

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Bifurcação de Hopf de codimensão dois em sistemas
de controle lineares com controlador do tipo PI e não
linearidade do tipo saturação**

Denis de Carvalho Braga

**Orientadores: Prof. Dr. Antonio Carlos Zambroni de Souza
Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Bifurcação de Hopf de codimensão dois em sistemas
de controle lineares com controlador do tipo PI e não
linearidade do tipo saturação**

Denis de Carvalho Braga

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos
requisitos para obtenção do Título de Doutor em Ciências em Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência

**Orientadores: Prof. Dr. Antonio Carlos Zambroni de Souza
Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello**

Resumo

BRAGA, D. C. (2010), *Bifurcação de Hopf de codimensão dois em sistemas de controle lineares com controlador do tipo **PI** e não linearidade do tipo saturação*, Itajubá 188 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Instituto de Sistemas Elétricos e Energia, Universidade Federal de Itajubá.

Os controladores do tipo **PI** estão entre os mais utilizados na indústria e, devido a limitação dos componentes em engenharia, a saturação é a mais comum das não linearidades. Assim sendo, este trabalho analisa a influência de uma saturação, na entrada de controle, em sistemas de controle lineares em malha fechada e com controlador do tipo **PI**. Mais precisamente, o objetivo é mostrar a possibilidade de ocorrência de bifurcações de Hopf de codimensões um e dois em um caso particular deste tipo de sistema de controle e a existência de uma região no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ no qual o único ponto de equilíbrio é sempre assintoticamente estável.

Palavras-chave: Bifurcação de Hopf de codimensão dois, sistemas de controle, controlador do tipo **PI**, saturação.

Abstract

BRAGA, D. C. (2010), *Codimension two Hopf bifurcation in linear control systems with **PI** controller and nonlinearity of saturation type*, Itajubá 188 p. Thesis - Instituto de Sistemas Eléctricos e Energia, Universidade Federal de Itajubá.

The **PI** controllers are among the most widely used in industry and due to limitations of the components in engineering, the saturation is the most common nonlinearity. Thus, this study examines the influence of a saturation in control input of linear control systems with **PI** controller. More precisely, the goal is to show the possibility of Hopf bifurcations of codimension one and two in a particular case of this type of control system and the existence of a region in the parameter space $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ in which the only equilibrium point is always asymptotically stable.

Keywords: Codimension two Hopf bifurcation, control system, **PI** controller, saturation.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Índice	iii
Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
1.1 História da Teoria de Controle Não Linear	1
1.2 Proposta do Trabalho	5
1.3 Revisão Bibliográfica	11
1.4 Conteúdo dos Capítulos	13
1.5 Notação	13
2 Sistemas de Controle Lineares com Não Linearidade na Entrada de Controle	15
2.1 Sistemas de Controle	15
2.2 Sistemas de Controle Lineares	18
2.3 Controlador do Tipo PI	20
2.4 Não Linearidades na Entrada de Controle	21
2.5 Controle em Malha Fechada	32
3 Estabilidade Linear	33
3.1 Sistemas Dinâmicos e Estabilidade Linear	33
3.2 Análise do Sistema de Controle em Malha Fechada	39

4	Estudo da Forma Normal de Poincaré–Hopf	46
4.1	Aproximação de Órbitas Periódicas Para a Forma Normal de Poincaré–Hopf	46
4.2	Construção de um Homeomorfismo	60
5	Aproximação de Órbitas Periódicas em Campos de Vetores	74
5.1	Introdução à Bifurcação de Hopf	74
5.2	Aproximação de Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^2	77
5.3	Aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^n	123
6	Aplicação da Teoria de Aproximação de Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^n	153
6.1	Bifurcação de Hopf no Sistema de Controle em Malha Fechada em \mathbb{R}^3 . .	153
6.2	Sistemas de Controle Reais	171
	Conclusões e Trabalhos Futuros	173
	Bibliografia	177

Lista de Figuras

1.1	Diagrama esquemático de um sistema de controle linear com controlador do tipo PI e não linearidade na entrada de controle do tipo saturação.	6
1.2	Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é linear. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) ao autoespaço central.	8
1.3	Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é uma saturação suave. (a) $l_1 < 0$ e (b) $l_1 > 0$. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) à variedade central e sua continuação.	9
1.4	Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é uma saturação suave. (a) $l_2 < 0$ e (b) $l_2 > 0$. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) à variedade central e sua continuação.	10
2.1	Gráfico qualitativo de uma saturação linear por partes.	22
2.2	Gráfico de uma saturação $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para $m = M = 1$. (a) Gráfico de S . (b) Gráfico de S'	23
2.3	Gráfico da função (2.26).	24
2.4	Gráfico qualitativo de uma saturação regular.	24
2.5	Gráfico qualitativo de uma zona morta linear por partes.	28
2.6	Gráfico qualitativo de uma zona regular.	30
4.1	Retrato de fase qualitativo de (4.44) para $s = -1$	55
4.2	Diagrama de bifurcação da forma normal de Bautin para o caso $s = -1$	57
4.3	Construção do homeomorfismo entre (4.50) e (4.76).	72
5.1	Diagrama de um circuito elétrico de van der Pol.	111

- 5.2 Comparação entre a órbita periódica aproximada por ϵ (linha cheia) e órbita periódica obtida numericamente a partir da equação de van der Pol. (a) Parâmetro $\epsilon = 0.4$, parâmetro $\mu = 0.12$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 0.6)$. (b) Parâmetro $\epsilon = 0.6$, parâmetro $\mu = 0.27$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 0.8)$. (c) Parâmetro $\epsilon = 0.8$, parâmetro $\mu = 0.48$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 1.0)$. (d) Parâmetro $\epsilon = 1.0$, parâmetro $\mu = 0.75$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 1.2)$. 114
- 5.3 Diagrama de Bifurcação da equação de Lienard. 120
- 5.4 Retratos de fase da equação de Lienard. (a) Região R_1 : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.1, 0.1)$, condições iniciais $(-0.1, -1.2)$ e $(0.1, 1.2)$. (b) Região R_2 : parâmetros $(\mu, \nu) = (0.1, 0.1)$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(0, 1.2)$. (c) Região R_3 : parâmetros $(\mu, \nu) = (0.1, -0.1)$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(0, 1.5)$. (d) Região R_4 : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.3, -0.6)$, condições iniciais $(0, 0.942)$, $(0, 0.98)$ e $(0, 2.2)$. (e) Curva C_{NH} : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.405, -0.6)$, condições iniciais $(0, 1.25)$ e $(0, 1.8)$ 121
- 5.5 Comparação entre o gráfico da representação (5.214) e a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas da equação de Lienard, obtida numericamente através do software **MATCONT 2.5.1**. A linha contínua está associada com a aproximação (5.214) e os pontos com o resultado numérico. 122
- 6.1 Região de estabilidade no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ quando $a_0 = 12$, $b_0 = 1$, $a_1 = 12$ e $b_1 = -2$ e para a função saturação (6.20). 158
- 6.2 Gráficos das componentes $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ e $t \mapsto x_3(t)$ para $(K_I, K_P) = (6, 3)$ e para a condição inicial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$ 159
- 6.3 Órbita de (3.32) iniciando no ponto $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$ e para $(K_I, K_P) = (6, 3)$. 159
- 6.4 Comparação dos gráficos das componentes $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ e $t \mapsto x_3(t)$, obtidas numericamente, com (6.51), (6.52) e (6.53). Os valores dos parâmetros são $K_I = 7$ e $K_P = 3$ e condição inicial é $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 0, 0)$. As linhas tracejadas estão associadas com a solução numérica de (3.32) e a linha contínua com (6.51), (6.52) e (6.53). 163
- 6.5 Comparação entre a órbita periódica de (3.32), obtida numericamente com o software **MATLAB 7.9** e a representação (6.50). Os pontos estão associados com o resultado numérico e a linha contínua com a aproximação (6.50). 164

6.6	Projeções da órbita periódica de (3.32), obtida numericamente com o software MATLAB 7.9 e a representação (6.50) nos planos coordenados xy , xz e yz . Os pontos estão associados com o resultado numérico e a linha contínua com a aproximação (6.50).	164
6.7	Gráfico do primeiro coeficiente de Lyapunov para $K_P \in [0, 1]$	167
6.8	Diagrama de bifurcação para (3.32) para $(K_I, K_P) = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$	168
6.9	Aproximação para órbita periódica instável obtida de (3.32) para $(K_I, K_P) = (K_{I3}, K_{P3}) = (26, 1)$. Foram utilizados (6.76) e o software MATLAB 7.9	170

Capítulo 1

Introdução

A teoria de controle é, sem dúvida, uma das teorias de maior impacto no desenvolvimento tecnológico das últimas décadas com aplicações em diversos ramos das ciências. De fato, muitos processos biológicos podem ser explicados no contexto da teoria de controle, como a temperatura corporal dos mamíferos e diversas tecnologias existentes atualmente só são possíveis graças aos avanços desta teoria. Tais avanços foram alcançados principalmente a partir de 1950, devido às aplicações em aeronáutica, desenvolvimento de satélites e, sobretudo, missões espaciais. Contudo, o interesse pela teoria de controle data de longo tempo e remonta à Grécia antiga com a preocupação dos gregos em medir o tempo com razoável precisão.

Atualmente é reconhecido que grande parte dos avanços em áreas relevantes, como robótica, sistemas de manufatura e redes de comunicação, seriam quase impossíveis de serem alcançados sem as metodologias da teoria de controle. Devido a esta importância da teoria de controle, o objetivo deste trabalho é fornecer uma contribuição ao estudo de certos sistemas de controle com não linearidades do tipo saturação. Assim, a finalidade deste capítulo é apresentar uma revisão histórica sobre a teoria de controle não linear, exibir o problema a ser abordado neste trabalho e uma revisão bibliográfica sobre o assunto que será estudado.

1.1 História da Teoria de Controle Não Linear

Conforme [2], a história da teoria de controle, que compreende as aplicações de controle automático nas mais diversas áreas do conhecimento e o desenvolvimento da teoria matemática de controle, pode ser dividida em quatro períodos principais, o período de-

nominado controle primitivo que vai desde os estudos na Grécia antiga até o ano de 1900, o período pré-clássico entre os anos 1900 e 1940, o período clássico desenvolvido entre os anos 1935 e 1960 e o período moderno a partir do ano de 1955.

Até o século XVIII houve pouco progresso da teoria de controle, com exceção de aplicações de controle do tipo liga e desliga e o controle de temperatura de incubadoras proposto por René-Antoine Ferchault de Camur (1683-1757). A teoria de controle voltaria a ganhar força durante a revolução industrial, período no qual foram introduzidas as primeiras máquinas rotativas na Europa, sobretudo as máquinas a vapor. Tais máquinas rotativas não podiam ser operadas de maneira adequada sem alguma forma de controle. Isto exigiu o desenvolvimento de novos dispositivos de controle, principalmente os reguladores de velocidade, sendo os mais conhecidos aqueles denominados genericamente de reguladores de Watt, em homenagem a James Watt (1736-1819).

O regulador de velocidade proposto por Watt apresentava algumas limitações, visto que podia operar somente com pequenas velocidades de rotação no eixo da máquina a vapor. Este problema foi corrigido com o regulador de velocidade de Charles Porter (1826-1910) patenteado em 1858 e que podia trabalhar com velocidades maiores de rotação e com os reguladores de velocidade com mola de Thomas Pickering em 1862 e William Hartnell em 1872, que não só operavam com velocidades de rotação maiores, mas também possuíam dimensões menores em relação aos reguladores de velocidade anteriores.

Mesmo com as melhorias nos reguladores de velocidade, no início do século XIX surgiram outros problemas, conhecidos como problemas de estabilidade dos reguladores de velocidade. Na tentativa de investigar o problema de estabilidade, G. B. Airy (1801-1892) publicou alguns artigos em 1840 e 1851 mostrando que a dinâmica de um regulador de Watt podia ser modelada por equações diferenciais. Entretanto, Airy encontrou dificuldades na análise das equações diferenciais e coube a James C. Maxwell (1831-1879) determinar as condições de estabilidade em seu artigo *On Governors* de 1868. Neste artigo, Maxwell analisou equações diferenciais ordinárias lineares, modelos para diferentes tipos de reguladores de velocidade e determinou as condições de estabilidade fornecendo condições necessárias e suficientes para que certos polinômios analisados fossem estáveis, ou seja, que apresentassem todas as raízes com partes reais negativas. Devido a este trabalho, o ano de 1868 é considerado o marco do nascimento da teoria de controle.

O trabalho de Maxwell era limitado, visto que apresentava condições necessárias e suficientes para estabilidade de polinômios de quarto grau no máximo. Uma extensão

dos resultados de Maxwell foi feita por Edward I. Routh (1831-1907) em seu trabalho intitulado *Stability of Motion* de 1877. Seu principal resultado é conhecido atualmente como teorema de estabilidade de Routh-Hurwitz, já que em 1895 o matemático suíço Adolf Hurwitz (1859-1919) obteve um resultado análogo de maneira independente.

Outra contribuição à teoria de controle foi dada pelo engenheiro russo Vyshnegradskii em 1876 em seu artigo *On the General Theory of Governors* no qual analisou os modelos de reguladores de velocidade, de maneira independente de Maxwell, e forneceu as condições de estabilidade. Finalmente, destaca-se o trabalho de Aleksandr M. Lyapunov (1857-1918) de 1892 intitulado *A General Task About the Stability of Motion* sobre estabilidade de equações diferenciais ordinárias não lineares através da noção generalizada de energia. Os trabalhos acerca da estabilidade de reguladores de velocidade e, principalmente, o trabalho de Lyapunov são considerados os primeiros estudos relacionados com sistemas de controle não lineares.

Antes de 1940, os estudos sobre sistemas de controle não lineares estavam associados com os avanços na teoria de equações diferenciais ordinárias e, sobretudo, a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. O interesse na época era o entendimento de certos modelos relacionados com vibrações mecânicas, osciladores eletrônicos e mecânica celeste. Destacam-se nesta época os trabalhos do físico holandês Balthasar van der Pol (1889-1959) em teoria de circuitos elétricos e, principalmente, os trabalhos do físico russo Aleksandr A. Andronov (1901-1952) que contribuiu de maneira significativa com a teoria de controle.

Segundo [1], em geral, grande parte dos sistemas físicos de interesse entre 1920 e 1940 podia ser modelada por equações diferenciais não lineares de segunda ordem da forma

$$x'' + \omega_0^2 x = \epsilon g(x, x'), \quad (1.1)$$

com $x \in \mathbb{R}$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, onde \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais. O estudo desta particular equação diferencial envolvia técnicas de perturbação, balanço harmônico e análises no plano de fase.

A técnica de perturbação consistia em procurar uma solução $(t, \epsilon) \mapsto x(t, \epsilon)$ de (1.1) da forma

$$x(t, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \epsilon^k. \quad (1.2)$$

Havia particular interesse no entendimento das soluções periódicas de (1.1) via técnicas de perturbação. Contudo, tal entendimento só foi alcançado com os trabalhos do matemático

sueco Anders Lindstedt (1854-1939) e do matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) nos quais a técnica de perturbação, conhecida atualmente como método de Poincaré-Lindstedt, foi colocada de maneira rigorosa mediante a introdução de uma função $\epsilon \mapsto \omega(\epsilon)$, associada com o período da solução periódica, da substituição do tempo t por $\frac{\tau}{\omega(\epsilon)}$ e das expansões em séries

$$\begin{aligned} x(\tau, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\tau) \epsilon^k, \\ \omega(\epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k \epsilon^k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Outros autores empregavam teoria da média no estudo das soluções periódicas de (1.1), como van der Pol e os russos Nikolay M. Krylov (1879-1955) e Nikolay Bogolyubov (1909-1992). O método desenvolvido por Krylov e seu aluno Bogolyubov consistia em aproximar a solução periódica $t \mapsto x(t)$ de (1.1) por

$$x(t) = a(t) \text{sen}(\omega_0 t + \phi(t)), \tag{1.4}$$

com $t \mapsto a(t)$ e $t \mapsto \phi(t)$ soluções de

$$\begin{aligned} a'(t) &= \frac{\epsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} g(a(t) \text{sen}(\theta), \omega_0 a(t) \cos(\theta)) \cos(\theta) d\theta, \\ \phi'(t) &= \frac{\epsilon}{2\pi\omega_0 a(t)} \int_0^{2\pi} g(a(t) \text{sen}(\theta), \omega_0 a(t) \cos(\theta)) \text{sen}(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Outra técnica empregada nesta época é o balanço harmônico introduzido por Duffing e cuja idéia era obter uma aproximação para a solução periódica $t \mapsto x(t)$ de (1.1) empregando a série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t}, \tag{1.6}$$

a qual era substituída em (1.1) e os termos da seqüência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eram obtidos agrupando os coeficientes de $e^{i\omega_k t}$ para $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, onde \mathbb{Z} denota o conjunto dos números inteiros.

Embora estes métodos fossem empregados na época, no entendimento dos sistemas de controle não lineares, nenhum deles teve maior impacto no estudo de sistemas de controle do que o método do plano de fase introduzido por Poincaré. Nesta época muito dos servomecanismos utilizados pela engenharia possuíam modelos que podiam ser aproximados com razoável precisão por equações diferenciais ordinárias da forma (1.1). Com o método

do plano de fase de Poincaré, (1.1) podia ser reescrita, fazendo $y = x'$, como

$$\begin{aligned}x' &= y, \\ y' &= -\omega_0^2 x + \epsilon g(x, y),\end{aligned}\tag{1.7}$$

e as soluções de (1.1) podiam ser estudadas em um gráfico de x por y . Particularmente, a estabilidade local dos pontos de equilíbrio de (1.7) e existência de ciclos limites (soluções periódicas isoladas) foram um avanço no entendimento de sistemas de controle não lineares.

Durante a segunda guerra mundial outro método foi desenvolvido de maneira independente por Goldfarb na Rússia, Dutilh na França, Oppelt na Alemanha, Kochenburger nos Estados Unidos e Daniell no Reino Unido. Tal método, denominado método da função descritiva, é uma extensão do método da resposta em frequência formulada por Hendrik Bode (1905-1982) para sistemas de controle não lineares. A idéia era utilizar somente a primeira aproximação fornecida pelo método do balanço harmônico e considerar uma única não linearidade presente, como saturação, zona morta, atrito ou relé. Alguns trabalhos desta época empregavam o método da função descritiva em conexão com o problema de existência de ciclos limites em sistemas de controle não lineares.

Após 1960, os trabalhos sobre sistemas de controle não lineares multiplicaram-se graças aos avanços em computação analógica e principalmente devido à computação digital. Diversas teorias foram desenvolvidas, dentre elas a teoria de controle adaptativo, teoria de controle com lógica difusa, redes neurais e teoria geométrica de controle. Embora atualmente existam diversas teorias de controle não linear, o método do balanço harmônico e o método da função descritiva ainda são empregados. De certa forma a proposta deste trabalho para análise de sistemas de controle lineares com controlador do tipo **PI** e não linearidade na entrada de controle do tipo saturação é uma generalização do método de perturbação de Poincaré-Lindstedt associado com resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. A proposta deste trabalho é assunto da próxima seção.

1.2 Proposta do Trabalho

Conforme mencionado anteriormente, a finalidade deste trabalho é estudar um caso particular de sistema de controle linear com controlador do tipo **PI** e não linearidade na entrada de controle do tipo saturação. Os conceitos e resultados serão apresentados de maneira informal nesta seção. Para a discussão, considere o seguinte diagrama es-

quemático.

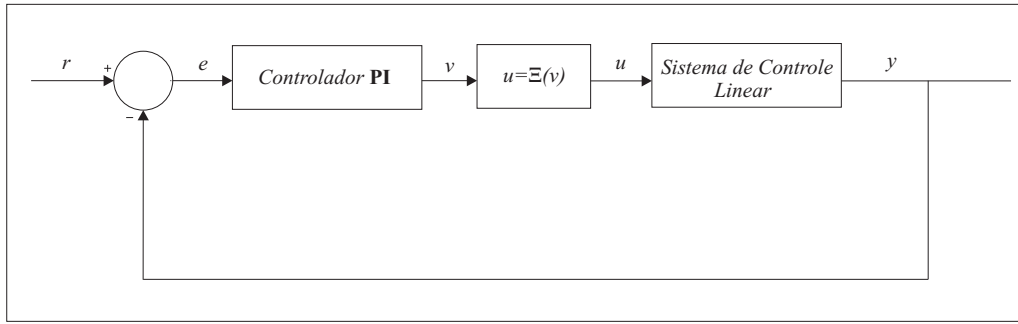


Figura 1.1: Diagrama esquemático de um sistema de controle linear com controlador do tipo **PI** e não linearidade na entrada de controle do tipo saturação.

O sistema de controle de interesse é da forma

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^l b_k \frac{d^k}{dt^k} u(t), \quad (1.8)$$

com $l, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \leq n$, $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ a entrada de controle, $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ a saída de controle e $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_l$ números reais com $a_n = 1$. O conjunto \mathbb{N} denota o conjunto dos números naturais.

Suponha que a entrada de controle $u \in \mathbb{R}$ é função de outra variável $v \in \mathbb{R}$, sendo que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ pode ser linear ou saturação. Sendo $e = r - y$ o erro, o controlador do tipo **PI** é definido por

$$v(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (1.9)$$

com $K_P, K_I \in \mathbb{R}$ parâmetros não negativos e $t \mapsto r(t)$ a referência ou valor desejado para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. É desejado em teoria de controle que $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Através de uma mudança de coordenadas apropriada, o sistema de controle (1.8), com a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ e o controlador do tipo **PI**, pode ser descrito como uma equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} + B\Xi(x_{n+1} + K_P(r - y)), \\ x'_{n+1} &= K_I(r - y), \end{aligned} \quad (1.10)$$

com $y = x_1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear que depende dos coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} e $B \in \mathbb{R}^n$ um vetor dependendo dos coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n .

Note que (1.10) pode ser linear ou não linear dependendo se a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é linear ou saturação e pode ser autônoma ou não autônoma dependendo da referência $t \mapsto r(t)$. Neste trabalho será considerada como referência somente a função de Heaviside

$$t \in \mathbb{R} \mapsto r(t) = \begin{cases} r, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

com $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$. Assim, para existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial envolvendo (1.10) considera-se que $t \geq 0$.

Geralmente em teoria de controle é comum utilizar como não linearidades funções lineares por partes, por exemplo

$$\Xi(v) = \frac{V_m}{2v_0} (|v + v_0| - |v - v_0|) \quad (1.12)$$

para a saturação e

$$\Xi(v) = \frac{V_m}{2v_0} (2v + |v - v_0| - |v + v_0|) \quad (1.13)$$

para a zona morta, sendo $v_0, V_m \in \mathbb{R}$ parâmetros ajustados de maneira conveniente. A razão para isto é que as funções lineares por partes simplificam a análise e as simulações numéricas, visto que, o estudo de (1.10) com estas funções se resume à análise de certo número de equações diferenciais ordinárias lineares. Contudo, se é desejado tratar (1.10) no contexto da teoria de bifurcações para aplicações suaves, tais funções apresentam problemas por não serem suficientemente diferenciáveis. Neste sentido, uma das propostas da tese é fornecer uma definição para a saturação de modo que esta função seja suficientemente diferenciável e que tenha como exemplos particulares, as funções lineares por partes usualmente encontradas na literatura.

Pode-se mostrar que, sob certas hipóteses, a equação diferencial ordinária (1.10) possui um único ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $x_1^0 = r$, independentemente se a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é linear ou uma saturação suficientemente diferenciável. O objetivo então é ajustar os parâmetros K_I e K_P do controlador **PI** de tal forma que o único ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável e que a coordenada solução $y = x_1$ ou saída de controle tenha certas características desejadas. Este trabalho visa tratar somente da questão referente à estabilidade do único ponto de equilíbrio, determinando regiões no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ nas quais esta condição é alcançada.

Considerando (1.10) com a função linear $v \mapsto u = \Xi(v)$, suponha que aplicando o teorema de Routh-Hurwitz (ver [24]), no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ há uma curva, conjunto de nível zero da função $(K_I, K_P) \mapsto H_L(K_I, K_P) \in \mathbb{R}$, tal que para todo $(K_I, K_P) \in H_L^{-1}(0)$, a matriz Jacobiana de (1.10), calculada no único ponto de equilíbrio, possui um par complexo conjugado com parte real nula como autovalores e nenhum outro autovalor com parte real nula. Neste caso há duas possibilidades ilustradas na Figura 1.2.

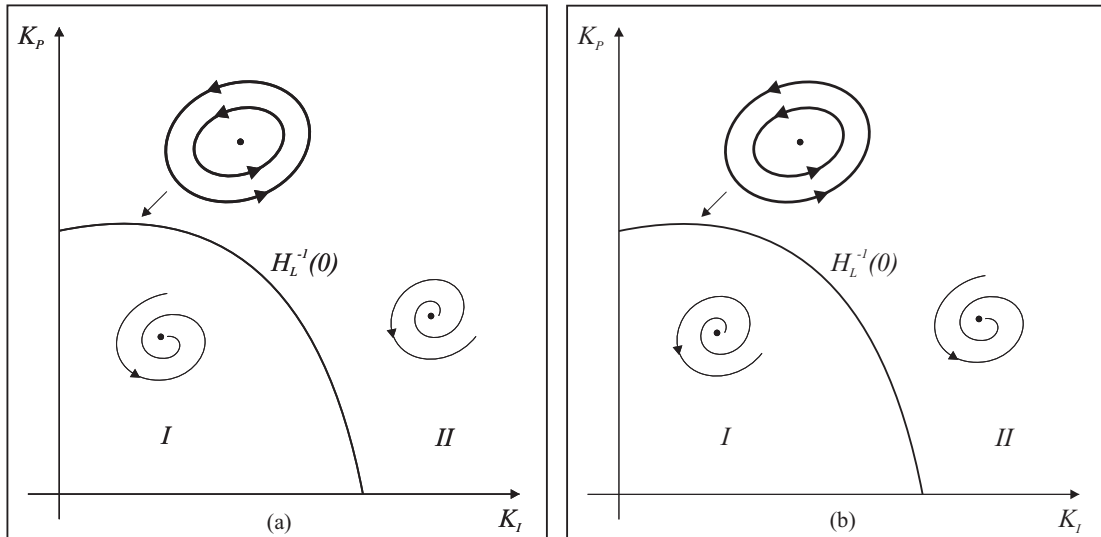


Figura 1.2: Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é linear. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) ao autoespaço central.

Observe que no caso (a) da Figura 1.2 basta escolher K_I e K_P na região I para que o ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável, enquanto que no caso (b) os parâmetros K_I e K_P devem ser escolhidos na região II. Para $(K_I, K_P) \in H_L^{-1}(0)$, o ponto de equilíbrio é um centro, já que a equação diferencial ordinária (1.10) é linear. Portanto, com relação à estabilidade, o problema é completamente resolvido no caso linear através do teorema de Routh-Hurwitz.

Suponha agora que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ seja uma saturação suficientemente diferenciável e que aplicando o teorema de Routh-Hurwitz exista uma curva no plano de parâmetros, conjunto de nível zero da função $(K_I, K_P) \mapsto H_S(K_I, K_P) \in \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$ a parte linear de (1.10), calculada no ponto de equilíbrio, possui um par de autovalores complexo conjugado com parte real nula e nenhum outro autovalor com parte real nula. Como a equação diferencial ordinária (1.10) é não linear não é possível decidir a estabilidade do ponto de equilíbrio para $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$. Se (1.10)

apresenta uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um para $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$, então a estabilidade do ponto de equilíbrio é dada pelo sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov, denotado por l_1 , desde que $l_1 \neq 0$. Resulta do teorema da bifurcação de Hopf transversal de codimensão um, a existência de uma órbita periódica que pode ser atratora ou repulsora dependendo do sinal de l_1 . A Figura 1.3 ilustra dois casos, nos quais para K_I e K_P na região I e sob certas condições, o ponto de equilíbrio é sempre localmente assintoticamente estável.

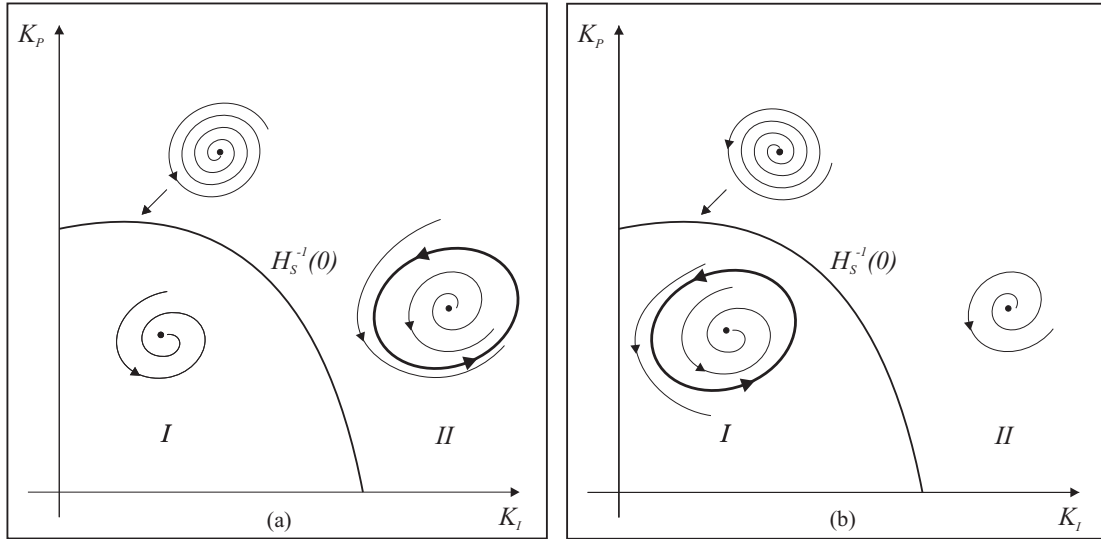


Figura 1.3: Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é uma saturação suave. (a) $l_1 < 0$ e (b) $l_1 > 0$. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) à variedade central e sua continuação.

Se o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo (ver Figura 1.3(a)), então os parâmetros K_I e K_P devem ser escolhidos na região I ou $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$ para garantir que o ponto de equilíbrio seja localmente assintoticamente estável. Para pontos na região II há uma órbita periódica estável no retrato de fase de (1.10) perto do ponto de equilíbrio instável. Porém, se o primeiro coeficiente de Lyapunov é positivo (ver Figura 1.3(b)), há uma órbita periódica instável no retrato de fase de (1.10) perto do ponto de equilíbrio estável para pares (K_I, K_P) na região I. Entretanto, neste último caso, há uma diminuição na bacia de atração do ponto de equilíbrio devido à órbita periódica instável. Para pares $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$, o ponto de equilíbrio é instável. Estes comentários com respeito ao sistema de controle linear (1.8) com controlador do tipo **PI** e saturação na entrada de controle e na hipótese de ocorrência de uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um, mostram que os resultados são completamente diferentes quando comparados com o

mesmo sistema de controle sem saturação (caso linear).

Suponha agora, no caso anterior, a existência de um par $(K_I^0, K_P^0) \in H_S^{-1}(0)$ que anula o primeiro coeficiente de Lyapunov, ou seja, há a possibilidade de ocorrência de uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois. A estabilidade do ponto de equilíbrio para $(K_I, K_P) = (K_I^0, K_P^0)$ é agora dada pelo segundo coeficiente de Lyapunov, denotado por l_2 , desde que $l_2 \neq 0$. Então, ocorrem as seguintes modificações na Figura 1.3.

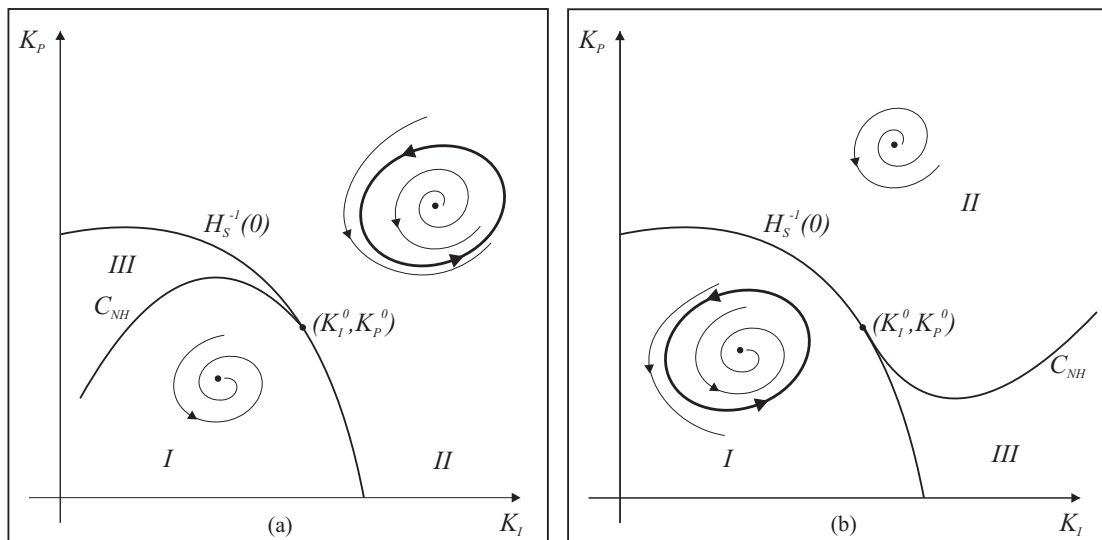


Figura 1.4: Regiões de estabilidade no plano de parâmetros no caso em que a função $v \mapsto u = \Xi(v)$ é uma saturação suave. (a) $l_2 < 0$ e (b) $l_2 > 0$. Os retratos de fase estão associados à restrição do fluxo de (1.10) à variedade central e sua continuação.

Neste caso, pode-se mostrar que existe uma curva no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$, denotada por C_{NH} , tal que se $(K_I, K_P) \in C_{NH}$, então existe uma órbita periódica não hiperbólica no retrato de fase de (1.10). O caso (a) da Figura (1.4) é aquele em que o segundo coeficiente de Lyapunov é negativo, enquanto que no caso (b), o segundo coeficiente de Lyapunov é positivo. Pode-se mostrar que na região III há duas órbitas periódicas. No caso (a) da Figura 1.4, dependendo da condição inicial, ainda é possível que o ponto de equilíbrio seja localmente assintoticamente estável para valores de K_I e K_P na região III ou em C_{NH} . Quando o segundo coeficiente de Lyapunov é negativo, os resultados diferem ainda mais daqueles obtidos quando a saturação não é levada em consideração (caso linear). Um problema que ocorre, com relação à aplicação em teoria de controle, é como obter a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} , já que o teorema da bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois garante somente a existência

desta curva. Assim, outra proposta da tese é construir uma teoria para a bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois que forneça uma aproximação local para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas.

Nas aplicações em engenharia, o controlador do tipo **PI** está entre os mais utilizados e em geral a saturação, do ponto de vista físico, está sempre presente devido à limitação dos componentes físicos. Contudo, normalmente a saturação não é levada em consideração, já que é mais fácil estudar a equação diferencial ordinária (1.8) com as técnicas consagradas da teoria de controle linear, como os métodos de resposta em frequência e lugar das raízes. O ajuste dos parâmetros K_I e K_P por estes métodos, quando da aplicação, poderiam tornar o sistema físico instável ou com forte dependência do estado inicial do sistema, visto que o sistema físico possui componentes limitados.

Em resumo, este trabalho possui os seguintes objetivos:

- a) Definir a saturação como qualquer função satisfazendo certas hipóteses e estudar (1.10) no caso em que tal função é suficientemente diferenciável;
- b) Construir uma teoria de bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois no qual seja possível obter uma aproximação para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas;
- c) Estudar a ocorrência de bifurcações de Hopf transversais de codimensões um e dois em sistemas de controle lineares como (1.8) com controlador do tipo **PI** e não linearidade do tipo saturação na entrada de controle;
- d) Construir o diagrama de bifurcação parcial de (1.10) associado com os parâmetros K_I e K_P , para o caso em que $n = 2$ e $l = 1$ em (1.8), e determinar as regiões para as quais o único ponto de equilíbrio seja localmente assintoticamente estável.

A próxima seção apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre os assuntos abordados neste trabalho.

1.3 Revisão Bibliográfica

Há pouca literatura sobre sistemas de controle lineares com não linearidade na entrada de controle, no que se refere à análise de estabilidade através de diagramas de bifurcação associados com os parâmetros de um controlador. Em [18] é realizado um estudo de um

sistema de controle linear com saturação linear por partes na entrada de controle e controlador do tipo **PI**. Tal sistema de controle é modelo de um conjunto hidroturbina-gerador e o objetivo é estudar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um. Entretanto, o teorema da bifurcação de Hopf transversal de codimensão um que o autor emprega não contempla o caso estudado e a análise é apenas superficial, limitada a simulações numéricas. Apesar das limitações, a idéia por trás de [18] é interessante e motivou a proposta deste trabalho, ou seja, definir a saturação de tal forma que certas funções suficientemente diferenciáveis sejam saturações e que o teorema clássico da bifurcação de Hopf transversal de codimensão um possa ser aplicado.

O teorema da bifurcação de Hopf transversal de codimensão um para campos de vetores em \mathbb{R}^n pode ser encontrado em [7], [11], [13], [15], [19] ou [21]. As abordagens de [11] e [15] são essencialmente as mesmas, visto que, este teorema é demonstrado empregando o método da projeção. A teoria apresentada em [7] e [19] é a mesma de [16]. Já em [13] o teorema é demonstrado via teoria de perturbação e teoria de Floquet (ver [8]).

A teoria proposta em [21] no estudo de uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um consiste em representar uma equação diferencial ordinária não linear como um sistema de controle não linear. Tal teoria parece ser mais natural às aplicações em engenharia, uma vez que o método trata de sistemas de controle não lineares, transformada de Laplace, séries de Fourier (balanço harmônico) e diagramas de Nyquist.

Com relação à generalização dos resultados de [18], isto é, o estudo da bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois em sistemas de controle da forma (1.10), uma teoria interessante é encontrada em [16], [20] e [32] e consiste em parametrizar a variedade central por parâmetros associados ao autoespaço central e obter o primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov por meio de um procedimento recursivo. Outra possibilidade é empregar os resultados de [29], que são uma extensão da teoria da bifurcação de Hopf transversal de codimensão um apresentada em [21] para codimensão dois.

A existência de uma curva de órbitas periódicas não hiperbólicas relacionada com um ponto de Hopf de codimensão dois pode ser demonstrada com as teorias de [15] e [16]. Contudo estas teorias não permitem encontrar ou mesmo aproximar a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas, exceto em casos muito particulares. Uma possibilidade é empregar os métodos numéricos de [3] ou um método numérico empregando balanço harmônico tal como em [4]. O software **MATCONT 2.5.1** [34] é um software muito utilizado em análise de sistemas dinâmicos que é capaz de fornecer uma aproximação para

a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas. Uma alternativa analítica, proposta neste trabalho, consiste em generalizar a teoria de [13], empregando certos resultados e notações de [15] e [16], com objetivo de obter uma aproximação para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas.

1.4 Conteúdo dos Capítulos

Este trabalho está dividido como segue. No capítulo 2 é apresentada a teoria necessária ao estudo de sistemas de controle, a definição de saturação e a obtenção da equação diferencial ordinária não linear (1.10).

O capítulo 3 trata de alguns conceitos relacionados com sistemas dinâmicos e estabilidade linear. A finalidade deste capítulo é familiarizar o leitor com as definições e teoremas que serão utilizados posteriormente e indicar as principais referências nestes assuntos. A análise do único ponto de equilíbrio de (1.10) para o caso em que $n = 2$ também é feita neste capítulo.

No capítulo 4 é apresentada uma teoria simplificada de aproximação de órbitas periódicas utilizando a forma normal de Poincaré-Hopf e uma construção de um homeomorfismo considerando termos de ordem superior na forma normal de Bautin.

Algumas definições relacionadas com a teoria da bifurcação de Hopf e a generalização da teoria simplificada do capítulo anterior, para campos de vetores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n , estão no capítulo 5.

O capítulo 6 consiste em aplicar a teoria de aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^n aos sistemas de controle da forma (1.10) para o caso em que $n = 2$. Comentários sobre aplicações em engenharia também estão neste capítulo.

Este trabalho é finalizado com as principais considerações na conclusão.

1.5 Notação

Não há uma notação padrão para os vetores, em alguns casos é utilizado o negrito e em outros não. Contudo, tais objetos são facilmente identificados pelo contexto. A notação para derivada parcial foi modificada de modo a simplificar sua representação em frações.

Assim, dada uma função $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, a notação utilizada é

$$\begin{aligned}\partial_x f(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \\ \partial_y f(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \\ \partial_x^2 f(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \\ \partial_{xy} f(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \\ \partial_y^2 f(x_0, y_0) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}, \\ \frac{\partial_x^2 f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)} &= \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)},\end{aligned}$$

e assim por diante. Esta notação aparece no texto a partir do capítulo 4.

Em

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^k a_{k-j,j} x^{k-j} y^j + O_f(\|(x, y)\|^m),$$

com $a_{k-j,j} \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \dots, m-1$ e $j = 0, \dots, k$, a notação $(x, y) \mapsto O_f(\|(x, y)\|^m)$ representa uma função cuja a expansão em série de Taylor em torno $(x, y) = (x_0, y_0)$ inicia-se nos termos de ordem m no mínimo.

Algumas letras são empregadas para representar mais de um objeto. A letra s é utilizada no capítulo 2 na transformada de Laplace, em funções de transferência ou como uma saturação normal. Já a partir capítulo 4, a letra s é utilizada também na mudança no tempo $s = \omega(\epsilon, \nu)t$, sendo t o tempo. A letra r é empregada tanto para representar a referência em sistemas de controle em malha fechada, como para denotar o módulo de um número complexo z na mudança de coordenadas $z = x + iy \mapsto r e^{i\theta} = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta)$. Já a letra ϵ é utilizada como condição inicial em problemas de valor inicial no capítulo 4 ou como resultado de uma integral no capítulo 5, visto que em ambos os casos o objetivo é o mesmo.

As demais notações são explicadas no próprio texto e não necessitam de um comentário adicional.

Capítulo 2

Sistemas de Controle Lineares com Não Linearidade na Entrada de Controle

Para sistemas de controle lineares do tipo **SISO** (*single input single output*) há uma variedade de técnicas na literatura que permitem impor uma dinâmica desejada em um controle em malha fechada, como os métodos de resposta em frequência e lugar das raízes, empregados na teoria de controle clássico ou o método da alocação de pólos utilizado em teoria de controle moderno. Na presença de não linearidades na entrada de controle, como saturação, zona morta ou histerese, as técnicas citadas anteriormente não fornecem resultados satisfatórios.

É comum na teoria de controle estudar estas não linearidades como funções lineares por partes e empregar uma técnica de controle associada com funções descritivas [25]. Embora tal método forneça bons resultados, funções lineares por partes são modelos ideais para estas não linearidades. Neste sentido, a finalidade deste capítulo é propor uma definição para a saturação e apresentar uma equação diferencial ordinária em \mathbb{R}^{n+1} que representa, em malha fechada, um caso particular de sistemas de controle lineares com esta não linearidade na entrada de controle e controlador do tipo **PI**.

2.1 Sistemas de Controle

A teoria de controle é a área da matemática que tem por finalidade a análise de sistemas de controle. Embora exista uma definição mais abrangente para sistemas de controle,

este trabalho abordará um caso particular de sistemas de controle dado por equações diferenciais ordinárias que, em um contexto mais amplo, é apenas um caso particular de sistemas de controle. De um modo não rigoroso, um sistema de controle pode ser visto como uma família de equações diferenciais ordinárias parametrizada por um parâmetro que pode ser controlado. Entende-se por controlar um objeto, a ação de influenciar o seu comportamento de tal forma a alcançar um objetivo desejado. Mais formalmente, neste trabalho será empregada a seguinte definição de sistemas de controle.

Definição 2.1.1. *Um sistema de controle é todo sistema dinâmico da forma*

$$\Sigma : \begin{aligned} \mathbf{x}' &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ o vetor de estado, \mathcal{E} o espaço de estados, $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a entrada de controle, \mathcal{U} o espaço das entradas de controle e $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ a saída de controle, sendo \mathcal{Y} o espaço das saídas de controle. As aplicações $f : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$ e $h : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ são suaves em $\mathcal{E} \times \mathcal{U}$.

Por suave, deve-se entender que as aplicações $f : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$ e $h : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ são suficientemente diferenciáveis em $\mathcal{E} \times \mathcal{U}$. É comum chamar os elementos de \mathcal{U} simplesmente de entradas e os elementos de \mathcal{Y} de saídas, ficando subentendido o termo controle neste contexto.

Na definição 2.1.1, o espaço de estados \mathcal{E} é uma variedade diferenciável n -dimensional, $n \in \mathbb{N}$. Este trabalho trata de um caso particular em que $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^k$ são espaços com produto interno.

Note que, fixada uma entrada $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e uma condição inicial, o estudo do sistema de controle Σ é reduzido ao estudo de um problema de valor inicial. Assim, o essencial em Σ é a equação diferencial ordinária e um sistema de controle da forma (2.1) pode ser estudado no contexto da teoria de sistemas dinâmicos. Contudo, este é assunto da seção 3.1 do capítulo 3.

O objetivo no estudo de sistemas de controle é encontrar entradas $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ de tal forma que (2.1) apresente uma dinâmica desejada. Quando uma tal entrada depende do vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ ou da saída $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, esta entrada é denominada uma realimentação, que pode ser estática ou dinâmica. Para consulta basta ver [10].

Uma realimentação de particular interesse neste trabalho é a realimentação dinâmica de saída com nova entrada de acordo com a definição 2.1.2.

Definição 2.1.2. *Uma realimentação dinâmica de saída com nova entrada para o sistema de controle (2.1) é definida por*

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &:= K(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \\ \mathbf{u} &:= L(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo $K : \mathcal{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ e $L : \mathcal{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ aplicações suaves em $\mathcal{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{U}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^l$ o vetor dinâmico e $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a nova entrada.

Um exemplo de realimentação dinâmica de saída é o controlador do tipo **PI**.

Exemplo 2.1.1. *Um controlador do tipo proporcional e integral ou simplesmente um controlador do tipo **PI** pode ser representado como*

$$\begin{aligned} z' &= -y + v, \\ u &= K_P(v - y) + K_I z, \end{aligned} \tag{2.3}$$

com K_I, K_P parâmetros reais não negativos, $z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$ a variável dinâmica e $v \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ a nova entrada que, no contexto do controlador do tipo **PI**, faz o papel de referência ou o valor desejado para a saída de controle. As variáveis $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ e $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ são, respectivamente, a entrada e a saída de um sistema de controle.

O conceito de realimentação permite classificar os sistemas de controle da forma (2.1) através da entrada $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Definição 2.1.3. *Um controle em malha aberta de (2.1) é uma entrada $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ que não depende do vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ ou da saída de controle $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Um sistema de controle em malha aberta é um sistema de controle da forma (2.1) no qual é empregado um controle em malha aberta.*

Definição 2.1.4. *Um controle em malha fechada de (2.1) é uma realimentação de estado ou de saída $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ que pode ser estática ou dinâmica. Um sistema de controle em malha fechada é um sistema de controle da forma (2.1) no qual é empregado um controle em malha fechada.*

Quando a nova entrada de controle $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ de uma realimentação de estado ou de saída (estática ou dinâmica) é identicamente nula, o sistema de controle correspondente em malha fechada é denominado um *sistema de controle regulador*.

Outra classificação pode ser feita considerando as dimensões do espaço das entradas \mathcal{U} e do espaço das saídas \mathcal{Y} .

Definição 2.1.5. Um sistema de controle da forma (2.1) é denominado do tipo **SISO** (single input single output) se possuir uma única entrada e uma única saída, ou seja, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$. Se possuir múltiplas entradas ou múltiplas saídas, o sistema de controle da forma (2.1) é dito ser do tipo **MIMO** (multiple input multiple output).

Conforme mencionado, o objetivo deste trabalho não é estudar sistemas de controle gerais como (2.1), mas um caso particular denominado sistema de controle linear. Tal sistema de controle é assunto da próxima seção.

2.2 Sistemas de Controle Lineares

A idéia desta seção é apresentar um tipo especial de sistema de controle, de interesse neste trabalho, que possui relação com as funções de transferência. Os sistemas de controle lineares são casos particulares de (2.1), de acordo com a seguinte definição.

Definição 2.2.1. Um sistema de controle linear, invariante no tempo e do tipo **SISO** é todo sistema de controle com uma única entrada de controle e uma única saída de controle da forma

$$\Sigma : \begin{aligned} \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} + Bu, \\ y &= C\mathbf{x} + Du, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}$ a saída de controle, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear, $B, C \in \mathbb{R}^n$ e $D \in \mathbb{R}$.

Um conceito importante no estudo de sistemas de controle lineares da forma (2.4) é o de função de transferência. Tal conceito está relacionado com o conceito de transformada de Laplace. Dada uma função $t \mapsto y(t)$, contínua por partes e de ordem exponencial, a transformada de Laplace, denotada por $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, é definida por

$$\mathcal{L}(y(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt, \quad (2.5)$$

com $s \in \mathbb{C}$.

Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros de um sistema de controle linear do tipo (2.4) e para $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, obtém-se a função de transferência de (2.4).

Definição 2.2.2. A função racional complexa $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B + D, \quad (2.6)$$

é denominada função de transferência de (2.4), sendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$ e I_n a matriz identidade $n \times n$.

A definição 2.2.2 faz a conexão entre o controle linear clássico, baseado em funções complexas obtidas via transformada de Laplace e o controle linear moderno, baseado em variáveis de estado e sistemas de controle do tipo (2.4). O interesse neste trabalho está nas funções de transferência da forma

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_l s^l}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^n}, \quad (2.7)$$

com $l, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l \leq n$ e os coeficientes $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, l$.

Aplicando a transformada de Laplace inversa em (2.7), resulta a seguinte equação diferencial linear de ordem n , não homogênea e a coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^l b_k \frac{d^k}{dt^k} u(t), \quad (2.8)$$

sendo $l, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $l \leq n$ e $a_n = 1$.

Com uma mudança de variáveis apropriada, a equação diferencial ordinária linear (2.8) pode ser escrita na forma de um sistema de controle do tipo (2.4). A demonstração pode ser encontrada em [24].

Proposição 2.2.1. *Através da mudança de variáveis*

$$\begin{aligned} x_1 &= y - B_0 u, \\ x_2 &= y' - B_0 u' - B_1 u = x_1' - B_1 u, \\ x_3 &= y'' - B_0 u'' - B_1 u' - B_2 u = x_2' - B_2 u, \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - B_0 u^{(n-1)} - \dots - B_{n-1} u = \\ &= x_{n-1}' - B_{n-1} u, \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} B_0 &= b_n, \\ B_1 &= b_{n-1} - a_{n-1} B_0, \\ B_2 &= b_{n-2} - a_{n-1} B_1 - a_{n-2} B_0, \\ &\vdots \\ B_n &= b_0 - a_{n-1} B_{n-1} - \dots - a_1 B_1 - a_0 B_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

e para o caso em que $l = n$, $l, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a equação diferencial (2.8) pode ser escrita na forma de um sistema de controle da forma (2.4), com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_n), \quad (2.12)$$

$$C = (1, 0, \dots, 0), \quad (2.13)$$

$$D = B_0. \quad (2.14)$$

O sistema de controle linear, obtido através da **Proposição 2.2.1** é justamente aquele de interesse comentado no início desta seção.

2.3 Controlador do Tipo PI

Um controlador, no contexto da teoria de controle clássico, desempenha um papel análogo ao de uma realimentação de saída, estática ou dinâmica. Nesta teoria, um controlador do tipo **PI** possui a seguinte função de transferência

$$G_C(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (2.15)$$

ou utilizando a transformada de Laplace inversa

$$v(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

sendo $K_I, K_P \in \mathbb{R}$ parâmetros reais não negativos e a função $t \mapsto e(t)$, denominada função erro, definida por

$$e(t) := r(t) - y(t), \quad (2.17)$$

com $t \mapsto r(t)$ uma função denominada referência e $t \mapsto y(t)$ a saída de controle.

A idéia, neste trabalho, é tratar um controlador do tipo **PI** como uma realimentação dinâmica de saída, linear e com nova entrada $t \mapsto e(t) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$, que no caso geral e para sistemas de controle do tipo (2.4) é definida da seguinte forma.

Definição 2.3.1. *Uma realimentação dinâmica de saída, linear e com nova entrada para o sistema de controle da forma (2.4) é qualquer realimentação da forma*

$$\begin{aligned} z' &:= Ez + Fe, \\ v &:= Gz + He, \end{aligned} \tag{2.18}$$

com $z \in \mathbb{R}^l$ o vetor dinâmico, $e \in \mathbb{R}$ a nova entrada, $v \in \mathbb{R}$ a saída de controle, $E : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ um operador linear, $F, G \in \mathbb{R}^l$ e $H \in \mathbb{R}$.

No caso de um controlador do tipo **PI**, de (2.16) resulta, definindo $z := v - K_P e$, que $z' = K_I e$. Logo, $v = z + K_P e$ e, portanto,

$$\begin{aligned} z' &= Ez + Fe = 0z + K_I e, \\ v &= Gz + He = z + K_P e. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que a representação (2.19) de um controlador do tipo **PI** como realimentação dinâmica de saída, linear e com nova entrada $t \mapsto e(t) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$ não é única. Contudo,

$$\frac{V(s)}{E(s)} = G_C(s) = G(sI_1 - E)^{-1}F + H = K_P + \frac{K_I}{s}, \tag{2.20}$$

tanto para (2.19) como no exemplo 2.1.1.

Neste trabalho, há a hipótese de que a variável $v \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$ se relaciona com a entrada de controle $u \in \mathcal{U} = \mathbb{R}$ do sistema de controle da forma (2.4) através de uma função $v \mapsto u = \Xi(v)$, denominada não linearidade na entrada de controle. Esta não linearidade é o assunto da seção seguinte.

2.4 Não Linearidades na Entrada de Controle

Conforme já foi comentado, é comum na teoria de controle linear considerar as não linearidades na entrada de controle como sendo funções lineares por partes. Esta abordagem possibilita uma análise simples do problema, sobretudo em simulações numéricas e no estudo com funções descritivas.

