Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Melhor aproximação e pontos fixos

Adriano José Gomes

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Sayuri Kashimoto

Itajubá, 08 de Julho de 2011

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Melhor aproximação e pontos fixos

Adriano José Gomes

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Sayuri Kashimoto

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

Itajubá – MG
8 de Julho de 2011

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado saúde e sabedoria para concluir este trabalho.

Aos meus pais Waldemar e Francisca por todo o amor, apoio e incentivo que me proporcionaram ao longo da minha vida.

À minha orientadora Profª. Drª. Márcia Sayuri Kashimoto por toda dedicação, paciência e disposição em todo o processo de desenvolvimento deste projeto.

Aos meus colegas e amigos de mestrado: Larissa, Juliana, Alexander e Rafael, por todo o conhecimento compartilhado e pelos momentos felizes de convivência.

Ao meu amigo Adhimar pelo apoio na confecção da dissertação.

Aos excelentes professores do curso de Mestrado em Física e Matemática Aplicada da UNIFEI pelo incentivo e pelos conhecimentos adquiridos.

A todos os funcionários da UNIFEI pelo seu trabalho.

À secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais pela licença concedida de afastamento do meu emprego de professor de Ensino Médio.

Sou eternamente grato a todos vocês.

ADRIANO JOSÉ GOMES

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar teoremas de melhor aproximação do tipo Ky Fan e o Teorema de Basha - Veeramani sobre a existência de pares de melhor proximidade de multifunções semicontínuas superiormente. Como aplicação, serão apresentados resultados sobre pontos fixos e existência de pares de equilíbrio de jogos generalizados com restrições.

Palavras–chave

Melhor aproximação, Teorema de Ky Fan, pontos fixos, par de melhor proximidade, par de equilíbrio, multifunção fatorável de Kakutani.

Abstract

The aim of this dissertation is to study some best approximation theorems of Ky Fan type and the Basha - Veeramani's theorem of best proximity pairs for upper semicontinuous multifunctions. As an application, we present some fixed point theorems and an existence theorem of equilibrium pairs for constrained generalized games.

Keywords

Best approximation, Ky Fan's theorem, fixed point, best proximity pair, equilibrium pair, Kakutani factorizable multifunction.

Conteúdo

Introdução

Sejam C um subconjunto não-vazio de um espaço normado X e $f : C \to X$ uma função. Se a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução, então f possui um ponto fixo em C. Mas, se essa equação não possui solução, é possível encontrar uma "solução aproximada"?

Em 1969, Ky Fan [26] demonstrou o seguinte resultado de melhor aproximação:

Teorema 0.0.1 *Seja C um subconjunto não-vazio convexo e compacto de um espaço normado X. Se $f : C \to X$ é contínua, então existe $z \in C$ tal que*

$$\|z - f(z)\| = d\big(f(z), C\big)$$

onde $d\big(f(z), C\big) = \inf\big\{\|y - f(z)\| : y \in C\big\}$.

Note que se $f(C) \subset C$, obtemos um teorema de ponto fixo.

Várias generalizações desse Teorema foram obtidas. Veja o artigo de divulgação de Singh e Carbone [12].

Reich [34] generalizou o Teorema de Ky Fan para o caso em que C é um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto de X e $f(C)$ é relativamente compacto.

Singh e Watson [41] estabeleceram um Teorema do tipo Ky Fan para espaços de Hilbert. Basta que C seja um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $f : C \to H$ uma função não-expansiva com $f(C)$ limitado.

A generalização do Teorema de Ky Fan para duas funções foi resolvida por Prolla [33]:

Teorema 0.0.2 *Sejam C um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de um espaço normado X e $g : C \to C$ uma função contínua quase afim e sobrejetora. Então para cada função contínua $f : C \to X$ existe $z \in C$ tal que*

$$\|g(z) - f(z)\| = d\big(f(z), C\big).$$

Sehgal e Singh [38] estenderam o Teorema de Prolla para o caso em que C é um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto. Também estabeleceram um Teorema do tipo Ky Fan para multifunções contínuas.

Apesar de um teorema de melhor aproximação do tipo Ky Fan fornecer uma solução "aproximada" de pontos fixos de funções e multifunções, não há garantia que ela seja ótima.

Considere dois subconjuntos A e B não-vazios de um espaço normado X e $T : A \to 2^B$ uma multifunção. Que condições garantem a existência de $a \in A$ tal que $d\big(a, T(a)\big) = \inf \big\{ d\big(x, T(x)\big) : x \in A \big\}$?

Como $d\big(x, T(x)\big) \geq d(A, B) := \inf \big\{ \|x - y\| : x \in A \ e \ y \in B \big\}$, a solução ótima deve satisfazer a igualdade

$$d\big(a, T(a)\big) = d(A, B).$$

O par $\big(a, T(a)\big)$ é denominado par de melhor proximidade de T.

Note que se $d(A, B) = 0$, então a é ponto fixo de T.

Basha e Veeramani [3] estabeleceram um Teorema que garante a existência de um par de melhor proximidade de uma multifunção $T : A \to 2^B$ semicontínua superiormente, sendo A e B subconjuntos não-vazios, convexos e compactos de um espaço normado X.

O problema de existência de par de melhor proximidade é muito interessante, principalmente para matemáticos que investigam a teoria dos pontos fixos. Veja os trabalhos recentes na literatura [2], [10], [11], [20], [21], [22], [27], [42] e [44].

O objetivo deste trabalho é estudar teoremas de melhor aproximação do tipo Ky Fan e um resultado sobre existência de par de melhor proximidade de multifunções. Como aplicação, serão apresentados resultados sobre pontos fixos e pares de equilíbrio de jogos generalizados com restrições.

A seguir, descrevemos os assuntos abordados em cada capítulo.

No Capítulo 1, apresentaremos notações, definições e alguns resultados que serão utilizados nesta dissertação.

No Capítulo 2, estudaremos as condições de existência e unicidade de melhor aproximação em espaços normados. Abordaremos também as propriedades da projeção métrica. Os conceitos e resultados deste capítulo serão utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, apresentaremos o Teorema de Ky Fan em espaços normados, suas extensões e variações. Além disso, analisaremos a relação desses resultados com a teoria dos pontos fixos.

Finalmente, no Capítulo 4, introduziremos a definição de multifunção fatorável de

Kakutani e estudaremos o Teorema de par de melhor proximidade demonstrada por Basha e Veeramani [3]. Para ilustrar, consideraremos uma aplicação em teorias dos jogos. Trata-se de um teorema sobre a existência de par de equilíbrio de jogos generalizados com restrições estabelecido por Srinivasan e Veeramani [43].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas notações e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Sejam S um conjunto e T um subconjunto de S. Denotaremos o complementar de T em relação a S por T^C ou $S \setminus T$.

Sejam X um espaço normado e $A \subset X$. Indicaremos a fronteira de A por ∂A e o conjunto dos pontos interiores de A por $int(A)$.

Dados $a \in X$ e $r > 0$, fixaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in X : \|x-a\| < r\}, \\ B[a,r] &= \{x \in X : \|x-a\| \leq r\} \quad e \\ S_X &= \{x \in X : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Sejam Y um espaço de Hausdorff compacto e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Denotaremos por $C(Y, \mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas de Y em $\mathbb{K}$, munido da norma $\|f\| = \sup\limits_{t \in Y} |f(t)|$.

Indicaremos por ℓ^∞, o espaço das sequências limitadas $x = (x_n)$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Utilizaremos a notação ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, para indicar o espaço das sequências $x = (x_n)$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, munido da norma $\|x\|_p = \left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

Definição 1.0.1 *Seja X um espaço vetorial.*

(i) *Dados $x, y \in X$, o conjunto $[x,y] := \big\{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\big\}$ é chamado segmento.*

(ii) *Um subconjunto M de X é convexo se $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M$ para quaisquer $x_1, x_2 \in M$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.*

(iii) *Seja S um subconjunto de X. A envoltória convexa de S, denotada por $co(S)$, é o* *conjunto de todas as combinações convexas de pontos em S:*

$$co(S) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_i \in S \Big\}.$$

A seguir, descreveremos alguns resultados básicos que serão utilizados nos próximos capítulos.

Os Teoremas 1.0.2, 1.0.3 e 1.0.4 podem ser encontrados em Simmons [40].

Teorema 1.0.2 (Teorema de Aproximação de Weierstrass) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$.*

Teorema 1.0.3 (Teorema de Pitágoras) *Sejam X um espaço vetorial com produto interno e $x, y \in X$. Se x e y são ortogonais, então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Teorema 1.0.4 (Lei do paralelogramo) *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Para todo $x, y \in X$ tem-se $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$.*

A demonstração do próximo Teorema encontra-se em Clarkson [13].

Teorema 1.0.5 *Para quaisquer $x, y \in \ell^p$ com $2 \leq p < \infty$ e $q = \dfrac{p}{p-1}$, tem-se*

$$2\big(\|x\|^p + \|y\|^p\big) \leq \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}\big(\|x\|^p + \|y\|^p\big) \tag{1.1}$$

$$2\big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{q-1} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q \tag{1.2}$$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2\big(\|x\|^q + \|y\|^q\big)^{p-1}. \tag{1.3}$$

Para $1 < p \leq 2$ estas desigualdades são válidas no sentido contrário.

Definição 1.0.6 *Sejam X um espaço normado, $f \in X$ e M um subconjunto de X. A distância de f a M é o número real não-negativo*

$$d(f, M) = \inf_{p \in M} \|f - p\|.$$

Definição 1.0.7 *Dados subconjuntos não-vazios A e B de um espaço normado, define-se a distância entre A e B por*

$$d(A, B) = \inf \big\{ \|a - b\| : a \in A \text{ e } b \in B \big\}.$$

Proposição 1.0.8 *Sejam X um espaço normado e M um subconjunto não vazio de X. Se $x, y \in X$, então $|d(x, M) - d(y, M)| \leq \|x - y\|$.*

Demonstração. Para qualquer $w \in M$, segue da desigualdade triangular que

$$d(x,M) = \inf_{p\in M} \|x-p\| \leq \|x-w\| \leq \|x-y\| + \|y-w\|.$$

Logo $d(x,M) - \|x-y\| \leq \|y-w\|$. E consequentemente $d(x,M) - \|x-y\| \leq d(y,M)$.

Portanto

$$d(x,M) - d(y,M) \leq \|x-y\|. \tag{1.4}$$

Por outro lado

$$d(y,M) = \inf_{p\in M} \|y-p\| \leq \|y-w\| \leq \|y-x\| + \|x-w\|.$$

Logo, $d(y,M) \leq \|x-y\| + \|x-w\|$. E consequentemente $d(y,M) \leq \|x-y\| + d(x,M)$.

Portanto

$$-\|x-y\| \leq d(x,M) - d(y,M). \tag{1.5}$$

Finalmente, por (1.4) e (1.5) temos

$$|d(x,M) - d(y,M)| \leq \|x-y\|. \tag{1.6}$$

■

Definição 1.0.9 *Sejam X e Y conjuntos não-vazios e 2^Y o conjunto de todos os subconjuntos de Y. Uma aplicação $\varphi : X \to 2^Y$ que associa a cada $x \in X$ um subconjunto $\varphi(x)$ de Y é denominada multifunção.*

Definição 1.0.10 *Seja $\varphi : X \to 2^Y$ uma multifunção. O gráfico de φ, denotado por $Gr\varphi$, é definido por*

$$Gr\varphi = \{(x,y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\}.$$

Se A é um subconjunto de X, então o conjunto $\varphi(A) := \bigcup\{\varphi(x) : x \in A\}$ é chamado imagem de A pela φ.

Dado um subconjunto B de Y, a imagem inversa de B pela φ, denotado por $\varphi^{-1}(B)$, é definido por

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X : \varphi(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Definição 1.0.11 *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $\varphi : X \to 2^Y$ e $\psi : Y \to 2^Z$ são multifunções, a composição, denotada por $\psi \circ \varphi : X \to 2^Z$, é definida por $\big(\psi \circ \varphi\big)(x) = \bigcup \big\{\psi(y) : y \in \varphi(x)\big\} \quad \forall x \in X$.*

Definição 1.0.12 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma multifunção $\varphi : X \to 2^Y$ é chamada semicontínua superiormente (respectivamente inferiormente) se $\varphi^{-1}(G)$ é fechado (respectivamente aberto) em X para cada fechado (respectivamente aberto) G em Y.*

Dizemos que φ é contínua se φ é semicontínua superiormente e inferiormente.

Proposição 1.0.13 *Sejam X e Y espaços topológicos. Se Y é Hausdorff e $\varphi : X \to 2^Y$ é uma multifunção semicontínua superiormente tal que $\varphi(x)$ é compacto para todo $x \in X$, então $Gr\varphi$ é fechado.*

Proposição 1.0.14 *Sejam X e Y espaços topológicos. Se Y é um espaço de Hausdorff compacto e o gráfico da multifunção $\varphi : X \to 2^Y$ é fechado, então φ é semicontínua superiormente.*

Definição 1.0.15 *Se $X \subset Y$ e $\varphi : X \to 2^Y$ é uma multifunção, um ponto $x \in X$ é dito um ponto fixo de φ se $x \in \varphi(x)$.*

Definição 1.0.16 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma multifunção $\varphi : X \to 2^Y$ é denominada compacta se $\varphi(X)$ está contido em um subconjunto compacto de Y.*

Os próximos resultados encontram-se em Bohnenblust [4] e Himmelberg [19], respectivamente.

Teorema 1.0.17 (Bohnenblust e Karlin - 1950) *Seja S um subconjunto não-vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach.*

Suponha que para cada $x \in S$ é dado um subconjunto não-vazio $F(x) \subset S$. Se

a. *$x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$, implica $y \in F(x)$;*

b. *a união $\bigcup_{x \in S} F(x)$ está contido em algum conjunto sequencialmente compacto T; então existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.*

Teorema 1.0.18 (Himmelberg - 1972) *Seja C um subconjunto não-vazio e convexo de um espaço normado X. Se $\varphi : C \to 2^C$ é uma multifunção semicontínua superiormente tal que $\varphi(x)$ é um subconjunto não-vazio, fechado e convexo para cada $x \in C$ e $\varphi(C)$ está contido em um subconjunto compacto de C, então φ possui um ponto fixo.*

Capítulo 2

Melhor aproximação em espaços normados

Sejam X um espaço normado e M um subconjunto não-vazio de X. Se $f \in X$, queremos determinar $u \in M$ tal que

$$\|f - u\| = \inf_{p \in M} \|f - p\|.$$

Discutiremos o problema da existência e unicidade de tais elementos e como eles variam em função de cada $f \in X$.

2.1 Existência

Nesta seção, veremos que se M é um subconjunto aproximativamente compacto de um espaço normado X, então a existência de elementos de melhor aproximação a cada $f \in X$ é assegurada.

Utilizaremos as referências Deustch [15] e Mhaskar [30].

Definição 2.1.1 *Sejam X um espaço normado, $f \in X$ e M um subconjunto de X.*

Se existe $p^* \in M$ tal que

$$\|f - p^*\| = d(f, M) = \inf_{p \in M} \|f - p\|, \tag{2.1}$$

dizemos que p^* é um elemento de melhor aproximação de f por elementos de M. Denotaremos por $P_M(f)$ o conjunto dos elementos de melhor aproximação de f por elementos de M.

Observação 2.1.2 *Seja X um espaço normado. Se $\emptyset \neq M \subset X$ não é fechado, então existe um ponto limite f de M tal que $f \notin M$. Neste caso, $P_M(f) = \emptyset$.*

Exemplo 2.1.3 *Seja $M = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.*

Se $f = 3$, $d(f, M) = \inf\limits_{p \in M} \|f - p\| = 1$ e $P_M(f) = \{2\}$.

Se $f = 0$, $d(f, M) = \inf\limits_{p \in M} \|f - p\| = 1$ e $P_M(f) = \emptyset$.

O exemplo abaixo mostra que podemos ter $P_M(x) = \emptyset$, mesmo quando M é um subconjunto fechado de X.

Exemplo 2.1.4 *Considere $X = C\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$ munido da norma $\|f\| = \left[\displaystyle\int_{-1}^{1} \big|f(t)\big|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$.*

Seja $M = \left\{f \in X : \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0\right\}$.

Primeiramente, mostremos que M é fechado. Seja $f \in \overline{M}$. Existe uma sequência (f_n) em M tal que $f_n \to f$.

Temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\, dt\right| &= \left|\int_0^1 f(t) - f_n(t)\, dt\right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} \big|f(t) - f_n(t)\big|\, dt \\
&\leq \left[\int_{-1}^{1} \big|f(t) - f_n(t)\big|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^{1} 1\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(\int_{-1}^{1} \big|f(t) - f_n(t)\big|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\, \|f - f_n\|.
\end{aligned}$$

Como $\|f_n - f\| \to 0$, segue que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ e portanto, $f \in M$.

Seja $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = 1 \;\; \forall t \in [-1,1]$. Note que $h \in X$.

