

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Determinação das Propriedades Ópticas  
do Radiotelescópio GEM em 5 GHz e em 10 GHz**

**Ana Lúcia Lima Machado**

Dissertação de Mestrado, orientada pelo Prof. Dr. Newton de Figueiredo Filho

ITAJUBÁ, 24 DE FEVEREIRO DE 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Determinação das Propriedades Ópticas  
do Radiotelescópio GEM em 5 GHz e em 10GHz**

**Ana Lúcia Lima Machado**

Dissertação de Mestrado, orientada pelo Prof. Dr. Newton de Figueiredo Filho

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

24 DE FEVEREIRO DE 2010

*Aos meus pais,  
Manoel Eufrásio Machado e  
Maria de Lourdes Lima Machado.*

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado forças para chegar ao término deste trabalho.

Aos meus pais Manoel e Lourdes, irmã Adalgisa por toda confiança, apoio e incentivo que me deram ao longo desta jornada.

Ao meu orientador Prof. Newton de Figueiredo Filho, por todo o afincamento na orientação, paciência e disposição durante o desenvolvimento e finalização do trabalho, enfim pela confiança e oportunidade.

A minha prima Ângela por ter me acolhido em sua casa, por sua confiança e apoio.

A minha amiga Fabrícia pela amizade, ânimo e apoio, abrandando sempre os momentos mais difíceis com seu exemplo de vida.

Aos meus amigos do Laboratório de Micro-ondas, Márcia, Vanessa, Juliana, Aline, em especial ao Adhimar pela ajuda na confecção desta dissertação e tantos outros que conviveram comigo ao longo deste mestrado, sempre presentes com ajuda, respeito e amizade.

Aos professores que tive ao longo da minha vida.

Esperai no Senhor com toda a confiança.  
Ele se inclinou para mim, ouviu meus brados.  
Tirou-me de uma fossa mortal, de um charco de lodo;  
assentou-me os pés numa rocha, firmou os meus passos;

*Salmos, 39*

# Resumo

Neste trabalho são apresentadas diversas análises teóricas de desempenho na determinação das propriedades ópticas do radiotelescópio GEM (Galactic Emission Mapping) feitas com auxílio de programas baseados em óptica geométrica e óptica física, bem como a revisão de conceitos teóricos importantes para o desenvolvimento do trabalho. A óptica do radiotelescópio GEM em 5 GHz e em 10 GHz é do tipo Cassegrain, composta por um refletor primário parabólico de 5,5 m e por um refletor secundário de 80 cm. Em 0,408 GHz, 1,465 GHz e 2,3 GHz, a configuração utilizada apresenta apenas o refletor parabólico. A análise da função de alargamento de ponto (*Point Spread Function* - PSF) mostra que a aberração do sistema é muito pequena. A análise de frente de onda ao longo do eixo óptico mostra que em 5 GHz o erro PV (pico-a-vale) é igual a  $8,6 \times 10^{-4}$  e que o erro RMS é  $2,3 \times 10^{-4}$ . Já em 10 GHz, o erro PV é igual a  $1,7 \times 10^{-3}$  e o erro RMS é  $4,6 \times 10^{-4}$ . Em um plano deslocado de 250 mm do foco, o raio do diagrama de mancha (*spot diagram*) é de 49 mm, ao passo que o raio do disco de Airy nessa mesma posição é de 137 mm em 5 GHz e de 69 mm em 10 GHz. Estes resultados serão usados no projeto do receptor do GEM em 10 GHz, que será sensível em intensidade total e polarização.

**Palavras-chave:** projeto óptico, qualidade de imagem, telescópios, antenas

# Abstract

In this work we present several theoretical performance analyses of the optical properties of the Galactic Emission Mapping (GEM) radiotelescope using geometrical optics and physical optics software. We also present a review of important theoretical concepts in optical design. The GEM radiotelescope at 5 GHz and at 10 GHz employs a Cassegrain configuration with a 5.5-m primary parabolic reflector and a 80-cm hyperbolic secondary reflector. At 0.408 GHz, 1.465 GHz and 2.3 GHz, GEM employs only the primary reflector. The Point Spread Function (PSF) analysis shows a very small aberration. The on-axis wavefront analysis at 5 GHz shows that the peak-to-valley error is  $8.6 \times 10^{-4}$ , while the RMS error is  $2.3 \times 10^{-4}$ . At 10 GHz the peak-to-valley error is  $1.7 \times 10^{-3}$  and the RMS error is  $4.6 \times 10^{-4}$ . At a plane 250 mm behind the focus, the spot diagram radius is 49 mm, while the Airy disk radius at the same position is 137 mm at 5 GHz and 69 mm at 10 GHz. These results will now be employed to design the GEM 10 GHz receiver, which will measure both total power and polarization.

**Keywords:** optical design, image quality, telescopes, antennas

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos de Óptica</b>	<b>3</b>
2.1 A Óptica Geométrica e a Óptica Física . . . . .	3
2.1.1 Conceitos de Óptica Geométrica e Projeto Óptico . . . . .	3
2.1.2 Conceitos de Óptica Física . . . . .	18
<b>3 Desempenho Óptico e Qualidade de Imagem</b>	<b>30</b>
3.1 Medidas de Distorção da Imagem . . . . .	30
3.1.1 Diagramas de Pontos . . . . .	30
3.1.2 Função de Alargamento de Ponto . . . . .	31
3.1.3 Parcela de Energia Contida . . . . .	32
3.1.4 Efeitos da Difração . . . . .	33
3.1.5 Erros de Frentes de Onda . . . . .	33
3.1.6 Resolução Óptica . . . . .	35
3.1.7 Função de Transferência de Modulação . . . . .	35

<b>4</b>	<b>Geometria dos Telescópios</b>	<b>39</b>
4.1	Seções Cônicas . . . . .	39
4.1.1	Elipse . . . . .	40
4.1.2	Círculo . . . . .	41
4.1.3	Hipérbole . . . . .	41
4.1.4	Parábola . . . . .	42
4.2	Propriedades Refletoras das Cônicas . . . . .	43
4.2.1	A Propriedade de Reflexão da Elipse . . . . .	43
4.2.2	A Propriedade de Reflexão das Parábolas . . . . .	47
4.2.3	A Propriedade de Reflexão das Hipérboles . . . . .	49
4.3	Antenas Refletoras . . . . .	51
4.3.1	Refletor Esférico . . . . .	51
4.3.2	Refletor Parabólico . . . . .	51
4.3.3	Refletores elípticos e hiperbólicos . . . . .	52
4.3.4	Sistemas de dois refletores . . . . .	52
4.4	Antenas e Radiação . . . . .	56
4.4.1	Aproximação Gaussiana . . . . .	57
4.5	O Projeto GEM . . . . .	58
4.5.1	A óptica do radiotelescópio GEM . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Resultados e Análises</b>	<b>62</b>
5.1	A Óptica do Radiotelescópio GEM . . . . .	62
5.1.1	Análise do Traçado de Raios . . . . .	65
5.1.2	Análise de Frente de Onda . . . . .	65
5.1.3	Análise do Disco de Airy . . . . .	66
5.1.4	Análise do Diagrama de Pontos . . . . .	66
5.1.5	Análise da Função de Alargamento dos Pontos . . . . .	67
5.2	Dados Obtidos no Grasp 9 . . . . .	74
	<b>Conclusões</b>	<b>78</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

2.1	Passagem de uma frente de ondas planas pela interface de dois meios. . . .	4
2.2	Ilustração demonstrando o caminho percorrido por um ponto da frente de onda ao passar pela interface entre os dois meios. . . . .	6
2.3	Posição dos pontos principais e secundários de um sistema óptico. . . . .	7
2.4	Posição dos pontos nodais no sistema óptico representados por $N_1$ e $N_2$ . . .	8
2.5	Esquema de traçado de raios representando a formação da imagem. . . . .	8
2.6	Esquema demonstrativo para determinação das propriedades da imagem. .	9
2.7	Refração de um raio em uma superfície esférica num dado sistema óptico. .	11
2.8	Esquema dos parâmetros utilizados numa aproximação paraxial de raios. .	12
2.9	Parâmetros utilizados na determinação das equações de transferências. . .	14
2.10	Parâmetros que se encontram na descrição das equações de transferência. .	15
2.11	Parâmetros que se encontram na descrição das equações de transferências dos traçados de raios meridionais. . . . .	16
2.12	Definições de pupila de entrada (a) e pupila de saída (b). . . . .	18
2.13	Padrão de interferência obtido por Thomas Young em seus experimentos. .	21
2.14	Esquema geométrico representando a interferência no caso de duas fendas .	21
2.15	Caminhos ópticos no experimento de interferência. . . . .	23
2.16	Polarização Linear, Elíptica e Circular. . . . .	25
2.17	Elipse de polarização com as componentes $E_z$ e $E_y$ e os valores máximos $E_1$ e $E_2$ . . . . .	26
3.1	Diagrama de pontos criado por uma lente simples mostrando aberração esférica. . . . .	31
3.2	Função de alargamento de pontos (PSF) para um sistema livre de aberração.	31
3.3	Função de alargamento de pontos (PSF) para um sistema óptico com aberração de coma. . . . .	32

3.4	Parcela de energia contida para um sistema livre de aberração e com aberração de coma. . . . .	32
3.5	Elementos da lente introduzindo erro de frente de onda (aberração esférica).	34
3.6	Strehl ratio é expresso como a fração de iluminação correspondente a um sistema perfeito. . . . .	35
3.7	Resolução óptica: capacidade de um sistema óptico para resolver dois objetos.	36
3.8	Intensidades combinadas para dois pontos em função de <i>f-number</i> . . . . .	36
3.9	Efeitos da difração sobre a quantidade de contraste transferido com o aumento da frequência espacial. . . . .	37
3.10	Gráfico da MTF em função da frequência espacial. . . . .	38
4.1	Seção Cônica Parábola. . . . .	39
4.2	Seção Cônica Elipse. . . . .	40
4.3	Seção Cônica Hipérbole. . . . .	40
4.4	Parábola no plano <i>xy</i> . . . . .	42
4.5	Propriedade refletora da elipse. . . . .	44
4.6	Propriedade refletora da parábola. . . . .	48
4.7	Propriedade refletora da hipérbole. . . . .	50
4.8	Um refletor esférico com o bloqueio no centro de curvatura forma uma imagem esférica concêntrica na superfície focal. . . . .	51
4.9	O refletor parabólico é livre de astigmatismo quando o bloqueio está no foco.	52
4.10	Um objeto puntiforme em um dos focos do refletor elíptico tem sua imagem formada no outro foco sem aberração esférica (a). O telescópio Gregoriano usa um espelho primário parabólico e um secundário elíptico de modo que a imagem não tem aberração esférica (b). . . . .	53
4.11	O raio direcionado para o foco da hipérbole é refletido para outro foco (Refletor Cassegrain). . . . .	54
4.12	Duplo refletor Newtoniano. . . . .	55
4.13	Duplo refletor Cassegrain. . . . .	55
4.14	Duplo refletor Gregoriano. . . . .	55
4.15	Diagrama de radiação de uma antena em coordenadas polares e em escala linear. . . . .	56

4.16 Diagrama de radiação de uma antena em coordenadas retangulares e decibéis (escala logarítmica). . . . .	57
4.17 Perfil da Intensidade do feixe Gaussiano. . . . .	58
4.18 Radiotelescópio GEM no sítio de Cachoeira Paulista - SP. . . . .	59
4.19 Trajetória do feixe descrito pela antena na esfera celeste. . . . .	60
4.20 Trajetória calculada para os feixes de micro-ondas incidentes na antena GEM. . . . .	61
5.1 Distâncias focais no telescópio tipo Cassegrain. . . . .	62
5.2 Elementos da Hipérbole. . . . .	63
5.3 Traçado dos raios do sistema óptico de GEM obtidos no OSLO. . . . .	64
5.4 Análise do raio para 5 GHz. . . . .	65
5.5 Análise do raio para 10 GHz. . . . .	68
5.6 Análise da Frente de Onda para 5 GHz. . . . .	68
5.7 Análise da Frente de Onda para 10 GHz. . . . .	69
5.8 Análise do Disco de Airy para 5 GHz. . . . .	69
5.9 Análise do Disco de Airy ( $z = 250$ ). . . . .	70
5.10 Análise do Disco de Airy para 10 GHz. . . . .	70
5.11 Análise do Disco de Airy ( $z = 250$ ). . . . .	71
5.12 Análise do Diagrama de Pontos para 5 GHz. . . . .	71
5.13 Análise do Diagrama de Pontos para 10 GHz. . . . .	72
5.14 Análise do Alargamento dos pontos para 5 GHz. . . . .	72
5.15 Análise do Alargamento dos pontos para 10 GHz. . . . .	73
5.16 Diagrama de radiação do Telescópio GEM em 10 GHz em escala logarítmica. . . . .	75
5.17 Diagrama de radiação do Telescópio GEM em 5 GHz em escala logarítmica. . . . .	75
5.18 Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 10 GHz. . . . .	76
5.19 Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 5 GHz. . . . .	76
5.20 Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 2,3 GHz. . . . .	76
5.21 Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 1,465 GHz. . . . .	77
5.22 Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 0,408 GHz. . . . .	77

# Lista de Tabelas

4.1	Descrição óptica do radiotelescópio GEM. . . . .	61
5.1	Parâmetros do refletor secundário do telescópio GEM. . . . .	63
5.2	Parâmetros de Entrada do OSLO. . . . .	64
5.3	Parâmetros de Entrada do Grasp9. . . . .	74
5.4	Tabela HPBW obtidos no GRASP9. . . . .	75

# Capítulo 1

## Introdução

A Óptica é uma das áreas da Física que permite a utilização de grande parte dos seus conceitos no desenvolvimento de diversos projetos tanto para fins científicos quanto comerciais. Com programas baseados em Óptica Geométrica e Óptica Física é possível a construção de um projeto óptico e também a análise do desempenho do sistema criado. Esses programas utilizam técnicas matemáticas e computacionais para realizar iterações sucessivas das funções de otimização para que o sistema alcance seu melhor desempenho. Apesar da maioria destes programas ser voltada para utilização em comprimentos de ondas visíveis, é possível obter resultados significativos referentes à avaliação da imagem de uma antena de micro-ondas. Para a elaboração deste trabalho foram utilizados os programas OSLO (*Optics Software For Layout and Optimization*), da Lambda Research e a versão de estudante do programa de óptica física GRASP9 (*General Reflector Antenna Software Package*), da TICRA.

Neste trabalho foram realizadas diversas análises teóricas do desempenho do radiotelescópio GEM (*Galactic Emission Mapping*), situado em Cachoeira Paulista, para as frequências de 0,408 GHz, 1,465 GHz, 2,3 GHz, 5 GHz e 10 GHz. O projeto do receptor em 10 GHz foi iniciado em 2008 e quando estiver em operação vai ser sensível em intensidade total e polarização.

No segundo capítulo é feita uma revisão dos conceitos básicos de Óptica e a teoria necessária para o desenvolvimento de um projeto de óptica. Da Óptica Geométrica são abordados temas importantes como o traçado de raios paraxiais e a formação de imagens e da Óptica Física os fenômenos relacionados ao caráter ondulatório da luz.

O terceiro capítulo discute os diversos métodos utilizados para medição de desempenho óptico, como medidas de distorção de imagem e qualidade de imagens. São apresentados nesse capítulo medidas de diagramas de pontos, a função de propagação de pontos, erros de frente de onda, entre outros.

O quarto capítulo aborda a geometria dos telescópios, apresentando definições sobre elipse, parábola e hipérbole bem como a demonstração das suas propriedades refletoras. As propriedades refletoras da hipérbole e da parábola, por exemplo, são essenciais em projetos de telescópios refletores tipo Cassegrain. Ainda nesse capítulo são descritos os tipos de sistemas refletores enfatizando as aberrações na formação de imagem para cada tipo. O capítulo apresenta também uma breve discussão sobre antenas e radiação, destacando o diagrama de radiação e a aproximação gaussiana e um resumo da descrição óptica do radiotelescópio GEM.

Os resultados e as análises dos dados obtidos com o auxílio do programa de traçado de raios OSLO e o programa de óptica física GRASP9 são apresentados no quinto capítulo. Pôde-se avaliar muitos aspectos do projeto como os possíveis efeitos das aberrações na análise do traçado dos raios e nos gráficos referentes às análises de frente de onda, disco de Airy, diagrama de pontos, função de alargamento dos pontos. São mostrados os resultados obtidos com as simulações do feixe da antena para 5 GHz e 10 GHz e as estimativas das larguras dos feixes a meia potência (HPBW) para 0,408 GHz, 1,465 GHz, 2,3 GHz, 5 GHz e 10 GHz.

As conclusões deste trabalho são finalmente expostas no último capítulo com o resumo das análises obtidas pelo traçado de raios e as simulações do feixe da antena.

# Capítulo 2

## Conceitos de Óptica

### 2.1 A Óptica Geométrica e a Óptica Física

Este capítulo procura revisar conceitos básicos de Óptica Geométrica e Óptica Física necessários para realização do trabalho, bem como apresentar uma visão geral da teoria relacionada a um projeto óptico.

A Óptica Geométrica estuda os fenômenos que podem ser descritos sem que haja necessidade de se conhecer a natureza física da luz, usando como instrumento a geometria. A Óptica Física, por sua vez, estuda a compreensão da natureza física da luz, da sua interação com objetos e com ela mesma. Ela descreve aspectos referentes ao comportamento da luz como interferência, polarização, dispersão, emissão, absorção e difração (Smith e Thomson, 1973).

#### 2.1.1 Conceitos de Óptica Geométrica e Projeto Óptico

Os programas utilizados em projetos ópticos usam cálculos fundamentados na Óptica Geométrica e o cálculo da formação da imagem exige a interpretação desses resultados geométricos com o uso da Óptica Física (Smith e Thomson, 1973). Esta seção introduz uma revisão dos conceitos básicos importantes para o Projeto Óptico e o desenvolvimento deste trabalho.

O conceito de raio de luz é o mais apropriado para a maioria das aplicações, já que manejar matematicamente uma frente de onda é um trabalho um pouco mais complexo. O raio de luz é a trajetória descrita por um único ponto da frente de onda. Logo os raios de luz, num meio isotrópico, são linhas retas normais à frente de onda. Um sistema óptico

no qual os raios procedentes de uma fonte pontual convergem para um único ponto na imagem é chamado de sistema perfeito de lentes (Smith, 1990).

A óptica de primeira ordem, também chamada de óptica gaussiana, faz referência à óptica de sistemas perfeitos. As equações de primeira ordem podem ser encontradas reduzindo-se as equações trigonométricas exatas do traçado dos raios para o caso limite em que a altura do objeto e da imagem e os ângulos se tendem a zero. Essas aproximações são válidas somente na região próxima ao eixo óptico conhecida como região paraxial. Enfim, a *Óptica Geométrica Paraxial* aborda a propagação de luz por um sistema óptico centrado, composto de superfícies refletoras ou refratoras com simetria de rotação em torno do eixo óptico. Sistemas ópticos centrados possuem a propriedade de que um raio passando suficientemente próximo ao eixo óptico faz um ângulo de incidência pequeno com a normal a qualquer superfície. Esse raio é chamado de *raio paraxial* (Zílio, 2009).

## Refração

Considera-se uma frente de onda plana incidindo sobre uma superfície plana que separa dois meios, conforme esquematizado na Figura 2.1.

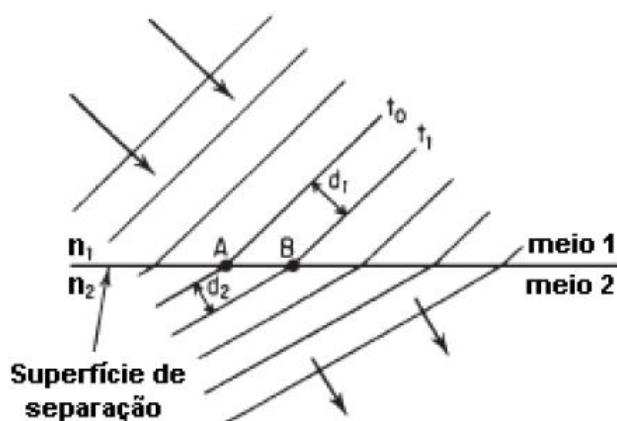


Figura 2.1: Passagem de uma frente de ondas pela interface de dois meios.

Fonte: Smith (1990)

As linhas paralelas na Figura 2.1 representam a posição da frente de onda em intervalos de tempo regulares, sendo  $n_1$  o índice de refração do meio 1 e  $n_2$  o índice de refração do meio 2, com  $n_2 > n_1$ . Então a velocidade da luz no meio 1 é igual a

$$v_1 = c/n_1 \quad (2.1)$$

e no meio 2

$$v_2 = c/n_2, \quad (2.2)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

A velocidade no meio 1 é dada por:

$$v_1 = (n_2/n_1)v_2. \quad (2.3)$$

A distância que a frente de onda percorre no meio 1 num determinado intervalo de tempo é:

$$d_1 = (n_2/n_1)d_2. \quad (2.4)$$

A Figura 2.1 mostra que num dado instante  $t_0$ , a frente de onda intercepta a superfície de separação entre os dois meios no ponto A; num instante  $t_1 = t_0 + t$ , ela atinge a interface no ponto B. No decorrer desse tempo, a frente de onda se move no meio 1 por uma distância

$$d_1 = v_1\Delta t = (c/n_1)\Delta t \quad (2.5)$$

e no meio 2 igual a

$$d_2 = v_2\Delta t = (c/n_2)\Delta t. \quad (2.6)$$

O percurso por onde um ponto da frente de onda intercepta a interface no ponto B está esquematizado na Figura 2.2.

As distâncias  $AB$  e  $BC$  devem ser iguais, já que as linhas paralelas representam a posição da frente de onda em intervalos de tempos iguais. O ângulo entre a frente de onda e a superfície ( $I_1$  e  $I_2$ ) é igual ao ângulo entre o raio e a normal à superfície  $XX'$ . Assim temos

$$AB = d_1/\text{sen}I_1 = BC = d_2/\text{sen}I_2. \quad (2.7)$$

Substituindo as Equações 2.5 e 2.6 na Equação 2.7 obtemos

$$c\Delta t/n_1\text{sen}I_1 = c\Delta t/n_2\text{sen}I_2. \quad (2.8)$$

Cancelando os termos iguais obtemos

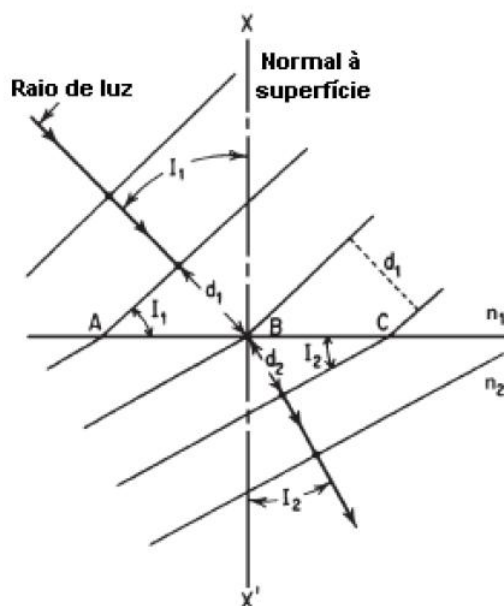


Figura 2.2: Caminho percorrido por um ponto da frente de onda ao passar pela interface entre os dois meios.

Fonte: Smith (1990)

$$n_1 \sin I_1 = n_2 \sin I_2. \quad (2.9)$$

Tal expressão foi apresentada pela primeira vez por W. Snell e é chamada de Lei de Snell (Zílio, 2009).

### Pontos Cardeais de um Sistema Óptico

São utilizadas muitas aproximações na determinação das características de formação de imagens. Mesmo que a qualidade da imagem formada por sistemas ópticos reais não dependa somente do próprio sistema, mas também das condições de operação, as teorias de formação de imagem são normalmente desenvolvidas com base na aproximação paraxial. Na aproximação paraxial os raios se propagam de acordo com leis relativamente simples que levam a técnicas diretas para descrição da formação da imagem. Para otimização de um sistema real é necessário compensar ou eliminar as aberrações de maneira que os raios reais converjam para o mesmo ponto da imagem que os raios paraxiais (Smith, 1990). Nesta seção é analisada a teoria de formação da imagem paraxial formulada por Gauss, que diferencia sistemas ópticos conforme vários pontos especiais, denominados pontos cardeais ou pontos gaussianos.

