right)\Bigg\}\, .
\end{aligned}\tag{II.77}$$

Podemos notar que os termos de segunda ordem em Q na (II.77) foram desprezados.

Colocando $d=3$ e $N=2$ na (II.77) e ultilizando o fato de que

$$\begin{aligned}
K_{3/2}(ma) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}[\exp(-ma)]\left(1+\frac{1}{ma}\right)(ma)^{-1/2}\;;\\
K_{5/2}(ma) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}[\exp(-ma)]\left(1+\frac{3}{ma}+\frac{3}{(ma)^2}\right)(ma)^{-1/2}\;;\\
K_{7/2}(ma) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}[\exp(-ma)]\left(1+\frac{6}{ma}+\frac{15}{(ma)^2}+\frac{15}{(ma)^3}\right)(ma)^{-1/2}\;;
\end{aligned}\tag{II.78}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
E_2 \;\approx\; & \frac{\exp(-ma)}{4\pi a^3}\Bigg\{(ma+1)\Big[-\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}\right)\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}\Big)-Q_{qj}(V_{(2)})_q(V_{(1)})_j\Big]\\
& +\Big[(ma)^2+3(ma+1)\Big]\Bigg[\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}\Big)\\
& +Q_{qj}\Big[\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\frac{(V_{(2)})_q a_j}{a}+\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\frac{(V_{(1)})_q a_j}{a}+\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}\right)\frac{a_q a_j}{2a^2}\Big]\Bigg]\\
& -\Big[(ma)^3+6(ma)^2+15(ma+1)\Big]Q_{qj}\frac{a_q a_j}{2a^2}\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\Bigg\}\, .
\end{aligned}\tag{II.79}$$

Podemos notar que na (II.79) fizemos $\mathbf{a}_{12}=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2=\mathbf{a}$ e $a_{12}=|\mathbf{a}_{12}|=a$.

Colocando $m = 0$ na (II.79) encontramos

$$E_2 \approx \frac{1}{4\pi a^3}\Bigg\{\left[-\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}\right)+3\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\right]\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}Q_{jj}\right)-Q_{qj}(V_{(2)})_q(V_{(1)})_j$$
$$+3\Bigg[\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)Q_{qj}\frac{(V_{(2)})_q a_j}{a}+\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)Q_{qj}\frac{(V_{(1)})_q a_j}{a}+\Big[\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}\right)$$
$$-5\left(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\right)\Big]Q_{qj}\frac{a_q a_j}{2a^2}\Bigg]\Bigg\} . \tag{II.80}$$

No resultado acima o termo entre o primeiro colchetes representa a energia de interação entre dois dipolos estáticos [15, 17, 18]. Podemos notar que nesse resultado aparece um termo $\sum_{j=1}^{3} Q_{jj}$ que representa o traço do tensor Q, cuja função é dar apenas um pequeno incremento na carga efetiva. Pode-se notar também que os demais termos de correção (proporcionais a Q_{qj}) apresentam diferentes valores para diferentes q e j. Isso introduz uma possível anisotropia na energia levando a direções previlegiadas, que é uma característica da quebra de simetria de Lorentz.

II.4 Energia de Vácuo e Interação entre Carga e Dipolo

Nesta seção estudamos a energia de interação entre uma carga pontual estática e um dipolo, também pontual e estático, para o modelo de campo escalar com quebra da simetria de Lorentz com um termo do tipo tensorial. A densidade de lagrangeana nesse caso é dada por

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi)(\partial_\mu\phi) + J_3\phi , \tag{II.81}$$

onde temos a corrente

$$J_3(x) = \sigma\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1) + V_\alpha\partial^\alpha\left[\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_2)\right] . \tag{II.82}$$

que descreve um dipolo localizado em $\mathbf{x} = \mathbf{a}_2$ e uma carga em $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1$.

Considerando (II.15) podemos escrever a energia do sistema

$$E_3 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\int d^{d+1}x d^{d+1}y J_3(x) G(x,y) J_3(y) . \tag{II.83}$$

Substituindo (II.82) em (II.83) obtemos

$$E_3 = \frac{1}{2T}\int\int d^{d+1}x d^{d+1}y\left[\sigma\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1) + V_\alpha\partial^\alpha\left[\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{a}_2)\right]\right]G(x,y)$$

$$\times \quad \left[\sigma\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_1\right)+V_\beta\partial^\beta\left[\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_2\right)\right]\right]$$

$$E_3 = \frac{1}{T}\int\int d^{d+1}xd^{d+1}y\sigma\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\right)V^\beta\partial_{\beta(y)}\left[\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_2\right)\right]G\left(x,y\right)$$

$$E_3 = -\frac{\sigma}{T}\int\int d^{d+1}xd^{d+1}y\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\right)\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_2\right)V^\beta\partial_{\beta(y)}G\left(x,y\right) \ . \tag{II.84}$$

Substituindo o propagador (II.8) em (II.84) e procedendo de maneira idêntica ao que foi feito nas seções anteriores, temos para a energia E_3

$$E_3 = \frac{\sigma}{T}\int\int d^{d+1}xd^{d+1}y\delta^d\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\right)\delta^d\left(\mathbf{y}-\mathbf{a}_2\right)V^\beta\partial_{\beta(x-y)}$$

$$\times \int\frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}}\frac{\exp\left[ip\left(x-y\right)\right]}{\left(p^\mu p_\mu+Q^{\mu\nu}p_\nu p_\mu-m^2\right)}$$

$$E_3 = \frac{\sigma}{T}\left(V^q\partial_{q(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)}\right)T\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\exp\left[-i\mathbf{p}\left(\mathbf{a_1}-\mathbf{a_2}\right)\right]}{\left(-\mathbf{p}^2+Q^{qj}p_qp_j-m^2\right)}$$

$$E_3 = \frac{\sigma}{T}\left(\mathbf{V}\cdot\nabla_{12}\right)\mathcal{I}_{1,2} \ . \tag{II.85}$$

Sendo pela (II.45)

$$\mathcal{I}_{1,2} = -T\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}G_d\left(m\bar{a}_{12}\right) \ , \tag{II.86}$$

onde identificamos

$$\nabla_{12} = \left(\frac{\partial}{\partial a^1_{12}},....,\frac{\partial}{\partial a^d_{12}}\right) \ . \tag{II.87}$$

Dessa maneira, se fizermos $\mathbf{a}_{12}=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2=\mathbf{a}$ e $a_{12}=|\mathbf{a}_{12}|=a$, a energia (II.85) se torna

$$E_3 = -\frac{\sigma}{T}\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)T\frac{1}{\sqrt{\det S}}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}G_d\left(m\bar{a}\right)$$

$$E_3 = -\frac{\sigma}{\sqrt{\det S}}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)G_d\left(m\bar{a}\right) \ . \tag{II.88}$$

Levando em conta a aproximação em (II.57) escrevemos (II.88) da seguinte maneira

$$E_3 \approx -\frac{\sigma}{\sqrt{\det S}}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\left[G_d(ma)-\frac{1}{2}Q_{qj}\left(\hat{a}\right)_q\left(\hat{a}\right)_j(ma)^{2-(d/2)}K_{d/2}(ma)\right]. \tag{II.89}$$

Substituindo (II.52) e os primeiros resultados de (II.74) e de (II.76) em (II.89), e utilizando o fato de que Q_{qj} é simétrico nos índices q e j escrevemos

$$E_3 \approx \frac{\sigma m^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}a^{d/2}}\left[\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}\right)\left[K_{d/2}\left(ma\right)\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}Q_{jj}\right)-mK_{(d/2)+1}\left(ma\right)Q_{qj}\frac{a_qa_j}{2a}\right]\right.$$

$$+K_{d/2}\,(ma)\,Q_{qj}V_q a_j \Bigg] \ . \tag{II.90}$$

Podemos notar que na (II.90) foram desprezados os termos de segunda ordem em Q.

O caso de maior interesse ocorre para $d = 3$, no qual a energia (II.90) se torna

$$\begin{aligned} E_3 &\approx \frac{\sigma \exp(-ma)}{4\pi a^3}\Bigg\{(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a})\left[(ma+1)\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} Q_{jj}\Big) - \Big[(ma)^2 + 3(ma+1)\Big]Q_{qj}\frac{a_q a_j}{2a^2}\right] \\ &\quad +(ma+1)Q_{qj}V_q a_j\Bigg\} \ . \end{aligned} \tag{II.91}$$

Colocando $m = 0$ na (II.91) encontramos

$$E_3 \approx \frac{\sigma}{4\pi a^3}\left[(\mathbf{V}\cdot\mathbf{a})\left[1+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{3} Q_{jj} - 3Q_{qj}\frac{a_q a_j}{a^2}\Big)\right] + Q_{qj}V_q a_j\right] \ . \tag{II.92}$$

Vemos que no resultado acima aparece um termo $\sum_{j=1}^{3} Q_{jj}$ que representa o traço do tensor Q, cuja função é dar apenas um pequeno incremento na carga efetiva. Vemos também que os demais termos de correção (proporcionais a Q_{qj}) apresentam diferentes valores para diferentes q e j, o que introduz uma possível anisotropia na energia levando a direções previlegiadas.

II.5 Torque em um Dipolo Devido à Quebra da Simetria de Lorentz

Nessa seção usamos os resultados obtidos anteriormente para estudar o torque sofrido por um dipolo escalar devido ao termo de quebra da simetria de Lorentz em (II.1). Vamos nos restringir aqui ao caso onde temos $3+1$ dimensões e o campo tem massa nula, mas o resultado pode ser facilmente extendido para qualquer dimensão espacial.

Pensando em um dipolo típico composto por duas cargas de sinais opostos, de mesma intensidade e separadas por uma distância pequena e fixa, consideramos duas cargas localizadas nas posições $\mathbf{a}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{A}/2$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{R} - \mathbf{A}/2$, onde tomamos a distância $\mathbf{A}$ como fixa. Sem a presença do termo que quebra a simetria Lorentz a força entre essas duas cargas é dada somente pela lei de Coulomb. Sendo esfericamente simétrica, não temos torque algum sobre o sistema.

Quando admitimos o termo que quebra da simetria de Lorentz em (II.1), a situação se torna bem diferente.

