

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Método das Soluções Fundamentais
Baseado em Vórtices para Problemas de
Aerodinâmica Bidimensional

Autora: Fernanda Sírío Lima

Orientador: Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho

Co-orientador: Prof. Dr. Waldir de Oliveira

Itajubá, Maio de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Método das Soluções Fundamentais
Baseado em Vórtices para Problemas de
Aerodinâmica Bidimensional

Autora: **Fernanda Sírio Lima**

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

Co-orientador: **Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de concentração: **Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Maio de 2010

MG – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Método das Soluções Fundamentais
Baseado em Vórtices para Problemas de
Aerodinâmica Bidimensional

Autora: **Fernanda Sírio Lima**

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho**

Co-orientador: **Prof. Dr. Waldir de Oliveira**

Composição da banca examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Cesar Amorim - IME

Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Ramiro Gustavo Ramirez Camacho – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Waldir de Oliveira – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho, Presidente – IEM/UNIFEI

Dedicatória

Aos meus pais, Léa e Francisco.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade que tive de ter uma boa educação, pela minha família e amigos.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Nelson Manzanares Filho e Prof. Waldir de Oliveira, pelo incentivo, entusiasmo, compreensão e paciência.

Gostaria de agradecer aos professores da pós-graduação e aos amigos, Cleber Juliano Braga dos Reis, Michelly Martuchele Santos, Edna Raimunda da Silva e Marcos Antônio Rodrigues dos Santos pelo companheirismo, amizade e apoio a mim dispensados.

Agradeço também a PETROBRAS e a CAPES (através do programa PROCAD) pelos recursos a mim oferecidos por meio de bolsa e pelo incentivo à pesquisa.

Vença a si mesmo e terá vencido o seu próprio adversário.

Resumo

LIMA, F. S. (2010), *Método das Soluções Fundamentais Baseado em Vórtices para Problemas de Aerodinâmica Bidimensional*, Itajubá, 67p. Dissertação (Mestrado em Dinâmica dos Fluidos e Máquinas de Fluxo) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

O Método das Soluções Fundamentais (MSF) é um método de contorno sem malha e popular que tem sido aplicado na solução de vários problemas de engenharia como transferência de calor em corpos, distribuições de tensões e escoamentos, tanto internos como externos. Em problemas de aerodinâmica envolvendo corpos esbeltos, o MSF tem sido muito pouco utilizado. Nesse caso, o domínio externo é interior aos corpos e, portanto, é difícil ou às vezes impossível de se distribuir as localizações das soluções fundamentais adequadamente. Para problemas de aerodinâmica plana, transformações conforme auxiliares podem ajudar a evitar ou aliviar esses problemas. Para problemas de escoamento potencial e incompressível, a equação de Laplace deve ser satisfeita por ambas as funções potencial e corrente. A solução fundamental logarítmica corresponde ao potencial induzido por uma fonte, no primeiro caso, e a uma função corrente induzida por um vórtice no segundo caso. Nesse trabalho, somente vórtices pontuais são empregados a fim de se representar tanto corpos com e sem sustentação. Para aerofólios com bordo de fuga agudo ou afilado e corpos esbeltos, uma transformação conforme deve ser primeiramente aplicada para se transformar um corpo no plano físico em um quase-círculo. O MSF baseado em vórtices é então aplicado no plano do quase-círculo. A transformação de Joukowski é utilizada no caso de aerofólios isolados com bordo de fuga afilado e escoamento incidente uniforme. Dependendo dos parâmetros dessas transformações, os quase-círculos obtidos podem apresentar uma excessiva variação de curvatura, afetando a precisão dos resultados numéricos. Para se lidar com essa situação, uma técnica apropriada foi

desenvolvida a fim de se obter quase-círculos com mínima variação de curvatura. No caso de corpos suaves, como círculos e elipses, o MSF baseado em vórtices pode ser aplicado diretamente no plano físico. No caso de corpos isolados com o escoamento incidente representado por singularidades, o MSF é aplicado diretamente no plano transformado visando uma futura aplicação em grades de perfis de aerofólio. Vários exemplos foram propostos e analisados para se estudar a influência do número de vórtices, sua distância do contorno do corpo e também a variação de curvatura. Esses exemplos são apresentados no presente trabalho, incluindo círculos, elipses e aerofólios simétricos e arqueados. Com as configurações apropriadas, o MSF baseado em vórtices pode alcançar um alto grau de precisão.

Palavras-chave

Método das Soluções Fundamentais (MSF), MSF baseado em vórtices, Transformação conforme.

Abstract

LIMA, F. S. (2010), *Vortex-Based Fundamental Solutions Method for Plane Aerodynamic Problems*, Itajubá, 67p. MSc. Dissertation - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá.

The Method of Fundamental Solutions (MFS) is currently a popular boundary-type meshless method that has been applied to solve various engineering problems such as heat transfer on bodies, stress distribution and internal and external flows. In aerodynamic problems involving slender bodies the MFS has been scarcely applied. In this case the outside domain is interior to the bodies and so it is difficult or even impossible to distribute the FS locations adequately. For plane aerodynamic problems, auxiliary conformal mappings may help to overcome or to alleviate these drawbacks. For potential incompressible flow problems, the Laplace equation must be satisfied by both the potential function and the stream function. The logarithmic fundamental solution corresponds to the potential induced by a source in the first case and to the stream function induced by a vortex in the second one. In this work, only point vortices are employed in order to represent both lifting and non-lifting bodies. For airfoils with cusped or sharp trailing edges and thin bodies, a conformal mapping must be firstly applied in order to transform a profile in the physical plane in a near-circle. The vortex-based MFS is then applied in the near-circle plane. A Joukowski mapping is used for isolated airfoils with cusped trailing edge and uniform incident flow. Depending on the parameters of these transformations, the obtained near-circles may exhibit excessive curvature variation by impairing the accuracy of the numerical results. To deal with this situation, a suitable technique was developed for producing near-circles with a minimum of curvature variation. For smooth bodies, like circles or thick ellipses, the vortex-based MFS can be applied directly in the physical plane. For isolated bodies with an incident flow represented by singularities,

the MFS is direct applied on the transformed plane aiming a future application on airfoil cascades. Various examples were carried out and analyzed in order to study the influence of the number of vortices, their distance from the boundary and also the curvature variation. These examples are presented in this work, including circles, ellipses, symmetrical and cambered airfoils. With suitable configurations, the vortex-based MFS can attain a high degree of accuracy.

Keywords

Method of fundamental solutions (MFS), Vortex-based MFS, Conformal mapping.

Sumário

SUMÁRIO	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	vii
SIMBOLOGIA	viii
LETRAS LATINAS	viii
LETRAS GREGAS	ix
OUTROS SÍMBOLOS	xi
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Revisão da Literatura-----	1
1.2 Organização do Trabalho -----	5
CAPÍTULO 2	7
FORMULAÇÃO DO MSF NO CONTEXTO DA AERODINÂMICA	7
2.1 Método das Soluções Fundamentais -----	7
2.2 MSF na Aerodinâmica -----	13
CAPÍTULO 3	22
EMPREGO DA TRANSFORMAÇÃO CONFORME	22
3.1 Transformação de Joukowski inversa -----	23
3.2 Transformação de Weinig -----	25
CAPÍTULO 4	30
IMPLEMENTAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA	30

	ii
CAPÍTULO 5 _____	38
RESULTADOS E DISCUSSÕES _____	38
5.1 Corpos com Escoamento Incidente Uniforme-----	39
5.2 Corpos com Escoamento Incidente Singular-----	48
CAPÍTULO 6 _____	61
CONCLUSÕES E SUGESTÕES _____	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	65
APÊNDICE A _____	68
EXEMPLOS DE DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO _____	68

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	a) Domínio com formato de amendoim. b) Localização dos pontos de colocação no contorno e dos pontos singulares fora do domínio (figura adaptada de Chen et al., 2007).....	10
Figura 2.2	Condições de contorno para um perfil do tipo ameiba (figura adaptada de Chen et al., 2007).....	10
Figura 2.3	Discretização do contorno do domínio e localização dos pontos singulares.....	11
Figura 2.4	Localização dos pontos de colocação e dos pontos singulares.....	13
Figura 2.5	Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente e vórtices no interior do corpo.....	17
Figura 2.6	Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente, vórtices no interior do corpo e um dipolo na origem.....	18
Figura 2.7	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes e vórtices no interior do corpo.....	19
Figura 2.8	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes, suas reflexões e vórtices no interior do corpo.....	19
Figura 2.9	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e vórtices (do método) no interior do corpo.....	20
Figura 2.10	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.....	20
Figura 2.11	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente	

	com vórtices e fontes, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.....	21
Figura 3.1	Transformação de Joukowski (figura adaptada de Lewis, 1991).....	23
Figura 3.2	Disposição dos corpos a serem estudados com relação à placa plana. a) Plano físico. b) Plano transformado.....	24
Figura 3.3	Transformação conforme de uma grade de placas planas (figura adaptada de Lakshminarayana, 1996).....	26
Figura 3.4	Escoamento através de uma grade escalonada. (a) Grade escalonada com incidência nula. (b) Grade escalonada com incidência.....	27
Figura 4.1	Sequência de chamada das sub-rotinas para o caso de escoamento uniforme.....	33
Figura 5.1	Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente e vórtices no interior do corpo.....	39
Figura 5.2	Comportamento do método para o cilindro circular com a condição de Kutta.....	40
Figura 5.3	Erro médio quadrático para o cilindro circular com a condição de Kutta.....	40
Figura 5.4	Comportamento da circulação com e sem a condição de Kutta para $\delta = 0,8$	41
Figura 5.5	Influência de δ na distribuição do erro local.....	42
Figura 5.6	Comportamento do método para o cilindro circular com ângulo de ataque 90°	42
Figura 5.7	Erro médio quadrático para o cilindro circular com ângulo de ataque 90°	43
Figura 5.8	Configuração do escoamento para a elipse.....	43
Figura 5.9	Comportamento do método para uma elipse com relação de aspecto de 0,5 no plano físico.....	44
Figura 5.10	Erro médio quadrático para uma elipse com relação de aspecto de 0,5 no plano físico.....	44
Figura 5.11	Perfil NACA 65-010 e seu quase-círculo.....	45

Figura 5.12	Comportamento do método para NACA 65-010.....	46
Figura 5.13a	Perfil NACA 65-906 e seu quase-círculo.....	46
Figura 5.13b	Perfil NACA 65-910 e seu quase-círculo.....	47
Figura 5.14	Comportamento do método para NACA 65-906.....	47
Figura 5.15	Comportamento do método para NACA 65-910.....	48
Figura 5.16	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes e vórtices no interior do corpo.....	49
Figura 5.17	Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=1,2$	49
Figura 5.18	Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=1,5$	50
Figura 5.19	Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=2,0$	50
Figura 5.20	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes, suas reflexões e vórtices no interior do corpo.....	51
Figura 5.21	Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=1,2$	51
Figura 5.22	Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=1,5$	52
Figura 5.23	Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=2,0$	52
Figura 5.24	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e vórtices (do método) no interior do corpo.....	53
Figura 5.25	Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=1,2$	53
Figura 5.26	Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=1,5$	54
Figura 5.27	Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=2,0$	54
Figura 5.28	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente	

	com vórtices, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.....	55
Figura 5.29	Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=1,2$	55
Figura 5.30	Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=1,5$	56
Figura 5.31	Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=2,0$	56
Figura 5.32	Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e fontes, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.....	57
Figura 5.33	Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=1,2$	57
Figura 5.34	Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=1,5$	58
Figura 5.35	Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=2,0$	58
Figura 5.36	Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente, vórtices no interior do corpo e um dipolo no centro.....	59
Figura 5.37	Comportamento do método para o cilindro circular com dipolo em seu centro.....	60
Figura A.1	Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular sem incidência.....	69
Figura A.2	Distribuição de pressão em torno de uma elipse de relação de aspecto de 0,5 sem incidência.....	69
Figura A.3	Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-010 sem incidência.....	70
Figura A.4	Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-906 sem incidência.....	70
Figura A.5	Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-910 sem incidência.....	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Soluções fundamentais para alguns operadores diferenciais.....	11
Tabela 2.2	Exemplos de escoamentos e suas velocidades e potenciais complexos (tabela adaptada de Lakshminarayana, 1996).....	17

SIMBOLOGIA

Letras Latinas

c	Parâmetro da transformação de Joukowski
F	Função potencial complexo
i	Constante imaginária ($\sqrt{-1}$)
i	Índice que denota o ponto de controle
j	Índice que denota o ponto singular
\mathcal{L}	Operador diferencial
ℓ	Corda do perfil de aerofólio
m	Número de pontos de colocação/singulares
N'	Número de pontos fictício
n	Vetor normal unitário, número de pontos fonte (ou singulares)
n_{le}	Número do bordo de ataque
nn	Número total de pontos sobre o contorno do corpo
n_t	Número de pontos de teste
q	Intensidade de uma fonte
R	Parâmetro da transformação de Weing

r	Distância entre o ponto de colocação e o ponto singular
r_0	Raio do círculo no plano transformado
r_b	Raio de curvatura dos bordos da elipse
t	Passo entre as pás da grade de perfis de aerofólios
U_∞	Velocidade incidente
U_m	Velocidade média
u	Componente real da velocidade complexa
v	Componente imaginária da velocidade complexa
v_t	Velocidade tangencial no bordo de fuga
W	Velocidade complexa conjugada
x	Abcissa no plano físico
y	Ordenada no plano físico
z	Plano físico, coordenadas complexas
z_c	Coordenada complexa do ponto de colocação
z_s	Coordenada complexa do ponto singular
z_t	Coordenada complexa do ponto de teste

Letras Gregas

α	Ângulo de ataque
α_∞	Ângulo de ataque médio para a grade
β	Ângulo de montagem da grade
δ	Parâmetro de distância entre o contorno do corpo e o contorno fictício
ε	Erro médio quadrático

ε_1	Parâmetro da transformação de Joukowski que determina a espessura do perfil no plano físico
ε_2	Parâmetro da transformação de Joukowski que determina o arqueamento do perfil no plano físico
ε_3	Parâmetro da transformação de Joukowski que determina o tipo de bordo de fuga do perfil no plano físico
ϕ	Função potencial de velocidades
Γ	Circulação, contorno do corpo
$\hat{\Gamma}$	Contorno fictício
γ	Função de base radial, intensidade de vórtice
η	Valor da ordenada no plano transformado
π	3,14159265...
Σ	Somatório
σ	Dispersão da variação de curvatura, densidade
Ω	Domínio
$\hat{\Omega}$	Domínio que contém Ω
ξ	Valor da abscissa no plano transformado
ψ	Função corrente
ψ_0	Valor constante da função corrente no contorno do corpo
ψ_{ij}	Matriz com os valores da função corrente induzida pelas singularidades do método
ψ_∞	Função corrente induzida pelo escoamento incidente
ζ	Plano transformado, complexo

Outros símbolos

$\| \cdot \|_2$ Norma euclidiana

∇ Operador nabla

∇^2 Operador diferencial de Laplace

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 REVISÃO DA LITERATURA

Por muito tempo o método de elementos finitos e o método de diferenças finitas têm sido os métodos numéricos dominantes. Esses métodos são métodos de domínio, ao contrário dos métodos de contorno, os quais transferem o problema ao contorno. Em geral, os métodos de domínio requerem a realização de malhas em todo o domínio, o que pode ser extremamente difícil no caso de problemas tridimensionais. Desse modo, os métodos de elementos de contorno (MEC) surgiram como técnicas alternativas que discretizam somente o contorno, o que gera pouco custo computacional. Entretanto, os MEC envolvem cálculo sofisticado e há algumas dificuldades na integração numérica.

Assim, buscou-se desenvolver métodos sem malha, os quais não necessitam de malhas no domínio e nem no contorno. Esses métodos discretizam o contorno do corpo a ser estudado através de uma distribuição de pontos apenas. Dentre esses métodos, o método das soluções fundamentais (MSF) surgiu como um efetivo método de contorno sem malha para a solução de equações diferenciais homogêneas. MSF exige apenas que as condições de contorno sejam satisfeitas e que as soluções fundamentais sejam conhecidas.

A idéia do MSF é aproximar a solução por meio da combinação linear das soluções fundamentais do operador diferencial governante de tal modo que condições de contorno

adicionais sejam satisfeitas com certa precisão. Isso reduz o problema de equação diferencial parcial homogênea a um problema de interpolação por meio da colocação dos dados no contorno. Outra vantagem é que o domínio de integração pode ser colocado fora do domínio que contém as singularidades, evitando-as assim.

Em geral, o erro total da solução é limitado ao erro no contorno, o qual pode ser determinado facilmente. Além disso, é possível adaptar o método, adicionando mais funções de interpolação para tratar regiões onde o erro no contorno não é tolerável. Para problemas de contornos suaves, o MSF apresenta uma ótima convergência (Chen et al., 2007).

Uma das primeiras aplicações do MSF foi em problemas potenciais, como o estudo da aproximação das condições de contorno de equações elípticas por meio desse método (Mathon, Johnston, 1977). As soluções fundamentais são utilizadas como funções de interpolação e as singularidades são colocadas fora da região de interesse. A localização dessas singularidades também é definida como parâmetro de otimização. Assim, é obtido um método altamente flexível, porém não-linear, o qual se mostrou vantajoso no caso de problemas tridimensionais e quando a solução é de baixa continuidade.

Mais tarde, o MSF foi utilizado na solução de problemas em escoamento potencial. Dragos (1982) utilizou o método para se determinar a solução fundamental no contexto da aerodinâmica bidimensional e permanente e mostrou como essa solução é utilizada na modificação do escoamento quando na presença de corpos. Foi realizada uma aplicação em escoamentos na presença de aerofólios finos.

Johnston e Fairweather (1984) utilizaram o MSF na obtenção do campo de velocidade de um fluido escoando em torno de um cilindro, o qual está entre duas placas planas paralelas. Os autores mostraram as vantagens do método em ser adaptável, da facilidade de se obter a solução do problema por meio de um procedimento de avaliação direta e da precisão obtida. Uma das principais características do método é a utilização de um contorno auxiliar, cuja localização é automaticamente determinada pelo próprio algoritmo, por meio do método de mínimos quadrados. Um primeiro problema foi resolvido utilizando o método desenvolvido e as soluções foram comparadas com as obtidas pelo método de elementos finitos e pelo método de elementos de contorno. Já no segundo problema, as soluções foram comparadas com as soluções analíticas. O terceiro problema é semelhante ao segundo, apenas modificando a seção do cilindro de circular para elíptica. Já no último exemplo, um cilindro

com uma reentrância foi utilizado. Em todos os casos estudados foram obtidos resultados com ótima precisão.

Tanaka et al (1991) desenvolveram um procedimento para análise numérica de um escoamento potencial bidimensional e incompressível através de grades de aerofólios com perfis arbitrários. Para se resolver os problemas que surgem da aplicação direta do método de singularidades no cálculo de escoamento em grades, foi proposto um procedimento em que uma grade de perfis no plano físico é transformada em uma grade de quase-círculos por meio de uma função simples de mapeamento e um processo iterativo e, então, o método de singularidades é aplicado no plano transformado. Os resultados obtidos foram trazidos de volta para o plano físico e apresentaram uma boa concordância com as soluções exatas, e nos casos de perfis práticos, o método manteve quase a mesma precisão, mostrando-se muito útil para a análise do escoamento em torno de grades de aerofólios esbeltos.

Mais tarde, Katsurata e Okamoto (1996) estudaram a aplicação do MSF no problema interno de Dirichlet para a equação de Laplace a fim de se obter uma redução exponencial dos erros por meio de um programa bem simples. Para tanto, os autores desenvolveram um procedimento para a escolha da localização dos pontos de colocação e dos pontos fonte que proporcionasse tal redução nos erros. Ao contrário da técnica de mínimos quadrados, essas localizações foram determinadas de forma independente da distribuição de densidades. Os autores obtiveram bons resultados e o algoritmo se mostrou de uso prático e robusto.

Fairweather e Karageorghis (1998) fizeram uma revisão do desenvolvimento do MSF e de métodos relacionados nas últimas décadas, apresentando diversas aplicações. Também revisaram técnicas para se estender o método a certas classes de problemas não triviais e para adaptá-los para a solução de problemas não-homogêneos. Os autores observaram que o MSF requer poucos pontos no contorno para se obter resultados com boa precisão e que regiões com descontinuidade, as quais causam problemas no método de elementos de contorno, não são uma fonte específica de imprecisão. Além disso, é possível avaliar as derivadas da aproximação do MSF diretamente e o método é de fácil implementação. Em 1999, os autores estudaram a aplicação do MSF a problemas potenciais axisimétricos (Karageorghis e Fairweather, 1999), onde mostram que o método pode ser aplicado não só em problemas que possuam soluções fundamentais simples (caso de condições de contorno e domínio axisimétricos), mas em qualquer tipo de problema em que essas soluções sejam conhecidas,

como no caso de condições de contorno arbitrárias. Diversos casos da literatura foram testados e apresentaram resultados com boa precisão. Além disso, os autores mostram que o MSF pode ser aplicado a qualquer problema cuja solução fundamental seja conhecida e que ele se mostra extremamente vantajoso diante de problemas não-lineares.

Smyrlis e Karageorghis (2004) propuseram um algoritmo eficiente para a versão de mínimos quadrados do MSF para a solução de problemas elípticos num disco sujeito às condições de contorno de Dirichlet. A eficiência do método se baseia na estrutura especial da matriz resultante (matriz circulante). Além disso, o método pode ser estendido a domínios mais gerais desde que estes sejam transformados em domínios circulares por meio de técnicas de mapeamento.

Karageorghis e Smyrlis (2007) empregaram a transformação conforme para transformar problemas de Dirichlet que são definidos em domínios simplesmente conectados em problemas definidos em um disco unitário. Assim, o sistema resultante é resolvido por meio do MSF em conjunto com transformadas rápidas de Fourier. A técnica é estendida a problemas de domínios duplamente conectados transformados em domínios anulares. A solução dos problemas resultantes pode ser realizada eficientemente empregando essa técnica. Em um trabalho seguinte (Smyrlis e Karageorghis, 2008), os autores exploram características especiais do sistema na solução do problema de um disco. São apresentadas três formulações, uma para o caso de número igual de pontos no contorno e de fontes, número maior de pontos no contorno e número maior de fontes. O método mostrou-se preciso, fácil de se implementar e obteve um baixo custo computacional.

Com base na revisão bibliográfica realizada, o objetivo do presente trabalho foi desenvolver uma formulação para o MSF dentro do contexto da aerodinâmica, utilizando vórtices como as singularidades e representando o escoamento pelo laplaciano da função corrente, abordagem ainda pouco estudada. A vantagem de se utilizar essa formulação é que se obtém um estimador de erro “natural”, já que o valor da função corrente é conhecido e constante ao longo de todo o contorno. Além disso, é realizada uma avaliação do seu desempenho e comportamento conforme diversos casos são estudados. Por motivação de alguns trabalhos estudados, foram empregadas como técnicas auxiliares a transformação de Joukowski inversa, no caso de corpos isolados com escoamento incidente uniforme, a fim de se facilitar a localização das singularidades e uma minimização da dispersão de curvatura para

se reduzir a perturbação na precisão dos cálculos causada pela variação de curvatura do contorno do corpo transformado. O método proposto foi aplicado em corpos isolados com escoamento incidente uniforme e com escoamento incidente singular, ou seja, um escoamento representado por singularidades (fontes, vórtices e a combinação de ambos). Neste último caso, o interesse era ver como o método proposto se comportaria a fim de se possibilitar uma futura aplicação no caso de grades de perfis de aerofólios. Outra motivação para se trabalhar com o MSF foi a sua possível aplicação juntamente com o método de vórtices (Lewis, 1999). Essa combinação evitaria problemas com singularidades no contorno do corpo e dispensaria a necessidade de se adicionar a reflexão da nuvem de vórtices dentro do corpo, no caso da aplicação do teorema do círculo, sem perder precisão e a um baixo custo computacional.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 1 é introduzida uma visão geral dos métodos sem malha e do MSF. Além disso, faz-se um breve relato dos trabalhos realizados a respeito desse tema até os dias atuais. A motivação desse trabalho e a sua organização também são descritos.

No Capítulo 2 é apresentado o MSF, sua formulação geral e algumas técnicas de implementação. Na seqüência, a formulação do MSF é particularizada para o contexto da aerodinâmica com a utilização de variáveis complexas.

No Capítulo 3 são apresentadas duas transformações conforme: a transformação de Joukowski, para corpos isolados, e a transformação de Weinig, para grades lineares. São expostos os equacionamentos das transformações diretas e, no caso da transformação de Joukowski, uma metodologia para a obtenção da transformação inversa é realizada.

Já no Capítulo 4 é descrito como a implementação dos cálculos foi realizada, assim como a formulação numérica necessária para tanto. Além disso, são explicadas as funções de cada sub-rotina desenvolvida e um fluxograma da seqüência de cálculo é apresentado.

Os resultados numéricos obtidos são apresentados no Capítulo 5. Uma discussão a respeito do comportamento do método proposto e de algumas particularidades para cada caso estudado é apresentada.

No Capítulo 6 são realizadas as conclusões do trabalho, onde as vantagens e desvantagens da aplicação do método proposto são analisadas. Sugestões para a melhoria da técnica empregada e/ou a utilização de outras técnicas para a aplicação do MSF também são feitas.

No Apêndice A são apresentadas as distribuições de pressão para alguns exemplos de corpos. Os resultados são comparados com a solução analítica quando esta existir.

Capítulo 2

FORMULAÇÃO BÁSICA DO MSF NA AERODINÂMICA

Neste capítulo é introduzida a teoria básica do método das soluções fundamentais e seu equacionamento (Chen et al., 2007). A formulação do MSF também é desenvolvida no contexto da aerodinâmica.

