

Fernando Henrique Duarte Guaracy

**Princípio de Recuperação da Malha Objetivo
aplicado ao Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto**

Itajubá, MG

2015

Fernando Henrique Duarte Guaracy

**Princípio de Recuperação da Malha Objetivo aplicado ao
Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos necessários para a obtenção de título de Doutor em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Orientador: Carlos Alberto Murari Pinheiro
Orientador: Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Itajubá, MG
2015

Aos meus pais, Luciano e Márcia.

Agradecimentos

A Deus, pela força e proteção.

Aos meus pais Luciano e Márcia, pelo incentivo e apoio que sempre me deram.

Ao meu irmão Luís Felipe, pelo companheirismo e amizade em todos os momentos.

À minha namorada Karine, pelo carinho e paciência durante todo esse tempo.

Aos amigos pela ajuda e companhia nos bons e maus momentos.

Aos colegas do Grupo de Microeletrônica e professores do *Campus* de Itabira da Unifei pelos momentos compartilhados.

Um agradecimento especial ao Professor Pinheiro, pela confiança e ajuda na realização de mais esse trabalho, e ao Professor Luís Henrique, pela amizade, apoio e dedicação indispensáveis à realização desse trabalho.

À Fapemig e à CAPES, pelo apoio financeiro.

“Não permita que sua felicidade dependa de algo que você possa perder.”

C. S. Lewis

Resumo

Nesta tese de doutorado, apresenta-se um controlador em tempo discreto que possui características de sensibilidade mista análogas à solução \mathcal{H}_∞ /LTR, proposta originalmente em tempo contínuo. O princípio de recuperação da malha objetivo, ou LTR (*Loop Transfer Recovery*), foi desenvolvido como uma ferramenta para a introdução de robustez no âmbito do controle LQG e se mantém relevante como metodologia por possibilitar, na etapa de projeto, o completo desacoplamento entre a definição de um formato desejável para a malha e a obtenção de um controlador implementável com especificações de desempenho e propriedades de robustez bem definidas. O controle \mathcal{H}_∞ /LTR, proposto como extensão da metodologia LQG/LTR com base nas relações entre os controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , resultou em uma nova ferramenta de sintonia com propriedades de sensibilidade mista.

Em aplicações práticas, um computador digital é usualmente utilizado na implementação dos controladores projetados. Projetando-se o controlador usando técnicas específicas para o tempo discreto, tal como a desenvolvida nessa tese, tem-se maior conhecimento acerca das limitações e das propriedades dos sistemas de controle resultantes, de modo que estes possam atuar conforme originalmente pretendido.

Para verificar a aplicabilidade da tese proposta e a eficácia do controlador em tempo discreto desenvolvido, foram realizadas simulações das malhas de controle do ângulo de arfagem e do ângulo da trajetória de voo em um modelo linearizado da aeronave F-8, além de experimentos práticos referentes ao controle do ângulo de arfagem e guinada de um modelo didático de helicóptero com dois graus de liberdade fabricado pela empresa QUANSER.

Palavras-chaves: Princípio de recuperação da malha objetivo, controle \mathcal{H}_∞ , controle LQG/LTR, sistemas de tempo discreto, controle robusto.

Abstract

In this doctoral thesis, a discrete-time controller with analogous mixed sensitivity properties to the continuous-time \mathcal{H}_∞ /LTR control is presented. The Loop Transfer Recovery (LTR) procedure was developed as a tool for introducing robustness into the context of LQG control and is still relevant as design method by enabling, in the design process, the complete decoupling between the definition of desirable loop shapes and the obtainment of an implementable dynamical controller with well-defined performance and robustness properties. The \mathcal{H}_∞ /LTR control, proposed as an extension to the LQG/LTR methodology based on the relationships between \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control, resulted in a new tuning tool with mixed sensitivity properties.

In practical applications, a digital computer is often used in the implementation of controllers. By designing the controller using specific discrete-time techniques, such as the one developed in this thesis, the designer is able to better know the limitations and properties of the resulting control systems such that they perform as originally intended.

In order to verify the applicability of the proposed thesis and the effectiveness of the developed discrete-time controller, simulations of the control systems for the pitch and flight path angles of a linearized model of the F-8 fighter aircraft were made, and practical experiments regarding the control of the pitch and yaw angles of a two degree-of-freedom prototype helicopter designed by manufacturer QUANSER were carried out.

Key-words: Loop transfer recovery, \mathcal{H}_∞ control, LQG/LTR control, discrete-time systems, robust control.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos de uma malha de controle.	21
Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema de controle.	24
Figura 3 – Estrutura dos observadores de estados no controle LQG em tempo discreto.	27
Figura 4 – Aeronave F-8.	51
Figura 5 – Valores singulares do modelo da aeronave F-8 em malha aberta.	53
Figura 6 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada $\hat{\delta}_e$	53
Figura 7 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada $\hat{\delta}_f$	54
Figura 8 – Conexão de sistemas em série.	54
Figura 9 – Restrições para a sensibilidade da malha objetivo.	56
Figura 10 – Restrições para a sensibilidade complementar da malha objetivo.	57
Figura 11 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo.	57
Figura 12 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle.	58
Figura 13 – Sinais de controle.	58
Figura 14 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle.	59
Figura 15 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle.	59
Figura 16 – Valores singulares da sensibilidade com $\gamma = 7$	60
Figura 17 – Valores singulares da sensibilidade complementar com $\gamma = 7$	60
Figura 18 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com $\gamma = 7$	61
Figura 19 – Sinais de controle com $\gamma = 7$	61
Figura 20 – Valores singulares da sensibilidade com $\gamma \rightarrow \infty$	62
Figura 21 – Valores singulares da sensibilidade complementar com $\gamma \rightarrow \infty$	62
Figura 22 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com $\gamma \rightarrow \infty$	63
Figura 23 – Sinais de controle com $\gamma \rightarrow \infty$	63
Figura 24 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com a variação do parâmetro γ	64
Figura 25 – Comparação das respostas do ângulo de arfagem com $T = 0,25$ [s].	65
Figura 26 – Comparação das respostas do ângulo da trajetória de voo com $T = 0,25$ [s].	66
Figura 27 – Resposta da malha objetivo do controlador com observador de estados corrente.	67
Figura 28 – Resposta da malha objetivo do controlador com observador de estados preditivo.	67
Figura 29 – Comparação das respostas do ângulo de arfagem com $T = 0,30$ [s].	69
Figura 30 – Comparação das respostas do ângulo da trajetória de voo com $T = 0,30$ [s].	69

Figura 31 – Helicóptero de dois graus de liberdade.	70
Figura 32 – Valores singulares do modelo de helicóptero em malha aberta.	71
Figura 33 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada u_p	72
Figura 34 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada u_c	72
Figura 35 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo do helicóptero com $\gamma = 6$	73
Figura 36 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$	74
Figura 37 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$	74
Figura 38 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$	75
Figura 39 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$ e $\rho = 0,0001$	76
Figura 40 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$	76
Figura 41 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$	77
Figura 42 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$	77
Figura 43 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$	78
Figura 44 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$ e $\rho = 0,0001$	78
Figura 45 – Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$	79
Figura 46 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$	79
Figura 47 – Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$	80
Figura 48 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$	80
Figura 49 – Respostas do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle.	81
Figura 50 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle.	81
Figura 51 – Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$	82

Figura 52 – Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$	82
Figura 53 – Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$	83
Figura 54 – Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$	83
Figura 55 – Comparação das respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma = 6$ em relação ao controlador contínuo.	84
Figura 56 – Comparação das respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma \rightarrow \infty$ em relação ao controlador contínuo.	84
Figura 57 – Respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma = 6$ e variação do tempo de amostragem.	85
Figura 58 – Respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma \rightarrow \infty$ e variação do tempo de amostragem.	85

Lista de abreviaturas e siglas

BIBO	<i>Bounded Input Bounded Output</i>
DOF	<i>Degree of Freedom</i>
EAR	Equação Algébrica de Riccati
EARG	Equação Algébrica de Riccati Generalizada
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i>
NLCF	<i>Normalized Left Coprime Factorization</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>

Lista de símbolos

\sup	Supremo
\max	Máximo
\min	Mínimo
λ	Autovalor de uma matriz
σ	Valor singular de uma matriz
\det	Determinante de uma matriz
tr	Traço de uma matriz
posto	Posto de uma matriz
$'$	Matriz transposta
$*$	Matriz complexo-conjugada transposta
> 0	Positiva definida
≥ 0	Positiva semidefinida
< 0	Negativa definida
≤ 0	Negativa semidefinida
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$ \cdot $	Módulo
$\ \cdot\ $	Norma
I	Matriz identidade
(A, B, C, D)	Representação de um sistema dinâmico em variáveis de estado
P	Planta generalizada
G	Planta de processo
K	Controlador
\mathcal{T}_{zw}	Matriz de malha fechada que relaciona a entrada w à saída z
\mathcal{L}_O	Matriz de transferência de malha aberta vista na saída da planta

\mathcal{L}_I	Matriz de transferência de malha aberta vista na entrada da planta
\mathcal{S}_O	Matriz de transferência sensibilidade na saída
\mathcal{S}_I	Matriz de transferência sensibilidade na entrada
\mathcal{T}_O	Matriz de transferência sensibilidade complementar na saída
\mathcal{T}_I	Matriz de transferência sensibilidade complementar na entrada
x	Vetor de estados
u	Vetor de entradas
y	Vetor de saídas
w_x	Vetor de perturbações nos estados
w_y	Vetor de perturbações nas saídas
z_x	Vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados
z_u	Vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas
L e H	Matrizes da representação em variáveis de estado da planta generalizada
ρ e μ	Escalares da representação em variáveis de estado da planta generalizada
γ	Valor da norma \mathcal{H}_∞
K_C	Matriz de ganhos do regulador de estados
K_F	Matriz de ganhos do observador de estados
X	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao regulador de estados
Y	Solução da Equação Algébrica de Riccati associada ao observador de estados
\mathcal{J}_2	Custo \mathcal{H}_2
\mathcal{J}_∞	Custo \mathcal{H}_∞
lim	Limite
\rightarrow	Tende a
T	Tempo de amostragem

Δ	Erro de recuperação da malha objetivo
\hat{q}	Incremento na taxa de variação do ângulo de arfagem do caça F-8
\hat{u}	Incremento na velocidade horizontal do caça F-8
$\hat{\alpha}$	Incremento no ângulo de ataque do caça F-8
$\hat{\theta}$	Incremento no ângulo de arfagem do caça F-8 e do helicóptero 2 DOF
$\hat{\gamma}_p$	Incremento no ângulo da trajetória de voo do caça F-8
$\hat{\delta}_e$	Incremento na deflexão do ângulo do profundor do caça F-8
$\hat{\delta}_f$	Incremento na deflexão do ângulo do <i>flapperon</i> do caça F-8
$\hat{\psi}$	Incremento no ângulo de guinada do helicóptero 2 DOF
\hat{u}_p	Incremento na tensão do motor principal do helicóptero 2 DOF
\hat{u}_c	Incremento na tensão do motor de cauda do helicóptero 2 DOF

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Considerações Gerais	16
1.2	Justificativas	17
1.3	Objetivos	18
1.4	Estrutura do Trabalho	19
1.5	Notação	19
2	CONTROLE LQG E \mathcal{H}_∞ EM TEMPO DISCRETO	21
2.1	Especificações de Desempenho para Malhas de Controle	21
2.2	Definições Iniciais	23
2.3	Controle LQG em Tempo Discreto	25
2.3.1	LQG com Observador de Estados Preditivo	26
2.3.2	LQG com Observador de Estados Corrente	26
2.4	Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto	27
2.4.1	\mathcal{H}_∞ com Observador de Estados Preditivo	27
2.4.2	\mathcal{H}_∞ com Observador de Estados Corrente	28
2.5	Funções de Custo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	29
3	CONTROLE \mathcal{H}_∞/LTR EM TEMPO DISCRETO	31
3.1	LTR no Controle \mathcal{H}_2 /LQG em Tempo Discreto	31
3.2	Solução da Equação Algébrica de Riccati Generalizada	33
3.3	LTR no Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto	38
3.4	Propriedades de Sensibilidade Mista	40
3.5	LTR pela Entrada	45
4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	51
4.1	Sistema de Controle da Dinâmica Longitudinal da Aeronave F-8	51
4.1.1	Modelo do F-8	52
4.1.2	Expansão por Integradores	54
4.1.3	Definição da Malha Objetivo	55
4.1.4	Simulações da Malha de Controle	57
4.1.5	Comparação entre Diferentes Abordagens	64
4.2	Sistema de Controle de Arfagem e Guinada em Modelo Didático de Helicóptero 2 DOF	69
4.2.1	Modelo da Planta	70
4.2.2	Projeto dos Controladores	72

4.2.3	Resultados Experimentais	78
5	CONCLUSÕES	87
	Referências	88
	APÊNDICE A – CONTROLE \mathcal{H}_∞/LTR EM TEMPO CONTÍNUO	91
A.1	Descrição da Planta	91
A.2	Controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞	92
A.3	Controle LQG/LTR e \mathcal{H}_∞ /LTR	93
	APÊNDICE B – CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR	96
B.1	Definições Básicas	96
B.2	Lema da Matriz Inversa	96
B.3	Decomposição em Valores Singulares	97
	APÊNDICE C – ARTIGOS PUBLICADOS	98

1 Introdução

1.1 Considerações Gerais

O controle LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) constituiu um grande avanço no desenvolvimento da teoria de controle ótimo realizado na década de 1960. Entretanto, apesar de ter atingido uma relativa maturidade teórica e de resultar em aplicações bem sucedidas no setor aeroespacial, sua utilidade foi considerada algo limitada em situações práticas em geral. Esse desempenho abaixo do esperado dos controladores LQG foi em grande parte atribuído à não disponibilidade de modelos precisos dos processos a serem controlados (1).

A constatação acerca da falta da capacidade do controle LQG de tolerar diferenças entre o modelo utilizado no projeto e o processo real marcou o início do desenvolvimento da teoria de controle robusto (2). A capacidade do controlador de manter a estabilidade e suas características de desempenho mesmo com a existência de incertezas no modelo da planta passou a ser considerada um atributo essencial no desenvolvimento dos novos métodos de projeto.

O controle LQG baseia-se na associação de um controlador por realimentação de estados LQR (*Linear Quadratic Regulator*) com um observador de estados conhecido como Filtro de Kalman. Embora quando considerados separadamente esses dois componentes apresentem boas características de robustez, quando combinados no controle LQG não há garantias de características de robustez satisfatórias. Nesse contexto, os trabalhos de Kwakernaak e Sivan (3) e Doyle e Stein (4, 5) estabeleceram a base para o desenvolvimento do procedimento conhecido como princípio de recuperação da malha objetivo, ou LTR (*Loop Transfer Recovery*), com o qual foi possível recuperar as características de robustez do controlador LQR ou do Filtro de Kalman no controle LQG, resultando no chamado controle LQG/LTR. Além dos trabalhos já citados, destaca-se ainda o artigo tutorial de Athans (6), considerado essencial para a difusão da metodologia.

Apesar de concebido originalmente no tempo contínuo, o controle LQG/LTR foi desenvolvido também para o tempo discreto. Nesse caso, a possibilidade de recuperação das boas características de robustez depende do tipo de observador de estados utilizado. Se o tempo de processamento do algoritmo de controle for considerado desprezível quando comparado ao intervalo entre as medições das variáveis da planta, o observador de estados pode utilizar a informação mais recente das saídas do processo na estimação, resultando no observador de estados conhecido como corrente. Com um observador de estados corrente, Maciejowski (7) mostrou que é possível recuperar de maneira exata as características de robustez desejáveis no controle LQG/LTR em tempo discreto. Se o tempo de processa-

mento do algoritmo de controle é considerável e não pode ser desprezado, o observador de estados pode utilizar apenas a informação da saída do instante anterior, resultando no observador de estados conhecido como preditivo. Nesse caso, Goodman (8) mostrou que a recuperação ocorre somente de maneira aproximada, não havendo garantias quanto a existência de boas características de robustez.

Inspirada pelo trabalho de Zames (9) e motivada pelas deficiências do controle LQG, houve uma mudança em direção à otimização da norma \mathcal{H}_∞ nas novas abordagens para o controle robusto (10). Extensões do controle \mathcal{H}_∞ foram elaboradas para o tempo discreto, nas quais se destacam as abordagens baseadas em espaço de estados desenvolvida por Stoorvogel (11) e na teoria dos jogos desenvolvida por Başar (12).

O trabalho de Safonov et al. (13) demonstrou que o controle LQG é um caso particular de otimização da norma \mathcal{H}_2 . Com o desenvolvimento da teoria de otimização de normas, foi visto que os controles \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ eram mais relacionados do que originalmente presumido. Em específico, o trabalho de Doyle et al. (14) acerca da solução dos problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no espaço de estados mostrou que quando um dos parâmetros das equações do controle \mathcal{H}_∞ tende a infinito, as duas abordagens tendem à mesma solução. Com base nessa relação, de Paula e Ferreira (15) propuseram uma extensão do LTR para o controle \mathcal{H}_∞ , resultando em uma nova ferramenta de sintonia com propriedades de sensibilidade mista.

Nesse contexto, enuncia-se o questionamento que levou à realização desta tese de doutorado:

É possível obter um controlador em tempo discreto com propriedades de sensibilidade mista semelhantes àquelas garantidas pelo controle \mathcal{H}_∞ /LTR proposto originalmente por de Paula e Ferreira em tempo contínuo?

1.2 Justificativas

Historicamente, o LTR foi desenvolvido como uma ferramenta para a introdução de robustez no âmbito do controle LQG. Apesar de ainda ser considerada uma aplicação meritória, atualmente o LTR se mantém relevante como metodologia por possibilitar, na etapa de projeto, o completo desacoplamento entre a definição de um formato desejável para a malha e a obtenção de um controlador implementável com especificações de desempenho e propriedades de robustez bem definidas (16).

Apesar da maior parte de seu desenvolvimento teórico ter sido realizado nos anos 1980, trabalhos recentes em diferentes áreas confirmam as vantagens da utilização do LTR. Como exemplo, tem-se os trabalhos de aplicações do controle LQG/LTR por Suh et al. (17), Arab-Alibeik e Setayeshi (18), Zolotas et al. (19), Lavretsky (20) e Wise e Lavretsky (21), e os trabalhos da utilização do princípio do LTR em conjunto com outras metodologias de controle por Ishihara et al. (22) e Chen et al. (23).

Em aplicações práticas, um computador digital é usualmente utilizado na implementação dos controladores projetados. Uma abordagem possível é projetar o controlador utilizando as técnicas desenvolvidas para o tempo contínuo e discretizar esse controlador (usando, por exemplo, a aproximação de Tustin) para a implementação computacional. Entretanto, ao projetar o controlador usando técnicas específicas para o tempo discreto, tem-se maior conhecimento acerca das limitações e das propriedades dos sistemas de controle resultantes, de modo que estes possam atuar conforme originalmente pretendido.

Seguindo essa ideia, por exemplo, Iglesias desenvolveu em (24) um controlador em tempo discreto com resultados análogos ao procedimento de projeto baseado na solução da fatoração coprima à esquerda normalizada, ou NLCF (*Normalized Left Coprime Factorization*), desenvolvido por McFarlane e Glover (25). Nesse trabalho, pretende-se usar motivação semelhante para obter um controlador em tempo discreto com resultados análogos à solução \mathcal{H}_∞ /LTR desenvolvida por de Paula e Ferreira em (15).

1.3 Objetivos

O principal objetivo desse trabalho é obter um controlador em tempo discreto que possua características análogas à solução \mathcal{H}_∞ /LTR com propriedades de sensibilidade mista na formatação da malha. Para esse fim, será usada estratégia semelhante à empregada em (15): primeiramente será mostrado que com uma escolha específica dos parâmetros de projeto a solução das equações algébricas de Riccati do controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto tendem à solução das equações do controle LQG e, em seguida, serão investigadas as propriedades e características que resultam desse fato. Como característica específica do tempo discreto, será considerada a utilização dos dois tipos de observadores de estados (corrente e preditivo) e investigada a implicação de cada uma dessas alternativas na recuperação das características desejadas.

Para verificar a utilidade da tese proposta e a eficácia do controlador em tempo discreto desenvolvido em recuperar as propriedades do controle \mathcal{H}_∞ /LTR, foram realizadas simulações das malhas de controle do ângulo de arfagem e do ângulo da trajetória de voo da aeronave F-8. Um ponto examinado com mais atenção nesse trabalho do que no método análogo em tempo contínuo refere-se à etapa da expansão da dinâmica da planta por integradores na especificação da malha objetivo. Como no caso do tempo discreto a definição do integrador depende da aproximação numérica utilizada para realizar a integral, deve-se estudar quais as implicações existentes na escolha da representação utilizada. Também foram realizadas simulações com o objetivo de comparar a abordagem referente à discretização do controlador projetado em tempo contínuo com o projeto diretamente realizado em tempo discreto conforme proposto nesse trabalho. Por fim, foram realizados ensaios práticos referentes às malhas de controle dos ângulos de arfagem e guinada de um modelo didático de helicóptero fabricado pela empresa QUANSER. Esses ensaios vi-

sam verificar a possibilidade aplicação da metodologia desenvolvida em um sistema real e comparar a abordagem em tempo discreto com a abordagem original em tempo contínuo em um contexto prático.

1.4 Estrutura do Trabalho

O restante desse trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão sobre sistemas de controle realimentados e a estrutura da planta que será considerada nas análises realizadas nesse trabalho. São apresentados os conceitos de observadores de estados preditivos e correntes e suas aplicações no controle LQG em tempo discreto. É apresentada também a solução de controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto para a planta específica considerada nesse trabalho.

O Capítulo 3 apresenta a principal contribuição desse trabalho, tratando sobre o controlador em tempo discreto que recupera as propriedades de sensibilidade mista da solução \mathcal{H}_∞ /LTR. São apresentadas as condições para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto e quais propriedades podem ser obtidas nessas condições. A análise é realizada primeiramente para o LTR pela saída, sendo os resultados posteriormente dualizados para o LTR pela entrada.

O Capítulo 4 mostra exemplos de aplicação da metodologia proposta. São apresentados resultados de simulações da malha de controle do ângulo de arfagem e do ângulo da trajetória de voo da aeronave F-8 com a finalidade de verificar se a obtenção das propriedades desejadas do \mathcal{H}_∞ /LTR de fato ocorre em tempo discreto, assim como a vantagem do controlador proposto projetado diretamente em tempo discreto quando comparado à discretização de um controlador projetado em tempo contínuo. São mostrados também resultados de experimentos práticos referentes ao controle do ângulo de arfagem e guinada de um modelo didático de helicóptero em escala reduzida fabricado pela empresa QUANSER.

Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões finais e propostas de trabalhos futuros.

1.5 Notação

A notação utilizada nesse trabalho busca seguir a notação encontrada na maior parte das referências utilizadas. Letras minúsculas são utilizadas para representar vetores e sinais no domínio do tempo enquanto letras maiúsculas representam funções de transferência, sinais no domínio da frequência, sistemas e matrizes. Para a representação de sistemas em variáveis de estado utiliza-se a notação (A, B, C, D) . Em sistemas de tempo discreto, a letra T representa o tempo de amostragem.

O sobrescrito $'$ denota matriz transposta e o sobrescrito $*$ denota matriz complexo-conjugada transposta. A notação σ denota valor singular, λ denota autovalor e tr denota

traço de uma matriz. A notação \sup denota supremo, \max denota máximo e \min denota mínimo.

Em relações matriciais, a notação > 0 denota positiva definida, a notação ≥ 0 significa positiva semidefinida, a notação < 0 significa negativa definida e a notação ≤ 0 significa negativa semidefinida.

2 Controle LQG e \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto

Esse capítulo apresenta uma breve revisão sobre sistemas de controle realimentados e a definição dos problemas de controle \mathcal{H}_2 /LQG e \mathcal{H}_∞ em tempo discreto. São apresentados os conceitos de observadores de estados preditivos e correntes e suas aplicações no controle LQG e \mathcal{H}_∞ . Por fim, é apresentada uma discussão a respeito das relações entre as abordagens \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no que diz respeito às suas funções de custo.

2.1 Especificações de Desempenho para Malhas de Controle

Considere o diagrama de blocos apresentado na Figura 1, que representa uma malha de controle com realimentação negativa constituída pela planta $G(z)$, pelo controlador $K(z)$ e pelos sinais referentes à entrada de referência $R(z)$, ao erro de rastreamento $E(z)$, às entradas de comando $U(z)$, às saídas da planta $Y(z)$, aos distúrbios na entrada da planta $D_u(z)$, aos distúrbios na saída da planta $D_y(z)$ e aos ruídos de medição $N(z)$.

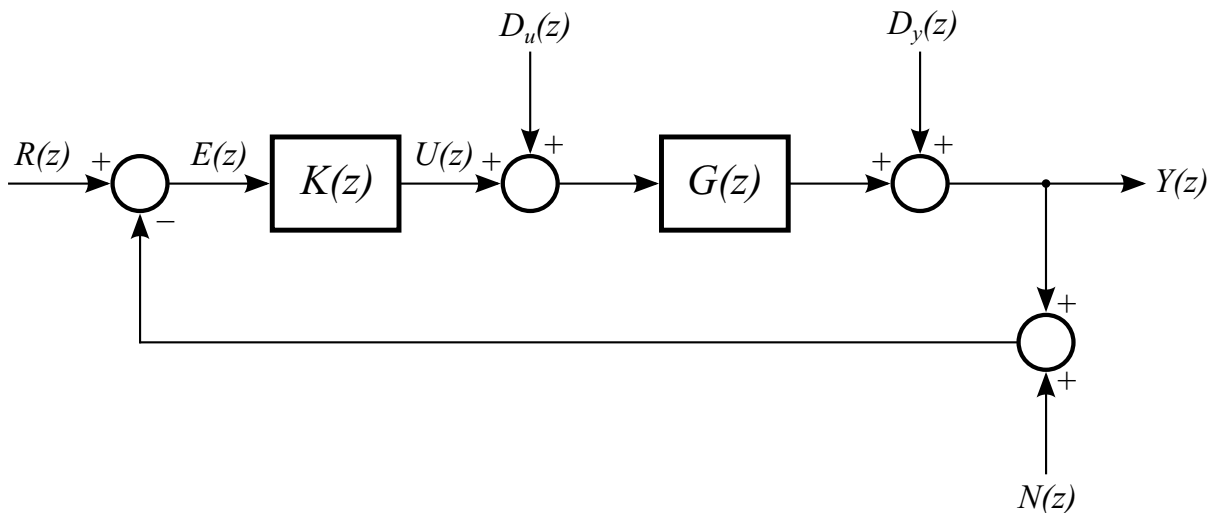


Figura 1 – Diagrama de blocos de uma malha de controle.