Se observarmos a energia entre as duas cargas dada pela (II.60), notamos que a presença do termo de quebra de Lorentz que utilizamos ao longo deste capítulo traz duas contribuições distintas para essa energia; a primeira sendo proporcional a $\sum_{j=1}^{3} Q_{jj}$ e a segunda, proporcional a $Q_{qj}\hat{A}_q\hat{A}_j$, onde usamos o fato de que $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{A}$ e $|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = A$. Podemos notar que a primeira contribuição representa o traço da matriz Q_{qj} e sua função é apenas alterar a carga efetiva do sistema, corrigindo a lei de Coulomb por um fator que não altera o comportamento da força com a distância entre as cargas. O segundo termo é mais interessante pois ele pode gerar torque no sistema de duas cargas (dipolo). Para evidenciar este fato, vamos primeiro considerar um sistema simples tomando como exemplo a matriz Q_{qj} dada por

$$Q_{qj} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{II.93}$$

onde Q é um escalar considerado pequeno e $\sum_{j=1}^{3} Q_{jj} = Q$. Logo encontramos

$$Q_{qj}\hat{A}_q\hat{A}_j = \frac{Q}{A^2} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = Q\frac{A_3 A_3}{A^2} . \tag{II.94}$$

Escrevendo o resultado (II.94) em coordenadas esféricas obtemos

$$Q_{qj}\hat{A}_q\hat{A}_j = Q\frac{A_3 A_3}{A^2} = Q\frac{(\mathbf{A}\cdot\hat{z})^2}{A^2} = Q\cos^2\theta , \tag{II.95}$$

onde θ é o ângulo formado entre o eixo z e o vetor $\mathbf{A}$.

Substituindo (II.95) em (II.60) encontramos a energia para o sistema de duas cargas de mesma intensidade e de sinais opostos

$$E_1 \approx \frac{\sigma^2}{4\pi A}\left(1 + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q\cos^2\theta\right) , \tag{II.96}$$

sendo σ o módulo das intensidades das cargas.

A (II.96) nos dá a energia do sistema em termos do ângulo polar θ, o que indica claramente a existência de um torque sobre o sistema

$$\tau = -\frac{\partial E}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &\approx -\frac{\sigma^2}{4\pi A} Q \sin\theta\cos\theta \\ &\approx -\frac{\sigma^2}{2^3\pi A} Q \sin(2\theta)\end{aligned} \tag{II.97}$$

Como um segundo exemplo, vamos agora considerar a matriz Q_{qj} dada por

$$Q_{qj} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;, \tag{II.98}$$

onde $\sum_{j=1}^{3} Q_{jj} = 0$. Para esse caso temos

$$Q_{qj}\hat{A}_q\hat{A}_j = 2Q\frac{A_1 A_3}{A^2} \;, \tag{II.99}$$

que coordenadas em esféricas pode ser escrita da seguinte maneira

$$Q_{qj}\hat{A}_q\hat{A}_j = 2Q\sin\theta\cos\theta\cos\phi \;. \tag{II.100}$$

Para obtermos a energia entre duas cargas de sinais contrários e mesma intensidade σ, separadas pela distância A, basta substituirmos (II.100) em (II.60), ou seja,

$$E_1 \approx \frac{\sigma^2}{4\pi A}\left(1 - Q\sin\theta\cos\theta\cos\phi\right) \;. \tag{II.101}$$

Analisando a (II.101) podemos notar que vamos ter um torque devido ao ângulo θ e outro devido ao ângulo ϕ. Dessa maneira podemos escrever que

$$\begin{aligned}\tau_{1(\theta)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial\theta} \approx \frac{\sigma^2}{4\pi A} Q\cos\phi\left(1 - 2\sin^2\theta\right) \;; \\ \tau_{1(\phi)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial\phi} \approx -\frac{\sigma^2}{4\pi A} Q\sin\theta\cos\theta\sin\phi \;.\end{aligned} \tag{II.102}$$

Dessa maneira, através de dois formatos diferentes para a matriz Q_{qj} mostrados na (II.93) e (II.98) conseguimos demonstrar que a presença do termo que quebra a simetria de Lorentz faz com que apareça torque sobre um dipolo, coisa que não se observa sem a presença do termo de quebra de Lorentz.

Acreditamos que a constatação experimental da não existência desse torque possa ser usada para impor quotas superiores para o tensor Q.

Capítulo III

O Campo Eletromagnético

Nesse capítulo fazemos um estudo do campo eletromagnético sem massa em $D + d + 1$ dimensões em um modelo onde há quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial. Para essa teoria obtemos as contribuições para a energia de vácuo do campo na presença de fontes externas, utilizamos para isso teoria de perturbação até primeira ordem nos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz. Por meio da energia de vácuo do campo estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou multipolos para o campo eletromagnético no modelo com quebra da simetria de Lorentz em questão. Consideramos as situações onde as correntes se concentram ao longo de branas paralelas D dimensionais.

Ao longo deste capítulo representamos o quadrivetor posição como

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, ..., x^d, x^{d+1}, ..., x^{d+D}\right) \ , \tag{III.1}$$

e utilizamos a notação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp &= (x^1, ..., x^d) \\ \mathbf{x}_\parallel &= (x^{d+1}, ..., x^{d+D}) \ . \end{aligned} \tag{III.2}$$

Vamos também utilizar notação similar para os momenta p.

III.1 O modelo

O modelo que vamos estudar é descrito pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{8}F^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + J^\mu A_\mu \ , \tag{III.3}$$

onde α é um parâmetro de calibre [19] e $Q_{\alpha\beta\sigma\tau}$ representa um parâmetro tensorial que quebra a simetria de Lorentz e que exibe as simetrias

$$Q_{\alpha\beta\sigma\tau} = -Q_{\beta\alpha\sigma\tau} = -Q_{\alpha\beta\tau\sigma} = Q_{\sigma\beta\alpha\tau} = Q_{\alpha\tau\sigma\beta} \ . \tag{III.4}$$

Neste texto estaremos sempre supondo estar trabalhando em um referencial no qual $Q_{\alpha\beta\sigma\tau}$ é um tensor constante e uniforme;

Uma vez que, com uma integração por partes, podemos escrever $\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 \to -A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu$, e ainda

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \\
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\eta^{\mu\nu}\left(\partial^\alpha A_\nu\right) - 2\left(\partial^\mu A_\nu\right)\left(\partial^\nu A_\mu\right) \\
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &\to -2A_\mu\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu \ ,
\end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}
F^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta\sigma\tau}F^{\sigma\tau} &= \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)Q_{\alpha\beta\sigma\tau}\left(\partial^\sigma A^\tau - \partial^\tau A^\sigma\right) \\
F^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta\sigma\tau}F^{\sigma\tau} &\to -A^\mu Q_{\alpha\mu\beta\nu}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu - A^\mu Q_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu + A^\mu Q_{\mu\alpha\beta\nu}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu \\
&\quad + A^\mu Q_{\alpha\mu\nu\beta}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu \\
F^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta\sigma\tau}F^{\sigma\tau} &\to -4A^\mu Q_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu \ ,
\end{aligned} \tag{III.6}$$

reescrevemos a lagrangeana (III.3) na forma

$$\mathcal{L} \to \frac{1}{2}A_\mu\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_\nu + \frac{1}{2}A^\mu Q_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha\partial^\beta A^\nu + J^\mu A_\mu \ . \tag{III.7}$$

III.2 Energia de Vácuo de Interações entre Correntes

O gerador funcional da teoria descrita por (III.3) é dado pela integral de Feynman

$$Z[J] = N \int DA \exp\left[i \int d^{d+D+1}x \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{QD} + J^\mu A_\mu\right)\right] \ , \tag{III.8}$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a densidade de Lagrangeana livre (Lagrangeana de Maxwell) em (III.8) e $\mathcal{L}_{QD}$, o termo que quebra a simetria de Lorentz. Substituindo (III.7) em (III.8) encontramos

$$Z[J] = N \int DA \exp\left(\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x A^\mu Q_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha \partial^\beta A^\nu\right) \exp\left[i \int d^{d+D+1}x \left(\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu\right)\right] \tag{III.9}$$

Uma vez que o termo de quebra da simetria de Lorentz deve ser pequeno, vamos tratá-lo perturbativamente, de forma usual em teoria quântica de campos, com a substituição

$$A^\mu(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \tag{III.10}$$

nos termos considerados pequenos em (III.9), o que fornece

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp\left[\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) Q_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha_{(x)} \partial^\beta_{(x)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\right] \\ &\times N \int DA \exp\left[i \int d^{d+D+1}x \left(\mathcal{L}_0 + J^\mu A_\mu\right)\right] \\ Z[J] &= \exp\left[-\frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) Q_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha_{(x)} \partial^\beta_{(x)} \left(\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\right] Z_0[J] \ , \end{aligned} \tag{III.11}$$

onde $Z_0[J]$ é o gerador funcional livre do campo eletromagnético na presença da fonte J^μ , isto é, o funcional gerador da teoria de Maxwell com fontes externas.