Para cada $g \in M$,

$$\begin{aligned}
\|h - g\|^2 &= \int_{-1}^{1} \big|h(t) - g(t)\big|^2\, dt \\
&= \int_{-1}^{0} \big|1 - g(t)\big|^2\, dt + \int_0^1 \big[1 - 2g(t) + g^2(t)\big]\, dt \\
&= \int_{-1}^{0} \big|1 - g(t)\big|^2\, dt + 1 + \int_0^1 g^2(t)\, dt \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

A igualdade é verificada se, e somente se,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tal função g é descontínua, o que prova que $d(h, M) \geq 1$ e que $d(h, g) > 1$ para toda $g \in M$.

Considere agora $0 < \varepsilon < 1$ e defina a função $h_\varepsilon : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -\varepsilon \\ -\varepsilon^{-1}t, & -\varepsilon \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que $h_\varepsilon \in M$.

Como

$$\|h - h_\varepsilon\|^2 = \int_{-1}^{1} \left|h(t) - h_\varepsilon(t)\right|^2 dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^2 dt + \int_{0}^{1} dt = 1 + \frac{\varepsilon}{3},$$

segue que $d(h, M) \leq 1$. Logo $d(h, M) = 1 < d(h, g) \quad \forall g \in M$.

Portanto, não existe melhor aproximação de h por M.

Proposição 2.1.5 *Seja X um espaço normado. Se M é um subconjunto não-vazio e fechado de X e $y_0 \in M$ é uma melhor aproximação de $x_0 \in X \setminus M$, então $y_0 \in \partial M$.*

Demonstração. Se $int(M) = \emptyset$, não há o que demonstrar. Se $y_0 \in int(M)$, então existe $r > 0$ tal que $B(y_0, r) \subset M$.

Seja

$$y_1 := \frac{s}{s+r} y_0 + \frac{r}{s+r} x_0$$

onde

$$s = d(x_0, M) = \|x_0 - y_0\|.$$

Temos

$$\|y_1 - y_0\| = \frac{rs}{s+r} < r \tag{2.2}$$

e

$$\|y_1 - x_0\| = \frac{s^2}{s+r} < s \tag{2.3}$$

Como $y_1 \in B(y_0, r) \subset M$, obtemos uma contradição através da desigualdade (2.3). ■

Definição 2.1.6 *Seja X um espaço normado. Dizemos que um subconjunto M de X é limitadamente compacto se $M \cap B$ é compacto para toda bola fechada B em X.*

Todo conjunto compacto é limitadamente compacto. Num espaço normado de dimensão finita, todo conjunto fechado é limitadamente compacto pois as bolas fechadas são compactas.

Definição 2.1.7 *Sejam X um espaço normado e M um subconjunto de X. Uma sequência (y_n) em M é dita minimizante para $x \in X$ se*

$$\|x - y_n\| \to d(x, M).$$

Dizemos que M é aproximativamente compacto se, para cada $x \in X$, toda sequência (y_n) em M, minimizante para x, tem uma subsequência que converge para um elemento de M.

O conceito de aproximativamente compacto foi introduzido por Efimov e Stechkin [17].

Proposição 2.1.8 *Se M é um subconjunto aproximativamente compacto de um espaço normado X, então M é fechado em X.*

Demonstração. Seja $y \in \overline{M}$. Existe uma sequência (y_n) em M tal que $y_n \to y$.

Temos $d(y, M) = 0$. Logo, $\|y_n - y\| \to d(y, M)$. Como M é aproximativamente compacto, existem $a \in M$ e uma subsequência (y_{n_j}) de (y_n) tal que $y_{n_j} \to a$. Segue da unicidade do limite que $a = y$. Portanto, $y \in M$. ■

Proposição 2.1.9 *Seja H um espaço de Hilbert. Se M é um subconjunto convexo e fechado de H, então M é aproximativamente compacto.*

Demonstração. Sejam $x \in H$ e (y_n) uma sequência em M, minimizante para x. Segue da lei do paralelogramo e do fato de M ser convexo que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4\,\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \\
&\leq 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4\,d(x, M)^2.
\end{aligned}$$

Como $\|x - y_n\| \to d(x, M)$ e $\|x - y_m\| \to d(x, M)$ segue que (y_n) é de Cauchy. Como H é completo, (y_n) converge para algum elemento $y \in H$. Sendo M fechado, segue que $y \in M$. Assim, M é aproximativamente compacto. ■

Teorema 2.1.10 *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço normado X. Considere as seguintes afirmações:*

(a) M é compacto;

(b) M é limitadamente compacto;

(c) M é aproximativamente compacto;

(d) $P_M(f) \neq \emptyset \quad \forall f \in X$.

Então $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$.

Demonstração

$(a) \Rightarrow (b)$. Trivial

$(b) \Rightarrow (c)$. Seja M limitadamente compacto. Sejam $x \in X$ e (y_n) uma sequência em M, minimizante para x. Como $\|x - y_n\| \to d(x, M)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in M \cap B[x, d(x, M) + 1]$ para todo $n \geq n_0$. Sendo M limitadamente compacto, existem uma subsequência (y_{n_k}) e $y \in M \cap B[x, d(x, M) + 1]$ tais que $y_{n_k} \to y$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sejam $f \in X$ e (y_n) uma sequência em M, minimizante para f. Como M é aproximativamente compacto, existem uma subsequência (y_{n_k}) e $y \in M$ tais que $y_{n_k} \to y$.

Assim,

$$\|f - y\| = \lim_{k\to\infty} \|f - y_{n_k}\| = d(f, M).$$

Portanto, $y \in P_M(f)$. ■

Observação 2.1.11 $(d) \not\Rightarrow (c) \not\Rightarrow (b) \not\Rightarrow (a)$.

Os próximos exemplos ilustram a Observação 2.1.11.

Exemplo 2.1.12 *Seja $X = \ell_2$ o espaço das sequências reais com quadrados somáveis munidos da norma $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ se $x = (x_n) \in \ell_2$. Considere $M = \{x \in \ell_2 : \|x\| = 1\}$.*

Note que $P_M(0) = M$ e $P_M(x) = \left\{\dfrac{x}{\|x\|} : x \in \ell_2 \setminus \{0\}\right\}$. Entretanto, M não é aproximativamente compacto.

De fato, considere a sequência (e_n) em M definida por $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, cuja n-ésima coordenada é 1 e as demais nulas. Temos $\|e_n\| = 1 = d(0, M), \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim (e_n) é uma sequência minimizante para 0. Como $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$ para todo $m \neq n$, segue que (e_n) não possui subsequência convergente.

Exemplo 2.1.13 *Sejam ℓ_2, como no Exemplo 2.1.12, e $M = \{x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1\}$.*

Como M é convexo e fechado, segue da Proposição 2.1.9 que M é aproximativamente compacto. A sequência (e_n) definida no Exemplo 2.1.12 não possui subsequência convergente e assim concluímos que $M = M \cap B[0,1]$ não é compacto. Portanto, M não é limitadamente compacto.

Exemplo 2.1.14 *Seja* $X = \ell_2$, *como no Exemplo 2.1.12. Seja* $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ *a sequência cuja primeira coordenada é* 1 *e as demais nulas.*

Provemos que $M = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é limitadamente compacto. Dados $a \in \ell_2$ e $r > 0$, seja (x_n) uma sequência em $M \cap B[a,r]$, isto é, $x_n = \alpha_n e_1$ e $\|x_n - a\| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como (x_n) é uma sequência limitada, segue que (α_n) é uma sequência limitada de números reais. Logo, existem $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ e uma subsequência (α_{n_k}) e $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_{n_k} \to \alpha_0$. Assim, $x_{n_k} \to \alpha_0 e_1$.

Como $\|x_{n_k} - a\| \leq r$, temos $\|\alpha_0 e_1 - a\| \leq r$. Logo, $\alpha_0 e_1 \in M \cap B[a,r]$. Assim, $M \cap B[a,r]$ é compacto e concluímos que M é limitadamente compacto. Entretanto M não é compacto. De fato, a sequência $(y_n) = (ne_1)$ em M, não possui uma subsequência convergente, pois

$$\|y_n - y_m\| = |n - m| \geq 1, \ \forall n \neq m.$$

Corolário 2.1.15 *Seja* X *um espaço normado. Se* M *é um subespaço de dimensão finita de* X, *então* $P_M(f) \neq \emptyset$ *para cada* $f \in X$.

Demonstração. Se M é um subespaço de dimensão finita de X, então M é fechado. Logo, $M \cap B$ é fechado para qualquer bola fechada B em X. Além disso, $M \cap B$ é um subconjunto limitado de M. Usando o Teorema de Heine - Borel, concluímos que $M \cap B$ é compacto. Assim, segue do Teorema 2.1.10 que $P_M(f) \neq \emptyset$ para cada $f \in X$. ■

Exemplo 2.1.16 *No Corolário 2.1.15 é essencial que a dimensão do subespaço* M *seja finita.*

De fato, sejam M o conjunto dos polinômios reais definidos em $[0,1]$ e $C\big([0,1], \mathbb{R}\big)$, o espaço das funções reais contínuas em $[0,1]$. Note que $\dim M = \infty$.

Seja $f(t) = \sqrt{t}$. Pelo Teorema da aproximação de Weierstrass, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio $P_\epsilon \in M$ tal que

$$\|f - P_\epsilon\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon.$$

Assim, $\inf_{p \in M} \|f - p\| = 0$. Como f não é polinômio, não existe $p_0 \in M$ tal que

$$\|f - p_0\| = \inf_{p \in M} \|f - p\| = 0.$$

2.2 Unicidade

Esta seção é baseada nas referências Deutsch [15] e Mhaskar [30].

O elemento de melhor aproximação nem sempre é único, como ilustra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.1 *Considere o espaço* $\mathbb{R}^2$ *munido da norma* $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. *Seja* $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$. *Se* $f = (2, 0)$, *então* $d(f, M) = 2$ *e* $P_M(f) = \{(0, x_2) : |x_2| \leq 2\}$.

O critério de unicidade que estudaremos envolve a noção de convexidade estrita.

Definição 2.2.2 *Um espaço normado* X *é estritamente convexo se para quaisquer* $x, y \in X$ *tais que* $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$, *tem-se* $x = y$.

Clarkson [13] provou que todo espaço de Banach separável admite uma norma equivalente estritamente convexa.

A próxima proposição fornece várias caracterizações da convexidade estrita para espaços normados.

Proposição 2.2.3 *Seja* X *um espaço normado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\|x\| = \|y\| = 1$ *e* $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$ *para cada* $0 < \alpha < 1$ *implica* $x = y$.

(ii) X *é estritamente convexo.*

(iii) Se $x, y \in X \setminus \{0\}$ *satisfazem a condição* $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, *então existe* $\lambda > 0$ *tal que* $y = \lambda x$.

(iv) A esfera unitária S_X *não contém segmentos.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Basta tomar $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sejam $x, y \in X \setminus \{0\}$ tais que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Sem perda de generalidade podemos assumir $\|y\| \geq \|x\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
2 &\geq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| \\
&\geq \left\|\frac{x+y}{\|x\|}\right\| - \|y\|\left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right) \\
&= \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Como resultado, obtemos

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2,$$

isto é,

$$\left\| \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = 1.$$

Segue de (ii) que

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}.$$

Assim,

$$y = \frac{\|y\|}{\|x\|}x.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Suponha que existem $a, b \in S_X$, $a \neq b$, tal que o segmento $[a, b] \subset S_X$. Assim,

$$1 = \left\| \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right\|.$$

Como

$$\left\| \frac{1}{2}a \right\| + \left\| \frac{1}{2}b \right\| = 1.$$

Segue que

$$\left\| \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right\| = \left\| \frac{1}{2}a \right\| + \left\| \frac{1}{2}b \right\|.$$

Logo, por hipótese, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{2}b = \lambda \frac{1}{2}a$, isto é, $b = \lambda a$.

Mas

$$1 = \|b\| = \|\lambda a\| = \lambda \|a\| = \lambda.$$

Assim, $b = a$, e chegamos a uma contradição.

$(iv) \Rightarrow (i)$. É imediato. ■

Exemplo 2.2.4 *O espaço* $\mathbb{R}^2$ *com a norma* $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ *não é estritamente convexo.*

De fato, tome $x = (1, 1)$ e $y = (1, 0)$. Temos

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \quad e \quad x \neq y.$$

Exemplo 2.2.5 *O espaço* ℓ_∞ *das sequências de números complexos limitadas munido da norma usual não é estritamente convexo.*

De fato, considere as sequências $x = (1, 1, 0, 0, ...)$ em que os dois primeiros termos são iguais a 1 e os demais nulos e $y = (-1, 1, 0, 0, ...)$, cujos dois primeiros termos são -1 *e* 1 e os demais nulos.

Temos
$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1 \quad e \quad x \neq y.$$

Exemplo 2.2.6 *O espaço $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ com a norma $\|h\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |h(t)|$ não é estritamente convexo.*

Com efeito, as funções $f(t) = 1$ e $g(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$, $t \in [a,b]$, são contínuas e $\|f\| = \|g\| = 1$.
$$\|f+g\| = \sup_{t\in[a,b]} \left|1 + \frac{t-a}{b-a}\right| = 2, \quad mas \quad f \neq g.$$

Exemplo 2.2.7 *Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x, y \in X$ e $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$.
Usando a identidade do paralelogramo, obtemos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4.$$

Assim,
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1. \tag{2.4}$$

Como $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$, segue de (2.4) que $x = y$.

Exemplo 2.2.8 *O espaço ℓ_p, $1 < p < \infty$, com a norma usual é estritamente convexo.*

De fato, sejam $x, y \in \ell_p$ tais que $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$.
Caso 1: $p \geq 2$.

Segue da desigualdade (1.1) que

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1} \cdot 2 = 2^p$$

Assim,
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \leq 1 \tag{2.5}$$

Como $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$, segue de (2.5) que $x = y$.
Caso 2: $1 < p \leq 2$.

Usando a desigualdade (1.2), obtém-se

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \leq 2 \cdot 2^{q-1} = 2^q.$$

Assim,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q \leq 1. \tag{2.6}$$

Como $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, segue de (2.6) que $x = y$.

Apresentaremos a seguir, o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.9 *Sejam X um espaço normado estritamente convexo, M um subconjunto convexo de X e $x \in X \setminus M$ tal que $P_M(x) \neq \emptyset$. Então $P_M(x)$ é unitário.*

Demonstração. Sejam $x \in X \setminus M$. Se $p_1, p_2 \in P_M(x)$, então

$$\|p_1 - x\| = \|p_2 - x\| = d(x, M).$$

Assim,

$$\left\|\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - x\right\| \leq \frac{1}{2}\|p_1 - x\| + \frac{1}{2}\|p_2 - x\| = d(x, M).$$

Como M é convexo, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) \in M$.

Logo,

$$\left\|\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - x\right\| = d(x, M).$$

Portanto,

$$\frac{1}{d(x,M)}\|p_1 - x\| = \frac{1}{d(x,M)}\|p_2 - x\| = \frac{1}{d(x,M)}\|\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - x\| = 1.$$

Como X é estritamente convexo, segue-se que $p_1 = p_2$. ■

Corolário 2.2.10 *Se M é um subconjunto não vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H, então $P_M(x)$ é unitário para todo $x \in H$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.1.9 e do Teorema 2.1.10 que $P_M(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in H$. Como H é um espaço normado estritamente convexo, segue do Teorema 2.2.9 que $P_M(x)$ é unitário para todo $x \in H$. ■

2.3 Unicidade de melhor aproximação no espaço das funções contínuas

O espaço $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ munido da norma do supremo não é estritamente convexo (veja Exemplo 2.2.6). Assim, o critério de unicidade de melhor aproximação, Teorema 2.2.9, não se aplica a este espaço normado.

Em 1918, A. Haar [18] obteve uma caracterização da unicidade do elemento de melhor aproximação de qualquer $f \in C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ a subespaços vetoriais n-dimensionais de $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Discutiremos nesta seção, um conceito introduzido por Haar e o resultado clássico de unicidade de melhor aproximação uniforme em $C(X,\mathbb{K})$, onde X é um subespaço de Hausdorff compacto contendo pelo menos n pontos.

Esta seção é baseada no Capítulo 3 da referência [16].

Definição 2.3.1 *Seja X um espaço de Hausdorff compacto contendo pelo menos n pontos. Um subespaço vetorial n-dimensional M de $C(X,\mathbb{K})$ satisfaz a condição de Haar se todo $q \in M \setminus \{0\}$ tem no máximo $n-1$ zeros distintos em X. Neste caso, M é denominado subespaço de Haar ou subespaço de Chebyshev.*

Exemplo 2.3.2 *Os subespaços $P_{n-1}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ e $P_{n-1}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ dos polinômios reais e complexos, respectivamente, de grau menor ou igual a $n-1$ definidos em $[a,b]$ satisfazem a condição de Haar.*

O seguinte resultado fornece mais exemplos de subespaços de Haar.