Os pontos gaussianos podem ser reunidos em: ponto principal primário e secundário, ponto nodal primário e secundário e ponto focal primário e secundário. Os pontos focais, primário e secundário, são os pontos para os quais os raios que incidem paralelos ao eixo óptico focam formando um ponto sobre o eixo. Se os raios que chegam e emergem do sistema são prolongados até se interceptarem, os pontos de intersecção vão definir uma superfície denominada *plano principal*. Dá-se esse nome, pois na região paraxial as distâncias ao eixo são infinitesimais e as superfícies podem ser consideradas como planas. O nome de ponto principal é dado à intersecção dessas superfícies com o eixo. O ponto focal secundário e o ponto principal secundário são definidos pelos raios à direita do sistema e o ponto focal primário e o ponto principal primário são definidos pelos raios à esquerda do sistema (Zílio, 2009).

A distância de um ponto focal ao ponto principal é denominada distância focal efetiva (*Effective Focal Length* - EFL) e a distância do vértice da última superfície do sistema ao ponto focal secundário é conhecida como distância focal traseira (*Back Focal Length* - BFL). Já a distância do vértice da primeira superfície ao ponto focal primário é chamada distância focal anterior (*Former Focal Length* - FFL), como mostra a Figura 2.3.

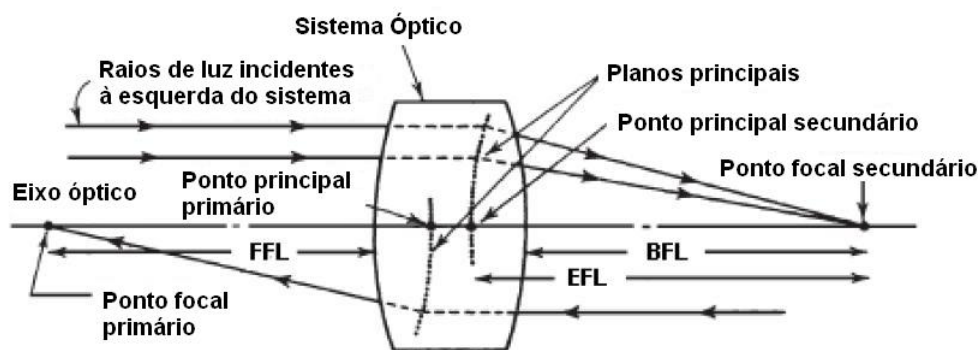


Figura 2.3: Posição dos pontos principais e secundários de um sistema óptico.

Fonte: Smith (1990)

Os pontos axiais que interceptam o prolongamento dos raios que chegam e emergem do sistema óptico denominam-se pontos nodais  $N_1$  e  $N_2$  (Figura 2.4). Caso o sistema óptico esteja circundado de ar por todos os lados, os pontos nodais coincidem com os pontos principais (Yasuoka, 1997).

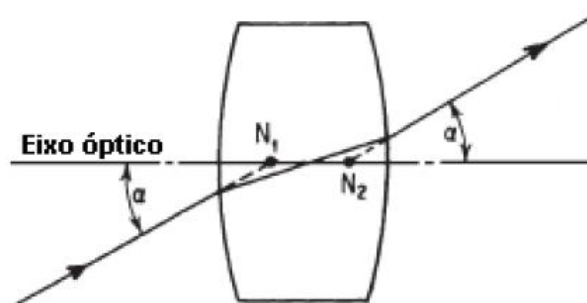


Figura 2.4: Posição dos pontos nodais no sistema óptico representados por  $N_1$  e  $N_2$ .

Fonte: Smith (1990)

### Formação de Imagens

Conhecidos os pontos cardiais de um sistema, pode-se facilmente definir as características (posição e tamanho) da imagem formada por esse sistema.

No esquema representado na Figura 2.5 veem-se os pontos focais  $F_1$  e  $F_2$  e os pontos principais  $P_1$  e  $P_2$  de um sistema óptico. O segmento  $AO$  representa o objeto. Assim, para determinar a imagem é necessário um raio que incide paralelamente ao eixo óptico e que emerge passando por  $F_2$  e outro raio que incide por  $F_1$  e emerge de forma paralela ao eixo óptico.

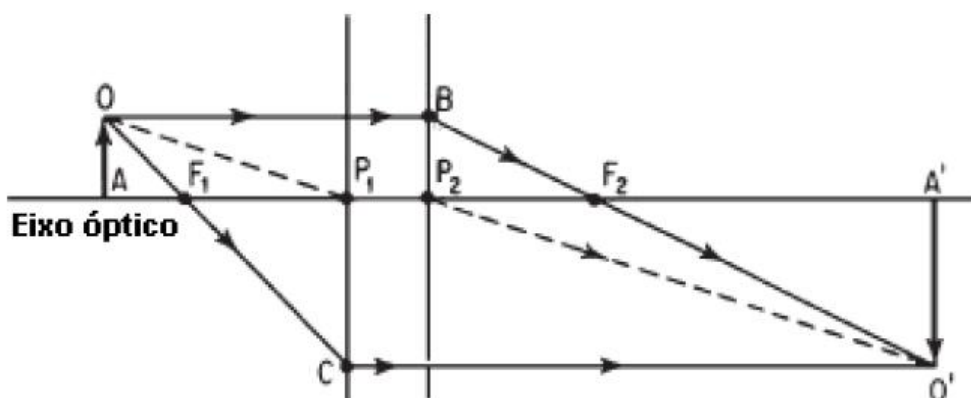


Figura 2.5: Esquema de traçado de raios representando a formação da imagem.

Fonte: Smith (1990)

O raio  $OB$ , paralelo ao eixo óptico, estende-se até o ponto focal secundário ( $F_2$ ) e representada a partir do plano principal secundário está a refração. A intersecção do raio  $OB$  com o raio  $OF_1C$  no ponto  $O'$  mostra a posição da imagem na posição  $A'$  (Smith, 1990).

O uso de convenção de sinais é necessário para o cálculo do traçado dos raios num determinado sistema óptico. Diversas são as convenções utilizadas para esses cálculos. Neste trabalho utilizou-se a convenção exposta a seguir: alturas acima do eixo óptico são positivas; alturas abaixo do eixo óptico são negativas; distâncias à esquerda do eixo óptico com relação ao plano focal ou principal são negativas; distâncias à direita do eixo óptico com relação ao plano focal ou principal são positivas; comprimentos focais de lentes divergentes são negativos e comprimentos focais de lentes convergentes são positivos. Com a intenção de descrever as equações utilizadas na determinação da imagem obteve-se a Figura 2.6 a partir da modificação da Figura 2.5.

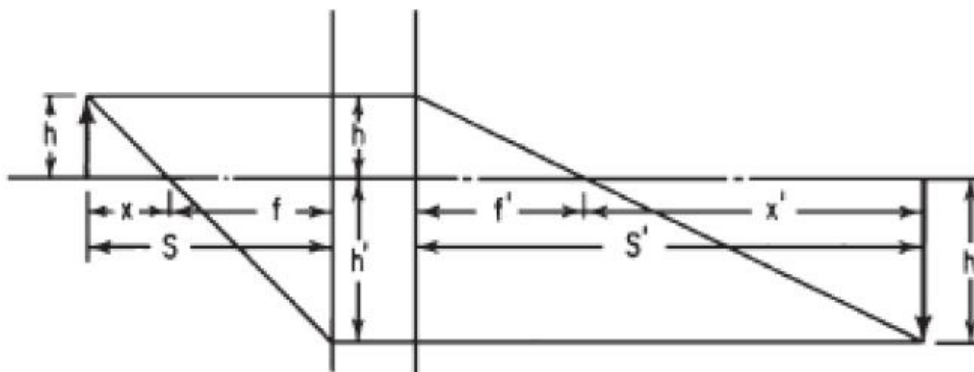


Figura 2.6: Esquema demonstrativo para determinação das propriedades da imagem.

Fonte: Smith (1990)

A Figura 2.6 apresenta a altura do objeto e da imagem  $h$  e  $h'$ , os comprimentos focais  $f$  e  $f'$  e as distâncias do objeto e da imagem aos planos principais  $S$  e  $S'$  aos pontos focais  $x$  e  $x'$ . Pela convenção de sinais escolhida  $h$ ,  $f$ ,  $f'$ ,  $S'$  e  $x'$  são positivos e  $x$ ,  $S$  e  $h'$  são negativos.

Obtém-se por semelhança de triângulos:

$$h/(h') = (-x)/f \quad (2.10)$$

e

$$h/(-h') = (f')/x'. \quad (2.11)$$

Isolando  $h$  nas Equações 2.10 e 2.11 tem-se:

$$ff' = -xx'. \quad (2.12)$$

Considerando que o sistema óptico está inteiramente no ar obtém-se:

$$x' = -f^2/x. \quad (2.13)$$

Substituindo  $x = S + f$  e  $x' = S' - f$  na Equação 2.13, pode-se derivar a equação gaussiana da imagem:

$$f^2 = xx' = -(S + f)(S' - f) = -SS' + Sf - S'f + f^2. \quad (2.14)$$

Cancela-se então  $f^2$  e divide-se por  $SS'f$  obtendo assim:

$$1/S' = 1/S + 1/f. \quad (2.15)$$

A magnificação lateral de um sistema óptico é representada pela razão entre o tamanho da imagem e o tamanho do objeto,  $h'/h$ . Das Equações 2.10 e 2.11, temos:

$$m = h'/h = f/x = -x'/f. \quad (2.16)$$

Substituindo  $x = S + f$  temos:

$$m = h'/h = f/(S + f). \quad (2.17)$$

Sabendo que  $f/(S + f)$  é igual a  $S'/S$ , obtemos enfim a equação:

$$m = h'/h = S'/S. \quad (2.18)$$

### Traçado de Raios Paraxiais

Com ajuda da Lei de Snell (Equação 2.9) pode-se definir o caminho que a luz percorre através de um sistema óptico. A Figura 2.7 apresenta uma superfície esférica, com raio  $R$  e centro de curvatura  $C$  separando dois meios com diferentes índices de refração ( $n$  e  $n'$ ); mostra também um raio (GQ), que incide na superfície num ponto  $Q$  e cujo prolongamento

atinge o ponto  $P$  no eixo óptico a uma distância  $L$  da superfície. Esse raio é refratado e alcança o eixo no ponto  $P'$ . Forma-se um ângulo  $U$  entre o prolongamento do raio e eixo óptico e um ângulo  $I$  com a normal à superfície antes da refração. Depois da refração formam-se os ângulos  $U'$  e  $I'$  (Smith, 1990).

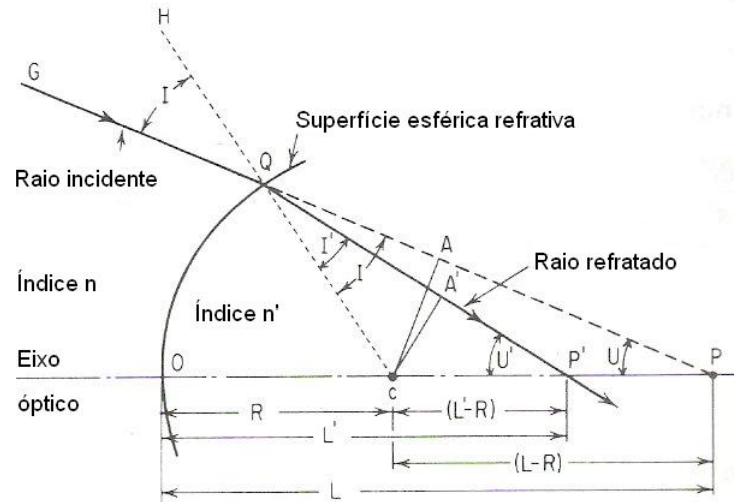


Figura 2.7: Refração de um raio em uma superfície esférica num dado sistema óptico.

Fonte: Smith (1990)

Dos triângulos  $PAC$  e  $QAC$  da Figura 2.7, obtemos

$$CA = (L - R)\text{sen}U \quad (2.19)$$

e

$$\text{sen}I = CA/R. \quad (2.20)$$

Temos então:

$$\text{sen}I' = (n/n')\text{sen}I. \quad (2.21)$$

Sendo o ângulo externo  $QCO$  do triângulo  $PQC$  igual a  $(-U + I)$  e o ângulo externo do triângulo  $P'QC$  igual  $(-U' + I')$  temos que

$$-U + I = -U' + I' \quad (2.22)$$

$$U' = U - I + I'. \quad (2.23)$$

Do triângulo  $QA'C$  da Figura 2.7:

$$\text{sen}I' = CA'/R. \quad (2.24)$$

Substituindo as Equações 2.20 e 2.24 na Equação 2.21 encontramos:

$$CA' = (n/n')CA. \quad (2.25)$$

Isolando  $L'$  na expressão  $CA' = (R - L')\text{sen}U'$ , vinda do triângulo  $P'A'C$ , temos:

$$L' = R - CA'/(\text{sen}U'). \quad (2.26)$$

Assim, para traçar o caminho que o raio percorre no sistema óptico são utilizados os cálculos descritos aplicados sucessivamente a cada superfície. Pode-se utilizar aproximação paraxial, que é derivada do caso limite das equações trigonométricas para o traçado de raios, desde que as alturas e os ângulos que OS raios fazem com o eixo óptico sejam muito pequenos.

A Figura 2.8 mostra que  $\text{sen}U = y/R$ . Na aproximação paraxial  $y \ll R$ , o que faz com que  $\text{sen}U \ll 1$ . Nesse caso, pode-se adotar  $\text{sen}U = U$ .

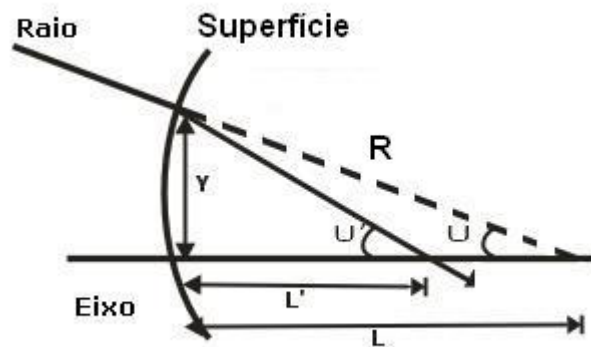


Figura 2.8: Esquema dos parâmetros utilizados numa aproximação paraxial de raios.

Fonte: Smith (1990)

Sendo assim, as Equações 2.19 a 2.26 ficam representadas pelas expressões:

$$CA = -(L - R)U, \quad (2.27)$$

$$I = CA/R, \quad (2.28)$$

$$I' = nI/n', \quad (2.29)$$

$$U' = U - I + I', \quad (2.30)$$

$$CA' = nCA/n' \quad (2.31)$$

e

$$L' = R - CA'/U'. \quad (2.32)$$

Sendo estas equações aplicadas apenas na região paraxial, são eliminados os parâmetros  $I$ ,  $U$  e  $CA$  resultando nas seguintes expressões:

$$L' = Ln'R/[(n' - n)L + nR], \quad (2.33)$$

$$N'/L' = (n' - n)/R + n/L. \quad (2.34)$$

Para os sistemas com mais de uma lente são determinadas equações de transferência que possibilitam definir os parâmetros na superfície seguinte sabendo os ângulos e as alturas dos raios da superfície anterior. Da Figura 2.8 temos que  $U = -Y/L$  e  $U' = -Y/L'$ . Substituindo esses valores na Equação 2.34 e considerando a expressão da curvatura como o inverso do raio ( $C = 1/R$ ), tem-se:

$$n'U' = nU - y(n' - n)C. \quad (2.35)$$

Do esquema ilustrado na Figura 2.9 temos que o ângulo  $U'_1$  é o ângulo do raio refratado com a superfície 1 e a diferença entre as alturas dos raios ao atingirem as superfícies 1 e 2 é  $tU'_1$ .

Temos que:

$$\text{sen}U'_1 = \Delta y/h \quad (2.36)$$

e

$$\text{cos}U'_1 = t/h. \quad (2.37)$$

Assim:

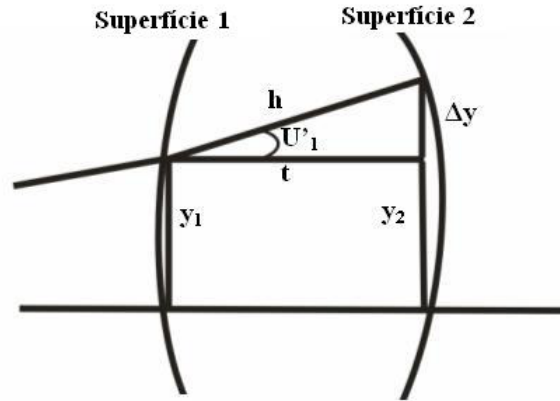


Figura 2.9: Parâmetros utilizados na determinação das equações de transferências.

Fonte: Adaptado de Smith (1990)

$$\Delta y^2/h^2 + t^2/h^2 = 1. \quad (2.38)$$

Considerando  $\text{sen}U'_1 \simeq U'_1$ , pode-se obter da relação:

$$\text{sen}U'_1/\cos U'_1 = \frac{\Delta y/h}{t/h} = \tan U'_1 = \Delta y/t. \quad (2.39)$$

Logo:

$$U'_1 \ll 1 \Rightarrow \tan U'_1 \simeq U'_1 \quad (2.40)$$

e

$$\Delta y = tU'_1. \quad (2.41)$$

Encontramos então a expressão:

$$y_2 = y_1 + t_1U'_1. \quad (2.42)$$

Para uma superfície  $j$  qualquer obtemos a seguinte equação de transferência:

$$y_{j+1} = y_j + t_jU'_j. \quad (2.43)$$

Observa-se na Figura 2.10 que um raio refratado por uma superfície será o raio incidente na próxima superfície e o índice de refração do meio de propagação de um raio refratado

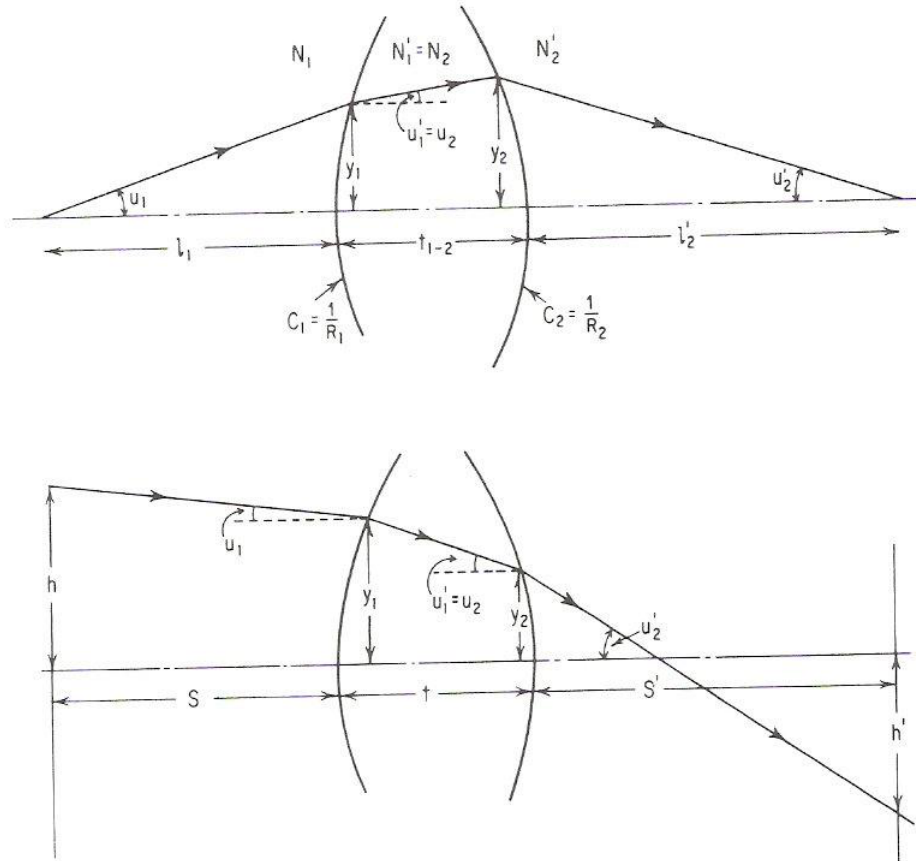


Figura 2.10: Parâmetros que se encontram na descrição das equações de transferência.

Fonte: Smith (1990)

por uma superfície será o índice do meio incidente para a superfície seguinte. Então obtemos para uma superfície  $j$  qualquer:

$$U_{j+1} = U'_j. \quad (2.44)$$

$$y_{j+1} = y'_j. \quad (2.45)$$

$$n_{j+1} = n'_j. \quad (2.46)$$

Representando a última superfície do sistema óptico por  $k$ , obtêm-se as expressões:

$$L'_k = -y_k/U'_k. \quad (2.47)$$

$$h' = y_k + S'_k U'_k. \quad (2.48)$$

### Traçado de Raios Meridionais

O traçado meridional é um caso especial do traçado de raios oblíquos no qual os raios são restritos ao plano de simetria do sistema que inclui o eixo óptico. Da Figura 2.11 temos que o segmento  $Q_1$  é normal ao raio que incide, representando então a distância do vértice da superfície até o raio. O segmento  $Q'_1$  é a distância do vértice da superfície ao prolongamento do raio refratado.  $I$  e  $I'$  representam os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com a normal à superfície (O'Shea, 1985).

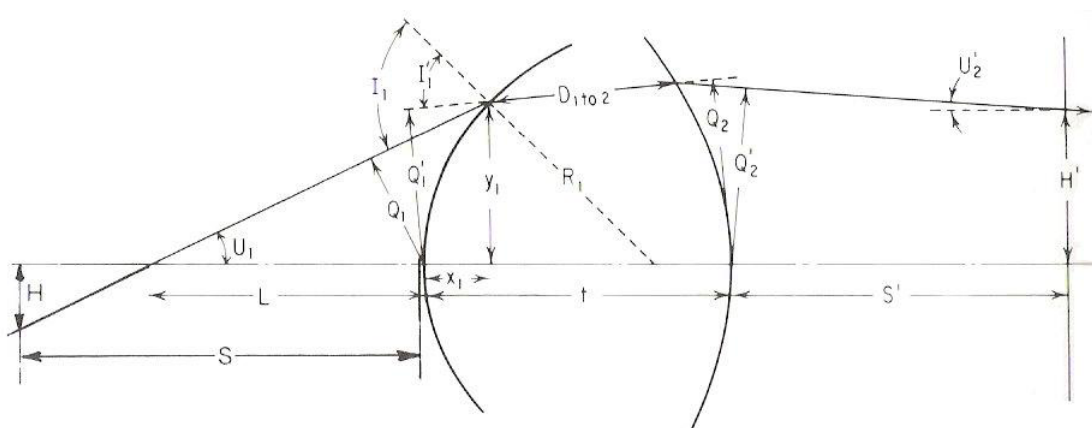


Figura 2.11: Parâmetros que se encontram na descrição das equações de transferências dos traçados de raios meridionais.

Fonte: Smith (1990)

Das relações trigonométricas obtemos:

$$Q = -L \operatorname{sen} U, \quad (2.49)$$

$$Q = H \cos U - S \operatorname{sen} U, \quad (2.50)$$

$$\text{sen}I = QC + \text{sen}U, \quad (2.51)$$

$$\text{sen}I' = (n\text{sen}I)/n', \quad (2.52)$$

$$U' = U - I + I', \quad (2.53)$$

$$Q = \frac{Q \cos U' + \cos I'}{\cos U + \cos I}, \quad (2.54)$$

$$y = \frac{Q \text{sen}(I - U)}{\cos U + \cos I} = \frac{Q' \text{sen}(I - U)}{\cos U' + \cos I'} = \frac{\text{sen}(I - U)}{C}, \quad (2.55)$$

$$z = \frac{\text{sen}(I - U)}{\cos U + \cos I} = \frac{1 - \cos(I - U)}{C}. \quad (2.56)$$

Sabendo que  $C = 1/R$ , obtemos:

$$Q_{j+1} = Q'_j + t \text{sen}U'_j, \quad (2.57)$$

$$U_{j+1} = U'_j, \quad (2.58)$$

$$L'_k = -Q'_k / \text{sen}U'_k, \quad (2.59)$$

$$H' = (Q'_k + S'_k \text{sen}U'_k) / \cos U'_k. \quad (2.60)$$

Nas equações anteriores,  $j$  corresponde a uma superfície intermediária qualquer e  $k$  à última superfície do sistema óptico.