Em primeira ordem no parâmetro Q, a (III.11) se torna

$$Z[J] = \left[1 - \frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) Q_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha_{(x)} \partial^\beta_{(x)} \left(\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\right] Z_0[J] \ . \tag{III.12}$$

Com os rsultados (II.14) e (III.12) temos a energia de vácuo do sistema

$$\begin{aligned} E &= \frac{i}{T} \ln Z[J] \\ E &= \frac{i}{T} \ln\left[\left(1 - \frac{i}{2} \int d^{d+D+1}x \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) Q_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha_{(x)} \partial^\beta_{(x)} \left(\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\right) Z_0[J]\right] \end{aligned} \tag{III.13}$$

O funcional gerador do campo eletromagnético livre é dado por

$$Z_0[J] = Z_0[0] \exp\left[-\frac{i}{2} \int \int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^\theta(y) G_{\theta\gamma}(y,z) J^\gamma(z)\right] \ , \tag{III.14}$$

onde $G_{\theta\gamma}(y,z)$ é a função de Green do campo de Maxwell,

$$\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]G_{\nu\gamma}(y,z) = \eta^\mu_\gamma\delta(y,z)\ . \tag{III.15}$$

Ultilizando as regras de derivação funcional obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J_\nu(x)} &= \left(-i\int d^{d+D+1}y G^\nu_\theta(x,y)\, J^\theta(y)\right) Z_0[J]\ ,\\
\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}\left(\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J_\nu(x)}\right) &= \left[-i\int d^{d+D+1}y\left(\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^\nu_\theta(x,y)\right)J^\theta(y)\right]Z_0[J]\ ,
\end{aligned} \tag{III.16}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}\left(\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J_\nu(x)}\right) &= \Big[-i\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^{\mu\nu}(x,x) - \int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^\theta(y)\\
&\times \left(\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^\nu_\theta(x,y)\right)G^\mu_\gamma(z,x)\, J^\gamma(z)\Big]Z_0[J]\ .
\end{aligned} \tag{III.17}$$

Substituindo a derivada (III.17) na Eq. (III.13), e efetuando operações simples, temos que

$$\begin{aligned}
E &= \frac{i}{T}\ln Z_0[J] + \frac{i}{T}\ln\Bigg[1-\frac{i}{2}\int d^{d+D+1}xQ_{\mu\alpha\nu\beta}\Big[-i\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^{\mu\nu}(x,x)\\
&\quad -\int\int d^{d+D+1}yd^{d+D+1}zJ^\theta(y)\left(\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^\nu_\theta(x,y)\right)G^\mu_\gamma(z,x)\,J^\gamma(z)\Big]\Bigg]\\
E &= \frac{i}{T}\ln Z_0[J] - \frac{i}{2T}\int d^{d+D+1}xQ_{\mu\alpha\nu\beta}\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^{\mu\nu}(x,x) - \frac{1}{2T}\int d^{d+D+1}xQ_{\mu\alpha\nu\beta}\\
&\times \int\int d^{d+D+1}yd^{d+D+1}zJ^\theta(y)\left(\partial^\alpha_{(x)}\partial^\beta_{(x)}G^\nu_\theta(x,y)\right)G^\mu_\gamma(z,x)\,J^\gamma(z)\ ,
\end{aligned} \tag{III.18}$$

onde na terceira linha fizemos a expansão $\ln(1+x)\cong x$.

Observando a eq. (III.18) podemos perceber que o primeiro termo do lado direito representa a energia de vácuo sem o termo de quebra de simetria de Lorentz. Ele fornece a interação entre fontes externas já conhecido na literatura [15, 16, 13]. O segundo termo no lado direito representa uma energia sem contribuição das correntes externas e pode ser considerado uma contribuição para a energia do vácuo livre devido exclusivamente ao termo de quebra da simetria de Lorentz (e não das fontes externas). O terceiro termo no lado direito representa uma contribuição para a energia na qual estão presentes o termo de quebra da simetria de Lorentz e as fontes externas. Como o nosso interesse são termos em primeira ordem em Q, e que envolvem interações de correntes, vamos nos concentrar no terceiro termo de (III.18), e denotá-lo por $E^{(c)}$, como segue

$$\begin{aligned} E^{(c)} &= -\frac{1}{2T}Q_{\mu\alpha\nu\beta}\int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^{\theta}(y) J^{\gamma}(z) \\ &\times \int d^{d+D+1}x\Big(\partial^{\alpha}_{(x)}\partial^{\beta}_{(x)}G^{\nu}_{\theta}(x,y)\Big)G^{\mu}_{\gamma}(z,x) \ . \end{aligned} \tag{III.19}$$

A função de Green para o campo eletromagnético é dada por

$$G^{\nu}_{\theta}(x,y) = -\int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}}\frac{1}{p^2}\left[\eta^{\nu}_{\theta} - (1-\alpha)\frac{p^{\nu}p_{\theta}}{p^2}\right]\exp[-ip(x-y)] \ . \tag{III.20}$$

Trabalhando no calibre em que $\alpha = 1$ a eq. (III.20) pode ser escrita da seguinte maneira

$$G^{\nu}_{\theta}(x,y) = -\int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}}\frac{1}{p^2}\eta^{\nu}_{\theta}\exp[-ip(x-y)] \ . \tag{III.21}$$

Usando a eq. (III.21) encontramos

$$\begin{aligned} \int d^{d+D+1}x\Big(\partial^{\alpha}_{(x)}\partial^{\beta}_{(x)}G^{\nu}_{\theta}(x,y)\Big)G^{\mu}_{\gamma}(z,x) &= -\int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}}\int \frac{d^{d+D+1}p'}{(2\pi)^{d+D+1}}\frac{1}{p^2}\frac{1}{p'^2}p^{\alpha}p^{\beta}\eta^{\nu}_{\theta}\eta^{\mu}_{\gamma} \\ &\times \exp(ipy)\exp(-ip'z)\int d^{d+D+1}x\exp[-ix(p-p')] \\ \int d^{d+D+1}x\Big(\partial^{\alpha}_{(x)}\partial^{\beta}_{(x)}G^{\nu}_{\theta}(x,y)\Big)G^{\mu}_{\gamma}(z,x) &= -\int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}}\frac{1}{p^4}p^{\alpha}p^{\beta}\eta^{\nu}_{\theta}\eta^{\mu}_{\gamma}\exp[-ip(z-y)] \ , \end{aligned} \tag{III.22}$$

onde usamos o fato de que

$$\int d^{d+D+1}x\exp[-ix(p-p')] = (2\pi)^{d+D+1}\delta^{d+D+1}(p-p') \tag{III.23}$$

Substituindo os resultados (III.22) na energia (III.19) podemos escrever

$$E^{(c)} = \frac{Q_{\gamma\alpha\theta\beta}}{2T}\int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^{\theta}(y) J^{\gamma}(z)\int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}}\frac{1}{p^4}p^{\alpha}p^{\beta}\exp[-ip(z-y)] \tag{III.24}$$

Logo a energia de vácuo de interações entre correntes pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} E &= E^{(l)} + E^{(c)} \\ E &= \frac{1}{2T}\int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^{\theta}(y) G_{\theta\gamma}(y,z) J^{\gamma}(z) \\ &+\frac{1}{2T}Q_{\gamma\alpha\theta\beta}\int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z J^{\theta}(y) J^{\gamma}(z) \end{aligned}$$

$$\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} \frac{1}{p^4} p^\alpha p^\beta \exp[-ip(z-y)] \ , \tag{III.25}$$

onde $E^{(l)}$ representa a energia de interação entre as fontes sem a presença do termo de quebra da simetria de Lorentz, ou seja, $E^{(l)}$ é o primeiro termo do lado direito em (III.18), já estudado nas referências [15, 16].

III.3 Energia de Vácuo e Interações entre cargas

Nesta seção consideramos uma fonte externa estática dada por N funções delta de Dirac de dimensão d e concentradas ao longo de diferentes branas paralelas D dimensionais, como segue,

$$J_1^\theta(y) = \sum_{l=1}^{N} \sigma_l W_{(l)}^\theta \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_l) \ , \tag{III.26}$$

onde σ_l são parâmetros constantes com $l = 1, ..., N$ e $\mathbf{a}_l$ representam N vetores espaciais fixos de dimensão d, isto é, $\mathbf{a}_l = (a_l^1, ..., a_l^d)$. $W_{(l)}^\theta$ são N quadri-vetores constantes e uniformes no sistema de referência no qual os cálculos são efetuados, e que satisfazem a condição $\mathbf{W}_\perp = 0$ para assegurar que a quadri-divergência da corrente (III.26) seja nula e, por consequência, a invariância de calibre do acoplamento na lagrangeana (III.7) entre a corrente (III.26) e o campo vetorial.

Substituindo a corrente (III.26) na energia (III.24) obtemos

$$\begin{aligned}
E_1^{(c)} &= \frac{1}{2T} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} \sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} \left(\sigma_l W_{(l)}^\theta\right)\left(\sigma_s W_{(s)}^\gamma\right) \int\int d^{d+D+1}y\, d^{d+D+1}z\, \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_l)\, \delta^d(\mathbf{z}_\perp - \mathbf{a}_s) \\
&\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} \frac{1}{p^4} p^\alpha p^\beta \exp[-ip(z-y)] \\
E_1^{(c)} &= \frac{1}{2T} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} \sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} \left(\sigma_l W_{(l)}^\theta\right)\left(\sigma_s W_{(s)}^\gamma\right) \mathcal{I}_{l,s(EM)} \ ,
\end{aligned} \tag{III.27}$$

onde definimos a integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= \int\int d^{d+D+1}y\, d^{d+D+1}z\, \delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_l)\, \delta^d(\mathbf{z}_\perp - \mathbf{a}_s) \\
&\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} \frac{1}{p^4} p^\alpha p^\beta \exp[-ip(z-y)] \ .
\end{aligned} \tag{III.28}$$

Na expressão (III.27) encontramos termos para os quais $l = s$. Esses termos trazem contribuições para a energia associados à interação de cada delta com sigo mesma. De fato, tais termos são contribuições para a energia do sistema oriunda das auto-energias das fontes e, sendo assim, serão descartados, uma vez que não contribuem para a força entre as fontes. Levando-se isto em conta, podemos escrever

$$E_1^{(c)} = \frac{1}{2T} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} \sum_{l=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} (1-\delta_{ls}) \left(\sigma_l W^{\theta}_{(l)}\right) \left(\sigma_s W^{\gamma}_{(s)}\right) \mathcal{I}_{l,s(EM)} \ . \tag{III.29}$$