Proposição 2.3.3 *Seja $g \in C^{(n-1)}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ $\big($espaço das funções reais com derivadas até ordem $n-1$ contínuas em $[a,b]$ $\big)$ tal que $g^{(n-1)}$ não se anula em (a,b). Então, o subespaço M gerado por $\big\{1,x,...,x^{n-2},g\big\}$ é um subespaço de Haar n-dimensional de $C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.*

Demonstração. Como $g^{(n-1)}$ não se anula em (a,b), $g \notin P_{n-2}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ e o conjunto $\big\{1,x,...,x^{n-2},g\big\}$ é linearmente independente.

Suponha que M não satisfaz a condição de Haar. Então existe uma função $f = p+\lambda g$, para algum $p \in P_{n-2}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ e $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tal que f possui pelo menos n zeros distintos em $[a,b]$. Aplicando o Teorema de Rolle sucessivamente, concluímos que $f^{(n-2)} = p^{(n-2)}+\lambda\, g^{(n-2)}$ possui pelo menos dois zeros distintos em (a,b). Como $p^{(n-1)} = 0$, $g^{(n-1)}$ tem pelo menos um zero em (a,b). Isto contradiz a hipótese. ■

Proposição 2.3.4 *Seja X um espaço de Hausdorff compacto contendo pelo menos n pontos. Se M é um subespaço vetorial n-dimensional de $C(X, \mathbb{K})$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M satisfaz a condição de Haar.

(ii) Para quaisquer n pontos distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ de X e qualquer base $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ de M o Gram determinante generalizado

$$G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} := det\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

é não-nulo.

(iii) Dados n pontos distintos $x_1, ..., x_n \in X$ e n escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, o problema de interpolação de Lagrange (encontrar $q \in M$ tal que $q(x_j) = \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$) tem uma única solução.

Se $X = [a, b]$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, as afirmações acima são equivalentes às seguintes afirmações:

(iv) Existe uma base $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ de M tal que para qualquer escolha de pontos $x_1 < x_2 < ... < x_n$ de $[a, b]$, temos

$$G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0.$$

(v) Para qualquer escolha de pontos $a = x_0 \leq x_1 < ... < x_{n-1} \leq x_n = b$, existe $q \in M$ tal que

$$\begin{aligned} q(x_j) = 0, &\qquad 1 \leq j \leq n-1 \\ q(x) \neq 0 &\qquad \forall x \in [a, b] \backslash \{x_1, ..., x_{n-1}\} \\ (-1)^{(n-j)} q(x) > 0 &\qquad \forall x \in (x_{j-1}, x_j),\ j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Assuma (ii) falso. Então existem n pontos distintos $x_j \in X$, $1 \leq j \leq n$, e uma base $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ de M tal que

$$G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} = 0.$$

Isto implica que podemos escolher uma solução não-trivial $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} \alpha_1\phi_1(x_1) & + & \alpha_2\phi_2(x_1) & + & \cdots & + & \alpha_n\phi_n(x_1) & = 0 \\ \alpha_1\phi_1(x_2) & + & \alpha_2\phi_2(x_2) & + & \cdots & + & \alpha_n\phi_n(x_2) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1\phi_1(x_n) & + & \alpha_2\phi_2(x_n) & + & \cdots & + & \alpha_n\phi_n(x_n) & = 0 \end{cases}$$

Assim, o elemento não-nulo $q = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\phi_i$ de M possui n zeros distintos, o que contradiz (i).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Dados n pontos distintos $x_1, ..., x_n \in X$ e n escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, (ii) implica que o sistema linear $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(x_j) = \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$, tem uma única solução $(\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, ..., \widehat{\alpha_n})$.

Assim, $\widehat{q} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\alpha}_i\phi_i$ é o único elemento de M satisfazendo $\widehat{q}(x_j) = \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponha que M não satisfaça a condição de Haar. Logo, existe $q_1 \in M \setminus \{0\}$ com pelo menos n zeros distintos, $x_1, ..., x_n$, ou seja,

$$q_1(x_j) = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Mas se q_2 é a função identicamente nula, temos

$$q_2(x_j) = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Logo, o problema de interpolação para os pontos $x_1, ..., x_n$ e os escalares $\lambda_j = 0$, $j = 1, ..., n$, não tem uma única solução.

Agora suponha que $X = [a, b]$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Seja $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ uma base de M. Por (ii), podemos afirmar que

$$G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} \neq 0$$

para quaisquer n pontos distintos $x_1 < x_2 < ... < x_n$ de $[a, b]$.

Afirmamos que

$$G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0 \quad ou \quad G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ -\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0$$

para qualquer escolha de n pontos distintos $x_1 < x_2 < ... < x_n$ de $[a, b]$.

Suponha, por absurdo, que existem pontos distintos $y_1 < y_2 < ... < y_n$ e $z_1 < z_2 < ... < z_n$ de $[a,b]$ tais que

$$G\begin{pmatrix} y_1, y_2, ..., y_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0 \quad e \quad G\begin{pmatrix} z_1, z_2, ..., z_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} < 0.$$

Pela continuidade da função

$$t \mapsto G\begin{pmatrix} ty_1 + (1-t)z_1, & ty_2 + (1-t)z_2, & ..., & ty_n + (1-t)z_n \\ \phi_1, & \phi_2, & ..., & \phi_n \end{pmatrix} \quad em \quad [0,1],$$

pode-se concluir pelo Teorema do Valor Médio que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$G\begin{pmatrix} t_0y_1 + (1-t_0)z_1, & t_0y_2 + (1-t_0)z_2, & ..., & t_0y_n + (1-t_0)z_n \\ \phi_1, & \phi_2, & ..., & \phi_n \end{pmatrix} = 0,$$

o que contradiz (ii).

$(iv) \Rightarrow (v)$ Seja $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ uma base de M tal que

$$G\begin{pmatrix} y_1, y_2, ..., y_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0 \quad para \quad todo \quad y_1 < y_2 < ... < y_n \quad em \quad [a,b].$$

Dados os pontos $a = x_0 \leq x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} \leq x_n = b$, defina $q \in M$ por

$$q(x) = G\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n-1}, \phi_n \end{pmatrix}.$$

Temos $q(x_j) = 0$, $1 \leq j \leq n-1$, pois o determinante tem duas linhas repetidas.

Se $x \in [a,b] \backslash \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$, indicaremos a ordenação dos pontos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ e x por $x'_1 < x'_2 < ... < x'_n$.

Por hipótese,

$$G\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, ..., x'_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} > 0.$$

Note que a posição de x em relação aos pontos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ nos fornece

$$q(x) = G\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, ..., x'_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix} \quad ou \quad q(x) = -G\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, ..., x'_n \\ \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \end{pmatrix}.$$

Logo, $q(x) \neq 0$.

Se $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 2, ..., n-1$, temos por hipótese,

$$G\begin{pmatrix} x_1, & ..., & x_{j-1}, & x, & x_j, & ..., & x_{n-1} \\ \phi_1, & ..., & ..., & ... & ..., & ..., & \phi_n \end{pmatrix} > 0.$$

Precisamos de $n-j$ trocas para obtermos $q(x)$. Se $n-j$ for par, temos $q(x)>0$ e se $n-j$ for ímpar, $q(x)<0$. Logo, $(-1)^{(n-j)}q(x)>0$ se $x\in(x_{j-1},x_j)$.

$(v)\Rightarrow(ii)$ Seja $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ uma base de M e sejam dados $a\leq x_1<x_2<...<x_n\leq b$. Por hipótese, para cada $j\in\{1,...,n\}$ existe $\varphi_j\in M$ tal que $\varphi_j(x_j)\neq 0$ e $\varphi_j(x_i)=0,\ 1\leq i\leq n\quad e\quad i\neq j$.

Claramente, $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ é uma base de M. Além disso,

$$G\begin{pmatrix} x_1,x_2,...,x_n \\ \varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1}(x_{n-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_n(x) \end{vmatrix}\neq 0$$

pois todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero.

Para cada $i\in\{1,...,n\}$, podemos escrever $\phi_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\varphi_j$, onde $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}\quad\forall\quad 1\leq i,j\leq n$.

A matriz $A=[\alpha_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ satisfaz

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = A\cdot\begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}\quad \text{e}\quad detA\neq 0.$$

Logo,

$$G\begin{pmatrix} x_1,...,x_n \\ \phi_1,...,\phi_n \end{pmatrix}= detA\cdot G\begin{pmatrix} x_1,...,x_n \\ \varphi_1,...,\varphi_n \end{pmatrix}\neq 0.$$

■

Uma caracterização da melhor aproximação em $C(X,\mathbb{K})$ é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 2.3.5 (Kolgomorov - 1948 [24]) *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Sejam M um subespaço vetorial n-dimensional de $C(X,\mathbb{K})$, $f\in C(X,\mathbb{K})$ e $p\in M$. Então $p\in P_M(f)$ se, e somente se, para cada $q\in M$,*

$$\max_{x\in A_0} Re\Big\{[f(x)-p(x)]\overline{q(x)}\Big\}\geq 0 \tag{2.7}$$

onde $A_0:=\big\{x\in X:|f(x)-p(x)|=\|f-p\|\big\}$.

No caso real, a condição (2.7) é escrita na forma

$$\max_{x\in A_0}\big\{[f(x)-p(x)]q(x)\big\}\geq 0.$$

Demonstração. Assuma que $p \in P_M(f)$ e seja $E := \|f - p\|$. Suponha que (2.7) é falso. Logo, existe $q \in M$ tal que

$$\max_{x\in A_0} Re\Big\{ \big[f(x) - p(x)\big]\overline{q(x)} \Big\} = -2\,\theta$$

para algum $\theta > 0$.

Pela continuidade da função acima, existe um aberto G em X, $A_0 \subset G$, tal que

$$Re\Big\{ \big[f(x) - p(x)\big]\overline{q(x)} \Big\} < -\theta \quad \forall x \in G.$$

Seja $p_1 := p - \lambda q$, onde $\lambda > 0$ é pequeno. Seja $M = \sup\limits_{x\in X} |q(x)|$.

Caso 1. $x \in G$.

Temos

$$\begin{aligned} |f(x) - p_1(x)|^2 &= \big|\big(f(x) - p(x)\big) + \lambda\, q(x)\big|^2 \\ &= \big|f(x) - p(x)\big|^2 + 2\lambda\; Re\Big\{ \big[f(x) - p(x)\big]\overline{q(x)} \Big\} + \lambda^2 |q(x)|^2 \\ &< E^2 - 2\lambda\theta + \lambda^2 M^2 \end{aligned}$$

Se escolhemos $\lambda < M^{-2}\theta$, então $\lambda^2 M^2 < \lambda\theta$, e obtemos

$$|f(x) - p_1(x)|^2 < E^2 - \lambda\,\theta \quad \forall x \in G \tag{2.8}$$

Caso 2. $x \notin G$.

Seja $F = X \setminus G$. Note que $F \subset X$ é fechado e portanto, compacto. Além disso,

$$|f(x) - p(x)| < E \quad \forall x \in F.$$

Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < E - \delta \quad \forall x \in F$$

Se escolhermos λ tal que $\lambda < (2M)^{-1}\delta$, então

$$|f(x) - p_1(x)| \le |f(x) - p(x)| + \lambda |q(x)| < E - \delta + \frac{\delta}{2} = E - \frac{\delta}{2} \quad \forall x \in F \tag{2.9}$$

Segue de (2.8) e (2.9) que tomando $\lambda < min\{M^{-2}\theta, (2M)^{-1}\delta\}$, obtemos

$$\|f - p_1\| < E = \|f - p\|,$$

o que contradiz $p \in P_M(f)$.

Reciprocamente, assuma

$$\max_{x\in A_0} Re\Big\{\big[f(x)-p(x)\big]\overline{q(x)}\Big\} \geq 0 \quad \forall q\in M.$$

Seja p_1 um elemento arbitrário de M. Existe $x_0\in A_0$ tal que para $q=p-p_1$,

$$Re\Big\{\big[f(x_0)-p(x_0)\big]\overline{q(x_0)}\Big\} \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\big|f(x_0)-p_1(x_0)\big|^2 &= \big|f(x_0)-p(x_0)\big|^2+2Re\Big\{\big[f(x_0)-p(x_0)\big]\overline{q(x_0)}\Big\}+\big|q(x_0)\big|^2\\ &\geq \big|f(x_0)-p(x_0)\big|^2=\|f-p\|^2.\end{aligned}$$

Assim, $\|f-p_1\|\geq\|f-p\|$. Portanto, $p\in P_M(f)$. ■

Lema 2.3.6 *Seja X um espaço de Hausdorff compacto que possui pelo menos $n+1$ pontos. Sejam M um subespaço de Haar n-dimensional de $C(X,\mathbb{K})$ e $f\in C(X,\mathbb{K})$. Se $p\in P_M(f)$, então o conjunto*

$$A_0=\big\{x\in X: |f(x)-p(x)|=\|f-p\|\big\}$$

contém pelo menos $n+1$ pontos.

Demonstração. Suponha que $A_0=\{x_1,...,x_s\}$ onde $s\leq n$. Como existe $x\in X$ tal que $|f(x)-p(x)|<\|f-p\|$, temos $\|f-p\|>0$.

Pela Proposição 2.3.4, existe $q\in M$ tal que $q(x_k)=-\big[f(x_k)-p(x_k)\big]$, $\quad k=1,...,s$.

Assim,

$$\max_{x\in A_0} Re\Big\{\big[f(x)-p(x)\big]\overline{q(x)}\Big\}=\max_{1\leq k\leq s}\Big\{-\big|f(x_k)-p(x_k)\big|^2\Big\}=-\|f-p\|^2<0,$$

o que contradiz a Proposição 2.3.5. ■

O próximo teorema é o resultado clássico de Haar sobre a unicidade do elemento de melhor aproximação de qualquer $f\in C(X,\mathbb{K})$ a um subespaço vetorial de dimensão finita.

Teorema 2.3.7 *Sejam X um espaço de Hausdorff compacto contendo pelo menos n pontos e $M\subset C(X,\mathbb{K})$ um subespaço n-dimensional. Então M é um subespaço de Haar se, e somente se, $P_M(f)$ é unitário para cada $f\in C(X,\mathbb{K})$.*

Demonstração. Se X possui exatamente n pontos, pela Proposição 2.3.4, cada função definida em X é igual a um elemento de M determinado de maneira única.

Assim, podemos assumir que X contém pelo menos $n+1$ pontos.

Sejam $f \in C(X,\mathbb{K})$ e $E := \|f-p\|, p \in P_M(f)$. Suponha que $p_1, p_2 \in P_M(f)$. Seja $q = \frac{1}{2}(p_1+p_2)$.

Temos

$$\begin{aligned}\|f-q\| = \left\|\frac{1}{2}(f-p_1)+\frac{1}{2}(f-p_2)\right\| &\le \frac{1}{2}\|f-p_1\|+\frac{1}{2}\|f-p_2\| \\ &= \frac{1}{2}d(f,M)+\frac{1}{2}d(f,M) = d(f,M).\end{aligned}$$

Por outro lado, $d(f,M) \le \|f-q\|$. Logo, $d(f,M) = \|f-q\|$.

Pelo Lema 2.3.6, existem pelo menos $n+1$ pontos $x_1, ..., x_{n+1} \in X$ tais que

$$|f(x_i) - q(x_i)| = d(f,M).$$

Sejam

$$\begin{aligned}\alpha(x_i) :&= f(x_i) - p_1(x_i)\\ \beta(x_i) :&= f(x_i) - p_2(x_i), \quad i = 1, ..., n+1.\end{aligned}$$

Temos $\big|\alpha(x_i)+\beta(x_i)\big| = 2E, \quad |\alpha(x_i)| \le E, \quad |\beta(x_i)| \le E, \quad i = 1, ..., n+1$. Mas isto é possível, somente se $\alpha(x_i) = \beta(x_i)$. Logo, $p_1(x_i) = p_2(x_i), \quad i = 1, ..., n+1$. Como M é um subespaço de Haar, segue que $p_1 = p_2$.

Reciprocamente, suponha que $P_M(f)$ é unitário para cada $f \in C(X,\mathbb{K})$ e provemos que M é um subespaço de Haar. Seja $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ uma base de M.

Suponha, por absurdo, que M não satisfaz a condição de Haar. Logo, pela Proposição 2.3.4, existem n pontos distintos $x_1, ..., x_n \in A$ tais que o sistema linear

$$a_1\phi_1(x_k) + ... + a_n\phi_n(x_k) = 0, \quad k = 1, ..., n \tag{2.10}$$

tem soluções não-triviais.

Escolha uma solução não-nula $(\beta_1, ..., \beta_n)$ do sistema linear (2.10) e seja

$$Q(x) := \beta_1\phi_1(x) + ... + \beta_n\phi_n(x), \quad x \in X.$$

Seja $P_1(x) = \dfrac{Q(x)}{\|Q\|}, \quad x \in X$.

A transposta do sistema linear (2.10)

$$c_1\phi_i(x_1) + ... + c_n\phi_i(x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.11}$$

também possui soluções não-triviais.