Define-se a matriz de transferência em malha aberta vista pela saída como aquela obtida ao se abrir a malha na saída da planta, ou seja

$$\mathcal{L}_O(z) = G(z)K(z) , \quad (2.1)$$

e a matriz de transferência em malha aberta vista pela entrada como aquela obtida ao se abrir a malha na entrada da planta, ou seja

$$\mathcal{L}_I(z) = K(z)G(z) . \quad (2.2)$$

A matriz de transferência sensibilidade na saída é definida como

$$\mathcal{S}_O(z) = (I + \mathcal{L}_O(z))^{-1} \quad (2.3)$$

e a matriz de transferência sensibilidade complementar (ou rastreamento) na saída é definida como

$$\mathcal{T}_O(z) = \mathcal{L}_O(z) (I + \mathcal{L}_O(z))^{-1} . \quad (2.4)$$

De maneira análoga, a matriz de transferência sensibilidade na entrada é definida como

$$\mathcal{S}_I(z) = (I + \mathcal{L}_I(z))^{-1} \quad (2.5)$$

e a matriz de transferência sensibilidade complementar (ou rastreamento) na entrada é definida como

$$\mathcal{T}_I(z) = \mathcal{L}_I(z) (I + \mathcal{L}_I(z))^{-1} . \quad (2.6)$$

A expressão “complementar” em \mathcal{T} refere-se ao fato de que \mathcal{T} é o complemento de \mathcal{S} , ou seja

$$\mathcal{T}_O(z) = I - \mathcal{S}_O(z) \quad (2.7)$$

e

$$\mathcal{T}_I(z) = I - \mathcal{S}_I(z) . \quad (2.8)$$

As seguintes equações podem ser obtidas do diagrama de blocos na Figura 1 (26):

$$Y(z) = \mathcal{T}_O(z) (R(z) - N(z)) + \mathcal{S}_O(z)G(z)D_u(z) + \mathcal{S}_O(z)D_y(z) \quad (2.9a)$$

$$E(z) = \mathcal{S}_O(z) (R(z) - D_y(z)) + \mathcal{T}_O(z)N(z) - \mathcal{S}_O(z)G(z)D_u(z) \quad (2.9b)$$

$$U(z) = K(z)\mathcal{S}_O(z) (R(z) - N(z)) - K(z)\mathcal{S}_O(z)D_y(z) - \mathcal{T}_I(z)D_u(z) . \quad (2.9c)$$

As equações (2.9) ilustram os objetivos conflitantes no projeto do controlador $K(z)$ visando a obtenção de boas características de desempenho para a malha de controle. Por exemplo, considere a equação (2.9a). Para que a saída rastreie adequadamente a entrada de referência, a matriz de transferência sensibilidade complementar na saída deve ter magnitude próxima à unidade. No entanto, considerando a equação (2.9b), é necessário também que a magnitude da sensibilidade complementar na saída seja pequena para que haja rejeição dos ruídos de medição.

A solução desse impasse reside no fato de que os diferentes sinais externos de perturbações ocorrem em faixas de frequências distintas. Entradas de comando e distúrbios usualmente são sinais de baixas frequências, enquanto ruídos são sinais característicos de altas frequências. Assim, dando forma às matrizes de sensibilidade e sensibilidade complementar de modo que elas apresentem magnitudes adequadas em faixas de frequência convenientes, os objetivos que à primeira vista aparentam ser exclusivos podem ser atingidos simultaneamente.

A quantificação de matrizes quanto à sua magnitude é usualmente realizada utilizando-se o conceito de valores singulares. Assim, dizer que determinada matriz tem magnitude pequena, por exemplo, em geral equivale a dizer que seu maior valor singular possui valor pequeno. Portanto, a estratégia no projeto do controlador consiste em especificar os valores singulares de alguma ou algumas das matrizes de transferência em função da frequência (por exemplo, $\mathcal{L}(e^{j\omega T})$, $\mathcal{S}(e^{j\omega T})$ ou $\mathcal{T}(e^{j\omega T})$) e então encontrar um controlador que resulte no formato desejado. Em específico, quando a matriz de transferência sensibilidade é formatada junto a outra matriz de transferência de malha fechada, tal como a sensibilidade complementar, o problema recebe o nome de sensibilidade mista (*mixed sensitivity*) (10).

Como ao longo desse trabalho é mais comum utilizar as matrizes de transferência sensibilidade e sensibilidade complementar pela saída, para simplificar a notação estas são representadas resumidamente por $\mathcal{S}(z)$ e $\mathcal{T}(z)$, respectivamente.

2.2 Definições Iniciais

Considere o sistema dinâmico em tempo discreto, linear, invariante no tempo e de dimensão finita descrito por

$$P := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lw_x(k) \\ z_x(k) = Hx(k) \\ z_u(k) = \rho Iu(k) \\ y(k) = Cx(k) + \mu Iw_y(k) \end{cases}, \quad (2.10)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de comando, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas medidas, $w_x(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de perturbações nos estados, $w_y(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de perturbações nas saídas, $z_x(k) \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema e $z_u(k) \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ possuem elementos constantes e reais e formam uma representação em variáveis de estado conhecida como planta de processo $G = (A, B, C, 0)$, dada por

$$G := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]. \quad (2.11)$$

Além da planta de processo, o sistema contempla parâmetros de ponderações das entradas e saídas exógenas por intermédio das matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e dos escalares ρ e μ . A planta de processo pode ser representada também por sua matriz de transferência, dada por

$$G(z) = C\Phi(z)B, \quad (2.12)$$

em que

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1} . \quad (2.13)$$

A planta generalizada, ou seja, a descrição do sistema com a planta de processo mais os parâmetros de ponderação das entradas e saídas exógenas, pode ser representada em um formato matricial conveniente dado por

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_x(k) \\ z_u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x(k) \\ w_x(k) \\ w_y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} , \quad (2.14)$$

em que

$$P = \begin{bmatrix} A & L & 0 & B \\ H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I \\ C & 0 & \mu I & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

Um sistema de controle pode ser representado de forma geral como na Figura 2, em que K é um controlador admissível real-racional e próprio, P é a planta generalizada real-racional e própria, w é o sinal de entradas exógenas, z é o sinal de respostas auxiliares, y contém as saídas medidas e o sinal u corresponde às entradas de comando da planta.

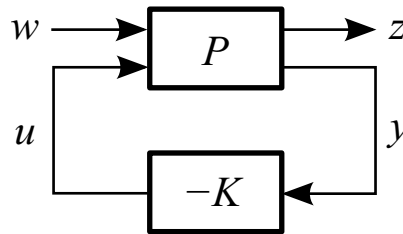


Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema de controle.

A matriz de transferência de w para z é denotada por $\mathcal{T}_{zw}(z)$, e pode ser encontrada pela transformação linear fracional inferior de P com K como parâmetro (26). O problema de controle pode então ser definido como o de encontrar um controlador K que diminua a influência do vetor w em z através da minimização da matriz de transferência $\mathcal{T}_{zw}(z)$. Duas normas com interpretações interessantes para se realizar essa minimização são as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que são definidas no domínio da frequência como (11)

$$\|\mathcal{T}_{zw}(z)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}(\mathcal{T}_{zw}^*(e^{j\theta}) \mathcal{T}_{zw}(e^{j\theta})) d\theta} \quad (2.16)$$

e

$$\|\mathcal{T}_{zw}(z)\|_\infty = \sup_{\theta} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_{zw}(e^{j\theta})) , \quad (2.17)$$

respectivamente.

Uma diferença significativa do problema de controle com realimentação de saída em tempo discreto quando comparado ao seu análogo em tempo contínuo é o fato de existirem duas estruturas para os observadores de estados em tempo discreto.

A primeira estrutura corresponde aos observadores preditivos, em que a estimativa dos estados no instante atual depende das saídas medidas no instante anterior. Assim, a informação da saída utilizada pelo regulador de estados não é a mais recente. Esse atraso entre o instante de medição e a atuação pode ser utilizado para a computação do algoritmo de controle, principalmente em sistemas de ordem elevada ou com capacidade computacional reduzida. Desse modo, os observadores de estados preditivos são utilizados preferencialmente quando o tempo de computação do algoritmo de controle é significativo se comparado ao intervalo entre as medições da saída (27).

A segunda estrutura corresponde aos observadores correntes (do inglês *current*, também encontrado na literatura com o nome *filtering*), em que a estimativa dos estados no instante atual depende das saídas medidas também no instante atual. Desse modo, esse tipo de observador de estados é preferencialmente utilizado quando o tempo de computação do algoritmo de controle é considerado desprezível se comparado ao intervalo entre as medições da saída. A aplicação dessas duas estruturas no controle \mathcal{H}_2 /LQG em tempo discreto é vista com mais detalhes na seção seguinte.

2.3 Controle LQG em Tempo Discreto

Considere o sistema descrito por (2.10). Assumindo que os pares (A, B) e (A, L) são estabilizáveis e os pares (C, A) e (H, A) são detectáveis, pode-se aplicar o controle \mathcal{H}_2 /LQG em tempo discreto à planta em questão (7). Tal como no tempo contínuo, o controlador LQG é constituído pela combinação do Filtro de Kalman na função de observador de estados em conjunto com um regulador LQR.

A matriz de ganhos do regulador de estados é dada por

$$K_{C_2} = \rho^{-2} B' X_2 (I + \rho^{-2} B B' X_2)^{-1} A, \quad (2.18)$$

em que X_2 é a solução simétrica positiva semidefinida da EAR em tempo discreto

$$A' X_2 (I + \rho^{-2} B B' X_2)^{-1} A - X_2 + H' H = 0. \quad (2.19)$$

A matriz de ganhos do observador de estados é dada por

$$K_{F_2} = \mu^{-2} (I + \mu^{-2} Y_2 C' C)^{-1} Y_2 C', \quad (2.20)$$

em que Y_2 é a solução simétrica positiva semidefinida da EAR em tempo discreto

$$A (I + \mu^{-2} Y_2 C' C)^{-1} Y_2 A' - Y_2 + L L' = 0. \quad (2.21)$$

A estrutura do controlador LQG em tempo discreto depende do tipo de observador de estados utilizado, como visto a seguir.

2.3.1 LQG com Observador de Estados Preditivo

Uma representação em espaço de estados do controlador LQG em tempo discreto com observador de estados preditivo é dada por (8)

$$K_{2_{pred}} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A - BK_{C_2} - AK_{F_2}C}{K_{C_2}} & AK_{F_2} \\ \hline & 0 \end{array} \right]. \quad (2.22)$$

Note que o controlador resultante é estritamente próprio. Em uma representação alternativa, o controlador pode ser descrito por sua matriz de transferência

$$K_{2_{pred}}(z) = K_{C_2}(zI - A + BK_{C_2} + AK_{F_2}C)^{-1}AK_{F_2}. \quad (2.23)$$

A dinâmica do observador preditivo pode ser representada por

$$\bar{q}(k+1) = A\bar{q}(k) + Bu(k) + AK_{F_2}[y(k) - C\bar{q}(k)], \quad (2.24)$$

em que $\bar{q}(k)$ é a estimativa do estado. A lei de controle é dada por

$$u(k) = -K_{C_2}\bar{q}(k). \quad (2.25)$$

2.3.2 LQG com Observador de Estados Corrente

Uma representação em espaço de estados do controlador LQG em tempo discreto com observador de estados corrente é dada por (7)

$$K_{2_{corr}} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{(A - BK_{C_2})(I - K_{F_2}C)}{K_{C_2}(I - K_{F_2}C)} & \frac{(A - BK_{C_2})K_{F_2}}{K_{C_2}K_{F_2}} \\ \hline & \end{array} \right]. \quad (2.26)$$

Note que nesse caso o controlador é semi-próprio. A matriz de transferência desse controlador é dada por

$$K_{2_{corr}}(z) = zK_{C_2}[zI - (I - K_{F_2}C)(A - BK_{C_2})]^{-1}K_{F_2}. \quad (2.27)$$

A dinâmica do observador corrente pode ser representada por

$$\bar{q}(k+1) = A\bar{q}(k) + Bu(k) + AK_{F_2}[y(k) - C\bar{q}(k)] \quad (2.28a)$$

$$q(k) = \bar{q}(k) + K_{F_2}[y(k) - C\bar{q}(k)]. \quad (2.28b)$$

Nesse caso, $\bar{q}(k)$ é uma primeira estimativa dos estados baseada na dinâmica do sistema e na medida $y(k-1)$. Essa estimativa é então corrigida pela medida mais recente $y(k)$, gerando a estimativa final $q(k)$. A lei de controle é dada por

$$u(k) = -K_{C_2}q(k). \quad (2.29)$$

Comparando as equações (2.24) e (2.28), verifica-se que a única diferença entre a dinâmica dos observadores é a correção da estimativa realizada em (2.28b). Esse fato pode ser facilmente visualizado na Figura 3, que representa visualmente as equações em questão.

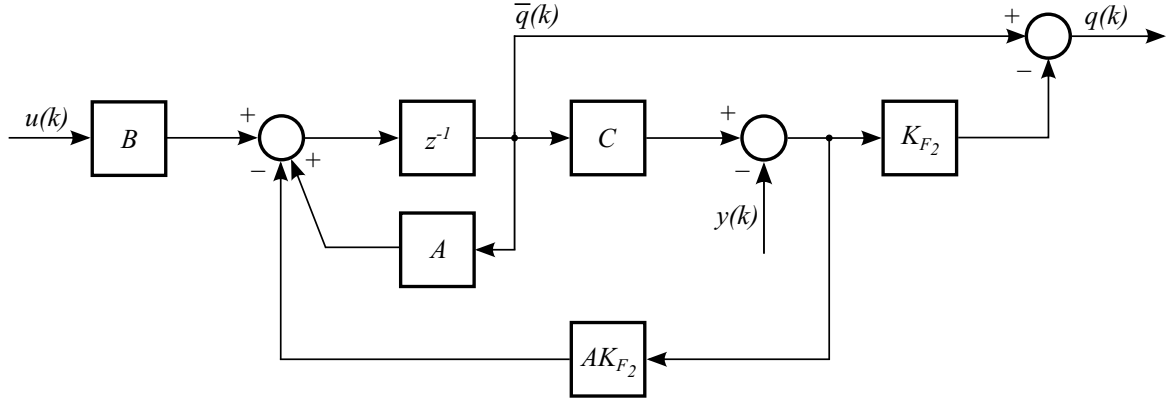


Figura 3 – Estrutura dos observadores de estados no controle LQG em tempo discreto.

2.4 Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto

As equações apresentadas nessa seção são particularizações das equações gerais desenvolvidas por Stoorvogel (11, 28) e foram obtidas ao considerar as características particulares do sistema (2.10) no que diz respeito à injeção, sobrejeção, ortogonalidade e não singularidade das matrizes que o compõe.

Se os pares (A, B) e (A, L) são estabilizáveis e os pares (C, A) e (H, A) são detectáveis, o sistema (2.10) pode ser submetido à otimização da norma \mathcal{H}_∞ . Assim como no controle LQG, a estrutura do controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto depende do tipo de observador de estados utilizado. A seguir, as estruturas dos controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com o observador de estados preditivo e corrente são apresentadas.

2.4.1 \mathcal{H}_∞ com Observador de Estados Preditivo

Uma representação em espaço de estados do controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados preditivo é dada por (28)

$$K_{\infty_{pred}} = \left[\begin{array}{c|c} A_\infty - BK_{C_\infty} - ZA\tilde{K}_{F_\infty}C & ZA\tilde{K}_{F_\infty} \\ \hline K_{C_\infty} & 0 \end{array} \right], \quad (2.30)$$

com

$$A_\infty = A + \gamma^{-2}LL'X_\infty(I + \rho^{-2}BB'X_\infty - \gamma^{-2}LL'X_\infty)^{-1}A \quad (2.31)$$

e

$$Z = (I - \gamma^{-2}X_\infty Y_\infty)^{-1}. \quad (2.32)$$

A matriz de ganhos do regulador de estados resultante é dada por

$$K_{C_\infty} = \rho^{-2}B'X_\infty(I + \rho^{-2}BB'X_\infty - \gamma^{-2}LL'X_\infty)^{-1}A, \quad (2.33)$$

em que γ é o valor da norma \mathcal{H}_∞ e X_∞ é a solução simétrica positiva semidefinida da EARG em tempo discreto

$$A'X_\infty(I + \rho^{-2}BB'X_\infty - \gamma^{-2}LL'X_\infty)^{-1}A - X_\infty + H'H = 0. \quad (2.34)$$

A matriz de ganhos do observador de estados é dada por

$$\tilde{K}_{F_\infty} = \mu^{-2}(I + \mu^{-2}Y_\infty C' C - \gamma^{-2}Y_\infty H' H)^{-1}Y_\infty C' , \quad (2.35)$$

em que Y_∞ é a solução simétrica positiva semidefinida da EARG em tempo discreto

$$A(I + \mu^{-2}Y_\infty C' C - \gamma^{-2}Y_\infty H' H)^{-1}Y_\infty A' - Y_\infty + LL' = 0 . \quad (2.36)$$

As matrizes $X_\infty Y_\infty$, $Y_\infty H' H$ e $[LL' X_\infty + A(I - \gamma^{-2}Y_\infty H' H)^{-1}Y_\infty A' X_\infty]$ devem ter raio espectral menor do que γ^2 para que esse controlador exista. A matriz de transferência do controlador é dada por

$$K_{\infty_{pred}}(z) = K_{C_\infty}(zI - A_\infty + BK_{C_\infty} + ZAK_{F_\infty}C)^{-1}ZAK_{F_\infty} . \quad (2.37)$$

A dinâmica do observador de estados preditivo pode ser descrita por

$$\bar{q}(k+1) = A_\infty \bar{q}(k) + Bu(k) + ZAK_{F_\infty}(y(k) - C\bar{q}(k)) , \quad (2.38)$$

e a lei de controle é dada por

$$u(k) = -K_{C_\infty} \bar{q}(k) . \quad (2.39)$$

2.4.2 \mathcal{H}_∞ com Observador de Estados Corrente

Uma representação em espaço de estados do controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente é dada por (11)

$$K_{\infty_{corr}} = \left[\begin{array}{c|c} (A_\infty - BK_{C_\infty})(I - K_{F_\infty}C) & (A_\infty - BK_{C_\infty})K_{F_\infty} \\ \hline K_{C_\infty}(I - K_{F_\infty}C) & K_{C_\infty}K_{F_\infty} \end{array} \right] , \quad (2.40)$$

com A_∞ dado por (2.31). A matriz de ganhos do regulador de estados é dada por (2.33) e a matriz de ganhos do observador de estados é dada por

$$K_{F_\infty} = \mu^{-2}(I + \mu^{-2}Y_\infty C' C - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C' , \quad (2.41)$$

em que X_∞ é a solução simétrica positiva semidefinida da EARG (2.34) e Y_∞ é a solução simétrica positiva semidefinida da EARG (2.36).

Para que o controlador exista, o produto matricial $X_\infty Y_\infty$ deve ter raio espectral menor do que γ^2 . O controlador pode também ser representado por sua matriz de transferência

$$K_{\infty_{corr}}(z) = zK_{C_\infty}[zI - (I - K_{F_\infty}C)(A_\infty - BK_{C_\infty})]^{-1}K_{F_\infty} . \quad (2.42)$$

A dinâmica do observador de estados corrente é descrita por

$$\bar{q}(k+1) = A_\infty \bar{q}(k) + Bu(k) + A_\infty K_{F_\infty}(y(k) - C\bar{q}(k)) \quad (2.43a)$$

$$q(k) = \bar{q}(k) + K_{F_\infty}(y(k) - C\bar{q}(k)) \quad (2.43b)$$

e a lei de controle é dada por

$$u(k) = -K_{C_\infty} q(k) . \quad (2.44)$$

Note que o controlador com observador de estados preditivo é estritamente próprio, enquanto o controlador com observador de estados corrente é semi-próprio. Ao se comparar as equações (2.38) e (2.43), verifica-se que, diferentemente do que ocorre no controle LQG em que a única diferença entre a dinâmica dos observadores é a realização ou não da correção da estimação com a medida mais recente, no controle \mathcal{H}_∞ a dinâmica do observador de estados preditivo é inerentemente diferente da dinâmica do observador de estados corrente.

Note também que quando o parâmetro γ tende ao infinito, a matriz A_∞ em (2.31) tende à matriz A e a matriz Z em (2.32) tende à matriz identidade. Assim, da mesma maneira que ocorre no caso do tempo contínuo, nessa condição as equações do controlador \mathcal{H}_∞ tendem às equações do controlador LQG em tempo discreto, tanto com o observador de estados preditivo quanto com o observador de estados corrente.

2.5 Funções de Custo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

Embora as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ sejam inerentemente distintas entre si, essas abordagens podem ser relacionadas e comparadas por suas funções de custos associadas. Para isso, considere um sistema estritamente próprio representado por $H = (A, B, C)$. A função de custo \mathcal{H}_2 para esse sistema é dada pela norma \mathcal{H}_2 elevada ao quadrado, ou seja,

$$\mathcal{J}_2(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}(H^*(e^{j\theta})H(e^{j\theta}))d\theta . \quad (2.45)$$

Essa função de custo pode ser computada em função das matrizes do sistema no espaço de estados por (29)

$$\mathcal{J}_2(H) = \text{tr}(B'X_2B) \quad (2.46a)$$

$$X_2 = A'X_2A + C'C , \quad (2.46b)$$

ou equivalentemente por

$$\mathcal{J}_2(H) = \text{tr}(CY_2C') \quad (2.47a)$$

$$Y_2 = AY_2A' + BB' . \quad (2.47b)$$

Para um determinado escalar $\gamma > 0$, se

$$\gamma^2 I - B'X_\infty B > 0 \quad (2.48a)$$

$$X_\infty = A'X_\infty A + A'X_\infty B(\gamma^2 I - B'X_\infty B)^{-1}B'X_\infty A + C'C , \quad (2.48b)$$

ou ainda se

$$\gamma^2 I - CY_\infty C' > 0 \quad (2.49a)$$

$$Y_\infty = AY_\infty A' + AY_\infty C'(\gamma^2 I - CY_\infty C)^{-1}CY_\infty A' + BB' , \quad (2.49b)$$

então pode-se afirmar que a norma \mathcal{H}_∞ desse sistema é menor ou igual a γ . Pode-se mostrar ainda que $X_\infty \geq X_2$ e $Y_\infty \geq Y_2$ (29).

Se a norma \mathcal{H}_∞ de $H(e^{j\theta})$ é menor do que γ , a função de custo \mathcal{H}_∞ é a função de entropia definida por

$$\mathcal{J}_\infty(H, \gamma) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln \det(I - \gamma^{-2} H^*(e^{j\theta})H(e^{j\theta})) d\theta . \quad (2.50)$$

Sabe-se que $\mathcal{J}_\infty(H, \gamma)$ é uma função monotonicamente decrescente em γ , tal que (30)

$$0 \leq \mathcal{J}_2(H) \leq \mathcal{J}_\infty(H, \gamma) , \quad (2.51)$$

sendo a função de custo \mathcal{H}_∞ um limite superior para a função de custo \mathcal{H}_2 . Quando o valor da norma \mathcal{H}_∞ é completamente relaxado, a função de custo \mathcal{H}_2 é recuperada (29), ou seja

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathcal{J}_\infty(H, \gamma) = \mathcal{J}_2(H) . \quad (2.52)$$

Esse resultado é coerente com as constatações em (14) acerca das semelhanças existentes entre as soluções no espaço de estados do controle \mathcal{H}_2 /LQG e do controle \mathcal{H}_∞ .

A função de entropia pode ser computada em função das matrizes do sistema no espaço de estados por

$$\mathcal{J}_\infty(H, \gamma) = -\gamma^2 \ln \det(I - \gamma^{-2} B' X_\infty B) , \quad (2.53)$$

com X_∞ dado por (2.48b), ou ainda por

$$\mathcal{J}_\infty(H, \gamma) = -\gamma^2 \ln \det(I - \gamma^{-2} C Y_\infty C') , \quad (2.54)$$

com Y_∞ dado por (2.49b). Observe que quando γ tende a infinito, as equações (2.48b) e (2.49b) tendem a (2.46b) e (2.47b), respectivamente, recuperando as equações utilizadas na computação da função de custo \mathcal{H}_2 .

No tempo contínuo, as funções de custo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são computadas pelas mesmas equações, realizando-se apenas as substituições das soluções X_2 e Y_2 por X_∞ e Y_∞ , respectivamente (31). Isso não ocorre no caso do tempo discreto, pois tem-se

$$\mathcal{J}_2(H) \leq \text{tr}(B' X_\infty B) \leq \mathcal{J}_\infty(H, \gamma) \quad (2.55a)$$

e

$$\mathcal{J}_2(H) \leq \text{tr}(C Y_\infty C') \leq \mathcal{J}_\infty(H, \gamma) . \quad (2.55b)$$

Ainda assim, tal como no caso contínuo, o custo \mathcal{H}_∞ é um limitante superior para o custo \mathcal{H}_2 e uma situação em que esses custos são iguais ocorre quando γ tende a infinito. No capítulo seguinte, será analisada a relação entre essas duas abordagens em outra situação, quando ρ tende a zero pela direita, que constitui a principal condição para ocorrência do LTR no caso do controle \mathcal{H}_2 .

3 Controle \mathcal{H}_∞ /LTR em Tempo Discreto

Este capítulo apresenta a principal contribuição desse trabalho, que é a solução de controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto que recupera as propriedades de sensibilidade mista do controle \mathcal{H}_∞ /LTR. São apresentadas quais as condições para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto e quais propriedades podem ser obtidas nessas condições. As implicações do uso de observadores de estados preditivos ou correntes são discutidas.

Como ponto de partida, a seção a seguir apresenta uma revisão a respeito da ocorrência do LTR no controle LQG em tempo discreto.

3.1 LTR no Controle \mathcal{H}_2 /LQG em Tempo Discreto

A ocorrência do LTR no controle LQG em tempo discreto foi explorada por vários pesquisadores, tais como Goodman (8), Maciejowski (7), Ishihara e Takeda (32), Niemann e Sogaard-Andersen (33) e Zhang e Freudenberg (34). As motivações para o estudo dessa metodologia em tempo discreto foram semelhantes às que levaram originalmente ao desenvolvimento do controle LQG/LTR em tempo contínuo: a recuperação das propriedades do controlador LQR ou do Filtro de Kalman como comportamento global da malha de controle e a simplificação do procedimento de projeto.

Tal como no caso do tempo contínuo, a base para o estudo do LTR no controle LQG em tempo discreto é o comportamento da solução da EAR do regulador de estados (2.19) sob uma escolha específica de parâmetros. Fazendo-se o parâmetro ρ tender a zero pela direita, tem-se que a matriz positiva semidefinida X_2 solução da EAR do regulador de estados é dada por (35, 8)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X_2 = H'H . \quad (3.1)$$

Com base nesse resultado, Goodman (8) realizou seu trabalho sobre a ocorrência do LTR pela saída para o controle LQG em tempo discreto utilizando o observador de estados preditivo. Sua conclusão foi que, com essa estrutura, a recuperação assintótica da malha objetivo não é possível e apenas uma recuperação aproximada pode ser obtida. As condições para que essa recuperação aproximada possa ocorrer são de que a planta seja quadrada e de fase mínima e que o produto matricial CB tenha posto completo. Note que essa última condição é exclusiva do controle LQG/LTR em tempo discreto, não havendo condição análoga no controle LQG/LTR em tempo contínuo.

Com a planta de processo satisfazendo as condições acima citadas, a recuperação aproximada ocorre quando a matriz H é escolhida igual à matriz C e o escalar ρ tende a zero pela direita. Usando o resultado em (3.1), essa escolha específica resulta na matriz

de ganhos do regulador de estados dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_C = (CB)^{-1}CA . \quad (3.2)$$

A malha objetivo a ser recuperada corresponde à matriz de transferência do Filtro de Kalman preditivo, ou seja $C\Phi(z)AK_F$. O erro de recuperação da malha objetivo é definido como

$$\Delta(z) = C\Phi(z)AK_F - G(z)K(z) \quad (3.3)$$

e Goodman mostrou que esse erro nas condições citadas anteriormente é dado por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = (I + C\Phi(z)AK_F)CAK_F(zI + CAK_F)^{-1} . \quad (3.4)$$

A equação (3.4) indica que o único caso em que o erro na recuperação da malha objetivo é nulo ocorre quando CAK_F é igual a zero, constituindo uma condição muito particular. Portanto, de maneira geral, as propriedades de robustez do Filtro de Kalman não são garantidas no controle LQG/LTR em tempo discreto com observador de estados preditivo.

Maciejowski (7) estudou a ocorrência do LTR pela saída para o controle LQG em tempo discreto utilizando o observador de estados corrente. Sua conclusão foi que, ao contrário do que ocorre com o uso do observador de estados preditivo, a recuperação exata da malha objetivo é possível sob condições mais abrangentes com o uso do observador de estados corrente.