O procedimeto para calcular $\mathcal{I}_{l,s(EM)}$, definido em (III.28) é quase indêntico ao o que foi empregado para calcular a integral (II.19) no capítulo anterior. Dessa maneira, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= \int\int d^0y d^0z \int\int d^D\mathbf{y}_\parallel d^D\mathbf{z}_\parallel \int\int d^d\mathbf{y}_\perp d^d\mathbf{z}_\perp \delta^d\left(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_l\right) \delta^d\left(\mathbf{z}_\perp - \mathbf{a}_s\right) \\
&\int \frac{d^0p}{(2\pi)} \int \frac{d^D\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^D} \int \frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} p^\alpha p^\beta \exp[-ip^0(z^0-y^0)] \exp[i\mathbf{p}_\parallel \cdot (\mathbf{z}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel)] \\
&\times \frac{\exp[i\mathbf{p}_\perp \cdot (\mathbf{z}_\perp - \mathbf{y}_\perp)]}{(p^0)^4 - \mathbf{p}_\parallel^4 - \mathbf{p}_\perp^4} \\
\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= \int d^0y \int d^D\mathbf{z}_\parallel \int \frac{d^0p}{(2\pi)} \int \frac{d^D\mathbf{p}_\parallel}{(2\pi)^D} \int \frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} (2\pi)\delta(p^0) \exp(ip^0y^0)(2\pi)^D \delta^D(\mathbf{p}_\parallel) \\
&\times p^\alpha p^\beta \exp(i\mathbf{p}_\parallel \cdot \mathbf{z}_\parallel) \frac{\exp[i\mathbf{p}_\perp \cdot (\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_l)]}{(p^0)^4 - \mathbf{p}_\parallel^4 - \mathbf{p}_\perp^4} \\
\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= -\int d^0y \int d^D\mathbf{z}_\parallel \int \frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} \mathbf{p}_\perp^\alpha \mathbf{p}_\perp^\beta \frac{\exp[i\mathbf{p}_\perp \cdot (\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_l)]}{\mathbf{p}_\perp^4} \\
\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= -TL^D \int \frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d} \mathbf{p}_\perp^\alpha \mathbf{p}_\perp^\beta \frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a}_{sl})}{\mathbf{p}_\perp^4} \ ,
\end{aligned} \tag{III.30}$$

onde identificamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{sl} &= \mathbf{a}_s - \mathbf{a}_l \ , \\
T &= \int d^0y \ , \\
L^D &= \int d^D\mathbf{z}_\parallel \ .
\end{aligned} \tag{III.31}$$

A integral L^D acima pode ser interpretada como a área de cada uma das branas.

Usando o fato de que

$$\mathbf{p}_\perp^\alpha \mathbf{p}_\perp^\beta = -\nabla^\alpha_{\perp(a_{sl})} \nabla^\beta_{\perp(a_{sl})} \exp(i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a}_{sl}) \ , \tag{III.32}$$

reescrevemos a energia (III.30) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l,s(EM)} &= TL^D\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}\int\frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d}\frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{a}_{sl})}{\mathbf{p}_\perp^4}\\ \mathcal{I}_{l,s(EM)} &= TL^D\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}\mathcal{I}_{d(EM)}\ ,\end{aligned}\tag{III.33}$$

onde definimos

$$\mathcal{I}_{d(EM)} = \int\frac{d^d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^d}\frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{a}_{sl})}{\mathbf{p}_\perp^4}\ .\tag{III.34}$$

Vamos considerar a integral em (III.34) para os casos em que $d=2$ e $d\neq 2$, separadamente. Para a situação na qual $d\neq 2$, será necessário ultilizar o fato de que [15]

$$\int d^d\mathbf{p}_\perp f(p_\perp)\exp(\pm i\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{a}_{sl}) = (2\pi)^{d/2}\frac{1}{a_{sl}^d}\int_0^\infty du u^{d/2}J_{(d/2)-1}(u)f\left(\frac{u}{a_{sl}}\right)\ .\tag{III.35}$$

onde $J_d(u)$ é a função de Bessel tipo J [14].

Para o presente caso, devemos ter

$$f(p_\perp)=\frac{1}{p_\perp^4}\quad,\quad f\left(\frac{u}{a_{sl}}\right)=\frac{a_{sl}^4}{u^4}\ .\tag{III.36}$$

Dessa maneira, a eq.(III.34) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{I}_{d(EM)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}a_{sl}^{4-d}\int_0^\infty du u^{(d/2)-4}J_{(d/2)-1}(u)\ ,\tag{III.37}$$

onde $a_{sl}=|\mathbf{a}_{sl}|$.

Utilizando o fato de que [20]

$$\int_0^\infty du u^{(d/2)-4}J_{(d/2)-1}(u) = 2^{(d/2)-4}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)\ ,$$

podemos reescrever a eq.(III.37) como

$$\mathcal{I}_{d(EM)} = \frac{2^{(d/2)-4}}{(2\pi)^{d/2}}a_{sl}^{4-d}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)\ .\tag{III.38}$$

Substituindo (III.38) em (III.33) temos

$$\mathcal{I}_{l,s(EM)} = \frac{2^{(d/2)-4}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)TL^D\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}a_{sl}^{4-d}\ ,\tag{III.39}$$

e a energia (III.29) se torna

$$\begin{aligned}E_1^{(c)} &= \frac{2^{(d/2)-5}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)L^D Q_{\gamma\alpha\theta\beta}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W^{\theta}_{(l)}\right)\left(\sigma_s W^{\gamma}_{(s)}\right)\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}a_{sl}^{4-d}\\ E_1^{(c)} &= \frac{2^{(d/2)-5}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)L^D Q^{\gamma i\theta j}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right)\partial_{\perp(a_{sl})i}\partial_{\perp(a_{sl})j}a_{sl}^{4-d}\ ,\end{aligned}$$

$$ \tag{III.40} $$

onde i e j representam índices espaciais com $i,j=1,...,d$.

Usando os resultados

$$
\begin{aligned}
\partial_{\perp(a_{sl})j} a_{sl}^{4-d} &= (4-d) a_{sl}^{2-d} a_{sl}^{j} \ , \\
\partial_{\perp(a_{sl})i} \partial_{\perp(a_{sl})j} a_{sl}^{4-d} &= (4-d)(2-d) \frac{a_{sl}^{i} a_{sl}^{j}}{a_{sl}^{d}} + (4-d) a_{sl}^{2-d} \delta_{\perp}^{ij} \ .
\end{aligned} \tag{III.41}
$$

em (III.40) temos

$$
\begin{aligned}
E_1^{(c)} &= \frac{2^{(d/2)-5}}{(2\pi)^{d/2}} \Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big) L^D Q^{\gamma i \theta j} \sum_{l=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} (1-\delta_{ls}) \left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right) \left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right) \Big[(4-d)(2-d) \frac{a_{sl}^{i} a_{sl}^{j}}{a_{sl}^{d}} \\
&\quad + (4-d) a_{sl}^{2-d} \delta_{\perp}^{ij}\Big] \Rightarrow \\
\mathcal{E}_1^{(c)} &= \frac{E_1^{(c)}}{L^D} = -\frac{1}{16(\pi)^{d/2}} \sum_{l=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} (1-\delta_{ls}) \left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right) \left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right) a_{sl}^{2-d} \Big[\Gamma\Big(\frac{d}{2}-1\Big) \sum_{i=1}^{d} Q^{\gamma i \theta i} \\
&\quad - 2\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big) \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i \theta j} \frac{a_{sl}^{i} a_{sl}^{j}}{a_{sl}^{2}}\Big] \ , \ d \neq 2 \ .
\end{aligned} \tag{III.42}
$$

onde identificamos a densidade de energia por unidade de área da branas, $\mathcal{E}_1^{(c)} = E^{(c)}/L^D$.

Para o caso em que $d=2$ a situação é mais complicada devido a ocorrência de divergências infravermelhas. Para contornar esse problema inserimos um parâmetro de massa na integral definida pela (III.34), de modo a regularizá-la, e depois tomarmos o limite quando $m \to 0$. Logo a integral a ser considerada é

$$
\mathcal{I}_{d=2(EM)} = \int \frac{d^d \mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl})}{(\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2)^2} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial m} \int \frac{d^d \mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl})}{(\mathbf{p}_{\perp}^2 + m^2)} \ . \tag{III.43}
$$

Ultilizando (II.44) escrevemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{d=2(EM)} &= -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(a_{sl}\right)^{2-d} \left(m a_{sl}\right)^{(d/2)-1} K_{(d/2)-1}\left(m a_{sl}\right)\right] \\
\mathcal{I}_{d=2(EM)} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} m^{-4+d} \left(m a_{sl}\right)^{2-(d/2)} \Big[K_{d/2}\left(m a_{sl}\right) - \left(m a_{sl}\right)^{-1} (d-2) \\
&\quad \times \ K_{(d/2)-1}\left(m a_{sl}\right)\Big] \ .
\end{aligned} \tag{III.44}
$$

Pela (III.33) escrevemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{l,s(d=2)(EM)} &= T L^D \nabla_{\perp(a_{sl})}^{\alpha} \nabla_{\perp(a_{sl})}^{\beta} \mathcal{I}_{d=2(EM)} \\
\mathcal{I}_{l,s(d=2)(EM)} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} T L^D \nabla_{\perp(a_{sl})}^{\alpha} \nabla_{\perp(a_{sl})}^{\beta} m^{-4+d} \left(m a_{sl}\right)^{2-(d/2)} \Big[K_{d/2}\left(m a_{sl}\right) - \left(m a_{sl}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} & \times \quad (d-2)K_{(d/2)-1}\left(ma_{sl}\right)\Big] \\ \mathcal{I}_{l,s(d=2)(EM)} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{2}TL^{D}\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}F(m,a_{sl}) \ , \end{aligned} \tag{III.45}$$

onde definimos

$$F(m,a_{sl}) = m^{-4+d}\left(ma_{sl}\right)^{2-(d/2)}\left[K_{d/2}\left(ma_{sl}\right) - \left(ma_{sl}\right)^{-1}(d-2)K_{(d/2)-1}\left(ma_{sl}\right)\right] \ . \tag{III.46}$$

Substituindo (III.45) na (III.29) encontramos

$$\begin{aligned} E^{(c)}_{1(d=2)} &= \lim_{m\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{4}L^{D}Q^{\gamma i\theta j}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\left(1-\delta_{ls}\right)\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right) \\ & \times \quad \partial_{\perp(a_{sl})i}\partial_{\perp(a_{sl})j}F(m,a_{sl}) \ . \end{aligned} \tag{III.47}$$

