

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Análise da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf
num Sistema Tipo van der Pol**

Nivaldo Gonçalves de Faria

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

ITAJUBÁ, 22 DE SETEMBRO DE 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Análise da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf
num Sistema Tipo van der Pol**

Nivaldo Gonçalves de Faria

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

22 DE SETEMBRO DE 2010

Dedicatória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que sempre me socorreu nos momentos mais difíceis dessa etapa da minha vida.

Aos meus pais, Zé Grande (em memória) e Quinha, que me incentivaram, desde criança, a buscar meus sonhos.

Aos meus filhos, Ana Carolina, João Rafael e Maria Eduarda, por serem filhos maravilhosos.

A minha esposa Patrícia por compreender e me apoiar durante esses anos.

Ao meu orientador, Prof. Luis Fernando pela competência, paciência, apoio e dedicação.

Aos meus amigos de mestrado, em especial aos meus amigos Adhimar e Élcio, que de forma direta me ajudaram muito e contribuíram para o meu crescimento.

Aos meus irmãos, pelo apoio e pela compreensão nos momentos de dificuldade.

A minha amiga Maria Auta, que sempre me incentivou nos momentos de dificuldade.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

Estudamos a estabilidade local e o surgimento das bifurcações de Hopf genéricas e mais degeneradas em uma família de equações diferenciais em \mathbb{R}^3 dependentes de quatro parâmetros reais não negativos que modelam um circuito elétrico associado a um modelo conhecido na literatura como circuito de van der Pol. O estudo da estabilidade dos equilíbrios é feito utilizando-se o critério de estabilidade Routh–Hurwitz. Utilizamos ainda este critério para determinação da hipersuperfície de Hopf no espaço de parâmetros. Para isso, apresentamos um método para estudar essas a não degenerescência e transversalidade das bifurcações de Hopf em sistemas n -dimensionais e que garantem o surgimento de órbitas periódicas. Apresentamos algumas simulações numéricas para ilustrar a análise desenvolvida.

Palavras-chaves:

Bifurcações de Hopf, Ciclos Limites, Estabilidade, circuito de van der Pol, Coeficientes de Lyapunov, Análise Linear.

Abstract

We study the local stability and the appearance of generic and more degenerate Hopf bifurcations of a family of differential equations in \mathbb{R}^3 depending on four non negative real parameters. This system is associated with a model recognized in the literature as van der Pol circuit. The study of the stability of the equilibria is done using the Routh–Hurwitz criterion stability. We use this criterion again for determination of Hopf hypersurface in the parameter space when studying the bifurcations. For this, we present a method for studying the non–degenerence and transversality of these Hopf bifurcations in n –dimensional systems, which guarantee the appearance of periodic orbits. We present some numeric simulations to illustrate the analysis.

Keywords:

Hopf Bifurcations, Limit Cycle, Stability, van der Pol circuit, Lyapunov Coefficients, Linear Analysis.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Circuito elétrico <i>RLC</i> e uma nova configuração	1
2 Bifurcações de Hopf	7
2.1 Considerações iniciais	7
2.2 Bifurcação de Hopf genérica	11
2.3 Método da projeção	29
2.4 Diagramas de bifurcação da forma normal	50
3 Análise linear do sistema (1.25)	56
3.1 Análise linear do sistema (1.25) para $a = 0$	56
3.2 Análise linear do sistema (1.25) para $a > 0$	66
4 Bifurcações de Hopf no sistema (1.25)	77
4.1 Bifurcações de Hopf no sistema (1.25) para $a = 0$	77

4.1.1	Determinação do primeiro coeficiente de Lyapunov	78
4.1.2	Condição de transversalidade	85
4.1.3	Teorema de Hopf para o sistema (3.1), caso $a = 0$	86
4.2	Bifurcações de Hopf do sistema (1.25) para	
	$0 < a < 1$	86
4.2.1	Determinação do primeiro coeficiente de Lyapunov	87
4.2.2	Determinação do segundo coeficiente de Lyapunov	92
4.2.3	Determinação do terceiro coeficiente de Lyapunov para	
	$a = 0.5$	98
5	Simulações Numéricas	103
5.1	Estudo de casos específicos	103
5.1.1	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_6	103
5.1.2	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_5	104
5.1.3	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_4	104
5.1.4	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_6	104
5.1.5	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_5	106
5.1.6	Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_9	106
	Conclusões	109
	Bibliografia	110
	Anexo I	112
	Anexo II	117
	Anexo III	146

Lista de Figuras

1.1	Circuito <i>RLC</i> inicial.	1
1.2	Nova configuração do circuito <i>RLC</i> inicial.	2
2.1	Retratos de fase do sistema (2.8) em função da escolha do parâmetro ξ . . .	9
2.2	Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.	12
2.3	Ponto fixo da transformação de retorno.	13
2.4	Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.	15
2.5	Diagrama de bifurcação de (2.60).	50
2.6	Diagrama de bifurcação de (2.61).	51
2.7	$T \cap \{v = c > 0\}$	53
2.8	$T \cap \{v = c = 0\}$	54
2.9	$T \cap \{v = c < 0\}$	54
2.10	Diagrama de bifurcação do sistema (2.57).	55
3.1	Região do plano (α, R) , onde estão R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5	58
5.1	Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 2.1)$. Intervalo de integração: $[0, 600]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0.5)$. Para $\nu > \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto localmente atrator.	104
5.2	Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 2)$. Intervalo de integração: $[0, 900]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0.5)$. Para $\nu = \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto, um atrator fraco para o fluxo do sistema (3.1) restrito à superfície central.	105

- 5.3 Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 1.9)$. Intervalo de integração: $[0, 300]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.18, 0.18, 0.18)$ para a órbita externa e $(x, y, z) = (0.02, 0.05, 0.02)$ para a órbita interna ao ciclo limite. Para $\nu < \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é instável e, portanto, teremos o surgimento de uma órbita periódica atratora. 105
- 5.4 Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 6$ e $a = 0.5$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Para $\nu > \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128355873206817436, 0.5)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto localmente atrator. 106
- 5.5 Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 5.5683978406308491058824144591$ e $a = 0.5$. Intervalo de integração: $[0, 640]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.003, 0.003, 0.003)$. Para $\nu = \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128\dots, 0.5)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto um atrator fraco para o fluxo do sistema (1.25) restrito à superfície central. 107
- 5.6 Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 5.5$ e $a = 0.5$. Intervalos de integração: $[0, 90]$ para a órbita externa e $[0, 60]$ para a órbita interna. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.003, 0.003, 0.003)$ para a órbita externa e $(x, y, z) = (0.4, 0.4, 0.4)$ para a órbita interna. Para $\nu < \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128\dots, 0.5)$ é instável e teremos o surgimento de três ciclos limites para valores dos parâmetros quando $l_2 > 0$ e $l_1 < 0$, visto que $l_3 < 0$ 107

Lista de Tabelas

4.1 Sinal do segundo coeficiente de Lyapunov l_2 97

Capítulo 1

Introdução

1.1 Circuito elétrico RLC e uma nova configuração

O sistema a ser estudado nesta dissertação pode ser obtido como modelo das equações diferenciais de um circuito elétrico conhecido na literatura como circuito de van der Pol e apresenta rico comportamento dinâmico.

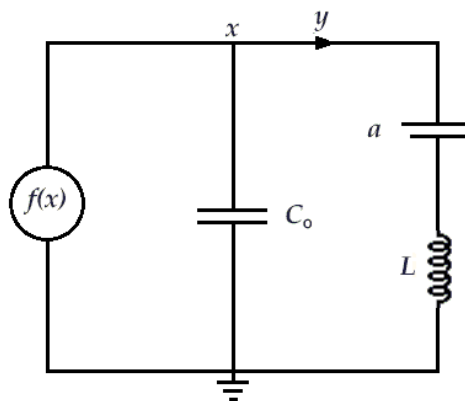


Figura 1.1: Circuito RLC inicial.

Um primeiro modelo de circuito elétrico RLC a ser estudado aqui pode ser observado na Figura 1.1. Esse circuito é constituído de um capacitor indicado por C_0 , um indutor indicado por L , $f(x)$ representa a característica não-linear de uma condutância negativa, x é a tensão no ramo de C_0 , y é a corrente no ramo de L e a é uma fonte de tensão no ramo de L .

A idéia apresentada em [1] foi propor uma diferente configuração a partir do circuito

exibido na Figura 1.1 a fim de obter um sistema com somente um ponto de equilíbrio. Uma maneira de fazer isso foi introduzindo um circuito linear RC paralelo, conforme Figura 1.2. Esse novo circuito é constituído de um capacitor indicado por C_0 , um indutor indicado por L , um resistor indicado por R , um capacitor indicado por C e uma fonte de tensão indicada por a .

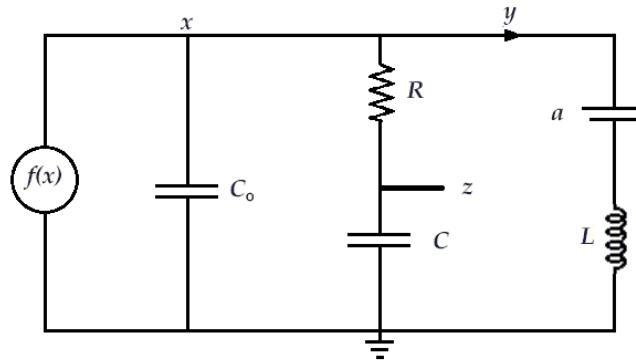


Figura 1.2: Nova configuração do circuito RLC inicial.

As variáveis de estado serão x , y e z , onde

1. x é a tensão no ramo de C_0 ;
2. y é a corrente no ramo de L ;
3. z é a tensão no ramo de C ;

$f(x) = -a_1x + a_3x^3$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, representa a característica não-linear de uma condutância negativa e a é a fonte do circuito no ramo de L .

Do circuito da Figura 1.2, temos

$$V_L = L \frac{dy}{dt}; \quad (1.1)$$

$$i_{C_0} = C_0 \frac{dx}{dt}; \quad (1.2)$$

$$i_C = C \frac{dz}{dt}. \quad (1.3)$$

De forma análoga as equações (1.1), (1.2) e (1.3) podem ser escritas na forma

$$V_L = Ly'; \quad (1.4)$$

$$i_{C_0} = C_0 x'; \quad (1.5)$$

$$i_C = C z', \quad (1.6)$$

onde o símbolo ' representa derivação com relação à variável t .

De acordo com as Leis de Kirchhoff [2]:

- A soma algébrica de todas as tensões tomadas num sentido determinado em torno de um circuito fechado é nula.
- A soma algébrica de todas as correntes que entram num nó é nula.

A tensão no indutor é dada por V_L , assim temos

$$V_L = x - a,$$

e, de (1.4), temos

$$L y' = x - a. \quad (1.7)$$

A corrente no resistor R é igual a corrente no capacitor C , ou seja,

$$i_R = i_C.$$

Como

$$V_R = x - z,$$

e como

$$i_R = \frac{V_R}{R},$$

então, de (1.6),

$$C z' = \frac{x - z}{R}. \quad (1.8)$$

Sabendo que $f(x)$ é a condutância negativa e é dada pelo polinômio cúbico

$$f(x) = -a_1 x + a_3 x^3, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad (1.9)$$

temos, da Figura 1.2, que

$$f(x) = -i_{C_0} - i_R - y.$$

Fazendo as devidas substituições, segue que

$$f(x) = -C_0 x' - \frac{x - z}{R} - y,$$

de onde obtemos a equação

$$C_0x' = -f(x) - \frac{x-z}{R} - y. \quad (1.10)$$

De (1.7), (1.8) e (1.10) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} C_0x' = -f(x) + \frac{z-x}{R} - y, \\ Ly' = x - a, \\ Cz' = \frac{x-z}{R}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Reescalando as varáveis de estado e de tempo

$$x = V_0\bar{x}, \quad y = \frac{V_0}{\omega L}\bar{y}, \quad z = V_0\bar{z}, \quad \tau = \omega t, \quad (1.12)$$

em que

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad V_0 = \sqrt{\frac{a_1}{3a_3}}, \quad (1.13)$$

e definindo novos parâmetros

$$\varepsilon = \frac{C_0}{C}, \quad \bar{a} = \frac{a}{V_0}, \quad \alpha = \frac{a_1}{\omega C}, \quad \bar{R} = R\omega C, \quad (1.14)$$

obteremos, da primeira equação do sistema (1.11), a seguinte equação

$$C_0V_0\omega\bar{x}' = -(-a_1V_0\bar{x} + a_3(V_0\bar{x})^3) + \frac{V_0\bar{z} - V_0\bar{x}}{R} - \frac{V_0}{\omega L}\bar{y}. \quad (1.15)$$

Fazendo as devidas simplificações, teremos

$$\varepsilon\bar{x}' = -\alpha \left(-\bar{x} + \frac{\bar{x}^3}{3} \right) + \frac{\bar{z} - \bar{x}}{\bar{R}} - \bar{y}. \quad (1.16)$$

Omitindo-se as barras, teremos a seguinte equação

$$\varepsilon x' = -\alpha \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{z-x}{R} - y. \quad (1.17)$$

Fazendo

$$g(x) = \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right),$$

temos a seguinte equação

$$\varepsilon x' = -g(x) + \frac{z-x}{R} - y. \quad (1.18)$$

Fazendo o mesmo para segunda equação do sistema (1.11), segue que

$$L \frac{V_0\omega\bar{y}'}{\omega L} = V_0\bar{x} - V_0\bar{a}. \quad (1.19)$$

Omitindo-se as barras e fazendo as devidas simplificações, obteremos

$$y' = x - a. \quad (1.20)$$

Do mesmo modo, para a terceira equação do sistema (1.11), temos

$$CV_0\omega\bar{z}' = \left(\frac{V_0\bar{x} - V_0\bar{z}}{\bar{R}} \right) \omega C. \quad (1.21)$$

Omitindo-se as barras e fazendo as devidas simplificações, obteremos

$$z' = \frac{x - z}{R}. \quad (1.22)$$

Das equações (1.18), (1.20) e (1.22) o novo sistema será escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \varepsilon x' &= -g(x) + \frac{z - x}{R} - y, \\ y' &= x - a, \\ z' &= \frac{x - z}{R}, \end{cases} \quad (1.23)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado, ε , α , R são parâmetros reais positivos e a é um parâmetro não negativo.

Definindo

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (1.24)$$

o sistema acima pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} x' &= \nu \left(-g(x) + \frac{z - x}{R} - y \right), \\ y' &= x - a, \\ z' &= \frac{x - z}{R}. \end{cases} \quad (1.25)$$

O objetivo desta dissertação é: estudar a estabilidade local e as bifurcações do sistema (1.25) para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e os parâmetros em

$$\mathcal{T} = \{(\nu, \alpha, R, a) \in \mathbb{R}^4 : \nu > 0, \alpha > 0, R > 0, a \geq 0\}. \quad (1.26)$$

De uma certa maneira, os estudos desenvolvidos na presente dissertação complementam os estudos feitos em [1]. Lá os autores estudam as bifurcações de Hopf de codimensão 1 do sistema (1.25) para dar suporte ao estudo do fenômeno *canard* que aparece em (1.25) para ε tendendo a zero pela direita, ou equivalentemente, via (1.24), ν tendendo ao infinito. Em

[1] algumas simulações numéricas são feitas, as quais sugerem a existência de três ciclos limites para valores adequados dos parâmetros. Um dos estudos feitos nesta dissertação prova a existência destes três ciclos limites via bifurcação de Hopf de codimensão três.

Esta dissertação está desenvolvida da seguinte maneira:

No Capítulo 2 serão apresentadas as principais definições e resultados preliminares que serão utilizados nos Capítulos 3, 4 e 5, relativas ao sistema (1.25), com destaque para as bifurcações de Hopf genérica e mais degeneradas, o método da projeção e os diagramas de bifurcação da forma normal da bifurcação de Hopf genérica e mais degeneradas.

No Capítulo 3 será feita a análise linear do sistema (1.25) numa vizinhança de seu ponto de equilíbrio, para os casos $a = 0$ e $a > 0$.

No Capítulo 4, estudaremos qualitativamente o sistema (1.25) para os casos $a = 0$ e $0 < a < 1$: a estabilidade do ponto de equilíbrio quando o mesmo é não hiperbólico e o surgimento das bifurcações de Hopf genérica e mais degeneradas, conforme Kuznetsov [5] e os artigos de Sotomayor, Mello e Braga [6] e [7].

No Capítulo 5, apresentaremos algumas simulações numéricas como ilustrações de alguns resultados e o surgimento das bifurcações de Hopf para um certo conjunto de valores dos parâmetros, feitas com o auxílio do software MATHEMATICA 6 [10].

Capítulo 2

Bifurcações de Hopf

2.1 Considerações iniciais

Neste capítulo temos por objetivo estudar as bifurcações de Hopf. Inicialmente trataremos de sistemas bidimensionais onde o conceito de bifurcação de Hopf é bastante conhecido para posteriormente estudá-lo em um contexto mais amplo, para sistemas n -dimensionais. As definições e o método de projeção que apresentaremos no corrente capítulo foram baseados no livro de Kuznetsov [5] e em [7]. Além do estudo das bifurcações de Hopf, apresentaremos ainda as principais definições que serão utilizadas no decorrer do texto.

A notação $f(x) = \mathcal{O}(\|x\|^n)$ representará uma função suave cuja expansão de Taylor em x inicia-se com termos de ordem n ou superiores.

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, \xi), \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, variáveis de estado e parâmetros. Assuma que f seja de classe \mathcal{C}^∞ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Suponha que (2.1) tenha um ponto de equilíbrio $x = e_0$ quando $\xi = \xi_0$ e, denotando a variável $x - e_0$ também por x , escrevemos

$$F(x) = f(x, \xi_0). \quad (2.2)$$

Seguem algumas definições que utilizaremos no decorrer deste e dos próximos capítulos.

Definição 2.1.1 *Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) é chamado **hiperbólico** se todos os autovalores de $J(e_0)$ têm partes reais diferentes de zero, onde $J(e_0) = DF(e_0)$*

representa a matriz Jacobiana de $F(x)$ no ponto e_0 . Se a parte real de algum autovalor for nula o equilíbrio será dito **não-hiperbólico** ou **degenerado**.

Definição 2.1.2 Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) é chamado **atrator** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais negativas, e **repulsor** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais positivas.

Definição 2.1.3 Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) chama-se **sela hiperbólica** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais diferentes de zero e pelo menos dois deles possuírem partes reais com sinais opostos.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais dependendo do parâmetro ξ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é equilíbrio de (2.3) com a matriz Jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda_1 = \xi + i$ e $\lambda_2 = \xi - i$. Introduzindo a variável complexa $z = x_1 + ix_2$, como

$$\dot{x}_1 = \xi x_1 - x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

e

$$\dot{x}_2 = x_1 + \xi x_2 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

temos

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \xi(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) \pm (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

Podemos então reescrever (2.3), na sua forma complexa

$$\dot{z} = (\xi + i)z \pm z|z|^2. \quad (2.4)$$

Usando agora a representação $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} \quad (2.5)$$

e, portanto,

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(\xi + i \pm \rho^2). \quad (2.6)$$

Assim, podemos escrever a equação (2.3) em sua forma polar

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\xi \pm \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Da primeira equação de (2.7), podemos perceber que $\rho = 0$ é um ponto de equilíbrio para qualquer valor de ξ (obviamente só consideraremos $\rho \geq 0$). Outro ponto de equilíbrio surgirá para determinados valores de ξ , dependendo do sinal do termo cúbico em (2.7). Suponha, por exemplo, o sistema (2.7) adotando o sinal negativo

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\xi - \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Então, para $\xi > 0$, $\rho(\xi) = \sqrt{\xi}$ é um ponto de equilíbrio da primeira equação que descreve uma órbita periódica circular percorrida com velocidade constante. Este sistema sempre tem um equilíbrio na origem que é um foco atrator se $\xi < 0$, um foco repulsor para $\xi > 0$ ou um foco atrator “fraco” (um equilíbrio não linear e topologicamente equivalente ao foco atrator), para o valor crítico $\xi = 0$. Para $\xi > 0$, a origem fica isolada por uma órbita fechada (ciclo limite) que é única e atratora. Este ciclo é uma circunferência centrada na origem e de raio $\rho(\xi) = \sqrt{\xi}$. Todas as órbitas internas ou externas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quando $t \rightarrow +\infty$. Veja Figura 2.1.

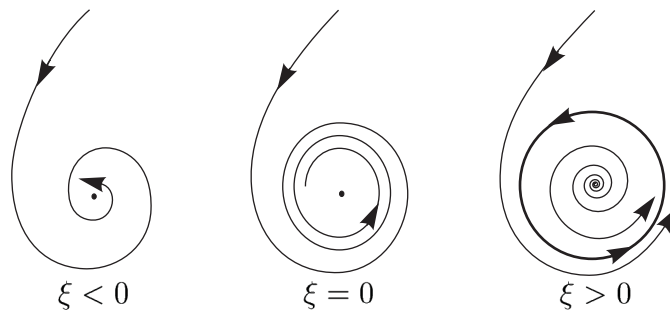


Figura 2.1: Retratos de fase do sistema (2.8) em função da escolha do parâmetro ξ .

Este fenômeno de geração de uma órbita periódica e a mudança de estabilidade do foco a partir de uma perturbação do parâmetro ξ será chamado **Bifurcação de Andronov-Hopf** ou, simplesmente, **Bifurcação de Hopf**.

O outro sistema de (2.7),

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\xi + \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

pode ser analisado da mesma maneira. Teremos a bifurcação de Hopf para $\xi = 0$, mas ao contrário de (2.8), o ciclo limite, que surgirá para $\xi < 0$, é repulsor. Para valores de $\xi > 0$ a origem é um foco repulsor e não possui ciclo limite, quando $\xi = 0$ será um foco repulsor “fraco” (não linear) e para $\xi < 0$ um foco atrator. Neste último caso teremos então o ciclo limite repulsor dado por uma circunferência centrada na origem de raio $\rho(\xi) = \sqrt{-\xi}$. Todas as órbitas iniciando externa ou internamente ao ciclo, com exceção da origem, tendem a este ciclo quando $t \rightarrow -\infty$.

Definição 2.1.4 *Os sistemas (2.3), ou equivalentemente, (2.4) e (2.7), serão denominados formas normais das bifurcações de Hopf.*

Definição 2.1.5 *Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) é chamado ponto de Hopf se a linearização deste sistema possuir um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas, e os outros autovalores com partes reais diferentes de zero.*

A seguinte definição será usada na próxima seção, onde estudaremos a bifurcação de Hopf genérica.

Definição 2.1.6 *Dois sistemas*

$$\dot{x} = f(x, \xi), x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.10)$$

$$\dot{y} = g(y, \zeta), y \in \mathbb{R}^n, \zeta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.11)$$

são ditos localmente topologicamente equivalentes em torno da origem se existir uma aplicação $(x, \xi) \mapsto (h_\xi, k(\xi))$, definida em uma vizinhança $V = U_0 \times V_0$ de $(x, \xi) = (0, 0)$, contida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, satisfazendo:

(i) $k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo definido em V_0 ;

(ii) $h_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo para cada ξ , definido na vizinhança U_0 de $x = 0$, $h_0(0) = 0$, levando órbitas de (2.10) contidas em U_0 em órbitas de (2.11) em $h_\xi(U_0)$, preservando a direção do tempo.

2.2 Bifurcação de Hopf genérica

Nesta seção encontraremos condições para que um sistema seja localmente topologicamente equivalente à forma normal, que acabamos de estudar, da bifurcação de Hopf. Este resultado será obtido no Lema 2.2.9.

Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

que como definido no início do capítulo, representa a forma normal da bifurcação de Hopf cujo sinal dos termos cúbicos é negativo e, conseqüentemente, apresenta uma única órbita periódica atratora para $\xi > 0$.

Lema 2.2.1 *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4), \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\xi \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4)$ representa os termos de ordem 4 e superiores e depende suavemente de ξ , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (2.12).

Demonstração 2.2.1

Parte I (Existência e unicidade do ciclo).

Escrevendo (2.13) em coordenadas polares (ρ, θ) , obtemos

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\xi - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \Psi(\rho, \theta), \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $\Phi = \mathcal{O}(|\rho|^4)$, $\Psi = \mathcal{O}(|\rho|^3)$, e não indicaremos a dependência em ξ dessas funções para não complicarmos a notação. Uma órbita de (2.14) partindo de $(\rho, \theta) = (\rho_0, 0)$ tem a seguinte representação (veja Figura 2.2): $\rho = \rho(\theta; \rho_0)$, $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$ com ρ satisfazendo a equação

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho(\xi - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta)}{1 + \Psi(\rho, \theta)} = \rho(\xi - \rho^2) + R(\rho, \theta), \quad (2.15)$$

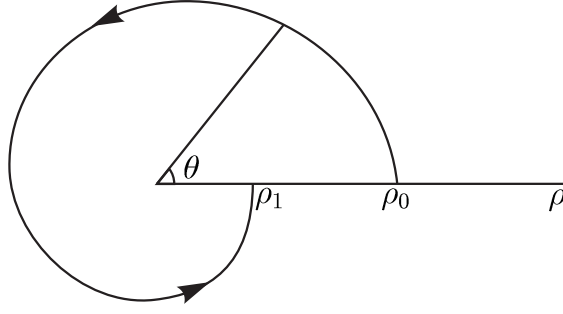


Figura 2.2: Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.

onde $R = \mathcal{O}(|\rho|^4)$. Note que a transformação de (2.14) para (2.15) é equivalente a uma reparametrização do tempo com $\dot{\theta} = 1$, implicando que o tempo de retorno para o semi-eixo $\theta = 0$ é o mesmo para todas as órbitas que partem desse eixo com $\rho_0 > 0$. Como $\rho(\theta; 0) \equiv 0$, a expansão de Taylor para $\rho(\theta; \rho_0)$, é

$$\rho = u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \mathcal{O}(|\rho_0|^4). \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots) = \\ & = (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots) [\xi - (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^2] + R(\rho, \theta) \\ & = u_1(\theta)\rho_0\xi + u_2(\theta)\rho_0^2\xi + u_3(\theta)\rho_0^3\xi - u_1^3(\theta)\rho_0^3 + \dots + R(\rho, \theta), \end{aligned}$$

de onde vem as seguintes equações diferenciais lineares resultantes das correspondentes potências de ρ_0

$$\frac{du_1}{d\theta} = u_1\xi, \quad \frac{du_2}{d\theta} = u_2\xi, \quad \frac{du_3}{d\theta} = u_3\xi - u_1^3.$$

Como queremos, para $\theta = 0$, $\rho = \rho_0$, estabelecemos as condições iniciais $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_3(0) = 0$, obtendo assim

$$u_1(\theta) = e^{\xi\theta}, \quad u_2(\theta) \equiv 0, \quad u_3(\theta) = e^{\xi\theta} \frac{1 - e^{2\xi\theta}}{2\xi}.$$

Note que essas expressões são independentes de $R(\rho, \theta)$. Como na expressão de $u_3(2\pi)$ vale a igualdade

$$e^{2\pi\xi} \frac{1 - e^{2(2\pi)\xi}}{2\xi} = \frac{e^{2\pi\xi}}{2\xi} \left[1 - (1 + 2(2\pi)\xi + \frac{(2(2\pi))^2\xi^2}{2!} + \dots) \right] = -e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)],$$

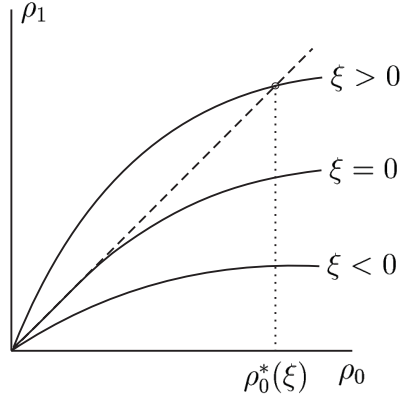


Figura 2.3: Ponto fixo da transformação de retorno.

podemos concluir que a transformação de retorno $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$ tem a forma

$$\rho_1 = e^{2\pi\xi}\rho_0 - e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4), \quad (2.17)$$

para todo $R = \mathcal{O}(\rho^4)$. A função (2.17) pode ser facilmente analisada para ρ_0 e $|\xi|$ suficientemente pequenos. Existe uma vizinhança da origem onde essa função tem somente o ponto fixo trivial para pequenos valores de $\xi < 0$ e um ponto fixo extra, $\rho_0^* = \sqrt{\xi} + \dots$, para pequenos valores de $\xi > 0$, veja Figura 2.3. Para verificar essa última afirmação, consideremos a função (2.17) escrita na forma

$$\rho_1 = \rho_0 \tilde{S}(\xi, \rho_0), \quad (2.18)$$

onde

$$\tilde{S}(\xi, \rho_0) = e^{2\pi\xi} (1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3).$$

Teremos, então, a equação dos pontos fixos, para $\rho_0 > 0$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\xi, \rho_0) &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{2\pi\xi} (1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3) &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) &= e^{-2\pi\xi} \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Seja

$$S(\xi, \rho_0) = 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\xi}.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita na função $S(\xi, \rho_0)$, para $(\xi, \rho_0) = (0, 0)$, comprovamos a afirmação. De fato, $S(0, 0) = 0$ e $S_\xi(0, 0) = 2\pi \neq 0$, o que nos permite escrever ξ como função de ρ_0 numa vizinhança de $\rho_0 = 0$ e calcular

$$\xi'(\rho_0) = -\frac{S_{\rho_0}(\rho_0, \xi(\rho_0))}{S_\xi(\rho_0, \xi(\rho_0))} = \frac{2(2\pi + \mathcal{O}(\xi))\rho_0 + e^{-2\pi\xi}\mathcal{O}(\rho_0^2)}{(\dots)\rho_0^2 - 2\pi e^{-2\pi\xi}\mathcal{O}(\rho_0^3) + 2\pi e^{-2\pi\xi}}.$$

Portanto, temos que

$$\xi'(0) = 0, \quad \xi''(0) = 2,$$

implicando, pela expansão de Taylor em torno de $\rho_0 = 0$, $\xi(0) = 0$, que

$$\xi(\rho_0) = \rho_0^2 + \dots,$$

que é uma função injetora no domínio $\rho_0 \geq 0$.

A estabilidade dos pontos fixos também é obtida de (2.17). Derivando (2.18) com relação a ρ_0 , obtemos

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_0} = \tilde{S}(\xi, \rho_0) + \rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0).$$

Para provarmos a estabilidade de ρ_0^* basta mostrarmos que

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_0}(\rho_0^*) < 1.$$

De fato, como $\tilde{S}(\xi, \rho_0) = 1$ para $\rho_0 = \rho_0^*$; $\xi = \xi(\rho_0^*)$, resta vermos que $\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi(\rho_0^*), \rho_0^*)$ é negativo. Calculando

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0) = \rho_0 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \rho_0}(\xi, \rho_0),$$

obtemos

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0) = \rho_0^2 [-2e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] + \mathcal{O}(\rho_0)],$$

que, para pequenos valores de $\rho_0^* > 0$; $\xi(\rho_0^*) > 0$, satisfaz o esperado.

Levando em conta que o ponto fixo positivo da função corresponde a um ciclo limite do sistema, podemos concluir que o sistema (2.14), ou (2.13), com quaisquer termos $\mathcal{O}(|\rho|^4)$, tem um único (e estável) ciclo limite bifurcando na origem quando $\xi > 0$ como

no sistema (2.12). Portanto, em outras palavras, os termos de ordem superior não afetam o surgimento do ciclo limite numa vizinhança de $(x_1, x_2) = (0, 0)$ com $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Parte II (Construção do homeomorfismo)

Estabelecida a existência e unicidade do ciclo limite, indicaremos agora como proceder para se obter os homeomorfismos necessários e concluir a equivalência topológica dos retratos de fase.

Fixemos ξ pequeno, mas positivo. Ambos os sistemas (2.12) e (2.13) têm um ciclo limite em alguma vizinhança da origem. Assuma que já tenha sido realizada no sistema (2.13) a reparametrização do tempo, resultando num tempo de retorno constante 2π (veja Parte I). Além disso, aplicamos um escalonamento linear nas coordenadas do sistema (2.13) de modo que o ponto de intersecção do ciclo e o semi-eixo horizontal seja $x_1 = \sqrt{\xi}$.

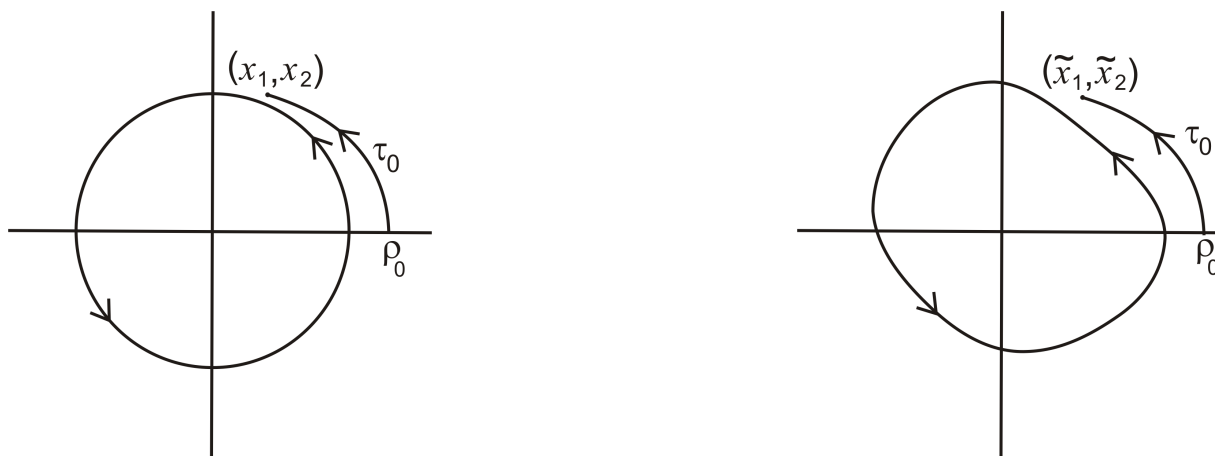


Figura 2.4: Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.

Defina a função $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$ do seguinte modo: Do ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ encontre valores (ρ_0, τ_0) , onde τ_0 é o tempo mínimo que uma órbita do sistema (2.12) leva para alcançar o ponto \mathbf{x} partindo do semi-eixo horizontal com $\rho = \rho_0$. Agora, pegue o ponto deste eixo com $\rho = \rho_0$ e construa uma órbita do sistema (2.13) no intervalo $[0; \tau_0]$ partindo desse ponto. Denote o ponto resultante por $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, veja Figura 2.4. Assuma que $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ para $\mathbf{x} = 0$.

A função construída é um homeomorfismo que, para $\xi > 0$, leva órbitas do sistema (2.12), em alguma vizinhança da origem, em órbitas de (2.13), preservando a direção do tempo. O caso $\xi < 0$ pode ser considerado da mesma forma com uma nova mudança de coordenadas. \square

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

com f suave, tendo para $\xi = 0$ o equilíbrio $e = 0$ com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, como $\lambda = 0$ não é um autovalor da matriz Jacobiana, o sistema tem um único equilíbrio $e_0(\xi)$ em alguma vizinhança da origem para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno. Podemos, então, através de uma mudança de coordenadas, levar este equilíbrio para a origem. Portanto, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $e = 0$ é ponto de equilíbrio do sistema para $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Então o sistema pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \xi), \tag{2.19}$$

onde F é uma função suave com componentes $F_{1,2}$, tendo expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos de primeira ordem, $F = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|)$. A matriz Jacobiana $A(\xi) = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ possui dois autovalores

$$\lambda_1(\xi) = \lambda(\xi), \quad \lambda_2(\xi) = \bar{\lambda}(\xi),$$

onde

$$\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi),$$

e a condição para a bifurcação de Hopf é

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Seja $q(\xi) \in \mathbb{C}^2$ autovetor complexo correspondente ao autovalor $\lambda(\xi)$, e dado por

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi),$$

e seja $p(\xi) \in \mathbb{C}^2$ autovetor da matriz transposta $A^\top(\xi)$ correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi)$,

$$A^\top(\xi)p(\xi) = \bar{\lambda}(\xi)p(\xi).$$

É sempre possível normalizar p com respeito a q , tal que

$$\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = 1,$$

onde $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ é o produto interno em \mathbb{C}^2 . Qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado unicamente, para todo ξ pequeno, como

$$\mathbf{x} = zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi),$$

para algum complexo z . Temos então a seguinte fórmula explícita para se determinar z

$$z = \langle p(\xi), \mathbf{x} \rangle. \quad (2.20)$$

Para verificar esta fórmula notemos que

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{x} \rangle &= \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle p, \mathbf{x} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$, basta vermos que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{q} \rangle &= \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda} \right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, pois para $|\xi|$ suficientemente pequeno temos $\omega(\xi) > 0$, concluímos que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Lema 2.2.2 *O sistema (2.19) pode ser escrito, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na forma*

$$\dot{z} = \lambda(\xi)z + g(z, \bar{z}, \xi), \quad (2.21)$$

onde $g = \mathcal{O}(|z|^2)$ é uma função suave de (z, \bar{z}, ξ) , dada por

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \langle p(\xi), F(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle,$$

com $F(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$.