Seja $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ uma solução não-nula do sistema (2.11) tal que $\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| = 1$. Alguns dos $\gamma_i's$ podem ser nulos, mas o conjunto

$$L := \Big\{k \in \{1, ..., n\} : \gamma_k \neq 0\Big\} \neq \emptyset.$$

Pelo Teorema de Tietze sobre extensão de funções contínuas, existe $f_0 \in C(X, \mathbb{K})$ tal que

$$\begin{cases} f_0(x_k) &= \dfrac{\overline{\gamma}_k}{|\gamma_k|}, \qquad k \in L \\ |f_0(x)| &\leq \quad 1, \qquad x \in X \end{cases}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} F: \ C(X, \mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ f \qquad &\mapsto \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, f(x_k) \end{aligned}$$

é um funcional linear contínuo e $\|F\| = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| = 1$. Para cada $\phi_i, \ i = 1, ..., n, \ F(\phi_i) = 0$. Logo $F(q) = 0 \quad \forall q \in M$.

Defina

$$f_1(x) := \Big(1 - \big|P_1(x)\big|\Big) f_0(x), \quad x \in X.$$

Temos

$$\begin{aligned} F(f_1) &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Big(1 - \big|P_1(x_k)\big|\Big) f_0(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, f_0(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{\overline{\gamma}_k}{|\gamma_k|} = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k| = 1. \end{aligned}$$

Como $\|F\| = 1$ e $F(q) = 0 \quad \forall q \in M$ segue que

$$1 = F(f_1) = F(f_1 - q) \leq \|F\| \, \|f_1 - q\| = \|f_1 - q\| \quad \forall q \in M.$$

Assim, $1 = F(f_1) \leq d(f_1, M)$.

Para todo $\alpha \in [0, 1]$,

$$\big|f_1(x) - \alpha P_1(x)\big| \leq \big|f_1(x)\big| + \alpha \big|P_1(x)\big| \leq 1 - \big|P_1(x)\big| + \big|P_1(x)\big| = 1 \quad \forall x \in X.$$

Logo,

$$\|f_1 - \alpha P_1\| \leq 1 \leq d(f_1, M).$$

Como $\alpha P_1 \in M$, obtemos

$$\|f_1 - \alpha P_1\| = d(f_1, M) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Assim, $P_M(f_1)$ não é unitário, que é uma contradição. ■

2.4 Projeção Métrica

Nesta seção, estudaremos as propriedades e a continuidade da projeção métrica. Segundo Deustsch [15], este termo foi primeiramente usado em um artigo de Aronszajn e Smith [1].

A projeção métrica é utilizada, por exemplo, para estudar a existência de soluções de desigualdades variacionais em espaços de Banach. Veja [28].

Usaremos a projeção métrica nos capítulos posteriores.

Definição 2.4.1 *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço normado X. A multifunção*

$$\begin{aligned} P_M: \quad X &\to 2^M \\ x &\mapsto P_M(x) \end{aligned}$$

é denominada projeção métrica.

Dizemos que M é proximinal quando $P_M(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$. Quando $P_M(x)$ é unitário para cada $x \in X$, dizemos que M é um conjunto de Chebyshev.

Proposição 2.4.2 *Sejam X um espaço normado e M um subconjunto não vazio de X. Então*

(a) $P_M(x)$ é fechado $\forall x \in X$;

(b) se M é convexo, então $P_M(x)$ é convexo $\forall x \in X$;

(c) se M é aproximativamente compacto, então $P_M(x)$ é não vazio e compacto $\forall x \in X$. Além disso, $P_M(K)$ é compacto para qualquer subconjunto compacto $K \subset X$.

Demonstração. Seja $x \in X$ arbitrário.

(a) Se $y \in \overline{P_M(x)}$, então existe uma sequência (y_n) em $P_M(x)$ tal que $y_n \to y$. Temos $\|x - y_n\| = d(x, M) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\|x - y\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x, M)$.

Portanto, $y \in P_M(x)$.

(b) Se $P_M(x)$ é vazio ou unitário, o resultado é trivial. Sejam $y, z \in P_M(x)$ e $u = \alpha y + (1-\alpha)z$, onde $0 \leq \alpha \leq 1$. Como $\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, M)$, temos

$$\begin{aligned} \|x - u\| = \|\alpha(x - y) + (1-\alpha)(x - z)\| &\leq \alpha\|x - y\| + (1-\alpha)\|x - z\| \\ &= \alpha d(x, M) + (1-\alpha)d(x, M) \\ &= d(x, M). \end{aligned}$$

Note que $u \in M$ pois M é convexo.

Assim,

$$d(x, M) = \|x - u\|$$

ou seja, $u \in P_M(x)$.

(c) Segue do Teorema 2.1.10 que $P_M(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Seja (y_n) uma sequência em $P_M(x)$, isto é,

$$\|x - y_n\| = d(x, M) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Como (y_n) é minimizante para x e M é aproximativamente compacto, existe uma subsequência (y_{n_k}) que converge para um elemento $y \in M$.

Assim, segue de (2.12) que

$$\|x - y\| = \lim_{k \to \infty} \|x - y_{n_k}\| = d(x, M).$$

Portanto, $y \in P_M(x)$.

Provemos agora que $P_M(K)$ é compacto para qualquer compacto $K \subset X$. Seja (y_n) uma sequência em $P_M(K) = \bigcup_{x \in K} P_M(x)$. Existe uma sequência (x_n) em K tal que $y_n \in P_M(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\|y_n - x_n\| = d(x_n, M).$$

Como K é compacto, existem $a \in K$ e uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) tal que $x_{n_j} \to a$.

Temos

$$d(x_{n_j}, M) \to d(a, M)$$

e

$$\begin{aligned} d(a, M) \leq \|a - y_{n_j}\| &\leq \|a - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - y_{n_j}\| \\ &= \|a - x_{n_j}\| + d(x_{n_j}, M). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|a - y_{n_j}\| \to d(a, M).$$

Como $u_j = y_{n_j} \in P_M(K) \subset M \quad \forall j \in \mathbb{N}$ e M é aproximativamente compacto, existem $y \in M$ e uma subsequência (u_{j_i}) de (u_j) tal que $u_{j_i} \to y$.

Temos

$$\|a - u_{j_i}\| \to \|a - y\|.$$

Logo, $\|a - y\| = d(a, M)$, isto é, $y \in P_M(a) \subset P_M(K)$.

Assim, concluímos que $P_M(K)$ é compacto. ∎

Teorema 2.4.3 *Seja X um espaço normado. Se $M \subset X$ é aproximativamente compacto, então $P_M : X \to 2^M$ é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Provemos que

$$P_M^{-1}(F) = \{x \in X : P_M(x) \cap F \neq \emptyset\}$$

é fechado para todo fechado F em M.

Seja $y \in \overline{P_M^{-1}(F)}$. Assim, existe uma sequência (y_n) em $P_M^{-1}(F)$ tal que $y_n \to y$. Seja $v_n \in P_M(y_n) \cap F, \quad n \in \mathbb{N}$. Usando a Proposição 1.0.8, $|d(y_n, M) - d(y, M)| \leq \|y_n - y\|$, obtemos

$$\begin{aligned} d(y, M) &\leq \|y - v_n\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - v_n\| \\ &= \|y - y_n\| + d(y_n, M) \\ &\leq 2\|y - y_n\| + d(y, M). \end{aligned}$$

Como $2\|y - y_n\| + d(y, M) \to d(y, M)$, segue que

$$\|y - v_n\| \to d(y, M). \tag{2.13}$$

Assim, (v_n) é uma sequência minimizante para y. Como M é aproximativamente compacto, existe uma subsequência (v_{n_k}) que converge para um elemento $v_0 \in M$. Segue de (2.13) que

$$d(y, M) = \lim_{k \to \infty} \|y - v_{n_k}\| = \|y - v_0\|.$$

Portanto, $v_0 \in P_M(y) \cap F$. Isto prova que $y \in P_M^{-1}(F)$. ■

Corolário 2.4.4 *Seja X um espaço normado. Se $M \subset X$ é um conjunto de Chebyshev aproximativamente compacto, então a projeção métrica P_M é contínua.*

Demonstração. Como M é aproximativamente compacto, segue do Teorema 2.4.3 que P_M é semicontínua superiormente.

Provemos que P_M é semicontínua inferiormente. Seja G um conjunto aberto em M. Se $x_0 \in P_M^{-1}(G)$, então $P_M(x_0) \cap G \neq \emptyset$. Como P_M é semicontínua superiormente, segue que $\left[P_M^{-1}(G^C)\right]^C$ é aberto em X.

Como M é Chebyshev, $x_0 \in \left[P_M^{-1}(G^C)\right]^C$. Assim, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $U \subset \left[P_M^{-1}(G^C)\right]^C$. Isto implica que $P_M(x) \cap G \neq \emptyset \quad \forall x \in U$. Portanto, $U \subset P_M^{-1}(G)$. ■

Proposição 2.4.5 *Sejam X um espaço de Hilbert, $M \subset X$ um subespaço vetorial Chebyshev, $v \in M$ e $z \in X$. Então $v = P_M(z)$ se, e somente se, $z - v \in M^{\perp}$, isto é, $< z - v, u >= 0$ para todo $u \in M$.*

Demonstração. Sejam $z \in X$ e $v = P_M(z)$. Suponha por absurdo que $z - v \notin M^{\perp}$. Logo, existe $w \in M$ com $\|w\| = 1$ tal que $\langle z - v, w\rangle \neq 0$. Portanto, o elemento $z - v - \langle z - v, w\rangle w$ é ortogonal a w.

Do Teorema de Pitágoras segue que

$$\begin{aligned}
\|z - v\|^2 &= \|z - v - \langle z - v, w\rangle w + \langle z - v, w\rangle w\|^2 \\
&= \|(z - v) - \langle z - v, w\rangle w\|^2 + \|\langle z - v, w\rangle w\|^2 \\
&= \|(z - v) - \langle z - v, w\rangle w\|^2 + |\langle z - v, w\rangle|^2 \\
&> \|(z - v) - \langle z - v, w\rangle w\|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|z - v\| > \|(z - v) - \langle z - v, w\rangle w\|,$$

o que é impossível, pois $v + \langle z - v, w\rangle w \in M$ e $v \in P_M(z)$. Portanto, $z - v \in M^{\perp}$.

Reciprocamente, suponha que $v \in M$ e $z - v \in M^{\perp}$. Então $\langle z - v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in M$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|z - v - u\|^2 = \|z - v\|^2 + \|u\|^2 \geq \|z - v\|^2 \quad \forall u \in M.$$

Logo, $v = P_M(z)$.

Observação 2.4.6 *Se M é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert X, então M é um conjunto de Chebyshev (Corolário 2.2.10).*

Neste caso, P_M coincide com a projeção ortogonal de X sobre M.

Corolário 2.4.7 *Se X é um espaço de Hilbert e $M \subset X$ é um subespaço vetorial Chebyshev, então P_M é um operador linear.*

Demonstração. Sejam $u, v \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Pela Proposição 2.4.5, $u - P_M(u)$ e $v - P_M(v)$ são elementos de $M^{\perp}$. Como $M^{\perp}$ é um subespaço vetorial,

$$\alpha u + \beta v - \big[\alpha P_M(u) + \beta P_M(v)\big] = \alpha\big(u - P_M(u)\big) + \beta\big(v - P_M(v)\big) \in M^{\perp}.$$

Além disso, $\alpha P_M(u) + \beta P_M(v) \in M$. Segue da Proposição 2.4.5 que $\alpha P_M(u) + \beta P_M(v) \in P_M(\alpha u + \beta v)$. Como M é Chebyshev, obtemos

$$\alpha P_M(u) + \beta P_M(v) = P_M(\alpha u + \beta v).$$

■

Capítulo 3

O Teorema de Ky Fan e algumas generalizações

O Teorema de Ky Fan sobre melhor aproximação é uma ferramenta usada em análise não-linear, teoria da aproximação, teoria dos pontos fixos e desigualdades variacionais.

Existem várias generalizações do Teorema de Ky Fan na literatura. Veja o artigo de divulgação de Singh e Carbone [12].

Nesta dissertação, estudaremos os resultados mais conhecidos que se encontram nas referências Reich [34], Prolla [33] e Sehgal-Singh [38], [37].

Apresentaremos também um teorema do tipo Ky-Fan para espaços de Hilbert, demonstrado por Singh e Watson [41], e as aplicações em teoria dos pontos fixos.

3.1 O Teorema de Ky Fan sobre melhor aproximação em espaços normados.

Apresentaremos nesta seção, o teorema de Ky Fan e resultados sobre os pontos fixos, como por exemplo, o Teorema do ponto fixo de Schauder. Estudaremos também uma extensão do Teorema de Ky Fan para subconjuntos aproximativamente compactos de um espaço normado cuja demonstração é baseada no Teorema do ponto fixo de Himmelberg.

A demonstração do lema abaixo encontra-se em Ky Fan [25].

Lema 3.1.1 *Seja C um subconjunto não vazio, compacto e convexo de um espaço normado. Seja A um subconjunto fechado de $C \times C$ tal que*
(a) $(x, x) \in A$ para todo $x \in C$;

(b) para cada $y \in C$ fixado, o conjunto $\{x \in C : (x, y) \notin A\}$ é convexo ou vazio.

Então existe $y_* \in C$ tal que $C \times \{y_*\} \subset A$.

O próximo resultado é o interessante Teorema de Ky Fan sobre melhor aproximação em espaços normados.

Teorema 3.1.2 (Ky Fan - 1969 [26]) *Seja C um subconjunto não vazio, convexo e compacto de um espaço normado X. Se $f : C \to X$ é contínua, então existe $y_* \in C$ tal que*

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

Em particular, se $f(C) \subset C$, então y_* é um ponto fixo de f.

Demonstração. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in C \times C : \|x - f(y)\| \geq \|y - f(y)\|\}.$$

Usando a continuidade de f, é fácil verificar que A é fechado. Além disso, A satisfaz as condições do Lema 3.1.1.

(a) Claramente, $(x, x) \in A \;\; \forall x \in C$.

(b) Seja $y \in C$ fixado arbitrariamente. Provemos que $T := \{x \in C : (x, y) \notin A\}$ é convexo ou vazio. Se $T \neq \emptyset$, sejam $x_1, x_2 \in T$, isto é, $(x_1, y) \notin A$ e $(x_2, y) \notin A$.

Assim

$$\begin{aligned} \|x_1 - f(y)\| &< \|y - f(y)\| \\ \|x_2 - f(y)\| &< \|y - f(y)\|. \end{aligned}$$

Logo, para cada $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \|(1-t)x_1 + tx_2 - f(y)\| &= \|(1-t)x_1 + tx_2 + tf(y) - tf(y) - f(y)\| \\ &\leq (1-t)\|x_1 - f(y)\| + t\|x_2 - f(y)\| \\ &< (1-t)\|y - f(y)\| + t\|y - f(y)\| \\ &= \|y - f(y)\|. \end{aligned}$$

Isto prova que $(1-t)x_1 + tx_2 \in T \;\forall t \in [0, 1]$, ou seja, T é convexo. Usando o Lema 3.1.1, concluímos que existe $y_* \in C$ tal que $C \times \{y_*\} \subset A$, isto é,

$$\|x - f(y_*)\| \geq \|y_* - f(y_*)\| \quad \forall x \in C.$$

Portanto,

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

■

O Teorema do ponto fixo de Schauder é um corolário do Teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.3 (Schauder - 1930 [35]) *Seja C um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de um espaço de Banach X. Se $f : C \to C$ é contínua, então f possui um ponto fixo.*

Demonstração. Note que $d\big(f(y), C\big) = 0 \quad \forall y \in C$, pois $f(y) \in C$. Pelo Teorema de Ky Fan, existe $y_* \in C$ tal que

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big) = 0.$$

Portanto, $f(y_*) = y_*$. ■

Observação 3.1.4 *O Teorema 3.1.3 continua válido se a condição espaço de Banach for substituída por espaço normado.*

Corolário 3.1.5 *Sejam X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e C um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de X. Se $f : C \to X$ é uma função contínua que satisfaz a condição:*
(i) para cada $y \in C$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| < 1$ e $\lambda y + (1-\lambda)f(y) \in C$;
então f possui um ponto fixo.

Demonstração. Suponha que f não possui ponto fixo. Pelo Teorema 3.1.2, existe $y_* \in C$ tal que

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big). \tag{3.1}$$

Por hipótese, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| < 1$ e $x_0 := \lambda y_* + (1-\lambda)f(y_*) \in C$. Temos

$$x_0 - f(y_*) = \lambda\big(y_* - f(y_*)\big). \tag{3.2}$$

Segue das igualdades (3.1) e (3.2) que

$$0 < \|y_* - f(y_*)\| \leq \|x_0 - f(y_*)\| = |\lambda|\ \|y_* - f(y_*)\|.$$

Ou seja, $|\lambda| \geq 1$, o que contradiz o fato de $|\lambda| < 1$. ■

O seguinte exemplo mostra que a condição de compacidade no Teorema de Ky Fan não pode ser eliminada.

Exemplo 3.1.6 *Sejam* $X = \ell_2$ *com a norma usual e* $C = \{x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1\}$.

Note que C *não é compacto, pois dim* $\ell_2 = \infty$.