Ultilizando o fato de que

$$\partial_{\perp(a_{sl})i}\partial_{\perp(a_{sl})j}F(m,a_{sl}) = \delta^{ij}\frac{1}{a_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} + \frac{a^{i}_{sl}a^{j}_{sl}}{a_{sl}}\left(\frac{1}{a_{sl}}\frac{d^2F}{d^2a_{sl}} - \frac{1}{a^2_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}}\right) \ , \tag{III.48}$$

escrevemos

$$\begin{aligned} E^{(c)}_{1(d=2)} &= \lim_{m\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{4}L^{D}Q^{\gamma i\theta j}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\left(1-\delta_{ls}\right)\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right)\Bigg[\delta^{ij}\frac{1}{a_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} \\ & + \frac{a^{i}_{sl}a^{j}_{sl}}{a_{sl}}\left(\frac{1}{a_{sl}}\frac{d^2F}{d^2a_{sl}} - \frac{1}{a^2_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}}\right)\Bigg] \ . \end{aligned} \tag{III.49}$$

Usando a definição (III.46) e atuando com as derivadas encontramos

$$\frac{1}{a_{sl}}\frac{d^2F}{d^2a_{sl}} - \frac{1}{a^2_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} = m^{d}\left(ma_{sl}\right)^{-d/2}K_{d/2}\left(ma_{sl}\right) \ , \tag{III.50}$$

agora fazemos $d=2$ na (III.50) e expandimos para $m\to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{sl}}\frac{d^2F}{d^2a_{sl}} - \frac{1}{a^2_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} &= \frac{mK_1\left(ma_{sl}\right)}{a_{sl}} \\ &= \frac{1}{a^2_{sl}} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{ma_{sl}}{2}\right) - \frac{(-2\gamma+1)}{4}\right]m^2 + O(m^4) \ , \end{aligned} \tag{III.51}$$

onde γ representa a constante de Euler.

Da mesma forma temos que

$$\frac{1}{a_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} = -m^{d-2}\left(ma_{sl}\right)^{-d/2}\left[-dK_{d/2}\left(ma_{sl}\right) + (ma_{sl})K_{(d/2)+1}\left(ma_{sl}\right)\right] \ . \tag{III.52}$$

Tomando $d = 2$ na (III.52) e expandindo para $m \to 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{sl}}\frac{dF}{da_{sl}} &= -\frac{-2K_1\left(ma_{sl}\right)+(ma_{sl})K_2\left(ma_{sl}\right)}{ma_{sl}} \\
&= -K_0\left(ma_{sl}\right) \\
&= \ln\left(\frac{ma_{sl}}{2}\right)+\gamma+\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{ma_{sl}}{2}\right)-\frac{(2-2\gamma)}{8}\right]a_{sl}^2m^2+O(m^4)\ . \qquad \text{(III.53)}
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas (III.53) e (III.51) em (III.49), e tomando o limite $m \to 0$ encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(c)}_{1(d=2)} &= \frac{1}{8\pi}Q^{\gamma i\theta j}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right)\left[\delta^{ij}\lim_{m\to 0}\left(\ln\left(\frac{ma_{sl}}{2}\right)+\gamma\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\ln(ma_0)-\ln(ma_0)\right)+\frac{a^i_{sl}a^j_{sl}}{a^3_{sl}}\right] \\
\mathcal{E}^{(c)}_{1(d=2)} &= \frac{1}{8\pi}Q^{\gamma i\theta j}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right)\left[\delta^{ij}\left(\ln\left(\frac{a_{sl}}{a_0}\right)+\gamma-\ln(2)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\lim_{m\to 0}(ma_0)\right)+\frac{a^i_{sl}a^j_{sl}}{a^3_{sl}}\right] \\
\mathcal{E}^{(c)}_{1(d=2)} &= \frac{1}{8\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W_{\theta(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\gamma(s)}\right)\left[Q^{\gamma i\theta i}\ln\left(\frac{a_{sl}}{a_0}\right)+Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^i_{sl}a^j_{sl}}{a^3_{sl}}\right]\ .
\end{aligned}$$

(III.54)

Podemos perceber que na primeira linha de $\mathcal{E}^{(c)}_{1(d=2)}$ acima, adicionamos e subtraimos a quantidade $\ln(ma_0)$, onde a_0 é uma constante arbitrária com dimensão de comprimento. Para se chegar no resultado (III.54) descartamos, na última equação em (III.54), todos os termos que não dependiam das distâncias a_{sl}, uma vez tais termos não contribuem para a força entre as distribuições de cargas e, portanto, não afetam a dinâmca das mesmas.

Vamos agora nos restringir ao caso onde temos apenas duas cargas pontuais em $3+1$ dimensões, o que corresponde a fazer $D = 0$, $d = 3$ e $N = 2$. Nessa situação apenas as componentes temporais dos quadri-vetores W^μ são não-nulas. Sem perda de generalidade, podemos fazer $W_{\theta(l)} = \eta^0_\theta$ e $W_{\gamma(s)} = \eta^0_\gamma$, e a (III.42) se torna

$$E^{(c)}_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{8\pi a}\left(-\sum_{i=1}^{3}Q^{0i0i}+\frac{1}{a^2}\sum_{i,j=1}^{3}Q^{0i0j}a^ia^j\right)\ . \qquad \text{(III.55)}$$

onde $a = a_{12} = a_{21}$.

A energia de interação entre as branas, sem o termo de quebra da simetria de Lorentz, é dada por [15]

$$\mathcal{E}_1^{(l)} = \frac{2^{(d/2)-3}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-1\Big)\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\left(\sigma_l W^{\tau}_{(l)}\right)\left(\sigma_s W_{\tau(s)}\right)a_{sl}^{2-d}\ , \tag{III.56}$$

No caso em que $D=0$, $d=3$, $N=2$ a (III.56) se reduz a lei de Coulomb

$$E_1^{(l)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi a}\ . \tag{III.57}$$

Podemos então, com o auxílio de (III.42) e (III.56), escrever a energia de interação entre as cargas em $d+1$ dimensões em primeira ordem no parâmetro de quebra da simetria de Lorentz

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_1^{(l)} + \mathcal{E}_1^{(c)} \\
\mathcal{E}_1 &= \frac{1}{8(\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\,\sigma_l\sigma_s\Big[\Gamma\Big(\frac{d}{2}-1\Big)\Big(W^{\tau}_{(l)}W_{\tau(s)}-\frac{1}{2}W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}\sum_{i=1}^{d}Q^{\gamma i\theta i}\Big)a_{sl}^{2-d} \\
&\quad +\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^i_{sl}a^j_{sl}}{a^d_{sl}}\Big]\ .
\end{aligned} \tag{III.58}$$

Para o caso em que $D=0$, $d=3$, $N=2$ a eq. (III.58) fornece a energia de interação entre duas cargas pontuais em $3+1$ dimensões,

$$E_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi a}\Big[1+\frac{1}{2}\Big(-\sum_{i=1}^{3}Q^{0i0i}+\frac{1}{a^2}\sum_{i,j=1}^{3}Q^{0i0j}a^ia^j\Big)\Big]\ . \tag{III.59}$$

O resultado (III.59) se caracteriza por uma correção a lei de Coulomb. O primeiro termo no perêntese em (III.59) é o traço do tensor Q. Sua presença pode ser interpretada como uma correção na carga das partículas efetivamente detectada na interação e não altera o comportamento radial da força.

O segundo termo no parêntese em (III.59) introduz uma possível anisotropia na energia de interação entre as cargas, pois sua presença faz com que a força entre as cargas não dependa apenas da distância entre as mesmas, mas também dependa da orientação no espaço do vetor **a** que liga as duas cargas assim como do tensor Q.

III.4 Energia de Vácuo e Interações entre Dipolos

Nessa seção estudamos a energia de interação entre distribuições estacionárias de dipolos ao longo de branas paralelas D-dimensionais no modelo (II.1). A contribuição para essa energia oriunda somente do termo de Maxwell foi estudada na referência [15]. Aqui vamos nos concentrar apenas na correção em primeira ordem no tensor $Q^{\mu\nu\alpha\beta}$ para essa energia.

Tais distribuições de dipolos podem ser descritas pela fonte externa [15]

$$J_2^{\theta}(y) = \sum_{l=1}^{N} W_{(l)}^{\theta} V_{(l)}^{\phi} \partial_{\phi} [\delta^d (\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_l)] \ , \tag{III.60}$$

onde os 4-vetores $W_{(l)}^{\theta}$ e $V_{(l)}^{\phi}$ são tomados como constantes e uniformes no referencial onde vamos efetuar os cálculos.

Para garantir a invariância de calibre do acoplamento do campo com a corrente (III.60), os 4-vetores $W_{(l)}^{\theta}$ devem satisfazer a condição $\mathbf{W}_{\perp} = 0$, o que faz com que a corrente (III.60) tenha 4-divergência nula.