### Abertura e Pupilas

Os raios que entram num determinado sistema para compor uma imagem são limitados pelo tamanho finito da lente, que colhe somente uma parte da luz emitida por uma fonte pontual. Assim o diâmetro desobstruído de uma lente comporta-se como uma abertura pela qual a energia flui. Dá-se o nome bloqueio com abertura (*aperture stop*) a qualquer

elemento físico que restringe a quantidade de luz que alcança o plano da imagem. Essa abertura é representada como AS ou AST na maioria dos programas de projeto óptico. O conceito de pupila também se faz muito vantajoso para a determinação dos raios que atravessam um sistema óptico completo. A imagem da abertura vista de um ponto axial do objeto é chamada pupila de entrada (Figura 2.12). Já a imagem da abertura vista do ponto axial contido no plano da imagem através das lentes (entre a abertura e o plano de imagem) é conhecida como pupila de saída (Zílio, 2009).

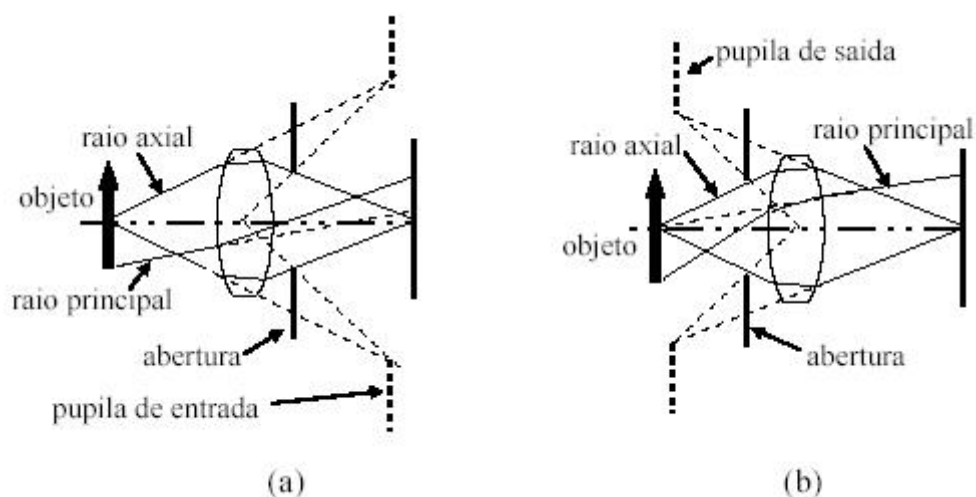


Figura 2.12: Definições de pupila de entrada (a) e pupila de saída (b).

Fonte: Smith (1990)

As pupilas de entrada e saída servem para determinar a abertura efetiva de um sistema simples cujo comportamento é adequadamente caracterizado pela óptica paraxial. O raio principal incluído nos dois esquemas da Figura 2.12 é definido como um raio qualquer vindo do objeto de um ponto de fora do eixo passando pelo centro de abertura (Zílio, 2009).

## 2.1.2 Conceitos de Óptica Física

Até o momento utilizou-se o conceito de raios. Embora seja uma abordagem conveniente não é possível aplicá-la em todos os casos. Não se pode isolar fisicamente um dos raios. Se uma frente de onda plana incide sobre determinado sistema com um orifício de diâmetro menor que o comprimento de onda, por exemplo, não são produzidas sombras de forma geométrica definidas. Não sendo satisfeitas as exigências da Óptica Geométrica então não se pode descrever o comportamento da luz por meio de raios. Na Óptica Física é

considerada a natureza ondulatória da luz.

Nesta seção são descritos alguns fenômenos baseados no caráter ondulatório da luz como interferência, coerência, polarização e difração.

## Interferência

O fenômeno da Interferência pode ser observado caso dois feixes de luz se sobreponham num determinado local do espaço e nesse local a irradiância luminosa variar entre máximos que excedem a soma das irradiâncias dos dois feixes e mínimos que podem ser zero (Fowles, 1989).

A irradiância da luz  $I$  é a média temporal do vetor de Poynting  $S$ , isto é, a taxa de energia associada à radiação eletromagnética que flui através de uma superfície perpendicular à direção de propagação (Fowles, 1989).

$$I = \langle S \rangle = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle, \quad (2.61)$$

em que  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo e  $c$  a velocidade da luz. Fazendo uso da notação complexa:

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle. \quad (2.62)$$

Considerando a luz num mesmo estado de polarização, pode-se utilizar uma análise escalar:

$$I = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \varepsilon_0 c \langle \mathbf{E}^2 \rangle. \quad (2.63)$$

Pode-se utilizar  $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$  como a irradiância num dado meio. Assim sendo, temos duas ondas eletromagnéticas descritas pelo seu campo elétrico complexo

$$\mathbf{E}_1 = A \exp i(\omega t - kx), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{E}_2 = B \exp i(\omega t - kx + \delta), \quad (2.65)$$

sendo  $A$  e  $B$  valores reais.

As duas ondas se sobrepõem num determinado ponto  $P$ , em que o campo elétrico total  $\mathbf{E}$  é dado por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (2.66)$$

Assim, a irradiância é

$$I = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + \langle E_1 \cdot E_2^* \rangle + \langle E_1^* E_2 \rangle = A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta. \quad (2.67)$$

Sendo a irradiância das duas ondas os dois primeiros termos e a interferência o último termo da equação anterior pode-se escrever:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (2.68)$$

Os máximos de irradiância acontecerão quando

$$|\delta| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \quad (2.69)$$

e os mínimos de irradiância quando

$$|\delta| = \pi, 3\pi, \dots, \quad (2.70)$$

No caso das irradiâncias iguais  $I_1 = I_2$  a Equação 2.68 reduz-se a

$$I = 4I_1 \cos^2 \delta/2 \quad (2.71)$$

que pode variar entre os valores máximos de  $4I_1$  e mínimos de zero.

A demonstração dos efeitos de interferência para a luz foi feita pela primeira vez por Thomas Young em 1802 (Fowles, 1989).

Na experiência de Young, uma fonte de luz monocromática incide em um pequeno orifício F aberto em um anteparo opaco. Ao passarem pelo orifício, as ondas sofrem difração e atingem dois novos orifícios estreitos A e B em um novo anteparo opaco, ocorrendo aí nova difração. Após difratarem pelos orifícios A e B, as ondas luminosas sofrem interferência e aparecem as franjas de interferência (linhas claras e escuras alternadas) quando outro anteparo opaco é colocado diante destes orifícios, conforme esquema representado na Figura 2.13.

Atualmente são utilizadas fendas longas e estreitas no lugar de orifícios. Para uma análise quantitativa é preciso considerar que a luz incidente possua apenas um comprimento de onda. Na Figura 2.14, onde o ponto P é um ponto qualquer do anteparo e  $l_1$  e  $l_2$  a

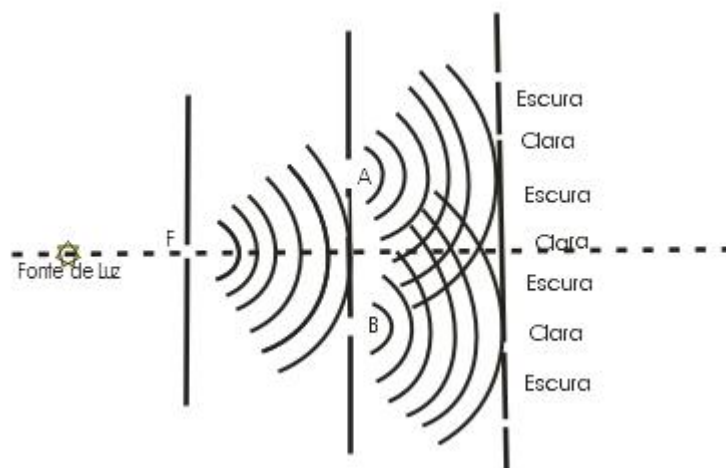


Figura 2.13: Padrão de interferência obtido por Thomas Young em seus experimentos.

Fonte: Adaptado de Tipler (1995)

distância das fendas  $S_1$  e  $S_2$  até o ponto  $P$  no anteparo. Então se a distância  $d$  entre as fendas for muito menor que a distância  $L$  entre os dois anteparos,  $S_2b$  será aproximadamente perpendicular tanto a  $l_1$  quanto a  $l_2$ . Sendo assim, o ângulo  $\widehat{S_2S_1b}$  será aproximadamente igual ao ângulo  $\theta$ , de modo que as retas  $l_1$  e  $l_2$  são aproximadamente paralelas

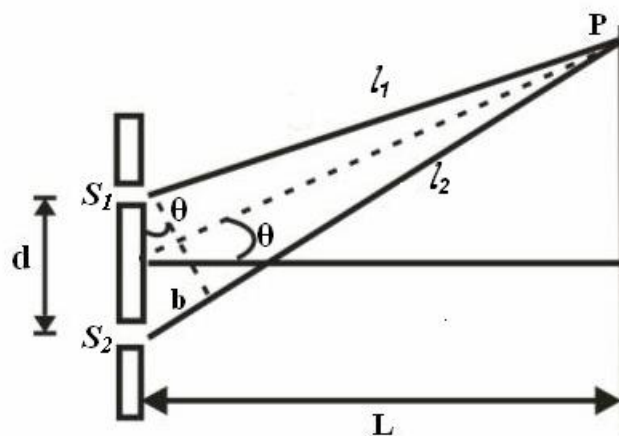


Figura 2.14: Esquema geométrico representando a interferência no caso de duas fendas.

Fonte: Adaptado de Fowles (1989)

Os dois raios que incidem em  $P$  estão em fase nas fendas de onde surgiram já que se originam da mesma frente de onda. Como os raios não têm caminhos ópticos iguais, eles acabam alcançando o anteparo com uma diferença de fase, que nada mais é que o número de comprimentos de onda contidos em  $S_2b$ . Para que haja um máximo em  $P$ , é necessário

que  $S_2b(= d\text{sen}\theta)$  contenha um número inteiro de comprimentos de onda:

$$S_2b = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.72)$$

$$d\text{sen}\theta = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots, \text{máximos} \quad (2.73)$$

Um mínimo em  $P$  existe se  $S_2b(= d\text{sen}\theta)$ , então:

$$d\text{sen}\theta = (m + 1/2)\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.74)$$

### Coerência

Duas ondas são coerentes se a relação entre suas fases for constante no tempo; são incoerentes se esta relação nunca for constante e parcialmente coerentes se no intervalo de tempo observado, for possível perceber em parte do tempo perturbações coerentes (Fowles, 1989).

No caso de interferência de duas ou mais ondas de luz as amplitudes e as fases variam de acordo com o tempo. Para dois campos  $E_1$  e  $E_2$  a irradiância  $I$  pode ser expressa por:

$$I = \langle E \cdot E^* \rangle = \langle (E_1 + E_2) \cdot (E_1^* + E_2^*) \rangle, \quad (2.75)$$

$$I = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\text{Re} \langle E_1 \cdot E_2 \rangle. \quad (2.76)$$

Os colchetes em forma de ângulo indicam a média temporal. Pode-se assumir que todas as quantidades são estacionárias, no sentido que o tempo médio não depende da escolha da origem do tempo (Fowles, 1989).

Com algumas simplificações, a Equação 2.76 pode ser escrita:

$$I = I_1 + I_2 + 2\text{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle, \quad (2.77)$$

onde:

$$I_1 = \langle [E_1]^2 \rangle \quad (2.78)$$

e

$$I_2 = \langle [E_2]^2 \rangle . \quad (2.79)$$

Geralmente nos experimentos de interferência os dois campos  $E_1$  e  $E_2$  se originam de uma fonte comum. A diferença entre eles é devida à diferença nos caminhos ópticos, conforme Figura 2.15:

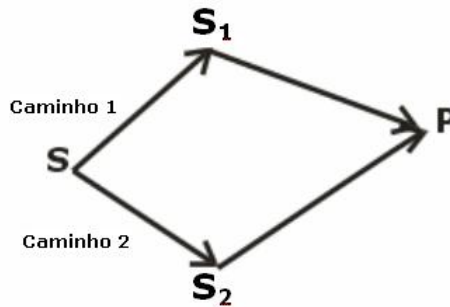


Figura 2.15: Caminhos ópticos no experimento de interferência.

Fonte: Adaptado de Fowles (1989)

Considera-se  $t$  o tempo que um sinal de luz leva para atravessar o caminho 1 e  $t + \tau$  o tempo para o outro sinal atravessar o caminho 2, então a Equação de Interferência (Equação 2.77) pode ser escrita:

$$2\text{Re}\Gamma_{12}(\tau), \quad (2.80)$$

onde

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t)E_2(t + \tau) \rangle . \quad (2.81)$$

A função  $\Gamma_{11}$  é chamada de *função de coerência mútua* na função de correlação de dois campos  $E_1$  e  $E_2$ .

A função:

$$\Gamma(\tau) = \langle E_1(t)E_1^*(t + \tau) \rangle \quad (2.82)$$

é conhecida como função de autocorrelação. Pode-se ver que :

$$\Gamma(0) = I_1 \quad (2.83)$$

e

$$\Gamma_{22}(0) = I_2. \quad (2.84)$$

A função de correlação normalizada é chamada de *grau de coerência parcial* e é expressa por:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{I_{(1)}I_{(2)}}} \quad (2.85)$$

Assim a irradiância pode ser expressa como:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\gamma_{12}(\tau). \quad (2.86)$$

Em termos de  $|\gamma_{12}|$ , há três tipos de coerência:

$$|\gamma_{12}| = 1 \quad (2.87)$$

(completamente coerente);

$$0 < |\gamma_{12}| < 1 \quad (2.88)$$

(parcialmente coerente);

$$|\gamma_{12}| = 0 \quad (2.89)$$

(completamente incoerente).

No padrão das franjas de interferência, a intensidade varia entre os limites  $I_{max}$  e  $I_{min}$ .

Da Equação 2.77 tem-se:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|, \quad (2.90)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|. \quad (2.91)$$

A franja de visibilidade  $\nu$  é definida como:

$$\nu = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (2.92)$$

Assim a luz coerente dá origem a franjas de visibilidade máxima, luz incoerente não interfere e luz parcialmente coerente origina franjas de visibilidade intermediária.

## Polarização

Uma onda plana que se propaga no sentido positivo de  $z$  e cujo campo elétrico tem a direção  $y$  está linearmente polarizada na direção  $y$  (Kraus e Carver, 1978).

O campo elétrico dessa onda, em função do tempo e da posição é dado por:

$$E_y = E \text{sen}(\omega t - \beta z). \quad (2.93)$$

sendo  $\omega = 2\pi$  e  $\beta = 2\pi/\lambda$ .

Porém, o campo elétrico de uma onda viajando na direção de  $\mathbf{z}$  pode ter tanto um componente  $y$  como um componente  $x$ . Nessa situação diz-se que a onda está elípticamente polarizada. Para um valor fixo de  $z$ , o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  gira em função do tempo com a ponta do vetor descrevendo uma elipse de polarização. A razão entre os eixos maior e menor da elipse de polarização é chamada razão axial ( $RA$ ).

Assim no caso da onda elípticamente polarizada  $RA = E_2/E_1$ . Outros casos de polarização elíptica correspondem à polarização circular quando  $E_1 = E_2$  e  $RA = 1$  e a polarização linear quando  $E_1 = 0$  e  $RA \rightarrow \infty$ .

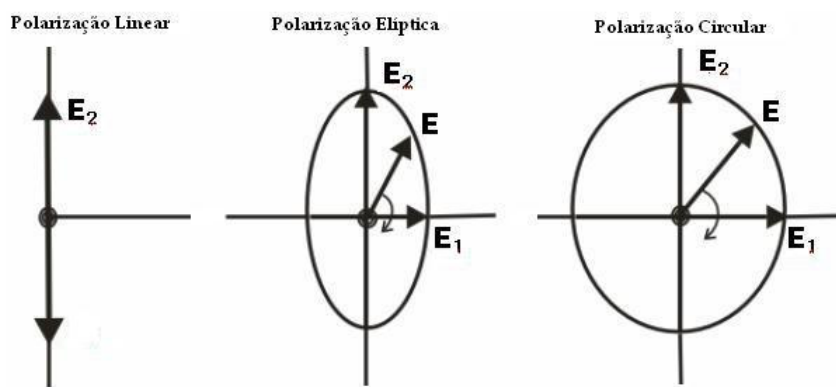


Figura 2.16: Polarização Linear, Elíptica e Circular.

Fonte: Adaptado de Kraus e Carver (1978)

Num caso mais geral de polarização elíptica, a elipse de polarização pode ter qualquer orientação, como na Figura 2.17.

É possível expressar uma onda elípticamente polarizada em termos de duas componentes linearmente polarizadas, uma na direção  $x$  e uma na direção  $y$ . Então se a onda estiver viajando no sentido positivo  $\mathbf{z}$  tem-se:

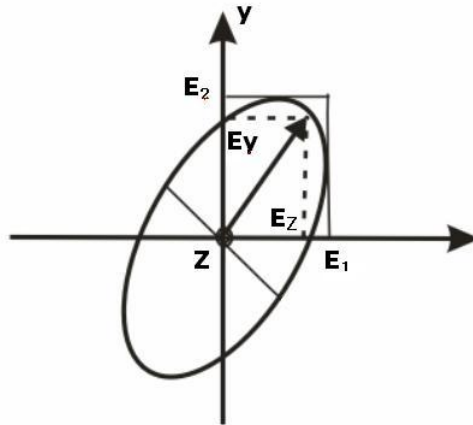


Figura 2.17: Elipse de polarização com as componentes  $E_z$  e  $E_y$  e os valores máximos  $E_1$  e  $E_2$ .

Fonte: Adaptado de Kraus e Carver(1978)

$$E_x = E_1 \text{sen}(\omega t - \beta z). \quad (2.94)$$

e

$$E_y = E_2 \text{sen}(\omega t - \beta z + \delta), \quad (2.95)$$

onde  $E_1$  é a amplitude da onda linearmente polarizada na direção  $x$ ;  $E_2$  é a amplitude da onda linearmente polarizada na direção  $y$ ; e  $\delta$  o ângulo de fase no tempo pelo qual  $E_y$  está avançando em relação a  $E_x$ . Da combinação da Equação 2.94 e da Equação 2.95 obtém-se o vetor total do campo  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}E_1 \text{sen}(\omega t - \beta z) + \mathbf{y}E_2 \text{sen}(\omega t - \beta z + \delta). \quad (2.96)$$

Em  $z = 0$ ,

$$E_x = E_1 \text{sen} \omega t \quad (2.97)$$

e

$$E_y = E_2 \text{sen}(\omega t + \delta). \quad (2.98)$$

Expandindo a Equação 2.98, tem-se:

$$E_y = E_2 (\text{sen} \omega t \cos \delta + \cos \omega t \text{sen} \delta). \quad (2.99)$$

Da Equação 2.97, tem-se que:

$$\text{sen}\omega t = E_x/E_1 \quad (2.100)$$

e

$$\text{cos}\omega t = \sqrt{1 - (E_x/E_1)^2}. \quad (2.101)$$

Substituindo as Equações 2.100 e 2.101 na Equação 2.99, obtemos a expressão:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} - \frac{2E_xE_y \cos \delta}{E_1E_2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \text{sen}^2\delta. \quad (2.102)$$

A Equação 2.102 descreve uma elipse de polarização como a da Figura 2.17.

Tratou-se até o momento de ondas completamente polarizadas nas quais  $E_1$ ,  $E_2$  e  $\delta$  são constantes. A radiação proveniente de muitas fontes de rádio celestes abrange uma ampla faixa de freqüências. Dentro de qualquer largura de faixa  $\Delta f$ , consiste na superposição de um grande número de ondas estatisticamente independentes e com uma variedade de polarizações, neste caso diz que a onda resultante é incoerente ou despolarizada (Kraus & Carver, 1978). Assim pode-se escrever que:

$$E_x = E_1(t)\text{sen}\omega t \quad (2.103)$$

e

$$E_y = E_2(t)\text{sen}[\omega t + \delta(t)]. \quad (2.104)$$

A situação mais geral de polarização de uma onda ocorre quando a onda está parcialmente polarizada, isto é, quando ela pode ser considerada como sendo constituída de duas partes: uma completamente polarizada e outra completamente não polarizada. É conveniente usar os parâmetros de Stokes quando se lida com polarização parcial. Os parâmetros de Stokes foram introduzidos em 1852 por Sir George Stokes (Kraus e Carver, 1978), e são definidos por:

$$I = S + S_x + S_y + \langle E_1^2 \rangle / Z + \langle E_2^2 \rangle / Z; \quad (2.105)$$

$$Q = S_x - S_y = \langle E_1^2 \rangle / Z - \langle E_2^2 \rangle / Z; \quad (2.106)$$

$$U = 2/Z \langle E_1 E_2 \cos \delta \rangle = S \langle \cos 2E \sin 2\tau \rangle \quad (2.107)$$

e

$$V = 2/Z \langle E_1 E_2 \sin \delta \rangle = S \langle \sin 2E \rangle, \quad (2.108)$$

onde  $S$  é o vetor de Poynting total da onda;  $S_x$  é o componente do vetor de Poynting da onda polarizada na direção de  $x$ ;  $S_y$  é o componente do vetor de Poynting da onda polarizada na direção de  $y$ ;  $E_1$  é a amplitude da componente no campo elétrico da onda polarizada na direção  $x$ ;  $E_2$  é a amplitude da componente no campo elétrico da onda polarizada na direção  $y$  e  $Z$  é a impedância intrínseca do meio. Os colchetes em forma de ângulo indicam a média no tempo. Por exemplo, em uma onda completamente despolarizada,  $S_x = S_y$  e  $E_1$  e  $E_2$  não estão correlacionados. Então:

$$\langle E_1 E_2 \cos \delta \rangle = \langle E_1 E_2 \sin \delta \rangle = 0. \quad (2.109)$$

Assim:

$$I = S; \quad (2.110)$$

$$Q = 0; \quad (2.111)$$

$$U = 0 \quad (2.112)$$

e

$$V = 0. \quad (2.113)$$

A condição  $Q = U = V = 0$  é uma condição para uma onda completamente despolarizada.

## Difração

A característica principal do fenômeno de difração pode ser explicada qualitativamente pelo princípio de Huygens, que diz que o estado de uma onda eletromagnética pode ser previsto considerando que cada ponto da frente de ondas age como a origem de uma onda secundária que se propaga em todas as direções. Assim todas as ondas secundárias

envolvidas são uma nova frente de onda. Então quando uma onda atravessa uma fenda ou um orifício e passa a se propagar de forma espalhada significa que ela sofreu difração (Fowles, 1989).

Pode-se considerar a difração em dois casos gerais: a difração de Fraunhofer e a difração de Fresnel. A diferença entre os dois casos é que a difração de Fraunhofer ocorre somente quando as ondas que incidem e difratam são efetivamente planas. Seja  $(x, y)$  um ponto da pupila de entrada de um telescópio, e  $A(x, y)$  a distribuição de amplitude do vetor de Poynting nessa pupila (Fowles, 1989). Pode-se demonstrar que  $a(p, q)$  resultante no plano focal será sua transformada de Fourier:

$$A(p, q) = F(A(x, y)). \quad (2.114)$$

Considerando coordenadas polares e supondo que o dispositivo não apresente qualquer tipo de aberração geométrica, a amplitude resultante pode ser descrita no plano da imagem como:

$$a(\rho, \theta) = \pi R^2 (2J_1(Z_0))/Z_0, \quad (2.115)$$

em que  $\rho$  e  $\theta$  são as coordenadas no plano da imagem,  $R$  o raio da pupila de entrada e  $J_1$  a função de Bessel de primeira ordem (Abramowitz e Stegun, 1972). A variável  $Z_0$  é dada por:

$$Z_0 = (2\pi R/\lambda F)\rho, \quad (2.116)$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda. Calculando a expressão para a primeira raiz da função de Bessel, obtém-se o raio da mancha central no plano da imagem:

$$r = 1,22\lambda(f/\#) \quad (2.117)$$

onde  $f/\#$  (f-number) é a razão entre a distância focal e a abertura de um sistema óptico e  $\lambda$  o comprimento de onda.