A malha objetivo corresponde à matriz de transferência do Filtro de Kalman corrente $C\Phi(z)AK_F$, que é a mesma matriz de transferência do Filtro de Kalman preditivo. Assim, o erro de recuperação da malha objetivo é definido pela equação (3.3). As condições para que a recuperação da malha objetivo possa ocorrer também são as mesmas: a planta deve ser quadrada, de fase mínima e o produto matricial CB deve ter posto completo.

Satisfeitas as condições sobre a planta, se a matriz H for escolhida igual à matriz C e o parâmetro ρ tender a zero pela direita, então a matriz X_2 solução da EAR do regulador de estados é dada por (3.1), a matriz de ganho do regulador de estados é dada por (3.2) e o erro de recuperação da malha objetivo é dado por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = 0 , \quad (3.5)$$

ou seja, a malha objetivo é recuperada e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_F . \quad (3.6)$$

Serão analisadas agora as propriedades que podem ser obtidas no controle LQG/LTR em tempo discreto usando o observador de estados corrente. Usando o resultado em (3.6),

temos que as matrizes de transferência sensibilidade e sensibilidade complementar podem ser reescritas em condições de LTR como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{S}(z) = (I + C\Phi(z)AK_F)^{-1} \quad (3.7a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{T}(z) = C\Phi(z)AK_F(I + C\Phi(z)AK_F)^{-1}. \quad (3.7b)$$

Considere agora a Identidade de Kalman em tempo discreto, obtida ao manipular algebricamente a EAR do observador de estados (2.21), dada por

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(e^{j\omega T})L(C\Phi(e^{j\omega T})L)^*. \quad (3.8)$$

As seguintes inequações podem ser obtidas de (3.8):

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \geq I \quad (3.9a)$$

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \geq \mu^{-2}C\Phi(e^{j\omega T})L(C\Phi(e^{j\omega T})L)^*. \quad (3.9b)$$

Como $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)$ é uma matriz inversível, pode-se multiplicar (3.9) por $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}$ pela esquerda e pela sua transposta conjugada pela direita, resultando em

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^*]^{-1} \leq I + \mu^{-2}CYC' \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \mu^{-2}(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}(C\Phi(e^{j\omega T})L)(C\Phi(e^{j\omega T})L)^*[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^*]^{-1} \\ \leq I + \mu^{-2}CYC'. \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Sob as condições de LTR, pode-se substituir (3.7) em (3.10). Utilizando a definição e aplicando propriedades de valores singulares, encontra-se os seguintes limitantes para o controle LQG/LTR em tempo discreto com o observador de estados corrente:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')} \quad (3.11a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq 1 + \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')} \quad (3.11b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq \mu\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}\sigma_{\max}[(C\Phi(e^{j\omega T})L)^{-1}]. \quad (3.11c)$$

3.2 Solução da Equação Algébrica de Riccati Generalizada

Conforme visto no capítulo anterior, quando o parâmetro γ tende a infinito, as equações do controle \mathcal{H}_∞ tendem às equações do controle \mathcal{H}_2 em tempo discreto. Entretanto, seria essa a única escolha de parâmetros em que as soluções do controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ se tornam iguais?

Em uma análise análoga à realizada no tempo contínuo por de Paula (36), considere a EARG do regulador de estados

$$A'X(I + \rho^{-2}BB'X - \gamma^{-2}LL'X)^{-1}A - X + H'H = 0 \quad (3.12a)$$

com

$$I - \gamma^{-2}LL'X > 0, \quad (3.12b)$$

em que $X = X' \geq 0$ é a solução única de (3.12a) que mantém $(I + \rho^{-2}BB'X - \gamma^{-2}LL'X)^{-1}A$ assintoticamente estável. O problema de regulação associado à esta EARG tem seu índice de desempenho dado por (12)

$$0 \leq \min_{u(k)} \max_{w_x(k)} \sum_{k=0}^{+\infty} z'_x(k)z_x(k) + \rho^2 u'(k)u(k) - \gamma^2 w'_x(k)w_x(k) = x(0)'Xx(0), \quad (3.13)$$

em que o sinal ótimo de entrada e o sinal ótimo de distúrbio são dados por

$$u(k) = -\rho^{-2}B'X(I + \rho^{-2}BB'X - \gamma^{-2}LL'X)^{-1}Ax(k) \quad (3.14a)$$

$$w(k) = +\gamma^{-2}L'X(I + \rho^{-2}BB'X - \gamma^{-2}LL'X)^{-1}Ax(k), \quad (3.14b)$$

respectivamente, para qualquer estado inicial $x(0)$. Como o sistema dinâmico considerado é linear e o índice de desempenho é quadrático, o jogo min-max em (3.13) é chamado de problema de jogo linear quadrático (*linear quadratic game problem*), em analogia ao problema regulador linear quadrático, em que o sinal $u(k)$ é o jogador minimizante, cujo objetivo é minimizar o índice de desempenho (3.13), e o sinal $w_x(k)$ é o jogador maximizante, cujo objetivo é maximizar esse índice de desempenho.

Desse modo, definindo um sistema linear

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lw_x(k), \quad (3.15a)$$

$$z_x(k) = Hx(k), \quad (3.15b)$$

com uma condição inicial não nula $x(0)$, o objetivo é encontrar o sinal de entrada minimizante e o sinal de distúrbio maximizante que leva o estado final do sistema a zero, ou seja, $x(\infty) = 0$, em uma trajetória ótima ao longo de todas as possíveis trajetórias para esse sistema (15).

Considerando o caso particular em que ρ tende a zero pela direita (a condição de LTR no caso LQG), o índice de desempenho do problema de regulação \mathcal{H}_∞ (3.13) se torna

$$0 \leq \max_{w_x} \sum_{k=0}^{+\infty} z'_x(k)z_x(k) - \gamma^2 w'_x(k)w_x(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} z'_x(k)z_x(k) \quad (3.16)$$

em que (37)

$$z_x(k) = HA^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} HA^{k-m-1} Bu(m) + \sum_{m=0}^{k-1} HA^{k-m-1} Lw_x(m). \quad (3.17)$$

Explicitando os três primeiros termos de (3.17), tem-se

$$z(0) = Hx(0) \quad (3.18a)$$

$$z(1) = HAx(0) + HBu(0) + HLw_x(0) \quad (3.18b)$$

$$z(2) = HA^2x(0) + HABu(0) + HBu(1) + HALw_x(0) + HLw_x(1) \quad (3.18c)$$

Note que, ao contrário do que ocorre no caso contínuo, $z(k)$ não pode ser anulado em todos os instantes de tempo, já que o elemento referente ao instante inicial (3.18a) é um termo estático e independe da ação de controle $u(k)$. Entretanto, os termos de $z(k)$ para $k > 0$ podem ser anulados por um sinal de controle específico.

Usando propriedades da transformada z em (3.17), pode-se obter

$$Z_x(z) = zH\Phi(z)x(0) + H\Phi(z)BU(z) + H\Phi(z)LW_x(z) , \quad (3.19)$$

a qual, realizando-se algumas manipulações algébricas, pode ser reescrita como

$$Z_x(z) = Hx(0) + H\Phi(z)BU(z) + H\Phi(z)LW_x(z) + H\Phi(z)Ax(0) . \quad (3.20)$$

Supondo que, tal como ocorre no caso do tempo contínuo, o sinal maximizante $w(k)$ seja nulo quando ρ tende a zero pela direita, existiria um sinal $U(z)$ dado por

$$U(z) = -(H\Phi(z)B)^{-1}H\Phi(z)Ax(0) \quad (3.21)$$

que anularia $z(k)$ para $k > 0$, resultando no mesmo índice de desempenho e na mesma trajetória do problema de regulação \mathcal{H}_2 . Pelo critério de estabilidade BIBO (*Bounded Input Bounded Output*), esse sinal $U(z)$ pode existir se $H\Phi(z)B$ for de fase mínima e quadrada. Analisando ainda o índice de desempenho nessa condição hipotética, cujo valor seria dado por $x(0)'H'Hx(0)$, note que uma solução possível de (3.12a) é $X = H'H$, correspondendo à mesma solução do caso \mathcal{H}_2 .

O teorema a seguir responde aos questionamentos acerca da validade das hipóteses realizadas acima e da relação entre as soluções da EARG (2.34) do controle \mathcal{H}_∞ e a EAR (2.19) do controle \mathcal{H}_2 /LQG quando o valor do escalar ρ tende a zero pela direita.

Teorema 3.1. *Considere a matriz de transferência quadrada e de fase mínima $H\Phi(z)B$ em tempo discreto. Se o produto HB tem posto completo e ρ tende a zero pela direita, então a matriz simétrica positiva semidefinida X_∞ solução da EARG em (2.34) é igual a*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X_\infty = H'H . \quad (3.22)$$

Demonstração. É conhecido que existe uma única solução estabilizante da EARG em (2.34) para a qual a matriz de estados em malha fechada $A_\infty - BK_C$ é estável. Assumindo que a hipótese $X_\infty = X_2 = X = H'H$ é verdadeira, então (2.34) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A'H'H(I + \rho^{-2}BB'H'H - \gamma^{-2}LL'H'H)^{-1}A = 0 . \quad (3.23)$$

Como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (I + \rho^{-2} BB' H' H - \gamma^{-2} LL' H' H)^{-1} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} (I + \rho^{-2} BB' H' H)^{-1}, \quad (3.24)$$

então (3.23) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A' H' H (I + \rho^{-2} BB' H' H)^{-1} A = 0. \quad (3.25)$$

Note que o termo extra $\gamma^{-2} LL' H' H$, que aparece devido à otimização \mathcal{H}_∞ , não tem influência quando ρ tende a zero pela direita. Manipulando (3.25) algebricamente, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} A' H' H [I - \rho^{-2} BB' H' H (I + \rho^{-2} BB' H' H)^{-1}] A &= \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} A' H' H [I - \rho^{-2} B (I + \rho^{-2} B' H' H B)^{-1} B' H' H] A &= \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} A' H' [I - HB (\rho^2 I + B' H' H B)^{-1} B' H'] HA &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como ρ tende a zero pela direita, tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A' H' [I - HB (HB)^{-1} (B' H')^{-1} B' H'] HA = 0, \quad (3.27)$$

o que é verdade se a inversa de HB existe. Portanto, quando ρ tende a zero pela direita, (3.22) é uma solução admissível de (2.34) se $H\Phi(z)B$ é quadrada e o produto HB tem posto completo. Entretanto, ainda é necessário verificar se (3.22) é a única solução estabilizante.

Sob a hipótese de que $X_\infty = H' H$, a matriz de ganhos de realimentação de estados (2.33) é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_C = (HB)^{-1} HA. \quad (3.28)$$

De maneira semelhante, partindo de raciocínio similar ao usado em (3.24) e (3.26), a matriz A_∞ em (2.31) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A_\infty = A. \quad (3.29)$$

Considere agora a seguinte expressão

$$\det(zI - A_\infty + BK_C) = \det(zI - A_\infty) \det[I + K_C(zI - A_\infty)^{-1} B]. \quad (3.30)$$

De (3.28), (3.29) e (3.30), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \det(zI - A_\infty + BK_C) = \det(zI - A) \det[I + (HB)^{-1} HA(zI - A)^{-1} B]. \quad (3.31)$$

Manipulando a expressão no membro direito de (3.31), tem-se

$$\begin{aligned} I + (HB)^{-1} HA(zI - A)^{-1} B &= (HB)^{-1} [HB + HA(zI - A)^{-1} B] \\ &= (HB)^{-1} H [I + A(zI - A)^{-1}] B \\ &= z(HB)^{-1} H (zI - A)^{-1} B \\ &= z(HB)^{-1} H \Phi(z) B. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Então,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \det(zI - A_\infty + BK_C) = \det[z(HB)^{-1}] \det(zI - A) \det[H\Phi(z)B]. \quad (3.33)$$

Considere a notação

$$\det(H\Phi(z)B) = \frac{\psi(z)}{\det(zI - A)}, \quad (3.34)$$

em que $\psi(z)$ é o polinômio de zeros de $H\Phi(z)B$. Assim, de (3.33) e (3.34) pode-se escrever a equação característica

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \det(zI - A_\infty + BK_C) = z^m \psi(z) = 0, \quad (3.35)$$

em que m é a ordem do produto matricial HB . Portanto, tem-se que os polos não nulos do sistema em malha fechada $A_\infty - BK_C$ são os zeros de $H\Phi(z)B$. Assim, se todos os zeros de $H\Phi(z)B$ estiverem dentro do círculo unitário, ou seja, se $H\Phi(z)B$ for de fase mínima, $X_\infty = H'H$ é a única solução estabilizante admissível da EARG em (2.34) para qual o sistema em malha fechada é estável. \square

O Teorema 3.1 prova que quando ρ tende a zero pela direita, a solução da Equação Algébrica de Riccati Generalizada do controle \mathcal{H}_∞ , dada por (3.22), é igual à solução da Equação Algébrica de Riccati do controle \mathcal{H}_2 /LQG, dada por (3.1). Os corolários a seguir são obtidos diretamente do Teorema 3.1.

Corolário 3.1. *Considere a matriz de transferência quadrada e de fase mínima $H\Phi(z)B$ em tempo discreto. Se o produto HB tem posto completo e ρ tende a zero pela direita, então a matriz de ganhos do regulador de estados (2.33) é igual a*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_C = (HB)^{-1}HA. \quad (3.36)$$

Demonstração. A prova decorre imediatamente do Teorema 3.1, usando (3.22) em (2.33). \square

Corolário 3.2. *Considere a matriz de transferência quadrada e de fase mínima $H\Phi(z)B$ em tempo discreto. Se o produto HB tem posto completo e ρ tende a zero pela direita, então a matriz A_∞ em (2.31) é igual a*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A_\infty = A. \quad (3.37)$$

Demonstração. A prova decorre imediatamente do Teorema 3.1, usando (3.24) em (2.31). \square

O Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 foram primeiramente mostrados para funções de custo quadráticas (7, 8) e agora são generalizadas para a EARG do controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto. Além disso, pode ser visto pelo Corolário 3.2 que quando ρ tende a zero

pela direita o controlador \mathcal{H}_∞ tem a mesma estrutura do controlador LQG em tempo discreto com o observador de estados corrente. Esse resultado é consistente com a análise realizada no início da seção, visto que era esperado que a trajetória resultante do sinal de controle com o índice de desempenho dado por (3.13) quando ρ tende a zero pela direita fosse a mesma do caso \mathcal{H}_2 .

Note que há então duas situações em que as equações do controlador \mathcal{H}_∞ se tornam iguais às do controlador \mathcal{H}_2 /LQG no caso do tempo discreto. A primeira delas é direta e ocorre quando o parâmetro γ tende a infinito, conforme observado por Doyle et al. em (14). A segunda foi provada nessa seção e ocorre quando o parâmetro ρ tende a zero pela direita. Esse resultado é análogo ao originalmente obtido por de Paula e Ferreira para o tempo contínuo (15).

3.3 LTR no Controle \mathcal{H}_∞ em Tempo Discreto

Partindo dos resultados da seção anterior, será verificada nessa seção a possibilidade de recuperação da malha objetivo no contexto do controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto. Como visto na Seção 3.1, o controle LQG/LTR em tempo discreto com observador de estados preditivo não resulta em recuperação exata da malha objetivo. Com base nesse indício, será analisado primeiramente a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente.

No teorema a seguir afirma-se que com uma escolha específica dos parâmetros de projeto do controlador, a matriz de transferência de malha aberta $G(z)K(z)$ é feita igual a matriz de transferência $C\Phi(z)AK_F$, que é a malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ /LTR com observador de estados corrente.

Teorema 3.2. *Considere a planta generalizada em tempo discreto dada por (2.10) e o controlador dado por (2.40), em que os pares (A, B) e (A, L) são estabilizáveis e o par (C, A) é detectável. Considere também que a matriz de transferência $C\Phi(z)B$ é quadrada e de fase mínima e o produto CB tem posto completo. Se ρ tende a zero pela direita e a matriz H é feita igual à matriz C , então a matriz de transferência de malha aberta $G(z)K(z)$ é dada por*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_F . \quad (3.38)$$

Demonstração. Primeiramente, define-se

$$\Delta(z) = G(z)K(z) - C\Phi(z)AK_F . \quad (3.39)$$

Fazendo-se ρ tender a zero pela direita e usando o Corolário 3.2, tem-se que a função de transferência do controlador \mathcal{H}_∞ , dada por (2.42), se torna igual à função de transferência do controlador LQG, dada por (2.27).

Usando o Corolário 3.1 e fazendo $H = C$, tem-se que a matriz de ganhos do regulador de estados é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_C = (CB)^{-1}CA . \quad (3.40)$$

Portanto, a função de transferência do controlador (2.42) pode ser escrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(z) = zK_C[zI - (I - K_F C)(A - B(CB)^{-1}CA)]^{-1}K_F . \quad (3.41)$$

Manipulando algebricamente (3.41), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(z) = zK_C[zI - A + B(CB)^{-1}CA + K_F CA - K_F CB(CB)^{-1}CA]^{-1}K_F , \quad (3.42)$$

que pode ser simplificada como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(z) = zK_C[zI - A + B(CB)^{-1}CA]^{-1}K_F . \quad (3.43)$$

Portanto, a matriz de transferência do controlador nas condições de LTR é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K(z) = zK_C(zI - A + BK_C)^{-1}K_F . \quad (3.44)$$

Desenvolvendo (3.39) sob as condições de LTR, tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = C(zI - A)^{-1}[zBK_C(zI - A + BK_C)^{-1}K_F - AK_F] . \quad (3.45)$$

Usando (3.40) em (3.45), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = C(zI - A)^{-1}\{zB(CB)^{-1}CA[zI - (I - B(CB)^{-1}C)A]^{-1} - A\}K_F . \quad (3.46)$$

Manipulando algebricamente (3.46), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = C(zI - A)^{-1}\{zB(CB)^{-1}C[zI - A(I - B(CB)^{-1}C)]^{-1} - I\}AK_F . \quad (3.47)$$

Reorganizando os termos em (3.47), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = C(zI - A)^{-1}\{(A - zI)[I - B(CB)^{-1}C]\}\{zI - A[I - B(CB)^{-1}C]\}^{-1}AK_F , \quad (3.48)$$

que pode ser simplificada como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = -C[I - B(CB)^{-1}C]\{zI - A[I - B(CB)^{-1}C]\}^{-1}AK_F . \quad (3.49)$$

Como

$$C[I - B(CB)^{-1}C] = 0 , \quad (3.50)$$

tem-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \Delta(z) = 0 . \quad (3.51)$$

Isso implica que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(z)K(z) = C\Phi(z)AK_F , \quad (3.52)$$

mostrando a ocorrência da recuperação da malha objetivo. Esses resultados foram inicialmente obtidos por Maciejowski para o controle LQG/LTR (7) e agora foram generalizados para o controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente. \square

O Teorema 3.2 apresenta as condições em que o LTR ocorre no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente, constituindo um dos principais resultados desse trabalho. Será feita agora uma breve análise sobre o caso do controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados preditivo.

A malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente é dada por $C\Phi(z)AK_F$, que é matriz de transferência do observador de estados $C\Phi(z)A_\infty K_F$ nas condições de LTR (Teorema 3.1 e Corolário 3.2). No controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados preditivo, a matriz de transferência do observador de estados em condições de LTR é dada por $C\Phi(z)ZAK_F$, a qual é a malha objetivo nesse caso. Assim, define-se o erro de recuperação $\tilde{\Delta}(z)$ em condições de LTR como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \tilde{\Delta}(z) = G(z)K(z) - C\Phi(z)ZAK_F. \quad (3.53)$$

Usando (2.37) e o Corolário 3.2 em (3.53), tem-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \tilde{\Delta}(z) = C\Phi(z)BK_C(zI - A + BK_C + ZAK_FC)^{-1}ZAK_F - C\Phi(z)ZAK_F. \quad (3.54)$$

Usando os resultados de Goodman (8), pode-se mostrar que (3.54) é equivalente a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \tilde{\Delta}(z) = (I + C\Phi(z)ZAK_F)CZAK_F(zI + CZAK_F)^{-1}. \quad (3.55)$$

Tem-se então que no caso geral o erro de recuperação não é nulo (o erro só é nulo se a matriz $CZAK_F$ é nula) e a malha objetivo depende da matriz Z definida em (2.32). A malha objetivo no caso do observador de estados corrente não depende da matriz Z e aplicação do LTR resulta em uma recuperação sem erro da malha objetivo, o que é análogo ao caso contínuo desenvolvido em (15). Assim, o uso do observador de estados corrente é consideravelmente mais favorável à aplicação da metodologia quando comparado ao uso do observador de estados preditivo.

Na seção a seguir são investigadas as propriedades que podem ser obtidas nas condições de ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente.

3.4 Propriedades de Sensibilidade Mista

Nessa seção são obtidos os limitantes de desempenho em termos das matrizes de transferência sensibilidade e sensibilidade complementar em condições de LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente. Essas propriedades são obtidas a partir da Identidade de Kalman Generalizada para o tempo discreto, a qual por sua vez é encontrada a partir da EARG do observador de estados.

Considerando as condições de LTR especificadas no Teorema 3.2, a matriz de ganhos do observador de estados (2.41) pode ser reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} K_F = \mu^{-2}YC'[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC']^{-1} \quad (3.56)$$

e a EARG do observador de estados em (2.36) pode ser reescrita como

$$AYA' - Y - (\mu^{-2} - \gamma^{-2})AYC'[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC']^{-1}CYA' + LL' = 0. \quad (3.57)$$

De (3.56) e (3.57), tem-se

$$\begin{aligned} -AYA' + Y + \mu^2 AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A' \\ = LL' + \mu^4 \gamma^{-2} AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A'. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Somando e subtraindo $e^{j\omega T} Y A'$, $e^{-j\omega T} A Y$ e AYA' em (3.58), obtém-se

$$\begin{aligned} (e^{j\omega T} I - A)Y A' + AY(e^{j\omega T} I - A)^* + (e^{j\omega T} I - A)Y(e^{j\omega T} I - A)^* \\ + \mu^2 AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A' \\ = LL' + \mu^4 \gamma^{-2} AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A'. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Multiplicando (3.59) por $\Phi^*(e^{j\omega T})C'$ à direita e por $C\Phi(e^{j\omega T})$ à esquerda resulta em

$$\begin{aligned} CYA'\Phi^*(e^{j\omega T})C' + C\Phi(e^{j\omega T})AYC' + CYC' \\ + \mu^2 C\Phi(e^{j\omega T})AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A' \Phi^*(e^{j\omega T})C' = C\Phi(e^{j\omega T})LL'\Phi^*(e^{j\omega T})C' \\ + \mu^4 \gamma^{-2} C\Phi(e^{j\omega T})AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A' \Phi^*(e^{j\omega T})C'. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Somando $\mu^2(I - \gamma^{-2}CYC')$ aos dois lados de (3.60) e manipulando a equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \mu^2(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'](I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \\ = \mu^2(I - \gamma^{-2}CYC') + C\Phi(e^{j\omega T})LL'\Phi^*(e^{j\omega T})C' \\ + \mu^4 \gamma^{-2} C\Phi(e^{j\omega T})AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] K'_F A' \Phi^*(e^{j\omega T})C'. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dividindo (3.61) por μ^2 , obtém-se

$$\begin{aligned} (I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'](I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \\ = I - \gamma^{-2}CYC' + \mu^{-2}C\Phi(e^{j\omega T})L[C\Phi(e^{j\omega T})L]^* \\ + \mu^2 \gamma^{-2} C\Phi(e^{j\omega T})AK_F [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] [C\Phi(e^{j\omega T})AK_F]^*, \end{aligned} \quad (3.62)$$

que é a Identidade de Kalman Generalizada em condições de LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto.

Como o produto $X_\infty Y_\infty$ deve ter raio espectral menor do que γ^2 para a existência do controlador (2.40) e sob condições de LTR a solução da EARG do regulador de estados é dada por $X_\infty = C'C$, tem-se que

$$I - \gamma^{-2}CYC' \geq 0. \quad (3.63)$$

Assim, comparando o membro esquerdo de (3.62) com os termos à direita da equação, as seguintes relações podem ser obtidas

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \geq I - \gamma^{-2}CYC' \quad (3.64a)$$

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \geq \mu^{-2}C\Phi(e^{j\omega T})L(C\Phi(e^{j\omega T})L)^* \quad (3.64b)$$

$$(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)(I + \mu^{-2}CYC')(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* \geq \mu^2\gamma^{-2}C\Phi(e^{j\omega T})AK_F[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'](C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^* . \quad (3.64c)$$

Multiplicando a inequação (3.64a) por $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}$ à esquerda e à direita por $[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^*$, tem-se

$$I + \mu^{-2}CYC' \geq (I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}(I - \gamma^{-2}CYC')[I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^* . \quad (3.65)$$

As matrizes $I - \gamma^{-2}CYC'$ e $I + \mu^{-2}CYC'$ são positivas semidefinidas e portanto podem ser escritas como

$$I - \gamma^{-2}CYC' = \Gamma\Gamma^* \quad (3.66a)$$

$$I + \mu^{-2}CYC' = \Lambda\Lambda^* . \quad (3.66b)$$

Assim, a equação (3.65) pode ser reescrita como

$$\Lambda\Lambda^* \geq (I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}\Gamma\Gamma^*[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^* . \quad (3.67)$$

Aplicando a definição de valores singulares em (3.67), tem-se a inequação

$$\sigma_{\max}(\Lambda) \geq \sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}\Gamma] , \quad (3.68)$$

que, utilizando propriedades de valores singulares, pode ser reescrita como

$$\sigma_{\max}(\Lambda) \geq \sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]\sigma_{\min}(\Gamma) . \quad (3.69)$$

Manipulando (3.69), tem-se

$$\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq \frac{\sigma_{\max}(\Lambda)}{\sigma_{\min}(\Gamma)} , \quad (3.70)$$

que utilizando (3.66) e novamente a definição de valores singulares, pode ser escrita como

$$\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2}\lambda_{\min}(CYC')}} . \quad (3.71)$$

De (3.38), a matriz de transferência sensibilidade na saída da planta é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{S}(e^{j\omega T}) = (I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1} \quad (3.72)$$

e a matriz sensibilidade complementar é dada por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{T}(e^{j\omega T}) = C\Phi(e^{j\omega T})AK_F(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1} . \quad (3.73)$$

Partindo do fato de que $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}C\Phi(z)AK_F + (I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1} = I$, pode-se obter a seguinte relação a partir de (3.71)

$$\sigma_{\max}[C\Phi(e^{j\omega T})AK_F(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq 1 + \sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]. \quad (3.74)$$

Considere agora (3.64b). Multiplicando essa inequação por $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}$ à esquerda e por $[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^*$ à direita, tem-se

$$\begin{aligned} I + \mu^{-2}CYC' &\geq \\ \mu^{-2}(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}C\Phi(e^{j\omega T})L(C\Phi(e^{j\omega T})L)^*[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^* &. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Usando (3.66b) e aplicando a definição de valores singulares, a inequação (3.64b) pode ser escrita como

$$\sigma_{\max}(\Lambda) \geq \mu^{-1}\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}C\Phi(e^{j\omega T})L]. \quad (3.76)$$

Utilizando propriedades de valores singulares, pode-se reescrever (3.76) como

$$\sigma_{\max}(\Lambda) \geq \mu^{-1}\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]\sigma_{\min}(C\Phi(e^{j\omega T})L) \quad (3.77)$$

e

$$\sigma_{\max}(\Lambda) \geq \mu^{-1}\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \frac{1}{\sigma_{\max}[(C\Phi(e^{j\omega T})L)^{-1}]}. \quad (3.78)$$

Usando novamente a equação (3.66b) e a definição de valores singulares, tem-se que a equação (3.78) pode ser reescrita como

$$\sigma_{\max}[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq \mu\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}\sigma_{\max}((C\Phi(e^{j\omega T})L)^{-1}). \quad (3.79)$$

Por fim, considere agora a inequação (3.64c). Multiplicando por $(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}$ à esquerda e por $[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^*$ à direita, tem-se

$$\begin{aligned} I + \mu^{-2}CYC' &\geq \mu^2\gamma^{-2}(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}C\Phi(e^{j\omega T})AK_F \\ &\times [I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'](C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^*[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^*. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Como $[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC']$ é uma matriz positiva semidefinida, ela pode ser decomposta em

$$[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC'] = \Omega\Omega^*. \quad (3.81)$$

Assim, de (3.66b) e (3.81), tem-se

$$\begin{aligned} \Lambda\Lambda^* &\geq \mu^2\gamma^{-2}(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}C\Phi(e^{j\omega T})AK_F\Omega \\ &\times \Omega^*(C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^*[(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}]^*. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Aplicando a definição de valores singulares e manipulando a equação (3.82), encontra-se

$$\sigma_{\max}[C\Phi(e^{j\omega T})AK_F(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq \frac{\gamma}{\mu} \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\sqrt{1 + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})\lambda_{\min}(CYC')}}}, \quad (3.83)$$

que ainda pode ser simplificada em

$$\sigma_{\max}[C\Phi(e^{j\omega T})AK_F(I + C\Phi(e^{j\omega T})AK_F)^{-1}] \leq \frac{\gamma \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\mu \sqrt{1 - \gamma^{-2}\lambda_{\min}(CYC')}}. \quad (3.84)$$

Assim, usando (3.72), (3.73) e as inequações (3.71), (3.74), (3.79) e (3.84), as seguintes restrições para a sensibilidade e para a sensibilidade complementar podem ser determinadas em condições de LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2}\lambda_{\min}(CYC')}} \quad (3.85a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq 1 + \frac{\sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2}\lambda_{\min}(CYC')}} \quad (3.85b)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(e^{j\omega T})) \leq \mu \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')} \sigma_{\max}((C\Phi(e^{j\omega T})L)^{-1}) \quad (3.85c)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq \frac{\gamma \sqrt{1 + \mu^{-2}\lambda_{\max}(CYC')}}{\mu \sqrt{1 - \gamma^{-2}\lambda_{\min}(CYC')}}. \quad (3.85d)$$

As equações (3.85a) e (3.85b) mostram que a sensibilidade e a sensibilidade complementar estão limitadas e seus valores singulares máximos não assumem valores elevados. A equação (3.85c) mostra que os parâmetros μ e L podem ser escolhidos de acordo com especificações de projeto para limitar o máximo valor singular da sensibilidade em faixas de frequência específicas. Estas três restrições são muito similares àquelas obtidas da Identidade de Kalman no controle LQG/LTR em tempo discreto, como visto em (3.11), diferindo apenas nos termos que envolvem γ . Note que quando $\gamma \rightarrow \infty$, as restrições são iguais em ambos os casos.