O objetivo nesta seção é propor uma definição para a saturação, de tal forma que as funções lineares por partes sejam casos particulares destas não linearidade. Esta definição mais geral possibilita inserir os sistemas de controle lineares da forma (2.4), com esta não linearidade e com controle em malha fechada, no contexto da teoria de bifurcações tal como em [15].

Definição 2.4.1. *Uma saturação é uma função*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto u = S(v), \end{aligned} \tag{2.21}$$

com $S \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes exigências,

- a) $S(0) = 0$;
- b) $\lim_{v \rightarrow \infty} S(v) = M$, com $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$;
- c) $\lim_{v \rightarrow -\infty} S(v) = -M$;
- d) $S'(0) = m$, com $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

O conjunto $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ denota a classe de todas as funções a valores reais e definidas em \mathbb{R} que são $k \in \mathbb{N}$ vezes diferenciáveis em \mathbb{R} e com derivada de ordem k contínua em \mathbb{R} . A notação $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ significa que $S \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $v \mapsto S(v)$ é uma função contínua, então $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemplos de saturações, de acordo com a definição 2.4.1, são apresentados a seguir.

Exemplo 2.4.1. *Os representantes da família de funções*

$$\left\{ S(v) = \frac{m}{2} \left(\left| v + \frac{M}{m} \right| - \left| v - \frac{M}{m} \right| \right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}, \tag{2.22}$$

são saturações $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Os representantes desta família são exatamente as funções lineares por partes usualmente utilizadas em teoria de controle linear. O gráfico qualitativo de uma saturação linear por partes deste tipo é exibido na Figura 2.1.

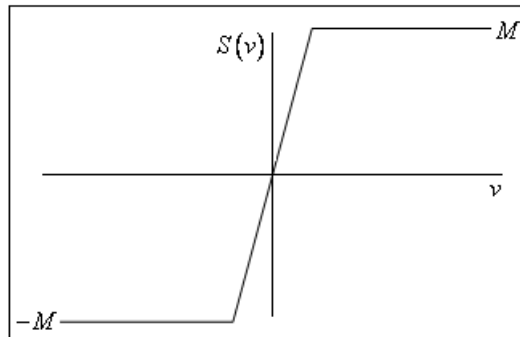


Figura 2.1: Gráfico qualitativo de uma saturação linear por partes.

Exemplo 2.4.2. *Sejam o polinômio*

$$p(x) = x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 \quad (2.23)$$

e a família de funções

$$\left\{ S(v) = \begin{cases} -M, & v \leq -\frac{M}{m} \\ Mp \left(\frac{m}{M}v \right), & -\frac{M}{m} < v < \frac{M}{m} \\ M, & v \geq \frac{M}{m} \end{cases} : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}. \quad (2.24)$$

Os representantes da família anterior são saturações $S \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. A Figura 2.2 exibe o gráfico qualitativo de um representante desta família e de sua derivada.

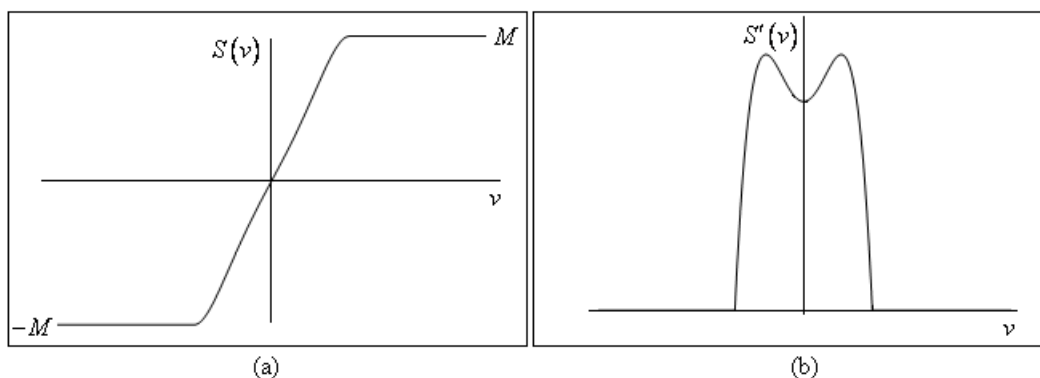


Figura 2.2: Gráfico de uma saturação $S \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para $m = M = 1$. (a) Gráfico de S . (b) Gráfico de S' .

Exemplo 2.4.3. *Cada representante da família de funções*

$$\left\{ S(v) = m \int_0^v e^{\left(-\frac{m^2\pi}{4M^2}\zeta^2\right)} d\zeta : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\} \quad (2.25)$$

é uma saturação $S \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Um outro exemplo de saturação é a função

$$S(v) = \int_0^v \frac{\text{sen}(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad (2.26)$$

com gráfico apresentado na Figura 2.3.

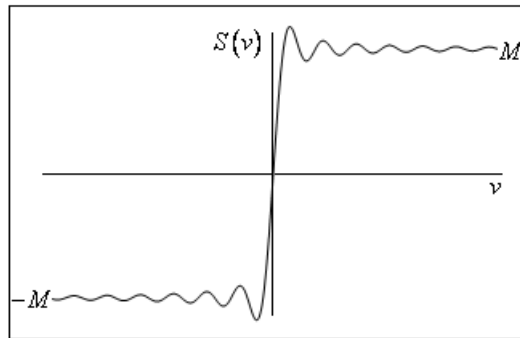


Figura 2.3: Gráfico da função (2.26).

Saturações do tipo (2.26) não serão tratadas neste trabalho e para eliminar estes casos, a seguinte definição é necessária.

Definição 2.4.2. *Uma saturação $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada regular, se $S \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e a derivada $v \mapsto S'(v)$ é tal que $S'(v) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.4.4. *Os representantes da família de funções (2.25) são exemplos de saturações regulares. Outros exemplos são obtidos das família de funções*

$$\left\{ S(v) = M \tanh\left(\frac{m}{M}v\right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}, \quad (2.27)$$

$$\left\{ S(v) = \frac{2M}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi m}{2M}v\right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}. \quad (2.28)$$

A Figura 2.4 exibe o gráfico qualitativo de uma saturação regular.

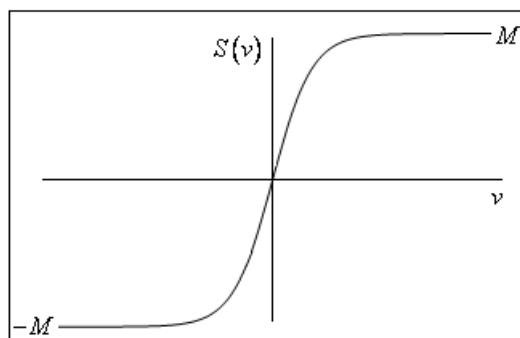


Figura 2.4: Gráfico qualitativo de uma saturação regular.

Um caso particular de saturação, de interesse neste trabalho, ocorre quando $m = M = 1$.

Definição 2.4.3. Uma saturação $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada normal se $m = M = 1$. Uma saturação regular normal é uma saturação regular para a qual $m = M = 1$.

Resulta da definição anterior que, se $v \mapsto s(v)$ é uma saturação normal, tal como na definição 2.4.3, então a função definida por

$$v \mapsto S(v) := Ms\left(\frac{m}{M}v\right), \quad (2.29)$$

é uma saturação no sentido da definição 2.4.1.

Exemplo 2.4.5. As funções

$$S(v) = \tanh(v), \quad (2.30)$$

$$S(v) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2}v\right), \quad (2.31)$$

$$S(v) = \begin{cases} -1, & v \leq -1 \\ p(v), & -1 < v < 1 \\ 1, & v \geq 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

com $v \mapsto p(v)$ o polinômio (2.23), são exemplos de saturações normais.

Os exemplos anteriores sugerem algumas propriedades das saturações, como limitação e, no caso regular, injetividade. Algumas destas propriedades estão na **Proposição 2.4.1**.

Proposição 2.4.1. As saturações possuem as seguintes propriedades:

a) Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação, então existe um $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, tal que $|S(v)| \leq L$, para todo $v \in \mathbb{R}$;

b) Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação $S \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ da forma

$$S(v) = \begin{cases} -M, & v \leq -\frac{M}{m} \\ M\phi\left(\frac{m}{M}v\right), & -\frac{M}{m} < v < \frac{M}{m} \\ M, & v \geq \frac{M}{m} \end{cases} \quad (2.33)$$

com $\phi \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\phi(-1) = -1$, $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$ ou se $S \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para $k \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} S'(v) &= 0, \\ \lim_{v \rightarrow -\infty} S'(v) &= 0; \end{aligned} \quad (2.34)$$

c) Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular, então $v \in \mathbb{R} \mapsto S(v) \in (-M, M)$ é uma função bijetora.

d) Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular tal que $v = 0$ é ponto de máximo da função $v \mapsto S'(v)$, então $S^{(3)}(0) < 0$.

Demonstração.

a) Sendo $v \mapsto S(v)$ uma saturação, da propriedade (b) da definição 2.4.1, dado $\varepsilon = 1$, existe uma $v_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 > 0$, tal que se $v \in \mathbb{R}$ e $v > v_0$, então $|S(v) - M| < 1$. Logo, como $||S(v)| - |M|| \leq |S(v) - M| < 1$, $|S(v)| < M + 1$ para todo $v > v_0$. Por outro lado, como $S \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a restrição ao conjunto compacto $[0, v_0] \subset \mathbb{R}$ garante que existe um $M_1 \in \mathbb{R}$, sendo $M_1 = \sup\{S(v) : v \in [0, v_0]\}$. Seja $L_1 := \max\{M_1, M + 1\}$. Então, $L_1 > 0$ e $S(v) \leq L_1$ para todo $v \geq 0$. De modo análogo, da propriedade (c) da definição 2.4.1, é possível mostrar que existe um $L_2 \in \mathbb{R}$, $L_2 < 0$, tal que $S(v) \geq L_2$ para todo $v \leq 0$. Assim, definindo $L := \max\{L_1, |L_2|\}$, resulta que $|S(v)| \leq L$ para todo $v \in \mathbb{R}$.

b) O primeiro caso é simples de mostrar. Suponha, então, que $v \mapsto S(v)$ é uma saturação $S \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para algum $k \geq 1$ e defina a seguinte função $v \mapsto g(v) := S(v+1) - S(v) \in \mathbb{R}$. Resulta que $g(v) \rightarrow 0$ quando $v \rightarrow \infty$. De fato, da propriedade (b) da definição 2.4.1, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe um $v_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 > 0$, tal que se $v \in \mathbb{R}$ e $v > v_0$, então

$$|S(v) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.35)$$

Logo, se $v > v_0$

$$|g(v)| = |S(v+1) - S(v)| \leq |S(v+1) - M| + |S(v) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.36)$$

Portanto, $g(v) \rightarrow 0$ quando $v \rightarrow \infty$.

Para cada $v > 0$, a função $v \mapsto S(v)$ é contínua em $[v, v+1]$ e diferenciável em $(v, v+1)$. Pelo teorema do valor médio, existe um $\bar{v} \in (v, v+1)$, tal que $g(v) = S(v+1) - S(v) = S'(\bar{v})$. Fazendo $v \rightarrow \infty$, como $\bar{v} \in (v, v+1)$, segue que $\bar{v} \rightarrow \infty$ e $S'(\bar{v}) \rightarrow 0$. Com argumentos semelhantes é possível mostrar que $S'(v) \rightarrow 0$ quando $v \rightarrow -\infty$.

- c) Sendo a saturação $v \mapsto S(v)$ regular, $S'(v) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Logo, $v \mapsto S(v)$ é uma função monótona, estritamente crescente e, portanto, injetora. Da propriedade (a) da definição 2.4.1, isto é, $S(0) = 0$ e do item (a) deste teorema, o conjunto $\{S(v) : v \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente e o conjunto $\{S(v) : v \leq 0\} \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado inferiormente. Assim, das propriedades (b) e (c) da definição 2.4.1 e do fato da função ser injetora é possível mostrar que $\sup\{S(v) : v \geq 0\} = M$ e $\inf\{S(v) : v \leq 0\} = -M$. Assim, a imagem de $v \mapsto S(v)$ está contida em $(-M, M) \subset \mathbb{R}$. Logo, a função $v \in \mathbb{R} \mapsto S(v) \in (-M, M)$ é uma função sobrejetora.
- d) Das hipóteses e das propriedades (b) e (c) da definição 2.4.1, resulta que $S'(0) = m$ é o valor máximo global da função $v \mapsto S'(v)$. Assim, existe uma vizinhança $(-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$ de $v = 0$ tal que a função $v \mapsto S'(v)$ é monótona crescente em $(-\delta, 0) \subset \mathbb{R}$ e monótona decrescente em $(0, \delta) \subset \mathbb{R}$ $v = 0$, ou seja, $S''(v) > 0$ para $v \in (-\delta, 0)$ e $S''(v) < 0$ para $v \in (0, \delta)$. Como

$$\frac{S''(h) - S''(0)}{h} < 0, \text{ se } h \in (-\delta, 0) \quad (2.37)$$

e

$$\frac{S''(h) - S''(0)}{h} < 0, \text{ se } h \in (0, \delta), \quad (2.38)$$

pela continuidade da função $v \mapsto S^{(3)}(0)$, segue que $S^{(3)}(0) < 0$.

■

Os representantes das famílias de funções (2.27) e (2.28) são exemplos de funções que possuem a propriedade (d) da **Proposição 2.4.1**.

Outra não linearidade de interesse em engenharia é a zona morta. Embora o foco deste trabalho seja a saturação, há uma relação entre a saturação e a zona morta. A definição de zona morta é dada a seguir.

Definição 2.4.4. *Uma zona morta é uma função*

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto u = Z(v) \end{aligned} \quad (2.39)$$

com $Z \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes exigências,

- a) $Z(0) = 0$;

$$\text{b) } \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v)}{mv - M} = 1, \text{ com } m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0;$$

$$\text{c) } \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{Z(v)}{mv + M} = 1;$$

$$\text{d) } Z'(0) = 0.$$

Exemplo 2.4.6. Os representantes da família de funções lineares por partes

$$\left\{ Z(v) = \frac{m}{2} \left(2v + \left| v - \frac{M}{m} \right| - \left| v + \frac{M}{m} \right| \right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}, \quad (2.40)$$

satisfazem a definição 2.4.4. O gráfico qualitativo de um dos representantes da família (2.40) é exibido na Figura 2.5.

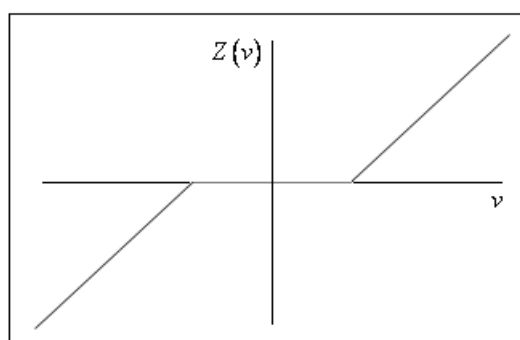


Figura 2.5: Gráfico qualitativo de uma zona morta linear por partes.

Tal como comentado com as saturações, para evitar certos tipos de zonas mortas é necessária uma definição de zona morta regular.

Definição 2.4.5. Uma zona morta $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada regular, se $Z \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e a derivada $v \mapsto Z'(v)$ satisfaz a condição $Z'(v) > 0$, se $v \neq 0$.

Existem vários exemplos de zonas mortas regulares, já que as zonas mortas podem ser construídas a partir das saturações. A **Proposição 2.4.2** mostra a relação existente entre saturações e zonas mortas.

Proposição 2.4.2. Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação, então a função definida por

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto Z(v) := mv - S(v) \end{aligned} \quad (2.41)$$

com $m = S'(0)$, é uma zona morta. Além disto, se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular na qual $v = 0$ é o único ponto crítico de $v \mapsto S''(v)$, então $v \mapsto Z(v) = mv - S(v)$ é uma zona morta regular.

Demonstração. Suponha que $v \mapsto S(v)$ é uma saturação. Basta mostrar que a função $v \mapsto Z(v) = mv - S(v)$ cumpre com as exigências (a) a (d) da definição 2.4.4, pois por construção, $Z \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se $S \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

A exigência (a) é trivialmente satisfeita, já que $S(0) = 0$. Se $v \mapsto Z(v)$ possuir uma assíntota oblíqua $v \mapsto l(v) = av + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $v > 0$, então

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (Z(v) - l(v)) = \lim_{v \rightarrow \infty} (Z(v) - (av + b)) = 0, \quad (2.42)$$

ou seja, os seguintes limites existem

$$\begin{aligned} a &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v) - b}{v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v)}{v}, \\ b &= \lim_{v \rightarrow \infty} (Z(v) - mv). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como $S(v) \rightarrow M$ quando $v \rightarrow \infty$, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe um $v_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 > 1$ tal que se $v \in \mathbb{R}$ e $v > v_0 > 1$, então

$$\begin{aligned} |S(v) - M| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \left| \frac{M}{v} \right| &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

pois a função $s \mapsto M/v$ é tal que $M/v \rightarrow 0$ quando $v \rightarrow \infty$. Visto que

$$||S(v)| - |M|| \leq |S(v) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.45)$$

rearranjando esta última expressão e dividindo por v , $v > v_0 > 1$, resulta que

$$\left| \frac{S(v)}{v} \right| \leq \left| \frac{M}{v} \right| + \frac{\varepsilon}{2v} < \left| \frac{M}{v} \right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (2.46)$$

o que mostra que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{S(v)}{v} = 0. \quad (2.47)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v)}{v} = m - \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{S(v)}{v} = m, \\ b &= \lim_{v \rightarrow \infty} (Z(v) - mv) = \lim_{v \rightarrow \infty} (mv - S(v) - mv) = -M \end{aligned} \quad (2.48)$$

e, assim,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v)}{l(v)} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{Z(v)}{mv - M} = 1. \quad (2.49)$$

Logo, a função $v \mapsto Z(v)$ satisfaz a exigência (b) da definição 2.4.4 e de modo análogo, pode-se mostrar que esta função cumpre com a exigência (c). Por último, $Z'(0) = 0$, já que $Z'(v) = m - S'(v)$ e $S'(0) = m$. Portanto, a função $v \mapsto Z(v) = mv - S(v)$ é uma zona morta segundo a definição 2.4.4.

Se $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $Z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Como $S'(v) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$ e $v = 0$ é o único ponto crítico de $S''(v)$, $S'(0) = m$ é o valor máximo ou mínimo local da função $v \mapsto S'(v)$. Resulta que, utilizando o item (b) da **Proposição 2.4.1**, $S'(0) = m$ é o valor máximo global da função $v \mapsto S'(v)$, ou seja, $S'(v) < m$ se $v \neq 0$. Portanto, de $Z'(v) = m - S'(v)$, segue que $Z'(v) > 0$ se $v \neq 0$.

■

Exemplo 2.4.7. *Da proposição anterior, os representantes das famílias*

$$\left\{ Z(v) = mv - M \tanh\left(\frac{m}{M}v\right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}, \quad (2.50)$$

$$\left\{ Z(v) = mv - \frac{2M}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi m}{2M}v\right) : m, M \in \mathbb{R}, m, M > 0 \right\}, \quad (2.51)$$

são exemplos de zonas mortas regulares. Um gráfico qualitativo de uma zona morta regular é exibido na Figura 2.6.

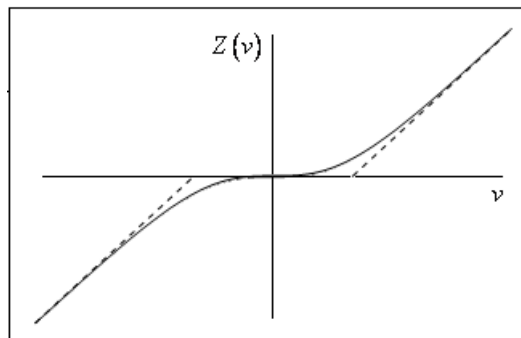


Figura 2.6: Gráfico qualitativo de uma zona regular.

Proposição 2.4.3. *Se $v \mapsto S(v)$ é uma saturação, então existe uma única zona morta $v \mapsto Z(v)$ tal que $S(v) = mv - Z(v)$.*

Demonstração. Sendo $v \mapsto S(v)$ uma saturação, da **Proposição 2.4.2**, a função $v \mapsto Z(v) = mv - S(v)$ é uma zona morta. Portanto, $S(v) = mv - Z(v)$, sendo $v \mapsto Z(v)$ uma zona morta. Se $v \mapsto Z_1(v)$ e $v \mapsto Z_2(v)$ são zonas mortas tais $S(v) = mv - Z_1(v)$ e

$S(v) = mv - Z_2(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}$, então $mv - Z_1(v) = mv - Z_2(v)$ e $Z_1(v) = Z_2(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}$.

■

A **Proposição 2.4.2** mostra que também é possível construir uma saturação a partir de uma zona morta.

Proposição 2.4.4. *Se $v \mapsto Z(v)$ é uma zona morta, então a função definida por*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto S(v) := mv - Z(v) \end{aligned} \tag{2.52}$$

com $m \in \mathbb{R}$ e $m > 0$, é uma saturação. Além disto, se $v \mapsto Z(v)$ é uma zona morta regular na qual $v = 0$ é o único ponto crítico de $v \mapsto Z''(v)$, então $v \mapsto S(v) = mv - Z(v)$ é uma saturação regular.

Demonstração. Novamente, basta mostrar que a função $v \mapsto S(v) = mv - Z(v)$ cumpre com as exigências (a) a (d) da definição 2.4.1, desde que a função $v \mapsto Z(v)$ seja uma zona morta tal como na definição 2.4.4. Claramente $S \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e as exigências (a) e (d) da definição 2.4.1 são verificadas, já que, por hipótese, $Z \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $Z(0) = 0$ e $Z'(0) = 0$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} (Z(v) - (mv - M)) &= 0, \\ \lim_{v \rightarrow -\infty} (Z(v) - (mv + M)) &= 0, \end{aligned} \tag{2.53}$$

resulta imediatamente que

$$\begin{aligned} M &= \lim_{v \rightarrow \infty} (mv - Z(v)) = \lim_{v \rightarrow \infty} S(v), \\ -M &= \lim_{v \rightarrow -\infty} (mv - Z(v)) = \lim_{v \rightarrow -\infty} S(v), \end{aligned} \tag{2.54}$$

o que mostra que a função $v \mapsto S(v) = mv - Z(v)$ satisfaz as exigências (b) e (c) da definição 2.4.1. Logo, a função $v \mapsto S(v) = mv - Z(v)$ é uma saturação.

Se $v \mapsto Z(v)$ é uma zona morta regular para o qual $v = 0$ é o único ponto crítico de $v \mapsto Z''(v)$ é fácil mostrar que $v \mapsto S(v) = mv - Z(v)$ é uma saturação regular.

■

A não linearidade de interesse nesta seção, a saturação, associada com um controle em malha fechada com controlador do tipo **PI**, conduz ao estudo de uma equação diferencial ordinária não linear. A obtenção desta equação diferencial é assunto da próxima seção.

2.5 Controle em Malha Fechada

Suponha que a função $v \mapsto u = S(v)$ seja uma não linearidade na entrada de controle do tipo saturação. Suponha também que o coeficiente B_0 , tal como na **Proposição 2.2.1**, seja nulo e que $y = x_1$, ou seja, $C = (1, \dots, 0)$ e $D = 0$. Com estas hipóteses, a finalidade desta seção é apresentar um sistema de controle linear do tipo (2.4) com controle em malha fechada empregando um controlador do tipo **PI** que é considerado uma realimentação dinâmica de saída, linear e com nova entrada tal como em (2.19).

De alguns resultados das seções 2.2, 2.3 e 2.4, isto é,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= A\mathbf{x} + Bu, \\
 y &= C\mathbf{x}, \\
 u &= S(v), \\
 z' &= K_I e, \\
 v &= z + K_P e, \\
 e &= r - y,
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

com $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $B, C \in \mathbb{R}^n$ como na **Proposição 2.2.1** e fazendo $x_{n+1} = z$, resulta a seguinte equação diferencial ordinária não linear,

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}S(K_P(r - x_1) + x_{n+1}) + \mathcal{C}r, \tag{2.56}$$

sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um operador linear da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \\ -K_I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

$\mathcal{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathcal{C} = (0, 0, \dots, 0, 0, K_I) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

O objetivo a partir deste ponto é estudar a estabilidade do único ponto de equilíbrio da equação diferencial ordinária não linear (2.56) (para o qual $y = r$) no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$. Isto será feito, conforme já foi dito, no contexto da teoria de sistemas dinâmicos que é o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 3

Estabilidade Linear

As propriedades de um sistema de controle com saturação na entrada e controlador do tipo **PI** podem ser estudadas e compreendidas no contexto da teoria de sistemas dinâmicos. Neste sentido, a proposta deste capítulo é apresentar as principais definições e teoremas relacionados com a estabilidade linear e aplicar os teoremas ao caso em que $n = 2$ em (2.56).

3.1 Sistemas Dinâmicos e Estabilidade Linear

Seja a equação diferencial

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

com $F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto em \mathbb{R}^n , $F \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R}^n)$, ou simplesmente, $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x})$ é uma aplicação suave. O conjunto $W \subset \mathbb{R}^n$ é denominado espaço de estados de (3.1).

Com relação a notação, sendo (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, com d_X e d_Y métricas nos conjuntos X e Y , respectivamente, o conjunto $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ denota a classe de todas as aplicações com domínio X e contradomínio Y que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em X .

Para a equação diferencial (3.1), valem as definições e teoremas enunciados a seguir.

Definição 3.1.1. *Uma solução do problema de valor inicial,*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= F(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

com $\mathbf{y} \in W$ uma condição inicial, é uma função $t \mapsto \mathbf{x}_s(t)$ que satisfaz (3.2), ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s'(t) &= F(\mathbf{x}_s(t)), \\ \mathbf{x}_s(0) &= \mathbf{y},\end{aligned}\tag{3.3}$$

para todo $t \in J_t \subset \mathbb{R}$, $0 \in J_t$.

Geometricamente, a solução $t \mapsto \mathbf{x}_s(t)$ de (3.2), pode ser vista como uma curva em $W \subset \mathbb{R}^n$, passando por $\mathbf{y} \in W$, tal que em cada ponto da curva, o vetor tangente é calculado por (3.1). Uma solução de particular interesse no estudo de (3.1) é definida a seguir.

Definição 3.1.2. *Um ponto de equilíbrio de (3.1) é um ponto $\mathbf{x}_0 \in W$, tal que $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.*

Outro conceito importante é a noção de fluxo de (3.1).

Definição 3.1.3. *Considere o conjunto,*

$$\Omega = \{(t, \mathbf{x}) : t \in J(\mathbf{x}) \text{ e } \mathbf{x} \in W\},\tag{3.4}$$

com $J(\mathbf{x}) = (-\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}))$, $\alpha(\mathbf{x}) > 0$, $\beta(\mathbf{x}) > 0$, para todo $\mathbf{x} \in W$, o intervalo maximal de existência da solução de (3.1) com condição inicial \mathbf{x} . O fluxo de (3.1) é uma aplicação suave

$$\begin{aligned}\phi: \Omega &\longrightarrow W \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \phi(t, \mathbf{x}) = \phi_t(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{3.5}$$

satisfazendo as propriedades:

- a) $\phi_0 = I_n$, sendo I_n , a matriz identidade $n \times n$;
- b) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$;
- c) $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0$, para sistemas dinâmicos inversíveis;

Conforme [12], o fluxo da definição (3.1.3) é diferenciável e,

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) = F(\phi_t(\mathbf{x})),\tag{3.6}$$

para todo $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$. Além disto, como $F \in \mathcal{C}^\infty(W, \mathbb{R}^n)$, a aplicação $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ é suave. Utilizando a definição de fluxo de uma equação diferencial, um ponto de equilíbrio de (3.1) é um ponto $\mathbf{x}_0 \in W$, tal que

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0,\tag{3.7}$$

para todo $t \in J(\mathbf{x}) = \mathbb{R}$, ou seja, um ponto de equilíbrio é uma solução constante de (3.1).

Exemplo 3.1.1. *O fluxo da equação diferencial ordinária, no caso em que $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, sendo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear, é da forma*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \phi_t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

As propriedades (a) a (c) da definição 3.1.3, para (3.8), decorrem das propriedades do operador linear e^{tA} , com $t \in \mathbb{R}$.

No item (c) da definição 3.1.3 é utilizado o conceito de sistema dinâmico. A própria noção de fluxo de uma equação diferencial permite formalizar esta definição.

Definição 3.1.4. *Um sistema dinâmico é uma terna $\{J, W, \phi_t\}$, sendo J o conjunto dos tempos, $W \subset \mathbb{R}^n$ o espaço de estados e $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ o fluxo definido em (3.1.3).*

Conforme definição 3.1.4, a equação diferencial (3.1) é um sistema dinâmico.

Com relação aos pontos de equilíbrio de (3.1), estes podem ser classificados como estável, assintoticamente estável ou instável. Estas definições são apresentadas a seguir. Para consulta ver [12].

Definição 3.1.5. *Um ponto equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é estável, se para toda vizinhança $U \subset W$ de \mathbf{x}_0 , existir uma vizinhança $D \subset U$ de \mathbf{x}_0 , tal que $\phi_t(\mathbf{x}) \in U$, para todo $\mathbf{x} \in D$ e para todo $t \geq 0$.*

De modo mais analítico, um ponto equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é estável, se dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existir um $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ (em geral dependendo de ε), tal que se $\mathbf{x} \in W$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, então $\|\phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq 0$, com $\|\cdot\|$ a norma usual em \mathbb{R}^n .

Definição 3.1.6. *Um ponto equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é assintoticamente estável, se for estável e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0, \tag{3.9}$$

para todo $\mathbf{x} \in D$.

Definição 3.1.7. *Um ponto equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é instável, se não for estável, ou seja, se existir uma vizinhança $U \subset W$ de \mathbf{x}_0 , tal que para toda vizinhança $D \subset U$ de \mathbf{x}_0 , existem pontos $\mathbf{x} \in D$ e $t \in J(\mathbf{x})$, tais que $\phi_t(\mathbf{x}) \notin U$.*

Informações sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio de (3.1) podem ser extraídas da seguinte definição.

Definição 3.1.8. *Considere a parte linear da aplicação $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$, calculada em $\mathbf{x}_0 \in W$,*

$$DF(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto DF(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}_0)x_i, \quad (3.10)$$

com $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A matriz de (3.10) na base canônica do \mathbb{R}^n é denominada matriz Jacobiana e é denotada por $A = (DF(\mathbf{x}_0))_{n \times n}$, com

$$(DF(\mathbf{x}_0))_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_1(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_2(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_n(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} F_n(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} F_n(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

É usual omitir os parênteses em (3.11) e escrever simplesmente $A = DF(\mathbf{x}_0)$ para denotar a matriz Jacobiana.

As demonstrações dos teoremas enunciados a seguir podem ser encontradas em [12].

Teorema 3.1.1. *Seja $\mathbf{x}_0 \in W$ um ponto de equilíbrio de (3.1). Se todos os autovalores de $DF(\mathbf{x}_0)$ têm partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ é assintoticamente estável.*

Teorema 3.1.2. *Seja $\mathbf{x}_0 \in W$ um ponto de equilíbrio de (3.1). Se pelo menos um autovalor de $DF(\mathbf{x}_0)$ tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ é instável.*

Os pontos de equilíbrio possuem ainda a classificação da definição 3.1.9.

Definição 3.1.9. *Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é chamado de hiperbólico, se todos os autovalores de $DF(\mathbf{x}_0)$ possuem partes reais não nulas. Em caso contrário, $\mathbf{x}_0 \in W$ é chamado um ponto de equilíbrio degenerado.*

É possível mostrar que os pontos de equilíbrio hiperbólicos ou são assintoticamente estáveis ou instáveis [12]. Estes pontos de equilíbrio podem ser atratores, repulsores ou do tipo sela.

Definição 3.1.10. Um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é denominado atrator, se todos os autovalores de $DF(\mathbf{x}_0)$ têm partes reais negativas e um repulsor, se todos os autovalores têm partes reais positivas. Se todos os autovalores de um atrator (ou repulsor) forem reais, ele será chamado de um nó atrator (ou nó repulsor) e se todos os autovalores forem complexos, de um foco atrator (ou foco repulsor).

Definição 3.1.11. Um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}_0 \in W$ de (3.1) é denominado sela, se pelo menos dois autovalores de $DF(\mathbf{x}_0)$ possuem partes reais de sinais opostos.

Associado a um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, há um conjunto denominado bacia de atração.

Definição 3.1.12. Seja $\mathbf{x}_0 \in W$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (3.1). A bacia de atração de $\mathbf{x}_0 \in W$ é o conjunto

$$B(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in W : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0\}. \quad (3.12)$$

Outras definições, muito utilizadas neste trabalho, são os conceitos de órbita e órbita periódica de uma equação diferencial.

Definição 3.1.13. Uma órbita de (3.1), iniciando no ponto $\mathbf{y} \in W$, é um conjunto ordenado

$$\text{Orb}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in W : \phi_t(\mathbf{y}) = \mathbf{x}, \forall t \in J(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}\}. \quad (3.13)$$

Definição 3.1.14. Uma órbita periódica $u \subset W$ é uma órbita de (3.1), tal que $\forall \mathbf{y} \in u$,

$$\phi_{t+T}(\mathbf{y}) = \phi_t(\mathbf{y}), \quad (3.14)$$

$\forall t \in J(\mathbf{y}) = \mathbb{R}$. O menor $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, para o qual (3.14) ocorre, é denominado período da órbita periódica.

O retrato de fase de um sistema dinâmico é definido a seguir, a partir do conceito de órbita.

Definição 3.1.15. O retrato de fase de um sistema dinâmico é uma partição do espaço de estados em suas órbitas.

De modo análogo aos pontos de equilíbrio, as órbitas periódicas podem ser estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis.

Definição 3.1.16. *Uma órbita periódica $u \subset W$ é denominada estável, se dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existir uma vizinhança $U \subset W$ de $u \subset W$ tal que se $\mathbf{x} \in U$, então $d(\phi_t(\mathbf{x}), u) < \varepsilon$, $\forall t \geq 0$.*

Na definição (3.1.16), se $p \in W$ e $\mathbf{y} \in u$,

$$d(p, u) = \inf_{\mathbf{y} \in u} \|p - \mathbf{y}\|, \quad (3.15)$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma usual em \mathbb{R}^n .

Definição 3.1.17. *Uma órbita periódica $u \subset W$ é denominada assintoticamente estável, se for estável e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(\mathbf{x}), u) = 0. \quad (3.16)$$

Definição 3.1.18. *Uma órbita periódica $u \subset W$ é denominada instável, se não for estável.*

Assim como ocorre para os pontos de equilíbrio, as órbitas periódicas podem ser hiperbólicas ou não hiperbólicas.

Definição 3.1.19. *Uma órbita periódica $u \subset W$ de período $T > 0$ é denominada hiperbólica, se todos os autovalores de e^{BT} possuem módulo diferente de 1, sendo*

$$e^{BT} = \Phi(0)^{-1}\Phi(T) \quad (3.17)$$

e $t \mapsto \Phi(t)$ uma solução matricial fundamental do problema variacional

$$\mathbf{y}' = DF(u)\mathbf{y}. \quad (3.18)$$

Em caso contrário, $u \subset W$ é chamada de órbita periódica não hiperbólica.

Embora as definições e teoremas tenham sido enunciados para a equação diferencial (3.1), o sistema de controle em malha fechada (2.56) é um caso mais geral de (3.1) de acordo com a definição 3.1.20.

Definição 3.1.20. *A equação diferencial*

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi), \quad (3.19)$$

com $f : W \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto em \mathbb{R}^n , $f \in C^\infty(W \times U, \mathbb{R}^n)$, $\xi = (\mu, \nu) \in U$ o vetor de parâmetros e

$$f(\mathbf{x}, \xi_0) = F(\mathbf{x}), \quad (3.20)$$

com $\xi_0 \in U$ fixo, é denominado perturbação de (3.1).

Todos as definições e teoremas exibidos nesta seção se mantêm para cada $\xi \in U$ fixo, conforme a definição 3.1.20. Estes conceitos serão utilizados neste e nos próximos capítulos.

Na próxima seção é iniciado o estudo de (2.56) ou, mais precisamente, do caso de interesse que ocorre quando $n = 2$ em (2.56) e a saturação é regular.

3.2 Análise do Sistema de Controle em Malha Fechada

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo desta seção é analisar os sistemas de controle em malha fechada da forma (2.56) quando $n = 2$ e com não linearidade do tipo saturação regular. Contudo, com relação aos pontos de equilíbrio de (2.56) há um resultado válido para n qualquer.

Proposição 3.2.1. *Suponha que o coeficiente $b_0 \in \mathbb{R}$ é não nulo, que a função $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular e*

$$\left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M.$$

Então, o sistema de controle em malha fechada (2.56) possui um único ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Além disto,

- a) Se $r \neq 0$, então $x_1^0 = r$, $x_j^0 = -B_{j-1} \frac{a_0 r}{b_0}$, para $j = 2, 3, \dots, n$ e $x_{n+1}^0 = S^{-1} \left(\frac{a_0 r}{b_0} \right)$.
- b) Se $r = 0$, então a origem é o único ponto de equilíbrio.
- c) Se $a_0 = 0$, então $x_1^0 = r$, $x_j^0 = 0$, para $j = 2, 3, \dots, n + 1$.

Demonstração. O sistema de controle em malha fechada (2.56) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x'_j = x_{j+1} + B_j u, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ x'_n = -a_0 x_1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} + B_n u, \\ x'_{n+1} = K_I (r - x_1), \end{cases} \quad (3.21)$$

com $u = S(K_P(r - x_1) + x_{n+1})$. De acordo com a definição 3.1.2, os pontos de equilíbrio

de (2.56) são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = x_{j+1} + B_j u, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 = -a_0 x_1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} + B_n u, \\ 0 = K_I(r - x_1). \end{cases} \quad (3.22)$$

Logo, de (3.22) resulta que $x_1 = r$, $u = S(x_{n+1})$ e

$$x_{j+1} = -B_j S(x_{n+1}), \quad (3.23)$$

para $j = 1, 2, \dots, n-1$. Multiplicando ambos os membros de (3.23) por a_j e somando segue que

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_{j+1} = - \sum_{j=1}^{n-1} a_j B_j S(x_{n+1}) \quad (3.24)$$

e por (3.22),

$$-a_0 x_1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j B_j + B_n \right) S(x_{n+1}) = 0. \quad (3.25)$$

Como $B_0 = b_n = 0$, de (2.10),

$$B_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j B_j = b_0. \quad (3.26)$$

Portanto,

$$S(x_{n+1}) = \frac{a_0 r}{b_0}. \quad (3.27)$$

A saturação $v \mapsto S(v)$ é regular e pelo item (c) da **Proposição 2.4.1** admite inversa.

Logo, se

$$\left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M, \quad (3.28)$$

então

$$x_{n+1} = S^{-1} \left(\frac{a_0 r}{b_0} \right). \quad (3.29)$$

De (3.23) e (3.27)

$$x_{j+1} = -B_j \frac{a_0 r}{b_0}, \quad (3.30)$$

para $j = 1, 2, \dots, n-1$.

O item (c) da **Proposição 2.4.1** e os resultados anteriores permitem concluir que $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto de equilíbrio de (2.56), sendo que $x_1^0 = r$, $x_j^0 = -B_{j-1} \frac{a_0 r}{b_0}$, para $j = 2, 3, \dots, n$ e $x_{n+1}^0 = S^{-1} \left(\frac{a_0 r}{b_0} \right)$. Os itens (a), (b) e (c) são facilmente verificados. ■

É sabido que, em malha fechada, os sistemas de controle lineares do tipo (2.4) com controlador do tipo **PI** e na ausência de não linearidades na entrada de controle possuem um único ponto de equilíbrio tal que $y = r$. Pela **Proposição 3.2.1**, para o único equilíbrio, a saída de controle $y = x_1$ é igual ao valor da referência r , independentemente dos valores que os demais parâmetros assumem. Logo, o resultado que é válido para os sistemas de controle lineares em malha fechada e com controlador do tipo **PI**, continua válido quando há uma não linearidade do tipo saturação regular na entrada de controle.

Com relação a estabilidade, é difícil fazer uma análise do único ponto de equilíbrio de (2.56), bem como a influência dos parâmetros K_I e K_P do controlador do tipo **PI**, devido à quantidade de parâmetros. Assim sendo, o seguinte caso particular de (2.56) será analisado

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + B_1 S(K_P(r - x_1) + x_3), \\ x_2' &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 + B_2 S(K_P(r - x_1) + x_3), \\ x_3' &= K_I(r - x_1), \end{aligned} \tag{3.31}$$

sendo $B_1 = b_1$, $B_2 = b_0 - a_1 b_1$ e $v \mapsto S(v)$ uma saturação regular satisfazendo $\left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M$.

O conjunto de equações diferenciais (3.31) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi) = \begin{pmatrix} x_2 + B_1 S(K_P(r - x_1) + x_3) \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 + B_2 S(K_P(r - x_1) + x_3) \\ K_I(r - x_1) \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e os parâmetros K_I e K_P do controlador do tipo **PI** fazendo o papel dos parâmetros μ e ν , respectivamente, ou seja, $\xi = (K_I, K_P)$.

Como $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular para o qual $\left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M$, pela **Proposição 3.2.1**, a equação diferencial (3.32) possui um único ponto de equilíbrio

$$(x_0(\xi), \xi) = \left(\left(r, -\frac{a_0 b_1}{b_0} r, S^{-1} \left(\frac{a_0 r}{b_0} \right) \right), \xi \right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2. \tag{3.33}$$

Logo, pela definição 3.1.8, a parte linear de (3.32), calculada em (3.33), $A(\xi) = Df(x_0(\xi), \xi)$ é da forma

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} -b_1 K_P \beta & 1 & b_1 \beta \\ -a_0 - (b_0 - a_1 b_1) K_P \beta & -a_1 & (b_0 - a_1 b_1) \beta \\ -K_I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

com

$$\beta = S' \left(S^{-1} \left(\frac{a_0 r}{b_0} \right) \right). \quad (3.35)$$

O polinômio característico de (3.34) é $P(\lambda) = p_0 \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3$, sendo

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= a_1 + \beta b_1 K_P, \\ p_2 &= (a_0 + \beta b_0 K_P) + \beta b_1 K_P, \\ p_3 &= \beta b_0 K_I. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A estabilidade do único ponto de equilíbrio (3.33) poder ser analisada através do próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [28].

Teorema 3.2.1. *O polinômio com coeficientes reais $P(\lambda) = p_0 \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3$ e $p_0 > 0$, possui todas as raízes com partes reais negativas se e, somente se, $p_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$ e $p_1 p_2 > p_0 p_3$.*

O teorema anterior decorre de maneira imediata do teorema de Routh-Hurwitz. Fixados os parâmetros $a_0, b_0, a_1, b_1, m > 0, M > 0$ e $r > 0$ e empregando os **Teoremas 3.1.1** e **3.2.1**, se os parâmetros K_I e K_P são positivos e satisfazem as seguintes desigualdades

$$p_1 = a_1 + \beta b_1 K_P > 0, \quad (3.37)$$

$$p_2 = (a_0 + \beta b_0 K_P) + \beta b_1 K_I > 0, \quad (3.38)$$

$$p_3 = \beta b_0 K_I > 0, \quad (3.39)$$

$$(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P) > \beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))K_I, \quad (3.40)$$

então o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável.

Como $v \mapsto S(v)$ é uma saturação regular, $S'(v) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Logo, $\beta > 0$ e, visto que, $K_I > 0$, pela desigualdade (3.39) resulta que $b_0 > 0$. Assim, para $b_0 > 0$, há três casos a serem estudados dependendo do sinal de b_1 , isto é, $b_1 = 0$, $b_1 < 0$ e $b_1 > 0$.

Caso 1: Se $b_1 = 0$, então pela desigualdade (3.37), $a_1 > 0$ e pela desigualdade (3.38), $a_0 + \beta b_0 K_P > 0$. Assim, da desigualdade (3.40), resulta que $a_1(a_0 + \beta b_0 K_P) > \beta b_0 K_I$, ou seja,

$$0 < K_I < \frac{a_1(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_0}. \quad (3.41)$$

Portanto,

$$\mathbf{1.1)} \quad a_0 > 0, b_0 > \frac{a_0 r}{M}, a_1 > 0, b_1 = 0, K_P > 0, 0 < K_I < \frac{a_1(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_0};$$

$$\mathbf{1.2)} \quad a_0 \leq 0, b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, a_1 > 0, b_1 = 0, K_P > -\frac{a_0}{\beta b_0}, 0 < K_I < \frac{a_1(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_0}.$$

Caso 2: Se $b_1 < 0$, então as desigualdades (3.37), (3.38) e (3.40) são equivalentes a

$$\begin{aligned} a_1 + \beta b_1 K_P > 0, \quad a_0 + \beta b_0 K_P > 0, \quad 0 < K_I < \frac{a_0 + \beta b_0 K_P}{-\beta b_1}, \\ 0 < K_I < \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Note que, como $b_1 < 0$ e $a_1 + \beta b_1 K_P > 0$, $b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P) > 0$. Além disto,

$$\beta \left(\frac{a_0 + \beta b_0 K_P}{a_1 + \beta b_1 K_P} - b_1 \right) < \frac{a_0 + \beta b_0 K_P}{-\beta b_1}. \quad (3.43)$$

Logo,

$$\mathbf{2.1)} \quad a_0 > 0, b_0 > \frac{a_0 r}{M}, a_1 > 0, b_1 < 0, 0 < K_P < \frac{a_1}{-\beta b_1},$$

$$0 < K_I < \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))};$$

$$\mathbf{2.2)} \quad a_0 \leq 0, b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, 0 < a_1 < \frac{a_0 b_1}{b_0}, b_1 < 0, \frac{-a_0}{\beta b_0} < K_P < \frac{a_1}{-\beta b_1},$$

$$0 < K_I < \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}.$$

Caso 3: Se $b_1 > 0$, então há três possibilidades.

3.1) Se $a_0 + \beta b_0 K_P = 0$, então a desigualdade (3.38) é satisfeita para $K_P > 0$. Da desigualdade (3.37), $a_1 + \beta b_1 K_P > 0$ e pela desigualdade (3.40), $b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P) < 0$. Assim,

$$a_0 < 0, b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, a_1 > \frac{a_0 b_1^2 + b_0^2}{b_0 b_1}, b_1 > 0, K_P = \frac{-a_0}{\beta b_0}, K_I > 0.$$

3.2) Se $a_0 + \beta b_0 K_P < 0$, então pela desigualdade (3.37), $a_1 + \beta b_1 K_P > 0$. Pelas desigualdades (3.38) e (3.40),

$$\begin{aligned} K_I &> \frac{-(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_1}, \quad 0 < b_0 < b_1(a_1 + \beta b_1 K_P), \\ K_I &> -\frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(-b_0 + b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Observe que

$$\frac{-(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_1 - \frac{\beta b_0}{a_1 + \beta b_1 K_P}} > \frac{-(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta b_1}. \quad (3.45)$$

Portanto,

$$\mathbf{3.2.1)} \quad a_0 < 0, \quad b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, \quad a_1 > 0, \quad b_1 \geq \frac{b_0}{a_1} > 0, \quad 0 < K_P < \frac{-a_0}{\beta b_0},$$

$$K_I > -\frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(-b_0 + b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))};$$

$$\mathbf{3.2.2)} \quad a_0 < \frac{b_0(a_1 b_1 - b_0)}{b_1^2} < 0, \quad b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, \quad a_1 \leq 0, \quad b_1 > 0,$$

$$\frac{b_0 - a_1 b_1}{\beta b_1^2} < K_P < \frac{-a_0}{\beta b_0}, \quad K_I > -\frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(-b_0 + b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))};$$

$$\mathbf{3.2.3)} \quad a_0 < \frac{b_0(a_1 b_1 - b_0)}{b_1^2} < 0, \quad b_0 > \frac{-a_0 r}{M}, \quad 0 < a_1 \frac{b_0}{b_1}, \quad b_1 > 0,$$

$$\frac{b_0 - a_1 b_1}{\beta b_1^2} < K_P < \frac{-a_0}{\beta b_0}, \quad K_I > -\frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(-b_0 + b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}.$$

3.3) Se $a_0 + \beta b_0 K_P > 0$, então pela desigualdade (3.37), $a_1 + \beta b_1 K_P > 0$. Se $0 < b_0 \leq b_1(a_1 + \beta b_1 K_P)$, a desigualdade (3.40) é satisfeita, já que $K_I > 0$. Porém, se $b_0 > b_1(a_1 + \beta b_1 K_P)$, resulta que

$$0 < K_I < \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}. \quad (3.46)$$

Neste caso, tentar encontrar intervalos para os parâmetros K_I e K_P , tal como nos casos 1 e 2, gera uma grande quantidade de possibilidades que serão omitidas aqui. Assim, basta que as seguintes desigualdades sejam verificadas:

$$\mathbf{3.3.1)} \quad a_1 + \beta b_1 K_P > 0, \quad b_1 > 0, \quad a_0 + \beta b_0 K_P > 0, \quad \left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M,$$

$$0 < b_0 \leq b_1(a_1 + \beta b_1 K_P), \quad K_P > 0, \quad K_I > 0;$$

$$\mathbf{3.3.1)} \quad a_1 + \beta b_1 K_P > 0, \quad b_1 > 0, \quad a_0 + \beta b_0 K_P > 0, \quad \left| \frac{a_0 r}{b_0} \right| < M,$$

$$b_0 > b_1(a_1 + \beta b_1 K_P), \quad K_P > 0, \quad 0 < K_I < \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}.$$

Assim, fixados os parâmetros a_0 , b_0 , a_1 , b_1 , m , M e r , com $m > 0$, $M > 0$, $r > 0$ e $\left|\frac{a_0 r}{b_0}\right| < M$, o ponto de equilíbrio (3.33) é assintoticamente estável quando um dos três casos anteriores ocorrem.

Se a saturação não for regular pode haver mais de um ponto de equilíbrio. Para cada ponto de equilíbrio uma análise semelhante àquela realizada para o ponto de equilíbrio (3.33) deve ser feita. Neste caso, para um tempo suficientemente longo, a saída de controle assumirá um valor aproximadamente constante, dependendo da condição inicial, ou seja, se a condição inicial estiver na bacia de atração de um dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Com os **Teoremas 3.1.1** e **3.2.1** não é possível decidir sobre a estabilidade de (3.33) quando

$$K_I = K_{IC}(K_P) = \frac{(a_1 + \beta b_1 K_P)(a_0 + \beta b_0 K_P)}{\beta(b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P))}. \quad (3.47)$$

Quando o parâmetro K_I assume o valor crítico $K_{IC}(K_P)$ (3.47), há possibilidade de ocorrência de pontos de Hopf transversais de codimensões um e dois e o polinômio característico de (3.34) pode ser fatorado na forma $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3(\xi_0))(\lambda - i\omega_0(K_P))(\lambda + i\omega_0(K_P))$, com

$$\lambda_3(\xi_0) = -(a_1 + \beta b_1 K_P), \quad (3.48)$$

$\xi_0 = (K_{IC}(K_P), K_P)$ e

$$\omega_0(K_P) = \frac{\sqrt{b_0(a_0 + \beta b_0 K_P)}}{\sqrt{b_0 - b_1(a_1 + \beta b_1 K_P)}}. \quad (3.49)$$

Observe que necessariamente $K_{IC}(K_P)$ e $\omega_0(K_P)$ devem ser positivos para todo $K_P > 0$.

Assim, o objetivo nos capítulos 4 e 5 é construir uma teoria que permita estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio (3.33) quando $K_I = K_{IC}(K_P)$.

Capítulo 4

Estudo da Forma Normal de Poincaré–Hopf

A forma normal de Poincaré–Hopf desempenha um papel fundamental no estudo e entendimento da bifurcação de Hopf de codimensão maior ou igual a um. Assim, o objetivo deste capítulo é estudar a forma normal de Poincaré–Hopf e obter alguns resultados sobre aproximação de órbitas periódicas.

4.1 Aproximação de Órbitas Periódicas Para a Forma Normal de Poincaré–Hopf

Esta seção é um resumo do próximo capítulo, no sentido de que, o próximo capítulo consiste de generalizações dos resultados obtidos aqui. Assim, a compreensão dos resultados desta seção facilitará o entendimento das teorias propostas no capítulo 5.

Grande parte do material apresentado nesta seção pode ser encontrado em [11]. Parte da notação e alguns pontos foram modificados de modo a compatibilizar a teoria apresentada em [11] com as teorias do capítulo 5.

A forma normal de Poincaré–Hopf é amplamente utilizada no entendimento da bifurcação de Hopf de codimensão m e permite o entendimento de certas propriedades das órbitas periódicas de (3.19) que surgem em decorrência de bifurcações de Hopf. Assim, o objetivo desta seção é estudar a forma normal de Poincaré–Hopf apresentada aqui como

um problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \mathcal{F}(\xi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} (x^2 + y^2)^{k-1} \mathcal{G}(\xi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) &= (\epsilon, 0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo $\xi = (\mu, \nu) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0} \in U$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \geq 0$ e

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{pmatrix} \gamma(\xi) & -\eta(\xi) \\ \eta(\xi) & \gamma(\xi) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{G}(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi)) & -\operatorname{Im}(G_{k,k-1}(\xi)) \\ \operatorname{Im}(G_{k,k-1}(\xi)) & \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi)) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Em (4.1) a derivada é definida em relação ao parâmetro t e as funções $\xi \mapsto \gamma(\xi)$ e $\xi \mapsto \eta(\xi)$ satisfazem as hipóteses,

$$\gamma(\xi_0) = 0, \quad \partial_\mu \gamma(\xi_0) \neq 0, \quad \eta(\xi_0) = \omega_0(\nu) > 0, \quad (4.4)$$

com $\xi_0 = (0, \nu)$.

Os números reais da forma

$$l_{k-1}(\xi_0) = \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi_0)), \quad (4.5)$$

para $k = 2, 3, \dots$, desempenham um papel importante na estabilidade de órbitas periódicas da forma normal de Poincaré–Hopf. No capítulo 5 os números $l_1(\xi_0)$ e $l_2(\xi_0)$ serão chamados, respectivamente, de primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov e um dos objetivos será encontrar expressões gerais para estes números em campos de vetores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n .