2.1 MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

O MSF é um método sem malha (também chamado de *meshless* ou *meshfree*) essencialmente de contorno para se determinar a solução de equações diferenciais parciais lineares homogêneas. Ele também pode ser considerado como um método de elementos de contorno indireto e utiliza apenas soluções homogêneas como funções de interpolação. Essas soluções homogêneas são as soluções fundamentais do operador diferencial linear governante. Assim, uma solução fundamental $g(x,y)$ é a solução da equação diferencial parcial homogênea

$$\mathcal{L}(u) = 0 \text{ em } \Omega \tag{2.1}$$

em todo o domínio Ω que não contenha o ponto singular y de $g(x, y)$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d=2,3$, é um domínio conexo aberto não-vazio limitado, com um contorno suficientemente regular $\delta\Omega = \Gamma$ e f^Γ é uma função conhecida, então a condição de contorno

$$u = f^\Gamma \text{ em } \Gamma \quad (2.2)$$

define, juntamente com a equação 2.1, um problema homogêneo de valor de contorno de Dirichlet. No método clássico, utiliza-se uma integral de contorno para se representar u em termos do potencial de duas camadas

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, y)}{\partial n}(y) \sigma(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma \quad (2.3)$$

onde n é o vetor normal para fora em $y \in \Gamma$, σ é a densidade desconhecida e $g(x, y)$ é a solução fundamental com a singularidade x localizada no contorno. Assim, o problema de valor de contorno se reduz a uma equação integral de contorno singular a ser resolvida para σ no contorno

$$f^\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial g(x, y)}{\partial n}(y) \sigma(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Embora esse método para a solução de problemas de Dirichlet seja bastante comum, nos últimos anos houve um grande esforço a fim de se representar u por um potencial de uma camada para a obtenção da solução das equações 2.1 e 2.2 através da equação

$$u(x) = \int_{\Gamma} g(x, y) \sigma(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma \quad (2.5)$$

para se determinar a distribuição de densidades $\sigma(y)$ no contorno, implicando em uma equação integral de primeira espécie no contorno

$$\int_{\Gamma} g(x, y) \sigma(y) d\gamma(y) = f^\Gamma(x). \quad (2.6)$$

A vantagem de se utilizar a equação 2.6 é o fato de se ter menores dificuldades de integração já que as singularidades são mais fracas que as do potencial de dupla camada. Em contrapartida, os sistemas lineares provenientes da discretização da equação 2.6 tendem a ser mal condicionados.

Visando a diminuição das dificuldades de integrais singulares, é possível mover o

domínio de integração para fora de Ω e mesmo assim se obter uma solução homogênea. Desse modo, surgem funções de interpolação do tipo

$$u(x) = \int_{\hat{\Gamma}} g(x, y) \sigma(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma, \quad (2.7)$$

onde o contorno fictício $\hat{\Gamma}$ é o contorno do domínio $\hat{\Omega}$ contendo Ω . Desde que a equação 2.7 automaticamente satisfaça a equação 2.1, é necessário apenas satisfazer a condição de contorno da equação 2.2 por meio das funções de interpolação da equação 2.7. Essas condições nos levam a

$$\int_{\hat{\Gamma}} g(x, y) \sigma(y) d\gamma(y) = f^{\Gamma}(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2.8)$$

onde a distribuição de densidades σ é determinada no contorno $\hat{\Gamma}$ ao invés de Γ . Uma vez determinado σ , a solução u pode ser obtida.

A representação integral pela equação 2.8 mostra que existem infinitos pontos fonte em $\hat{\Gamma}$. Portanto, é necessário se discretizar $\sigma(y)$ e a equação 2.8 a fim de se possibilitar a aplicação de soluções numéricas. O número de pontos $x \in \Gamma$ é reduzido a um conjunto finito de pontos, m , os quais são denominados pontos de colocação $\{x_j\}_1^m \in \Gamma$. Depois, combinam-se pesos de integração com os valores de σ obtidos em um conjunto de pontos fonte, ou singulares, $\{y_k\}_1^n$ dentro de um dado conjunto de números reais $\{\alpha_k\}_1^n$ para se obter a discretização da equação 2.8

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_j, y_k) = f^{\Gamma}(x_j), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (2.9)$$

Mesmo que esse sistema linear não seja resolvido exatamente, a função de interpolação

$$u_n(x) \cong \sum_{k=1}^n \alpha_k g(x, y_k) \quad (2.10)$$

satisfará exatamente a equação 2.1 e aproximadamente a condição de contorno 2.2. A solução aproximada da equação 2.9 pelas funções de interpolação da equação 2.10 consiste no Método

das Soluções Fundamentais. Pode-se notar que nenhuma integração é necessária, bastando apenas se superpor um número de soluções fundamentais para se obter uma boa aproximação dos valores de contorno. Porém o sistema linear dado pela equação 2.9 não precisa ser interpretado como uma fórmula de integração numérica para a integral de contorno. A Figura 2.1 exemplifica a distribuição de pontos de colocação e de pontos singulares no caso em que o domínio Ω é interno.

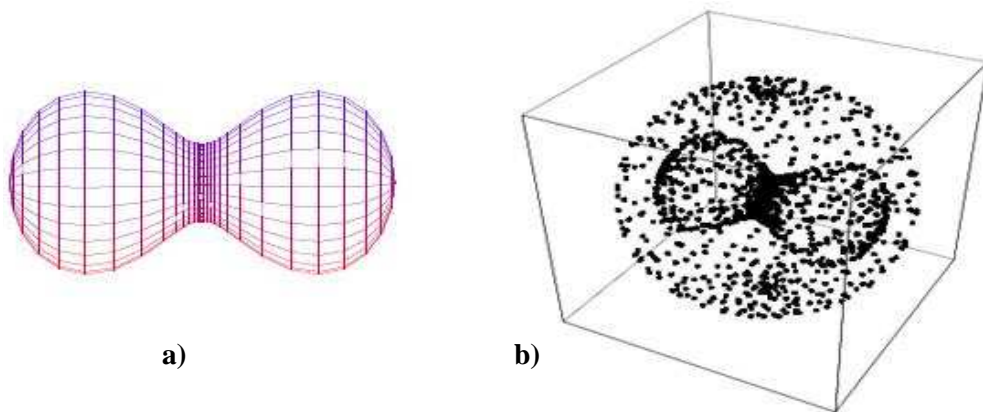


Figura 2.1 – a) Domínio com formato de amendoim. b) Localização dos pontos de colocação no contorno e dos pontos singulares fora do domínio (figura adaptada de Chen et al., 2007).

Para se avaliar o erro máximo absoluto no contorno, são necessários pontos adicionais (pontos de teste) no mesmo, os quais não entram no cálculo da solução aproximada.

O MSF também pode ser utilizado com outros tipos de condições de contorno, inclusive não-lineares, como a combinação das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, como mostra a Figura 2.2.

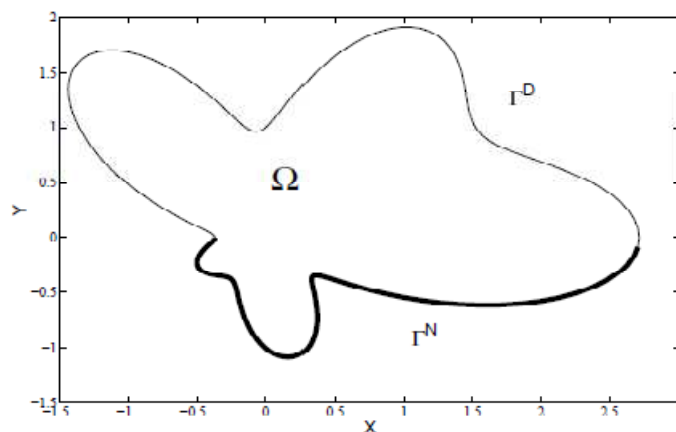


Figura 2.2 – Condições de contorno para um perfil do tipo ameiba (figura adaptada de Chen et al., 2007).

Quando o domínio possui orifícios em seu interior, pontos singulares adicionais devem ser localizados no interior desses orifícios e o contorno dos mesmos também deve ser discretizado, como mostra a Figura 2.3.

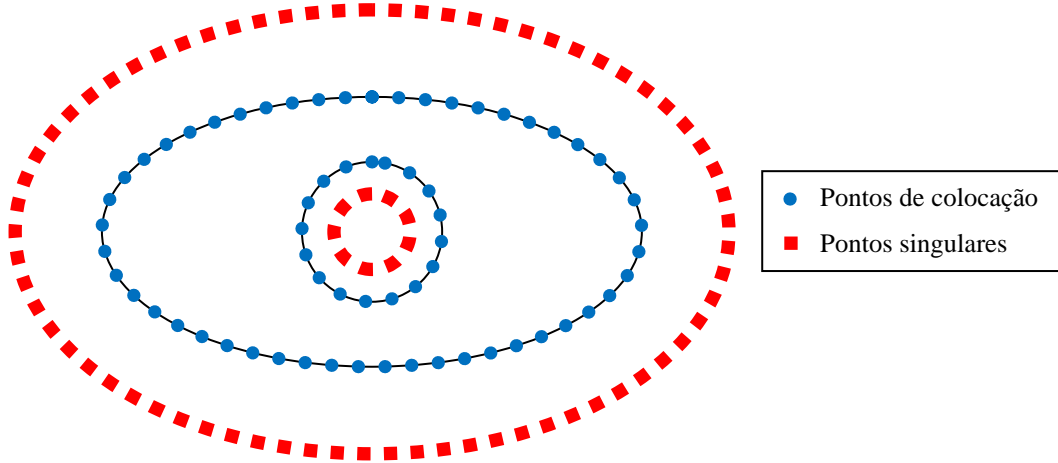


Figura 2.3 – Discretização do contorno do domínio e localização dos pontos singulares.

A seguir, na tabela 2.1, são listadas algumas soluções fundamentais para os operadores diferenciais lineares mais utilizados. Desde que esses operadores não variem ao longo do raio, as suas soluções fundamentais são de base radial $g(x, y) = \gamma(\|x - y\|_2)$ e é necessário apenas listar funções de base radial escalares $\gamma(r)$, onde $r = \|x - y\|_2$.

Tabela 2.1 – Soluções fundamentais para alguns operadores diferenciais.

Operador diferencial	$\gamma(r)$ em \mathbb{R}^2	$\gamma(r)$ em \mathbb{R}^3
∇^2	$-\frac{1}{2\pi} \log r$	$\frac{1}{4\pi r}$
$(\nabla^2)^2$	$-\frac{1}{8\pi} r^2 \log r$	$\frac{r}{8\pi}$
$\nabla - \lambda^2$	$\frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r)$	$\frac{1}{4\pi r} e^{-\lambda r}$
$\nabla + \lambda^2$	$-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\lambda r)$	$\frac{1}{4\pi r} e^{-i\lambda r}$

Na Tabela 2.1, K_0 representa a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero e H_0 , a função de Hankel de segunda espécie de ordem zero.

O MSF pode ser implementado de três formas diferentes: implementação estática, dinâmica ou mista. Na implementação estática, a localização dos pontos singulares é escolhida *a priori* segundo algum critério. Estudos revelam que, para problemas com domínio e soluções suaves, a geometria do contorno fictício tem pouca influência nos resultados, contanto que este fique suficientemente distante do contorno do corpo. Porém, quanto maior a distância entre o contorno fictício e o do corpo, pior será o condicionamento do sistema resultante. Em consequência, torna-se conveniente distribuir os pontos singulares uniformemente ao longo de um círculo, para o caso bidimensional, e ao longo da superfície de uma esfera, no caso tridimensional, em problemas de domínio interior.

Uma vez determinado o contorno fictício, podem-se obter os coeficientes $\{\alpha_k\}_1^n$ da equação 2.9 pelo método de mínimos quadrados ou pelo método de colocação. No primeiro método, é escolhido um número de pontos de colocação maior que o de pontos singulares. No caso do método de colocação, os números de pontos de colocação e de pontos singulares são iguais, obtendo-se a partir da equação 2.9 um sistema linear assimétrico de equações

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k g(x_j, y_k) = f^\Gamma(x_j), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.11)$$

Já na implementação dinâmica, tanto os coeficientes $\{\alpha_k\}_1^n$ quanto as localizações dos pontos singulares são desconhecidos e devem ser determinados juntamente com a solução do problema. Este método foi proposto primeiramente por Mathon e Johnson (1977) e depois amplamente estudado por Fairweather e Karageorghis (1998). Nessa técnica, uma dada quantidade de pontos de colocação m é adotada e emprega-se uma otimização com mínimos quadrados não-linear, o que gera um grande custo computacional. No caso de problemas 3D, esse método pode se tornar ineficiente se o espaço de interpolação não for bem escolhido.

Por fim, a implementação mista combina os dois modos anteriores a fim de se buscar uma maior eficiência e um menor custo computacional. A fim de se reduzir a quantidade de variáveis desconhecidas, fixa-se uma posição inicial das singularidades ao longo de um círculo fictício no caso 2D, e ao longo da superfície de uma esfera no caso 3D. Desse modo, a aproximação dinâmica é aplicada para se determinar o raio do contorno fictício, simplificando a solução do problema.

2.2 MSF NA AERODINÂMICA

No contexto da aerodinâmica, o emprego do MSF visa obter a solução de um escoamento potencial em torno de corpos isolados, tanto sob um escoamento uniforme incidente, como sob um escoamento singular, ou seja, um escoamento incidente representado por singularidades. No presente trabalho, o problema a ser resolvido é o escoamento potencial incompressível, uniforme ou singular, em regime permanente e bidimensional em torno de corpos isolados. Todos os cálculos e equacionamentos foram realizados com variáveis complexas pela facilidade de implementação. No caso de escoamento em torno de corpos, o domínio de interesse compreende toda região externa ao corpo. Como as singularidades do método devem ser distribuídas fora do domínio de interesse, elas, então, devem ser posicionadas no interior do corpo. A Figura 2.4 exemplifica a distribuição de pontos de colocação e de pontos singulares no caso em questão.

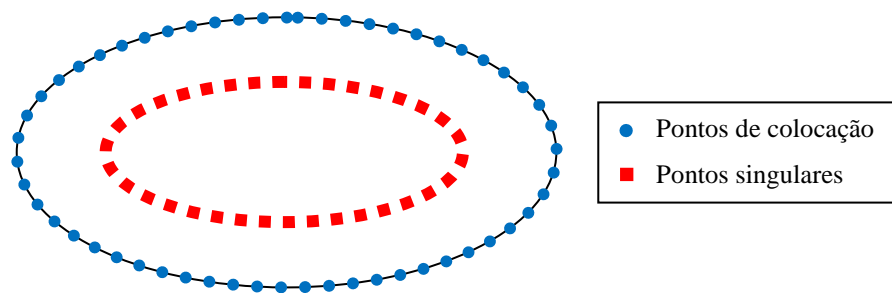


Figura 2.4 – Localização dos pontos de colocação e dos pontos singulares.

O escoamento potencial pode ser representado pela equação de Laplace do potencial de velocidades e pontos fontes como as singularidades, para o caso do problema de contorno de Neumann,

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.12)$$

a qual deve satisfazer a condição de contorno de velocidade normal nula

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ em } \Gamma. \quad (2.13)$$

A solução fundamental desse problema é dada pelo potencial de uma fonte

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (2.14)$$

Outra representação do escoamento potencial é dada pela equação de Laplace da função corrente e vórtices pontuais como as singularidades, para o caso do problema de contorno de Dirichlet,

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (2.15)$$

cuja condição de contorno é dada por um valor constante da função corrente menos o valor da função corrente induzida pelo escoamento incidente (*onset flow*), ambos no contorno

$$\psi = \psi_0 - \psi_\infty \text{ em } \Gamma, \quad (2.16)$$

visto que o contorno do corpo é parte de uma linha de corrente.

A solução fundamental do laplaciano de ψ é a função corrente de um vórtice

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (2.17)$$

A variável z representa a localização dos pontos de colocação em coordenadas complexas e r é a distância entre o ponto de colocação e o ponto singular ($r = \|z_c - z_s\|_2$).

Sendo assim, o sistema linear discretizado em 2.11, para o caso do problema de Dirichlet, impondo a condição de contorno de 2.16, fica

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \psi(z_{c,i}, z_{s,j}) + \psi_{\infty i} = \psi_0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.18)$$

ou ainda

$$\sum_{j=1}^n -\frac{\gamma_j}{2\pi} \ln \left(\|z_{c,i} - z_{s,j}\|_2 \right) + \psi_\infty = \psi_0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.19)$$

onde γ_j é a intensidade do vórtice localizado em $z_{s,j}$ a ser obtida.

Toda a formulação matemática e numérica para o desenvolvimento das rotinas de cálculo foi realizada utilizando variáveis complexas, como será descrito a seguir.

2.2.1 MSF com variáveis complexas

Nessa seção será mostrada a representação do escoamento potencial e da velocidade, entre outras grandezas, em função de variáveis complexas. Além disso, será desenvolvida a formulação do MSF no contexto da aerodinâmica no plano complexo.

O potencial de velocidades $\phi = \phi(x,y)$ e a função corrente $\psi = \psi(x,y)$ estão relacionados pelas condições de Cauchy-Riemann da seguinte forma

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2.20a)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.20b)$$

Além disso, as funções ϕ e ψ satisfazem a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (2.21)$$

Os componentes da velocidade têm um comportamento semelhante

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ (condição de continuidade),} \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ (condição de irrotacionalidade)} \quad (2.22b)$$

e

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0. \quad (2.23)$$

Pode-se observar que as relações entre o potencial de velocidades e a função corrente e entre as componentes da velocidade são as mesmas entre a parte real e imaginária de uma função analítica. Em consequência, torna-se possível combinar as funções ϕ e ψ em uma função analítica de variável complexa. Essa função analítica é chamada de potencial complexo, $F(z)$, e é dada por

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (2.24)$$

O plano xy , Z , então, se torna o plano da variável complexa z , ζ . Derivando a equação 2.24 com relação a z , tem-se

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = u(x, y) - iv(x, y). \quad (2.25)$$

O lado direito da equação 2.25 corresponde à velocidade complexa conjugada de $u+iv$, o qual representa o vetor velocidade. A velocidade complexa conjugada é normalmente denotada por $W(z)$. Desse modo, tem-se

$$W(z) = u(x, y) - iv(x, y) = \frac{dF}{dz}. \quad (2.26)$$

Tendo em vista as considerações anteriores, torna-se fácil representar algumas configurações de escoamento no plano ζ e determinar os potenciais complexos e as velocidades complexas conjugadas. Na Tabela 2.2 são listadas algumas configurações de escoamento, as velocidades complexas conjugadas e o potencial complexo correspondentes.

Através da superposição do potencial complexo de escoamentos elementares, podem-se representar escoamentos mais gerais. No presente trabalho, o MSF baseado em vórtices foi aplicado a três configurações de escoamento principais: escoamento uniforme, superposição de um escoamento uniforme e um dipolo na origem e escoamento singular (fontes, vórtices e superposição de fontes e vórtices). As configurações estudadas no presente trabalho foram

- **Escoamento uniforme**

O potencial complexo correspondente à superposição do escoamento uniforme e dos vórtices do método no interior do corpo é dado por

Tabela 2.2 – Exemplos de escoamentos e suas velocidades e potenciais complexos (tabela adaptada de Lakshminarayana, 1996).

Escoamento	$W(z)$	$F(z)$
Sem escoamento	0	A (constante complexa)
Escoamento uniforme	A	Az (A é complexo)
Fonte na origem Intensidade $q=2\pi A$	A/z	$A \log z$ (A é real e maior que 0)
Vórtice na origem Circulação $\Gamma=-2\pi b$	ib/z	$ib \log z$ ($b > 0$)
Dipolo na origem Eixo na direção x Intensidade $\mu=2\pi A$	A/z^2	$-A/z$ (A é real e maior que 0)

$$F(z) = Uz - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}), \quad (2.27)$$

onde z_s é a localização das singularidades do MSF e $U=U e^{-i\alpha}$ (α é o ângulo de ataque). A Figura 2.5 ilustra um esquema simples dessa configuração do escoamento. Como no método proposto escolheu-se trabalhar com a função corrente, tem-se

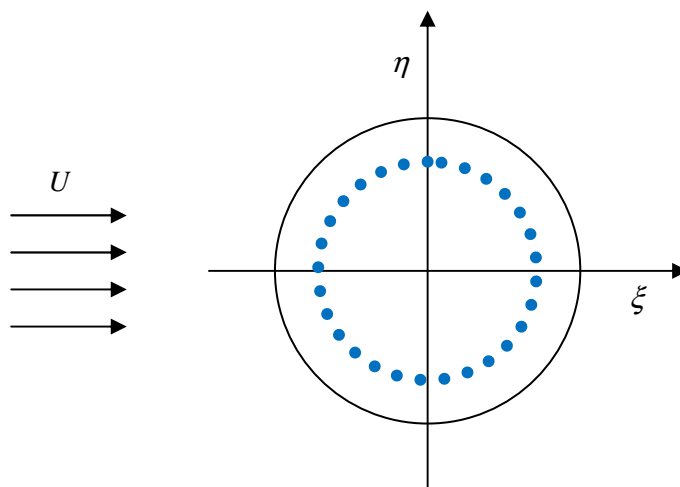


Figura 2.5 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente e vórtices no interior do corpo.

$$\psi(z) = \text{Im}[F(z)] = Uy - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(r_j), \quad (2.28)$$

onde $r = \|z - z_s\|_2$.

- **Escoamento uniforme e dipolo na origem**

Nesse caso, o potencial complexo, com as singularidades do método, é dado por

$$F(z) = Uz + \frac{r_0}{z} - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}), \quad (2.29)$$

onde r_0 é o raio do cilindro circular. A Figura 2.6 mostra a representação dessa configuração do escoamento. A função corrente, então, é obtida por

$$\psi(z) = \text{Im}[F(z)] = Uy - r_0 \frac{\text{sen } \theta}{r'} - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(r_j), \quad (2.30)$$

onde $r' = \|z\|_2$.

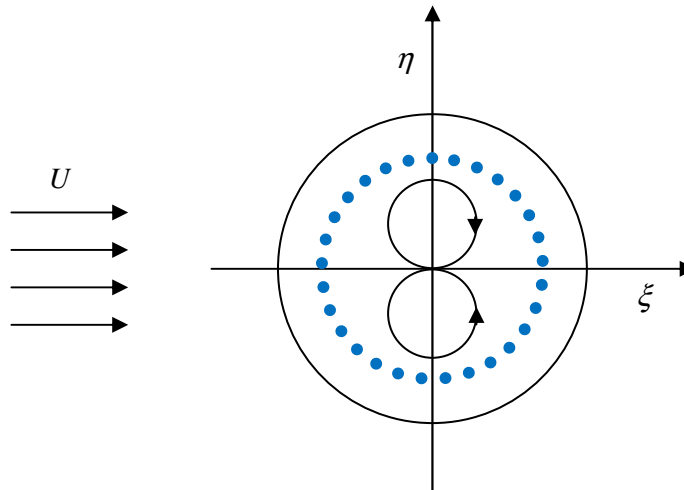


Figura 2.6 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente, vórtices no interior do corpo e um dipolo na origem.

- **Escoamento singular**

Para o escoamento singular incidente representado por uma fonte e um sumidouro

(Figura 2.7), ambos, respectivamente, a uma distância de $-R$ e R da origem, o potencial complexo é representado por

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log\left(\frac{R+z}{R-z}\right) - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}). \quad (2.31)$$

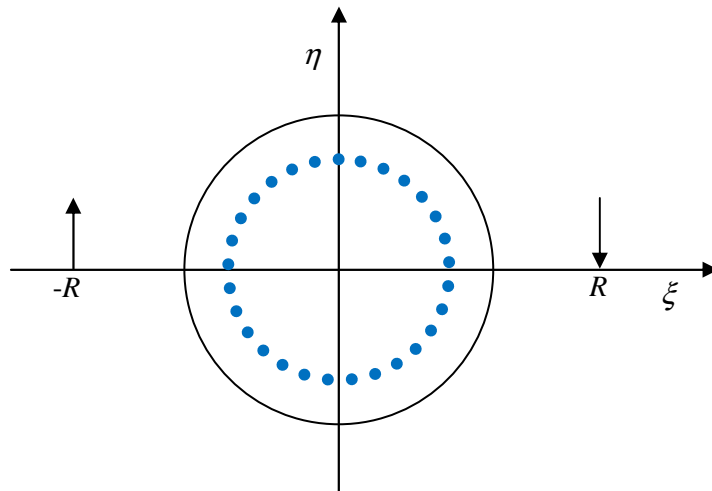


Figura 2.7 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes e vórtices no interior do corpo.

Podem-se adicionar reflexões do escoamento incidente no interior do corpo, quando possível, a fim de se suavizar a perturbação causada pelas singularidades do método. Assim, adicionando-se as reflexões da fonte e do sumidouro no interior do corpo (Figura 2.8), o potencial complexo fica

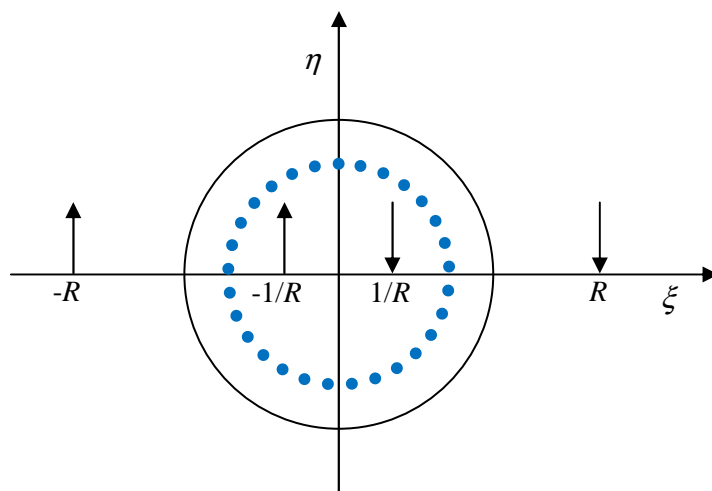


Figura 2.8 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes, suas reflexões e vórtices no interior do corpo.