A principal vantagem da ocorrência do LTR no contexto do controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto é a restrição (3.85d), que não tem correspondência no caso LQG/LTR. Essa restrição permite que o projetista limite ainda mais o pico de frequência da sensibilidade complementar pelo ajuste da razão γ/μ e, conseqüentemente, reduza o máximo pico da resposta do sistema. Apesar dos parâmetros de projeto γ e μ também estarem presentes na restrição (3.85b), a restrição em (3.85d) permite que o projetista ajuste mais diretamente o limitante da sensibilidade complementar, já que pode-se mostrar que (3.85d) cresce mais rápido com o aumento da razão γ/μ que (3.85b).

Observe que, ao contrário do que ocorre no caso do tempo contínuo, o escalar γ tem influência em outros limitantes além daquele que é exclusivo do caso \mathcal{H}_∞ . Desse fato surge um aspecto que não tem equivalência no tempo contínuo: se por um lado ao diminuir o valor de γ diminui-se o limitante da sensibilidade complementar de acordo com (3.85d), por outro lado, o limitante da sensibilidade dado por (3.85a) sofre um aumento. Desse

modo, no controle \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo discreto há um compromisso entre os valores dos limitantes da sensibilidade e da sensibilidade complementar.

Note ainda que para sistemas SISO, o termo $[I + (\mu^{-2} - \gamma^{-2})CYC']$ em (3.62) é um escalar e toda a equação pode ser dividida por esse termo. Assim, a restrição em (3.85d) se torna

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(e^{j\omega T})) \leq \frac{\gamma}{\mu}, \quad (3.86)$$

simplificando a análise. Nota-se também que nesse caso, a restrição (3.86) é idêntica à restrição em caso contínuo (A.20d).

Essas propriedades só podem ser obtidas devido à malha objetivo específica do controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente. Além de existir um erro na recuperação da malha objetivo no caso do controlador com observador de estados preditivo, não seria possível obter as propriedades de sensibilidade mista dadas por (3.85) a partir da EARG (2.36) devido ao fato da malha objetivo dessa abordagem depender da matriz Z .

Iglesias (24) mostrou que as propriedades do controle \mathcal{H}_∞ baseado na solução da fatoração coprima à esquerda normalizada desenvolvida por McFarlane e Glover (25) podem ser recuperadas apenas com o uso do observador de estados preditivo (ou, equivalentemente, com um controlador estritamente próprio). Por outro lado, nessa seção foi mostrado que as propriedades do controlador \mathcal{H}_∞ desenvolvido por de Paula e Ferreira (15) podem ser satisfatoriamente recuperadas em tempo discreto (isso é, a malha objetivo pode ser recuperada e propriedades de sensibilidade mista podem ser garantidas) com o uso do controlador \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente.

A próxima seção dualiza os resultados para o controle \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente considerando a ocorrência do LTR pela entrada.

3.5 LTR pela Entrada

É possível mostrar que, através de uma transformação de similaridade usando como matriz de transformação linear a matriz Z em (2.32), o controlador (2.40) pode ser convertido na seguinte representação em variáveis de estado

$$\hat{K} := \left[\begin{array}{c|c} (I - B\hat{K}_C)(\hat{A}_\infty - \hat{K}_F C) & (I - B\hat{K}_C)\hat{K}_F \\ \hline \hat{K}_C(\hat{A}_\infty - \hat{K}_F C) & \hat{K}_C\hat{K}_F \end{array} \right], \quad (3.87)$$

com

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2}A(I + \mu^{-2}YC'C - \gamma^{-2}YH'H)^{-1}YH'H \quad (3.88)$$

e os ganhos de retroação e observação são dados respectivamente por

$$\hat{K}_C = \rho^{-2}B'X(I + \rho^{-2}BB'X - \gamma^{-2}YX)^{-1} \quad (3.89)$$

$$\hat{K}_F = \mu^{-2}A(I + \mu^{-2}YC'C - \gamma^{-2}YH'H)^{-1}YC', \quad (3.90)$$

em que X_∞ e Y_∞ são as soluções simétricas positivas semidefinidas das EARGs em tempo discreto (2.34) e (2.36), respectivamente. O controlador pode também ser representado por sua matriz de transferência

$$\hat{K}(z) = z\hat{K}_C[zI - (I - B\hat{K}_C)(\hat{A}_\infty - \hat{K}_FC)]^{-1}\hat{K}_F. \quad (3.91)$$

Utilizando essa representação, resultados análogos aos obtidos para o LTR pela saída nas seções anteriores podem ser obtidos para o LTR pela entrada de maneira mais simples. Como resultado inicial, será analisado o comportamento da EARG do observador de estados quando o parâmetro μ tende a zero pela direita.

Teorema 3.3. *Considere a matriz de transferência quadrada e de fase mínima $C\Phi(z)L$ em tempo discreto. Se o produto CL tem posto completo e μ tende a zero pela direita, então a matriz simétrica positiva semidefinida Y_∞ solução da EARG em (2.36) é igual a*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} Y_\infty = LL'. \quad (3.92)$$

Demonstração. Usando os mesmos argumentos utilizados na prova do Teorema 3.1 e assumindo que a hipótese $Y_\infty = LL'$ é verdadeira, então (2.36) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} A(I + \mu^{-2}LL'C'C - \gamma^{-2}LL'H'H)^{-1}LL'A' = 0. \quad (3.93)$$

Como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} (I + \mu^{-2}LL'C'C - \gamma^{-2}LL'H'H)^{-1} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} (I + \mu^{-2}LL'C'C)^{-1}, \quad (3.94)$$

então (3.93) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} A(I + \mu^{-2}LL'C'C)^{-1}LL'A' = 0. \quad (3.95)$$

Manipulando (3.95) algebricamente, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} A[I - \mu^{-2}LL'C'C(I + \mu^{-2}LL'C'C)^{-1}]LL'A' &= \\ \lim_{\mu \rightarrow 0^+} A[I - \mu^{-2}LL'C'(I + \mu^{-2}CLL'C')^{-1}C]LL'A' &= \\ \lim_{\mu \rightarrow 0^+} AL[I - L'C'(\mu^2I + CLL'C')^{-1}CL]L'A' &= 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Como μ tende a zero pela direita, tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} AL[I - L'C'(L'C')^{-1}(CL)^{-1}CL]L'A' = 0, \quad (3.97)$$

o que é verdade se a inversa de CL existe. Portanto, quando μ tende a zero pela direita, (3.92) é uma solução admissível de (2.36) se $C\Phi(z)L$ é quadrada e o produto CL tem posto completo. Entretanto, ainda é necessário verificar se (3.92) é a única solução estabilizante.

Sob a hipótese de que $Y_\infty = LL'$, a matriz de ganhos do observador de estados (3.89) é dada por

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}_F = AL(CL)^{-1} . \quad (3.98)$$

De maneira semelhante, a matriz \hat{A}_∞ em (2.31) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{A}_\infty = A . \quad (3.99)$$

Considere agora a seguinte expressão

$$\det(zI - \hat{A}_\infty + \hat{K}_F C) = \det(zI - \hat{A}_\infty) \det[I + C(zI - \hat{A}_\infty)^{-1} \hat{K}_F] . \quad (3.100)$$

De (3.98), (3.99) e (3.100), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \det(zI - \hat{A}_\infty + \hat{K}_F C) = \det(zI - A) \det[I + C(zI - A)^{-1} AL(CL)^{-1}] . \quad (3.101)$$

Manipulando a expressão no membro direito de (3.101), tem-se

$$\begin{aligned} I + C(zI - A)^{-1} AL(CL)^{-1} &= [CL + C(zI - A)^{-1} AL](CL)^{-1} \\ &= C[I + (zI - A)^{-1} A]L(CL)^{-1} \\ &= C(zI - A)^{-1} Lz(CL)^{-1} \\ &= C\Phi(z)Lz(CL)^{-1} . \end{aligned} \quad (3.102)$$

Então,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \det(zI - \hat{A}_\infty + \hat{K}_F C) = \det[z(CL)^{-1}] \det(zI - A) \det(C\Phi(z)L) . \quad (3.103)$$

Considere a notação

$$\det(C\Phi(z)L) = \frac{\vartheta(z)}{\det(zI - A)} , \quad (3.104)$$

em que $\vartheta(z)$ é o polinômio de zeros de $C\Phi(z)L$. Assim, de (3.103) e (3.104) pode-se escrever a equação característica

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \det(zI - \hat{A}_\infty + \hat{K}_F C) = z^m \vartheta(z) = 0 , \quad (3.105)$$

em que m é a ordem do produto matricial CL . Portanto, tem-se que os polos não nulos do sistema em malha fechada $\hat{A}_\infty - \hat{K}_F C$ são os zeros de $C\Phi(z)L$. Assim, se todos os zeros de $C\Phi(z)L$ estiverem dentro do círculo unitário, ou seja, se $C\Phi(z)L$ for de fase mínima, $Y_\infty = LL'$ é a única solução estabilizante admissível da EARG em (2.36) para qual o sistema em malha fechada é estável. \square

No teorema a seguir, são especificadas as condições para ocorrência e o fato que decorre do princípio de recuperação da malha objetivo pela entrada no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto.

Teorema 3.4. *Considere a planta generalizada em tempo discreto dada por (2.10) e o controlador dado por (3.87), em que o par (A, B) é estabilizável e os pares (C, A) e (H, A) são detectáveis. Considere também que a matriz de transferência $C\Phi(z)B$ é quadrada e de fase mínima e o produto CB tem posto completo. Se μ tende a zero pela direita e a matriz L é feita igual à matriz B , então a matriz de transferência de malha aberta $\hat{K}(z)G(z)$ é dada por*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z)G(z) = \hat{K}_C A \Phi(z) B . \quad (3.106)$$

Demonstração. Primeiramente, define-se

$$\hat{\Delta}(z) = \hat{K}(z)G(z) - \hat{K}_C A \Phi(z) B . \quad (3.107)$$

Fazendo μ tender a zero pela direita e $L = B$, tem-se que a matriz de ganhos do observador de estados é dada por

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}_F = AB(CB)^{-1} . \quad (3.108)$$

Portanto, a função de transferência do controlador (3.91) pode ser escrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z) = z \hat{K}_C [zI - (I - B \hat{K}_C)(A - AB(CB)^{-1}C)]^{-1} \hat{K}_F . \quad (3.109)$$

Manipulando algebricamente (3.109), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z) = z K_C [zI - A + AB(CB)^{-1}C + B \hat{K}_C A - B \hat{K}_C AB(CB)^{-1}C]^{-1} \hat{K}_F , \quad (3.110)$$

que pode ser simplificada como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z) = z \hat{K}_C [zI - A + AB(CB)^{-1}C]^{-1} \hat{K}_F . \quad (3.111)$$

Portanto, a matriz de transferência do controlador nas condições do LTR pela entrada é dada por

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z) = z \hat{K}_C (zI - A + \hat{K}_F C)^{-1} \hat{K}_F . \quad (3.112)$$

Desenvolvendo (3.107), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = [z \hat{K}_C (zI - A + \hat{K}_F C)^{-1} \hat{K}_F C - \hat{K}_C A] (zI - A)^{-1} B . \quad (3.113)$$

Usando (3.108) em (3.113), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = \hat{K}_C [(zI - A + AB(CB)^{-1}C)^{-1} A z B (CB)^{-1} C - A] (zI - A)^{-1} B . \quad (3.114)$$

Manipulando algebricamente (3.114), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = \hat{K}_C A \{ [zI - (I - B(CB)^{-1}C)A]^{-1} z B (CB)^{-1} C - I \} (zI - A)^{-1} B . \quad (3.115)$$

Reorganizando os termos em (3.115), tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = \hat{K}_C A \{ [zI - (I - B(CB)^{-1}C)A]^{-1} [(I - B(CB)^{-1}C)(A - zI)] \} (zI - A)^{-1} B, \quad (3.116)$$

que pode ser simplificada como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = -\hat{K}_C A [zI - (I - B(CB)^{-1}C)A]^{-1} [I - B(CB)^{-1}C] B. \quad (3.117)$$

Como

$$[I - B(CB)^{-1}C] B = 0, \quad (3.118)$$

tem-se que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{\Delta}(z) = 0. \quad (3.119)$$

Isso implica que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}(z)G(z) = \hat{K}_C A \Phi(z) B, \quad (3.120)$$

mostrando a ocorrência da recuperação da malha objetivo também no caso do LTR pela entrada. \square

Considerando as condições de LTR especificadas no Teorema 3.4, a matriz de ganhos do regulador de estados (2.33) pode ser reescrita como

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \hat{K}_C = \rho^{-2} [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B]^{-1} B' X \quad (3.121)$$

e a EARG do regulador de estados em (2.34) pode ser reescrita como

$$A' X A - X - (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) A' X B [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B]^{-1} B' X A + H' H = 0. \quad (3.122)$$

De (3.121) e (3.122), tem-se

$$\begin{aligned} & -A' X A + X + \rho^2 A' \hat{K}'_C [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B] \hat{K}_C A \\ & = H' H + \rho^4 \gamma^{-2} A' \hat{K}'_C [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B] \hat{K}_C A. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Realizando-se manipulações algébricas semelhantes às realizadas na seção anterior, pode-se chegar à Identidade de Kalman Generalizada para o caso do LTR pela entrada dada por

$$\begin{aligned} & (I + \hat{K}_C A \Phi(e^{j\omega T}) B)^* [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B] (I + \hat{K}_C A \Phi(e^{j\omega T}) B) \\ & = I - \gamma^{-2} B' X B + \rho^{-2} (H \Phi(e^{j\omega T}) B)^* H \Phi(e^{j\omega T}) B \\ & + \rho^2 \gamma^{-2} (\hat{K}_C A \Phi(e^{j\omega T}) B)^* [I + (\rho^{-2} - \gamma^{-2}) B' X B] \hat{K}_C A \Phi(e^{j\omega T}) B. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Utilizando argumentos análogos aos utilizados na seção anterior, obtém-se de (3.124) os seguintes limitantes para a sensibilidade e sensibilidade complementar no LTR pela entrada:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}_I(e^{j\omega T})) \leq \frac{\sqrt{1 + \rho^{-2} \lambda_{\max}(B' X B)}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2} \lambda_{\min}(B' X B)}} \quad (3.125a)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_I(e^{j\omega T})) \leq 1 + \frac{\sqrt{1 + \rho^{-2} \lambda_{\max}(B'XB)}}{\sqrt{1 - \gamma^{-2} \lambda_{\min}(B'XB)}} \quad (3.125b)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}_I(e^{j\omega T})) \leq \rho \sqrt{1 + \rho^{-2} \lambda_{\max}(B'XB)} \sigma_{\max}((H\Phi(e^{j\omega T})B)^{-1}) \quad (3.125c)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_I(e^{j\omega T})) \leq \frac{\gamma \sqrt{1 + \rho^{-2} \lambda_{\max}(B'XB)}}{\rho \sqrt{1 - \gamma^{-2} \lambda_{\min}(B'XB)}}. \quad (3.125d)$$

Com isso, finalizam-se os desenvolvimentos teóricos dessa tese de doutorado. O próximo capítulo apresenta exemplos de aplicação da metodologia proposta.

4 Exemplos de Aplicação

Esse capítulo mostra exemplos de aplicação do controle \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo discreto com observador de estados corrente nas malhas de controle do ângulo de arfagem e do ângulo da trajetória de voo da aeronave F-8, além de experimentos práticos referentes ao controle do ângulo de arfagem e guinada de um modelo didático de helicóptero em escala reduzida fabricado pela empresa QUANSER.

É importante ressaltar que o objetivo desses exemplos não são o de projetar sistemas de controle para aplicações aeronáuticas reais, mas sim confirmar através de simulações e experimentos práticos os resultados esperados com a metodologia proposta nesse trabalho.

4.1 Sistema de Controle da Dinâmica Longitudinal da Aeronave F-8

Essa seção apresenta a aplicação da metodologia desenvolvida no controle de um caça F-8, o mesmo exemplo apresentado por de Paula e Ferreira em (15) para o caso do controle \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo contínuo. Em um primeiro momento, o objetivo é ilustrar as propriedades de sensibilidade mista do método e a liberdade na especificação do desempenho do sistema pela escolha do parâmetro γ . Posteriormente, o foco é a comparação entre diferentes abordagens para a obtenção do controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com as propriedades da solução \mathcal{H}_∞ /LTR.

Várias versões modificadas da aeronave F-8 Crusader, fabricadas pela Vought, foram utilizadas no desenvolvimento e na validação de conceitos do sistema de controle de voo digital *fly-by-wire* pela NASA nos anos 1970. Os experimentos em sistemas de controle de voo controlados por computador realizados pioneiramente no F-8 possibilitaram uma revolução no projeto de aeronaves. A Figura 4 mostra uma dessas aeronaves em voo.

Fonte: NASA Armstrong Fact Sheet: F-8 Digital Fly-By-Wire Aircraft (38)



Figura 4 – Aeronave F-8.

4.1.1 Modelo do F-8

A dinâmica longitudinal linearizada dessa aeronave voando a uma altitude constante de 30000 pés com velocidade constante de 1,2 Mach é dada por (39)

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{q}}(t) \\ \dot{\hat{u}}(t) \\ \dot{\hat{\alpha}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,0006 & -13,2 & 0 \\ 0 & -0,014 & -16,64 & -32,2 \\ 1 & -0,0001 & -1,65 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{u}(t) \\ \hat{\alpha}(t) \\ \hat{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19 & -2,5 \\ -0,66 & -0,5 \\ -0,16 & -0,6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e(t) \\ \hat{\delta}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(t) \\ \hat{\gamma}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{u}(t) \\ \hat{\alpha}(t) \\ \hat{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.1b)$$

em que $\hat{q}(t)$ é o incremento na taxa de variação do ângulo de arfagem, $\hat{u}(t)$ é o incremento na velocidade horizontal, $\hat{\alpha}(t)$ é o incremento no ângulo de ataque e $\hat{\theta}(t)$ é o incremento no ângulo de arfagem. As entradas de controle são o incremento na deflexão do ângulo do profundor $\hat{\delta}_e(t)$ e o incremento na deflexão do ângulo do *flapperon* $\hat{\delta}_f(t)$. As saídas controladas são o incremento do ângulo de arfagem e o incremento do ângulo da trajetória de voo $\hat{\gamma}_p(t)$.

Considerando um tempo de amostragem de 0,5 [s], uma representação da planta de processo em tempo discreto é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{q}(k+1) \\ \hat{u}(k+1) \\ \hat{\alpha}(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,063 & -0,0001 & -1,9291 & 0,0011 \\ -3,8834 & 0,9935 & 2,391 & -16,0463 \\ 0,1462 & -0,0001 & -0,1874 & 0,0005 \\ 0,2537 & 0 & -0,8602 & 1,0002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,6829 & -0,1181 \\ 14,0116 & 1,9088 \\ -1,2702 & -0,2819 \\ -1,6294 & -0,1122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e(k) \\ \hat{\delta}_f(k) \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\gamma}_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.2b)$$

pela qual pode-se verificar que esse sistema tem pares de polos multivariáveis complexo-conjugados em $z = -0,1253 \pm j0,5270$ e $z = 0,9970 \pm j0,0132$. Verifica-se também que o sistema apresenta dois zeros de transmissão em $z = -0,8463$ e $z = 0,9931$, caracterizando um sistema dinâmico estritamente próprio e de fase mínima, e que o modelo obtido é

controlável e observável. O diagrama de valores singulares do F-8 é apresentado na Figura 5. Note que a frequência de Nyquist está em torno de 6,28 [rad/s].

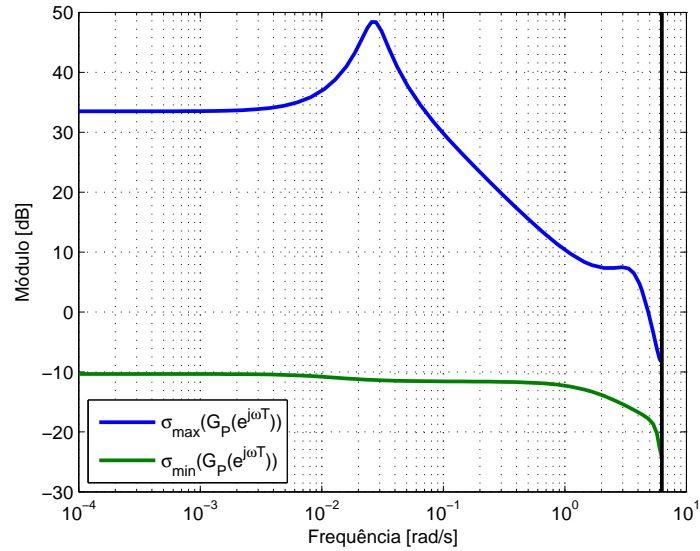


Figura 5 – Valores singulares do modelo da aeronave F-8 em malha aberta.

As Figuras 6 e 7 apresentam a resposta do sistema a um degrau unitário nas entradas $\hat{\delta}_e$ e $\hat{\delta}_f$, respectivamente.

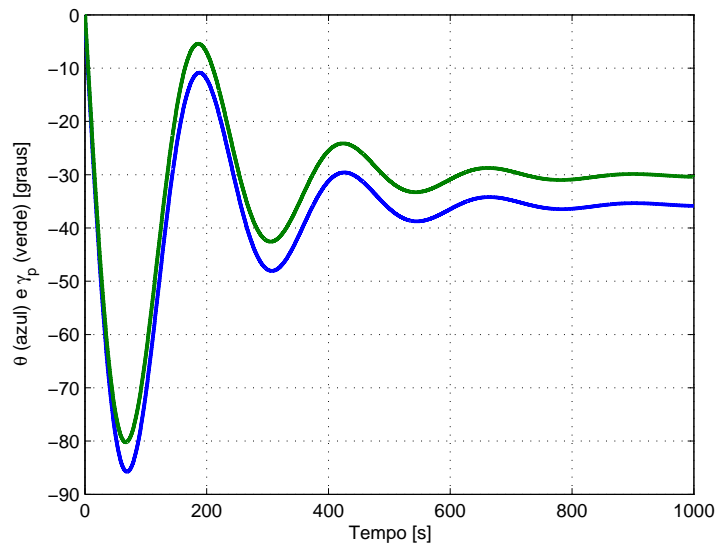


Figura 6 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada $\hat{\delta}_e$.

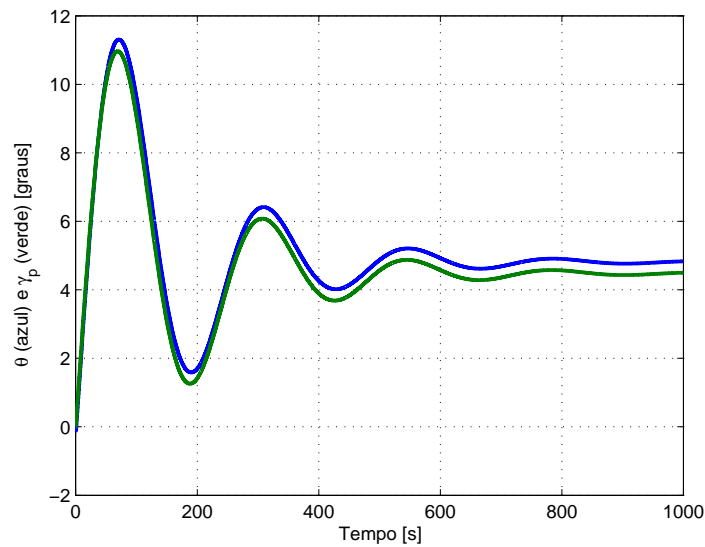


Figura 7 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada $\hat{\delta}_f$.

4.1.2 Expansão por Integradores

No intuito de eliminar o erro em regime permanente para uma entrada do tipo degrau e auxiliar a formatação da malha objetivo, faz-se necessário incluir integradores na malha de controle (6).

No caso contínuo, o integrador é definido unicamente por um polo na origem. No caso discreto, a definição do integrador depende do método numérico utilizado na aproximação da integral. Desse modo, sejam $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ e $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ dois subsistemas com representações no espaço de estados dadas por

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right], \quad G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]. \quad (4.3)$$

A conexão em série desses dois subsistemas, conforme ilustrado na Fig. 8, resulta na representação em espaço de estados $G_2G_1 = (A, B, C, D)$ dada por

$$G_2G_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array} \right]. \quad (4.4)$$

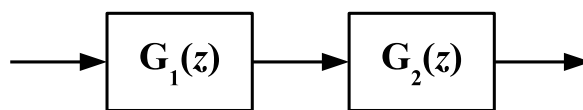


Figura 8 – Conexão de sistemas em série.