Procedendo da forma totalmente similar ao que fizemos para obter o resultado (III.29) encontramos

$$E_2^{(c)} = \frac{1}{2T} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} \sum_{l=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} (1 - \delta_{ls}) W_{(l)}^{\theta} W_{(s)}^{\gamma} \mathcal{J}_{l,s(EM)} \ , \tag{III.61}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{l,s(EM)} &= \int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z V_{(l)}^{\phi} \partial_{\phi(y)} [\delta^d (\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_l)] V_{(s)}^{\tau} \partial_{\tau(z)} [\delta^d (\mathbf{z}_{\perp} - \mathbf{a}_s)] \\
&\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} p^{\alpha} p^{\beta} \frac{\exp[-ip(z-y)]}{p^4} \\
\mathcal{J}_{l,s(EM)} &= \int\int d^{d+D+1}y d^{d+D+1}z \delta^d (\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_l) \delta^d (\mathbf{z}_{\perp} - \mathbf{a}_s) V_{(l)}^{\phi} V_{(s)}^{\tau} \partial_{\phi(y)} \partial_{\tau(z)} \\
&\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} p^{\alpha} p^{\beta} \frac{\exp[-ip(z-y)]}{p^4} \ .
\end{aligned} \tag{III.62}$$

Integrando (III.62) procedendo de forma similar ao que fizemos para obter o resultado (III.30), encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{l,s(EM)} &= -TL^D \int \frac{d^d \mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d} (\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{p}_{\perp}) (\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{p}_{\perp}) \mathbf{p}_{\perp}^{\alpha} \mathbf{p}_{\perp}^{\beta} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl})}{\mathbf{p}_{\perp}^4} \\
\mathcal{J}_{l,s(EM)} &= TL^D (\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})}) (\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})}) \int \frac{d^d \mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d} \mathbf{p}_{\perp}^{\alpha} \mathbf{p}_{\perp}^{\beta} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl})}{\mathbf{p}_{\perp}^4} \ .
\end{aligned} \tag{III.63}$$

Comparando (III.63) com (III.30) podemos escrever que

$$\mathcal{J}_{l,s(EM)} = -(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})}) (\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})}) \mathcal{I}_{l,s(EM)} \ . \tag{III.64}$$

onde a integral $\mathcal{I}_{l,s(EM)}$ já foi obtido em (III.39), o que fornece

$$\mathcal{J}_{l,s(EM)} = -(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})(\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})\frac{2^{(d/2)-4}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-2\Big)TL^D\nabla^{\alpha}_{\perp(a_{sl})}\nabla^{\beta}_{\perp(a_{sl})}a_{sl}^{4-d} \ . \tag{III.65}$$

Substituindo (III.65) em (III.61) e ultilizando (III.41) escrevemos que

$$\begin{aligned} E_2^{(c)} \ &= \ -\frac{L^D}{8(\pi)^{d/2}}\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\,W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})(\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})}) \\ &\times \ \Big[-\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{d}{2}-1\Big)a_{sl}^{2-d}\sum_{i=1}^{d}Q^{\gamma i\theta i} + \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a_{sl}^i a_{sl}^j}{a_{sl}^d}\Big] \ . \end{aligned} \tag{III.66}$$

Para encontrar a energia (III.66) usamos os resultados

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})a_{sl}^{2-d} \ &= \ \frac{(2-d)}{a_{sl}^d}(\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}) \ , \\ (\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})(V_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})a_{sl}^{2-d} \ &= \ \frac{(2-d)}{a_{sl}^d}\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{V}_{(s)\perp}) \\ &\quad -d\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big] \ . \end{aligned} \tag{III.67}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})\frac{a_{sl}^i a_{sl}^j}{a_{sl}^d} \ &= \ \frac{1}{a_{sl}^d}\Big[(V_{(s)\perp}^i a_{sl}^j + V_{(s)\perp}^j a_{sl}^i) - d\frac{a_{sl}^i a_{sl}^j}{a_{sl}}\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big] \ , \\ (\mathbf{V}_{(l)\perp}) \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})(V_{(s)\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{sl})})\frac{a_{sl}^i a_{sl}^j}{a_{sl}^d} \ &= \ \frac{1}{a_{sl}^d}\Big\{(V_{(l)\perp}^i V_{(s)\perp}^j + V_{(l)\perp}^j V_{(s)\perp}^i) \\ &\quad -d\Big[\Big(\frac{a_{sl}^i V_{(s)\perp}^j + a_{sl}^j V_{(s)\perp}^i}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big) \\ &\quad +\Big(\frac{a_{sl}^i V_{(l)\perp}^j + a_{sl}^j V_{(l)\perp}^i}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big) \\ &\quad +\frac{a_{sl}^i a_{sl}^j}{a_{sl}^2}\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{V}_{(s)\perp}) - (d+2)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big) \\ &\times \ \Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp} \cdot \mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\Big]\Big\} \ , \end{aligned} \tag{III.68}$$

assim como o fato de que o tensor $Q^{\gamma i\theta j}$ é simétrico nos índices i e j, o que fornece a densidade de energia por unidade de área da brana

$$\mathcal{E}_2^{(c)} \ = \ \frac{E^{(c)_2}}{L^D} = -\frac{1}{8(\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\,W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}\frac{1}{a_{sl}^d}\Big\{\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp} \cdot \mathbf{V}_{(s)\perp})$$

$$
\begin{aligned}
&-d\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\sum_{i=1}^{d}Q^{\gamma i\theta i}+2\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}V^{i}_{(l)\perp}V^{j}_{(s)\perp}\\
&-d\Bigg[2\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}V^{j}_{(s)\perp}}{a_{sl}}+2\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}V^{j}_{(l)\perp}}{a_{sl}}\\
&+\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(s)\perp})-(d+2)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}a^{j}_{sl}}{a^{2}_{sl}}\Bigg]\Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{III.69}
$$

Para a energia de vácuo sem a presença do termo de quebra da simetria de Lorentz temos [15]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(l)}_{2} &= \frac{2^{(d/2)-2}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\,W^{\tau}_{(l)}W_{\tau(s)}\frac{1}{a^{d}_{sl}}\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(s)\perp})\\
&\quad -d\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\,.
\end{aligned}
\tag{III.70}
$$

Com os resultados (III.70) e (III.69) temos a energia de interação entre distribuições de dipolos, até primeira ordem no parâmetro $Q^{\mu\nu\alpha\beta}$, por unidade de área da brana L^{D}

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{2} &= \mathcal{E}^{(l)}_{2}+\mathcal{E}^{(c)}_{2}\\
\mathcal{E}_{2} &= \frac{1}{4(\pi)^{d/2}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}(1-\delta_{ls})\,\frac{1}{a^{d}_{sl}}\Bigg\{\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(s)\perp})-d\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\\
&\times\ \Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\Big(W^{\tau}_{(l)}W_{\tau(s)}-\frac{1}{2}W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}\sum_{i=1}^{d}Q^{\gamma i\theta i}\Big)-W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}V^{i}_{(l)\perp}V^{j}_{(s)\perp}\\
&+W_{\theta(l)}W_{\gamma(s)}d\Bigg[\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}V^{j}_{(s)\perp}}{a_{sl}}+\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}V^{j}_{(l)\perp}}{a_{sl}}\\
&+\Big[(\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(s)\perp})-(d+2)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(l)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(s)\perp}\cdot\mathbf{a}_{sl}}{a_{sl}}\Big)\Big]\sum_{i,j=1}^{d}Q^{\gamma i\theta j}\frac{a^{i}_{sl}a^{j}_{sl}}{2a^{2}_{sl}}\Bigg]\Bigg\}\,.
\end{aligned}
\tag{III.71}
$$

O caso de maior interesse ocorre quando temos duas distribuições de dipolos pontuais em $3+1$ dimensões, o que equivale a fazer $D=0$, $d=3$, $N=2$ e, sem perda de generalidade, $W_{\theta(l)}=\eta^{0}{}_{\theta}$ em (III.71),

$$
E_{2} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{a^{3}}\Bigg\{\Big[\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}-3\Big(\frac{\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{a}}{a}\Big)\Big(\frac{\mathbf{V}_{(2)}\cdot\mathbf{a}}{a}\Big)\Big]\Big(1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}Q^{0i0i}\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} V_{(1)}^{i} V_{(2)}^{j} + 3\Bigg[\Big(\frac{\mathbf{V}_{(1)} \cdot \mathbf{a}}{a}\Big) \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} \frac{a^i V_{(2)}^{j}}{a} \\
&+ \Big(\frac{\mathbf{V}_{(2)} \cdot \mathbf{a}}{a}\Big) \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} \frac{a^i V_{(1)}^{j}}{a} + \Big[\mathbf{V}_{(1)} \cdot \mathbf{V}_{(2)} - 5\Big(\frac{\mathbf{V}_{(1)} \cdot \mathbf{a}}{a}\Big) \\
\times \ & \Big(\frac{\mathbf{V}_{(2)} \cdot \mathbf{a}}{a}\Big)\Big] \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} \frac{a^i a^j}{2a^2}\Bigg]\Bigg\} . \qquad \text{(III.72)}
\end{aligned}
$$

No resultado acima o termo entre o primeiro colchetes representa a energia de interação entre dois dipolos estáticos [15]. Podemos notar que nesse resultado aparece um termo $\sum_{i=1}^{3} Q^{0i0i}$ que representa o traço do tensor Q, cuja função é dar apenas um pequeno incremento na carga efetiva. Pode-se notar também que os demais termos de correção (proporcionais a Q^{0i0j}) apresentam diferentes valores para diferentes i e j. Isso introduz uma possível anisotropia na energia levando a direções previlegiadas, que é uma característica da quebra de simetria de Lorentz.

III.5 Energia de Vácuo e Interação entre Carga e Dipolo

Para complementar os resultados obtidos nesse capítulo, obtemos nessa seção a energia de interação entre uma distribuição de cargas e uma distribuição de dipolos ao longo de branas paralelas D-dimensionais. Como discutido nas referências [15, 16], podemos simular a presença de tais distribuições por meio da fonte externa

$$
J_3^{\theta}(y) = W^{\theta} V^{\phi} \partial_{\phi}[\delta^{d}(\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_1)] + \sigma W^{\theta} \delta^{d}(\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_2) \ . \qquad \text{(III.73)}
$$

Com a substituição da corrente (III.73) na energia (III.24), e procedendo com simples manipulações, análogas as que foram empregadas nas secções anteriores, encontramos

$$
\begin{aligned}
E_3^{(c)} &= -\frac{\sigma}{T} W^{\theta} W^{\gamma} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} \int\int d^{d+D+1}y\, d^{d+D+1}z\, \delta^{d}(\mathbf{z}_{\perp} - \mathbf{a}_2)\, \delta^{d}(\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_1)\, V^{\phi} \partial_{\phi(y)} \\
&\times \int \frac{d^{d+D+1}p}{(2\pi)^{d+D+1}} p^{\alpha} p^{\beta} \frac{\exp[-ip(z-y)]}{p^4} \\
E_3^{(c)} &= -\frac{\sigma}{T} W^{\theta} W^{\gamma} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} T L^{D} \int \frac{d^{d}\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^{d}} (\mathbf{V}_{\perp} \cdot i\mathbf{p}_{\perp}) \mathbf{p}_{\perp}^{\alpha} \mathbf{p}_{\perp}^{\beta} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{21})}{\mathbf{p}_{\perp}^{4}} \\
E_3^{(c)} &= -\frac{\sigma}{T} W^{\theta} W^{\gamma} Q_{\gamma\alpha\theta\beta} T L^{D} (\mathbf{V}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp(a_{21})}) \int \frac{d^{d}\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^{d}} \mathbf{p}_{\perp}^{\alpha} \mathbf{p}_{\perp}^{\beta} \frac{\exp(i\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{21})}{\mathbf{p}_{\perp}^{4}}
\end{aligned}
$$

$$E_3^{(c)} = \frac{\sigma}{T} W^\theta W^\gamma Q_{\gamma\alpha\theta\beta} (\mathbf{V}_\perp \cdot \nabla_{\perp(a_{21})}) \mathcal{I}_{2,1(EM)} \;, \tag{III.74}$$

onde $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ e usamos a definição em (III.30).