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log \left[\left(\frac{R+z}{R-z} \right) \left(\frac{z+1/R}{z-1/R} \right) \right] - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}). \quad (2.32)$$

Representando, agora, o escoamento incidente por um vórtice anti-horário a $-R$ do centro e um vórtice horário a R do centro (Figura 2.9), tem-se para o potencial complexo

$$F(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left[\left(\frac{R-z}{R+z} \right) \right] - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}). \quad (2.33)$$

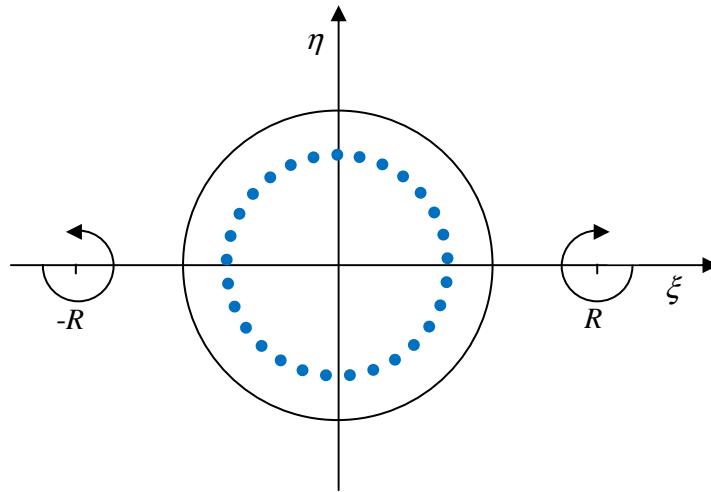


Figura 2.9 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e vórtices (do método) no interior do corpo.

Para o caso da adição das reflexões dos vórtices no interior do corpo (Figura 2.10), tem-se

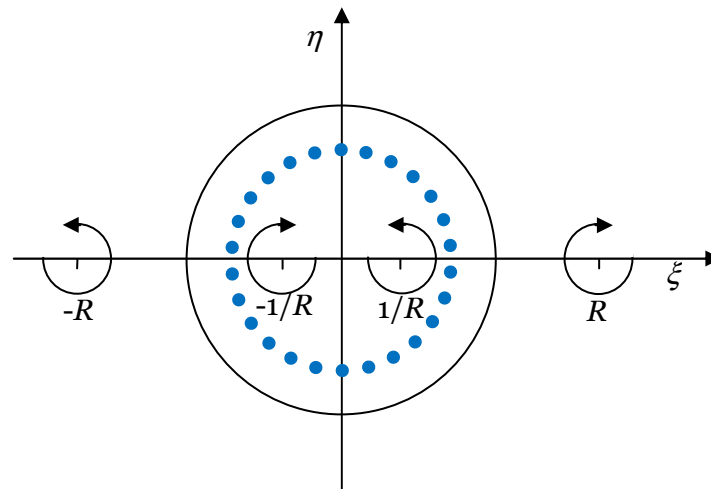


Figura 2.10 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.

$$F(z) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left[\left(\frac{R-z}{R+z} \right) \left(\frac{z+1/R}{z-1/R} \right) \right] - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}). \quad (2.34)$$

Por fim, é possível se representar o escoamento incidente singular pela combinação de uma fonte e um vórtice anti-horário a montante do corpo e um sumidouro e um vórtice horário a jusante do mesmo (Figura 2.11). Desse modo, o potencial complexo dessa configuração de escoamento fica

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log \left[\left(\frac{R+z}{R-z} \right) \left(\frac{z+1/R}{z-1/R} \right) \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left[\left(\frac{R-z}{R+z} \right) \left(\frac{z+1/R}{z-1/R} \right) \right] - \sum_{j=1}^n i \frac{\gamma_j}{2\pi} \log(z - z_{s,j}). \quad (2.35)$$

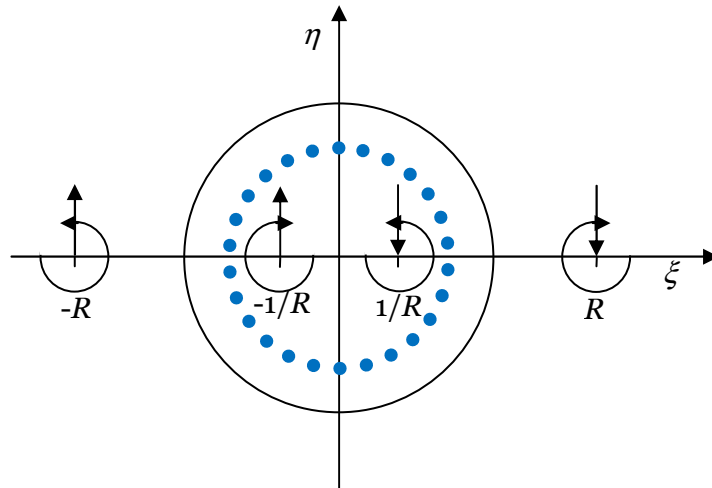


Figura 2.11 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e fontes, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.

Capítulo 3

EMPREGO DA TRANSFORMAÇÃO CONFORME DIRETA E INVERSA

Ao longo dos testes realizados nesse trabalho, pode-se notar uma forte influência da variação de curvatura ao longo do contorno do corpo na precisão dos resultados obtidos pelo MSF baseado em vórtices. Quando o método foi aplicado ao caso de um cilindro de seção circular, esse mostrou uma ótima convergência e resultados que chegavam à precisão da máquina, dependendo do número de pontos empregados e o quão distante estava o contorno fictício do contorno do corpo. Porém, quando o método desenvolvido foi aplicado a um cilindro de seção elíptica, os resultados somente convergiam enquanto o contorno fictício não estivesse além do centro de curvatura dos bordos. Além disso, existe uma grande dificuldade de se distribuir os pontos singulares no interior do corpo quando este é muito fino, já que as singularidades ficariam muito próximas, causando interferência uma nas outras e, em consequência, piorando os resultados. Quando o perfil de aerofólio possui bordo de fuga agudo ou afilado, também há dificuldade na distribuição dos vórtices dentro do corpo de tal modo a captar a influência da singularidade do bordo de fuga.

A fim de se facilitar a localização das singularidades e amenizar a influência da variação de curvatura, foi empregada uma transformação conforme inversa e uma minimização da dispersão de curvatura ao longo do contorno do corpo. Desse modo, foi possível obter um quase-círculo o mais suave possível no plano transformado, permitindo a aplicação da mesma

metodologia utilizada no caso do cilindro circular. Para corpos isolados com escoamento uniforme incidente, foi aplicada a transformação de Joukowski. A transformação de Weing direta para corpos em grade será descrita, porém ela não será aplicada nos cálculos. Ao invés disso, trabalhou-se com um cilindro circular sujeito a um escoamento incidente singular, ou seja, um escoamento representado por singularidades (fonte e sumidouro, vórtices e a combinação de ambos), no plano complexo, tal como na transformação de Weing. Desse modo, pode-se analisar o comportamento do método proposto para uma futura aplicação em corpos em grade.

3.1 TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKI INVERSA

Para o caso de perfis de aerofólios isolados e com bordo de fuga afilado, foi obtida e aplicada a transformação de Joukowski inversa. A transformação direta é dada por

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}, \quad (3.1)$$

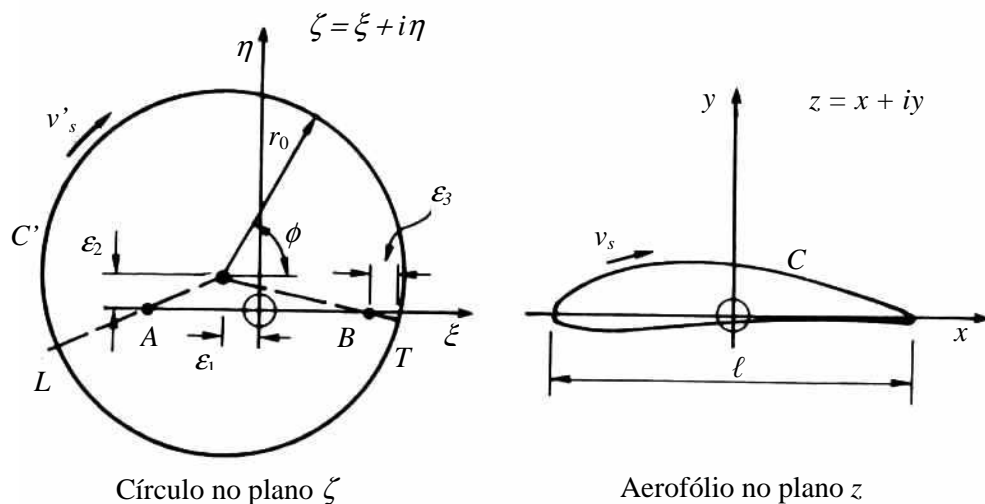


Figura 3.1 – Transformação de Joukowski (figura adaptada de Lewis, 1991).

onde z é a localização de um ponto do contorno do perfil no plano físico, ζ é o ponto correspondente no plano transformado e c é um parâmetro da transformação. Multiplicando a equação 3.1 por ζ , tem-se

$$z\zeta = \zeta^2 + c^2. \quad (3.2)$$

Reescrevendo a equação 3.2, obtém uma equação do segundo grau

$$\zeta^2 - z\zeta + c^2 = 0, \quad (3.3)$$

cujas raízes são dadas por

$$\zeta(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2}. \quad (3.4)$$

O valor de uma das raízes está dentro do círculo de raio c e o valor da outra raiz está fora desse mesmo círculo, ou seja

$$|\zeta(z)| \leq c \quad (3.5a)$$

ou

$$|\zeta(z)| \geq c \quad (3.5b)$$

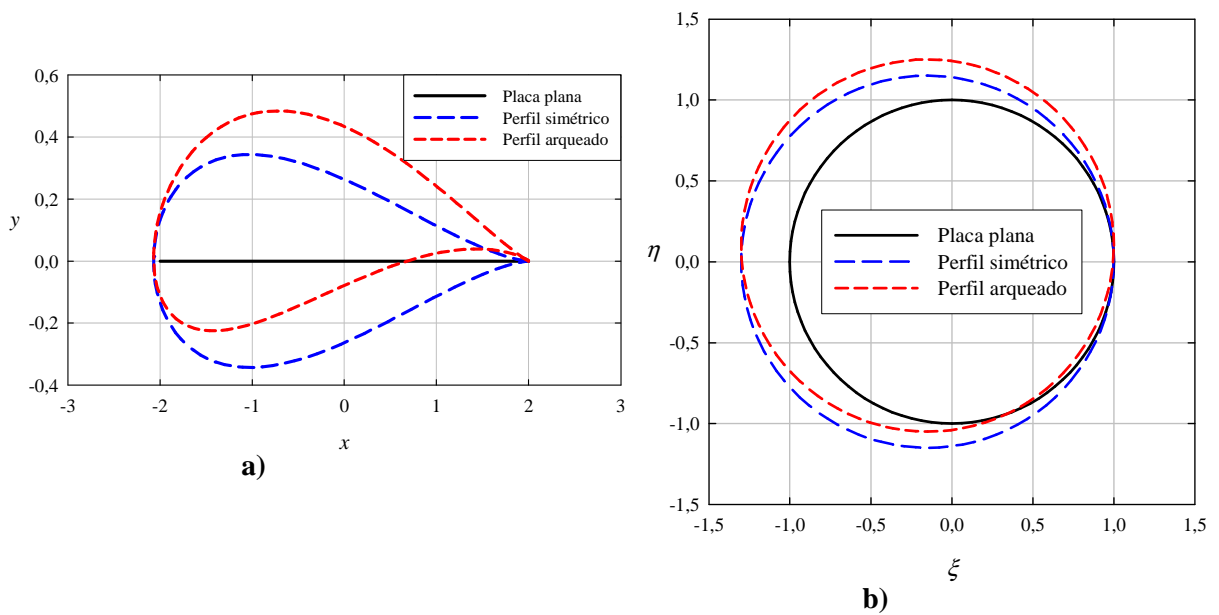


Figura 3.2 – Disposição dos corpos a serem estudado com relação à placa plana. **a)** Plano físico. **b)** Plano transformado.

Considere um círculo de raio c descrito por $\zeta = ce^{i\theta}$. Pontos sobre o contorno desse círculo correspondem a pontos sobre o eixo x (plano z) ao longo do comprimento $-2c \leq x \leq 2c$, que é o caso da placa plana (Figura 3.2). Quando o perfil de aerofólio no plano físico é simétrico, a circunferência correspondente no plano transformado é sempre externa à circunferência da placa plana. Porém, quando o perfil de aerofólio no plano físico é arqueado, pode acontecer da circunferência correspondente no plano transformado cruzar uma parte do corpo transformado da placa plana. E, como cada ponto no plano físico corresponde a dois pontos no plano transformado, um externo à circunferência da placa plana e outro interno a ela, foi desenvolvida uma lógica para a escolha da raiz correta da transformação de Joukowski inversa, como será explicado no Capítulo 4.

3.2 TRANSFORMAÇÃO DE WEINIG

Para uma futura aplicação do método proposto em perfis de aerofólio em grade, foi escolhida a transformação de Weinig. No presente trabalho não é desenvolvida uma transformação inversa de Weinig, os cálculos são feitos diretamente no plano transformado, com o escoamento incidente representado por singularidades sobre um cilindro circular. O objetivo é analisar o comportamento do método proposto nessa configuração de escoamento. Como informação complementar, a transformação de Weinig direta é descrita a seguir.

Considere uma grade linear de placas planas infinitas no plano físico z e um cilindro no plano transformado ζ . Um escoamento uniforme passando por um cilindro de raio unitário no plano ζ pode ser representado colocando-se uma fonte e um sumidouro a montante e a jusante do corpo, respectivamente, a uma distância de R de ambos os lados da origem. Para se fazer o contorno do cilindro uma linha de corrente, a fonte e o sumidouro também são colocados dentro do círculo a uma distância de $1/R$ de ambos os lados da origem, onde R é um parâmetro da transformação. O potencial complexo para a combinação de singularidades mostra que ζ é dado por

$$F(\zeta) = \frac{U_\infty t}{2\pi} \left(\ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} + \ln \frac{\zeta + 1/R}{\zeta - 1/R} \right), \quad (3.6)$$

onde $U_\infty t$ representa a intensidade da fonte e t é um comprimento, ainda desconhecido.

Para um escoamento uniforme no plano z , o potencial complexo é $U_\infty z$. Assim, a função de mapeamento que transforma uma grade de placas planas com incidência nula em um círculo no plano ζ é $F(\zeta)/U_\infty$ e é dada pela equação (3.6). Os pontos $\zeta = \pm R$ são localizados a $\pm \infty$ no plano z . Como essa transformação é conforme, os valores numéricos do potencial de velocidades e da função corrente são conservados e, portanto, as características das singularidades também. Próximo à singularidade externa, obtém-se a intensidade $q = U_\infty t$. Isso corresponde ao escoamento através de uma seção de altura t (passo entre as pás) no eixo x , o qual representa o volume de escoamento na passagem limitada pelos planos $A'B'$ e $D'E'$. Passando pela segunda aumenta a intensidade por q , resultando numa segunda passagem limitada por $D'E'$ e $F'G'$. É conveniente imaginar o processo com uma superfície plana infinita (Figura 3.3). Toda vez que ζ cruza DE , ele passa de uma folha para a que a sucede, dependendo se ζ é crescente ou decrescente. Essas folhas se estendem de 0 a 2π , 2π a 4π e assim por diante. Esse conceito se aplica não somente a fontes como também a vórtices localizados fora do círculo.

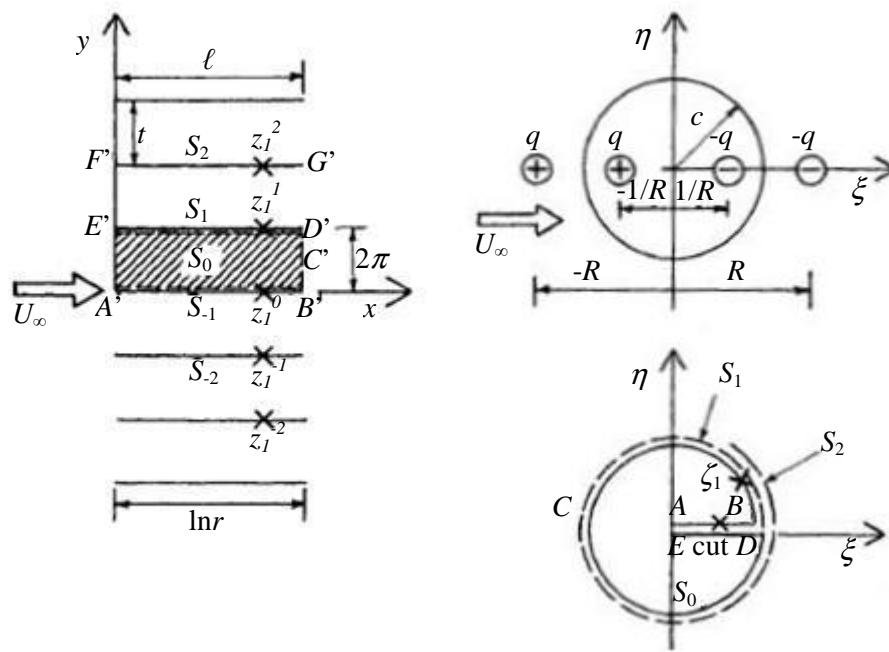


Figura 3.3 – Transformação conforme de uma grade de placas planas (figura adaptada de Lakshminarayana, 1996).

Se a grade for escalonada, ocorre um salto não só em ψ , mas nos valores de ϕ também a partir do bordo de ataque de uma pá até o bordo de ataque da pá seguinte. Denotando a pá de referência por 0, e a pá adjacente por 1 (sentido positivo de y), a diferença na função corrente e no potencial de velocidades entre as duas pás é dada por (Figura 3.4a)

$$\begin{aligned} \psi_1 - \psi_0 &= tU_\infty \cos \beta = q, \\ \phi_1 - \phi_0 &= tU_\infty \sin \beta = \gamma. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esse escoamento pode ser simulado adicionando-se um vórtice de intensidade γ à fonte de intensidade q no exterior e no interior do círculo, como mostra a Figura 3.4a. Assim, a distribuição resultante do escoamento no plano ζ terá uma singularidade complexa de $q - i\gamma (= tU_\infty e^{-i\lambda})$, $q + i\gamma$, $-(q + i\gamma)$, $-(q - i\gamma)$ localizados em $-R$, $-1/R$, $1/R$, R , respectivamente, a partir do centro do círculo (Figura 3.4a). Isso fará do círculo uma linha de corrente. A transformação de uma grade infinita de placas planas com um ângulo de montagem de β e sem ângulo de incidência em um cilindro, usando os conceitos ditos acima para o caso de ângulo de montagem nulo, é, portanto dado por

$$z = \frac{t}{2\pi} \left(e^{-i\beta} \ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{i\beta} \ln \frac{\zeta + 1/R}{\zeta - 1/R} \right). \tag{3.8}$$

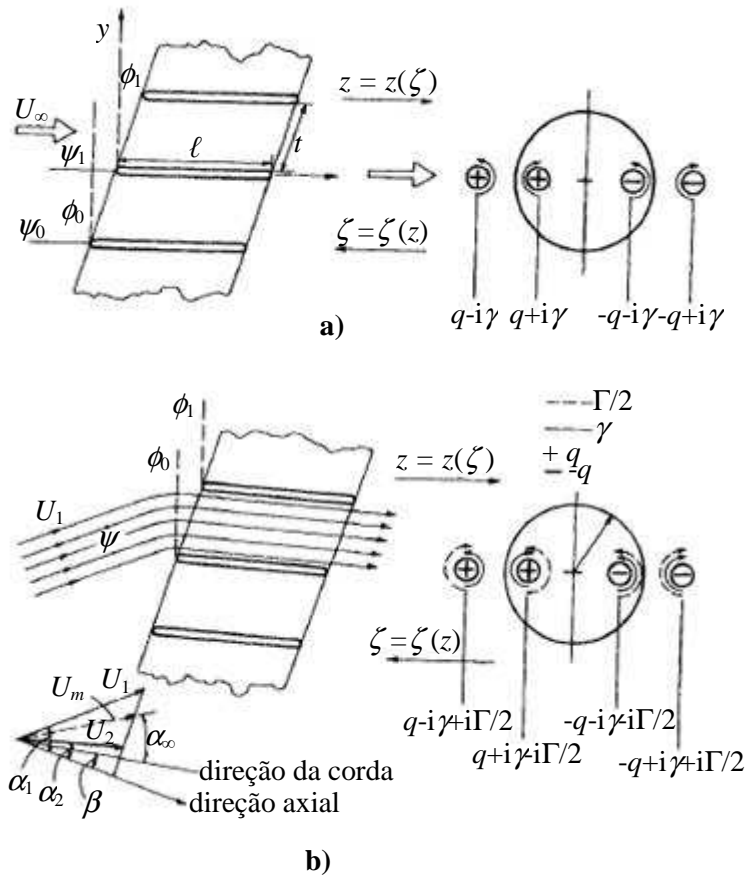


Figura 3.4 – Escoamento através de uma grade escalonada. **a)** Grade escalonada com incidência nula. **b)** Grade escalonada com incidência. (figura adaptada de Lakshminarayana, 1996).

O parâmetro de transformação R pode ser determinado igualando o comprimento conhecido da corda da grade no plano z ao valor correspondente no plano ζ . Os bordos de ataque e de fuga de uma grade de placas planas são singulares e $dz/d\zeta = 0$ nesses pontos. Com $\zeta = e^{i\theta}$ e avaliando $dz/d\zeta$ a partir da equação 3.8 e igualando a 0, as seguintes expressões são obtidas para as coordenadas dos bordos de ataque (l) e de fuga (t)

$$\theta_l = \theta_t + \pi, \quad (3.9a)$$

$$z_t - z_l = x_t - x_l = \ell, \quad (3.9b)$$

$$\tan \theta_l = \frac{1 - 1/R^2}{1 + 1/R^2} \tan \beta. \quad (3.9c)$$

Desse modo, o conjunto de equações 3.9 fornece as seguintes correlações entre a solidez (ℓ/t), o ângulo de montagem β e o parâmetro de transformação R

$$\frac{\ell}{t} = \frac{2}{\pi} \left(\cos \beta \ln \frac{\sqrt{R^4 + 2R^2 \cos 2\beta + 1} + 2R \cos \beta}{R^2 - 1} + \right. \\ \left. \sin \beta \tan^{-1} \frac{2R \sin \beta}{\sqrt{R^4 + 2R^2 \cos 2\beta + 1}} \right). \quad (3.10)$$

Aqui, temos de lidar com o caso de uma grade de placas planas sem incidência. O efeito da incidência é a geração de uma rede de circulação Γ em torno da pá da grade, sendo o seu valor determinado pela imposição da condição de Kutta. Os efeitos adicionais devidos à incidência podem ser simulados colocando-se uma fonte complexa (vórtices) de intensidade $i\Gamma/2$ em $x = R$ e $-R$ e $-i\Gamma/2$ em $x = 1/R$ e $-1/R$. O primeiro par de vórtices gera uma circulação Γ na região externa ao círculo e o segundo par faz com que o contorno do círculo seja uma linha de corrente. Essa combinação de singularidades satisfaz a equação governante assim como a condição de contorno. O potencial complexo devido à fonte, ao sumidouro e aos vórtices singulares combinados no plano z , mostrado na Figura 3.4b, é dado por

$$F(\zeta) = \frac{U_m t}{2\pi} \left[e^{-i(\beta + \alpha_\infty)} \ln \left(\frac{\zeta + R}{\zeta - R} \right) + e^{i(\beta + \alpha_\infty)} \ln \left(\frac{\zeta + 1/R}{\zeta - 1/R} \right) \right] + \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln \left(\frac{\zeta^2 - R^2}{\zeta^2 - 1/R^2} \right). \quad (3.11)$$

As modificações consideradas acima para se incluir o efeito da incidência não modificam a equação da transformação de grade dada pela equação 3.8. Na equação 3.11, α_∞ é a incidência média e é desconhecida para a grade. O problema é então reduzido a um escoamento em torno de um cilindro, como mostra a Figura 3.4b. A solução é expressa como um potencial complexo. Vamos agora avaliar algumas propriedades da grade, como circulação e velocidade local. No bordo de fuga

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_t} = \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_t} \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta=\zeta_t}. \quad (3.12)$$

No plano físico, a condição de Kutta-Joukowski é satisfeita se $(dF/dz)_{z=z_t} = 0$. Entretanto, $(d\zeta/dz)_{\zeta=\zeta_t} = \infty$, portanto $(dF/d\zeta)_{\zeta=\zeta_t} = 0$. Assim, tomando a derivada da equação 3.11 e avaliando essa mesma equação em $\zeta = \zeta_t$, o valor da circulação pode ser provado como (Lakshminarayana, 1996)

$$\Gamma = \frac{4U_m t (1/R) \text{sen } \alpha_\infty}{\sqrt{1 + (2/R^2) \cos 2\beta + (1/R^4)}}. \quad (3.13)$$

A velocidade local pode ser determinada pela equação

$$\frac{dF}{dz} = U_x - iU_y = \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}. \quad (3.14)$$

O valor de $dF/d\zeta$ pode ser obtido da equação 3.11 e a derivada da função de mapeamento pode ser obtida da equação 3.8. Se houver apenas o interesse pela velocidade na superfície das pás, então somente a parte real da equação 3.14 deve ser considerada.

Capítulo 4

IMPLEMENTAÇÃO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA

No presente trabalho, escolheu-se utilizar a implementação estática do MSF, ou seja, a localização dos pontos singulares (contorno fictício) é determinada *a priori*. O número de pontos de colocação (pontos sobre o contorno do corpo) e de pontos singulares utilizados nos cálculos foram os mesmos. Todas as rotinas computacionais foram desenvolvidas na linguagem FORTRAN.

Os parâmetros de entrada da rotina de cálculo são

- Dados a respeito do contorno do corpo no plano físico: número total de pontos mn (par), número do bordo de ataque nle e as coordenadas do número total de pontos sobre o contorno do corpo (x, y) ;
- Parâmetro de distância δ entre o contorno do corpo e o contorno fictício, cuja definição será dada no Capítulo 5 conforme os exemplos forem apresentados;
- Ângulo de ataque α .