O valor desse raio de mancha define o raio mínimo de resolução de um telescópio, já que dois objetos distantes um do outro a uma distância menor que o raio de mancha ficam indistinguíveis no plano da imagem (Kraus e Carver, 1978).

# Capítulo 3

## Desempenho Óptico e Qualidade de Imagem

### 3.1 Medidas de Distorção da Imagem

São vários os métodos utilizados para a medição do desempenho óptico. O tipo de método utilizado depende da finalidade do sistema óptico. Quando o diâmetro da mancha se aproxima do tamanho do disco de Airy, o que é típico para sistemas de alto desempenho, devem ser empregadas medidas de difração. Se o diâmetro da mancha é muito maior do que o disco de Airy, podemos ignorar os efeitos de difração e utilizar medidas geométricas (Doyle, Michels e Genberg, 2002).

#### 3.1.1 Diagramas de Pontos

Os diagramas de pontos (*Spot Diagrams*) são criados traçando uma rede de raios a partir de um único ponto na posição do objeto em um sistema óptico e plotando sua intersecção com o plano da imagem (Figura 3.1). Os diagramas de pontos são traçados geometricamente e excluem os efeitos de difração. A distribuição de pontos no plano de imagem é uma medida do tamanho da mancha. Os diagramas de pontos são úteis para determinar as aberrações presentes em um sistema óptico, pois cada aberração produz um diagrama de ponto característico (Doyle, Michels e Genberg, 2002).



Figura 3.1: Diagrama de pontos criado por uma lente simples mostrando aberração esférica.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

### 3.1.2 Função de Alargamento de Ponto

A função de alargamento dos pontos (*Point Spread Function - PSF*) é outra medida do tamanho e da forma da imagem de uma fonte pontual. O cálculo da PSF inclui tanto os efeitos da difração quanto as aberrações geométricas. As PSF para um sistema livre de aberração e para um sistema óptico com aberração de coma são apresentados em forma de imagens tridimensionais isométricas e gráficos de intensidade nas Figuras 3.2 e 3.3. Para mostrar a estrutura em forma de anel da PSF com mais clareza é utilizada uma escala logarítmica. Pode-se observar que, no caso com aberração, a energia é espalhada por um diâmetro muito maior do que no sistema livre de aberração (Doyle, Michels e Genberg, 2002).



Figura 3.2: Função de alargamento de pontos (PSF) para um sistema livre de aberração.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

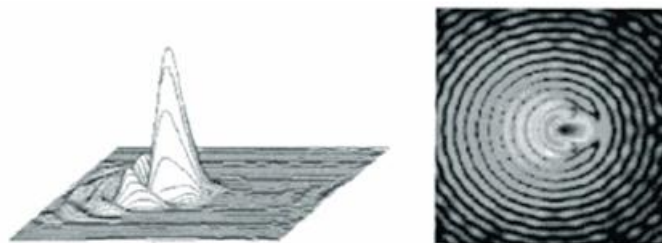


Figura 3.3: Função de alargamento de pontos (PSF) para um sistema óptico com aberração de coma.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

### 3.1.3 Parcela de Energia Contida

A parcela de energia contida (*Encircled energy function*) refere-se à parcela da energia contida em círculos concêntricos de diâmetro crescente em função do diâmetro do círculo. Os círculos são centrados no centróide da imagem. Um exemplo de um gráfico de energia delimitada é mostrado na Figura 3.4 para um sistema livre de aberração e para um sistema com aberração (Doyle, Michels e Genberg, 2002).

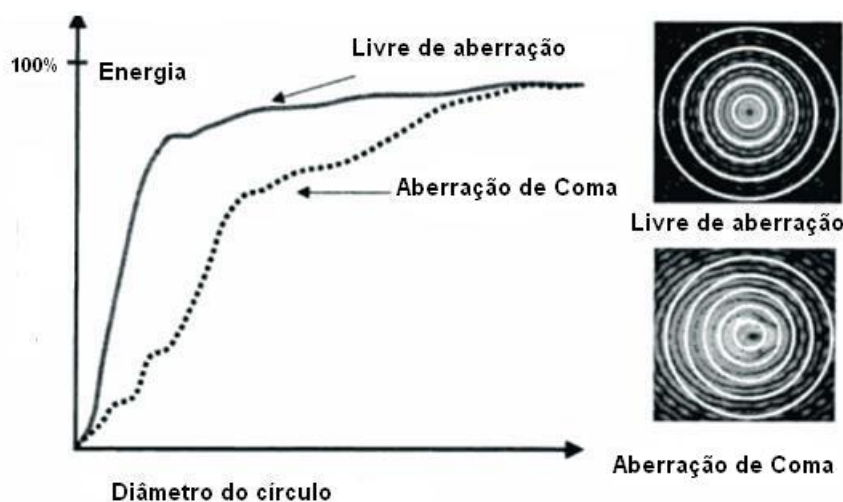


Figura 3.4: Parcela de energia contida para um sistema livre de aberração e com aberração de coma.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

Pode-se observar que quando há aberração, a parcela de energia contida é menor do que no caso em que não há aberração. À medida em que cresce o diâmetro do círculo, as duas curvas convergem.

### 3.1.4 Efeitos da Difração

A difração é devida à natureza ondulatória da luz e ocorre quando ela contorna obstáculos ou passa por um orifício ou fenda. Esse orifício pode ser uma abertura de um elemento óptico ou uma estrutura de suporte mecânico que faz com que a luz se curve ou seja redirecionada.

A interação da frente de onda com a borda da abertura resulta em interferências construtivas e destrutivas na frente de onda de saída. A imagem produzida pela lente não é um ponto perfeito, mas uma série de anéis concêntricos escuros e claros. Para um sistema livre de aberrações, o disco claro central é conhecido como Disco de Airy e contém 84% da energia. O diâmetro do disco de Airy representa o pequeno diâmetro da mancha que um sistema óptico pode produzir e é dado por:

$$D = 2,44\lambda(f/\#), \quad (3.1)$$

onde  $f/\#$  (*f-number*) é a razão entre a distância focal e a abertura de um sistema óptico. Um sistema óptico é chamado limitado pela difração (*diffraction-limited*) caso os efeitos de difração definam o tamanho do diâmetro da mancha. O erro de frente de onda admissível é dado pelo critério de Rayleigh, que afirma que o desempenho limitado pela difração é mantido por até um quarto de onda na diferença de caminho óptico, o que corresponde a um erro quadrático de  $\lambda/14$  (Doyle, Michels e Genberg, 2002).

### 3.1.5 Erros de Frentes de Onda

Para que um sistema óptico forme uma imagem puntiforme perfeita, a frente de onda de saída deve ser esférica e o raio normal deve convergir para o centro de curvatura da frente de onda. A diferença entre o comprimento do caminho óptico de uma onda real e o de uma onda de referência perfeitamente esférica é uma medida do erro de frente de onda, como mostra a Figura 3.5 (Doyle, Michels e Genberg, 2002).

A medida da diferença do caminho óptico OPD (*Optical Path Difference* - OPD) em termos da saída máxima da frente de onda de referência é apresentada como pico-a-pico ou pico-a-vale (PV). A RMS (*Root Mean Square*) é a raiz quadrada da soma da média dos quadrados de todos os valores da diferença do caminho óptico (*Optical Path Difference* - OPD) sobre a abertura total do sistema, o que permite verificar o efeito da deformação da frente de onda (Smith, 1990). A relação entre RMS e PV para o caso de uma frente de

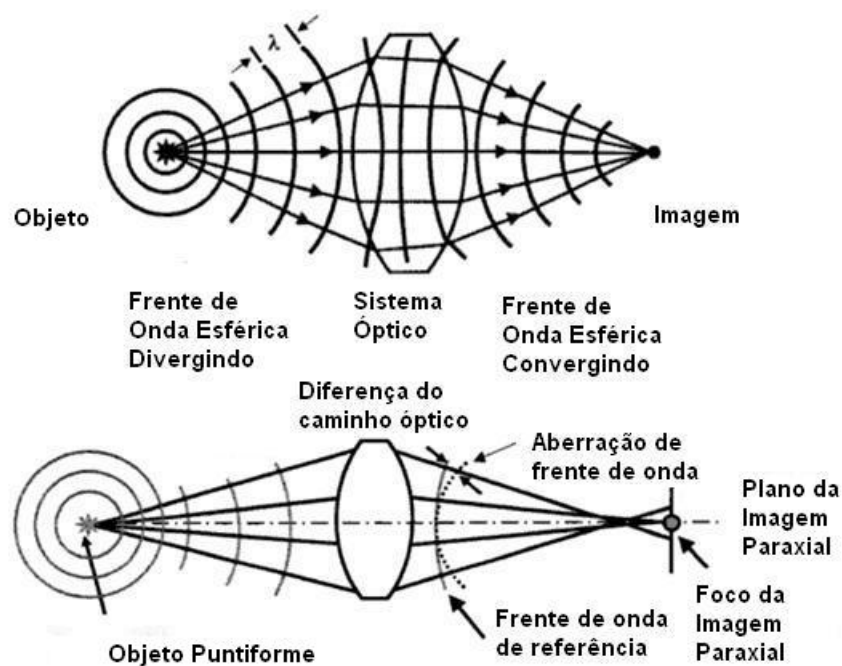


Figura 3.5: Elementos da lente introduzindo erro de frente de onda (aberração esférica).

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

onda muito suave com uma deformação causada por desfocagem:

$$RMS = PV/3,5. \quad (3.2)$$

O Índice de Strehl (*Strehl Ratio*) é a iluminação do centro do disco de Airy para um sistema com aberrações expresso como a fração de iluminação correspondente a um sistema perfeito como mostra a Figura 3.6.

A relação entre o Strehl Ratio e o RMS é dado aproximadamente por

$$StrehlRatio = (1 - 2\pi^2\omega^2)^2 \quad (3.3)$$

onde  $\omega$  é o RMS (Smith, 1990).

O PV das medidas de qualidade de imagem é dado no limite de Rayleigh e comprimentos de onda. Uma quantidade de aberração correspondente ao limite de Rayleigh pode causar uma mudança pequena, mas significativa nas características da imagem. Telescópios são geralmente corrigidos para encontrar ou satisfazer o critério de Rayleigh, pelo menos no eixo óptico (Smith, 1990).

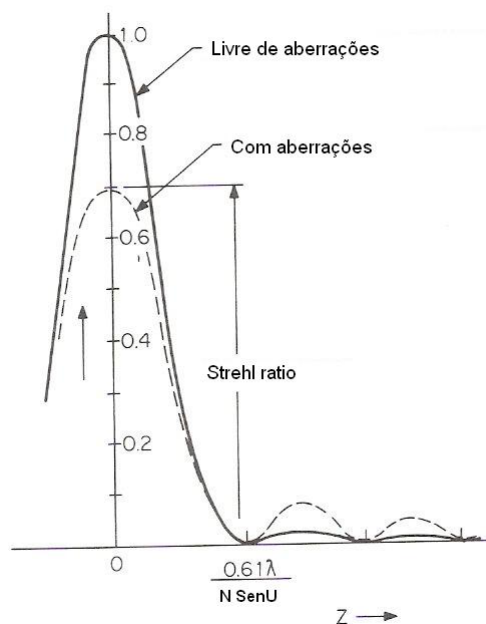


Figura 3.6: Strehl ratio é expresso como a fração de iluminação correspondente a um sistema perfeito.

Fonte: Smith (1990)

### 3.1.6 Resolução Óptica

A capacidade de um sistema óptico de resolver dois objetos é uma medida do desempenho óptico (Figura 3.7). Se o diâmetro do disco de Airy aumenta para cada ponto de imagem, as distribuições de intensidade começam a sobrepor-se e a diminuir a resolução. Assim, os mesmos parâmetros de controle do tamanho do disco Airy ditam a resolução de um sistema óptico ( $f$ -number do sistema e o comprimento de onda). À medida que o  $f$ -number do sistema óptico diminui, a distribuição de intensidade começa a mostrar dois picos distintos que representam dois objetos puntiformes como mostra a Figura 3.8.

### 3.1.7 Função de Transferência de Modulação

A resolução e o desempenho de um sistema óptico podem ser caracterizados por uma quantidade conhecida como função de transferência de modulação (*Modulation Transfer Function* - MTF), que é a medida da capacidade do sistema óptico de transferir contraste do objeto para a sua imagem. A MTF considera a resposta do sistema óptico a distribuições de intensidade senoidais com frequência espacial variável. À medida que a frequência espacial de cada objeto aumenta torna-se mais difícil distinguir os picos dos vales no



Figura 3.7: Resolução óptica: capacidade de um sistema óptico para resolver dois objetos.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)



Figura 3.8: Intensidades combinadas para dois pontos em função de  $f$ -number.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

sistema óptico (Doyle, Michels e Genberg, 2002).

O contraste de uma imagem de período senoidal  $p$  (ou de frequência espacial  $\nu = 1/p$ ) é dado pela equação:

$$\Gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (3.4)$$

onde  $I_{max}$  é a intensidade máxima e  $I_{min}$  é a intensidade mínima da imagem. Para que a imagem seja uma réplica exata do objeto, os picos devem ter o valor de um e os vales o valor zero, o que leva a um contraste igual a um (Figura 3.9). À medida que a capacidade de resolução diminui, o contraste aumenta e há uma pequena diferença de magnitude entre os vales e os picos. Quando o contraste cai para zero, o sistema óptico não consegue resolver o objeto, resultando num padrão de intensidade contínuo (Doyle, Michels & Genberg,

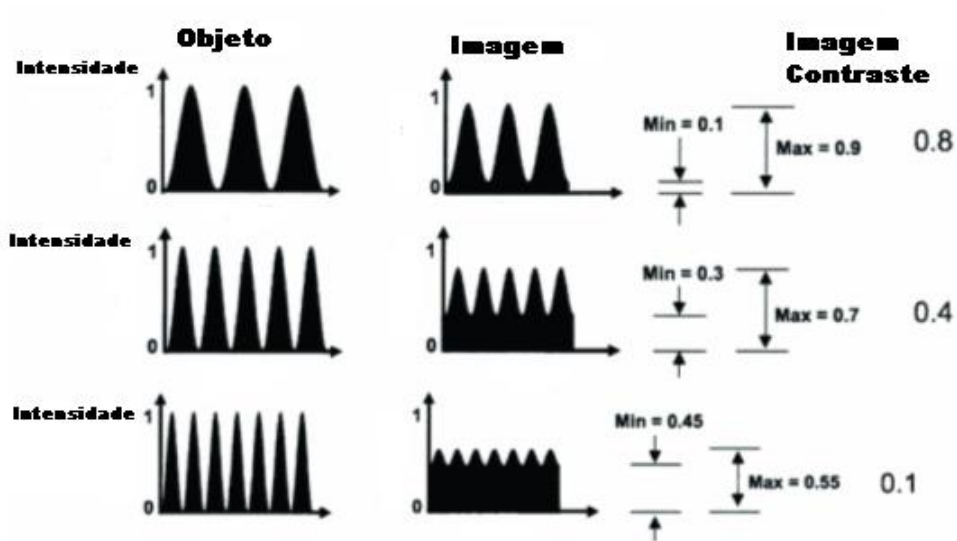


Figura 3.9: Efeitos da difração sobre a quantidade de contraste transferido com o aumento da frequência espacial.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels e Genberg (2002)

2002). Para a luz incoerente, a frequência espacial que o sistema óptico não pode resolver é conhecida como frequência de corte ( $\rho_c$ ) e é dada pela expressão:

$$\rho_c = 1/\lambda(f/\#). \quad (3.5)$$

A frequência espacial em um gráfico de MTF é medida no plano da imagem. Quando a frequência espacial aumenta, o contraste da imagem diminui (Figura 3.10).

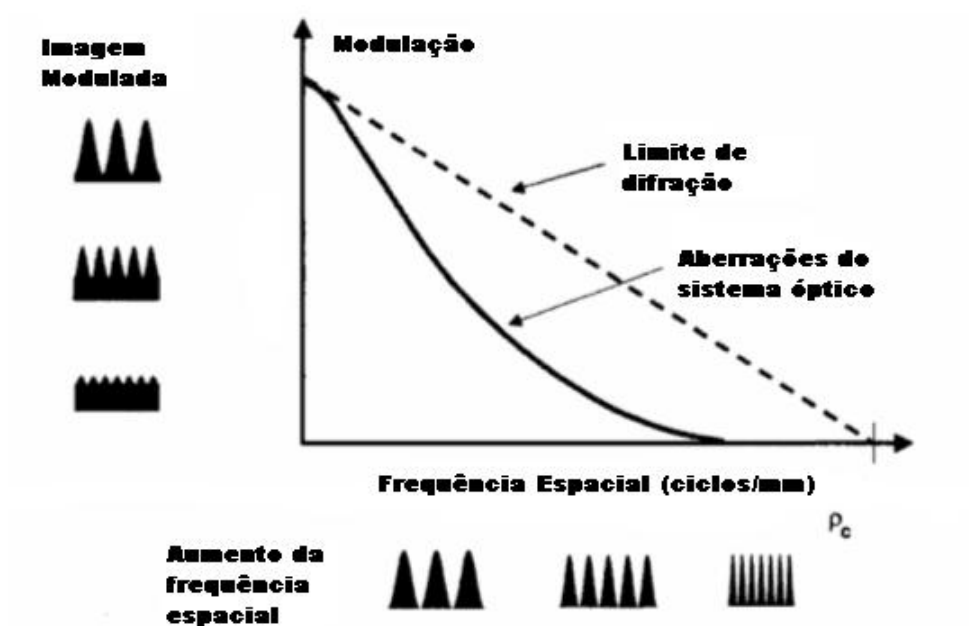


Figura 3.10: Gráfico da MTF em função da frequência espacial.

Fonte: Adaptado de Doyle, Michels & Genberg (2002)

# Capítulo 4

## Geometria dos Telescópios

### 4.1 Seções Cônicas

As seções cônicas são curvas obtidas a partir da intersecção de um cone circular com um plano. Este plano é chamado plano secante. Se este plano ( $\alpha$ ) é paralelo a uma geratriz do cone, a cônica é uma parábola (Venturi, 2008).

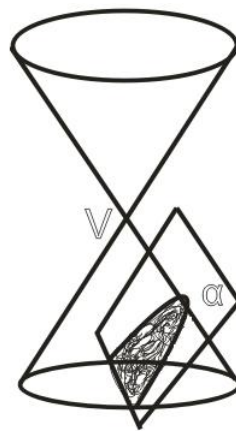


Figura 4.1: Seção Cônica Parábola.

Fonte: Adaptado de Venturi (2008)

Se o plano secante é oblíquo a uma geratriz e corta somente uma das duas folhas do cone, a cônica obtida é uma elipse. Ainda se o plano não for paralelo a uma geratriz, mas cortar ambas as folhas do cone, então tem-se uma hipérbole. Caso o plano  $\alpha$  passe pelo vértice  $\mathbf{V}$  do cone teremos então uma cônica degenerada. Outra forma equivalente de se determinar essas curvas se faz em termos da propriedade focal como pode ser visto a seguir.

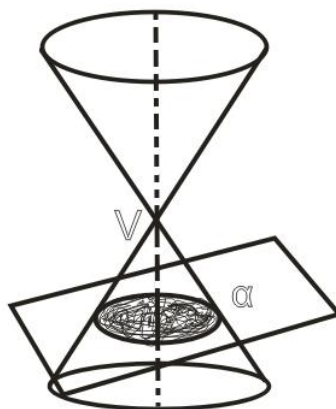


Figura 4.2: Seção Cônica Elipse.

Fonte: Adaptado de Venturi (2008)

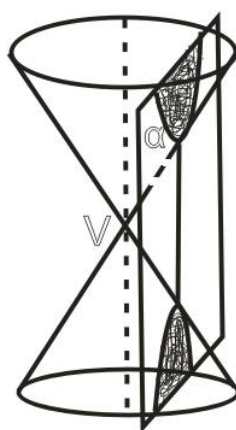


Figura 4.3: Seção Cônica Hipérbole.

Fonte: Adaptado de Venturi (2008)

### 4.1.1 Elipse

A Elipse é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que a soma das distâncias de um ponto  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , situados num mesmo plano seja constante, com  $F_1$  e  $F_2$  como os focos da elipse (Santos, 1988). Seja a distância entre  $F_1$  e  $F_2$  (distância focal) igual a  $2c$  e  $P$  um ponto qualquer. Por desigualdade triangular obtém-se:

$$\|F_1F_2\| \leq \|F_1P\| + \|F_2P\|. \quad (4.1)$$

Se  $a$  é um número real maior que  $c$ , a equação fica:

$$\|F_1P\| + \|F_2P\| = 2a. \quad (4.2)$$

Esta é a equação da elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$ . Se  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , a equação pode ser escrita como:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (4.3)$$

Racionalizando e fazendo  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , a equação ainda pode ser reduzida a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.4)$$

A excentricidade da elipse é o número  $e = c/a$ . Uma vez que  $c < a$ , a excentricidade de uma elipse é um número real positivo menor que 1.

### 4.1.2 Círculo

O círculo de raio  $r$  e centro  $C(c_1, c_2)$  é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano que satisfazem a equação

$$\|PC\| = r, \quad (4.5)$$

assim,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2 \quad (4.6)$$

Se  $F_1 = F_2 = C$ , a elipse reduz-se a um círculo de centro  $C$  e raio  $a$ . Se  $c$  é igual a zero, a excentricidade também será zero. Temos então que o círculo é uma elipse de excentricidade nula (Santos, 1988).

### 4.1.3 Hipérbole

Sendo  $F_1$  e  $F_2$  os focos, ao conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano onde

$$\|F_1P\| - \|F_2P\| = 2a \quad (4.7)$$

é constante, dá-se o nome de hipérbole.

Se  $F_1P - F_2P = F_1F_2$ , obtém-se por desigualdade triangular:

$$\|F_1P\| - \|F_2P\| \leq \|F_1F_2\| \quad (4.8)$$

Fazendo  $\|F_1F_2\| = 2c$ , obtemos a equação

$$\|F_1P\| - \|F_2P\| = 2a. \quad (4.9)$$

Os números  $\|F_1P\|$  e  $\|F_2P\|$  são os raios focais do ponto  $P$ . Se  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (4.10)$$

Sendo  $0 < a < c$  e definindo  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ , obtemos a equação reduzida da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.11)$$

#### 4.1.4 Parábola

Uma parábola com diretriz  $r$  e foco  $F$  é o conjunto de pontos equidistantes de  $r$  e  $F$  (Santos, 1988). Sejam uma reta  $r$  e um ponto  $F$  não situado sobre  $r$  no plano  $xy$ , a equação mais simples de parábola que pode ser construída é quando a diretriz  $r$  é perpendicular ao eixo dos  $x$  e o foco está sobre esse eixo. Traçando por  $P$  uma perpendicular à reta  $r$ , tem-se em  $P_1$  o ponto de intersecção desta com a reta  $r$  (Figura 4.4).

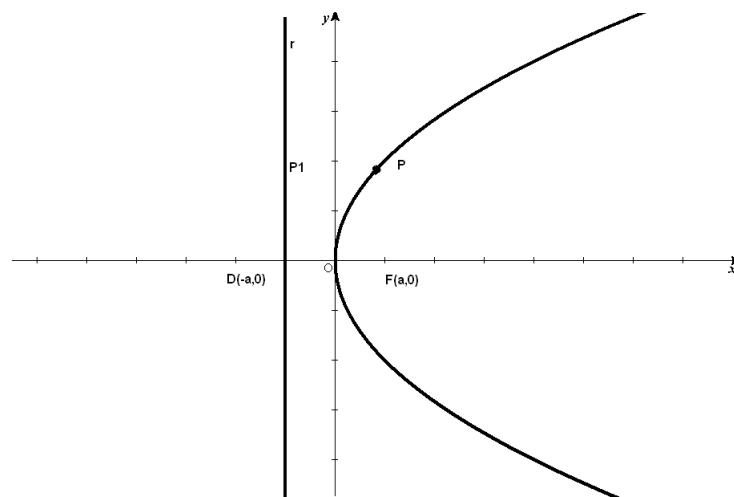


Figura 4.4: Parábola no plano  $xy$ .