A função

$$\begin{aligned} f : C &\rightarrow \ell_2 \\ x = (x_1, x_2, ...) &\mapsto (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, ..., x_n, ...) \end{aligned}$$

é contínua. Além disso, $f(C) \subset C$*, pois* $\|f(x)\| = 1 \quad \forall x \in C$.

Se existisse $y_* = (y_1, y_2, ...) \in C$ *tal que*

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big),$$

então $f(y_*) = y_*$*, pois* $f(y_*) \in C$.

Assim,

$$\begin{aligned} \|y_*\| = \|f(y_*)\| = 1 \quad e \quad f(y_*) = y_* &\Rightarrow (0, y_1, y_2, ...) = (y_1, y_2, ...) \\ &\Rightarrow y_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, $y_* = (0, 0, ...)$ *é a sequência com todos os elementos nulos, o que contradiz* $\|y_*\| = 1$.

O próximo resultado é uma extensão do Teorema de Ky Fan para subconjuntos aproximativamente compactos de um espaço normado. A ferramenta utilizada na demonstração é o Teorema de Himmelberg (veja Teorema 1.0.18).

Teorema 3.1.7 (Reich - 1978 [34]) *Seja* X *um espaço normado. Seja* C *um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto de* X*. Se* $f : C \rightarrow X$ *é contínua e* $f(C)$ *é relativamente compacto, então existe* $y_* \in C$ *tal que*

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

Demonstração. Considere a projeção métrica $P_C : X \rightarrow 2^C$.

Defina a função multifunção

$$\begin{aligned} F : C &\rightarrow 2^C \\ x &\mapsto P_C\big(f(x)\big). \end{aligned}$$

Aplicaremos o Teorema de Himmelberg à F. Pelo Teorema 2.4.3, P_C é semicontínua superiormente. Além disso, f é contínua. Logo, F é semicontínua superiormente.

Como C é um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto, segue da Proposição 2.4.2 que $F(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de C para todo $x \in C$.

Provemos agora que $F(C)$ é um subconjunto de um compacto de C.

Temos

$$F(C) \subset \overline{F(C)} = \overline{\bigcup_{x \in C} F(x)} = \overline{\bigcup_{x \in C} P_C\big(f(x)\big)} = \overline{P_C\big(f(C)\big)} \subset P_C\big(\overline{f(C)}\big) \subset C \tag{3.3}$$

Como C é aproximativamente compacto e $\overline{f(C)}$ é compacto, segue da Proposição 2.4.2 que $P_C\big(\overline{f(C)}\big)$ é compacto.

Assim, segue de (3.3) que $F(C)$ está contido em um compacto de C. Pelo Teorema de Himmelberg existe $y_* \in C$ tal que $y_* \in F(y_*)$, ou seja,

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

■

3.2 Teorema do tipo Ky Fan em espaços de Hilbert

Nesta seção, estudaremos um Teorema de melhor aproximação do tipo Ky Fan em espaços de Hilbert, demonstrado por Singh e Watson. Como consequência, apresentaremos demonstrações mais simples de resultados conhecidos sobre pontos fixos.

Definição 3.2.1 *Sejam X e Y espaços normados. Uma função $F : X \to Y$ é dita não expansiva se $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.*

Proposição 3.2.2 *Sejam X um espaço com produto interno, M um subconjunto convexo de X e $P_M(x)$ unitário para cada $x \in X$.*

Então

i. $Re\langle x - P_M(x), P_M(x) - P_M(y)\rangle \geq 0$ *e* $Re\langle P_M(y) - y, P_M(x) - P_M(y)\rangle \geq 0$ $\forall x, y \in X$;

ii. P_M *é não expansiva.*

Demonstração.

i. Como M é convexo, temos

$$\lambda P_M(y) + (1-\lambda)P_M(x) \in M \quad \lambda \in (0,1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|x-P_M(x)\right\|^2 &\leq \left\|x-\lambda P_M(y)-(1-\lambda)P_M(x)\right\|^2 \\
&= \left\|x-P_M(x)+\lambda\big(P_M(x)-P_M(y)\big)\right\|^2 \\
&= \left\|x-P_M(x)\right\|^2+\lambda^2\left\|P_M(x)-P_M(y)\right\|^2+ \\
&+ 2\lambda\ Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda^2\left\|P_M(x)-P_M(y)\right\|^2+2\lambda\ Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle\geq 0.$$

Consequentemente,

$$\lambda\left\|P_M(x)-P_M(y)\right\|^2+2Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle\geq 0\quad\forall\lambda\in(0,1).$$

Fazendo $\lambda\to 0^+$, obtemos

$$Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle\geq 0. \tag{3.4}$$

Analogamente, podemos provar que

$$Re\langle P_M(y)-y,P_M(x)-P_M(y)\rangle\geq 0. \tag{3.5}$$

ii. Segue de **i.** e da desigualdade de Cauchy- Schwarz que

$$\begin{aligned}
\left\|P_M(x)-P_M(y)\right\|^2 &\leq Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle+ \\
&+ Re\langle P_M(y)-y,P_M(x)-P_M(y)\rangle+\left\|P_M(x)-P_M(y)\right\|^2 \\
&= Re\langle x-P_M(x),P_M(x)-P_M(y)\rangle+ \\
&+ Re\langle P_M(x)-P_M(y),P_M(x)-P_M(y)\rangle+ \\
&+ Re\langle P_M(y)-y,P_M(x)-P_M(y)\rangle \\
&= Re\langle x-y,P_M(x)-P_M(y)\rangle \\
&\leq \left|\langle x-y,P_M(x)-P_M(y)\rangle\right| \\
&\leq \|x-y\|\ \|P_M(x)-P_M(y)\|\quad\forall x,y\in X.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|P_M(x)-P_M(y)\|\leq\|x-y\|\quad x,y\in X.$$

■

Utilizaremos o seguinte resultado sobre pontos fixos de funções não expansivas.

Teorema 3.2.3 (Browder 1965 [6]) *Seja B um subconjunto não-vazio, fechado, convexo e limitado de um espaço de Hilbert H. Se $f : B \to B$ é não expansiva, então f tem um ponto fixo.*

O próximo resultado é uma versão do Teorema de Ky Fan para espaços de Hilbert.

Teorema 3.2.4 (Singh, Watson - 1983 [41]) *Seja C um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de um espaço de Hilbert H. Se $f : C \to H$ é não expansiva e $f(C)$ é limitado, então existe $y_* \in C$ tal que*

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

Demonstração. Segue do Corolário 2.2.10 que $P_C(x)$ é unitário para cada $x \in H$. Assim, abusaremos da notação $P_C : H \to C$.

Como $f : C \to H$ e $P_C : H \to C$ são funções não expansivas (veja Proposição 3.2.2), segue-se que $P_C \circ f : C \to C$ é não expansiva. De fato,

$$\big\|P_C\big(f(x)\big) - P_C\big(f(y)\big)\big\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

Sendo $f(C)$ limitado, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\|f(a) - f(b)\| \leq k \quad \forall a, b \in C.$$

Logo,

$$\big\|P_C\big(f(a)\big) - P_C\big(f(b)\big)\big\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq k \quad \forall a, b \in C.$$

Isto mostra que $P_C \circ f(C)$ é limitado.

O conjunto $B := \overline{co\big(P_C \circ f(C)\big)}$ é não-vazio, fechado, limitado e convexo. Assim, pelo Teorema 3.2.3, a função $P \circ f : B \to B$ possui um ponto fixo $y_* \in B$.

Portanto,

$$\|y_* - f(y_*)\| = \big\|P_C\big(f(y_*)\big) - f(y_*)\big\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

■

Exemplo 3.2.5 *Seja $C = [0, \infty)$. A função $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, é não expansiva e $f(C)$ é limitado. De fato,*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \frac{|y - x|}{(1+x)(1+y)} \leq |x - y| \quad \forall x, y \in C; \\ |f(x)| &= \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 3.2.4, verificamos que f possui um ponto fixo $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Note que o Teorema do ponto fixo de Browder não se aplica a este exemplo, pois C não é limitado.

Corolário 3.2.6 *Se C é um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço de Hilbert H e $f : C \to H$ é não expansiva, então existe $y_* \in C$ tal que*

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

Demonstração. Basta mostrar que $f(C)$ é limitado e usar o Teorema 3.2.4.

Como C é limitado, existe $k > 0$ tal que $\|a - b\| \leq k \quad \forall a, b \in C$. Sendo f não expansiva, temos $\|f(a) - f(b)\| \leq \|a - b\| \leq k \quad \forall a, b \in C$.

Portanto, $f(C)$ é limitado. ■

Corolário 3.2.7 (Schöneberg - 1976 [36]) *Seja C um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço de Hilbert H. Se $f : C \to H$ é uma função não expansiva tal que para cada $x \in \partial C$, existe $y \in C$ tal que*

$$\|f(x) - y\| \leq \|x - y\|,$$

então f possui um ponto fixo.

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.6, existe $y_* \in C$ tal que

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big). \tag{3.6}$$

Se $f(y_*) \in C$, claramente $f(y_*) = y_*$.

Suponha que $f(y_*) \notin C$. Temos que $P\big(f(y_*)\big) \in C$ e

$$\Big\|f(y_*) - P\big(f(y_*)\big)\Big\| = d\big(f(y_*), C\big). \tag{3.7}$$

Como $P\big(f(y_*)\big)$ é unitário, segue de (3.6) e (3.7) que $P\big(f(y_*)\big) = y_*$. Como C é fechado, segue da Proposição 2.1.5 que $y_* \in \partial C$. Por hipótese, existe $z \in C$ tal que

$$\|f(y_*) - z\| \leq \|y_* - z\|. \tag{3.8}$$

É fácil verificar que

$$Re\langle f(y_*) - P\big(f(y_*)\big), P\big(f(y_*)\big) - z\rangle \geq 0. \tag{3.9}$$

A demonstração é análoga à da Proposição 3.2.2.

Usando (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}\big\|f(y_*) - P\big(f(y_*)\big)\big\|^2 + \big\|P\big(f(y_*)\big) - z\big\|^2 &\leq \big\|f(y_*) - P\big(f(y_*)\big)\big\|^2 + \big\|P\big(f(y_*)\big) - z\big\|^2 + \\ &+ 2\, Re\langle f(y_*) - P\big(f(y_*)\big), P\big(f(y_*)\big) - z\rangle \\ &= \big\|f(y_*) - P\big(f(y_*)\big) + P\big(f(y_*)\big) - z\big\|^2 \\ &= \big\|f(y_*) - z\big\|^2 \leq \|y_* - z\|^2\end{aligned}$$

Como $\big\|P\big(f(y_*)\big) - z\big\|^2 = \|y_* - z\|^2$, obtemos $\big\|f(y_*) - P\big(f(y_*)\big)\big\|^2 = 0$.

Assim, $y_* = P\big(f(y_*)\big) = f(y_*)$. ■

Corolário 3.2.8 (Browder, Petryshyn - 1967 [7]) *Sejam H um espaço de Hilbert e C um subconjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo. Seja $f : C \to H$ não expansiva e assuma que qualquer $u \in \partial C$ com $u = P_C\big(f(u)\big)$ é um ponto fixo de f. Então f possui um ponto fixo.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.6, existe $y_* \in C$ tal que

$$\|y_* - f(y_*)\| = d\big(f(y_*), C\big).$$

Se $f(y_*) \in C$, claramente $f(y_*) = y_*$.

Se $f(y_*) \notin C$, então segue da Proposição 2.1.5 que $P_C\big(f(y_*)\big) \in \partial C$.

Como $P_C\big(f(y_*)\big)$ é unitário, temos $y_* = P_C\big(f(y_*)\big)$. Assim, segue da hipótese que $f(y_*) = y_*$. ■

3.3 Uma extensão do Teorema de Ky Fan

Uma interessante generalização do Teorema de Ky Fan para espaços normados é o resultado de Prolla [33] para duas funções. Existem várias generalizações e variações do Teorema de Prolla e suas aplicações à teoria dos pontos coincidentes. Veja [8], [9], [29], [31], [32] e [39].

Nesta seção, estudaremos o Teorema de Prolla e sua generalização para subconjuntos aproximativamente compactos de um espaço normado. As principais ferramentas utilizadas são o Teorema do ponto fixo de Bohnenblust-Karlin e o Teorema de Himmelberg, Teorema 1.0.17 e 1.0.18 respectivamente.

Proposição 3.3.1 *Seja X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Sejam C um subconjunto não-vazio e fechado de X e $g : C \to C$ uma função. Para cada $f : C \to X$, seja $\varphi_f : C \to 2^C$ a multifunção definida por*

$$\varphi_f(x) = \{t \in C : \|g(t) - f(x)\| \leq m(x)\} \quad \textit{onde} \quad m(x) = \frac{1}{2}\big[\|g(x) - f(x)\| + d\big(f(x), C\big)\big].$$

i. *Se g é sobrejetora, então $\varphi_f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in C$.*

ii. *Se g é contínua, então $\varphi_f(x)$ é fechado para todo $x \in C$.*

iii. *Se f e g são contínuas, então o gráfico de φ_f é fechado.*

Demonstração.

i. Seja $x \in C$ arbitrário e considere a projeção métrica $P_C : X \to 2^C$. Se $g(x) \in P_C\big(f(x)\big)$, então $x \in \varphi_f(x)$. Assim $\varphi_f(x) \neq \emptyset$.

Suponha que $g(x) \notin P_C\big(f(x)\big)$. Então $\|g(x) - f(x)\| > d\big(f(x), C\big)$ e consequentemente

$$d\big(f(x), C\big) < \frac{1}{2}\Big[\|g(x) - f(x)\| + d\big(f(x), C\big)\Big].$$

Segue da definição de $d\big(f(x), C\big)$ que existe $u \in C$ tal que

$$d\big(f(x), C\big) \leq \|u - f(x)\| < \frac{1}{2}\Big[\|g(x) - f(x)\| + d\big(f(x), C\big)\Big].$$

Como $g(C) = C$, existe $t_0 \in C$ tal que $g(t_0) = u$. Logo, $t_0 \in \varphi_f(x)$ e consequentemente $\varphi_f(x) \neq \emptyset$.

ii. Seja $a \in \overline{\varphi_f(x)}$. Existe uma sequência (a_n) em $\varphi_f(x)$ tal que $a_n \to a$. Como $a_n \in \varphi_f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$\big\|g(a_n) - f(x)\big\| \leq m(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Tomando o limite em ambos os lados da desigualdade (3.10), obtemos

$$\|g(a) - f(x)\| \leq m(x)$$

Portanto, $a \in \varphi_f(x)$.

iii. Seja $(x, y) \in \overline{Gr\varphi_f}$. Existem sequências (x_n) e (y_n) em C tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Como $y_n \in \varphi_f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$\big\|g(y_n) - f(x_n)\big\| \leq \frac{1}{2}\Big[\|g(x_n) - f(x_n)\| + d(x_n, C)\Big]. \tag{3.11}$$

Tomando o limite em ambos os lados da desigualdade (3.11), obtemos

$$\|g(y) - f(x)\| \leq \frac{1}{2}\Big[\|g(x) - f(x)\| + d(x, C)\Big]$$

Portanto, $y \in \varphi_f(x)$ e concluímos que $(x, y) \in Gr\varphi_f$. ∎

Definição 3.3.2 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado X. Uma função $g : C \to X$ é dita quase afim se*

$$\left\| g\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) - y \right\| \leq \lambda \, \|g(t_1) - y\| + (1-\lambda) \, \|g(t_2) - y\|$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in C$, $0 < \lambda < 1$ e $y \in X$.

Exemplo 3.3.3 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado X. Uma função $g : C \to X$ é chamada afim se*

$$g\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) = \lambda g(t_1) + (1-\lambda) g(t_2)$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in C$ e $0 < \lambda < 1$.

Toda função afim é quase afim.

De fato

$$\begin{aligned} \|g\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) - y\| &= \|\lambda g(t_1) + (1-\lambda) g(t_2) - y\| \\ &= \|\lambda g(t_1) - \lambda y + \lambda y + (1-\lambda) g(t_2) - y\| \\ &\leq \|\lambda\big(g(t_1) - y\big) + (1-\lambda)\big(g(t_2) - y\big)\| \\ &\leq \lambda \|g(t_1) - y\| + (1-\lambda)\|g(t_2) - y\|. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.4 *Sejam C um subconjunto convexo de um espaço normado X e $f : C \to X$ uma função. Se $g : C \to X$ é quase afim, então $\varphi_f(x)$ é convexo para todo $x \in C$.*

Demonstração. Sejam $t_1, t_2 \in \varphi_f(x)$. Para cada $0 < \lambda < 1$, temos

$$\begin{aligned} \left\| g\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) - f(x) \right\| &\leq \lambda \big\| g(t_1) - f(x) \big\| + (1-\lambda) \big\| g(t_2) - f(x) \big\| \\ &\leq \lambda \, m(x) + (1-\lambda) \, m(x) = m(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \in \varphi_f(x)$. ■

Teorema 3.3.5 (Prolla - 1983 [33]) *Sejam C um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de um espaço normado X e $g : C \to C$ uma função contínua quase afim e sobrejetora. Então para cada função contínua $f : C \to X$ existe $z \in C$ tal que*

$$\|g(z) - f(z)\| = d\big(f(z), C\big).$$

Demonstração. Segue das Proposições 3.3.1 e 3.3.4 que $\varphi_f(x)$ é um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de C para cada $x \in C$. Além disso, o gráfico de φ_f é fechado. Pelo Teorema do ponto fixo de Bonhenblust e Karlin existe $z \in C$ tal que $z \in \varphi_f(z)$. Isto implica que $g(z) \in P_C\big(f(z)\big)$, ou seja,

$$\|g(z) - f(z)\| = d\big(f(z), C\big).$$

■

Observação 3.3.6 *Nas condições do teorema anterior, temos:*

i. se $g = I$, a função identidade, obtemos o Teorema de Ky Fan(Teorema 3.1.2);

ii. se $f(x) \in C$ para todo $x \in C$, um resultado de coincidência é obtido, isto é, existe $z \in C$ tal que $f(z) = g(z)$.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema de Prolla para o caso em que C é um subconjunto aproximativamente compacto de um espaço normado X.