Fornecidos esses dados, o número de pontos de colocação e de pontos singulares m é definido como a metade de mn . A metade restante é utilizada como pontos de testes, onde o valor da função corrente é determinado a fim de se obter o erro médio quadrático. Uma vez definidos os parâmetros iniciais, uma sub-rotina é chamada para realizar a transformação de Joukowski inversa, quando necessário (o que também será explicado no Capítulo 5), e a minimização da dispersão de curvatura do contorno do corpo no plano transformado ζ , no

caso da velocidade incidente uniforme. A sub-rotina DUVMIF, a qual faz parte da biblioteca IMSL (1999), foi empregada na minimização de uma variável. Essa sub-rotina utiliza o método de interpolação quadrática. A função a ser minimizada é a dispersão de curvatura e a variável de projeto é o parâmetro c da transformação de Joukowski. Essa sub-rotina utiliza o método de interpolação quadrática num certo intervalo, o qual deve conter solução. Já no caso de escoamento incidente singular, a rotina de cálculo foi desenvolvida de tal forma a possibilitar uma futura aplicação da transformação de Weinig para grades lineares de máquinas de fluxo.

As principais sub-rotinas desenvolvidas para a realização de todos os cálculos e a sequência em que são utilizadas são descritas a seguir.

- **Programa principal *main.for*:** nessa rotina são definidos todos os parâmetros iniciais e são feitas as chamadas das sub-rotinas para a realização dos cálculos. Primeiramente, o ângulo de ataque α e o fator de distância δ são definidos pelo usuário. Em seguida, um arquivo de entrada de dados, o qual também é fornecido pelo usuário, a respeito do perfil de aerofólio no plano físico é lido a fim de se obter m , nle e as coordenadas dos pontos do contorno $z(x,y)$ no plano físico. O comprimento da corda do perfil l é calculado. A próxima etapa é a chamada da sub-rotina DUVMIF, incluída na biblioteca de rotinas IMSL, para a minimização da dispersão de curvatura. Ao final de todos os cálculos, os resultados obtidos são impressos em arquivos de saída de dados - *resultados.dat* e *erros.dat*.
- **Sub-rotina DUVMIF.for:** nessa sub-rotina é realizada a minimização da dispersão de curvatura, a qual é calculada pela função *sigma.for*, a qual representa a função objetivo dessa otimização. São necessários definir nessa sub-rotina os parâmetros iniciais para a otimização, que são o tamanho do passo de avanço da otimização, os limites superior e inferior do intervalo de otimização, um valor inicial para o ótimo, o número máximo de avaliações da função objetivo e a tolerância desejada. O dado de saída é o valor ótimo do parâmetro c da transformação de Joukowski, cujos pontos do contorno do corpo obtidos no plano transformado apresentam dispersão mínima de curvatura.
- **Função *sigma.for*:** essa função calcula o desvio padrão da curvatura dos pontos do contorno do corpo no plano transformado. Primeiramente, é realizada a transformação de Joukowski inversa. As sub-rotinas *spline.for* e *spval.for* (Ferziger, 1981), em conjunto, calculam a primeira e segunda derivadas no contorno e, por meio de

parametrização, aproximam o contorno do corpo por *spline* cúbica e determinam a curvatura em cada ponto.

- **Sub-rotina *jouk_inverse.for*:** essa sub-rotina realiza a transformação de Joukowski inversa. Com o valor obtido de c , calculam-se os pontos no plano transformado que correspondem ao perfil de aerofólio no plano físico, como explicado no Capítulo 3.
- **Sub-rotina *vel_complex.for*:** definido o corpo no plano transformado, os pontos de colocação, os de teste e os pontos singulares são obtidos e essa sub-rotina é chamada. Aqui são montados e resolvidos os sistemas matriciais lineares a fim de se obter a distribuição das intensidades de vórtice, o valor da função corrente em cada ponto de teste, o valor da velocidade complexa conjugada. Além disso, são determinados o valor do erro médio quadrático, erro máximo e erro local em cada ponto de teste.

Um fluxograma com a sequência em que as sub-rotinas são chamadas, para o caso de escoamento incidente uniforme, é ilustrado pela Figura 4.1.

Do ponto de vista do cálculo numérico, o equacionamento desenvolvido no Capítulo 2 e as variáveis devem ser discretizados. Desse modo, reescrevendo a equação 2.18, para se resolver o problema de escoamento em torno de um corpo, obtém-se, no contexto da aerodinâmica, o sistema de equações algébricas lineares para o método proposto

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \psi_{ij} + \psi_{\infty i} = \psi_0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.1)$$

onde γ é a distribuição das intensidades de vórtice que será determinada a *posteriori*, ψ_{ij} é a função corrente induzida pela singularidade j do método no ponto de controle i , ψ_{∞} é a função corrente induzida pelo escoamento incidente, seja uniforme ou singular, no ponto de colocação i e ψ_0 é o valor constante da função corrente no contorno do corpo.

No caso da velocidade incidente uniforme, a função corrente $\psi_{\infty i}$ foi decomposta em duas partes baseadas em α , ficando

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \psi_{ij} = x_i \sin(\alpha) - y_i \cos(\alpha) + \psi_0, \quad 1 \leq i \leq m \quad (4.2)$$

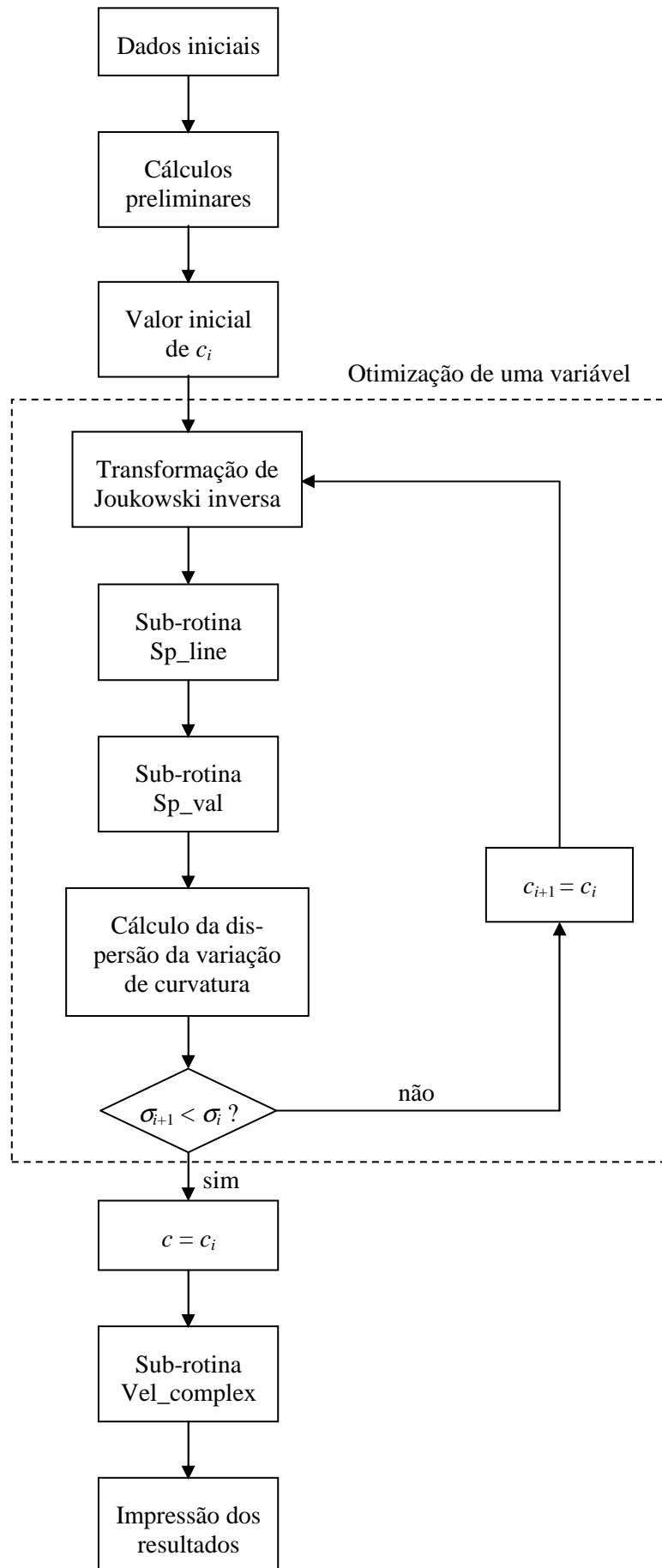


Figura 4.1 – Sequência de chamada das sub-rotinas para o caso de escoamento uniforme.

A solução, então, é calculada pela superposição dos três sistemas lineares oriundos da equação 4.2

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{0^\circ} \psi_{ij} = -y_i \text{ para } U_\infty = -1, \alpha = 0^\circ \text{ e } \psi_0 = 0, \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{90^\circ} \psi_{ij} = x_i \text{ para } U_\infty = -1, \alpha = 90^\circ \text{ e } \psi_0 = 0, \text{ e} \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j^{\psi_0} \psi_{ij} = 1 \text{ para } U_\infty = 0, \text{ e } \psi_0 = 1, \quad (4.5)$$

onde U_∞ representa a velocidade incidente uniforme. A fatoração LU foi aplicada por meio da utilização da sub-rotina DLFCRG, da biblioteca IMSL, a qual também calcula o número de condição da matriz. O sistema fatorizado é resolvido pela sub-rotina DLFSRG. Tendo os resultados dos três sistemas lineares, a condição de Kutta é imposta, fazendo com que a velocidade tangencial resultante seja nula no bordo de fuga e, assim, determinando o valor constante da função corrente no contorno

$$v_{t1}^\infty + \cos(\alpha)v_{tj}^{0^\circ} + \sin(\alpha)v_{tj}^{90^\circ} + \psi_0 v_{tj}^{\psi_0} = 0, \quad (4.6)$$

$$\psi_0 = -\text{Im} \left[\frac{v_{t1}^\infty + \cos(\alpha)v_{t1}^{0^\circ} + \sin(\alpha)v_{t1}^{90^\circ}}{v_{t1}^{\psi_0}} \right], \quad (4.7)$$

onde

$$v_{t1}^\infty = e^{-i\alpha}, \quad (4.8)$$

$$v_{t1}^{0^\circ} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^{0^\circ}}{z_c(1) - z_s(j)}, \quad (4.9)$$

$$v_{t1}^{90^\circ} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^{90^\circ}}{z_c(1) - z_s(j)}, \quad (4.10)$$

$$v_{t1}^{\psi_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^{\psi_0}}{z_c(1) - z_s(j)}. \quad (4.11)$$

Obtido o valor de ψ_0 , é possível calcular a distribuição total das intensidades de vórtice γ_j por

$$\gamma_j = \cos(\alpha)\gamma_j^{0^\circ} + \text{sen}(\alpha)\gamma_j^{90^\circ} + \psi_0\gamma_j^{\psi_0}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.12)$$

As velocidades nos pontos de colocação e os valores da função corrente nos pontos de teste (equação 4.13) são calculados. A distribuição do erro local e o erro máximo são obtidos e o erro médio quadrático é determinado pela equação 4.14.

$$\psi_{t,i} = \text{Im} \left\{ e^{-i\alpha} z_t(i) + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \log [z_t(i) - z_s(j)] \gamma_j \right\}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (4.13)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\psi_{t,i} - \psi_0)^2}{m}}. \quad (4.14)$$

Já no caso do escoamento incidente singular, a equação 4.1 fica

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \psi_{ij} - \psi_{\infty,i} = \psi_0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.15)$$

onde a função corrente pode se apresentar de três formas diferentes, de acordo com o a singularidades escolhidas para se representar o escoamento incidente. Essas configurações já foram explicadas no Capítulo 2. No caso de se representar o escoamento incidente por uma fonte a montante do corpo e um sumidouro de mesma intensidade a jusante (Figura 2.7), ψ_{∞} fica

$$\psi_{\infty,i} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{R + z_c(i)}{R - z_c(i)} \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.16)$$

Adicionando-se as reflexões no interior do corpo a fim de se garantir que o contorno do mesmo faça parte de uma linha de corrente (Figura 2.8), tem-se

$$\psi_{\infty,i} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{R + z_c(i)}{R - z_c(i)} \frac{z_c(i) + 1/R}{z_c(i) - 1/R} \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.17)$$

Para a representação do escoamento incidente por meio de um vórtice anti-horário a montante do corpo e um vórtice horário de mesma intensidade a jusante (Figura 2.9), tem-se

$$\psi_{\infty s, i} = \text{Im} \left\{ \frac{i}{2\pi} \log \left[\frac{z_c(i) - R}{z_c(i) + R} \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.18)$$

Com a adição das reflexões no interior do corpo (Figura 2.10), fica

$$\psi_{\infty s, i} = \text{Im} \left\{ \frac{i}{2\pi} \log \left[\frac{z_c(i) - R}{z_c(i) + R} \frac{z_c(i) + 1/R}{z_c(i) - 1/R} \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.19)$$

Por fim, representando-se o escoamento incidente pela superposição de uma fonte e um vórtice anti-horário a montante do corpo, um sumidouro e um vórtice horário a jusante e suas reflexões no interior do corpo (Figura 2.11), tem-se

$$\begin{aligned} \psi_{\infty s, i} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{R + z_c(i)}{R - z_c(i)} \frac{z_c(i) + 1/R}{z_c(i) - 1/R} \right] + \right. \\ \left. \frac{i}{2\pi} \log \left[\frac{z_c(i) - R}{z_c(i) + R} \frac{z_c(i) + 1/R}{z_c(i) - 1/R} \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A imposição da condição de Kutta, dada pela equação 4.6, também é alterada, ficando

$$v_{t1}^{\infty s} + v_{tj}^s + \psi_0 v_{tj}^{\psi_0} = 0, \quad (4.21)$$

$$\psi_0 = -\text{Im} \left[\frac{v_{t1}^{\infty s} + v_{t1}^s}{v_{t1}^{\psi_0}} \right], \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} v_{t1}^{\infty s} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{z_c(1) + R} - \frac{1}{z_c(1) - R} + \frac{1}{z_c(1) + 1/R} - \frac{1}{z_c(1) - 1/R} \right] + \\ \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{z_c(1) - R} - \frac{1}{z_c(1) + R} + \frac{1}{z_c(1) + 1/R} - \frac{1}{z_c(1) - 1/R} \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$v_{t1}^s = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^s}{z_c(1) - z_s(j)}, \quad (4.24)$$

$$v_{t1}^{\psi_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^{\psi_0}}{z_c(1) - z_s(j)}. \quad (4.25)$$

Dessa forma, a distribuição total das intensidades de vórtice γ_j é dada por

$$\gamma_j = \gamma_j^s + \psi_0 \gamma_j^{\psi_0}, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4.26)$$

O cálculo da função corrente nos pontos de teste, para o caso do escoamento incidente representado pela superposição de singularidades, é realizado por meio da equação

$$\begin{aligned} \psi_{t,i} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{R + z_t(i)}{R - z_t(i)} \frac{z_t(i) + 1/R}{z_t(i) - 1/R} \right] + \frac{i}{2\pi} \log \left[\frac{z_t(i) - R}{z_t(i) + R} \frac{z_t(i) + 1/R}{z_t(i) - 1/R} \right] + \right. \\ \left. \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \log [z_t(i) - z_s(j)] \gamma_j \right\}, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Os erros local, máximo e o erro médio quadrático (equação 4.14) são determinados do mesmo modo do caso de escoamento incidente uniforme.

Capítulo 5

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O método proposto foi testado para diversos tipos de corpos e perfis a fim de se analisar o seu comportamento numérico e o seu desempenho. Em todos os casos analisados, foram utilizados diferentes fatores de distância δ , cuja definição é dada em cada caso estudado, para uma dada faixa de variação do número de pontos m . O MSF baseado em vórtices é aplicado em corpos submetidos a um escoamento incidente uniforme e em corpos sujeitos a um escoamento singular, ou seja, um escoamento representado por singularidades (fonte e sumidouro, vórtices, ou a combinação de ambos). O objetivo de se simular um escoamento incidente por meio da combinação de singularidades é a possibilidade de se aplicar o método proposto no caso de grades de perfis de aerofólio. No presente trabalho, o método não foi aplicado diretamente no caso de grades, mas sim em um cilindro circular no plano transformado de tal forma a possibilitar a aplicação da transformação de Weing inversa ou a utilização da transformação conforme direta num caso de problema inverso. Além disso, a partir dos resultados obtidos com a utilização de reflexões no caso de escoamento singular incidente, foi estudado um último caso, onde se adiciona um dipolo na origem das coordenadas de um cilindro circular com escoamento uniforme incidente a fim de se garantir mais uma vez que o contorno do corpo seja parte de uma linha de corrente. Com exceção do cilindro circular e da elipse (escoamento uniforme), os cálculos foram realizados no plano transformado. Todos os resultados e as discussões a respeito do comportamento do método proposto são apresentados a seguir.

5.1 Corpos com escoamento incidente uniforme

Para se iniciar a aplicação do MSF baseado em vórtices, vários corpos isolados sujeitos a um escoamento uniforme incidente foram estudados. Primeiramente, foi avaliado o comportamento numérico do método para um cilindro de seção circular (ou cilindro circular) com incidência nula, com e sem a aplicação da condição de Kutta. No estudo seguinte, adicionou-se uma incidência de 90° . O segundo corpo a ser estudado foi um cilindro de seção elíptica (ou simplesmente elipse) com incidência nula. Finalmente, perfis comerciais foram estudados: um perfil simétrico (NACA 65-010) e dois perfis arqueados (NACA 65-906 e NACA 65-910).

O primeiro caso a ser estudado foi um cilindro circular de raio unitário (Figura 5.1). Nesse exemplo, o parâmetro δ foi definido como a razão entre o raio do contorno fictício e o raio do contorno do corpo. A Figura 5.2 mostra o comportamento do erro médio quadrático conforme se aumenta o número de pontos m , para vários valores de δ . Podemos notar que o método apresenta alta precisão quando o contorno fictício se afasta do contorno do corpo e quando se aumenta o número de pontos m .

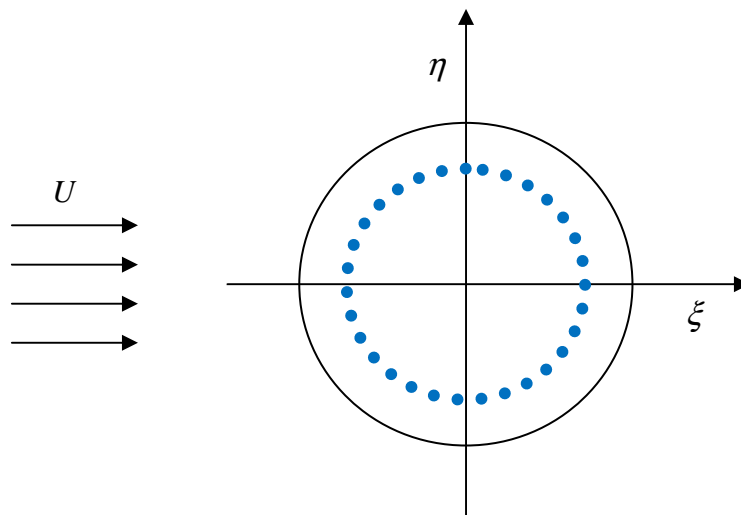


Figura 5.1 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente e vórtices no interior do corpo.

Podemos notar que uma região de instabilidade surge quando os pontos singulares são localizados longe do contorno do corpo e também quando se aumenta o número de pontos. Conforme o número de pontos cresce, para um determinado δ , o número de condição do sistema aumenta rapidamente, prejudicando a precisão do método.

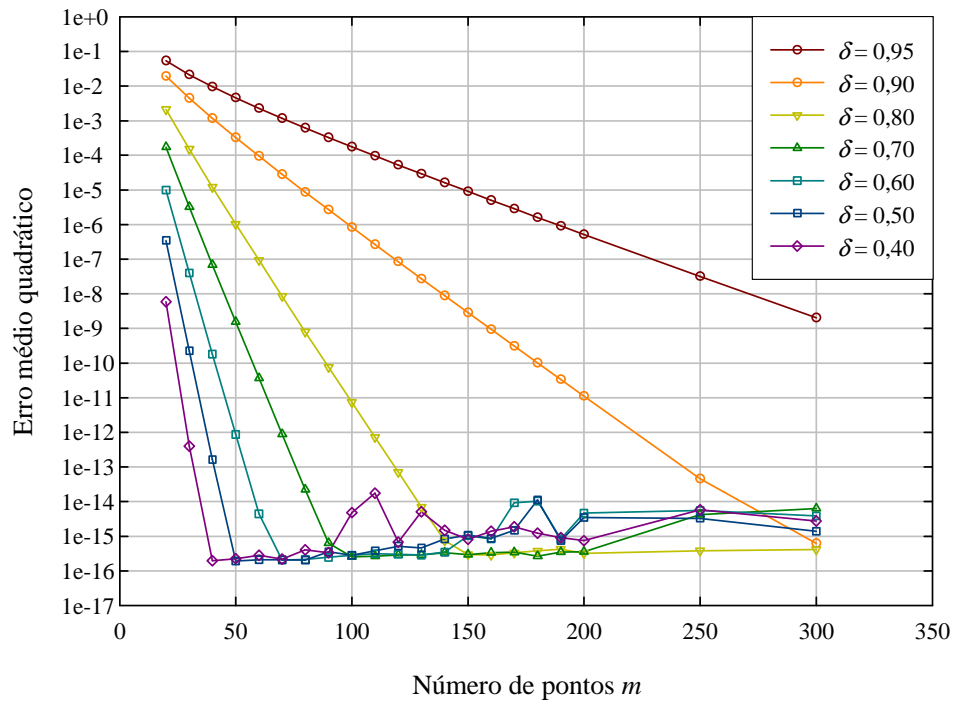


Figura 5.2 – Comportamento do método para o cilindro circular com a condição de Kutta.

Já a Figura 5.3 mostra a possibilidade de se colapsar as curvas obtidas na Figura 5.2 a partir da definição de um número de pontos fictício N' , o qual inclui a influência do parâmetro de distância δ nos erros, além da influência do número de pontos m . Desse modo, é possível se obter uma referência para a escolha de parâmetros apropriados para uma dada precisão.

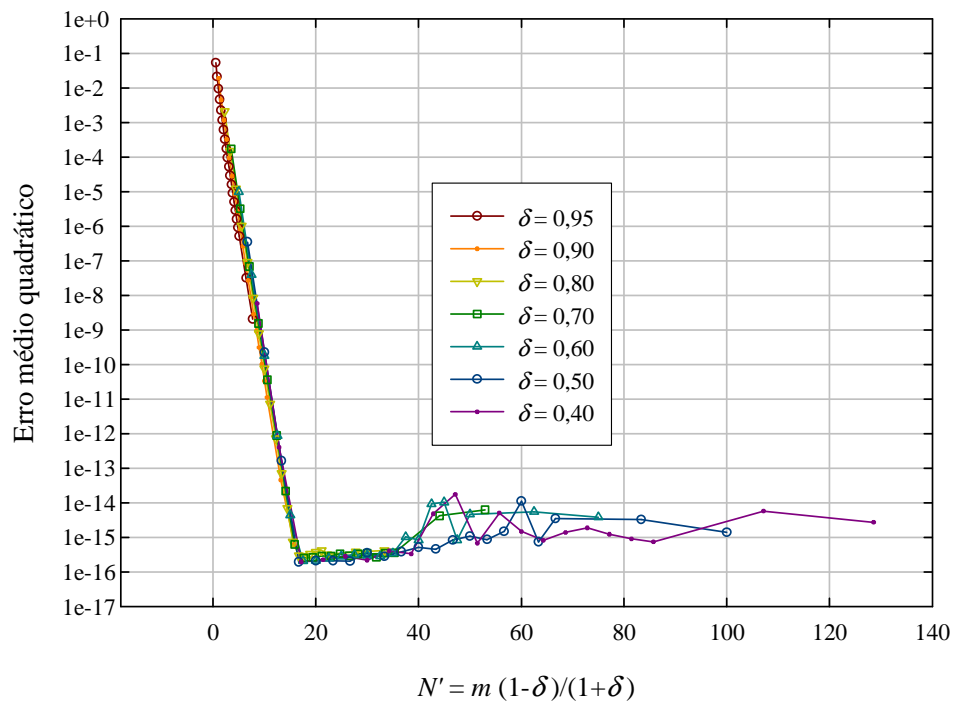


Figura 5.3 – Erro médio quadrático para o cilindro circular com a aplicação da condição de Kutta.

Durante os cálculos, notou-se que a circulação obtida para o cilindro circular era não-nula, indicando que o bordo de fuga não era um ponto de estagnação, mesmo nesse caso de escoamento em torno de um corpo simétrico e sem incidência. Desse modo, realizou-se uma comparação entre o cálculo realizado com e sem a aplicação da condição de Kutta (Figura 5.4), mostrando que a condição de Kutta deve ser aplicada mesmo nesses casos a fim de se garantir que o bordo de fuga seja realmente um ponto de estagnação. Quando a condição de Kutta não é aplicada, uma perda de simetria é observada nas singularidades do método, criando uma circulação numérica falsa e deslocando, portanto, a posição do ponto de estagnação. Portanto, a condição de Kutta é aplicada em todos os demais casos e o ângulo de ataque do escoamento é mantido nulo.