Usando os resultados (III.39) e (III.41) em (III.74), considerando a definição $a_{21} = |\mathbf{a}_{21}|$ e os resultados (III.67) e (III.68), podemos escrever a energia por unidade de área da brana

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3^{(c)} &= \frac{\sigma}{4(\pi)^{d/2}} W_\theta W_\gamma (\mathbf{V}_\perp \cdot \nabla_{\perp(a_{21})}) \Big[-\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{d}{2} - 1\Big) a_{21}^{2-d} \sum_{i=1}^{d} Q^{\gamma i\theta i} \\
&\quad + \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big) \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i\theta j} \frac{a_{21}^i a_{21}^j}{a_{21}^d} \Big] \\
\mathcal{E}_3^{(c)} &= \frac{\sigma}{4(\pi)^{d/2}} W_\theta W_\gamma \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big) \frac{1}{a_{21}^d} \Big[(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{a}_{21}) \sum_{i=1}^{d} Q^{\gamma i\theta i} + 2 \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i\theta j} V_\perp^i a_{21}^j \\
&\quad - d(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{a}_{21}) \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i\theta j} \frac{a_{21}^i a_{21}^j}{a_{21}^2} \Big] \;.
\end{aligned} \tag{III.75}$$

A energia de interação por unidade de área da brana no caso onde não temos o termo de quebra da simetria de Lorentz pode ser obtida facilmente com o procedimento adotado na referência [16] (omitimos nessa dissertação esse cálculo),

$$\mathcal{E}_3^{(l)} = -\frac{2^{(d/2)-1}}{(2\pi)^{d/2}} \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big) a^{-d} \sigma W^\tau W_\tau (\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{a}) \;. \tag{III.76}$$

Com os resultados (III.76) e (III.75) encontramos a energia de interação em primeira ordem em $Q^{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_3^{(l)} + \mathcal{E}_3^{(c)} \\
\mathcal{E}_3 &= \frac{\sigma}{2(\pi)^{d/2} a^d} \Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big) \Bigg[(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{a}) \Big[-W^\tau W_\tau + \frac{1}{2} W_\theta W_\gamma \Big(\sum_{i=1}^{d} Q^{\gamma i\theta i} - d \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i\theta j} \frac{a^i a^j}{a^2} \Big) \Big] \\
&\quad + W_\theta W_\gamma \sum_{i,j=1}^{d} Q^{\gamma i\theta j} V_\perp^i a^j \Bigg] \;.
\end{aligned} \tag{III.77}$$

Para o caso onde temos uma carga e um dipolo, ambos pontuais em $3+1$ dimensões, a (III.77) se reduz a

$$E_3 = -\frac{\sigma}{4\pi a^3} \Bigg[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}) \Big[1 - \frac{1}{2} \Big(\sum_{i=1}^{3} Q^{0i0i} - 3 \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} \frac{a^i a^j}{a^2} \Big) \Big] - \sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} V^i a^j \Bigg] \;. \tag{III.78}$$

Da mesma maneira como já foi comentado anteriormente, o resultado (III.78) também exibe uma possível anisotropia na energia devido aos termos de correção proporcionais a Q^{0i0j}.

III.6 Torque em um Dipolo Devido à Quebra da Simetria de Lorentz

Essa seção se destina a investigar se, no modelo (III.3), se origina algum tipo de torque sobre um dipolo devido ao termo de quebra da simetria de Lorentz.

A discussão que fazemos aqui é análoga a que fizemos na última secção do capítulo anterior.

Consideremos duas cargas pontuais em 3 dimensões localizadas nas posições $\mathbf{a}_1 = \mathbf{R}+\mathbf{A}/2$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}-\mathbf{A}/2$, onde a distância entre elas é $|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = A$. Com isso devemos ter $d = 3$ e $D = 0$. Sem a presença do termo que quebra a simetria de Lorentz (Maxwell) a energia de interação entre essas duas cargas é dada somente pela lei de Coulomb, ou seja, não existe torque. Se observarmos a energia dessas duas cargas dada pela (III.59) notamos que a presença do termo que quebra a simetria de Lorentz, que utilizamos ao longo deste capítulo, traz dois termos para essa energia, o primeiro sendo $\sum_{i=1}^{3} Q^{0i0i}$ e o segundo sendo $\sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} A^i A^j$. Podemos notar que o primeiro termo representa o traço da matriz Q^{0i0j} e sua contribuição é dar apenas um pequeno incremento na carga efetiva das partículas, uma vez que Q^{0i0j} é pequeno. O segundo termo é de maior interesse, uma vez que para diferentes i e j temos diferentes valores para a energia.

Vamos mostrar que o segundo termo pode gerar torque no sistema de duas cargas do tipo dipolo. Como exemplo vamos ultilizar uma matriz Q^{0i0j} dada por

$$Q^{0i0j} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{III.79}$$

onde Q é um escalar considerado pequeno e $\sum_{i=1}^{3} Q^{0i0i} = Q$. Logo podemos escrever

$$\sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} A^i A^j = Q A^3 A^3 \ . \tag{III.80}$$

Em coordenadas esféricas temos

$$\sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} A^i A^j = Q(\mathbf{A} \cdot \hat{z})^2 = Q A^2 \cos^2\theta \ , \tag{III.81}$$

onde θ é o ângulo formado entre o eixo z e o vetor $\mathbf{A}$.

Substituindo (III.81) em (III.59) encontramos a energia de interação entre duas cargas em função do ângulo θ, ou seja,

$$E_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi A}\left(1 - \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q\cos^2\theta\right) \ . \qquad \text{(III.82)}$$

Uma vez que o torque é dado por

$$\tau_1 = -\frac{\partial E_1}{\partial \theta} \ ,$$

escrevemos

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi A} Q \sin\theta\cos\theta \ . \qquad \text{(III.83)}$$

Para duas cargas de sinais contrários e de mesmo módulo, ou seja, $\sigma_1 = \sigma$ e $\sigma_2 = -\sigma$ podemos escrever

$$\tau_1 = -\frac{\sigma^2}{4\pi A} Q \sin\theta\cos\theta \ . \qquad \text{(III.84)}$$

Em módulo o torque (III.84) tem sua máxima intensidade para $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$, sendo nulo para $\theta = 0, \pi/2, \pi$, ou seja, não existe torque quando o dipolo é orientado paralelamente ou perpendicularmente ao eixo z.

Vamos agora considerar uma matriz Q^{0i0j} dada por

$$Q^{0i0j} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \qquad \text{(III.85)}$$

Nesse caso temos que $\sum_{i=1}^{3} Q^{0i0i} = 0$ e

$$\sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} A^i A^j = 2QA^1A^3 \ . \qquad \text{(III.86)}$$

Em coordenadas esféricas escrevemos a (III.86) da seguinte forma

$$\sum_{i,j=1}^{3} Q^{0i0j} A^i A^j = 2QA^2 \sin\theta\cos\theta\cos\phi \ . \qquad \text{(III.87)}$$

Substituindo (III.87) em (III.59) encontramos a energia de interação entre duas cargas em função dos ângulos θ e ϕ, ou seja,

$$E_1 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi A}\left(1 + Q\sin\theta\cos\theta\cos\phi\right) \ . \qquad \text{(III.88)}$$

Observando a (III.88) podemos notar que teremos um torque devido ao ângulo θ e outro devido a ϕ. Logo escrevemos

$$\begin{aligned} \tau_{1(\theta)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial \theta} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi A} Q\cos\phi\left(1-2\sin^2\theta\right) \ ; \\ \tau_{1(\phi)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial \phi} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi A} Q\sin\theta\cos\theta\sin\phi \ . \end{aligned} \tag{III.89}$$

Para duas cargas de sinais contrários e de mesmo módulo podemos escrever

$$\begin{aligned} \tau_{1(\theta)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial \theta} = \frac{\sigma^2}{4\pi A} Q\cos\phi\left(1-2\sin^2\theta\right) \ ; \\ \tau_{1(\phi)} &= -\frac{\partial E_1}{\partial \phi} = -\frac{\sigma^2}{4\pi A} Q\sin\theta\cos\theta\sin\phi \ . \end{aligned} \tag{III.90}$$

Dessa maneira, através de dois exemplos diferentes para a matriz Q^{0i0j}, mostrados em (III.79) e (III.85), constatamos que a presença do termo que quebra a simetria de Lorentz faz com que surja torque em um dipolo sem a presença de campos externos, algo que não se observa na teoria de Maxwell.

III.7 Energia de vácuo e a interação entre uma linha de corrente e uma carga pontual

Nessa seção estudamos a energia de interação entre uma distribuição linear e estacionária de corrente situada ao longo de uma reta e uma carga estática, localizada fora desta reta. Vamos nos restringir ao caso onde $D = 1$ e $d = 2$, mas poderíamos, usando o mesmo procedimento aqui adotado, obter o resultado para qualquer dimensão espacial.

As fontes externa de interesse são descritas pela corrente

$$J_4^{\theta}(y) = \sigma_1\eta_3^{\theta}\delta^2\left(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_1\right) + \sigma_2\eta_0^{\theta}\delta^3\left(\mathbf{y} - \mathbf{a}_2\right) \ . \tag{III.91}$$

onde o vetor $\mathbf{a}_1$ tem apenas componentes 1 e 2.

O primeiro termo em (III.91) descreve uma linha de corrente ao longo da direção 3 e localizada em $\mathbf{a}_1$. O segundo termo é uma carga pontual localizada em $\mathbf{a}_2$.