Para simplificar este estudo, a seguinte mudança de variáveis $z = x + iy$ é realizada em (4.1), o que resulta no problema de valor inicial na variável z ,

$$\begin{aligned} z' &= \lambda(\xi)z + z \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} G_{k,k-1}(\xi) (z\bar{z})^{k-1}, \\ z(0) &= \epsilon, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com a barra denotando o complexo conjugado da variável z e

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \gamma(\xi) + i\eta(\xi), \\ G_{k,k-1}(\xi) &= \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi)) + i\operatorname{Im}(G_{k,k-1}(\xi)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Associado ao problema de valor inicial (4.6), está o problema de valor inicial conjugado,

$$\begin{aligned} \bar{z}' &= \bar{\lambda}(\xi)\bar{z} + \bar{z} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \bar{G}_{k,k-1}(\xi)(z\bar{z})^{k-1}, \\ \bar{z}(0) &= \epsilon. \end{aligned} \quad (4.8)$$

É conhecido na literatura que a equação diferencial em (4.1) ou em (4.6) apresenta órbitas periódicas e que se $t \mapsto z(t)$ é uma órbita periódica de (4.6), então esta solução periódica possui a propriedade $|z|$ constante. Além disto, tal solução periódica é rotacionalmente invariante, ou seja, $ze^{i\phi}$ também é solução de (4.6), para $\phi \in \mathbb{R}$.

Uma forma de estudar as órbitas periódicas de (4.6) é computando a derivada de $|z|^2$ ou, equivalentemente, de $(z\bar{z})$. Assim, de (4.6) e (4.8), resulta que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z\bar{z}) &= z'\bar{z} + z\bar{z}' \\ &= \bar{z} \left(\lambda(\xi)z + z \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} G_{k,k-1}(\xi)(z\bar{z})^{k-1} \right) + \\ &\quad z \left(\bar{\lambda}(\xi)\bar{z} + \bar{z} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \bar{G}_{k,k-1}(\xi)(z\bar{z})^{k-1} \right) \\ &= 2z\bar{z} \left(\gamma(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi))(z\bar{z})^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Portanto, de (4.9), há duas possibilidades para $(z\bar{z})' = 0$:

a) $z = 0$;

b) $\gamma(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi))(z\bar{z})^{k-1} = 0$.

O caso (a) é trivial. Para o caso (b), segue que $z\bar{z} = c^2$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante e como $z(0) = \epsilon$, resulta que $c = \epsilon$. Assim, as órbitas periódicas da equação diferencial em (4.6) satisfazem $|z| = \epsilon$. Escrevendo a equação diferencial em (4.6), como

$$\begin{aligned} z' &= \left(\gamma(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Re}(G_{k,k-1}(\xi))(z\bar{z})^{k-1} \right) z + \\ &\quad i \left(\eta(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Im}(G_{k,k-1}(\xi))(z\bar{z})^{k-1} \right) z, \end{aligned} \quad (4.10)$$

decorre da condição (b) que a órbita periódica $t \mapsto z(t)$ de (4.6) satisfaz o problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} z' &= i \left(\eta(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \operatorname{Im}(G_{k,k-1}(\xi))(z\bar{z})^{k-1} \right) z, \\ z(0) &= \epsilon, \end{aligned} \quad (4.11)$$

cuja solução é

$$z(t) = \epsilon e^{i \frac{2\pi}{T(\epsilon)} t}, \quad (4.12)$$

sendo,

$$\frac{2\pi}{\tilde{T}(\xi)} = \eta(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \text{Im}(G_{k,k-1}(\xi)) (\epsilon^2)^{k-1}. \quad (4.13)$$

Propriedades interessantes acerca da estabilidade e do período das órbitas periódicas da equação diferencial em (4.6), são obtidas considerando as funções $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$, com

$$\omega(\epsilon, \nu) = \frac{2\pi}{T(\epsilon, \nu)}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} T : U_\epsilon &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\epsilon, \nu) &\longmapsto T(\epsilon, \nu) = \tilde{T}(\phi(\epsilon, \nu), \nu), \end{aligned} \quad (4.15)$$

e utilizando a seguinte mudança de coordenadas e do tempo

$$z(t) = w(s, \epsilon, \nu), \quad s = \omega(\epsilon, \nu)t, \quad \omega(0, \nu) = \omega_0(\nu), \quad (4.16)$$

sendo $U_\epsilon = \{(\epsilon, \nu) \in \mathbb{R}^2 : (\phi(\epsilon, \nu), \nu) \in U\}$. Note que a solução (4.12) de (4.6) é periódica de período $T(\epsilon, \nu)$. Com a mudança de coordenadas e do tempo (4.16), a solução periódica de (4.6) é escrita como

$$w(s, \epsilon, \nu) = \epsilon e^{is} \quad (4.17)$$

a qual é periódica de período 2π .

Considere a aplicação suave $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi)$ definida por

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \lambda(\xi)z + z \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} G_{k,k-1}(\xi) (z\bar{z})^{k-1}, \quad (4.18)$$

e as seguintes séries de potências formais

$$\begin{pmatrix} \phi(\epsilon, \nu) \\ \omega(\epsilon, \nu) - \omega_0(\nu) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \mu_k(\nu) \\ \omega_k(\nu) \end{pmatrix} \epsilon^k. \quad (4.19)$$

Por formal deve-se entender que não há preocupação com questões de convergência associadas com (4.19).

Os termos da seqüência $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são determinados por (b), ou seja, através do coeficiente de cada termo da forma ϵ^k , obtido de

$$\gamma(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \text{Re}(G_{k,k-1}(\phi(\epsilon, \nu), \nu)) \epsilon^{2(k-1)} = 0, \quad (4.20)$$

para $k = 1, 2, \dots$

Em (4.20), a composição $(\epsilon, \nu) \mapsto \gamma(\phi(\epsilon, \nu), \nu)$ possui expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 5, da forma

$$\begin{aligned}
\gamma(\phi(\epsilon, \nu), \nu) &= \gamma(\xi_0) + \mu_1(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0)\epsilon + \frac{1}{2}\left(\mu_2(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + \mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0)\right)\epsilon^2 + \\
&\quad \frac{1}{6}\left(\mu_3(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + 3\mu_1(\nu)\mu_2(\nu)\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + \mu_1(\nu)^3\partial_\mu^3\gamma(\xi_0)\right)\epsilon^3 + \\
&\quad \frac{1}{24}\left(\mu_4(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + 4\mu_1(\nu)\mu_2(\nu)\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + \right. \\
&\quad \left. 6\mu_1(\nu)^2\mu_2(\nu)\partial_\mu^3\gamma(\xi_0) + \mu_1(\nu)^4\partial_\mu^4\gamma(\xi_0)\right)\epsilon^4 + \\
&\quad \frac{1}{120}\left(\mu_5(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + (10\mu_2(\nu)\mu_3(\nu) + 5\mu_1(\nu)\mu_4(\nu))\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + \right. \\
&\quad \left. (15\mu_1(\nu)\mu_2(\nu)^2 + 10\mu_1(\nu)^2\mu_3(\nu))\partial_\mu^3\gamma(\xi_0) + 10\mu_1(\nu)^3\mu_2(\nu)\partial_\mu^4\gamma(\xi_0) + \right. \\
&\quad \left. \mu_1(\nu)^5\partial_\mu^5\gamma(\xi_0)\right)\epsilon^5 + O_\gamma(\epsilon^6, \nu).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mediante a definição da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$ e de (4.13) é possível determinar, os termos da seqüência $\{\omega_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, pois

$$\omega(\epsilon, \nu) = \eta(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \text{Im}(G_{k,k-1}(\phi(\epsilon, \nu), \nu))\epsilon^{2(k-1)}. \tag{4.22}$$

Tomando as expansões em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 5 da composição $(\epsilon, \nu) \mapsto \eta(\phi(\epsilon, \nu), \nu)$, como feito em (4.21), por (4.20) e (4.22), resultam os termos $\mu_i(\nu)$ e $\omega_i(\nu)$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, para o termo em ϵ ,

$$\mu_1(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) = 0, \tag{4.23}$$

$$\omega_1(\nu) - \mu_1(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) = 0.$$

Logo, de (4.23), $\mu_1(\nu) = 0$ e $\omega_1(\nu) = 0$. O termo em ϵ^2 fornece as equações

$$\mu_2(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + \text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = 0, \tag{4.24}$$

$$\omega_2(\nu) - \mu_2(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) - \text{Im}(G_{2,1}(\xi_0)) = 0.$$

A solução de (4.24), para $\mu_2(\nu)$ e $\omega_2(\nu)$, é dada por

$$\mu_2(\nu) = -\frac{\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu\gamma(\xi_0)}, \tag{4.25}$$

$$\omega_2(\nu) = \mu_2(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) + \text{Im}(G_{2,1}(\xi_0)). \tag{4.26}$$

Do coeficiente do termo em ϵ^3 , as seguintes equações são obtidas

$$\mu_3(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) = 0, \tag{4.27}$$

$$\omega_3(\nu) - \mu_3(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) = 0,$$

cujas soluções são $\mu_3(\nu) = 0$ e $\omega_3(\nu) = 0$. Para o termo em ϵ^4 , seguem as equações

$$\begin{aligned} \mu_4(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + 2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) &= 0, \\ \omega_4(\nu) - \mu_4(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) - 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\eta(\xi_0) - 6\mu_2(\nu)\operatorname{Im}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) - & \\ 2\operatorname{Im}(G_{3,2}(\xi_0)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Portanto, de (4.28),

$$\mu_4(\nu) = -\frac{2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 6\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0)}{\partial_\mu\gamma(\xi_0)}, \quad (4.29)$$

$$\omega_4(\nu) = 2\operatorname{Im}(G_{3,2}(\xi_0)) + \mu_4(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\operatorname{Im}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\eta(\xi_0). \quad (4.30)$$

O termo em ϵ^5 fornece as equações

$$\begin{aligned} \mu_5(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) &= 0, \\ \omega_5(\nu) - \mu_5(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Assim, as soluções de (4.31) são $\mu_5(\nu) = 0$ e $\omega_5(\nu) = 0$.

Considerando a série de potências formal da função período $(\epsilon, \nu) \mapsto T(\epsilon, \nu)$,

$$T(\epsilon, \nu) = \frac{2\pi}{\omega_0(\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \tau_k(\nu) \epsilon^k, \quad (4.32)$$

e levando em conta os resultados anteriores, os coeficientes $\tau_i(\nu)$, $i = 1, \dots, 5$ são dados por,

$$\begin{aligned} \tau_1(\nu) &= 0, \\ \tau_2(\nu) &= -\frac{2\pi\omega_2(\nu)}{\omega_0(\nu)^2}, \\ \tau_3(\nu) &= 0, \\ \tau_4(\nu) &= \frac{3\tau_2(\nu)^2\omega_0(\nu)^3 - 2\pi^2\omega_4(\nu)}{\pi\omega_0(\nu)^2}, \\ \tau_5(\nu) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

e, portanto, é possível obter uma aproximação para o período de uma órbita periódica da equação diferencial em (4.6).

Os termos da seqüência $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são essenciais no estudo da estabilidade das órbitas periódicas da equação diferencial de (4.6). De acordo com os resultados de [8] e [13], a análise da estabilidade das órbitas periódicas da equação diferencial de (4.6) pode ser realizada através da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$, denominada expoente característico ou expoente de Floquet, o qual é definido na variável z por

$$\chi(\epsilon, \nu) := \frac{1}{T(\epsilon, \nu)} \int_0^{T(\epsilon, \nu)} \mathcal{H}(t, \epsilon, \nu) dt, \quad (4.34)$$

com a aplicação $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi)$ dada em (4.18), $t \mapsto z(t)$ tal como em (4.12) e

$$\mathcal{H}(t, \epsilon, \nu) := \frac{\partial}{\partial z} g(z(t), \bar{z}(t), \phi(\epsilon, \nu), \nu) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{g}(z(t), \bar{z}(t), \phi(\epsilon, \nu), \nu). \quad (4.35)$$

Enunciado de modo não rigoroso, há o seguinte resultado associado ao expoente característico [8]:

c) Se $\text{Re}(\chi(\epsilon, \nu)) < 0$, então a órbita periódica é estável;

d) Se $\text{Re}(\chi(\epsilon, \nu)) > 0$, então a órbita periódica é instável;

e) Se $\text{Re}(\chi(\epsilon, \nu)) = 0$, nada se pode concluir.

Assim, decidir a estabilidade de uma solução periódica da forma normal de Poincaré–Hopf implica em calcular (4.34). Levando em conta que $z\bar{z} = \epsilon^2$, de (4.18), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}, \xi) &= \lambda(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} G_{k,k-1}(\xi) (z\bar{z})^{k-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{g}(z, \bar{z}, \xi) &= \bar{\lambda}(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \bar{G}_{k,k-1}(\xi) (z\bar{z})^{k-1}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial z} g(z, \bar{z}, \xi) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{g}(z, \bar{z}, \xi) = 2 \left(\gamma(\xi) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \text{Re}(G_{k,k-1}(\xi)) \epsilon^{2(k-1)} \right). \quad (4.37)$$

Logo, o expoente característico é dado por

$$\begin{aligned} \chi(\epsilon, \nu) &= \frac{1}{T(\epsilon, \nu)} \int_0^{T(\epsilon, \nu)} \mathcal{H}(t, \epsilon, \nu) dt \\ &= 2 \left(\gamma(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!(k-1)!} \text{Re}(G_{k,k-1}(\phi(\epsilon, \nu), \nu)) \epsilon^{2(k-1)} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Decorre, tomando a série de potência do membro direito de (4.38) e através dos resultados para $\mu_i(\nu)$, $i = 1, \dots, 5$, que

$$\chi(\epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi_k(\nu) \epsilon^k, \quad (4.39)$$

sendo

$$\begin{aligned} \chi_1(\nu) &= 0, \\ \chi_2(\nu) &= 2\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_3(\nu) &= 0, \\ \chi_4(\nu) &= 8\text{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 12\mu_2(\nu)\text{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_5(\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Escrevendo o expoente característico como

$$\begin{aligned}\chi(\epsilon, \nu) &= \frac{1}{2}\chi_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{24}\chi_4(\nu)\epsilon^4 + O_\chi(\epsilon^6, |\nu|), \\ &= \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))\epsilon^2 + \frac{1}{6}(2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 3\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)))\epsilon^4 + \\ &\quad O_\chi(\epsilon^6, |\nu|),\end{aligned}\tag{4.41}$$

as seguintes conclusões são obtidas:

f) Para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno e $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) \neq 0$, a estabilidade da órbita periódica da forma normal de Poincaré–Hopf é dada pelo sinal de $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))$. Se $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) < 0$, a órbita periódica é estável. Como

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu \gamma(\xi_0)} \epsilon^2 + O_\mu(\epsilon^4, |\nu|),\tag{4.42}$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial em (4.81) ocorre para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase ocorre para $\mu < 0$. Se $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) > 0$, a órbita periódica é instável.

g) Suponha que, sendo $\xi_1 = (0, 0)$, então $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1)) = 0$ e $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) \neq 0$. Neste caso, para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno, a estabilidade é dada pelo sinal de $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))$. Se $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) < 0$, a órbita periódica é estável. Como

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{12} \frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4 + O_\mu(\epsilon^6, |\nu|),\tag{4.43}$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial em (4.81) existe para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase existe para $\mu < 0$. Se $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) > 0$, a órbita periódica é instável.

Os próximos exemplos apresentam aplicações referentes às conclusões (f) e (g).

Exemplo 4.1.1. Com as escolhas $\gamma(\mu, \nu) = \mu$, $\eta(\mu, \nu) = 1$ e $G_{2,1}(\mu, \nu) = 2s$, a forma normal de Poincaré–Hopf pode ser reescrita, no caso em que $m = 2$, como

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\tag{4.44}$$

sendo $s = \pm 1$. Esta equação diferencial é conhecida como forma normal da bifurcação de Hopf de codimensão um.

A equação diferencial (4.44) possui um único ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ e a parte linear da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ calculada em $(0, 0)$ é da forma

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

A matriz (4.45) possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(\mu) = \mu + i$. Portanto, o único ponto de equilíbrio de (4.44) é um foco atrator quando $\mu < 0$ e um foco repulsor quando $\mu > 0$ (ver definição 3.1.10). Em $\mu = 0$, há uma mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio e, assim, $\mu = 0$ é o valor de bifurcação para (4.44). Como para (4.44), $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = 2s$, pode-se mostrar que a origem é um foco fraco, atrator ou repulsor, dependendo do sinal de s , ou seja, se $\mu = 0$ e $s = 1$, então a origem é um foco repulsor fraco e se $\mu = 0$ e $s = -1$, a origem é um foco atrator fraco. Um foco fraco é um equilíbrio não hiperbólico topologicamente equivalente a um foco.

Outras propriedades de (4.44) são obtidas fazendo a mudança de coordenadas polares

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Aplicando esta mudança de coordenadas a (4.44), resulta

$$\begin{aligned} r' &= r(\mu + sr^2), \\ \theta' &= 1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Da primeira equação de (4.47), $r = 0$ é ponto de equilíbrio para qualquer valor do parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Por (4.46), $r = 0$ corresponde ao ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ de (4.44). Note que (4.47) possui outro ponto de equilíbrio $r(\mu) = \sqrt{-s\mu}$, que ocorre quando $\mu < 0$ e $s = 1$ ou $\mu > 0$ e $s = -1$. Pela conclusão (f), como $\partial_\mu \gamma(\xi_0) = 1$ e $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = 2s$, se $s = -1$, então para $\mu > 0$ a origem de (4.44) está isolada por uma órbita periódica estável dada por $x^2 + y^2 = -s\mu$. Todas as órbitas externas ou internas, com exceção da origem, tendem à órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$ e $\mu > 0$.

Resumindo, se $s = -1$, então para $\mu < 0$ a origem é um foco atrator e para $\mu = 0$ a origem é um foco atrator fraco, já que por (4.47)

$$\begin{aligned} r' &= -r^3, \\ \theta' &= 1. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para $\mu > 0$, há uma órbita periódica estável perto da origem, que agora é um ponto de equilíbrio instável. Este fenômeno de mudança na estabilidade de um foco e o surgimento

de uma órbita periódica, a partir da mudança de um parâmetro, corresponde ao caso típico de uma bifurcação de Andronov–Poincaré–Hopf. O caso $s = 1$ pode ser tratado de maneira similar.

A Figura 4.1.1 mostra o retrato de fase qualitativo de (4.44) para $s = -1$.

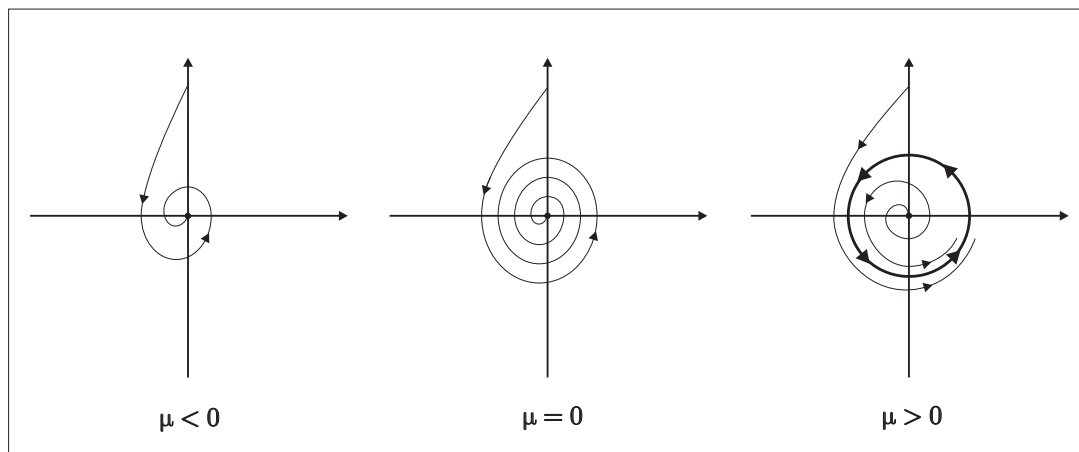


Figura 4.1: Retrato de fase qualitativo de (4.44) para $s = -1$.

Uma generalização do exemplo anterior é estudada no exemplo 4.1.2.

Exemplo 4.1.2. Considere agora na forma normal de Poincaré–Hopf, para o caso em que $m = 3$, as escolhas

$$\begin{aligned}\gamma(\mu, \nu) &= \mu, \\ \eta(\mu, \nu) &= 1, \\ G_{2,1}(\mu, \nu) &= 2\nu, \\ G_{3,2}(\mu, \nu) &= 12s.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Com esta escolha, a equação diferencial em (4.1) é reescrita como

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \nu(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s(x^2 + y^2)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{4.50}$$

com $s = \pm 1$. A equação diferencial (4.50) é conhecida na literatura com forma normal da bifurcação de Hopf de codimensão dois ou forma normal de Bautin.

Em coordenadas complexas $z = x + iy$, a forma normal de Bautin é escrita como

$$z' = (\mu + i)z + \nu z^2 \bar{z} + s z^3 \bar{z}^2. \tag{4.51}$$

A forma normal de Bautin apresenta um único ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, o qual é um foco atrator para $\mu < 0$ e um foco repulsor para $\mu > 0$. Para $\mu = 0$, $\partial_\mu \gamma(\xi_0) = 1$ e $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = 2\nu$ e, assim, é possível mostrar que o único ponto de equilíbrio é um foco atrator fraco se $\nu < 0$ ou foco repulsor fraco se $\nu > 0$. Em outras palavras, se $\nu \neq 0$, então a análise é exatamente igual àquela realizada no exemplo 4.1.1 e os termos de ordem superior a 3, da expansão em série de Taylor, não alteram o resultado. Quando $\nu = 0$, a forma normal de Bautin apresenta uma bifurcação de Hopf de codimensão dois, pois $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_1)) = 0$ e $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) = 12s \neq 0$.

Outras propriedades da forma normal de Bautin, que são genéricas para qualquer equação diferencial que apresenta uma bifurcação de Hopf de codimensão dois, são obtidas aplicando a mudança de coordenadas $z = x + iy \mapsto re^{i\theta}$ em (4.51), com $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Fazendo isto, resulta a equação diferencial em coordenadas polares

$$\begin{aligned} r' &= r(\mu + \nu r^2 + sr^4), \\ \theta' &= 1. \end{aligned} \tag{4.52}$$

O ponto de equilíbrio $r = 0$, da primeira equação de (4.52), corresponde ao ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ de (4.50). Os demais pontos de equilíbrio, são obtidos da equação

$$\mu + \nu r^2 + sr^4 = 0. \tag{4.53}$$

A equação (4.53) pode apresentar nenhuma, uma ou duas raízes, de acordo com os sinais dos parâmetros μ e ν e do discriminante

$$\Delta(\mu, \nu) = \nu^2 - 4s\mu. \tag{4.54}$$

Considere o caso em que $s = -1$. Então há as seguintes possibilidades:

a) Para todo $(\mu, \nu) \in R_1$, sendo

$$R_1 = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(\mu, \nu) < 0\}, \tag{4.55}$$

a equação (4.53) não apresenta raízes reais;

b) Para todo $(\mu, \nu) \in R_i$, sendo

$$R_i = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(\mu, \nu) > 0 \text{ e } \mu > 0\}, \tag{4.56}$$

para $i = 2, 3$, a equação (4.53) apresenta duas raízes reais, sendo uma positiva e a outra negativa;

c) Para todo $(\mu, \nu) \in R_4$, sendo

$$R_4 = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(\mu, \nu) > 0, \mu < 0 \text{ e } \nu > 0\}, \quad (4.57)$$

a equação (4.53) possui duas raízes reais positivas e distintas.

d) Para todo $(\mu, \nu) \in C_{NH}$, com

$$C_{NH} = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \Delta(\mu, \nu) = 0 \text{ e } \nu > 0\}, \quad (4.58)$$

a equação (4.53) possui um única raiz real e positiva;

A Figura (4.2) exhibe estas regiões no diagrama de bifurcação da forma normal de Bautin e para o caso em que $s = -1$.

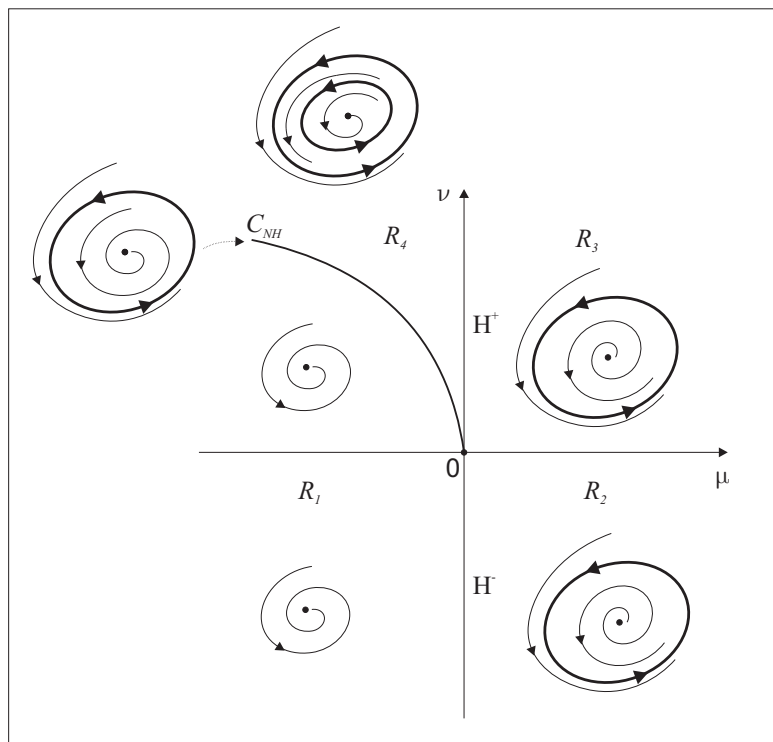


Figura 4.2: Diagrama de bifurcação da forma normal de Bautin para o caso $s = -1$.

Ao longo do eixo ν , a parte linear de (4.50), calculada em $(0, 0)$ e em $(0, \nu)$ apresenta autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(0, \nu) = i$. O ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é assintoticamente estável se $\mu < 0$ e instável se $\mu > 0$. Como $l_1(\mu, \nu) = \nu$, a bifurcação de Bautin ocorre quando $(\mu, \nu) = (0, 0)$. Assim, o eixo μ corresponde ao conjunto $l_1^{-1}(0)$ e

$$H^+ = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : l_1(\mu, \nu) = \nu > 0\}, \quad (4.59)$$

$$H^- = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : l_1(\mu, \nu) = \nu < 0\}. \quad (4.60)$$

De acordo com o exemplo 4.1.1, uma órbita periódica estável bifurca do ponto de equilíbrio $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, quando se cruza o ramo H^- da esquerda para a direita e há o surgimento de uma órbita periódica instável quando se cruza o ramo H^+ da direita para a esquerda. Por (c), na região R_4 há duas órbitas periódicas, a interna instável e a externa estável. Ao longo da curva C_{NH} ocorre uma bifurcação sela-nó de órbitas periódicas, resultando em uma única órbita periódica não hiperbólica (ver definição 3.1.19).

Em resumo, na região R_1 , o único ponto de equilíbrio é assintoticamente estável ou foco atrator. Ao cruzar o ramo H^- da esquerda para a direita o ponto de equilíbrio torna-se um foco repulsor e há o surgimento de uma única órbita periódica estável, que existe para valores dos parâmetros nas regiões R_2 , R_3 e R_4 . Na região R_3 , ao cruzar o ramo H^+ da direita para a esquerda, o ponto de equilíbrio passa de foco repulsor para foco atrator com o aparecimento de uma órbita periódica instável. Assim, na região R_4 há duas órbitas periódicas, perto do ponto de equilíbrio instável, uma interna instável e uma externa estável. Estas órbitas periódicas colapsam em uma única órbita periódica não hiperbólica ao longo da curva C_{NH} , de tal forma que na região R_1 não há órbitas periódicas.

O caso $s = 1$ é tratado de maneira similar ou pode ser reduzido ao estudo para $s = -1$, através da aplicação $(z, \mu, \nu, t) \mapsto (\bar{z}, -\mu, -\nu, -t)$.

Para a forma normal de Bautin, a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} pode ser representada como o gráfico de função

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{1}{4s}\nu^2, \quad (4.61)$$

com $\nu \geq 0$ ou como uma curva parametrizada por $\epsilon = r$,

$$\Gamma(\epsilon) = (\phi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon)) = (s\epsilon^4, -2s\epsilon^2), \quad (4.62)$$

obtida como solução do sistema

$$\begin{cases} \mu + \nu\epsilon^2 + s\epsilon^4 = 0, \\ \mu - \frac{1}{4s}\nu^2 = 0. \end{cases} \quad (4.63)$$

Embora a teoria desta seção possa ser desenvolvida da mesma forma com um vetor de parâmetros $\xi \in \mathbb{R}^k$, com $k \in \mathbb{N}$, a escolha de $\xi = (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ possibilita a análise, de uma maneira simples, das órbitas periódicas não hiperbólicas da forma normal de Poincaré–Hopf, ou seja, aquelas órbitas periódicas tais que $\chi(\epsilon, \nu) = 0$, para pontos $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon \subset \mathbb{R}^2$.

Para esta análise, considere o expoente característico $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ escrito na forma

$$\begin{aligned}\chi(\epsilon, \nu) &= \epsilon^2 \left(\frac{1}{2}\chi_2(\nu) + \frac{1}{24}\chi_4(\nu)\epsilon^2 + O_\chi(\epsilon^4, |\nu|) \right), \\ &= \epsilon^2\Psi(\epsilon, \nu),\end{aligned}\tag{4.64}$$

com

$$\Psi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2}\chi_2(\nu) + \frac{1}{24}\chi_4(\nu)\epsilon^2 + O_\chi(\epsilon^4, |\nu|).\tag{4.65}$$

Pode-se notar em (4.64), que estudar as órbitas periódicas não hiperbólicas da forma normal de Poincaré–Hopf é equivalente a estudar o conjunto $\chi^{-1}(0)$, ou ainda, de forma equivalente o conjunto $\Psi^{-1}(0)$. Se a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \Psi(\epsilon, \nu)$ possuir certas propriedades, então será possível escrever o parâmetro ν como uma função do parâmetro ϵ utilizando o **Teorema da Função Implícita** [17]. Colocado de outra forma, se for possível obter a função $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$, quando $\chi(\epsilon, \nu) = 0$, então a curva das órbitas periódicas não hiperbólicas pode ser parametrizada por ϵ ,

$$\Gamma(\epsilon) = (\phi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon)),\tag{4.66}$$

ou pode ser representada localmente como o gráfico de uma função

$$\mu = \Lambda(\nu).\tag{4.67}$$

Por hipótese $\partial_\mu\gamma(\xi_0) \neq 0$, para todo $\xi_0 = (0, \nu) \in U$ e se $\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1)) \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\Psi(0, 0) &= 0, \\ \partial_\epsilon\Psi(0, 0) &= 0, \\ \partial_\epsilon^2\Psi(0, 0) &\neq 0, \\ \partial_\nu\Psi(0, 0) &\neq 0.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Logo, resulta que a função $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$, possui expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 2, da seguinte forma

$$\psi(\epsilon) = \frac{1}{2!}\psi_2\epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3),\tag{4.69}$$

com

$$\psi_2 = -\frac{\partial_\epsilon^2\Psi(0, 0)}{\partial_\nu\Psi(0, 0)}.\tag{4.70}$$

Assim, a curva das órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} têm as seguintes representações locais,

$$\Gamma(\epsilon) = \left(\frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{12\partial_\mu\gamma(\xi_1)}\epsilon^4, -\frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\operatorname{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1))}\epsilon^2 \right) + O_\Gamma(\epsilon), \quad (4.71)$$

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{\mu_2(\nu)}{\psi_2}\nu + \frac{1}{6}\frac{\mu_4(\nu)}{\psi_2^2}\nu^2 + O_\Lambda(|\nu|). \quad (4.72)$$

Estas representações locais serão obtidas para o caso geral no capítulo 5 e, por isso, os detalhes da obtenção de (4.71) e (4.72) foram omitidos aqui.

Exemplo 4.1.3. *De acordo com o exemplo 4.1.2, a forma normal de Bautin apresenta uma bifurcação de Hopf de codimensão dois, para $\xi = \xi_1 = (0, 0)$. Utilizando (4.49), (4.71) e (4.72), resultam as seguintes representações para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas*

$$\Gamma(\epsilon) = (s\epsilon^4, -2s\epsilon^2) + O_\Gamma(\epsilon), \quad (4.73)$$

e

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{1}{4s}\nu^2 + O_\Lambda(\nu), \quad (4.74)$$

que concordam com os resultados apresentados no final do exemplo 4.1.2.

Todos os resultados desta seção, particularmente as representações (4.71) e (4.72) para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} , são preservados para equação diferencial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{F}(\xi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^3 \frac{1}{k!(k-1)!} (x^2 + y^2)^{k-1} \mathcal{G}(\xi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|(x, y)\|^6, \|\xi\|), \quad (4.75)$$

com as funções $\xi \mapsto \mathcal{F}(\xi)$ e $\xi \mapsto \mathcal{G}(\xi)$ dadas em (4.2) e (4.3), respectivamente. Este é o assunto da próxima seção.

4.2 Construção de um Homeomorfismo

Os resultados da seção 4.1 e o exemplo 4.1.2 sugerem que, para $m = 3$, a forma normal de Poincaré–Hopf é equivalente a forma normal de Bautin, no sentido de que ambas as formas apresentam as mesmas propriedades. O objetivo agora é mostrar que a

forma normal de Bautin é localmente topologicamente equivalente (ver definição 4.2.2) à equação diferencial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi) = \begin{pmatrix} \mu - 1 \\ 1 \quad \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \nu(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s(x^2 + y^2)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(\|\mathbf{x}\|^6, \|\xi\|). \quad (4.76)$$

Em outras palavras, os termos de ordem superior não afetam a equação diferencial (4.76) do ponto de vista da bifurcação de Hopf e, conseqüentemente, todos resultados exibidos no exemplo 4.1.2 são preservados pela equação diferencial (4.76). Como (4.76) pode ser obtida de (4.75) por reparametrização do tempo e uma mudança de variáveis, os resultados da seção 4.1 são preservados para (4.75). Antes de obter este resultado é necessário introduzir os conceitos de homeomorfismo e equivalência topológica.

Definição 4.2.1. *Sejam $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ e $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ dois subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n . A aplicação $h : W_0 \rightarrow W_1$ é um homeomorfismo quando:*

- a) *A aplicação $h : W_0 \rightarrow W_1$ é contínua;*
- b) *A aplicação $h : W_0 \rightarrow W_1$ é bijetora;*
- c) *A aplicação inversa $h^{-1} : W_1 \rightarrow W_0$ é contínua.*

Segue o conceito de equivalência topológica definida localmente.

Definição 4.2.2. *Duas equações diferenciais*

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi), \quad (4.77)$$

$$\mathbf{y}' = g(\mathbf{y}, \zeta), \quad (4.78)$$

com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{0}, \xi) = \mathbf{0}$ e $g(\mathbf{0}, \zeta) = \mathbf{0}$, são localmente topologicamente equivalentes em torno da origem, se existir uma aplicação

$$(\mathbf{x}, \xi) \in W_0 \times U_0 \mapsto (\mathbf{y}, \zeta) = (h_\xi(\mathbf{x}), k(\xi)) \in W_1 \times U_1, \quad (4.79)$$

com $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in W_0 \times U_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, satisfazendo

- a) *Os conjuntos $W_0 \times U_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ e $W_1 \times U_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ são vizinhanças de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$;*
- b) *A aplicação $k : U_0 \rightarrow U_1$ é um homeomorfismo tal que $k(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in U_1$;*

c) A aplicação $h_\xi : W_0 \rightarrow W_1$ é um homeomorfismo para cada $\xi \in U_0$ tal que $h_\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in W_1$ e leva órbitas de (4.77) em $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ em órbitas de (4.78) em $W_1 = h_\xi(W_0) \subset \mathbb{R}^n$ preservando a orientação das mesmas.

Para demonstrar a equivalência topológica local, em torno da origem, entre a forma normal de Bautin e (4.76) será utilizada a teoria de [5]. Considere a mudança de coordenadas $z = x + iy \mapsto re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Com esta mudança de coordenadas a equação diferencial (4.76) é escrita como

$$\begin{aligned} r' &= \mu r + \nu r^3 + sr^5 + K_r(r, \theta), \\ \theta' &= 1 + K_\theta(r, \theta), \end{aligned} \tag{4.80}$$

com $(r, \theta) \mapsto K_r(r, \theta) = O(r^6, \theta)$ e $(r, \theta) \mapsto K_\theta(r, \theta) = O(r^5, \theta)$. Associado com (4.80) há o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} r(\theta, \xi) &= R(r, \theta, \xi) = \frac{\mu r + \nu r^3 + sr^5 + K_r(r, \theta)}{1 + K_\theta(r, \theta)}, \\ r(0, \xi) &= \epsilon, \end{aligned} \tag{4.81}$$

com $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \geq 0$ suficientemente pequeno.

Seja $(\theta, \epsilon, \xi) \mapsto \rho(\theta, \epsilon, \xi)$ a solução de (4.81) satisfazendo $\rho(0, \epsilon, \xi) = \epsilon$ e considere a série formal

$$\rho(\theta, \epsilon, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho_k(\theta, \xi) \epsilon^k. \tag{4.82}$$

Os termos da seqüência $\{\rho_k(\theta, \xi)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são obtidos através de um procedimento recursivo envolvendo a expansão em série de Taylor da função $(r, \theta, \xi) \mapsto R(r, \theta, \xi)$ em torno de $r = 0$ e substituindo (4.82) em (4.81). Fazendo isto resulta que

$$R(r, \theta, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} R_k(\theta, \xi) r^k, \tag{4.83}$$

com

$$\begin{aligned} R_1(\theta, \xi) &= \mu, \\ R_2(\theta, \xi) &= 0, \\ R_3(\theta, \xi) &= 6\nu, \\ R_4(\theta, \xi) &= 0, \\ R_5(\theta, \xi) &= 120s, \end{aligned} \tag{4.84}$$

e assim por diante. Para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, as funções $(\theta, \xi) \mapsto \rho_k(\theta, \xi)$ são soluções dos problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_1(\theta, \xi) &= R_1(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi), \\ \rho_1(0, \xi) &= 1, \end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_2(\theta, \xi) &= R_1(\theta, \xi)\rho_2(\theta, \xi) + R_2(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^2, \\ \rho_2(0, \xi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_3(\theta, \xi) &= R_1(\theta, \xi)\rho_3(\theta, \xi) + 3R_2(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)\rho_2(\theta, \xi) + \\ &\quad R_3(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^3, \\ \rho_3(0, \xi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_4(\theta, \xi) &= R_1(\theta, \xi)\rho_4(\theta, \xi) + R_2(\theta, \xi)(4\rho_1(\theta, \xi)\rho_3(\theta, \xi) + \\ &\quad 3\rho_2(\theta, \xi)^2) + 6R_3(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^2\rho_2(\theta, \xi) + \\ &\quad R_4(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^4, \\ \rho_4(0, \xi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\rho_5(\theta, \xi) &= R_1(\theta, \xi)\rho_5(\theta, \xi) + 5R_2(\theta, \xi)(\rho_1(\theta, \xi)\rho_4(\theta, \xi) + \\ &\quad 2\rho_2(\theta, \xi)\rho_3(\theta, \xi)) + 5R_3(\theta, \xi)(2\rho_1(\theta, \xi)\rho_3(\theta, \xi) + \\ &\quad 3\rho_2(\theta, \xi)^2)\rho_1(\theta, \xi) + 10R_4(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^3\rho_2(\theta, \xi) + \\ &\quad R_5(\theta, \xi)\rho_1(\theta, \xi)^5, \\ \rho_5(0, \xi) &= 0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

As soluções de (4.81) permitem definir a transformação de Poincaré (ou transformação de primeiro retorno) associada com (4.80) da seguinte forma

$$\mathcal{P}(\epsilon, \xi) = \delta(\epsilon, \xi) + \epsilon, \tag{4.90}$$

onde a função definida por

$$(\epsilon, \xi) \mapsto \delta(\epsilon, \xi) = \rho(2\pi, \epsilon, \xi) - \epsilon \tag{4.91}$$

é denominada *função separação* e pode ser representada pela série formal

$$\delta(\epsilon, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta_k(\xi) \epsilon^k, \tag{4.92}$$

com $\delta_1(\xi) = \rho_1(2\pi, \xi) - 1$ e $\delta_k(\xi) = \rho_k(2\pi, \xi)$ for $k \geq 2$.

Com o objetivo de aplicar o **Teorema da Função Implícita** é mais conveniente escrever a função separação (4.91) como $(\epsilon, \xi) \mapsto \delta(\epsilon, \xi) = \epsilon \Delta(\epsilon, \xi)$, onde a função $(\epsilon, \xi) \mapsto \Delta(\epsilon, \xi)$ está definida no domínio de definição de (4.91) e

$$\Delta(\epsilon, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta_k(\xi) \epsilon^{k-1}. \quad (4.93)$$

Na realidade, para o estudo desta seção, são necessários somente os cinco primeiros termos de (4.93), ou seja,

$$\Delta(\epsilon, \xi) = \delta_1(\xi) + \frac{1}{2!} \delta_2(\xi) \epsilon + \frac{1}{3!} \delta_3(\xi) \epsilon^2 + \frac{1}{4!} \delta_4(\xi) \epsilon^3 + \frac{1}{5!} \delta_5(\xi) \epsilon^4 + O_{\Delta}(\epsilon^5, \|\xi\|). \quad (4.94)$$

As propriedades da função $(\epsilon, \xi) \mapsto \Delta(\epsilon, \xi)$ são obtidas por meio das soluções dos problemas de valor inicial (4.85) a (4.89). Levando em conta a dependência contínua das soluções de uma equação diferencial em relação aos parâmetros segue que

$$\Delta(0, \xi_0) = \rho_1(2\pi, \xi_0) - 1 = 0, \quad (4.95)$$

$$\partial_{\epsilon} \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{2} \rho_2(2\pi, \xi_0) = 0, \quad (4.96)$$

$$\partial_{\mu} \Delta(0, \xi_0) = \frac{\partial}{\partial \mu} \rho_1(2\pi, \xi_0) = 2\pi, \quad (4.97)$$

$$\partial_{\epsilon}^2 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{3} \rho_3(2\pi, \xi_0) = 4\pi\nu, \quad (4.98)$$

$$\partial_{\epsilon\mu}^2 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \rho_2(2\pi, \xi_0) = 0, \quad (4.99)$$

$$\partial_{\mu}^2 \Delta(0, \xi_0) = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \rho_1(2\pi, \xi_0) = 4\pi^2, \quad (4.100)$$

$$\partial_{\epsilon}^3 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{4} \rho_4(2\pi, \xi_0) = 0, \quad (4.101)$$

$$\partial_{\epsilon\epsilon\mu}^3 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mu} \rho_3(2\pi, \xi_0) = 16\pi^2\nu, \quad (4.102)$$

$$\partial_{\epsilon\mu\mu}^3 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \rho_2(2\pi, \xi_0) = 0, \quad (4.103)$$

$$\partial_{\mu}^3 \Delta(0, \xi_0) = \frac{\partial^3}{\partial \mu^3} \rho_1(2\pi, \xi_0) = 8\pi^3, \quad (4.104)$$

$$\partial_{\epsilon}^4 \Delta(0, \xi_0) = \frac{1}{5} \rho_5(2\pi, \xi_0) = 48\pi(3\pi\nu^2 + s), \quad (4.105)$$

onde a notação utilizada é

$$\partial_{\epsilon} \Delta(0, \xi_0) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Delta(\epsilon, \xi) \right|_{(\epsilon, \xi) = (0, \xi_0)},$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Delta(0, \xi_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \Delta(\epsilon, \xi) \right|_{(\epsilon, \xi) = (0, \xi_0)}, \\ \partial_\epsilon^2 \Delta(0, \xi_0) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \Delta(\epsilon, \xi) \right|_{(\epsilon, \xi) = (0, \xi_0)}, \\ \partial_{\epsilon\mu}^2 \Delta(0, \xi_0) &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \epsilon \partial \mu} \Delta(\epsilon, \xi) \right|_{(\epsilon, \xi) = (0, \xi_0)},\end{aligned}$$

e assim por diante.

O próximo lema permite, a partir de (4.95) a (4.105), definir a função

$$(\epsilon, \nu) \mapsto \xi = \Phi(\epsilon, \nu) = (\phi(\epsilon, \nu), \nu), \quad (4.106)$$

sendo $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$.

Lema 4.2.1. *Seja*

$$\begin{aligned}B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto B(x, y),\end{aligned} \quad (4.107)$$

uma função suave, onde $y = (y_1, y_2)$. Suponha que para $(0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, $y_0 = (0, y_2)$, a função (4.107) satisfaz as seguintes exigências:

- A1.** $B(0, y_0) = 0$;
- A2.** $\partial_x B(0, y_0) = 0$;
- A3.** $\partial_{y_1} B(0, y_0) \neq 0$;
- A4.** $\partial_x^2 B(0, y_0) \neq 0$.

Então, existe uma única função suave

$$(x, y_2) \mapsto y_1 = \phi(x, y_2), \quad (4.108)$$

tal que $y = \Phi(x, y_2) = (\phi(x, y_2), y_2)$ e $B(x, \Phi(x, y_2)) \equiv 0$. Além disto, a função $(x, y_2) \mapsto y_1 = \phi(x, y_2)$ possui a seguinte representação

$$\phi(x, y_2) = \frac{1}{2!} \phi_2(y_2) x^2 + O_\phi(|x|^3, |y_2|), \quad (4.109)$$

onde

$$\phi_2(y_2) = -\frac{\partial_x^2 B(0, y_0)}{\partial_{y_1} B(0, y_0)}. \quad (4.110)$$

Demonstração. O item **A3** e o **Teorema da Função Implícita** garantem a existência de uma única função $(x, y_2) \mapsto y_1 = \phi(x, y_2)$ tal que

$$B(x, \phi(x, y_2), y_2) \equiv 0. \quad (4.111)$$

Logo, a função $(x, y_2) \mapsto y = \Phi(x, y_2) = (\phi(x, y_2), y_2)$ está bem definida. Além disto, a função (4.108) é suave e cálculos simples mostram que

$$\begin{aligned} \partial_x B(0, y_0) + \partial_{y_1} B(0, y_0) \partial_x \phi(0, y_0) &= 0, \\ \partial_x^2 B(0, y_0) + 2\partial_{xy_1}^2 B(0, y_0) \partial_x \phi(0, y_0) + \partial_{y_1}^2 B(0, y_0) \partial_x \phi(0, y_0)^2 + \\ \partial_{y_1} B(0, y_0) \partial_x^2 \phi(0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Portanto, a representação (4.109) segue das hipóteses e da expansão em série de Taylor da função (4.108), em torno de $x = 0$ e até os termos de ordem 2, onde $\phi_2(y_2) = \partial_x^2 \phi(0, y_2)$. ■

A próxima proposição decorre das propriedades da função $(\epsilon, \xi) \mapsto \Delta(\epsilon, \xi)$ e do lema anterior.

Proposição 4.2.1. *Existe uma única função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ tal que $\xi = \Phi(\epsilon, \nu) = (\phi(\epsilon, \nu), \nu)$ e*

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2!} \phi_2(\nu) \epsilon^2 + O_\phi(\epsilon^3, |\nu|), \quad (4.113)$$

com

$$\phi_2(\nu) = -2\nu. \quad (4.114)$$

Demonstração. A demonstração segue das propriedades (4.95) a (4.105) e do **Lema 4.2.1** tomando $B = \Delta$ and $(x, y) = (\epsilon, \xi)$. ■

Analisando a transformação de Poincaré como um sistema dinâmico discreto e visto que $\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) \equiv 0$, de (4.113) e pelo **Teorema da Função Implícita**, o valor de $\epsilon > 0$ (ponto fixo da transformação de Poincaré) associado com a solução periódica de (4.81) é representado por

$$\epsilon = \sqrt{\frac{-\mu}{\nu}} + O_\epsilon(|\mu|^2, |\nu|), \quad (4.115)$$

para todo $\nu > 0$.

A estabilidade do ponto fixo (4.115) é obtida através da derivada em relação a ϵ da transformação de Poincaré calculada em $\xi = \Phi(\epsilon, \nu)$

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) = 1 + \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) + \epsilon \partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)). \quad (4.116)$$

Como $\Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) \equiv 0$, o resultado anterior é reescrito como

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) = 1 - \epsilon \partial_{\mu_1} \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu), \quad (4.117)$$

e por (4.113),

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) = 1 + 4\pi\nu\epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, |\nu|). \quad (4.118)$$

Proposição 4.2.2. *Considere a equação diferencial (4.76). Se $\nu < 0$ então localmente existe uma única órbita periódica estável no retrato de fase de (4.76) perto do ponto de equilíbrio $(x, y) = (0, 0)$ e se $\nu > 0$ então existe única órbita periódica instável no retrato de fase de (4.76) perto do ponto de equilíbrio $(x, y) = (0, 0)$.*

Demonstração. Pela **Proposição 4.2.1** existe uma única função $(\epsilon, \nu) \mapsto \Phi(\epsilon, \nu)$ tal que $\mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) = \epsilon$ para todo $\nu \in \mathbb{R}$. Portanto, existe uma órbita periódica de (4.76) a qual é única devido a (4.115), para $\nu \neq 0$. If $\nu < 0$, então por (4.118), $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu))| < 1$, o que mostra que a órbita periódica é estável. De modo análogo, se $\nu > 0$, então $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu))| > 1$ e a órbita periódica é instável. ■

É fácil ver a partir de (4.113) que para $\nu < 0$ a órbita periódica existe para $\mu > 0$ e para $\nu > 0$ a órbita periódica existe para $\mu < 0$. Estas informações e a **Proposição 4.2.2** permitem concluir que (4.76) possui as mesmas propriedades da equação diferencial do exemplo 4.1.2 e, portanto, os termos de ordem superior não afetam os resultados. Para verificar a influência dos termos de ordem superior quando $\nu = 0$ é necessário utilizar o **Lema 4.2.2**.

Lema 4.2.2. *Suponha que a função suave (4.107) satisfaz as exigências **A1** a **A4** para $y_0 = (0, y_2)$ e também*

A5. $\partial_{xy_1}^2 B(0, y_0) = 0$;

A6. $\partial_x^3 B(0, y_0) = 0$.

Então a única função suave $(x, y_2) \mapsto y_1 = \phi(x, y_2)$ tal que $y = \Phi(x, y_2) = (\phi(x, y_2), y_2)$ e $B(x, \Phi(x, y_2)) \equiv 0$ possui a seguinte representação

$$\phi(x, y_2) = \frac{1}{2!}\phi_2(y_2)x^2 + \frac{1}{4!}\phi_4(y_2)x^4 + O_\phi(|x|^5, |y_2|), \quad (4.119)$$

onde $\phi_2(y_2)$ é tal como em (4.110) e

$$\phi_4(y_2) = -\frac{3\partial_{y_1}^2 B(0, y_0)\partial_x^2 B(0, y_0)^2}{\partial_{y_1} B(0, y_0)^3} + \frac{6\partial_x^2 B(0, y_0)\partial_{xxy_1}^3 B(0, y_0)}{\partial_{y_1} B(0, y_0)^2} - \frac{\partial_x^4 B(0, y_0)}{\partial_{y_1} B(0, y_0)}. \quad (4.120)$$

Demonstração. A demonstração é semelhante aquela do **Lema 4.2.1** e, portanto, será omitida. ■

É possível obter uma aproximação melhor para a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ empregando o **Lema 4.2.2** e as propriedades da função $(\epsilon, \mu) \mapsto \Delta(\epsilon, \mu)$.

Proposição 4.2.3. A função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ possui a seguinte representação

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2!}\phi_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{4!}\phi_4(\nu)\epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, |\nu|), \quad (4.121)$$

onde $\phi_2(\nu)$ é dado em (4.114) e

$$\phi_4(\nu) = -24s. \quad (4.122)$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente do **Lema 4.2.2** e de (4.95) a (4.105). ■

Para $\nu = 0$, a estabilidade da órbita periódica é dada pelo parâmetro $s = \pm 1$.

Proposição 4.2.4. Considere a equação diferencial (4.76) para $\nu = 0$. Se $s = -1$ então em uma vizinhança do ponto de equilíbrio $(x, y) = (0, 0)$ existe uma única órbita periódica estável no retrato de fase de (4.76) e se $s = 1$ a órbita periódica é instável.

Demonstração. Empregando (4.121), a derivada da transformação de Poincaré é dada por

$$\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) = 1 + 4\pi\nu\epsilon^2 + 8\pi(\pi\nu^2 + s)\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, |\nu|). \quad (4.123)$$

Para $\nu = 0$, $\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, 0)) = 1 + 8\pi s\epsilon^4 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^5, 0)$. Portanto, $s = -1$ implica que $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, 0))| < 1$ e $s = 1$ implica que $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, 0))| > 1$. ■

O **Teorema da Função Implícita** e (4.121) permitem concluir que a equação diferencial (4.76) apresenta um diagrama de bifurcação como o da Figura 4.2. A curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} é obtida de $|\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu))| = 1$ ou, equivalentemente, por (4.2)

$$\epsilon \partial_\mu \Delta(\epsilon, \Phi(\epsilon, \nu)) \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu) = 4\pi \epsilon^2 \Psi(\epsilon, \nu) \equiv 0, \quad (4.124)$$

onde

$$\Psi(\epsilon, \nu) = \nu + 2(\pi \nu^2 + s) \epsilon^2 + O_{\mathcal{P}}(\epsilon^3, |\nu|). \quad (4.125)$$

Portanto, é suficiente estudar as propriedades do conjunto $\Psi^{-1}(0)$, o que resulta na **Proposição 4.2.5**.

Proposição 4.2.5. *A curva de órbitas periódicas não hiperbólicas de (4.76) possui as seguintes representações*

$$\Gamma(\epsilon) = (s\epsilon^4, -2s\epsilon^2) + O_\Gamma(\epsilon^5), \quad (4.126)$$

como curva parametrizada por ϵ ou localmente como gráfico de função

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{1}{4s} \nu^2 + O_\Lambda(|\nu|^3), \quad (4.127)$$

com $s = \pm 1$.