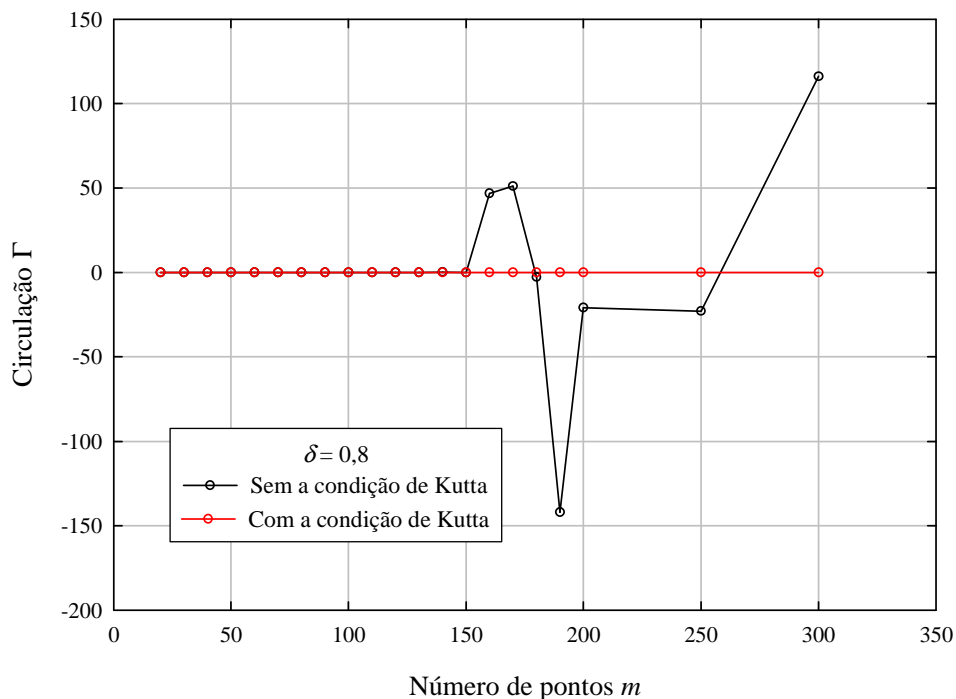


Figura 5.4 – Comportamento da circulação com e sem a condição de Kutta para $\delta = 0,8$.

A Figura 5.5 mostra que a distribuição do erro local se torna instável quando os pontos singulares são afastados do contorno do corpo para um dado número de pontos m . Isso ocorre devido à grande degradação do número de condição do sistema linear, como já foi observado em relação ao erro médio quadrático (Figuras 5.2 e 5.3).

As Figuras 5.6 e 5.7 ilustram os resultados obtidos para o cilindro circular com um ângulo de ataque de 90° . Agora há uma circulação real em torno do contorno do cilindro. Podemos notar que o comportamento da convergência, no caso com incidência, é similar ao caso com incidência nula.

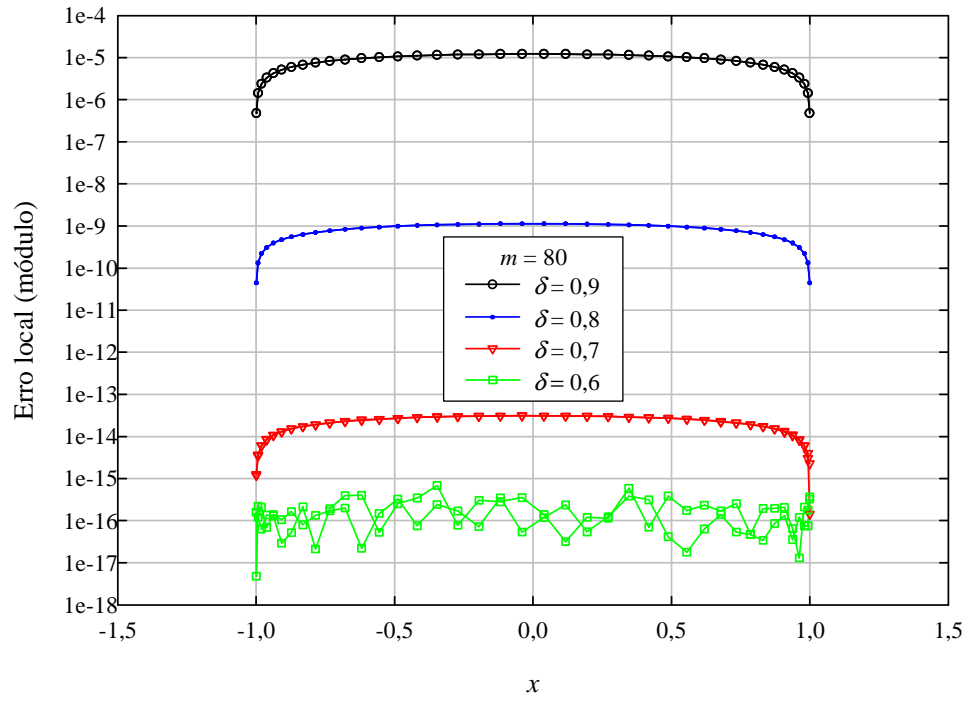


Figura 5.5 – Influência de δ na distribuição do erro local.

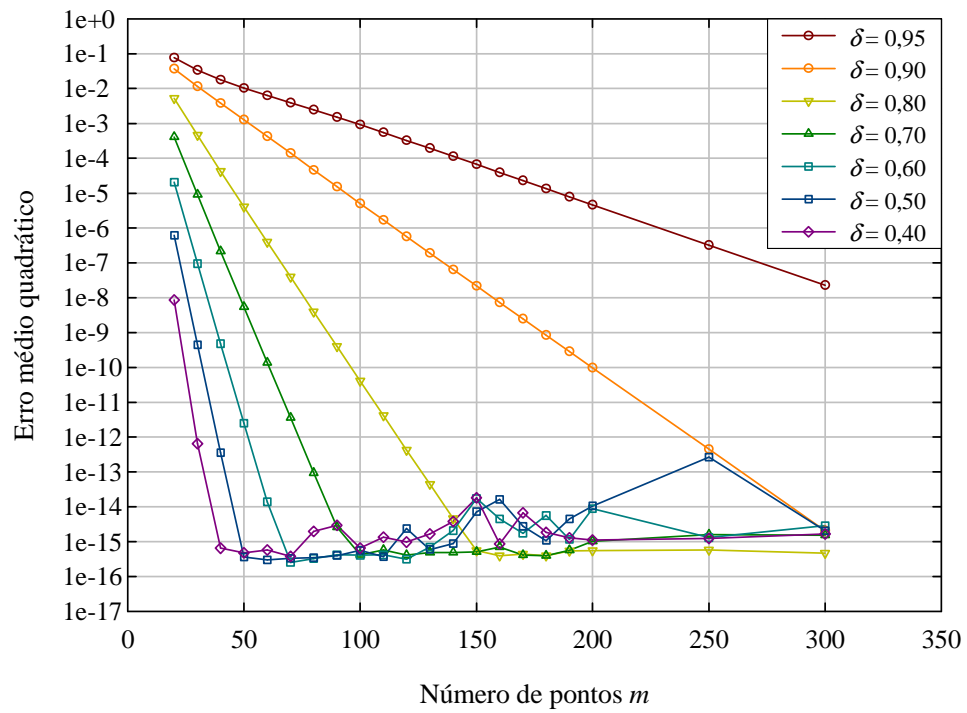


Figura 5.6 – Comportamento do método para o cilindro circular com ângulo de ataque 90° .

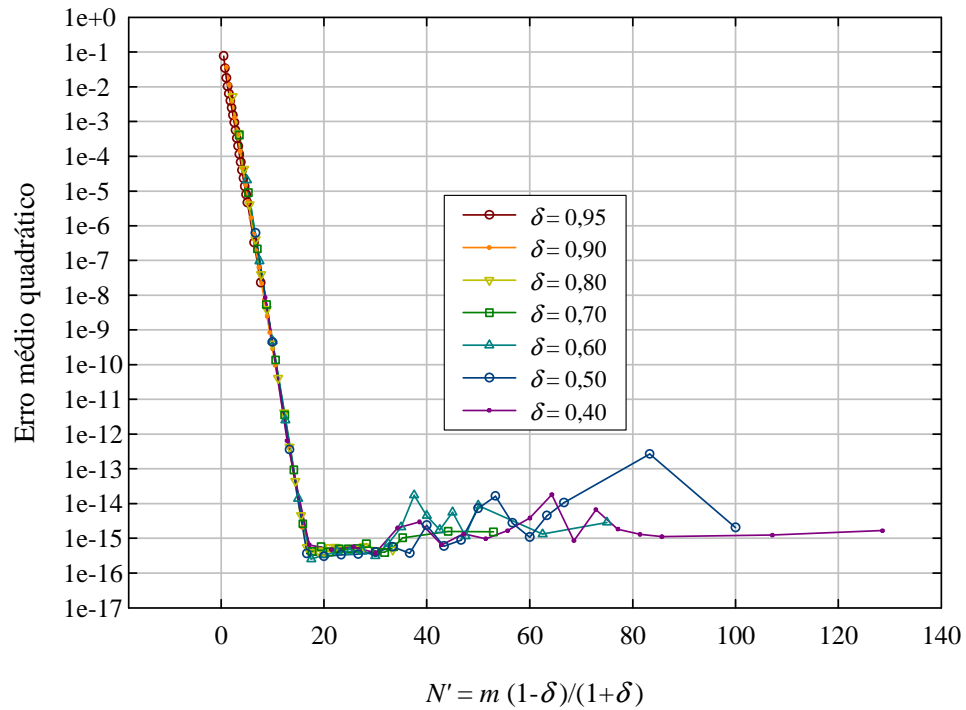


Figura 5.7 – Erro médio quadrático para o cilindro circular com ângulo de ataque 90° .

O segundo corpo estudado foi uma elipse com relação de aspecto de 0,5 (Figura 5.8). Durante os testes, notou-se que os resultados sempre divergiam quando os pontos singulares eram localizados além do centro de curvatura dos bordos. Esse fato indica que a variação de curvatura do contorno tem uma forte influência na precisão. Desse modo, a distância permitida para se posicionar os pontos singulares foi limitada ao raio de curvatura dos bordos. Assim, δ foi definido como a relação entre a distância do ponto singular próximo do bordo de ataque ao centro de curvatura do mesmo e o raio de curvatura do mesmo bordo. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento da convergência, o qual foi semelhante ao caso do cilindro circular.

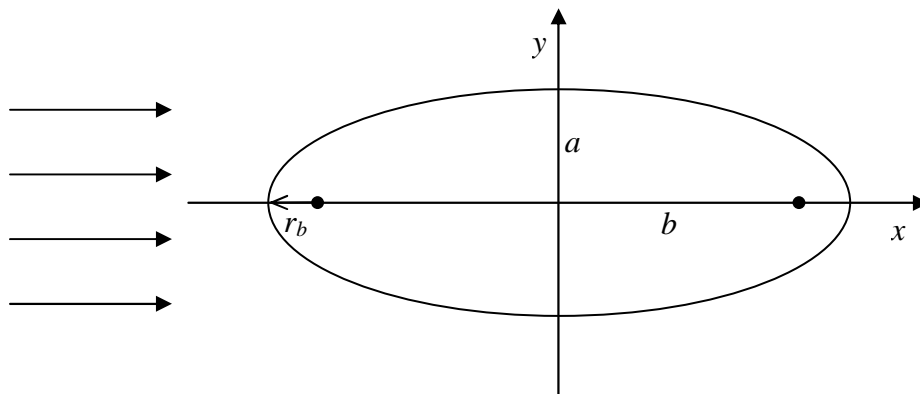


Figura 5.8 – Configuração do escoamento para a elipse.

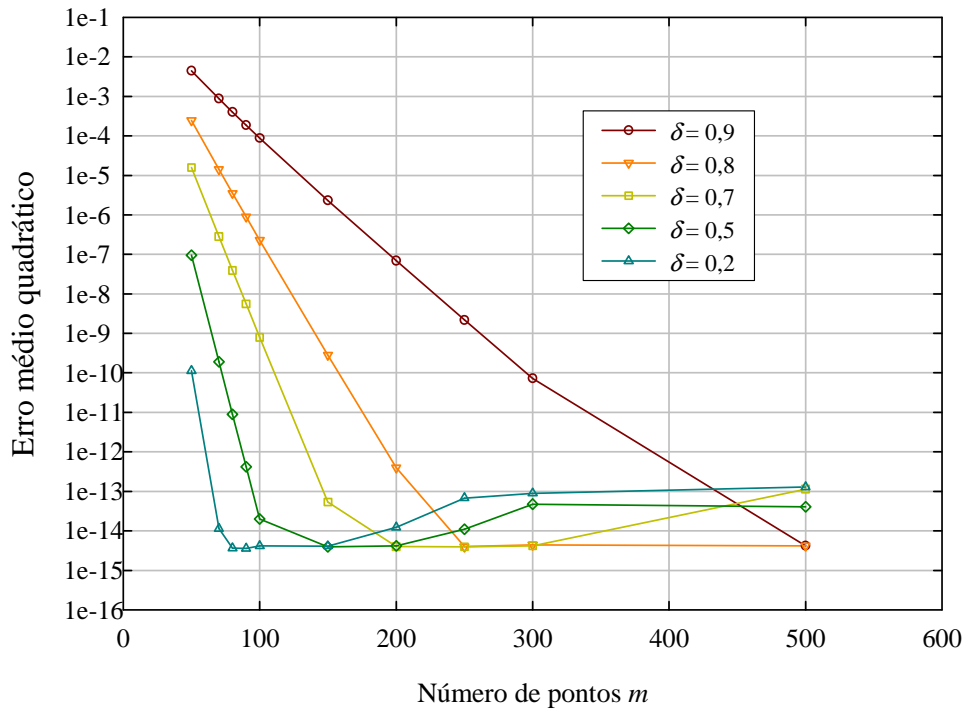


Figura 5.9 - Comportamento do método para uma elipse de razão de aspecto de 0,5 no plano físico.

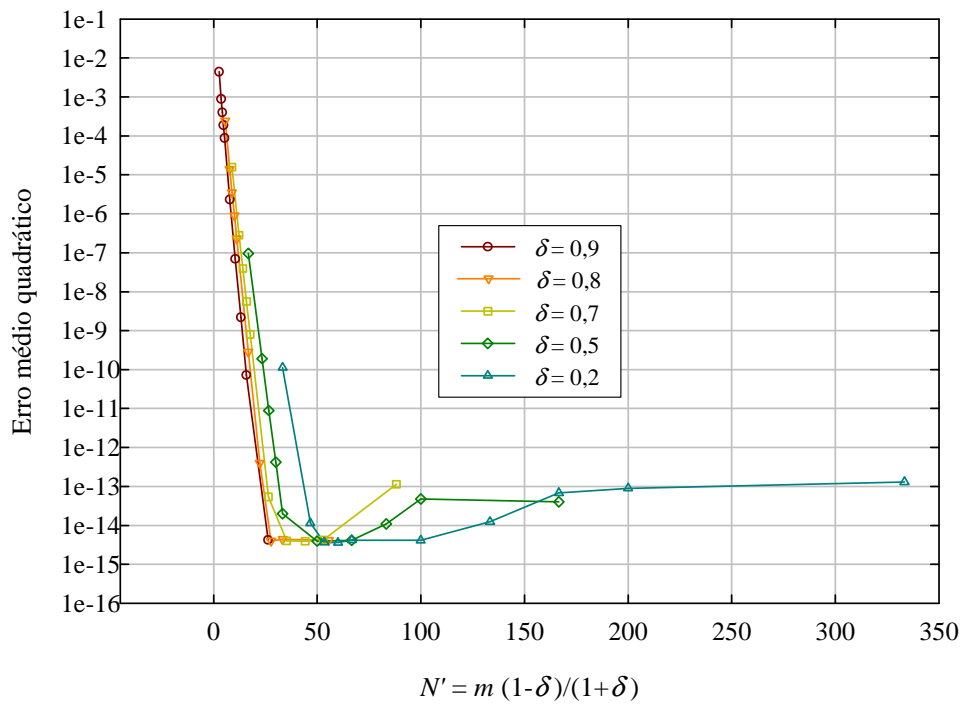


Figura 5.10 – Erro médio quadrático para uma elipse de razão de aspecto de 0,5 no plano físico.

Finalmente, três perfis de aerofólios comerciais foram escolhidos a fim de se testar o método aqui desenvolvido. Todos os perfis foram submetidos a um escoamento uniforme sem

incidência. Primeiramente estudou-se o comportamento da convergência para um aerofólio simétrico, o NACA 65-010, e depois para dois aerofólios arqueados, o NACA 65-906 e o NACA 65-910. Nesses casos, a transformação de Joukowski inversa (Capítulo 3) e um procedimento para a minimização da dispersão de curvatura foram aplicados. A Figura 5.11 ilustra a geometria do aerofólio NACA 65-010 nos planos físico e transformado.

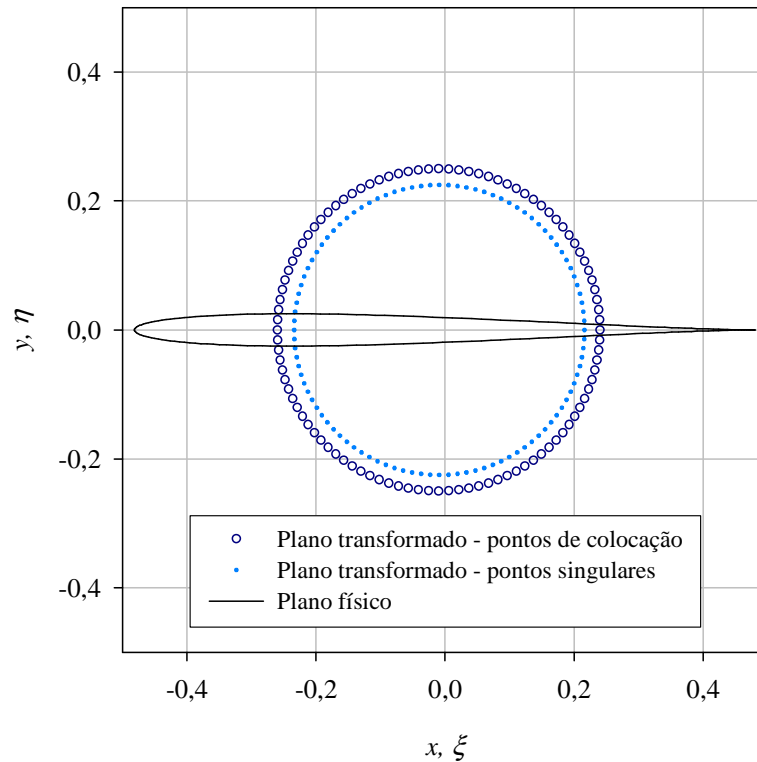


Figura 5.11 – Perfil NACA 65-010 e seu quase-círculo.

Os resultados obtidos para o perfil NACA 65-010 são mostrados na Figura 5.12. Pode-se notar que a variação de curvatura tem uma forte influência na precisão dos resultados conforme a distância entre os pontos singulares e o contorno do corpo aumenta. Nesse caso, o contorno fictício deve ser mantido próximo ao contorno do corpo, alterando-se apenas o número de pontos a fim de se obter a precisão desejada. Aqui, δ não foi limitado ao menor raio de curvatura encontrado ao longo do contorno do quase-círculo. O parâmetro δ tem uma definição análoga ao caso do cilindro circular.

O último caso a ser estudado com escoamento uniforme incidente são dois perfis de aerofólio arqueados. As Figuras 5.13a e 5.13b mostram a geometria dos perfis de aerofólio NACA 65-906 e NACA 65-910 e seus respectivos quase-círculos. A minimização da dispersão de curvatura e a transformação de Joukowski inversa também foram aplicadas. Pelas razões expostas no caso anterior, o parâmetro δ foi definido como a relação entre a

distância do ponto singular próximo ao ponto convexo de máxima curvatura ao seu centro de curvatura e o raio mínimo de curvatura. Podemos notar que, mesmo utilizando uma técnica de minimização da dispersão de curvatura, a região do contorno do quase-círculo correspondente ao bordo de ataque do perfil de aerofólio ainda apresenta uma forte variação de curvatura, a qual irá exercer uma forte influência na precisão dos resultados.

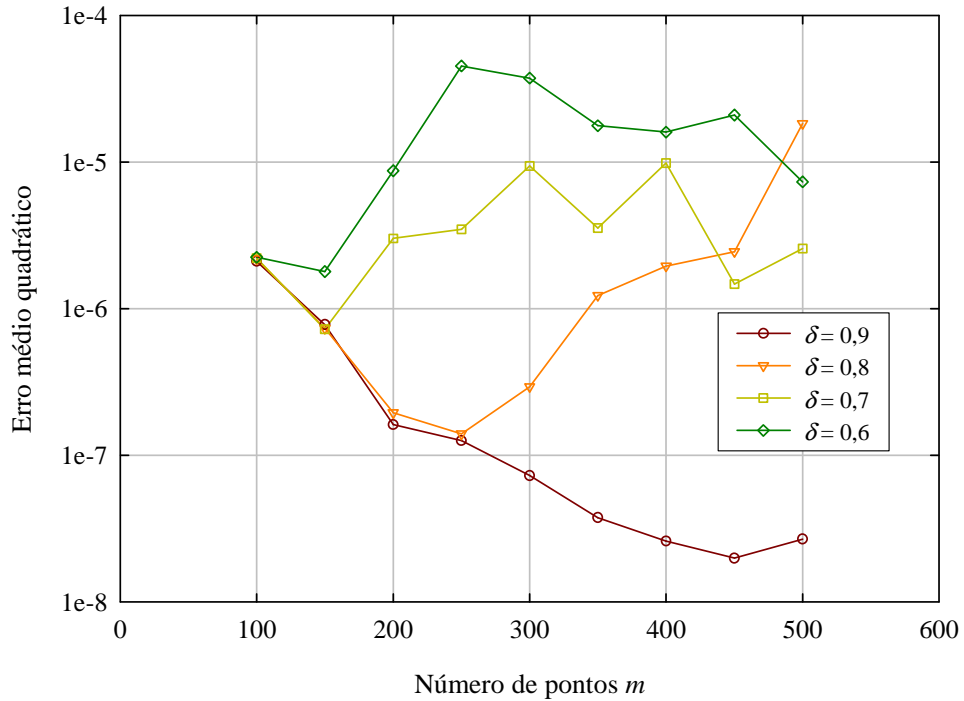


Figura 5.12 – Comportamento do método para NACA 65-010.

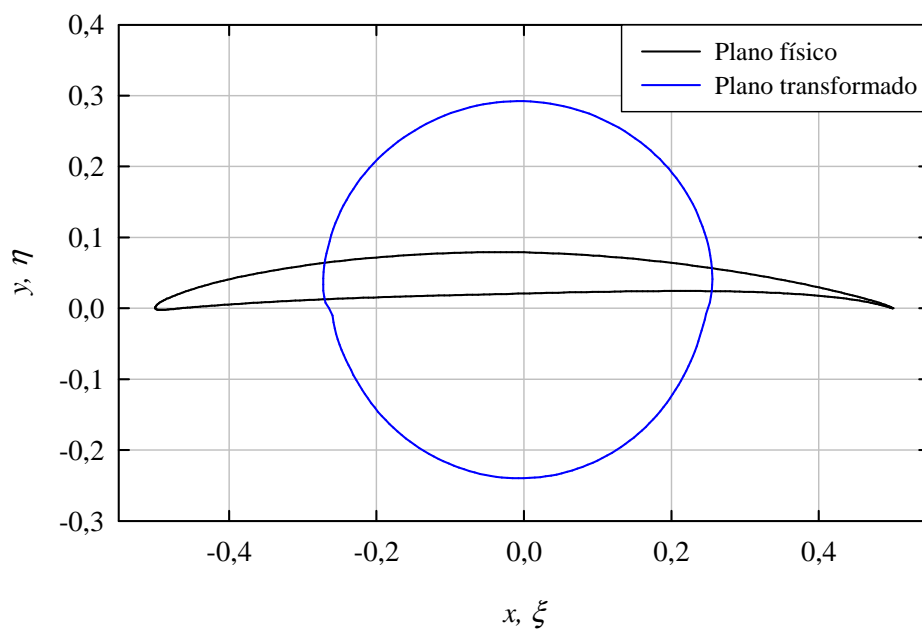


Figura 5.13a – Perfil NACA 65-906 e seu quase-círculo.

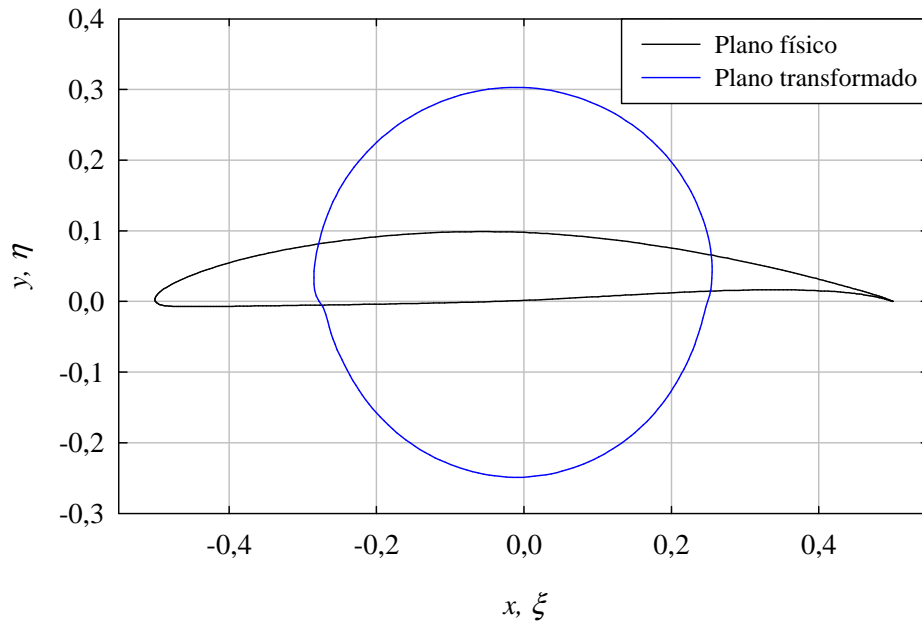


Figura 5.13b – Perfil NACA 65-906 e seu quase-círculo.

As Figuras 5.14 e 5.15 mostram o comportamento do método para os dois perfis arqueados. Pode-se notar que a precisão piora conforme a distância do contorno do corpo aumenta a altos números de pontos. Vale a pena mencionar que a espessura do perfil de aerofólio também influenciou na precisão dos resultados, contribuindo para a piora do condicionamento do sistema. Além disso, observou-se que o perfil mais espesso (Figura 5.13b) atinge um erro mínimo para um N menor do que o perfil mais fino (Figura 5.13a).