É importante mencionar que, se substituirmos a corrente (III.91) na enregia de vácuo livre, ou seja, sem o termo de quebra de Lorentz, vamos encontrar uma contribuição nula. Sendo assim, pela teoria de Maxwell, a linha de corrente não exerce nenhuma força sobre a carga estática. Vamos verificar se o termo de quebra de Lorentz dado pela (III.24) nos forneça algum resultado não nulo para essa energia de interação.

Substituindo a fonte (III.91) em (III.24) e fazendo as devidas manipulações encontramos

$$E_4^{(c)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{T} Q_{0\alpha3\beta} \int\int d^4y d^4z \delta^2\left(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_1\right)\delta^3\left(\mathbf{z} - \mathbf{a}_2\right) \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p^\alpha p^\beta \frac{\exp[-ip(z-y)]}{(p^2+m^2)^2} \ , \tag{III.92}$$

onde introduzimos um parâmetro regularizador m de massa, procedimento usado comumente para controlar divergências em $d = 2$.

Definindo

$$\mathcal{I}_{EM(d=2)} = \int\int d^4y d^4z \delta^2\left(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_1\right)\delta^3\left(\mathbf{z} - \mathbf{a}_2\right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p^\alpha p^\beta \frac{\exp[-ip(z-y)]}{(p^2+m^2)^2} \ , \tag{III.93}$$

podemos escrever

$$E_4^{(c)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{T} Q_{0\alpha3\beta} \mathcal{I}_{EM(d=2)} \ . \tag{III.94}$$

O procedimeto para calcular $\mathcal{I}_{EM}$, definido em (III.93), é indêntico ao o que foi empregado para calcular a integral (III.30) na terceira seção deste capítulo. Dessa maneira, podemos escrever que

$$\mathcal{I}_{EM(d=2)} = -T \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} \mathbf{p}_\perp^\alpha \mathbf{p}_\perp^\beta \frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)^2} \ , \tag{III.95}$$

onde identificamos

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \ ,$$
$$T = \int d^0y \ .$$

Levando em conta a (III.32) temos que

$$\mathcal{I}_{EM(d=2)} = T \nabla_{\perp(a)}^\alpha \nabla_{\perp(a)}^\beta \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)^2} \ . \tag{III.96}$$

Definindo

$$\mathcal{I}'_{EM(d=2)} = \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{\exp(i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)^2} \ , \tag{III.97}$$

podemos escrever

$$\mathcal{I}_{EM(d=2)} = T\nabla^{\alpha}_{\perp(a)}\nabla^{\beta}_{\perp(a)}\mathcal{I}'_{EM(d=2)} \ . \tag{III.98}$$

A integral definida na (III.97) é idêntica a integral (III.43). Como (III.43) já foi calculada e o seu resultado é dado pela (III.44), obtemos que

$$\mathcal{I}_{EM(d=2)} = \frac{T}{4\pi}\nabla^{\alpha}_{\perp(a)}\nabla^{\beta}_{\perp(a)}F(m,a) \ , \tag{III.99}$$

onde $F(m,a)$ é definida pela (III.46).

Substituindo (III.99) na (III.94) e fazendo as devidas manipulações encontramos que

$$E_4^{(c)} = \lim_{m\to 0}\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}Q^{0i3j}\partial_{\perp(a)i}\partial_{\perp(a)j}F(m,a) \ . \tag{III.100}$$

Com o resultado (III.48), a eq. (III.94) se torna

$$E_4^{(c)} = \lim_{m\to 0}\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}Q^{0i3j}\left[\delta^{ij}\frac{1}{a}\frac{dF}{da} + \frac{a^i a^j}{a}\left(\frac{1}{a}\frac{d^2F}{d^2a} - \frac{1}{a^2}\frac{dF}{da}\right)\right] \ . \tag{III.101}$$

Substituindo (III.51) e (III.53) na (III.101) e fazendo as mesmas manipulações implementadas para obtermos a (III.54), na terceira seção deste capítulo, encontramos

$$E_4^{(c)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\left[Q^{0i3i}\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) + Q^{0i3j}\frac{a^i a^j}{a^3}\right] \ . \tag{III.102}$$

Vale ressaltar que a energia (III.102) é um efeito exclusivo da quebra de simetria de Lorentz.

Capítulo IV

Conclusões, Comentários Finais

No capítulo (II) desta dissertação fizemos um estudo do campo escalar real com massa em $d+1$ dimensões em um modelo com quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial. Para essa teoria foram obtidas as contribuições para a energia de vácuo do campo que dão origem às interações entre fontes externas. Por meio dessas contribuições à energia de vácuo, estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou dipolos para o campo escalar no modelo com quebra da simetria de Lorentz com o parâmetro $Q^{\mu\nu}$ considerado pequeno.

No caso de interações entre cargas, conseguimos obter a energia de interação na sua forma exata, sem a necessidade de apelar para teoria de perturbação. No entanto, os resultados obtidos dessa forma foram para um sistema de coordenadas no qual a análise dos resultados de demonstrou difícil. Sendo assim, expandimos os resultados em primeira ordem em $Q^{\mu\nu}$ de modo a obter expressões que possibilitassem a compreensão do papel do termo de quebra da simetria de Lorentz. Ao longo de toda a secção demos especial atenção para o caso onde temos apenas duas fontes pontuais em $3+1$ dimensões com o campo sem massa.

Para o caso de cargas encontramos contribuições para as energias de interação do tipo $\sum_j Q_{jj}$ e $Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j$. No primeiro tipo de contribuição temos o traço do parâmetro $\sum_j Q_{jj}$, que tem o papel de dar apenas um pequeno incremento para as cargas efetivas. O segundo termo, $Q_{qj}\hat{a}_q\hat{a}_j$, se mostrou mais interessante, pois para diferentes valores de i e j obtemos diferentes valores para a energia. Mostramos que esse segundo termo pode gerar torque sobre um dipolo mesmo na ausência de campos externos, coisa que não se observa sem a quebra de Lorentz. Para evidenciar este fato, consideramos duas cargas em $3+1$ dimensões com $m=0$ separadas por uma distância A. Tomamos dois exemplos diferentes para a matriz Q_{qj} mostradas em (II.93) e (II.98).

A presença do termo com o tensor $Q^{\mu\nu}$ induz uma anisotropia espaço-temporal para o modelo, que se reflete nas energias de interação entre as diversas fontes externas consideradas ao longo do capítulo (II). Nessa dissertação estudamos alguns indícios da anisotropia espacial do modelo.

No capítulo (III) desta dissertação fizemos estudo do campo eletromagnético sem massa em $D + d + 1$ dimensões em um modelo que exibe quebra explícita da simetria de Lorentz com um termo tipo tensorial. Para essa teoria obtemos as contribuições para a energia de vácuo do campo na presença de fontes externas, utilizamos para isso teoria de perturbação até primeira ordem nos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz, dados pelo tensor $Q_{\alpha\beta\sigma\tau}$. Por meio da energia de vácuo do campo estudamos as energias de interação entre distribuições de cargas e/ou dipolo estáticas para o campo eletromagnético no modelo em questão. Consideramos as situações onde as fontes se concentram ao longo de branas paralelas D dimensionais.

Consideramos situações de correntes externas similares aos casos estudados do campo escalar, no capítulo (II) e percebemos que, os dois modelos (para o campo escalar e para o campo eletromagnético) levam a resultados totalmente similares, até primeira ordem nos parâmetros de quebra da simetria de Lorentz. Acreditamos que esse fato deva ser válido somente para configurações de fontes externas estacionárias uma vez que, nesse caso, somente as componentes Q_{0i0j} do parâmetro de quebra da simetria de Lorentz do campo eletromagnético passam a ter relevância.

No capítulo (III) desta dissertação também fizemos um estudo da energia de vácuo de interação entre uma linha de corrente e uma carga pontual, onde conseguimos obter um efeito exclusivo da quebra de simetria de Lorentz.

Para correntes eletromagnéticas dependentes do tempo, não consideradas nesta Dissertação, devemos ter uma variedade maior de efeitos oriundos da quebra da simetria de Lorentz. Sendo assim, acreditamos que para correntes não estacionárias os modelos que estudamos devem revelar aspectos mais ricos do que aqueles constatados nesta Dissertação. Esse é um assunto que requer mais investigação e para tratá-lo será necessário o uso de procedimentos diferentes daqueles adotados nessa Dissertação.

Referências

[1] A. Kostelecký and N. Russell, *Data Tables for Lorentz and CPT Violation*, (2008) [arXiv:0801.0287].

[2] B. Altschul, Phys. Lett. B **639**, 679 (2006).

[3] Q.G. Bailey and A. Kostelecký, Phys. Rev. D **70**, 076006 (2004).

[4] S. M. Carrol, G. B. Field and R. Jackiw Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).

[6] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[7] I. Mocioiu, M. Pospelov and R. Roiban, Phys. Lett. B **489**, 390 (2000); S.M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecký, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).

[8] J. D. Barrow and J. K. Webb, Scientific American (Brasil) **38**, 28 (2005).

[9] A. Songaila and L.L. Cowie, Nature 398, 667 (1999); P.C.W. Davies, T.M. Davies and C.H. Lineweaver, Nature 418, 602 (2002); A. Songaila and L.L. Cowie, Nature 428, 132 (2004).

[10] G. Barenboim and J. D. Lykken, Phys. Rev. D 80, 113008 (2009).

[11] J.W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D**12**, 1279 (2003); O. Bertolami, [hep-ph/0301191]; S.R. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D**59**, 116008 (1999); V.A. Kostelecký and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); Phys. Rev. D**66**, 056005 (2002).

[12] H.Belich, T.Costa-Soares, M.A.Santos e M.T.D. Orlando, Rev. Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 1, p. 57-64, (2007).

[13] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, (2003).

[14] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1995).

[15] F. A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Phys. Rev. D **78**, 125003 (2008).

[16] F.A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Braz. J. Phys. **40**, 188 (2010).

[17] F.A. Barone, F.E. Barone and J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D**84**, 065026 (2011).

[18] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3^{rd} ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, (1999).

[19] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlin (1996).

[20] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (2000).