Teorema 3.3.7 (Sehgal e Singh - 1989 [38]) *Seja C um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto de um espaço normado X. Seja $g : C \to C$ uma função contínua, quase afim e sobrejetora tal que $g^{-1}(D)$ é compacto para qualquer compacto $D \subset C$.*

Então para qualquer função contínua $f : C \to X$ com $f(C)$ relativamente compacto, existe $z \in C$ tal que

$$\|g(z) - f(z)\| = d\big(f(z), C\big).$$

Demonstração. Considere a projeção métrica $P_C : X \to 2^C$. Defina a multifunção $G : C \to 2^C$ por $G(x) = \big\{y \in C : g(y) \in P_C\big(f(x)\big)\big\}$.

Usaremos o Teorema de Himmelberg aplicado a G.

Afirmação 1. $G(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in C$.

Como C é aproximativamente compacto, segue do Teorema 2.1.10 que $P_C\big(f(x)\big) \neq \emptyset \quad \forall x \in C$. Seja $u \in P_C\big(f(x)\big)$. Como $g(C) = C$, existe $v \in C$ tal que $g(v) = u$. Logo, $v \in G(x)$.

Afirmação 2. $G(x)$ é fechado $\forall x \in C$.

Se $y \in \overline{G(x)}$, então existe uma sequência (y_n) em $G(x)$ tal que $y_n \to y$. Temos $g(y_n) \in P_C\big(f(x)\big) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como g é contínua, segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g\big(\lim_{n\to\infty} y_n\big) = g(y).$$

Pela Proposição 2.4.2, $P_C\big(f(x)\big)$ é fechado $\forall x \in C$. Logo, $g(y) \in P_C\big(f(x)\big)$ e concluímos que $y \in G(x)$.

Afirmação 3. $G(x)$ é convexo $\forall x \in C$.

Sejam $y_1, y_2 \in G(x)$, isto é, $y_1, y_2 \in C$ e $g(y_1), g(y_2) \in P_C\big(f(x)\big)$. Como C é convexo, $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in C$ para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$.

Sendo g quase afim, obtemos

$$\begin{aligned} d\big(f(x), C\big) &\leq \big\|g(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) - f(x)\big\| \\ &\leq \lambda\big\|g(y_1) - f(x)\big\| + (1-\lambda)\big\|g(y_2) - f(x)\big\| \\ &= d\big(f(x), C\big). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\big\|g\big(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) - f(x)\big\| = d\big(f(x), C\big).$$

Assim, $g\big(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) \in P_C\big(f(x)\big)$ e concluímos que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in G(x)$.

Afirmação 4. G é semicontínua superiormente.

Provemos que $G^{-1}(A)$ é fechado para qualquer fechado A em C.

Seja $x \in \overline{G^{-1}(A)}$. Existe uma sequência (x_n) em $G^{-1}(A)$ tal que $x_n \to x$. Como $x_n \in G^{-1}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, segue-se que $G(x_n) \cap A \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Escolha uma sequência (y_n) em C tal que $y_n \in G(x_n) \cap A$. Isto implica que

$$\|g(y_n) - f(x_n)\| = d\big(f(x_n), C\big). \tag{3.12}$$

Pela Proposição 2.4.2, $P_C\big(\overline{f(C)}\big)$ é um subconjunto compacto de C. Assim, segue da hipótese que $g^{-1}\Big(P_C\big(\overline{f(C)}\big)\Big)$ é um subconjunto compacto de C. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n \in G(x_n) = g^{-1}\Big(P_C\big(f(x_n)\big)\Big) \subset g^{-1}\Big(P_C\big(f(C)\big)\Big) \subset g^{-1}\Big(P_C\big(\overline{f(C)}\big)\Big).$$

Logo, pela compacidade de $g^{-1}\Big(P_C\big(\overline{f(C)}\big)\Big)$ existem $y \in C$ e uma subsequência (y_{n_j}) da sequência (y_n) tal que $y_{n_j} \to y$.

Assim, segue de (3.12) que

$$\|g(y) - f(x)\| = d\big(f(x), C\big).$$

Isto implica que $y \in G(x) \cap A$, ou seja, $x \in G^{-1}(A)$.

Afirmação 5. $G(C)$ é um subconjunto compacto de C.

De fato,

$$G(C) = \bigcup_{x\in C} G(x) = \bigcup_{x\in C} g^{-1}\Big(P_C\big(f(x)\big)\Big) \subset g^{-1}\Big(P_C\big(f(C)\big)\Big) \subset g^{-1}\Big(P_C\big(\overline{f(C)}\big)\Big).$$

Assim, pelo Teorema de Himmelberg, existe $z \in C$ tal que $z \in G(z)$. Isto implica que

$$\|g(z) - f(z)\| = d\big(f(z), C\big).$$

■

3.4 Um teorema do tipo Ky Fan para multifunções

Nesta seção, apresentaremos um teorema do tipo Ky Fan para multifunções contínuas, demonstrado por Sehgal e Singh.

Teorema 3.4.1 (Sehgal e Singh - 1988 [37]) *Seja C um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto de um espaço normado X. Se $F : C \to 2^X$ é uma multifunção contínua tal que $F(x)$ é não-vazio, convexo e fechado para todo $x \in C$ e $F(C)$ é relativamente compacto, então existe $u \in C$ tal que*

$$d\big(u, F(u)\big) = d\big(F(u), C\big).$$

Além disso, se $d\big(u, F(u)\big) > 0$, então $u \in \partial C$.

Demonstração. Considere a projeção métrica $P_C : X \to 2^C$. Defina $G : C \to 2^C$ por

$$G(x) = \bigcup \Big\{P_C(y) : y \in F(x), d\big(F(x), C\big) = d(y, C)\Big\}.$$

Usaremos o Teorema de Himmelberg aplicado a multifunção G.

Afirmação 1. $G(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in C$.

Temos $F(C) = \bigcup_{x\in C} F(x)$. Seja $x \in C$. Por hipótese, $\overline{F(C)}$ é compacto. Como $F(x)$ é fechado e $F(x) \subset \overline{F(C)}$, segue-se que $F(x)$ é compacto.

Caso 1: $F(x) \cap C \neq \emptyset$.

Neste caso, existe $y_0 \in F(x) \cap C$ e consequentemente,

$$d\big(F(x), C\big) = d(y_0, C) = 0 \quad e \quad y_0 \in P_C(y_0).$$

Assim, $y_0 \in G(x)$. Logo, $G(x) \neq \emptyset$.

Caso 2: $F(x) \cap C = \emptyset$.

Como $F(x)$ é compacto, C é fechado e $F(x) \cap C = \emptyset$, existe $y_1 \in F(x)$ tal que $d\big(F(x), C\big) = d(y_1, C)$.

Sendo C aproximativamente compacto, segue do Teorema 2.1.10 que $P_C(y_1) \neq \emptyset$. Consequentemente, $G(x) \neq \emptyset$.

Afirmação 2. $G(x)$ é convexo $\forall x \in C$.

Sejam $u, v \in G(x)$. Existem $y_1, y_2 \in F(x)$ tais que $u \in P_C(y_1)$, $v \in P_C(y_2)$ e

$$\|y_1 - u\| = d(y_1, C) = d\big(F(x), C\big) = d(y_2, C) = \|y_2 - v\|.$$

Sejam $t \in [0,1]$ arbitrário, $w = tu + (1-t)v$ e $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$. Como C e $F(x)$ são convexos, $w \in C$ e $y_3 \in F(x)$.

Temos

$$\begin{aligned}
d(y_3, C) &\leq \|y_3 - w\| \\
&= \|ty_1 + (1-t)y_2 - tu - (1-t)v\| \\
&= \|t(y_1 - u) + (1-t)(y_2 - v)\| \\
&\leq t\|y_1 - u\| + (1-t)\|y_2 - v\| \\
&= d\big(F(x), C\big) \\
&\leq d(y_3, C)
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$d(y_3, C) = \|y_3 - w\| = d\big(F(x), C\big).$$

Consequentemente, $w \in P_C(y_3) \cap G(x)$.

Portanto, $G(x)$ é convexo.

Afirmação 3. $G(x)$ é fechado $\forall x \in C$.

Seja $x \in C$ arbitrário. Seja $M_x = \{y \in F(x) : d\big(F(x), C\big) = d(y, C)\}$. Provemos que M_x é fechado.

Seja $a \in \overline{M_x}$. Existe uma sequência (y_n) em $F(x)$ tal que $y_n \to a$. Como $F(x)$ é fechado, $a \in F(x)$.

Temos

$$d\big(F(x), C\big) = d(y_n, C) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d\big(F(x), C\big) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, C) = d(a, C).$$

Assim,

$$d\big(F(x), C\big) = d(a, C)$$

e concluímos que $a \in M_x$.

Como $M_x \subset F(x)$, M_x é fechado e $F(x)$ é compacto, segue-se que M_x é compacto.

Temos

$$G(x) = \bigcup_{y \in M_x} P_C(y) = P_C(M_x).$$

Como C é aproximativamente compacto e M_x é compacto, segue da Proposição 2.4.2 que $P_C(M_x)$ é compacto, isto é, $G(x)$ é compacto. Consequentemente, $G(x)$ é fechado.

Afirmação 4. G é semicontínua superiormente.

Basta mostrar que $G^{-1}(A)$ é fechado para qualquer fechado A de C.

Seja $x_0 \in \overline{G^{-1}(A)}$. Existe uma sequência (x_n) em $G^{-1}(A)$ tal que $x_n \to x_0$. Como $G(x_n) \cap A \neq \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos escolher uma sequência (z_n) com $z_n \in G(x_n) \cap A\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Segue da definição de G que existe $y_n \in F(x_n)$ tal que

$$d\big(F(x_n), C\big) = d(y_n, C) \quad e \quad z_n \in P_C(y_n).$$

Como $\overline{F(C)}$ é compacto e $y_n \in F(C) \quad \forall n \in \mathbb{N}$; existem $y_0 \in X$ e uma subsequência (y_{n_j}) de (y_n) tal que $y_{n_j} \to y_0$.

Temos que $(x_{n_j}, y_{n_j}) \in GrF \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Sendo F semicontínua superiormente com valores compactos, segue da Proposição 1.0.13 que GrF é fechado. Logo, $y_0 \in F(x_0)$.

Temos

$$z_{n_j} \in P_C(y_{n_j}) \subset P_C\big(F(x_{n_j})\big) \subset P_C\big(\overline{F(C)}\big) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Como C é aproximativamente compacto e $\overline{F(C)}$ é compacto, segue da Proposição 2.4.2 que $P_C\big(\overline{F(C)}\big)$ é compacto. Assim, existem $z_0 \in C$ e uma subsequência (v_{j_k}) de (v_j), $v_j = z_{n_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$, tal que $v_{j_k} \to z_0$.

Como P_C é semicontínua superiormente com valores compactos, a Proposição 1.0.13 garante que GrP_C é fechado. Assim, $z_0 \in P_C(y_0)$.

Segue da hipótese que a função $g : C \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = d\big(F(x), C\big)$ é contínua. Logo, $d\big(F(x_n), C\big) \to d\big(F(x_0), C\big)$. Além disso, $d(y_{n_j}, C) \to d(y_0, C)$.

Como $d\big(F(x_{n_j}), C\big) = d(y_{n_j}, C\big)$, concluímos que $d\big(F(x_0), C\big) = d(y_0, C)$. Consequentemente, $z_0 \in G(x_0) \cap A$, isto é, $x_0 \in G^{-1}(A)$.

Assim, $G^{-1}(A)$ é fechado.

Afirmação 5. $G(C)$ é um subconjunto de um compacto de C.

Temos

$$G(C) = \bigcup_{x \in C} G(x) \subset \bigcup_{x \in C} P_C\big(F(x)\big) = P_C\big(F(C)\big) \subset P_C\big(\overline{F(C)}\big) \subset C. \tag{3.13}$$

Como C é aproximativamente compacto e $\overline{F(C)}$ é compacto, segue da Proposição 2.4.2 que $P_C\big(\overline{F(C)}\big)$ é compacto. Assim, segue de (3.13) que $G(C)$ está contido em um compacto de C.

Agora podemos usar o Teorema de Himmelberg que garante a existência de $u \in C$ tal que $u \in G(u)$. Isto implica que existe $y \in F(u)$ com $d\big(F(u), C\big) = d(y, C)$.

Temos

$$d\big(u, F(u)\big) \leq \|u - y\| = d(y, C) = d\big(F(u), C\big) \leq d\big(u, F(u)\big).$$

Portanto, $d\big(u, F(u)\big) = d\big(F(u), C\big)$.

Se $d\big(u, F(u)\big) > 0$, então $F(u) \cap C = \emptyset$. Como $F(u)$ é compacto, segue do Teorema 2.1.10 que $P_{F(u)}(u) \neq \emptyset$.

Escolha $w \in F(u)$ tal que $d\big(u, F(u)\big) = \|u - w\|$. Se u é um ponto interior de C, então existe $v \in (u, w) \cap C$, onde (u, w) é o segmento aberto entre u e w.

Temos

$$d\big(F(u), C\big) \leq \|v - w\| < \|u - w\| = d\big(u, F(u)\big) = d\big(F(u), C\big),$$

uma contradição. Portanto, $u \in \partial C$. ■

O seguinte exemplo de Waters [45] mostra que a continuidade da multifunção F não pode ser substituída somente pela semicontinuidade superior.

Exemplo 3.4.2 *Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana e seja $C = [0, 1] \times \{0\}$.*

Claramente, C é não-vazio, convexo e compacto.

Definamos $F : C \to 2^X$ por

$$F(\alpha, 0) = \begin{cases} (0, 1) & \text{se} \quad \alpha \neq 0 \\ L & \text{se} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

onde L é o segmento $\Big[(0, 1), (1, 0)\Big]$.

Para qualquer $A \subset X$,

$$F^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{se} \quad A \cap L = \emptyset \\ C & \text{se} \quad (0, 1) \in A \\ (0, 0) & \text{se} \quad (0, 1) \notin A, A \cap L \neq \emptyset. \end{cases}$$

Portanto, F é semicontínua superiormente, mas não é semicontínua inferiormente. Além disso, $F(C)$ é compacto.

Contudo, para qualquer $(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2$, temos

a) se $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} d\big(F(\alpha,0),C\big) &= \inf_{\beta\in[0,1]} \|(0,1)-(\beta,0)\| \\ &= \inf_{\beta\in[0,1]} \|(-\beta,1)\| \\ &= \inf_{\beta\in[0,1]} \sqrt{\beta^2+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\big((\alpha,0),F(\alpha,0)\big) &= \|(\alpha,0)-(0,1)\| \\ &= \|(\alpha,-1)\| \\ &= \sqrt{\alpha^2+1} > 1, \end{aligned}$$

b) se $\alpha = 0$:

$$d\big(F(\alpha,0),C\big) = d(L,C) = 0, \quad \textit{pois} \quad L\cap C = \big\{(0,1)\big\} \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} d\big((\alpha,0),F(\alpha,0)\big) &= d\big((0,0),L\big) \\ &= \inf_{u\in L} \|(0,0)-u\| \\ &= \inf_{t\in[0,1]} \Big\|(0,0)-\big[(1-t)(0,1)+t(1,0)\big]\Big\| \\ &= \inf_{t\in[0,1]} \|(-t,-1+t)\| \\ &= \inf_{t\in[0,1]} \sqrt{t^2+(t-1)^2} \\ &= \inf_{t\in[0,1]} \sqrt{2t^2-2t+1}\,. \end{aligned}$$

Seja $g(t) = \sqrt{2t^2-2t+1}$. Temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2}(2t^2-2t+1)^{-\frac{1}{2}}(4t-2) \\ g'(t) &= 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$d\big((\alpha,0),F(\alpha,0)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Portanto, F não satisfaz a conclusão do Teorema 3.4.1.