Demonstração. Basta mostrar a existência de uma curva $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ no plano de parâmetros $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ tal que:

C1. $\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = \epsilon$;

C2. $\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = 1$;

C3. $\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) \neq 0$;

C4. $\partial_\mu \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) \neq 0$;

C5. A curva $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ pode ser representada localmente em torno do ponto $(\mu, \nu) = (0, 0)$ como (4.126) ou (4.127).

Se a transformação de Poincaré $(\epsilon, \xi) \mapsto \mathcal{P}(\epsilon, \xi) = \epsilon(1 + \Delta(\epsilon, \xi))$ é vista como um sistema dinâmico discreto, então os itens **C1**, **C2**, **C3** e **C4** garantem a ocorrência de uma bifurcação sela-nó genérica para $\xi = \Gamma(\epsilon)$.

A função (4.125) possui as seguintes propriedades:

B1. $\Psi(0, 0) = 0;$

B2. $\partial_\epsilon \Psi(0, 0) = 0;$

B3. $\partial_\nu \Psi(0, 0) = 1;$

B4. $\partial_\epsilon^2 \Psi(0, 0) = 4s \neq 0$, visto que $s = \pm 1$.

Portanto, pelo **Lema 4.2.1** existe uma função suave $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$ tal que

$$\Psi(\epsilon, \psi(\epsilon)) \equiv 0 \quad (4.128)$$

e, portanto, a função $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ está bem definida, onde

$$\Gamma(\epsilon) = \Phi(\epsilon, \psi(\epsilon)) = (\phi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon)). \quad (4.129)$$

Além disto, $\mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = \epsilon$ por (4.129) e $\partial_\epsilon \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = 1$ por (4.128). Logo, os itens **C1** e **C2** estão demonstrados.

Ainda pelo **Lema 4.2.1**, a função $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$ admite a representação

$$\nu = \psi(\epsilon) = \frac{1}{2!} \psi_2 \epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3), \quad (4.130)$$

onde

$$\psi_2 = -\frac{\partial_\epsilon^2 \Psi(0, 0)}{\partial_\nu \Psi(0, 0)} = -4s. \quad (4.131)$$

De (4.121) e (4.130) segue que

$$\mu = \phi(\epsilon, 0) = s\epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^6) \quad (4.132)$$

e

$$\nu = \psi(\epsilon) = -2s\epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3). \quad (4.133)$$

Assim, a curva $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ pode ser parametrizada por ϵ com em (4.126) e o item **C5** é verificado. Aplicando o **Teorema da Função Implícita** à função $(\epsilon, \nu) \mapsto K(\epsilon, \nu) = \nu - \psi(\epsilon)$ é possível mostrar que

$$\epsilon^2 = -\frac{1}{2s} \nu + O_\epsilon(|\nu|^2) \quad (4.134)$$

e por (4.121), a curva $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ pode ser localmente representada como gráfico de função tal como em (4.127).

Para demonstrar os itens **C3** e **C4** é necessário obter a derivada segunda com relação a ϵ da transformação de Poincaré calculada em $\xi = \Gamma(\epsilon)$,

$$\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = 2\partial_\epsilon \Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) + \epsilon \partial_\epsilon^2 \Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon)), \quad (4.135)$$

e a derivada em relação a μ da transformação de Poincaré calculada em $\xi = \Gamma(\epsilon)$

$$\partial_\mu \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = \epsilon \partial_\mu \Delta(\epsilon, \Gamma(\epsilon)). \quad (4.136)$$

Levando em conta (4.94) e tomando a expansão em Taylor da função $(\theta, \xi) \mapsto \rho_k(\theta, \xi)$ (e suas derivadas com relação a μ) em torno de $\xi = \Gamma(\epsilon)$ and for $k = 1, 2, 3, 4, 5$, segue que

$$\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = \chi_0 + \chi_1 \epsilon + \frac{1}{2!} \chi_2 \epsilon^2 + \frac{1}{3!} \chi_3 \epsilon^3 + O_\chi(\epsilon^4), \quad (4.137)$$

e

$$\partial_\mu \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = \zeta_1 \epsilon + O_\zeta(\epsilon^2), \quad (4.138)$$

sendo

$$\chi_0 = \rho_2(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.139)$$

$$\chi_1 = \rho_3(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.140)$$

$$\chi_2 = \rho_4(2\pi, \xi_1) - 4s\partial_\nu \rho_2(2\pi, \xi_1) - \nu \partial_\mu \rho_2(2\pi, \xi_1), \quad (4.141)$$

$$\chi_3 = \rho_5(2\pi, \xi_1) - 12s\partial_\nu \rho_3(2\pi, \xi_1) - 6\nu \partial_\mu \rho_3(2\pi, \xi_1), \quad (4.142)$$

$$\zeta_1 = \partial_\mu \rho_1(2\pi, \xi_1) \quad (4.143)$$

e $\xi_1 = (0, 0)$. Utilizando (4.85) a (4.89) e a dependência contínua das soluções com relação aos parâmetros, resulta que

$$\partial_\mu \rho_1(2\pi, \xi_1) = 2\pi, \quad (4.144)$$

$$\rho_2(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.145)$$

$$\partial_\mu \rho_2(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.146)$$

$$\partial_\nu \rho_2(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.147)$$

$$\rho_3(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.148)$$

$$\partial_\mu \rho_3(2\pi, \xi_1) = 0, \quad (4.149)$$

$$\partial_\nu \rho_3(2\pi, \xi_1) = 12\pi, \quad (4.150)$$

$$\rho_5(2\pi, \xi_1) = 240\pi s. \quad (4.151)$$

Portanto,

$$\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = 16\pi s \epsilon^3 + O_\chi(\epsilon^4), \quad (4.152)$$

$$\partial_\mu \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) = 2\pi\epsilon + O_\zeta(\epsilon^2). \quad (4.153)$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\partial_\epsilon^2 \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) \neq 0$ and $\partial_\mu \mathcal{P}(\epsilon, \Gamma(\epsilon)) \neq 0$ e a proposição está demonstrada. ■

Os resultados anteriores mostram que (4.76) e (4.50) possuem as mesmas propriedades. Resta agora construir o homeomorfismo.

Tome um par $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, com $\mu > 0$ podendo variar e $\nu > 0$ fixo, ou seja, o par pertence a região R_3 da Figura 4.2. Neste caso, (4.50) e (4.76) possuem uma única órbita periódica estável em uma vizinhança da origem. Considere uma reparametrização do tempo nas equações diferenciais ordinárias em (4.80), de tal forma que a equação diferencial ordinária (4.81) torna-se

$$\frac{d}{d\theta} r(\theta, \xi) = \tilde{R}(r, \theta, \xi) = \mu r + \nu r^3 + s r^5 + \tilde{K}_r(r^6, \theta). \quad (4.154)$$

Assim, (4.154) possui um tempo de retorno constante e igual a 2π ao conjunto $\{(r, \theta) : r \geq 0, \theta = 0\}$. Além disto, através de uma transformação linear nas coordenadas de (4.76), o ponto de interseção da órbita periódica estável com o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ passa a ser $x = \sqrt{\mu}$. O homeomorfismo entre (4.50) e (4.76) é construído de acordo com a Figura 4.3.

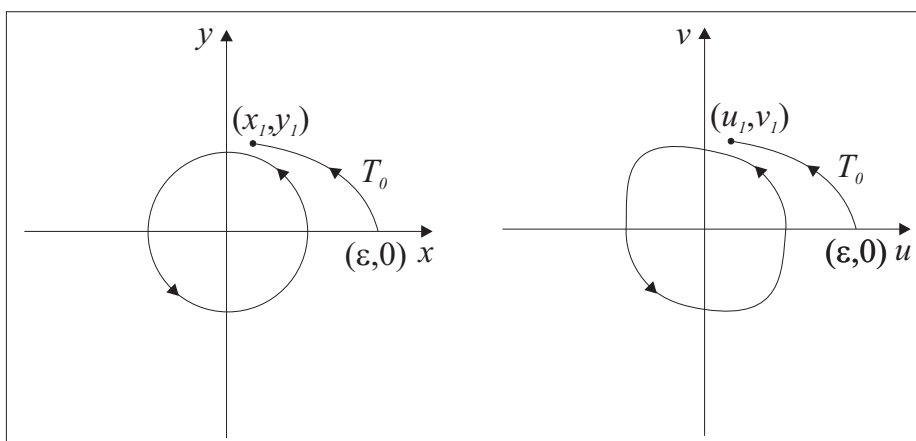


Figura 4.3: Construção do homeomorfismo entre (4.50) e (4.76).

Considere a aplicação $(x, y) \in U_B \mapsto h(x, y) = (u, v) \in U_{BM}$, com $h(0, 0) = (0, 0)$, sendo U_B uma vizinhança da origem de (4.50) e U_{BM} uma vizinhança da origem de (4.76) após a reparametrização do tempo e transformação linear nas coordenadas.

Tome um ponto $(x_1, y_1) \in U_B$ e encontre um par (ϵ, T_0) , sendo T_0 o tempo mínimo necessário para a órbita de (4.50) partindo do ponto $(\epsilon, 0)$ alcançar o ponto (x_1, y_1) . Encontre a solução da equação diferencial (4.76), com condição inicial $(\epsilon, 0)$, no intervalo $[0, T_0]$ e denote por (u_1, v_1) o ponto da órbita obtida para $\tau = T_0$.

A aplicação, assim construída, é um homeomorfismo que para $\mu > 0$, leva órbitas de (4.50) em U_B em órbitas de (4.76) em U_{BM} , preservando a orientação do tempo. Para as demais regiões da Figura 4.2, o homeomorfismo pode ser construído de modo análogo, exceto que não é necessária a transformação linear de coordenadas para pontos na região R_1 .

Os resultados anteriores demonstram o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *A equação diferencial (4.76) é localmente topologicamente equivalente, em uma vizinhança da origem, à equação diferencial (4.50).*

A teoria apresentada neste capítulo, mais precisamente na seção 4.1, embora útil no estudo de soluções periódicas da forma normal de Poincaré–Hopf é de difícil aplicação a outras equações diferenciais em \mathbb{R}^2 , mesmo empregando o teorema da forma normal (ver [26]). Contudo, analisando tal teoria, é possível extrair os aspectos essenciais para a construção de uma teoria de aproximação de órbitas periódicas para equações diferenciais arbitrárias em \mathbb{R}^n , ou seja,

- 1) Definição apropriada para o parâmetro ϵ em equações diferenciais em \mathbb{R}^n ;
- 2) Obtenção de uma aproximação para órbitas periódicas de equações diferenciais em \mathbb{R}^n , em termos do parâmetro ϵ e nas hipóteses de uma bifurcação de Hopf;
- 3) Análise da estabilidade da órbita periódica, mediante a teoria de Floquet e a solução aproximada.

Neste sentido, o próximo capítulo aborda uma teoria de aproximação de soluções periódicas de equações diferenciais arbitrárias em \mathbb{R}^n , que quando aplicada à forma normal de Poincaré–Hopf, recupera os resultados da seção 4.1.

Capítulo 5

Aproximação de Órbitas Periódicas em Campos de Vetores

No capítulo anterior o parâmetro ϵ foi definido como sendo a primeira coordenada de uma condição inicial de um problema de valor inicial associado a forma normal de Poincaré–Hopf. Esta definição e o estudo da forma normal de Poincaré–Hopf, em coordenadas complexas, permitiu a obtenção de uma expressão exata para a órbita periódica deste problema e uma forma de análise de sua estabilidade. A construção de uma teoria de aproximação de órbitas periódicas, aplicável a uma classe mais ampla de equações diferenciais em \mathbb{R}^n , requer uma nova definição para o parâmetro ϵ e o estudo de uma equação diferencial complexa apropriada. Tal teoria é encontrada em [13] e é generalizada nesta seção com uma notação compatível com aquela utilizada em [15]. Esta é uma das contribuições deste trabalho.

5.1 Introdução à Bifurcação de Hopf

Se para o sistema dinâmico (3.1) é permitido que certos parâmetros que eram considerados fixos variem, então as órbitas das definições 3.1.13 e 3.1.14 podem modificar e, conseqüentemente, podem ocorrer mudanças nos retratos de fase para determinados valores dos parâmetros. A perda de equivalência topológica devido à variação dos parâmetros é a essência da teoria das bifurcações. Assim, o interesse na teoria de bifurcações é a equação diferencial (3.19) de acordo com a definição 3.1.20.

Se $\mathbf{x}_0 \in W$ é um ponto de equilíbrio de (3.19), para $\xi = \xi_0$, tal que $Df(\mathbf{x}_0, \xi_0)$ não possui autovalores com partes reais nulas, então, pelo **Teorema da Função Implícita**,

existe uma vizinhança $V \subset W$ de $\mathbf{x}_0 \in W$ tal que $f(\mathbf{x}(\xi), \xi) = \mathbf{0}$, para $\|\xi - \xi_0\|$ suficientemente pequeno. Portanto, para (3.19) há uma dependência do ponto de equilíbrio em relação ao vetor de parâmetros. Contudo, todas as definições e teoremas da seção 3.1 se mantêm para cada $\xi \in U$ fixo, conforme a definição 3.1.20.

Do que foi discutido, se $\mathbf{x}_0 \in W$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.19) para $\xi = \xi_0$, então, pelo **Teorema da Função Implícita** e pela continuidade, $\mathbf{x}(\xi) \in W$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico para $\|\xi - \xi_0\|$ suficientemente pequeno. Os retratos de fase na vizinhança de $\mathbf{x}(\xi_0)$, para $\|\xi - \xi_0\|$ suficientemente pequeno, são topologicamente equivalentes. Entretanto, grandes variações de $\xi \in U$ podem originar mudanças significativas no retrato de fase de (3.19), como mudança na estabilidade local de pontos de equilíbrio, surgimento ou desaparecimento de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas e o aparecimento de fenômenos globais como laços homoclínicos e heteroclínicos. Isto leva a uma perda de equivalência topológica entre os retratos de fase que é denominada bifurcação.

As bifurcações tratadas neste trabalho são locais, isto é, aquelas que podem ser estudadas através de pontos de equilíbrio de (3.19) e autovalores da parte linear da aplicação associada à equação diferencial e cuja análise envolve a expansão em série de Taylor de (3.19). O foco é o estudo da bifurcação de Hopf de codimensão um e codimensão dois. O leitor interessado pode encontrar a definição de codimensão de uma bifurcação em [33].

A bifurcação de Hopf, por ser uma bifurcação local, pode ser entendida com o auxílio de dois teoremas: o teorema da variedade central e o teorema da forma normal que podem ser encontrados em [26] e [33]. Estes teoremas desempenham um papel importante no estudo de bifurcações.

Definição 5.1.1. *Um ponto $\xi_0 \in U$ é denominado um ponto de bifurcação de (3.19), se para toda vizinhança $U_\xi \subset U$ de $\xi_0 \in U$, existirem $\xi_1, \xi_2 \in U_\xi$, tais que $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi_1)$ e $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi_2)$ não são topologicamente equivalentes.*

Para o estudo da bifurcação de Hopf, suponha que $(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) \in W \times U$ é um ponto de equilíbrio de (3.19), ou seja, $f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) = \mathbf{0}$.

Definição 5.1.2. *Um ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}_0(\xi_0), \xi_0) \in W \times U$, com $\xi_0 = (\mu_0, \nu)$, é chamado um ponto de Hopf de codimensão um, se a parte linear da aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f(\mathbf{x}, \xi)$, calculada em $(\mathbf{x}_0(\xi_0), \xi_0) \in W \times U$ e denotada por $A(\xi_0) = Df(\mathbf{x}_0(\xi_0), \xi_0)$, possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(\xi_0) = \gamma(\xi_0) + i\eta(\xi_0)$, $\gamma(\xi_0) = 0$, $\eta(\xi_0) = \omega_0(\nu) > 0$ e nenhum*

outro autovalor com parte real nula e o primeiro coeficiente de Lyapunov, $l_1(\xi_0) \in \mathbb{R}$, é não nulo.

O primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov serão definidos em um momento oportuno. Neste capítulo, a transversalidade desempenha um papel importante.

Definição 5.1.3. *Um ponto de Hopf transversal de codimensão um é um ponto de Hopf de codimensão um, $(\mathbf{x}_0(\xi_0), \xi_0) \in W \times U$, tal que*

$$\partial_\mu \gamma(\xi_0) \neq 0, \quad (5.1)$$

para todo $\xi_0 \in U$.

Quando $l_1(\xi_1) = 0$, para $\xi_1 = (\mu_0, \nu_0) \in U$, há a possibilidade de ocorrência de bifurcações de Hopf de codimensão dois.

Definição 5.1.4. *Um ponto de Hopf de codimensão dois é um ponto de equilíbrio $(\mathbf{x}_0(\xi_1), \xi_1) \in W \times U$, sendo $\xi_1 = (\mu_0, \nu_0)$, que satisfaz a definição de um ponto de Hopf de codimensão um, exceto que $l_1(\xi_1) = 0$. Além disto, satisfaz uma condição adicional, o segundo coeficiente de Lyapunov $l_2(\xi_1)$ é não nulo.*

Definição 5.1.5. *Um ponto de Hopf de codimensão dois é transversal se os conjuntos $\gamma^{-1}(0)$ e $l_1^{-1}(0)$ se interceptam transversalmente ou, equivalentemente, se a aplicação $\xi \mapsto (\gamma(\xi), l_1(\xi))$ é regular em $\xi = \xi_1$.*

A condição de transversalidade tal como na definição 5.1.5 é equivalente a

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \partial_\mu \gamma(\xi_1) & \partial_\nu \gamma(\xi_1) \\ \partial_\mu l_1(\xi_1) & \partial_\nu l_1(\xi_1) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (5.2)$$

Devido aos resultados da seção 4.1, o estudo da bifurcação de Hopf de codimensões um e dois requer a expansão em série de Taylor na variável \mathbf{x} , em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e até os termos de ordem 5, da aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f(\mathbf{x}, \xi)$. Através da translação $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\xi)$ e mantendo a notação anterior, ou seja, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, defina

$$F(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0(\xi), \xi), \quad (5.3)$$

Agora a aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto F(\mathbf{x}, \xi)$ possui expansão em série de Taylor na variável \mathbf{x} , em torno da origem e até os termos de ordem 5, da forma

$$F(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) + \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} D^k f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) + O_F(\|\mathbf{x}\|^6, \|\xi\|), \quad (5.4)$$

com $\mathbf{x}^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$, para $j = 1, \dots, k$ e

$$D^k f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \dots \partial t_k} f \left(\mathbf{x}_0(\xi) + \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}^i, \xi \right) \Big|_{t=0}, \quad (5.5)$$

sendo $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$.

A aplicação linear $Df(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ da definição 3.1.8 é obtida empregando (5.5) com $k = 1$, ou seja,

$$D^1 f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) = \frac{\partial}{\partial t_1} f \left(\mathbf{x}_0(\xi) + t_1 \mathbf{x}^1, \xi \right) \Big|_{t_1=0} = A(\xi) \mathbf{x}^1. \quad (5.6)$$

Utilizando (5.5) e a notação de [15], segue que

$$F(\mathbf{x}, \xi) = A(\xi) \mathbf{x} + \frac{1}{2} B(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \xi) + \frac{1}{6} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \xi) + \frac{1}{24} D(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \xi) + \frac{1}{120} E(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \xi) + O_F(\|\mathbf{x}\|^6, \xi), \quad (5.7)$$

com

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \xi) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_k} F_i(\eta, \xi) \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \quad (5.8)$$

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} F_i(\eta, \xi) \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l, \quad (5.9)$$

$$D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) = \sum_{j,k,l,r=1}^n \frac{\partial^4}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r} F_i(\eta, \xi) \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l v_r, \quad (5.10)$$

$$E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi) = \sum_{j,k,l,r,p=1}^n \frac{\partial^5}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r \partial \eta_p} F_i(\eta, \xi) \Big|_{\eta=0} x_j y_k u_l v_r w_p, \quad (5.11)$$

as componentes das funções multilineares simétricas $B = D^2 f$, $C = D^3 f$, $D = D^4 f$ e $E = D^5 f$ para $i = 1, \dots, n$. Em (5.8) a (5.11), $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^4$ e $\mathbf{w} = \mathbf{x}^5$.

As próximas seções tratam da generalização dos resultados da seção 4.1 para \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n , utilizando as definições e conceitos desta seção.

5.2 Aproximação de Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^2

A teoria desenvolvida ao longo desta seção aproxima órbitas periódicas que surgem em decorrência de uma bifurcação de Hopf. Assim, alguns resultados da teoria sobre bifurcação de Hopf em \mathbb{R}^2 , apresentados em [15], serão empregados nesta seção.

Considere a equação diferencial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi), \quad (5.12)$$

com $f : W \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $W \subset \mathbb{R}^2$ um aberto em \mathbb{R}^2 , $f \in \mathcal{C}^\infty(W \times U, \mathbb{R}^2)$ e $\xi = (\mu, \nu) \in U \subset \mathbb{R}^2$ o vetor de parâmetros. Seja $(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) \in W \times U$, um ponto de equilíbrio de (5.12), ou seja, $f(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) = \mathbf{0}$, para todo $\xi \in U$. Sendo $A(\xi) = Df(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)$, a parte linear da aplicação $f : W \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ calculada em $(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)$, então (5.12) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}' = A(\xi)\mathbf{x} + G(\mathbf{x}, \xi), \quad (5.13)$$

com $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto G(\mathbf{x}, \xi)$, uma aplicação suave com expansão em série de Taylor na variável \mathbf{x} e em torno da origem, iniciando nos termos de ordem 2 no mínimo.

Suponha que $A(\xi) = Df(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)$ possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\eta(\xi)$. Em termos das componentes da matriz $A(\xi)$, se

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(\xi) & a_{1,2}(\xi) \\ a_{2,1}(\xi) & a_{2,2}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

então resulta do polinômio característico de (5.14),

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A(\xi))\lambda + \text{Det}(A(\xi)), \quad (5.15)$$

que

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \frac{1}{2}\text{Tr}(A(\xi)) = \frac{1}{2}(a_{1,1}(\xi) + a_{2,2}(\xi)), \\ \eta(\xi) &= \frac{1}{2}\sqrt{4\text{Det}(A(\xi)) - (\text{Tr}(A(\xi)))^2}, \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4(a_{1,1}(\xi)a_{2,2}(\xi) - a_{1,2}(\xi)a_{2,1}(\xi)) - (a_{1,1}(\xi) + a_{2,2}(\xi))^2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Visto que a órbita periódica (ou mais precisamente a família de órbitas periódicas) a ser aproximada, por hipótese, surge a partir de uma bifurcação de Hopf, suponha também que para $\xi_0 = (\mu_0, \nu) \in U$ (ponto de bifurcação), $\gamma(\xi_0) = 0$, $\partial_\mu \gamma(\xi_0) \neq 0$ e $\eta(\xi_0) = \omega_0(\nu) > 0$. Não há perda de generalidade em considerar que $\mathbf{x}_0(\xi) = \mathbf{0}$, para todo $\xi \in U$, $(0, 0) \in U$ e $\mu_0 = 0$. Basta efetuar uma translação do ponto de equilíbrio e do parâmetro crítico para as respectivas origens e ajustar de maneira conveniente os conjuntos $W \subset \mathbb{R}^2$ e $U \subset \mathbb{R}^2$.

Seja $q(\xi) \in \mathbb{C}^2$, o autovetor associado ao autovalor $\lambda(\xi)$ e seja $p(\xi) \in \mathbb{C}^2$, o autovetor adjunto associado ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi)$, satisfazendo

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi), \quad (5.17)$$

$$A(\xi)^T p(\xi) = \bar{\lambda}(\xi)p(\xi), \quad (5.18)$$

e a normalização,

$$\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(\xi) q_i(\xi) = 1, \quad (5.19)$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o produto interno em \mathbb{C}^2 .

Decorre das definições de $q(\xi)$ e $p(\xi)$ que

$$\begin{aligned} \langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle &= \left\langle p(\xi), \frac{1}{\bar{\lambda}(\xi)} A(\xi) \bar{q}(\xi) \right\rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}(\xi)} \langle p(\xi), A(\xi) \bar{q}(\xi) \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{\lambda}(\xi)} \langle A(\xi)^T p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}(\xi)} \langle \bar{\lambda}(\xi) p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle \\ &= \frac{\lambda(\xi)}{\bar{\lambda}(\xi)} \langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Portanto,

$$\left(1 - \frac{\lambda(\xi)}{\bar{\lambda}(\xi)}\right) \langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle = 0, \quad (5.21)$$

e já que, para $\|\xi - \xi_0\|$ suficientemente pequeno, $\eta(\xi) > 0$ e $\lambda(\xi) \neq \bar{\lambda}(\xi)$, a única possibilidade é $\langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle = 0$.

Da análise anterior resulta que o conjunto $\{q(\xi), \bar{q}(\xi)\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 . O subespaço de \mathbb{C}^2 , definido por

$$\mathbb{R}_0^2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}^2 : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} = \mathbf{0}\}, \quad (5.22)$$

é isomorfo ao espaço vetorial \mathbb{R}^2 . Tendo em conta o isomorfismo existente entre \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}_0^2 , se $(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}_0^2$, então a notação utilizada é $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Assim, todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado de maneira única como combinação linear dos elementos de $\{q(\xi), \bar{q}(\xi)\}$, ou seja, existe um $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mathbf{x} = zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi). \quad (5.23)$$

É fácil ver, a partir de $\langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle = 0$, que

$$z = \langle p(\xi), \mathbf{x} \rangle. \quad (5.24)$$

Os resultados (5.23) e (5.24) permitem escrever (5.12) como uma equação diferencial complexa.

Proposição 5.2.1. *A equação diferencial (5.12) pode ser escrita, para $\|\xi - \xi_0\|$ suficientemente pequeno, como*

$$z' = g(z, \bar{z}, \xi), \quad (5.25)$$

sendo $g \in C^\infty(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times U, \mathbb{C})$ e

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \lambda(\xi)z + \langle p(\xi), G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle. \quad (5.26)$$

Demonstração. Basta diferenciar (5.24) em relação a t e utilizar (5.13), pois

$$\begin{aligned} z' &= \langle p(\xi), \mathbf{x}' \rangle \\ &= \langle p(\xi), A(\xi)\mathbf{x} + G(\mathbf{x}, \xi) \rangle \\ &= \langle p(\xi), A(\xi)(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi)) + G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \\ &= \langle p(\xi), zA(\xi)q(\xi) + \bar{z}A(\xi)\bar{q}(\xi) + G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \\ &= \langle p(\xi), z\lambda(\xi)q(\xi) + \bar{z}\bar{\lambda}(\xi)\bar{q}(\xi) + G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \\ &= \lambda(\xi)z\langle p(\xi), q(\xi) \rangle + \bar{\lambda}(\xi)\bar{z}\langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle + \langle p(\xi), G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Logo, de $\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = 1$ e $\langle p(\xi), \bar{q}(\xi) \rangle = 0$,

$$z' = g(z, \bar{z}, \xi) = \lambda(\xi)z + \langle p(\xi), G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle. \quad (5.28)$$

■

A aplicação $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi)$ possui série de Taylor formal,

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \lambda(\xi)z + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)!j!} g_{k-j,j}(\xi) z^{k-j} \bar{z}^j, \quad (5.29)$$

com

$$g_{k-j,j}(\xi) = \left. \frac{\partial^k}{\partial z^{k-j} \partial \bar{z}^j} \langle p(\xi), G(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \right|_{z=0}, \quad (5.30)$$

$k = 2, 3, \dots$ e $j = 0, \dots, k$.

Os coeficientes $g_{k-j,j}(\xi)$, $k = 2, 3, \dots$ e $j = 0, \dots, k$ são essenciais no método de aproximação de órbitas periódicas. Uma maneira mais simples de calcular estes coeficientes, alternativa a (5.30), é através das funções multilineares simétricas apresentadas seção 5.1.

É fácil mostrar de (5.28) e

$$\begin{aligned} B(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) &= B(q(\xi), q(\xi), \xi)z^2 + 2B(q(\xi), \bar{q}(\xi), \xi)z\bar{z} + \\ &= B(\bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \xi)\bar{z}^2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

que,

$$\begin{aligned} g_{2,0}(\xi) &= \langle p(\xi), B(q(\xi), q(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{1,1}(\xi) &= \langle p(\xi), B(q(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{0,2}(\xi) &= \langle p(\xi), B(\bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle. \end{aligned} \tag{5.32}$$

De modo análogo, para a função multilinear simétrica $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi) \mapsto C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi)$,

$$\begin{aligned} g_{3,0}(\xi) &= \langle p(\xi), C(q(\xi), q(\xi), q(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{2,1}(\xi) &= \langle p(\xi), C(q(\xi), q(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{1,2}(\xi) &= \langle p(\xi), C(q(\xi), \bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{0,3}(\xi) &= \langle p(\xi), C(\bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle \end{aligned} \tag{5.33}$$

e, assim por diante, para as demais funções multilineares simétricas.

Essencialmente a teoria de aproximação de órbitas periódicas de [13], consiste em construir uma aproximação para a órbita periódica da equação diferencial complexa (5.25), a partir da solução da equação diferencial linear,

$$z' = \lambda(\xi)z \tag{5.34}$$

e para $\xi = \xi_0$. Esta equação diferencial linear possui solução,

$$z(t) = z_0 e^{\lambda(\xi)t}, \tag{5.35}$$

com $z_0 \in \mathbb{C}$. Para $\xi = \xi_0$, segue que

$$z(t) = z_0 e^{i\omega_0(\nu)t} \tag{5.36}$$

e fazendo a mudança no tempo $s = \omega_0(\nu)t$, esta solução é periódica de período 2π na variável s . Para formalizar o método considere, como na seção anterior, as funções $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$ e a mudança de coordenadas e do tempo

$$z(t) = w(s, \epsilon, \nu), \quad s = \omega(\epsilon, \nu)t, \quad \omega(\xi_0) = \omega_0(\nu), \tag{5.37}$$

com

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w(s, \epsilon, \nu) ds. \tag{5.38}$$

Embora possa parecer estranha, a definição (5.38) mostra que o parâmetro ϵ pode ser visto como o primeiro coeficiente da série de Fourier da função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto w(s, \epsilon, \nu)$, a qual é periódica de período 2π na variável s . Métodos, como o balanço harmônico, utilizam

séries de Fourier no entendimento de soluções periódicas de equações diferenciais, sendo o primeiro coeficiente ou primeira amplitude da série de Fourier, um parâmetro importante em tais estudos. O leitor interessado na teoria de balanço harmônico poder recorrer a [14], [23] ou [27].

Note que parâmetro ϵ , tal como definido em (5.38), é um número complexo, ou mais precisamente, uma função complexa cuja variável independente é ν . Contudo é possível, através de uma mudança de variáveis, considerar o parâmetro ϵ como um número real. Como,

$$\epsilon = \varepsilon e^{i\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w(s, \epsilon, \nu) ds, \quad (5.39)$$

segue que

$$\varepsilon = |\epsilon| = \frac{e^{-i\phi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w(s, \epsilon, \nu) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(s+\phi)} w(s, \epsilon, \nu) ds. \quad (5.40)$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis $u = s + \phi$ em (5.40) e definindo

$$(u, \epsilon, \nu) \mapsto \tilde{w}(u, \epsilon, \nu) := w(u - \phi, \epsilon, \nu) \quad (5.41)$$

resulta que

$$\varepsilon = |\epsilon| = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi}^{2\pi+\phi} e^{-iu} w(u - \phi, \epsilon, \nu) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iu} \tilde{w}(u, \epsilon, \nu) du, \quad (5.42)$$

já que a função $(u, \epsilon, \nu) \mapsto e^{-iu} \tilde{w}(u, \epsilon, \nu)$ é periódica de período 2π . Portanto, por (5.42), o parâmetro ϵ tal como definido em (5.38) será considerado real.

A mudança no tempo $s = \omega(\epsilon, \nu)t$ é fundamental, já que o período da órbita periódica de (5.25) é desconhecido e, assim, a mudança no tempo serve justamente para fornecer uma aproximação, de período conhecido 2π , para a órbita periódica de (5.25). Se $(\epsilon, \nu) \mapsto T(\epsilon, \nu)$ denota o período da órbita periódica $t \mapsto z(t)$, então

$$\omega(\epsilon, \nu) = \frac{2\pi}{T(\epsilon, \nu)}. \quad (5.43)$$

Em outras palavras, o conhecimento da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$ determina completamente o período da órbita periódica de (5.25).

Mediante a mudança de coordenadas e no tempo (5.37) e aplicando a regra da cadeia, a equação diferencial complexa (5.25) é reescrita na forma

$$\omega(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds} w(s, \epsilon, \nu) = g(w(s, \epsilon, \nu), \bar{w}(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu). \quad (5.44)$$

Aproximações para as funções $(s, \epsilon, \nu) \mapsto w(s, \epsilon, \nu)$, $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$ são obtidas através de (5.44) e das séries de potências formais

$$\begin{pmatrix} w(s, \epsilon, \nu) \\ \phi(\epsilon, \nu) \\ \omega(\epsilon, \nu) - \omega_0(\nu) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} w_k(s, \nu) \\ \mu_k(\nu) \\ \omega_k(\nu) \end{pmatrix} \epsilon^k. \quad (5.45)$$

Uma propriedade dos termos da seqüência $\{w_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, muito utilizada nesta teoria de aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^2 , é obtida na **Proposição 5.2.2**. Tal propriedade está associada a possibilidade de interpretar a definição (5.38) do parâmetro ϵ como uma aplicação linear

$$\begin{aligned} [] : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto [w] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w(s, \epsilon, \nu) ds, \end{aligned} \quad (5.46)$$

com

$$\mathcal{W} = \{w : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})\}. \quad (5.47)$$

A aplicação linear (5.46) decorre de um produto interno em um espaço vetorial de funções apropriado. Isto ficará claro na próxima seção.

Proposição 5.2.2. *Cada termo da seqüência $\{w_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz*

$$[w_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w_k(s, \nu) ds = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.48)$$

Demonstração. A demonstração é consequência imediata da definição da aplicação linear $w \mapsto [w]$ e da série de potência formal na variável ϵ da função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto w(s, \epsilon, \nu)$, pois

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w(s, \epsilon, \nu) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} w_k(s, \nu) \epsilon^k \right) ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} w_k(s, \nu) ds \right) \epsilon^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [w_k] \epsilon^k. \end{aligned} \quad (5.49)$$

■

Os termos das seqüências $\{w_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\omega_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são determinados por meio de um processo que envolve a análise das potências em ϵ obtidas em virtude da substituição de (5.45) na equação diferencial (5.44). Observe que, para $k = 2, 3, \dots$ e $j = 0, \dots, k$, a obtenção dos coeficientes das potências em ϵ requer a expansão em série de Taylor na variável ϵ e em torno da origem da composição $(\epsilon, \nu) \mapsto g_{k-j,j}(\phi(\epsilon, \nu), \nu)$. Tal como na seção 3.2, a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 5, é da forma

$$\begin{aligned}
g_{k-j,j}(\phi(\epsilon, \nu), \nu) = & g_{k-j,j}(\xi_0) + \mu_1(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) \epsilon + \frac{1}{2} \left(\mu_2(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. \mu_1(\nu)^2 \partial_\mu^2 g_{k-j,j}(\xi_0) \right) \epsilon^2 + \frac{1}{6} \left(\mu_3(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. 3\mu_1(\nu) \mu_2(\nu) \partial_\mu^2 g_{k-j,j}(\xi_0) + \mu_1(\nu)^3 \partial_\mu^3 g_{k-j,j}(\xi_0) \right) \epsilon^3 + \\
& \frac{1}{24} \left(\mu_4(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) + 3\mu_2(\nu)^2 \partial_\mu^2 g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. 4\mu_1(\nu) \mu_2(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) + 6\mu_1(\nu)^2 \mu_2(\nu) \partial_\mu^3 g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. \mu_1(\nu)^4 \partial_\mu^4 g_{k-j,j}(\xi_0) \right) \epsilon^4 + \frac{1}{120} \left(\mu_5(\nu) \partial_\mu g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. (10\mu_2(\nu) \mu_3(\nu) + 5\mu_1(\nu) \mu_4(\nu)) \partial_\mu^2 g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. (15\mu_1(\nu) \mu_2(\nu)^2 + 10\mu_1(\nu)^2 \mu_3(\nu)) \partial_\mu^3 g_{k-j,j}(\xi_0) + \right. \\
& \left. 10\mu_1(\nu)^3 \mu_2(\nu) \partial_\mu^4 g_{k-j,j}(\xi_0) + \mu_1(\nu)^5 \partial_\mu^5 g_{k-j,j}(\xi_0) \right) \epsilon^5 + O_g(\epsilon^6, \nu),
\end{aligned} \tag{5.50}$$

o mesmo valendo para a composição $(\epsilon, \nu) \mapsto \lambda(\phi(\epsilon, \nu), \nu) = \gamma(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + i\eta(\phi(\epsilon, \nu), \nu)$.

O coeficiente do termo em ϵ conduz ao problema de contorno,

$$\begin{aligned}
w_1'(s, \nu) - iw_1(s, \nu) &= 0, \\
w_1(s, \nu) &= w_1(s + 2\pi, \nu).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

A solução da equação diferencial em (5.51) é

$$w_1(s, \nu) = C_1 e^{is}, \tag{5.52}$$

e como pelo **Proposição 5.2.2**, $[w_1] = 1$, decorre que

$$1 = [w_1] = [C_1 e^{is}] = C_1 [e^{is}] = C_1 \tag{5.53}$$

Logo,

$$w_1(s, \nu) = e^{is}, \tag{5.54}$$

que é uma função periódica de período 2π na variável s .

Na realidade, os termos da seqüência $\{w_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são soluções de certos problemas de contorno, que aparecem quando da substituição de (5.45) na equação diferencial (5.44) e que envolvem os termos de $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\omega_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Para $k = 1, 2, \dots$, este problema de contorno é da forma,

$$\begin{aligned} w'_{k+1}(s, \nu) - iw_{k+1}(s, \nu) &= H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)), \\ w_{k+1}(s, \nu) &= w_{k+1}(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.55)$$

sendo que $H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) = H_{k+1}(s + 2\pi, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu))$.

O teorema a seguir garante a existência de soluções para o problema de contorno (5.55).

Teorema 5.2.1. *Para cada $k = 1, 2, \dots$, o problema de contorno (5.55) admite única solução se, e somente se, $[H_{k+1}] = 0$.*

Demonstração. Para $k = 1, 2, \dots$ fixo, suponha que $(s, \nu) \mapsto \varphi_{k+1}(s, \nu)$ é solução de (5.55). Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} (\varphi'_{k+1}(s, \nu) - i\varphi_{k+1}(s, \nu)) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) ds \quad (5.56)$$

e integrando por partes o membro esquerdo de (5.56) segue que $[H_{k+1}] = 0$.

Suponha agora que $[H_{k+1}] = 0$ para $k = 1, 2, \dots$ fixo. A solução geral $(s, \nu) \mapsto \varphi_{k+1}(s, \nu)$ da equação diferencial em (5.55) é da forma

$$\varphi_{k+1}(s, \nu) = e^{is} \varphi_0^{k+1} + e^{is} \int_0^s e^{-i\zeta} H_{k+1}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta \quad (5.57)$$

com $\varphi_0^{k+1} = \varphi_{k+1}(0, \nu)$. Esta solução será periódica de período 2π se $\varphi_{k+1}(0, \nu) = \varphi_0^{k+1} = \varphi_{k+1}(2\pi, \nu)$, ou seja, se

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(0, \nu) = \varphi_{k+1}(2\pi, \nu) &= \varphi_0^{k+1} + \int_0^{2\pi} e^{-i\zeta} H_{k+1}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta \\ &= \varphi_0^{k+1} + 2\pi[H_{k+1}]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Assim, utilizando a hipótese $[H_{k+1}] = 0$, resulta que $\varphi_{k+1}(s, \nu) = \varphi_{k+1}(s + 2\pi, \nu)$ e, portanto, para cada $k = 1, 2, \dots$ fixo, a função $(s, \nu) \mapsto \varphi_{k+1}(s, \nu)$ é solução do problema de contorno (5.55). ■

O teorema anterior permite concluir que, para $k = 1, 2, \dots$, a solução do problema de valor inicial (5.55) é da forma

$$w_{k+1}(s, \nu) = e^{is} w_0^{k+1} + e^{is} \int_0^s e^{-i\zeta} H_{k+1}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta, \quad (5.59)$$

com as condições $[H_{k+1}] = 0$ e $[w_{k+1}] = 0$.

Continuando o processo e utilizando o resultado (5.54), o coeficiente do termo em ϵ^2 fornece o problema de contorno,

$$\begin{aligned} w_2'(s, \nu) - iw_2(s, \nu) &= H_2(s, \mu_1(\nu), \omega_1(\nu)), \\ w_2(s, \nu) &= w_2(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.60)$$

com

$$\begin{aligned} H_2(s, \mu_1(\nu), \omega_1(\nu)) &= \frac{1}{\omega_0(\nu)} \left(e^{2is} g_{2,0}(\xi_0) + 2g_{1,1}(\xi_0) + e^{-2is} g_{0,2}(\xi_0) + \right. \\ &\quad \left. 2e^{is} (\mu_1(\nu) \partial_\mu \lambda(\xi_0) - i\omega_1(\nu)) \right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Aplicando o **Teorema 5.2.1** à função $(s, \mu_1(\nu), \omega_1(\nu)) \mapsto H_2(s, \mu_1(\nu), \omega_1(\nu))$, resulta que

$$[H_2] = \mu_1(\nu) (\partial_\mu \gamma(\xi_0) + i\partial_\mu \eta(\xi_0)) - i\omega_1(\nu) = 0 \quad (5.62)$$

e separando as partes real e imaginária de (5.62), segue que $\mu_1(\nu) = 0$ e $\omega_1(\nu) = 0$. Nestas condições, o **Teorema 5.2.1** garante a existência de solução para o problema de contorno (5.60), a qual é dada por

$$w_2(s, \nu) = \frac{1}{3i\omega_0(\nu)} \left(3e^{2is} g_{2,0}(\xi_0) - 6g_{1,1}(\xi_0) - e^{-2is} g_{0,2}(\xi_0) \right). \quad (5.63)$$

Para o coeficiente do termo em ϵ^3 , resulta o problema de contorno,

$$\begin{aligned} w_3'(s, \nu) - iw_3(s, \nu) &= H_3(s, \mu_2(\nu), \omega_2(\nu)), \\ w_3(s, \nu) &= w_3(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.64)$$

com

$$H_3(s, \mu_2(\nu), \omega_2(\nu)) = \frac{3}{\omega_0(\nu)} \left(H_3^3(\xi_0) e^{3is} + H_3^1(\xi_0) e^{is} + H_3^{-1}(\xi_0) e^{-is} + H_3^{-3}(\xi_0) e^{-3is} \right), \quad (5.65)$$

sendo

$$H_3^3(\xi_0) = \frac{1}{3} g_{3,0}(\xi_0) - \frac{ig_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)} - \frac{ig_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)}, \quad (5.66)$$

$$H_3^1(\xi_0) = \mu_2(\nu) \partial_\mu \lambda(\xi_0) - i\omega_2(\nu) + G_{2,1}(\xi_0), \quad (5.67)$$

$$H_3^{-1}(\xi_0) = \frac{2ig_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)} + \frac{i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + g_{1,2}(\xi_0) + \frac{ig_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)}, \quad (5.68)$$

$$H_3^{-3}(\xi_0) = \frac{1}{3}g_{0,3}(\xi_0) + \frac{ig_{1,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} \quad (5.69)$$

e o coeficiente $G_{2,1}(\xi_0)$ definido como

$$G_{2,1}(\xi_0) = \frac{ig_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) + \omega_0(\nu)g_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{2i|g_{1,1}(\xi_0)|^2}{\omega_0(\nu)} - \frac{i|g_{0,2}(\xi_0)|^2}{3\omega_0(\nu)}. \quad (5.70)$$

Compare a notação de (5.70) com (4.6). Pode-se mostrar que para toda equação diferencial em \mathbb{R}^2 , na forma normal, o coeficiente $G_{2,1}(\xi_0)$ é calculado como em (5.70). Basta ver [15].

Definição 5.2.1. *O número real*

$$l_1(\xi_0) = \frac{1}{2}\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = \frac{1}{2\omega_0(\nu)}\text{Re}(ig_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) + \omega_0(\nu)g_{2,1}(\xi_0)) \quad (5.71)$$

é chamado primeiro coeficiente de Lyapunov.

Computando $[H_3]$, segue que

$$[H_3] = \mu_2(\nu)(\partial_\mu\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu\eta(\xi_0)) - i\omega_2(\nu) + G_{2,1}(\xi_0) = 0, \quad (5.72)$$

e separando as partes real e imaginária, resultam

$$\mu_2(\nu) = -\frac{\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu\gamma(\xi_0)}, \quad (5.73)$$

$$\omega_2(\nu) = \text{Im}(G_{2,1}(\xi_0)) + \mu_2(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0). \quad (5.74)$$

Uma vez determinados os coeficientes $\mu_2(\nu)$ e $\omega_2(\nu)$, a solução do problema de contorno (5.64) é da forma

$$w_3(s, \nu) = \frac{1}{4\omega_0(\nu)^2}(w_3^3(\xi_0)e^{3is} + w_3^{-1}(\xi_0)e^{-is} + w_3^{-3}(\xi_0)e^{-3is}), \quad (5.75)$$

com

$$w_3^3(\xi_0) = -6g_{2,0}(\xi_0)^2 - 2i\omega_0(\nu)g_{3,0}(\xi_0) - 2g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0), \quad (5.76)$$

$$w_3^{-1}(\xi_0) = -12g_{1,1}(\xi_0)^2 - 6\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) + 6i\omega_0(\nu)g_{1,2}(\xi_0) - 2g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) + 12g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0), \quad (5.77)$$

$$w_3^{-3}(\xi_0) = i\omega_0(\nu)g_{0,3}(\xi_0) - g_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) - 3g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0). \quad (5.78)$$

O problema de contorno,

$$w_4'(s, \nu) - iw_4(s, \nu) = H_4(s, \mu_3(\nu), \omega_3(\nu)), \quad (5.79)$$

$$w_4(s, \nu) = w_4(s + 2\pi, \nu),$$

com

$$H_4(s, \mu_3(\nu), \omega_3(\nu)) = \frac{4}{\omega_0(\nu)} \left(H_4^4(\xi_0)e^{4is} + H_4^2(\xi_0)e^{2is} + H_4^1(\xi_0)e^{is} + H_4^0(\xi_0) + H_4^{-2}(\xi_0)e^{-2is} + H_4^{-4}(\xi_0)e^{-4is} \right), \quad (5.80)$$

está associado ao coeficiente do termo em ϵ^4 . Os coeficientes $H_4^4(\xi_0)$, $H_4^2(\xi_0)$, $H_4^1(\xi_0)$, $H_4^0(\xi_0)$, $H_4^{-2}(\xi_0)$ e $H_4^{-4}(\xi_0)$ são dados por,

$$H_4^4(\xi_0) = -\frac{9g_{2,0}(\xi_0)^3}{4\omega_0(\nu)^2} - \frac{2ig_{3,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{7g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} - \frac{g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{12\omega_0(\nu)^2} + \frac{1}{4}g_{4,0}(\xi_0) - \frac{ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)} - \frac{g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2}, \quad (5.81)$$

$$H_4^2(\xi_0) = \frac{7\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{3g_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{3\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{5ig_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{3g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{3i\bar{g}_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + g_{3,1}(\xi_0) - \frac{ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)} - \frac{3ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{5g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \frac{3i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{3\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{3}{2}\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0), \quad (5.82)$$

$$H_4^1(\xi_0) = \mu_3(\nu)\partial_\mu\lambda(\xi_0) - i\omega_3(\nu), \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned}
H_4^0(\xi_0) = & -\frac{6g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{6\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{6ig_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{19g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} + \frac{3i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{3\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{6g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{3}{2}g_{2,2}(\xi_0) + \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{6ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{3g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{3ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{3ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + 3\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0),
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned}
H_4^{-2}(\xi_0) = & -\frac{3g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{9\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{3\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{9ig_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{11g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{11g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \frac{i\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + g_{1,3}(\xi_0) + \\
& \frac{ig_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)} + \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{3ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{3ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{3g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \frac{3g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{3i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{3\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{3}{2}\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0),
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}
H_4^{-4}(\xi_0) = & -\frac{g_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{12\omega_0(\nu)^2} - \frac{\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{g_{1,1}(\xi_0)^2g_{0,2}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{9\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{0,2}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \frac{ig_{1,2}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{5g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{i\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{1}{4}g_{0,4}(\xi_0) + \frac{ig_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{3ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)}.
\end{aligned} \tag{5.86}$$

De $[H_4]$, resulta que

$$[H_4] = \mu_3(\nu)(\partial_\mu\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu\eta(\xi_0)) - i\omega_3(\nu) = 0, \tag{5.87}$$

cujas partes real e imaginária, fornecem $\mu_3(\nu) = 0$ e $\omega_3(\nu) = 0$.