Fonte: Adaptado de Santos (1988)

Assim  $P$  pertence à parábola se

$$\|FP\|^2 = \|PP_1\|^2. \quad (4.12)$$

Da Figura 4.4 observa-se que

$$PP_1 = PD + DP_1 \quad \text{e} \quad DP_1 = OP. \quad (4.13)$$

Sendo  $F(a, 0)$  e  $D(-a, 0)$  tem-se

$$(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2. \quad (4.14)$$

Assim,

$$y^2 = 4ax. \quad (4.15)$$

## 4.2 Propriedades Refletoras das Cônicas

### 4.2.1 A Propriedade de Reflexão da Elipse

Pode-se enunciar a propriedade refletora da seguinte forma: supondo que a parte interna da elipse possa refletir raios de luz como um espelho, todos os raios de luz emitidos em um dos focos, ao se refletirem na parte interna da elipse, irão se dirigir precisamente para o outro foco.

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.16)$$

representa a elipse de focos com coordenadas  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Considerando-se  $P(x_0, y_0)$  um ponto qualquer da elipse e sabendo que a elipse é simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , pode-se considerar o ponto  $P$  pertencente ao primeiro quadrante, isto é,  $x > 0$  e  $y > 0$ . É possível então demonstrar que o ângulo  $\alpha$  entre o segmento  $PF_2$  e a reta  $t$  é igual a  $\beta$ , que fica entre o segmento  $PF_1$  e a reta  $t$ , como na Figura 4.5.

Isolando  $y$  na Equação 4.16 temos:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4.17)$$

Derivando a Equação 4.17 em função de  $x$ , obtemos:

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4.18)$$

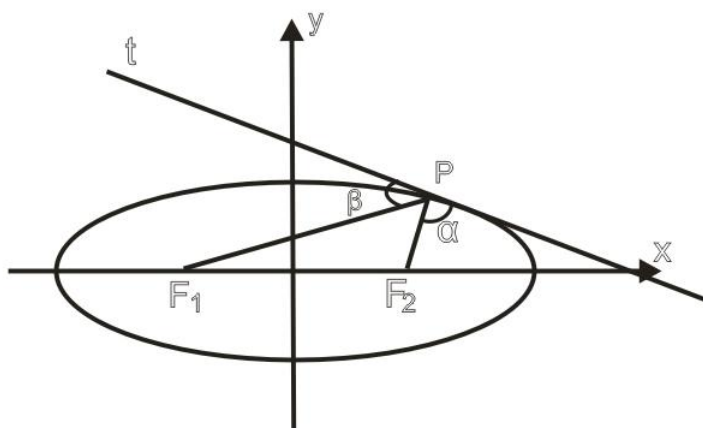


Figura 4.5: Propriedade refletora da elipse.

Fonte: Adaptado de Jennings (1994)

Se  $y'_0$  é o coeficiente angular da reta tangente à elipse em  $P$ , então no ponto  $P(x_0, y_0)$  tem-se que:

$$y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} \quad (4.19)$$

e

$$y'_0 = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}. \quad (4.20)$$

O coeficiente angular do segmento que contém os pontos  $F_2$  e  $P$  é dado pela expressão:

$$m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c} = \frac{b\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 - c} \quad (4.21)$$

e o coeficiente angular da reta que contém os pontos  $F_1$  e  $P$  é

$$m_2 = \frac{y_0}{x_0 + c} = \frac{b\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 + c}. \quad (4.22)$$

Para demonstrar que  $\alpha = \beta$  é necessário mostrar que esses dois ângulos são agudos. Para isso é preciso provar que a reta normal ao gráfico da elipse no ponto  $P(x_0, y_0)$  passa entre  $PF_1$  e  $PF_2$ . A reta normal nesse caso possui a equação

$$y - y_0 = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} (x - x_0). \quad (4.23)$$

Substituindo as Equações 4.17 e 4.19 na Equação 4.23 tem-se que:

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} (x - x_0) \quad (4.24)$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a(x - x_0)}{b} \frac{1}{x_0} \sqrt{a^2 - x_0^2} + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \left(\frac{a(x - x_0)}{b} + \frac{b}{a}\right) \sqrt{a^2 - x_0^2}. \quad (4.26)$$

Elevando-se os membros ao quadrado:

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(\frac{a(x - x_0)}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 (a^2 - x_0^2) \quad (4.27)$$

Após algumas simplificações e isolando  $x$  obtém-se a expressão:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{x_0^2} x_0. \quad (4.28)$$

Assim, concluímos que esta reta intercepta o eixo  $x(y = 0)$  no ponto de coordenada

$$x = \frac{c^2}{a^2} x_0. \quad (4.29)$$

Para  $x_0 > 0$  observa-se que este valor é maior do que  $-c$ . Como  $x_0 < a$ , observa-se que o valor obtido na Equação 4.29 é menor que  $c^2/a$ . Mas como  $c < a$ , é possível ver que  $c^2/a < c$ . Conclui-se destas desigualdades que:

$$-c < x = \frac{c^2}{a^2} x_0 < c. \quad (4.30)$$

Então a reta normal ao gráfico da elipse passa entre as retas  $PF_1$  e  $PF_2$ , o que implica que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são agudos.

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos agudos, pode-se dizer então que  $\alpha$  é o ângulo formado pela reta tangente à elipse e o segmento que contém os pontos  $F_2$  e  $P$  e  $\beta$  é o ângulo formado pela reta tangente à elipse e o segmento que contém os pontos  $F_1$  e  $P$ . Assim, o coeficiente angular do segmento que contém os pontos  $F_2$  e  $P$  é dado pela expressão:

$$m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c} \quad (4.31)$$

e o coeficiente angular do segmento que contém  $F_1$  e  $P$  é

$$m_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}. \quad (4.32)$$

A fim de mostrar que  $\alpha = \beta$ , utiliza-se a tangente de cada ângulo entre duas retas em termo de seus coeficientes angulares. Com base na transformação trigonométrica

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}, \quad (4.33)$$

são obtidas as seguintes expressões:

$$\tan \alpha = \left| \frac{y'_0 - m_1}{1 + y'_0 m_1} \right| \quad (4.34)$$

e

$$\tan \beta = \left| \frac{y'_0 - m_2}{1 + y'_0 m_2} \right|. \quad (4.35)$$

Substituindo-se as Equações 4.19, 4.20, 4.31 e 4.32 nas Equações 4.34 e 4.35 tem-se que:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{y'_0 - m_1}{1 + y'_0 m_1} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} - \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 - c}}{1 - \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 - c}} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{b}{a} \frac{x_0(x_0 - c) + (a^2 - x_0^2)}{(x_0 - c)\sqrt{a^2 - x_0^2}}}{\frac{a^2(x_0 - c) - b^2 x_0}{a^2(x_0 - c)}} \right| \\ &= \left| \frac{-ab[x_0^2 - x_0 c + a^2 - x_0^2]}{(a^2 x_0 - a^2 c - b^2 x_0)\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right| \quad (4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ab|-x_0 c + a^2|}{|x_0(a^2 - b^2) - a^2 c|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{ab|-x_0 c + a^2|}{|x_0 c^2 - a^2 c|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{ab|-x_0 c + a^2|}{c|x_0 c - a^2|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{ab|x_0 c + a^2|}{c|x_0 c + a^2|\sqrt{a^2 - x_0^2}}. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais na Equação 4.37, a expressão obtida é

$$\tan \alpha = \frac{ab}{c\sqrt{a^2 - x_0^2}}. \quad (4.38)$$

Para o ângulo  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \left| \frac{y'_0 - m_2}{1 + y'_0 m_2} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} - \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 + c}}{1 - \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0 + c}} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{b}{a} \frac{x_0(x_0 - c) + (a^2 - x_0^2)}{(x_0 + c)\sqrt{a^2 - x_0^2}}}{\frac{a^2(x_0 - c) - b^2 x_0}{a^2(x_0 + c)}} \right| \\ &= \left| \frac{-ab[x_0^2 + x_0 c + a^2 - x_0^2]}{(a^2 x_0 + a^2 c - b^2 x_0)\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right| \\ &= \frac{ab|x_0 c + a^2|}{|x_0(a^2 - b^2) - a^2 c|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{ab|x_0 c + a^2|}{|x_0 c^2 + a^2 c|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= \frac{ab|x_0 c + a^2|}{c|x_0 c + a^2|\sqrt{a^2 - x_0^2}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Analogamente é encontrada a expressão:

$$\tan \beta = \frac{ab}{c\sqrt{a^2 - x_0^2}} \quad (4.40)$$

Portanto, como  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos agudos, pode-se concluir que  $\alpha = \beta$ .

### 4.2.2 A Propriedade de Reflexão das Parábolas

Seja uma parábola de equação  $x^2 = 4py$  e o foco com as coordenadas  $F(0, p)$ . Considere-se um ponto  $P(x_0, y_0)$  qualquer. Como a parábola é o gráfico de uma função derivável, é possível afirmar que existe uma reta tangente à parábola no ponto  $P$ . Logo há uma

intersecção da reta tangente à parábola com o eixo  $y$ , intersecção esta de coordenadas  $(Q, q)$

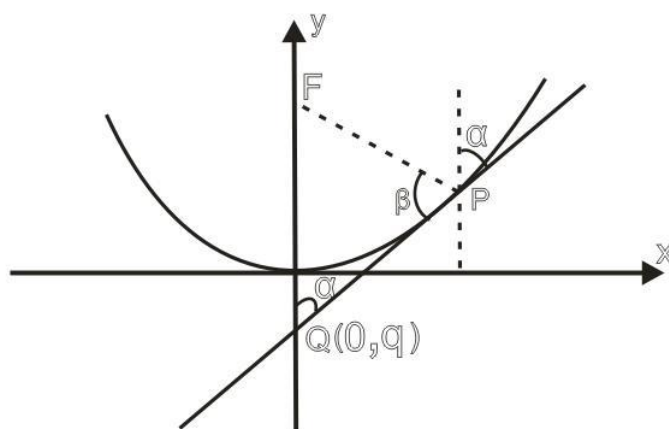


Figura 4.6: Propriedade refletora da parábola.

Fonte: Adaptado de Jennings (1994)

Da equação  $x^2 = 4py$ :

$$y = x^2/4p. \quad (4.41)$$

Derivando a Equação 4.41 em função de  $x_0$  obtém-se:

$$y'(x_0) = x_0/2p. \quad (4.42)$$

A equação da reta tangente em  $P$  é

$$y - y_0 = (x_0/2p)(x - x_0). \quad (4.43)$$

Da Figura 4.6 observa-se que  $\alpha$  é o ângulo formado pela reta tangente à parábola e a reta vertical que contém o ponto  $P$ . Percebe-se ainda que  $\beta$  é o ângulo formado pela reta tangente à parábola e a reta que contém os pontos  $F$  e  $P$ .

Assim para demonstrar a propriedade refletora da parábola, deve-se mostrar que  $\alpha = \beta$ , provando que o triângulo  $FPQ$  é isósceles. Para isso as distâncias  $FP$  e  $FQ$  devem ser iguais.

Substituindo a Equação 4.41 na coordenada  $q = y_0 - x_0^2/2p$ , obtemos

$$q = -x_0^2/4p. \quad (4.44)$$

A distância entre os pontos  $F$  e  $Q$  é

$$FQ = p - q. \quad (4.45)$$

Substituindo a Equação 4.44 na Equação 4.45, obtém-se

$$\overline{FQ} = p + \frac{x_0^2}{4p} \quad (4.46)$$

Calcula-se então o segmento  $\overline{FP}$ :

$$\overline{FP} = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2} \quad (4.47)$$

$$\overline{FP} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0^2}{4p} - p\right)^2} \quad (4.48)$$

Depois de algumas manipulações algébricas obtém-se que:

$$\overline{FP} = \frac{x_0^2}{4p} - p. \quad (4.49)$$

Logo as distâncias  $\overline{FQ} = \overline{FP}$  são iguais. Assim o triângulo  $FPQ$  possui os dois lados iguais e seus ângulos de base também são iguais.

Se os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais, os raios paralelos ao eixo óptico convergem exatamente para o foco.

### 4.2.3 A Propriedade de Reflexão das Hipérboles

No caso de uma hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.50)$$

e com os focos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , considera-se um ponto qualquer  $P(x_0, y_0)$  conforme a Figura 4.7.

O ângulo  $\alpha$  é formado pela reta tangente à hipérbole e o segmento que contem os pontos  $F_2$  e  $P$ . Temos também que  $\beta$  é o ângulo formado pela reta tangente à hipérbole e o segmento que contem os pontos  $F_1$  e  $P$ . A demonstração é análoga à da elipse.

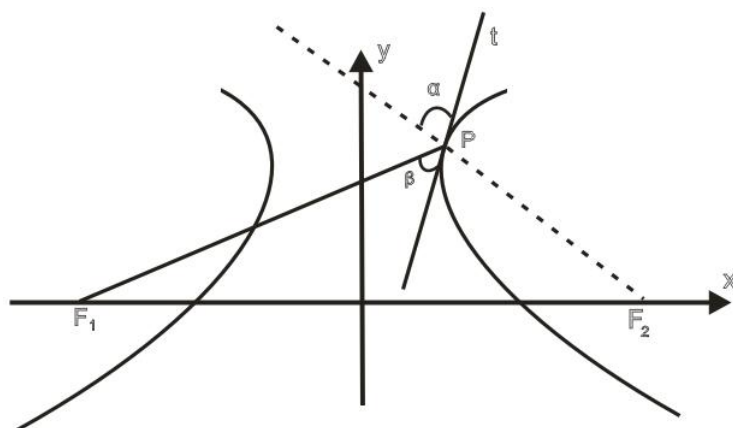


Figura 4.7: Propriedade refletora da hipérbole.

Fonte: Adaptado de Jennings (1994)

## 4.3 Antenas Refletoras

### 4.3.1 Refletor Esférico

O espelho esférico é um refletor simples. É um sistema especialmente interessante quando o bloqueio de abertura (*aperture stop*) está localizado no centro de curvatura, pois como o sistema tem um único centro, qualquer reta que passe pelo centro do bloqueio pode ser considerada como o eixo óptico (Smith, 1990).

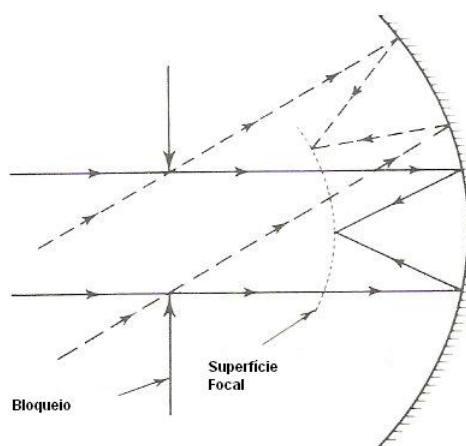


Figura 4.8: Um refletor esférico com o bloqueio no centro de curvatura forma uma imagem esférica concêntrica na superfície focal.

Fonte: Smith (1990)

A imagem formada pelo espelho esférico é livre de aberrações como o coma e o astigmatismo, quando o bloqueio está na posição apresentada na Figura 4.8.

### 4.3.2 Refletor Parabólico

Superfícies refletoras geradas por rotação das seções cônicas (círculo, parábola, hipérbole e elipse) têm duas propriedades ópticas importantes. De acordo com a primeira propriedade a imagem de um objeto puntiforme localizado em um dos focos é formada no outro foco sem aberração esférica. O parabolóide de revolução descrito pela equação

$$x = y^2/4f \quad (4.51)$$

apresenta um foco em  $f$  e o outro no infinito, sendo assim capaz de formar imagens

perfeitas de objetos distantes localizados sobre o eixo óptico. A segunda propriedade é que a imagem não apresenta astigmatismo caso o bloqueio de abertura esteja no plano de um dos focos. Quando o bloqueio está localizado no plano focal o astigmatismo é zero e a imagem é localizada numa superfície esférica de raio  $f$ , conforme a Figura 4.9.

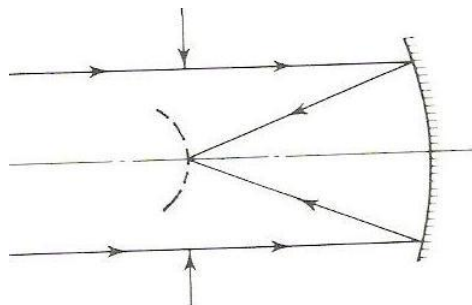


Figura 4.9: O refletor parabólico é livre de astigmatismo quando o bloqueio está no foco.

Fonte: Smith (1990)

### 4.3.3 Refletores elípticos e hiperbólicos

As propriedades dessas seções cônicas são utilizadas em telescópios Cassegrain e Gregorianos. O espelho primário de cada um desses sistemas é um parabolóide que produz uma imagem axial no foco, livre de aberrações. Um dos focos do espelho secundário coincide com o foco da parábola. Assim a imagem formada está localizada no outro foco do espelho secundário e está livre de aberração esférica. A parábola, a elipse e a hipérbole são superfícies livres de aberração esférica somente no eixo (Figuras 4.10 e 4.11).

### 4.3.4 Sistemas de dois refletores

A geometria atual dos radiotelescópios originou-se de telescópios de dois refletores idealizados por estudiosos como Isaac Newton. Ele modificou a estrutura do seu telescópio óptico para um sistema com dois espelhos refletores com o propósito de corrigir aberrações cromáticas (Nussbaum, 1968). Newton utilizou um espelho côncavo esférico como refletor principal e um espelho plano secundário para concentrar os raios em único ponto focal, onde estava localizada a ocular. Esse sistema ficou conhecido como Refletor Newtoniano (Clarricoats, 1994). Além do Refletor Newtoniano (Figura 4.12) surgiram no decorrer do século XVI mais duas novas estruturas de dois espelhos refletores: A Cassegrain e a Gregoriana,

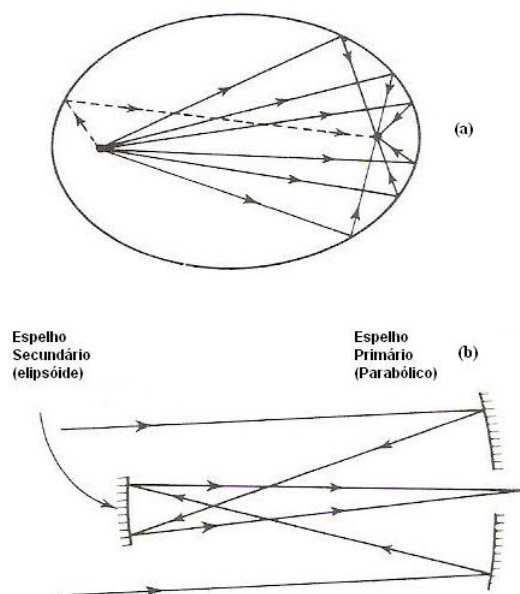


Figura 4.10: Um objeto puntiforme em um dos focos do refletor elíptico tem sua imagem formada no outro foco sem aberração esférica (a). O telescópio Gregoriano usa um espelho primário parabólico e um secundário elíptico de modo que a imagem não tem aberração esférica (b).

Fonte: Smith (1990)

propostas respectivamente pelos astrônomos Cassegrain e James Gregory (Bucci et al., 1999).

Nesses sistemas, a luz atinge o espelho primário (parabólico) e é refletida e direcionada para o foco primário. No sistema newtoniano a luz é interceptada por um espelho secundário antes de atingir o foco primário, sendo refletida a  $90^\circ$ , geralmente para uma ocular que fica na lateral do instrumento. No sistema Cassegrain, a luz direcionada para o foco primário é interceptada pelo espelho secundário (hiperbólico) e redirecionada de volta para o centro do espelho primário, o qual apresenta uma pequena abertura no centro. No caso do sistema Gregoriano, o espelho secundário é um elipsóide (Figuras 4.13 e 4.14).

As configurações duplo-refletoras, Cassegrain e Gregoriana, apresentam algumas vantagens. Podem-se apontar duas importantes: o acesso facilitado ao alimentador devido a seu posicionamento e a obtenção de uma distância focal equivalente superior à distância física ente os refletores (Balanis, 1997). O sistema duplo-refletor possibilita o controle simultâneo da distribuição da amplitude e da fase do campo no plano da abertura, através de modelagens do refletor principal e do sub-refletor, tornando possível construir sistemas

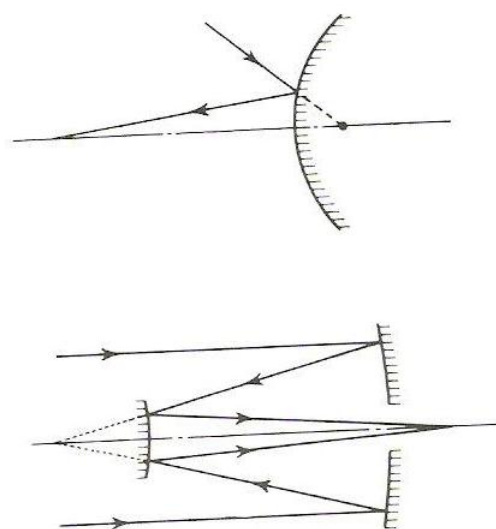


Figura 4.11: O raio direcionado para o foco da hipérbole é refletido para outro foco (Refletor Cassegrain).

Fonte: Smith (1990)

altamente eficientes (Mittra e Galindo, 1980).

Apesar das vantagens já citadas, estas configurações apresentam um bloqueio de energia considerável, criado pela presença do sub-refletor e de sua estrutura de sustentação diante do refletor principal, que obstrui uma porção da área efetiva da abertura. O bloqueio devido ao sub-refletor impossibilita a obtenção de ganhos mais elevados e acaba causando um aumento nos níveis dos lóbulos secundários (Rusch, 1992). Esses efeitos de bloqueio devido ao sub-refletor podem ser minimizados através da modelagem das superfícies refletoras (Galindo, 1964).

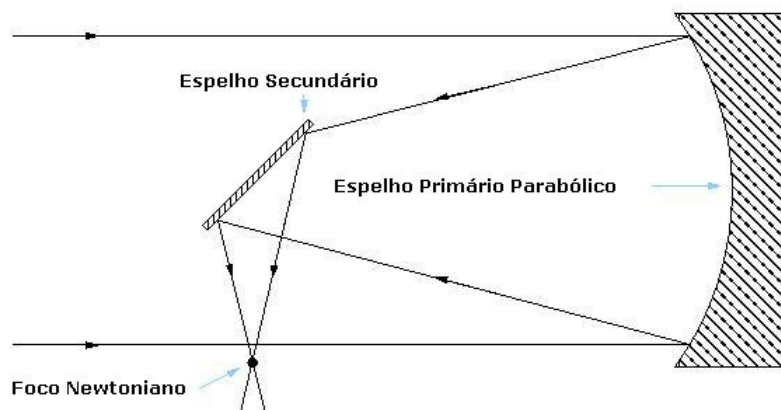


Figura 4.12: Duplo refletor Newtoniano.

Fonte: Adaptado de Burland & Kennedy (1958)

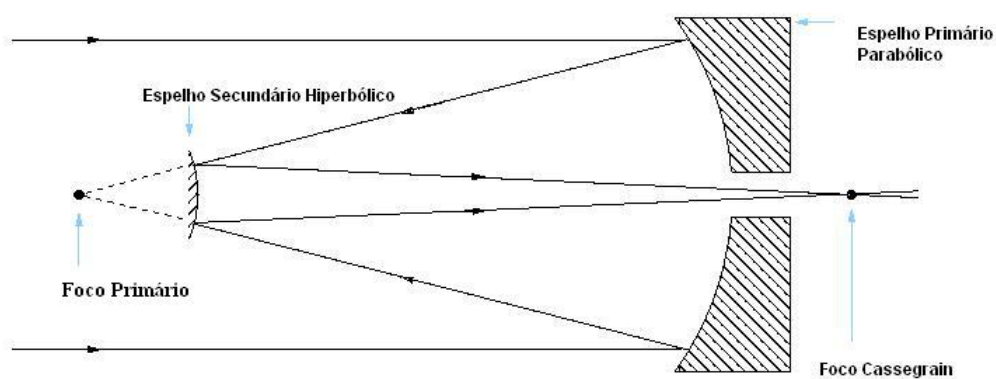


Figura 4.13: Duplo refletor Cassegrain.