Considere que G_2 corresponde a uma representação em tempo discreto de uma planta de processo estritamente própria descrita em espaço de estados por $G_2 = (A_P, B_P, C_P, 0)$ com tempo de amostragem T . Se G_1 é um integrador dado por

$$G_1 = T \frac{1}{z-1} I, \quad (4.5)$$

correspondente ao método de integração *forward* Euler, com uma representação em espaço de estados dada por $G_1 = (I, TI, I, 0)$, o produto $G_2 G_1$ é dado por

$$G_2 G_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & 0 \\ 0 & I & TI \\ \hline C_P & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.6)$$

Para essa abordagem, tem-se

$$\text{posto}(CB) = 0. \quad (4.7)$$

Desse modo, a condição de que o posto da matriz CB seja igual a m necessária para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto não é satisfeita.

Se G_1 é um integrador dado por

$$G_1 = T \frac{z}{z-1} I, \quad (4.8)$$

correspondente ao método *backward* Euler, com uma representação em espaço de estados dada por $G_1 = (I, TI, I, TI)$, o produto $G_2 G_1$ é dado por

$$G_2 G_1 = \left[\begin{array}{cc|c} A_P & B_P & TB_P \\ 0 & I & TI \\ \hline C_P & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.9)$$

Para essa abordagem, tem-se

$$\text{posto}(CB) = \text{posto}(C_P B_P), \quad (4.10)$$

que mantém a característica da planta de processo.

Conclui-se que a expansão da planta por integradores obtidos com o método *forward* Euler inviabiliza a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto. O integrador *backward* Euler, por sua vez, não modifica o posto da matriz CB da planta de processo expandida e, portanto, pode ser utilizado para esse fim.

4.1.3 Definição da Malha Objetivo

A matriz $C_P B_P$ do modelo da aeronave F-8 tem posto completo e a expansão dessa planta por integradores *backward* Euler não afeta a observabilidade e a controlabilidade

do modelo estudado. Assim, todos os requisitos para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto são atendidos.

A fim de comparação, nesse exemplo a matriz L será a mesma usada em (15) escalonada pelo tempo de amostragem. Desse modo, a matriz L é dada por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,050 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,50 \end{bmatrix}' \quad (4.11)$$

e os parâmetros γ e μ são inicialmente escolhidos como

$$\mu = 6, \quad \gamma = 9. \quad (4.12)$$

Com esses valores o ganho K_F pode ser calculado, resultando em

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,0231 & 0,0248 \\ -29,9018 & 4,3785 \\ 0,0144 & -0,0239 \\ 0,1453 & 0,1309 \\ -0,0107 & 0,0014 \\ 0,0060 & 0,1059 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

As Figuras 9 e 10 mostram as restrições da sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente, impostas pela especificação da malha objetivo conforme descrito pelas equações (3.85).

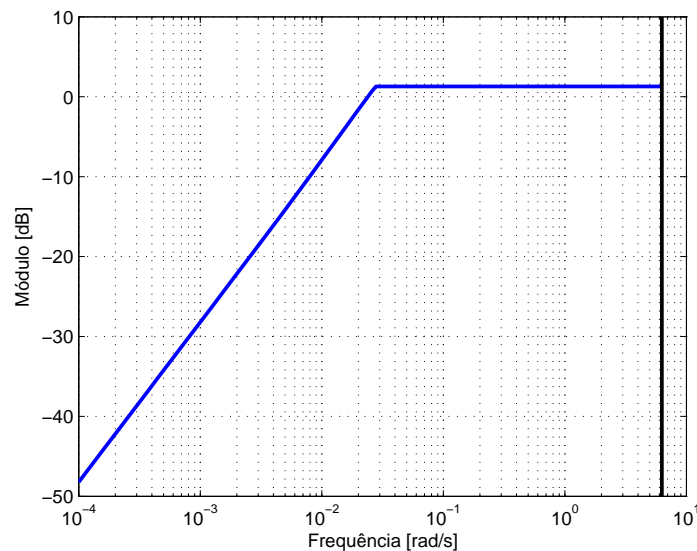


Figura 9 – Restrições para a sensibilidade da malha objetivo.

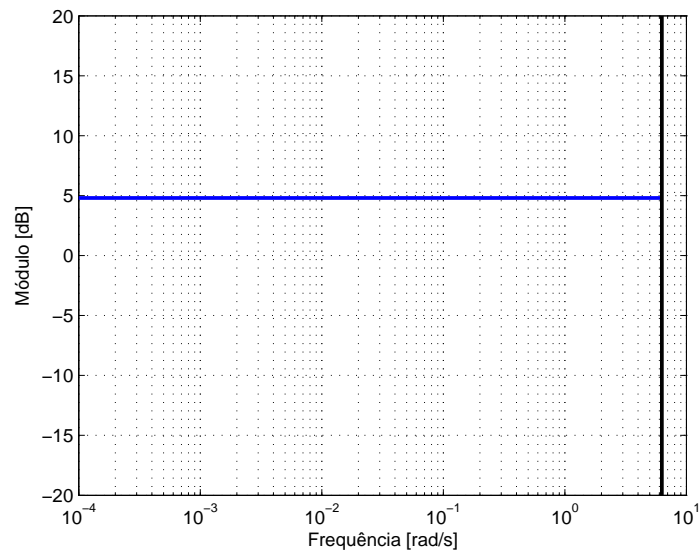


Figura 10 – Restrições para a sensibilidade complementar da malha objetivo.

A Figura 11 apresenta a resposta ao degrau em ambas as entradas da malha objetivo, sendo esse portanto o desempenho esperado para o sistema de controle resultante.

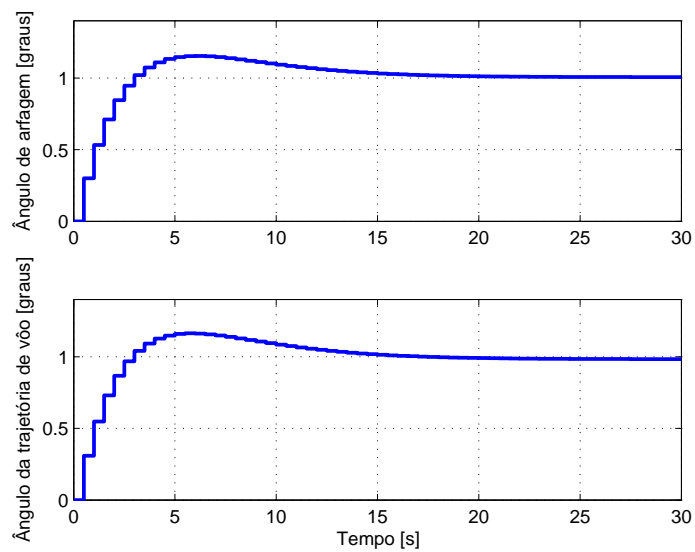


Figura 11 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo.

4.1.4 Simulações da Malha de Controle

O ganho K_C que resulta na ocorrência do LTR, conforme calculado pela equação (3.40), é dado por

$$K_C = \begin{bmatrix} -0,3479 & 0 & 1,3981 & -1,7796 & 2 & 0 \\ 0,5302 & 0,0003 & -4,9698 & 8,0141 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle é apresentada na Figura 12. A Figura 13 mostra os sinais de controle correspondentes.

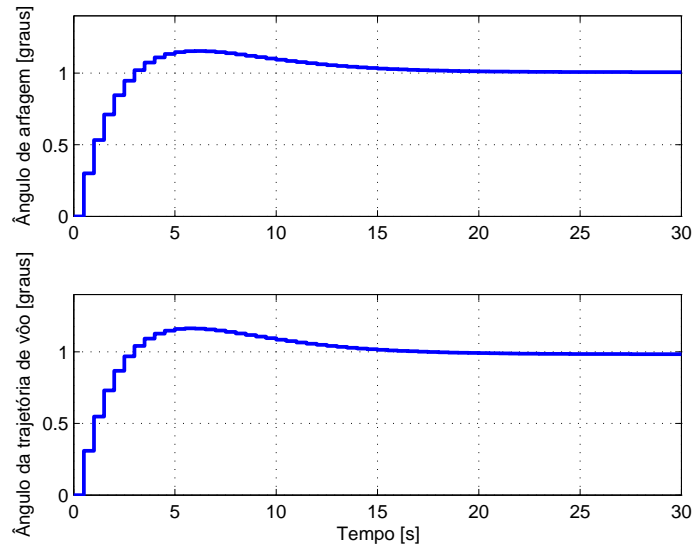


Figura 12 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle.

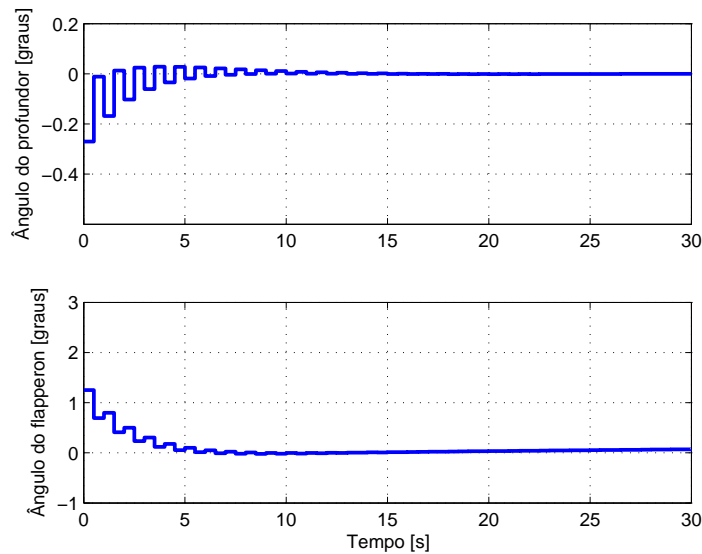


Figura 13 – Sinais de controle.

As Figuras 14 e 15 mostram as restrições e os valores singulares obtidos para a sensibilidade e sensibilidade complementar da malha de controle, respectivamente. Na Figura 14, o “limitante 1” refere-se à equação (3.85a) e o “limitante 2” refere-se à equação (3.85c). Na Figura (15), esses limitantes referem-se às equações (3.85b) e (3.85d), respectivamente.

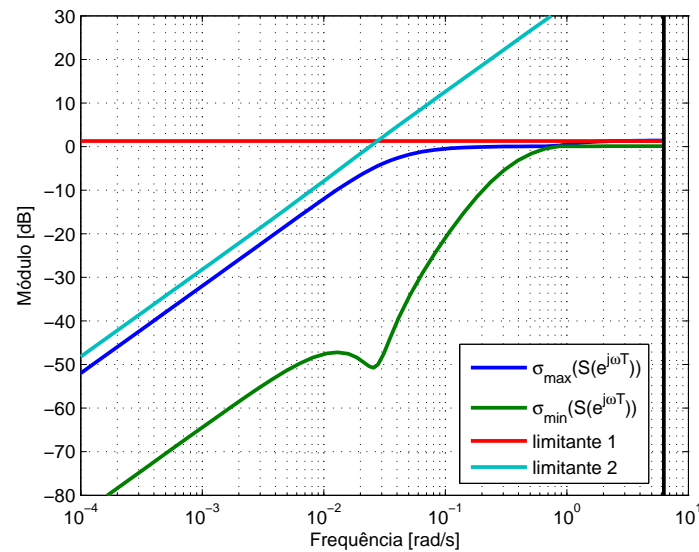


Figura 14 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle.

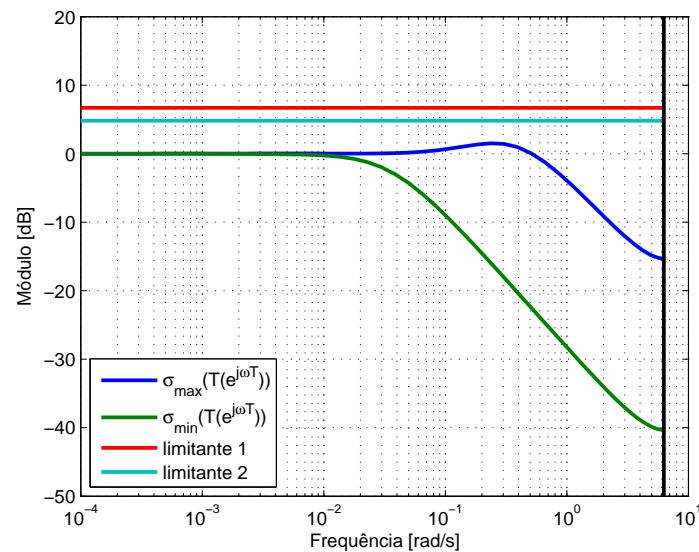


Figura 15 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle.

A fim de verificar a possibilidade de manipular o máximo pico do sistema com a especificação do parâmetro γ , os parâmetros L e μ serão mantidos constantes e γ será variado.

As Figuras 16 e 17 mostram as restrições e os valores singulares obtidos para a sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente, com $\gamma = 7$. A resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle é apresentada na Figura 18 e a Figura 19 mostra os sinais de controle correspondentes.

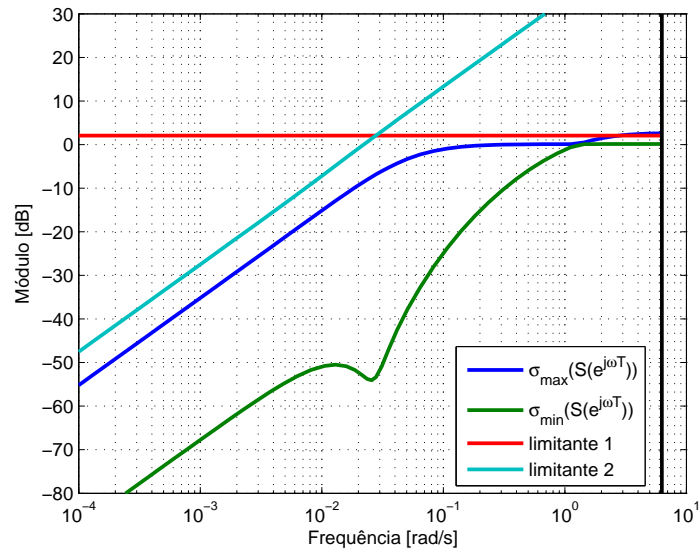


Figura 16 – Valores singulares da sensibilidade com $\gamma = 7$.

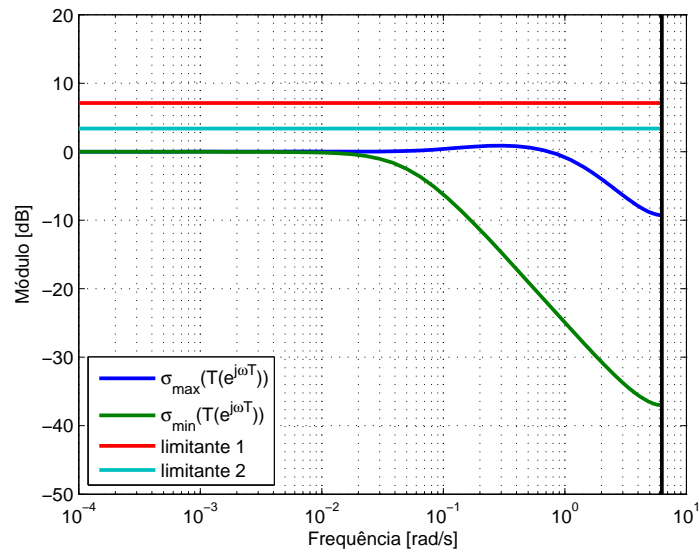


Figura 17 – Valores singulares da sensibilidade complementar com $\gamma = 7$.

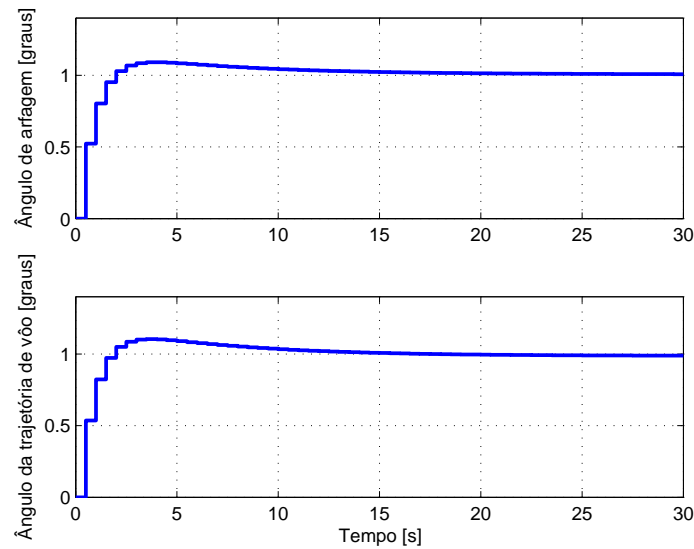


Figura 18 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com $\gamma = 7$.

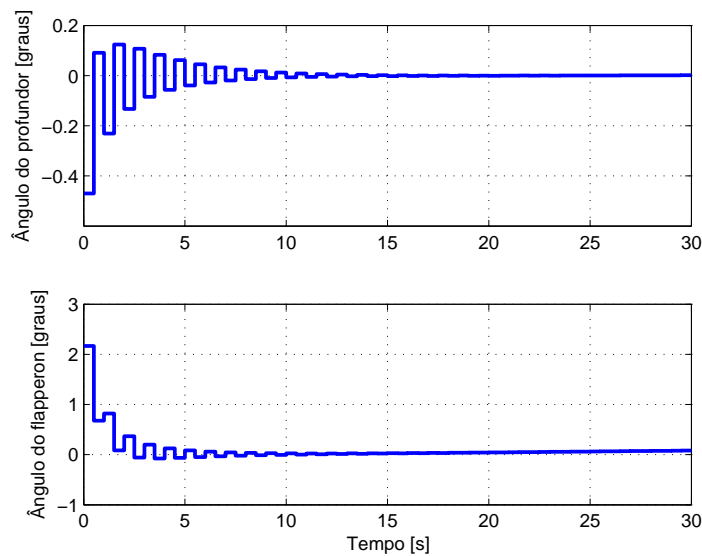


Figura 19 – Sinais de controle com $\gamma = 7$.

Note que a diminuição do parâmetro γ leva a uma perceptível mudança do limitante referente à equação (3.85d). Esse fato, por sua vez, desloca os valores singulares da sensibilidade complementar para baixo, o que conseqüentemente leva a uma diminuição do máximo pico na resposta transitória da malha. Observe que, em contrapartida, há um aumento nos valores dos sinais de controle da malha.

As Figuras 20 e 21 mostram as restrições e os valores singulares da sensibilidade e sensibilidade complementar, respectivamente, obtidos com $\gamma \rightarrow \infty$. A resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle é apresentada na Figura 22 e a Figura 23 mostra os sinais de controle correspondentes.

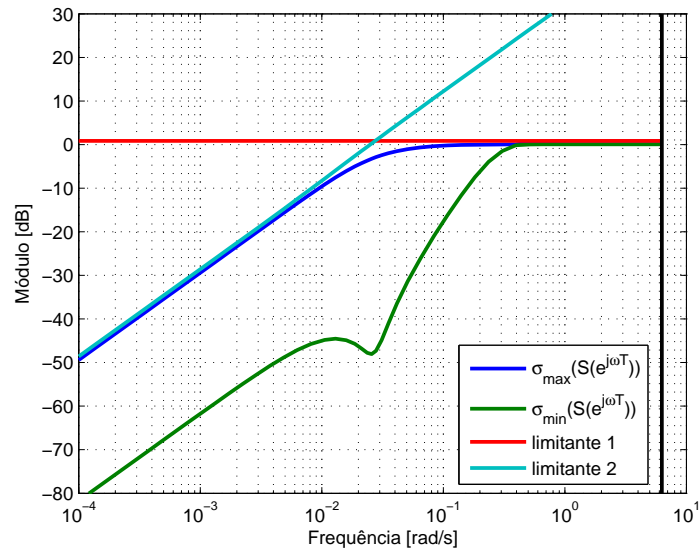


Figura 20 – Valores singulares da sensibilidade com $\gamma \rightarrow \infty$.

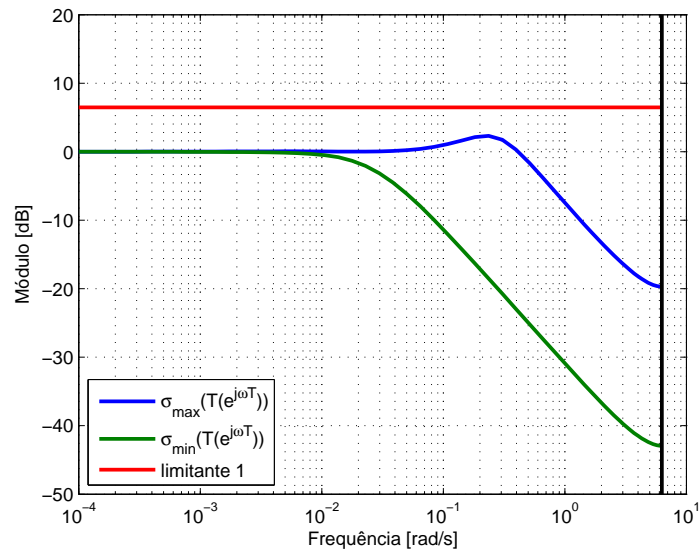


Figura 21 – Valores singulares da sensibilidade complementar com $\gamma \rightarrow \infty$.

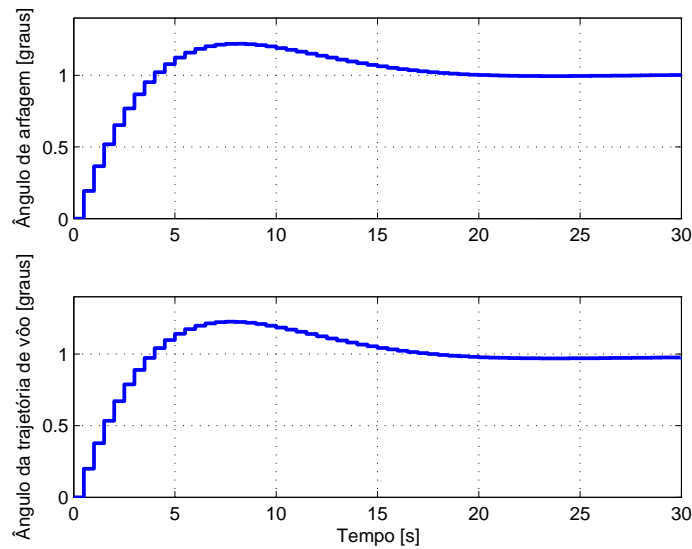


Figura 22 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com $\gamma \rightarrow \infty$.

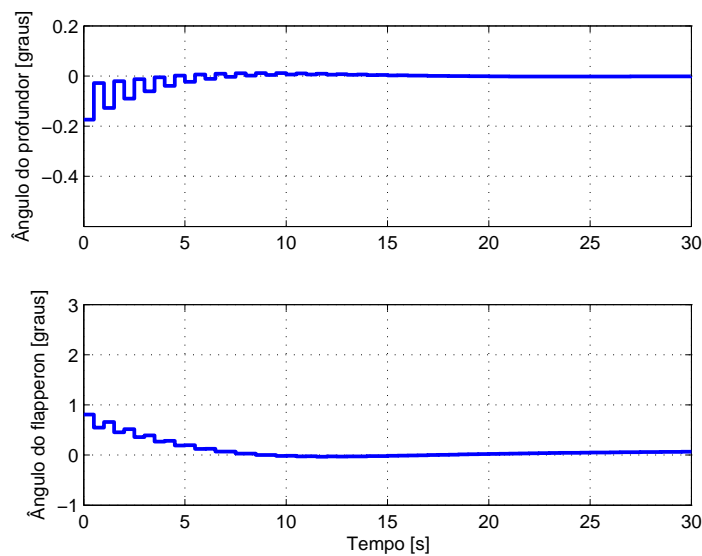
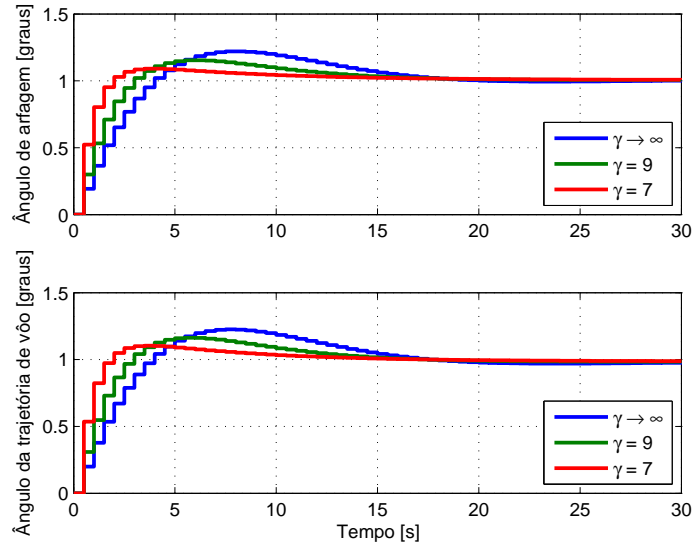


Figura 23 – Sinais de controle com $\gamma \rightarrow \infty$.

Verifica-se que a restrição (3.85d) não tem efeito sobre a formatação da malha quando o parâmetro γ tende ao infinito. Essa situação recupera o desempenho obtido com o controlador LQG/LTR em tempo discreto e, conforme o esperado, resulta no maior máximo pico na resposta da malha entre os valores testados. A Figura 24 resume em um único gráfico as diferentes respostas ao degrau unitário em ambas as entradas com a variação do parâmetro γ .


 Figura 24 – Resposta ao degrau em ambas as entradas com a variação do parâmetro γ .

4.1.5 Comparação entre Diferentes Abordagens

Considere agora um tempo de amostragem de $0,25[s]$. Uma representação da planta de processo em tempo discreto é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{q}(k+1) \\ \hat{u}(k+1) \\ \hat{\alpha}(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5245 & -0,0001 & -2,113 & 0,0004 \\ -1,2816 & 0,9966 & -2,0615 & -8,0362 \\ 0,1601 & 0 & 0,3885 & 0,0001 \\ 0,1996 & 0 & -0,3158 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,7413 & -0,3094 \\ 2,0335 & -0,3767 \\ -0,4833 & -0,1674 \\ -0,5177 & -0,0516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e(k) \\ \hat{\delta}_f(k) \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\gamma}_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.15b)$$

pela qual pode-se verificar que esse sistema tem pares de polos multivariáveis complexo-conjugados em $z = 0,4563 \pm j0,5775$ e $z = 0,9985 \pm j0,0066$. Verifica-se também que o sistema apresenta dois zeros de transmissão em $z = -0,9319$ e $z = 0,9965$. A matriz $C_P B_P$ tem posto completo e a expansão dessa planta por integradores *backward* Euler resulta em um modelo observável e controlável. Assim, todos os requisitos para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto são atendidos.

A matriz L é especificada como

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}' \quad (4.16)$$

e os parâmetros γ e μ são escolhidos como

$$\mu = 1, \quad \gamma = 10. \quad (4.17)$$

A Figura 25 mostra a resposta do ângulo de arfagem com (a) o controlador \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo contínuo, (b) a aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo, (c) o controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente em condições de LTR e (d) o controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados preditivo em condições de LTR. A Figura 26 realiza a mesma comparação mas levando em consideração o ângulo da trajetória de voo.

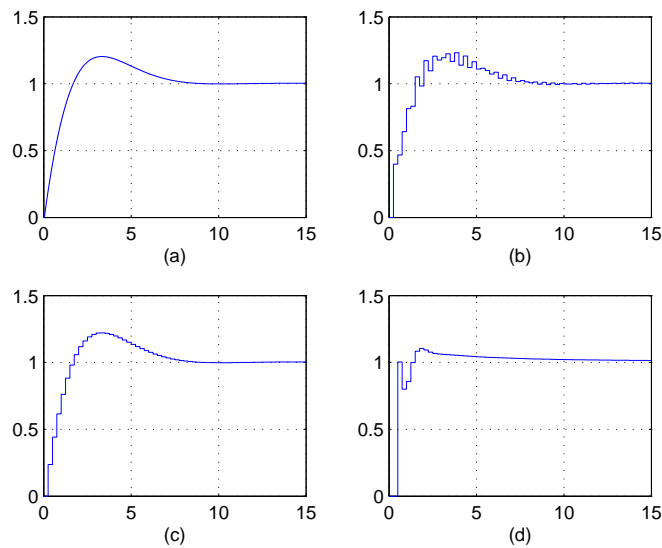


Figura 25 – Comparação das respostas do ângulo de arfagem com $T = 0,25$ [s].