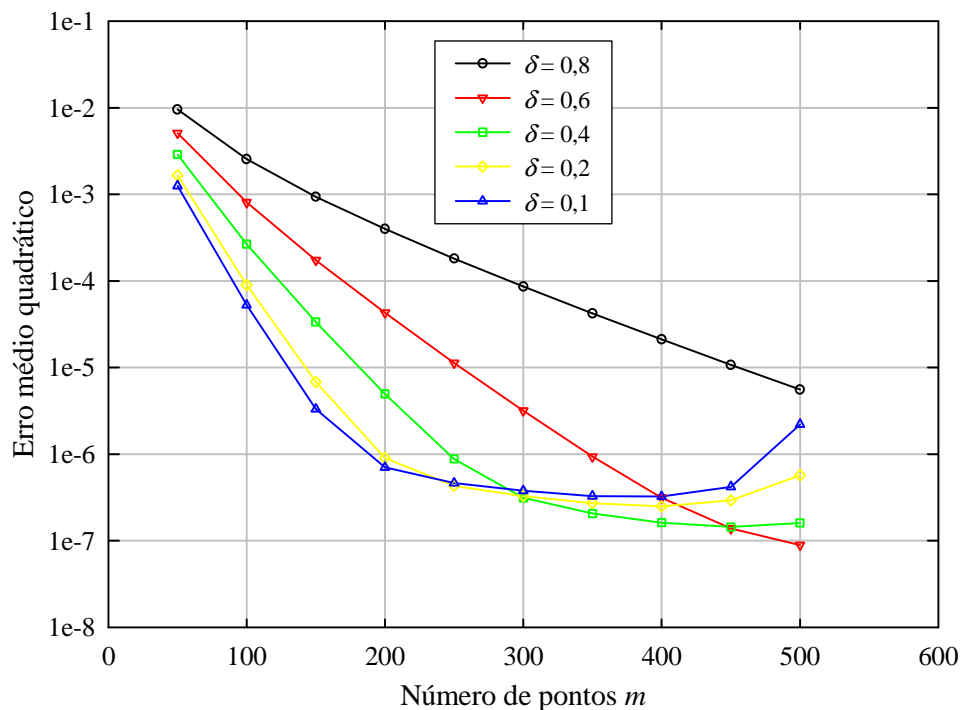


Figura 5.14 – Comportamento do método para NACA 65-906.

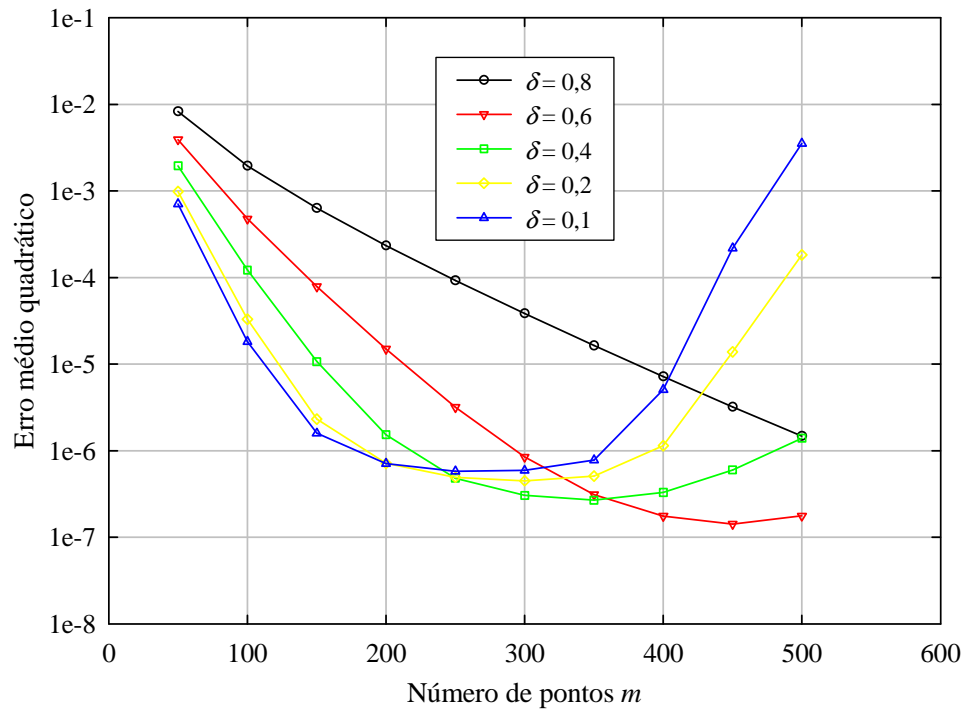


Figura 5.15 – Comportamento do método para NACA 65-910.

5.2 Corpos com escoamento incidente singular

O MSF baseado em vórtices foi aplicado em um cilindro circular de raio unitário submetido a um escoamento incidente singular, ou seja, um escoamento representado por singularidades (fonte e sumidouro, vórtices, e a combinação de ambos). O objetivo de se simular um escoamento incidente por meio da combinação de singularidades é analisar o comportamento do método proposto nessas condições para uma futura aplicação no caso de grades de perfis de aerofólio. Essa aplicação se daria por meio da utilização da transformação de Weing inversa ou da sua transformação direta em problemas inversos. Além disso, a partir dos resultados obtidos com a adição de reflexões no interior do corpo, foi estudado um último caso, onde um dipolo é adicionado na origem das coordenadas de um cilindro circular com escoamento uniforme incidente a fim de se garantir que o contorno do corpo faça parte de uma linha de corrente, facilitando assim a determinação da distribuição das intensidades de vórtice no interior do corpo.

A primeira configuração do escoamento incidente empregada foi a representação deste por meio de uma fonte localizada a montante do cilindro circular e um sumidouro a jusante, ambos unitários e a uma distância R do centro do corpo, como mostra a Figura 5.16. A

princípio, não foram adicionadas as reflexões. As Figuras 5.17, 5.18 e 5.19 mostram o comportamento do MSF baseado em vórtices para três valores de R . Quanto mais próximo do corpo, maior é a influência da singularidade do escoamento na precisão dos resultados.

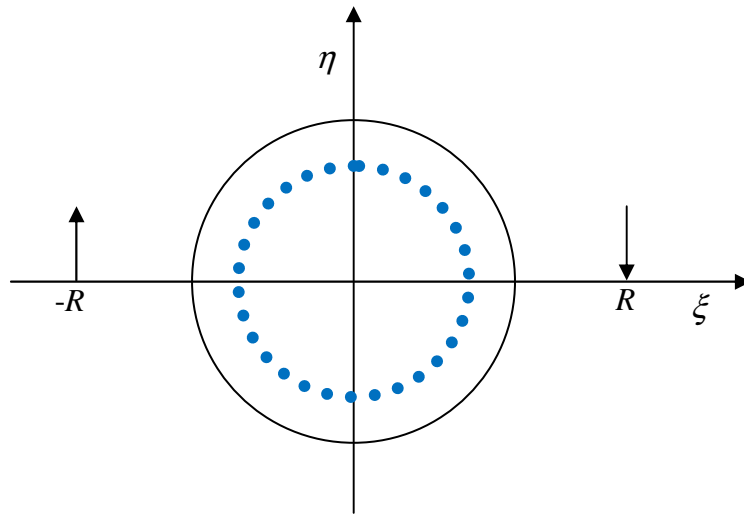


Figura 5.16 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes e vórtices no interior do corpo.

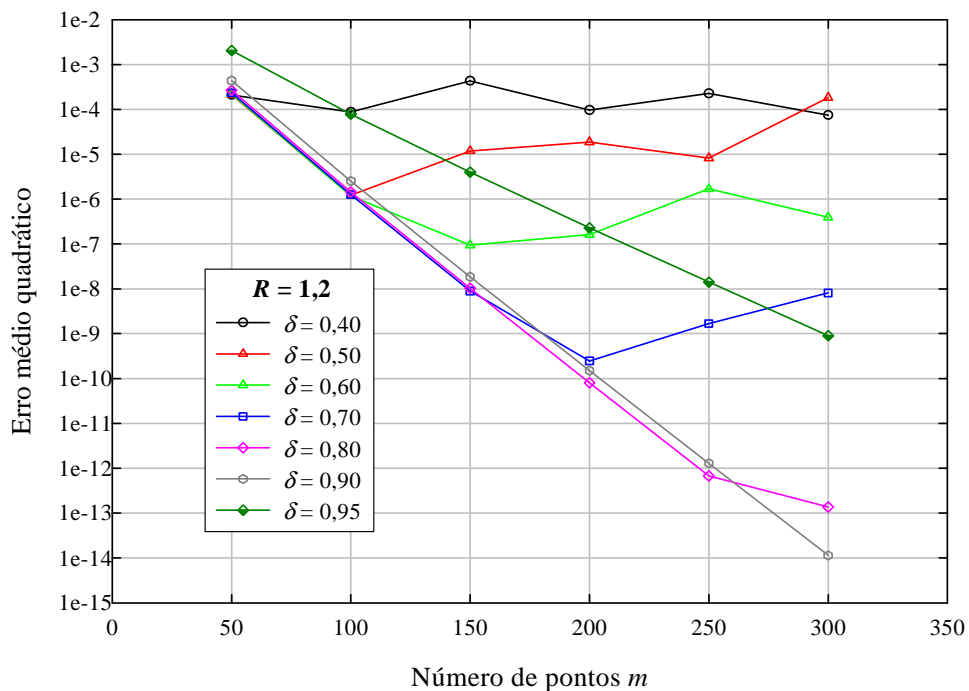


Figura 5.17 – Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=1,2$.

Podemos observar que, mesmo no caso em que as singularidades do escoamento estão bem próximas do contorno do corpo, é possível se obter erros baixíssimos, dependendo dos valores de m e de δ escolhidos.

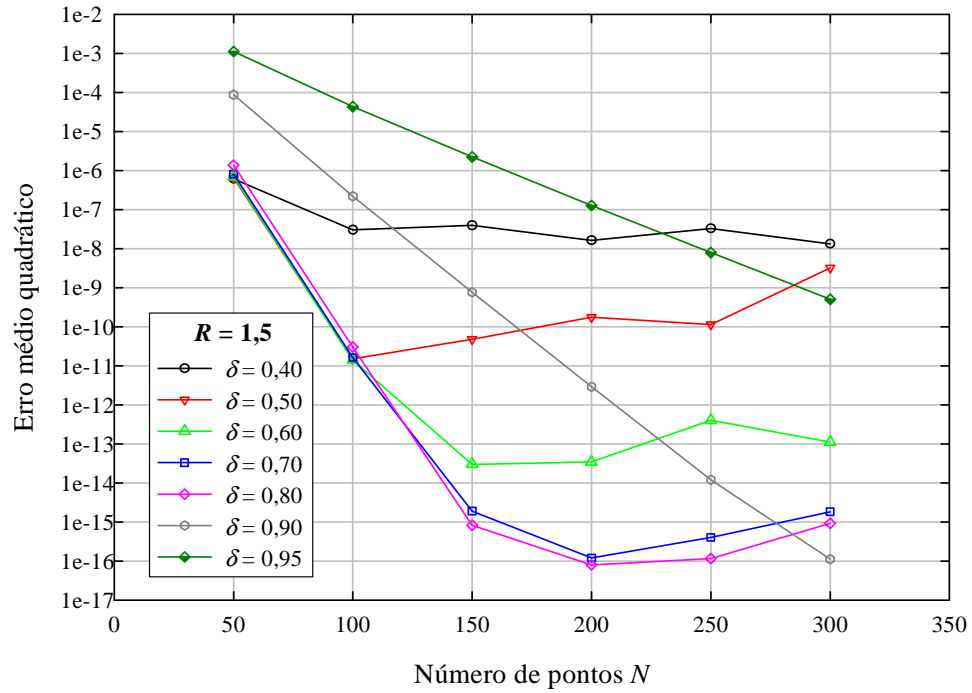


Figura 5.18 – Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=1,5$.

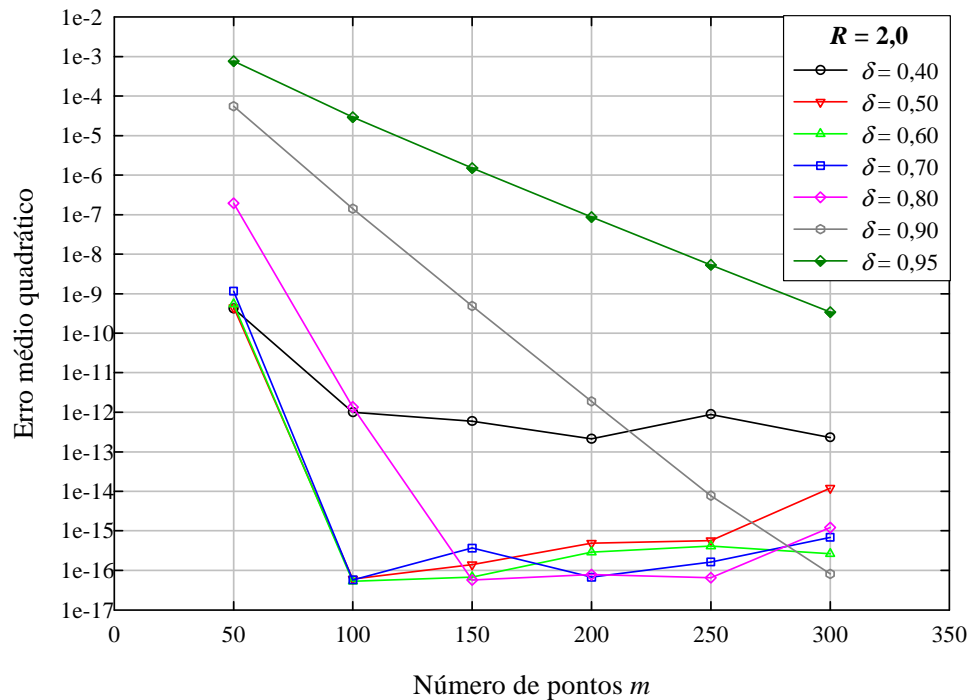


Figura 5.19 – Comportamento do método utilizando fontes sem reflexão para $R=2,0$.

Agora são adicionadas as reflexões da fonte e do sumidouro no interior do corpo (Figura 5.20) e, pelo teorema do círculo, o contorno do corpo se torna uma linha de corrente nula. Desse modo, é possível avaliar os erros cometidos com a distribuição de vórtices do MSF. As

Figuras 5.21, 5.22 e 5.23 mostram que os erros cometidos oscilam em torno de um valor muito baixo para os três valores de R , demonstrando a alta precisão do método nesse caso, como era esperado.

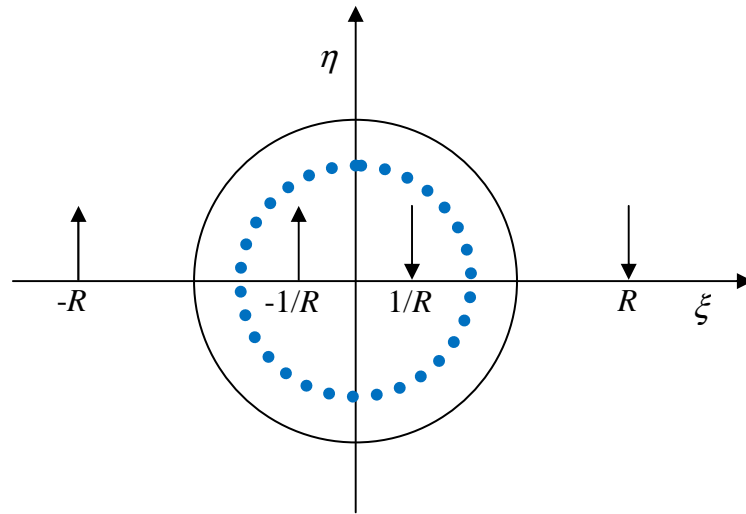


Figura 5.20 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com fontes, suas reflexões e vórtices no interior do corpo.

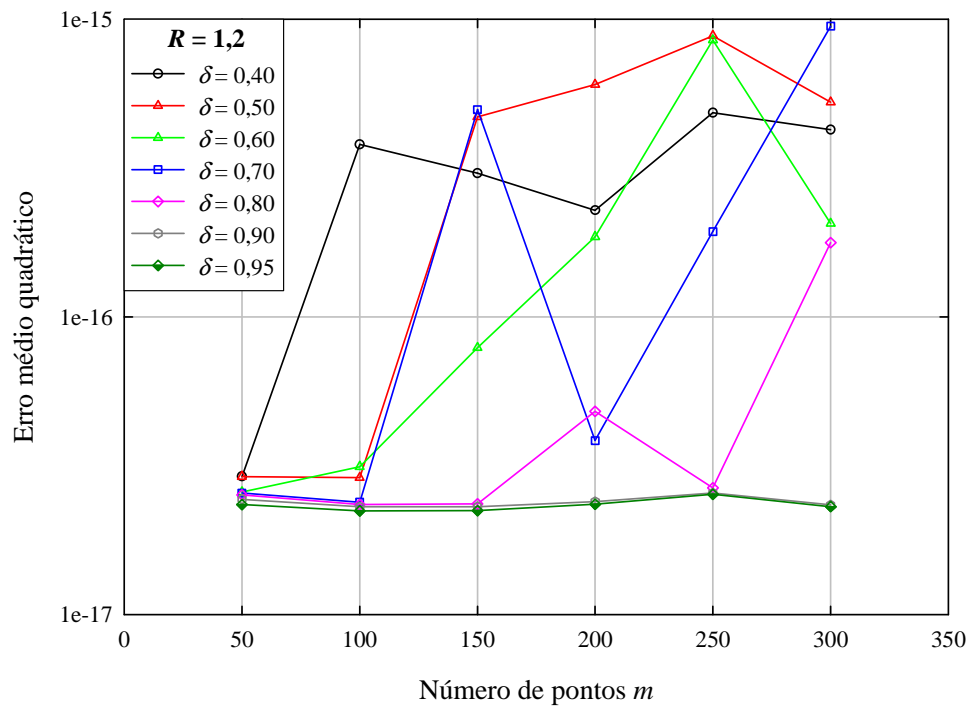


Figura 5.21 – Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=1,2$.

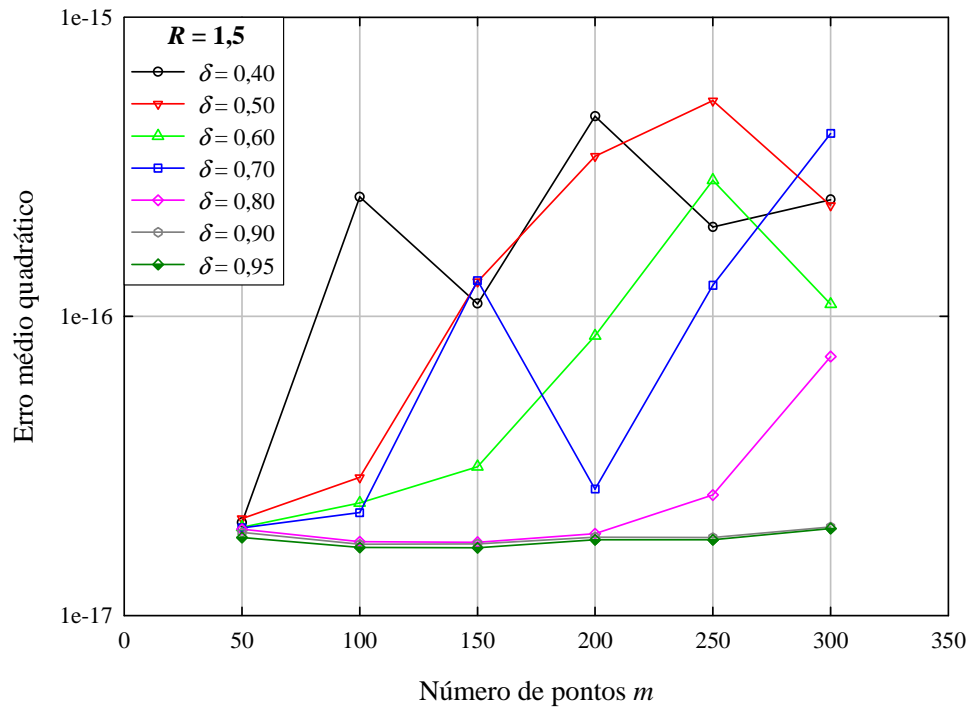


Figura 5.22 – Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=1,5$.

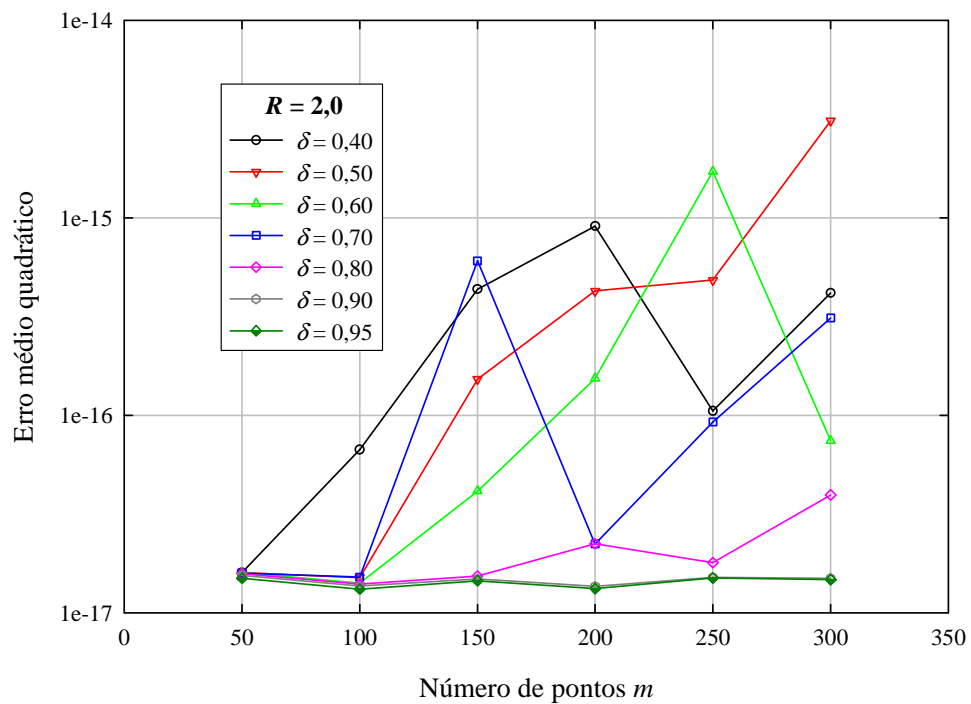


Figura 5.23 – Comportamento do método utilizando fontes com reflexão para $R=2,0$.

Agora o escoamento incidente é representado por um vórtice anti-horário unitário a montante e um vórtice horário a jusante do corpo, de mesma intensidade, sem a adição das suas reflexões, conforme mostra a Figura 5.24. Já as Figuras 5.25 ($R=1,2$), 5.26 ($R=1,5$) e 5.27

$(R=2,0)$ mostram que os vórtices do escoamento incidente exercem uma forte influência na precisão, piorando os resultados em comparação com os obtidos com o escoamento incidente representado apenas por fontes.

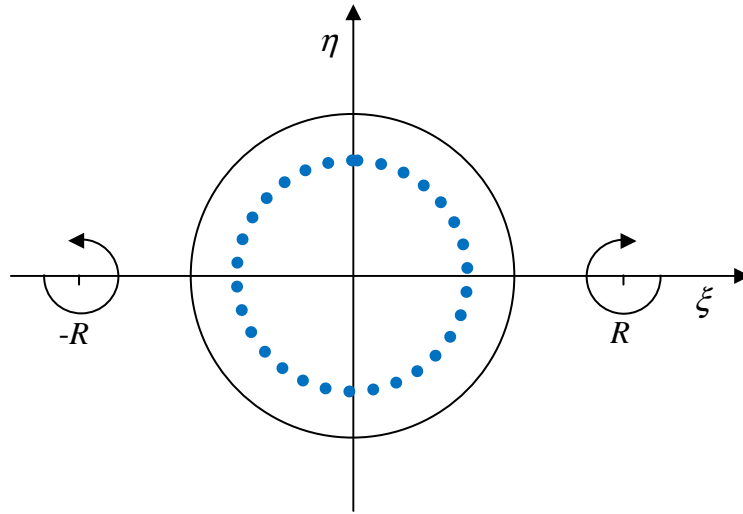


Figura 5.24 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e vórtices (do método) no interior do corpo.

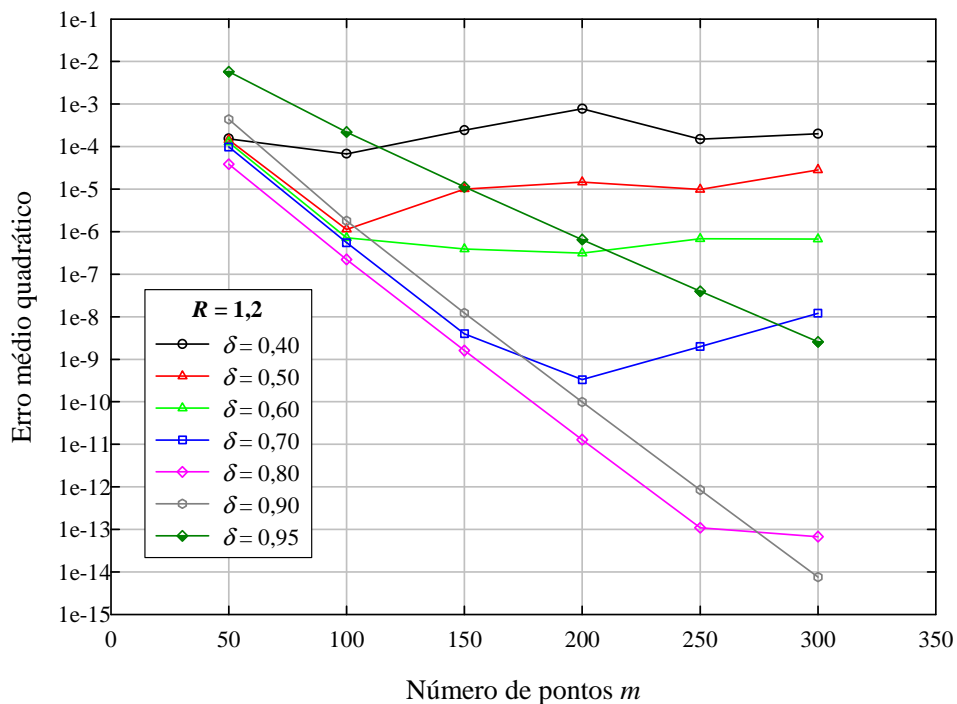


Figura 5.25 – Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=1,2$.