Fonte: Adaptado de Burland & Kennedy (1958)

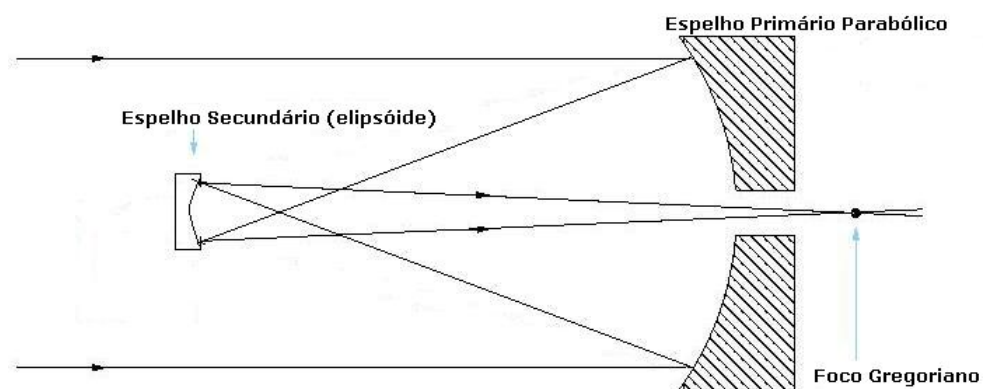


Figura 4.14: Duplo refletor Gregoriano.

Fonte: Adaptado de Burland & Kennedy (1958)

## 4.4 Antenas e Radiação

As antenas são projetadas para irradiar (ou receber) energia de modo tão eficiente quanto possível. Como dispositivo receptor, a antena é definida como a região de transição entre uma onda no espaço livre e uma onda guiada. A resposta de uma antena em função da direção é dada pelo *diagrama de radiação*. Pelo teorema da reciprocidade, o diagrama de radiação é o mesmo tanto para transmissão quanto para recepção. O diagrama de radiação de uma antena é uma representação gráfica de suas propriedades de radiação em função das coordenadas do espaço. Consiste em certo número de lóbulos, como na Figura 4.15. O lóbulo principal é o lóbulo com o maior máximo, enquanto que os lóbulos menores são chamados lóbulos secundários ou laterais e lóbulos traseiros (Kraus, 1950). É desejável que o número de lóbulos secundários seja o menor possível, já que a potência por eles radiada é perdida.

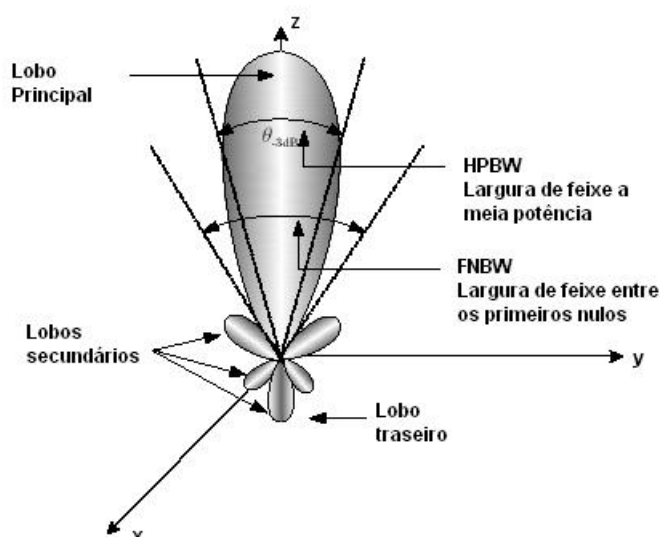


Figura 4.15: Diagrama de radiação de uma antena em coordenadas polares e em escala linear.

Fonte: Adaptado de Kraus & Carver (1978)

A largura do feixe a meia potência é o ângulo medido entre as direções para as quais a intensidade de radiação é metade da intensidade de radiação máxima. É uma medida da concentração de potência radiada. Normalmente este parâmetro é simbolizado por HPBW (*Half Power Beam Width*). A largura do feixe entre os primeiros nulos é um parâmetro semelhante à largura de feixe a meia potência, porém o ângulo é medido entre as direções dos primeiros nulos do diagrama de radiação. Este parâmetro é normalmente simbolizado

por FNBW (*First Null Beam Width*). Caso o diagrama seja medido suficientemente longe da antena, de modo a não haver qualquer variação no diagrama em função da distância, ele será chamado de diagrama do campo distante ou simplesmente diagrama de radiação (Kraus & Carver, 1978).

Medindo-se em distâncias menores, são obtidos os diagramas de campo próximo que são função tanto do ângulo como da distância. O diagrama pode ser expresso em termos de intensidade de campo ou em intensidade de radiação. Para mostrar com mais detalhes os lóbulos menores, o diagrama pode ser plotado numa escala de decibéis como na Figura 4.16.

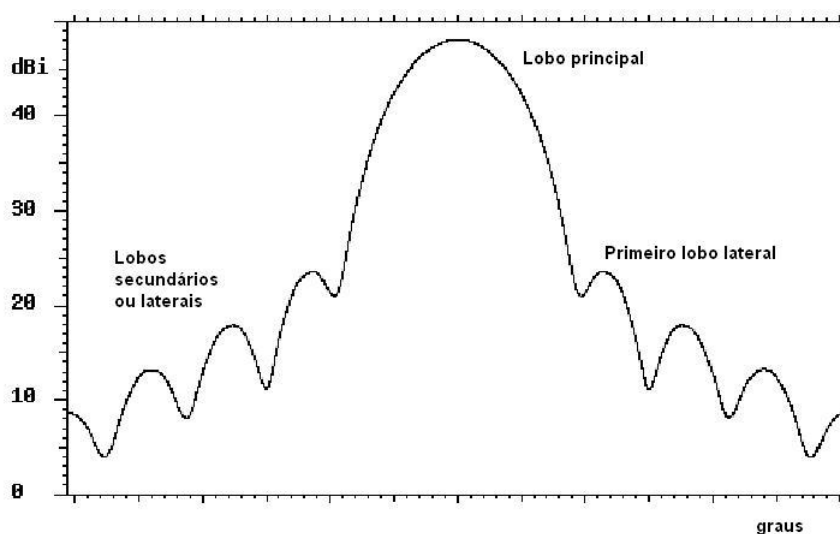


Figura 4.16: Diagrama de radiação de uma antena em coordenadas retangulares e decibéis (escala logarítmica).

Fonte: Adaptado de Kraus & Carver (1978)

#### 4.4.1 Aproximação Gaussiana

Qualquer mudança na distribuição da intensidade do feixe altera o padrão de difração original. O lóbulos principal pode ser descrito de forma aproximada por uma função gaussiana,  $y = e^{-x^2}$ . A gaussiana é extremamente robusta a transformações (por exemplo, a integral ou derivada de  $e^{-x}$ ). Assim o feixe gaussiano permanece razoavelmente livre de aberrações ao se propagar em um sistema óptico (Smith, 1990). A distribuição de intensidade na aproximação gaussiana está ilustrada na Figura 4.17 e pode ser descrita pela equação:

$$I(r) = I_0 e^{-2r^2/\omega^2}, \quad (4.52)$$

onde  $I(r)$  é a intensidade do feixe a uma distância  $r$  do eixo;  $I_0$  é a intensidade no eixo;  $r$  é a distância radial e  $\omega$  é a distância radial para qual a intensidade cai para  $I_0/e^2$ .

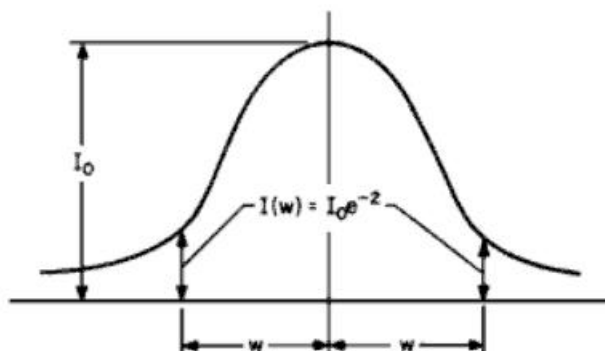


Figura 4.17: Perfil da Intensidade do feixe Gaussiano.

Fonte: Smith (1990)

Integrando a Equação 4.52, encontra-se a potência total do feixe, que é dada por:

$$P_{tot} = \pi I_0 \omega^2 / 2. \quad (4.53)$$

A potência que passa pelo centro de uma abertura circular de raio  $\alpha$  é dada por:

$$P(\alpha) = P_{tot} (1 - e^{-2\alpha^2/\omega^2}). \quad (4.54)$$

O feixe gaussiano possui uma largura estreita em alguns pontos, que são chamados de cintura (*waist*). O feixe se propaga de acordo com a Equação 4.55:

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right], \quad (4.55)$$

onde  $\omega_z$  é o semi-diâmetro do feixe a uma distância  $z$  da cintura,  $\omega_0$  é o semi-diâmetro do feixe na cintura;  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $z$  a distância ao longo do eixo desde a cintura até o plano de  $\omega_z$ .

## 4.5 O Projeto GEM

O Projeto GEM (*Galact Emission Mapping*) teve seu início em 1991 durante a XXI reunião da IAU na Argentina. Surgindo daí uma colaboração internacional entre os E.U.A. (Lawrence Berkeley National Laboratory e University of Califórnia at Berkeley), Itália (Laboratório de Física Cósmica), Colômbia (Centro Internacional de Física), Portugal

(Universidade do Porto) e Brasil (Divisão de Astrofísica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) com a intenção de produzir mapas de emissão celeste em baixas frequências (entre 0,408 GHz e 10 GHz) utilizando um mesmo instrumento (Tello, 1997). O instrumento é um radiotelescópio portátil com uma antena de 5,5 m de diâmetro que pode mapear a esfera celeste em faixas de declinação de  $60^\circ$  a partir de uma rede de locais de observação, localizados em diferentes latitudes do globo terrestre. Na antena são montados painéis extensores que acrescentam ao seu diâmetro 4,0 m com a finalidade de reduzir a contaminação do solo (Ferreira, 2008). Foi construída também uma cerca de 5 m de altura em torno na antena com o objetivo de minimizar a contaminação do solo, como pode ser observado na Figura 4.18. A técnica de varredura utilizada para as medições consiste em manter a antena com uma distância zenital fixa, variando o azimute em  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , com velocidade angular constante. Na atual montagem do radiotelescópio a distância zenital é de  $30^\circ$ . A combinação do movimento da antena com o movimento da Terra produz um conjunto de círculos levemente espaçados em ascensão reta que efetivamente cobrem uma faixa de declinação equivalente ao ângulo do cone zenital (Tello, 1997), como mostra a Figura 4.19.



Figura 4.18: Radiotelescópio GEM no sítio de Cachoeira Paulista - SP.

Fonte: Oliveira (2009)

O radiotelescópio GEM já esteve instalado em diversos sítios de observação. Em 1992

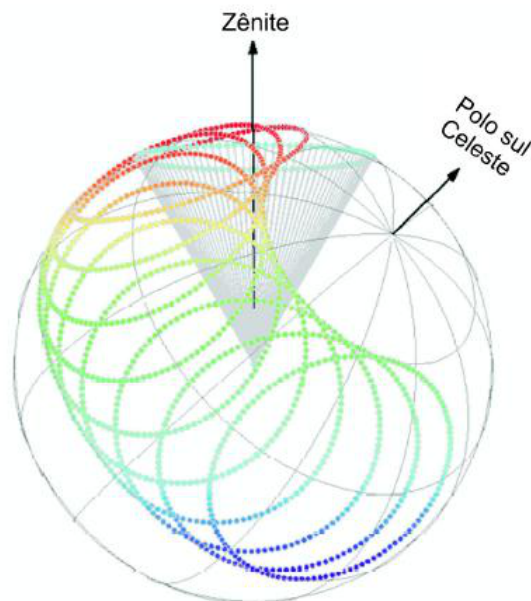


Figura 4.19: Trajetória do feixe descrito pela antena na esfera celeste.

Fonte: INPE(2010)

na Antártica, com o objetivo de fazer medidas em 408 MHz. Entre os anos de 1993 e 1997, o radiotelescópio esteve instalado nos sítios de Bishop, EUA; Villa de Leyva, Colômbia e Teide, Espanha (Ferreira, 2008). O radiotelescópio GEM encontra-se atualmente nas instalações do INPE de Cachoeira Paulista ( $22^{\circ}41'8$ ,  $74''S$ ,  $44^{\circ}59'54,34''W$ ), a 563 m de altitude. Após terem sido feitas as medidas em 408 MHz, 1465 MHz e 2,3 GHz, o foco do projeto começou a ser modificado a fim de ressaltar as medidas de polarização de emissão Galáctica na busca da caracterização da componente polarizada da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (RCFM), definindo assim que os novos receptores seriam polarimétricos (Oliveira, 2009).

#### 4.5.1 A óptica do radiotelescópio GEM

A antena do radiotelescópio é composta de um refletor primário parabólico de 5,5 m, construído a partir de 24 chapas de alumínio pintadas com tinta epoxy. Apresenta uma estrutura metálica que suporta individualmente cada pétala que compõe a parábola, assim como cada um dos painéis extensores (Ferreira, 2008). De configuração Cassegrain, o sinal é focalizado por um refletor primário parabólico (*Scientific Atlanta*) de 5613,4 mm e por um refletor secundário hiperbólico de 584 mm (Figura 4.20), utilizado somente nas medidas em 5 GHz e 10 GHz, conforme descrito na Tabela 4.1. O projeto do receptor em

10 GHz foi iniciado em 2008 e quando estiver em operação vai ser sensível em intensidade total e polarização. Ao passar pelo refletor secundário o sinal chega ao alimentador do polarímetro que faz o casamento da impedância entre o espaço aberto e as guias de onda. No casamento por impedância foi visto que a perda por reflexão é inferior a -25 dB na maior parte da banda de observação e seu feixe é bastante simétrico, possuindo lóbulos laterais extremamente baixos (-42,5 dB), o que permite medidas de polarização de alta sensibilidade (Oliveira, 2009).

Tabela 4.1: Descrição óptica do radiotelescópio GEM.

Diâmetro do refletor primário	5613,4 mm
Distância focal do refletor primário	1827,5 mm
Profundidade do refletor primário	1079,5 mm
Razão focal	0,33
Diâmetro do refletor secundário	584 mm
Razão focal do refletor secundário	0,47 mm
Nível dos lóbulos laterais	-43,4 dB
Nível de perda de retorno	-25 db
Polarização cruzada	~-40 dB

Fonte: Oliveira, 2009

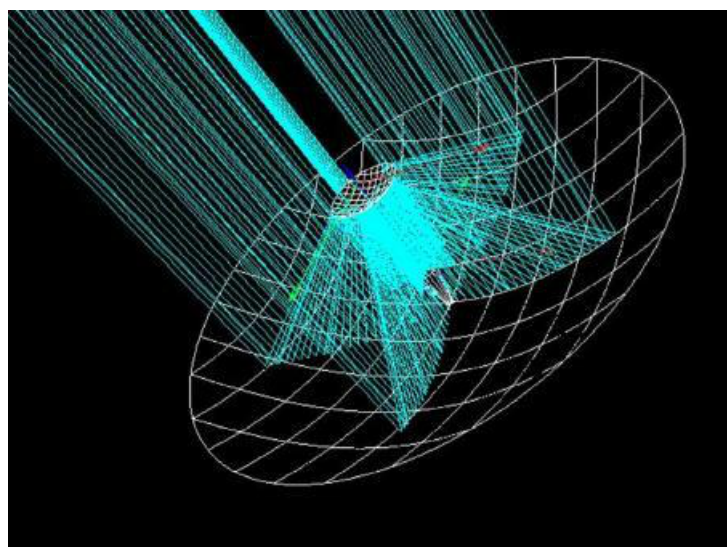


Figura 4.20: Trajetória calculada para os feixes de micro-ondas incidentes na antena GEM.

Fonte: INPE (2010)

# Capítulo 5

## Resultados e Análises

### 5.1 A Óptica do Radiotelescópio GEM

Como mencionado no Capítulo 4, no sistema tipo Cassegrain o espelho hiperbólico é colocado entre o parabólico e o foco fazendo com que um dos focos da hipérbole coincida com o foco da parábola. Assim, os raios que iriam formar a imagem no foco da parábola são refletidos pelo espelho hiperbólico formando a imagem no outro foco da hipérbole, conforme a Figura 5.1.

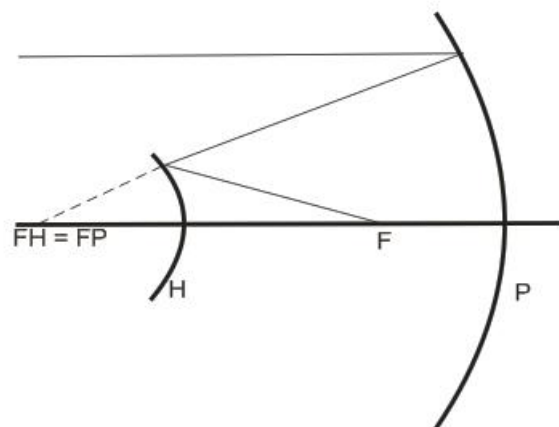


Figura 5.1: Distâncias focais no telescópio tipo Cassegrain.

Com os dados de razão focal e diâmetro do espelho apresentados na Tabela 4.1 e sabendo que a distância focal é o produto da razão focal pelo diâmetro, tem-se que a distância focal do refletor secundário é 274 mm.

Uma vez que o foco da hipérbole coincide com o foco da parábola, tem-se então que a distância do vértice do espelho secundário hiperbólico até o vértice do espelho primário

parabólico é de 1553 mm.

A partir dos dados obtidos anteriormente e da Figura 5.2 foram determinados os parâmetros da hipérbole  $a$ ,  $b$  e  $c$  (Tabela 5.1).

Tabela 5.1: Parâmetros do refletor secundário do telescópio GEM.

Distância focal da hipérbole	274 mm
Distância do vértice da hipérbole ao vértice da parabola	1553 mm
$a$	420 mm
$b$	553 mm
$c$	694 mm

Assim, a excentricidade da hipérbole

$$e = c/a, \quad (5.1)$$

vale 1,65.

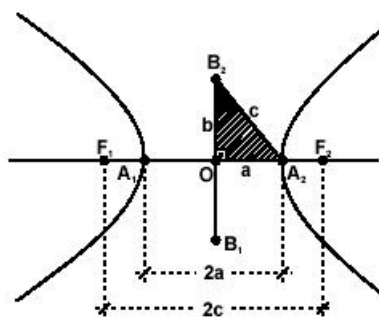


Figura 5.2: Elementos da Hipérbole.

Fonte: Venturi (2008)

Determinados os parâmetros de entrada, com os dados obtidos até então, foi possível construir o traçado dos raios do sistema óptico do GEM com o auxílio de uma simulação no programa OSLO (*Optics Software For Layout and Optimization*) para projeto óptico (Figura 5.3).

Para o programa OSLO é fornecido o parâmetro  $cc$  (*conic constant*) da hipérbole, que é igual a  $-e^2$ . Logo  $cc = -2,73$  (Tabela 5.2).

O programa OSLO teve sua origem num programa para ensino de projeto óptico desenvolvido pela Universidade Rochester (EUA). Além da versão de estudante (OSLO-

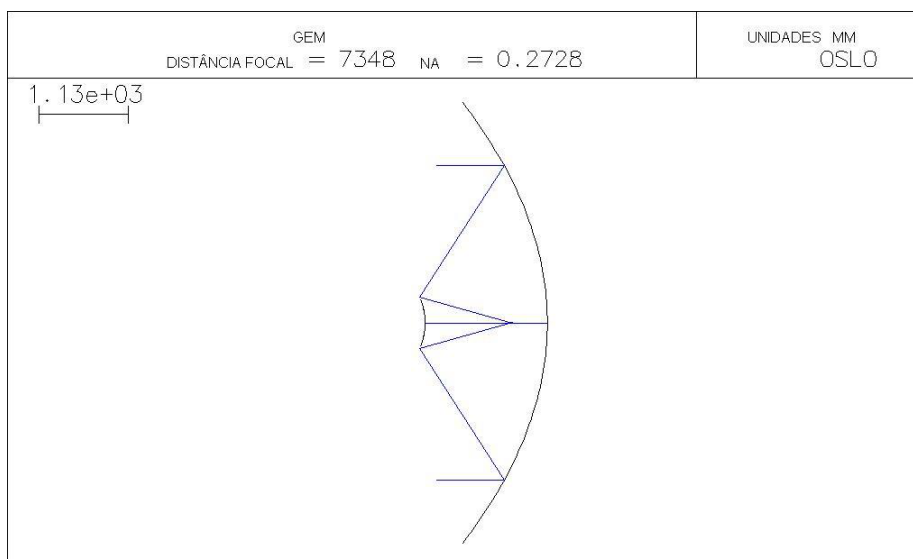


Figura 5.3: Traçado dos raios do sistema óptico de GEM obtidos no OSLO.

Tabela 5.2: Parâmetros de Entrada do OSLO.

	Espelho Primário	Espelho Secundário
Raio	-3655 mm	-728 mm
Semi-diâmetro	2806 mm	292 mm
Superfície	Espelho	Espelho
Parâmetros Especiais	Conic/Toric Data: $cc = -1$	Conic/Toric Data: $cc = -2,73$

Edu) utilizada neste trabalho, o programa está disponível em mais três versões OSLO Premium, OSLO Standard e OSLO Light, eliminando recursos mais avançados para versões mais simples. O OSLO trata os objetos como superfícies. Assim, um sistema óptico é especificado como uma série de superfícies que são interceptadas de forma consecutiva pelo raio ao longo de sua passagem pelo sistema. O programa OSLO tem capacidade de modelar uma grande variedade de componentes de reflexão, difração e refração. É usado para simular e analisar o desempenho de sistemas ópticos (OSLO, 2009).

Com ajuda do Programa OSLO pôde-se avaliar muitos aspectos do projeto, incluindo elementos da imagem local: Diagramas de Pontos, Função de Alargamento de Pontos, Disco de Airy e erros de frente de onda.

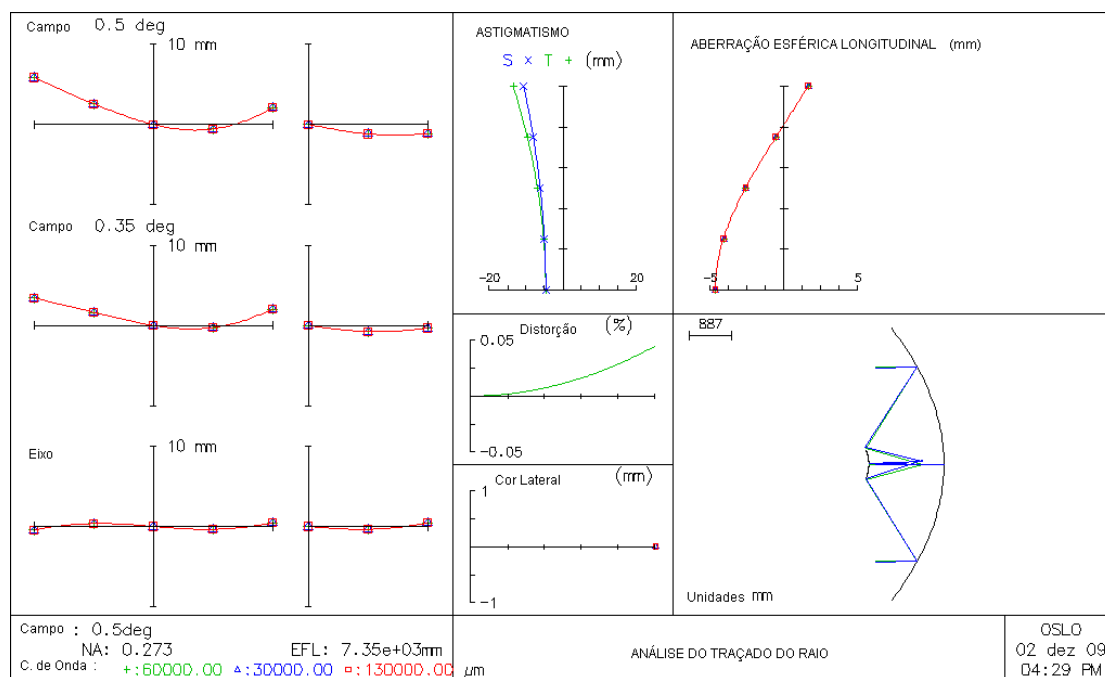


Figura 5.4: Análise do raio para 5 GHz.