De posse dos coeficientes $\mu_3(\nu)$ e $\omega_3(\nu)$, a solução do problema de contorno (5.79) é

$$w_4(s, \nu) = \frac{1}{45\omega_0(\nu)^3} \left(w_4^4(\xi_0) e^{4is} + w_4^2(\xi_0) e^{2is} + w_4^0(\xi_0) + w_4^{-2}(\xi_0) e^{-2is} + w_4^{-4}(\xi_0) e^{-4is} \right), \quad (5.88)$$

sendo

$$\begin{aligned} w_4^4(\xi_0) = & 135ig_{2,0}(\xi_0)^3 - 120\omega_0(\nu)g_{3,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) + \\ & 105ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) + 5ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2 - \\ & 15i\omega_0(\nu)^2g_{4,0}(\xi_0) - 30\omega_0(\nu)g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0) - \\ & 15\omega_0(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0) + 15ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0), \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} w_4^2(\xi_0) = & -180ig_{3,1}(\xi_0)\omega_0(\nu)^2 - 270i\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)\omega_0(\nu)^2 + \\ & 450g_{1,1}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 180g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\omega_0(\nu) - \\ & 45g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 540g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\omega_0(\nu) - \\ & 270g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)\omega_0(\nu) + 270\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu \gamma(\xi_0)\omega_0(\nu) + \\ & 270i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)\omega_0(\nu) + 270ig_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2 + \\ & 540ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2 - 630ig_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0) - \\ & 45ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0) - 270ig_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \\ & 225ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + 90ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0), \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} w_4^0(\xi_0) = & 270ig_{2,2}(\xi_0)\omega_0(\nu)^2 + 540i\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)\omega_0(\nu)^2 - \\ & 1080g_{1,1}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 90g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\omega_0(\nu) + \\ & 90g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\omega_0(\nu) + 1080g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\omega_0(\nu) + \\ & 270g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 270g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)\omega_0(\nu) - \\ & 540\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \gamma(\xi_0)\omega_0(\nu) - 540i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)\omega_0(\nu) - \\ & 1080ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2 - 1080ig_{1,1}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0) + \\ & 570ig_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0) + 1080ig_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \\ & 270ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0), \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned}
w_4^{-2}(\xi_0) = & -180ig_{1,1}(\xi_0)^3 - 270i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2 - 90i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0) - \\
& 270\omega_0(\nu)g_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) - 165ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 330ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) - 30\omega_0(\nu)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 60i\omega_0(\nu)^2g_{1,3}(\xi_0) - 15\omega_0(\nu)g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) - \\
& 120\omega_0(\nu)g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0) + 20ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0) + \\
& 180\omega_0(\nu)g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) - 180\omega_0(\nu)g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) - \\
& 45ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) + 180ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) - \\
& 90\mu_2(\nu)\omega_0(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0) - 90i\mu_2(\nu)\omega_0(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0) + \\
& 90i\mu_2(\nu)\omega_0(\nu)^2\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0),
\end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
w_4^{-4}(\xi_0) = & 9ig_{0,4}(\xi_0)\omega_0(\nu)^2 - 9g_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 18g_{0,2}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)\omega_0(\nu) - \\
& 54g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)\omega_0(\nu) - 18g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)\omega_0 - 9ig_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2 - \\
& 81ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2 - 3ig_{0,2}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0) - 18ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0) - \\
& 45ig_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0).
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Para o coeficiente do termo em ϵ^5 , tem-se o problema de contorno,

$$\begin{aligned}
w_5'(s, \nu) - iw_5(s, \nu) &= H_5(s, \mu_4(\nu), \omega_4(\nu)), \\
w_5(s, \nu) &= w_5(s + 2\pi, \nu).
\end{aligned} \tag{5.94}$$

Neste caso, a função $(s, \mu_4(\nu), \omega_4(\nu)) \mapsto H_5(s, \mu_4(\nu), \omega_4(\nu))$ é da forma

$$\begin{aligned}
H_5(s, \mu_4(\nu), \omega_4(\nu)) &= \frac{5}{\omega_0(\nu)} \left(H_5^5(\xi_0)e^{5is} + H_5^3(\xi_0)e^{3is} + H_5^1(\xi_0)e^{is} + \right. \\
& \left. H_5^{-1}(\xi_0)e^{-is} + H_5^{-3}(\xi_0)e^{-3is} + H_5^{-5}(\xi_0)e^{-5is} \right),
\end{aligned} \tag{5.95}$$

sendo

$$\begin{aligned}
H_5^5(\xi_0) &= \frac{6ig_{2,0}(\xi_0)^4}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{29g_{3,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{229ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2}{30\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{11ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0)}{18\omega_0(\nu)^3} - \frac{7ig_{4,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{25g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} - \frac{61g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{30\omega_0(\nu)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{11ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} - \frac{ig_{3,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{11ig_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{15\omega_0(\nu)^3} - \frac{g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{1}{5}g_{5,0}(\xi_0) - \frac{26g_{1,1}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{15\omega_0(\nu)^2} - \frac{2ig_{3,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} - \frac{g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,4}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} - \frac{g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} - \frac{2g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{15\omega_0(\nu)^3}, \tag{5.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5^3(\xi_0) = & \frac{12ig_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{11ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{13ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{12\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)^2\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{12i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)^2\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{24ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{55g_{1,1}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{10ig_{3,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{67ig_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^3} - \frac{9g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{11g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} - \frac{27g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{10ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{13g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{4ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{12i\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{4ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{44ig_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{15\omega_0(\nu)^3} - \frac{6g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{16ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^3} + \frac{ig_{2,1}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{11ig_{1,1}(\xi_0)g_{4,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + g_{4,1}(\xi_0) + \frac{35g_{1,1}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} -
\end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2ig_{2,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{3g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{14g_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,4}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)} + \frac{10g_{1,1}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{4ig_{3,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{12ig_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{5g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{6g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{3ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{7g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{4ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,3}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^3} - \frac{g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{7ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{4g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{2i\mu_2(\nu)g_{3,0}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{8\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{2\mu_2(\nu)g_{3,0}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{4i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{2i\mu_2(\nu)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& 2\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{3,0}(\xi_0) - \frac{2i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5^1(\xi_0) = & \frac{24i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{12ig_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{24i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{8g_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{12ig_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{24\bar{g}_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{12g_{2,0}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{8ig_{3,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{18g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{17ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} + \frac{31g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{12g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{175ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{24i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{2g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{24\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6i\bar{g}_{2,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{12\mu_2(\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{12i\mu_2(\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{6i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{12i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{16ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{4ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{9\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{24g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{12ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& i\omega_4(\nu) + \frac{2ig_{1,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{2g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \\
& 2g_{3,2}(\xi_0) + \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)g_{4,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \frac{2ig_{1,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \frac{2g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{6g_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{12ig_{2,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{16g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{9g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{2g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{12g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{4ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,3}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{2ig_{3,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} + \frac{23ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} -
\end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \mu_4(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + \\
& \frac{2\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + i\mu_4(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) + \\
& \frac{2i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{2i\mu_2(\nu)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{6i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{12i\mu_2(\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& 6\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{2,1}(\xi_0) - \frac{2i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + 3i\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\eta(\xi_0), \\
H_5^{-1}(\xi_0) = & -\frac{46ig_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{36i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{54g_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{215ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{6\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{27ig_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{18i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{12\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{24\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)^2\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{24i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)^2\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{37ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{60ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{ig_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{6i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{15g_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{18ig_{2,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{13g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{43g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} + \frac{54g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{100ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^3} + \frac{27g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{39g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{13ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{12\bar{g}_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{10\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{4i\bar{g}_{3,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{24\mu_2(\nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{12i\mu_2(\nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{24i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{6i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2}{6\omega_0(\nu)^2} - \frac{18g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{3g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{2ig_{1,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{9ig_{1,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{11g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \\
& 2g_{2,3}(\xi_0) + \frac{ig_{0,3}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)g_{3,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{2ig_{0,4}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \frac{23g_{0,2}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{7ig_{0,2}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{9\omega_0(\nu)^3} + \frac{2g_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{12ig_{1,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{21g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{43ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{3ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{18ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{2g_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{6ig_{2,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{3g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{12g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{3g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{24g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{5g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{6i\mu_2(\nu)g_{1,2}(\xi_0)\partial_\mu \gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{4\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu \gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{6\mu_2(\nu)g_{1,2}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{4i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{24i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{2i\mu_2(\nu)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{12i\mu_2(\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} +
\end{aligned} \tag{5.99}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{6i\mu_2(\nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + 6\mu_2(\nu)\partial_\mu g_{1,2}(\xi_0) + \\
& \frac{2i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{12i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu \bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)}, \\
H_5^{-3}\xi_0 = & -\frac{4ig_{1,1}(\xi_0)^4}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{12i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{11i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{12g_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{251ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{30\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{3ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{8\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{3i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^3g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{16ig_{1,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{91g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{30\omega_0(\nu)^2} - \frac{55g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{25ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^3} + \frac{23g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{22g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{47ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{77ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^3} - \frac{38g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{8\bar{g}_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{i\bar{g}_{4,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{4\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{4i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{2i\mu_2(\nu)g_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{3ig_{1,2}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)} - \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{16ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{9g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{9ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^3} + \frac{12ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \\
& g_{1,4}(\xi_0) + \frac{ig_{0,4}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)} - \frac{12g_{0,2}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{5ig_{0,3}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \frac{g_{0,2}(\xi_0)^2g_{3,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \frac{4ig_{0,4}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{2g_{0,2}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)^2g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^3}
\end{aligned} \tag{5.100}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4g_{0,2}(\xi_0)^2 \bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{6ig_{1,3}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{6g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} - \frac{43g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{5ig_{0,2}(\xi_0)^2 \bar{g}_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} + \frac{12g_{0,3}(\xi_0) \bar{g}_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{12g_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0) \bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{2ig_{1,2}(\xi_0) \bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{2g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0) \bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^2} + \frac{12g_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{4ig_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{3,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{2i\mu_2(\nu)g_{0,3}(\xi_0) \partial_\mu \gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{24\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0) \partial_\mu \gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{2\mu_2(\nu)g_{0,3}(\xi_0) \partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{12i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0) \partial_\mu \eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{6i\mu_2(\nu) \bar{g}_{2,0}(\xi_0) \partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& 2\mu_2(\nu) \partial_\mu g_{0,3}(\xi_0) + \frac{2i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0) \partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{6i\mu_2(\nu)g_{0,2}(\xi_0) \partial_\mu \bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_5^{-5}(\xi_0) = & -\frac{i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^3}{9\omega_0(\nu)^3} - \frac{7ig_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{30\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{g_{2,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{16ig_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{15\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{ig_{2,0}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{2\omega_0(\nu)^3} - \frac{10i\bar{g}_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{2\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)^2}{3\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{1,1}(\xi_0)^3 g_{0,2}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{6i\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^3 g_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{43ig_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2 g_{0,2}(\xi_0)}{10\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{9g_{1,1}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{10\omega_0(\nu)^2} + \frac{2ig_{1,3}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{6\omega_0(\nu)^2} - \frac{4g_{0,3}(\xi_0) \bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{3ig_{1,1}(\xi_0)^2 \bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^3} - \frac{7g_{1,2}(\xi_0) \bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{11g_{1,1}(\xi_0) \bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{15\omega_0(\nu)^2} - \frac{11\bar{g}_{2,0}(\xi_0) \bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{i\bar{g}_{4,0}(\xi_0)g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{5\omega_0(\nu)^2} -
\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} & \frac{6g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{1}{5}g_{0,5}(\xi_0) + \frac{ig_{0,4}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{5\omega_0(\nu)} + \\ & \frac{ig_{0,3}(\xi_0)g_{1,2}(\xi_0)}{2\omega_0(\nu)} + \frac{2ig_{0,4}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\ & \frac{17g_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{10\omega_0(\nu)^2} + \frac{ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)}. \end{aligned}$$

Do coeficiente H_5^1 , segue que

$$\begin{aligned} [H_5] &= \mu_4(\nu)(\partial_\mu\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu\eta(\xi_0)) - i\omega_4(\nu) + 2G_{3,2}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0) + \\ & 3\mu_2(\nu)^2(\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu^2\eta(\xi_0)) = 0, \end{aligned} \quad (5.102)$$

com

$$\begin{aligned} \partial_\mu G_{2,1}(\xi_0) &= \frac{3g_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{9\omega_0(\nu)^2} + \\ & \frac{2g_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\gamma(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{1,1}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\ & \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + \frac{2ig_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\eta(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\ & \frac{i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{2,0}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\ & \frac{2i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \partial_\mu g_{2,1}(\xi_0) - \\ & \frac{ig_{0,2}(\xi_0)\partial_\mu\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \frac{2ig_{1,1}(\xi_0)\partial_\mu\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} \end{aligned} \quad (5.103)$$

e

$$\begin{aligned} G_{3,2}(\xi_0) &= \frac{12i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{12i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} - \\ & \frac{4g_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{12ig_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \\ & \frac{12\bar{g}_{1,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{3i\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \\ & \frac{4ig_{3,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{9g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \\ & \frac{17ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^3} + \frac{31g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{12\omega_0(\nu)^2} + \end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{12g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{175ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{12\omega_0(\nu)^3} + \\
& \frac{6i\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} - \frac{g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6ig_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{3g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{3i\bar{g}_{2,2}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{3,0}(\xi_0)g_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} + \frac{8ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^3}{\omega_0(\nu)^3} - \\
& \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)^2\bar{g}_{0,2}(\xi_0)^2}{9\omega_0(\nu)^3} - \frac{12g_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)^2}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{ig_{1,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} + g_{3,2}(\xi_0) + \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{4,0}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{ig_{1,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{g_{0,3}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)g_{2,1}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{ig_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)^2\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^3} + \frac{3g_{1,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{6ig_{2,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \frac{8g_{0,2}(\xi_0)g_{3,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{9g_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^2} - \frac{3ig_{1,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} + \\
& \frac{g_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \frac{6g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{1,2}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)^2} - \\
& \frac{2ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,3}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)} + \frac{ig_{3,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{\omega_0(\nu)} - \\
& \frac{ig_{0,2}(\xi_0)g_{2,0}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{4\omega_0(\nu)^3} + \frac{g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,3}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{12\omega_0(\nu)^2} + \\
& \frac{23ig_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{1,1}(\xi_0)\bar{g}_{2,0}(\xi_0)}{12\omega_0(\nu)^3} - \frac{2g_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{0,2}(\xi_0)\bar{g}_{2,1}(\xi_0)}{3\omega_0(\nu)^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_4(\nu) = - \frac{2\text{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 6\mu_2(\nu)\text{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0)}{\partial_\mu\gamma(\xi_0)}, \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned}
\omega_4(\nu) &= 2\text{Im}(G_{3,2}(\xi_0)) + \mu_4(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\text{Im}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + \\
& 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\eta(\xi_0). \quad (5.106)
\end{aligned}$$

Escrevendo o coeficiente $G_{3,2}(\xi_0)$ de maneira conveniente, a expressão (5.104) é exatamente aquela exibida em [15].

Definição 5.2.2. *O número real*

$$l_2(\xi_0) = \frac{1}{12} \operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)), \quad (5.107)$$

com $G_{3,2}(\xi_0)$ dado em (5.104), é chamado segundo coeficiente de Lyapunov.

A função $(s, \nu) \mapsto w_5(s, \nu)$ não será exibida aqui, por ser uma expressão longa e porque não será necessária neste trabalho. Em muitos resultados obtidos nesta seção e, particularmente em (5.103), aparecem as expressões $\partial_\mu \gamma(\xi_0)$, $\partial_\mu \eta(\xi_0)$, $\partial_\mu^2 \gamma(\xi_0)$, $\partial_\mu^2 \eta(\xi_0)$, $\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)$, $\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)$, $\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)$ e $\partial_\mu g_{2,1}(\xi_0)$. Estas grandezas são calculadas de acordo com as **Proposições 5.2.3** e **5.2.4**.

Proposição 5.2.3. *Considere a equação diferencial (5.12) com um ponto de equilíbrio $\mathbf{0} \in W$, tal que a parte linear da aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f(\mathbf{x}, \xi)$, calculada em $(\mathbf{0}, \xi_0)$, $A(\xi_0) = Df(\mathbf{0}, \xi_0)$, possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(\xi_0) = \gamma(\xi_0) + i\eta(\xi_0)$, $\gamma(\xi_0) = 0$ e $\eta(\xi_0) = \omega_0(\nu) > 0$. Sejam ainda o autovetor $q(\xi) \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $\lambda(\xi)$ e o autovetor adjunto $p(\xi) \in \mathbb{C}^2$ associado ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi)$, satisfazendo*

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi), \quad (5.108)$$

$$A(\xi)^T p(\xi) = \bar{\lambda}(\xi)p(\xi), \quad (5.109)$$

$$\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = 1. \quad (5.110)$$

Então,

a) O vetor $\partial_\mu q(\xi_0) \in \mathbb{C}^2$ é solução do sistema de dimensão 3

$$\begin{pmatrix} i\omega_0(\nu)I_2 - A(\xi_0) & q(\xi_0) \\ \bar{p}(\xi_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu q(\xi_0) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2(\xi_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.111)$$

com a condição $\langle p(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0) \rangle = 0$, sendo

$$R_2(\xi_0) = (\partial_\mu A(\xi_0) - \partial_\mu \lambda(\xi_0)I_2)q(\xi_0). \quad (5.112)$$

b) O vetor $\partial_\mu p(\xi_0) \in \mathbb{C}^2$ é solução do sistema de dimensão 3

$$\begin{pmatrix} -(i\omega_0(\nu)I_2 + A^T(\xi_0)) & p(\xi_0) \\ \bar{q}(\xi_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu p(\xi_0) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_2(\xi_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.113)$$

com a condição $\langle q(\xi_0), \partial_\mu p(\xi_0) \rangle = 0$, sendo

$$\bar{R}_2(\xi_0) = (\partial_\mu A^T(\xi_0) - \partial_\mu \bar{\lambda}(\xi_0)I_2)p(\xi_0). \quad (5.114)$$

c) A derivada parcial em relação a μ e calculada em ξ_0 da parte real do autovalor $\lambda(\xi)$ é dada por

$$\partial_\mu \gamma(\xi_0) = \operatorname{Re} (\langle p(\xi_0), \partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) \rangle). \quad (5.115)$$

d) A derivada parcial em relação a μ e calculada em ξ_0 da parte imaginária do autovalor $\lambda(\xi)$ é dada por

$$\partial_\mu \eta(\xi_0) = \operatorname{Im} (\langle p(\xi_0), \partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) \rangle). \quad (5.116)$$

e) A derivada parcial segunda em relação a μ e calculada em ξ_0 da parte real do autovalor $\lambda(\xi)$ é dada por

$$\partial_\mu^2 \gamma(\xi_0) = \operatorname{Re} (\langle p(\xi_0), \partial_\mu^2 A(\xi_0)q(\xi_0) + 2(\partial_\mu A(\xi_0) - \partial_\mu \lambda(\xi_0)I_2)\partial_\mu q(\xi_0) \rangle). \quad (5.117)$$

f) A derivada parcial segunda em relação a μ e calculada em ξ_0 da parte imaginária do autovalor $\lambda(\xi)$ é dada por

$$\partial_\mu^2 \eta(\xi_0) = \operatorname{Im} (\langle p(\xi_0), \partial_\mu^2 A(\xi_0)q(\xi_0) + 2(\partial_\mu A(\xi_0) - \partial_\mu \lambda(\xi_0)I_2)\partial_\mu q(\xi_0) \rangle). \quad (5.118)$$

Demonstração. Diferenciando (5.108) em relação ao parâmetro μ e calculando em $\xi = \xi_0$ segue que

$$\partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) + A(\xi_0)\partial_\mu q(\xi_0) = \partial_\mu \lambda(\xi_0)q(\xi_0) + \lambda(\xi_0)\partial_\mu q(\xi_0) \quad (5.119)$$

e empregando as hipóteses, a equação anterior é reescrita como

$$(i\omega_0(\nu)I_2 - A(\xi_0))\partial_\mu q(\xi_0) = (\partial_\mu A(\xi_0) - \partial_\mu \lambda(\xi_0))q(\xi_0). \quad (5.120)$$

Tomando o produto interno de $p(\xi_0) \in \mathbb{C}^n$ em ambos os membros da equação anterior e utilizando (5.110), resulta que

$$0 = \langle p(\xi_0), (i\omega_0(\nu)I_2 - A(\xi_0))\partial_\mu q(\xi_0) \rangle = \langle p(\xi_0), \partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) \rangle - \partial_\mu \lambda(\xi_0). \quad (5.121)$$

Os itens (a), (c) e (d) seguem da equação anterior, da alternativa Fredholm (ver [15]) e dos resultados de [30]. A demonstração do item (b) é igual a anterior, ou seja, basta diferenciar (5.109) em relação ao parâmetro μ e calcular em $\xi = \xi_0$. A demonstração dos itens (e) e (f) consiste em computar a derivada segunda de (5.108) em relação ao parâmetro μ , calculada em $\xi = \xi_0$ e empregar a alternativa Fredholm.

■

Proposição 5.2.4. *Sejam os coeficientes da série de Taylor formal da aplicação $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi)$,*

$$\begin{aligned} g_{2,0}(\xi) &= \langle p(\xi), B(q(\xi), q(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{1,1}(\xi) &= \langle p(\xi), B(q(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{0,2}(\xi) &= \langle p(\xi), B(\bar{q}(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \\ g_{2,1}(\xi) &= \langle p(\xi), C(q(\xi), q(\xi), \bar{q}(\xi), \xi) \rangle. \end{aligned} \tag{5.122}$$

Então,

a) *A derivada parcial em relação a μ do coeficiente $g_{2,0}(\xi)$, calculada em $\xi = \xi_0$, é dada por*

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{2,0}(\xi_0) &= \langle \partial_\mu p(\xi_0), B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) \rangle + \\ &\quad \langle p(\xi_0), 2B(q(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \partial_\mu B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) \rangle. \end{aligned} \tag{5.123}$$

b) *A derivada parcial em relação a μ do coeficiente $g_{1,1}(\xi)$, calculada em $\xi = \xi_0$, é dada por*

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{1,1}(\xi_0) &= \langle \partial_\mu p(\xi_0), B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle + \\ &\quad \langle p(\xi_0), B(\partial_\mu q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + B(q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\ &\quad \partial_\mu B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle. \end{aligned} \tag{5.124}$$

b) *A derivada parcial em relação a μ do coeficiente $g_{0,2}(\xi)$, calculada em $\xi = \xi_0$, é dada por*

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{0,2}(\xi_0) &= \langle \partial_\mu p(\xi_0), B(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle + \\ &\quad \langle p(\xi_0), 2B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle. \end{aligned} \tag{5.125}$$

d) *A derivada parcial em relação a μ do coeficiente $g_{2,1}(\xi)$, calculada em $\xi = \xi_0$, é dada por*

$$\begin{aligned} \partial_\mu g_{2,1}(\xi_0) &= \langle \partial_\mu p(\xi_0), C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle + \\ &\quad \langle p(\xi_0), 2C(q(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\ &\quad C(q(\xi_0), q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\ &\quad \partial_\mu C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Demonstração. Observando como as funções multilineares simétricas são definidas, a demonstração dos itens (a) a (d) consiste em diferenciar cada uma das expressões em (5.122) em relação ao parâmetro μ e calcular em $\xi = \xi_0$.

■

Mediante simples comparação, fica clara a relação entre os resultados desta seção com aqueles da seção 4.1. Os coeficientes $\mu_i(\nu)$ e $\omega_i(\nu)$, $i = 1, \dots, 4$, na notação utilizada, coincidem com os coeficientes da seção 3.2, obtidos para a forma normal de Poincaré–Hopf. Contudo, os resultados desta seção são mais gerais, pois permitem computar os coeficientes $\mu_i(\nu)$ e $\omega_i(\nu)$, $i = 1, \dots, 4$, para equações diferenciais arbitrárias em \mathbb{R}^2 , em termos da expansão em série de Taylor da aplicação associada à equação diferencial e de certos autovalores e autovetores.

A teoria, exibida até este ponto, aproxima órbitas periódicas da equação diferencial complexa (5.25). Nas hipóteses da bifurcação de Hopf, se $(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) \mapsto w(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)$ é uma órbita periódica de (5.25), então $(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) \mapsto u(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)$ é a órbita periódica associada com a equação diferencial (5.12), com

$$u(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) = w(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)q(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + \bar{w}(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)\bar{q}(\phi(\epsilon, \nu), \nu) \quad (5.127)$$

ou, em uma forma mais simples,

$$u(s, \epsilon, \nu) = w(s, \epsilon, \nu)q(\phi(\epsilon, \nu), \nu) + \bar{w}(s, \epsilon, \nu)\bar{q}(\phi(\epsilon, \nu), \nu). \quad (5.128)$$

A órbita periódica $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u(s, \epsilon, \nu)$ possui série de Taylor formal na variável ϵ e em torno da origem, da forma

$$u(s, \epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} u_k(s, \nu) \epsilon^k \quad (5.129)$$

e a teoria desenvolvida anteriormente e a expansão em série de Taylor na variável ϵ e em torno da origem de (5.128), permitem concluir que

$$u_1(s, \nu) = q(\xi_0)w_1(s, \nu) + \bar{q}(\xi_0)\bar{w}_1(s, \nu), \quad (5.130)$$

$$u_2(s, \nu) = q(\xi_0)w_2(s, \nu) + \bar{q}(\xi_0)\bar{w}_2(s, \nu), \quad (5.131)$$

$$u_3(s, \nu) = q(\xi_0)w_3(s, \nu) + \bar{q}(\xi_0)\bar{w}_3(s, \nu) + \quad (5.132)$$

$$3\mu_2(\nu)(w_1(s, \nu)\partial_\mu q(\xi_0) + \bar{w}_1(s, \nu)\partial_\mu \bar{q}(\xi_0)),$$

$$\begin{aligned}
u_4(s, \nu) &= q(\xi_0)w_4(s, \nu) + \bar{q}(\xi_0)\bar{w}_4(s, \nu) + \\
&6\mu_2(\nu)(w_2(s, \nu)\partial_\mu q(\xi_0) + \bar{w}_2(s, \nu)\partial_\mu \bar{q}(\xi_0)).
\end{aligned} \tag{5.133}$$

De acordo com a teoria de Floquet (ver [8]), a estabilidade de uma órbita periódica pode ser decidida através do expoente característico que, neste contexto e para equações diferenciais em \mathbb{R}^2 é uma função $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ tal que

$$\chi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{T(\epsilon, \nu)} \int_0^{T(\epsilon, \nu)} \text{Tr}(\mathcal{M}(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)) dt, \tag{5.134}$$

com $\mathcal{M}(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) := Df(u(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu)$. A próxima proposição fornece uma maneira mais simples de computar (5.134), em termos da aplicação $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi)$.

Proposição 5.2.5. *Através da mudança no tempo $s = \omega(\epsilon, \nu)t$, o expoente característico associado à equação diferencial $z' = g(z, \bar{z}, \xi)$ é da forma*

$$\chi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}(s, \epsilon, \nu) ds, \tag{5.135}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(s, \epsilon, \nu) &= \frac{\partial}{\partial w} g(w(s, \epsilon, \nu), \bar{w}(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu) + \\
&\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{g}(w(s, \epsilon, \nu), \bar{w}(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu).
\end{aligned} \tag{5.136}$$

Demonstração. Pela **Proposição 5.2.1**, a equação diferencial (5.12) pode ser escrita como $z' = g(z, \bar{z}, \xi)$, com $(z, \bar{z}, \xi) \mapsto g(z, \bar{z}, \xi) = g_1(z_1, z_2, \xi) + ig_2(z_1, z_2, \xi)$,

$$g_1(w_1, w_2, \xi) = \frac{1}{2} (g(w, \bar{w}, \xi) + \bar{g}(w, \bar{w}, \xi)), \tag{5.137}$$

$$g_2(w_1, w_2, \xi) = -\frac{i}{2} (g(w, \bar{w}, \xi) - \bar{g}(w, \bar{w}, \xi)), \tag{5.138}$$

e $z = z_1 + iz_2$. Logo, através das mudanças $z(t) = w(s, \epsilon, \nu)$ e $s = \omega(\epsilon, \nu)t$, o expoente característico (5.134) pode ser reescrito como

$$\chi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} g_1(w_1, w_2, \xi) + \frac{\partial}{\partial w_2} g_2(w_1, w_2, \xi) \right) ds, \tag{5.139}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_1} g_1(w_1, w_2, \xi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} g(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial w}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} g(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial w_1} \right) + \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial w}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial w_1} \right)
\end{aligned} \tag{5.140}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_2} g_2(w_1, w_2, \xi) &= -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} g(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial w}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} g(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial w_2} \right) + \\ &\quad \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial w}{\partial w_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi) \frac{\partial \bar{w}}{\partial w_2} \right). \end{aligned} \quad (5.141)$$

Adicionando as equações (5.140) e (5.141) e levando em conta que $w = w_1 + iw_2$, resulta que

$$\frac{\partial}{\partial w_1} g_1(w_1, w_2, \xi) + \frac{\partial}{\partial w_2} g_2(w_1, w_2, \xi) = \frac{\partial}{\partial w} g(w, \bar{w}, \xi) + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi). \quad (5.142)$$

Portanto, $\mathcal{H}(s, \epsilon, \nu) = K(w, \bar{w}, \xi)$, com

$$K(w, \bar{w}, \xi) := \frac{\partial}{\partial w} g(w, \bar{w}, \xi) + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{g}(w, \bar{w}, \xi). \quad (5.143)$$

■

Escrevendo a série de Taylor formal na variável ϵ da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$,

$$\chi(\epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi_k(\nu) \epsilon^k, \quad (5.144)$$

a teoria de aproximação de órbitas periódicas, desenvolvida nesta seção, e o lema anterior permitem obter os termos da seqüência $\{\chi_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Para $k = 1, \dots, 4$, o próximo teorema fornece estes termos.

Teorema 5.2.2. *Seja*

$$\chi(\epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi_k(\nu) \epsilon^k, \quad (5.145)$$

a série de Taylor formal do expoente característico $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ associado à equação diferencial $z' = g(z, \bar{z}, \xi)$. Então,

$$\begin{aligned} \chi_1(\nu) &= 0, \\ \chi_2(\nu) &= 2\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_3(\nu) &= 0, \\ \chi_4(\nu) &= 8\text{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 12\mu_2(\nu)\text{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_5(\nu) &= 0, \end{aligned} \quad (5.146)$$

com $G_{2,1}(\xi_0)$, $\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)$ e $G_{3,2}(\xi_0)$ dados em (5.70), (5.103) e (5.104), respectivamente.

Demonstração. De (5.29) e (5.30),

$$\frac{\partial}{\partial w}g(w, \bar{w}, \xi) = \lambda(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{k-j}{(k-j)!j!} g_{k-j,j}(\xi) w^{k-j-1} \bar{w}^j, \quad (5.147)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\bar{g}(w, \bar{w}, \xi) = \bar{\lambda}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{k-j}{(k-j)!j!} \bar{g}_{k-j,j}(\xi) \bar{w}^{k-j-1} w^j. \quad (5.148)$$

Logo, formalmente, a aplicação $(w, \bar{w}, \xi) \mapsto K(w, \bar{w}, \xi)$ possui série de Taylor

$$K(w, \bar{w}, \xi) = \lambda(\xi) + \bar{\lambda}(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{k-j}{(k-j)!j!} (g_{k-j,j}(\xi) + \bar{g}_{k-j,j}(\xi)) w^{k-j-1} \bar{w}^j. \quad (5.149)$$

Fazendo a expansão em série de Taylor da aplicação

$$(s, \epsilon, \nu) \mapsto \mathcal{H}(s, \epsilon, \nu) = K(w(s, \epsilon, \nu), \bar{w}(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu), \quad (5.150)$$

em torno de $\epsilon = 0$ e até as termos de ordem 4 e levando em conta que $\mu_1(\nu) = \mu_3(\nu) = 0$, resulta que

$$\mathcal{H}(s, \epsilon, \nu) = \mathcal{H}_1(s, \nu)\epsilon + \frac{1}{2}\mathcal{H}_2(s, \nu)\epsilon^2 + \frac{1}{6}\mathcal{H}_3(s, \nu)\epsilon^3 + \frac{1}{24}\mathcal{H}_4(s, \nu)\epsilon^4 + O_{\mathcal{H}}(s, \epsilon^5, |\nu|), \quad (5.151)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(s, \nu) &= \bar{w}_1(s, \nu)g_{1,1}(\xi_0) + w_1(s, \nu)g_{2,0}(\xi_0) + w_1(s, \nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \\ &\quad \bar{w}_1(s, \nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0), \end{aligned} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(s, \nu) &= w_1(s, \nu)^2g_{3,0}(\xi_0) + w_1(s, \nu)^2\bar{g}_{1,2}(\xi_0) + 2w_1(s, \nu)\bar{w}_1(s, \nu)g_{2,1}(\xi_0) + \\ &\quad 2w_1(s, \nu)\bar{w}_1(s, \nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + \bar{w}_2(s, \nu)g_{1,1}(\xi_0) + \bar{w}_1(s, \nu)^2g_{1,2}(\xi_0) + \\ &\quad w_2(s, \nu)g_{2,0}(\xi_0) + w_2(s, \nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \bar{w}_2(s, \nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) + \\ &\quad \bar{w}_1(s, \nu)^2\bar{g}_{3,0}(\xi_0) + 2\mu_2(\nu)\partial_{\mu}\gamma(\xi_0), \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3(s, \nu) &= w_1(s, \nu)^3g_{4,0}(\xi_0) + w_1(s, \nu)^3\bar{g}_{1,3}(\xi_0) + 3w_1(s, \nu)^2\bar{w}_1(s, \nu)g_{3,1}(\xi_0) + \\ &\quad 3w_1(s, \nu)^2\bar{w}_1(s, \nu)\bar{g}_{2,2}(\xi_0) + 3w_1(s, \nu)\bar{w}_2(s, \nu)g_{2,1}(\xi_0) + \\ &\quad 3w_1(s, \nu)\bar{w}_1(s, \nu)^2g_{2,2}(\xi_0) + 3w_1(s, \nu)w_2(s, \nu)g_{3,0}(\xi_0) + \\ &\quad 3w_1(s, \nu)w_2(s, \nu)\bar{g}_{1,2}(\xi_0) + 3w_1(s, \nu)\bar{w}_2(s, \nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + \\ &\quad 3w_1(s, \nu)\bar{w}_1(s, \nu)^2\bar{g}_{3,1}(\xi_0) + 3\mu_2(\nu)w_1(s, \nu)\partial_{\mu}g_{2,0}(\xi_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3\mu_2(\nu)\partial_\mu\bar{g}_{1,1}(\xi_0)w_1(s,\nu) + \bar{w}_3(s,\nu)g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 3\bar{w}_1(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)g_{1,2}(\xi_0) + \bar{w}_1(s,\nu)^3g_{1,3}(\xi_0) + w_3(s,\nu)g_{2,0}(\xi_0) + \\
& 3w_2(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)g_{2,1}(\xi_0) + w_3(s,\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \bar{w}_3(s,\nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) + \\
& 3w_2(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + 3\bar{w}_1(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)\bar{g}_{3,0}(\xi_0) + \\
& \bar{w}_1(s,\nu)^3\bar{g}_{4,0}(\xi_0) + 3\mu_2(\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 3\mu_2(\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\partial_\mu\bar{g}_{2,0}(\xi_0),
\end{aligned} \tag{5.154}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_4(s,\nu) = & w_1(s,\nu)^4g_{5,0}(\xi_0) + w_1(s,\nu)^4\bar{g}_{1,4}(\xi_0) + 4w_1(s,\nu)^3\bar{w}_1(s,\nu)g_{4,1}(\xi_0) + \\
& 4w_1(s,\nu)^3\bar{w}_1(s,\nu)\bar{g}_{2,3}(\xi_0) + 6w_1(s,\nu)^2\bar{w}_2(s,\nu)g_{3,1}(\xi_0) + \\
& 6w_1(s,\nu)^2\bar{w}_1(s,\nu)^2g_{3,2}(\xi_0) + 6w_1(s,\nu)^2w_2(s,\nu)g_{4,0}(\xi_0) + \\
& 6w_1(s,\nu)^2w_2(s,\nu)\bar{g}_{1,3}(\xi_0) + 6w_1(s,\nu)^2\bar{w}_2(s,\nu)\bar{g}_{2,2}(\xi_0) + \\
& 6w_1(s,\nu)^2\bar{w}_1(s,\nu)^2\bar{g}_{3,2}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)w_1(s,\nu)^2\partial_\mu g_{3,0}(\xi_0) + \\
& 6\mu_2(\nu)w_1(s,\nu)^2\partial_\mu\bar{g}_{1,2}(\xi_0) + 4w_1(s,\nu)\bar{w}_3(s,\nu)g_{2,1}(\xi_0) + \\
& 12w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)g_{2,2}(\xi_0) + 4w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)^3g_{2,3}(\xi_0) + \\
& 4w_1(s,\nu)w_3(s,\nu)g_{3,0}(\xi_0) + 12w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)w_2(s,\nu)g_{3,1}(\xi_0) + \\
& 4w_1(s,\nu)w_3(s,\nu)\bar{g}_{1,2}(\xi_0) + 4w_1(s,\nu)\bar{w}_3(s,\nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + \\
& 12w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)w_2(s,\nu)\bar{g}_{2,2}(\xi_0) + \\
& 12w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)\bar{g}_{3,1}(\xi_0) + 4w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)^3\bar{g}_{4,1}(\xi_0) + \\
& 12\mu_2(\nu)w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\partial_\mu g_{2,1}(\xi_0) + \\
& 12\mu_2(\nu)w_1(s,\nu)\bar{w}_1(s,\nu)\partial_\mu\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + \bar{w}_4(s,\nu)g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 3\bar{w}_2(s,\nu)^2g_{1,2}(\xi_0) + 4\bar{w}_1(s,\nu)\bar{w}_3(s,\nu)g_{1,2}(\xi_0) + \\
& 6\bar{w}_1(s,\nu)^2\bar{w}_2(s,\nu)g_{1,3}(\xi_0) + \bar{w}_1(s,\nu)^4g_{1,4}(\xi_0) + w_4(s,\nu)g_{2,0}(\xi_0) + \\
& 4\bar{w}_1(s,\nu)w_3(s,\nu)g_{2,1}(\xi_0) + 6w_2(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)g_{2,1}(\xi_0) + \\
& 6\bar{w}_1(s,\nu)^2w_2(s,\nu)g_{2,2}(\xi_0) + 3w_2(s,\nu)^2g_{3,0}(\xi_0) + w_4(s,\nu)\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + \\
& 3w_2(s,\nu)^2\bar{g}_{1,2}(\xi_0) + \bar{w}_4(s,\nu)\bar{g}_{2,0}(\xi_0) + 4\bar{w}_1(s,\nu)w_3(s,\nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + \\
& 6w_2(s,\nu)\bar{w}_2(s,\nu)\bar{g}_{2,1}(\xi_0) + 3\bar{w}_2(s,\nu)^2\bar{g}_{3,0}(\xi_0) +
\end{aligned} \tag{5.155}$$

$$\begin{aligned}
& 4\bar{w}_1(s, \nu)\bar{w}_3(s, \nu)\bar{g}_{3,0}(\xi_0) + 6\bar{w}_1(s, \nu)^2w_2(s, \nu)\bar{g}_{3,1}(\xi_0) + \\
& 6\bar{w}_1(s, \nu)^2\bar{w}_2(s, \nu)\bar{g}_{4,0}(\xi_0) + \bar{w}_1(s, \nu)^4\bar{g}_{5,0}(\xi_0) + \\
& 2\mu_4(\nu)\partial_\mu\gamma(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\bar{w}_2(s, \nu)\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0) + \\
& 6\mu_2(\nu)\bar{w}_1(s, \nu)^2\partial_\mu g_{1,2}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)w_2(s, \nu)\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0) + \\
& 6\mu_2(\nu)w_2(s, \nu)\partial_\mu\bar{g}_{1,1}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\bar{w}_2(s, \nu)\partial_\mu\bar{g}_{2,0}(\xi_0) + \\
& 6\mu_2(\nu)\bar{w}_1(s, \nu)^2\partial_\mu\bar{g}_{3,0}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0),
\end{aligned}$$

sendo que para $k = 1, 2, 3, 4$, $(s, \nu) \mapsto w_k(s, \nu)$ são tais como em (5.54), (5.63), (5.75) e (5.88), $\mu_2(\nu)$ e $\mu_4(\nu)$ dados por (5.73) e (5.105), respectivamente. Portanto, de (5.144), (5.151) e pela **Proposição 5.2.5**,

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \left(\chi_k(\epsilon, \nu) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_k(s, \nu) ds \right) \epsilon^k + O_{\mathcal{H}_I}(\epsilon^5, |\nu|) = 0. \quad (5.156)$$

Computando as integrais,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(s, \nu) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_3(s, \nu) ds = 0, \quad (5.157)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_2(s, \nu) ds = 2\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \quad (5.158)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_4(s, \nu) ds = 8\text{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 12\mu_2(\nu)\text{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)), \quad (5.159)$$

o que demonstra o teorema. ■

Decorre do **Teorema 5.2.2**, um corolário que trata da estabilidade de uma órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) e que existe em decorrência de uma bifurcação de Hopf.

Corolário 5.2.1. *Seja*

$$\chi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2}\chi_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{24}\chi_4(\nu)\epsilon^4 + O_\chi(\epsilon^5, |\nu|), \quad (5.160)$$

a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 4, do expoente característico $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ associado à equação diferencial $z' = g(z, \bar{z}, \xi)$ e seja

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2}\mu_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{24}\mu_4(\nu)\epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5, |\nu|), \quad (5.161)$$

a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 4, da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$. Então,

a) Para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno e $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) \neq 0$, a estabilidade da órbita periódica da equação diferencial (5.12) é dada pelo sinal de $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))$. Quando $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) < 0$ para $\xi_0 \in U$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) é estável. Como para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno,

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu \gamma(\xi_0)} \epsilon^2 + O_\mu(\epsilon^4, |\nu|), \quad (5.162)$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase de (5.12) ocorre para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase ocorre para $\mu < 0$. Se $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) é instável.

b) Suponha que para $\xi_1 = (0, 0)$, $\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1)) = 0$ e $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) \neq 0$. Então para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno, a estabilidade é dada pelo sinal de $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))$. Quando $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) é estável. Como, neste caso,

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{12} \frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4 + O_\mu(\epsilon^5, |\nu|), \quad (5.163)$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) ocorre para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) ocorre para $\mu < 0$. Se $\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.12) é instável.

Demonstração. Sabendo que o sinal do expoente de Floquet fornece a estabilidade de uma órbita periódica, por (5.160) e (5.161) a demonstração é imediata. ■

O próximo exemplo, retirado de [12], mostra uma aplicação da teoria de aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^2 a um modelo do circuito elétrico de van der Pol.

Exemplo 5.2.1. Um dos pioneiros em circuitos elétricos não lineares foi sem dúvida Balthasar van der Pol entre 1920 e 1930, através de estudos com triodos (válvulas eletrônicas). Balthasar van der Pol mostrou que em circuitos elétricos com triodos, as grandezas elétricas podem apresentar oscilações não lineares sob certas condições. Atualmente, sabe-se que o modelo deste circuito elétrico com triodo apresenta uma bifurcação de Hopf. Em uma forma simples e teórica, o circuito elétrico de van der Pol é constituído de um triodo,

um capacitor de capacitância C e um indutor de indutância L , segundo o diagrama da Figura 5.1.

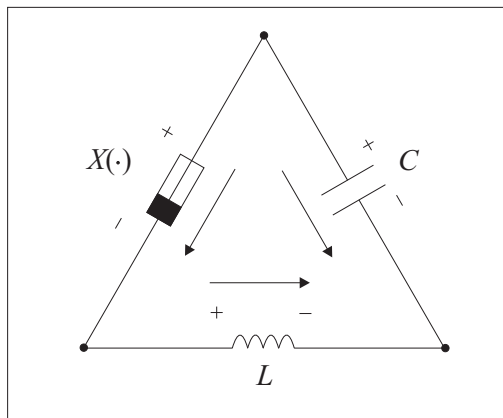


Figura 5.1: Diagrama de um circuito elétrico de van der Pol.

Sejam v_C , i_C e v_L , i_L modelos da tensão e corrente no capacitor e no indutor, respectivamente. O triodo de van der Pol, por hipótese, satisfaz a lei de Ohm generalizada

$$v_R = X(i_R), \quad (5.164)$$

com v_R e i_R , modelos da tensão e corrente do triodo de van der Pol, respectivamente. Aplicando as leis de Kirchhoff ao modelo do circuito elétrico de van der Pol e utilizando as equações do capacitor e do indutor, resulta que

$$\begin{aligned} i_R &= i_L = -i_C, \\ v_r + v_L - v_C &= 0, \\ v_L &= L \frac{d}{dt} i_L, \\ i_C &= C \frac{d}{dt} v_C. \end{aligned} \quad (5.165)$$

Portanto, o modelo deste circuito elétrico de van der Pol, é da forma

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} i_L &= v_c - X(i_L), \\ C \frac{d}{dt} v_c &= -i_L. \end{aligned} \quad (5.166)$$

O estudo da equação diferencial (5.166) é simplificado pela mudança de coordenadas e no tempo,

$$x = \frac{L}{\sqrt{LC}} i_L, \quad y = v_c, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t, \quad (5.167)$$

o que implica na equação diferencial

$$\begin{aligned}x' &= \frac{d}{d\tau}x = y - \mathcal{X}(x), \\y' &= \frac{d}{d\tau}y = -x,\end{aligned}\tag{5.168}$$

com $\mathcal{X}(x) = X\left(\frac{C}{\sqrt{LC}}x\right)$.

Suponha agora que

$$\mathcal{X}(x) = (-\mu x + x^3).\tag{5.169}$$

A equação diferencial (5.168), com a função $x \mapsto \mathcal{X}(x)$ dada em (5.169), será chamada simplesmente de equação de van der Pol neste trabalho.

Na notação (5.12), para equação de van der Pol, a aplicação $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto f(\mathbf{x}, \mu)$ é escrita como

$$f(\mathbf{x}, \mu) = (\mu x + y - x^3, -x),\tag{5.170}$$

com $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

A equação de van der Pol possui um único ponto de equilíbrio $(\mathbf{0}, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e a parte linear do campo de vetores, calculada em $(\mathbf{0}, \mu)$,

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\tag{5.171}$$

possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com

$$\lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\eta(\mu) = \frac{1}{2}\mu + i\frac{1}{2}\sqrt{4 - \mu^2},\tag{5.172}$$

e $\mu \in (-2, 2)$. Quando $\mu = 0$, $\gamma(0) = 0$ e $\eta(0) = 1$, o que indica a ocorrência de uma bifurcação de Hopf. Escolhendo autovetores $q(0)$ e $p(0)$, e normalizando o autovetor $q(0)$ em relação a $p(0)$, resultam

$$\begin{aligned}q(0) &= \left(-\frac{i}{2}, \frac{1}{2}\right), \\p(0) &= (-i, 1).\end{aligned}\tag{5.173}$$

Como as funções multilineares simétricas B e C são tais que

$$\begin{aligned}B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu) &= (0, 0), \\C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu) &= (6x_1y_1u_1, 0),\end{aligned}\tag{5.174}$$

cálculos simples mostram que

$$\begin{aligned}
 g_{2,0}(0) &= 0, \\
 g_{1,1}(0) &= 0, \\
 g_{0,2}(0) &= 0, \\
 g_{3,0}(0) &= \frac{3}{4}, \\
 g_{2,1}(0) &= -\frac{3}{4}, \\
 g_{1,2}(0) &= \frac{3}{4}, \\
 g_{0,3}(0) &= -\frac{3}{4}.
 \end{aligned} \tag{5.175}$$

Assim, por (5.70) e da definição (5.2.1) do primeiro coeficiente de Lyapunov,

$$l_1(0) = \frac{1}{2}\text{Re}(G_{2,1}(0)) = -\frac{3}{4}. \tag{5.176}$$

Visto que,

$$\gamma'(0) = \frac{1}{2}, \tag{5.177}$$

a equação de van der Pol apresenta uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um para $\mu = 0$. O sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov (5.176) mostra que para $\mu = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável da equação de van der Pol, ou mais precisamente, um foco atrator fraco. Pelo item (a) do **Corolário 5.2.1**, há uma órbita periódica no retrato de fase da equação de van der Pol para $\mu > 0$. Esta órbita periódica tem a seguinte aproximação em ϵ ,

$$u(s, \epsilon) = (\text{sen}(s), \text{cos}(s))\epsilon + \left(-\frac{3}{32}\text{cos}(3s), \frac{1}{32}\text{sen}(3s)\right)\epsilon^3 + O_u(\epsilon^4). \tag{5.178}$$

De fato, dos resultados de (5.175) e de (5.54), (5.63), (5.75) e (5.88),

$$w_1(s) = e^{is}, \tag{5.179}$$

$$\bar{w}_1(s) = e^{-is},$$

$$w_2(s) = 0, \tag{5.180}$$

$$\bar{w}_2(s) = 0,$$

$$w_3(s) = \frac{3}{16}i(6e^{-is} - e^{-3is} - 2e^{3is}), \tag{5.181}$$

$$\bar{w}_3(s) = -\frac{3}{16}i(6e^{is} - e^{3is} - 2e^{-3is}).$$

Aplicando a **Proposição 5.2.3**, segue que

$$q'(0) = \left(-\frac{1}{8}, \frac{i}{8} \right), \quad (5.182)$$

e as expressões (5.130), (5.131), (5.132) e (5.133) permitem concluir (5.178). A Figura 5.2 exibe uma comparação entre a aproximação da órbita periódica da equação de van der Pol, dada em (5.178) e a órbita periódica obtida através de simulações numéricas de (5.168), para $x \mapsto \mathcal{X}(x)$ tal como em (5.169).

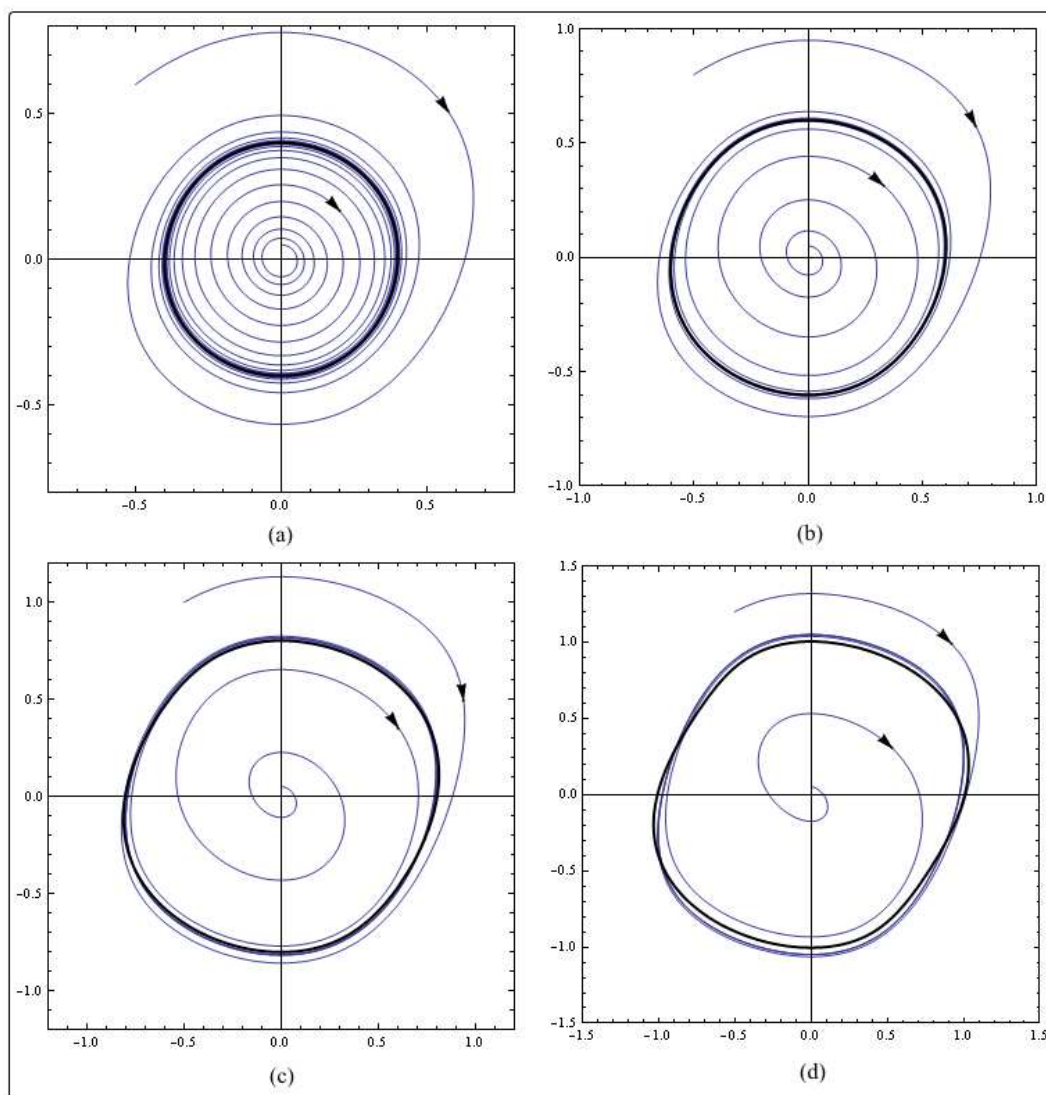


Figura 5.2: Comparação entre a órbita periódica aproximada por ϵ (linha cheia) e órbita periódica obtida numericamente a partir da equação de van der Pol. (a) Parâmetro $\epsilon = 0.4$, parâmetro $\mu = 0.12$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 0.6)$. (b) Parâmetro $\epsilon = 0.6$, parâmetro $\mu = 0.27$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 0.8)$. (c) Parâmetro $\epsilon = 0.8$, parâmetro $\mu = 0.48$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 1.0)$. (d) Parâmetro $\epsilon = 1.0$, parâmetro $\mu = 0.75$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(-0.5, 1.2)$.

O **Corolário 5.2.1** não trata do caso em que $\chi(\epsilon, \nu) = 0$ para um conjunto de pontos $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon$. A teoria desenvolvida até este ponto, possibilita o estudo da curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} no plano de parâmetros, associada a uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois. Tal curva é o conjunto

$$\chi^{-1}(0) = \{(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon : \chi(\epsilon, \nu) = 0\}. \quad (5.183)$$

Tal como na seção 4.2 é possível obter, a partir do conjunto $\chi^{-1}(0)$, o parâmetro ν como função do parâmetro ϵ . Logo, a curva C_{NH} resulta das funções $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$, ou seja, a curva C_{NH} pode ser representada localmente como uma curva parametrizada por ϵ ,

$$\Gamma(\epsilon) = (\phi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon)), \quad (5.184)$$

ou ser representada localmente como o gráfico de uma função

$$\mu = \Lambda(\nu). \quad (5.185)$$

De fato, a expansão em série de Taylor na variável ϵ do expoente característico é tal como em (5.144),

$$\chi(\epsilon, \nu) = \epsilon^2 \Psi(\epsilon, \nu), \quad (5.186)$$

sendo que a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \Psi(\epsilon, \nu)$ possui expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 3 da forma

$$\Psi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2} \chi_2(\nu) + \frac{1}{24} \chi_4(\nu) \epsilon^2 + O_\chi(\epsilon^3, |\nu|). \quad (5.187)$$

É fácil ver que $\Psi^{-1}(0) = \{(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon : \Psi(\epsilon, \nu) = 0\} \subset \chi^{-1}(0)$. Assim, o estudo da curva de órbitas periódicas não hiperbólicas no plano de parâmetros associada com a equação diferencial (5.12) e nas hipóteses de uma bifurcação de Hopf, resume-se ao estudo do conjunto $\Psi^{-1}(0)$.

O seguinte teorema pode ser enunciado agora.

Teorema 5.2.3. *Seja $(\mathbf{0}, \xi_1) \in W \times U$, um ponto de Hopf de codimensão dois de (5.12) para o qual $\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1)) \neq 0$. Então, a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas, no plano de parâmetros $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, associada com a equação diferencial (5.12) possui as seguintes representações locais*

$$\Gamma(\epsilon) = \left(\frac{\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{12\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4, -\frac{\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1))} \epsilon^2 \right) + O_\Gamma(\epsilon), \quad (5.188)$$

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{\mu_2(\nu)}{\psi_2} \nu + \frac{1}{6} \frac{\mu_4(\nu)}{\psi_2^2} \nu^2 + O_\Lambda(|\nu|), \quad (5.189)$$

com

$$\psi_2 = -\frac{\partial_\epsilon^2 \Psi(0,0)}{\partial_\nu \Psi(0,0)} = -\frac{2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\partial_\nu \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1))}. \quad (5.190)$$

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} \Psi(0,0) &= 0, \\ \partial_\epsilon \Psi(0,0) &= 0, \\ \partial_\epsilon^2 \Psi(0,0) &= \frac{1}{12} \chi_4(0) = \frac{2}{3} \operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) \neq 0, \\ \partial_\nu \Psi(0,0) &= \frac{1}{2} \chi_2'(0) = \partial_\nu \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1)) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.191)$$

o **Lema 4.2.1** garante a existência de uma função suave $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$ tal que $\Psi(\epsilon, \psi(\epsilon)) \equiv 0$, ou ainda, $\chi(\epsilon, \psi(\epsilon)) \equiv 0$. Além disto, a função $\epsilon \mapsto \nu = \psi(\epsilon)$ possui expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$ e e até os termos de ordem 2, da forma

$$\nu = \psi(\epsilon) = \frac{1}{2!} \psi_2 \epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3), \quad (5.192)$$

com

$$\psi_2 = -\frac{\partial_\epsilon^2 \Psi(0,0)}{\partial_\nu \Psi(0,0)} = -\frac{2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\partial_\nu \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1))}. \quad (5.193)$$

Logo,

$$\nu = \psi(\epsilon) = -\frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\partial_\nu \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_1))} \epsilon^2 + O_\psi(\epsilon^3) \quad (5.194)$$

e substituindo na função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$, resulta a seguinte expansão em série de Taylor

$$\mu = \phi(\epsilon, \psi(\epsilon)) = \frac{\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{12\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4 + O_\phi(\epsilon^5). \quad (5.195)$$

Portanto, existe uma curva no plano de parâmetros, $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon) = (\phi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon))$, que pode ser parametrizada por ϵ e representada como em (5.188). Outra representação para esta curva é obtida aplicando do **Teorema da Função Implícita** a função $(\epsilon, \nu) \mapsto K(\epsilon, \nu) = \nu - \psi(\epsilon)$, o que resulta em

$$\epsilon^2 = \frac{2}{\psi_2} \nu + O_\epsilon(|\nu|^2). \quad (5.196)$$

Substituindo (5.196) em (5.105), a curva $\epsilon \mapsto \Gamma(\epsilon)$ pode também ser representada localmente como

$$\begin{aligned}\mu = \Lambda(\nu) &= \frac{1}{2}\mu_2(\nu) \left(\frac{2}{\psi_2}\nu\right) + \frac{1}{24}\mu_4(\nu) \left(\frac{2}{\psi_2}\nu\right)^2 + O_\Lambda(|\nu|) \\ &= \frac{\mu_2(\nu)}{\psi_2}\nu + \frac{1}{6}\frac{\mu_4(\nu)}{\psi_2^2}\nu^2 + O_\Lambda(|\nu|).\end{aligned}\tag{5.197}$$

Portanto, existe uma curva Γ no plano de parâmetros que localmente possui as representações (5.188) e (5.189). Pelas hipóteses da bifurcação de Hopf de codimensão dois, $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) \neq 0$ e a equação $z' = g(z, \bar{z}, \xi)$ é localmente topologicamente equivalente em torno de $z = 0$ à equação diferencial

$$z' = (\mu + i)z + \nu z^2 \bar{z} + s z^3 \bar{z}^2 + O_z(|z|^6, \|\xi\|),\tag{5.198}$$

com $s = \text{sinal}(\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)))$. Pelo **Teorema 4.2.1**, a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas possui as representações (5.188) e (5.189). ■

O próximo exemplo é uma extensão da equação de van der Pol, denominada equação de Lienard, e mostra como as representações locais da curva C_{NH} são obtidas.