Demonstração 2.2.2 Em (2.19) temos $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \xi)$, de onde podemos fazer

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2),$$

sendo $A = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ representando a expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos quadráticos (no mínimo). Temos assim que $F(\mathbf{x}) - A\mathbf{x} = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$, porém, para simplificar a notação tomemos $F^*(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$. Assim, de (2.20) temos que a variável complexa z satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p(\xi), \dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle p, A\mathbf{x} + F^*(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle p, A\mathbf{x} \rangle + \langle p, F^*(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda} \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda(\xi)z + \langle p(\xi), F^*(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle, \end{aligned}$$

obtendo então a forma (2.21), como queríamos. \square

Escrevendo g em série de Taylor nas duas variáveis complexas (z e \bar{z}) temos

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\xi) z^k \bar{z}^l,$$

onde

$$g_{kl}(\xi) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\xi), F^*(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \right|_{z=0},$$

para $k + l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$.

Suponha que, para $\xi = 0$, a função $F(\mathbf{x}, \xi)$ de (2.19) seja representada na forma

$$\begin{aligned} F(x, \xi) &= \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \frac{1}{24}D(x, x, x, x) + \frac{1}{120}E(x, x, x, x, x) \\ &+ \frac{1}{720}K(x, x, x, x, x, x) + \frac{1}{5040}L(x, x, x, x, x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^8), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$, $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ e $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$

são funções multilineares simétricas de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
B_i(x, y) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \\
C_i(x, y, z) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l, \\
D_i(x, y, z, u) &= \sum_{j,k,l,r=1}^2 \frac{\partial^4 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_r, \\
E_i(x, y, z, u, v) &= \sum_{j,k,l,r,p=1}^2 \frac{\partial^5 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r \partial \eta_p} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_r v_p, \\
K_i(x, y, z, u, v, s) &= \sum_{j,k,l,r,p,q=1}^2 \frac{\partial^6 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r \partial \eta_p \partial \eta_q} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_r v_p s_q, \\
L_i(x, y, z, u, v, s, t) &= \sum_{j,k,l,r,p,q,h=1}^2 \frac{\partial^7 F_i(\eta)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r \partial \eta_p \partial \eta_q \partial \eta_h} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_r v_p s_q t_h,
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

$$C(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^3 C(q, q, q) + 3z^2 \bar{z} C(q, q, \bar{q}) + 3z \bar{z}^2 C(q, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^3 C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),$$

$$\begin{aligned}
D(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) &= z^4 D(q, q, q, q) + 4z^3 \bar{z} D(q, q, q, \bar{q}) + 6z^2 \bar{z}^2 D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \\
&+ 4z \bar{z}^3 D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^4 D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) &= z^5 E(q, q, q, q, q) + 5z^4 \bar{z} E(q, q, q, q, \bar{q}) \\
&+ 10z^3 \bar{z}^2 E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 10z^2 \bar{z}^3 E(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 5z \bar{z}^4 E(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^5 E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) &= z^6 K(q, q, q, q, q, q) \\
&+ 6z^5 \bar{z} K(q, q, q, q, q, \bar{q}) + 15z^4 \bar{z}^2 K(q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 20z^3 \bar{z}^3 K(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \\
&+ 15z^2 \bar{z}^4 K(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 6z \bar{z}^5 K(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \bar{z}^6 K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) &= z^7 L(q, q, q, q, q, q, q) \\
&+ 7z^6 \bar{z} L(q, q, q, q, q, q, \bar{q}) + 21z^5 \bar{z}^2 L(q, q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 35z^4 \bar{z}^3 L(q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \\
&+ 35z^3 \bar{z}^4 L(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 21z^2 \bar{z}^5 L(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 7z \bar{z}^6 L(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q})
\end{aligned}$$

$$+\bar{z}^7 L(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}),$$

onde $q = q(0)$, $p = p(0)$ e os coeficientes de Taylor g_{kl} , $2 \leq k + j \leq 7$, dos termos quadráticos em $g(z, \bar{z}, 0)$ podem ser expressos, agora, pelas fórmulas

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{30} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{12} = \langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{40} = \langle p, D(q, q, q, q) \rangle, \quad g_{31} = \langle p, D(q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{22} = \langle p, D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{13} = \langle p, D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{04} = \langle p, D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{50} = \langle p, E(q, q, q, q, q) \rangle, \quad g_{41} = \langle p, E(q, q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{32} = \langle p, E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{23} = \langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{14} = \langle p, E(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{05} = \langle p, E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{60} = \langle p, K(q, q, q, q, q, q) \rangle, \quad g_{51} = \langle p, K(q, q, q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{42} = \langle p, K(q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{33} = \langle p, K(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{24} = \langle p, K(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{15} = \langle p, K(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{06} = \langle p, K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{70} = \langle p, L(q, q, q, q, q, q, q) \rangle, \quad g_{61} = \langle p, L(q, q, q, q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{52} = \langle p, L(q, q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{43} = \langle p, L(q, q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{34} = \langle p, L(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{25} = \langle p, L(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{16} = \langle p, L(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{07} = \langle p, L(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

Lema 2.2.3 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \quad (2.23)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^3).$$

Demonstração 2.2.3 A mudança de variável inversa é dada pela expressão

$$w = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\bar{z}\dot{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^3). \end{aligned}$$

Escolhendo, então

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos os termos quadráticos de (2.23). Essas substituições são sempre possíveis, pois, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega_0$ com $\omega_0 > 0$. \square

Lema 2.2.4 A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (2.24)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $c_1 = c_1(\xi)$.

Demonstração 2.2.4 A transformação inversa é

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2} (\bar{z}^2\dot{z} + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2\lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{12} - 2\bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4).
\end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos todos os termos cúbicos com exceção do termo $w^2\bar{w}$, que será tratado separadamente.

As substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^2\bar{w}$ seria escolher

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isso é possível para $\xi \neq 0$ pequeno, mas quando $\xi = 0$ o denominador se anula, pois $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Para obtermos então uma transformação que dependa suavemente de ξ , escolhemos $h_{21} = 0$, no que resulta

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}.$$

□

O termo $w^2\bar{w}$ é chamado de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico $z^2\bar{z}$ na equação (2.24).

Lema 2.2.5 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{40}}{24} z^4 + \frac{g_{31}}{6} z^3 \bar{z} + \frac{g_{22}}{4} z^2 \bar{z}^2 + \frac{g_{13}}{6} z \bar{z}^3 + \frac{g_{04}}{24} \bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5), \quad (2.25)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{40}}{24}w^4 + \frac{h_{31}}{6}w^3\bar{w} + \frac{h_{22}}{4}w^2\bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6}w\bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24}\bar{w}^4,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos de quarta ordem

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^5).$$

Demonstração 2.2.5 A transformação inversa é

$$w = z - \frac{h_{40}}{24}z^4 - \frac{h_{31}}{6}z^3\bar{z} - \frac{h_{22}}{4}z^2\bar{z}^2 - \frac{h_{13}}{6}z\bar{z}^3 - \frac{h_{04}}{24}\bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{40}}{6}z^3\dot{z} - \frac{h_{31}}{6}(3z^2\bar{z}\dot{z} + z^3\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{22}}{4}(2z\bar{z}^2\dot{z} + 2z^2\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{13}}{6}(\bar{z}^3\dot{z} + 3z\bar{z}^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{04}}{6}\bar{z}^3\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{40}}{24} - \frac{h_{40}}{6}\lambda\right)z^4 + \left(\frac{g_{31}}{6} - \frac{h_{31}}{2}\lambda - \frac{h_{31}}{6}\bar{\lambda}\right)z^3\bar{z} + \left(\frac{g_{22}}{4} - \frac{h_{22}}{2}\lambda - \frac{h_{22}}{2}\bar{\lambda}\right)z^2\bar{z}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{13}}{6} - \frac{h_{13}}{6}\lambda - \frac{h_{13}}{6}\bar{\lambda}\right)z\bar{z}^3 + \left(\frac{g_{04}}{24} - \frac{h_{04}}{6}\bar{\lambda}\right)\bar{z}^4 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{24}(g_{40} - 3\lambda h_{40})w^4 + \frac{1}{6}(g_{31} - (2\lambda + \bar{\lambda})h_{31})w^3\bar{w} + \frac{1}{4}(g_{22} - (\lambda + 2\bar{\lambda})h_{22})w^2\bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}(g_{13} - 3\bar{\lambda}h_{13})w\bar{w}^3 + \frac{1}{24}(g_{04} - (4\bar{\lambda} - \lambda)h_{04})\bar{w}^4 + \mathcal{O}(|w|^5). \end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$\begin{aligned} h_{40} &= \frac{g_{40}}{3\lambda}, \quad h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda + \bar{\lambda}}, \quad h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\bar{\lambda}}, \\ h_{13} &= \frac{g_{13}}{3\bar{\lambda}}, \quad h_{04} = \frac{g_{04}}{4\bar{\lambda} - \lambda}, \end{aligned}$$

eliminamos assim, todos os termos de ordem quatro. Temos que estas substituições são sempre possíveis uma vez que, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. \square

Lema 2.2.6 A equação

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{50}}{120}z^5 + \frac{g_{41}}{24}z^4\bar{z} + \frac{g_{32}}{12}z^3\bar{z}^2 + \frac{g_{23}}{12}z^2\bar{z}^3 + \frac{g_{14}}{24}z\bar{z}^4 + \frac{g_{05}}{120}\bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6), \quad (2.26)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{50}}{120}w^5 + \frac{h_{41}}{24}w^4\bar{w} + \frac{h_{32}}{12}w^3\bar{w}^2 + \frac{h_{23}}{12}w^2\bar{w}^3 + \frac{h_{14}}{24}w\bar{w}^4 + \frac{h_{05}}{120}\bar{w}^5,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo de quinta ordem

$$\dot{w} = \lambda w + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $c_2 = c_2(\xi)$.

Demonstração 2.2.6 A transformação inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{50}}{120}z^5 - \frac{h_{41}}{24}z^4\bar{z} - \frac{h_{32}}{12}z^3\bar{z}^2 - \frac{h_{23}}{12}z^2\bar{z}^3 - \frac{h_{14}}{24}z\bar{z}^4 - \frac{h_{05}}{120}\bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6).$$

De onde temos que

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{50}}{24}z^4\dot{z} - \frac{h_{41}}{24}(4z^3\bar{z}\dot{z} + z^4\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{32}}{12}(3z^2\bar{z}^2\dot{z} + 2z^3\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{23}}{12}(2z\bar{z}^3\dot{z} + 3z^2\bar{z}^2\dot{\bar{z}}) \\ &\quad - \frac{h_{14}}{24}(\bar{z}^4\dot{z} + 4z\bar{z}^3\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{05}}{24}\bar{z}^4\dot{\bar{z}} + \mathcal{O}(|z|^6) \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{50}}{120} - \frac{h_{50}}{24}\lambda\right)z^5 + \left(\frac{g_{41}}{24} - \frac{h_{41}}{6} - \frac{h_{41}}{24}\bar{\lambda}\right)z^4\bar{z} + \left(\frac{g_{32}}{12} - \frac{h_{32}}{4}\lambda - \frac{h_{32}}{6}\bar{\lambda}\right)z^3\bar{z}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{23}}{12} - \frac{h_{23}}{6}\lambda - \frac{h_{23}}{4}\bar{\lambda}\right)z^2\bar{z}^3 + \left(\frac{g_{14}}{24} - \frac{h_{14}}{24}\lambda - \frac{h_{14}}{6}\bar{\lambda}\right)z\bar{z}^4 + \left(\frac{g_{05}}{120} - \frac{h_{05}}{24}\bar{\lambda}\right)\bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6) \\ &= \lambda w + \frac{1}{120}(g_{50} - 4\lambda h_{50})w^5 + \frac{1}{24}(g_{41} - (3\lambda + \bar{\lambda})h_{41})w^4\bar{w} + \frac{1}{12}(g_{32} - 2(\lambda + \bar{\lambda})h_{32})w^3\bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{12}(g_{23} - (\lambda + 3\bar{\lambda})h_{23})w^2\bar{w}^3 + \frac{1}{24}(g_{14} - 4\bar{\lambda}h_{14})w\bar{w}^4 + \frac{1}{120}(g_{05} - (5\bar{\lambda} - \lambda)h_{05})\bar{w}^5 + \mathcal{O}(|w|^6). \end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$\begin{aligned} h_{50} &= \frac{g_{50}}{4\lambda}, \quad h_{41} = \frac{g_{41}}{3\lambda + \bar{\lambda}}, \quad h_{23} = \frac{g_{23}}{\lambda + 3\bar{\lambda}}, \\ h_{14} &= \frac{g_{14}}{4\bar{\lambda}}, \quad h_{05} = \frac{g_{05}}{5\bar{\lambda} - \lambda}, \end{aligned}$$

eliminamos assim, todos os termos de ordem 5, 4, 3 e 2, exceto $w^3\bar{w}^2$, que trataremos separadamente. Temos que estas substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^3\bar{w}^2$ seria escolher

$$h_{32} = \frac{g_{32}}{2(\lambda + \bar{\lambda})}.$$

Isto é possível para $\xi \neq 0$ pequeno, mas o denominador se anula quando $\xi = 0$, vejamos $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Para obter uma transformação que dependa suavemente de ξ , escolhamos $h_{32} = 0$, o que resulta em

$$c_2 = \frac{g_{32}}{12}.$$

□

O termo $w^3\bar{w}^2$ também é chamado de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo de quinta ordem $z^3\bar{z}^2$ na equação (2.26).

Lema 2.2.7 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{60}}{720} z^6 + \frac{g_{51}}{120} z^5 \bar{z} + \frac{g_{42}}{48} z^4 \bar{z}^2 + \frac{g_{33}}{36} z^3 \bar{z}^3 + \frac{g_{24}}{48} z^2 \bar{z}^4 + \frac{g_{15}}{120} z \bar{z}^5 + \frac{g_{06}}{720} \bar{z}^6 + \mathcal{O}(|z|^7), \quad (2.27)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$ pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexas

$$z = \omega + \frac{h_{60}}{720} \omega^6 + \frac{h_{51}}{120} \omega^5 \bar{\omega} + \frac{h_{42}}{48} \omega^4 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{33}}{36} \omega^3 \bar{\omega}^3 + \frac{h_{24}}{48} \omega^2 \bar{\omega}^4 + \frac{h_{15}}{120} \omega \bar{\omega}^5 + \frac{h_{06}}{720} \bar{\omega}^6,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos de ordem 2, 3, 4, 5 e 6

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + \mathcal{O}(|\omega|^7).$$

Demonstração 2.2.7: A mudança de variável inversa é dada pela expressão

$$\omega = z - \frac{h_{60}}{720} z^6 - \frac{h_{51}}{120} z^5 \bar{z} - \frac{h_{42}}{48} z^4 \bar{z}^2 - \frac{h_{33}}{36} z^3 \bar{z}^3 - \frac{h_{24}}{48} z^2 \bar{z}^4 - \frac{h_{15}}{120} z \bar{z}^5 - \frac{h_{06}}{720} \bar{z}^6 - \mathcal{O}(|z|^7).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= z - \frac{h_{60}}{120} z^5 \dot{z} - \frac{h_{51}}{24} z^4 \bar{z} \dot{z} - \frac{h_{42}}{12} z^3 \bar{z}^2 \dot{z} - \frac{h_{33}}{12} z^2 \bar{z}^3 \dot{z} - \frac{h_{24}}{24} z \bar{z}^4 \dot{z} - \frac{h_{15}}{120} \bar{z}^5 \dot{z} - \frac{h_{51}}{120} z^5 \dot{\bar{z}} \\
&\quad - \frac{h_{42}}{24} z^4 \bar{z} \dot{\bar{z}} - \frac{h_{33}}{12} z^3 \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{24}}{12} z^2 \bar{z}^3 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{15}}{24} z \bar{z}^4 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{06}}{120} \bar{z}^5 \dot{\bar{z}} - \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{60}}{720} - \frac{\lambda h_{60}}{120} \right) z^6 - \left(\frac{g_{51}}{120} - \frac{\lambda h_{51}}{24} - \frac{\bar{\lambda} h_{51}}{120} \right) z^5 \bar{z} + \left(\frac{g_{42}}{48} - \frac{\lambda h_{42}}{12} - \frac{\bar{\lambda} h_{42}}{24} \right) z^4 \bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{33}}{36} - \frac{\lambda h_{33}}{12} - \frac{\bar{\lambda} h_{33}}{12} \right) z^3 \bar{z}^3 + \left(\frac{g_{24}}{48} - \frac{\lambda h_{24}}{24} - \frac{\bar{\lambda} h_{24}}{12} \right) z^2 \bar{z}^4 + \left(\frac{g_{15}}{120} - \frac{\lambda h_{15}}{120} - \frac{\bar{\lambda} h_{15}}{24} \right) z \bar{z}^5 \\
&\quad + \left(\frac{g_{06}}{720} - \frac{\bar{\lambda} h_{06}}{120} \right) \bar{z}^6 + \dots \\
&= \lambda \omega + \left(\frac{g_{60}}{720} - \frac{\lambda h_{60}}{144} \right) \omega^6 + \left(\frac{g_{51}}{120} - \frac{\lambda h_{51}}{30} - \frac{\bar{\lambda} h_{51}}{120} \right) \omega^5 \bar{\omega} + \left(\frac{g_{42}}{48} - \frac{\lambda h_{42}}{16} - \frac{\bar{\lambda} h_{42}}{24} \right) \omega^4 \bar{\omega}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{33}}{36} - \frac{\lambda h_{33}}{18} - \frac{\bar{\lambda} h_{33}}{12} \right) \omega^3 \bar{\omega}^3 + \left(\frac{g_{24}}{48} - \frac{\lambda h_{24}}{24} - \frac{\bar{\lambda} h_{24}}{12} \right) \omega^2 \bar{\omega}^4 + \left(\frac{g_{15}}{120} - \frac{\lambda h_{15}}{120} - \frac{\bar{\lambda} h_{15}}{24} \right) \omega \bar{\omega}^5 \\
&\quad + \left(\frac{g_{06}}{720} + \frac{\lambda h_{06}}{720} - \frac{\bar{\lambda} h_{06}}{120} \right) \bar{\omega}^6 + \mathcal{O}(|\omega|^7).
\end{aligned}$$

Escolhendo, então

$$\begin{aligned}
h_{60} &= \frac{g_{60}}{5\lambda}, & h_{06} &= \frac{g_{06}}{6\bar{\lambda} - \lambda}, & h_{15} &= \frac{g_{15}}{\lambda + 5\bar{\lambda}}, & h_{24} &= \frac{g_{24}}{2\lambda + 4\bar{\lambda}}, \\
h_{42} &= \frac{g_{42}}{3\lambda + 2\bar{\lambda}}, & h_{51} &= \frac{g_{51}}{\bar{\lambda} + 4\lambda}, & h_{33} &= \frac{g_{33}}{3\bar{\lambda} + 2\lambda},
\end{aligned}$$

eliminamos os termos de ordem 2, 3, 4 e 5 de (2.27). Essas substituições são sempre possíveis, pois, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega_0$ com $\omega_0 > 0$. \square

Lema 2.2.8 *A equação*

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \lambda z + \frac{g_{70}}{5040} z^7 + \frac{g_{61}}{720} z^6 \bar{z} + \frac{g_{52}}{240} z^5 \bar{z}^2 + \frac{g_{43}}{144} z^4 \bar{z}^3 + \frac{g_{34}}{144} z^3 \bar{z}^4 + \frac{g_{25}}{240} z^2 \bar{z}^5 + \frac{g_{16}}{720} z \bar{z}^6 \\
&\quad + \frac{g_{07}}{5040} \bar{z}^7 + \mathcal{O}(|z|^8),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode se transformar, pela mudança de coordenadas complexa

$$\begin{aligned}
z &= \omega + \frac{h_{70}}{5040} \omega^7 + \frac{h_{61}}{720} \omega^6 \bar{\omega} + \frac{h_{52}}{240} \omega^5 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{43}}{144} \omega^4 \bar{\omega}^3 + \frac{h_{34}}{144} \omega^3 \bar{\omega}^4 + \frac{h_{25}}{240} \omega^2 \bar{\omega}^5 + \frac{h_{16}}{720} \omega \bar{\omega}^6 \\
&\quad + \frac{h_{07}}{5040} \bar{\omega}^7,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com somente um termo de ordem 7

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + c_3\omega^4\bar{\omega}^3 + \mathcal{O}(|\omega|^8),$$

onde $c_3 = c_3(\xi)$.

Demonstração 2.2.8: A transformação inversa é

$$\begin{aligned} \omega &= z - \frac{h_{70}}{5040} z^7 - \frac{h_{61}}{720} z^6 \bar{z} - \frac{h_{52}}{240} z^5 \bar{z}^2 - \frac{h_{43}}{144} z^4 \bar{z}^3 - \frac{h_{34}}{144} z^3 \bar{z}^4 - \frac{h_{25}}{240} z^2 \bar{z}^5 - \frac{h_{16}}{720} z \bar{z}^6 \\ &\quad - \frac{h_{07}}{5040} \bar{z}^7 - \mathcal{O}(|z|^8). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \dot{z} - \frac{h_{70}}{720} z^6 \dot{z} - \frac{h_{61}}{120} z^5 \bar{z} \dot{z} - \frac{h_{52}}{48} z^4 \bar{z}^2 \dot{z} - \frac{h_{43}}{36} z^3 \bar{z}^3 \dot{z} - \frac{h_{34}}{48} z^2 \bar{z}^4 \dot{z} - \frac{h_{25}}{120} z \bar{z}^5 \dot{z} - \frac{h_{16}}{720} \bar{z}^6 \dot{z} - \dots \\ &\quad - \frac{h_{61}}{720} z^6 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{52}}{120} z^5 \bar{z} \dot{\bar{z}} - \frac{h_{43}}{48} z^4 \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{34}}{36} z^3 \bar{z}^3 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{25}}{48} z^2 \bar{z}^4 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{16}}{120} z \bar{z}^5 \dot{\bar{z}} - \frac{h_{07}}{720} \bar{z}^6 \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{70}}{5040} - \frac{\lambda h_{70}}{720} \right) z^7 + \left(\frac{g_{61}}{720} - \frac{\lambda h_{61}}{120} - \frac{\bar{\lambda} h_{61}}{720} \right) z^6 \bar{z} + \left(\frac{g_{52}}{240} - \frac{\lambda h_{52}}{48} - \frac{\bar{\lambda} h_{52}}{120} \right) z^5 \bar{z}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{43}}{144} - \frac{\lambda h_{43}}{36} - \frac{\bar{\lambda} h_{43}}{48} \right) z^4 \bar{z}^3 + \left(\frac{g_{34}}{144} - \frac{\lambda h_{34}}{48} - \frac{\bar{\lambda} h_{34}}{36} \right) z^3 \bar{z}^4 + \left(\frac{g_{25}}{240} - \frac{\lambda h_{25}}{120} - \frac{\bar{\lambda} h_{25}}{48} \right) z^2 \bar{z}^5 \\ &\quad + \left(\frac{g_{16}}{720} - \frac{\lambda h_{16}}{720} - \frac{\bar{\lambda} h_{16}}{120} \right) z \bar{z}^6 + \left(\frac{g_{07}}{5040} - \frac{\bar{\lambda} h_{07}}{720} \right) \bar{z}^7 \dots \\ &= \lambda\omega + \left(\frac{g_{70}}{5040} - \frac{\lambda h_{70}}{840} \right) \omega^7 + \left(\frac{g_{61}}{720} - \frac{\lambda h_{61}}{144} - \frac{\bar{\lambda} h_{61}}{720} \right) \omega^6 \bar{\omega} + \left(\frac{g_{52}}{240} - \frac{\lambda h_{52}}{60} - \frac{\bar{\lambda} h_{52}}{120} \right) \omega^5 \bar{\omega}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{43}}{144} - \frac{\lambda h_{43}}{48} - \frac{\bar{\lambda} h_{43}}{48} \right) \omega^4 \bar{\omega}^3 + \left(\frac{g_{34}}{144} - \frac{\lambda h_{34}}{72} - \frac{\bar{\lambda} h_{34}}{36} \right) \omega^3 \bar{\omega}^4 + \left(\frac{g_{25}}{240} - \frac{\lambda h_{25}}{120} - \frac{\bar{\lambda} h_{25}}{48} \right) \omega^2 \bar{\omega}^5 \\ &\quad + \left(\frac{g_{16}}{720} - \frac{\bar{\lambda} h_{16}}{120} \right) \omega \bar{\omega}^6 + \left(\frac{g_{07}}{5040} + \frac{\lambda h_{07}}{5040} - \frac{\bar{\lambda} h_{07}}{720} \right) \bar{\omega}^7 + \mathcal{O}(|\omega|^8). \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} h_{70} &= \frac{g_{70}}{6\lambda}, h_{61} = \frac{g_{61}}{\lambda + 5\lambda}, h_{52} = \frac{g_{52}}{4\lambda + 2\lambda}, h_{34} = \frac{g_{34}}{2\lambda + 4\lambda}, h_{25} = \frac{g_{25}}{2\lambda + 5\lambda}, h_{16} = \frac{g_{16}}{6\lambda}, \\ h_{07} &= \frac{g_{07}}{7\bar{\lambda} - \lambda}, \end{aligned}$$

eliminamos todos os termos de ordem 5, 4, 3 e 2 com exceção do termo $\omega^4 \bar{\omega}^3$ que será tratado separadamente. As substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $\omega^4 \bar{\omega}^3$ seria escolher

$$h_{43} = \frac{g_{43}}{3\lambda + 3\bar{\lambda}},$$

isso é possível para $\xi \neq 0$ pequeno, mas quando $\xi = 0$ o denominador se anula, pois, $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Para obtermos então uma transformação que dependa suavemente de μ escolhemos $h_{43} = 0$, no que resulta $c_3 = g_{43}/144$.

□

O termo $\omega^4\bar{\omega}^3$ é chamado também de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo $z^4\bar{z}^3$ na equação (2.28).

Lema 2.2.9 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq j+k \leq 7} \frac{1}{j!k!} g_{jk} z^j \bar{z}^k + \mathcal{O}(|z|^8), \quad (2.30)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$ pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$\begin{aligned} z &= \omega + \frac{h_{70}}{5040} \omega^7 + \frac{h_{60}}{720} \omega^6 + \frac{h_{61}}{720} \omega^6 \bar{\omega} + \frac{h_{50}}{120} \omega^5 + \frac{h_{52}}{240} \omega^5 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{51}}{120} \omega^5 \bar{\omega} + \frac{h_{40}}{24} \omega^4 + \frac{h_{43}}{144} \omega^4 \bar{\omega}^3 \\ &+ \frac{h_{42}}{48} \omega^4 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{41}}{24} \omega^4 \bar{\omega} + \frac{h_{30}}{6} \omega^3 + \frac{h_{34}}{144} \omega^3 \bar{\omega}^4 + \frac{h_{33}}{36} \omega^3 \bar{\omega}^3 + \frac{h_{32}}{12} \omega^3 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{31}}{6} \omega^3 \bar{\omega} + \frac{h_{25}}{240} \omega^2 \bar{\omega}^5 \\ &+ \frac{h_{24}}{48} \omega^2 \bar{\omega}^4 + \frac{h_{23}}{24} \omega^2 \bar{\omega}^3 + \frac{h_{22}}{4} \omega^2 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{21}}{2} \omega^2 \bar{\omega} + \frac{h_{20}}{2} \omega^2 + h_{11} \omega \bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2} \bar{\omega}^2 + \frac{h_{12}}{2} \omega \bar{\omega}^4 \\ &+ \frac{h_{03}}{6} \bar{\omega}^3 + \frac{h_{13}}{6} \omega \bar{\omega}^3 + \frac{h_{04}}{24} \bar{\omega}^4 + \frac{h_{14}}{24} \omega \bar{\omega}^4 + \frac{h_{05}}{120} \bar{\omega}^5 + \frac{h_{15}}{120} \omega \bar{\omega}^5 + \frac{h_{16}}{720} \omega \bar{\omega}^6 + \frac{h_{06}}{720} \bar{\omega}^6 + \frac{h_{07}}{5040} \bar{\omega}^7, \end{aligned}$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo de ordem 3, um de ordem 5 e um de ordem 7

$$\dot{\omega} = \lambda \omega + c_1 \omega^2 \bar{\omega} + c_2 \omega^3 \bar{\omega}^2 + c_3 \omega^4 \bar{\omega}^3 + \mathcal{O}(|\omega|^8), \quad (2.31)$$

com $c_1 = c_1(\xi)$, $c_2 = c_2(\xi)$, $c_3 = c_3(\xi)$.

Demonstração 2.2.9: Obviamente as transformações definidas nos lemas anteriores, nos levam a este resultado. As transformações

$$\begin{aligned} z &= \omega + \frac{h_{20}}{2} \omega^2 + h_{11} \omega \bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2} \bar{\omega}^2, \\ z &= \omega + \frac{h_{40}}{24} \omega^4 + \frac{h_{31}}{6} \omega^3 \bar{\omega} + \frac{h_{22}}{4} \omega^2 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{13}}{6} \omega \bar{\omega}^3 + \frac{h_{04}}{24} \bar{\omega}^4, \\ z &= \omega + \frac{h_{60}}{720} \omega^6 + \frac{h_{51}}{120} \omega^5 \bar{\omega} + \frac{h_{42}}{48} \omega^4 \bar{\omega}^2 + \frac{h_{33}}{36} \omega^3 \bar{\omega}^3 + \frac{h_{24}}{48} \omega^2 \bar{\omega}^4 + \frac{h_{15}}{120} \omega \bar{\omega}^5 + \frac{h_{06}}{720} \bar{\omega}^6, \end{aligned} \quad (2.32)$$

com

$$\begin{aligned} h_{20} &= \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}, \\ h_{40} &= \frac{g_{40}}{3\lambda}, \quad h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda - \bar{\lambda}}, \quad h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\bar{\lambda}}, \quad h_{13} = \frac{g_{13}}{3\bar{\lambda}}, \quad h_{04} = \frac{g_{04}}{4\bar{\lambda} - \lambda}, \\ h_{60} &= \frac{g_{60}}{5\lambda}, \quad h_{06} = \frac{g_{06}}{6\bar{\lambda} - \lambda}, \quad h_{15} = \frac{g_{15}}{\lambda + 5\bar{\lambda}}, \quad h_{24} = \frac{g_{24}}{2\lambda + 4\bar{\lambda}}, \quad h_{42} = \frac{g_{42}}{3\lambda + 2\bar{\lambda}}, \\ h_{51} &= \frac{g_{51}}{\bar{\lambda} + 4\lambda}, \quad h_{33} = \frac{g_{33}}{3\bar{\lambda} + 2\lambda}, \end{aligned}$$

definidos nos Lemas 2.2.3, 2.2.5 e 2.2.7, anulam os respectivos termos, mas também alteram outros termos. Os coeficientes $g_{21}/2$, $g_{32}/12$ e $g_{43}/144$ dos termos $z^2\bar{z}$, $z^3\bar{z}^2$ e $z^4\bar{z}^3$, respectivamente, na equação (2.30) foram modificados pelas transformações de (2.32). Os termos de ordem 8 ou maiores, afetam somente $\mathcal{O}(|\omega|^8)$ e assim eles podem ser truncados. \square

2.3 Método da projeção

Seja (x_0, ξ_0) o ponto de equilíbrio de

$$\dot{x} = f(x, \xi), \quad (2.33)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ e a matriz Jacobiana A possui um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ e não admite outro autovalor com parte real nula. Denotando a variável $x - x_0$ também por x , escrevemos

$$F(x, \xi_0) + A(\xi_0, x) = f(x, \xi_0),$$

onde $F(x, \xi_0)$ é dada de forma análoga à (2.22). Seja T^c o autoespaço generalizado de A correspondente à $\lambda_{1,2}$. Isto significa que T^c é subespaço não vazio invariante por A gerado pelos autovetores associados aos autovalores $\lambda_{1,2}$.

Teorema 2.3.1 (*Teorema da Variedade Central*) *Localmente, existe um conjunto invariante W^c de (2.33) que é tangente a T^c em (x_0, ξ_0) . Tal conjunto é o gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas.*

Se Φ^t denota o fluxo associado a (2.33), então existe uma vizinhança U de (x_0, ξ_0) , tal que, se $\Phi^t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\Phi^t(x) \rightarrow W^c(x_0, \xi_0)$ para $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Ver Kuznetsov [5].

Definição 2.3.1 W^c é chamado de *variedade central*.

Sejam $p, q \in \mathbb{C}^n$ autovetores satisfazendo

$$A(\xi_0)q(\xi_0) = i\omega_0 q(\xi_0), \quad A^\top(\xi_0)p(\xi_0) = -i\omega_0 p(\xi_0),$$

$$\langle p(\xi_0), q(\xi_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(\xi_0) q_i(\xi_0) = 1,$$

onde $A^\top(\xi_0)$ é matriz transposta de $A(\xi_0)$. Um vetor $y \in T^c$, pode ser representado como

$$y = \omega q + \bar{\omega} \bar{q}, \quad (2.34)$$

onde $\omega = \langle p, y \rangle \in \mathbb{C}$. A variedade central bidimensional pode ser parametrizada por $(\omega, \bar{\omega})$, por meio de uma imersão da forma $x = H(\omega, \bar{\omega})$, onde $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem uma expansão de Taylor da forma

$$H(w, \bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{2 \leq j+k \leq 7} \frac{1}{j!k!} h_{jk} w^j \bar{w}^k + \mathcal{O}(|w|^8), \quad (2.35)$$

com $h_{jk} \in \mathbb{C}^n$ e $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$.