Capítulo 4

Par de Melhor Proximidade

Sejam A e B subconjuntos não-vazios de um espaço normado X. Se $T : A \to 2^B$ é uma multifunção, considere a função real

$$x \mapsto d(x, Tx), x \in A$$

Claramente,

$$d(x, Tx) \geq d(A, B) \quad \forall x \in A.$$

Se existe $x_0 \in A$ tal que

$$d(x_0, Tx_0) = d(A, B),$$

dizemos que (x_0, Tx_0) é um par de melhor proximidade da multifunção T. Note que se $A = B$ tem-se um ponto fixo de T.

Vários autores têm estudado o problema de existência de par de proximidade de uma multifunção ([3], [14], [20] e [21]).

Neste capítulo, estudaremos o Teorema de Basha e Veeramani que garante a existência de um par de melhor proximidade quando T é uma multifunção semicontínua superiormente. Uma aplicação desse resultado em teoria dos jogos pode ser encontrado em [43]. Trata-se de um Teorema sobre a existência de um par de equilíbrio para jogos generalizados com restrições.

4.1 Teorema sobre pares de melhor proximidade de multifunções

Nesta seção, introduziremos a definição de multifunção fatorável de Kakutani e apresentaremos o Teorema de existência de par de melhor proximidade demonstrado por Basha e Veeramani. A ferramenta utilizada é o Teorema do ponto fixo de Lassonde.

Definição 4.1.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma multifunção $\varphi : X \to 2^Y$ é dita multifunção de Kakutani se as seguintes condições são satisfeitas:*

i. *φ é semicontínua superiormente;*

ii. *ou $\varphi(x)$ é unitário para cada $x \in X$ (nesse caso exige-se que Y seja um espaço vetorial topológico de Hausdorff) ou para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de Y (neste caso exige-se que Y seja um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff).*

O conjunto de todas as multifunções de Kakutani de X em Y é denotado por $K(X, Y)$.

Exemplo 4.1.2 *Sejam X um espaço normado e M um subconjunto não-vazio, convexo e aproximativamente compacto de X.*

O Teorema 2.4.3 assegura que a projeção métrica $P_M : X \to 2^M$ é semicontínua superiormente e segue da Proposição 2.4.2 que $P_M(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de M. Portanto, P_M é uma multifunção de Kakutani.

Definição 4.1.3 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma multifunção $\varphi : X \to 2^Y$ é chamada multifunção fatorável de Kakutani se φ é a composição de um número finito de multifunções de Kakutani.*

Se $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_n$ é uma multifunção fatorável de Kakutani , as multifunções de Kakutani $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ são chamadas de fatores de φ.

Mesmo que $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tenham valores convexos, φ nem sempre tem valores convexos.

Exemplo 4.1.4 *Considere $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana. Sejam $C = [0, 1] \times [0, 1]$ e $A = \{(x, y) \in C : \|(x, y)\| \leq 1\}$.*

Sejam $\varphi_1 : C \to 2^C$ e $\varphi_2 : C \to 2^A$ multifunções definidas por

$$\varphi_1(x, y) = \{(a, 1 - y) : 0 \leq a \leq 1\} \quad \forall (x, y) \in C;$$

$$\varphi_2(x,y) = P_A(x,y) = \begin{cases} \big\{(x,y)\big\} & se \quad (x,y) \in A \\ \left\{ \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\} & se \quad (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Claramente φ_1 e φ_2 são multifunções de Kakutani, mas $\varphi_2 \circ \varphi_1 : C \to 2^A$ é uma multifunção fatorável de Kakutani tal que $\varphi_2\big(\varphi_1(x,y)\big)$ não é convexo $\forall (x,y) \in C$.

Usaremos o seguinte Teorema do ponto fixo de multifunções fatoráveis de Kakutani.

Teorema 4.1.5 (Lassonde- 1990) *Se S é um subconjunto não-vazio e convexo de um espaço vetorial topológico localmente convexo e de Hausdorff, então qualquer multifunção fatorável de Kakutani compacta $\varphi : S \to 2^S$ possui um ponto fixo.*

Sejam A e B subconjuntos não-vazios de um espaço normado. Usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} A_0 : &= \{a \in A : \|a - b\| = d(A,B), para\ algum\ b \in B\} \quad e \\ B_0 : &= \{b \in B : \|a - b\| = d(A,B), para\ algum\ a \in A\}. \end{aligned}$$

Se $A = \{x\}$, então $d(A,B)$ é escrito como $d(x,B)$.

Se $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$, então escrevemos $d(A,B)$ na forma $\|x - y\|$.

Definição 4.1.6 *Sejam A e B subconjuntos não-vazios de um espaço normado X e $\varphi : A \to 2^B$ uma multifunção.*

O par $\big(x, \varphi(x)\big)$ é denominado par de melhor proximidade de φ se $d\big(x, \varphi(x)\big) = d(A,B)$.

Exemplo 4.1.7 *Sejam $X = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana, $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$. Seja $\varphi : A \to 2^B$ definida por $\varphi(x,0) = \{(x+1,1)\}$.*

Temos $d(A,B) = 1$, $A_0 = A$ e $B_0 = B$.

Claramente, não existe um par $\big(\overline{a}, \varphi(\overline{a})\big) \in A \times B$ tal que $\|\overline{a} - \varphi(\overline{a})\| = d(A,B)$.

Exemplo 4.1.8 *Sejam $X = \mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$.*

Temos $d(A,B) = 1$, $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = 0\}$ e $B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = 1\}$.

Considere a projeção métrica $P_B : \mathbb{R}^2 \to 2^B$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow 2^B \\ (x,y) &\mapsto P_B(x,y) \end{aligned}$$

a restrição de P_B ao subconjunto A.

Note que

$$\varphi(x,0) = P_B(x,0) = \big\{(x,1)\big\},\ 0 \le x \le 2 \quad e \quad d\big((x,0),\varphi(x,0)\big) = \big\|(x,0)-(x,1)\big\| = 1.$$

Logo,

$$d\big((x,0),\varphi(x,0)\big) = d(A,B) \quad se \quad 0 \le x \le 2.$$

Lema 4.1.9 *Se A e B são subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de um espaço normado X, então*

i. $A_0 \neq \emptyset$ *e* $B_0 \neq \emptyset$*;*

ii. A_0 *e* B_0 *são convexos;*

iii. A_0 *e* B_0 *são compactos.*

Demonstração.

i. Considere a função

$$\begin{aligned} g : A &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto d(a,B) \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf\{d(a,B) : a \in A\} \\ &= \inf\{g(a) : a \in A\}. \end{aligned}$$

Como g é contínua no compacto A, existe $a_0 \in A$ tal que $d(A,B) = g(a_0) = d(a_0,B)$. A função

$$\begin{aligned} h : B &\to \mathbb{R} \\ b &\mapsto \|a_0 - b\| \end{aligned}$$

é contínua no compacto B e portanto, existe $b_0 \in B$ tal que

$$\begin{aligned} \|a_0 - b_0\| = h(b_0) &= \inf\{h(b) : b \in B\} \\ &= \inf\{\|a_0 - b_0\| : b \in B\} \\ &= d(a_0,B). \end{aligned}$$

Assim,

$$d(A,B) = d(a_0,B) = \|a_0 - b_0\|$$

e concluímos que $A_0 \neq \emptyset$ e $B_0 \neq \emptyset$.

ii. Sejam $a_1, a_2 \in A_0$. Existem $b_1, b_2 \in B$ tais que $\|a_1 - b_1\| = d(A,B)$ e $\|a_2 - b_2\| = d(A,B)$.

Assim, para cada $\lambda \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned} \big\|\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 - \lambda b_1 - (1-\lambda)b_2\big\| &= \big\|\lambda(a_1 - b_1) + (1-\lambda)(a_2 - b_2)\big\| \\ &\leq \lambda\|a_1 - b_1\| + (1-\lambda)\|a_2 - b_2\| \qquad (4.1) \\ &= d(A,B). \end{aligned}$$

Como A e B são convexos, $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$ e $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$ para cada $\lambda \in [0,1]$. Consequentemente,

$$d(A,B) \leq \big\|\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 - \lambda b_1 - (1-\lambda)b_2\big\|. \qquad (4.2)$$

Segue de (4.1) e (4.2) que

$$\big\|\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 - \lambda b_1 - (1-\lambda)b_2\big\| = d(A,B).$$

Logo, $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A_0$. Isto prova que A_0 é convexo.

Analogamente, prova-se que B_0 é convexo.

iii. Para mostrar que A_0 é compacto, basta mostrar que A_0 é fechado pois A_0 é subconjunto do compacto A.

Seja $a \in \overline{A_0}$. Existe uma sequência (a_n) em A_0 tal que $a_n \to a$. Para cada $a_n \in A_0$ existe $b_n \in B$ tal que $\|a_n - b_n\| = d(A,B)$. Como B é compacto, existem $b \in B$ e uma subsequência (b_{n_k}) de (b_n) tal que $b_{n_k} \to b$. Logo, $\|a_{n_k} - b_{n_k}\| \to \|a - b\|$ e consequentemente $\|a - b\| = d(A,B)$, isto é, $a \in A_0$.

A demonstração da compacidade de B é análoga e portanto será omitida. ■

O próximo resultado é um Teorema de existência de par de melhor proximidade.

Teorema 4.1.10 (Basha - Veeramani - 1997 [3]) *Sejam A e B subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de um espaço normado X e seja $\varphi : A \to 2^B$ uma multifunção semicontínua superiormente. Além disso, assuma que para cada $x \in A$, $\varphi(x)$ é um subconjunto não-vazio, fechado e convexo de B e $\varphi(A_0) \subset B_0$. Então existe $z \in A$ tal que*

$$d\big(z, \varphi(z)\big) = d(A,B).$$

Demonstração. Considere a projeção métrica $P_A : X \to 2^A$. Como A é não-vazio, compacto e convexo, segue da Proposição 2.4.2 que $P_A(x)$ é não-vazio, compacto e convexo para todo $x \in X$.

Pelo Lema 4.1.9, A_0 e B_0 são subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de A e B, respectivamente.

Como $\varphi(A_0) \subset B_0$, podemos definir a multifunção

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A_0 &\to 2^{B_0} \\ a &\mapsto \varphi(a). \end{aligned}$$

Afirmação 1. φ_1 é uma multifunção de Kakutani.

i. φ_1 é semicontínua superiormente.

De fato, seja F fechado em B_0. Provemos que $\varphi_1^{-1}(F)$ é fechado em A_0.

Temos

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(F) &= \{x \in A_0 : \varphi_1(x) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in A_0 : \varphi(x) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= A_0 \cap \{x \in A : \varphi(x) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= A_0 \cap \varphi^{-1}(F). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como B_0 é fechado em X, tem-se que F é fechado em B também.

Assim, $\varphi^{-1}(F)$ é fechado em A, pois φ é semicontínua superiormente. Logo $\varphi_1^{-1}(F)$ é fechado em A_0.

ii. Temos B_0 convexo e claramente $\varphi_1(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de $B_0 \quad \forall x \in A_0$.

Segue de **i** e **ii** que φ_1 é uma multifunção de Kakutani.

Afirmação 2. $P_A(B_0) \subset A_0$.

Seja $y \in P_A(B_0)$. Existe $u \in B_0$ tal que $y \in P_A(u)$, isto é, $\|y - u\| = d(u, A)$. Como $u \in B_0$, existe $a \in A$ tal que $\|a - u\| = d(A, B)$.

Temos

$$\|u - y\| = d(u, A) \leq \|u - a\| = d(A, B).$$

Como $u \in B$ e $y \in A$, obtemos $\|u - y\| = d(A, B)$. Isto implica que $y \in A_0$. Usando a afirmação 2, podemos definir a multifunção

$$\begin{aligned} P_1 : B_0 &\to 2^{A_0} \\ x &\mapsto P_A(x). \end{aligned}$$

Afirmação 3. P_1 é uma multifunção de Kakutani.

iii. P_1 é semicontínua superiormente.

De fato, seja C um fechado em A_0. Provemos que

$$P_1^{-1}(C) = \{x \in B_0 : P_1(x) \cap C \neq \emptyset\}$$

é fechado em B_0.

Seja $x \in \overline{P_1^{-1}(C)}$. Existe uma sequência (x_n) em $P_1^{-1}(C)$ tal que $x_n \to x$. Como $P_1(x_n) \cap C \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência (y_n) em $P_1(x_n) \cap C$. Assim, $\|y_n - x_n\| = d(x_n, A) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como C é fechado, A_0 é compacto e $C \subset A_0$, segue-se que C é compacto. Logo, existem $y \in C$ e uma subsequência (y_{n_j}) de (y_n) tal que $y_{n_j} \to y$.

Temos

$$\begin{aligned} \|y - x\| &\leq \|y - y_{n_j}\| + \|y_{n_j} - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - x\| \\ &= \|y - y_{n_j}\| + d(x_{n_j}, A) + \|x_{n_j} - x\| \end{aligned}$$

e

$$y_{n_j} \to y, \quad d(x_{n_j}, A) \to d(x, A), \quad x_{n_j} \to x.$$

Consequentemente, $\|y - x\| \leq d(x, A)$. Como $y \in A$, obtemos $\|y - x\| = d(x, A)$. Logo, $y \in P_A(x)$ e $x \in B_0$.

Assim, $P_A(x) \cap C \neq \emptyset$ e concluímos que $x \in P_1^{-1}(C)$.

iv. A_0 é convexo e $P_1(x)$ é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de A_0 para cada $x \in B_0$.

Segue de **iii** e **iv** que P_1 é uma multifunção de Kakutani. Segue das afirmações 1 e 3 que $P_1 \circ \varphi_1 : A_0 \to 2^{A_0}$ é uma multifunção fatorável de Kakutani. Além disso, $P_1 \circ \varphi_1$ é uma multifunção compacta, pois A_0 é compacto e

$$P_1\big(\varphi_1(A_0)\big) = P_A\big(\varphi(A_0)\big) \subset P_A(B_0) \subset A_0.$$

Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Lassonde 4.1.5, existe $z \in A_0$ tal que $z \in P_1\big(\varphi_1(z)\big)$. Como $z \in P_1\big(\varphi_1(z)\big)$, existe $v \in \varphi_1(z)$ tal que $\|z - v\| = d(v, A)$. Além disso, $\varphi_1(z) \subset B_0$ implica que existe $a \in A$ tal que $\|v - a\| = d(A, B)$.

Logo,

$$\|z - v\| = d(v, A) \leq \|v - a\| = d(A, B).$$

Como $z \in A$ e $v \in B$, obtemos

$$\|z - v\| = d(A, B).$$

Consequentemente,

$$d\big(z, \varphi(z)\big) = d\big(z, \varphi_1(z)\big) \leq \|z - v\| = d(A, B).$$

Portanto, $d\big(z, \varphi(z)\big) = d(A, B)$. ■

4.2 Jogos generalizados com restrições

Nesta seção, apresentaremos uma aplicação do Teorema de existência do par de melhor proximidade (Teorema 4.1.10) em Teoria dos Jogos. Trata-se do resultado de Srinivasan e Veeramani sobre a existência de um par de equilíbrio para jogos generalizados com restrições.

Seja $I_n = \{1, ..., n\}$ um conjunto de n jogadores tal que

i. a cada jogador i é associado dois conjuntos de estratégias X_i e Y_i ;

ii. conhecendo a escolha das estratégias $x^i \in X^i := \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} X_j$ dos outros jogadores, a escolha do i-ésimo jogador é restrita a um subconjunto $\mathcal{A}_i(x^i) \subset Y_i$, caso contrário, a escolha é feita do conjunto X_i ;

iii. a cada jogador i é associado a função utilidade ou payoff (benefício ou recompensa) $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R}$.

Considere as multifunções

$$\mathcal{A}_i : X^i \to 2^{Y_i} \quad i = 1, ..., n.$$

A família das 4-uplas ordenadas $\big(X_i, Y_i, \mathcal{A}_i, f_i\big)_{i\in I_n}$ é denominada *jogo generalizado com restrições.*

Sejam $X_1, ..., X_n$ *e* $Y_1, ..., Y_n$ subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de um espaço normado F.

Sejam $X = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Y_i$, $X^i = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{n} X_j$ *e* $X_0 = \{x \in X : \|x - y\| = d(X, Y)$ *para algum* $y \in Y\}$.

Um elemento de X^i é denotado por $x^i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Um elemento x de X cuja i-ésima coordenada é x_i e $x^i \in X^i$ é escrito na forma (x_i, x^i).

Definição 4.2.1 *Dizemos que n funções contínuas $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, satisfazem a condição (A) em relação a n multifunções contínuas com valores compactos $\mathcal{A}_i : X^i \to 2^{Y_i}$, $i = 1, ..., n$, se para cada $x \in X_0$ e para todo $y \in Y$ tal que $y_i \in \mathcal{A}_i(x^i)$ e*

$$\delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big) := \max_{z \in \mathcal{A}_i(x^i)} f_i(z, x^i) = f_i(y_i, x^i)$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe $a \in X$ tal que $\|a - y\| \leq d(X, Y)$.