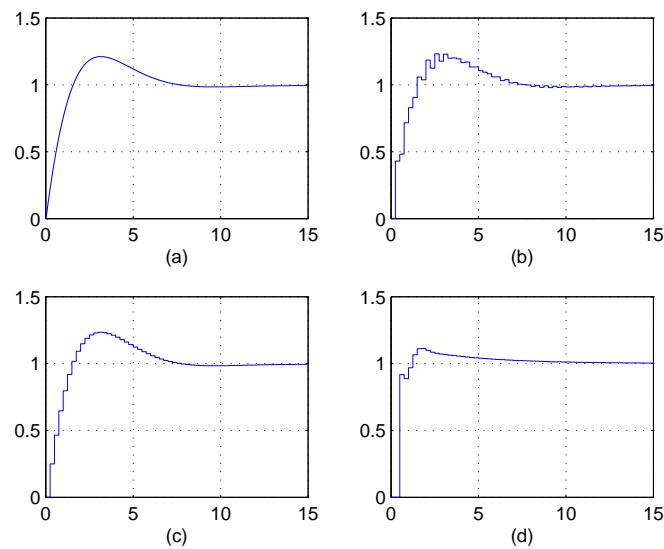


Figura 26 – Comparação das respostas do ângulo da trajetória de voo com $T = 0,25$ [s].

Verifica-se que a única abordagem em tempo discreto que resulta em respostas de fato similares às do controlador \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo contínuo é aquela referente ao controlador \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente. O controlador obtido com a aproximação de Tustin, apesar de manter característica ligeiramente semelhante à do controlador original, apresenta certa degradação no formato da resposta. Já o controlador \mathcal{H}_∞ com observador de estados preditivo apresenta característica bastante distinta à do controlador em tempo contínuo.

A fim de justificar a diferença entre as respostas dos controladores \mathcal{H}_∞ em tempo discreto, a Figura 27 apresenta a resposta ao degrau em ambas as entradas da malha objetivo do controlador com observador de estados corrente e a Figura 28 mostra a resposta da malha objetivo do controlador com observador de estados preditivo. Por essas figuras, verifica-se que as dinâmicas que se busca recuperar com a aplicação do LTR em cada um dos casos são intrinsecamente distintas.

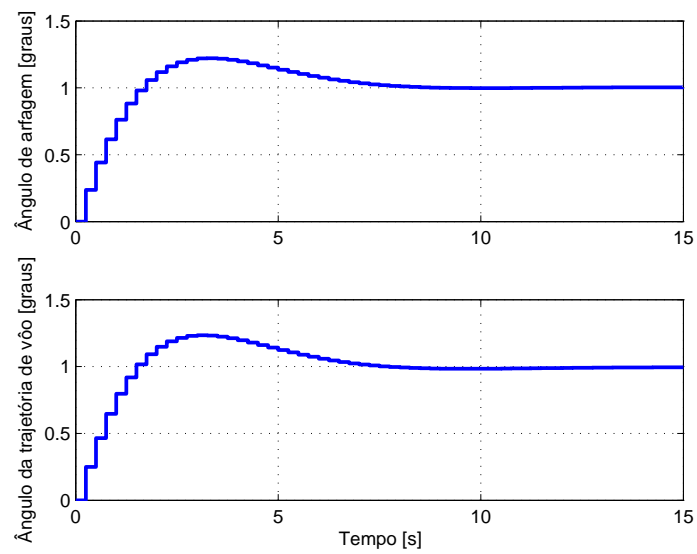


Figura 27 – Resposta da malha objetivo do controlador com observador de estados corrente.

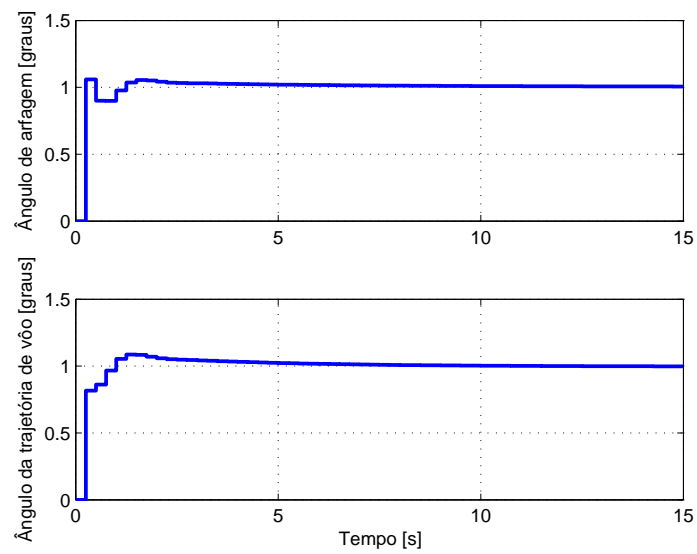


Figura 28 – Resposta da malha objetivo do controlador com observador de estados preditivo.

As mesmas comparações serão agora realizadas considerando um tempo de amostragem de 0,30 [s]. Nesse caso, uma representação da planta de processo em tempo discreto

é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{q}(k+1) \\ \hat{u}(k+1) \\ \hat{\alpha}(k+1) \\ \hat{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,397 & -0,0001 & -2,237 & 0,0006 \\ -1,7589 & 0,9966 & -1,731 & -9,6402 \\ 0,1691 & 0 & 0,2529 & 0,0002 \\ 0,2226 & 0 & -0,425 & 1,0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,1617 & -0,3015 \\ 3,4567 & 0,599 \\ -0,643 & -0,1976 \\ -0,7157 & -0,067 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_e(k) \\ \hat{\delta}_f(k) \end{bmatrix} \quad (4.18a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\gamma}_p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}(k) \\ \hat{u}(k) \\ \hat{\alpha}(k) \\ \hat{\theta}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.18b)$$

pela qual pode-se verificar que esse sistema tem pares de polos multivariáveis complexo-conjugados em $z = 0,3248 \pm j0,6113$ e $z = 0,9982 \pm j0,0079$, e que apresenta dois zeros de transmissão em $z = -0,9169$ e $z = 0,9958$. Todas as condições para a ocorrência do LTR no controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto continuam sendo atendidas pelo sistema obtido com o novo tempo de amostragem.

A matriz L é especificada como

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,030 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,30 \end{bmatrix}' \quad (4.19)$$

devido ao novo tempo de amostragem. Os parâmetros γ e μ são mantidos como no caso anterior.

A Figura 29 mostra a resposta do ângulo de arfagem com (a) o controlador \mathcal{H}_∞ /LTR em tempo contínuo, (b) a aproximação de Tustin do controlador em tempo contínuo, (c) o controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente em condições de LTR e (d) o controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados preditivo em condições de LTR. A Figura 30 mostra a resposta do ângulo da trajetória de voo para esses mesmos casos.

Note que com apenas uma ligeira modificação no tempo de amostragem a resposta do controlador obtido a partir da aproximação de Tustin do controlador \mathcal{H}_∞ contínuo torna-se consideravelmente mais degradada. A malha do controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados preditivo continua com resposta bastante distinta da resposta desejada. O controlador \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente, entretanto, mantém as mesmas características em sua resposta.

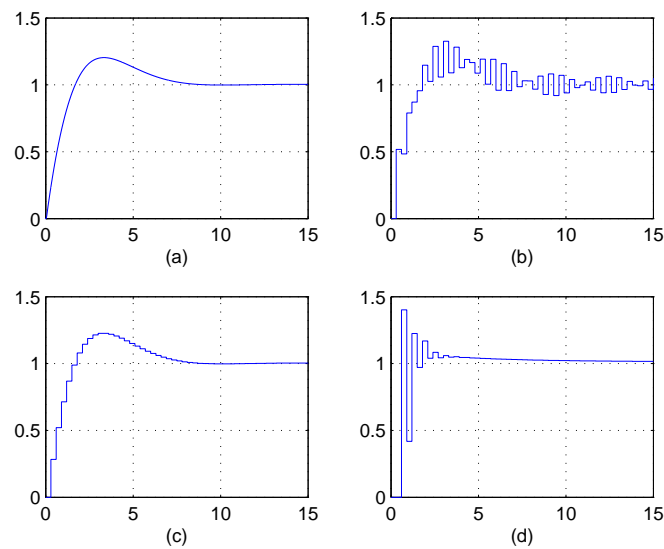


Figura 29 – Comparação das respostas do ângulo de arfagem com $T = 0,30$ [s].

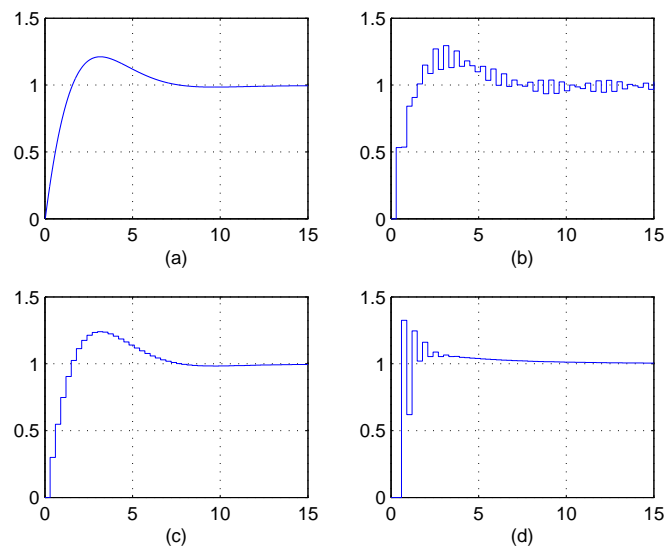


Figura 30 – Comparação das respostas do ângulo da trajetória de voo com $T = 0,30$ [s].

4.2 Sistema de Controle de Arfagem e Guinada em Modelo Didático de Helicóptero 2 DOF

Nesta seção será visto um exemplo de aplicação prática da metodologia proposta utilizando-se um modelo didático de helicóptero de dois graus de liberdade em escala reduzida fabricado pela empresa QUANSER, mostrado na Figura 31.

O modelo é montado sobre uma base fixa com duas hélices acopladas a dois motores de corrente contínua. O motor situado na parte principal da fuselagem do modelo do helicóptero será chamado de motor principal e o motor situado na cauda do helicóptero

Fonte: QUANSER 2 DOF Helicopter – User and Control Manual (40)

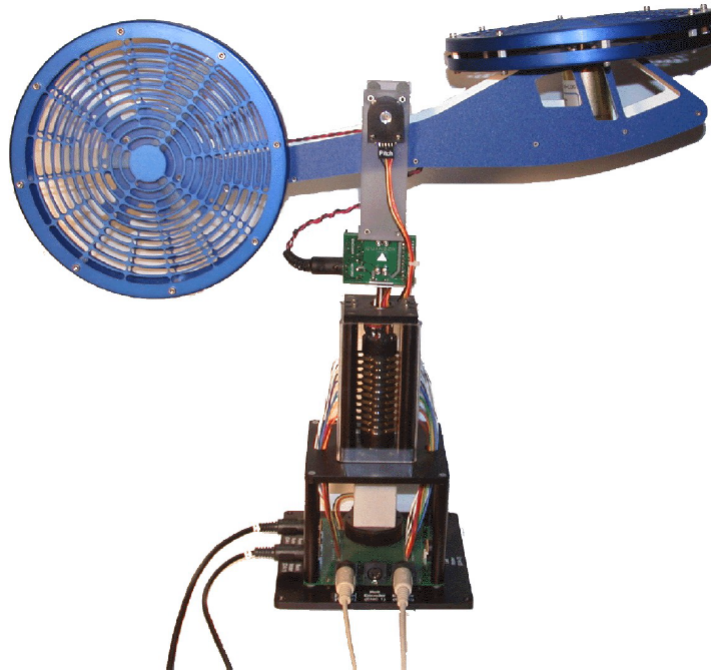


Figura 31 – Helicóptero de dois graus de liberdade.

será chamado de motor de cauda. Os movimentos possíveis são a rotação em torno do eixo vertical do modelo (nariz para a direita e esquerda), ou eixo de guinada, e a rotação em torno do eixo transversal (nariz para cima e para baixo), ou eixo de arfagem.

O objetivo do sistema de controle é controlar os ângulos de arfagem θ e guinada ψ . As entradas de comando são a tensão aplicada no motor principal u_p [V] e a tensão aplicada no motor de cauda u_c [V].

4.2.1 Modelo da Planta

Nesse trabalho, foi utilizado um modelo linearizado para o ângulo de arfagem e de guinada em zero radianos dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1375 & 1 & 0 & 0 \\ -6,1457 & 0 & -0,0326 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3237 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,6304 & 0 \\ 0,0527 & 0 \\ 0,1484 & 0,3821 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_p(t) \\ \hat{u}_c(t) \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(t) \\ \hat{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}. \quad (4.20b)$$

Considerando um tempo de amostragem de 0,05 [s], uma representação da planta de processo em tempo discreto é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \\ \hat{x}_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9855 & 0,0497 & 0 & 0 \\ -0,3054 & 0,9923 & -0,0016 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9839 & 0,0496 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \\ \hat{x}_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0008 & 0 \\ 0,0314 & 0 \\ 0,0028 & 0,0005 \\ 0,0074 & 0,0191 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(k) \\ u_c(k) \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\psi}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \\ \hat{x}_4(k) \end{bmatrix}, \quad (4.21b)$$

pela qual pode-se verificar que esse sistema tem um par de polos multivariáveis complexo-conjugados em $z = 0,9889 \pm j0,1232$ e outros polos reais em $z = 0,9839$ e $z = 1$. O sistema apresenta dois zeros de transmissão em $z = -0,9977$ e $z = -0,9946$, caracterizando um sistema dinâmico estritamente próprio e de fase mínima. Além disso, o modelo obtido é controlável e observável, e o posto da matriz $C_P B_P$ é igual a 2. O diagrama de valores singulares desse modelo em malha aberta é apresentado na Figura 32.

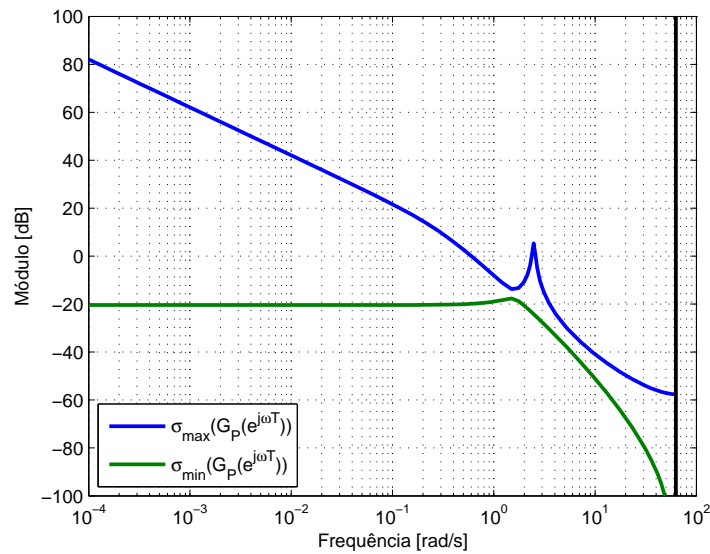


Figura 32 – Valores singulares do modelo de helicóptero em malha aberta.

As Figuras 33 e 34 apresentam a resposta do sistema a um degrau unitário nas entradas u_p e u_c , respectivamente.

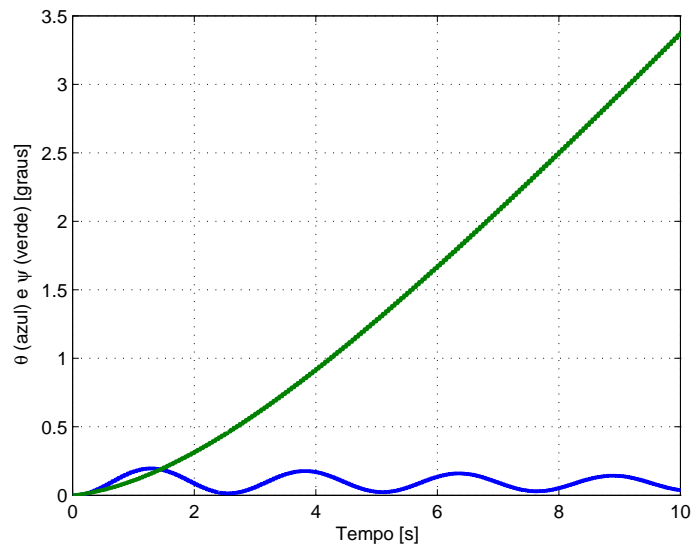


Figura 33 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada u_p .

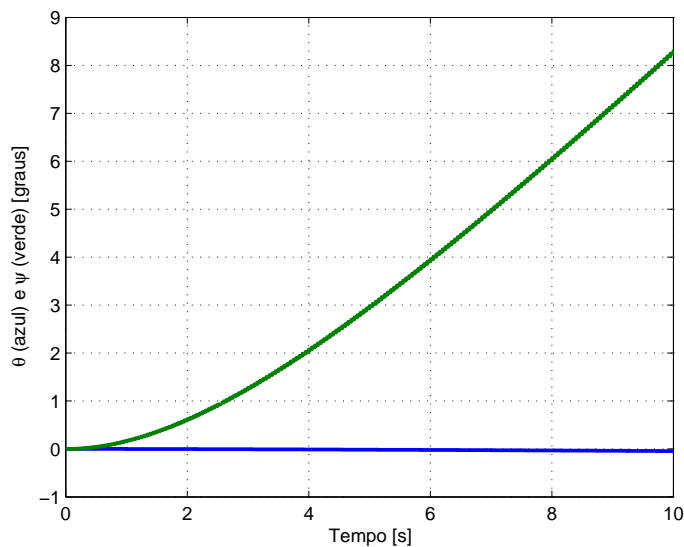


Figura 34 – Resposta em malha aberta ao degrau unitário aplicado na entrada u_c .

4.2.2 Projeto dos Controladores

De modo a auxiliar a formatação da malha objetivo e impor um erro nulo em regime permanente para entradas do tipo degrau, o sistema é expandido por integradores do tipo *backward* Euler. Verifica-se que essa expansão não modifica a controlabilidade nem a observabilidade do sistema.

Para facilitar a comparação com os ensaios realizados em tempo contínuo por de Paula, a parametrização L será a mesma usada em (36) escalonada pelo tempo de amostragem.

Desse modo, tem-se

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}', \quad \mu = 3 \quad (4.22)$$

e o parâmetro γ será variado nas condições $\gamma = 6$ e $\gamma \rightarrow \infty$.

O ganho K_C que resulta na ocorrência do LTR, conforme calculado pela equação (3.40), é dado por

$$K_C = \begin{bmatrix} 25104,6649 & 1266,0710 & -0,8592 & -0,0086 & 20 & 0 \\ -147984,6588 & -7463,1188 & 41429,0153 & 2088,1006 & 0 & 20 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Para $\gamma = 6$, tem-se que o ganho K_F é dado por

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,1383 & 0,1759 & 0,0248 & 0,0374 & 0,8707 & -0,1072 \\ 0,0248 & 0,0465 & 0,1534 & 0,2292 & 0,2481 & 0,3482 \end{bmatrix}'. \quad (4.24)$$

A Figura 35 apresenta a resposta ao degrau em ambas as entradas da malha objetivo, sendo esse portanto o desempenho esperado para o sistema de controle resultante.

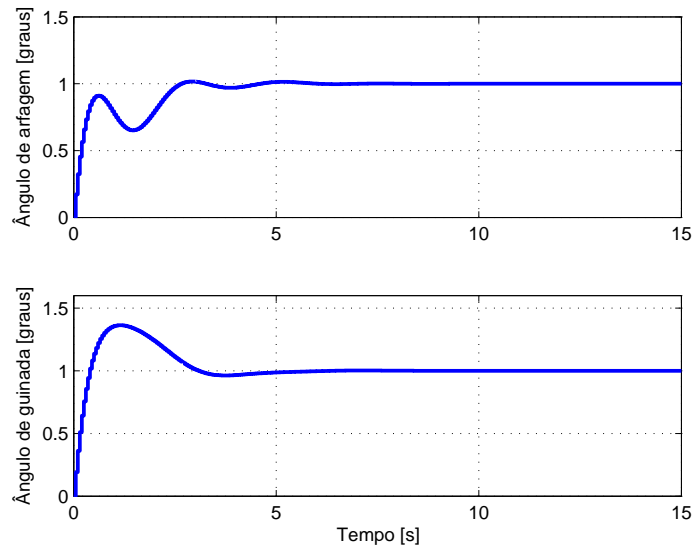


Figura 35 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo do helicóptero com $\gamma = 6$.

As Figuras 36 e 37 mostram as restrições e os valores singulares obtidos para a sensibilidade e sensibilidade complementar da malha de controle, respectivamente.

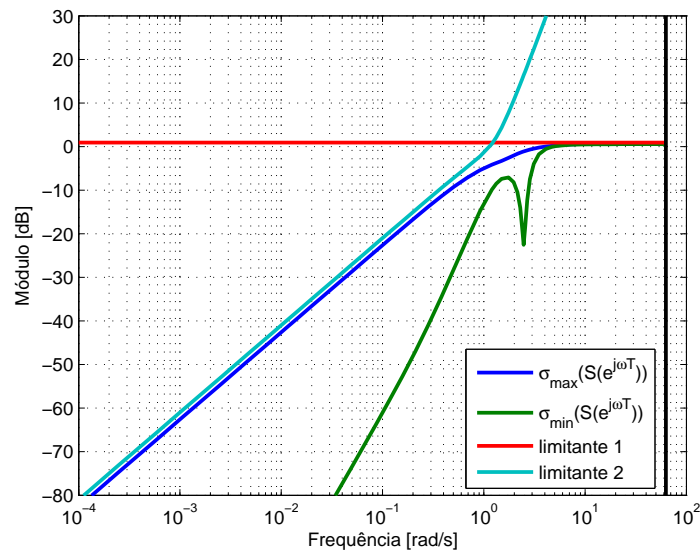


Figura 36 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$.

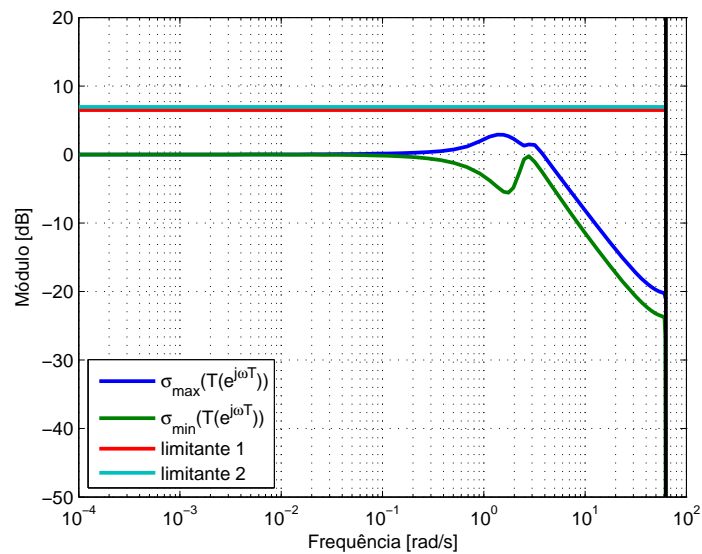


Figura 37 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$.

A resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle é apresentada na Figura 38.

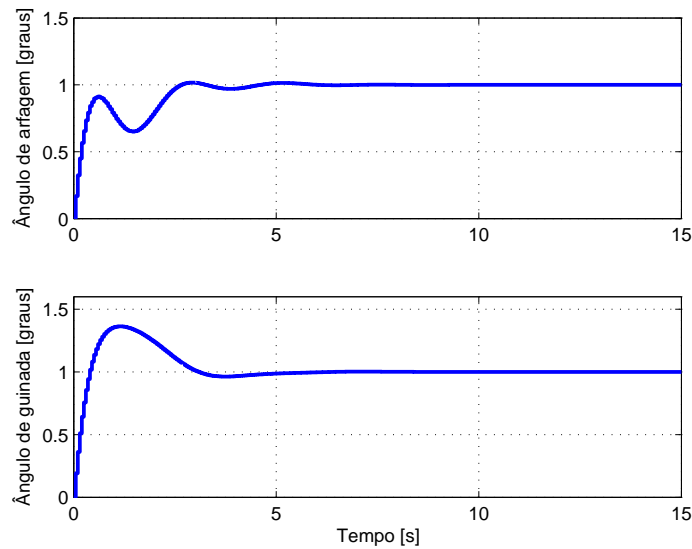


Figura 38 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$.

Nos ensaios práticos, a fim de evitar a utilização de ganhos muito altos que poderiam levar à saturação dos atuadores, será utilizado um valor $\rho = 0,0001$. Nesse caso, K_C é dado por

$$K_C = \begin{bmatrix} 2775,5373 & 356,5880 & 1637,1209 & 62,2382 & 17,6921 & 0,0675 \\ -2017,5895 & -504,7988 & 3968,9401 & 564,2232 & 0,0675 & 15,3704 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

e a Figura 39 mostra uma comparação entre a resposta com $\rho \rightarrow 0$ (o valor utilizado na simulação foi $\rho = 10^{-9}$) e a resposta esperada com $\rho = 0,0001$. Apesar de ligeiramente diferentes, os resultados encontram-se suficientemente próximos da resposta original para as análises que serão realizadas.

Para $\gamma \rightarrow \infty$, tem-se que o ganho K_F é dado por

$$K_F = \begin{bmatrix} 0,1146 & 0,1601 & 0,0201 & 0,0304 & 0,7495 & -0,0922 \\ 0,0201 & 0,0432 & 0,1207 & 0,1879 & 0,2127 & 0,3008 \end{bmatrix}'. \quad (4.26)$$

A Figura 40 apresenta a resposta ao degrau em ambas as entradas da malha objetivo. As Figuras 41 e 42 mostram as restrições e os valores singulares obtidos para a sensibilidade e sensibilidade complementar da malha de controle, respectivamente.

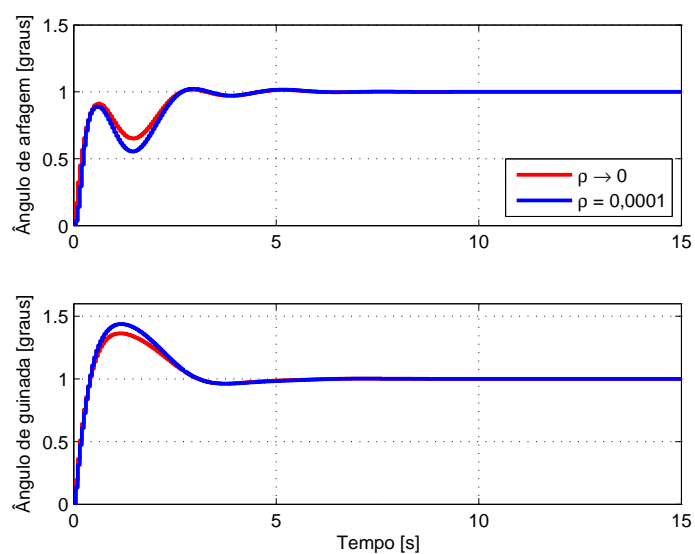


Figura 39 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma = 6$ e $\rho = 0,0001$.