Substituindo (2.35) em (2.33), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' = A(H(w, \bar{w})) + F(H(w, \bar{w})). \quad (2.36)$$

A equação diferencial, restrita à variedade central, pode ser escrita na forma

$$w' = i\omega_0 w + \frac{1}{2} g_{21} w |w|^2 + \frac{1}{12} g_{32} w |w|^4 + \frac{1}{144} g_{43} w |w|^6 + \mathcal{O}(|w|^8),$$

com $g_{jk} \in \mathbb{C}$. Conforme o Lema 2.2.9, temos

$$\begin{aligned} H_w &= q + h_{20} w + h_{11} \bar{w} + \frac{1}{2} h_{30} w^2 + h_{21} w \bar{w} + \frac{1}{2} h_{12} \bar{w}^2 + \frac{1}{6} h_{40} w^3 + \frac{1}{2} \bar{h}_{31} w w^2 + \frac{1}{2} h_{22} \bar{w}^2 w \\ &+ \frac{1}{6} h_{13} \bar{w}^3 + \frac{1}{24} h_{50} w^4 + \frac{1}{6} h_{41} \bar{w} w^3 + \frac{1}{4} h_{32} \bar{w}^2 w^2 + \frac{1}{6} h_{23} \bar{w}^3 w + \frac{1}{24} h_{14} \bar{w}^4 + \frac{1}{120} h_{60} w^5 \\ &+ \frac{1}{24} h_{51} \bar{w} w^4 + \frac{1}{12} h_{42} \bar{w}^2 w^3 + \frac{1}{12} h_{33} \bar{w}^3 w^2 + \frac{1}{24} h_{24} \bar{w}^4 w + \frac{1}{120} h_{15} \bar{w}^5 + \frac{1}{36} h_{43} \bar{w}^3 w^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\bar{w}} &= \bar{q} + h_{11} w + h_{02} \bar{w} + h_{12} w\bar{w} + \frac{1}{2} h_{21} w^2 + \frac{1}{2} h_{03} \bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{13} w\bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{22} w^2\bar{w} + \frac{1}{6} h_{31} w^3 \\
&+ \frac{1}{6} h_{04} \bar{w}^3 + \frac{1}{6} h_{14} w\bar{w}^3 + \frac{1}{4} h_{23} w^2\bar{w}^2 + \frac{1}{6} h_{32} w^3\bar{w} + \frac{1}{24} h_{41} w^4 + \frac{1}{24} h_{05} \bar{w}^4 + \frac{1}{120} h_{51} w^5 \\
&+ \frac{1}{24} h_{05} \bar{w}^4 + \frac{1}{12} h_{33} w^3\bar{w}^2 + \frac{1}{24} h_{42} w^4\bar{w} + \frac{1}{24} h_{15} w\bar{w}^4 + \frac{1}{120} h_{06} \bar{w}^5 + \frac{1}{48} h_{43} w^4\bar{w}^2 + \dots
\end{aligned}$$

Aplicando H_w , $H_{\bar{w}}$, w , \bar{w}' em (2.36), temos

$$\begin{aligned}
H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' &= q i \omega_0 w - \bar{q} i \omega_0 \bar{w} + h_{20} i \omega_0 w^2 - h_{02} i \omega_0 \bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{30} i \omega_0 w^3 \\
&+ \left(\frac{1}{2} q g_{21} + \frac{1}{2} h_{21} i \omega_0 \right) w^2 \bar{w} + \left(\frac{1}{2} \bar{q} \bar{g}_{21} - \frac{1}{2} h_{12} i \omega_0 \right) w \bar{w}^2 - \frac{1}{2} h_{03} i \omega_0 \bar{w}^3 + \frac{1}{6} h_{40} i \omega_0 w^4 \\
&+ \left(\frac{1}{2} g_{21} h_{20} + \frac{1}{3} h_{31} i \omega_0 \right) w^3 \bar{w} + \left(\frac{1}{2} g_{21} h_{11} + \frac{1}{2} \bar{g}_{21} h_{11} \right) w^2 \bar{w}^2 + \left(\frac{1}{2} h_{02} \bar{g}_{21} - \frac{1}{3} h_{13} i \omega_0 \right) w \bar{w}^3 \\
&- \frac{1}{6} h_{04} i \omega_0 \bar{w}^4 + \frac{1}{24} h_{50} i \omega_0 w^5 + \left(\frac{1}{4} g_{21} h_{30} + \frac{1}{8} h_{41} i \omega_0 \right) w^4 \bar{w} + \left(\frac{1}{12} q g_{32} + \frac{1}{2} g_{21} h_{21} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{12} h_{32} i \omega_0 + \frac{1}{4} h_{21} \bar{g}_{21} \right) w^3 \bar{w}^2 + \left(\frac{1}{4} g_{21} h_{12} + \frac{1}{2} \bar{g}_{21} h_{12} - \frac{1}{12} h_{23} i \omega_0 + \frac{1}{12} \bar{q} \bar{g}_{32} \right) w^2 \bar{w}^3 \\
&+ \left(\frac{1}{4} h_{03} \bar{g}_{21} - \frac{1}{8} h_{14} i \omega_0 \right) w \bar{w}^4 - \frac{1}{24} h_{05} i \omega_0 \bar{w}^5 + \frac{1}{120} h_{60} i \omega_0 w^6 + \left(\frac{1}{12} g_{21} h_{40} + \frac{1}{30} h_{51} i \omega_0 \right) w^5 \bar{w} \\
&+ \left(\frac{1}{12} g_{32} h_{20} + \frac{1}{4} g_{21} h_{31} + \frac{1}{24} h_{42} i \omega_0 + \frac{1}{12} h_{31} \bar{g}_{21} \right) w^4 \bar{w}^2 + \left(\frac{1}{12} g_{32} h_{11} + \frac{1}{12} \bar{g}_{32} h_{11} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4} g_{21} h_{22} + \frac{1}{4} h_{22} \bar{g}_{21} \right) w^3 \bar{w}^3 + \left(\frac{1}{12} g_{21} h_{13} + \frac{1}{4} \bar{g}_{21} h_{13} - \frac{1}{24} h_{24} i \omega_0 + \frac{1}{12} h_{02} \bar{g}_{32} \right) w^2 \bar{w}^4 \\
&+ \left(\frac{1}{12} h_{04} \bar{g}_{21} - \frac{1}{30} h_{15} i \omega_0 \right) w \bar{w}^5 - \frac{1}{120} h_{06} i \omega_0 \bar{w}^6 + \left(\frac{1}{144} q g_{43} + \frac{1}{12} g_{32} h_{21} + \frac{1}{8} g_{21} h_{32} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{144} h_{43} i \omega_0 + \frac{1}{12} h_{32} \bar{g}_{21} + \frac{1}{24} h_{21} \bar{g}_{32} \right) w^4 \bar{w}^3 + \dots
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
A(H(w, \bar{w})) + F(H(w, \bar{w})) &= A(q)w + A(\bar{q})\bar{w} + w^2 \left(\frac{1}{2} B(q, q) + \frac{1}{2} A(h_{20}) \right) + \bar{w}^2 \left(\frac{1}{2} B(\bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
&\left. \frac{1}{2} A(h_{02}) \right) + w\bar{w} \left(B(q, \bar{q}) + A(h_{11}) \right) + w^3 \left(\frac{1}{6} C(q, q, q) + \frac{1}{2} B(h_{20}, q) + \frac{1}{6} A(h_{30}) \right) + w^2 \bar{w} \left(\frac{1}{2} C(\bar{q}, q, q) + \right. \\
&B(h_{11}, q) + \frac{1}{2} B(\bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{2} A(h_{21}) \left. \right) + w\bar{w}^2 \left(\frac{1}{2} C(q, \bar{q}, \bar{q}) + B(h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(q, h_{02}) + \frac{1}{2} A(h_{12}) \right) + \\
&\bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{6} A(h_{03}) \right) + w^4 \left(\frac{1}{24} D(q, q, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{20}, q, q) + \frac{1}{6} B(h_{30}, q) + \right. \\
&\left. \frac{1}{8} B(h_{20}, q, q) + \frac{1}{24} A(h_{40}) \right) + w^3 \bar{w} \left(\frac{1}{6} D(\bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, q, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} B(h_{21}, q) + \right. \\
&\left. \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{6} A(h_{31}) \right) + w^2 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, q, q) + C(\bar{q}, h_{11}, q) + \right. \\
&\left. \frac{1}{2} B(h_{12}, q) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{11}) + \frac{1}{4} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{4} B(h_{02}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(\bar{q}, h_{21}) + \frac{1}{4} A(h_{22}) \right) \\
&+ \bar{w}^4 \left(\frac{1}{24} D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(h_{03}, \bar{q}) + \frac{1}{8} B(h_{02}, h_{02}) + \frac{1}{24} A(h_{04}) \right) + w\bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{1}{2} C(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(q, h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(q, h_{03}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, h_{11}) + \frac{1}{6} A(h_{13}) \right) + \\
& w^5 \left(\frac{1}{120} E(q, q, q, q, q) + \frac{1}{12} D(h_{20}, q, q, q) + \frac{1}{12} C(h_{30}, q, q) + \frac{1}{8} C(h_{20}, h_{20}, q) + \frac{1}{24} B(h_{40}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} B(h_{20}, h_{30}) + \frac{1}{120} A(h_{50}) \right) + w^4 \bar{w} \left(\frac{1}{24} E(\bar{q}, q, q, q, q) + \frac{1}{6} D(h_{11}, q, q, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{20}, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} C(h_{21}, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{20}, q) + \frac{1}{6} C(\bar{q}, h_{30}, q) + \frac{1}{8} C(\bar{q}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{6} B(h_{31}, q) + \frac{1}{4} B(h_{20}, h_{21}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{6} B(h_{11}, h_{30}) + \frac{1}{24} B(\bar{q}, h_{40}) + \frac{1}{24} A(h_{41}) \right) + w^3 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{12} E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{12} D(h_{02}, q, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{4} C(h_{12}, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{11}, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{20}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{21}, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{4} B(h_{22}, q) + \frac{1}{4} B(h_{12}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{21}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{30}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{31}) + \frac{1}{12} A(h_{32}) \right) + \\
& w^2 \bar{w}^3 \left(\frac{1}{12} E(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} D(h_{20}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} D(q, h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} D(q, q, h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{21}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(q, h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{20}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(q, q, h_{03}) + \frac{1}{2} C(q, h_{02}, h_{11}) + \frac{1}{4} B(h_{22}, \bar{q}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{12}) + \frac{1}{6} B(q, h_{13}) + \frac{1}{12} B(h_{03}, h_{20}) + \frac{1}{4} B(h_{02}, h_{21}) + \frac{1}{12} A(h_{23}) \right) + w \bar{w}^4 \left(\frac{1}{24} E(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{6} D(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} D(q, h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{12}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{6} C(q, h_{03}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(h_{02}, h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{8} C(q, h_{02}, h_{02}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{6} B(h_{13}, \bar{q}) + \frac{1}{24} B(q, h_{04}) + \frac{1}{6} B(h_{03}, h_{11}) + \frac{1}{4} B(h_{02}, h_{12}) + \frac{1}{24} A(h_{14}) \right) + \bar{w}^5 \left(\frac{1}{120} E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} D(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(h_{03}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{8} C(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{24} B(h_{04}, \bar{q}) + \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{03}) + \frac{1}{120} A(h_{05}) \right) + \\
& w^6 \left(\frac{1}{720} K(q, q, q, q, q, q) + \frac{1}{48} E(h_{20}, q, q, q, q) + \frac{1}{36} D(h_{30}, q, q, q) + \frac{1}{16} D(h_{20}, h_{20}, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{48} C(h_{40}, q, q) + \frac{1}{12} C(h_{20}, h_{30}, q) + \frac{1}{48} C(h_{20}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{120} B(h_{50}, q) + \frac{1}{72} B(h_{30}, h_{30}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{48} B(h_{20}, h_{40}) + \frac{1}{720} A(h_{60}) \right) + w^5 \bar{w} \left(\frac{1}{120} K(\bar{q}, q, q, q, q, q) + \frac{1}{24} E(h_{11}, q, q, q, q) + \frac{1}{12} E(\bar{q}, h_{20}, q, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} D(h_{21}, q, q, q) + \frac{1}{4} D(h_{11}, h_{20}, q, q) + \frac{1}{12} D(\bar{q}, h_{30}, q, q) + \frac{1}{8} D(\bar{q}, h_{20}, h_{20}, q) + \frac{1}{12} C(h_{31}, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} C(h_{20}, h_{21}, q) + \frac{1}{6} C(h_{11}, h_{30}, q) + \frac{1}{24} C(\bar{q}, h_{40}, q) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, h_{20}, h_{30}) + \frac{1}{8} C(h_{11}, h_{20}, h_{20}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{24} B(h_{41}, q) + \frac{1}{12} B(h_{21}, h_{30}) + \frac{1}{12} B(h_{20}, h_{31}) + \frac{1}{24} B(h_{11}, h_{40}) + \frac{1}{120} B(\bar{q}, h_{50}) + \frac{1}{120} A(h_{51}) \right) + \\
& w^4 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{48} K(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q, q) + \frac{1}{48} E(h_{02}, q, q, q, q) + \frac{1}{6} E(\bar{q}, h_{11}, q, q, q) + \frac{1}{8} E(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} D(h_{12}, q, q, q) + \frac{1}{4} D(h_{11}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{8} D(h_{02}, h_{20}, q, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{21}, q, q) + \frac{1}{12} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, h_{20}, q) + \frac{1}{16} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{8} C(h_{22}, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{12}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{21}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{12} C(h_{02}, h_{30}, q) + \frac{1}{6} C(\bar{q}, h_{31}, q) + \frac{1}{16} C(h_{02}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{4} C(h_{11}, h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{4} C(\bar{q}, h_{20}, h_{21}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} C(\bar{q}, h_{11}, h_{30}) + \frac{1}{48} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{40}) + \frac{1}{8} B(h_{21}, h_{21}) + \frac{1}{8} B(h_{20}, h_{22}) + \frac{1}{12} B(h_{32}, q) + \frac{1}{12} B(h_{12}, h_{30}) + \\
& \frac{1}{6} B(h_{11}, h_{31}) + \frac{1}{48} B(h_{02}, h_{40}) + \frac{1}{24} B(\bar{q}, h_{41}) + \frac{1}{48} A(h_{42}) \Big) + w^3 \bar{w}^3 \left(\frac{1}{36} K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + \right. \\
& \frac{1}{12} E(\bar{q}, h_{02}, q, q, q) + \frac{1}{12} E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{4} E(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{36} D(h_{03}, q, q, q) + \frac{1}{4} D(h_{02}, h_{11}, q, q) + \\
& \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{12}, q, q) + \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{21}, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{20}) + \\
& \frac{1}{36} D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, h_{02}, h_{30}) + \frac{1}{12} C(h_{03}, h_{20}, q) + \frac{1}{12} C(h_{13}, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{12}, q) + \\
& \frac{1}{4} C(\bar{q}, h_{22}, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{21}, q) + \frac{1}{6} C(h_{11}, h_{11}, h_{11}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{4} C(\bar{q}, h_{12}, h_{20}) + \\
& \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{11}, h_{21}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{31}) + \frac{1}{12} B(h_{23}, q) + \frac{1}{12} B(h_{13}, h_{20}) + \frac{1}{4} B(h_{12}, h_{21}) + \frac{1}{4} B(h_{11}, h_{22}) + \\
& \frac{1}{36} B(h_{03}, h_{30}) + \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{31}) + \frac{1}{12} B(\bar{q}, h_{32}) + \frac{1}{36} A(h_{33}) \Big) + w^2 \bar{w}^4 \left(\frac{1}{48} K(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
& \frac{1}{48} E(h_{20}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{6} E(q, h_{11}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{8} E(q, q, h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} D(h_{21}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} D(h_{11}, h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \\
& \frac{1}{4} D(q, h_{12}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{8} D(h_{02}, h_{20}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} D(q, q, h_{03}, \bar{q}) + \frac{1}{2} D(q, h_{02}, h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{16} D(q, q, h_{02}, h_{02}) + \\
& \frac{1}{8} C(h_{22}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{6} C(q, h_{13}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(h_{03}, h_{20}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{21}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{11}, h_{11}) + \\
& \frac{1}{48} C(q, q, h_{04}) + \frac{1}{6} C(q, h_{03}, h_{11}) + \frac{1}{4} C(q, h_{02}, h_{12}) + \frac{1}{16} C(h_{02}, h_{02}, h_{20}) + \frac{1}{8} B(h_{12}, h_{12}) + \\
& \frac{1}{12} B(h_{23}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(h_{11}, h_{13}) + \frac{1}{24} B(q, h_{14}) + \frac{1}{48} B(h_{04}, h_{20}) + \frac{1}{12} B(h_{03}, h_{21}) + \frac{1}{8} B(h_{02}, h_{22}) + \\
& \left. \frac{1}{48} A(h_{24}) \right) + w \bar{w}^5 \left(\frac{1}{120} K(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{24} E(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} E(q, h_{02}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} D(h_{12}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} D(q, h_{03}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} D(h_{02}, h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{8} D(q, h_{02}, h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(h_{13}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{24} C(q, h_{04}, \bar{q}) + \\
& \frac{1}{6} C(h_{03}, h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(q, h_{02}, h_{03}) + \frac{1}{8} C(h_{02}, h_{02}, h_{11}) + \frac{1}{120} B(q, h_{05}) + \\
& \frac{1}{24} B(h_{14}, \bar{q}) + \frac{1}{24} B(h_{04}, h_{11}) + \frac{1}{12} B(h_{03}, h_{12}) + \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{13}) + \frac{1}{120} A(h_{15}) \Big) + \bar{w}^6 \left(\frac{1}{720} K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\
& \frac{1}{48} E(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{36} D(h_{03}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{16} D(h_{02}, h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{48} C(h_{04}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{12} C(h_{02}, h_{03}, \bar{q}) + \\
& \left. \frac{1}{48} C(h_{02}, h_{02}, h_{02}) + \frac{1}{120} B(h_{05}, \bar{q}) + \frac{1}{72} B(h_{03}, h_{03}) + \frac{1}{48} B(h_{02}, h_{04}) + \frac{1}{720} A(h_{06}) \right) + \\
& w^4 \bar{w}^3 \left(\frac{1}{144} L(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, q, q, q, q) + \frac{1}{48} K(\bar{q}, h_{02}, q, q, q, q) + \frac{1}{12} K(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, q, q, q) + \frac{1}{24} K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q, q) + \right. \\
& \frac{1}{8} E(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, q, q) + \frac{1}{144} E(h_{03}, q, q, q, q) + \frac{1}{12} E(h_{02}, h_{11}, q, q, q) + \frac{1}{12} E(\bar{q}, h_{12}, q, q, q) + \\
& \frac{1}{48} E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{4} E(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{8} E(\bar{q}, \bar{q}, h_{21}, q, q) + \frac{1}{4} E(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{20}, q) + \\
& \frac{1}{36} E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{30}, q) + \frac{1}{16} D(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{8} D(\bar{q}, h_{22}, q, q) + \frac{1}{36} D(h_{13}, q, q, q) + \frac{1}{4} D(h_{11}, h_{12}, q, q) + \\
& \frac{1}{24} D(h_{03}, h_{20}, q, q) + \frac{1}{8} D(h_{02}, h_{21}, q, q) + \frac{1}{6} D(h_{11}, h_{11}, h_{11}, q) + \frac{1}{4} D(h_{02}, h_{11}, h_{20}, q) + \frac{1}{12} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{31}, q) + \\
& \left. \frac{1}{12} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{30}) + \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, h_{21}, q) + \frac{1}{12} D(\bar{q}, h_{02}, h_{30}, q) + \frac{1}{8} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{21}) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, h_{20}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{144} D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{40}) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, h_{12}, h_{20}, q) + \frac{1}{48} C(\bar{q}, h_{02}, h_{40}) + \frac{1}{12} C(h_{02}, h_{11}, h_{30}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, h_{12}, h_{30}) + \\
& \frac{1}{4} C(h_{12}, h_{21}, q) + \frac{1}{4} C(h_{11}, h_{22}, q) + \frac{1}{36} C(h_{03}, h_{30}, q) + \frac{1}{12} C(h_{13}, h_{20}, q) + \frac{1}{48} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{41}) + \\
& \frac{1}{24} C(h_{23}, q, q) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, h_{32}, q) + \frac{1}{12} C(h_{02}, h_{31}, q) + \frac{1}{48} C(h_{03}, h_{20}, h_{20}) + \frac{1}{8} C(\bar{q}, h_{21}, h_{21}) + \\
& \frac{1}{4} C(h_{11}, h_{12}, h_{20}) + \frac{1}{4} C(h_{11}, h_{11}, h_{21}) + \frac{1}{8} C(h_{02}, h_{20}, h_{21}) + \frac{1}{6} C(\bar{q}, h_{11}, h_{31}) + \frac{1}{8} C(\bar{q}, h_{20}, h_{22}) + \\
& \frac{1}{8} B(h_{21}, h_{22}) + \frac{1}{24} B(h_{20}, h_{23}) + \frac{1}{36} B(h_{13}, h_{30}) + \frac{1}{12} B(h_{12}, h_{31}) + \frac{1}{12} B(h_{11}, h_{32}) + \frac{1}{144} B(h_{03}, h_{40}) + \\
& \frac{1}{48} B(h_{02}, h_{41}) + \frac{1}{36} B(h_{33}, q) + \frac{1}{48} B(\bar{q}, h_{42}) + \frac{1}{144} A(h_{43}) \Big).
\end{aligned}$$

Aplicando $H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}'$ e $F(H(w, \bar{w}))$ em (2.36), temos

$$\begin{cases} q i \omega_0 = A(q); \\ h_{20} = (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(q, q); \\ h_{11} = -A^{-1}(B(q, \bar{q})); \\ h_{30} = (3i\omega_0 I_n - A)^{-1} (C(q, q, q) + 3B(h_{20}, q)); \end{cases} \quad (2.37)$$

onde I_n é matriz identidade $n \times n$.

Obtemos um sistema singular para o termo h_{21}

$$(i\omega_0 I_n - A)h_{21} = C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}), \quad (2.38)$$

que possui solução se, e somente se,

$$\langle p, C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle p, C(\bar{q}, q, q) + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = \\ &= \langle p, C(\bar{q}, q, q) - 2B(-A^{-1}(B(q, \bar{q})), q) + B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

O primeiro coeficiente de Lyapunov, é dado por

$$l_1 = \frac{1}{2} \text{Reg}_{21}. \quad (2.40)$$

Podemos encontrar o valor de h_{21} resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I_n A & q \\ \bar{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

tal que $\langle p, h_{21} \rangle = 0$.

Lema 2.3.1 *O sistema (2.41) é não singular e se (ϑ, r) é solução, tal que $\langle p, \vartheta \rangle = 0$, ϑ é solução de (2.38).*

Demonstração (2.3.1): Escrevamos $\mathbb{R}^n = T^c \oplus T^{su}$, onde T^c e T^{su} são respectivamente autoespaço generalizado de A correspondente aos autovalores com parte real nula e autovalores com parte real não nula, ambos invariantes por A .

Pode-se provar que y definido em (2.34), é tal que $y \in T^{su}$ se, e somente se, $\langle p, \vartheta \rangle = 0$. Defina $v = C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20})$. Seja (ϑ, r) a solução da equação obtida a partir de (2.41). Equivalentemente,

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q = 0, \quad \langle p, \vartheta \rangle = 0. \quad (2.42)$$

Da segunda equação de (2.42) segue que $\vartheta \in T^{su}$ e conseqüentemente, $(i\omega_0 I_n - A)\vartheta \in T^{su}$. Portanto, $\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0$. Agora, do produto interno de p com o primeiro termo de (2.42), vem

$$\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q \rangle = 0 \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle + r \langle p, q \rangle = 0.$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0$, temos $r \langle p, q \rangle = 0 \Leftrightarrow r = 0$. Substituindo $r = 0$, na primeira equação de (2.42), temos que

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \alpha q; \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.43)$$

No entanto,

$$0 = \langle p, \vartheta \rangle = \langle p, \alpha q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle = \alpha,$$

que em (2.43), nos fornece $\vartheta = 0$. Portanto, $(\vartheta, r) = (0, 0)$. Logo, o sistema (2.41) é não singular. Seja agora (ϑ, r) solução de (2.41). Então, temos

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q = v, \quad \langle p, \vartheta \rangle = 0. \quad (2.44)$$

Da segunda equação de (2.44), segue que $\vartheta \in T^{su}$ e que

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta \in T^{su} \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0.$$

Fazendo o produto interno de p com a primeira equação de (2.44), temos que

$$\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q \rangle = \langle p, v \rangle \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle + r \langle p, q \rangle = \langle p, v \rangle.$$

Como

$$\langle p, v \rangle = 0, \quad \langle p, q \rangle = 1, \quad \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0,$$

segue que $r = 0$. Substituindo $r = 0$ na primeira equação de (2.44) obtemos

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta = v.$$

Logo, ϑ é solução de (2.38). □

De forma análoga, obteremos h_{32} e h_{43} . Os termos seguintes serão necessários para calcularmos o segundo coeficiente de Lyapunov.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{40} = (4i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(q, q, q, q) + 6C(h_{20}, q, q) + 4B(h_{30}, q) + 3B(h_{20}, h_{20}); \\ h_{31} = (2i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(\bar{q}, q, q, q) + 3C(h_{11}, q, q) + 3C(\bar{q}, h_{20}, q) + 3B(h_{21}, q) \\ \quad - 3g_{21}h_{20} + 3B(h_{11}, h_{20}) + B(\bar{q}, h_{30})); \\ h_{22} = -A^{-1}(D(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + C(h_{02}, q, q) + 4C(\bar{q}, h_{11}, q) + 2B(h_{12}, q) + 2B(h_{11}, h_{11}) \\ \quad + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + B(h_{02}, h_{20}) + 2B(\bar{q}, h_{21}) - 2h_{11}(g_{21} + \bar{g}_{21})). \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Para $l_1 = 0$, devemos ter $g_{21} + \bar{g}_{21} = 0$, donde o último termo de h_{22} se torna nulo.

O termo singular associado a h_{32} , é dado por

$$\begin{aligned} (i\omega_0 I_n - A) h_{32} &= E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + D(h_{02}, q, q, q) + 6D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + 3C(h_{12}, q, q) \\ &+ 6C(h_{11}, h_{11}, q) + 3D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + 3C(h_{02}, h_{20}, q) + 6C(\bar{q}, h_{21}, q) \\ &+ 3B(h_{22}, q) + 6C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + 3B(h_{12}, h_{20}) - 6g_{21}h_{21} + 6B(h_{11}, h_{21}) \\ &+ C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + B(h_{02}, h_{30}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) - 3h_{21}\bar{g}_{21} - g_{32}q. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} H_{32} &= E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + D(h_{02}, q, q, q) + 6D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + 3C(h_{12}, q, q) \\ &+ 6C(h_{11}, h_{11}, q) + 3D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + 3C(h_{02}, h_{20}, q) + 6C(\bar{q}, h_{21}, q) \\ &+ 3B(h_{22}, q) + 6C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + 3B(h_{12}, h_{20}) - 6g_{21}h_{21} + 6B(h_{11}, h_{21}) \\ &+ C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + B(h_{02}, h_{30}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) - 3h_{21}\bar{g}_{21}, \end{aligned}$$

podemos reescrever

$$(i\omega_0 I_n - A) h_{32} = H_{32} - g_{32}q,$$

que possui solução se, e somente se,

$$\langle p, H_{32} - g_{32}q \rangle = 0$$

$$g_{32} = \langle p, H_{32} \rangle \quad (2.46)$$

sendo que os termos $-6g_{21}h_{21}$ e $-3h_{21}\bar{g}_{21}$ não entram na última equação, pois, $\langle p, h_{21} \rangle = 0$.

O segundo coeficiente de Lyapunov, é definido por

$$l_2 = \frac{1}{12} \operatorname{Re} g_{32}. \quad (2.47)$$

O vetor h_{32} pode ser encontrado resolvendo-se o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I_n & A & q \\ \bar{p} & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{32} \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{32} - g_{32}q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

tal que $\langle p, h_{32} \rangle = 0$.

Os termos seguintes, serão necessários para calcularmos o terceiro coeficiente de Lyapunov.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{41} = (3i\omega_0 I_n - A)^{-1} (E(\bar{q}, q, q, q, q) + 4D(h_{11}, q, q, q) + 6D(\bar{q}, h_{20}, q, q) + 6C(h_{21}, q, q) \\ + 12C(h_{11}, h_{20}, q) + 4C(\bar{q}, h_{30}, q) + 3C(\bar{q}, h_{20}, h_{20}) + 4B(h_{31}, q) + 6B(h_{20}, h_{21}) \\ + 4B(h_{11}, h_{30}) + B(\bar{q}, h_{40})) - 6g_{21}h_{30}; \\ h_{42} = (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} (K(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q, q) + E(h_{02}, q, q, q, q) + 8E(\bar{q}, h_{11}, q, q, q) \\ + 6E(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q, q) + 4D(h_{12}, q, q, q) + 12D(h_{11}, h_{11}, q, q) + 6D(h_{02}, h_{20}, q, q) \\ + 12D(\bar{q}, h_{21}, q, q) + 24D(\bar{q}, h_{11}, h_{20}, q) + 4D(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}, q) + 3D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{20}) \\ + 24C(h_{11}, h_{21}, q) + 6C(h_{22}, q, q) + 4C(h_{02}, h_{30}, q) + 8C(\bar{q}, h_{31}, q) + 12C(\bar{q}, h_{20}, h_{21}) \\ + 12C(h_{12}, h_{20}, q) + 3C(h_{02}, h_{20}, h_{20}) + 12C(h_{11}, h_{11}, h_{20}) + 8C(\bar{q}, h_{11}, h_{30}) \\ + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{40}) + 6B(h_{20}, h_{22}) + 4B(h_{12}, h_{30}) + 4B(h_{32}, q) + 6B(h_{21}, h_{21}) + 2B(\bar{q}, h_{41}) \\ + B(h_{02}, h_{40}) + 8B(h_{11}, h_{31}) - 12g_{21}h_{31} - 4g_{32}h_{20} - 4h_{31}\bar{g}_{21}); \\ h_{33} = A^{-1} (K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + 3E(\bar{q}, h_{02}, q, q, q) + 9E(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, q, q) + 3E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) \\ + 9D(h_{02}, h_{11}, q, q) + 9D(\bar{q}, h_{12}, q, q) + D(h_{03}, q, q, q) + 18D(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, q) \\ + 9D(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, q) + 9D(\bar{q}, \bar{q}, h_{21}, q) + 9D(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{20}) + D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{30}) \\ + 18C(h_{11}, h_{12}, q) + 9C(h_{02}, h_{21}, q) + 3C(h_{03}, h_{20}, q) + 6C(h_{11}, h_{11}, h_{11}) + 9C(\bar{q}, h_{22}, q) \\ + 9C(h_{02}, h_{11}, h_{20}) + 9C(\bar{q}, h_{12}, h_{20}) + 18C(\bar{q}, h_{11}, h_{21}) + 3C(h_{13}, q, q) + 3C(\bar{q}, \bar{q}, h_{31}) \\ + 3C(\bar{q}, h_{02}, h_{30}) + 3B(h_{13}, h_{20}) + 3B(h_{23}, q) + 9B(h_{12}, h_{21}) + 9B(h_{11}, h_{22}) \\ + B(h_{03}, h_{30}) + 3B(h_{02}, h_{31}) + 3B(\bar{q}, h_{32}) - 9h_{22}(\bar{g}_{21} - g_{21}) - 3h_{11}(\bar{g}_{32} - g_{32}). \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Para $l_1 = l_2 = 0$ devemos ter $g_{21} - \bar{g}_{21} = 0$ e $\bar{g}_{32} - g_{32} = 0$, donde o último termo de h_{33} se torna nulo. O termo singular associado a h_{43} , é dado por

$$\begin{aligned}
(i\omega_0 I_n - A) h_{43} = & L(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, q, q, q, q) + 3K(\bar{q}, h_{02}, q, q, q, q) + 12K(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, q, q, q) \\
& + 6K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q, q) + E(h_{03}, q, q, q, q) + 12E(\bar{q}, h_{12}, q, q, q) \\
& + 36E(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, q, q) + 12E(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, q, q) + 18E(\bar{q}, \bar{q}, h_{21}, q, q) \\
& + 12E(q, q, q, h_{02}, h_{11}) + 36E(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{20}, q) + 4E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{30}, q) \\
& + 6E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{20}) + 36D(h_{11}, h_{12}, q, q) + 36D(h_{02}, h_{11}, h_{20}, q) \\
& + 6D(h_{03}, h_{20}, q, q) + 24D(h_{11}, h_{11}, h_{11}, q) + 36D(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, h_{20}) \\
& + 12D(\bar{q}, h_{02}, h_{30}, q) + 36D(\bar{q}, h_{12}, h_{20}, q) + 4D(h_{13}, q, q, q) \\
& + 18D(\bar{q}, h_{22}, q, q) + 72D(\bar{q}, h_{11}, h_{21}, q) + 12D(\bar{q}, \bar{q}, h_{31}, q) \\
& + D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{40}) + 9D(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, h_{20}) + 18D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{21}) \\
& + 12D(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{30}) + 18D(h_{02}, h_{21}, q, q) + 4C(h_{03}, h_{30}, q) \\
& + 12C(h_{13}, h_{20}, q) + 36C(h_{12}, h_{21}, q) + 36C(h_{11}, h_{22}, q) \\
& + 312C(h_{02}, h_{11}, h_{30}) + 12C(\bar{q}, h_{12}, h_{30}) + 12C(h_{02}, h_{31}, q) \\
& + 3C(h_{03}, h_{20}, h_{20}) + 18C(\bar{q}, h_{21}, h_{21}) + 6C(h_{23}, q, q) + 3C(\bar{q}, h_{02}, h_{40}) \\
& + 24C(\bar{q}, h_{11}, h_{31}) + 36C(h_{11}, h_{12}, h_{20}) + 36C(h_{11}, h_{11}, h_{21}) \\
& + 18C(h_{02}, h_{20}, h_{21}) + 12C(\bar{q}, h_{32}, q) + 18C(\bar{q}, h_{20}, h_{22}) + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{41}) \\
& + 4B(h_{33}, q) + 18B(h_{21}, h_{22}) + 6B(h_{20}, h_{23}) + 4B(h_{13}, h_{30}) + 3B(\bar{q}, h_{42}) \\
& + 12B(h_{12}, h_{31}) + 12B(h_{11}, h_{32}) + B(h_{03}, h_{40}) + 3B(h_{02}h_{41}) \\
& - 12g_{32}h_{21} - 18g_{21}h_{32} - 12h_{32}\bar{g}_{21} - 6h_{21}\bar{g}_{32} - g_{43}q.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
H_{43} = & L(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, q, q, q, q) + 3K(\bar{q}, h_{02}, q, q, q, q) + E(h_{03}, q, q, q, q) + 2K(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, q, q, q) \\
& + 12E(\bar{q}, h_{12}, q, q, q) + 4D(h_{13}, q, q, q) + 36E(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, q, q) + 36D(h_{11}, h_{12}, q, q) \\
& + 6K(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q, q) + 12E(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, q, q) + 6D(h_{03}, h_{20}, q, q) + 18E(\bar{q}, \bar{q}, h_{21}, q, q) \\
& + 18D(h_{02}, h_{21}, q, q) + 18D(\bar{q}, h_{22}, q, q) + 6C(h_{23}, q, q) + 24D(h_{11}, h_{11}, h_{11}, q) \\
& + 36E(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{20}, q) + 36D(h_{02}, h_{11}, h_{20}, q) + 36D(\bar{q}, h_{12}, h_{20}, q) + 12C(h_{13}, h_{20}, q) \\
& + 2D(\bar{q}, h_{11}, h_{21}, q) + 36C(h_{12}, h_{21}, q) + 36C(h_{11}, h_{22}, q) + 4E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{30}, q) \\
& + 12D(\bar{q}, h_{02}, h_{30}, q) + 4C(h_{03}, h_{30}, q) + 12D(\bar{q}, \bar{q}, h_{31}, q) + 12C(h_{02}, h_{31}, q) + 4B(h_{33}, q) \\
& + 12C(\bar{q}, h_{32}, q) + 6E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{20}) + 9D(\bar{q}, h_{02}, h_{20}, h_{20}) + 3C(h_{03}, h_{20}, h_{20}) \\
& + 18C(\bar{q}, h_{21}, h_{21}) + 12E(q, q, q, h_{02}, h_{11}) + 36D(\bar{q}, h_{11}, h_{11}, h_{20}) + 36C(h_{11}, h_{12}, h_{20}) \\
& + 36C(h_{11}, h_{11}, h_{21}) + 18D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, h_{21}) + 18C(h_{02}, h_{20}, h_{21}) + 18C(\bar{q}, h_{20}, h_{22}) \\
& + 18B(h_{21}, h_{22}) + 6B(h_{20}, h_{23}) + 12D(\bar{q}, \bar{q}, h_{11}, h_{30}) + 312C(h_{02}, h_{11}, h_{30}) + 12C(\bar{q}, h_{12}, h_{30}) \\
& + 4B(h_{13}, h_{30}) + 24C(\bar{q}, h_{11}, h_{31}) + 12B(h_{12}, h_{31}) + 12B(h_{11}, h_{32}) + D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, h_{40}) \\
& + 3C(\bar{q}, h_{02}, h_{40}) + B(h_{03}, h_{40}) + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{41}) + 3B(h_{02}h_{41}) + 3B(\bar{q}, h_{42}) \\
& - 6(2h_{32}\bar{g}_{21} + h_{21}\bar{g}_{32} + 2g_{32}h_{21} + 3g_{21}h_{32})
\end{aligned}$$

podemos reescrever

$$(i\omega_0 I_n - A) h_{43} = H_{43} - g_{43} q,$$

que possui solução se, e somente se,

$$\langle p, H_{43} - g_{43} q \rangle = 0,$$

sendo que o termo $-6(2h_{32}\bar{g}_{21} + h_{21}\bar{g}_{32} + 2g_{32}h_{21} + 3g_{21}h_{32})$ não entra na última equação pois, $\langle p, h_{21} \rangle = 0$ e $\langle p, h_{32} \rangle = 0$.

O terceiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$l_3 = \frac{1}{144} \operatorname{Re} g_{43},$$

onde $g_{43} = \langle p, H_{43} \rangle$.

□

Consideremos, agora, uma família de sistemas de equações diferenciais a um parâmetro

$$\dot{x} = A(\xi)x + F(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.50)$$

onde $F(x, \xi) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ é uma função suave de x , com sua expansão de Taylor iniciando com pelo menos termos quadráticos, e dependendo suavemente de ξ e $A(\xi)$ corresponde à parte linear do sistema com um par de autovalores complexos

$$\lambda_1(\xi) = \lambda(\xi), \quad \lambda_2(\xi) = \bar{\lambda}(\xi),$$

onde

$$\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi),$$

satisfazendo a condição de Hopf para $\xi = 0$

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

O próximo lema nos mostra como calcular $\gamma'(0)$ em termos de p e q .

Lema 2.3.2 (Condição de transversalidade) *Considere o sistema (2.50) cuja matriz Jacobiana $A(\xi)$ possui um par de autovalores imaginários puros para $\xi = 0$, $\lambda_{1,2} = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Então,*

$$\gamma'(0) = \operatorname{Re}\langle p, A'(0)q \rangle,$$

onde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfazem

$$A(0)q = i\omega_0 q, \quad A^\top(0)p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q \rangle = 1.$$

Demonstração 2.3.2: Derivando ambos os membros da equação

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi),$$

com relação a ξ obtemos

$$A'(\xi)q(\xi) + A(\xi)q'(\xi) = \lambda'(\xi)q(\xi) + \lambda(\xi)q'(\xi).$$

Aplicando, agora, o produto escalar por p em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned}\langle p, A'q + Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q + \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle p, Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q \rangle + \langle p, \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle A^\top p, q' \rangle &= \lambda' \langle p, q \rangle + \lambda \langle p, q' \rangle.\end{aligned}$$

Para $\xi = 0$, $A^\top p = -i\omega_0 p$, portanto

$$\begin{aligned}\langle p, A'(0)q \rangle + i\omega_0 \langle p, q' \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle + i\omega_0 \langle p, q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'(0)q \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle,\end{aligned}$$

e finalmente, como $\langle p, q \rangle = 1$,

$$\langle p, A'(0)q \rangle = \gamma'(0) + i\omega'(0).$$

□

Lema 2.3.3 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\xi) + i\omega(\xi))w + c_1(\xi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\text{Re } c_1(0) \neq 0$. Então, a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \quad (2.51)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro, $s = \text{sign} \text{Re } c_1(0) = \pm 1$.