### 5.1.1 Análise do Traçado de Raios

A análise gráfica de desempenho do telescópio (Figura 5.4) fornece dados como astigmatismo, aberração longitudinal e o desenho bidimensional do sistema. O astigmatismo tem relação com a curvatura do campo na superfície da imagem (IMS); a mudança de posição do bloqueio de abertura (*aperture stop*) reduz o erro de astigmatismo. Quando o bloqueio está localizado no foco o astigmatismo é nulo. A aberração esférica longitudinal apresenta gráfico com três cores uma para cada comprimento de onda. Como mencionado no Capítulo 4, no sistema Cassegrain a imagem formada está livre de aberração esférica, sendo assim é possível observar na Figura 5.4 que os comprimentos de ondas se sobrepõem. A análise gráfica foi feita para 5 GHz e 10 GHz como mostram as Figuras 5.4 e 5.5.

### 5.1.2 Análise de Frente de Onda

Nas Figuras 5.6 e 5.7, PV é o erro do pico ao vale enquanto RMS (Root Mean Squared Error) é o erro quadrático médio. No lado esquerdo e no centro da figura é possível observar o resultado da avaliação fora do eixo e no lado direito encontra-se o resultado sobre o eixo. A análise está no comprimento de onda primário de  $60000 \mu\text{m}$ , que corresponde a 5 GHz. Conforme citado no Capítulo 3, para que um sistema óptico forme uma imagem perfeita de um ponto é necessário que a frente de onda de saída seja esférica e o raio deve convergir

para o centro de curvatura da onda. Um outro ponto interessante ligado à distorção de frente de onda é dado pelo cálculo do *Strehl Ratio*, medida de erro mencionada no Capítulo 3 e que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1 este valor estiver, menor será sua distorção de frente de onda (Zílio, 2009). No sistema analisado no presente trabalho, o valor obtido foi de 0,99 tanto para 5 GHz quanto para 10 GHz, o que indica uma distorção de frente de onda muito pequena.

### 5.1.3 Análise do Disco de Airy

Conforme mencionado no Capítulo 3, se a luz passa através de um orifício, a figura de difração é formada por uma região central clara, chamada Disco de Airy, rodeada por anéis consecutivos alternadamente claros e escuros. O diâmetro do disco de Airy aumenta para cada ponto de imagem, assim as distribuições de intensidade começam a sobrepor-se e a diminuir a resolução da imagem. O programa OSLO mostra o tamanho mínimo do disco de Airy baseado na óptica geométrica (Zílio, 2009). Nas Figuras 5.8 e 5.9 observa-se a análise do disco de Airy no foco ( $z = 0$ ) e a uma distância de 250 mm do plano focal para 5 GHz e nas Figuras 5.10 e 5.11 a mesma análise para 10 GHz.

### 5.1.4 Análise do Diagrama de Pontos

Os esquemas de pontos são úteis para determinação das aberrações, pois cada aberração resulta num diagrama de ponto característico, como mostram as Figuras 6.12 e 6.13. Este diagrama é obtido definindo-se um retículo uniforme na pupila de entrada, através da qual traça-se um feixe de raios igualmente espaçados, não havendo interação e interferência entre os raios. Propagando-se este feixe pelo telescópio, calcula-se a trajetória de cada raio segundo as equações da óptica geométrica. A interseção de cada raio é então representada pelo diagrama de pontos (Smith, 1990). É uma avaliação adequada para uma verificação da qualidade de imagem, mas não é suficiente por si só, é necessário comparar a distribuição local com a resposta limitada pela difração (Figuras 5.12 e 5.13). Cada coluna do diagrama de pontos corresponde a uma posição diferente do plano da imagem. Na Figura 5.12 a coluna central representa o diagrama quando o plano da imagem coincide com o plano focal. A primeira e a segunda colunas representam o diagrama quando o plano da imagem está, respectivamente, 5000 mm e 2500 mm antes do plano focal. Já a quarta e quinta colunas representam o diagrama quando o plano da imagem está, respectivamente, 2500 mm e 5000

mm depois do plano focal. Na Figura 5.13 a primeira e a segunda colunas representam o diagrama quando o plano da imagem está, respectivamente, 2000 mm e 1000 mm antes do plano focal. Já a quarta e quinta colunas representam o diagrama quando o plano da imagem está, respectivamente, 1000 mm e 2000 mm depois do plano focal.

### 5.1.5 Análise da Função de Alargamento dos Pontos

A Função de alargamento de pontos (*Point Spread Function* - PSF) é outra medida de tamanho e forma da imagem. Nas Figuras 5.14 e 5.15 a coluna da esquerda mostra uma vista tridimensional, enquanto que a coluna central apresenta os mesmos dados em um diagrama bidimensional. Os gráficos na parte inferior desta coluna mostram a análise no eixo óptico enquanto os gráficos da parte central e superior apresentam a análise fora do eixo. Um pico abrupto corresponde a um resultado bom. Este gráfico mostra quanta luz é focalizada perto do centro da imagem e quanta luz é espalhada.

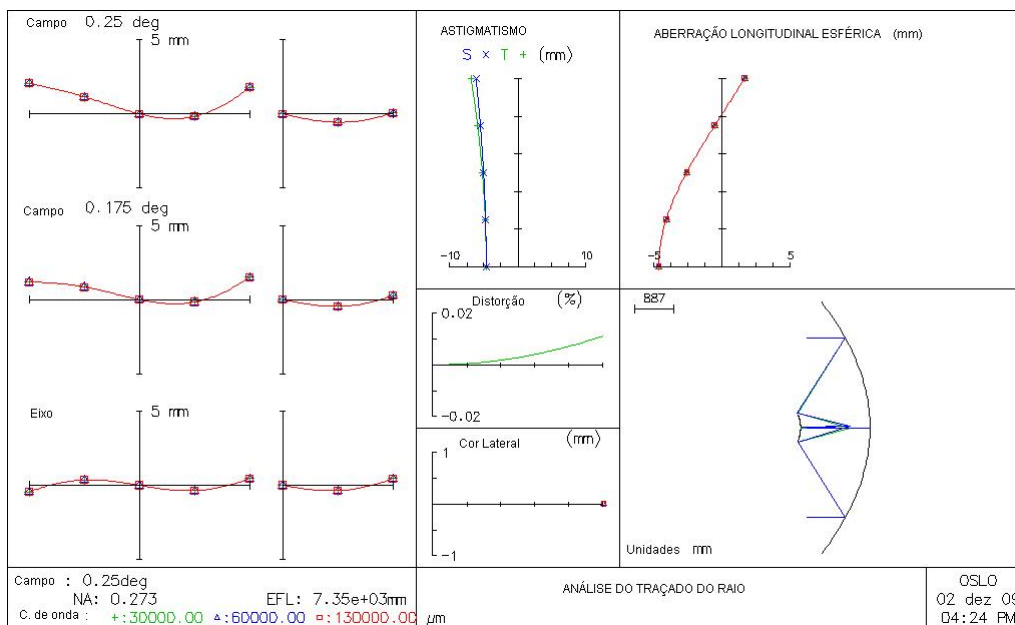


Figura 5.5: Análise do raio para 10 GHz.

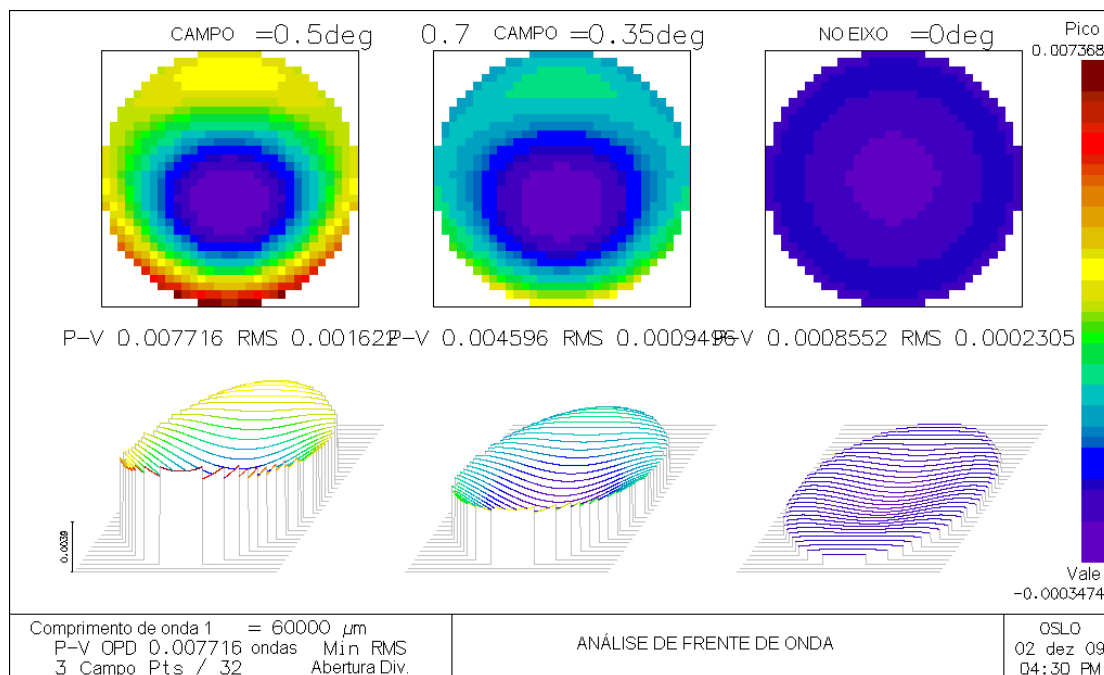


Figura 5.6: Análise da Frente de Onda para 5 GHz.

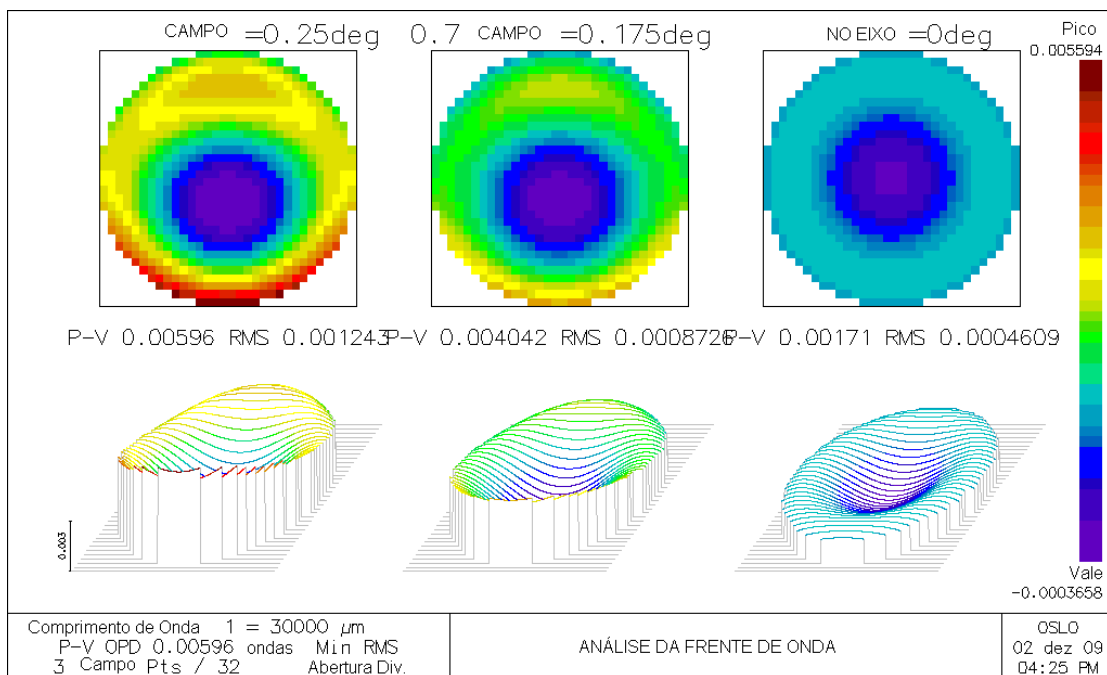


Figura 5.7: Análise da Frente de Onda para 10 GHz.

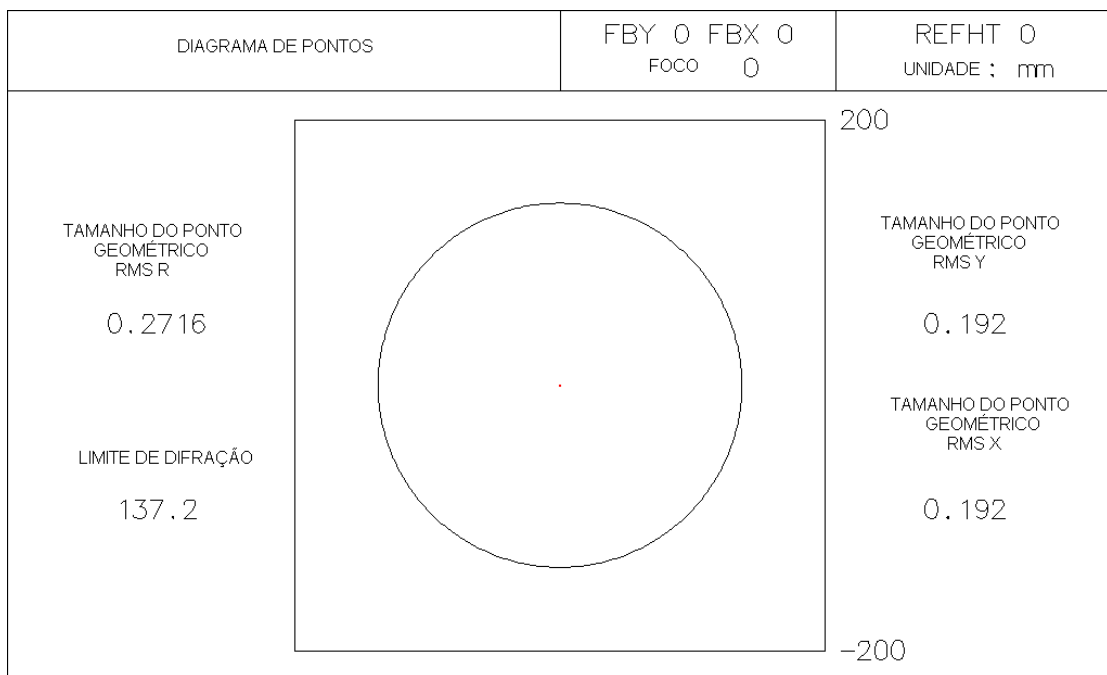


Figura 5.8: Análise do Disco de Airy para 5 GHz.

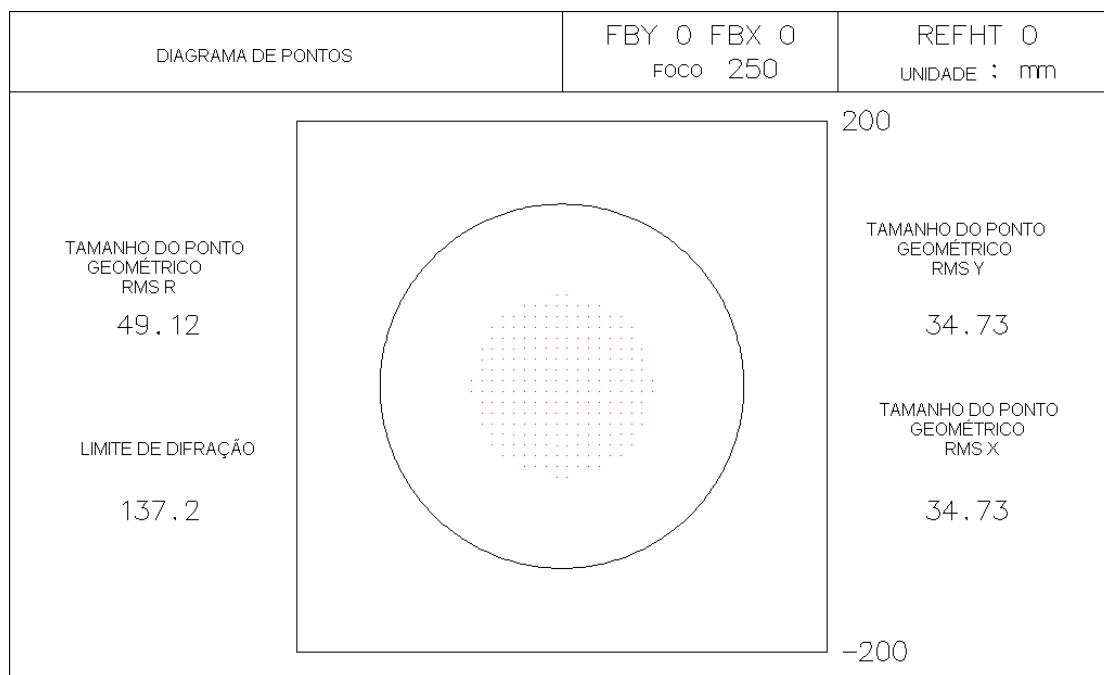


Figura 5.9: Análise do Disco de Airy ( $z = 250$ ).

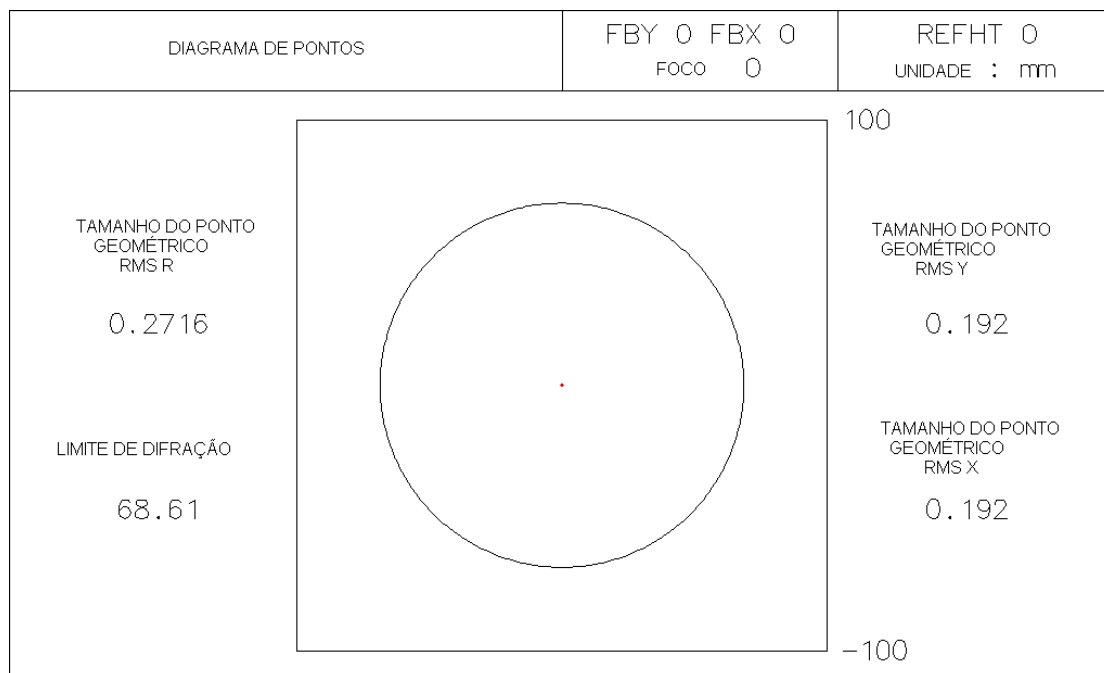


Figura 5.10: Análise do Disco de Airy para 10 GHz.

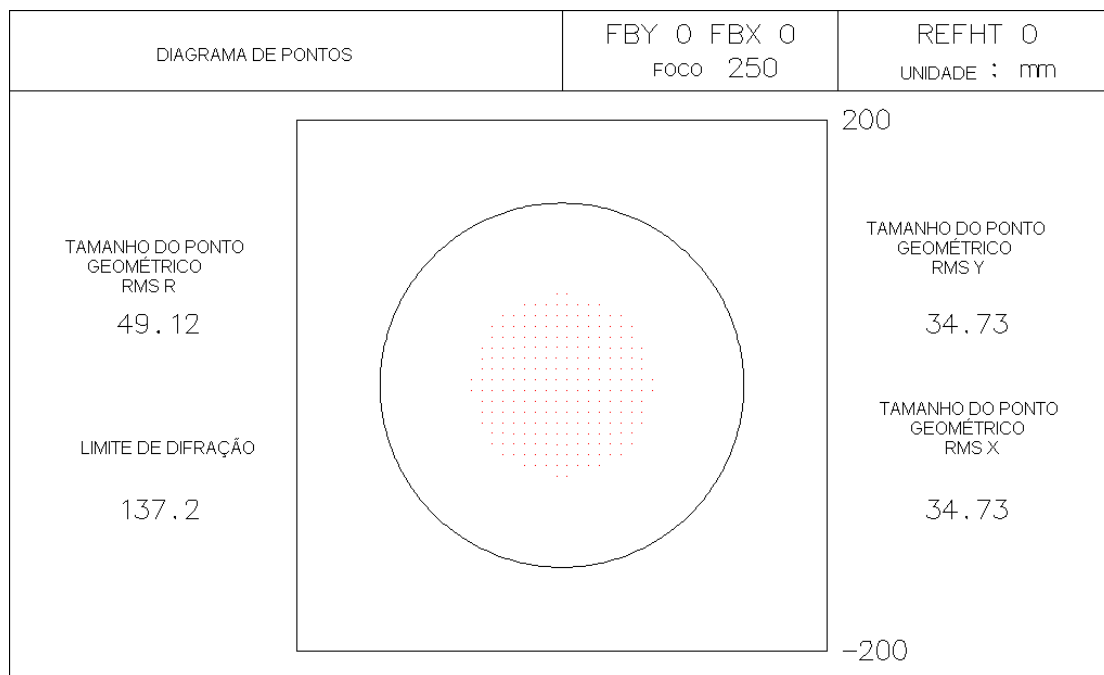


Figura 5.11: Análise do Disco de Airy ( $z = 250$ ).

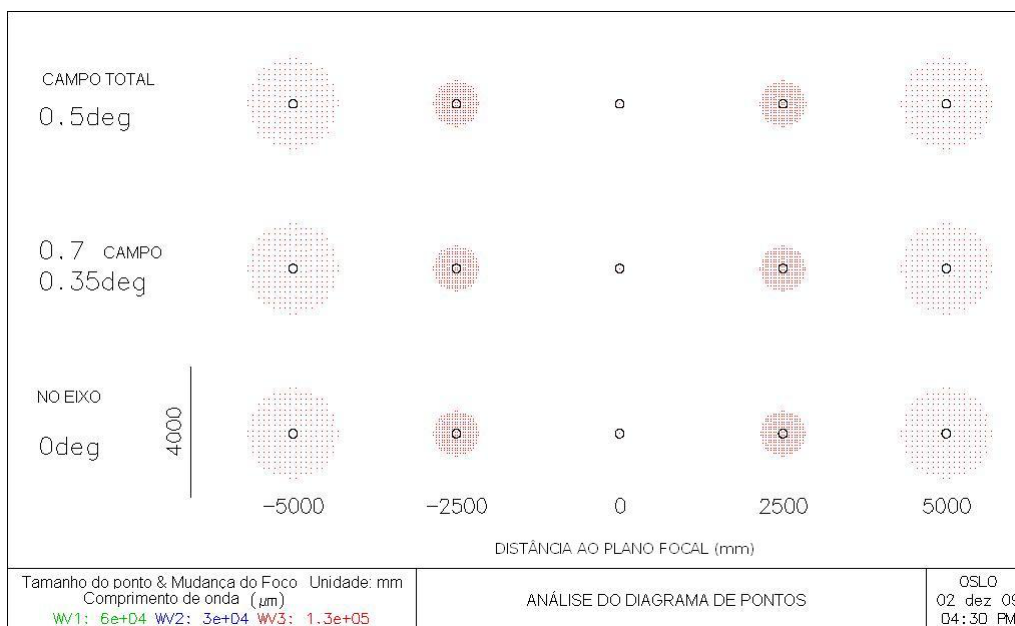


Figura 5.12: Análise do Diagrama de Pontos para 5 GHz.