Definição 4.2.2 *Sejam $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $\mathcal{A}_i : X^i \to 2^{Y_i}$ multifunções contínuas com valores compactos, $i = 1, ..., n$. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$ tais que*

a. $y_i \in \mathcal{A}_i(x^i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$,

b. $\delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big) = f_i(y_i, x^i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$,

c. $\|x - y\| = d(X, Y)$.

O par (x, y) é denominado par de equilíbrio para o jogo generalizado com restrições $\big(X_i, Y_i, \mathcal{A}_i, f_i)_{i \in I_n}$.

Exemplo 4.2.3 *Considere a seguinte situação econômica. Suponha que os bens de uma empresa são fabricados e vendidos em diferentes locais. Cada local pode ser uma unidade de fabricação e de venda. Estabelece-se que o último lugar onde os bens são vendidos determinam o payoff (recompensa) para os bens. Sejam dados n locais. Para cada localidade i duas estratégias X_i e Y_i são associadas, uma para a unidade de fabricação e outra para a unidade de venda. Conhecendo a estratégia de fabricação $x^i \in \prod_{j=1, j \neq i}^{n} X_j$ de todos os outros locais, a escolha da estratégia de venda para a i-ésima localidade é restrita a $\mathcal{A}_i(x^i) \subset Y_i$. Seja $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R}$ o payoff associado com a i-ésima localização. Além disso, o custo envolvido no transporte dos bens para diferentes lugares devem ser levados em conta. Nesta situação, não podemos esperar que exista um ponto de equilíbrio, pois os conjuntos de estratégias X_i e Y_i podem ser completamente diferentes. Sob este ponto de vista, é natural que exista um par de pontos (x, y) onde $x \in X = \prod_{i=1}^{n} X^i$ e $y \in Y = \prod_{i=1}^{n} Y^i$, tal que para cada $i = 1, ..., n$,*

$$y_i \in \mathcal{A}_i(x^i)$$

$$\max_{z \in \mathcal{A}_i(x^i)} f_i(z, x^i) = f_i(y_i, x^i)$$

e que minimize os custos do transporte denotado por $\|x - y\|$, isto é, $\|x - y\| = d(X, Y)$.

Neste caso, o par (x, y) é um par de equilíbrio para esta situação econômica.

Definição 4.2.4 *Seja S um subconjunto de um espaço normado F. Uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é dita quase-côncava se o conjunto $\{x \in S : f(x) \geq \beta\}$ é convexo para todo $\beta \in \mathbb{R}$.*

A demonstração do próximo lema encontra-se em [42].

Lema 4.2.5 *Sejam A e B subconjuntos não-vazios e compactos de um espaço normado F e $f : B \times A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\varphi : A \to 2^B$ é uma multifunção contínua com valores compactos, então a função $g : A \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \delta\big(\varphi(x), x\big) := \max\limits_{z \in \varphi(x)} f(z, x)$ é uma função contínua.*

Teorema 4.2.6 (Srinivasan e Veeramani - 2004 [43]) *Sejam $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_n$ subconjuntos não vazios, compactos e convexos de um espaço normado F. Para $i = 1, ..., n$ sejam $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo a condição (A) em relação a multifunções semicontínuas inferiormente $\mathcal{A}_i : X^i \to 2^{Y_i}$ em $K(X^i, Y_i)$, $i = 1, ..., n$, tais que para cada x^i fixado em X^i, a função $y_i \to f_i(y_i, x^i)$ é quase côncava em Y_i, $i = 1, ..., n$. Então existe um par de equilíbrio para o jogo generalizado com restrições $\big(X_i, Y_i, \mathcal{A}_i, f_i\big)_{i \in I_n}$.*

Demonstração. Sejam $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$, $X^i = \prod\limits_{j=1, j \neq i}^{n} X_j$. Note que X e Y são subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de F.

Para cada $i = 1, ..., n$, defina $E_i : X^i \to 2^{Y_i}$ por

$$E_i(x^i) = \Big\{ y_i \in \mathcal{A}_i(x^i) : f_i(y_i, x^i) = \delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big) \Big\}$$

e $E : X \to 2^Y$ por

$$E(x) = \prod_{i=1}^{n} E_i(x^i).$$

Mostremos que E satisfaz as condições do Teorema 4.1.10.

Afirmação 1. $E(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

Basta mostrar que $E_i(x^i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Como $\mathcal{A}_i \in K(X^i, Y_i)$, segue-se que $\mathcal{A}_i(x^i)$ é compacto. Sendo

$$\begin{aligned} h_i : \mathcal{A}_i(x^i) &\to \mathbb{R} \\ y_i &\mapsto f_i(y_i, x^i) \end{aligned}$$

uma função contínua, existe $y_i^0 \in \mathcal{A}_i(x^i)$ tal que

$$\delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big) = \max_{z \in \mathcal{A}_i(x^i)} f_i(z, x^i) = f_i(y_i^0, x^i).$$

Ou seja, $y_i^0 \in E_i(x^i)$. Assim, $E_i(x^i) \neq \emptyset$.

Afirmação 2. $E(x)$ é fechado em Y $\forall x \in X$.

Basta mostrar que $E_i(x^i)$ é fechado em Y_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Temos

$$E_i(x^i) = h_i^{-1}\Big(\big\{\delta_i(\mathcal{A}_i(x^i), x^i)\big\}\Big).$$

Como $\big\{\delta_i(\mathcal{A}_i(x^i), x^i)\big\}$ é fechado em $\mathbb{R}$ e h_i é contínua, segue-se que $E_i(x^i)$ é fechado em $\mathcal{A}_i(x^i)$. Como $\mathcal{A}_i(x^i)$ é fechado em Y_i, tem-se que $E_i(x^i)$ é fechado em Y_i.

Afirmação 3. $E(x)$ é convexo $\forall x \in X$.

Basta mostrar que $E_i(x^i)$ é convexo para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Sejam $z_1, z_2 \in E_i(x^i)$. Isto implica que

$$\begin{aligned} f_i(z_1, x^i) &\geq \delta_i\big(A_i(x^i), x^i\big) \\ f_i(z_2, x^i) &\geq \delta_i\big(A_i(x^i), x^i\big). \end{aligned}$$

Como a função $y_i \to f_i(y_i, x^i)$ é quase-côncava em Y_i, temos

$$f_i\big(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, x^i\big) \geq \delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big).$$

Mas $\mathcal{A}_i(x^i)$ é um conjunto convexo pois $\mathcal{A}_i \in K(X^i, Y_i)$. Logo, $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in \mathcal{A}_i(x^i)$ e

$$f_i\big(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, x^i\big) \leq \max_{z \in \mathcal{A}_i(x^i)} f_i(z, x^i) = \delta_i\big(A_i(x^i), x^i\big).$$

Assim,

$$f_i\big(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, x^i\big) = \delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big).$$

Portanto $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in E_i(x^i)$ e concluímos que $E_i(x^i)$ é convexo.

Afirmação 4. A multifunção E é semicontínua superiormente.

Pela Proposição 1.0.14, basta mostrar que GrE é fechado.

Seja $(a, b) \in \overline{GrE}$, $a = (a_i, a^i) \in X$ e $b = (b_i, b^i) \in Y$. Existe uma sequência (u_k, v_k) em GrE, $u_k = (u_{k_i}, u_k^i), v_k = (v_{k_i}, v_k^i)$, tal que $u_k \to a$ e $v_k \to b$. Como $v_k \in E(u_k) = \prod_{i=1}^{n} E_i(u_k^i)$, temos $v_{k_i} \in E_i(u_k^i)$, isto é,

$$f_i(v_{k_i}, u_k^i) = \delta_i\big(\mathcal{A}_i(u_k^i), u_k^i\big), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4.4}$$

Por hipótese, a multifunção $\mathcal{A}_i : X^i \to 2^{Y_i}$ é contínua com valores compactos. Logo, pelo Lema 4.2.5, a função

$$\begin{aligned} g_i : X^i &\to \mathbb{R} \\ x^i &\mapsto \delta_i\big(\mathcal{A}_i(x^i), x^i\big) \end{aligned}$$

é contínua para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como $u_k^i \to a^i$ segue que

$$\delta_i\big(\mathcal{A}_i(u_k^i), u_k^i\big) \to \delta_i\big(\mathcal{A}_i(a^i), a^i\big). \tag{4.5}$$

Além disso, por hipótese, as funções $f_i : Y_i \times X^i \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$ são contínuas. Como $v_{k_i} \to b_i$ e $u_k^i \to a^i$, obtemos

$$f_i(v_{k_i}, u_k^i) \to f_i(b_i, a^i). \tag{4.6}$$

Segue de (4.4), (4.5), (4.6) que $f_i(b_i, a^i) = \delta_i\big(\mathcal{A}_i(a^i), a^i\big),\ i = 1, ..., n$, isto é, $b_i \in E_i(a^i)$. Assim, $b \in E(a) = \prod_{i=1}^{n} E_i(a^i)$ e portanto, $(a, b) \in GrE$. Isto mostra que GrE é fechado.

Afirmação 5. $E(X_0) \subset Y_0$.

Seja $y \in E(X_0)$. Existe $w \in X_0$ tal que $y = E(w)$. Logo, para cada $i \in \{1, ..., n\},\ y_i \in E_i(w^i)$, ou seja, $f_i(y_i, w^i) = \delta_i\big(\mathcal{A}_i(w^i), w^i\big)$. Como as funções $f_i, i = 1, ..., n$, satisfazem a condição (A) em relação as multifunções $\mathcal{A}_i,\ i = 1, ..., n$, podemos afirmar que existe $a \in X$ tal que $\|a - y\| = d(X, Y)$. Isto implica que $y \in Y_0$ e concluímos que $E(X_0) \subset Y_0$.

Assim, E satisfaz todas as condições do Teorema 4.1.10. Portanto, existe $x_0 \in X$ tal que

$$d\big(x_0, E(x_0)\big) = d(X, Y).$$

Como $E(x_0)$ é compacto e não-vazio, existe $y_0 \in E(x_0)$ tal que

$$\|x_0 - y_0\| = d(X, Y).$$

Portanto, (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio para o jogo generalizado com restrições $(X_i, Y_i, \mathcal{A}_i, f_i)_{i \in I_n}$. ■

Trabalhos Futuros

Apresentamos algumas propostas de trabalhos futuros:

1. Tentar estender o teorema do tipo Ky Fan (Teorema 3.2.4) em espaços de Hilbert para um par de funções não expansivas.

2. Investigar a existência de pares de melhor proximidade de multifunções semicontínuas inferiormente $T : A \to 2^B$ quando A e B são subconjuntos de um espaço normado.

3. Estudar o artigo de Borwein [5] para tentar responder um problema em aberto sobre melhor aproximação, proposto por Klee [23] em 1961:

Questão: Todo conjunto de Chebyshev em um espaço de Hilbert de dimensão infinita é convexo?

Bibliografia

[1] N. Aronszajn and K. T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Annals Math. **60** (1954), p. 345 – 350.

[2] S. S. Basha and P. Veeramani, *Best proximity pair theorems for multifunctions with open fibres*, J. Approx. Th. **103**, (2000), p. 119 – 129.

[3] S. S. Basha and P. Veeramani, *Best proximity pairs and best approximations*, Acta. Sci. Math.(Szeged) **63** (1997), p. 289 – 300.

[4] H. F. Bonhenblust and S. Karlin, *On a Theorem of Ville. H. W. Kuhn and A. W. Tucker leads*, Contributions to the Theory of Games, vol. I, Annals. of Math. Studies **24**, Princeton Univ. Press., p. 155 – 160.

[5] J. M. Borwein *Proximinality and Chebyshev sets*, Optimization Letters **1** (2007), p. 21 – 32.

[6] F. E. Browder, *Fixed point theorem for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), p. 1272 – 1276.

[7] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), p. 197 – 228.

[8] A. Carbone, *A note on a Theorem of Prolla*, Indian J. Pure Appl. Math. **23** (1991), p. 257 – 260.

[9] A. Carbone and G. Conti, *Multivalued maps and the existence of best approximants*, J. Approx. Th. **64** (1991), p. 203 – 208.

[10] A. A. Eldred and P. Veeramani, *Existence and convergence of best proximity points*, J. Math. Anal. and Appl. **323** (2006), p. 1001 – 1006.

[11] A. A. Eldred, V. S. Raj and P. Veeramani, *On best proximity pair theorems for relatively u-continuous mappings*, Nonlin. Anal. Th. Method and Appl. **74**, (2011), p. 3870 – 3875.

[12] A. Carbone and S. P. Singh Rend. Sem. Math. Univ. Pol. Torino **54** (1996), p. 35 – 52.

[13] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. of the Amer. Math. Soc. **40** (1936), p. 396 – 414.

[14] H. H. Cuenya and A. G. Bonifácio, *Best proximity pairs in uniformly convex spaces*, Bull. of the Institute of Math. Acad. Sinica **3** (2008), p. 391 – 398.

[15] F. Deutsch, *Best approximation in inner product spaces*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[16] R. A. De Vore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] N. V. Efimov and S. B. Stechkin, *Approximative compactness and Chebyshev sets*, Soviet Math. Dokl **2** (1961), p. 1226 – 1228.

[18] A. Haar, *Die Minkowskische Geometrie und die Annaherung stetiger Funktionen*, Math. Ann. **78** (1918), p. 294. – 311.

[19] C. J. Himmelberg, *Fixed points of compact multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. **38**, (1972), p. 205 – 207.

[20] W. K. Kim and S. Kum, *Best proximity pairs and Nash equilibrium pairs*, J. Korean Math. Soc. **45** (2008), p. 1297 – 1310.

[21] W. K. Kim and K. H. Lee, *Existence of best proximity pairs and equilibrium pairs*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), p. 433 – 446.

[22] W. K. Kim and K. H. Lee, *Corrigendum to Existence of best proximity pairs and equilibrium pairs*, J. Math. Anal. Appl. **329** (2007), p. 1482 – 1483.

[23] V. Klee, *Convexity of Chebyshev sets*, Math. Annalen. **142** (1961), p. 292 – 304.

[24] A. N. Kolgomorov, *A remark on the polynomials of Chebyshev deviating the least from a given function*, Uspehi Math. Nauk. **3** (1948), p. 216 – 221.

[25] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. **142** (1961), p. 305 – 310.

[26] K. Fan, *Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder*, Math Z. **112** (1969), p. 234 – 240.

[27] A. F. León, *Existence and uniqueness of best proximity points in geodesic metric spaces*, Nonlin. Anal. Theo. Method. and Appl. **73** (2010), p. 915 – 921.

[28] J. Li, *The metric projection and its applications to solving variational inequalities in Banach spaces*, Fixed Point Theory **5** (2004), p. 285 – 298.

[29] T. C. Lin, *Some variants of a generalization of a theorem of Ky Fan*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **37** (1989), p. 629 – 635.

[30] H. N. Mhaskar and D. V. Pai, *Fundamentals of approximation theory*, Alpha Science, Oxford, 2007.

[31] S. Park, *On generalizations of Ky Fan's theorems on best approximations*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **9** (1987), p. 619 – 628.

[32] S. Park, *On the Tychonoff-Fan type coincidence theorems*, Proc. Coll. Natur. Sci. Seoul. Nat. U. **14** (1989), p. 7 – 15.

[33] J. B. Prolla, *Fixed point theorems for set-valued mappings and existence of best approximants*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **5** (1982 - 1983), no. 4, p. 449 – 455.

[34] S. Reich, *Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets*, J. Math. Anal. Appl. **62** (1978), p. 104 – 113.

[35] J. Schauder, *Der fixpunktsatz funktional raumen*, Studia Math **2** (1930), p. 171 – 180.

[36] R. Schoneberg, *Some fixed point theorems for mappings of nonexpansive type*, Commen. Math. Univ. Carolin. **17** (1976), p. 399 – 411.

[37] V. M. Sehgal and S. P. Singh *A generalization to multifunctions of Fan's best approximation theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), p. 534 – 537.

[38] V. M. Sehgal and S. P. Singh, *A theorem on best approximations*, Num. Funct. Anal. and Optmiz. **10** (1989), p. 181 – 184.

[39] S. Sessa and S. P. Singh, *Applications of the KKM- principle to Prolla type theorems*, Tamkang J. Math **23** (1992), p. 279 – 287.

[40] G. F. Simmons, *Introductory to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[41] S. P. Singh and B. Watson, *Proximity maps and fixed points*, J. Approx. Th. **39** (1983), p. 72 – 76.

[42] P. S. Srinivasan and P. Veeramani, *On best proximity pair theorems and fixed-point theorems*, Abst. Appl. Anal. **1** (2003) p. 33 – 47.

[43] P. S. Srinivasan and P. Veeramani, *On existence of equilibrium pair for constrained generalized games*, Fix. P. Th. and Appl. **1** (2004), p. 21 – 29.

[44] T. Suzuki, M. Kikkawa and C. Vetro *The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC* Nonlin. Anal. Th. Method. and Appl. **71** (2009), p. 2918 – 2926.

[45] E. W. Waters, *Some fixed point theorems for radial contractions, nonexpansive and set-valued mappings*, Ph. D. Thesis, University of Wynoming, U.S.A., 1994.