Demonstração 2.3.3: Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\xi)t$, que preserva a direção, pois $\omega(\xi) > 0$ para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{d\tau} &= \frac{\gamma(\xi) + i\omega(\xi)}{\omega(\xi)}w + \frac{c_1(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4), \\ \Rightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),\end{aligned}$$

onde

$$\chi = \chi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\omega(\xi)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro, porque

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de ξ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau,$$

com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $l_1(\chi) = \text{Re } d_1(\chi) - \chi e_1(\chi)$ é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (2.52)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots, \\ \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2)[(\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots] \\ &= (\chi + i)w + [l_1(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 \dots \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re } d_1 - \chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + \dots \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re } d_1 + i \text{Im } d_1]w|w|^2 + \dots \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \dots \end{aligned}$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}},$$

que é possível pois $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ e, portanto, $l_1(0) \neq 0$. A equação toma então a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} + l_1 \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \right|^2 + \dots, \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4) = (\chi + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \end{aligned}$$

com $s = \text{sinal } l_1(0) = \text{sinal } \text{Re } c_1(0)$.

□

Definição 2.3.2 A função $l_1(\chi)$ é chamada, de **primeiro coeficiente de Lyapunov**.

Observação 2.3.1 O valor de $l_1(0)$ depende das normas dos autovetores q e p , enquanto que seu sinal é invariante pela escolha de q , p , obviamente considerando a normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

Note que se a equação (2.51) com sinal $s = -1$ for escrita em sua forma real, ela coincidirá com o sistema (2.13).

Definição 2.3.3 Um ponto de equilíbrio (x_0, ξ_0) do sistema

$$\dot{x} = f(x, \xi)$$

com f suave $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$, é chamado **ponto de Hopf** se a matriz Jacobiana $A(x_0, \xi_0)$ possui um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, e não admite outros autovalores com partes reais nulas.

Definição 2.3.4 Um ponto de Hopf (x_0, ξ_0) é chamado **transversal** se os autovalores complexos dependentes do parâmetro ξ interceptarem o eixo imaginário com derivadas não nulas quando $\xi = \xi_0$.

Podemos agora resumir os resultados obtidos no seguinte teorema.

Teorema 2.3.2 Qualquer sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.53)$$

com f suave, tendo para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $x = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi)$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo as seguintes condições

(1) $l_1(0) \neq 0$ (condição de não degenerescência),

(2) $\gamma'(0) \neq 0$ (condição de transversalidade),

por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa:

$$\dot{z} = (\chi + i)z + sz|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4),$$

com $s = \text{sinal } l_1(0) = \text{sinal } \text{Re } c_1(0)$.

Se estas condições forem satisfeitas, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 1, para $\xi = 0$.

Lema 2.3.4 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\xi) + i\omega(\xi))w + c_1(\xi)w|w|^2 + c_2(\xi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\text{Re } c_1(0) = 0$ e $\text{Re } c_2(0) \neq 0$. Então, a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + \zeta u|u|^2 + s u|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6), \quad (2.54)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro,

$$\zeta = \frac{d_1(0)}{\sqrt{|\text{Re } c_2(0)|}} \text{ e } s = \text{sinal } \text{Re } c_2(0) = \pm 1.$$

Demonstração 2.3.4: Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\xi)t$, que preserva a direção, pois $\omega(\xi) > 0$ para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{\gamma(\xi) + i\omega(\xi)}{\omega(\xi)}w + \frac{c_1(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^2 + \frac{c_2(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \\ \Rightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \end{aligned}$$

onde

$$\chi = \chi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\omega(\xi)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}, \quad d_2 = \frac{c_2(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro porque

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de ξ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4)d\tau$$

com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$ e $e_2(\chi) = \text{Im } d_2(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $\eta(\chi) = -\chi(\chi)e_1(\chi)$, $l_2(\chi) = \text{Re } d_2(\chi) + \chi(\chi)(e_1(\chi)^2 - e_2(\chi))$, é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)} = 0, \quad l_2(0) = \frac{\text{Re } c_2(0)}{\omega(0)}. \quad (2.55)$$

De fato,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4)d\tau} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 + \dots,$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)w|w|^4) [(\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 \dots] \\ &= (\chi + i)w + [\eta(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 + [l_2(\chi) + e_1(\chi)\eta + e_2(\chi)(\chi + i)]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + [-\chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + [\text{Re } d_2 + \chi e_1^2 - \chi e_2 - \chi e_1^2 + \chi e_2 + i e_2]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + i \text{Im } d_1 w|w|^2 + [\text{Re } d_2 + i \text{Im } d_2]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + \dots \end{aligned}$$

já que neste caso $\text{Re } d_1 = 0$, $d_1 = i \text{Im } d_1$. Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2(\chi)|}},$$

que é possível pois $\text{Re } c_2(0) \neq 0$ e, portanto, $l_2(0) \neq 0$. A equação toma então a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{|l_2|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} + d_1 \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \left| \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \right|^2 + l_2 \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \left| \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \right|^4 \dots, \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{d_1(\chi)}{\sqrt{|l_2(\chi)|}} u|u|^2 + \frac{l_2(\chi)}{|l_2(\chi)|} u|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6) \\ &= (\chi + i)u + \zeta u|u|^2 + su|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6), \end{aligned}$$

com $s = \text{sinal } l_2(0) = \text{sinal Re } c_2(0)$.

□

Definição 2.3.5 Um *ponto de Hopf de codimensão 2* é um ponto de Hopf onde $l_1(\xi)$ se anula.

Definição 2.3.6 Um ponto de Hopf de codimensão 2 é chamado **transversal** se $\gamma(0) = 0$ e $l_1(0) = 0$ se interceptam transversalmente, onde $\gamma = \gamma(\xi)$ é a parte real dos autovalores críticos.

Teorema 2.3.3 Suponha o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.56)$$

com f suave, tendo para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $x = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo as seguintes condições de genericidade

- (1) $l_1(0) = 0$, onde $l_1(\xi)$ é o primeiro coeficiente de Lyapunov;
- (2) $l_2(0) \neq 0$, onde $l_2(\xi)$ é o segundo coeficiente de Lyapunov;
- (3) a função $\xi \rightarrow (\gamma(\xi), l_1(\xi))^T$ é regular em $\xi = 0$.

Então, por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros e do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa:

$$\dot{z} = (\chi + i)z + \zeta z|z|^2 + sz|z|^4 + \mathcal{O}(|z|^6),$$

com $s = \text{sinal } l_2(0) = \text{sinal Re } c_2(0)$.

Se estas condições forem satisfeitas, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 2 na origem quando $\xi = 0$.

Lema 2.3.5 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\xi) + i\omega(\xi))w + c_1(\xi)w|w|^2 + c_2(\xi)w|w|^4 + c_3(\xi)w|w|^6 + \mathcal{O}(|w|^8),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\operatorname{Re} c_1(0) = 0$, $\operatorname{Re} c_2(0) = 0$ e $\operatorname{Re} c_3(0) \neq 0$.

Então, a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + \sigma u|u|^2 + \nu u|u|^4 + s u|u|^6 + \mathcal{O}(|u|^8), \quad (2.57)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro,

$$\sigma = \frac{d_1(0)}{\sqrt[3]{|\operatorname{Re} c_3(0)|}}, \quad \nu = \frac{d_2(0)}{\sqrt{|\operatorname{Re} c_3(0)|}}, \quad s = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_3(0) = \pm 1.$$

Demonstração 2.3.5: Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\xi)t$, que preserva a direção, pois $\omega(\xi) > 0$ para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{\gamma(\xi) + i\omega(\xi)}{\omega(\xi)}w + \frac{c_1(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^2 + \frac{c_2(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^4 + \frac{c_3(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^6 + \mathcal{O}(|w|^8), \\ \Rightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + d_3(\chi)w|w|^6 + \mathcal{O}(|w|^8), \end{aligned}$$

onde

$$\chi = \chi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\omega(\xi)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}, \quad d_2 = \frac{c_2(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}, \quad d_3 = \frac{c_3(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro porque

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de ξ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4 + e_3(\chi)|w|^6)d\tau,$$

com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$, $e_2(\chi) = \text{Im } d_2(\chi)$, $e_3 = \text{Im } d_3(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + \nu(\chi)w|w|^4 + l_3(\chi)w|w|^6 + \mathcal{O}(|w|^8),$$

onde

$$\begin{aligned}\eta(\chi) &= -\chi e_1(\chi), \quad \nu(\chi) = \chi(\chi)(e_1(\chi)^2 - e_2(\chi)), \\ l_3(\chi) &= \text{Re } d_3 + \chi(\chi)(e_1(\chi)(2e_2(\chi) - e_1(\chi)^2) - e_3(\chi)),\end{aligned}$$

é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)} = 0, \quad l_2(0) = \frac{\text{Re } c_2(0)}{\omega(0)} = 0, \quad l_3(0) = \frac{\text{Re } c_3(0)}{\omega(0)}. \quad (2.58)$$

De fato,

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4 + e_3(\chi)|w|^6)d\tau} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + \nu(\chi)w|w|^4 + l_3(\chi)w|w|^6 \dots,$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4 + e_3(\chi)|w|^6)[(\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + \nu(\chi)w|w|^4 \\ &\quad + l_3(\chi)w|w|^6 \dots] \\ &= (\chi + i)w + [\eta(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 + [\nu(\chi) + e_1(\chi)\eta + e_2(\chi)(\chi + i)]w|w|^4 \\ &\quad + [l_3(\chi) + e_1(\chi)\nu(\chi) + e_2(\chi)\eta + e_3(\chi)(\chi + i)]w|w|^6 \dots \\ &= (\chi + i)w + [-\chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + [\chi e_1^2 - \chi e_2 - \chi e_1^2 + \chi e_2 + i e_2]w|w|^4 \\ &\quad + [\text{Re } d_3 - \chi e_1^3 + 2\chi e_1 e_2 - \chi e_3 + \chi e_1^3 - \chi e_1 e_2 - \chi e_1 e_2 + \chi e_3 + i e_3]w|w|^6 \dots \\ &= (\chi + i)w + i \text{Im } d_1 w|w|^2 + i \text{Im } d_2 w|w|^4 + [\text{Re } d_3 + i \text{Im } d_3]w|w|^6 + \dots \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + d_3(\chi)w|w|^6 + \dots\end{aligned}$$

já que $\text{Re } d_1 = \text{Re } d_2 = 0$, $i \text{Im } d_1 = d_1$ e $i \text{Im } d_2 = d_2$. Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3(\chi)|}},$$

que é possível pois $\text{Re } c_3(0) \neq 0$ e, portanto, $l_3(0) \neq 0$. A equação toma então a forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[6]{|l_3|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} + d_1 \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \left| \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \right|^2 + d_2 \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \left| \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \right|^4 + l_3 \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \left| \frac{u}{\sqrt[6]{|l_3|}} \right|^6 \dots, \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{d_1(\chi)}{\sqrt[3]{|l_3(\chi)|}} u|u|^2 + \frac{d_2(\chi)}{\sqrt{|l_3(\chi)|}} u|u|^4 + \frac{l_3(\chi)}{|l_3(\chi)|} u|u|^6 + \mathcal{O}(|u|^8) \\ &= (\chi + i)u + \sigma u|u|^2 + \nu u|u|^4 + s u|u|^6 + \mathcal{O}(|u|^8),\end{aligned}$$

com $s = \text{sinal } l_3(0) = \text{sinal Re } c_3(0)$.

□

Definição 2.3.7 Um *ponto de Hopf de codimensão 3* é um ponto de Hopf de codimensão 2 onde $l_2(\mu)$ se anula.

Definição 2.3.8 Um ponto de Hopf de codimensão 3 é chamado **transversal** se $\gamma(0) = 0$, $l_1(0) = 0$ e $l_2(0) = 0$ se interceptam transversalmente, onde $\gamma = \gamma(\xi)$ é a parte real dos autovalores críticos.

Teorema 2.3.4 Suponha o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.59)$$

com f suave, tendo para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $x = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo as seguintes condições

- (1) $l_1(0) = l_2(0) = 0$, onde $l_1(\xi)$ e $l_2(\xi)$ são respectivamente o primeiro e o segundo coeficientes de Lyapunov;
- (2) $l_3(0) \neq 0$, onde $l_3(\xi)$ é o terceiro coeficiente de Lyapunov;
- (3) a função $\xi \rightarrow (\gamma(\xi), l_1(\xi), l_2(\xi))^T$ é regular em $\xi = 0$.

Então, por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros e do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa:

$$\dot{z} = (\chi + i)z + \sigma z|z|^2 + \nu z|z|^4 + s z|z|^6 + \mathcal{O}(|z|^8),$$

com $s = \text{sinal } l_3(0) = \text{sinal Re } c_3(0)$.

Se estas condições forem satisfeitas, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 3 na origem, para $\xi = 0$.

2.4 Diagramas de bifurcação da forma normal

O sistema (2.51) com $s = -1$, escrito sem o termo $\mathcal{O}(|u|^4)$ em coordenadas polares (ρ, φ) , onde $u = \rho e^{i\varphi}$, fica sob a forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\chi - \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2.60)$$

O sistema (2.60) é desacoplado. A segunda equação descreve a rotação com velocidade angular constante. O equilíbrio trivial $\rho = 0$ da primeira equação corresponde somente ao equilíbrio $w = 0$ do sistema truncado.

Os valores de χ que anulam a expressão $\chi - \rho^2$, estão sobre a parábola

$$\chi - \rho^2 = 0, \quad \rho \geq 0.$$

Veja Figura 2.5.

Na região onde $\chi < 0$, o sistema possui um ponto de equilíbrio estável e nenhum ciclo limite. Quando chegamos em $\chi = 0$ no sentido horário, o equilíbrio continua estável. Quando atravessamos o arco de parábola, o equilíbrio continua atrator, mas atrai de forma mais lenta. Para valores de $\chi > 0$ bastante próximos ao arco da parábola, temos o surgimento de um ciclo limite estável em torno do equilíbrio repulsor.

O caso $s = 1$ em (2.51) é tratado de forma similar ou pode ser reduzido ao estudo a partir de uma transformação $(w, \chi, t) \rightarrow (\bar{w}, \chi, -t)$.

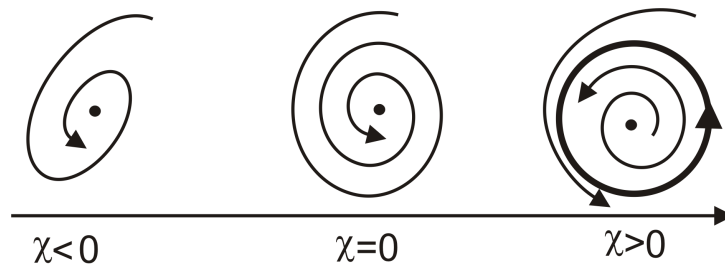


Figura 2.5: Diagrama de bifurcação de (2.60).

O sistema (2.54) com $s = -1$, escrito sem o termo $\mathcal{O}(|u|^6)$ em coordenadas polares (ρ, φ) , onde $u = \rho e^{i\varphi}$, fica sob a forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\chi + \zeta\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (2.61)$$

Uma solução nula da primeira equação de (2.61) satisfaz

$$\chi + \zeta\rho^2 - \rho^4 = 0, \quad (2.62)$$

e descreve um ciclo limite. A equação (2.62), pode ter nenhuma, uma ou duas soluções positivas (ciclos). As soluções são triviais ao longo da reta

$$H = \{(\chi, \zeta) : \chi = 0\}$$

que colide com o arco de parábola, dado por

$$T = \{(\chi, \zeta) : \zeta^2 + 4\chi = 0, \zeta > 0\}$$

e desaparece.

A estabilidade dos ciclos também é claramente detectada a partir da primeira equação de (2.61).

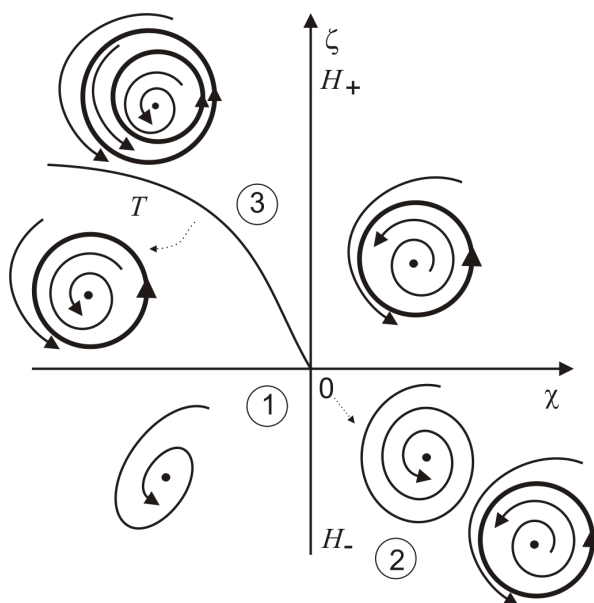


Figura 2.6: Diagrama de bifurcação de (2.61).

O diagrama de bifurcação de (2.61) está retratado na Figura (2.6). O eixo H corresponde às bifurcações de Hopf. Ao longo deste eixo, o equilíbrio possui autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i$. O equilíbrio é estável para $\chi < 0$ e instável para $\chi > 0$. O primeiro coeficiente de Lyapunov é $l_1(\chi) = \zeta$. Portanto, a bifurcação de Hopf no ponto $\chi = \zeta = 0$, separa o

eixo H em dois ramos, H_- e H_+ correspondentes às bifurcações de Hopf com coeficientes de Lyapunov negativos e positivos, respectivamente.

Um ciclo limite estável surge em torno do equilíbrio, se cruzarmos H_- da esquerda para a direita, enquanto um instável surge se cruzamos H_+ na direção oposta. Os ciclos estável e instável colidem na curva T , dando origem a um ciclo semi-estável. As curvas dividem o plano de parâmetros em três regiões (veja Figura 2.6).

Para melhor entendimento do diagrama de bifurcação, faremos um “passeio” no plano de parâmetros em torno do ponto de equilíbrio no sentido anti-horário, começando pela região **1**, onde o sistema possui um ponto de equilíbrio e nenhum ciclo. Passar da região **1** para a região **2** por H_- , implica no aparecimento de um único ciclo limite estável que “sobrevive” quando passamos da região **2** para a região **3**. Ao cruzarmos o eixo H por H_+ , surge um ciclo instável extra incidente ao primeiro, enquanto o equilíbrio recobra a estabilidade. Dois ciclos de estabilidades opostas coexistem na região **3**, colidem na curva T e desaparecem restando um único equilíbrio estável, completando o ciclo na região **1**.

O caso $s = 1$ em (2.54) é tratado de forma similar ou pode ser reduzido ao estudo a partir de uma transformação $(w, \chi, t) \rightarrow (\bar{w}, \chi, -t)$.

O sistema (2.57) com $s = 1$, escrito sem o termo $\mathcal{O}(|u|^8)$ em coordenadas polares (ρ, φ) , onde $w = \rho e^{i\varphi}$, fica sob a forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\chi + \sigma\rho^2 + v\rho^4 + \rho^6), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{cases} \quad (2.63)$$

Uma solução nula da primeira equação de (2.63) satisfaz

$$\chi + \sigma\rho^2 + v\rho^4 + \rho^6 = 0.$$

Fazendo $\rho^2 = r$, temos

$$\begin{cases} \chi + \sigma r + vr^2 + r^3 &= 0, \\ \sigma + 2vr + 3r^2 &= 0, \\ r &\geq 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Seja T o conjunto de pontos (v, ϑ, χ) para os quais existe um r tal que v, ϑ, χ, r satisfaz

(2.64). O sistema (2.64) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \chi = r^2(v + 2r), \\ \sigma = -r(2v + 3r), \\ r \geq 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

Estas equações tornam-se mais cômodas se calcularmos $T \cap \{v = c \text{ (constante)}\}$ quando tomamos valores diferentes de $v = c$. Delas obtemos os seguintes resultados

a) $T \cap v = c$, para $c > 0$. Obtemos o arco de parábola que está indicado na Figura 2.7.

b) $T \cap v = c$, para $c = 0$. Neste caso obtemos:

$T \cap \{v = 0\} = \{(v, \sigma, \chi) | v = 0, \chi > 0, 27\chi^2 = -4\sigma^3\}$, que está ilustrada na Figura 2.8.

c) $T \cap v = c$, para $c < 0$. Obtemos uma curva com uma cúspide em um ponto que está indicado na Figura 2.9. Perto da origem, esta curva possui novamente a aparência de parte de uma parábola.

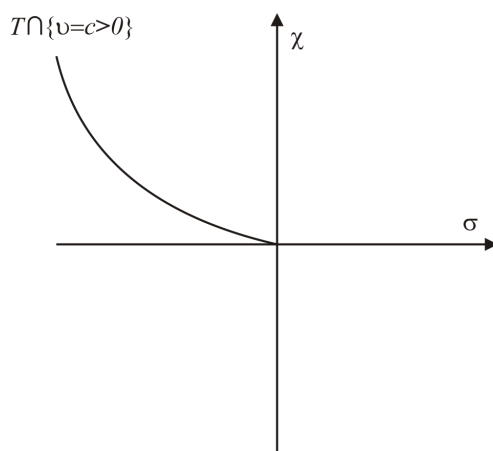


Figura 2.7: $T \cap \{v = c > 0\}$.

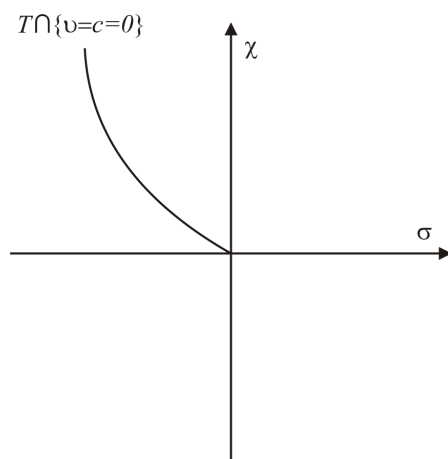


Figura 2.8: $T \cap \{v = c = 0\}$.

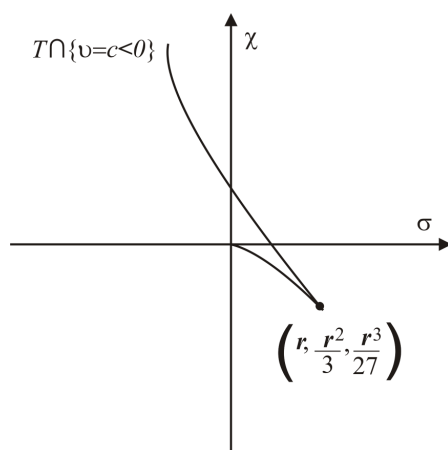


Figura 2.9: $T \cap \{v = c < 0\}$.

Combinando estas informações, obtemos uma figura para $S = T \cup H$ descrita na Figura 2.10. É claro que $\mathbb{R}^3 \setminus S$ possui quatro componentes, enumeradas na Figura 2.10, obtidas a partir de uma análise similar ao caso anterior (sistema (2.61)).

Na região **1** que está acima do plano $\sigma\nu$ e do lado direito da superfície $T \cap v$, temos um equilíbrio atrator sem nenhum ciclo limite. Passando pela superfície $T \cap v$ no sentido anti-horário, entramos na região **2** onde temos o surgimento de um ciclo limite repulsor para um equilíbrio atrator e incidente a este ciclo limite, temos ainda o surgimento de outro ciclo limite atrator. Atravessando o plano $\sigma\nu$ para valores de $\chi < 0$, entramos na região **3** onde ocorre o colapso entre a órbita atratora que surge em torno do equilíbrio e o ciclo limite repulsor, e portanto temos um ciclo limite atrator e um equilíbrio repulsor. Passando da região **2** para a região **4**, limitada por uma “língua” que surge a partir da

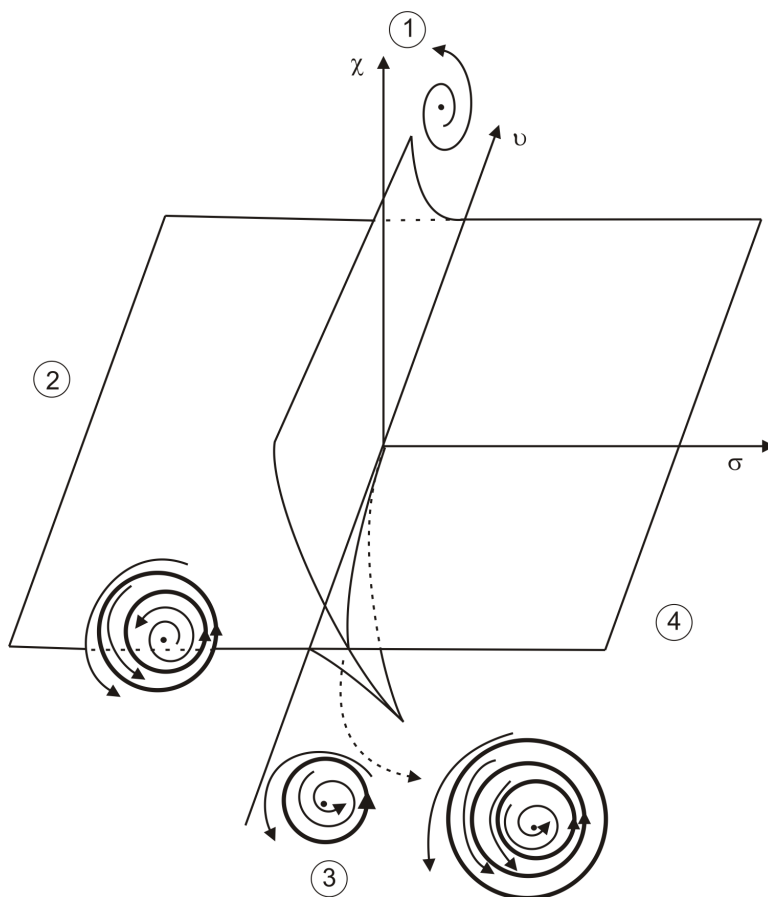


Figura 2.10: Diagrama de bifurcação do sistema (2.57).

união entre $T \cap \{v < 0\} \cup T \cap \{v = 0\}$ e onde $\chi < 0$, temos o surgimento de um ciclo limite atrator em torno do equilíbrio repulsor, sendo que assim, coexistem três ciclos limite.

Capítulo 3

Análise linear do sistema (1.25)

3.1 Análise linear do sistema (1.25) para $a = 0$

Nesta seção estudaremos o sistema (1.25) tomando $a = 0$, ou seja, estudaremos o sistema

$$\begin{cases} x' &= -\nu g(x) + \nu \left(\frac{z-x}{R} \right) - \nu y, \\ y' &= x, \\ z' &= \frac{x-z}{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde

$$g(x) = \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right).$$

Como pode ser facilmente verificado, a família de equações diferenciais do sistema (3.1) tem um único ponto de equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ para todos os valores dos parâmetros em

$$\mathcal{W} = \{(\nu, \alpha, R, a) \in \mathcal{T} : a = 0\}. \quad (3.2)$$

Para o estudo da estabilidade do equilíbrio E iremos decompor o conjunto de parâmetros \mathcal{W} da seguinte forma

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4 \cup \mathcal{W}_5 \cup \mathcal{W}_6 \cup \mathcal{W}_7 \cup \mathcal{W}_8 \cup \mathcal{W}_9, \quad (3.3)$$

onde

$$\mathcal{W}_1 = \{(\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_1\} \quad (3.4)$$

com

$$\mathcal{R}_1 = \{(\alpha, R) \in \mathbb{R}^2 : 0 < R < \alpha\} \quad (3.5)$$

conforme Figura 3.1;

$$\mathcal{W}_2 = \{(\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_2\} \quad (3.6)$$

com

$$\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, R) \in \mathbb{R}^2 : 0 < R = \alpha\} \quad (3.7)$$

conforme Figura 3.1;

$$\mathcal{W}_3 = \{(\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_3\} \quad (3.8)$$

com

$$\mathcal{R}_3 = \{(\alpha, R) \in \mathbb{R}^2 : \alpha R = 1, 0 < \alpha < 1, R > 1\} \quad (3.9)$$

conforme Figura 3.1;

$$\mathcal{W}_4 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_4, 0 < \nu < \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)} \right\} \quad (3.10)$$

com

$$\mathcal{R}_4 = \left\{ (\alpha, R) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < 1, \alpha < R < \frac{1}{\alpha} \right\} \quad (3.11)$$

conforme Figura 3.1;

$$\mathcal{W}_5 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_4, \nu = \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)} \right\} \quad (3.12)$$

com \mathcal{R}_4 descrito em (3.11);

$$\mathcal{W}_6 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_4, \nu > \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)} \right\} \quad (3.13)$$

com \mathcal{R}_4 descrito em (3.11);

$$\mathcal{W}_7 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_5, 0 < \nu < \frac{-1}{1 - \alpha R} \right\} \quad (3.14)$$

com

$$\mathcal{R}_5 = \{(\alpha, R) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \alpha < R, \alpha R > 1\} \quad (3.15)$$

conforme Figura 3.1;

$$\mathcal{W}_8 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_5, \nu = \frac{-1}{1 - \alpha R} \right\} \quad (3.16)$$

com \mathcal{R}_5 descrito em (3.15);

$$\mathcal{W}_9 = \left\{ (\alpha, R, \nu, 0) \in \mathcal{W} : (\alpha, R) \in \mathcal{R}_5, \nu > \frac{-1}{1 - \alpha R} \right\} \quad (3.17)$$

com \mathcal{R}_5 descrito em (3.15).

Para o estudo da estabilidade do ponto E faremos uso do lema a seguir, conhecido como critério de Routh–Hurwitz. Uma demonstração deste lema pode ser encontrada em Pontryagin [3].

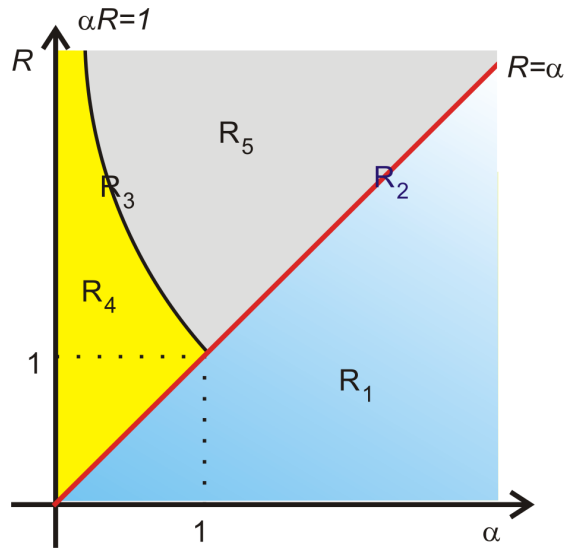


Figura 3.1: Região do plano (α, R) , onde estão R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 .

Lema 3.1.1 *Considere o polinômio $p(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. As raízes de $p(\lambda)$ têm partes reais negativas se, e somente se,*

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_0a_1 > a_2.$$

A matriz Jacobiana do sistema (3.1) calculada em E é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\nu - \frac{\nu}{R} & -\nu & \frac{\nu}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \frac{\lambda^2}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha)) + \frac{\lambda}{R}(\nu(R - \alpha)) + \frac{\nu}{R}, \quad (3.18)$$

onde os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são dados por

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha)), \quad (3.19)$$

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)), \quad (3.20)$$

$$a_2 = \frac{\nu}{R}. \quad (3.21)$$

O principal teorema desta análise linear é enunciado a seguir.

Teorema 3.1.1 *Considere o sistema (3.1), onde os parâmetros são tomados em (3.3). São válidas as seguintes afirmações:*

1. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_1$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
2. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_2$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
3. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_3$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
4. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_4$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
5. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_7$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
6. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_8$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
7. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_9$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável;
8. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_6$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e é localmente assintoticamente estável;
9. Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_5$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é não hiperbólico. De fato, se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_5$, então (3.1) tem um ponto de Hopf em E .

Demonstração. A demonstração do Teorema 3.1.1 será uma consequência imediata dos lemas a seguir.

□

Lema 3.1.2 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_1$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_1 temos

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) < 0.$$

Como $a_1 < 0$ em \mathcal{W}_1 , pelo Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) \frac{\nu}{R}(R - \alpha).$$

Sabemos que, em \mathcal{W}_1 , $R < \alpha$, então

$$\frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) \frac{\nu}{R}(R - \alpha) < 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{W}_1 . Portanto o equilíbrio E é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.1.3 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_2$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_2 temos

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) = 0.$$

Como $a_1 = 0$ em \mathcal{W}_2 , pelo Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{W}_2 . Portanto o equilíbrio E é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.1.4 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_3$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_3 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) = \frac{1}{R} > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Segue que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R} \frac{\nu}{R} (R - \alpha)$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Sabemos que, em \mathcal{W}_3 , $R - \alpha < R$, então

$$\frac{1}{R} \frac{\nu}{R} (R - \alpha) < \frac{1}{R} \frac{\nu}{R} R,$$

fazendo as simplificações na desigualdade acima, temos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R} \frac{\nu}{R} (R - \alpha) < \frac{\nu}{R} = a_2,$$

ou seja, $a_0a_1 < a_2$ em \mathcal{W}_3 . Pelo Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E é hiperbólico e instável. □

Lema 3.1.5 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_4$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_4 , temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Segue que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{W}_4

$$\nu < \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)},$$

então fazendo

$$\nu = \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)},$$

temos que

$$\frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{\nu}{R}(R - \alpha) < \frac{1}{R} \left(\frac{\alpha(1 - R\alpha)}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)} + 1 \right) \frac{\nu}{R}(R - \alpha).$$

Simplificando a desigualdade acima, temos que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{\nu}{R}(R - \alpha) < \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Assim, em \mathcal{W}_4 , temos $a_0 a_1 < a_2$. Pelo Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.1.6 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_7$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_7 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - \alpha R) + 1) > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Temos que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{1}{R}(\nu(R - \alpha))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Como, em \mathcal{W}_7 , $R > \alpha$, então

$$R - \alpha < R,$$

portanto, obteremos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\frac{\nu}{R}(R - \alpha) < \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\frac{\nu}{R}R.$$

Fazendo as devidas simplificações, obteremos

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\frac{\nu}{R}(R - \alpha) < \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\nu.$$

Na região \mathcal{W}_7

$$0 < (1 + \nu(1 - \alpha R)) < 1,$$

então

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\nu < \frac{1}{R}\nu,$$

de onde concluímos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - \alpha R))\frac{\nu}{R}(R - \alpha) < \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Assim, em \mathcal{W}_7 , temos $a_0a_1 < a_2$. Pelo Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.1.7 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_8$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_8 , temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - \alpha R) + 1) = 0.$$

Como $a_0 = 0$, segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0a_1 = a_2$. Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Segue que

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)),$$

portanto $a_0a_1 < 0$, ou seja, $a_0a_1 < a_2$ em \mathcal{W}_8 . Segue que o equilíbrio E é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.1.8 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_9$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_9 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - \alpha R) + 1) < 0,$$

Como $a_0 < 0$, segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm \omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0,$$

portanto $a_0 a_1 < 0$, ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{W}_9 . Segue que o equilíbrio E é hiperbólico e instável. □

Lema 3.1.9 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_6$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é hiperbólico e localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_6 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - \alpha R) + 1) > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Temos que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1) \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{W}_6

$$\nu(1 - R\alpha) > \frac{\alpha}{R - \alpha},$$

então

$$\frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{\nu}{R}(R - \alpha) > \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha}{R - \alpha} + 1\right)\frac{\nu}{R}(R - \alpha).$$

Simplificando a desigualdade acima, temos

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{\nu}{R}(R - \alpha) > \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Como, em \mathcal{W}_6 , $a_0a_1 > a_2$, segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E é localmente assintoticamente estável.

□

Lema 3.1.10 *Considere o sistema (3.1). Se $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_5$, então o ponto de equilíbrio E de (3.1) é não hiperbólico.*

Demonstração. Na região \mathcal{W}_5 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(\nu(1 - \alpha R) + 1) > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Temos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(\nu(1 - R\alpha) + 1)\frac{1}{R}(\nu(R - \alpha))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{W}_5

$$\nu = \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)},$$

então, substituindo o valor de ν em a_0a_1 e a_2 , temos

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha(1 - R\alpha)}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)} + 1\right)\frac{\frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)}}{R}(R - \alpha),$$

$$a_2 = \frac{\frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)}}{R}.$$

Simplificando o produto a_0a_1 , temos

$$a_0a_1 = \frac{\frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)}}{R} = a_2.$$

Decorre da igualdade acima que o equilíbrio E , na região \mathcal{W}_5 , é não hiperbólico. De fato, veremos mais adiante que na região \mathcal{W}_5 a matriz A terá um autovalor real negativo e um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas.

□

3.2 Análise linear do sistema (1.25) para $a > 0$

Nesta seção estudaremos a análise linear do sistema (1.25) para $a > 0$. Teremos duas condições a serem estudadas. Uma para $a \geq 1$ e a outra para $0 < a < 1$.

A família de equações diferenciais (1.25) tem um único ponto de equilíbrio dado por $E_0 = (a, -g(a), a)$, para todos os valores dos parâmetros em

$$\mathcal{S} = \{(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{T} : a \geq 1\}. \quad (3.22)$$

Para o estudo da estabilidade do ponto E_0 faremos uso do Lema 3.1.1.