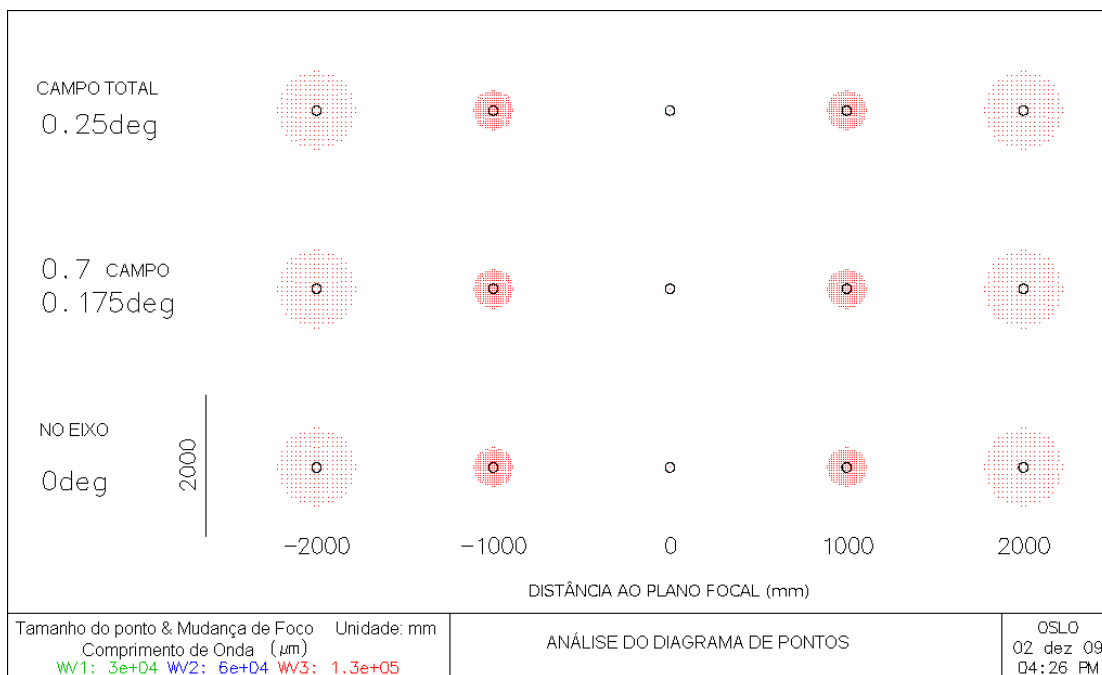


Figura 5.13: Análise do Diagrama de Pontos para 10 GHz.

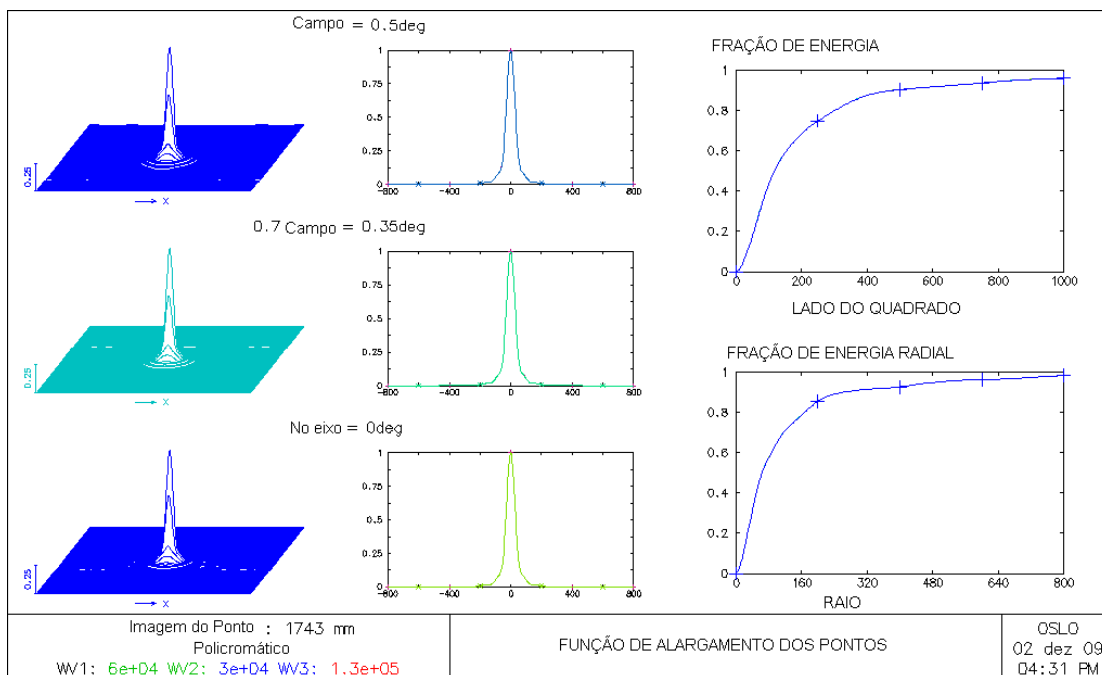


Figura 5.14: Análise do Alargamento dos Pontos para 5 GHz.

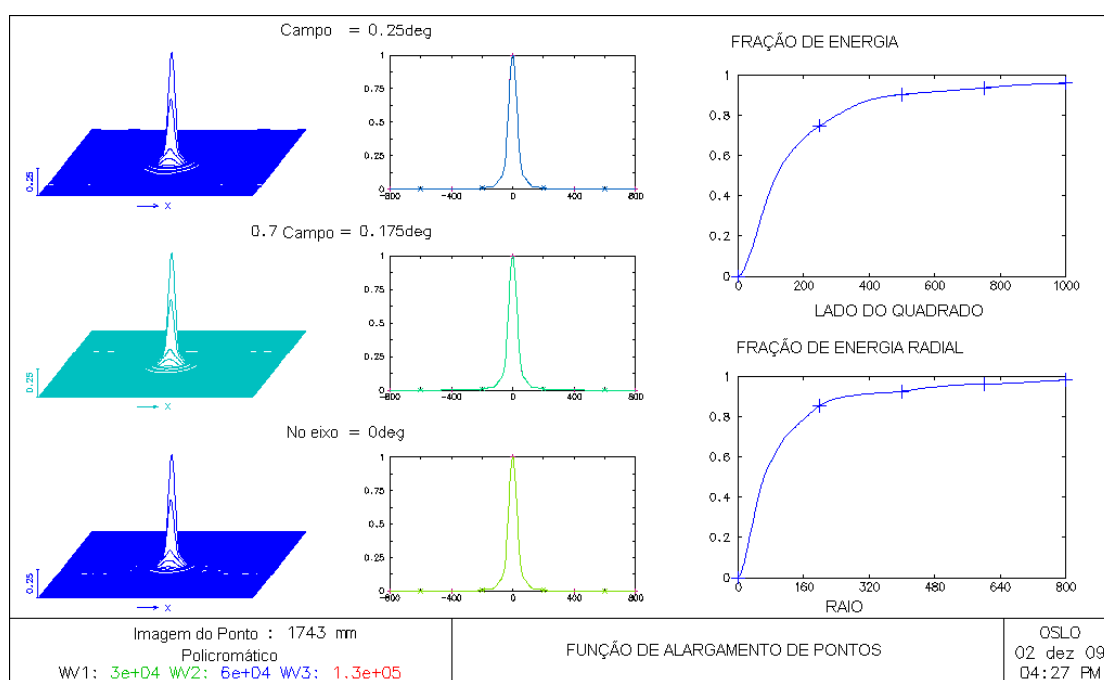


Figura 5.15: Análise do Alargamento dos Pontos para 10 GHz.

## 5.2 Dados Obtidos no Grasp 9

A modelagem do GEM foi feita também com a ajuda do programa Grasp9-SE (*Grasp9-Student Edition*), que possibilita a análise de problemas com até duas superfícies refletoras e um alimentador. A versão de estudante apresenta funcionalidade limitada em comparação com o Grasp9 Profissional. O programa Grasp9 analisa a radiação de uma antena refletora por meio de óptica física (TICRA, 2009).

O cálculo é feito utilizando o método dos momentos, que consiste em dividir todos os elementos condutores de uma antena em  $N$  pequenos segmentos retos. Cada segmento é considerado como uma pequena antena de dipolo de Hertz. O programa calcula as correntes nos segmentos e os campos gerados a uma certa distância e então calcula o somatório dos campos gerados por todos os segmentos para obter os valores dos campos elétrico e magnético irradiados como um todo pela antena (Dias e Milligan, 1996)

Os resultados das simulações do feixe da antena para as frequências de 5 GHz e 10 GHz obtidos nos Grasp9 com os parâmetros de entradas dados na Tabela 5.3 estão representados nas Figuras 5.16 e 5.17, onde é possível observar o lóbulo principal e os lóbulos secundários. Conforme citado no Capítulo 4, é desejável que a intensidade de lóbulos secundários seja a menor possível, já que a potência irradiada por eles é perdida.

Tabela 5.3: Parâmetros de Entrada do Grasp9.

	Refletor Simples	Duplo Refletor
Frequências	0,408 GHz; 1,465 GHz; 2,3 GHz	5 GHz; 10 GHz
Distância focal	1827,5 mm	1827,5 mm
Diâmetro do primário	5613,4 mm	5613,4 mm
Distância entre os focos	-	1383,5 mm
Excentricidade do secundário	-	1,65

Com o auxílio dos resultados obtidos no GRASP9 representados nas Figuras 5.18 a 5.22 foi possível verificar a largura do feixe a meia potência (HPBW) para as frequências de operação do GEM: 10 GHz, 5 GHz, 2,3 GHz, 1,465 GHz e 0,408 GHz (Tabela 5.4).

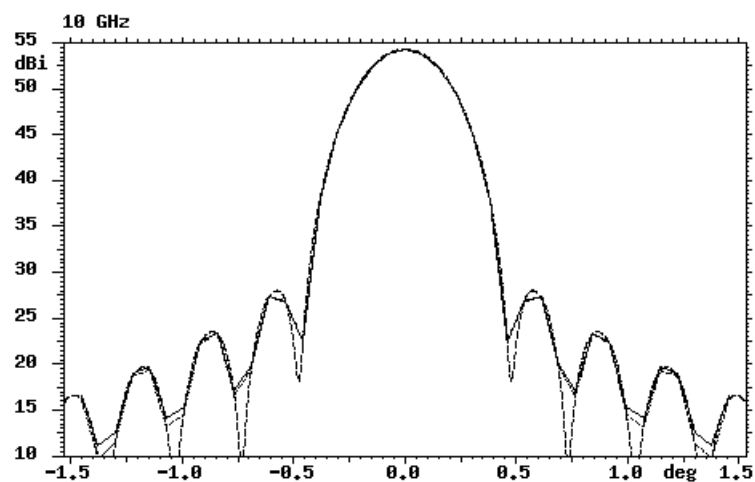


Figura 5.16: Diagrama de radiação do Telescópio GEM em 10 GHz em escala logarítmica.

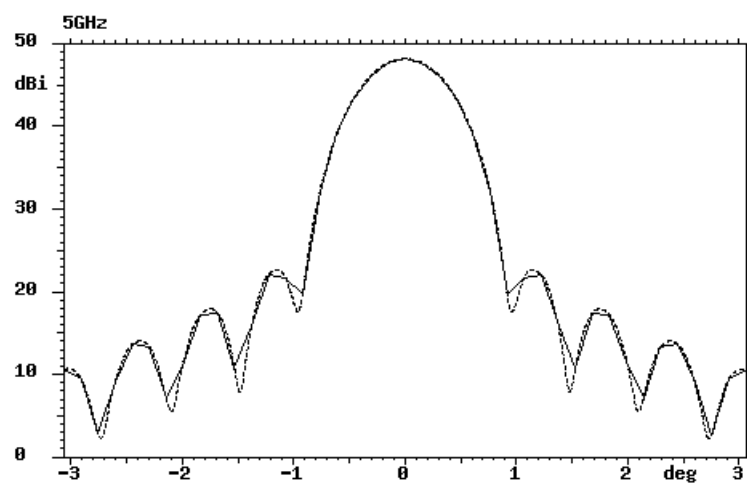


Figura 5.17: Diagrama de radiação do Telescópio GEM em 5 GHz em escala logarítmica.

Tabela 5.4: Tabela HPBW obtidos no GRASP9.

Frequência (GHz)	HPBW (°)
10,0	0,50
5	1,00
2,3	2,30
1,465	3,60
0,408	13,00

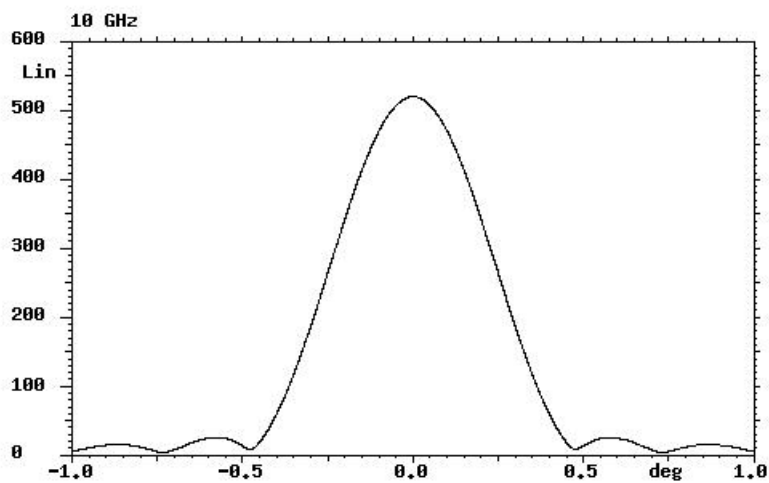


Figura 5.18: Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 10 GHz.

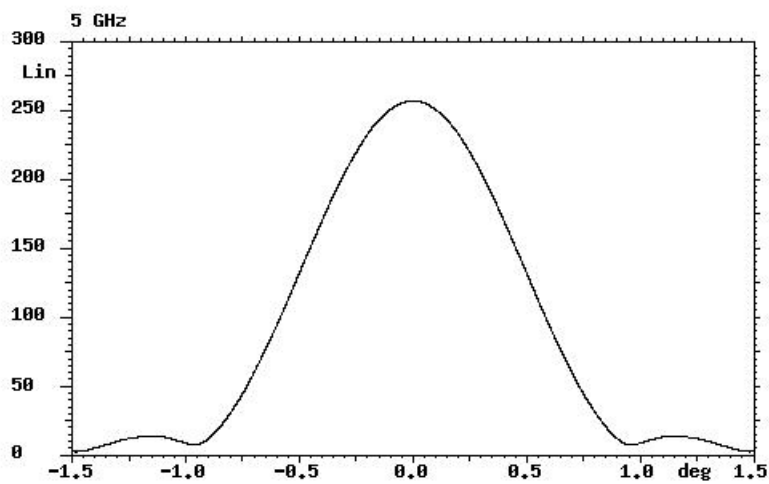


Figura 5.19: Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 5 GHz.

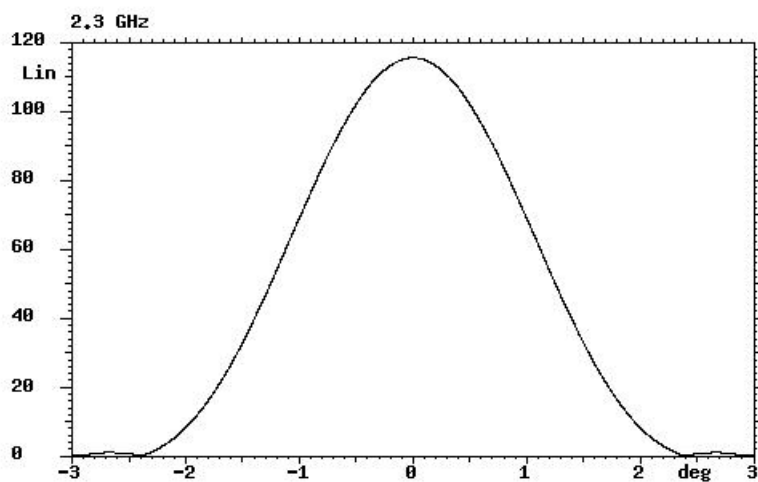


Figura 5.20: Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 2,3 GHz.

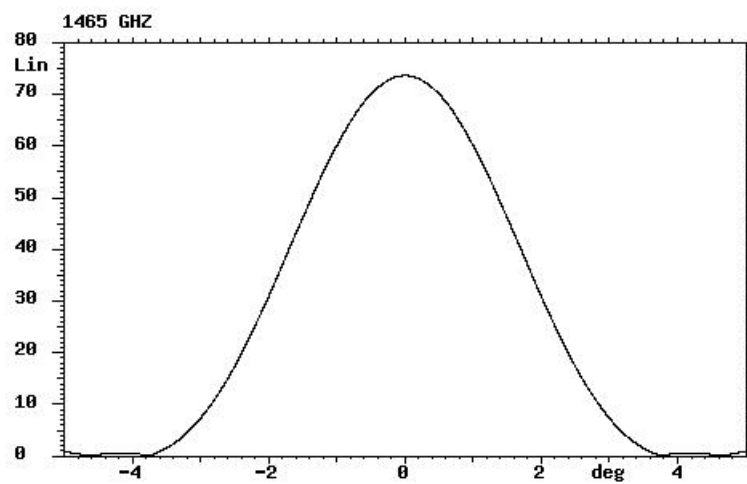


Figura 5.21: Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 1,465 GHz.

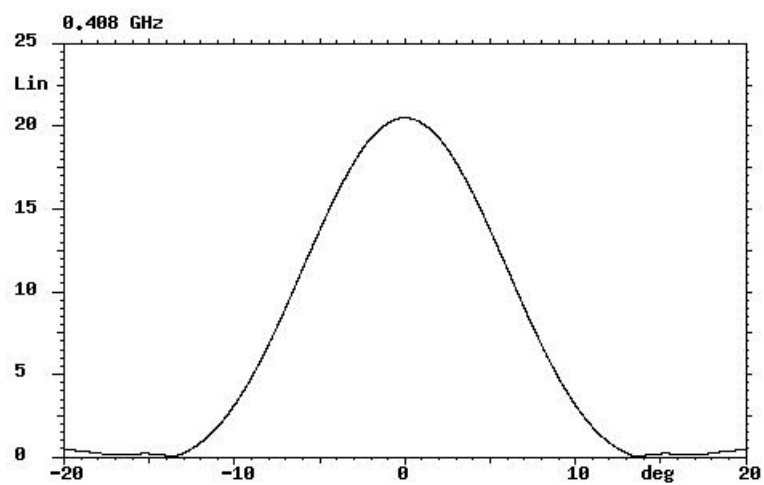


Figura 5.22: Diagrama de radiação do radiotelescópio GEM em 0,408 GHz.

# Conclusões

Os resultados descritos neste trabalho mostram aspectos do projeto óptico do radiotelescópio GEM em 5 GHz e em 10 GHz, como os possíveis efeitos das aberrações na análise do traçado dos raios e nos gráficos referentes às análises de frente de onda, disco de Airy, diagrama de pontos e função de alargamento dos pontos (PSF). Também são apresentados os resultados obtidos com as simulações do feixe da antena para 10 GHz, 5 GHz, 2,3 GHz, 1,465 GHz e 0,408 GHz e as estimativas das larguras dos feixes a meia potência (HPBW). As análises da PSF e do disco de Airy no foco mostram que a aberração do sistema óptico é muito pequena. A análise de frente de onda ao longo do eixo óptico mostra que em 5 GHz o erro PV é igual a  $8,6 \times 10^{-4}$  e que o erro RMS é  $2,3 \times 10^{-4}$ . Em 10 GHz, o erro PV é igual a  $1,7 \times 10^{-3}$  e o erro RMS é  $4,6 \times 10^{-4}$ . Em um plano deslocado de 250 mm do foco, o raio do diagrama de mancha é de 49 mm. O raio do disco de Airy nessa mesma posição é de 137 mm em 5 GHz e de 69 mm em 10 GHz. Os resultados do presente trabalho serão usados no projeto do receptor em 10 GHz que será sensível em intensidade total e polarização.

## Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover, p. 358, 1972.
- Ballanis C. A. *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley, 1997.
- Born, M.; Wolf, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light.*, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1980.
- Bucci, O.; Pelosi, G.; Selleri, S. Cassegrain?, *IEEE Antennas and Propagat*, (41):7, 1999.
- Burland, M. S.; Kennedy, J. E. *A Gregorian Telescope*. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, (52): 255, 1958.
- Clarricoats, P. J. B. *Microwave Horns and Feeds*. New York: Institute of Eletrical Engineers, 1994.
- Diaz L.; Milligan T. *Antenna: Engineering Using Physical Optics*. London: Artech House Publishers, 1996.
- Doyle, B. K.; Michels G.G.; Gemberg, L.V. *Integrated Optomechanical Analysis*. New York: SPIE, 2002.
- Ferreira, I. S. Polarização da radiação galáctica em 5 GHz: Instrumentação, medidas e mapas, Tese de doutorado, INPE, São José dos Campos, 2008.
- Fowles, G. R. *Introduction to Modern Optics*. New York: Dover, 1989.
- Galindo, V. Design of Dual-Reflector Antennas with Arbitrary Phase and Amplitude Distribution. *IEE Antennas Propagat* (12): 457, 1964.
- INPE, <<http://www.das.inpe.br/cosmo/corneta.htm> >, Página visitada em 13 de Fevereiro

de 2010.

Jennings, G. A. *Modern Geometry with Applications.*, New York: Universitext, 1994.

Kraus, J. D.; Carver K. R., *Eletromagnetismo*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1978.

Kraus, J. D. *Antennas*. New York: McGraw-Hill, 1950.

Mitra, R.; Galindo, I. V. Shaped Dual Reflector Synthesis, *IEE Antenas Propagat. Society Newsletter*, p-4, 1980.

Nussbaum, A. *Geometric Optics: an Introduction*. Minnesota: Addison Wesley, 1968.

Oliveira, A. F. Determinação da Polarização da Emissão Galáctica em 5 GHz, Dissertação de mestrado, UNIFEI, Itajubá, 2009.

OSLO, <<http://lambdare.com> >, Página visitada em 25 de Junho de 2009.

O'Shea, P. C. *Elements Optical Design*. Geórgia: Institute of Tecnology, 1985.

Rusch, W. V. T. The Current Slate of the Reflector Antennas Entering. The 1990 Proceedings of IEEE, p-113, 1992.

Santos, N. M. *Vetores e Matrizes*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.

Smith, F. G.; Thomson, J. H. *Optics*. London: John Wiley, 1973.

Smith, W. J. *Modern Optical Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1978.

Smith, W. J. *Modern Optical Engineering: The Design of Optics Systems*. New York: McGraw-Hill, 1990.

Tello, C. Um experimento para medir o brilho total do céu em baixas frequências. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, Brasil, 1997.

Tello, C.; Villela, T; Torres, S.; Smoot, G.; Ferreira, I.; Cingoz, A.; Lamb, J.; Barbosa, D.; Perez-Becker, D.; Ricciardi, S.; Currivan, J.; Platania, P.; Maino, D. The 2.3 GHz continuum survey of the GEM project. A & A. (submetido), arxiv:0712.3141, 2007.

TICRA, <<http://www.ticra.com/script/site/page.asp?arted=68>>, Página visitada em 16 de Julho de 2009.

Tipler, P. A. *Física para cientistas e engenheiros*. Rio de Janeiro: LTC, v-4, 1995.

Venturi, J. J. *Cônicas e Quádricas*. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, 2008.

Yasuoka, F. M. M. Técnicas de desenho óptico e Avaliação de Qualidade de Imagem em sistemas Ópticos por medição de função de transferência, Tese Instituto de Física de São Paulo - USP, 1997.

Zilio, S. C. *Desenho e Fabricação Óptica*. Centro de Pesquisa em Óptica e Fotônica, IFSC. Disponível em <<http://www.fotonica.if.sc.usp.br/>>, Página visitada em 24 de Junho de 2009.