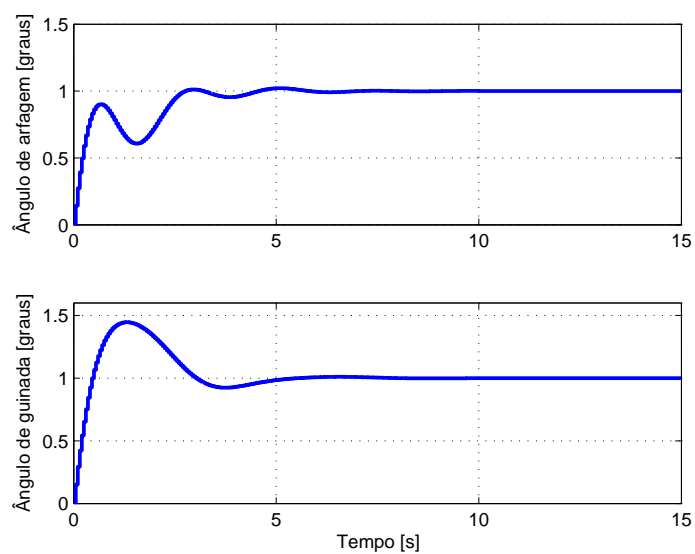


Figura 40 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha objetivo do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$.

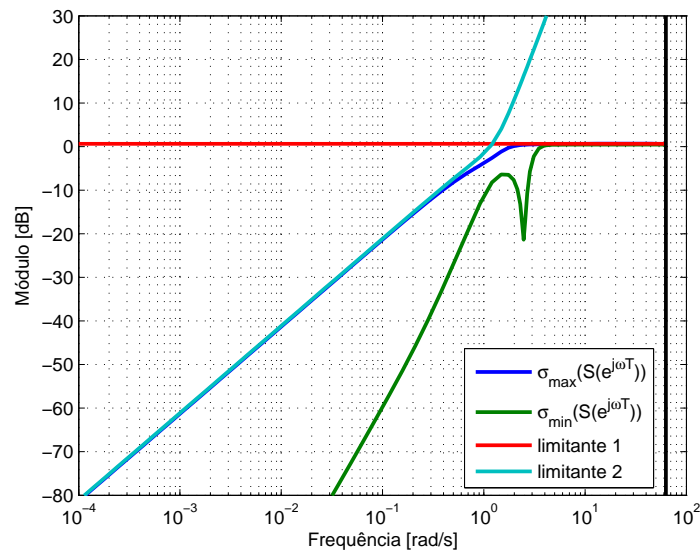


Figura 41 – Valores singulares da sensibilidade da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$.

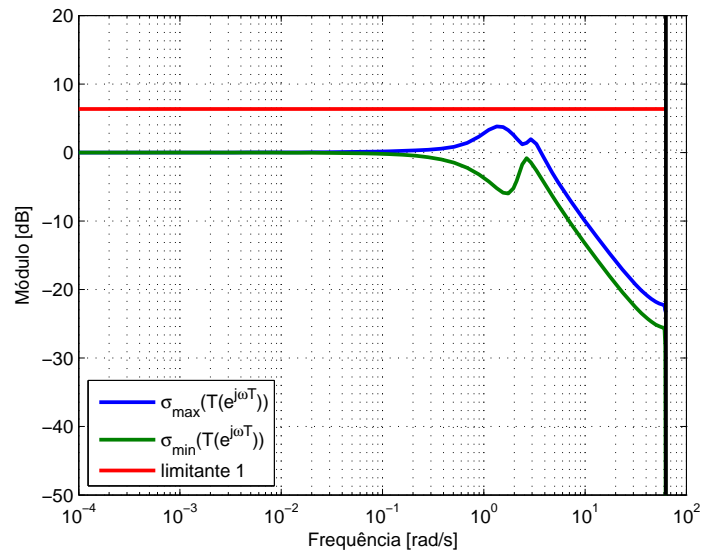


Figura 42 – Valores singulares da sensibilidade complementar da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$.

A resposta ao degrau unitário em ambas as entradas de referência da malha de controle é apresentada na Figura 43.

Conforme o esperado, as respostas no caso de $\gamma = 6$ apresentaram oscilações com amplitudes menores do que as respostas com $\gamma \rightarrow \infty$. Por fim, a Figura 44 mostra uma comparação entre a resposta com $\rho = 0$ e a resposta esperada com ganhos menos elevados ao se fazer $\rho = 0,0001$, que será a abordagem utilizada nos ensaios práticos.

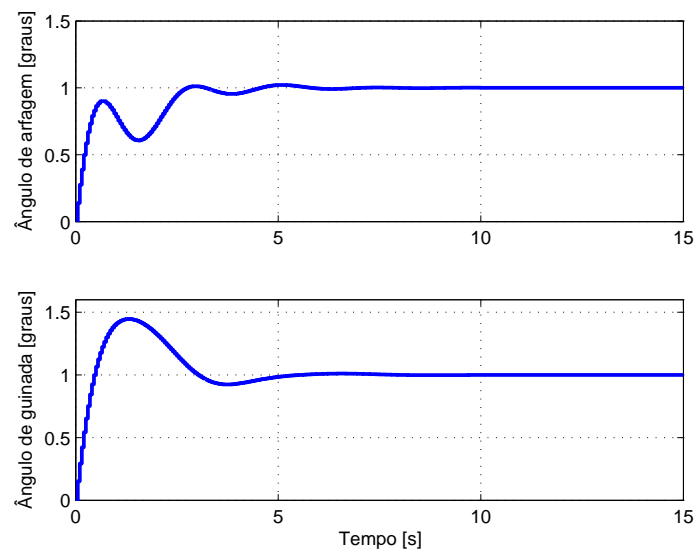


Figura 43 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$.

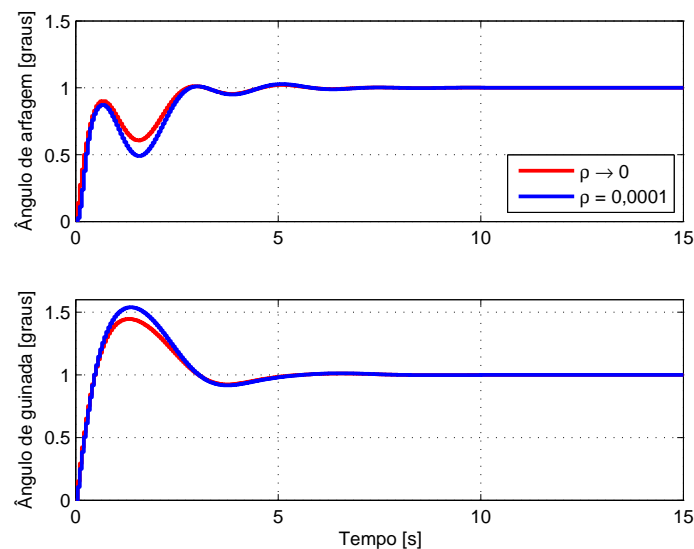


Figura 44 – Resposta ao degrau unitário em ambas as entradas da malha de controle do helicóptero com $\gamma \rightarrow \infty$ e $\rho = 0,0001$.

4.2.3 Resultados Experimentais

Os controladores projetados na subseção anterior foram utilizados na realização de ensaios experimentais no modelo didático de helicóptero de modo a comprovar na prática os resultados esperados pelos desenvolvimentos teóricos realizados nesse trabalho.

O ensaio consiste em um sistema de controle do tipo regulador, no qual o helicóptero é colocado no ponto de operação para o qual se obteve o modelo linearizado e em seguida é aplicado um distúrbio de 20 graus no ângulo de guinada.

Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao controlador obtido com $\gamma = 6$. As Figuras 45 e 46 mostram, respectivamente, o comportamento do ângulo de arfagem e do ângulo de guinada em relação ao distúrbio aplicado para o sistema linear simulado e para as medidas realizadas na planta real.

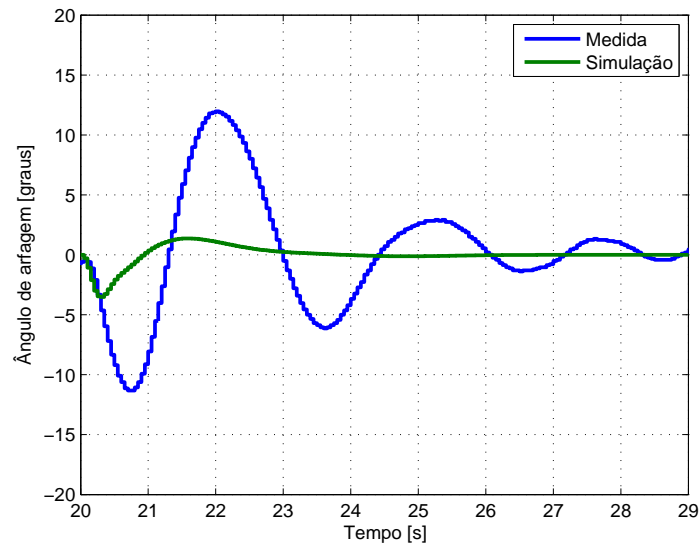


Figura 45 – Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$.

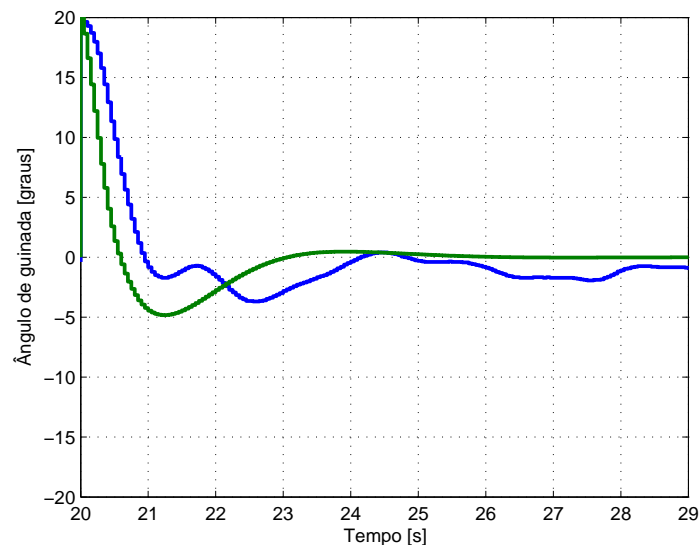


Figura 46 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$.

Estas figuras mostram que há oscilações não previstas nas medidas, de maior intensidade no ângulo de arfagem e menor intensidade no ângulo de guinada, provavelmente decorrentes da existência de não-linearidades não contempladas pelo modelo linear. Destaca-

se que outros trabalhos que apresentaram resultados práticos utilizando a mesma planta também constataram a existência de tais oscilações (36, 41).

As Figuras 47 e 48 mostram, respectivamente, o comportamento do ângulo de arfagem e do ângulo de guinada em relação ao distúrbio aplicado quando $\gamma \rightarrow \infty$.

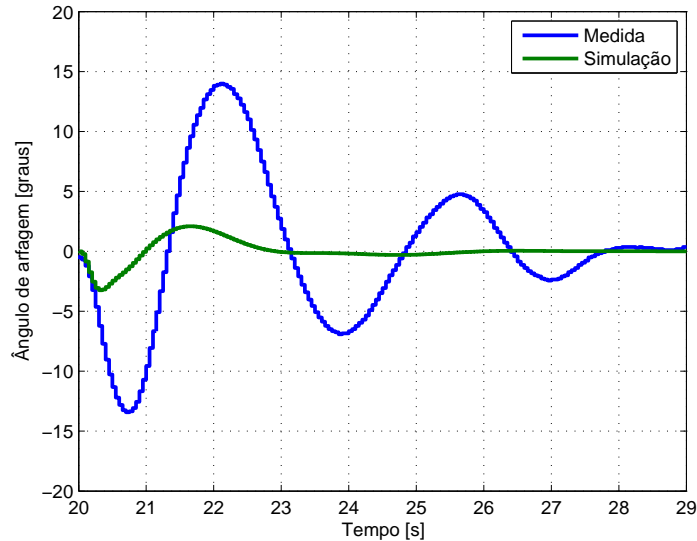


Figura 47 – Resposta do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$.

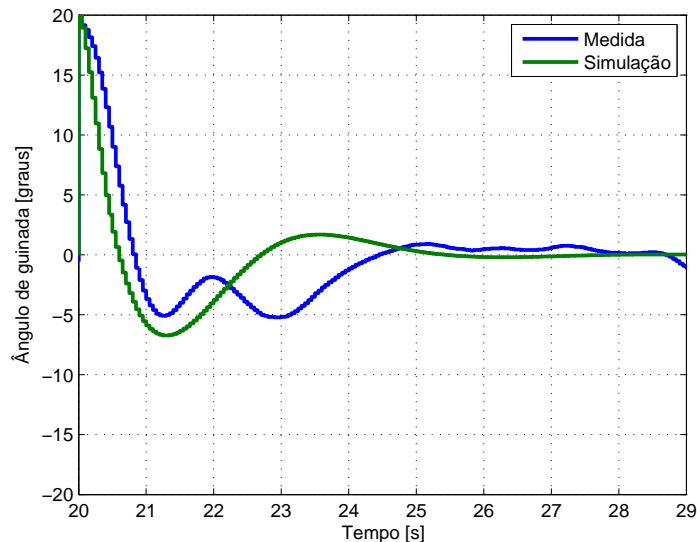


Figura 48 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$.

As Figuras 49 e 50 trazem em um mesmo gráfico as respostas das medidas dos ângulos de arfagem e guinada, respectivamente, de modo a facilitar a comparação. Conforme o

esperado, pode-se observar que as amplitudes das oscilações quando $\gamma = 6$ são menores do que no caso em que $\gamma \rightarrow \infty$.

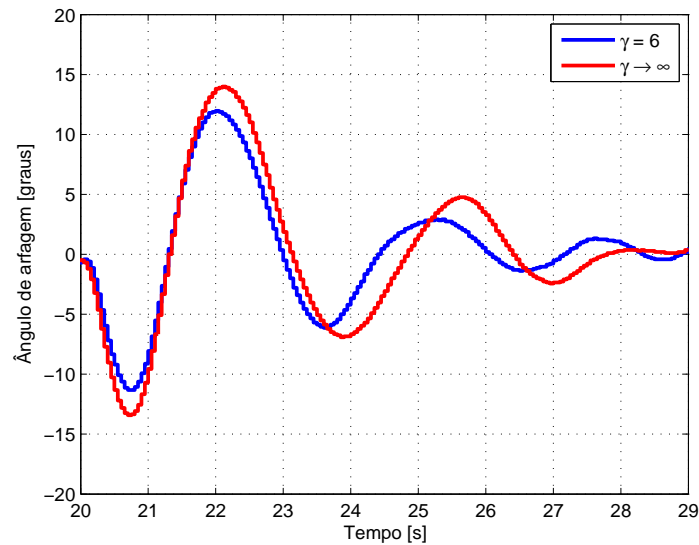


Figura 49 – Respostas do ângulo de arfagem ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle.

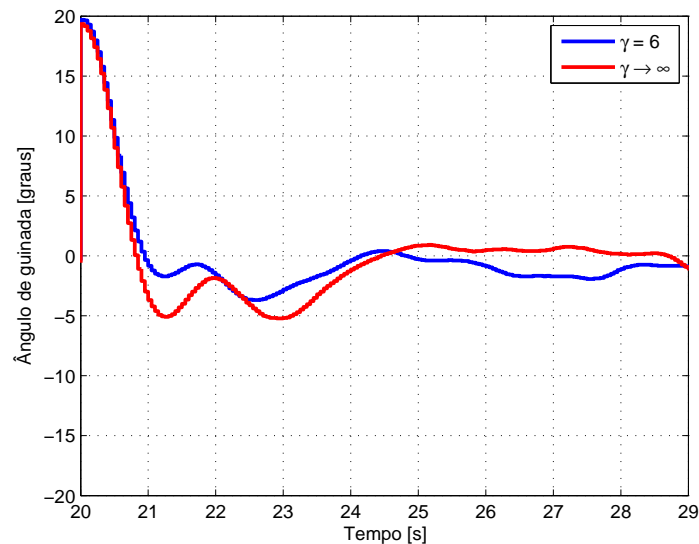


Figura 50 – Resposta do ângulo de guinada ao distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle.

Desse modo, mesmo com a existência das oscilações não previstas pelas simulações, observa-se que uma das principais características do controle \mathcal{H}_∞ /LTR é verificada nos ensaios práticos, que é a capacidade de reduzir o máximo pico na resposta transitória (e a amplitude das oscilações de maneira geral) a partir da escolha do parâmetro γ .

As Figuras 51 e 52 mostram a tensão aplicada no motor principal para as malhas com $\gamma = 6$ e $\gamma \rightarrow \infty$, respectivamente, quando o distúrbio no ângulo de guinada é aplicado.

As Figuras 53 e 54 mostram a tensão aplicada no motor de cauda para as malhas com $\gamma = 6$ e $\gamma \rightarrow \infty$, respectivamente, quando o distúrbio é aplicado. Pode-se verificar que as tensões assumem valores razoáveis, não operando em regiões de saturação (± 24 [V] e ± 15 [V] para o motor principal e motor de cauda, respectivamente) durante um intervalo longo de tempo. Nota-se também que os sinais de controle são ligeiramente maiores no caso em que $\gamma = 6$.

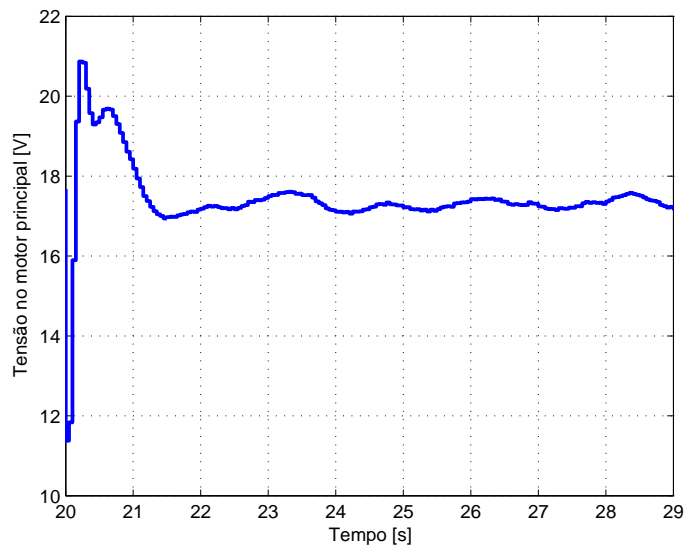


Figura 51 – Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$.

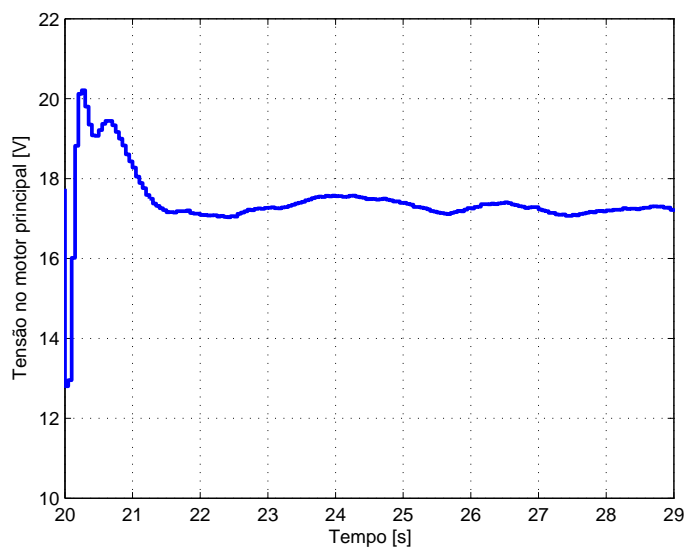


Figura 52 – Tensão no motor principal para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$.

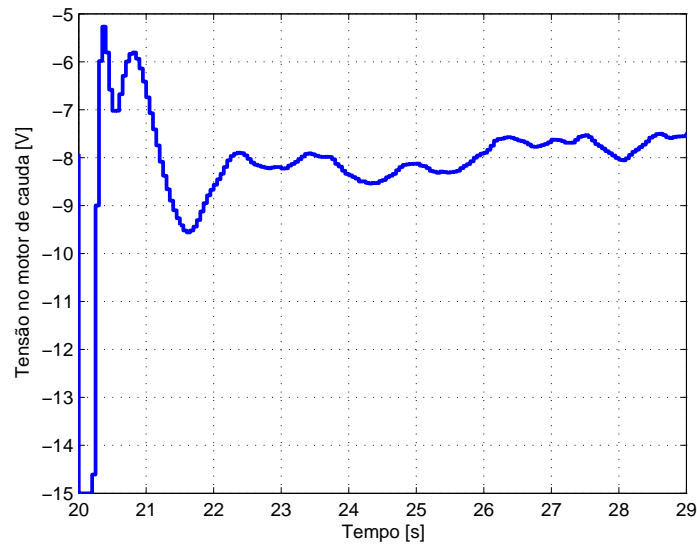


Figura 53 – Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma = 6$.

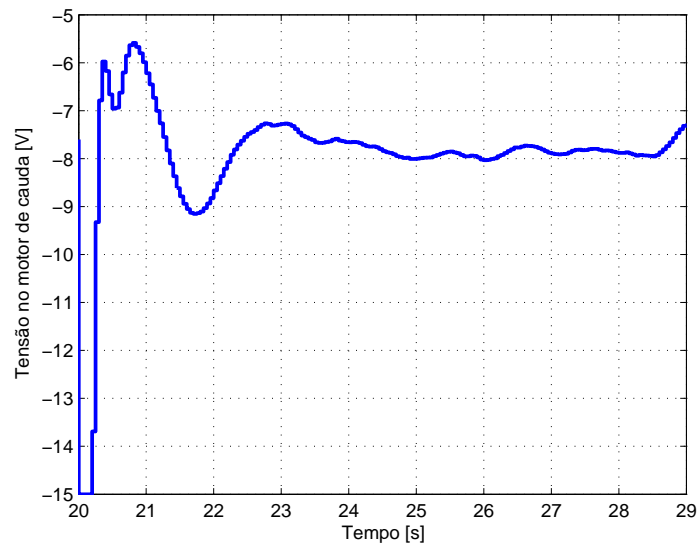


Figura 54 – Tensão no motor de cauda para o distúrbio aplicado no ângulo de guinada da malha de controle com $\gamma \rightarrow \infty$.

A fim de comparação, foi projetado um controlador em tempo contínuo com as mesmas especificações para a malha objetivo, sendo para isso utilizada a matriz L dada por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}' \quad (4.27)$$

A Figura 55 mostra as respostas do ângulo de arfagem e do ângulo de guinada obtidas com a malha operando com um tempo de amostragem de 0,05 [s] sobrepostas às respostas obtidas com o controlador em tempo contínuo para o caso em que $\gamma = 6$. A Figura 56

mostra as respostas para o caso em que $\gamma \rightarrow \infty$.

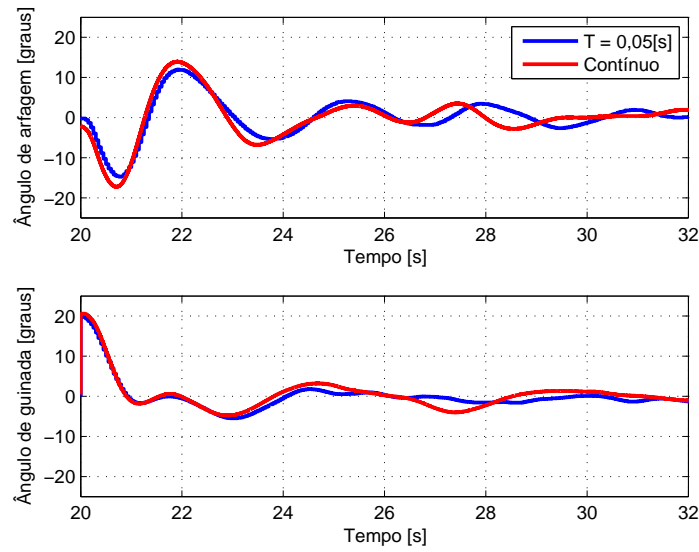


Figura 55 – Comparação das respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma = 6$ em relação ao controlador contínuo.

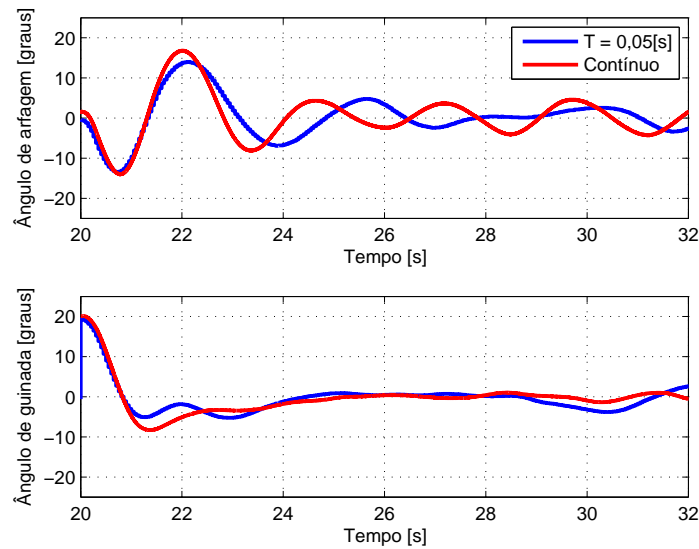


Figura 56 – Comparação das respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma \rightarrow \infty$ em relação ao controlador contínuo.

Verifica-se que o comportamento geral das respostas da malha de controle em tempo contínuo é mantido com a utilização do controlador projetado em tempo discreto. A fim de verificar qual o efeito do aumento do tempo de amostragem no experimento prático, foi projetado um controlador para $T = 0,1$ [s]. A matriz L para o novo controlador é

dada por

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}' \quad (4.28)$$

e as Figuras 57 e 58 mostram as respostas do ângulo de arfagem e do ângulo de guinada obtidas com a malha operando com um tempo de amostragem de 0,05 [s] sobrepostas às respostas obtidas com o tempo de amostragem de 0,1 [s] para $\gamma = 6$ e $\gamma \rightarrow \infty$, respectivamente.

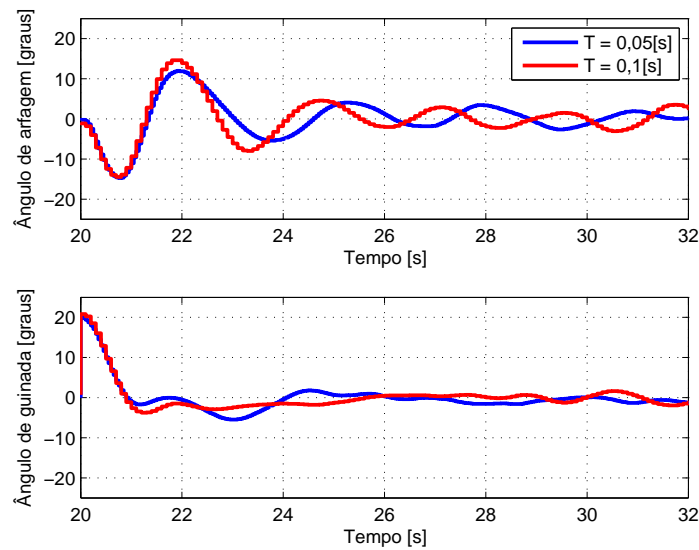


Figura 57 – Respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma = 6$ e variação do tempo de amostragem.