A matriz Jacobiana do sistema (1.25) calculada em E_0 é dada por

$$A_{E_0} = \begin{pmatrix} \alpha\nu(1-a^2) - \frac{\nu}{R} & -\nu & \frac{\nu}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de A_{E_0} é dado por

$$p_0(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\lambda^2}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) + \frac{\lambda}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) + \frac{\nu}{R}, \quad (3.23)$$

onde os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são dados por

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)), \quad (3.24)$$

$$a_1 = \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)), \quad (3.25)$$

$$a_2 = \frac{\nu}{R}. \quad (3.26)$$

Para o estudo da estabilidade do equilíbrio E_0 iremos decompor o conjunto de parâmetros \mathcal{S} da seguinte forma

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \quad (3.27)$$

onde

$$\mathcal{S}_1 = \{(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{S} : a > 1\}, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{S} : a = 1\}. \quad (3.29)$$

A estabilidade do equilíbrio E_0 é dada pelos teoremas a seguir.

Teorema 3.2.1 *Considere o sistema (1.25) e o seguinte conjunto de parâmetros*

$$\mathcal{S} = \{(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{T} : a \geq 1\}.$$

Se $(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{S}$, então o ponto E_0 é localmente assintoticamente estável.

Demonstração. A demonstração do Teorema 3.2.1 será uma consequência imediata dos dois lemas a seguir.

□

Lema 3.2.1 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{S}_1$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Na região \mathcal{S}_1 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) > 0, \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Precisamos comparar $a_0 a_1$ com a_2 . Temos que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{S}_1 , $a > 1$. Então, faremos algumas substituições a fim de comparar $a_0 a_1$ com a_2 . Sabemos que

$$(1 - \nu\alpha R(1 - a^2) + \nu) > 1$$

e

$$(1 - \frac{\alpha}{R}(1 - a^2)) > 1.$$

Temos que

$$\frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2))\frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) > \frac{1}{R}1\nu(1 - \frac{\alpha}{R}(1 - a^2)),$$

então

$$\frac{1}{R}1\nu(1 - \frac{\alpha}{R}(1 - a^2)) > \frac{\nu}{R},$$

de onde concluímos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2))\frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) > \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Como $a_0a_1 > a_2$ em \mathcal{S}_1 , segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 é localmente assintoticamente estável. □

Lema 3.2.2 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{S}_2$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Na região \mathcal{S}_2 temos

$$a_0 = \frac{1 + \nu}{R} > 0, \quad a_1 = \nu > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Precisamos comparar a_0a_1 com a_2 . Temos que

$$a_0a_1 = \frac{1 + \nu}{R}\nu$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Sabemos que

$$\nu + 1 > 1,$$

então

$$a_0a_1 = \frac{\nu}{R}(\nu + 1) > \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Como, em \mathcal{S}_2 , $a_0a_1 > a_2$, segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 é localmente assintoticamente estável. □

A família de equações diferenciais do sistema (1.25) tem um único ponto de equilíbrio $E_0 = (a, -g(a), a)$ para todos os valores de parâmetro em

$$\mathcal{Q} = \{(\nu, \alpha, R, a) \in \mathcal{T} : 0 < a < 1\}. \quad (3.30)$$

Para o estudo da estabilidade do ponto E_0 iremos decompor o conjunto de parâmetros \mathcal{Q} da seguinte forma

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_3 \cup \mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_5 \cup \mathcal{Q}_6 \cup \mathcal{Q}_7 \cup \mathcal{Q}_8 \cup \mathcal{Q}_9, \quad (3.31)$$

onde

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu > 0, \alpha > 0, 0 < R < \alpha(1 - a^2)\}, \quad (3.32)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \{(\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu > 0, \alpha > 0, 0 < R = \alpha(1 - a^2)\}, \quad (3.33)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, 0 < \nu < \frac{-1}{1 - R\alpha(1 - a^2)}, \right. \\ \left. \alpha > 0, R > \alpha(1 - a^2), R\alpha(1 - a^2) > 1 \right\}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{Q}_4 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, 0 < \nu = \frac{-1}{1 - R\alpha(1 - a^2)}, \right. \\ \left. \alpha > 0, R > \alpha(1 - a^2), R\alpha(1 - a^2) > 1 \right\}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Q}_5 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu = \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}, \right. \\ \left. 0 < \alpha < \frac{1}{1 - a^2}, \alpha(1 - a^2) < R < \frac{1}{\alpha(1 - a^2)} \right\}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{Q}_6 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu > \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}, \right. \\ \left. 0 < \alpha < \frac{1}{1 - a^2}, \alpha(1 - a^2) < R < \frac{1}{\alpha(1 - a^2)} \right\}, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{Q}_7 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu > \frac{-1}{1 - R\alpha(1 - a^2)}, \alpha > 0, \right. \\ \left. R > \alpha(1 - a^2), R\alpha(1 - a^2) > 1 \right\}, \quad (3.38)$$

$$\mathcal{Q}_8 = \{(\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, \nu > 0, \alpha > 0, R > \alpha(1 - a^2), \\ R\alpha(1 - a^2) = 1\}, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{Q}_9 = \left\{ (\alpha, R, \nu, a) \in \mathbb{R}^4 : 0 < a < 1, 0 < \nu < \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}, \right. \\ \left. 0 < \alpha < \frac{1}{1 - a^2}, \alpha(1 - a^2) < R < \frac{1}{\alpha(1 - a^2)} \right\}. \quad (3.40)$$

Teorema 3.2.2 *Considere o sistema (1.25) e o seguinte conjunto de parâmetros*

$$\mathcal{Q} = \{(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{T} : 0 < a < 1\}. \quad (3.41)$$

São válidas as seguintes afirmações:

1. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_1$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
2. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_2$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
3. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_3$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
4. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_4$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
5. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_7$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
6. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_8$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
7. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_9$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável;*
8. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_6$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e é localmente assintoticamente estável;*
9. *Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_5$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é não hiperbólico. Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_5$, então (1.25) tem um ponto de Hopf em E_0 .*

Demonstração. A demonstração do Teorema 3.2.2 será uma consequência imediata dos lemas a seguir.

□

Lema 3.2.3 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_1$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_1 temos

$$a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < 0.$$

Como $a_1 < 0$ em \mathcal{Q}_1 , segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E_0 é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)).$$

Sabemos que, em \mathcal{Q}_1 , $R < \alpha(1 - a^2)$, então

$$\frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) < 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_1 . Portanto o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável. □

Lema 3.2.4 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_2$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_2 temos

$$a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) = 0.$$

Que o equilíbrio E_0 não é estável em \mathcal{Q}_2 . Segue de $a_1 = 0$ em \mathcal{Q}_2 e do Lema 3.1.1. Agora verificaremos se o equilíbrio E_0 é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) = 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_2 . Portanto o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável. □

Lema 3.2.5 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_3$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_3 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) > 0, \quad a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Sabemos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Em \mathcal{Q}_3

$$(R - \alpha(1 - a^2)) < R$$

e

$$0 < (1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) < 1.$$

Então,

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}R$$

e

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\nu < \frac{1}{R}\nu.$$

Portanto,

$$a_0a_1\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Como $a_0a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_3 , segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 é hiperbólico instável. □

Lema 3.2.6 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_4$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_4 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) = 0.$$

Como $a_0 = 0$ em \mathcal{Q}_4 , segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E_0 é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) = 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_4 . Portanto o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável. □

Lema 3.2.7 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_7$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_7 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) < 0.$$

Como $a_0 < 0$ em \mathcal{Q}_7 , segue do Lema 3.1.1 que o equilíbrio E_0 não é estável. Agora verificaremos se o equilíbrio E_0 é hiperbólico. Como

$$a_2 = \frac{\nu}{R} > 0,$$

então o autovalor real $\lambda_1 \neq 0$. Se $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$ então $a_0 a_1 = a_2$. Agora compararemos $a_0 a_1$ com a_2 . Segue que

$$a_0 a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)).$$

Sabemos que, em \mathcal{Q}_7 , $R > \alpha(1 - a^2)$, então

$$\frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) < 0,$$

ou seja, $a_0 a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_7 . Portanto o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável. □

Lema 3.2.8 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_8$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_8 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) = \frac{1}{R} > 0, \quad a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Agora compararemos a_0a_1 com a_2 . Sabemos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R} \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{Q}_8 , temos que

$$(R - \alpha(1 - a^2)) < R,$$

então, escrevemos

$$\frac{1}{R} \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{1}{R} \frac{\nu}{R}R.$$

Simplificando a desigualdade acima, temos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R} \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Assim, em \mathcal{Q}_8 temos $a_0a_1 < a_2$. Do Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.2.9 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_9$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e instável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_9 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) > 0, \quad a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Compararemos a_0a_1 com a_2 . Sabemos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Fazendo as devidas substituições, temos

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\alpha(1 - a^2)}{R - \alpha(1 - a^2)}\right)\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)).$$

Simplificando ainda mais a desigualdade acima, temos

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) < \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Do Lema 3.1.1 e do fato de que $a_0a_1 < a_2$ em \mathcal{Q}_9 , segue que o equilíbrio E_0 é hiperbólico e instável.

□

Lema 3.2.10 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_6$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é hiperbólico e localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_6 temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) > 0, \quad a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Compararemos a_0a_1 com a_2 . Sabemos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Fazendo as devidas substituições, temos

$$\frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\alpha(1 - a^2)}{R - \alpha(1 - a^2)}\right)\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)).$$

Simplificando a desigualdade acima, verificamos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > \frac{\nu}{R} = a_2.$$

Do Lema 3.1.1, segue que o equilíbrio E_0 é localmente assintoticamente estável.

□

Lema 3.2.11 *Considere o sistema (1.25). Se $(\alpha, R, \nu, a) \in \mathcal{Q}_5$, então o ponto de equilíbrio E_0 de (1.25) é não hiperbólico.*

Demonstração. Na região \mathcal{Q}_5 , temos

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2))) > 0, \quad a_1 = \frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2)) > 0, \quad a_2 = \frac{\nu}{R} > 0.$$

Compararemos a_0a_1 com a_2 . Sabemos que

$$a_0a_1 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha(1 - a^2)))\frac{\nu}{R}(R - \alpha(1 - a^2))$$

e

$$a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Na região \mathcal{Q}_5 , temos

$$\nu = \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}.$$

Substituindo o valor de ν em a_0a_1 , teremos

$$a_0a_1 = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))} \right) \frac{\alpha(1 - a^2)}{R}.$$

Simplificando a expressão acima, obteremos

$$a_0a_1 = \frac{\alpha(1 - a^2)}{R(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}.$$

Substituindo o valor de ν em a_2 , obteremos

$$a_2 = \frac{\alpha(1 - a^2)}{R(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}.$$

Logo, em \mathcal{Q}_5 , temos $a_0a_1 = a_2$. Segue que o equilíbrio E_0 é não hiperbólico. De fato, será mostrado mais adiante que a matriz A_{E_0} possui um autovalor real negativo e um par de autovalores complexos conjugados com partes reais nulas. Assim, nessa região, a estabilidade do ponto equilíbrio E_0 não pode ser determinada pela análise linear.

□

Capítulo 4

Bifurcações de Hopf no sistema

(1.25)

Neste capítulo o objetivo é estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio $E_0 = (a, -g(a), a)$, no qual a família a três parâmetros de equações diferenciais (1.25) apresenta bifurcações de Hopf, quando os parâmetros são tomados nos conjuntos \mathcal{W}_5 ou \mathcal{Q}_5 , para $a = 0$ e $0 < a < 1$, respectivamente.

Faremos a seguir o que foi feito no Capítulo 3, ou seja, dividiremos a análise em duas partes: uma para $a = 0$ e outra quando $0 < a < 1$.

4.1 Bifurcações de Hopf no sistema (1.25) para $a = 0$

Quando $a = 0$, o sistema (1.25) fica dado por (3.1). Como vimos, este sistema apresenta um único ponto de equilíbrio, dado por $E = (0, 0, 0)$. As variáveis de estado são dadas por (x, y, z) e os parâmetros são dados por α , ν e R , todos positivos.

A região de interesse é \mathcal{W}_5 onde o ponto de equilíbrio E é não hiperbólico, como visto no Teorema 3.1.1. O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio $E = (0, 0, 0)$, como vimos, pode ser escrito da forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\lambda^2}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha)) + \frac{\lambda}{R}(\nu(R - \alpha)) + \frac{\nu}{R}, \quad (4.1)$$

onde os coeficientes a_0 , a_1 e a_2 são dados por

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu(1 - R\alpha)), \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu(R - \alpha)), \quad a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Em \mathcal{W}_5 , sabemos que

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, \\ a_1 &> 0, \\ a_2 &> 0, \\ \nu &= \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de ν no polinômio característico (4.1), o mesmo terá a seguinte forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{R - \alpha} \right) + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{\alpha}{1 - R\alpha} \right) + \frac{\alpha}{R(R - \alpha)(1 - R\alpha)}, \quad (4.2)$$

cujas raízes, os autovalores da matriz Jacobiana A , são

$$\lambda_1 = \frac{-1}{R - \alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{i\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)}, \quad \lambda_3 = \frac{-i\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)},$$

satisfazendo a condição necessária para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf, que é possuir autovalores λ_2 e λ_3 complexos conjugados com partes reais nulas, ou seja, $\lambda_{2,3} = \pm\omega_0 i$, com ω_0 maior que zero.

Para estudar o comportamento do ponto de equilíbrio E na superfície de Hopf \mathcal{W}_5 , precisamos determinar o primeiro coeficiente de Lyapunov.

4.1.1 Determinação do primeiro coeficiente de Lyapunov

Para estudarmos a ocorrência de uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio E usaremos os métodos apresentados na seção (2.3).

É bom lembrar que, para valores de parâmetros sobre a superfície de Hopf \mathcal{W}_5 , a matriz Jacobiana A tem um par de autovalores imaginários puros da forma $\lambda_{2,3} = \pm\omega_0 i$, com $\omega_0 > 0$. Teremos um autovetor $q \in \mathbb{C}^3$ associado ao autovalor λ_2 . Então, temos que $Aq = \lambda_2 q = i\omega_0 q$. Temos também o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^3$ que satisfaz $A^\top p = -i\omega_0 p$, com a seguinte condição de normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

O primeiro coeficiente de Lyapunov da família de equações diferenciais (3.1) no ponto E para valores de parâmetros em \mathcal{W}_5 tem a seguinte forma

$$l_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} g_{21},$$

onde

$$\begin{aligned} g_{21} &= \langle p, C(\bar{q}, q, q) + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = \\ &= \langle p, C(\bar{q}, q, q) - 2B(-A^{-1}(B(q, \bar{q})), q) + B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - A)^{-1}B(q, q)) \rangle, \end{aligned}$$

como já foi visto em (2.39) e (2.40).

Para a superfície de Hopf a matriz Jacobiana de (3.1) em E tem a seguinte forma

$$A = \begin{pmatrix} \nu(\alpha - \frac{1}{R}) - \nu \frac{\nu}{R} & & \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Substituindo o valor de ν na matriz Jacobiana A , teremos

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} - \frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} & 1 & \frac{1}{R} \\ -\frac{\alpha}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Iremos calcular em seguida os autovetores correspondentes p e q . O autovetor complexo $q = (q_1, q_2, q_3)$ da matriz Jacobiana A associado ao autovalor $\lambda_2 = \omega_0 i$, onde

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)},$$

é dado por $Aq = i\omega_0 q$. Escrevendo na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \nu(\alpha - \frac{1}{R}) - \nu \frac{\nu}{R} \\ 1 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \left(i \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} q_1 \nu \left(\alpha - \frac{1}{R} \right) - \nu q_2 + \frac{\nu}{R} q_3 = i \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)} q_1 \\ q_1 = i \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)} q_2 \\ \frac{q_1}{R} = q_3 \left(\frac{1}{R} + i \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{R(1 - R\alpha)} \right) \end{cases}$$

das quais resulta o autovetor

$$q = \left(1, -i \frac{\sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)}}{\alpha}, 1 - \alpha R - i \sqrt{\alpha R(1 - \alpha R)} \right). \quad (4.3)$$

O seu conjugado é dado por

$$\bar{q} = \left(1, i \frac{\sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}}{\alpha}, 1 - \alpha R + i \sqrt{\alpha R(1-\alpha R)} \right). \quad (4.4)$$

Agora vamos considerar o autovetor adjunto $p = (p_1, p_2, p_3)$ da matriz A^\top associado ao autovalor $\lambda_3 = -i\omega_0$. Sendo assim,

$$A^\top = \begin{pmatrix} \nu(\alpha - \frac{1}{R}) & 1 & \frac{1}{R} \\ -\nu & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}$$

é a matriz transposta de A . Da mesma forma, obteremos o autovetor adjunto, que será da forma

$$p = \left(1, -i \frac{\sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}}{(R-\alpha)(1-\alpha R)}, \frac{\alpha[1-\alpha R + i\sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}]}{(R-\alpha)(1-\alpha R)} \right) \quad (4.5)$$

e seu conjugado

$$\bar{p} = \left(1, i \frac{\sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}}{(R-\alpha)(1-\alpha R)}, \frac{\alpha[1-\alpha R - i\sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}]}{(R-\alpha)(1-\alpha R)} \right). \quad (4.6)$$

Para normalizar o autovetor adjunto p com relação ao autovetor q , utilizaremos a seguinte equação $p_N = up$, onde p_N é o autovetor normalizado p e u o fator de normalização, dado por

$$u = 2 \left(\frac{R - \alpha^2 R - \alpha i \sqrt{\alpha R(1-\alpha R)}}{R - \alpha} \right),$$

resultando no seguinte autovetor normalizado

$$p_N = (p_{N_1}, p_{N_2}, p_{N_3}), \quad (4.7)$$

onde p_{N_1} , p_{N_2} e p_{N_3} são dados por

$$p_{N_1} = \frac{\alpha - R}{2i\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)}\alpha + 2R(\alpha^2 - 1)}, \quad (4.8)$$

$$p_{N_2} = \frac{\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)}}{2(R\alpha - 1) \left(\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} - iR(\alpha^2 - 1) \right)}, \quad (4.9)$$

$$p_{N_3} = \frac{i\alpha}{-2i\alpha R^2 - 2 \left(\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} - i \right) R + 2\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)}}. \quad (4.10)$$

Observamos que a equação $\langle p_N, q \rangle = 1$ é verificada.

Apresentaremos o seguinte Lema

Lema 4.1.1 *Se $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 + \bar{p}_3 q_3 = u$, considere $p_N = \bar{u}^{-1} p = (\bar{u}^{-1} p_1 + \bar{u}^{-1} p_2 + \bar{u}^{-1} p_3)$, onde $\bar{u}^{-1} = k$. Então $\langle p_N, q \rangle = 1$.*

Demonstração 4.1.1 Escreveremos

$$\langle p_N, q \rangle = (k\bar{p}_1)q_1 + (k\bar{p}_2)q_2 + (k\bar{p}_3)q_3 = \bar{k}\bar{p}_1 q_1 + \bar{k}\bar{p}_2 q_2 + \bar{k}\bar{p}_3 q_3 = \bar{k}(\bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 + \bar{p}_3 q_3),$$

obtendo assim

$$\frac{1}{u} u = 1.$$

□

Agora calcularemos as funções multilineares, mas para isso escreveremos o sistema (3.1) da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.11)$$

onde $F(x)$ é uma função suave, e pode ser expandida da forma

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^4), \quad (4.12)$$

$B(x, x)$ e $C(x, x, x)$ são funções bilineares e trilineares simétricas, respectivamente. Do sistema (3.1), resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(\alpha - \frac{1}{R}) & -\nu & \frac{\nu}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-\nu\alpha x^3}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \nu(\alpha - \frac{1}{R}) & -\nu & \frac{\nu}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}$$

é a matriz relativa à parte linear e

$$F(x) = \begin{pmatrix} \frac{-\nu\alpha x^3}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é a função relativa à parte não linear de (4.13).

Lema 4.1.2 As funções multilíneas simétricas $B(x, y)$ e $C(x, y, z)$, onde x, y e $z \in \mathbb{R}^3$ para o sistema dado em (3.1) são da forma

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

e

$$C(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-2\alpha^2 x_1 y_1 z_1}{(R - \alpha)(1 - R\alpha)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

respectivamente, onde $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$ e $z = (z_1, z_2, z_3)^\top$.

Demonstração 4.1.2 Temos para $i = 1, 2, 3$,

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k,$$

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l,$$

Para o cálculo de B_1 , consideremos $F_1(x) = -\nu\alpha x^3/3$ e calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -\alpha\nu x^2, & \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} &= -2\alpha\nu x, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial x} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Como o ponto de equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é a origem, então quando substituído nas derivadas parciais de F_1 , teremos

$$B_1(x, y) = 0.$$

Para o cálculo de B_2 , temos $F_2(x) = 0$. Sendo assim

$$B_2(x, y) = 0.$$

O mesmo se repete para o cálculo de B_3 , pois, $F_3(x) = 0$, então

$$B_3(x, y) = 0.$$

Escreveremos

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos a função trilinear $C(x, y, z)$, faremos de modo análogo ao da função $B(x, y)$ e obteremos a seguinte função

$$C(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-2\alpha^2 x_1 y_1 z_1}{(R - \alpha)(1 - R\alpha)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Observamos que o sistema (3.1) não possui termos de quarta ordem ou superiores, portanto as demais funções multilineares são identicamente nulas.

Da matriz Jacobiana A no ponto E , dado em (3.1), das funções $B(x, x)$ e $C(x, x, x)$ dadas acima, de q , dado em (4.3) e seu conjugado dado em (4.4), obtemos

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(R-\alpha)(R\alpha-1)}{\alpha} & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & -R \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Escrevendo $h_{11} = A^{-1}B(q, \bar{q})$, temos que

$$h_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Escrevendo $h_{20} = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)$, onde I é a matriz identidade de ordem 3, obtemos

$$h_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Calculando $C_1 = \langle p_N, C(q, q, \bar{q}) \rangle$, onde p_N é o autovetor normalizado e C é a função multilinear $C(x, x, x)$, obtemos

$$C_1 = -\frac{\alpha^2}{(R\alpha - 1) \left(i\sqrt{R\alpha(1 - R\alpha)}\alpha + R(\alpha^2 - 1) \right)}, \quad (4.21)$$

escrevendo $P_1 = \langle p_N, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle$, obtemos

$$P_1 = 0, \quad (4.22)$$

escrevendo $P_2 = -2\langle p_N, B(q, h_{11}) \rangle$, obtemos

$$P_2 = 0, \quad (4.23)$$

calculando $G_{21} = [C_1 + P_1 + P_2]$, temos

$$G_{21} = -\frac{\alpha^2}{(R\alpha - 1) \left(i\sqrt{R\alpha(1 - R\alpha)}\alpha + R(\alpha^2 - 1) \right)}. \quad (4.24)$$

Daí, o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio $E = (0, 0, 0)$, tem a forma

$$l_1 = -\frac{(\alpha - 1)\alpha^2(\alpha + 1)}{(R\alpha - 1)(\alpha^3 - 2R\alpha^2 + R)}.$$

Para $(\alpha, R) \in \mathcal{W}_5$, $\alpha - 1 < 0$, $\alpha + 1 > 0$, $\alpha^2 > 0$, $\alpha R - 1 < 0$ e $\alpha^3 - 2R\alpha^2 + R > 0$, de onde o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 < 0$. Portanto, a bifurcação de Hopf correspondente é não degenerada, pois $l_1 \neq 0$. Então, para os valores dos parâmetros $(\alpha, R) \in \mathcal{W}_5$ sobre a superfície de Hopf o ponto de equilíbrio E é localmente assintoticamente estável.

Mostraremos que

$$\alpha^3 - 2R\alpha^2 + R, \quad (4.25)$$

é sempre positivo em \mathcal{W}_5 . Para

$$R = \frac{\alpha^3}{2\alpha^2 - 1}, \quad (4.26)$$

a expressão (4.25) é igual a zero. Como $\alpha < R < 1/\alpha$ e $0 < \alpha < 1$ temos que

$$\frac{\alpha^3}{2\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha} = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha(2\alpha^2 - 1)} > 0.$$

Concluimos então, que $R = \alpha^3/(2\alpha^2 - 1)$ é maior que qualquer valor de R na região \mathcal{W}_5 . Para sabermos o sinal da expressão (4.25), basta substituirmos um valor menor que $R = \alpha^3/(2\alpha^2 - 1)$, que esteja contido em \mathcal{W}_5 . Façamos $R = 1/\alpha$ e substituindo em (4.25), iremos obter

$$\frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha} > 0.$$

4.1.2 Condição de transversalidade

Teorema 4.1.1 *Considere a família de equações diferenciais (3.1). A condição de transversalidade para as bifurcações de Hopf no ponto de equilíbrio E é dada por*

$$\gamma' = \frac{(R - \alpha)^2 \alpha (R\alpha - 1)}{2R(\alpha^3 - 2R\alpha^2 + R)}. \quad (4.27)$$

Como $\gamma' \neq 0$, para todos os valores de parâmetros $(\alpha, R) \in \mathcal{W}_5$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf transversal no ponto de equilíbrio E .

Demonstração 4.1.1 Calcularemos

$$A'(\nu) = \left. \frac{\partial A}{\partial \nu} \right|_{\nu = \frac{\alpha}{(1 - \alpha R)(R - \alpha)}},$$

obtendo

$$A'(\nu) = \begin{pmatrix} (\alpha - \frac{1}{R}) & -1 & \frac{1}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo, então a equação $\gamma' = \text{Re}\langle p, A'(\nu)q \rangle$, obtemos

$$\gamma' = \frac{(R - \alpha)^2 \alpha (R\alpha - 1)}{2R(\alpha^3 - 2R\alpha^2 + R)},$$

e portanto, na região \mathcal{W}_5 , $\gamma' \neq 0$.

□

4.1.3 Teorema de Hopf para o sistema (3.1), caso $a = 0$

De acordo com as análises da condição de não-degenerescência e da condição de transversalidade, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.1.2 *Considere a família a 3-parâmetros de equações diferenciais ordinárias (3.1). Então, para $a = 0$, na região \mathcal{W}_5 , o ponto de Hopf transversal $(0, 0, 0)$ é um atrator fraco sobre a superfície central. Mais especificamente, para parâmetros em \mathcal{W}_5 o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo. Além do mais, para parâmetros em \mathcal{W}_4 , próximos de \mathcal{W}_5 , existe uma órbita periódica atratora, na continuação da superfície central, envolvendo o equilíbrio repulsor na origem.*

4.2 Bifurcações de Hopf do sistema (1.25) para

$$0 < a < 1$$

Como vimos, o sistema (1.25) apresenta um único ponto de equilíbrio, dado por $E_0 = (a, -g(a), a)$. As variáveis de estado são dadas por (x, y, z) e os parâmetros são dados por α, ν, R e a , todos positivos.

A região de interesse é \mathcal{Q}_5 , onde o ponto de equilíbrio E_0 é não hiperbólico, como visto no Teorema 3.2.2. O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (1.25) no ponto de equilíbrio $E_0 = (a, -g(a), a)$, como vimos, pode ser escrito da forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\lambda^2}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)) + \frac{\lambda}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)) + \frac{\nu}{R},$$

onde os coeficientes a_0, a_1 e a_2 são dados por

$$a_0 = \frac{1}{R}(1 + \nu - \nu\alpha R(1 - a^2)), \quad a_1 = \frac{1}{R}(\nu R - \nu\alpha(1 - a^2)), \quad a_2 = \frac{\nu}{R}.$$

Em \mathcal{Q}_5 , sabemos que

$$\nu = \frac{\alpha(1 - a^2)}{(R - \alpha(1 - a^2))(1 - R\alpha(1 - a^2))}. \quad (4.28)$$

Fazendo $\alpha(1 - a^2) = s$, e substituindo em (4.28) teremos

$$\nu = \frac{s}{(R - s)(1 - Rs)}. \quad (4.29)$$

Substituindo este valor no polinômio característico $p(\lambda)$, o mesmo, em \mathcal{Q}_5 , terá a seguinte forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{1}{R-s} \right) + \frac{\lambda}{R} \left(\frac{s}{1-Rs} \right) + \frac{s}{R(R-s)(1-Rs)}, \quad (4.30)$$

cujas raízes, os autovalores da matriz Jacobiana A_{E_0} , são

$$\lambda_1 = \frac{-1}{R-s}, \quad \lambda_2 = \frac{i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{R(1-Rs)}, \quad \lambda_3 = \frac{-i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{R(1-Rs)},$$

satisfazendo a condição necessária para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf.

Para estudar o comportamento do ponto de equilíbrio E_0 na hipersuperfície de Hopf \mathcal{Q}_5 , precisamos determinar o primeiro coeficiente de Lyapunov.

4.2.1 Determinação do primeiro coeficiente de Lyapunov

Para estudarmos a ocorrência de uma Bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio E_0 em \mathcal{Q}_5 usaremos os métodos análogos aos apresentados para $a = 0$.

É bom lembrar que, para valores de parâmetros sobre a hipersuperfície de Hopf \mathcal{Q}_5 , a matriz Jacobiana A_{E_0} tem um par de autovalores imaginários puros da forma $\lambda_{2,3} = \pm\omega_0 i$, com $\omega_0 > 0$. Teremos um autovetor $q \in \mathbb{C}^3$ associado ao autovalor λ_2 . Então, temos que $A_{E_0}q = \lambda_2 q = i\omega_0 q$. Temos também o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^3$ que satisfaz $(A_{E_0})^\top p = -i\omega_0 p$, com a seguinte condição de normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

O primeiro coeficiente de Lyapunov da família de equações diferenciais (1.25) no ponto E_0 para valores de parâmetros em \mathcal{Q}_5 tem a forma vista em (2.40). Para a hipersuperfície de Hopf a matriz Jacobiana de (1.25) em E_0 tem a seguinte forma

$$A_{E_0} = \begin{pmatrix} \frac{R\alpha\nu(1-a^2)-\nu}{R} & -\nu & \frac{\nu}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}.$$

Substituindo $\nu = s/(R-s)(1-Rs)$ e $s = \alpha(1-a^2)$ na matriz Jacobiana A_{E_0} , teremos

$$A_{E_0} = \begin{pmatrix} \frac{s}{R(s-R)} & \frac{t}{(R-s)(Rs-1)} & \frac{s}{R(R-s)(1-Rs)} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

Os cálculos dos autovetores p e q será feito de maneira análoga ao caso $a = 0$. O autovetor complexo $q = (q_1, q_2, q_3)$ da matriz Jacobiana A_{E_0} associado ao autovalor $\lambda_2 = \omega i$, onde

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{Rs(1-Rs)}}{R(1-Rs)}, \quad (4.31)$$

é dado por

$$q = \left(1, -\frac{i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{s}, 1 - Rs - i\sqrt{Rs(1-Rs)} \right) \quad (4.32)$$

e seu conjugado é dado por

$$\bar{q} = \left(1, \frac{i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{s}, 1 - Rs + i\sqrt{Rs(1-Rs)} \right). \quad (4.33)$$

O autovetor adjunto $p = (p_1, p_2, p_3)$ da matriz A_{E_0} , também calculado de forma análoga ao caso $a = 0$ terá a forma

$$p = \left(1, -\frac{i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{(R-s)(1-Rs)}, \frac{s(1-Rs + i\sqrt{Rs(1-Rs)})}{(R-s)(1-Rs)} \right) \quad (4.34)$$

e seu conjugado é dado por

$$\bar{p} = \left(1, \frac{i\sqrt{Rs(1-Rs)}}{(R-s)(1-Rs)}, \frac{s(1-Rs - i\sqrt{Rs(1-Rs)})}{(R-s)(1-Rs)} \right). \quad (4.35)$$

A normalização do autovetor adjunto p com relação ao autovetor q , também será feita de forma análoga ao caso $a = 0$, onde utilizaremos a equação $p_N = up$, p_N é o autovetor normalizado p e u o fator de normalização, dado por

$$u = \frac{s - R}{2R(s^2 - 1) - 2is\sqrt{Rs(1-Rs)}},$$

resultando no seguinte autovetor normalizado

$$p_N = (p_{N_1}, p_{N_2}, p_{N_3}), \quad (4.36)$$

onde p_{N_1} , p_{N_2} e p_{N_3} são dados por

$$p_{N_1} = \frac{s - R}{2i\sqrt{Rs(1-Rs)}s + 2R(s^2 - 1)}, \quad (4.37)$$

$$p_{N_2} = \frac{\sqrt{Rs(1-Rs)}}{2(Rs - 1) \left(t\sqrt{Rs(1-Rs)} - iR(s^2 - 1) \right)}, \quad (4.38)$$

$$p_{N_3} = \frac{is}{-2isR^2 - 2\left(\sqrt{Rs(1-Rs)} - i\right)R + 2s\sqrt{Rs(1-Rs)}}. \quad (4.39)$$

Observamos que a equação $\langle p_N, q \rangle = 1$ é verificada.

As funções multilineares serão determinadas de maneira análoga ao caso $a = 0$, mas para isso escreveremos o sistema (1.25) da seguinte forma

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.40)$$

onde $F(x)$ é uma função suave, que pode ser expandida da forma

$$\begin{aligned} F(x, \xi) = & \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \frac{1}{24}D(x, x, x, x) + \frac{1}{120}E(x, x, x, x, x) \\ & + \frac{1}{720}K(x, x, x, x, x, x) + \frac{1}{5040}L(x, x, x, x, x, x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^8). \end{aligned} \quad (4.41)$$

As funções multilineares simétricas $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$, $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ e $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, onde x, y e $z \in \mathbb{R}^3$ para o sistema dado em (1.25) são da forma

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{2as\alpha x_1 y_1}{(R-s)(1-Rs)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{2s^2 x_1 y_1 z_1}{(R-s)(1-Rs)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D(x, y, z, u) \equiv 0,$$

$$E(x, y, z, u, v) \equiv 0,$$

$$K(x, y, z, u, v, s) \equiv 0$$

e

$$L(x, y, z, u, v, s, t) \equiv 0$$

respectivamente. Da matriz Jacobiana A_{E_0} no ponto E_0 , da função $B(x, y)$ e $C(x, y, z)$, de q e \bar{q} dados em (4.32) e (4.33) respectivamente, obtemos

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} -\frac{2as\alpha}{(R-s)(1-Rs)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{2as\alpha}{(R-s)(1-Rs)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} -\frac{2s^2}{(R-s)(1-Rs)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

e

$$A_{E_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(R-s)(Rs-1)}{s} & s & -1 \\ 0 & 1 & -R \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Escrevendo $h_{11} = (A_{E_0})^{-1}B(q, \bar{q})$, temos que

$$h_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Escrevendo $h_{20} = (2i\omega I - A_{E_0})^{-1}B(q, q)$, onde I é a matriz identidade de ordem 3, obtemos

$$h_{20} = \begin{pmatrix} -\frac{4a\left(s\left(R\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}-2i\right)-\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}\right)\alpha}{3(Rs-1)\left(-2\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}R+2s\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}+i\right)} \\ -\frac{2a\left(2R\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}-i\right)\alpha}{-6\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}R+6s\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}+3i} \\ -\frac{4a\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}\alpha}{-6\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}R+6s\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}+3i} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Calculando $C_1 = \langle p_N, C(q, q, \bar{q}) \rangle$, onde p_N é o autovetor normalizado e C é a função multilinear $C(x, x, x)$, obtemos

$$C_1 = -\frac{s^2}{(Rs-1)\left(i\sqrt{Rs(1-Rs)}s + R(s^2-1)\right)}, \quad (4.48)$$

escrevendo $P_1 = \langle p_N, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle$, obtemos

$$P_1 = -\frac{4a^2s\left(s\left(R\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}-2i\right)-\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}\right)\alpha^2}{3(Rs-1)^2\left(2(R-s)\sqrt{\frac{s}{R-R^2s}}-i\right)\left(i\sqrt{Rs(1-Rs)}s + R(s^2-1)\right)}, \quad (4.49)$$

escrevendo $P_2 = -2\langle p_N, B(q, h_{11}) \rangle$, obtemos

$$P_2 = 0, \quad (4.50)$$

calculando $G_{21} = [C_1 + P_1 + P_2]$, temos

$$G_{21} = \frac{s \left(\frac{4a^2 \left(s \left(R \sqrt{\frac{s}{R-R^2s}} - 2i \right) - \sqrt{\frac{s}{R-R^2s}} \right) \alpha^2}{2 \sqrt{\frac{s}{R-R^2s}} (s-R) + i} - 3s(Rs-1) \right)}{3(Rs-1)^2 \left(i \sqrt{Rs(1-Rs)} s + R(s^2-1) \right)}. \quad (4.51)$$

Daí temos que o primeiro coeficiente de Lyapunov do sistema (1.25) no ponto de equilíbrio $E_0 = (a, -g(a), a)$, tem a forma

$$l_1 = \frac{s^2 (4a^2 s (2s^2 - Rs - 1) \alpha^2 - (s^2 - 1) (4s^3 - 8Rs^2 + 3R^2 s + R))}{(Rs - 1) (s^3 - 2Rs^2 + R) (4s^3 - 8Rs^2 + 3R^2 s + R)}, \quad (4.52)$$

com $(R, s, \alpha, a) \in \mathcal{Q}_5$.