Apesar dos erros cometidos aumentarem com a representação do escoamento incidente por vórtices, ainda assim é possível atingir uma alta precisão escolhendo o parâmetro δ mais adequado e aumentando o número de pontos m .

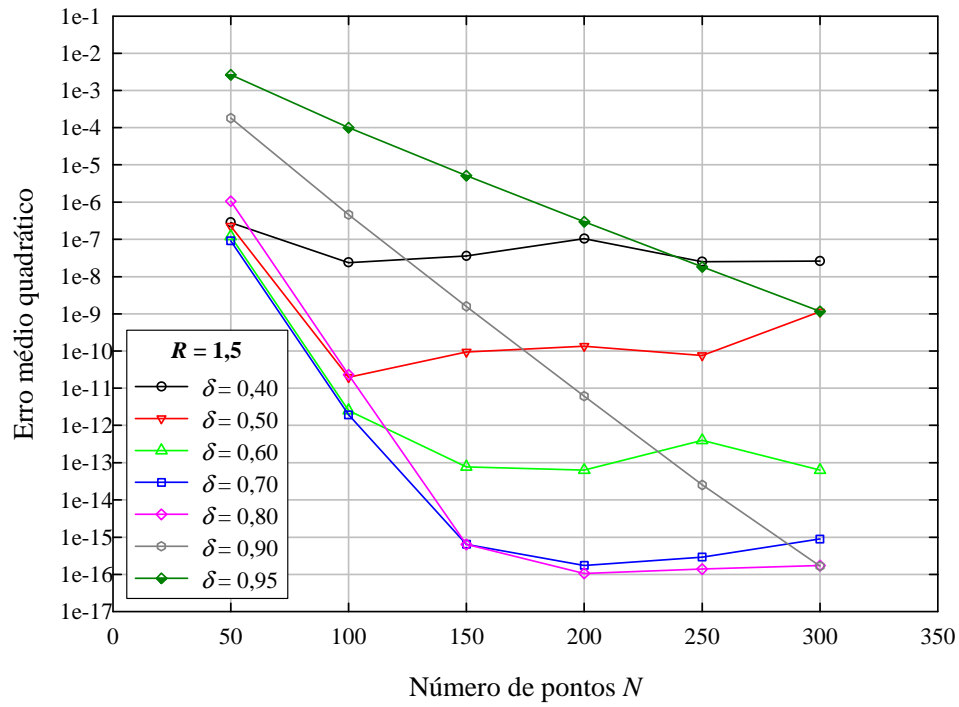


Figura 5.26 – Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=1,5$.

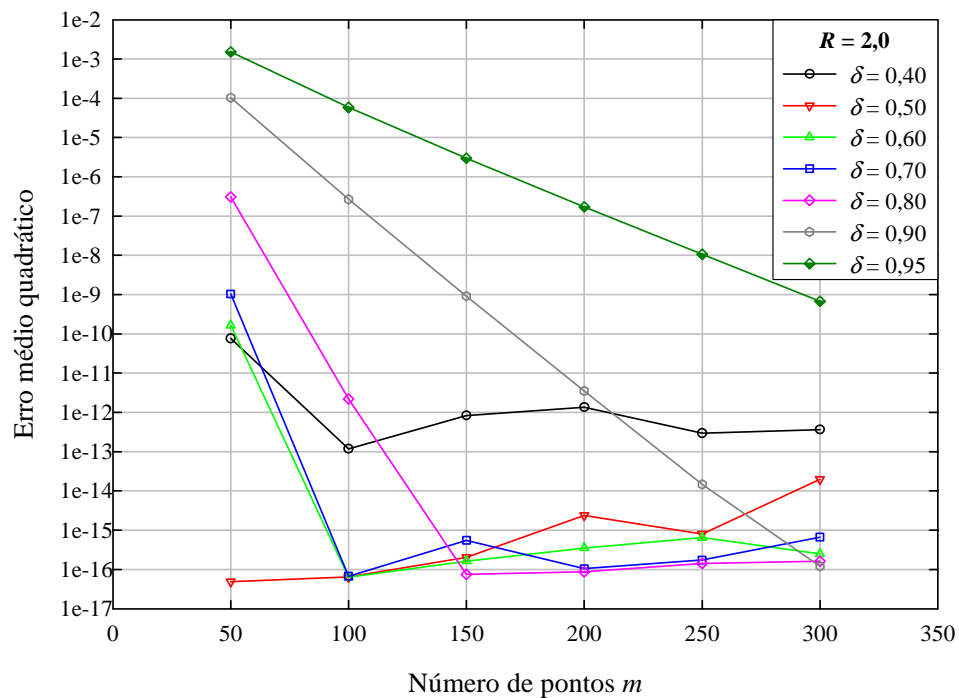


Figura 5.27 – Comportamento do método utilizando vórtices sem reflexão para $R=2,0$.

Agora, além dos vórtices que representam o escoamento, são adicionadas as suas reflexões no interior do corpo, de acordo com a Figura 5.28. Há uma melhoria dos resultados quando as singularidades do método não estão tão próximas do contorno do corpo, porém os resultados

são bem diferentes dos obtidos para o caso do escoamento representado por fontes, como mostram as Figuras 5.29, 5.30 e 5.31. Isso mostra, aparentemente, que as singularidades do método são mais afetadas pelos vórtices do escoamento do que pelas fontes. Além disso, esse comportamento talvez indique que uma combinação de singularidades do método das soluções fundamentais, como fontes e vórtices, consiga resolver melhor o sistema de equações.

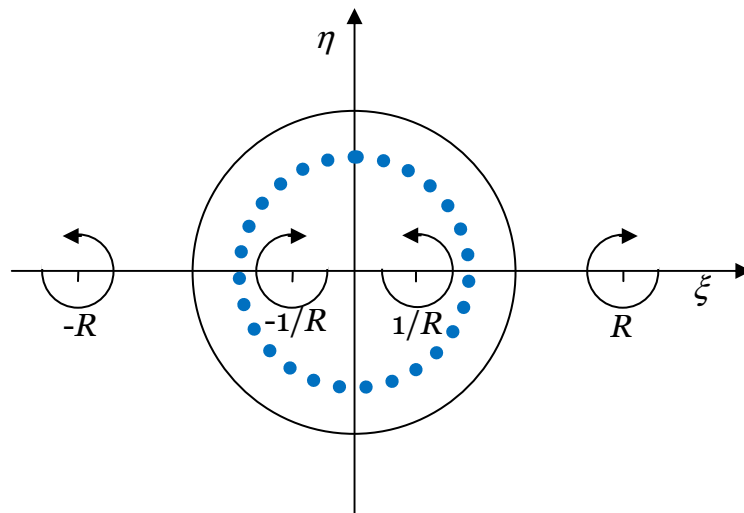


Figura 5.28 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.

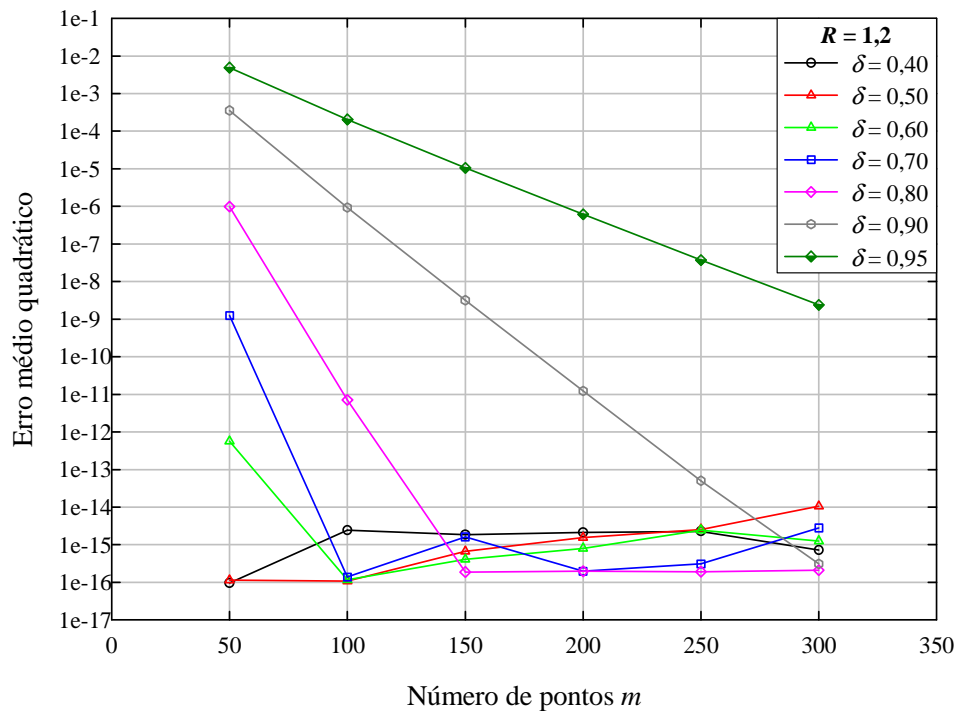


Figura 5.29 – Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=1,2$.

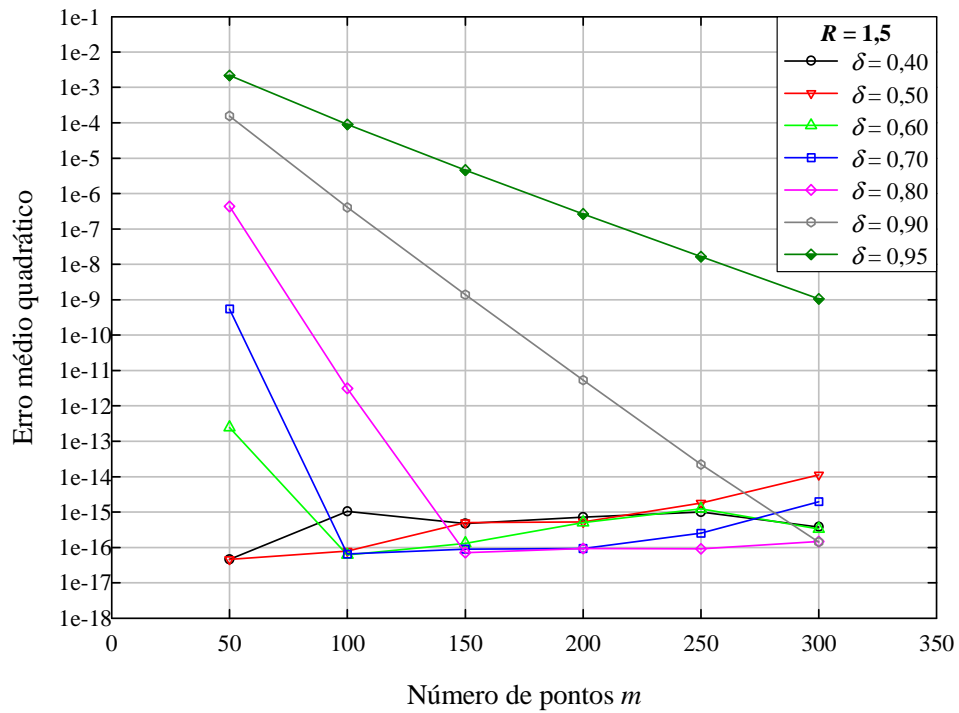


Figura 5.30 – Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=1,5$.

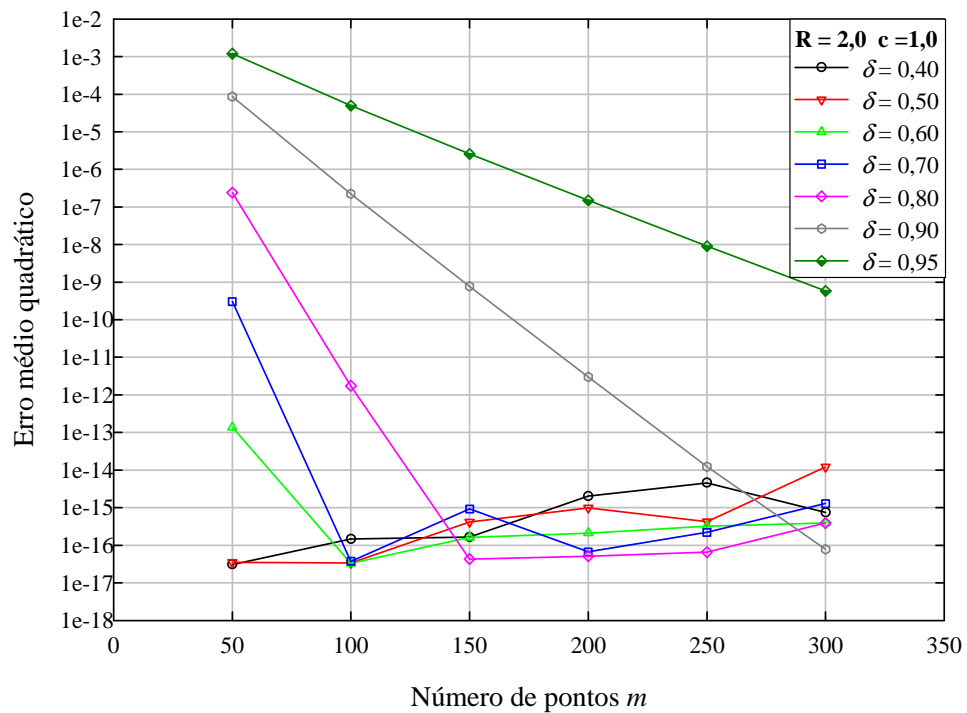


Figura 5.31 – Comportamento do método utilizando vórtices com reflexão para $R=2,0$.

Finalmente, representou-se o escoamento incidente pela combinação de uma fonte e um vórtice anti-horário a montante e um sumidouro e um vórtice horário a jusante do corpo e suas respectivas reflexões no interior do mesmo, de acordo com a Figura 5.32. Os resultados são

semelhantes ao caso de vórtice com reflexão, como podem ser visualizados pelas Figuras 5.33, 5.34 e 5.35.

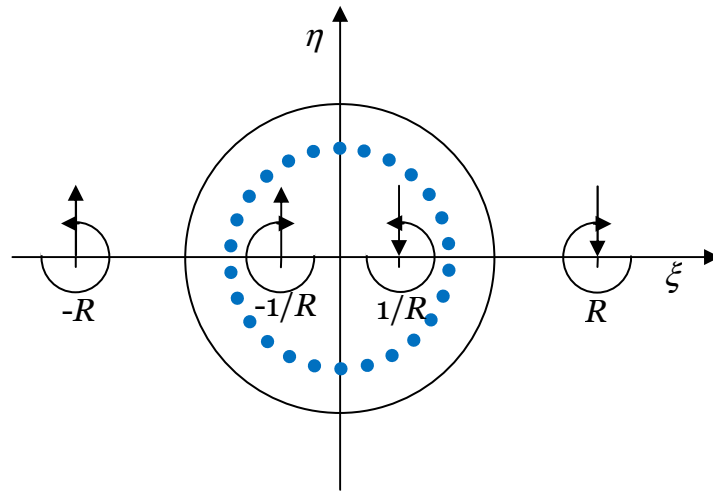


Figura 5.32 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento incidente com vórtices e fontes, suas reflexões e vórtices (do método) no interior do corpo.

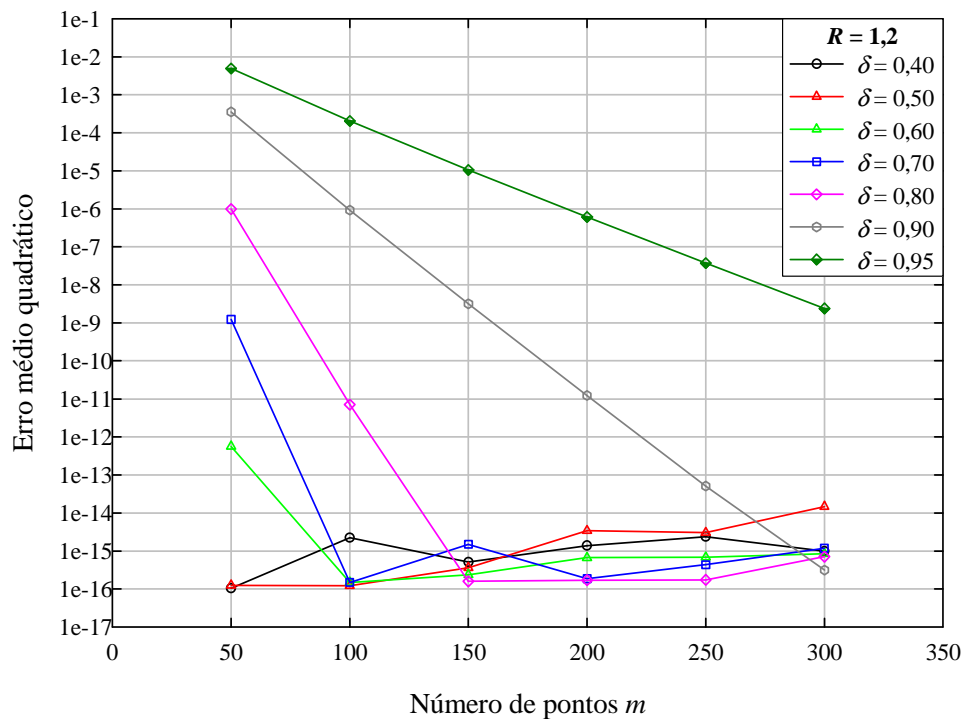


Figura 5.33 – Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=1,2$.

Novamente, esse comportamento do método proposto indica que uma combinação de singularidades do MSF no interior do corpo talvez proporcione uma solução melhor para o sistema de equações, aprimorando a precisão dos resultados.

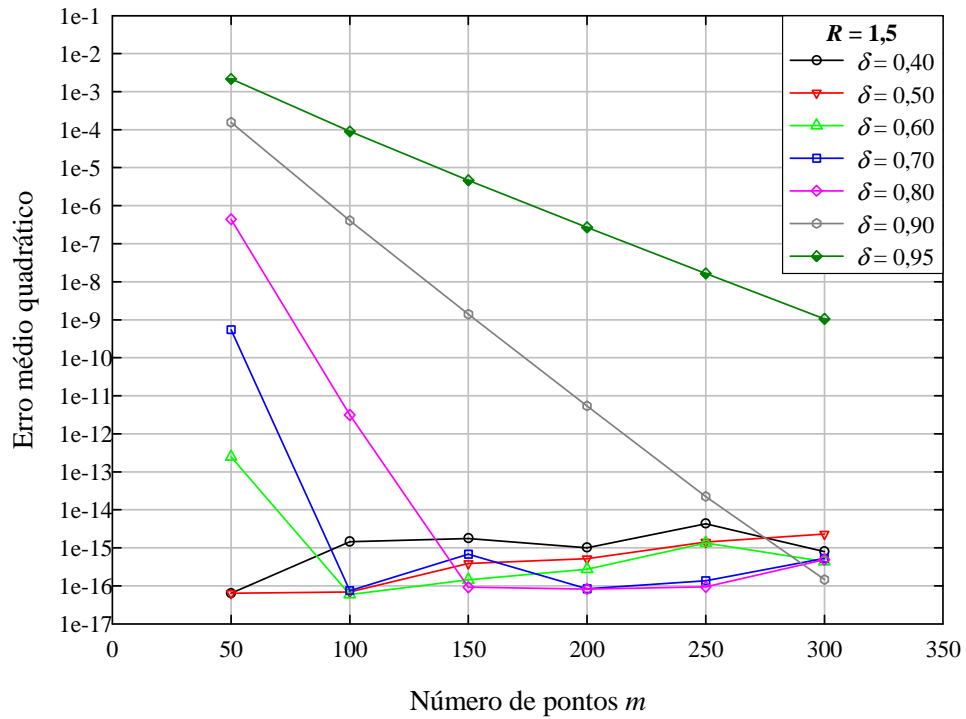


Figura 5.34 – Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=1,5$.

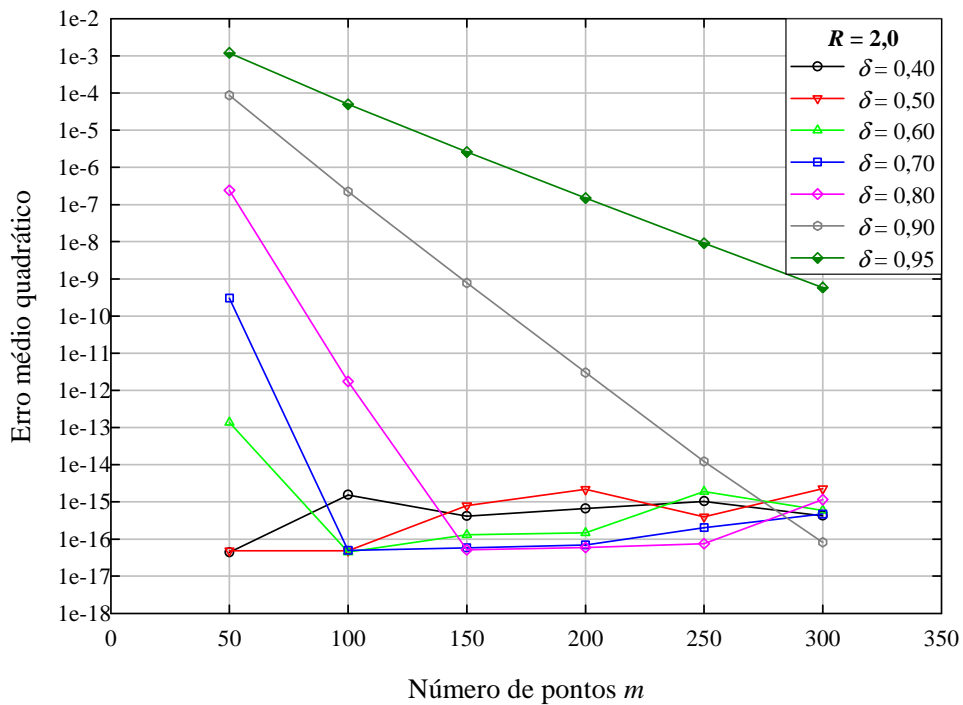


Figura 5.35 – Comportamento do método com fontes e vórtices e suas reflexões para $R=2,0$.

Avaliando os resultados encontrados para o caso de escoamento singular incidente, pode-se observar que a adição das reflexões das singularidades no interior do corpo teve uma

grande contribuição na redução dos erros cometidos, chegando até, em alguns casos, a oscilar em torno de valores baixíssimos. Assim, torna-se possível a aplicação do método em casos de grade linear de aerofólios por meio da transformação de Weing. Um procedimento semelhante ao da transformação de Joukowski inversa poderia ser feito, porém seria necessário um processo iterativo. Outra aplicação seria na solução de problemas inversos, onde a transformação de Weing seria empregada de forma direta. Além disso, no caso de corpos sujeitos a um escoamento uniforme incidente, há a possibilidade da melhoria dos resultados adicionando-se singularidades apropriadas a fim de se garantir *a priori* que o contorno do corpo seja uma linha de corrente nula ou, no caso do emprego da transformação de Joukowski inversa, facilitar a obtenção do quase-círculo no plano transformado.

Portanto, com base nos resultados obtidos, foi testado o comportamento do método ao se adicionar um dipolo no centro de um cilindro circular imerso em um escoamento uniforme sem incidência (Figura 5.36). A combinação do dipolo com o escoamento uniforme faz com que o contorno do cilindro seja uma linha de corrente nula. O objetivo é analisar a perturbação na precisão causada pela distribuição de singularidades do MSF no interior do corpo. Os resultados obtidos são ilustrados pela Figura 5.37. Os erros cometidos são muito baixos, tornando-se um pouco instáveis conforme o condicionamento do sistema piora. Por meio de combinações apropriadas de singularidades, o método proposto se mostra altamente preciso.

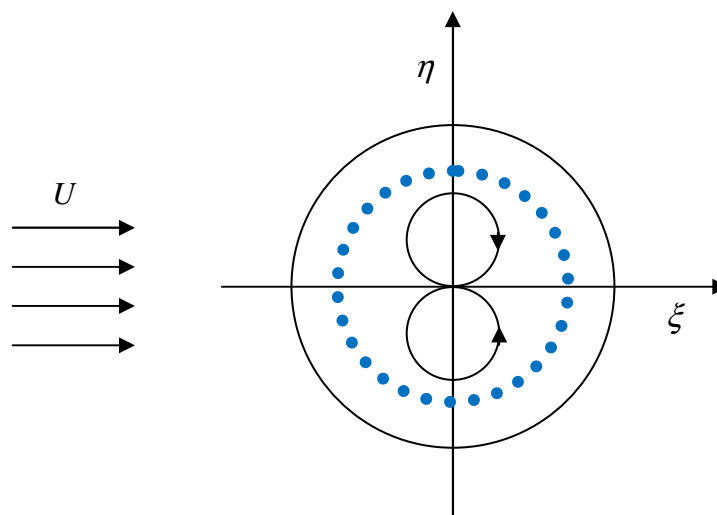


Figura 5.36 - Configuração do escoamento para o caso de escoamento uniforme incidente, vórtices no interior do corpo e um dipolo no centro.