Exemplo 5.2.2. *A equação de van der Pol*

$$\begin{aligned}x' &= \frac{d}{d\tau}x = y - \mathcal{X}(x), \\ y' &= \frac{d}{d\tau}y = -x,\end{aligned}\tag{5.199}$$

com

$$\mathcal{X}(x) = \left(-\mu x + \nu x^3 + \frac{1}{5}x^5\right),\tag{5.200}$$

é conhecida na literatura como uma equação de Lienard.

Por ser uma generalização da equação de van der Pol, a equação de Lienard possui um único ponto de equilíbrio e a análise da parte linear da aplicação

$$f(\mathbf{x}, \xi) = \left(y + \mu x - \nu x^3 - \frac{1}{5}x^5, -x\right),\tag{5.201}$$

sendo $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\xi = (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, é exatamente igual àquela realizada para a equação de van der Pol. Mais precisamente, a parte linear da aplicação (5.201), calculada em $(\mathbf{0}, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\tag{5.202}$$

e possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, sendo

$$\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\eta(\xi) = \frac{1}{2}\mu + i\frac{1}{2}\sqrt{4 - \mu^2}, \quad (5.203)$$

e $\xi \in (-2, 2) \times \mathbb{R}$. Para $\xi_0 = (0, \nu)$, $\gamma(\xi_0) = 0$ e $\eta(\xi_0) = 1$, o que indica a ocorrência de uma bifurcação de Hopf. Os autovetores $q(\xi_0)$ e $p(\xi_0)$, com a normalização do autovetor $q(\xi_0)$ em relação ao autovetor adjunto $p(\xi_0)$, são escolhidos como

$$\begin{aligned} q(\xi_0) &= \left(-\frac{i}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ p(\xi_0) &= (-i, 1). \end{aligned} \quad (5.204)$$

No caso da equação de Lienard, resultam as funções multilineares simétricas

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \xi) &= (0, 0), \\ C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi) &= (6\nu x_1 y_1 u_1, 0), \\ D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) &= (0, 0), \\ E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi) &= (24x_1 y_1 u_1 v_1 w_1, 0). \end{aligned} \quad (5.205)$$

Para $k = 2, 3, \dots$ e $j = 0, 1, \dots, k$, os únicos coeficientes $g_{k-j,j}(\xi)$ não nulos são

$$\begin{aligned} g_{3,0}(\xi_0) &= \frac{3}{4}\nu, \\ g_{2,1}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}\nu, \\ g_{1,2}(\xi_0) &= \frac{3}{4}\nu, \\ g_{0,3}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}\nu, \\ g_{5,0}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}, \\ g_{4,1}(\xi_0) &= \frac{3}{4}, \\ g_{3,2}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}, \\ g_{2,3}(\xi_0) &= \frac{3}{4}, \\ g_{1,4}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}, \\ g_{0,5}(\xi_0) &= \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Os vetores $\partial_\mu q(\xi_0)$ e $\partial_\mu p(\xi_0)$ e os coeficientes $\partial_\mu g_{2,0}(\xi_0)$, $\partial_\mu g_{1,1}(\xi_0)$, $\partial_\mu g_{0,2}(\xi_0)$ e $\partial_\mu g_{2,1}(\xi_0)$,

calculados através das **Proposições 5.2.3** e **5.2.4**, são tais que

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu q(\xi_0) &= \left(-\frac{1}{8}, \frac{i}{8}\right), \\
 \partial_\mu p(\xi_0) &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{i}{4}\right), \\
 \partial_\mu g_{2,0}(\xi_0) &= 0, \\
 \partial_\mu g_{1,2}(\xi_0) &= 0, \\
 \partial_\mu g_{0,2}(\xi_0) &= 0, \\
 \partial_\mu g_{2,1}(\xi_0) &= \frac{3}{8}i\nu.
 \end{aligned} \tag{5.207}$$

Logo, dos resultados anteriores e por (5.70), (5.103) e (5.104), resultam

$$\begin{aligned}
 G_{2,1}(\xi_0) &= -\frac{3}{4}\nu, \\
 \partial_\mu G_{2,1}(\xi_0) &= \frac{3}{8}i\nu, \\
 G_{3,2}(\xi_0) &= -\frac{3}{4} - \frac{81}{64}i\nu^2.
 \end{aligned} \tag{5.208}$$

Portanto, primeiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_1(\xi_0) = \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) = -\frac{3}{4}\nu. \tag{5.209}$$

Como no caso da equação de van der Pol,

$$\partial_\mu \gamma(\xi_0) = \frac{1}{2}, \tag{5.210}$$

a equação de de Lienard apresenta uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão um para $\mu = 0$ e $\nu \neq 0$. A análise do primeiro coeficiente de Lyapunov (5.209) revela que para $\mu = 0$, a origem é um ponto de equilíbrio instável da equação de Lienard (foco repulsor fraco), se $\nu < 0$ e um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável (foco atrator fraco), se $\nu > 0$. Para $\nu = 0$, ocorre uma bifurcação de Hopf transversal de codimensão dois, pois

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} \partial_\mu \gamma(\xi_1) & \partial_\nu \gamma(\xi_1) \\ \partial_\mu l_1(\xi_1) & \partial_\nu l_1(\xi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = -\frac{3}{8} \tag{5.211}$$

e o segundo coeficiente de Lyapunov é não nulo

$$l_2(\xi_1) = \operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) = -\frac{3}{4}. \tag{5.212}$$

Devido a ocorrência de uma bifurcação de Bautin transversal, a equação de Lienard apresenta um diagrama de bifurcação semelhante àquele do exemplo 4.1.2 da seção 4.1, que trata da forma normal de Bautin. Empregando os resultados em (5.208), o **Teorema 5.2.3** garante as seguintes representações para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas associada com a equação de Lienard,

$$\Gamma(\epsilon) = (\mu(\epsilon, \nu(\epsilon)), \nu(\epsilon)) = \left(-\frac{1}{8}\epsilon^4, -\frac{1}{3}\epsilon^2\right) + O_\Gamma(\epsilon), \quad (5.213)$$

como curva parametrizada por ϵ ou como gráfico de função,

$$\mu = \Lambda(\nu) = -\frac{9}{8}\nu^2 + O_\nu(\nu^3), \quad (5.214)$$

para $\nu \leq 0$. O diagrama de bifurcação da equação de Lienard é exibido na Figura 5.2.2.

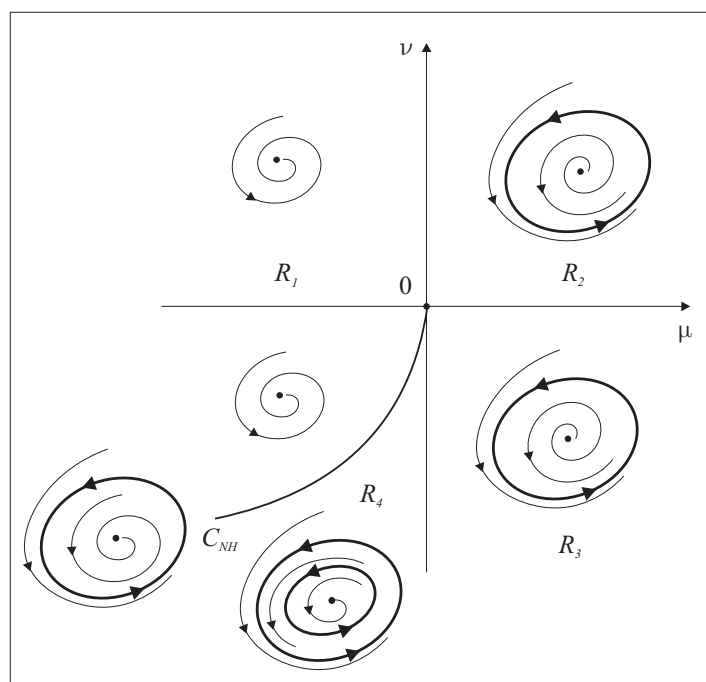


Figura 5.3: Diagrama de Bifurcação da equação de Lienard.

Para pares ordenados (μ, ν) tomados em cada uma das regiões R_1 , R_2 , R_3 ou R_4 e na curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} do diagrama de bifurcação da equação de Lienard, a Figura 5.4 mostra os respectivos retratos de fases para condições iniciais apropriadas.

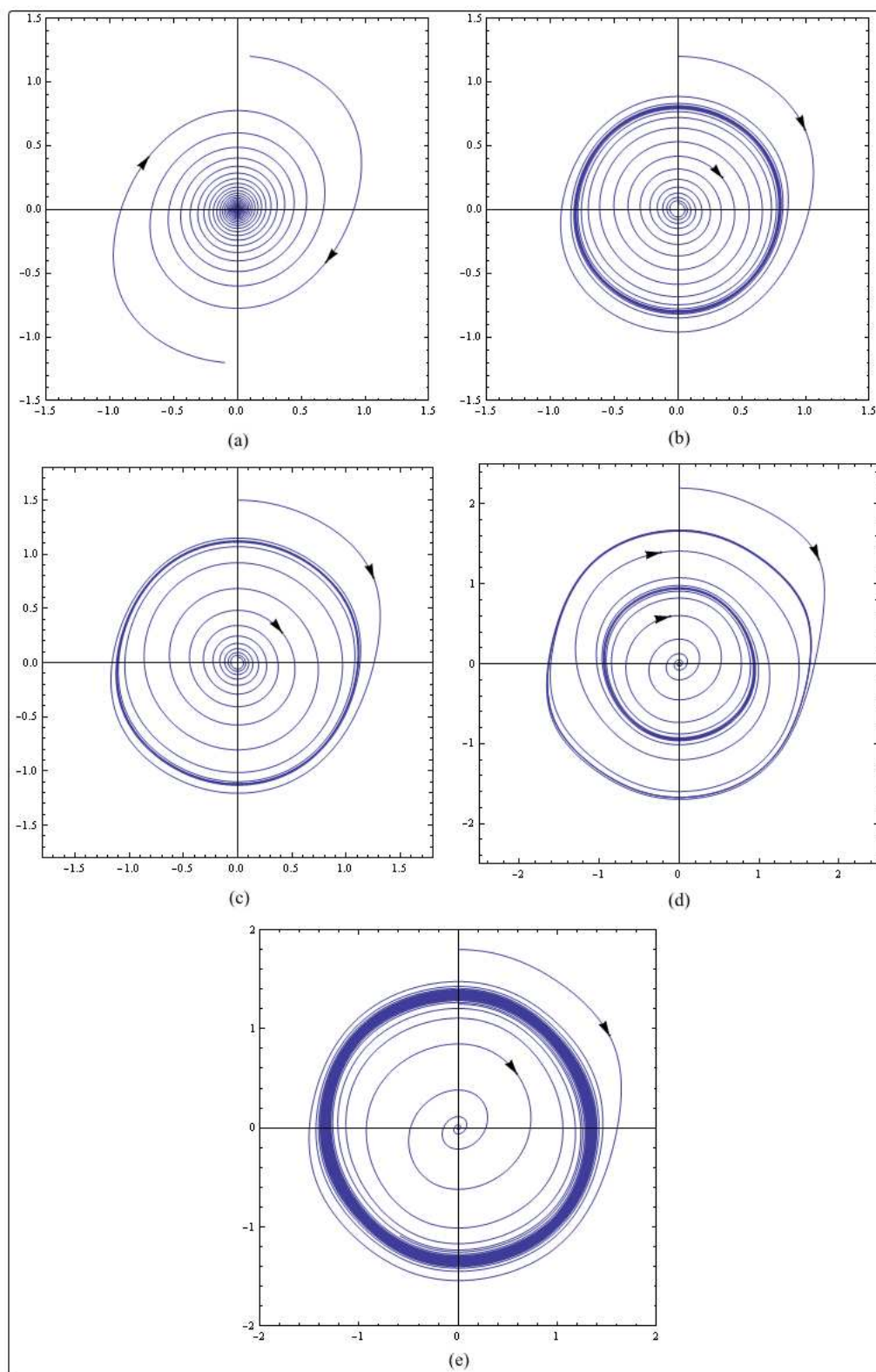


Figura 5.4: Retratos de fase da equação de Liénard. (a) Região R_1 : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.1, 0.1)$, condições iniciais $(-0.1, -1.2)$ e $(0.1, 1.2)$. (b) Região R_2 : parâmetros $(\mu, \nu) = (0.1, 0.1)$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(0, 1.2)$. (c) Região R_3 : parâmetros $(\mu, \nu) = (0.1, -0.1)$, condições iniciais $(0, 0.05)$ e $(0, 1.5)$. (d) Região R_4 : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.3, -0.6)$, condições iniciais $(0, 0.942)$, $(0, 0.98)$ e $(0, 2.2)$. (e) Curva C_{NH} : parâmetros $(\mu, \nu) = (-0.405, -0.6)$, condições iniciais $(0, 1.25)$ e $(0, 1.8)$.

Se outros pares ordenados (μ, ν) e condições iniciais são escolhidos, os retratos de fase são topologicamente equivalentes àqueles apresentados na Figura 5.4.

Em geral, os resultados (5.213) ou (5.214) são apenas aproximações locais. Contudo, no caso da equação de Lienard, estes resultados parecem ser a expressão exata da curva de órbitas periódicas não hiperbólicas. A Figura 5.5 exibe uma comparação entre o gráfico de (5.214) e a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas da equação de Lienard, obtida numericamente através do software **MATCONT 2.5.1**. Este software é um pacote computacional com interface gráfica que possibilita análise numérica de sistemas dinâmicos contínuos ou discretos. Desenvolvido para o software **MATLAB** [35], suporta versão 6.0 ou posterior e pode ser copiado gratuitamente em [34]. Utilizando métodos numéricos de continuação, este toolbox permite computar curvas de equilíbrio, de pontos limite, curvas de Hopf, entre outras. É capaz de detectar todas as bifurcações de codimensão um, codimensão dois e laços homoclínicos, para condições iniciais adequadas.

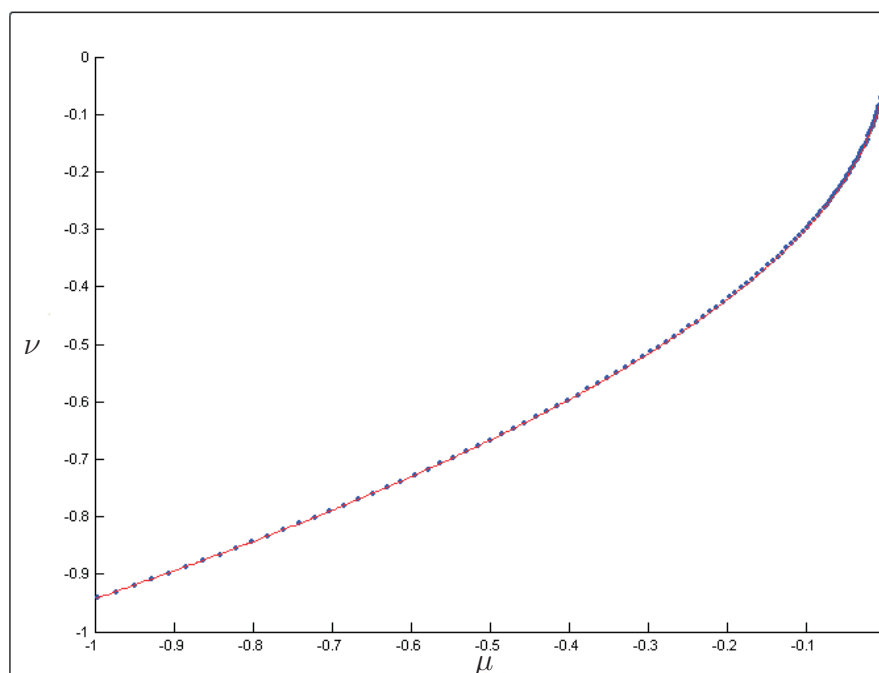


Figura 5.5: Comparação entre o gráfico da representação (5.214) e a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas da equação de Lienard, obtida numericamente através do software **MATCONT 2.5.1**. A linha contínua está associada com a aproximação (5.214) e os pontos com o resultado numérico.

Simulações numéricas, como da Figura 5.5, motivam a seguinte conjectura para a equação de Lienard.

Conjectura 5.2.1. *No plano de parâmetros, a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas da equação de Lienard (5.199) é o conjunto*

$$\Gamma = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu = -\frac{9}{8}\nu^2, \nu \leq 0 \right\}. \quad (5.215)$$

Finalizando, para cada par ordenado $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon$, as órbitas periódicas no retrato de fase da equação de Lienard são aproximadas por

$$u(s, \epsilon, \nu) = (\text{sen}(s), \text{cos}(s))\epsilon + \left(-\frac{3}{32}\nu \text{cos}(3s), \frac{1}{32}\nu \text{sen}(3s) \right) \epsilon^3 + O_u(\epsilon^4, |\nu|), \quad (5.216)$$

já que,

$$w_1(s) = e^{is}, \quad (5.217)$$

$$\bar{w}_1(s) = e^{-is},$$

$$w_2(s) = 0, \quad (5.218)$$

$$\bar{w}_2(s) = 0,$$

$$w_3(s) = \frac{3}{16}i\nu(6e^{-is} - e^{-3is} - 2e^{3is}), \quad (5.219)$$

$$\bar{w}_3(s) = -\frac{3}{16}i(6e^{is} - e^{3is} - 2e^{-3is}).$$

A teoria desta seção, embora formulada para equações diferenciais em \mathbb{R}^2 , pode ser aplicada a qualquer equação diferencial em \mathbb{R}^n que apresente um bifurcação de Hopf. Basta para isto, empregar o teorema da variedade central, ou mais precisamente, fazer uma restrição da equação diferencial em \mathbb{R}^n à variedade central. Contudo, do ponto de vista das aplicações, restrições à variedade central, em geral, demandam muito trabalho. Assim sendo, o objetivo da próxima seção é exibir uma teoria de aproximação de órbitas periódicas para equações diferenciais em \mathbb{R}^n e nas hipóteses de uma bifurcação de Hopf.

5.3 Aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^n

Aproximações de órbitas periódicas de equações diferenciais em \mathbb{R}^n podem ser obtidas, conforme discutido no final da seção anterior, ou mediante uma adaptação conveniente do método da projeção. Estas não serão as abordagens desta seção. A finalidade é apresentar uma teoria de aproximação de órbitas periódicas de equações diferenciais em \mathbb{R}^n tal como em [13]. A idéia do método é essencialmente a mesma da seção anterior, ou seja, o

objetivo é dar uma definição para o parâmetro ϵ , construir funções do parâmetro ϵ e obter as aproximações desejadas através de séries de Taylor formais na variável ϵ (em torno da origem destas funções) e da equação diferencial em \mathbb{R}^n . Para isto, seja a equação diferencial

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi), \quad (5.220)$$

com $f : W \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto em \mathbb{R}^n , $f \in C^\infty(W \times U, \mathbb{R}^n)$ e $\xi = (\mu, \nu) \in U \subset \mathbb{R}^2$, o vetor de parâmetros.

Suponha que $(\mathbf{x}_0(\xi), \xi) \in W \times U$ é ponto de equilíbrio de (5.220) e que, para $\xi_0 = (\mu_0, \nu)$, a parte linear da aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f(\mathbf{x}, \xi)$, calculada em $(\mathbf{x}_0(\xi_0), \xi_0) \in W \times U$ e denotada por $A(\xi) = Df(\mathbf{x}_0(\xi), \xi)$, possui autovalores λ e $\bar{\lambda}$, com $\lambda(\xi_0) = \gamma(\xi_0) + i\eta(\xi_0)$, $\gamma(\xi_0) = 0$, $\partial_\mu \gamma(\xi_0) \neq 0$ e $\eta(\xi_0) = \omega_0(\nu) > 0$ e nenhum outro autovalor com parte real nula. Para simplificar a análise, suponha ainda que $\mathbf{x}_0(\xi) = \mathbf{0}$, para todo $\xi \in U$, $\mathbf{0} \in U$ e $\mu_0 = 0$. Com estas hipóteses, existem $q(\xi) \in \mathbb{C}^n$, autovetor correspondente ao autovalor $\lambda(\xi)$ e $p(\xi) \in \mathbb{C}^n$ autovetor adjunto correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi)$, sujeitos à normalização $\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = 1$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{C}^n .

Linearizando (5.220), em torno do ponto de equilíbrio $(\mathbf{0}, \xi) \in W \times U$, resulta o problema variacional

$$\mathbf{x}' = A(\xi)\mathbf{x}, \quad (5.221)$$

cujas soluções são

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA(\xi)}\mathbf{x}_0, \quad (5.222)$$

sendo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Quando $\xi = \xi_0$,

$$\begin{aligned} e^{tA(\xi_0)}q(\xi_0) &= e^{i\omega_0(\nu)t}q(\xi_0), \\ e^{tA(\xi_0)}\bar{q}(\xi_0) &= e^{-i\omega_0(\nu)t}\bar{q}(\xi_0) \end{aligned} \quad (5.223)$$

e (5.221) possui duas soluções periódicas independentes para $\xi = \xi_0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= e^{i\omega_0(\nu)t}q(\xi_0), \\ \bar{\mathbf{z}}(t) &= e^{-i\omega_0(\nu)t}\bar{q}(\xi_0). \end{aligned} \quad (5.224)$$

Na variável $s = \omega_0(\nu)t$, as soluções (5.224) são periódicas de período 2π . A finalidade do método de aproximação, apresentado nesta seção, é construir uma aproximação para uma família de órbitas periódicas de (5.220), a partir das soluções periódicas de (5.221) e para $\xi = \xi_0$.

Considere, o seguinte conjunto de funções periódicas de período 2π ,

$$\mathcal{P}_{2\pi} = \{v : \mathbb{R} \times U_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}^n : v(s, \epsilon, \nu) = v(s + 2\pi, \epsilon, \nu), v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^n)\} \cup \{0\}, \quad (5.225)$$

com

$$U_\epsilon = \{(\epsilon, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon \geq 0, \epsilon \text{ suficientemente pequeno}\}. \quad (5.226)$$

Munido com as operações de adição de funções periódicas, ou seja, se $u, v \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $u + v \in \mathcal{P}_{2\pi}$ e multiplicação por escalar, isto é, se $v \in \mathcal{P}_{2\pi}$ e $c \in \mathbb{C}$, então $cv \in \mathcal{P}_{2\pi}$, a terna $(\mathcal{P}_{2\pi}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} , denotado simplesmente por $\mathcal{P}_{2\pi}$.

Seja agora o produto interno sobre $\mathcal{P}_{2\pi}$, definido por

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto [u, v] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle u(s, \epsilon, \nu), v(s, \epsilon, \nu) \rangle ds, \end{aligned} \quad (5.227)$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual em \mathbb{C}^n . Logo, o par $(\mathcal{P}_{2\pi}, [\cdot, \cdot])$ é um espaço com produto interno.

Neste espaço com produto interno é possível definir a classe de operadores indexada por $\nu \in \mathbb{R}$, $\{\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi} : \nu \in \mathbb{R}\}$, sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} &\longrightarrow \mathcal{P}_{2\pi} \\ v &\longmapsto \mathcal{J}_\nu v := \left(-\omega_0(\nu) \frac{d}{ds} + A(\xi_0) \right) v. \end{aligned} \quad (5.228)$$

Esta classe de operadores desempenha um papel importante na aproximação de uma família de órbitas periódicas de (5.220). As **Proposições 5.3.1** e **5.3.2** fornecem algumas propriedades dos membros da classe $\{\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi} : \nu \in \mathbb{R}\}$.

Proposição 5.3.1. *Para cada $\nu \in \mathbb{R}$, o operador $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ é linear e contínuo.*

Demonstração. A linearidade do operador $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ é imediata. Com relação à continuidade, basta mostrar que o operador $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ é limitado com relação ao espaço normado $(\mathcal{P}_{2\pi}, \|\cdot\|_{2\pi})$, sendo

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{2\pi} : \mathcal{P}_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\|_{2\pi} = \sqrt{[v, v]}, \end{aligned} \quad (5.229)$$

a norma induzida pelo produto interno (5.227). Em outras palavras, basta mostrar que existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que para todo $v \in \mathcal{P}_{2\pi}$,

$$\|\mathcal{J}_\nu v\|_{2\pi} \leq c \|v\|_{2\pi}. \quad (5.230)$$

Tome $v \in \mathcal{P}_{2\pi}$ com $\|v\|_{2\pi} = 1$. Então,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_\nu v\|_{2\pi} &= \left\| -\omega_0(\nu) \frac{d}{ds} v + A(\xi_0)v \right\|_{2\pi} \\ &\leq \left\| -\omega_0(\nu) \frac{d}{ds} v \right\|_{2\pi} + \|A(\xi_0)v\|_{2\pi} \\ &= \omega_0(\nu) \left\| \frac{d}{ds} v \right\|_{2\pi} + \|A(\xi_0)v\|_{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.231)$$

Por outro lado, fixado o par $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon$, das propriedades da função $v \in \mathcal{P}_{2\pi}$, existe um $L(\nu) \in \mathbb{R}$, $L(\nu) > 0$, tal que

$$\left\| \frac{d}{ds} v \right\|_{2\pi} \leq L(\nu) \quad (5.232)$$

e por (5.229),

$$\|A(\xi_0)v\|_{2\pi} \leq \|A(\xi_0)\|_M \|v\|_{2\pi} = \|A(\xi_0)\|_M, \quad (5.233)$$

sendo

$$\|A(\xi_0)\|_M = \sup_{\|u\|=1} \frac{\|A(\xi_0)u\|}{\|u\|}, \quad (5.234)$$

com $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a norma induzida pelo produto interno em \mathbb{C}^n . Portanto, (5.230) é verificado aqui com $c = \omega_0(\nu)L(\nu) + \|A(\xi_0)\|_M$. Para $v \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $v = 0$, (5.230) é trivialmente satisfeita. ■

Proposição 5.3.2. *Para cada $\nu \in \mathbb{R}$, o núcleo do operador linear $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$, denotado por $\mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu)$, possui dimensão 2 e o conjunto $\mathcal{B}_q = \{e^{is}q(\xi_0), e^{-is}\bar{q}(\xi_0)\}$ é uma base para o núcleo.*

Demonstração. Fixado $\nu \in \mathbb{R}$, o núcleo de (5.228) é o conjunto

$$\mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu) = \{v \in \mathcal{P}_{2\pi} : \mathcal{J}_\nu v = 0\}. \quad (5.235)$$

Seja $\mathcal{S}(\mathcal{B}_q)$, o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_{2\pi}$ gerado por \mathcal{B}_q . Se $v \in \mathcal{S}(\mathcal{B}_q)$, então $v(s, \epsilon, \nu) = C_1 e^{is}q(\xi_0) + C_2 e^{-is}\bar{q}(\xi_0)$ com $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ e, assim, $\mathcal{J}_\nu v = 0$. Logo, $\mathcal{S}(\mathcal{B}_q) \subset \mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu)$.

Por outro lado, cada elemento do núcleo satisfaz o problema de contorno

$$\begin{aligned} \omega_0(\nu) \frac{d}{ds} v &= A(\xi_0)v, \\ v(s, \epsilon, \nu) &= v(s + 2\pi, \epsilon, \nu) \end{aligned} \quad (5.236)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{ds}v = A^{\omega_0}(\xi_0)v, \quad (5.237)$$

$$v(s, \epsilon, \nu) = v(s + 2\pi, \epsilon, \nu),$$

sendo $A^{\omega_0}(\xi_0) := \omega_0(\nu)^{-1}A(\xi_0)$. Da teoria de equações diferenciais ordinárias, o espaço de soluções da equação diferencial ordinária em (5.237) possui dimensão finita. Portanto, o núcleo $\mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu)$ possui dimensão finita.

Note que a aplicação linear $A(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui autovalores $\lambda_1(\xi_0) = i\omega_0(\nu)$, $\lambda_2(\xi_0) = -i\omega_0(\nu)$, $\lambda_3(\xi_0), \dots, \lambda_n(\xi_0)$, com $\lambda_3(\xi_0), \dots, \lambda_n(\xi_0)$ simétricos em relação ao eixo real do plano complexo e $\operatorname{Re}(\lambda_j(\xi_0)) \neq 0$ para $j = 3, \dots, n$. Logo, a aplicação linear $A^{\omega_0}(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui autovalores

$$\lambda_1(\xi_0) = i, \lambda_2(\xi_0) = -i, \omega_0(\nu)^{-1}\lambda_3(\xi_0), \dots, \omega_0(\nu)^{-1}\lambda_n(\xi_0). \quad (5.238)$$

Além disto, os autovetores associados aos autovalores de $A(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são também autovetores associados aos autovalores de $A^{\omega_0}(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sendo $Q_1(\xi_0) = q(\xi_0)$, $Q_2(\xi_0) = \bar{q}(\xi_0)$, $Q_3(\xi_0), \dots, Q_n(\xi_0)$ autovetores de $A^{\omega_0}(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associados, respectivamente, aos autovalores (5.238), resulta que

$$\{e^{is}q(\xi_0), e^{-is}\bar{q}(\xi_0), q_3(s), \dots, q_n(s)\} \quad (5.239)$$

é uma base para o espaço de soluções, sendo $s \mapsto q_i(s) = s^{m_i-1}e^{\lambda_i(\xi_0)s}Q_i(\xi_0)$ e m_i a multiplicidade de $\lambda_i(\xi_0)$, $i = 3, \dots, n$. Das propriedades da aplicação linear $A^{\omega_0}(\xi_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, as únicas funções que são periódicas de período 2π são $s \mapsto e^{is}q(\xi_0)$ e $s \mapsto e^{-is}\bar{q}(\xi_0)$. Logo, toda solução do problema de contorno (5.237) é da forma $v(s, \epsilon, \nu) = C_1e^{is}q(\xi_0) + C_2e^{-is}\bar{q}(\xi_0)$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, $C_2 = \overline{C_1}$, o que mostra que $\mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu) \subset \mathcal{S}(\mathcal{B}_q)$. Portanto, $\mathcal{B}_q = \{e^{is}q(\xi_0), e^{-is}\bar{q}(\xi_0)\}$ é uma base para o núcleo do operador linear (5.228). ■

Outra classe importante de operadores, neste contexto de aproximação de uma família de órbitas periódicas de (5.220), é a classe dos operadores adjuntos.

Definição 5.3.1. *No espaço com produto interno $(\mathcal{P}_{2\pi}, [\cdot, \cdot])$, para cada $\nu \in \mathbb{R}$, o operador $\mathcal{J}_\nu^T : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ que satisfaz a seguinte propriedade*

$$[\mathcal{J}_\nu u, v] = [u, \mathcal{J}_\nu^T v], \quad (5.240)$$

para todo $u, v \in \mathcal{P}_{2\pi}$, é denominado operador adjunto do operador linear $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$.

Proposição 5.3.3. Para cada $\nu \in \mathbb{R}$, o operador adjunto de $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$, $\mathcal{J}_\nu^T : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$, é dado por

$$\mathcal{J}_\nu^T = \omega_0(\nu) \frac{d}{ds} + A^T(\xi_0). \quad (5.241)$$

Além disto, $\mathcal{J}_\nu^T : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ é linear e contínuo.

Demonstração. Da definição do operador linear $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ e para $u, v \in \mathcal{P}_{2\pi}$,

$$[\mathcal{J}_\nu u, v] = -\omega_0(\nu) \left[\frac{d}{ds} u, v \right] + [A(\xi_0)u, v]. \quad (5.242)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds} u, v \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{d}{ds} u, v \right\rangle ds \\ &= \langle u, v \rangle \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle u, \frac{d}{ds} v \right\rangle ds \\ &= \left[u, \frac{d}{ds} v \right] \end{aligned} \quad (5.243)$$

e

$$[A(\xi_0)u, v] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle A(\xi_0)u, v \rangle ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle u, A^T(\xi_0)v \rangle ds = [u, A^T v]. \quad (5.244)$$

Logo, de (5.242), (5.243), (5.244) e pela definição 5.3.1,

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_\nu u, v] &= \left[u, \omega_0(\nu) \frac{d}{ds} v \right] + [u, A^T(\xi_0)v] \\ &= \left[u, \omega_0(\nu) \frac{d}{ds} v + A^T(\xi_0)v \right] \\ &= [u, \mathcal{J}_\nu^T v]. \end{aligned} \quad (5.245)$$

A demonstração de que $\mathcal{J}_\nu^T : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ é linear e contínuo é idêntica àquela feita para o operador $\mathcal{J}_\nu : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$ e, portanto, será omitida. ■

Como na **Proposição 5.3.2** é possível mostrar que $\mathcal{B}_p = \{e^{is}p(\xi_0), e^{-is}\bar{p}(\xi_0)\}$ é uma base para o núcleo do operador linear adjunto $\mathcal{J}_\nu^T : \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_{2\pi}$. Utilizando as notações $\mathbf{q}(s, \nu) = e^{is}q(\xi_0)$ e $\mathbf{p}(s, \nu) = e^{is}p(\xi_0)$, decorre da definição do produto interno sobre $\mathcal{P}_{2\pi}$ que

$$\partial_\mu \lambda(\xi_0) = \langle p(\xi_0), \partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) \rangle = [\mathbf{p}(s, \nu), \partial_\mu A(\xi_0)\mathbf{q}(s, \nu)] \quad (5.246)$$

e, assim, neste contexto

$$\begin{aligned}\partial_\mu \gamma(\xi_0) &= \operatorname{Re}([\mathbf{p}(s, \nu), \partial_\mu A(\xi_0) \mathbf{q}(s, \nu)]), \\ \partial_\mu \eta(\xi_0) &= \operatorname{Im}([\mathbf{p}(s, \nu), \partial_\mu A(\xi_0) \mathbf{q}(s, \nu)]).\end{aligned}\tag{5.247}$$

Por um abuso de notação, suponha que $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ é uma órbita periódica de (5.220) e defina as funções $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \omega(\epsilon, \nu)$, com

$$T(\epsilon, \nu) = \frac{2\pi}{\omega(\epsilon, \nu)},\tag{5.248}$$

o período da órbita periódica de (5.220). Como na teoria de aproximação de órbitas periódicas em \mathbb{R}^2 , a mudança de variáveis

$$\mathbf{x}(t) = u(s, \epsilon, \nu), \quad s = \omega(\epsilon, \nu)t, \quad \omega(0, \nu) = \omega_0(\nu),\tag{5.249}$$

simplicifica a análise, pois permite que as órbitas periódicas de (5.220) sejam elementos de $\mathcal{P}_{2\pi}$. Note que o conjunto $\mathcal{P}_{2\pi}$, consiste de funções periódicas de período 2π que assumem valores em \mathbb{C}^n , ou seja, os elementos de $\mathcal{P}_{2\pi}$ são funções da forma $v = (v_1, v_2)$, com v_i , $i = 1, 2$, funções periódicas de período 2π que assumem valores em \mathbb{R}^n . Neste sentido, como o estudo é realizado com equações diferenciais em \mathbb{R}^n , o interesse está em um subconjunto $\mathcal{P}_{2\pi}^0 \subset \mathcal{P}_{2\pi}$ definido por

$$\mathcal{P}_{2\pi}^0 = \{v \in \mathcal{P}_{2\pi} : v = (v_1, v_2), \quad v_i : \mathbb{R} \times U_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \quad v_2 \equiv \mathbf{0}\}.\tag{5.250}$$

É possível mostrar que o conjunto $\mathcal{P}_{2\pi}^0$ é isomorfo ao conjunto das funções periódicas de período 2π definidas em $\mathbb{R} \times U_\epsilon$ e assumindo valores em \mathbb{R}^n e, assim, a seguinte identificação é feita: se $(u, \mathbf{0}) \in \mathcal{P}_{2\pi}^0$, então a notação utilizada é $u \in \mathcal{P}_{2\pi}^0$.

A função $s \mapsto \mathbf{p}(s, \nu)$ e o produto interno $[\cdot, \cdot] : \mathcal{P}_{2\pi} \times \mathcal{P}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre $\mathcal{P}_{2\pi}$ permitem definir o parâmetro ϵ da seguinte forma

$$\epsilon = [\mathbf{p}, u],\tag{5.251}$$

com $u \in \mathcal{P}_{2\pi}^0$ uma órbita periódica de (5.220) que se deseja aproximar. Outras definições para o parâmetro ϵ são possíveis dependendo da aplicação (ver [13]).

Observe que a aplicação linear (5.46) da seção 5.2 é obtida empregando (5.251) no caso em que $n = 2$ e levando em conta que em \mathbb{R}^2 a órbita periódica é dada por (5.128).

Com a mudança de variáveis anterior a equação diferencial (5.220) pode ser reescrita como

$$\omega(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds} u(s, \epsilon, \nu) = f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu).\tag{5.252}$$

Considere agora as séries formais na variável ϵ ,

$$\begin{pmatrix} u(s, \epsilon, \nu) \\ \phi(\epsilon, \nu) \\ \omega(\epsilon, \nu) - \omega_0(\nu) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} u_k(s, \nu) \\ \mu_k(\nu) \\ \omega_k(\nu) \end{pmatrix} \epsilon^k. \quad (5.253)$$

Como na seção anterior, há a seguinte propriedade envolvendo os termos da seqüência $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposição 5.3.4. *Os termos da seqüência $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ possuem a seguinte propriedade:*

$$[\mathbf{p}, u_k] = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.254)$$

Demonstração. A demonstração é conseqüência da definição 5.227 e da série formal em ϵ da função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u(s, \epsilon, \nu)$, pois

$$\begin{aligned} \epsilon &= [\mathbf{p}, u] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{p}, u(s, \epsilon, \nu) \rangle ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \mathbf{p}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} u_k(s, \nu) \epsilon^k \right\rangle ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{p}, u_k(s, \nu) \rangle ds \right) \epsilon^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [\mathbf{p}, u_k] \epsilon^k. \end{aligned} \quad (5.255)$$

■

Os termos das seqüências $\{\omega_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são obtidos através de um procedimento recursivo. Assim, substituindo (5.253) em (5.252) e agrupando os termos com as potências ϵ^k , para $k = 1, 2, \dots$, obtém-se para o coeficiente do termo em ϵ ,

$$(\mathcal{J}_\nu u_1)(s, \nu) = 0 \quad (5.256)$$

e, assim, $u_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu)$ e a **Proposição 5.3.2** garante que

$$u_1(s, \nu) = C_1 \mathbf{q}(s, \nu) + \bar{C}_1 \bar{\mathbf{q}}(s, \nu) = C_1 e^{is} q(\xi_0) + \bar{C}_1 e^{-is} \bar{q}(\xi_0), \quad (5.257)$$

com $C_1 \in \mathbb{C}$. Como a origem, na variável s , de uma órbita periódica de (5.220) é indefinida, ou seja, $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u(s, \epsilon, \nu)$ e $(\tilde{s}, \epsilon, \nu) \mapsto \tilde{u}(\tilde{s}, \epsilon, \nu)$, com $\tilde{s} = s + s_0$, representam a mesma órbita periódica de (5.220), qualquer que seja o valor de $s_0 \in \mathbb{R}$ (u e \tilde{u} são equivalentes),

é possível escolher uma origem $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Im}(C_1 e^{is_0}) = 0$. Para este $s_0 \in \mathbb{R}$ e preservando a notação, isto é, fazendo $s = \tilde{s}$, a função $(s, \nu) \mapsto u_1(s, \nu)$ é reescrita como

$$u_1(s, \nu) = C_2(e^{is}q(\xi_0) + e^{-is}\bar{q}(\xi_0)), \quad (5.258)$$

com $C_2 \in \mathbb{R}$. Além disto, pela **Proposição 5.3.4**, $C_2 = 1$.

Os coeficientes dos termos em ϵ^2 , ϵ^3 , ϵ^4 e ϵ^5 fornecem os seguintes resultados

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu u_2)(s, \nu) = & -2\mu_1(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) + 2\omega_1(\nu)u_1'(s, \nu) - \\ & B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0), \end{aligned} \quad (5.259)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu u_3)(s, \nu) = & -3\mu_1(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_2(s, \nu) + 3\omega_1(\nu)u_2'(s, \nu) - \\ & 3\mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) + 3\omega_2(\nu)u_1'(s, \nu) - \\ & 3\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 3B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\ & 3\mu_1(\nu)\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\ & C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0), \end{aligned} \quad (5.260)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu u_4)(s, \nu) = & -4\mu_1(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_3(s, \nu) + 4\omega_1(\nu)u_3'(s, \nu) - \\ & 6\mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_2(s, \nu) + 6\omega_2(\nu)u_2'(s, \nu) - \\ & 4\mu_3(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) + 4\omega_3(\nu)u_1'(s, \nu) - \\ & 12\mu_1(\nu)\mu_2(\nu)\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 6\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_2(s, \nu) - \\ & 4\mu_1(\nu)^3\partial_\mu^3 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 4B(u_1(s, \nu), u_3(s, \nu), \xi_0) - \\ & 3B(u_2(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - 12\mu_1(\nu)\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\ & 6\mu_2(\nu)\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\ & 6\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\ & 6C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\ & 4\mu_1(\nu)\partial_\mu C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\ & D(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0), \end{aligned} \quad (5.261)$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\nu u_5)(s, \nu) = & -5\mu_1(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_4(s, \nu) + 5\omega_1(\nu)u'_4(s, \nu) + \\
& 10\omega_2(\nu)u'_3(s, \nu) - 10\mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_3(s, \nu) - \\
& 10\mu_3(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_2(s, \nu) + 10\omega_3(\nu)u'_2(s, \nu) - \\
& 5\mu_4(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) + 5\omega_4(\nu)u'_1(s, \nu) - \\
& 10\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_3(s, \nu) - 30\mu_1(\nu)\mu_2(\nu)\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_2(s, \nu) - \\
& 20\mu_1(\nu)\mu_3(\nu)\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 15\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - \\
& 10\mu_1(\nu)^3\partial_\mu^3 A(\xi_0)u_2(s, \nu) - 30\mu_1(\nu)^2\mu_2(\nu)\partial_\mu^3 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - \\
& 5\mu_1(\nu)^4\partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 5B(u_1(s, \nu), u_4(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10B(u_2(s, \nu), u_3(s, \nu), \xi_0) - 20\mu_1(\nu)\partial_\mu^2 B(u_1(s, \nu), u_3(s, \nu), \xi_0) - \\
& 15\mu_1(\nu)\partial_\mu B(u_2(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 30\mu_2(\nu)\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10\mu_3(\nu)\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\
& 30\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10\mu_1(\nu)^3\partial_\mu^3 B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_3(s, \nu), \xi_0) - \\
& 15C(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 30\mu_1(\nu)\partial_\mu C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10\mu_2(\nu)\partial_\mu C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10\mu_1(\nu)^2\partial_\mu^2 C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\
& 10D(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) - \\
& 5\mu_1(\nu)\partial_\mu D(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) - \\
& E(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0).
\end{aligned} \tag{5.262}$$

Como pode ser observado nos resultados de (5.259) a (5.262), determinar os termos da seqüência $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é equivalente a estudar, para cada $k = 1, 2, \dots$, o problema com operador linear

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\nu u_{k+1})(s, \nu) &= H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)), \\
u_{k+1}(s, \nu) &= u_{k+1}(s + 2\pi, \nu),
\end{aligned} \tag{5.263}$$

sendo a função $(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \mapsto H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu))$, periódica de período 2π na variável s . O próximo teorema fornece um método de obtenção dos termos das seqüências $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\mu_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\omega_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$, através de (5.263) e de maneira recursiva.

Teorema 5.3.1. *Para $k = 1, 2, \dots$ e para cada $\nu \in \mathbb{R}$, o problema com operador linear (5.263) admite solução se, e somente se,*

$$[\mathbf{p}, H_{k+1}] = 0. \quad (5.264)$$

Demonstração. Suponha, para $k = 1, 2, \dots$ e para cada $\nu \in \mathbb{R}$, que $(s, \nu) \mapsto u_{k+1}(s, \nu)$ é solução do problema de contorno (5.263), ou seja, $\mathcal{J}_\nu u_{k+1}(s, \nu) = H_{k+1}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu))$ e $u_{k+1}(s, \nu) = u_{k+1}(s + 2\pi, \nu)$. Logo, como $\mathbf{p} \in \mathcal{N}(\mathcal{J}_\nu^T)$,

$$[\mathbf{p}, H_{k+1}] = [\mathbf{p}, \mathcal{J}_\nu u_{k+1}] = [\mathcal{J}_\nu^T \mathbf{p}, u_{k+1}] = 0. \quad (5.265)$$

Suponha agora que $[\mathbf{p}, H_{k+1}] = 0$. O problema com operador linear (5.263) é equivalente ao problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u_{k+1}(s, \nu) &= A^{\omega_0}(\xi_0) u_{k+1} - H_{k+1}^{\omega_0}(s, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)), \\ u_{k+1}(s, \nu) &= u_{k+1}(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.266)$$

sendo $A^{\omega_0}(\xi_0) = \omega_0(\nu)^{-1} A(\xi_0)$ e $H_{k+1}^{\omega_0} = \omega_0(\nu)^{-1} H_{k+1}$ para $k = 1, 2, \dots$. A solução de um problema de valor inicial envolvendo a equação diferencial ordinária em (5.266) é da forma

$$u_{k+1}(s, \nu) = e^{sA^{\omega_0}(\xi_0)} u_{k+1}^0 - e^{sA^{\omega_0}(\xi_0)} \int_0^s e^{-\zeta A^{\omega_0}(\xi_0)} H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta, \quad (5.267)$$

com $u_{k+1}^0 = u_{k+1}(0)$ arbitrário. Esta solução será periódica, se $u_{k+1}(0, \nu) = u_{k+1}^0 = u_{k+1}(2\pi, \nu)$ ou, equivalentemente, se

$$(I_n - e^{2\pi A^{\omega_0}(\xi_0)}) u_{k+1}^0 = - \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\zeta)A^{\omega_0}(\xi_0)} H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta, \quad (5.268)$$

sendo I_n a matriz identidade $n \times n$. Como $u_{k+1}^0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, a existência de soluções periódicas de período 2π de (5.266) está relacionada com a existência de $u_{k+1}^0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo (5.268). Note que (5.268) é um sistema linear da forma $\tilde{A} u_{k+1}^0 = \tilde{B}$ com

$$\tilde{A} = I_n - e^{2\pi A^{\omega_0}(\xi_0)} \quad (5.269)$$

e

$$\tilde{B} = - \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\zeta)A^{\omega_0}(\xi_0)} H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta. \quad (5.270)$$

Pela alternativa Fredholm (ver [15]), o sistema linear $\tilde{A}u_{k+1}^0 = \tilde{B}$ possui solução se e, somente se, a imagem da aplicação linear $\tilde{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ for igual ao complemento ortogonal do núcleo do operador adjunto de $\tilde{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Das hipóteses sobre a aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, resulta que o conjunto $\{p(\xi_0), \bar{p}(\xi_0)\}$ é uma base para o núcleo do operador adjunto de $\tilde{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\tilde{A}^T = I_n - e^{2\pi(A^{\omega_0})^T(\xi_0)} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle p(\xi_0), \tilde{B} \rangle &= \left\langle p(\xi_0), - \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\zeta)A^{\omega_0}(\xi_0)} H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) d\zeta \right\rangle \\
&= - \int_0^{2\pi} \left\langle p(\xi_0), e^{(2\pi-\zeta)A^{\omega_0}(\xi_0)} H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \right\rangle d\zeta \\
&= - \int_0^{2\pi} \left\langle e^{(2\pi-\zeta)(A^{\omega_0})^T(\xi_0)} p(\xi_0), H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \right\rangle d\zeta \\
&= - \int_0^{2\pi} \left\langle e^{-i(2\pi-\zeta)} p(\xi_0), H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \right\rangle d\zeta \\
&= - \int_0^{2\pi} \left\langle e^{i\zeta} p(\xi_0), H_{k+1}^{\omega_0}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \right\rangle d\zeta \\
&= - \frac{2\pi}{\omega_0(\nu)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle e^{i\zeta} p(\xi_0), H_{k+1}(\zeta, \mu_k(\nu), \omega_k(\nu)) \right\rangle d\zeta \\
&= - \frac{2\pi}{\omega_0(\nu)} [\mathbf{p}, H_{k+1}].
\end{aligned} \tag{5.271}$$

A hipótese $[\mathbf{p}, H_{k+1}] = 0$ implica que $\langle p(\xi_0), \tilde{B} \rangle = 0$ e, portanto, existem $u_{k+1}^0 \in \mathbb{C}^n$ para os quais (5.266) possui soluções periódicas de período 2π . ■

Pela **Proposição 5.3.4** e pelo **Teorema 5.3.1**, a solução do problema com operador (5.263), para cada $k = 1, 2, \dots$, é obtido através de (5.267), com as condições $[\mathbf{p}, H_{k+1}] = 0$ e $[\mathbf{p}, u_{k+1}] = 0$.

Substituindo (5.258) em (5.259), resulta o problema com operador linear

$$\begin{aligned}
(\mathcal{J}_\nu u_2)(s, \nu) &= H_2(s, \nu, \mu_1, \omega_1), \\
u_2(s, \nu) &= u_2(s + 2\pi, \nu),
\end{aligned} \tag{5.272}$$

sendo

$$\begin{aligned}
H_2(s, \nu, \mu_2, \omega_2) &= 2 \left(-\mu_1(\nu) \partial_\mu A(\xi_0) q(\xi_0) + i\omega_1(\nu) q(\xi_0) \right) e^{is} - \\
&\quad 2 \left(\mu_1(\nu) \partial_\mu A(\xi_0) \bar{q}(\xi_0) + i\omega_1(\nu) \bar{q}(\xi_0) \right) e^{-is} - \\
&\quad B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) e^{2is} - 2B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \\
&\quad B(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) e^{-2is}.
\end{aligned} \tag{5.273}$$

O **Teorema 5.3.1** garante que o problema com operador linear (5.273) admite solução se, e somente se, $[\mathbf{p}, H_2] = 0$. Isto ocorre se $\mu_1(\nu) = 0$ e $\omega_1(\nu) = 0$. Nestas condições, a solução de (5.273) é

$$u_2(s, \nu) = h_{2,0}(\xi_0)e^{2is} + 2h_{1,1}(\xi_0) + \bar{h}_{2,0}(\xi_0)e^{-2is}, \quad (5.274)$$

com

$$h_{2,0}(\xi_0) = (2i\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{-1}B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0), \quad (5.275)$$

$$h_{1,1}(\xi_0) = -A(\xi_0)^{-1}B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0). \quad (5.276)$$

A expressão (5.260) e os resultados anteriores conduzem ao problema com operador linear

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu u_3)(s, \nu) &= H_3(s, \nu, \mu_2, \omega_2), \\ u_3(s, \nu) &= u_3(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.277)$$

onde

$$\begin{aligned} H_3(s, \nu, \mu_2, \omega_2) &= \left(3B(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + C(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0)\right)e^{3is} - \\ &3\left(-\mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) + i\omega_2(\nu)q(\xi_0)\right)e^{is} - \\ &3\left(2B(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\ &C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0))e^{is} - 3(\mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)\bar{q}(\xi_0) + \\ &i\omega_2(\nu)\bar{q}(\xi_0))e^{-is} - 3\left(B(q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\ &2B(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0))e^{-is} - \\ &3\left(B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)\right)e^{-3is}. \end{aligned} \quad (5.278)$$

Aplicando o **Teorema 5.3.1** a (5.278), ou seja, calculando $[\mathbf{p}, H_3] = 0$, os coeficientes $\mu_2(\nu)$ e $\omega_2(\nu)$ são da forma

$$\mu_2(\nu) = -\frac{\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu \gamma(\xi_0)}, \quad (5.279)$$

$$\omega_2(\nu) = \mu_2(\nu)\partial_\mu \eta(\xi_0) + \operatorname{Im}(G_{2,1}(\xi_0)), \quad (5.280)$$

com

$$\begin{aligned} G_{2,1}(\xi_0) &= \left\langle p(\xi_0), 2B(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\ &C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)) \rangle. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Definição 5.3.2. O primeiro coeficiente de Lyapunov é definido por

$$l_1(\xi_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \quad (5.282)$$

com o número complexo $G_{2,1}(\xi_0)$ calculado de acordo com (5.281).