Por uma breve análise do denominador de l_1 dado em (4.52), verificamos que tem um sinal fixo, ou seja, será sempre negativo. Então o sinal do l_1 dependerá apenas do sinal do seu numerador, ou seja, dependerá apenas do sinal de

$$s^2 (4a^2 s (2s^2 - Rs - 1) \alpha^2 - (s^2 - 1) (4s^3 - 8Rs^2 + 3R^2 s + R)). \quad (4.53)$$

Tomando (4.53) igual a 0 e encontrando R em função de s , α e a , teremos que, para parâmetros em \mathcal{Q}_5 , o primeiro coeficiente de Lyapunov l_1 se anulará quando tivermos

$$R_c = \frac{8s^4 - 4a^2 \alpha^2 s^2 - 9s^2}{6(s^3 - s)} - \frac{\sqrt{16s^8 + 32a^2 \alpha^2 s^6 - 48s^6 + 16a^4 \alpha^4 s^4 - 72a^2 \alpha^2 s^4 + 49s^4 + 40a^2 \alpha^2 s^2 - 18s^2 + 1} + 1}{6(s^3 - s)} \quad (4.54)$$

Sabemos que $s = \alpha(1 - a^2)$. Para valores do parâmetro R diferentes de R_c , temos

- se $R < R_c$, então, $R \in \mathcal{Q}_{51}$, onde $\mathcal{Q}_{51} = \{(\alpha, a) \in \mathcal{Q}_5 / 0 < a < 1, l_1 < 0\}$,
- se $R > R_c$, então, $R \in \mathcal{Q}_{52}$, onde $\mathcal{Q}_{52} = \{(\alpha, a) \in \mathcal{Q}_5 / 0 < a < 1, l_1 > 0\}$.

Teorema 4.2.1 *O ponto de equilíbrio E_0 quando restrito à superfície central é um foco atrator fraco se $R \in \mathcal{Q}_{51}$, e um foco repulsor fraco se $R \in \mathcal{Q}_{52}$, onde $\mathcal{Q}_{51} = \{(\alpha, a) \in \mathcal{Q}_5 / 0 < a < 1, l_1 < 0\}$ e $\mathcal{Q}_{52} = \{(\alpha, a) \in \mathcal{Q}_5 / 0 < a < 1, l_1 > 0\}$.*

Assim sendo, o que faremos agora é encontrar o segundo coeficiente de Lyapunov l_2 para o caso em que $l_1 = 0$, pois, só assim faremos afirmações sobre o comportamento do sistema para esses valores de parâmetros.

4.2.2 Determinação do segundo coeficiente de Lyapunov

Como em (4.2.1), consideraremos a hipersuperfície de parâmetros dados por \mathcal{Q}_5 , com autovalor $\lambda_2 = \omega_0 i$, autovetor q e autovetor adjunto p , dados por (4.32) e (4.36), respectivamente. Para determinarmos o segundo coeficiente de Lyapunov escreveremos os autovetores e vetores complexos em função de ω_0 , dado em (4.31). Portanto os autovetores serão dados por

$$q = \left(1, -\frac{i}{\omega_0}, -Rs - \frac{is}{\omega_0} + 1 \right) e \quad (4.55)$$

$$p = \left(1, -\frac{iR\omega_0}{R-s}, \frac{s(iR\omega_0 + 1)}{R-s} \right). \quad (4.56)$$

O autovetor normalizado p em relação a q é dado por p_N e fazendo-se a normalização obtivemos o seguinte autovetor

$$p_N = (p_{N1}, p_{N2}, p_{N3}),$$

onde

$$p_{N1} = \frac{(R-s)\omega_0}{2R\omega_0 + is(s(R\omega_0 + i)^2 - R\omega_0^2)},$$

$$p_{N2} = \frac{R\omega_0^2}{-R\omega_0^2 - 2iR\omega_0 + s^2(R\omega_0 + i)^2}$$

e

$$p_{N3} = \frac{s\omega_0(R\omega_0 + i)}{-R\omega_0^2 - 2iR\omega_0 + s^2(R\omega_0 + i)^2}.$$

Assim, os vetores \bar{h}_{11} e \bar{h}_{20} definidos como vetores complexos conjugados aos vetores h_{11} e h_{20} , ficam dados por

$$\bar{h}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{h}_{20} = \begin{pmatrix} \frac{4iaR^2\alpha\omega_0^2(2R\omega_0 + i)}{2s - R\omega_0(2\omega_0 + R(6R\omega_0 - 8s\omega_0 + 3i))} \\ -\frac{2aR^2\alpha\omega_0(2R\omega_0 + i)}{2s - R\omega_0(2\omega_0 + R(6R\omega_0 - 8s\omega_0 + 3i))} \\ -\frac{4aR^2\alpha\omega_0^2}{2s - R\omega_0(2\omega_0 + R(6R\omega_0 - 8s\omega_0 + 3i))} \end{pmatrix}$$

Encontraremos o valor de h_{21} resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I & A_{E_0} & q \\ \bar{p} & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$h_{21} = \frac{1}{\mathcal{S}_1} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= (3i\omega_0 R^2 - 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R + 2s)(s^3(R\omega_0 + i)^3 + s^2\omega_0(iR\omega_0 + 1) + \\ &+ R\omega_0(i\omega_0 + 2R(\omega_0^2 + 2iR\omega_0 + 2)) - s(R\omega_0(\omega_0(\omega_0 + R(2R\omega_0 + 9i)) + 2) + i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2R^2\omega_0^2((8R^2\omega_0^2 + 2)s^2 + R\omega_0(-6\omega_0 R^2 + 3iR - 2\omega_0)s + 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(-2iR\omega_0 - 1)) \\ &(R\omega_0 + is(R\omega_0 + i)(s(R\omega_0 + i) - \omega_0) - i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= 2R^2\omega_0(s^2(R\omega_0 + i)^2 + iR\omega_0 - s\omega_0(R\omega_0 + 3i) + 1) \\ &(-2(4R^2\omega_0^2 + 1)s^2 + R\omega_0(6\omega_0 R^2 - 3iR + 2\omega_0)s + 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(2iR\omega_0 + 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= 2iR^2\omega_0^2((2R - s)(s - i(Rs - 1)\omega_0) - 1)(-2(4R^2\omega_0^2 + 1)s^2 + R\omega_0(6\omega_0 R^2 - 3iR + 2\omega_0)s + \\ &+ 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(2iR\omega_0 + 1)). \end{aligned}$$

Seja agora \bar{h}_{21} o vetor complexo conjugado de h_{21} . Temos

$$\bar{h}_{21} = \frac{1}{\mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = & (-3i\omega_0 R^2 - 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R + 2s)(s^3(R\omega_0 - i)^3 + s^2\omega_0(1 - iR\omega_0) + \\ & + R\omega_0(2R(\omega_0^2 - 2iR\omega_0 + 2) - i\omega_0) - s(R\omega_0(\omega_0(\omega_0 + R(2R\omega_0 - 9i)) + 2) - i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & 2R^2\omega_0^2(-is^2(R\omega_0 - i)^2 + R\omega_0 + s\omega_0(iR\omega_0 + 1) + i)((8R^2\omega_0^2 + 2)s^2 - \\ & - R\omega_0(6\omega_0 R^2 + 3iR + 2\omega_0)s + 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(2iR\omega_0 - 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & 2iR^2\omega_0(-is^2(R\omega_0 - i)^2 - R\omega_0 + s\omega_0(iR\omega_0 + 3) - i)((8R^2\omega_0^2 + 2)s^2 - \\ & - R\omega_0(6\omega_0 R^2 + 3iR + 2\omega_0)s + 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(2iR\omega_0 - 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31} = & 2iR^2\omega_0^2((2R - s)(s + i(Rs - 1)\omega_0) - 1)(-2(4R^2\omega_0^2 + 1)s^2 + R\omega_0(6\omega_0 R^2 + 3iR + 2\omega_0)s + \\ & + 4a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(1 - 2iR\omega_0)). \end{aligned}$$

Calculando, então, as funções $C(q, q, q)$ e $B(q, h_{20})$, temos

$$C(q, q, q) = \begin{pmatrix} -\frac{2Rs\omega_0^2}{R-s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B(q, h_{20}) = \begin{pmatrix} -\frac{8a^2 R^3 \alpha^2 \omega_0^4 (2iR\omega_0 + 1)}{(R-s)(-3i\omega_0 R^2 + 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R - 2s)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$h_{30} = (3i\omega_0 I_3 - A_{E_0})^{-1}[C(q, q, q) + 3B(q, h_{20})],$$

temos

$$h_{30} = \begin{pmatrix} -\frac{6iR^2\omega_0^2(3R\omega_0 - i)((8R^2\omega_0^2 + 2)s^2 + R\omega_0(-6\omega_0 R^2 + 3iR - 2\omega_0)s + 12a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(-2iR\omega_0 - 1))}{(8i\omega_0 R^2 - 3(8R^2 - 9sR + 1)\omega_0^2 R + 3s)(3i\omega_0 R^2 - 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R + 2s)} \\ -\frac{2R^2\omega_0(3R\omega_0 - i)((8R^2\omega_0^2 + 2)s^2 + R\omega_0(-6\omega_0 R^2 + 3iR - 2\omega_0)s + 12a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(-2iR\omega_0 - 1))}{(8i\omega_0 R^2 - 3(8R^2 - 9sR + 1)\omega_0^2 R + 3s)(3i\omega_0 R^2 - 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R + 2s)} \\ \frac{6R^2\omega_0^2(-2(4R^2\omega_0^2 + 1)s^2 + R\omega_0(6\omega_0 R^2 - 3iR + 2\omega_0)s + 12a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2(2iR\omega_0 + 1))}{(8i\omega_0 R^2 - 3(8R^2 - 9sR + 1)\omega_0^2 R + 3s)(3i\omega_0 R^2 - 2(3R^2 - 4sR + 1)\omega_0^2 R + 2s)} \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora

$$h_{31} = (2i\omega_0 I_3 - A_{E_0})^{-1} [D(q, q, q, \bar{q}) + 3C(q, q, h_{11}) + 3C(q, \bar{q}, h_{20}) + 3B(h_{20}, h_{11}) + B(\bar{q}, h_{30}) + 3B(q, h_{21}) - 3g_{21}h_{30}].$$

Então

$$h_{31} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix},$$

onde os termos σ_{11} , σ_{21} e σ_{31} são muito complexo e estão mostrados no Anexo II. Como h_{22} é dado por

$$h_{22} = -(A_{E_0})^{-1} [d(q, q, \bar{q}, \bar{q}) + 4c(q, \bar{q}, h_{11}) + c(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + c(q, q, \bar{h}_{20})2b(h_{11}, h_{11}) + 2b(h_{11}, h_{11}) + 2b(q, \bar{h}_{21}) + 2b(\bar{q}, h_{21}) + b(\bar{h}_{20}, h_{20}) - 4h_{11}l_1],$$

obtemos

$$h_{22} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix},$$

cujos termos σ_{11} , σ_{21} e σ_{31} também aparecem no Anexo II pelo mesmo motivo acima.

Desta forma, como foi visto em (2.47) o segundo coeficiente de Lyapunov l_2 é dado por

$$l_2 = \frac{1}{12} \operatorname{Re} g_{32},$$

onde

$$\begin{aligned} g_{32} = & (\langle p, E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) + D(q, q, q, \bar{h}_{20}) + 3D(q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + 6D(q, q, \bar{q}, h_{11}) \\ & + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + 3C(q, q, \bar{h}_{21}) + 6C(q, \bar{q}, h_{21}) + 3C(q, \bar{h}_{20}, h_{20}) \\ & + 6C(q, h_{11}, h_{11}) + 6C(\bar{q}, h_{20}, h_{11}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) + 3B(q, h_{22}) \\ & + B(\bar{h}_{20}, h_{30}) + 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) + 6B(h_{11}, h_{21}) \rangle), \end{aligned}$$

assim, com $\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{R(1-Rs)}}$, temos

$$l_2(R, s, \alpha, a) = \frac{\phi_1(R, s, \alpha, a)}{\phi_2(R, s, \alpha, a)},$$

onde

$$\begin{aligned}
\phi_1(R, s, \alpha, a) = & s^3(576((3s^2 - 13)s^4 + 2a^2(15 - 7s^2)\alpha^2s^2 + 2a^4(14s^2 - 11)\alpha^4)s^{13} \quad (4.57) \\
& + 16R(-9(12s^6 + 28s^4 - 393s^2 - 49)s^4 - a^2(72s^6 - 1428s^4 + 2908s^2 + 1403)\alpha^2s^2 \\
& + 2a^4(-648s^6 - 648s^4 + 202s^2 + 319)\alpha^4)s^{10} + 1944R^{11}(3 - 2s^2)s^8 \\
& - 162R^{10}(-240s^4 + 360s^2 + 64a^2\alpha^2 + 27)s^7 \\
& + 4R^2(9(320s^8 - 504s^6 - 5376s^4 - 2047s^2 + 273)s^4 \\
& + a^2(15312s^8 - 24080s^6 - 26120s^4 + 51810s^2 - 6113)\alpha^2s^2 \\
& + 8a^4(2340s^8 - 4456s^6 + 6501s^4 - 2907s^2 + 312)\alpha^4)s^7 + 27R^9(128a^4s^2(2s^2 + 1)\alpha^4 \\
& - 32a^2(8s^6 - 144s^4 + 21s^2 - 4)\alpha^2 + 3s^2(-2020s^6 + 2908s^4 + 803s^2 - 57))s^4 \\
& + R^3(-9(3s^2(4(356s^6 - 748s^4 - 4271s^2 - 2583)s^2 + 2399) - 395)s^4 \\
& - 8a^2(45504s^{10} - 90986s^8 - 47295s^6 + 73730s^4 - 13917s^2 + 717)\alpha^2s^2 \\
& - 32a^4(930s^{10} - 12389s^8 + 17331s^6 - 6465s^4 + 852s^2 - 27)\alpha^4)s^4 \\
& + 18R^8(-16a^4s^2(208s^4 + 80s^2 - 11)\alpha^4 \\
& + 2a^2(2284s^8 - 18420s^6 + 4755s^4 - 1118s^2 + 108)\alpha^2 \\
& + s^2(20971s^8 - 27363s^6 - 19761s^4 + 1612s^2 + 66))s^3 \\
& + 3R^7(32a^4s^2(2276s^6 + 658s^4 - 247s^2 + 3)\alpha^4 \\
& - 8a^2(15962s^{10} - 83569s^8 + 27243s^6 - 6730s^4 + 1079s^2 - 66)\alpha^2 \\
& + 3s^2(-58129s^{10} + 63391s^8 + 109044s^6 - 3772s^4 - 2282s^2 + 174))s^2 \\
& + 2R^6(-16a^4s^3(13413s^8 + 3574s^6 - 3129s^4 + 153s^2 + 49)\alpha^4 \\
& + 2a^2s(229275s^{12} - 911954s^{10} + 302796s^8 - 58006s^6 + 11830s^4 - 1554s^2 + 68)\alpha^2 \\
& + 9s^3(25200s^{12} - 21096s^{10} - 85414s^8 - 7272s^6 + 5220s^4 - 568s^2 + 21)) \\
& + R^5(32a^4s^2(14571s^{10} + 7007s^8 - 9456s^6 + 1539s^4 + 77s^2 - 21)\alpha^4 \\
& - 8a^2(153183s^{14} - 493586s^{12} + 120919s^{10} + 13578s^8 - 3121s^6 - 338s^4 + 63s^2 - 2)\alpha^2 \\
& - 9s^2(s^2(2(14242s^{10} - 10542s^8 - 81435s^6 - 23735s^4 + 9960s^2 - 1152)s^2 + 121) - 3)) \\
& + 2R^4(9(5872s^{12} - 7290s^{10} - 51786s^8 - 27676s^6 + 8815s^4 - 837s^2 + 29)s^5 \\
& + 2a^2(2s^2(114960s^{10} - 300177s^8 + 787s^6 + 78641s^4 - 17928s^2 + 1285) - 65)\alpha^2s^3 \\
& - 16a^4(7113s^{12} + 12477s^{10} - 17773s^8 + 5042s^6 - 387s^4 - 25s^2 + 2)\alpha^4s))
\end{aligned}$$

e

$$\phi_2(R, s) = 18(Rs - 1)^2 (s^3 - 2Rs^2 + R)^3 (4s^3 - 8Rs^2 + 3R^2s + R)^3 \quad (4.58)$$

$$(9s^3 - 18Rs^2 + 8R^2s + R),$$

com $(R, s, \alpha, a) \in \mathcal{Q}_5$.

A partir de uma análise de (4.58) vemos que $\phi_2(R, s) > 0$ para todo $(R, s) \in \mathcal{Q}_5$. Portanto, o sinal de l_2 dependerá somente do seu numerador. Porém, como nos interessa saber o sinal de l_2 apenas sobre a hipersuperfície $\{l_1 = 0\}$, verificaremos que l_2 troca de sinal em \mathcal{Q}_5 sobre a hipersuperfície $\{l_1 = 0\}$. Veja a tabela 4.1.

Tabela 4.1: Sinal do segundo coeficiente de Lyapunov l_2 .

a	α	R_c	l_1	l_2
0.1	0.96	1.008102	0	-1518.356
0.2	0.93	0.951557	0	-66.225
0.3	0.9	0.8554342	0	-10.849
0.4	0.9	1.1926366	0	25.752
0.5	0.9	1.151699	0	1.549
0.6	0.9	1.0597268	0	0.0967
0.7	0.9	0.921659	0	0.00104
0.8	0.9	0.7297166	0	-0.000105
0.9	0.9	0.4519240	0	0.000305

O que teremos que fazer agora, é encontrar o terceiro coeficiente de Lyapunov l_3 para o caso em que $l_1 = 0$ e $l_2 = 0$, pois somente assim podemos afirmar sobre o comportamento do sistema para esses valores de parâmetros. Para o cálculo do terceiro coeficiente de Lyapunov adotaremos um valor para o parâmetro a e determinaremos os valores dos parâmetros R , α e s . Faremos este estudo do ponto de vista numérico, pois analiticamente as contas são enormes e os sinais dos termos envolvidos são de difícil determinação.

4.2.3 Determinação do terceiro coeficiente de Lyapunov para $a = 0.5$

Considere o sistema de equações (1.25) para $a = 0,5$. Determinaremos o terceiro coeficiente de Lyapunov do ponto de vista numérico, pois analiticamente as contas são enormes e os sinais dos termos envolvidos são de difícil determinação. Para isso enunciaremos dois teoremas onde usaremos os valores numéricos obtidos para os parâmetros na região \mathcal{Q}_5 .

Teorema 4.2.2 *Para o sistema de equações (1.25), existe um único ponto,*

$$\mathcal{M} = (\alpha, R_c, a),$$

com

$$\alpha = 0.883058788431552776450633056223718698816791178336,$$

$$R_c = 1.081053743852499679959459520637571495775330446879,$$

$$a = 0.5,$$

onde as hipersuperfícies $l_1 = 0$ e $l_2 = 0$ se interceptam transversalmente.

Demonstração 4.2.2. O ponto \mathcal{M} é obtido através da intersecção das hipersuperfícies $l_1 = 0$ e $l_2 = 0$. Fazendo-se,

$$0 = \frac{9}{16}\alpha^2 \left(\frac{3}{4} \left(\frac{9\alpha^2}{8} - \frac{3R\alpha}{4} - 1 \right) \alpha^3 + \left(1 - \frac{9\alpha^2}{16} \right) \left(\frac{27\alpha^3}{16} - \frac{9R\alpha^2}{2} + \frac{9R^2\alpha}{4} + R \right) \right),$$

$$\begin{aligned} 0 = & s^3(576((3s^2 - 13)s^4 + 2a^2(15 - 7s^2)\alpha^2s^2 + 2a^4(14s^2 - 11)\alpha^4)s^{13} + \\ & + 16R(-9(12s^6 + 28s^4 - 393s^2 - 49)s^4 - a^2(72s^6 - 1428s^4 + 2908s^2 + 1403)\alpha^2s^2 + \\ & + 2a^4(-648s^6 - 648s^4 + 202s^2 + 319)\alpha^4)s^{10} + 1944R^{11}(3 - 2s^2)s^8 - \\ & - 162R^{10}(-240s^4 + 360s^2 + 64a^2\alpha^2 + 27)s^7 + \\ & + 4R^2(9(320s^8 - 504s^6 - 5376s^4 - 2047s^2 + 273)s^4 + \\ & + a^2(15312s^8 - 24080s^6 - 26120s^4 + 51810s^2 - 6113)\alpha^2s^2 + \\ & + 8a^4(2340s^8 - 4456s^6 + 6501s^4 - 2907s^2 + 312)\alpha^4)s^7 + 27R^9(128a^4s^2(2s^2 + 1)\alpha^4 - \\ & - 32a^2(8s^6 - 144s^4 + 21s^2 - 4)\alpha^2 + 3s^2(-2020s^6 + 2908s^4 + 803s^2 - 57))s^4 + \\ & + R^3(-9(3s^2(4(356s^6 - 748s^4 - 4271s^2 - 2583)s^2 + 2399) - 395)s^4 - \\ & - 8a^2(45504s^{10} - 90986s^8 - 47295s^6 + 73730s^4 - 13917s^2 + 717)\alpha^2s^2 - \\ & - 32a^4(930s^{10} - 12389s^8 + 17331s^6 - 6465s^4 + 852s^2 - 27)\alpha^4)s^4 + \\ & + 18R^8(-16a^4s^2(208s^4 + 80s^2 - 11)\alpha^4 + \\ & + 2a^2(2284s^8 - 18420s^6 + 4755s^4 - 1118s^2 + 108)\alpha^2 + \\ & + s^2(20971s^8 - 27363s^6 - 19761s^4 + 1612s^2 + 66))s^3 + \\ & + 3R^7(32a^4s^2(2276s^6 + 658s^4 - 247s^2 + 3)\alpha^4 - \\ & - 8a^2(15962s^{10} - 83569s^8 + 27243s^6 - 6730s^4 + 1079s^2 - 66)\alpha^2 + \\ & + 3s^2(-58129s^{10} + 63391s^8 + 109044s^6 - 3772s^4 - 2282s^2 + 174))s^2 + \\ & + 2R^6(-16a^4s^3(13413s^8 + 3574s^6 - 3129s^4 + 153s^2 + 49)\alpha^4 + \\ & + 2a^2s(229275s^{12} - 911954s^{10} + 302796s^8 - 58006s^6 + 11830s^4 - 1554s^2 + 68)\alpha^2 + \\ & + 9s^3(25200s^{12} - 21096s^{10} - 85414s^8 - 7272s^6 + 5220s^4 - 568s^2 + 21)) + \\ & + R^5(32a^4s^2(14571s^{10} + 7007s^8 - 9456s^6 + 1539s^4 + 77s^2 - 21)\alpha^4 - \\ & - 8a^2(153183s^{14} - 493586s^{12} + 120919s^{10} + 13578s^8 - 3121s^6 - 338s^4 + 63s^2 - 2)\alpha^2 - \\ & - 9s^2(s^2(2(14242s^{10} - 10542s^8 - 81435s^6 - 23735s^4 + 9960s^2 - 1152)s^2 + 121) - 3)) \\ & + 2R^4(9(5872s^{12} - 7290s^{10} - 51786s^8 - 27676s^6 + 8815s^4 - 837s^2 + 29)s^5 + \\ & + 2a^2(2s^2(114960s^{10} - 300177s^8 + 787s^6 + 78641s^4 - 17928s^2 + 1285) - 65)\alpha^2s^3 - \\ & - 16a^4(7113s^{12} + 12477s^{10} - 17773s^8 + 5042s^6 - 387s^4 - 25s^2 + 2)\alpha^4s), \end{aligned}$$

obtemos uma única solução real e positiva

$$(\alpha, R_c) = (0.8830587884315527764506330562237, 1.0810537438524996799594595206375).$$

Substituindo este valor na expressão $s = 3\alpha/4$, obtemos

$$s = 0.6622940913236645823379747921678.$$

Substituindo os parâmetros nas expressões de l_1 e l_2 , verificamos que ambos são nulos.

□

Teorema 4.2.3 *Considere parâmetros em $\mathcal{M} = (\alpha, R_c, a)$, onde*

$$\alpha = 0.8830587884315527764506330562237,$$

$$R_c = 1.0810537438524996799594595206375$$

e

$$a = 0.5.$$

Para estes valores de parâmetros, o sistema de equações diferenciais (1.25), possui um ponto de Hopf transversal de codimensão três em E_0 , o qual é assintoticamente estável.

Demonstração 4.2.3. Aplicando o ponto

$$(\alpha, R_c) = (0.8830587884315527764506330562237, 1.0810537438524996799594595206375),$$

nas expressões (2.37), (2.39), (2.40), (2.41), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49), obteremos

$$\left\{ \begin{array}{l} q = (1, -0.68088865655618791681271821949i, 0.28402449304316307789453554696- \\ \quad - 0.45094853408647120943358615422i), \\ p_N = (0.2777478336601917003110977493 + 0.13668936771684739116354793698i, \\ \quad - 0.5182521231659057403460723094 + 1.0530695027963297500139457482i, \\ \quad 0.7825105643478174794124548771 - 0.4812590852721802685463886913i), \\ h_{11} = (0, -0.8830587884315527764506330562, 0), \\ h_{20} = (-0.6693225154508179642221934287 + 1.6879064967347555613610471529i, \\ \quad 0.5746381934770946504286028949 + 0.22786705417405788665217210805i, \\ \quad 0.4232036306404768531394925543 + 0.34405720534006509048773788655i), \\ g_{21} = -2.863579783642096310265231625i, \\ l_1 = 0, \\ h_{30} = (-5.309608827325050362137948276 - 2.180751387080078631748174544i, \\ \quad - 0.4949496274106660250039493798 + 1.2050841404254099629895867787i, \\ \quad - 0.6626647925817242141912733994 + 0.9756072100641963690164233470i), \\ h_{21} = (-1.835783125411037995712233956 - 0.009195349824693891292011612i, \\ \quad - 0.006261009388700001716588579 - 0.077618492335919546848866490i, \\ \quad 0.267438976434386036367743836 + 0.445439085184277421440300236i), \\ h_{22} = (0, 5.34610773444043651021073928, 0), \\ h_{40} = (6.82945673675028384612355937 - 28.03901290236397835035358848i, \\ \quad - 4.772861456563057154359025305 - 1.162524905623626972745326513i, \\ \quad - 4.142963899633670521205303275 - 1.727711686112114161420550460i), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
h_{31} = (-3.49934475097153972032946820 - 20.63642205076057749808454754i, \\
\quad - 5.34492662682111406665501732 + 1.85776766589460054830429243i, \\
\quad - 5.39041383020363116787945046 + 0.41071974549295476286682003i), \\
h_{32} = (45.5956450853649750511182998 - 1.9980829088901435582927881i, \\
\quad - 1.3970947412432188003846701 + 2.6969697657048517346293159i, \\
\quad - 8.4319971330053393229319086 - 8.7749662002354493883235284i), \\
g_{32} = 73.7615474720559972120669200i \\
l_2 = 0 \\
h_{41} = (163.5808236755712201780300657 - 28.0860299967383619787658874i, \\
\quad - 8.3045711818997025382650235 - 32.4274802761709418318560816i, \\
\quad - 1.9818185271246045501285386 - 30.9547739518383246136990890i), \\
h_{42} = (374.20226016983987557005013 + 695.12752756889172013249736i, \\
\quad 137.245952791330465439112279 - 135.794608493475733864547226i, \\
\quad 164.982719132618133934038848 - 97.243396769585272839648032i), \\
h_{33} = (0, -125.421885098729059000640117, 0), \\
H_{43} = (-9508.7627043645967227578271 - 9673.8152596341930676437418i, 0, 0), \\
g_{43} = -1318.7305506771048658752008 - 3986.6279934214386430560590i,
\end{array} \right.$$

$$l_3 = \frac{\text{Reg}_{43}}{144} = -9.157851046368783790800005 < 0,$$

onde afirmamos a estabilidade do ponto de equilíbrio para os parâmetros no ponto \mathcal{M} .

Como $l_3 < 0$ em \mathcal{M} , a expressão (2.57) sem o termo $\mathcal{O}(|u|^8)$ será analisada com $s = -1$, a partir do seguinte sistema em coordenadas polares associados a ela:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\nu_c + l_1\rho^2 + l_2\rho^4 - \rho^6), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (4.59)$$

A análise deste sistema para obtenção do seu respectivo diagrama de bifurcação, é feita segundo a exposição na seção (2.4). Teremos um diagrama de bifurcação análogo ao da Figura 2.10 visto no Capítulo 2.

□

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Neste capítulo, verificaremos numericamente a existência de bifurcações de Hopf nos sistemas (1.25) e (3.1) em torno do equilíbrio, dependentes dos parâmetros ν , α , R e a . Para isto, utilizaremos as regiões obtidas no Capítulo 3 e os resultados obtidos no Capítulo 4. Fixaremos os parâmetros α e R para o sistema (3.1) e calcularemos ν . Para o sistema (1.25) fixaremos α , R e a e encontraremos ν . Com isso, mostraremos o surgimento de órbitas periódicas instáveis e estáveis para tais sistemas, e assim confirmar o surgimento das bifurcações de Hopf para um conjunto específico de dados. Todas as simulações a serem apresentadas foram feitas com o auxílio do Software MATHEMATICA 6.

5.1 Estudo de casos específicos

Estudaremos o comportamento das soluções dos sistemas (1.25) e (3.1). Para o sistema (3.1), onde $a = 0$, o único ponto de equilíbrio é a origem $E = (0, 0, 0)$ e para o sistema (1.25) o equilíbrio é dado pelo ponto $E_0 = (a, -g(a), a)$, onde

$$g(x) = \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right).$$

Estudaremos os seguintes casos.

5.1.1 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_6

Tomemos parâmetros $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_6$. Pelo Teorema 3.1.1 o equilíbrio E é localmente assintoticamente estável e, portanto localmente atrator. Na Figura 5.1 foi feita uma simu-

lação do sistema (3.1) para os seguintes valores dos parâmetros em \mathcal{W}_6 : $\alpha = 0.5$, $R = 1.5$ e $\nu = 2.1$. Neste caso, $\nu_c = 2$.

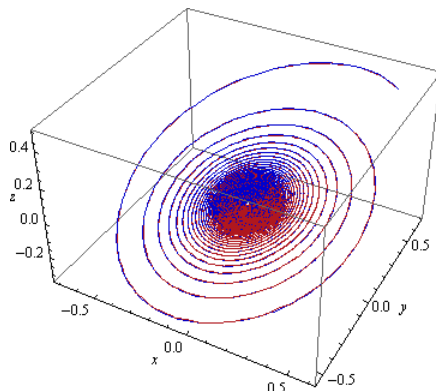


Figura 5.1: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 2.1)$. Intervalo de integração: $[0, 600]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0.5)$. Para $\nu > \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto localmente atrator.

5.1.2 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_5

Como vimos no Teorema 3.1.1, se o conjunto de parâmetros $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_5$, o ponto de equilíbrio E é não hiperbólico. No Capítulo 4 mostramos que o equilíbrio E é assintoticamente estável e, portanto, um atrator fraco para o fluxo do sistema (3.1) restrito à superfície central. Na Figura 5.2 foi feita uma simulação do sistema (3.1) para os seguintes valores dos parâmetros em \mathcal{W}_5 : $\alpha = 0.5$, $R = 1.5$ e $\nu = \nu_c = 2$.

5.1.3 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{W}_4

Para parâmetros $(\alpha, R, \nu) \in \mathcal{W}_4$, próximos a \mathcal{W}_5 , teremos o surgimento de uma órbita periódica atratora. Na Figura 5.3 foi feita uma simulação do sistema (3.1) para os seguintes valores dos parâmetros em \mathcal{W}_4 : $\alpha = 0.5$, $R = 1.5$ e $\nu = 1.9$. Note que $\nu < \nu_c = 2$.

5.1.4 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_6

Como vimos no Teorema 3.2.2, se o conjunto de parâmetros $(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{Q}_6$ o equilíbrio E_0 é localmente assintoticamente estável. Na Figura 5.4 foi feita uma simulação do sistema

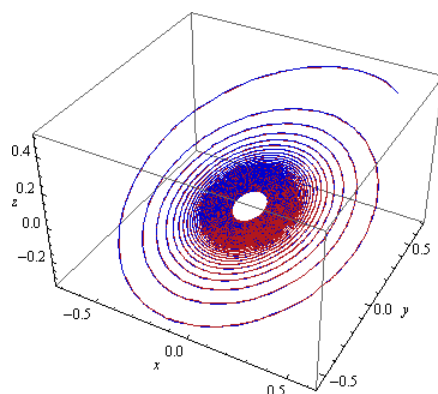


Figura 5.2: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 2)$. Intervalo de integração: $[0, 900]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0.5)$. Para $\nu = \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto, um atrator fraco para o fluxo do sistema (3.1) restrito à superfície central.

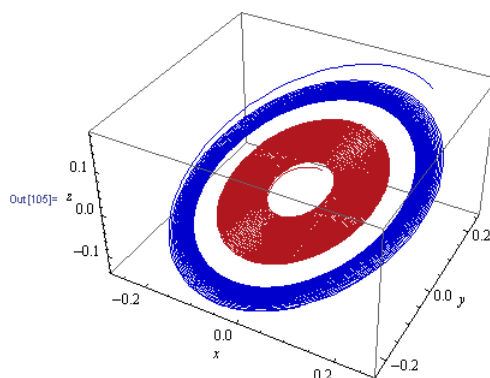


Figura 5.3: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores dos parâmetros: $(\alpha, R, \nu) = (0.5, 1.5, 1.9)$. Intervalo de integração: $[0, 300]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.18, 0.18, 0.18)$ para a órbita externa e $(x, y, z) = (0.02, 0.05, 0.02)$ para a órbita interna ao ciclo limite. Para $\nu < \nu_c$ o equilíbrio $E = (0, 0, 0)$ é instável e, portanto, teremos o surgimento de uma órbita periódica atratora.

(1.25) para os seguintes valores dos parâmetros em \mathcal{Q}_6 :

$$\alpha = 0.883058788431552776450633056224, \quad R = 1.08105374385249967995945952064,$$

$$\nu = 6, \quad a = 0.5.$$

Note que $\nu > \nu_c = 5.5683978406308491058824144591$.

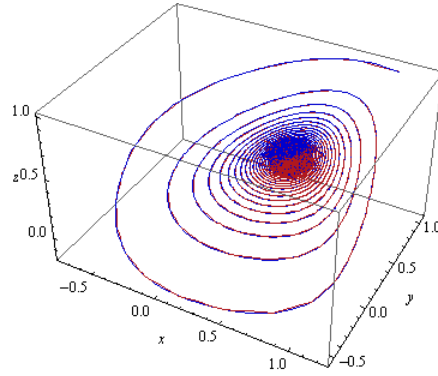


Figura 5.4: Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 6$ e $a = 0.5$. Intervalo de integração: $[0, 500]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Para $\nu > \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128355873206817436, 0.5)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto localmente atrator.

5.1.5 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_5

Como vimos no Teorema 3.2.2, se o conjunto de parâmetros $(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{Q}_5$, o ponto de equilíbrio E_0 é não hiperbólico. Mostramos no Capítulo 4 que E_0 , para $a = 1/2$, é assintoticamente estável e, portanto um atrator fraco para o fluxo do sistema (1.25) restrito à superfície central. Na Figura 5.5 foi feita uma simulação do sistema (1.25) para os seguintes valores dos parâmetros em \mathcal{Q}_5 :

$$\alpha = 0.883058788431552776450633056224, \quad R = 1.08105374385249967995945952064,$$

$$\nu = \nu_c = 5.5683978406308491058824144591, \quad a = 0.5.$$

5.1.6 Parâmetros pertencentes à região \mathcal{Q}_9

Para parâmetros $(\alpha, \nu, R, a) \in \mathcal{Q}_9$, próximos a região \mathcal{Q}_5 , o ponto de equilíbrio E_0 é instável de acordo com o Teorema 3.2.2 e teremos o surgimento de três ciclos limites para valores dos parâmetros quando: $l_2 > 0$ e $l_1 < 0$, visto que $l_3 < 0$.

$$\alpha = 0.883058788431552776450633056224, \quad R = 1.08105374385249967995945952064,$$

$$\nu = 5.5, \quad a = 0.5.$$

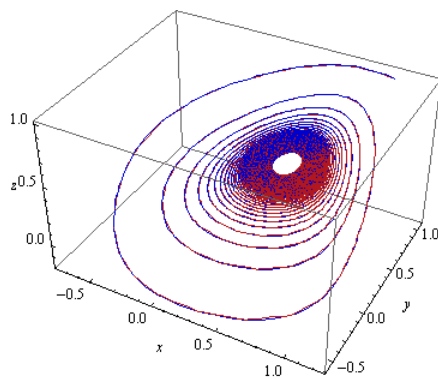


Figura 5.5: Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 5.5683978406308491058824144591$ e $a = 0.5$. Intervalo de integração: $[0, 640]$. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.003, 0.003, 0.003)$. Para $\nu = \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128\dots, 0.5)$ é localmente assintoticamente estável e, portanto um atrator fraco para o fluxo do sistema (1.25) restrito à superfície central.