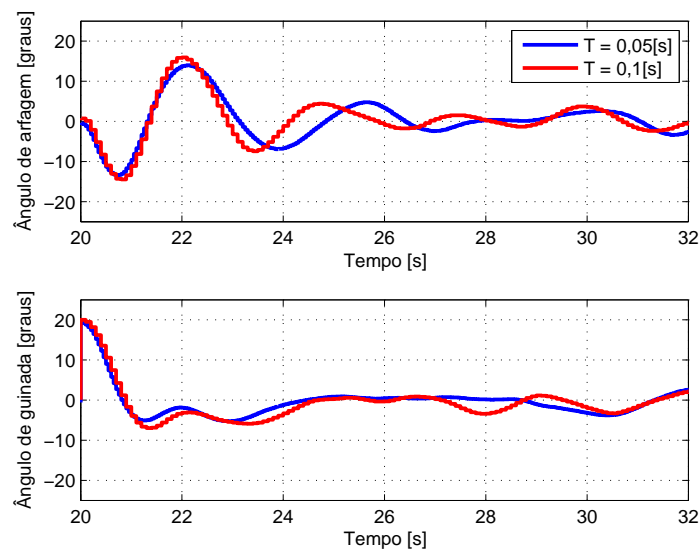


Figura 58 – Respostas dos ângulos de arfagem e guinada com $\gamma \rightarrow \infty$ e variação do tempo de amostragem.

Observa-se mais uma vez que as respostas estão coerentes com os resultados já apresentados, sendo o comportamento geral da malha de controle praticamente preservado independente do aumento do tempo de amostragem.

5 Conclusões

Nesse trabalho de doutorado foi obtido um controlador em tempo discreto com propriedades de sensibilidade mista semelhantes àsquelas obtidas no controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ proposto originalmente em tempo contínuo. Assim, esse trabalho pode ser visto como uma extensão da metodologia apresentada em (15) para o caso do tempo discreto. Como ocorre no caso do tempo contínuo, o procedimento resulta em propriedades e ferramentas de sintonia semelhantes àsquelas existentes no controle LQG/LTR, além de uma nova ferramenta que permite ao projetista formatar de maneira mais eficiente a sensibilidade complementar da malha de controle.

De maneira distinta do que ocorre no caso do tempo contínuo, o parâmetro γ do controle \mathcal{H}_∞ não tem efeito somente no limitante de desempenho exclusivo do controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$. Isso implica que em tempo discreto há um compromisso entre os valores singulares da sensibilidade e da sensibilidade complementar. Por outro lado, quando o parâmetro γ tende a infinito, recuperam-se os limitantes de desempenho do controle LQG/LTR. Desse modo, o controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ em tempo discreto desenvolvido pode ser interpretado como uma generalização do controle LQG/LTR, tal como ocorre no caso do tempo contínuo.

Um ponto importante no desenvolvimento do trabalho foi a constatação de que as propriedades da solução $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ são favoráveis de serem recuperadas em tempo discreto pela utilização do controlador \mathcal{H}_∞ com observador de estados corrente, já que essa abordagem resulta em uma recuperação exata da malha objetivo e permite a obtenção de propriedades no domínio da frequência semelhantes às do caso contínuo pela Identidade de Kalman Generalizada.

As conclusões obtidas dos desenvolvimentos teóricos realizados podem ser verificadas nas simulações apresentadas, que mostram que as propriedades de sensibilidade mista do controle $\mathcal{H}_\infty/\text{LTR}$ são recuperadas pelo controle \mathcal{H}_∞ em tempo discreto com observador de estados corrente. Além disso, os experimentos realizados no helicóptero 2DOF mostraram que é possível aplicar a técnica em contextos práticos e que o comportamento global do sistema em tempo contínuo é recuperado em tempo discreto com a utilização do controlador proposto nessa tese.

Como trabalhos futuros propostos estão a realização de estudos para o desenvolvimento de métodos que auxiliem a parametrização da malha objetivo, visando obter procedimentos sistemáticos para a escolha dos parâmetros que resultem em malhas com boas características de desempenho. São previstos também estudos acerca da aplicabilidade e limitações do método em plantas que a princípio não satisfazem as condições necessárias para a utilização da metodologia, tais como aquelas de fase não-mínima e subatuadas.

Referências

- 1 ATHANS, M. Editorial on the LQG problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16, n. 6, p. 528, 1971.
- 2 SAFONOV, M. G. Origins of robust control: early history and future speculations. *Annual Reviews in Control*, v. 36, n. 2, p. 173–181, 2012.
- 3 KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 17, n. 1, p. 79–86, 1972.
- 4 DOYLE, J. C.; STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24, n. 4, p. 607–611, 1979.
- 5 DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24, p. 4–16, 1981.
- 6 ATHANS, M. A tutorial on the LQG/LTR method. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 1289–1296.
- 7 MACIEJOWSKI, J. M. Asymptotic recovery for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30, n. 6, p. 602–605, 1985.
- 8 GOODMAN, G. C. *The LQG/LTR method and discrete-time control systems*. Dissertação (Mestrado) — MIT, 1984.
- 9 ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981.
- 10 SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: Wiley, 2005.
- 11 STOOORVOGEL, A. A. *The \mathcal{H}_∞ control problem: a state space approach*. [S.l.]: Prentice Hall, 1992.
- 12 BAŞAR, T.; BERNHARD, P. *\mathcal{H}_∞ -Optimal control and related minimax design problems*. [S.l.]: Birkäuser, 1995.
- 13 SAFONOV, M. G.; LAUB, A. J.; HARTMANN, G. L. Feedback properties of multivariable systems: the role and use of the return difference matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, n. 1, p. 47–65, 1981.
- 14 DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- 15 PAULA, C. F. de; FERREIRA, L. H. C. An easy-to-use \mathcal{H}_∞ /LTR control solution with mixed-sensitivity properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 7, p. 1709–1713, 2011.

- 16 NIEMANN, H.; STOUSTRUP, J. An introduction to the special issue on loop transfer recovery. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 5, p. 611–613, 1995.
- 17 SUH, S. M.; CHUNG, C. C.; LEE, S. H. Discrete-time LQG/LTR dual-stage controller design in magnetic disk drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 37, n. 4, p. 1891–1895, 2001.
- 18 ARAB-ALIBEIK, H.; SETAYESHI, S. Improved temperature control of a PWR nuclear reactor using an LQG/LTR based controller. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 50, n. 1, p. 211–218, 2003.
- 19 ZOLOTAS, A. C. et al. A study on LQG/LTR control for damping inter-area oscillations in power systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 15, n. 1, p. 151–160, 2007.
- 20 LAVRETSKY, E. Adaptive output feedback design using asymptotic properties of LQG/LTR controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1587–1591, 2012.
- 21 WISE, K.; LAVRETSKY, E. Asymptotic properties of LQG/LTR controllers in flight control problems. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012, (Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences).
- 22 ISHIHARA, T.; GUO, H.-J.; TAKEDA, H. Integral controller design based on disturbance cancellation: partial LTR approach for non-minimum phase plants. *Automatica*, v. 41, n. 12, p. 2083–2089, 2005.
- 23 CHEN, M.-S.; CHEN, C.-H.; YANG, F.-Y. An LTR-observer-based dynamic sliding mode control for chattering reduction. *Automatica*, v. 43, n. 6, p. 1111–1116, 2007.
- 24 IGLESIAS, P. The strictly proper discrete-time controller for the normalized left-coprime factorization robust stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 45, n. 3, p. 516–520, 2000.
- 25 MCFARLANE, D.; GLOVER, K. *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1989.
- 26 ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- 27 FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. *Digital control of dynamic systems*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1997.
- 28 STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A.; CHEN, B. M. The discrete-time \mathcal{H}_∞ control problem with strictly proper measurement feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 9, p. 1936–1939, 1994.
- 29 MUSTAFA, D.; BERNSTEIN, D. S. LQG cost bounds in discrete-time $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, v. 13, n. 5, p. 269–275, 1991.

- 30 IGLESIAS, P. A.; MUSTAFA, D.; GLOVER, K. Discrete time \mathcal{H}_∞ controllers satisfying a minimum entropy criterion. *Systems & Control Letters*, v. 14, p. 275–286, 1990.
- 31 MUSTAFA, D.; GLOVER, K. *Minimum entropy \mathcal{H}_∞ control*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990.
- 32 ISHIHARA, T.; TAKEDA, H. Loop transfer recovery techniques for discrete-time optimal regulators using prediction estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 31, n. 12, p. 1149–1151, 1986.
- 33 NIEMANN, H. H.; SOGAARD-ANDERSEN, P. New results in discrete-time loop transfer recovery. In: *Proc. of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 2483–2489.
- 34 ZHANG, Z.; FREUDENBERG. Discrete-time loop transfer recovery for systems with nonminimum phase zeros and time delays. *Automatica*, v. 29, n. 2, p. 351–363, 1993.
- 35 SHAKED, U. *Explicit solution to the singular discrete-time stationary linear filtering problem*. [S.l.], 1983.
- 36 PAULA, C. F. de. *Princípio de recuperação da malha objetivo aplicado ao controle \mathcal{H}_∞* . Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, 2013.
- 37 LUENBERGER, D. G. *Introduction to dynamic systems: theory, models and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1979.
- 38 NASA. *NASA Armstrong fact sheet: F-8 digital fly-by-wire aircraft*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/centers/armstrong/news/FactSheets/FS-024-DFRC.html>>. Acesso em: 22 de junho 2015.
- 39 KULCSÁR, B. LQG/LTR controller design for an aircraft model. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, v. 28, n. 1-2, p. 131–142, 1986.
- 40 QUANSER INC. *QUANSER 2 DOF helicopter – Reference manual*. [S.l.], 2006.
- 41 SILVA, D. L. F. da. *Sobre a parametrização da malha objetivo no controle \mathcal{H}_∞ /LTR*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, 2013.
- 42 DOYLE, J. C. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 756–757, 1978.
- 43 CRUZ, J. J. *Controle multivariável robusto*. [S.l.]: EDUSP, 1996.
- 44 LUTKEPOHL, H. *Handbook of matrices*. [S.l.]: Wiley, 1997.

APÊNDICE A – Controle \mathcal{H}_∞ /LTR em Tempo Contínuo

Este apêndice apresenta as definições básicas relacionadas aos controles \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e à metodologia LTR.

A.1 Descrição da Planta

Seja um sistema linear, invariante no tempo e de dimensão finita (LITDF) descrito pelas equações diferenciais

$$P := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw_x(t) \\ z_x(t) = Hx(t) \\ z_u(t) = \rho Iu(t) \\ y(t) = Cx(t) + \mu Iw_y(t) \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de comando, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas medidas, $w_x(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de perturbações nos estados, $w_y(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de perturbações na saída, $z_x(t) \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de saídas auxiliares relacionadas aos estados do sistema e $z_u(t) \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de saídas auxiliares relacionadas às entradas da planta. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ constituem a planta de processo $G = (A, B, C, 0)$.

Além da planta de processo, o sistema contempla parâmetros de ponderações das entradas e saídas exógenas por intermédio das matrizes $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e dos escalares ρ e μ . A planta de processo pode ser representada também por sua matriz de transferência, dada por

$$G(z) = C\Phi(z)B \quad (\text{A.2})$$

em que

$$\Phi(z) = (zI - A)^{-1}. \quad (\text{A.3})$$

Devido à estrutura da planta (A.1), basta que os pares (A, B) e (A, L) sejam estáveis e os pares (C, A) e (H, A) sejam detectáveis para que a planta P possa ser submetida às otimizações \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (14).

A.2 Controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_2 de $\mathcal{T}_{zw}(s)$ é definida no domínio da frequência como

$$\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\mathcal{T}_{zw}^*(j\omega)\mathcal{T}_{zw}(j\omega)) d\omega}. \quad (\text{A.4})$$

Uma realização em espaço de estados do controlador que minimiza a norma $\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_2$ é dada por (14)

$$K_2 = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_{C_2} - K_{F_2}C & K_{F_2} \\ \hline K_{C_2} & 0 \end{array} \right], \quad (\text{A.5})$$

em que K_{C_2} e K_{F_2} são, respectivamente, as matrizes de ganhos do regulador e do observador de estados, dados por

$$K_{C_2} = \rho^{-2}B'X_2 \quad (\text{A.6a})$$

$$K_{F_2} = \mu^{-2}Y_2C' \quad (\text{A.6b})$$

e X_2 e Y_2 são as matrizes simétricas positivas semidefinidas soluções das Equações Algébricas de Riccati (EAR)

$$A'X_2 + X_2A - \rho^{-2}X_2BB'X_2 + H'H = 0 \quad (\text{A.7a})$$

$$Y_2A' + AY_2 - \mu^{-2}Y_2C'CY_2 + LL' = 0. \quad (\text{A.7b})$$

A norma \mathcal{H}_∞ de $\mathcal{T}_{zw}(s)$ é definida no domínio da frequência como

$$\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(\mathcal{T}_{zw}(j\omega)). \quad (\text{A.8})$$

Uma realização em espaço de estados do controlador que faz com que a norma $\|\mathcal{T}_{zw}(s)\|_\infty$ seja menor do que γ , em que γ é um parâmetro escalar especificado pelo projetista, é dado por (14)

$$K_\infty = \left[\begin{array}{c|c} A + \gamma^{-2}LL'X_\infty - BK_{C_\infty} - ZK_{F_\infty}C & ZK_{F_\infty} \\ \hline K_{C_\infty} & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A.9})$$

com

$$Z = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

em que K_{C_∞} e K_{F_∞} são, respectivamente, as matrizes de ganhos do regulador e do observador de estados, dados por

$$K_{C_\infty} = \rho^{-2}B'X_\infty \quad (\text{A.11a})$$

$$K_{F_\infty} = \mu^{-2}Y_\infty C' \quad (\text{A.11b})$$

e X_∞ e Y_∞ são as matrizes simétricas positivas semidefinidas soluções das Equações Algébricas de Riccati Generalizadas (EARG)

$$A'X_\infty + X_\infty A + \gamma^{-2}X_\infty LL'X_\infty - \rho^{-2}X_\infty BB'X_\infty + H'H = 0 \quad (\text{A.12a})$$

$$Y_\infty A' + AY_\infty + \gamma^{-2}Y_\infty H'HY_\infty - \mu^{-2}Y_\infty C'CY_\infty + LL' = 0. \quad (\text{A.12b})$$

Para que o controlador K_∞ exista é necessário que o raio espectral do produto $X_\infty Y_\infty$ seja estritamente menor que γ^2 . Note que quando o parâmetro γ tende ao infinito, as equações do controle \mathcal{H}_∞ tendem às equações do controle \mathcal{H}_2 (14).

Essas duas abordagens correspondem à solução do problema de controle do ponto de vista da otimização das normas em questão. Entretanto, não há garantias no que diz respeito à existência de boas características de desempenho para o sistema em malha fechada. Uma ferramenta para lidar com essa desvantagem consiste na utilização do procedimento de LTR, que foi proposto inicialmente no contexto do controle LQG e posteriormente estendido para o controle \mathcal{H}_∞ .

A.3 Controle LQG/LTR e \mathcal{H}_∞ /LTR

O controle LQG consiste na combinação de um controlador LQR e um Filtro de Kalman como observador de estados. Apesar de tanto o regulador como o observador de estados apresentarem garantias de boas características de robustez quando considerados isoladamente, sua combinação não garante nenhuma característica de robustez para o sistema em malha fechada (42).

Desenvolvido por Doyle e Stein (5) baseado no trabalho de Kwakernaak e Sivan (3), o LTR constitui uma solução para esse problema baseada no comportamento assintótico das EARs do controle \mathcal{H}_2 /LQG quando um dos parâmetros de sintonia da malha tende a zero. Tal comportamento é descrito por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} X_2 = 0, \quad (\text{A.13})$$

em que X_2 é a solução da EAR referente ao regulador de estados dada por (A.7a). Para que isso ocorra, é necessário que a matriz de transferência $H\Phi(s)B$ seja quadrada e de fase mínima. De maneira análoga, tem-se também

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} Y_2 = 0, \quad (\text{A.14})$$

em que Y_2 é a solução da EAR referente ao observador de estados dada por (A.7b). Nesse caso, a matriz de transferência $C\Phi(s)L$ deve ser quadrada e de fase mínima.

Partindo desse resultado, tem-se que se a planta de processo G for quadrada e de fase mínima, a matriz H for feita igual à matriz C e o escalar ρ tender a zero pela direita, a matriz de transferência da malha aberta $G(s)K(s)$ tende à matriz de transferência do observador de estados, ou seja,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} G(s)K(s) = C\Phi(s)K_F, \quad (\text{A.15})$$

recuperando assim as propriedades de robustez do Filtro de Kalman na saída da planta. Este é o chamado LTR pela saída, em que a malha objetivo é a matriz de transferência

do observador de estados. O procedimento dual, no qual ocorre a recuperação da matriz de transferência do regulador linear quadrático na entrada da planta, é denominado LTR pela entrada. Assim, supondo que a planta G é quadrada e de fase mínima, se a matriz L for feita igual a matriz B e o escalar μ tender a zero pela direita, tem-se

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} K(s)G(s) = K_C \Phi(s)B . \quad (\text{A.16})$$

Nota-se que no controle LQG convencional as matrizes H e L e os escalares ρ e μ possuem interpretação física bem definida: H é a matriz de ponderações referente à dinâmica da malha, ρ é a ponderação referente ao consumo de energia e L e μ estão relacionados às propriedades estatísticas dos ruídos de processo e medição, respectivamente. Já no controle LQG/LTR, tais matrizes e escalares são parâmetros que podem ser livremente escolhidos de modo a dar a forma desejada à malha objetivo e fazer com que a mesma seja recuperada na saída ou entrada da planta.

A EAR do observador de estados pode ser reescrita no domínio da frequência como

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* , \quad (\text{A.17})$$

que corresponde à equação conhecida como Identidade de Kalman (43). Como consequência de (A.15) e (A.17), os limitantes de desempenho do controle LQG/LTR pela saída em termos da sensibilidade e da sensibilidade complementar são dados por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq 1 , \quad (\text{A.18a})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(j\omega)) \leq 2 , \quad (\text{A.18b})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \mu \sigma_{\max}((C\Phi(j\omega)L)^{-1}) . \quad (\text{A.18c})$$

As restrições (A.18a) e (A.18b) mostram que os valores da sensibilidade e da sensibilidade complementar são sempre limitados. A restrição (A.18c) corresponde a uma ferramenta a partir da qual o projetista pode, pela seleção adequada dos parâmetros L e μ , limitar com maior liberdade a função de sensibilidade em faixas de frequências diversas. Restrições semelhantes podem ser obtidas para o controle LQG/LTR pela entrada.

Em Safonov *et al.* (13) foi mostrado que o controle LQG é um caso específico da otimização \mathcal{H}_2 . Como visto na seção anterior, a diferença entre os controles \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 está apenas na existência de termos que dependem de um parâmetro adicional γ , e quando este parâmetro tende ao infinito, o controlador \mathcal{H}_∞ tende ao controlador \mathcal{H}_2 . Com base nessa relação, de Paula e Ferreira propuseram em (15) uma extensão do LTR para o controle \mathcal{H}_∞ . Foi mostrado que o LTR pela saída ocorre no controle \mathcal{H}_∞ sob as mesmas condições existentes no caso \mathcal{H}_2 /LQG, ou seja, a planta G deve ser quadrada e de fase mínima, a matriz H deve ser escolhida igual à matriz C e o escalar ρ deve tender a zero pela direita. Cumpridas essas condições, tem-se que, tal como no caso LQG/LTR, a matriz de

transferência da malha aberta tende à matriz de transferência do observador de estados, como visto na equação (A.15).

Considerando que a matriz H é feita igual à matriz C , a EARG do observador de estados para o controle \mathcal{H}_∞ pode ser reescrita no domínio da frequência como

$$(I + C\Phi(j\omega)K_F)(I + C\Phi(j\omega)K_F)^* = I + \mu^{-2}C\Phi(j\omega)L(C\Phi(j\omega)L)^* + \gamma^{-2}\mu^2C\Phi(j\omega)K_F(C\Phi(j\omega)K_F)^* . \quad (\text{A.19})$$

Comparando as equações (A.17) e (A.19), nota-se que a Identidade de Kalman Generalizada para o controle \mathcal{H}_∞ possui um termo adicional que não está presente no caso \mathcal{H}_2 /LQG. Como consequência de (A.15) e (A.19), os limitantes de desempenho do controle \mathcal{H}_∞ /LTR em termos da sensibilidade e da sensibilidade complementar são dados por

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq 1 , \quad (\text{A.20a})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(j\omega)) \leq 2 , \quad (\text{A.20b})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{S}(j\omega)) \leq \mu \sigma_{\max}[(C\Phi(j\omega)L)^{-1}] , \quad (\text{A.20c})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sigma_{\max}(\mathcal{T}(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{\mu} . \quad (\text{A.20d})$$

Além de restrições idênticas às encontradas no controle LQG/LTR, a solução \mathcal{H}_∞ /LTR conta com a restrição adicional (A.20d) existente devido ao termo adicional na Identidade de Kalman Generalizada (A.19) que permite limitar de maneira mais efetiva a sensibilidade complementar da malha. Como o máximo valor da sensibilidade complementar está associado ao máximo pico da resposta transitória do sistema, essa ferramenta adicional dá maior controle ao projetista no que diz respeito à especificação do desempenho do sistema em malha fechada.

APÊNDICE B – Conceitos de Álgebra Linear

Este apêndice apresenta algumas das definições e propriedades de álgebra linear utilizadas ao longo do texto. Mais detalhes podem ser encontrados em (10) e (44).

B.1 Definições Básicas

Uma matriz quadrada e Hermitiana $A = A^*$ é dita ser positiva definida, denotada por $A > 0$, se $x^*Ax > 0$ para todo $x \neq 0$. De maneira equivalente, uma matriz quadrada e Hermitiana A é dita ser positiva semidefinida, denotada por $A \geq 0$, se $x^*Ax \geq 0$ para todo $x \neq 0$. Se A é uma matriz positiva definida (respectivamente, positiva semidefinida), então ela pode ser escrita como

$$A = LL^* , \tag{B.1}$$

em que L é uma matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são positivos (respectivamente, não negativos). Esse resultado é conhecido como fatoração de Cholesky.

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Os autovalores de A , $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, são as n soluções da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0 . \tag{B.2}$$

No caso em que todos os autovalores de A são reais, $\lambda_{\max}(A)$ denota o maior valor singular de A e $\lambda_{\min}(A)$ denota o menor valor singular. O maior dos valores absolutos dos autovalores de A é o raio espectral de A .

Se uma matriz é Hermitiana, todos os seus autovalores são reais. Além disso, se a matriz é positiva definida, todos seus autovalores são positivos. Equivalentemente, se a matriz é positiva semidefinida, todos seus autovalores são não negativos.

Para matrizes genéricas M e N de dimensões compatíveis, $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ e os autovalores não nulos de MN são autovalores de NM . Além disso, para qualquer matriz M real e quadrada e um escalar $a > 0$ tem-se

$$-\frac{1}{a} \ln \det(I - aM) = \text{tr}(M) + O(a) . \tag{B.3}$$

B.2 Lema da Matriz Inversa

Uma importante identidade matricial é o Lema da Matriz Inversa. Sejam A, B, C e D matrizes de dimensões compatíveis tais que as matrizes BCD e $(A + BCD)$ estejam

definidas. Se A^{-1} e C^{-1} existem, então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} . \quad (\text{B.4})$$

Dois casos particulares do Lema da Matriz Inversa bastante utilizados ao longo do texto são

$$I - M(I + M)^{-1} = (I + M)^{-1} \quad (\text{B.5})$$

$$(I + MN)^{-1}M = M(I + NM)^{-1} . \quad (\text{B.6})$$

B.3 Decomposição em Valores Singulares

Seja A uma matriz $m \times n$. Existem matrizes unitárias ($A^*A = AA^* = I$)

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \quad (\text{B.7})$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (\text{B.8})$$

tais que

$$A = U\Sigma V^* , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (\text{B.9})$$

em que

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

e

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0, \quad p = \min\{m, n\} . \quad (\text{B.11})$$

O elemento σ_i é o i -ésimo valor singular de A . O maior valor singular de A é denotado por $\sigma_{\max}(A)$ e o menor valor singular de A é denotado por $\sigma_{\min}(A)$. Para matrizes quadradas, tem-se

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} . \quad (\text{B.12})$$

Algumas propriedades importantes de valores singulares utilizadas ao longo do texto são

$$\sigma_{\max}(A) = \frac{1}{\sigma_{\min}(A^{-1})} \quad (\text{B.13})$$

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (\text{B.14})$$

$$\sigma_{\max}(A)\sigma_{\min}(B) \leq \sigma_{\max}(AB) \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_i(A) + \sigma_{\max}(B) \geq \sigma_i(A + B) \geq \sigma_i(A) - \sigma_{\max}(B) . \quad (\text{B.16})$$

APÊNDICE C – Artigos Publicados

Esta tese de doutorado gerou os seguintes artigos publicados em periódicos classificados no Qualis A1 da CAPES:

GUARACY, F. H. D.; FERREIRA, L. H. C.; PINHEIRO, C. A. M. The discrete-time controller for the \mathcal{H}_∞ /LTR problem with mixed-sensitivity properties. *Automatica*, v. 58, p. 28–31, 2015.

GUARACY, F. H. D.; SILVA, D. L. F.; FERREIRA, L. H. C. On the properties of augmented open-loop stable plants using LQG/LTR control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 60, p. 2172–2176, 2015.

Além dos artigos publicados em periódicos, foram publicados em conferências os seguintes artigos:

GUARACY, F. H. D.; SILVA, D. L. F.; FERREIRA, L. H. C. On the plant augmentation by integrators in the discrete-time LQG/LTR control. *2014 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, 2014, Antibes. p. 1152–1157.

GUARACY, F. H. D.; SILVA, D. L. F.; FERREIRA, L. H. C. Sobre a expansão da dinâmica de uma planta por integradores no controle LQG/LTR em tempo discreto. *XX Congresso Brasileiro de Automática*, 2014, Belo Horizonte. p. 2253–2259.

Destaca-se que o artigo publicado na *IEEE Multi-Conference on Systems and Control* foi escolhido como um dos finalistas para recebimento do prêmio *Best Student Paper Award* dessa conferência. Além dos trabalhos listados acima, outras publicações não diretamente ligadas ao tema desta tese foram feitas durante a realização desse trabalho:

GUARACY, F. H. D.; PINHEIRO, C. A. M.; FERREIRA, L. H. C. Converting fuzzy models to rough models. *12th IEEE International Conference on Industrial Informatics*, 2014, Porto Alegre.

SILVA, F. O.; FERREIRA, L. H. C.; ZOCCAL, L. B.; GUARACY, F. H. D. An alternative linear topology for conditioning resistive sensors. *12th IEEE International Conference on Industrial Informatics*, 2014, Porto Alegre.

GUARACY, F. H. D.; PINHEIRO, C. A. M. Sintonia de controlador por

modos deslizantes para um sistema de nível. *XX Congresso Brasileiro de Automática*, 2014, Belo Horizonte. p. 2556–2563.

GUARACY, F. H. D.; PINHEIRO, C. A. M. Sintonia de controlador por modos deslizantes fuzzy via enxame de partículas. *XX Congresso Brasileiro de Automática*, 2014, Belo Horizonte. p. 2294–2299.

GUARACY, F. H. D.; PINHEIRO, C. A. M.; FERREIRA, L. H. C. Controlador por modos deslizantes fuzzy aplicado a um regulador automático de tensão. *XI IEEE/IAS International Conference on Industry Applications*, 2014, Juiz de Fora.

SILVA, J. L. V. P.; GUARACY, F. H. D.; FERREIRA, L. H. C.; MACHADO, J. B.; PINHEIRO, C. A. M. A new approach on the target feedback loop parametrization in the discrete-time LQG/LTR control. *24th IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2015, Búzios.

Destaca-se que o artigo publicado na *IEEE/IAS International Conference on Industry Applications* recebeu o prêmio *Best Paper Award* dessa conferência na área *Automation and Process Control*.