Uma vez determinados os coeficientes $\mu_2(\nu)$ e $\omega_2(\nu)$, a solução $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u_3(s, \epsilon, \nu)$ é

$$u_3(s, \nu) = h_{3,0}(\xi_0)e^{3is} + \bar{h}_{3,0}(\xi_0)e^{-3is} + 3h_{2,1}(\xi_0)e^{is} + 3\bar{h}_{2,1}(\xi_0)e^{-is} + \\ 3\mu_2(\nu)\partial_\mu q(\xi_0)e^{is} + 3\mu_2(\nu)\partial_\mu \bar{q}(\xi_0)e^{-is}, \quad (5.283)$$

com

$$h_{3,0}(\xi_0) = (3i\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{-1}(3B(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ C(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0)), \quad (5.284)$$

$$h_{2,1}(\xi_0) = (i\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{INV} R_{2,1}(\xi_0) \quad (5.285)$$

e $\partial_\mu q(\xi_0)$ calculado tal como no **Proposição 5.2.3**. A notação em (5.285), significa que o vetor complexo $h_{2,1}(\xi_0) \in \mathbb{C}^n$ é solução do sistema de equações lineares de dimensão $n + 1$ (ver [30]),

$$\begin{pmatrix} i\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0) & q(\xi_0) \\ \bar{p}(\xi_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{2,1}(\xi_0) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{2,1}(\xi_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.286)$$

com

$$R_{2,1}(\xi_0) = 2B(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - G_{2,1}(\xi_0)q(\xi_0). \quad (5.287)$$

Pelos resultados anteriores, o problema com operador linear (5.261) pode ser escrito como

$$(\mathcal{J}_\nu u_4)(s, \nu) = H_4(s, \nu, \mu_3, \omega_3), \quad (5.288) \\ u_4(s, \nu) = u_4(s + 2\pi, \nu),$$

sendo

$$H_4(s, \nu, \mu_4, \omega_4) = -(4B(q(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 3B(h_{2,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ 6C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) +$$

$$\begin{aligned}
& D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) e^{4is} - \\
& 2\left(6B(q(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 3\mu_2(\nu)(2B(q(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& \partial_\mu A(\xi_0)h_{2,0}(\xi_0) - 2(\partial_\mu \gamma(\xi_0) + i\partial_\mu \eta(\xi_0))h_{2,0}(\xi_0) + \\
& \partial_\mu B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0)) + 2(B(\bar{q}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3B(h_{1,1}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - 3G_{2,1}(\xi_0)h_{2,0}(\xi_0)) e^{2is} + \\
& 4\left(-\mu_3(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)q(\xi_0) + i\omega_3(\nu)q(\xi_0)\right) e^{is} - \\
& \left(12B(q(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) - 12B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) - \right. \\
& 12B(h_{1,1}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) - 6B(h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) - \\
& 6C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) - \\
& 24C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) - 6C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) - \\
& 6D(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \tag{5.289} \\
& 12\mu_2(\nu)(B(q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \\
& \left. \partial_\mu A(\xi_0)h_{1,1}(\xi_0) + \partial_\mu B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0))\right) - \\
& 4\left(\mu_3(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)\bar{q}(\xi_0) + i\omega_3(\nu)\bar{q}(\xi_0)\right) e^{-is} - \\
& 2\left(6B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 3\mu_2(\nu)(2B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& \partial_\mu A(\xi_0)\bar{h}_{2,0}(\xi_0) - 2(\partial_\mu \gamma(\xi_0) - i\partial_\mu \eta(\xi_0))\bar{h}_{2,0}(\xi_0) + \\
& \partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)) + 2(B(q(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3B(h_{1,1}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& D(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - 3\bar{G}_{2,1}(\xi_0)\bar{h}_{2,0}(\xi_0)) e^{-2is} - \\
& \left(4B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 3B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \left. D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)\right) e^{-4is}.
\end{aligned}$$

com $\mu_3(\nu) = 0$ e $\omega_3(\nu) = 0$, pelo **Teorema 5.3.1**. Portanto,

$$\begin{aligned} u_4(s, \nu) = & h_{4,0}(\xi_0)e^{4is} + \bar{h}_{4,0}(\xi_0)e^{-4is} + 4h_{3,1}(\xi_0)e^{2is} + 6h_{2,2}(\xi_0) + \\ & 4\bar{h}_{3,1}(\xi_0)e^{-2is} + 6\mu_2(\nu)\partial_\mu h_{2,0}(\xi_0)e^{2is} + 12\mu_2(\nu)\partial_\mu h_{1,1}(\xi_0) + \\ & 6\mu_2(\nu)\partial_\mu \bar{h}_{2,0}(\xi_0)e^{-2is}. \end{aligned} \quad (5.290)$$

Em (5.290), os vetores complexos $h_{4,0}(\xi_0)$, $h_{3,1}(\xi_0)$, $h_{2,2}(\xi_0)$, $\partial_\mu h_{2,0}(\xi_0)$ e $\partial_\mu h_{1,1}(\xi_0)$ são dados por

$$\begin{aligned} h_{4,0}(\xi_0) = & (4\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{-1}(3B(h_{2,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ & 4B(q(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 6C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ & D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0)), \end{aligned} \quad (5.291)$$

$$\begin{aligned} h_{3,1}(\xi_0) = & (3\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{-1}(B(\bar{q}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 3B(q(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\ & 3B(h_{1,1}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\ & 3C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \\ & 3G_{2,1}(\xi_0)h_{2,0}(\xi_0)), \end{aligned} \quad (5.292)$$

$$\begin{aligned} h_{2,2}(\xi_0) = & -A(\xi_0)^{-1}(2B(q(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 2B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\ & 2B(h_{1,1}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + B(h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\ & C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 4C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\ & C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + D(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \\ & 2(G_{2,1}(\xi_0) + \bar{G}_{2,1}(\xi_0))h_{1,1}(\xi_0)), \end{aligned} \quad (5.293)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu h_{2,0}(\xi_0) = & (2i\omega_0(\nu)I_n - A(\xi_0))^{-1}(2B(q(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \\ & \partial_\mu B(q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) - (2\partial_\mu \lambda(\xi_0)I_n - \partial_\mu A(\xi_0))h_{2,0}(\xi_0)), \end{aligned} \quad (5.294)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu h_{1,1}(\xi_0) = & -A(\xi_0)^{-1}(B(\partial_\mu q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + B(q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\ & \partial_\mu B(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - ((\partial_\mu \lambda(\xi_0) + \partial_\mu \bar{\lambda}(\xi_0))I_n - \partial_\mu A(\xi_0))h_{1,1}(\xi_0)). \end{aligned} \quad (5.295)$$

Por último, tem-se o seguinte problema com operador linear, obtido de (5.262)

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu u_5)(s, \nu) = & H_5(s, \nu, \mu_4, \omega_4), \\ u_5(s, \nu) = & u_5(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.296)$$

com

$$\begin{aligned}
H_5(s, \nu, \mu_4, \omega_4) = & -\left(5B(q(\xi_0), h_{4,0}(\xi_0), \xi_0) + 10B(h_{2,0}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& 10C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 15C(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 10D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0))e^{5is} - \\
& 5\left(4B(q(\xi_0), h_{3,1}(\xi_0), \xi_0) + B(\bar{q}(\xi_0), h_{4,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& 4B(h_{1,1}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 6B(h_{2,0}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(q(\xi_0), q(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 4C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 12C(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 4D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6D(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \\
& 6G_{2,1}(\xi_0)h_{3,0}(\xi_0) + 2\mu_2(3B(q(\xi_0), \partial_\mu h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3B(h_{2,0}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + 3C(q(\xi_0), q(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu A(\xi_0)h_{3,0}(\xi_0) - 3\partial_\mu \gamma(\xi_0)h_{3,0}(\xi_0) - \\
& 3i\partial_\mu \eta(\xi_0)h_{3,0}(\xi_0) + 3\partial_\mu B(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \left. \left. \partial_\mu C(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0))\right)e^{3is} - \right. \\
& 5\left(\mu_4(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)q(xi_0) - i\omega_4(\nu)q(xi_0) + \right. \\
& 2(3B(q(\xi_0), h_{2,2}(\xi_0), \xi_0) + 2B(\bar{q}(\xi_0), h_{3,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6B(h_{1,1}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 3B(h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(h_{3,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \left. \left. 6C(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \right. \right.
\end{aligned} \tag{5.297}$$

$$\begin{aligned}
& 3C(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6D(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3D(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \\
& 3G_{2,1}(\xi_0)h_{2,1}(\xi_0)) + 6\mu_2(\nu)(2B(q(\xi_0), \partial_\mu h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 2B(h_{1,1}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(h_{2,0}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + C(q(\xi_0), q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 2C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) - G_{2,1}(\xi_0)\partial_\mu q(\xi_0) + \\
& \partial_\mu A(\xi_0)h_{2,1}(\xi_0) - \partial_\mu \gamma(\xi_0)h_{2,1}(\xi_0) - \\
& i\partial_\mu \eta(\xi_0)h_{2,1}(\xi_0) + 2\partial_\mu B(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \partial_\mu C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)) + \\
& 3\mu_2(\nu)^2(\partial_\mu^2 A(\xi_0)q(xi_0) + 2(\partial_\mu A(\xi_0) - \\
& (\partial_\mu \gamma(\xi_0) + i\partial_\mu \eta(\xi_0))I_n)\partial_\mu q(\xi_0))e^{is} - \\
& 5(\mu_4(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)\bar{q}(xi_0) + i\omega_4(\nu)\bar{q}(xi_0) + \\
& 2(3B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,2}(\xi_0), \xi_0) + 2B(q(\xi_0), \bar{h}_{3,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6B(h_{1,1}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 3B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(\bar{h}_{3,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3D(\bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) - \\
& 3\bar{G}_{2,1}(\xi_0)\bar{h}_{2,1}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)(2B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(q(\xi_0), \partial_\mu \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 2B(h_{1,1}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \partial_\mu q(\xi_0), \xi_0) + \\
& 2C(\bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - \bar{G}_{2,1}(\xi_0)\partial_\mu \bar{q}(\xi_0) + \\
& \partial_\mu A(\xi_0)\bar{h}_{2,1}(\xi_0) - \partial_\mu \gamma(\xi_0)\bar{h}_{2,1}(\xi_0) + \\
& i\partial_\mu \eta(\xi_0)\bar{h}_{2,1}(\xi_0) + 2\partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu B(q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \partial_\mu C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0)) + \\
& 3\mu_2(\nu)^2(\partial_\mu^2 A(\xi_0)\bar{q}(xi_0) + 2(\partial_\mu A(\xi_0) - (\partial_\mu \gamma(\xi_0) - \\
& i\partial_\mu \eta(\xi_0))I_n)\partial_\mu \bar{q}(\xi_0))e^{-is} - \\
& 5(4B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{3,1}(\xi_0), \xi_0) + B(q(\xi_0), \bar{h}_{4,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 4B(h_{1,1}(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + 6B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 4C(\bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 12C(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 4D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), q(\xi_0), \xi_0) - \\
& 6\bar{G}_{2,1}(\xi_0)\bar{h}_{3,0}(\xi_0) + 2\mu_2(\nu)(3B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + 3C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu A(\xi_0)\bar{h}_{3,0}(\xi_0) - 3\partial_\mu \gamma(\xi_0)\bar{h}_{3,0}(\xi_0) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3i\partial_\mu\eta(\xi_0)\bar{h}_{3,0}(\xi_0) + 3\partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)) e^{-3is} - \\
& \left(5B(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{4,0}(\xi_0), \xi_0) + 10B(\bar{h}_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \right. \\
& 10C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 15C(\bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 10D(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \left. E(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0)) e^{-5is} \right).
\end{aligned}$$

Computando $[\mathbf{p}, H_5]$, segue que

$$\begin{aligned}
[H_5] &= \mu_4(\nu)(\partial_\mu\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu\eta(\xi_0)) - i\omega_4(\nu) + 2G_{3,2}(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0) + \\
& 3\mu_2(\nu)^2(\partial_\mu^2\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu^2\eta(\xi_0)) = 0,
\end{aligned} \tag{5.298}$$

com

$$\begin{aligned}
\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0) &= \langle p(\xi_0), 2B(\partial_\mu q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + 2B(q(\xi_0), \partial_\mu h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 2\partial_\mu B(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + B(\partial_\mu \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(\bar{q}(\xi_0), \partial_\mu h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \partial_\mu B(\bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 2C(\partial_\mu q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + C(q(\xi_0), q(\xi_0), \partial_\mu \bar{q}(\xi_0), \xi_0) + \\
& \partial_\mu C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) - G_{2,1}(\xi_0)\partial_\mu q(\xi_0) + \\
& (\partial_\mu A(\xi_0) - (\partial_\mu\gamma(\xi_0) + i\partial_\mu\eta(\xi_0))I_n)h_{2,1}(\xi_0) \rangle,
\end{aligned} \tag{5.299}$$

$$\begin{aligned}
G_{3,2}(\xi_0) = & \langle p(\xi_0), 3B(q(\xi_0), h_{2,2}(\xi_0), \xi_0) + 2B(\bar{q}(\xi_0), h_{3,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6B(h_{1,1}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 3B(h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& B(h_{3,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + 3C(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,1}(\xi_0), \xi_0) + 6C(q(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3C(q(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + C(\bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{3,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6C(\bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& D(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{h}_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 6D(q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{1,1}(\xi_0), \xi_0) + \\
& 3D(q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), h_{2,0}(\xi_0), \xi_0) + \\
& E(q(\xi_0), q(\xi_0), q(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \bar{q}(\xi_0), \xi_0) \rangle.
\end{aligned} \tag{5.300}$$

Portanto,

$$\mu_4(\nu) = -\frac{2\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 6\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\gamma(\xi_0)}{\partial_\mu\gamma(\xi_0)}, \tag{5.301}$$

$$\begin{aligned}
\omega_4(\nu) = & 2\operatorname{Im}(G_{3,2}(\xi_0)) + \mu_4(\nu)\partial_\mu\eta(\xi_0) + 6\mu_2(\nu)\operatorname{Im}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)) + \\
& 3\mu_2(\nu)^2\partial_\mu^2\eta(\xi_0).
\end{aligned} \tag{5.302}$$

Definição 5.3.3. *O segundo coeficiente de Lyapunov é definido por*

$$l_2(\xi_0) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)), \tag{5.303}$$

com o número complexo $G_{3,2}(\xi_0)$ calculado de acordo com (5.300).

A função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u_5(s, \epsilon, \nu)$ não será exibida aqui por ser muito extensa. Pelos resultados anteriores, uma órbita periódica de (5.220), $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u(s, \epsilon, \nu)$, que surge em decorrência de bifurcações de Hopf, possui a seguinte aproximação

$$u(s, \epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} u_k(s, \nu) \epsilon^k + O_u(s, \epsilon, \nu), \tag{5.304}$$

com a função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto O_u(s, \epsilon, \nu)$ dependendo dos termos ordem superior e as funções $(s, \nu) \mapsto u_k(s, \nu)$ para $k = 1, 2, 3, 4$, dadas em (5.258), (5.274), (5.283) e (5.290). Note que para $k = 1, 2, 3, 4$, a função $(s, \nu) \mapsto u_k(s, \nu)$ assume valores em \mathbb{R}^n .

A aproximação (5.304) é válida independentemente se a órbita periódica é hiperbólica (estável ou instável) ou não hiperbólica. Se é desejado determinar a estabilidade de (5.304),

então é necessário empregar outra teoria, como por exemplo, a teoria de Floquet que pode ser encontrada em [8]. A idéia nesta teoria é linearizar (5.220) em torno de (5.304) e estudar o seguinte problema variacional

$$\frac{d}{dt}y = \mathcal{M}(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu)y, \quad (5.305)$$

sendo $\mathcal{M}(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) := Df(u(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu)$ e $y = y(\omega(\epsilon, \nu)t, \epsilon, \nu) \in \mathbb{R}^n$. Com a mudança no tempo, $s = \omega(\epsilon, \nu)t$, o problema variacional pode ser reescrito como

$$\omega(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds}y(s, \epsilon, \nu) = \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)y(s, \epsilon, \nu). \quad (5.306)$$

Pela teoria de Floquet, o problema variacional (5.306) possui possivelmente uma solução não trivial da forma

$$y(s, \epsilon, \nu) = e^{s \frac{\chi(\epsilon, \nu)}{\omega(\epsilon, \nu)}} x(s, \epsilon, \nu), \quad (5.307)$$

sendo $(s, \epsilon, \nu) \mapsto x(s, \epsilon, \nu) \in \mathbb{R}^n$ uma função periódica de período 2π na variável s e $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ o expoente de Floquet. Substituindo (5.307) em (5.306), obtém-se

$$\chi(\epsilon, \nu) e^{s \frac{\chi(\epsilon, \nu)}{\omega(\epsilon, \nu)}} x(s, \epsilon, \nu) + \omega(\epsilon, \nu) e^{s \frac{\chi(\epsilon, \nu)}{\omega(\epsilon, \nu)}} \frac{d}{ds} x(s, \epsilon, \nu) = \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu) e^{s \frac{\chi(\epsilon, \nu)}{\omega(\epsilon, \nu)}} x(s, \epsilon, \nu), \quad (5.308)$$

ou ainda,

$$-\omega(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds} x(s, \epsilon, \nu) + \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)x(s, \epsilon, \nu) = \chi(\epsilon, \nu)x(s, \epsilon, \nu). \quad (5.309)$$

Logo, para cada $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon$, há o seguinte problema de autovalores e autovetores

$$\mathcal{T}x(s, \epsilon, \nu) = \chi(\epsilon, \nu)x(s, \epsilon, \nu), \quad (5.310)$$

sendo $\{\mathcal{T} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (\epsilon, \nu) \in U_\epsilon\}$, uma classe de operadores onde cada membro da classe é definido por

$$\mathcal{T}x(s, \epsilon, \nu) := \left(-\omega(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds} + \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu) \right) x(s, \epsilon, \nu). \quad (5.311)$$

Em geral não é possível determinar explicitamente o autovetor $(s, \epsilon, \nu) \mapsto x(s, \epsilon, \nu)$ associado ao autovalor $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$. Contudo é possível obter aproximações para $(s, \epsilon, \nu) \mapsto x(s, \epsilon, \nu)$ e $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ de modo semelhante ao que foi feito para órbitas periódicas. Para isto basta utilizar o teorema de fatoração enunciado a seguir e que pode ser encontrado em [13].

Teorema 5.3.2. A função $(s, \epsilon, \nu) \mapsto x(s, \epsilon, \nu)$ e o expoente de Floquet $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ são dados por

$$x(s, \epsilon, \nu) = c(\epsilon, \nu) \left(\frac{\tau(\epsilon, \nu)}{\chi(\epsilon, \nu)} \frac{d}{ds} u(s, \epsilon, \nu) + \partial_\epsilon u(s, \epsilon, \nu) + \epsilon \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu) v(s, \epsilon, \nu) \right), \quad (5.312)$$

$$\chi(\epsilon, \nu) = \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu) \alpha(\epsilon, \nu), \quad (5.313)$$

$$\tau(\epsilon, \nu) = \partial_\epsilon \omega(\epsilon, \nu) + \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu) \beta(\epsilon, \nu), \quad (5.314)$$

com $(s, \epsilon, \nu) \mapsto u(s, \epsilon, \nu)$ a aproximação de uma órbita periódica de (5.220), $(\epsilon, \nu) \mapsto c(\epsilon, \nu)$ uma função arbitrária e $(s, \epsilon, \nu) \mapsto v(s, \epsilon, \nu)$ uma função periódica de período 2π na variável s . As funções $(\epsilon, \nu) \mapsto \alpha(\epsilon, \nu)$, $(\epsilon, \nu) \mapsto \beta(\epsilon, \nu)$ e $(s, \epsilon, \nu) \mapsto v(s, \epsilon, \nu)$ satisfazem a equação

$$\begin{aligned} \epsilon (\mathcal{T}v(s, \epsilon, \nu) - \chi(\epsilon, \nu)v(s, \epsilon, \nu)) &= \beta(\epsilon, \nu) \frac{d}{ds} u(s, \epsilon, \nu) + \alpha(\epsilon, \nu) \partial_\epsilon u(s, \epsilon, \nu) + \\ &\partial_\mu f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu) \end{aligned} \quad (5.315)$$

e possuem as seguintes séries formais na variável ϵ ,

$$\begin{pmatrix} v(s, \epsilon, \nu) - v_0(s, \nu) \\ \frac{\alpha(\epsilon, \nu)}{\epsilon} - \alpha_0(\nu) \\ \beta(\epsilon, \nu) - \beta_0(\nu) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} v_k(s, \nu) \\ \alpha_k(\nu) \\ \beta_k(\nu) \end{pmatrix} \epsilon^k. \quad (5.316)$$

No **Teorema 5.3.2**, aproximações para as funções $(\epsilon, \nu) \mapsto \alpha(\epsilon, \nu)$, $(\epsilon, \nu) \mapsto \beta(\epsilon, \nu)$ e $(s, \epsilon, \nu) \mapsto v(s, \epsilon, \nu)$ são obtidas substituindo (5.316) em (5.315). Contudo este procedimento de substituição depende de algumas expansões em série de Taylor na variável ϵ e em torno de $\epsilon = 0$ de duas aplicações, $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)v(s, \epsilon, \nu)$ e $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \partial_\mu f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu)$. Como por (5.313),

$$\begin{aligned} \chi(\epsilon, \nu) &= \partial_\epsilon \phi(\epsilon, \nu) \alpha(\epsilon, \nu) \\ &= \left(\mu_2(\nu)\epsilon + \frac{1}{3!}\mu_4(\nu)\epsilon^3 \right) \left(\alpha_0(\nu)\epsilon + \alpha_1(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{2!}\alpha_2(\nu)\epsilon^3 \right) + O_\chi(\epsilon^5, |\nu|) \\ &= \frac{1}{2!}2\alpha_0(\nu)\mu_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{3!}6\alpha_1(\nu)\mu_2(\nu)\epsilon^3 + \\ &\quad \frac{1}{4!}(4\alpha_0(\nu)\mu_4(\nu) + 12\alpha_2(\nu)\mu_2(\nu))\epsilon^4 + O_\chi(\epsilon^5, |\nu|), \end{aligned} \quad (5.317)$$

resulta que

$$\begin{aligned} \chi_1(\nu) &= 0, \\ \chi_2(\nu) &= 2\alpha_0(\nu)\mu_2(\nu), \\ \chi_3(\nu) &= 6\alpha_1(\nu)\mu_2(\nu), \\ \chi_4(\nu) &= 4\alpha_0(\nu)\mu_4(\nu) + 12\alpha_2(\nu)\mu_2(\nu). \end{aligned} \quad (5.318)$$

Além disto, a expansão na variável ϵ da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \alpha(\epsilon, \nu)$ em (5.317) e (5.315) mostra que é suficiente obter as expansões em série de Taylor na variável ϵ e em torno de $\epsilon = 0$ até os termos de ordem 2 para a aplicação $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)v(s, \epsilon, \nu)$ e até os termos de ordem 3 para aplicação $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \partial_\mu f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu)$.

A expansão em série de Taylor da aplicação $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)v(s, \epsilon, \nu)$ pode ser feita por etapas, primeiro através da expansão em série de Taylor na variável \mathbf{u} , em torno de $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e até os termos de ordem 2, da aplicação

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) \mapsto h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) := Df(\mathbf{u}, \xi)\mathbf{v}, \quad (5.319)$$

com $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ fixo. Para $i = 1, 2, \dots, n$, cada componente da aplicação (5.319) é da forma

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) \mapsto h_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{u}, \xi) v_j, \quad (5.320)$$

sendo $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f_i(\mathbf{x}, \xi)$ as componentes da aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto f(\mathbf{x}, \xi)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Assim,

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) = A(\xi)\mathbf{v} + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) + \frac{1}{2!}C(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi) + O_h(\|\mathbf{u}\|^4, \|\mathbf{v}\|, \|\xi\|). \quad (5.321)$$

De fato, empregando (5.5) e sendo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ vetores de \mathbb{R}^n , segue que

$$h(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \xi) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{0}, \xi) v_j \right) e_i = A(\xi)\mathbf{v}, \quad (5.322)$$

$$\begin{aligned} D^1 h(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \xi) &= \frac{\partial}{\partial t_1} h(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y}, \mathbf{v}, \xi) \Big|_{t_1=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y}, \mathbf{v}, \xi) e_i \right) \Big|_{t_1=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t_1} h_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y}, \mathbf{v}, \xi) \Big|_{t_1=0} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y}, \xi) v_j \right) \Big|_{t_1=0} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y}, \xi) v_j \right) \Big|_{t_1=0} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} f_i(\mathbf{0}, \xi) v_j y_k \right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n B_i(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \xi) e_i = B(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \xi), \end{aligned} \quad (5.323)$$

$$\begin{aligned}
D^2h(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \xi) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} h(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y} + t_2 \mathbf{z}, \mathbf{v}, \xi) \Big|_{(t_1, t_2) = (0,0)} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\sum_{i=1}^n h_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y} + t_2 \mathbf{z}, \mathbf{v}, \xi) e_i \right) \Big|_{(t_1, t_2) = (0,0)} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} h_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y} + t_2 \mathbf{z}, \mathbf{v}, \xi) \Big|_{(t_1, t_2) = (0,0)} e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y} + t_2 \mathbf{z}, \xi) v_j \right) \Big|_{(t_1, t_2) = (0,0)} e_i \quad (5.324) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_j} f_i(\mathbf{0} + t_1 \mathbf{y} + t_2 \mathbf{z}, \xi) v_j \right) \Big|_{(t_1, t_2) = (0,0)} e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3}{\partial u_j \partial u_k \partial u_l} f_i(\mathbf{0}, \xi) v_j y_k z_l \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \xi) e_i = C(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \xi).
\end{aligned}$$

O próximo passo é obter a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$ e até os termos de ordem 3, da aplicação linear e das funções multilineares simétricas que aparecem em (5.321). Tal desenvolvimento está associado com a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$. Assim, tomando $\mathbf{u} = u(s, \epsilon, \nu)$ e $\mathbf{v} = v(s, \epsilon, \nu)$ e levando em conta (5.316) é possível mostrar que

$$\mathcal{M}(s, \epsilon, \nu) v(s, \epsilon, \nu) = m_0(s, \nu) + m_1(s, \nu) \epsilon + \frac{1}{2} m_2(s, \nu) \epsilon^2 + O_{\mathcal{M}v}(s, \epsilon^3, |\nu|), \quad (5.325)$$

sendo

$$m_0(s, \nu) = A(\xi_0) v_0(s, \nu), \quad (5.326)$$

$$m_1(s, \nu) = A(\xi_0) v_1(s, \nu) + B(u_1(s, \nu), v_0(s, \nu), \xi_0), \quad (5.327)$$

$$\begin{aligned}
m_2(s, \nu) &= A(\xi_0) v_2(s, \nu) + \mu_2(\nu) \partial_\mu A(\xi_0) v_0(s, \nu) + \\
&\quad 2B(u_1(s, \nu), v_1(s, \nu), \xi_0) + B(u_2(s, \nu), v_0(s, \nu), \xi_0) + \\
&\quad C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), v_0(s, \nu), \xi_0). \quad (5.328)
\end{aligned}$$

Resultado semelhante a (5.325) poderia ser obtido considerando (5.316) e a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$ e até os termos de ordem 2, da matriz

$$\mathcal{M}(s, \epsilon, \nu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu) \right)_{i,j=1}^{n,n}, \quad (5.329)$$

ou seja,

$$\mathcal{M}(s, \epsilon, \nu) = M_0(s, \nu) + M_1(s, \nu) \epsilon + \frac{1}{2!} M_2(s, \nu) \epsilon^2 + O_{\mathcal{M}}(s, \epsilon^3, |\nu|), \quad (5.330)$$

com as matrizes em (5.330) dadas por

$$M_0(s, \nu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(0, 0, \nu) \right)_{i,j=1}^{n,n}, \quad (5.331)$$

$$M_1(s, \nu) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f_i(0, 0, \nu) u_{1,k}(s, \nu) \right)_{i,j=1}^{n,n}, \quad (5.332)$$

$$\begin{aligned} M_2(s, \nu) = & \mu_2(\nu) \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(0, 0, \nu) \right) \right)_{i,j=1}^{n,n} + \\ & \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f_i(0, 0, \nu) u_{2,k}(s, \nu) \right)_{i,j=1}^{n,n} + \\ & \left(\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} f_i(0, 0, \nu) u_{1,k}(s, \nu) u_{1,l}(s, \nu) \right)_{i,j=1}^{n,n}. \end{aligned} \quad (5.333)$$

Em (5.331), (5.332) e (5.333), para $k = 1, 2$, $(s, \nu) \mapsto u_{k,l}(s, \nu)$ são as componentes da função $(s, \nu) \mapsto u_k(s, \nu)$ com $l = 1, 2, \dots, n$. Note que, utilizando (5.330), a expansão em série de Taylor de $\mathcal{M}(s, \epsilon, \nu)v(s, \epsilon, \nu)$ na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$ e até os termos de ordem 2, é exatamente igual a (5.325).

A expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno de $\epsilon = 0$ e até os termos de ordem 3 para aplicação $(s, \epsilon, \nu) \mapsto \partial_\mu f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu)$ consiste em substituir $\mathbf{u} = u(s, \epsilon, \nu)$ e $\xi = (\phi(\epsilon, \nu), \nu)$ em

$$\partial_\mu f(\mathbf{u}, \xi) = \partial_\mu A(\xi)\mathbf{u} + \partial_\mu B(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \xi) + \frac{1}{2!} \partial_\mu C(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}, \xi) + O_{d_\mu f}(\|\mathbf{u}\|^4, \|\xi\|), \quad (5.334)$$

utilizar a linearidade da aplicação linear e das funções multilineares simétricas em (5.334) e expandir a aplicação linear e as funções multilineares simétricas em (5.334) na variável ϵ , empregando a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$. Assim,

$$\partial_\mu f(u(s, \epsilon, \nu), \phi(\epsilon, \nu), \nu) = f_1(s, \nu)\epsilon + \frac{1}{2!} f_2(s, \nu)\epsilon^2 + \frac{1}{3!} f_3(s, \nu)\epsilon^3 + O_{d_\mu f}(s, \epsilon^3, |\nu|), \quad (5.335)$$

com

$$f_1(s, \nu) = \partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu), \quad (5.336)$$

$$f_2(s, \nu) = \partial_\mu A(\xi_0)u_2(s, \nu) + \partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0), \quad (5.337)$$

$$\begin{aligned} f_3(s, \nu) = & \partial_\mu A(\xi_0)u_3(s, \nu) + 3\mu_2(\nu)\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) + \\ & 3\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) + \partial_\mu C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0). \end{aligned} \quad (5.338)$$

Conforme mencionado, os termos das seqüências $\{u_k(s, \nu)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{\alpha_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{\beta_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $\{\chi_k(\nu)\}_{k \in \mathbb{N}}$ são obtidos de maneira recursiva substituindo (5.316), (5.325)

e (5.335) em (5.315), empregando (5.304), $\mu_k(\nu)$ e $\omega_k(\nu)$ para $k = 1, 2$ e agrupando os termos associados com as potências em ϵ . Fazendo isto, resultam os seguintes problemas com operadores lineares

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu v_0)(s, \nu) &= \alpha_0(\nu)u_1(s, \nu) + \partial_\mu A(\xi_0)u_1(s, \nu) + \beta_0(\nu)\frac{d}{ds}u_1(s, \nu) \\ v_0(s, \nu) &= v_0(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.339)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu v_1)(s, \nu) &= \alpha_1(\nu)u_1(s, \nu) + \alpha_0(\nu)u_2(s, \nu) + \frac{1}{2}\partial_\mu A(\xi_0)u_2(s, \nu) - \\ &B(u_1(s, \nu), q_0(s, \nu), \xi_0) + \frac{1}{2}\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) + \\ &\beta_1(\nu)\frac{d}{ds}u_1(s, \nu) + \frac{1}{2}\beta_0(\nu)\frac{d}{ds}u_2(s, \nu) \\ v_1(s, \nu) &= v_1(s + 2\pi, \nu), \end{aligned} \quad (5.340)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_\nu v_2)(s, \nu) &= \alpha_0(\nu)u_3(s, \nu) + 2\alpha_1(\nu)u_2(s, \nu) + \alpha_2(\nu)u_1(s, \nu) + \\ &2\mu_2(\nu)\alpha_0(\nu)q_0(s, \nu) - \mu_2(\nu)\partial_\mu A(\xi_0)q_0(s, \nu) + \frac{1}{3}\partial_\mu A(\xi_0)u_3(s, \nu) + \\ &\mu_2(\nu)\partial_\mu^2 A(\xi_0)u_1(s, \nu) - 2B(u_1(s, \nu), q_1(s, \nu), \xi_0) - \\ &B(u_2(s, \nu), q_0(s, \nu), \xi_0) - C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), q_0(s, \nu), \xi_0) + \\ &\partial_\mu B(u_1(s, \nu), u_2(s, \nu), \xi_0) + \frac{1}{3}\partial_\mu C(u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), u_1(s, \nu), \xi_0) + \\ &\beta_2(\nu)\frac{d}{ds}u_1(s, \nu) + \beta_1(\nu)\frac{d}{ds}u_2(s, \nu) + \frac{1}{3}\beta_0(\nu)\frac{d}{ds}u_3(s, \nu) + \\ &\omega_2(\nu)\frac{d}{ds}q_0(s, \nu) \\ v_3(s, \nu) &= v_3(s + 2\pi, \nu). \end{aligned} \quad (5.341)$$

De (5.339) e do **Teorema 5.3.1**, segue que $[\mathbf{p}, \mathcal{J}_\nu v_0] = (\alpha_0(\nu) + i\beta_0(\nu)) + \partial_\mu \lambda(\xi_0) = 0$, ou seja, $\alpha_0(\nu) = -\partial_\mu \gamma(\xi_0)$ e $\beta_0(\nu) = -\partial_\mu \eta(\xi_0)$. Logo, por **Proposição 5.3.4**,

$$v_0(s, \nu) = -\left(e^{is}\partial_\mu q(\xi_0) + e^{-is}\partial_\mu \bar{q}(\xi_0)\right). \quad (5.342)$$

Os demais problemas com operador linear, (5.340) e (5.341), são resolvidos de forma análoga empregando **Teorema 5.3.1** e **Proposição 5.3.4**. Assim, de (5.340), $\alpha_1(\nu) = 0$, $\beta_1(\nu) = 0$ e

$$v_1(s, \nu) = -\frac{1}{2}\left(e^{2is}\partial_\mu h_{2,0}(\xi_0) + 2\partial_\mu h_{1,1}(\xi_0) + e^{-2is}\partial_\mu \bar{h}_{2,0}(\xi_0)\right). \quad (5.343)$$

Não é necessário encontrar a função $(s, \nu) \mapsto v_2(s, \nu)$ em (5.341). Como o objetivo é obter uma aproximação para o expoente de Floquet, basta empregar **Proposição 5.3.4**, o que

resulta em $\alpha_2(\nu) = 0$ e $\beta_2(\nu) = 0$. Portanto, de (5.318)

$$\begin{aligned}\chi_1(\nu) &= 0, \\ \chi_2(\nu) &= 2\alpha_0(\nu)\mu_2(\nu) = 2\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_3(\nu) &= 6\alpha_1(\nu)\mu_2(\nu) = 0, \\ \chi_4(\nu) &= 4\alpha_0(\nu)\mu_4(\nu) + 12\alpha_2(\nu)\mu_2(\nu) = 8\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 12\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)).\end{aligned}\tag{5.344}$$

Com os resultados anteriores, o seguinte teorema foi demonstrado.

Teorema 5.3.3. *Seja*

$$\chi(\epsilon, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \chi_k(\nu) \epsilon^k, \tag{5.345}$$

a série de Taylor formal do expoente característico $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ associado à equação diferencial (5.220). Então,

$$\begin{aligned}\chi_1(\nu) &= 0, \\ \chi_2(\nu) &= 2\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0)), \\ \chi_3(\nu) &= 0, \\ \chi_4(\nu) &= 8\operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_0)) + 12\mu_2(\nu)\operatorname{Re}(\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)),\end{aligned}\tag{5.346}$$

com $G_{2,1}(\xi_0)$, $\partial_\mu G_{2,1}(\xi_0)$ e $G_{3,2}(\xi_0)$ dados em (5.281), (5.299) e (5.300), respectivamente.

Decorre do **Teorema 5.3.3**, o seguinte corolário cuja demonstração é idêntica àquela do **Corolário 5.2.1**.

Corolário 5.3.1. *Seja*

$$\chi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2}\chi_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{24}\chi_4(\nu)\epsilon^4 + O_\chi(\epsilon^5, |\nu|), \tag{5.347}$$

a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 4, do expoente característico $(\epsilon, \nu) \mapsto \chi(\epsilon, \nu)$ associado à equação diferencial $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, \xi)$ e seja

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2}\mu_2(\nu)\epsilon^2 + \frac{1}{24}\mu_4(\nu)\epsilon^4 + O_\chi(\epsilon^5, |\nu|), \tag{5.348}$$

a expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 4, da função $(\epsilon, \nu) \mapsto \mu = \phi(\epsilon, \nu)$. Então,

a) Para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno e $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) \neq 0$, a estabilidade da órbita periódica da equação diferencial (5.220) é dada pelo sinal de $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0))$. Quando $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) < 0$ para $\xi_0 \in U$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) é estável. Como para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno,

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{2} \frac{\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_\mu \gamma(\xi_0)} \epsilon^2 + O_\mu(\epsilon^4, |\nu|), \quad (5.349)$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase de (5.220) ocorre para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_0) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase ocorre para $\mu < 0$. Se $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_0)) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) é instável.

b) Suponha que para $\xi_1 = (0, 0)$, $\text{Re}(G_{2,1}(\xi_1)) = 0$ e $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) \neq 0$. Então para $\epsilon \in \mathbb{R}$, suficientemente pequeno, a estabilidade é dada pelo sinal de $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))$. Quando $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) é estável. Como, neste caso,

$$\mu = \phi(\epsilon, \nu) = -\frac{1}{12} \frac{\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4 + O_\mu(\epsilon^5, |\nu|), \quad (5.350)$$

se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) ocorre para $\mu > 0$ e se $\partial_\mu \gamma(\xi_1) < 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) ocorre para $\mu < 0$. Se $\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) > 0$, a órbita periódica no retrato de fase da equação diferencial (5.220) é instável.

Não é possível decidir a partir do **Corolário 5.3.1** a estabilidade de uma órbita periódica, que existe em decorrência de uma bifurcação de Hopf, para pontos $(\epsilon, \nu) \in U_\epsilon$ tais que $\chi(\epsilon, \nu) \equiv 0$. Contudo, o estudo do conjunto $\chi^{-1}(0)$ permite obter uma aproximação para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} no plano de parâmetros $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. Tal curva existe para um ponto de Hopf transversal de codimensão dois, $(\mathbf{0}, \xi_1) \in W \times U$ (ver definição 5.1.4). Esta afirmação será demonstrada no **Teorema 5.3.4**.

Procedendo como na seção anterior, do **Teorema 5.3.3**, o expoente característico pode ser escrito como

$$\chi(\epsilon, \nu) = \epsilon^2 \Psi(\epsilon, \nu), \quad (5.351)$$

com a função $(\epsilon, \nu) \mapsto \Psi(\epsilon, \nu)$ possuindo expansão em série de Taylor na variável ϵ , em torno da origem e até os termos de ordem 3 da forma

$$\Psi(\epsilon, \nu) = \frac{1}{2} \chi_2(\nu) + \frac{1}{24} \chi_4(\nu) \epsilon^2 + O_\chi(\epsilon^3, |\nu|). \quad (5.352)$$

Logo, basta estudar o conjunto $\Psi^{-1}(0)$, o que resulta no **Teorema 5.3.4**.

Teorema 5.3.4. *Seja $(\mathbf{0}, \xi_1) \in W \times U$, um ponto de Hopf de codimensão dois de (5.220) para o qual $\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1)) \neq 0$. Então, a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas, no plano de parâmetros $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, associada com a equação diferencial (5.220) possui as seguintes representações locais*

$$\Gamma(\epsilon) = \left(\frac{\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{12\partial_\mu \gamma(\xi_1)} \epsilon^4, -\frac{\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1))} \epsilon^2 \right) + O_\Gamma(\epsilon), \quad (5.353)$$

$$\mu = \Lambda(\nu) = \frac{\mu_2(\nu)}{\psi_2} \nu + \frac{1}{6} \frac{\mu_4(\nu)}{\psi_2^2} \nu^2 + O_\Lambda(|\nu|), \quad (5.354)$$

com

$$\psi_2 = -\frac{2\text{Re}(G_{3,2}(\xi_1))}{3\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1))}. \quad (5.355)$$

Demonstração. Se $(\mathbf{0}, \xi_1) \in W \times U$ é um ponto de Hopf de codimensão dois de (5.220) para o qual $\text{Re}(\partial_\nu G_{2,1}(\xi_1)) \neq 0$, então a equação diferencial (5.220) restrita à variedade central é localmente topologicamente equivalente à equação diferencial (4.76). Pelo **Teorema 4.2.1**, existe a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas C_{NH} de (5.220) no plano de parâmetros $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$. As representações locais (5.353) e (5.354) podem ser obtidas de maneira idêntica ao que foi feito na demonstração do **Teorema 5.2.3**. ■

No próximo capítulo, todos os resultados obtidos nesta seção, serão aplicados ao sistema de controle em malha fechada (3.31).

Capítulo 6

Aplicação da Teoria de Aproximação de Órbitas Periódicas em \mathbb{R}^n

A finalidade deste capítulo é empregar a teoria de aproximações de órbitas periódicas em campos de vetores em \mathbb{R}^n , do capítulo 5, ao sistema de controle em malha fechada e em \mathbb{R}^3 do capítulo 3, porém com referência nula. Mais precisamente, a idéia é mostrar que este sistema de controle apresenta bifurcações de Hopf de codimensões um e dois e, assim, existem regiões no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ nas quais a escolha de K_I e K_P garantem que o único ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável.

6.1 Bifurcação de Hopf no Sistema de Controle em Malha Fechada em \mathbb{R}^3

De acordo com a **Proposição 3.2.1**, para referência nula, o único ponto de equilíbrio é a origem. Além disto, quando $r = 0$, todos os resultados da seção 3.2 são preservados com a substituição $\beta = m$. Assim, as regiões no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ nos quais a origem é localmente assintoticamente estável são as mesmas do ponto de equilíbrio (3.33) fazendo $r = 0$.

Agora, com a teoria da seção 5.3 é possível analisar a estabilidade da origem quando $\xi = \xi_0 = (K_{I0}(K_P), K_P)$, sendo

$$K_{I0}(K_P) = \frac{(a_1 + mb_1K_P)(a_0 + mb_0K_P)}{m(b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P))}. \quad (6.1)$$

Para $\xi = \xi_0$, os autovalores da matriz Jacobiana (3.34) são da forma $\lambda(\xi_0)$, $\bar{\lambda}(\xi_0)$ e

$\lambda_3(\xi_0)$, com $\lambda(\xi_0) = i\omega_0(K_P)$,

$$\omega_0(K_P) = \frac{\sqrt{b_0(a_0 + mb_0K_P)}}{\sqrt{b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P)}} \quad (6.2)$$

e $\lambda_3(\xi_0)$ tal como em (3.48).

Um autovetor $q(\xi_0) \in \mathbb{C}^3$ associado ao autovalor $\lambda(\xi_0) = i\omega_0(K_P)$ é da forma

$$q(\xi_0) = (-i\omega_0(K_P), a_0 + mK_P(b_0 - ib_1\omega_0(K_P)), K_{I_0}(K_P)) \quad (6.3)$$

e um autovetor adjunto $p(\xi_0) \in \mathbb{C}^3$, associado ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi_0) = -i\omega_0(K_P)$ e normalizado em relação ao autovetor $q(\xi_0)$, é $p(\xi_0) = (p_1(K_P), p_2(K_P), p_3(K_P))$, com

$$\begin{aligned} p_1(K_P) &= \frac{a_1 - i\omega_0(K_P)}{2\omega_0(K_P)(\omega_0(K_P) + i(a_1 + mb_1K_P))}, \\ p_2(K_P) &= \frac{1}{2\omega_0(K_P)(\omega_0(K_P) + i(a_1 + mb_1K_P))}, \\ p_3(K_P) &= \frac{m(b_1\omega_0(K_P) + ib_0)}{2\omega_0^2(K_P)(\omega_0(K_P) + i(a_1 + mb_1K_P))}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Teorema 6.1.1. *A derivada do autovalor $\lambda(\xi)$, em relação ao parâmetro K_I e calculada em $\xi = \xi_0 = (K_{I_0}(K_P), K_P)$, é dada por $\partial_{K_I}\lambda(\xi_0) = \partial_{K_I}\gamma(\xi_0) + i\partial_{K_I}\eta(\xi_0)$, com*

$$\partial_{K_I}\gamma(\xi_0) = \frac{m(b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P))}{2((a_1 + mb_1K_P)^2 + \omega_0^2(K_P))}, \quad (6.5)$$

$$\partial_{K_I}\eta(\xi_0) = \frac{m(a_1b_0 + b_1(mb_0K_P + \omega_0^2(K_P)))}{2\omega_0(K_P)((a_1 + mb_1K_P)^2 + \omega_0^2(K_P))}. \quad (6.6)$$

Demonstração. A demonstração consiste de um cálculo simples utilizando os autovetores $q(\xi_0)$ e $p(\xi_0)$,

$$\partial_{K_I}A(\xi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

e os itens (c) e (d) da **Proposição 5.2.3**. ■

As funções multilineares simétricas B , C , D e E associadas com (3.32) são

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \xi_0) = (0, 0, 0), \quad (6.8)$$

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi_0) = (C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi_0), C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi_0), 0), \quad (6.9)$$

sendo

$$C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi_0) = b_1(x_3 - x_1 K_P)(y_3 - y_1 K_P)(u_3 - u_1 K_P)S^{(3)}(0), \quad (6.10)$$

$$C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \xi_0) = (b_0 - a_1 b_1)(x_3 - x_1 K_P)(y_3 - y_1 K_P)(u_3 - u_1 K_P)S^{(3)}(0), \quad (6.11)$$

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \xi_0) = (0, 0, 0), \quad (6.12)$$

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi_0) = (E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi_0), E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi_0), 0). \quad (6.13)$$

Em (6.13),

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi_0) &= b_1(x_3 - x_1 K_P)(y_3 - y_1 K_P)(u_3 - u_1 K_P)(v_3 - v_1 K_P) \\ &\quad (w_3 - w_1 K_P)S^{(5)}(0), \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} E_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \xi_0) &= (b_0 - a_1 b_1)(x_3 - x_1 K_P)(y_3 - y_1 K_P)(u_3 - u_1 K_P) \\ &\quad (v_3 - v_1 K_P)(w_3 - w_1 K_P)S^{(5)}(0). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Como a função multilinear simétrica B é identicamente nula, das expressões (5.275) e (5.276), resulta que $h_{2,0}(\xi_0) = 0$ e $h_{1,1}(\xi_0) = 0$. Assim, empregando os autovetores $q(\xi_0)$ e $p(\xi_0)$ e a expressão (5.281), o número complexo $G_{2,1}(\xi_0)$ é dado por

$$G_{2,1}(\xi_0) = \frac{i(b_0 + ib_1 \omega_0(K_P))(K_{I_0}^2(K_P) + K_P^2 \omega_0^2(K_P))^2 S^{(3)}(0)}{2(a_1 + mb_1 K_P + i\omega_0(K_P))(K_{I_0}(K_P) - iK_P \omega_0(K_P))\omega_0(K_P)}. \quad (6.16)$$

Portanto, da definição 5.3.2 para o primeiro coeficiente de Lyapunov,

$$l_1(\xi_0) = -\frac{(K_{I_0}^2(K_P) + K_P^2 \omega_0^2(K_P))Q(K_P)S^{(3)}(0)}{4m(b_0 - b_1(a_1 + mb_1 K_P))((a_1 + mb_1 K_P)^2 + \omega_0^2(K_P))} \quad (6.17)$$

sendo a função $K_P \mapsto Q(K_P) = AK_P^2 + BK_P + C$ um polinômio (fixados os demais parâmetros) tal que

$$\begin{aligned} A &= m^2 b_1 (b_0^2 + a_0 b_1^2), \\ B &= 2ma_0 a_1 b_1^2, \\ C &= a_0 a_1 (a_1 b_1 - b_0). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Suponha a partir deste ponto que a saturação $v \mapsto u = S(v)$ é tal como no item (d) da **Proposição 2.4.1**. Assim, $S^{(3)}(0) < 0$ e o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov é dado pelo sinal do polinômio Q e pelo sinal de um termo do denominador de (6.17). O primeiro coeficiente de Lyapunov (6.17) é não nulo para todo $K_P > 0$ tal que $Q(K_P) \neq 0$.

Teorema 6.1.2. *Considere todos os valores de $K_P > 0$ tais que $K_{I0}(K_P) > 0$ e $Q(K_P) \neq 0$. Se $r = 0$ e $\xi = \xi_0 = (K_{I0}(K_P), K_P)$, então o ponto de equilíbrio (3.33) de (3.32) é um ponto de Hopf transversal de codimensão um.*

Demonstração. Nas hipóteses do teorema, para $r = 0$ e $\xi = \xi_0 = (K_{I0}(K_P), K_P)$, a matriz Jacobiana (3.34) possui autovalores $\lambda(\xi_0)$, $\bar{\lambda}(\xi_0)$ e $\lambda_3(\xi_0)$, com $\lambda(\xi_0) = i\omega_0(K_P)$ e $\omega_0(K_P) > 0$. Além disto, o primeiro coeficiente de Lyapunov (6.17) é não nulo. Portanto, pela definição 5.1.2, o ponto de equilíbrio (3.33) é um ponto de Hopf de codimensão um de (3.32). Como por (6.1) e (6.2), $b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P) \neq 0$, a transversalidade (6.1.1) é não nula e o teorema está demonstrado, de acordo com a definição (5.1.3). ■

Visto que

$$-\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(G_{2,1}(\xi_0))}{\partial_{K_I} \gamma(\xi_0)} = -\frac{l_1(\xi_0)}{\partial_{K_I} \gamma(\xi_0)} = \frac{(K_{I0}^2(K_P) + K_P^2 \omega_0^2(K_P))Q(K_P)S^{(3)}(0)}{2m^2(b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P))^2}, \quad (6.19)$$

e $S^{(3)}(0) < 0$, nas hipóteses do **Teorema 6.1.2** e de acordo com o item (a) do **Corolário 5.3.1**, resulta que a região de estabilidade no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ para o sistema de controle em malha fechada (3.32) pode ser uma das seguintes:

- a) $\left\{ (K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2 : K_I < \frac{(a_1 + mb_1K_P)(a_0 + mb_0K_P)}{m(b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P))}, K_P > 0, Q(K_P) < 0 \right\}$;
- b) $\left\{ (K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2 : K_I > \frac{(a_1 + mb_1K_P)(a_0 + mb_0K_P)}{m(b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P))}, K_P > 0, Q(K_P) > 0 \right\}$.

Exemplo 6.1.1. *Considere o sistema de controle em malha fechada (3.32) com a seguinte escolha para os valores dos parâmetros do sistema de controle em malha aberta, $a_0 = 12$, $b_0 = 1$, $a_1 = 12$ e $b_1 = -2$ e a função saturação da forma*

$$v \mapsto u = S(v) = 10 \tanh\left(\frac{1}{10}v\right), \quad (6.20)$$

ou seja, $m = 1$ e $M = 10$. Note que a saturação (6.20) satisfaz o item (d) da **Proposição 2.4.1**.

Com estes valores, a matriz Jacobiana (3.34) é dada por

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 2K_P & 1 & -2 \\ 12 - 25K_P & -12 & 25 \\ -K_I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

com polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2(6 - K_P)\lambda^2 + (12 + K_P - 2K_I)\lambda + K_I. \quad (6.22)$$

Assim, pelo **Teorema 3.2.1**, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável se as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{aligned} K_I &> 0, \\ K_I &< \frac{12 + K_P}{2}, \\ K_P &< 6, \\ K_I &< \frac{2(6 - K_P)(12 + K_P)}{25 - 4K_P}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Como

$$\frac{2(6 - K_P)(12 + K_P)}{25 - 4K_P} < \frac{12 + K_P}{2}, \quad (6.24)$$

resulta que se $0 < K_I < \frac{2(6 - K_P)(12 + K_P)}{25 - 4K_P}$ e $0 < K_P < 6$, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável.

Para $K_I = K_{I0}(K_P)$, ou seja, para $\xi = \xi_0 = (K_{I0}(K_P), K_P)$ com

$$K_{I0}(K_P) = \frac{2(6 - K_P)(12 + K_P)}{25 - 4K_P}, \quad (6.25)$$

a matriz Jacobiana possui autovalores $\lambda(\xi_0)$, $\bar{\lambda}(\xi_0)$, com $\lambda(\xi_0) = i\omega_0(K_P)$ e $\lambda_3(\xi_0) = -2(6 - K_P)$. Dos resultados (6.2), (6.5), (6.6) e (6.16) segue que

$$\omega_0(K_P) = \sqrt{\frac{12 + K_P}{25 - 4K_P}}, \quad (6.26)$$

$$\partial_{K_I}\gamma(\xi_0) = \frac{(25 - 4K_P)^2}{2((25 - 4K_P)(12 - 2K_P)^2 + K_P + 12)}, \quad (6.27)$$

$$\partial_{K_I}\eta(\xi_0) = \frac{2\sqrt{(K_P + 12)(25 - 4K_P)(2K_P^2 - 25K_P + 69)}}{(K_P + 12)(3612 - 1775K_P + 292K_P^2 - 16K_P^3)}, \quad (6.28)$$

$$G_{2,1}(\xi_0) = \frac{(2\omega_0(K_P) + i)(K_{I0}(K_P) + iK_P\omega_0(K_P))^2(K_P\omega_0(K_P) + iK_{I0}(K_P))}{100\omega_0(K_P)(\omega_0(K_P) + i(2K_P - 12))}. \quad (6.29)$$

Note que para $K_P \in (0, 6)$, (6.25) e (6.26) são positivos. O primeiro coeficiente de Lyapunov, obtido a partir de (6.29)

$$l_1(\xi_0) = \frac{(K_P + 12)(25K_P^2 - 432K_P + 1728)(-98K_P^2 + 1152K_P - 3600)}{100(25 - 4K_P)^2(3612 - 1775K_P + 292K_P^2 - 16K_P^3)}, \quad (6.30)$$

é negativo para $K_P \in (0, 6)$, pois o polinômio $K_P \mapsto Q(K_P) = -98K_P^2 + 1152K_P - 3600$ possui concavidade negativa e o seu discriminante é $\Delta = -84096$. Visto que a transversalidade (6.27) é não nula para $K_P \in (0, 6)$, pelo **Teorema 6.1.2**, o ponto de equilíbrio (3.33) é um ponto de Hopf transversal de codimensão um e a região de estabilidade é a região (a), isto é,

$$\left\{ (K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2 : 0 < K_I < \frac{2(6 - K_P)(12 + K_P)}{25 - 4K_P}, 0 < K_P < 6 \right\}. \quad (6.31)$$

A Figura 6.1 mostra a região de estabilidade no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ para (3.32) com $a_0 = 12$, $b_0 = 1$, $a_1 = 12$ e $b_1 = -2$ e a função saturação (6.20).