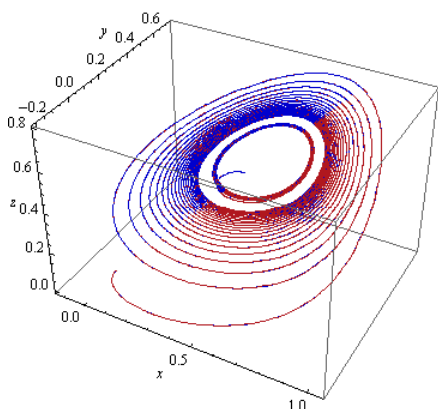


Figura 5.6: Retrato de fase do sistema (1.25) para valores dos parâmetros: $\alpha = 0.8830587884315\dots$, $R = 1.08105374385249967995945952064$, $\nu = 5.5$ e $a = 0.5$. Intervalos de integração: $[0, 90]$ para a órbita externa e $[0, 60]$ para a órbita interna. Condições iniciais: $(x, y, z) = (0.003, 0.003, 0.003)$ para a órbita externa e $(x, y, z) = (0.4, 0.4, 0.4)$ para a órbita interna. Para $\nu < \nu_c$ o equilíbrio $E_0 = (0.5, 0.404735278031128\dots, 0.5)$ é instável e teremos o surgimento de três ciclos limites para valores dos parâmetros quando $l_2 > 0$ e $l_1 < 0$, visto que $l_3 < 0$.

Note que $\nu < \nu_c = 5.5683978406308491058824144591$.

Vale destacar que simulações numéricas para obtenções dos três ciclos limites previstos

no estudo das bifurcações de Hopf de codimensão 3 é muito difícil.

Conclusões

Neste trabalho estudamos o comportamento dinâmico do sistema

$$\begin{cases} x' = \nu \left(-g(x) + \frac{z-x}{R} - y \right), \\ y' = x - a, \\ z' = \frac{x-z}{R}, \end{cases}$$

onde $g(x) = \alpha(x^3/3 - x)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nu > 0$, $a \geq 0$ e $R > 0$, que representa uma possível extensão de um modelo das equações diferenciais de um circuito elétrico conhecido na literatura como circuito de van der Pol. A obtenção dessas equações foi detalhada no Capítulo 1. O sistema em questão possui um único ponto de equilíbrio para todos os valores admissíveis dos parâmetros. A análise linear da estabilidade deste equilíbrio foi feita no Capítulo 3.

No Capítulo 4 indicamos as condições para que o ponto de equilíbrio E , no caso $a = 0$ e E_0 , no caso $0 < a < 1$, seja um ponto de Hopf e analisamos estas condições numericamente. No Capítulo 5, obtemos conclusões sobre como as soluções desse sistema se comportam, conforme variam os valores dos parâmetros.

Para o entendimento das bifurcações do sistema, fizemos, no Capítulo 2, um resumo do estudo das bifurcações de Hopf em sistemas n -dimensionais, utilizando o método da projeção.

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se calcular o terceiro coeficiente de Lyapunov do sistema de equações diferenciais (1.25) de forma analítica. Com isso, poderíamos verificar se o mesmo é de codimensão maior. Pode-se ainda estudar o comportamento caótico do sistema (1.25), inclusive com a implementação do mesmo em laboratório, comparando com as medidas que podem ser feitas.

Bibliografia

- [1] E. FREIRE, E. GAMERO E A.J. RODRIGUES–LUIS, *An analytical and numerical study of a modified van der Pol oscillator*, Journal of Sound and Vibration, **256** (2002), 755–771.
- [2] D. HALLIDAY, R. RESNICK E J. WALKER, *Fundamentals of Physics*, fifth edition, John Wiley & Sons, 1996.
- [3] L.S. PONTRYAGIN, *Ordinary Differential Equations*, Addison–Wesley Publishing Company Inc., 1962.
- [4] M. HIRSCH, S. SMALE E R. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, second edition, Academic Press, San Diego, 2004.
- [5] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer–Verlag, New York, 2004.
- [6] J. SOTOMAYOR, L.F. MELLO E D.C. BRAGA, *Stability and Hopf bifurcation in the Watt governor system*, Commum. Appl. Nonlinear Anal., **13** (2006), 1–17.
- [7] J. SOTOMAYOR, L.F. MELLO E D.C. BRAGA, *Bifurcation analysis of the Watt governor system*, Computational and Applied Mathematics, **26** (2007), 19–44.
- [8] J. SOTOMAYOR, L.F. MELLO E D.C. BRAGA, *Stability and Hopf bifurcation in an hexagonal governor system*, Nonlinear Anal.: Real World Appl., **9** (2008), 889–898.
- [9] F. TAKENS, *Unfoldings of certain singularities of vectorfields: generalized Hopf bifurcations*, J. Diff. Equat., **14** (1973), 476–493.

- [10] S. WOLFRAM, *The Mathematica Book*, fifth edition, Wolfram Media Inc., Champaign, 2003.

Anexo I

Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov para $a = 0$ em R^3

O sistema é dado por

$$a = 0$$

$$0$$

$$f1[x_, y_, z_] := -\alpha * v * \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + v * \frac{(z - x)}{R} - v * y$$

$$f2[x_, y_, z_] := x - a$$

$$f3[x_, y_, z_] := \frac{(x - z)}{R}$$

Encontrando os Pontos de Equilíbrio

```
s2 = Refine[Simplify[Solve[{f1[x, y, z] == 0, f2[x, y, z] == 0, f3[x, y, z] == 0}, {x, y, z}],
  alpha ∈ Reals && 0 < alpha < 1 && R ∈ Reals && alpha < R < 1/alpha && v ∈ Reals && v > 0];
```

```
e = FullSimplify[{x, y, z} /. s2[[1]]]
```

```
{0, 0, 0}
```

A Jacobiana é dada por

```
Df[{x_, y_, z_}] := {
  {Derivative[1, 0, 0][f1][x, y, z],
   Derivative[0, 1, 0][f1][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f1][x, y, z]},
  {Derivative[1, 0, 0][f2][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f2][x, y, z],
   Derivative[0, 0, 1][f2][x, y, z]}, {Derivative[1, 0, 0][f3][x, y, z],
   Derivative[0, 1, 0][f3][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f3][x, y, z]}
```

```
MatrixForm[Df[{x, y, z}]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{v}{R} - (-1 + x^2) \alpha v & -v & \frac{v}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

A Superfície de Hopf é dada por

$$v = \frac{\alpha}{(R - \alpha)(1 - R\alpha)}$$

$$\frac{\alpha}{(R - \alpha)(1 - R\alpha)}$$

Encontrando os Autovalores

Matriz Jacobiana em (e)

$$\mathbf{A}[\mathbf{e}] = \mathbf{Df}[\mathbf{e}]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} + \frac{\alpha^2}{(R-\alpha)(1-R\alpha)}, -\frac{\alpha}{(R-\alpha)(1-R\alpha)}, \frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} \right\}, \right. \\ \left. \{1, 0, 0\}, \left\{ \frac{1}{R}, 0, -\frac{1}{R} \right\} \right\}$$

$$\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A}[\mathbf{e}]]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} + \frac{\alpha^2}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} & -\frac{\alpha}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} & \frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

Encontrando o Polinômio Característico

$$\mathbf{P}[\lambda_] := \mathbf{Det}[\mathbf{A}[\mathbf{e}] - \lambda * \mathbf{IdentityMatrix}[3]]$$

$$\mathbf{P}[\lambda]$$

$$-\frac{\alpha}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} - \frac{\alpha\lambda}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} + \\ \frac{\alpha^2\lambda}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} - \frac{\lambda^2}{R} - \frac{\alpha\lambda^2}{R(R-\alpha)(1-R\alpha)} + \frac{\alpha^2\lambda^2}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} - \lambda^3$$

Logo os autovalores são dados por

$$\lambda_n = \mathbf{Refine}\left[\mathbf{FullSimplify}[\mathbf{Eigenvalues}[\mathbf{A}[\mathbf{e}]]], \alpha \in \mathbf{Reals} \ \&\& \ 0 < \alpha < 1 \ \&\& \ R \in \mathbf{Reals} \ \&\& \ \alpha < R < \frac{1}{\alpha}\right];$$

$$\lambda_1 = \lambda_n[[1]]$$

$$\frac{1}{-R + \alpha}$$

$$\lambda_2 = \lambda_n[[2]]$$

$$i \sqrt{-\frac{\alpha}{R(-1 + R\alpha)}}$$

$$\lambda_3 = \lambda_n[[3]]$$

$$-i \sqrt{-\frac{\alpha}{R(-1 + R\alpha)}}$$

$$\omega = \sqrt{-\frac{\alpha}{R(-1 + R\alpha)}}$$

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{R(-1 + R\alpha)}}$$

Encontrando os Autovetores

$\mathbf{qn} = \text{Refine}[\text{FullSimplify}[\text{Eigenvectors}[\mathbf{A}[\mathbf{e}]]], \alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ 0 < \alpha < 1 \ \&\& \ \mathbf{R} \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha < \mathbf{R} < \frac{1}{\alpha}];$

$\mathbf{q1} = \mathbf{qn}[[1]]$

$$\left\{ -\frac{\alpha}{\mathbf{R} - \alpha}, \alpha, 1 \right\}$$

$\mathbf{q2} = \mathbf{qn}[[2]]$

$$\left\{ 1 + \mathbf{i} \mathbf{R} \sqrt{-\frac{\alpha}{\mathbf{R}(-1 + \mathbf{R}\alpha)}}, \mathbf{R} - \mathbf{i} \sqrt{-\frac{\mathbf{R}(-1 + \mathbf{R}\alpha)}{\alpha}}, 1 \right\}$$

$\mathbf{q3} = \mathbf{qn}[[3]]$

$$\left\{ 1 - \mathbf{i} \mathbf{R} \sqrt{-\frac{\alpha}{\mathbf{R}(-1 + \mathbf{R}\alpha)}}, \mathbf{R} + \mathbf{i} \sqrt{-\frac{\mathbf{R}(-1 + \mathbf{R}\alpha)}{\alpha}}, 1 \right\}$$

Trabalharemos com

Autovalor

$\lambda = \lambda 2$

$$\mathbf{i} \sqrt{-\frac{\alpha}{\mathbf{R}(-1 + \mathbf{R}\alpha)}}$$

- Autovetor associado a λ

$$\mathbf{q} = \left\{ 1, -\frac{\mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)}}{\alpha}, 1 - \mathbf{R}\alpha - \mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)} \right\}$$

$$\left\{ 1, -\frac{\mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)}}{\alpha}, 1 - \mathbf{R}\alpha - \mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)} \right\}$$

- O Complexo Conjugado de \mathbf{q} é

$\mathbf{qb} = \text{FullSimplify}[\text{Conjugate}[\mathbf{q}], \alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ 0 < \alpha < 1 \ \&\& \ \mathbf{R} \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha < \mathbf{R} < 1/\alpha]$

$$\left\{ 1, \frac{\mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)}}{\alpha}, 1 - \mathbf{R}\alpha + \mathbf{i} \sqrt{\mathbf{R}\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha)} \right\}$$

- O Autovetor Adjunto associado a \mathbf{q} é

$$\mathbf{p} = \left\{ 1, -\frac{\mathbf{i} \sqrt{\alpha(\mathbf{R} - \mathbf{R}^2\alpha)}}{(\mathbf{R} - \alpha)(1 - \mathbf{R}\alpha)}, \frac{\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha + \mathbf{i} \sqrt{\alpha(\mathbf{R} - \mathbf{R}^2\alpha)})}{(\mathbf{R} - \alpha)(1 - \mathbf{R}\alpha)} \right\}$$

$$\left\{ 1, -\frac{\mathbf{i} \sqrt{\alpha(\mathbf{R} - \mathbf{R}^2\alpha)}}{(\mathbf{R} - \alpha)(1 - \mathbf{R}\alpha)}, \frac{\alpha(1 - \mathbf{R}\alpha + \mathbf{i} \sqrt{\alpha(\mathbf{R} - \mathbf{R}^2\alpha)})}{(\mathbf{R} - \alpha)(1 - \mathbf{R}\alpha)} \right\}$$

- O Complexo Conjugado de \mathbf{p} é

`pb = FullSimplify [Conjugate [p], $\alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ 0 < \alpha < 1 \ \&\& \ R \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha < R < 1/\alpha$]`

$$\left\{ 1, -\frac{i\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)}}{(R-\alpha)(-1+R\alpha)}, \frac{\alpha(-1+R\alpha+i\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)})}{(R-\alpha)(-1+R\alpha)} \right\}$$

Normalizando p com respeito a q

$$\bar{E} = \frac{2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} - 2R(-1+\alpha^2)}{R-\alpha}$$

$$\frac{2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} - 2R(-1+\alpha^2)}{R-\alpha}$$

O fator de normalização é

$$u = \text{FullSimplify} [1/\bar{E}]$$

$$\frac{-R+\alpha}{-2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} + 2R(-1+\alpha^2)}$$

Assim \bar{p} normalizado é

`pN = u * pb`

$$\left\{ \frac{-R+\alpha}{-2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} + 2R(-1+\alpha^2)}, -\frac{i(-R+\alpha)\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)}}{(R-\alpha)(-1+R\alpha)(-2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} + 2R(-1+\alpha^2))}, \right.$$

$$\left. \frac{\alpha(-R+\alpha)(-1+R\alpha+i\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)})}{(R-\alpha)(-1+R\alpha)(-2i\alpha\sqrt{R\alpha(1-R\alpha)} + 2R(-1+\alpha^2))} \right\}$$

As Funções Multilineares são dadas por

`b[{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}] :=`
`{-2 * α * α * α * (1 - α ^2) / ((R - α * (1 - α ^2)) * (1 - R * α * (1 - α ^2))) x1 y1, 0, 0}`

`b[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`c[{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}, {z1_, z2_, z3_}] :=`
`{(-2 * (α * (1 - α ^2))^2) / ((1 - α * (1 - α ^2)) * R) * (R - α * (1 - α ^2))) x1 y1 z1, 0, 0}`

`c[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -\frac{2x1y1z1\alpha^2}{(R-\alpha)(1-R\alpha)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo dos Vetores Complexos

- h11

```
h11 = FullSimplify[-Inverse[A[e]] . b[q, qb]]
```

```
{0, 0, 0}
```

- h20

```
h20 = Simplify[Inverse[2 i ω IdentityMatrix[3] - A[e]] . b[q, q]]
```

```
{0, 0, 0}
```

Componentes do Primeiro Coeficiente de Lyapunov

```
C1 = Simplify[pN . c[q, q, qb]]
```

$$-\frac{\alpha^2}{(-1 + R\alpha) \left(-i\alpha\sqrt{R\alpha(1 - R\alpha)} + R(-1 + \alpha^2) \right)}$$

```
P1 = FullSimplify[pN . b[qb, h20]]
```

```
0
```

```
P2 = Simplify[-2 pN . b[q, h11]]
```

```
0
```

```
G21 = FullSimplify[P1 + P2 + C1]
```

$$-\frac{\alpha^2}{(-1 + R\alpha) \left(-i\alpha\sqrt{R\alpha(1 - R\alpha)} + R(-1 + \alpha^2) \right)}$$

Assim, o Primeiro Coeficiente de Lyapunov para a =

0 em R^3 fica dado por

```
L1 = FullSimplify[
```

```
  Refine[ComplexExpand[Re[G21]], α ∈ Reals && 0 < α < 1 && R ∈ Reals && α < R < 1/α]]
```

$$-\frac{\alpha^2(-1 + \alpha^2)}{(-1 + R\alpha)(R - 2R\alpha^2 + \alpha^3)}$$

Anexo II

Cálculo do Primeiro e Segundo Coeficientes

de Lyapunov para $0 < a < 1$ em \mathbb{R}^3

O Sistema é dado por

$$f1[x_, y_, z_] := -\alpha * v * \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + v * \frac{(z - x)}{R} - v * y$$

$$f2[x_, y_, z_] := x - a$$

$$f3[x_, y_, z_] := \frac{(x - z)}{R}$$

A Jacobiana é dada por

```
Df[{{x_, y_, z_}}] := {
  {Derivative[1, 0, 0][f1][x, y, z],
   Derivative[0, 1, 0][f1][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f1][x, y, z]},
  {Derivative[1, 0, 0][f2][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f2][x, y, z],
   Derivative[0, 0, 1][f2][x, y, z]}, {Derivative[1, 0, 0][f3][x, y, z],
   Derivative[0, 1, 0][f3][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f3][x, y, z]}
```

```
MatrixForm[Df[{{x, y, z}}]]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{y}{R} - (-1 + x^2) \alpha v & -v & \frac{y}{R} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

A Superfície de Hopf é dada por

$$s = \alpha (1 - a^2)$$

$$(1 - a^2) \alpha$$

```
Clear[s]
```

$$v = \frac{s}{(1 - s * R) * (R - s)}$$

$$\frac{s}{(R - s) (1 - R s)}$$

O Ponto de Equilíbrio é dado por

```

s2 = Refine[Simplify[Solve[{f1[x, y, z] == 0, f2[x, y, z] == 0, f3[x, y, z] == 0}, {x, y, z}],
a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α <  $\frac{1}{1 - a^2}$  &&
R ∈ Reals && α * (1 - a^2) < R <  $\frac{1}{α * (1 - a^2)}$  && v ∈ Reals && v > 0];
e0 = FullSimplify[{x, y, z} /. s2[[1]]]
{a, a α -  $\frac{a^3 α}{3}$ , a}

```

Encontrando os Autovalores

- O ponto de Equilíbrio é dado por

$$e0 = \left\{ a, a \alpha - \frac{a^3 \alpha}{3}, a \right\}$$

$$\left\{ a, a \alpha - \frac{a^3 \alpha}{3}, a \right\}$$

- Fazendo $\omega_0 = \sqrt{s / R * 1 / (1 - s * R)}$

$$\omega_0 = \sqrt{s / R * 1 / (1 - s * R)}$$

$$\sqrt{\frac{s}{R (1 - R s)}}$$

- Matriz Jacobiana em e0

A[e0] = Simplify[Df[e0]]

$$\left\{ \left\{ \frac{s (1 + (-1 + a^2) R \alpha)}{R (s + R^2 s - R (1 + s^2))}, \frac{s}{s + R^2 s - R (1 + s^2)}, \frac{s}{R (R - s) (1 - R s)} \right\}, \{1, 0, 0\}, \left\{ \frac{1}{R}, 0, -\frac{1}{R} \right\} \right\}$$

MatrixForm[A[e0]]

$$\begin{pmatrix} \frac{s (1 + (-1 + a^2) R \alpha)}{R (s + R^2 s - R (1 + s^2))} & \frac{s}{s + R^2 s - R (1 + s^2)} & \frac{s}{R (R - s) (1 - R s)} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

- Substituindo ω_0 na Matriz Jacobiana teremos

Clear[ω0]

$$A = \left\{ \left\{ \frac{s}{R * 1 / (s - R)}, -\frac{\omega_0^2 * R}{R - s}, \frac{\omega_0^2}{R - s} \right\}, \{1, 0, 0\}, \{1/R, 0, -1/R\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{s}{R (-R + s)}, -\frac{R \omega_0^2}{R - s}, \frac{\omega_0^2}{R - s} \right\}, \{1, 0, 0\}, \left\{ \frac{1}{R}, 0, -\frac{1}{R} \right\} \right\}$$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{R(-R+s)} & -\frac{R\omega^2}{R-s} & \frac{\omega^2}{R-s} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

- Encontrando o Polinômio Característico

p[λ] := Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]

p[λ]

$$\frac{s\lambda}{R^2(-R+s)} - \frac{\lambda^2}{R} + \frac{s\lambda^2}{R(-R+s)} - \lambda^3 - \frac{\omega^2}{R-s} + \frac{\lambda\omega^2}{R(R-s)} - \frac{R\lambda\omega^2}{R-s}$$

Logo os Autovalores são dados por

$$\omega_0 = \sqrt{s/R + 1/(1 - s \cdot R)}$$

$$\sqrt{\frac{s}{R(1-Rs)}}$$

λn = Refine[FullSimplify[Eigenvalues[A]], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1/s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals];

λ1 = λn[[1]]

$$\frac{1}{-R+s}$$

λ2 = λn[[2]]

$$i \sqrt{-\frac{s}{R(-1+Rs)}}$$

λ3 = λn[[3]]

$$-i \sqrt{-\frac{s}{R(-1+Rs)}}$$

Encontrando os Autovetores

qn = Refine[FullSimplify[Eigenvectors[A]], a ∈ Reals && 0 < a < 1 &&

$$\alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ 0 < \alpha < \frac{1}{1-a^2} \ \&\& \ R \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha * (1-a^2) < R < \frac{1}{\alpha * (1-a^2)} \];$$

q1 = qn[[1]]

$$\left\{ -\frac{s}{R-s}, s, 1 \right\}$$

q2 = qn[[2]]

$$\left\{ 1 - \frac{\sqrt{R} \sqrt{s}}{\sqrt{-1+Rs}}, R - \frac{\sqrt{R} \sqrt{-1+Rs}}{\sqrt{s}}, 1 \right\}$$

$$q3 = qn[[3]]$$

$$\left\{ 1 + \frac{\sqrt{R} \sqrt{s}}{\sqrt{-1 + R s}}, R + \frac{\sqrt{R} \sqrt{-1 + R s}}{\sqrt{s}}, 1 \right\}$$

Trabalharemos com

- Autovalor

$$\lambda = \lambda^2$$

$$i \sqrt{-\frac{s}{R(-1 + R s)}}$$

Clear [$\omega 0$]

- Autovetor associado a λ

$$q = \left\{ 1, \frac{-i}{\omega 0}, \left(1 - s * R - i \frac{s}{\omega 0} \right) \right\}$$

$$\left\{ 1, -\frac{i}{\omega 0}, 1 - R s - \frac{i s}{\omega 0} \right\}$$

- Complexo Conjugado de q (\bar{q})

qb = FullSimplify [Refine [Conjugate [q], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]]

$$\left\{ 1, \frac{i}{\omega 0}, 1 - R s + \frac{i s}{\omega 0} \right\}$$

- Autovetor Adjunto associado a λ

$$p = \left\{ 1, -\frac{i R \omega 0}{(R - s)}, \frac{s}{(R - s)} (1 + i R \omega 0) \right\}$$

$$\left\{ 1, -\frac{i R \omega 0}{R - s}, \frac{s (1 + i R \omega 0)}{R - s} \right\}$$

- Complexo Conjugado de p (\bar{p})

pb = FullSimplify [Refine [Conjugate [p], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]]

$$\left\{ 1, \frac{i R \omega 0}{R - s}, \frac{s - i R s \omega 0}{R - s} \right\}$$

Normalizando p com respeito a q

- O fator de normalização é

$$\bar{E} = \frac{2 R \omega 0 - i s (-R \omega 0^2 + s (-i + R \omega 0)^2)}{(R - s) \omega 0}$$

$$\frac{2 R \omega 0 - i s (-R \omega 0^2 + s (-i + R \omega 0)^2)}{(R - s) \omega 0}$$

`u = FullSimplify [1 / E, s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s &&
a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]`

$$\frac{(R - s) \omega_0}{2 R \omega_0 - i s (-R \omega_0^2 + s (-i + R \omega_0)^2)}$$

- Assim \bar{p} normalizado é

`pn = u * p`

$$\left\{ \frac{(R - s) \omega_0}{2 R \omega_0 - i s (-R \omega_0^2 + s (-i + R \omega_0)^2)}, \right. \\ \left. - \frac{i R \omega_0^2}{2 R \omega_0 - i s (-R \omega_0^2 + s (-i + R \omega_0)^2)}, \frac{s \omega_0 (1 + i R \omega_0)}{2 R \omega_0 - i s (-R \omega_0^2 + s (-i + R \omega_0)^2)} \right\}$$

`pn = FullSimplify [Conjugate [pn], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals &&
s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]`

$$\left\{ \frac{(R - s) \omega_0}{2 R \omega_0 + i s (-R \omega_0^2 + s (i + R \omega_0)^2)}, \right. \\ \left. \frac{R \omega_0^2}{-2 i R \omega_0 - R s \omega_0^2 + s^2 (i + R \omega_0)^2}, - \frac{s \omega_0 (i + R \omega_0)}{-2 i R \omega_0 - R s \omega_0^2 + s^2 (i + R \omega_0)^2} \right\}$$

As Funções Multilineares são dadas por

$$\mathbf{b}[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}] := \left\{ -\frac{2 * \alpha * a * \omega_0^2 * R}{R - s} \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1, 0, 0 \right\}$$

`b[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -\frac{2 a R x_1 y_1 \alpha \omega_0^2}{R - s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}] := \left\{ -\frac{2 * s * \omega_0^2 * R}{R - s} \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1, 0, 0 \right\}$$

`c[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}] // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -\frac{2 R s x_1 y_1 z_1 \omega_0^2}{R - s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}] = \{0, 0, 0\}$$

$$\{0, 0, 0\}$$

$$\mathbf{e}[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \\ \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}] = \{0, 0, 0\}$$

$$\{0, 0, 0\}$$

Cálculo dos Vetores Complexos

- h11

h11 = FullSimplify[-Inverse[A] . b[q, qb]]

$\{0, -2 a \alpha, 0\}$

• h20

**h20 = FullSimplify[Inverse[2 i ω0 IdentityMatrix[3] - A].b[q, q],
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1/s && a ∈ Reals &&
0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ \frac{4 a R^2 \alpha \omega_0^2 (1 + 2 i R \omega_0)}{-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2}, \frac{2 a R^2 \alpha \omega_0 (-i + 2 R \omega_0)}{-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2}, \frac{4 a R^2 \alpha \omega_0^2}{-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2} \right\}$$

Componentes do Primeiro Coeficiente de Lyapunov

• C1

**C1 = FullSimplify[pN . c[q, q, qb], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals &&
s < R < 1/s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$-\frac{2 R s \omega_0^3}{2 R \omega_0 + i s (-R \omega_0^2 + s (i + R \omega_0)^2)}$$

• P1

**P1 = FullSimplify[pN . b[qb, h20], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals &&
s < R < 1/s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$-\frac{(8 a^2 R^3 \alpha^2 \omega_0^5 (1 + 2 i R \omega_0))}{((-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2) (2 R \omega_0 + i s (-R \omega_0^2 + s (i + R \omega_0)^2)))}$$

• P2

P2 = Simplify[-2 pN . b[q, h11]]

0

• G21

**G21 = Simplify[P1 + P2 + C1, s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1/s &&
a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\frac{2 R \omega_0^3 \left(-s - \frac{4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2 (1 + 2 i R \omega_0)}{-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2} \right)}{2 R \omega_0 + i s (-R \omega_0^2 + s (i + R \omega_0)^2)}$$

O Primeiro Coeficiente de Lyapunov

```
L1 = FullSimplify [Refine [ComplexExpand [Re [G21]]],
  s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]
- (4 R^2 ω0^4 (8 a^2 R^3 α^2 ω0^4 + 8 R (1 + 3 R^2) s^4 ω0^2 (1 + 4 R^2 ω0^2) - 4 s^5 (1 + 4 R^2 ω0^2)^2 +
  R^2 s ω0^2 (-8 a^2 α^2 + 4 ω0^2 + R^2 (9 + (24 + 36 R^2 - 38 a^2 α^2) ω0^2 - 8 a^2 (1 + 3 R^2) α^2 ω0^4)) +
  s^3 (4 + R^2 ω0^2 (4 (8 + 4 a^2 α^2 - ω0^2) - 4 R^4 ω0^2 (9 + 8 a^2 α^2 ω0^2) + R^2 (-9 + 8 (5 + 7 a^2 α^2) ω0^2))) +
  2 R s^2 ω0^2
  (-4 + R^2 (-4 (3 + 4 (1 + 3 R^2) ω0^2) + a^2 α^2 (-3 + ω0^2 (-4 + R^2 (-9 + 4 (5 + 3 R^2) ω0^2)))))) /
  ((s^4 + 2 R (s^3 + R (2 - 4 s^2 + s^4)) ω0^2 + R^2 s^2 (-1 + R s)^2 ω0^4)
  (9 R^4 ω0^2 + 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) ω0^2)^2))
```

Valor de L1 substituindo ω0

```
ω0 = √(s / R * 1 / (1 - s * R))
FullSimplify [L1, s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2)]
Clear [ω0]
√(s / (R (1 - R s)))
s^2 (-(-1 + s^2) (R + 3 R^2 s - 8 R s^2 + 4 s^3) + 4 a^2 s (-1 - R s + 2 s^2) α^2) /
  (-1 + R s) (R - 2 R s^2 + s^3) (R + 3 R^2 s - 8 R s^2 + 4 s^3)
```

Cálculo dos Vetores Complexos

- h20

```
h20b = FullSimplify [Refine [Conjugate [h20]], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals &&
  s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]
```

$$\left\{ \frac{4 i a R^2 \alpha \omega_0^2 (i + 2 R \omega_0)}{2 s - R \omega_0 (2 \omega_0 + R (3 i + 6 R \omega_0 - 8 s \omega_0))}, \right. \\ \left. - \frac{2 a R^2 \alpha \omega_0 (i + 2 R \omega_0)}{2 s - R \omega_0 (2 \omega_0 + R (3 i + 6 R \omega_0 - 8 s \omega_0))}, - \frac{4 a R^2 \alpha \omega_0^2}{2 s - R \omega_0 (2 \omega_0 + R (3 i + 6 R \omega_0 - 8 s \omega_0))} \right\}$$

- h11

```
h11b = FullSimplify [Refine [Conjugate [h11]], s ∈ Reals && 0 < s < 1 &&
  R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2)]
```

```
{0, -2 a α, 0}
```

- Componentes de h2

- k1

```
k1 = c[q, q, qb]
```

$$\left\{ -\frac{2 R s \omega_0^2}{R - s}, 0, 0 \right\}$$

k2

**k2 = FullSimplify[b[qb, h20], s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1/s &&
a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ -\frac{8 a^2 R^3 \alpha^2 \omega_0^4 (1 + 2 i R \omega_0)}{(R - s) (-2 s - 3 i R^2 \omega_0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2)}, 0, 0 \right\}$$

• k3

k3 = FullSimplify[2 * b[q, h11]]

$$\{0, 0, 0\}$$

• h21

H21 = {x, y, z} /.

**Solve[{{(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[2]],
(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[3]], q[[1]]},
{(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[2]],
(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[3]], q[[2]]},
{(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[2]],
(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[3]], q[[3]]},
{pN[[1]], pN[[2]], pN[[3]], 0}].{x, y, z, w} ==
{Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21 * q)[[1]], Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21 * q)[[2]],
Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21 * q)[[3]], 0], {x, y, z, w}][[1]]];**

**h21 = FullSimplify[H21, s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1/s &&
a ∈ Reals && 0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1/(1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ -\left(2 R^2 \omega_0^2 \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2 (-1 - 2 i R \omega_0) + R s \omega_0 (3 i R - 2 \omega_0 - 6 R^2 \omega_0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega_0^2) \right) \right. \right. \\ \left. \left. (-i + R \omega_0 + i s (i + R \omega_0) (-\omega_0 + s (i + R \omega_0))) \right) / \right. \\ \left. \left((2 s + 3 i R^2 \omega_0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2) (s^2 \omega_0 (1 + i R \omega_0) + s^3 (i + R \omega_0)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. R \omega_0 (i \omega_0 + 2 R (2 + 2 i R \omega_0 + \omega_0^2)) - s (i + R \omega_0 (2 + \omega_0 (\omega_0 + R (9 i + 2 R \omega_0)))) \right) \right), \\ (2 R^2 \omega_0 (1 + i R \omega_0 + s^2 (i + R \omega_0)^2 - s \omega_0 (3 i + R \omega_0)) \\ (4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2 (1 + 2 i R \omega_0) + R s \omega_0 (-3 i R + 2 \omega_0 + 6 R^2 \omega_0) - 2 s^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2)) / \\ \left((2 s + 3 i R^2 \omega_0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2) (s^2 \omega_0 (1 + i R \omega_0) + s^3 (i + R \omega_0)^3 + \right. \\ \left. R \omega_0 (i \omega_0 + 2 R (2 + 2 i R \omega_0 + \omega_0^2)) - s (i + R \omega_0 (2 + \omega_0 (\omega_0 + R (9 i + 2 R \omega_0)))) \right) \right), \\ (2 i R^2 \omega_0^2 (-1 + (2 R - s) (s - i (-1 + R s) \omega_0)) \\ (4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega_0^2 (1 + 2 i R \omega_0) + R s \omega_0 (-3 i R + 2 \omega_0 + 6 R^2 \omega_0) - 2 s^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2)) / \\ \left((2 s + 3 i R^2 \omega_0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega_0^2) (s^2 \omega_0 (1 + i R \omega_0) + s^3 (i + R \omega_0)^3 + \right. \\ \left. R \omega_0 (i \omega_0 + 2 R (2 + 2 i R \omega_0 + \omega_0^2)) - s (i + R \omega_0 (2 + \omega_0 (\omega_0 + R (9 i + 2 R \omega_0)))) \right) \right) \left. \right\}$$

• h̄21

**h21b = FullSimplify [ComplexExpand [Refine [Conjugate [h21]]],
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals &&
0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ - \left(2 R^2 \omega^2 \left(i + R \omega + s \omega \left(1 + i R \omega \right) - i s^2 \left(-i + R \omega \right)^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 + 2 i R \omega \right) - R s \omega \left(3 i R + 2 \omega + 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(2 s - 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \left(s^2 \omega \left(1 - i R \omega \right) + s^3 \left(-i + R \omega \right)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. R \omega \left(-i \omega + 2 R \left(2 - 2 i R \omega + \omega^2 \right) \right) - s \left(-i + R \omega \left(2 + \omega \left(\omega + R \left(-9 i + 2 R \omega \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right), \\ - \left(2 i R^2 \omega \left(-i - R \omega + s \omega \left(3 + i R \omega \right) - i s^2 \left(-i + R \omega \right)^2 \right) \right. \\ \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 + 2 i R \omega \right) - R s \omega \left(3 i R + 2 \omega + 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) / \\ \left(\left(2 s - 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \left(s^2 \omega \left(1 - i R \omega \right) + s^3 \left(-i + R \omega \right)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. R \omega \left(-i \omega + 2 R \left(2 - 2 i R \omega + \omega^2 \right) \right) - s \left(-i + R \omega \left(2 + \omega \left(\omega + R \left(-9 i + 2 R \omega \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right), \\ - \left(2 i R^2 \omega^2 \left(-1 + \left(2 R - s \right) \left(s + i \left(-1 + R s \right) \omega \right) \right) \right. \\ \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R + 2 \omega + 6 R^2 \omega \right) - 2 s^2 \left(1 + 4 R^2 \omega^2 \right) \right) / \\ \left(\left(2 s - 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \left(s^2 \omega \left(1 - i R \omega \right) + s^3 \left(-i + R \omega \right)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. R \omega \left(-i \omega + 2 R \left(2 - 2 i R \omega + \omega^2 \right) \right) - s \left(-i + R \omega \left(2 + \omega \left(\omega + R \left(-9 i + 2 R \omega \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \left. \right\}$$

• h30

**h30 = FullSimplify [Inverse [3 * i * ω0 * IdentityMatrix [3] - A]. (c[q, q, q] + 3 b[q, h20]),
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals &&
0 < a < 1 && α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ - \left(6 i R^2 \omega^2 \left(-i + 3 R \omega \right) \right. \right. \\ \left. \left(12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(3 s + 8 i R^2 \omega - 3 R \left(1 + 8 R^2 - 9 R s \right) \omega^2 \right) \left(2 s + 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \right), - \left(2 R^2 \omega^2 \right. \\ \left. \left(-i + 3 R \omega \right) \left(12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(3 s + 8 i R^2 \omega - 3 R \left(1 + 8 R^2 - 9 R s \right) \omega^2 \right) \left(2 s + 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \right), \\ \left(6 R^2 \omega^2 \left(12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(1 + 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(-3 i R + 2 \omega + 6 R^2 \omega \right) - 2 s^2 \left(1 + 4 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(3 s + 8 i R^2 \omega - 3 R \left(1 + 8 R^2 - 9 R s \right) \omega^2 \right) \left(2 s + 3 i R^2 \omega - 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right) \right) \left. \right\}$$