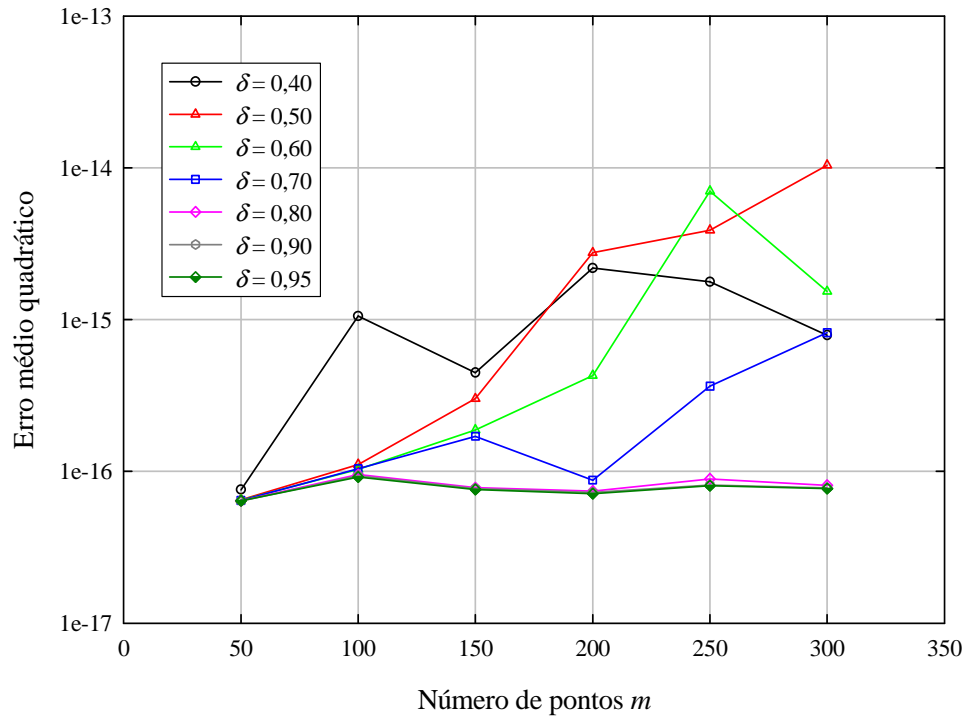


Figura 5.37 - Comportamento do método para o cilindro circular com dipolo em seu centro.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O desenvolvimento de métodos sem malha (*meshfree* ou *meshless*), os quais não necessitam de malhas no domínio e nem no contorno, surgiu da necessidade de se evitar dificuldades de integração que ocorriam nos métodos de elementos de contorno e complicações na realização de malhas em todo domínio, no caso dos métodos com malha. Os métodos sem malha discretizam o contorno do corpo a ser estudado através apenas de uma distribuição de pontos. Dentre esses métodos, o método das soluções fundamentais (MSF) surgiu como um efetivo método de contorno sem malha principalmente para a solução de equações diferenciais homogêneas. MSF exige apenas que as condições de contorno sejam satisfeitas e que as soluções fundamentais sejam conhecidas. O MSF aproxima a solução por meio da combinação linear das soluções fundamentais do operador diferencial governante, satisfazendo as condições de contorno. Outra vantagem é que o domínio de integração pode ser colocado fora do domínio que contém as singularidades, evitando-as assim.

No contexto da aerodinâmica, o desenvolvimento do MSF neste trabalho visou obter a solução de um escoamento potencial em torno de corpos isolados, tanto sob um escoamento uniforme incidente, como sob um escoamento singular, ou seja, um escoamento incidente representado por singularidades. Todos os cálculos e equacionamentos foram realizados em coordenadas complexas pela facilidade de implementação. Como o domínio de interesse é externo ao corpo, as singularidades do método foram localizadas no interior do corpo. O escoamento foi representado pelo laplaciano da função corrente, cuja solução fundamental é a função corrente de um vórtice. Logo, trata-se de um MSF baseado em vórtices para problemas

de aerodinâmica bidimensional.

A aplicação do método proposto foi analisada em diferentes corpos. No caso do cilindro circular com escoamento incidente uniforme, o método mostrou uma ótima convergência e os resultados alcançaram a precisão da máquina em certas condições. Já no caso de um cilindro de seção elíptica, os resultados somente convergiam quando as singularidades não eram localizadas além do centro de curvatura dos bordos, o que indicou que a variação de curvatura do contorno do corpo influenciava decisivamente o comportamento do método. Notou-se também que a proximidade excessiva entre os pontos singulares, quando esses são distribuídos no interior de corpos muito esbeltos, causava uma interferência entre esses pontos, piorando os resultados. Além disso, há dificuldades em se captar os efeitos causados pela singularidade presente no bordo de fuga quando este era agudo ou afilado.

Desse modo, uma transformação conforme inversa (no caso de corpos isolados com escoamento incidente uniforme, a transformação de Joukowski inversa) foi obtida e aplicada a fim de se facilitar a distribuição das singularidades. Uma minimização da dispersão da variação de curvatura do contorno do corpo transformado foi realizada com o objetivo de se reduzir a sua influência nos resultados. Essa técnica foi empregada em um perfil simétrico, NACA 65-010, e em dois perfis arqueados, NACA 65-906 e NACA 65-910. Os resultados obtidos apresentaram uma boa precisão. Nesses casos em que há variação de curvatura, as singularidades devem ser localizadas próximas ao contorno do corpo a fim de se captar os efeitos causados por tal variação.

Visando uma futura aplicação do método proposto em grades lineares de perfis de aerofólio, estudou-se o caso de um cilindro circular com escoamento incidente singular já que não é possível encontrar a transformação de Weingarten inversa. O escoamento incidente foi representado por uma fonte e um sumidouro de mesma intensidade, um vórtice anti-horário e um vórtice horário também de mesma intensidade, e pela combinação de ambos. As singularidades do escoamento mostraram ter uma forte influência na precisão do método quando se aproximavam do contorno do corpo. Porém, ainda assim o método apresentou uma boa convergência e resultados com boa precisão. Quando foram adicionadas reflexões das singularidades do escoamento no interior do corpo (teorema do círculo, Milne-Thomson, 1955), os erros cometidos foram reduzidos, chegando a oscilar em torno da precisão da máquina em alguns casos. Esse comportamento mostrou que é possível aplicar o método proposto em grades lineares utilizando a transformação de Weingarten e se obter resultados com alta precisão.

Baseado nesses resultados, um último caso foi analisado. Adicionou-se um dipolo no centro de um cilindro circular com escoamento incidente uniforme. A perturbação causada pela distribuição de vórtices do MSF no interior do corpo ficou próxima da precisão da máquina, piorando um pouco conforme o número de condição do sistema aumentava.

Diante desses resultados, pode-se notar que o MSF é altamente preciso e possui boa convergência em geral. O MSF baseado em vórtices se mostrou de fácil implementação, o uso de variáveis complexas favoreceu a aplicação do mesmo, o custo computacional foi muito baixo, além de permitir a combinação de vários tipos de singularidades a fim de se aprimorar os resultados. Entretanto, algumas desvantagens também foram observadas. O condicionamento do sistema piora rapidamente quando o contorno fictício se afasta do contorno do corpo, piorando a precisão dos resultados. A distribuição das singularidades se torna difícil no interior de corpos esbeltos e de corpos com bordo de fuga agudo ou afilado, havendo a necessidade de se utilizar técnicas auxiliares. Além disso, o método proposto se mostrou muito sensível a variações de curvatura no contorno do corpo a ser estudado.

Com base no que foi abordado no presente trabalho, cabem algumas sugestões para se continuar estudando o comportamento do MSF no contexto da aerodinâmica e suas aplicações:

- Utilizar fontes pontuais como as singularidades do método e, em consequência, representar o escoamento por meio do potencial de velocidades, a fim de se verificar se ocorre uma melhora nos resultados ou se o sistema se torna menos mal condicionado do que no caso de se utilizar vórtices ao se afastar o contorno fictício do contorno do corpo ou ao se aumentar o número de pontos.
- Introduzir um dipolo no centro do corpo transformado nos casos em que a transformação conforme inversa é aplicada a fim de se facilitar a obtenção de um corpo o mais suave possível no plano transformado.
- Desenvolver um método iterativo para a obtenção da transformação de Weing inversa a fim de se possibilitar a aplicação do método proposto no caso de grades lineares de perfis de aerofólio.
- Para o caso de problemas inversos, o método proposto poderia ser empregado juntamente com a transformação conforme (de Joukowski e de Weing) de forma direta.

Desse modo, procurar-se-ia o perfil de aerofólio, ou a grade linear, que atendesse a uma certa condição de projeto (uma dada distribuição de pressão, por exemplo) apenas variando o parâmetro de transformação no plano transformado.

- Além de se trabalhar com grades lineares, as quais representam rotores de máquinas axiais, a técnica desenvolvida poderia ser aplicada em casos de rotores de máquinas radiais e diagonais lançando mão de transformações adicionais para se obter uma representação em grade linear (Lewis, 1996) e, então, empregar a transformação de Weinig.
- Estudar variações do método proposto visando a sua aplicação diretamente no plano físico. Porém, no caso de perfis com bordo de fuga agudo ou afilado, seria necessário adicionar um painel no bordo de fuga com uma distribuição de vórtices a fim de se captar o efeito desse bordo no escoamento e nos resultados dos cálculos.
- Desenvolver um estudo para a aplicação do MSF em problemas de aerodinâmica tridimensional.
- Estudar a possível aplicação do MSF juntamente com o Método de Vórtices. Nesse caso, não seria necessário empregar o teorema do círculo no caso do cilindro circular, dispensando a necessidade de se gerar uma imagem da nuvem de vórtices no interior do corpo sem perder precisão e sem deixar de satisfazer as condições de contorno. Além disso, deixam de se ter singularidades no contorno e, em consequência, problemas de integração, como é o caso do método dos painéis. Desse modo, seria possível obter uma boa precisão numérica, como no caso em que o teorema do círculo é aplicado, e baixo custo computacional (como no método dos painéis), já que o número de vórtices dentro do corpo é fixo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHEN, C. S., HON, Y. C., SCHABACK, R. A. (2007)**, *Scientific Computing with Radial Basis Functions*. Material não publicado disponível no sítio <http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/SCwRBF.pdf>.
- DRAGOS, L. (1982)**, “Method of Fundamental Solutions in Plane Steady Linear Aerodynamics”. *Acta Mechanica*, vol. 47, pp. 277-282.
- FAIRWEATHER, G., KARAGEORGHIS, A. (1998)**, “The Method of Fundamental Solutions for Elliptic Boundary Value Problems”. *Advances in Computational Mathematics*, vol. 9, pp. 69-95.
- FERZIGER, J. H. (1981)**, *Numerical Methods for Engineering Application*, John Wiley & Sons.
- IMSL (1999)**, *IMSL MATH/LIBRARY User's Manual Vol. 1 and 2*, version 4.01, IMSL, Houston.
- JOHNSTON, R. L., FAIRWEATHER, G. (1984)**, “The Method of Fundamental Solutions for Problems in Potential Flow”. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 8, pp. 265-270.
- KARAGEORGHIS, A., FAIRWEATHER, G. (1999)**, “Method of Fundamental Solutions for Axisymmetric Potential Problems”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 1653-1669.
- KARAGEORGHIS, A., SMYRLIS, Y. S. (2007)**, “Conformal Mapping for The Efficient MFS Solution of Dirichlet Boundary Value Problems”. *Technical Report*, Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, 21 p.

- KARAMCHETI, K. (1980)**, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 636 p.
- KATSURATA, M., OKAMOTO, H. (1996)**, “The Collocation Points of The Fundamental Solution Method for The Potential Problem”. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 31, n. 1, pp. 123-137.
- LAKSHMINARAYANA, B. (1996)**, *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*, John Wiley and Sons Inc., 848 p.
- LEWIS, R. I. (1991)**, *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 592p.
- LEWIS, R. I. (1996)**, “Turbomachinery Performance Analysis”, Elsevier Science & Technology Books.
- LEWIS, R. I. (1999)**, “Vortex Element Methods, The Most Natural Approach to Flow Simulation – A Review of Methodology with Applications”. *Proceedings of 1st Int. Conference on Vortex Methods*, nov. 4-5, pp. 1-15.
- LIMA, F. S. (2007)**, *Características Aerodinâmicas de Aerofólios de Alto Desempenho*. Trabalho de Diploma, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI, 100p.
- MATHON, R., JOHNSTON, R. L. (1977)**, “The Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems by Fundamental Solutions”. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 14, n. 4, pp. 638-650.
- MILNE-THOMSON, L. M. (1955)**, *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan & Co..
- PETRUCCI, D. R. (2003)**, *Métodos Inversos para o Projeto Aerodinâmico de Turbomáquinas Axiais*. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, UNIFEI, 119 p.
- SMYRLIS, Y. S., KARAGEORGHIS, A. (2004)**, “A Linear Least-Squares MFS for Certain Elliptic Problems”. *Numerical Algorithms*, vol. 35, pp. 29-44.

SMYRLIS, Y. S., KARAGEORGHIS, A. (2008), “Efficient Implementation of The MFS: The Three Scenarios”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 227, issue 1, pp. 83-92.

TANAKA, S., MURATA, S., KURATA, K. (1991), “Computation of The Potential Flow Through Cascades Using The Conformal Mapping and The Singularity Method”. *JSME International Journal*, series II, vol. 34, n. 4, pp. 423-430.

Apêndice A

EXEMPLOS DE DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO

Nesse apêndice serão mostrados alguns exemplos de distribuição de pressão para demonstrar a eficiência e a precisão dos cálculos utilizando-se o método das soluções fundamentais baseado em vórtices. Alguns resultados são comparados com o método dos painéis e com a solução exata, quando for o caso.

O primeiro caso a ser mostrado é a distribuição de pressão em torno de um cilindro circular de raio unitário e com incidência nula. Todos os cálculos são feitos no plano físico. No MSF baseado em vórtices, foram utilizados 100 pontos no contorno do corpo (m) e um fator de distância δ de 0,8, conforme definido no Capítulo 5. Já no caso do método dos painéis, foi empregado um número m de painéis igual a 96. Esses resultados foram obtidos a partir do trabalho de Lima (2007). Finalmente, a solução exata também é confrontada com os resultados numéricos, conforme a Figura A.1. Pode-se notar que ambos os resultados numéricos coincidem com a solução exata.

Na sequência, os resultados obtidos para a distribuição de pressão em torno de uma elipse de relação de aspecto igual a 0,5 são ilustrados na Figura A.2. Novamente, no MSF baseado em vórtices foram utilizados $m = 100$ e $\delta = 0,8$ (Capítulo 5). No método dos painéis, foram utilizados 96 painéis. Por fim, a solução exata também é calculada. Todos os resultados são obtidos no plano físico. Podemos observar que nesse caso o MSF apresenta uma maior precisão do que o método dos painéis, coincidindo com a solução exata da elipse.

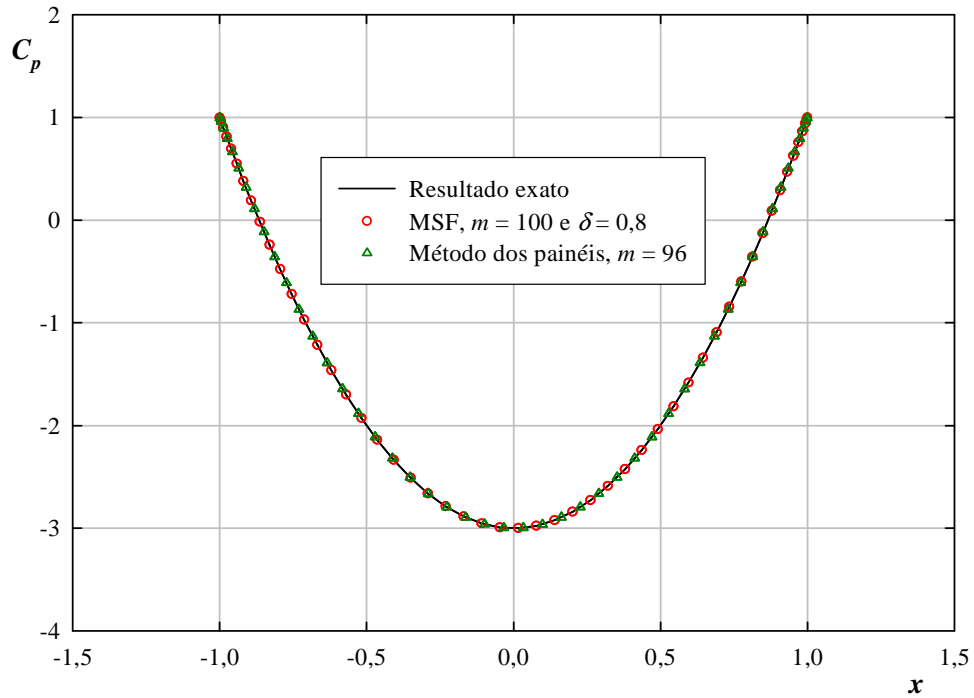


Figura A.1 – Distribuição de pressão em torno de um cilindro circular sem incidência.

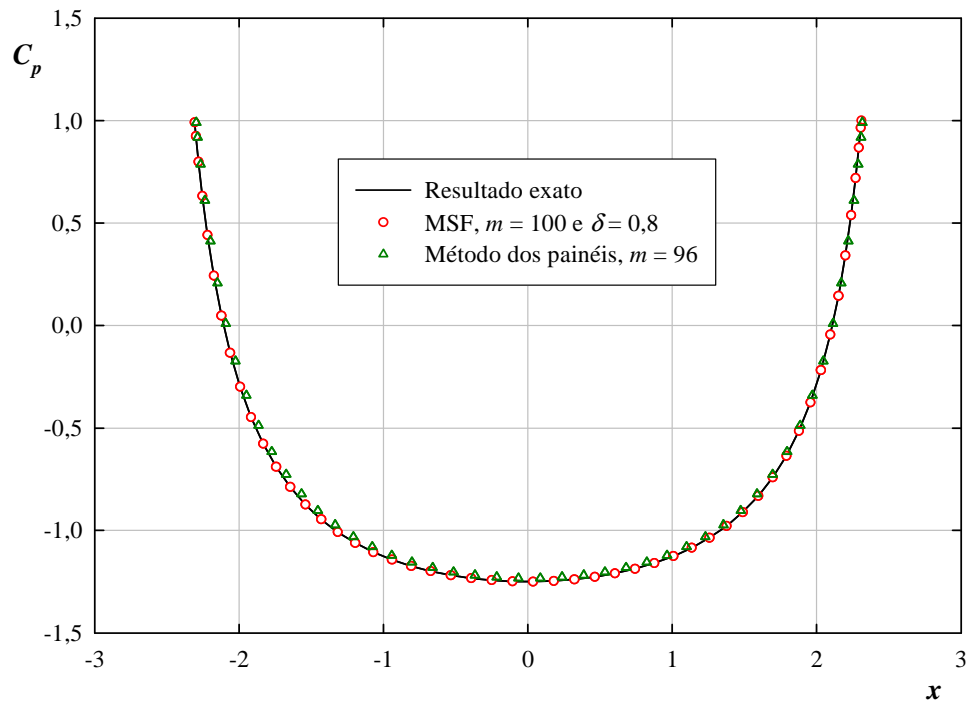


Figura A.2 – Distribuição de pressão em torno de uma elipse de relação de aspecto de 0,5 sem incidência.

As Figuras A.3, A.4 e A.5 mostram a distribuição de pressão em torno de três perfis NACA da série 65 no plano físico. Nos três casos foram utilizados $m = 200$ e a definição de δ conforme foi explicado no Capítulo 5. No caso do perfil simétrico NACA 65-010, $\delta = 0,8$.

Podemos notar uma pequena oscilação da distribuição de pressão na região do bordo de ataque e do bordo de fuga. Isso ocorre porque quando há uma variação de curvatura, mesmo sendo o perfil suave, a velocidade em torno do perfil é alterada e, em consequência, a distribuição de pressão também.

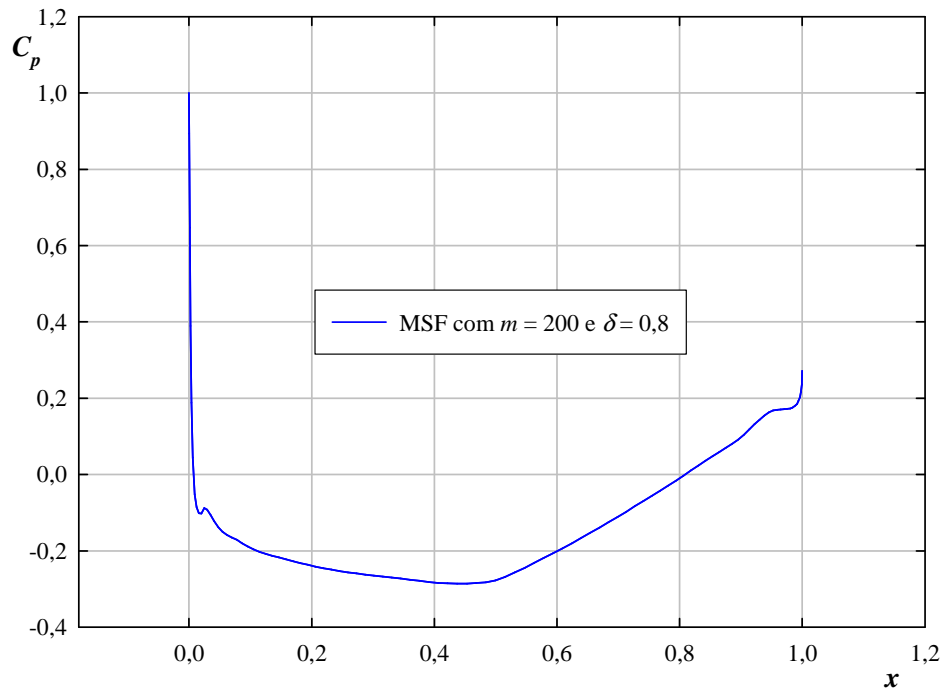


Figura A.3 – Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-010 sem incidência.

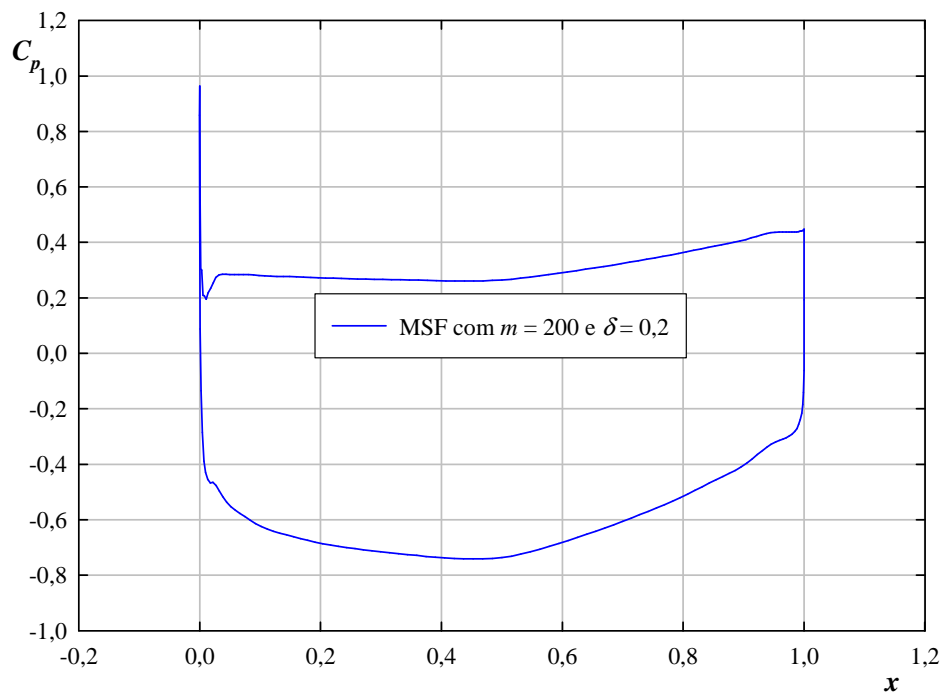


Figura A.4 – Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-906 sem incidência.

Podemos observar um comportamento semelhante na distribuição de pressão dos perfis arqueados NACA 65-906 e NACA 65-910 (Figuras A.4 e A.5 respectivamente). Nesses dois últimos casos, utilizou-se $\delta = 0,2$. Como o bordo de fuga nos três perfis é afilado, a velocidade nesse bordo não é nula e isso causa uma indeterminação na hora de se obter a velocidade no plano físico. Em consequência, o valor de C_p no bordo de fuga converge para um valor diferente de 1.

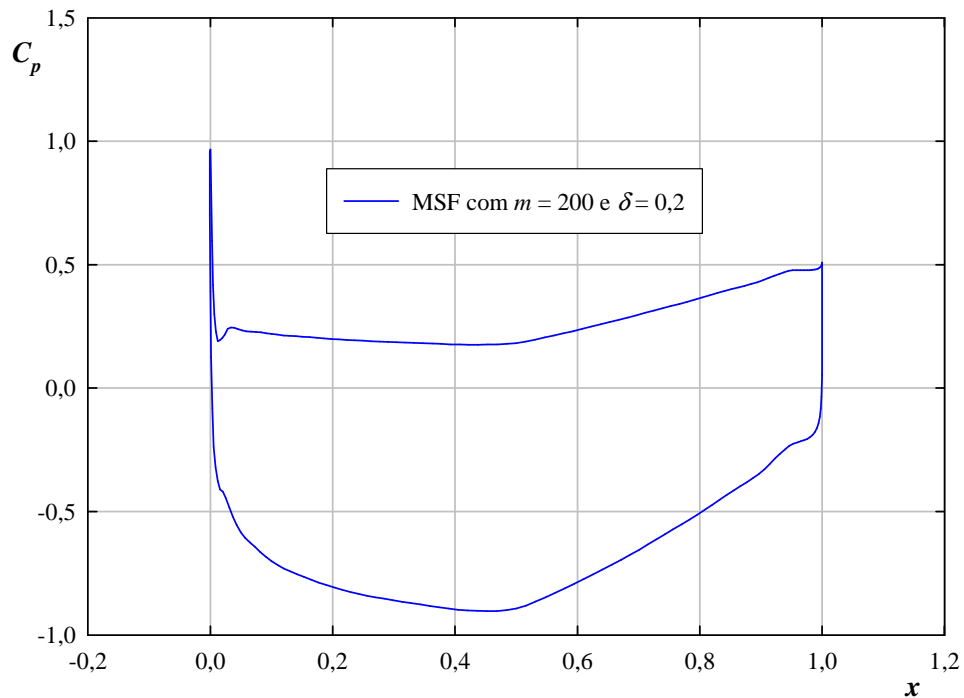


Figura A.5 – Distribuição de pressão em torno do perfil NACA 65-910 sem incidência.