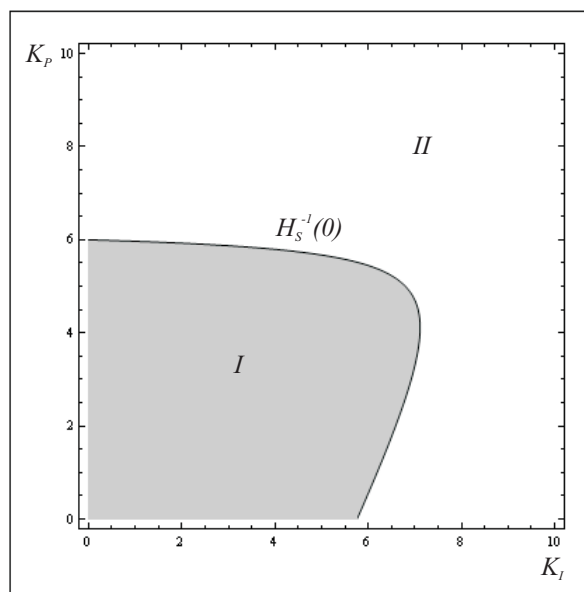


Figura 6.1: Região de estabilidade no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$ quando $a_0 = 12$, $b_0 = 1$, $a_1 = 12$ e $b_1 = -2$ e para a função saturação (6.20).

Na região I da Figura 6.1, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável, enquanto que na região II o ponto de equilíbrio (3.33) é instável. Visto que o primeiro coeficiente de Lyapunov (6.30) é negativo para $K_P \in (0, 6)$, pelo **Corolário 5.3.1** há uma órbita periódica estável perto do ponto de equilíbrio instável (3.33). Note que para $K_I = K_{I0}(K_P)$ e $K_P \in (0, 6)$, ou seja, para $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)$ com $(K_I, K_P) \mapsto H_S(K_I, K_P) = K_I - K_{I0}(K_P)$, o ponto de equilíbrio é um atrator, já que $l_1(K_P) < 0$ e $\lambda_3(\xi_0) = -2(6 - K_P) < 0$. Assim, para este exemplo, os resultados são análogos aqueles comentados no caso (a) da Figura 1.3.

Com o objetivo de realizar algumas simulações, considere que $K_P = 3$. De (6.25), segue que $K_{I0}(3) = 6.9231$ e, assim, o ponto $(K_{I1}, K_{P1}) = (6, 3)$ pertence à região I

da Figura 6.1 e o ponto $(K_{I2}, K_{P2}) = (7, 3)$ pertence à região II da Figura 6.1. Para $(K_I, K_P) = (K_{I1}, K_{P1})$ e para a condição inicial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$, os resultados são mostrados nas Figuras 6.2 e 6.3. As simulações foram realizadas com o software **MATLAB 7.9**.

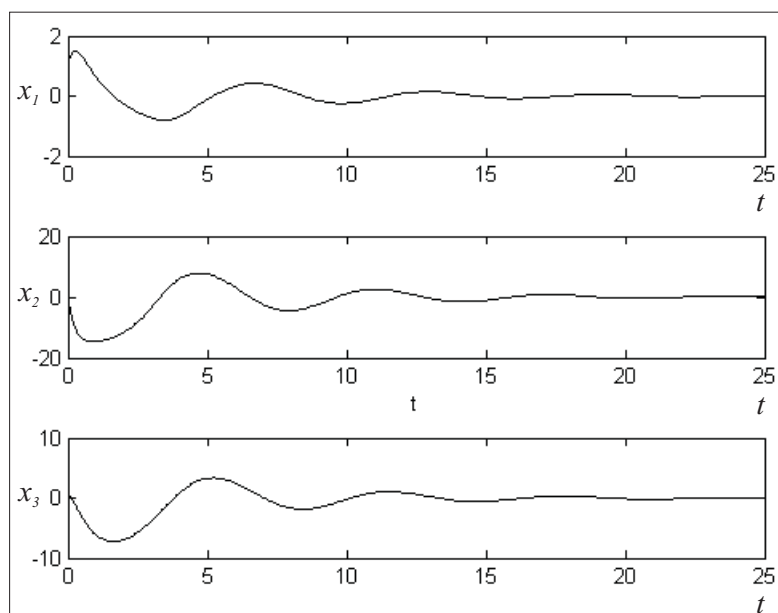


Figura 6.2: Gráficos das componentes $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ e $t \mapsto x_3(t)$ para $(K_I, K_P) = (6, 3)$ e para a condição inicial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$.

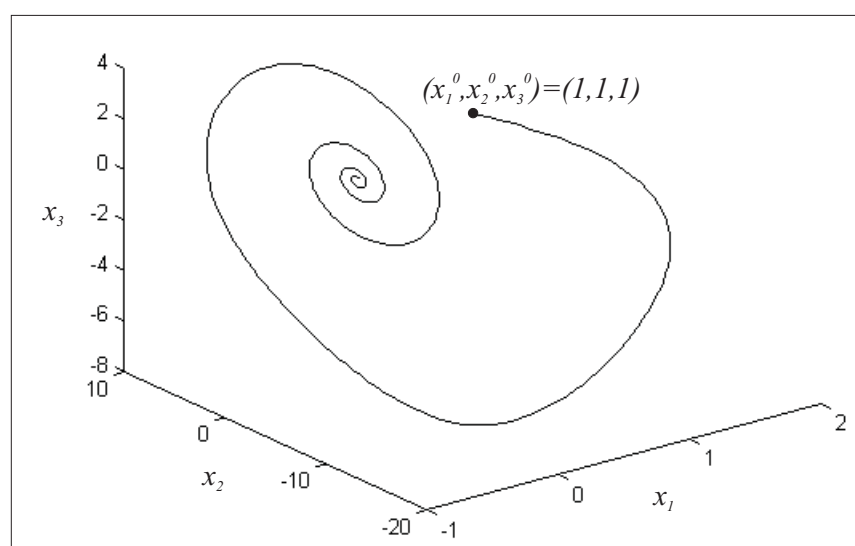


Figura 6.3: Órbita de (3.32) iniciando no ponto $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 1, 1)$ e para $(K_I, K_P) = (6, 3)$.

Conforme mencionado, para o ponto $(K_I, K_P) = (K_{I2}, K_{P2})$ na região II, há uma ór-

bita periódica estável perto do ponto de equilíbrio instável (3.33). Esta órbita periódica pode ser aproximada com a teoria da seção 5.3. Como para $\xi_0 = (K_{I_0}(K_{P_2}), K_{P_2})$, $h_{2,0}(\xi_0) = h_{1,1}(\xi_0) = 0$, empregando (5.258), (5.274) e (5.283), a órbita periódica $(s, \epsilon, K_P) \mapsto u(s, \epsilon, K_P)$ pode ser aproximada até o termo ϵ^3 por

$$u(s, \epsilon, K_{P_2}) = u_1(s, K_{P_2})\epsilon + \frac{1}{6}u_3(s, K_{P_2})\epsilon^3 + O_u(s, \epsilon^4). \quad (6.32)$$

Para $K_P = K_{P_2} = 3$, de (6.3) e (6.4),

$$\begin{aligned} q(\xi_0) &= (-i1.0742, 15.0000 + i6.4450, 6.9231), \\ p(\xi_0) &= (0.0807 - i0.9165, 0.0135 - i0.0752, 0.0431 + i0.1629) \end{aligned} \quad (6.33)$$

e por (5.258)

$$\begin{aligned} u_1(s, K_{P_2}) &= 2\text{Re}(e^{is}q(\xi_0)) \\ &= (2.1483\text{sen}(s), 30.0000\text{cos}(s) - 12.8901\text{sen}(s), 13.8462\text{cos}(s)). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Por (5.284) e (5.285),

$$h_{3,0}(\xi_0) = (1.6881 + i2.4527, -33.2161 - i19.2189, -5.2692 + i3.6266), \quad (6.35)$$

$$h_{2,1}(\xi_0) = (2.1723 + i0.6421, -25.9664 + i4.3287, 2.5065 + i6.0170). \quad (6.36)$$

Como comentado na seção 5.3, o vetor complexo (6.36) é solução do sistema de equações lineares de dimensão 4

$$\begin{pmatrix} i\omega_0(K_{P_2})I_n - A(\xi_0) & q(\xi_0) \\ \bar{p}(\xi_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{2,1}(\xi_0) \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{2,1}(\xi_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

com

$$i\omega_0(K_{P_2})I_n - A(\xi_0) = \begin{pmatrix} 6.0000 & 1.0000 & -2.0000 \\ -87.0000 & -12.0000 & 25.0000 \\ -6.9231 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

$$R_{2,1}(\xi_0) = (17.2559 + i6.1861, -189.9190 - i70.5096, 8.5757 + i7.1378). \quad (6.39)$$

Assim, utilizando o item (a) da **Proposição 5.2.3**

$$\partial_{K_1}q(\xi_0) = (-0.0766 + i0.0838i, 0.7425 + i0.4944, 0.1616 + i0.6338) \quad (6.40)$$

e por (5.283),

$$\begin{aligned} u_3(s, K_{P2}) &= 2\operatorname{Re}(e^{3is}h_{3,0}(\xi_0)) + 6\operatorname{Re}(e^{is}h_{2,1}(\xi_0)) + 6\mu_2(K_{P2})\operatorname{Re}(e^{is}\partial_{K_I}q(\xi_0)) \\ &= (u_{31}(s, K_{P2}), u_{32}(s, K_{P2}), u_{33}(s, K_{P2})), \end{aligned} \quad (6.41)$$

com

$$\begin{aligned} u_{31}(s, K_{P2}) &= 9.7793\cos(s) + 3.3761\cos(3s) - 7.4138\operatorname{sen}(s) - 4.9054\operatorname{sen}(3s), \\ u_{32}(s, K_{P2}) &= -124.2550\cos(s) - 66.4323\cos(3s) - 46.9779\operatorname{sen}(s) + \\ &\quad 38.4378\operatorname{sen}(3s), \\ u_{33}(s, K_{P2}) &= 21.9045\cos(s) - 10.5385\cos(3s) - 63.0279\operatorname{sen}(s) - 7.2531\operatorname{sen}(3s). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Com os resultados anteriores, a representação (6.32) assume a forma

$$u(s, \epsilon, K_{P2}) = (u_1(s, \epsilon, K_{P2}), u_2(s, \epsilon, K_{P2}), u_3(s, \epsilon, K_{P2})), \quad (6.43)$$

sendo

$$\begin{aligned} u_1(s, \epsilon, K_{P2}) &= 2.1483\operatorname{sen}(s)\epsilon + (1.6299\cos(s) + 0.5627\cos(3s) - \\ &\quad 1.2356\operatorname{sen}(s) - 0.8176\operatorname{sen}(3s))\epsilon^3 + O_{u_1}(s, \epsilon^4), \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} u_2(s, \epsilon, K_{P2}) &= (30.000\cos(s) - 12.8901\operatorname{sen}(s))\epsilon + (-20.7091\cos(s) - \\ &\quad 11.0720\cos(3s) - 7.8297\operatorname{sen}(s) + 6.4063\operatorname{sen}(3s))\epsilon^3 + O_{u_2}(s, \epsilon^4), \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} u_3(s, \epsilon, K_{P2}) &= 13.8462\cos(s)\epsilon + (3.6508\cos(s) - 1.7564\cos(3s) - \\ &\quad 10.5047\operatorname{sen}(s) - 1.2089\operatorname{sen}(3s))\epsilon^3 + O_{u_3}(s, \epsilon^4). \end{aligned} \quad (6.46)$$

A aproximação (6.43) vale para ϵ suficientemente pequeno. Dado o valor do parâmetro K_I , o valor correspondente do parâmetro ϵ que aparece em (6.43) pode ser aproximado empregando a função $(\epsilon, K_P) \mapsto K_I = K_{I0}(K_P) + \phi(\epsilon, K_P)$. Assim, substituindo $K_P = K_{P2}$ nos resultados (6.26), (6.27) e (6.29), resulta em $\omega_0(K_{P2}) = 1.0742$, $\partial_{K_I}\gamma(K_{P2}) = 0.1749$ e $G_{2,1}(K_{I0}(K_{P2}), K_{P2}) = -1.2387 - i1.0310$. Portanto, por (5.279), $\mu_2(K_{P2}) = 7.0805$ e a função $(\epsilon, K_P) \mapsto K_I = K_{I0}(K_P) + \phi(\epsilon, K_P)$ pode ser representada até o termo ϵ^2 por

$$K_I = K_{I0}(K_{P2}) + \phi(\epsilon, K_{P2}) = 6.9231 + 3.5402\epsilon^2 + O_{K_I}(\epsilon^4). \quad (6.47)$$

O período da aproximação (6.43) é 2π , contudo o período $T(\epsilon, K_P)$ da órbita periódica pode ser aproximado empregando a função $(\epsilon, K_P) \mapsto \omega(\epsilon, K_P)$. Novamente, substituindo

$K_P = K_{P2}$ em (6.28) e empregando os resultados anteriores segue que $\omega_2(K_{P2}) = -0.7035$ e a função $(\epsilon, K_P) \mapsto \omega(\epsilon, K_P)$ possui a seguinte representação até o termo ϵ^2

$$\omega(\epsilon, K_{P2}) = 1.07417 - 0.351741\epsilon^2 + O_\omega(\epsilon^4). \quad (6.48)$$

Logo, o período da órbita periódica, por (4.33), possui a seguinte representação

$$T(\epsilon, K_{P2}) = \frac{2\pi}{\omega(\epsilon, K_{P2})} = 5.8493 + 1.9154\epsilon^2 + O_T(\epsilon^4). \quad (6.49)$$

Para $K_I = K_{I2} = 7$, de (6.47), o valor aproximado do parâmetro ϵ é $\epsilon = \epsilon_2 = 0.1774$. Substituindo este resultado em (6.43), resulta em

$$u(s, \epsilon_2, K_{P2}) = (u_1(s, \epsilon_2, K_{P2}), u_2(s, \epsilon_2, K_{P2}), u_3(s, \epsilon_2, K_{P2})), \quad (6.50)$$

com

$$u_1(s, \epsilon_2, K_{P2}) = 0.0052\cos(s) + 0.0018\cos(3s) + 0.3127\sen(s) - 0.0026\sen(3s) + O_{u_1}(s) \quad (6.51)$$

$$u_2(s, \epsilon_2, K_{P2}) = 4.3558\cos(s) - 0.0355\cos(3s) - 1.9251\sen(s) + 0.0205\sen(3s) + O_{u_2}(s), \quad (6.52)$$

$$u_3(s, \epsilon_2, K_{P2}) = 2.0527\cos(s) - 0.0056\cos(3s) - 0.0336\sen(s) - 0.0039\sen(3s) + O_{u_3}(s). \quad (6.53)$$

Com a mudança no tempo $s = \omega(\epsilon_2, K_{P2})t$, a representação (6.50) é periódica de período aproximado $T(\epsilon_2, K_{P2}) = 5.8910$. Para $(K_I, K_P) = (K_{I2}, K_{P2})$ e para a condição inicial $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 0, 0)$, a Figura 6.4 exibe uma comparação entre as componentes da solução numérica de (3.32), obtidas com o software **MATLAB 7.9**, e (6.51), (6.52) e (6.53).

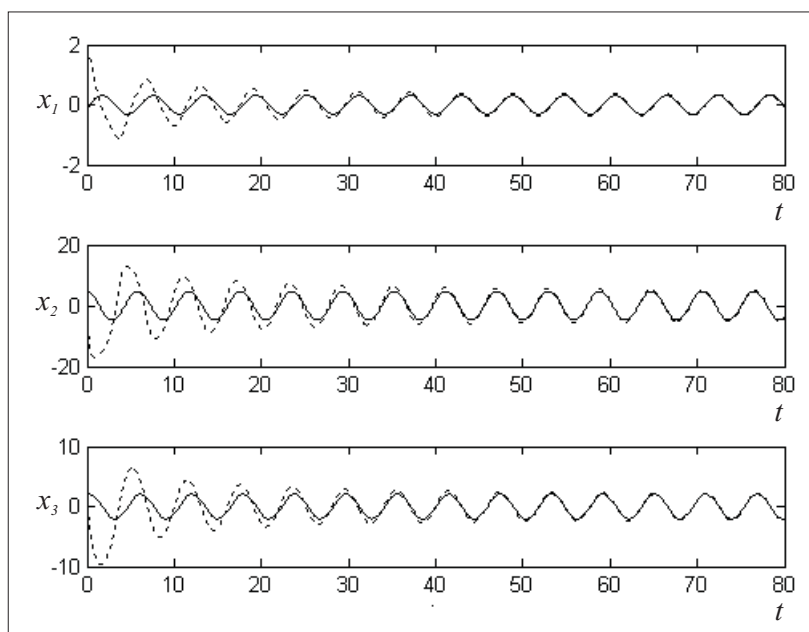


Figura 6.4: Comparação dos gráficos das componentes $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ e $t \mapsto x_3(t)$, obtidas numericamente, com (6.51), (6.52) e (6.53). Os valores dos parâmetros são $K_I = 7$ e $K_P = 3$ e condição inicial é $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (1, 0, 0)$. As linhas tracejadas estão associadas com a solução numérica de (3.32) e a linha contínua com (6.51), (6.52) e (6.53).

Já na Figura 6.5 há uma comparação entre a órbita periódica de (3.32), obtida numericamente com o software **MATLAB 7.9** e a representação (6.50). A Figura 6.6 mostra projeções da órbita periódica obtida numericamente e a representação (6.50) nos planos coordenados xy , xz e yz .

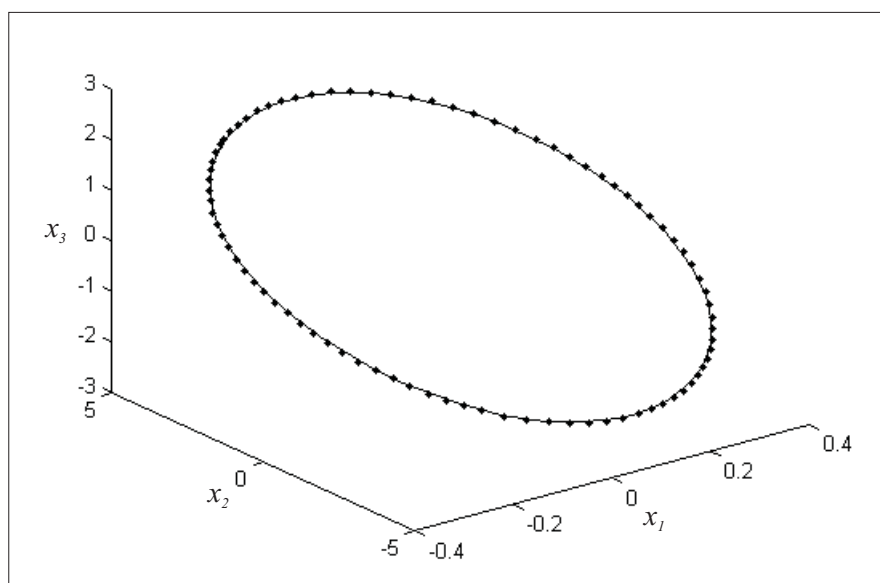


Figura 6.5: Comparação entre a órbita periódica de (3.32), obtida numericamente com o software **MATLAB 7.9** e a representação (6.50). Os pontos estão associados com o resultado numérico e a linha contínua com a aproximação (6.50).

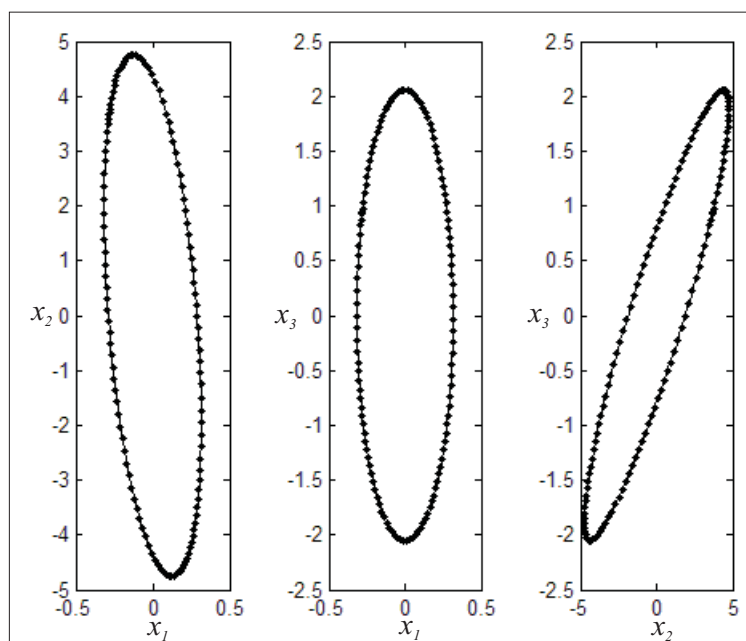


Figura 6.6: Projeções da órbita periódica de (3.32), obtida numericamente com o software **MATLAB 7.9** e a representação (6.50) nos planos coordenados xy , xz e yz . Os pontos estão associados com o resultado numérico e a linha contínua com a aproximação (6.50).

Como $\epsilon = \epsilon_2 = 0.1774$ é uma valor relativamente pequeno, a aproximação na Figura 6.5 é muito boa.

Os casos degenerados estão associados aos valores de $K_P > 0$ que anulam o primeiro coeficiente de Lyapunov (6.17), ou seja, aos valores de K_P que são raízes reais e positivas (se existirem) do polinômio $K_P \mapsto Q(K_P)$. Assim, se para $K_P = K_{P0} > 0$, $Q(K_{P0}) = 0$, então $l_1(\xi_1) = 0$, com $\xi_1 = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$.

Se $A \neq 0$, o polinômio quadrático $K_P \mapsto Q(K_P)$ pode possuir nenhuma ou pelo menos uma raiz positiva, dependendo do sinal do discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4m^2 a_0 a_1 b_0 b_1 (b_0^2 - a_1 b_1 b_0 + a_0 b_1^2). \quad (6.54)$$

Neste caso, as condições para existência de pelo menos um valor positivo $K_P = K_{P0}$ que anula o primeiro coeficiente de Lyapunov (6.17) são

$$A \neq 0, \frac{B}{A} < 0, \frac{C}{A} > 0, \Delta \geq 0. \quad (6.55)$$

Além disto, o parâmetro positivo $K_P = K_{P0}$ ainda deve satisfazer as desigualdades $K_{I0}(K_{P0}) > 0$ e $\omega_0^2(K_{P0}) > 0$.

Quando $A = 0$ e $B \neq 0$, a única possibilidade para que o parâmetro $K_P = K_{P0}$ seja positivo é que $CB < 0$ e as desigualdades $K_{I0}(K_{P0}) > 0$ e $\omega_0^2(K_{P0}) > 0$ sejam verificadas. Se $A = B = 0$ e $C \neq 0$, o numerador do primeiro coeficiente de Lyapunov (6.17) tem sinal fixo (fixados todos os parâmetros) e, portanto, o denominador determina o sinal de (6.17).

Devido ao número de parâmetros existentes, a expressão para o segundo coeficiente de Lyapunov fica muito grande e de difícil análise. Assim, a idéia é estudar numericamente um caso particular apresentado no exemplo (6.1.2).

Exemplo 6.1.2. *Considere agora o sistema de controle em malha fechada (3.32), com $a_0 = 2$, $b_0 = 20$, $a_1 = 10$ e $b_1 = 1$ os valores para os parâmetros do sistema de controle em malha aberta e a função saturação tal como em (6.20). Procedendo como no exemplo 6.1.1,*

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} -K_P & 1 & 1 \\ -2(1 + 5K_P) & -10 & 10 \\ -K_I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

e o polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (10 + K_P)\lambda^2 + (2 + 20K_P + K_I)\lambda + 20K_I. \quad (6.57)$$

Assim, pelo **Teorema 3.2.1**, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável quando

$$\begin{aligned} 20K_I &> 0, \\ 2 + 20K_P + K_I &> 0, \\ 10 + K_P &> 0, \\ (K_P + 10)(20K_P + K_I + 2) &> 20K_I \end{aligned} \tag{6.58}$$

Em (6.58), as três primeiras desigualdades são satisfeitas para K_I e K_P positivos. Da última desigualdade, resulta que $0 < K_P < 10$ e $0 < K_I < \frac{(K_P + 10)(20K_P + 2)}{10 - K_P}$ ou $K_P \geq 10$ e $K_I > 0$. Para $K_I = K_{I0}(K_P) = \frac{(K_P + 10)(20K_P + 2)}{10 - K_P}$, a matriz Jacobiana (6.56) possui autovalores $\lambda(\xi_0)$, $\bar{\lambda}(\xi_0)$, com $\lambda(\xi_0) = i\omega_0(K_P)$

$$\omega_0(K_P) = 2\sqrt{\frac{10 + 100K_P}{10 - K_P}} \tag{6.59}$$

e $\lambda_3(\xi_0) = -(10 + K_P)$. Se $K_P \in (0, 10)$, então $K_{I0}(K_P)$ é positivo e $\omega_0(K_P)$ é um número real positivo.

Utilizando os resultados (6.5), (6.6) e (6.17), segue que

$$\partial_{K_I}\gamma(\xi_0) = \frac{(10 - K_P)^2}{2((10 - K_P)(K_P + 10)^2 + 4(100K_P + 10))}, \tag{6.60}$$

$$\partial_{K_I}\eta(\xi_0) = \frac{\sqrt{5(10 - K_P)(K_P^2 - 20K_P - 102)}}{\sqrt{2}\sqrt{10K_P + 1}(K_P^3 + 10K_P^2 - 500K_P - 1040)}, \tag{6.61}$$

$$Q(K_P) = 201K_P^2 + 20K_P - 100. \tag{6.62}$$

O polinômio (6.62) possui uma única raiz real positiva $K_{P0} = \frac{10}{201}(\sqrt{202} - 1) = 0.6573$. Para $K_P \in (0, 10)$, $b_0 - b_1(a_1 + mb_1K_P) = 10 - K_P > 0$ e, assim, $Q(K_P) < 0$ para $K_P \in (0, K_{P0})$ e $Q(K_P) > 0$ para $K_P \in (K_{P0}, 10)$. Da expressão (6.17), se $K_P \in (0, K_{P0})$ o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo e se $K_P \in (K_{P0}, 10)$, o primeiro coeficiente de Lyapunov é positivo. A Figura 6.7 exibe o gráfico do primeiro coeficiente de Lyapunov

$$l_1(\xi_0) = \frac{(3010K_P^3 + 10501K_P^2 + 2020K_P + 100)Q(K_P)}{25(10 - K_P)^2(1040 + 500K_P - 10K_P^2 - K_P^3)}, \tag{6.63}$$

para $K_P \in [0, 1]$.

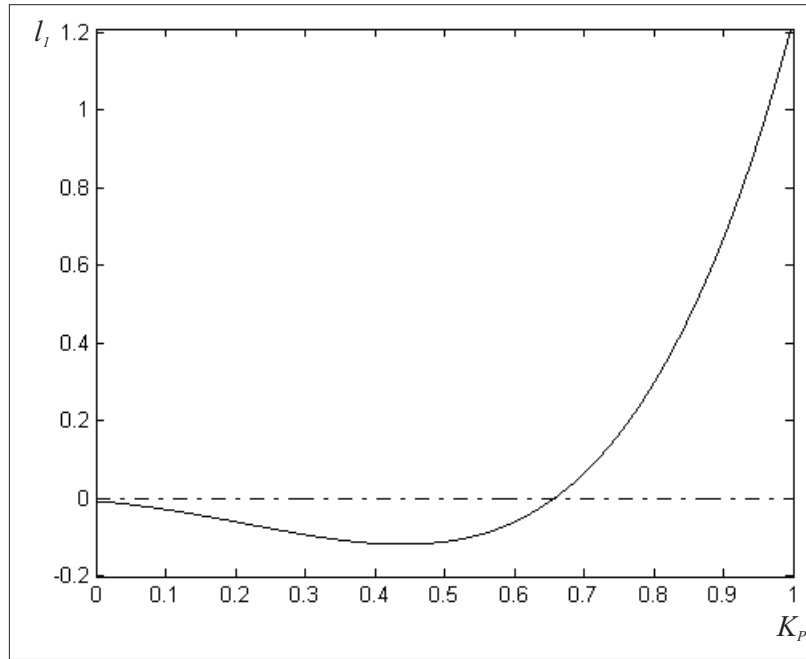


Figura 6.7: Gráfico do primeiro coeficiente de Lyapunov para $K_P \in [0, 1]$.

Se $K_P \in (0, K_{P0})$, o ponto de equilíbrio (3.33) é um atrator, pois $l_1(\xi_0) < 0$ e $\lambda_3(\xi_0) < 0$ e se $K_P \in (K_{P0}, 10)$ o ponto de equilíbrio (3.33) é um repulsor, já que $l_1(\xi_0) > 0$. Para $K_P = K_{P0}$, $K_{I0}(K_{P0}) = 17.2784$, $\omega_0(K_{P0}) = 5.6943$ e o primeiro coeficiente de Lyapunov é nulo. O segundo coeficiente de Lyapunov, $l_2(\xi_1)$, com $\xi_1 = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$, pode ser calculado numericamente.

Da expressão (5.284),

$$h_{3,0}(\xi_1) = (-3.1159 + 8.9823i, -57.7659 + 21.8284i, -9.0851 - 3.1515i) \quad (6.64)$$

e por (5.285),

$$h_{2,1}(\xi_1) = (2.5431 + 5.8935i, -51.7653 + 34.0375i, 32.7908 + 7.7166i). \quad (6.65)$$

Os vetores complexos $h_{4,0}(\xi_1)$, $h_{3,1}(\xi_1)$ e $h_{2,2}(\xi_1)$ são todos nulos. Portanto, da expressão (5.300), $G_{3,2}(\xi_1) = -10.9207 + 162.5361i$ e o segundo coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_2(\xi_1) = \frac{1}{12} \operatorname{Re}(G_{3,2}(\xi_1)) = -0.9100. \quad (6.66)$$

Como o segundo coeficiente de Lyapunov é não nulo, de acordo com a definição 5.1.5, o ponto de equilíbrio (3.33) será um ponto de Hopf transversal de codimensão dois se

a aplicação $\xi \mapsto (\gamma(\xi), l_1(\xi))$ for regular em $\xi_1 = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$. Cálculos simples mostram que

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \partial_{K_I} \gamma(\xi_1) & \partial_{K_P} \gamma(\xi_1) \\ \partial_{K_I} l_1(\xi_1) & \partial_{K_P} l_1(\xi_1) \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} 0.0320 & -0.8410 \\ -0.0625 & 0.6513 \end{pmatrix} = -0.0317. \quad (6.67)$$

Assim, o ponto de equilíbrio (3.33) é um ponto de Hopf transversal de codimensão dois e o sistema de controle em malha fechada (3.32) possui o diagrama de bifurcação equivalente ao diagrama de bifurcação apresentado no caso (a) da Figura 1.4, já que o segundo coeficiente de Lyapunov é negativo.

Empregando o **Teorema 5.3.4**, resulta que a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas, no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$, tem a seguinte representação local

$$\Gamma(\epsilon) = (17.2784 - 28.4443\epsilon^4, 0.6574 + 2.7945\epsilon^2) + O_\Gamma(\epsilon). \quad (6.68)$$

A expressão para a representação (5.354) é muito grande e será omitida aqui, embora (5.354) forneça uma aproximação melhor. A Figura 6.8 exibe o diagrama de bifurcação do sistema de controle em malha fechada (3.32).

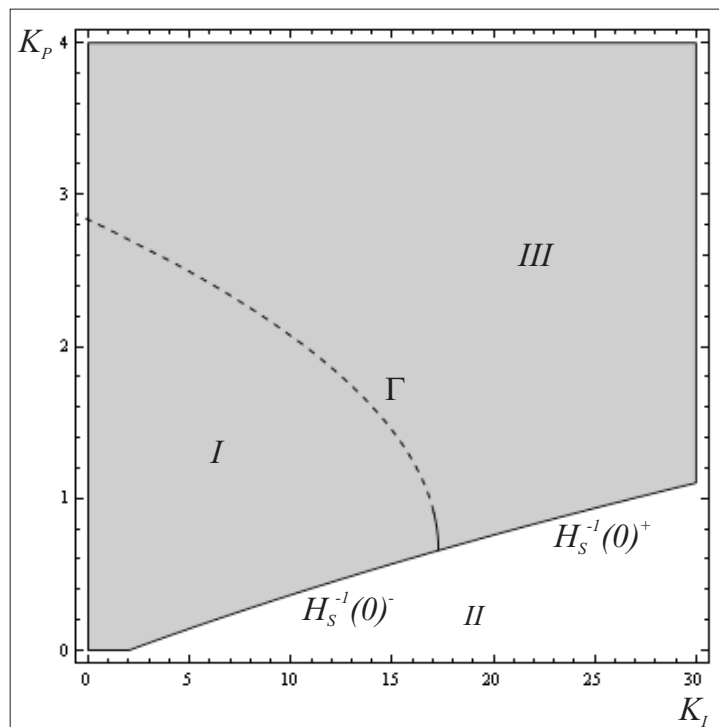


Figura 6.8: Diagrama de bifurcação para (3.32) para $(K_I, K_P) = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$.

A representação (6.68) é uma boa aproximação em uma vizinhança do ponto $(K_I, K_P) = (K_{I0}(K_{P0}), K_{P0})$. Na Figura 6.8, a boa aproximação é representada qualitativamente pela

parte contínua da curva Γ . Não há garantia de que, para $(K_I, K_P) \in \Gamma$ na parte tracejada, as órbitas periódicas sejam não hiperbólicas.

Na região I da Figura (6.68), o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável. Esta é a região de estabilidade, ou seja, a região limitada pelo eixo vertical, pela curva $H_S^{-1}(0)$ e pela curva C_{NH} , que na Figura (6.68) é representada por Γ . Na região III, o ponto de equilíbrio (3.33) é também localmente assintoticamente estável, embora existam duas órbitas periódicas perto do ponto de equilíbrio. Finalmente, na região II, o ponto de equilíbrio (3.33) é instável e há uma órbita periódica estável perto do ponto de equilíbrio. Note que para $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)^-$, o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo e como $\lambda_3(K_P) < 0$, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente estável. Para $(K_I, K_P) \in H_S^{-1}(0)^+$, o primeiro coeficiente de Lyapunov é positivo e o ponto de equilíbrio (3.33) é instável.

Considere o ponto $(K_I, K_P) = (K_{I3}, K_{P3}) = (26, 1)$. Para $K_{P3} = 1$, $K_{I0}(K_{P3}) = 26.8889$ e, portanto, o ponto (K_{I3}, K_{P3}) está na região III. Neste caso, o ponto de equilíbrio (3.33) é localmente assintoticamente e existem duas órbitas periódicas perto do ponto de equilíbrio instável. A mais próxima é instável. Procedendo como no exemplo 6.1, resulta que para $\xi_0 = (K_{I0}(K_{P3}), K_{P3})$,

$$q(\xi_0) = (-i6.9921, 22.0000 - i6.9921, 26.8889), \quad (6.69)$$

$$p(\xi_0) = (-0.0029 - i0.0669, 0.0029 - i0.0046, 0.0162 + i0.0038), \quad (6.70)$$

$$h_{3,0}(\xi_0) = (-13.1132 + i24.9076, -193.7050 + i63.1354i, -31.9285 - i16.8096), \quad (6.71)$$

$$h_{2,1}(\xi_0) = (6.6451 + i16.1788, -169.3190 + i131.7900, 129.4560 + i30.2529), \quad (6.72)$$

$$\partial_{K_I} q(\xi_0) = (0.0020 + i0.0801, -0.0249 - i0.2002, 0.2549 + i0.1096). \quad (6.73)$$

As representações das funções $(\epsilon, K_{P3}) \mapsto K_I = K_{I0}(K_{P3}) + \phi(\epsilon, K_{P3})$ e $(\epsilon, K_{P3}) \mapsto \omega(\epsilon, K_{P3})$ são

$$K_I = K_{I0}(K_{P3}) + \phi(\epsilon, K_{P3}) = 26.8889 - 23.0617\epsilon^2 + O_{K_I}(\epsilon^4). \quad (6.74)$$

$$\omega(\epsilon, K_{P3}) = 6.9921 - 27.5311\epsilon^2 + O_\omega(\epsilon^4). \quad (6.75)$$

Para $K_I = K_{I3} = 26$, o valor aproximado do parâmetro ϵ por (6.74) é $\epsilon = \epsilon_3 = 0.1963$ e, assim, e a órbita periódica instável tem período aproximado $T(\epsilon_3, K_{P3}) = 1.0350$ e a seguinte representação

$$u(s, \epsilon_3, K_{P3}) = (u_1(s, \epsilon_3, K_{P3}), u_2(s, \epsilon_3, K_{P3}), u_3(s, \epsilon_3, K_{P3})), \quad (6.76)$$

com

$$u_1(s, \epsilon_3, K_{P3}) = 0.0496\cos(s) - 0.0331\cos(3s) + 2.6511\text{sen}(s) - 0.0628\text{sen}(3s) + O_{u_1}(s) \quad (6.77)$$

$$u_2(s, \epsilon_3, K_{P3}) = 7.3658\cos(s) - 0.4886\cos(3s) + 1.6783\text{sen}(s) - 0.1593\text{sen}(3s) + O_{u_2}(s), \quad (6.78)$$

$$u_3(s, \epsilon_3, K_{P3}) = 11.4486\cos(s) - 0.0805\cos(3s) - 0.1907\text{sen}(s) + 0.0424\text{sen}(3s) + O_{u_3}(s). \quad (6.79)$$

Obter por meio de simulações a órbita periódica instável citada, pode ser um tanto difícil, contudo (6.76) fornece uma aproximação para esta órbita que pode ser visualizada na Figura 6.9.

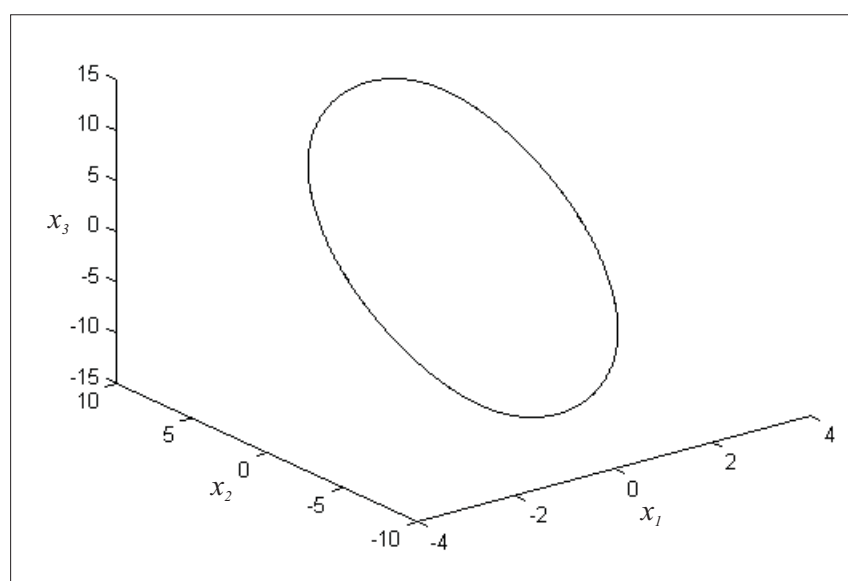


Figura 6.9: Aproximação para órbita periódica instável obtida de (3.32) para $(K_I, K_P) = (K_{I3}, K_{P3}) = (26, 1)$. Foram utilizados (6.76) e o software **MATLAB 7.9**.

Conforme mencionado, os resultados obtidos no exemplo 6.1.1 são qualitativamente equivalentes aqueles resultados esperados e comentados no caso (a) da Figura 1.3. Já os resultados do exemplo 6.1.2 se enquadram no caso (a) da Figura 1.4. O caso (b) das Figuras 1.3 e 1.4 pode ser estudado e entendido de modo análogo ao que foi feito nos exemplos 6.1.1 e 6.1.2, respectivamente.

A próxima seção trata das conseqüências da saturação nos sistemas de controle reais ou físicos, ou seja, o que os resultados obtidos nos capítulos anteriores e neste capítulo representam em um sistema de controle real.

6.2 Sistemas de Controle Reais

Os pontos de equilíbrio de um sistema de controle em malha fechada são modelos para os pontos de operação de um sistema de controle real. É desejado que os pontos de operação sejam estáveis, ou seja, que após certo intervalo de tempo algumas grandezas físicas de interesse do sistema controle real, como velocidade, posição, temperatura, pressão, entre outras, apresentem valores aproximadamente constantes. Além disto, na presença de pequenas perturbações, tais grandezas físicas devem retornar a valores constantes próximos dos valores anteriores à perturbação. Neste sentido, este trabalho apresenta uma teoria que possibilita determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio para diferentes valores dos parâmetros K_I e K_P em um sistema de controle linear com saturação regular na entrada de controle e controlador do tipo **PI**.

Em engenharia, os sistemas de controle lineares são modelos ideais ou boas aproximações para os sistemas de controle reais, já que em muitos casos não é possível modelar todas as características de um sistema físico. Porém apresentam vantagens, pois sendo equações diferenciais ordinárias lineares, toda teoria deste tipo de equação diferencial pode ser empregada. Assim, através da transformada de Laplace, o teorema de Routh-Hurwitz pode ser utilizado na análise de estabilidade, bem como os métodos de resposta em frequência e lugar das raízes.

Na presença de não linearidades os métodos de estabilidade citados só podem ser empregados após uma linearização em torno do ponto de equilíbrio e não fornecem informações sobre oscilações. Este trabalho tenta tornar o modelo um pouco mais real verificando o efeito que a limitação dos componentes físicos em engenharia tem sobre a estabilidade, ou seja, o efeito de uma não linearidade conhecida como saturação. A desvantagem é que a análise fica um pouco mais elaborada quando comparada com as análises clássicas, como teorema de Routh-Hurwitz, lugar das raízes e resposta em frequência. Contudo, com a teoria desenvolvida no capítulo 5 é possível determinar oscilações não lineares nas variáveis e até mesmo obter uma aproximação para estas oscilações, mesmo no caso de órbitas periódicas instáveis.

Devido a complexidade da análise de sistemas de controle lineares com saturações na entrada de controle e controlador do tipo **PI**, na aplicação da teoria de aproximação de órbitas periódicas em engenharia, seria ideal desenvolver um *software*, por exemplo, um *toolbox* para o **MATLAB**, no qual o usuário entraria com a aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o vetor $B \in \mathbb{R}^n$ e escolheria o tipo de saturação segundo definição 2.4.1. O *software* retornaria ao usuário os pontos de equilíbrio e a região de estabilidade. Além disto, em ocorrendo bifurcações de Hopf transversais de codimensão dois, o *software* forneceria o diagrama de bifurcação, contendo a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas, a estabilidade e aproximação de uma órbita periódica para um dado ponto $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$. O *software* citado poderia ser implementado empregando as teorias deste trabalho e, por exemplo, os métodos numéricos de [3].

Dependendo da equação diferencial, as expressões (5.353) e (5.354) podem não fornecer uma boa aproximação para a curva de órbitas periódicas não hiperbólicas para grandes valores dos parâmetros, contudo, na vizinhança de um ponto de Hopf transversal de codimensão dois, (5.353) e (5.354) representam bem tal curva. Visto que, em geral, são utilizadas funções teste para encontrar a curva de órbitas periódicas, os algoritmos existentes poderiam ser melhorados através da representação (5.353) ou (5.354) e empregando (5.304) como aproximação inicial.

Conclusões e Trabalhos Futuros

Conclusões

Este trabalho propõe uma definição para a saturação e um método de análise de estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas de controle lineares com saturação na entrada de controle e controlador do tipo **PI**. O objetivo é determinar a região de estabilidade no plano de parâmetros $(K_I, K_P) \in \mathbb{R}^2$.

A teoria de aproximação de órbitas periódicas desenvolvida pode ser aplicada tanto na análise de pontos de Hopf transversais de codimensões um e dois quanto na aproximação de órbitas periódicas hiperbólicas (estáveis e instáveis) e não hiperbólicas. Diferentemente da teoria da bifurcação de Hopf de [15] e [16], a teoria apresentada aqui fornece uma aproximação para curva de órbitas periódicas não hiperbólicas. Tal aproximação pode ser utilizada para melhorar os métodos numéricos já existentes para obtenção deste tipo de curva, visto que, em muitos casos são utilizadas funções teste.

Embora aplicada aos sistemas de controle em \mathbb{R}^3 com referência nula, as teorias do capítulo 5 podem ser empregadas em qualquer sistema de controle em \mathbb{R}^n com referência não nula e até mesmo a qualquer equação diferencial em \mathbb{R}^n (modelo de um sistema físico) que apresente pelo menos bifurcações de Hopf transversais de codimensão um. Para isto basta seguir a metodologia utilizada nos exemplos 6.1.1 e 6.1.2 da seção 6.1. Contudo, conforme comentado na seção 6.2, o ideal seria desenvolver um *software* que realizasse todos os cálculos a partir da aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e do vetor $B \in \mathbb{R}^n$.

Apesar deste trabalho tratar apenas das saturações regulares, na análise de pontos de Hopf transversais de codimensão um, a saturação $S \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ escolhida deve ser tal que $k \geq 3$ e para os transversais de codimensão dois, $k \geq 5$. Para as saturações regulares, este trabalho mostra que há somente um ponto de equilíbrio, porém se a saturação não é regular, pode haver outros pontos de equilíbrio e, portanto, cada ponto de equilíbrio deve ser analisado de maneira conveniente, conforme comentado na seção 3.2.

Finalizando, toda análise feita utilizando saturação e controlador do tipo **PI** pode ser realizada combinando não linearidades do tipo saturação e zona morta e controladores do tipo **PI**, avanço e atraso de fase e controladores com realimentação de estados.

Trabalhos Futuros

Há algumas questões que não foram respondidas neste trabalho e que talvez mereçam um estudo no futuro.

Q1. Como associar os resultados deste trabalho com alguma técnica de compensação de tal forma que seja possível não só determinar a estabilidade, mas também obter uma saída que atenda certas especificações como máximo pico e tempo de acomodação? Em outras palavras, escolhidos números reais $M_p > 0$ (máximo pico), $t_s > 0$ (tempo de acomodação) e $\varepsilon > 0$, qual técnica de compensação permite escolher valores de K_I e K_P na região de estabilidade para que $\max\{y(t) : t \geq 0\} \leq M_p$ e $|y(t) - r| \leq \varepsilon$ quando $t \geq t_s$?

Q2. Suponha uma saturação $S \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ da forma

$$S(v) = \begin{cases} -M, & v \leq -\frac{M}{m} \\ M\phi\left(\frac{m}{M}v\right), & -\frac{M}{m} < v < \frac{M}{m} \\ M, & v \geq \frac{M}{m} \end{cases} \quad (6.80)$$

com $\phi(-1) = -1$, $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ e $k \geq 3$. Procedendo como na demonstração da **Proposição 3.2.1**, por (3.27), se $r \neq 0$ e $a_0 r / b_0 = M$, então os pontos de equilíbrio são da forma $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, com $x_1^0 = r$, $x_j^0 = -B_{j-1} \frac{a_0 r}{b_0}$, para $j = 2, \dots, n$ e $x_{n+1}^0 \in S^{-1}(M)$. Como há infinitos pontos de equilíbrio, quais as implicações físicas nos sistemas de controle reais?

Q3. O estudo apresentado neste trabalho é apenas teórico. Assim, seria interessante projetar um sistema de controle real, com controlador do tipo **PI**, por exemplo um controle de velocidade de um motor de corrente contínua, modelar o conversor CC-CC classe E como uma saturação na entrada de controle e verificar experimentalmente a possibilidade de oscilações na saída de controle.

Na linha dos estudos propostos aqui, algumas questões aparecem quando são empregados outros controladores como **PD**, **PID**, avanço ou atraso de fase e como não linearidade a zona morta.

Q4. Um controlador do tipo **PD**

$$t \mapsto v(t) = K_P e(t) + K_D \frac{d}{dt} e(t), \quad (6.81)$$

ou do tipo **PID**

$$t \mapsto v(t) = K_P e(t) + K_D \frac{d}{dt} e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (6.82)$$

com $K_D > 0$, não pode ser representado como uma realimentação dinâmica de saída, tal como o que foi feito com um controlador do tipo **PI** na seção 2.3. Neste caso como obter um sistema de controle em malha fechada com estes controladores e com linearidade do tipo saturação como (2.56)? Qual é a região de estabilidade quando são empregados estes tipos de controladores? Quais são as vantagens e desvantagens em considerar a parcela derivativa destes controladores na presença de não linearidades?

Q5. Qual a influência que uma zona morta, na entrada de controle, tem em um sistema de controle em malha fechada considerando os controladores **PD** e **PID**?

Q6. Um controlador do tipo avanço ou atraso de fase possui a seguinte função de transferência

$$G_C(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{K_1 s + K_0}{s + K_2}, \quad (6.83)$$

com K_0 , K_1 e K_2 parâmetros positivos. Um controlador do tipo avanço ou atraso de fase pode ser representado, como realimentação dinâmica de saída, da seguinte forma

$$\begin{aligned} z' &= -K_2 z + (K_0 - K_1 K_2) e, \\ v &= z + K_1 e, \end{aligned} \quad (6.84)$$

com $z \in \mathbb{R}$ a variável dinâmica e $e = r - y$ a entrada. Com saturação regular na entrada de controle e controlador do tipo avanço ou atraso de fase, os sistemas de controle em malha fechada ainda possuem um único ponto de equilíbrio? Como no caso linear em malha fechada (sem não linearidade na entrada de controle) quando

a aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não possui autovalores nulos (função de transferência sem pólos na origem), para um dos pontos de equilíbrio a saída de controle é aproximadamente igual a r ? Há possibilidade de ocorrência de bifurcações de Hopf ou outras bifurcações?

Além de tentar responder as questões **Q1** a **Q6**, outra proposta de trabalho seria generalizar a teoria do capítulo 5 para casos mais degenerados, como bifurcações de Hopf transversais de codimensões três e quatro. Exceto pela análise das órbitas periódicas não hiperbólicas, os resultados obtidos deverão coincidir com aqueles de [6], [22] e [30] para codimensão três e [31] para codimensão quatro.

Referências Bibliográficas

- [1] D. P. Atherton, *Early Developments in Nonlinear Control*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 16 (1996), No. 3, 34 - 43.
- [2] S. Bennett, *A Brief History of Automatic Control*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 16 (1996), No. 3, 17 - 25.
- [3] W. Beyn, A. Champneys, E. Doedel, W. Govaerts, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede, *Numerical Continuation, and Computation of Normal Forms*, 2000: <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/NBA/hb.pdf>
- [4] F. Bonani, M. Gilli, *A Harmonic Balance Approach to Bifurcation Analysis of Limit Cycles*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 6 (1999), 298 - 301.
- [5] D. C. Braga, L.F. Mello, C. Rocşoreanu, M. Sterpu, *Controllable Hopf Bifurcations of Codimension One and Two in Linear Control Systems*, preprint.
- [6] D. C. Braga, L.F. Mello, M. Messias, *Bifurcation Analysis of a van der Pol-Duffing Circuit with Parallel Resistor*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009 (2009), 1 - 26.
- [7] D. C. Braga, F. S. Dias, L. F. Mello, *On the Stability of the Equilibria of the Rikitake System*, Physics Letters A, Vol. 374 (2010), 4316 - 4320.
- [8] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer - Verlag, New York, 2006.
- [9] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer - Verlag, New York, 1991.
- [10] K. M. Hangos, J. Bokor, G. Szederkényi, *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*, Springer - Verlag, London, 2004.

- [11] B. D. Hassard, N. D. Kazzarinoff and Y. H. Wan, *Theory and Application of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, New York, 1981.
- [12] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, Inc., New York, 1974.
- [13] G. Iooss, D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer - Verlag, New York, 2004.
- [14] D. W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, New York, 1986.
- [15] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second edition, Springer - Verlag, New York, 1998.
- [16] Y. A. Kuznetsov, *Numerical Normalization Techniques for all Codim 2 Bifurcations of Equilibria in ODE's*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 36 (1999), 1104 - 1124.
- [17] E. L. Lima, *Análise Real Vol. 2. Funções de n Variáveis*, IMPA, Brazil, 2006.
- [18] D. Ling, Y. Tao, *An Analysis of the Hopf Bifurcation in a Hydroturbine Governing System with Saturation*, IEEE Transactions of Energy Conversion, Vol. 21 (2006), 512 - 515.
- [19] L. F. Mello, J. Sotomayor, D. B. Santos, D. C. Braga, *Bifurcation Analysis of a Model for Biological Control*, Mathematical and Computer Modellings, Vol. 48 (2008), 375 - 387.
- [20] L. F. Mello, M. Messias, D. C. Braga, *Bifurcation Analysis of a New Lorenz-Like Chaotic System*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 37 (2008), 1244 - 1255.
- [21] A. I. Mess, L. O. Chua, *The Hopf Bifurcation Theorem and Its Applications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 26 (1979), No. 4, 235 - 254.
- [22] M. Messias, D. C. Braga, L.F. Mello, *Degenerate Hopf Bifurcations in Chua's System*, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, Vol. 19 (2009), 497 - 515.

- [23] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1995.
- [24] K. Ogata, *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1967.
- [25] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice-Hall do Brasil Ltda, Rio de Janeiro, 1982.
- [26] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer - Verlag, New York, 2001.
- [27] C. Piccardi, *Harmonic Balance Analysis of Codimension-2 Bifurcations in Periodic Systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 43 (1996), No. 12, 1015 - 1018.
- [28] L.S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, 1962.
- [29] G. Revel, D. M. Alonso, J. L. Moiola, *Curvature Index Failures in the Dynamics of an Electric Coupled Oscillator*, 3rd. International Conference Physics and Control, 2007.
- [30] J. Sotomayor, L. F. Mello and D. C. Braga, *Bifurcation Analysis of the Watt Governor System*, Comp. Appl. Math., Vol. 26 (2007), 19 - 44.
- [31] J. Sotomayor, L. F. Mello and D. C. Braga, *Hopf Bifurcations in a Watt Governor with a Spring*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Vol. 15 (2008), 288 - 299.
- [32] M. Sterpu, C. Roşoreanu, L.F. Mello, D. C. Braga, *Lyapunov Coefficients for Non-Symmetrically Coupled Identical Dynamical Systems. Application to Coupled Advertising Models*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, Vol. 11 (2009), 785 - 803.
- [33] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer - Verlag, New York, 1996.
- [34] Software **MATCONT 2.5.1**: <http://www.matcont.ugent.be/>.
- [35] Software **MATLAB 7.9**: <http://www.mathworks.com>.