• h31

**h31 = Simplify [(Inverse [2 * i * ω0 * IdentityMatrix [3] - A]). (d[q, q, q, qb] + 3 * c[q, q, h11] +
3 * c[q, qb, h20] + 3 * b[h20, h11] + b[qb, h30] + 3 * b[q, h21] - 3 G21 h20),
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 &&
α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\left\{ - \left(12 i a R^5 \left(R - s \right) \alpha \omega^3 \right. \right. \\ \left(\left(4 \omega^4 \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \right. \\ \left(\left(-R + s \right) \left(-2 i R \omega - R s \omega^2 + s^2 \left(i + R \omega \right)^2 \right) \right. \\ \left. \left(R \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right)^2 \right) + \left(\omega^2 \left(i - 2 R \omega \right)^2 \right. \\ \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) / \\ \left(\left(R - s \right) \left(-2 i R \omega - R s \omega^2 + s^2 \left(i + R \omega \right)^2 \right) \left(R \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right)^2 \right) + \\ \left(\frac{2 i \omega}{R} - 4 \omega^2 \right) \left(- \frac{2 s \left(1 + 2 i R \omega \right)}{\left(R - s \right) \left(-2 s - 3 i R^2 \omega + 2 R \left(1 + 3 R^2 - 4 R s \right) \omega^2 \right)} + \left(2 i \omega \left(1 + 2 i R \omega \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-1 - 2 i R \omega \right) + R s \omega \left(3 i R - 2 \omega - 6 R^2 \omega \right) + s^2 \left(2 + 8 R^2 \omega^2 \right) \right) \right) \right) \left. \right\}$$

$$\left((-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) +$$

$$\left(i (-i + 3 R \omega 0) (12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right) / (R - s)$$

$$\left(3 s + 8 i R^2 \omega 0 - 3 R (1 + 8 R^2 - 9 R s) \omega 0^2 \right) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) +$$

$$\left((4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right.$$

$$\left. (-i + R \omega 0 + i s (i + R \omega 0) (-\omega 0 + s (i + R \omega 0))) \right) /$$

$$\left((R - s) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (s^2 \omega 0 (1 + i R \omega 0) + s^3 (i + R \omega 0)^3 + R \omega 0 \right.$$

$$\left. (i \omega 0 + 2 R (2 + 2 i R \omega 0 + \omega 0^2)) - s (i + R \omega 0 (2 + \omega 0 (\omega 0 + R (9 i + 2 R \omega 0)))) \right) \Bigg) \Bigg) /$$

$$(R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2)), - \left(12$$

i
a
R³
(R - s)
α
ω0³

$$\left(i (-i + 2 R \omega 0) (R \omega 0 (-2 i R + \omega 0 + 4 R^2 \omega 0) - s (1 + 4 R^2 \omega 0^2)) \right.$$

$$\left. (4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (1 + 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (-3 i R + 2 \omega 0 + 6 R^2 \omega 0) - 2 s^2 (1 + 4 R^2 \omega 0^2)) \right) /$$

$$\left((R - s) (-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) -$$

$$\left(2 R^2 \omega 0^3 \left(-s - \frac{4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (1 + 2 i R \omega 0)}{-2 s - 3 i R^2 \omega 0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2} \right) \right) /$$

$$\left((R - s) (-2 s - 3 i R^2 \omega 0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (2 R \omega 0 + i s (-R \omega 0^2 + s (i + R \omega 0)^2)) \right) +$$

$$R^2 \left(\frac{1}{R} + 2 i \omega 0 \right) \left(-\frac{2 s (1 + 2 i R \omega 0)}{(R - s) (-2 s - 3 i R^2 \omega 0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2)} + (2 i \omega 0 (1 + 2 i R \omega 0) \right.$$

$$\left. (4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right) /$$

$$\left((-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) +$$

$$\left(i (-i + 3 R \omega 0) (12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right) / (R - s)$$

$$\left(3 s + 8 i R^2 \omega 0 - 3 R (1 + 8 R^2 - 9 R s) \omega 0^2 \right) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) +$$

$$\left((4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right.$$

$$\left. (-i + R \omega 0 + i s (i + R \omega 0) (-\omega 0 + s (i + R \omega 0))) \right) /$$

$$\left((R - s) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (s^2 \omega 0 (1 + i R \omega 0) + s^3 (i + R \omega 0)^3 + R \omega 0 \right.$$

$$\left. (i \omega 0 + 2 R (2 + 2 i R \omega 0 + \omega 0^2)) - s (i + R \omega 0 (2 + \omega 0 (\omega 0 + R (9 i + 2 R \omega 0)))) \right) \Bigg) \Bigg) /$$

$$(R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2)), - \left(12$$

i
a
R⁴
(R - s)
α
ω0⁴

$$\left(\begin{aligned}
& \left(R \omega 0 (1 + 2 i R \omega 0) \right. \\
& \quad \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (1 + 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (-3 i R + 2 \omega 0 + 6 R^2 \omega 0) - 2 s^2 (1 + 4 R^2 \omega 0^2) \right) \right) / \\
& \quad \left((R - s) (-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) + \\
& \quad \left(2 \omega 0 (3 i R^2 \omega 0 + s (2 - 4 i R \omega 0)) \right. \\
& \quad \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (1 + 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (-3 i R + 2 \omega 0 + 6 R^2 \omega 0) - 2 s^2 (1 + 4 R^2 \omega 0^2) \right) \right) / \\
& \quad \left((R - s) (-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) + \\
& \quad 2 i \left[- \frac{2 s (1 + 2 i R \omega 0)}{(R - s) (-2 s - 3 i R^2 \omega 0 + 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2)} + (2 i \omega 0 (1 + 2 i R \omega 0) \right. \\
& \quad \left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2) \right) \right) / \\
& \quad \left((-2 i R \omega 0 - R s \omega 0^2 + s^2 (i + R \omega 0)^2) (R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2))^2 \right) + \\
& \quad \left(i (-i + 3 R \omega 0) (12 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 \right. \\
& \quad \left. (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2) \right) \right) / (R - s) \\
& \quad \left(3 s + 8 i R^2 \omega 0 - 3 R (1 + 8 R^2 - 9 R s) \omega 0^2 \right) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) + \\
& \quad \left((4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right. \\
& \quad \left. (-i + R \omega 0 + i s (i + R \omega 0) (-\omega 0 + s (i + R \omega 0))) \right) \right) / \\
& \quad \left((R - s) (2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (s^2 \omega 0 (1 + i R \omega 0) + s^3 (i + R \omega 0)^3 + R \omega 0 \right. \\
& \quad \left. (i \omega 0 + 2 R (2 + 2 i R \omega 0 + \omega 0^2)) - s (i + R \omega 0 (2 + \omega 0 (\omega 0 + R (9 i + 2 R \omega 0)))) \right) \right) \left. \right] \left. \right) / \\
& \quad \left(R \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s (2 + 8 R^2 \omega 0^2) \right) \}
\end{aligned}$$

• h22 para L1=0

L1s = 0

0

h22 = FullSimplify[

(-Inverse[A]).(d[q, q, qb, qb] + 4 * c[q, qb, h11] + c[qb, qb, h20] + c[q, q, h20b] +
2 * b[h11, h11] + 2 * b[q, h21b] + 2 * b[qb, h21] + b[h20b, h20] - 4 h11 L1s),
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && R ∈ Reals && s < R < 1 / s && a ∈ Reals && 0 < a < 1 &&
α ∈ Reals && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω 0 ∈ Reals]

$$\left\{ 0, 8 a R^2 \alpha \omega 0^2 \left(\frac{s + 2 i R s \omega 0}{2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2} - \frac{4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (1 + 4 R^2 \omega 0^2)}{9 R^4 \omega 0^2 + 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) \omega 0^2)^2} - \right. \right. \\
\frac{i s (i + 2 R \omega 0)}{2 s - R \omega 0 (2 \omega 0 + R (3 i + 6 R \omega 0 - 8 s \omega 0))} + \left((i + R \omega 0 + s \omega 0 (1 + i R \omega 0) - i s^2 (-i + R \omega 0)^2) \right. \\
\left. \left(4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 + 2 i R \omega 0) - R s \omega 0 (3 i R + 2 \omega 0 + 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2) \right) \right) / \\
\left((2 s - 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (s^2 \omega 0 (1 - i R \omega 0) + s^3 (-i + R \omega 0)^3 + \right. \\
\left. R \omega 0 (-i \omega 0 + 2 R (2 - 2 i R \omega 0 + \omega 0^2)) - s (-i + R \omega 0 (2 + \omega 0 (\omega 0 + R (-9 i + 2 R \omega 0)))) \right) \right) + \\
\left((4 a^2 R^2 \alpha^2 \omega 0^2 (-1 - 2 i R \omega 0) + R s \omega 0 (3 i R - 2 \omega 0 - 6 R^2 \omega 0) + s^2 (2 + 8 R^2 \omega 0^2)) \right. \\
\left. (-i + R \omega 0 + i s (i + R \omega 0) (-\omega 0 + s (i + R \omega 0))) \right) / \\
\left((2 s + 3 i R^2 \omega 0 - 2 R (1 + 3 R^2 - 4 R s) \omega 0^2) (s^2 \omega 0 (1 + i R \omega 0) + s^3 (i + R \omega 0)^3 + \right. \\
\left. R \omega 0 (i \omega 0 + 2 R (2 + 2 i R \omega 0 + \omega 0^2)) - s (i + R \omega 0 (2 + \omega 0 (\omega 0 + R (9 i + 2 R \omega 0)))) \right) \left. \right), 0 \}$$

Componentes do Segundo Coeficiente de Lyapunov

- $U01 = \text{Re} \langle p, e[q, q, \bar{q}, \bar{q}] \rangle$

$$U01 = \text{Re}[\text{pN} \cdot (\mathbf{e}[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{qb}, \mathbf{qb}])]]$$

0

- $U02 = \text{Re} \langle p, d[q, q, \bar{q}, \bar{h}_{20}] \rangle$

$$U02 = \text{Re}[\text{pN} \cdot (\mathbf{d}[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{h20b}])]]$$

0

- $U03 = 3 \text{Re} \langle p, d[q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}] \rangle$

$$U03 = 3 \text{Re}[\text{pN} \cdot (\mathbf{d}[\mathbf{q}, \mathbf{qb}, \mathbf{qb}, \mathbf{h20}])]]$$

0

- $U04 = 6 \text{Re} \langle p, d[q, q, \bar{q}, h_{11}] \rangle$

$$U04 = 6 \text{Re}[\text{pN} \cdot (\mathbf{d}[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{qb}, \mathbf{h11}])]]$$

0

- $U05 = \text{Re} \langle p, c[\bar{q}, \bar{q}, h_{30}] \rangle$

$$U05 = \text{FullSimplify}[\text{Refine}[\text{ComplexExpand}[\text{Re}[\text{pN} \cdot (\mathbf{c}[\mathbf{qb}, \mathbf{qb}, \mathbf{h30}])]]], \\ \mathbf{s} \in \text{Reals} \ \&\& \mathbf{0} < \mathbf{s} < \mathbf{1} \ \&\& \mathbf{s} < \mathbf{R} < \mathbf{1} / \mathbf{s} \ \&\& \mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{1} \ \&\& \mathbf{0} < \mathbf{\alpha} < \mathbf{1} / (\mathbf{1} - \mathbf{a}^2) \ \&\& \mathbf{\omega} \in \text{Reals}]$$

$$\begin{aligned} & - \left(12 R^4 s \omega^6 \left(-12 s^6 (1 + 4 R^2 \omega^2)^2 (-5 - 42 R^2 \omega^2 + 27 R^4 \omega^4) - \right. \right. \\ & \quad 24 a^2 R^4 \alpha^2 \omega^4 (-6 \omega^2 + R^2 (3 + 4 (1 + 3 R^2) \omega^2) (8 + 9 (1 + 8 R^2) \omega^2)) + \\ & \quad R^2 s^2 \omega^2 (72 (2 a^2 \alpha^2 - \omega^2) + R^2 (-54 + 18 (-16 - 43 R^2 + 8 a^2 (7 + 4 R^2) \alpha^2) \omega^2 + \\ & \quad (-5 (88 + 429 R^2 + 576 R^4) + 72 a^2 (3 - 36 R^2 + 104 R^4) \alpha^2) \omega^4 + \\ & \quad \left. \left. 36 (-(1 + 3 R^2)^2 (1 + 8 R^2) + 4 a^2 R^2 (41 - 60 R^2 + 144 R^4) \alpha^2) \omega^6 \right) \right) + \\ & \quad 6 R^3 s \omega^4 (-48 a^2 \alpha^2 + 4 \omega^2 + R^2 (9 + 12 (2 + 3 R^2) \omega^2 + 2 a^2 \alpha^2 \\ & \quad (118 + (-37 + 1534 R^2) \omega^2 + 6 (-5 + 126 R^2 + 708 R^4) \omega^4))) + \\ & \quad 2 R s^3 \omega^2 (36 + R^2 (1296 R^8 \omega^6 + 6 a^2 \alpha^2 (25 + 54 \omega^2) - 36 R^6 \omega^4 (23 + 33 (-5 + 26 a^2 \alpha^2) \omega^2) + \\ & \quad 8 (9 + 53 \omega^2 + 3 \omega^4) + 3 R^2 (-12 + \omega^2 (303 + 460 \omega^2 + 108 \omega^4 + 4 a^2 \alpha^2 (91 - 24 \omega^2)))) - \\ & \quad 3 R^4 \omega^2 (144 + \omega^2 (-1123 - 936 \omega^2 + 2 a^2 \alpha^2 (959 + 2406 \omega^2)))) + \\ & \quad 8 R s^5 (1 + 4 R^2 \omega^2) (-4 + \omega^2 (-18 + R^2 (-93 + \omega^2 (-93 + R^2 (-470 + 9 (29 + 43 R^2) \omega^2)))) - \\ & \quad s^4 (24 + R^2 \omega^2 (8 (47 + 63 a^2 \alpha^2 - 9 \omega^2) + \\ & \quad R^2 (-327 + \omega^2 (8 (173 + 666 a^2 \alpha^2 + 39 \omega^2) + 3 R^2 (-1326 + (1120 - 2741 R^2 + 744 a^2 \alpha^2) \\ & \quad \omega^2 + 36 (35 + 91 R^4 + 6 R^2 (27 - 68 a^2 \alpha^2)) \omega^4)))))) \Big) / \\ & \left((s^4 + 2 R (s^3 + R (2 - 4 s^2 + s^4)) \omega^2 + R^2 s^2 (-1 + R s)^2 \omega^4) (9 R^4 \omega^2 + \right. \\ & \quad \left. 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) \omega^2)^2 \right) \\ & \left(64 R^4 \omega^2 + 9 (s + R (-1 - 8 R^2 + 9 R s) \omega^2)^2 \right) \end{aligned}$$

- $U06 = 3 \text{Re} \langle p, c[q, q, \bar{h}_{21}] \rangle$

**U08 = FullSimplify [Refine [ComplexExpand [3 Re [pN. (c[q, h20b, h20])]]],
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]**

$$\frac{(192 a^2 R^6 s (-1 + s^2) \alpha^2 \omega_0^8 (1 + 4 R^2 \omega_0^2))}{\left((s^4 + 2 R (s^3 + R (2 - 4 s^2 + s^4)) \omega_0^2 + R^2 s^2 (-1 + R s)^2 \omega_0^4 \right) \left(9 R^4 \omega_0^2 + 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) \omega_0^2)^2 \right)}$$

• U09 = 6 Re < p, c[q, h11, h11] >

U09 = 6 Re [pN. (c[q, h11, h11])]

0

• U10 = 6 Re < p, c[q̄, h20, h11] >

U10 = 6 Re [pN. (c[q̄, h20, h11])]

0

• U11 = 2 Re < p, b[q̄, h31] >

U11 = Simplify [Refine [ComplexExpand [2 Re [pN. (b[q̄, h31])]]],

s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]

$$\begin{aligned} & - (48 a^2 R^5 \alpha^2 \omega_0^8 (23 887 872 R^{33} s^9 \omega_0^{24} (-3 + a^2 (-2 + s^2) \alpha^2 \omega_0^2) - 576 s^{14} (1 + s^4 + s^2 (2 + \omega_0^2)) - \\ & 48 R s^{13} (-71 + 160 s^6 - 84 \omega_0^2 + s^4 (273 - 20 \omega_0^2) - 7 s^2 (-6 + 41 \omega_0^2 + 12 \omega_0^4)) + \\ & 32 R^2 s^{10} (72 \omega_0^2 - 9 s^2 \omega_0^2 (103 - 4 a^2 \alpha^2 + 30 \omega_0^2) + \\ & 2 s^8 (53 + 1101 \omega_0^2) + s^6 (284 + 4 (211 + 9 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 - 30 \omega_0^4) + \\ & s^4 (178 + 12 (-131 + 6 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 9 (-251 + 4 a^2 \alpha^2) \omega_0^4 - 342 \omega_0^6)) - 995 328 R^{32} s^6 \omega_0^{24} \\ & (48 a^2 \alpha^2 - 2 s^4 (411 + 152 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) + s^6 (54 + 191 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) - 12 s^2 (21 + a^2 \alpha^2 (8 + 17 \omega_0^2))) + \\ & 41 472 R^{31} s^5 \omega_0^{22} (-576 (47 + 6 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) + 12 s^8 \omega_0^2 (1044 + 1265 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) - \\ & 48 s^2 (-804 - 7 (-33 + 83 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 150 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) - 4 s^4 (2100 + 2 (8343 + 4372 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + \\ & 10 125 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) + s^6 \omega_0^2 (-97 383 - 2 a^2 \alpha^2 (-536 + 7059 \omega_0^2))) - \\ & 16 R^5 s^7 \omega_0^2 (283 152 s^{12} \omega_0^2 + s^{10} (8720 + (697 663 - 33 120 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 758 388 \omega_0^4) + \\ & s^8 (25 900 + (393 678 - 72 090 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 - 4 (50 705 + 15 552 a^2 \alpha^2) \omega_0^4 + 227 880 \omega_0^6) + \\ & s^6 (18 820 - (310 795 + 33 456 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 24 (-26 843 + 951 a^2 \alpha^2) \omega_0^4 - \\ & 2 (200 483 + 4104 a^2 \alpha^2) \omega_0^6 + 19 944 \omega_0^8) + 2 s^4 \\ & (-1752 + (-8992 + 7326 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 68 (-2752 + 315 a^2 \alpha^2) \omega_0^4 + 6 (-4303 + 1956 a^2 \alpha^2) \omega_0^6 + \\ & 3 (-5575 + 96 a^2 \alpha^2) \omega_0^8 + 756 \omega_0^{10}) - 24 (574 \omega_0^4 - 504 \omega_0^6 + 3 a^2 \alpha^2 \omega_0^2 (-11 + 32 \omega_0^2)) + \\ & 6 s^2 \omega_0^2 (-2148 + 14 944 \omega_0^2 - 1031 \omega_0^4 + 2268 \omega_0^6 - 36 a^2 \alpha^2 (8 - 63 \omega_0^2 + 8 \omega_0^4))) - \\ & 16 R^3 s^9 \omega_0^2 (-492 + 17 952 s^{10} + 1296 \omega_0^2 + s^8 (34 637 - 1152 a^2 \alpha^2 + 25 884 \omega_0^2) + \\ & 3 s^2 (352 - 2239 \omega_0^2 + 180 \omega_0^4 + 18 a^2 \alpha^2 (7 + 8 \omega_0^2)) - \\ & s^6 (-9336 + 23 263 \omega_0^2 + 276 \omega_0^4 + 18 a^2 \alpha^2 (115 + 8 \omega_0^2)) + \\ & s^4 (-11 434 - 24 330 \omega_0^2 - 13 641 \omega_0^4 - 756 \omega_0^6 + 18 a^2 \alpha^2 (-30 + 85 \omega_0^2 + 24 \omega_0^4))) - \\ & 6912 R^{30} s^2 \omega_0^{22} (-156 672 a^2 \alpha^2 + 4 s^{12} \omega_0^2 (77 931 + 40 160 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) + \\ & 4 s^{10} (8802 + (-394 989 + 10 313 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 6935 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) - \\ & s^8 (822 504 + (2 032 893 + 1 129 144 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 796 716 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) - 9216 s^2 \\ & (33 + 2 a^2 \alpha^2 (-4 + 7 \omega_0^2)) - 48 s^4 (33 195 + 2304 \omega_0^2 + 4 a^2 \alpha^2 (-1111 - 1752 \omega_0^2 + 90 \omega_0^4)) - \\ & 12 s^6 (-244 698 + 52 563 \omega_0^2 + 2 a^2 \alpha^2 (2800 - 30 749 \omega_0^2 + 17 910 \omega_0^4))) + \\ & 576 R^{29} s \omega_0^{20} (-55 296 (45 + 46 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) + 80 s^{14} \omega_0^4 (107 703 + 23 872 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) - \\ & 13 824 s^2 (-876 + (132 + 1363 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 168 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) + \\ & s^{12} \omega_0^2 (4 094 496 + 3 (-9 589 531 + 417 112 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + 4 115 840 a^2 \alpha^2 \omega_0^4) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 576 s^4 (-31210 + (-82413 + 30336 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 6(486 + 1441 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 360 a^2 \alpha^2 \omega^6) - \\
& 48 s^6 (-182040 + (1198344 - 398038 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (231057 - 820248 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 69570 a^2 \alpha^2 \omega^6) - 12 s^8 (100728 + 48(-320073 + 10609 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (2845503 - 540874 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 1710900 a^2 \alpha^2 \omega^6) - \\
& 6 s^{10} \omega^2 (10466839 + 12195042 \omega^2 + 2 a^2 \alpha^2 (16824 + 3093159 \omega^2 + 1267460 \omega^4)) + \\
32 R^4 s^8 \omega^2 (48 \omega^2 (-41 - 3 a^2 \alpha^2 + 54 \omega^2) + s^{10} (8996 + 83106 \omega^2) + \\
s^2 (442 + 3(2648 + 603 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 12(-499 + 27 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 2700 \omega^6) + \\
s^8 (25714 + 57956 \omega^2 + 46776 \omega^4 - 12 a^2 \alpha^2 (26 + 453 \omega^2)) - \\
s^6 (-10506 + 40838 \omega^2 + 73440 \omega^4 - 1620 \omega^6 + 3 a^2 \alpha^2 (256 + 1067 \omega^2 + 348 \omega^4)) + \\
s^4 (-4186 - 53639 \omega^2 - 31782 \omega^4 - 13092 \omega^6 + 108 \omega^8 + \\
\quad 3 a^2 \alpha^2 (-152 + 810 \omega^2 + 1299 \omega^4 + 156 \omega^6))) - \\
192 R^{28} \omega^{20} (-1990656 a^2 \alpha^2 \omega^2 + 144 s^{16} \omega^4 (247785 + 20992 a^2 \alpha^2 \omega^2) + \\
2 s^{14} \omega^2 (25686630 + (-29699787 + 2289184 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 9572352 a^2 \alpha^2 \omega^4) - \\
2 s^{12} (-1133028 + 6(53142245 + 536637 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (206857719 + 87929870 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
\quad 15628320 a^2 \alpha^2 \omega^6) - 3 s^{10} (20251512 + 3(-169423129 + 5127912 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
\quad 76(1300701 + 584093 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 41913840 a^2 \alpha^2 \omega^6) - \\
2304 s^2 (81(449 + 8 \omega^2) + 4 a^2 \alpha^2 (-769 + 9117 \omega^2 + 459 \omega^4)) + 1152 s^4 \\
(369429 - 75222 \omega^2 - 2970 \omega^4 + a^2 \alpha^2 (-22208 - 197119 \omega^2 - 43776 \omega^4 + 594 \omega^6)) + \\
144 s^6 (-4662691 - 5258181 \omega^2 - 313938 \omega^4 + 2 a^2 \alpha^2 \\
(67482 + 1277344 \omega^2 + 276057 \omega^4 + 6372 \omega^6)) - 36 s^8 (-9914106 - 3462895 \omega^2 + \\
\quad 3290481 \omega^4 + 2 a^2 \alpha^2 (67152 - 1994921 \omega^2 - 5158098 \omega^4 + 744750 \omega^6)) + \\
16 R^{27} s \omega^{18} (2304 s^{16} \omega^6 (153619 + 3456 a^2 \alpha^2 \omega^2) + 16 s^{14} \omega^4 \\
(89952633 + (13837887 + 1871360 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 9598464 a^2 \alpha^2 \omega^4) - \\
27648 (6030 + (10017 - 2152 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 486(1 + 25 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 396 a^2 \alpha^2 \omega^6) + \\
s^{12} \omega^2 (264676896 - 3(5099201701 + 107415144 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
\quad 4(1442661957 + 501429496 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 35345664 a^2 \alpha^2 \omega^6) + 13824 s^2 \\
(48324 - (255201 + 6613 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 42(399 + 8335 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 9(87 + 3989 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
\quad 162 a^2 \alpha^2 \omega^8) + 576 s^4 (-1400058 - 9(-4530345 + 244088 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
\quad (12245283 + 7432526 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 54(14003 + 37498 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 114858 a^2 \alpha^2 \omega^8) - \\
144 s^6 (-2642760 + (289957740 - 7814898 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 5(-33742383 + 20758648 a^2 \alpha^2) \\
\quad \omega^4 + (13507101 - 43425346 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 821988 a^2 \alpha^2 \omega^8) - \\
24 s^8 (1919700 + 108(-9396577 + 94878 a^2 \alpha^2) \omega^2 - (1053309810 + 46078241 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
\quad 6(-21018486 + 41874791 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 69090120 a^2 \alpha^2 \omega^8) - \\
6 s^{10} \omega^2 (783820143 - 4525663746 \omega^2 + 1191521940 \omega^4 + \\
\quad 2 a^2 \alpha^2 (2346408 + 26016935 \omega^2 + 410169644 \omega^4 + 137360160 \omega^6)) - \\
16 R^{26} \omega^{18} (162137088 s^{18} \omega^6 - 331776 a^2 \alpha^2 \omega^2 (65 + 114 \omega^2) + \\
48 s^{16} \omega^4 (42135819 + 8(2074233 + 6752 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 820224 a^2 \alpha^2 \omega^4) + \\
4 s^{14} \omega^2 (280150677 - 2(2304427933 + 86701560 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
\quad 4(229872519 + 71582552 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 46748160 a^2 \alpha^2 \omega^6) + s^{10} (-641419560 + \\
\quad (76176718899 + 429868296 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (70805751324 - 1914623036 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
\quad 24(-202534869 + 77298982 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 2275205760 a^2 \alpha^2 \omega^8) - 12 s^{12} \\
(-1972998 + 3(450811529 + 7189671 a^2 \alpha^2) \omega^2 - (1354525902 + 71167153 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
\quad 6(134945249 + 88677323 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 72228960 a^2 \alpha^2 \omega^8) - 20736 s^2 \\
(79881 + 127782 \omega^2 + 6633 \omega^4 + 4 a^2 \alpha^2 (-1507 - 1229 \omega^2 + 22769 \omega^4 + 1752 \omega^6)) + \\
576 s^4 (-3(-4102966 + 184878 \omega^2 + 1020828 \omega^4 + 91629 \omega^6) + \\
\quad 2 a^2 \alpha^2 (-228672 - 3209335 \omega^2 - 10926184 \omega^4 - 1505925 \omega^6 + 24570 \omega^8)) + \\
144 s^6 (-3(20785155 - 115773253 \omega^2 + 59620310 \omega^4 + 4237335 \omega^6) + \\
\quad 2 a^2 \alpha^2 (735498 + 6338144 \omega^2 + 11699939 \omega^4 + 5242848 \omega^6 + 618138 \omega^8)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12 s^8 (-370\,668\,114 + 9\,635\,658\,625 \omega^2 + 2\,434\,879\,953 \omega^4 + 296\,191\,404 \omega^6 + \\
& \quad 18 a^2 \alpha^2 (284\,400 + 1\,116\,955 \omega^2 - 125\,470\,330 \omega^4 - 63\,648\,378 \omega^6 + 3\,250\,040 \omega^8)) + \\
4 R^{25} s \omega^{16} & (126\,959\,616 s^{18} \omega^8 - 256 s^{16} \omega^6 (-26\,701\,021 + 36 (-242\,771 + 1056 a^2 \alpha^2) \omega^2) + \\
& 16 s^{14} \omega^4 (665\,924\,409 - 2 (1\,578\,875\,227 + 103\,022\,912 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad 12 (14\,312\,991 + 7\,823\,840 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 18\,072\,576 a^2 \alpha^2 \omega^6) - \\
27\,648 & (14\,670 + (52\,431 - 19\,264 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 2 (25\,668 + 7517 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad (3645 + 49\,556 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 1134 a^2 \alpha^2 \omega^8) - s^{12} \omega^2 (-929\,975\,904 + \\
& \quad 9 (14\,907\,805\,847 + 437\,905\,704 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (42\,213\,286\,816 - 5\,253\,937\,184 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 96 (341\,792\,139 + 181\,271\,096 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 432\,506\,880 a^2 \alpha^2 \omega^8) + \\
6912 s^2 & (214\,152 + 2 (-1\,647\,127 + 72\,051 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 2 (2\,660\,939 + 893\,694 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 14 (25\,431 + 234\,209 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 3 (3207 + 133\,760 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 1890 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) + \\
64 s^4 & (-28\,544\,238 - 27 (-72\,542\,403 + 2\,204\,512 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (1\,732\,258\,116 - 687\,929\,798 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 18 (29\,125\,677 + 59\,881\,576 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& \quad 27 (1\,970\,541 + 5\,209\,834 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 7\,551\,468 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) + \\
16 s^6 & (57\,217\,752 + 54 (-201\,175\,200 + 3\,907\,513 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (7\,406\,126\,193 + 4\,421\,120\,528 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 2 (-6\,655\,588\,911 + 2\,986\,345\,541 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 36 (-26\,968\,542 + 64\,150\,549 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 31\,529\,520 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) - \\
8 s^8 & (13\,922\,928 + 432 (-26\,418\,476 + 267\,819 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (88\,849\,963\,757 + 5\,721\,107\,715 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 14 (254\,707\,008 + 954\,208\,397 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& \quad 1032 (-1\,737\,642 + 6\,819\,961 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 702\,648\,000 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) - \\
2 s^{10} \omega^2 & (7\,509\,305\,151 - 286\,127\,521\,338 \omega^2 - 195\,010\,397\,200 \omega^4 + \\
& \quad 13\,168\,191\,024 \omega^6 + 2 a^2 \alpha^2 (36\,790\,848 - 4\,557\,685\,617 \\
& \quad \omega^2 + 2\,654\,157\,460 \omega^4 + 4\,345\,274\,112 \omega^6 + 1\,628\,899\,200 \omega^8)) + \\
16 R^6 s^6 \omega^2 & (4 s^{12} \omega^2 (108\,800 + 577\,653 \omega^2) + s^{10} (1863 + (1\,386\,924 - 27\,312 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad 8 (-291\,076 + 36\,999 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 2\,093\,736 \omega^6) + s^8 (5398 + (603\,243 - 93\,262 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad 6 (100\,706 + 45\,997 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 16 (110\,728 + 13\,689 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 423\,864 \omega^8) + \\
s^6 & (6063 - 8 (36\,871 + 6523 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (-2\,863\,744 + 48\,338 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 24 (-64\,189 + 7575 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 16 (39\,397 + 1467 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 43\,848 \omega^{10}) - \\
168 & (4 \omega^6 (41 - 27 \omega^2) + 3 a^2 \alpha^2 \omega^4 (-11 + 16 \omega^2)) + 4 s^2 \omega^2 (-1992 - 26\,246 \omega^2 + \\
& \quad 68\,016 \omega^4 + 4683 \omega^6 + 4914 \omega^8 - 3 a^2 \alpha^2 (169 + 2040 \omega^2 - 1998 \omega^4 + 756 \omega^6)) + \\
2 s^4 \omega^2 & (a^2 \alpha^2 (2629 + 93\,846 \omega^2 + 57\,384 \omega^4 + 22\,032 \omega^6 - 504 \omega^8) + \\
& \quad 2 (5315 + 66\,998 \omega^2 - 156\,870 \omega^4 + 23\,232 \omega^6 - 7329 \omega^8 + 378 \omega^{10})) + \\
4 R^8 s^4 \omega^4 & (48 s^{14} \omega^2 (417\,074 + 1\,374\,845 \omega^2) + 8 s^{12} \\
& \quad (62\,091 + (8\,767\,646 - 201\,912 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 28 (-407\,650 + 50\,121 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 8\,927\,130 \omega^6) - \\
& \quad 2 s^4 (-21\,114 + (24\,432 - 90\,171 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 40 (-25\,393 + 4725 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 8 (1\,188\,236 + 315\,927 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 56 (-19\,219 + 738 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 168 (4414 + 393 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 672 (31 + 3 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 1512 \omega^{14}) - \\
& \quad 672 \omega^6 (164 \omega^2 - 72 \omega^4 + 15 a^2 \alpha^2 (-11 + 8 \omega^2)) + \\
s^{10} & (2\,120\,345 + 44\,029\,348 \omega^2 + 17\,998\,304 \omega^4 - 34\,036\,944 \omega^6 + \\
& \quad 18\,994\,656 \omega^8 - 24 a^2 \alpha^2 (418 + 273\,821 \omega^2 + 690\,391 \omega^4 + 544\,608 \omega^6)) - \\
s^8 & (-1\,894\,986 + 19\,474\,527 \omega^2 + 155\,714\,056 \omega^4 + 55\,365\,232 \omega^6 + 19\,475\,392 \omega^8 - 2\,169\,792 \\
& \quad \omega^{10} + 2 a^2 \alpha^2 (14\,128 + 2\,466\,303 \omega^2 + 3\,121\,328 \omega^4 - 1\,638\,996 \omega^6 + 1\,405\,728 \omega^8)) + \\
16 s^2 \omega^2 & (-a^2 \alpha^2 (3830 - 12\,285 \omega^2 + 82\,152 \omega^4 + 8505 \omega^6 + 5292 \omega^8) + \\
& \quad 3 (-2848 - 13\,944 \omega^2 - 35\,588 \omega^4 + 51\,016 \omega^6 + 4954 \omega^8 + 945 \omega^{10})) - \\
s^6 & (257\,127 + 3\,767\,188 \omega^2 + 10\,190\,192 \omega^4 + 49\,849\,488 \omega^6 - 3\,114\,048 \omega^8 + \\
& \quad 1\,573\,376 \omega^{10} - 48\,816 \omega^{12} + 2 a^2 \alpha^2 \\
& \quad (22\,168 + 199\,974 \omega^2 - 8\,100\,167 \omega^4 - 4\,453\,480 \omega^6 - 1\,450\,872 \omega^8 + 102\,816 \omega^{10})) - \\
4 R^{24} \omega^{16} & (2048 s^{18} \omega^6 (1\,568\,687 + 269\,868 \omega^2) - 55\,296 a^2 \alpha^2 \omega^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (914 + 2464 \omega^2 + 2277 \omega^4) - 16 s^{16} \omega^4 \\
& (-957 229 137 + 16 (58 566 157 + 8 072 256 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 48 (-2 616 877 + 307 104 a^2 \alpha^2) \omega^4) + \\
& 2 s^{14} \omega^2 (2 007 038 790 - (85 610 466 029 + 4 008 297 312 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 32 (-1 531 770 127 + 5 773 062 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 384 (18 697 039 + 7 974 950 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 94 740 480 a^2 \alpha^2 \omega^8) + s^{10} (-1 070 130 528 + 3 (90 338 538 811 + 708 614 280 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad 12 (42 152 676 495 + 9 322 712 903 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 400 (689 928 352 + 141 602 699 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 96 (-100 106 517 + 226 037 684 a^2 \alpha^2) \omega^8 - 5 293 555 200 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) - \\
& 2 s^{12} (-18 732 384 + 18 (1 379 274 527 + 35 894 052 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad (324 734 591 471 + 22 703 195 026 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 8 (16 832 847 527 + 115 798 972 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 48 (276 380 622 + 223 465 093 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 1 017 722 880 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) - \\
& 2304 s^2 (1 654 641 + 5 430 774 \omega^2 + 5 003 685 \omega^4 + 345 735 \omega^6 + \\
& \quad 2 a^2 \alpha^2 (-46 434 - 620 402 \omega^2 + 675 066 \omega^4 + 1 062 832 \omega^6 + 61 227 \omega^8)) + \\
& 64 s^4 (-9 (-25 446 066 + 29 003 242 \omega^2 + 80 314 104 \omega^4 + 13 669 239 \omega^6 + 1 119 825 \omega^8) + \\
& \quad 2 a^2 \alpha^2 (-2 365 632 - 65 681 199 \omega^2 - 538 466 272 \\
& \quad \omega^4 - 295 497 387 \omega^6 - 45 666 306 \omega^8 + 823 770 \omega^{10})) + \\
& 48 s^6 (-374 806 089 + 6 012 876 761 \omega^2 + 5 807 857 202 \omega^4 - 1 972 392 081 \omega^6 - \\
& \quad 187 508 268 \omega^8 + 2 a^2 \alpha^2 (3 194 856 + 83 450 592 \omega^2 - 61 987 063 \\
& \quad \omega^4 - 312 954 472 \omega^6 + 39 039 558 \omega^8 + 9 387 720 \omega^{10})) - \\
& 12 s^8 (-749 759 274 + 39 683 632 227 \omega^2 + 27 354 568 921 \omega^4 + 19 305 799 860 \omega^6 + \\
& \quad 1 427 522 424 \omega^8 + 2 a^2 \alpha^2 (6 187 968 + 223 451 919 \omega^2 - 5 342 949 646 \omega^4 - 6 416 281 978 \\
& \quad \omega^6 - 2 409 242 776 \omega^8 + 39 637 440 \omega^{10})) + R^{23} s \omega^{14} (2 590 310 400 s^{18} \omega^8 + \\
& 256 s^{16} \omega^6 (207 675 013 + (25 755 756 - 8 379 648 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 14 433 312 \omega^4) - \\
& 16 s^{14} \omega^4 (-2 444 703 363 + 3 (10 878 625 171 + 768 876 288 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 4 (3 812 788 201 + 204 711 168 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 144 (2 431 787 + 1 573 696 a^2 \alpha^2) \omega^6) + \\
& s^{12} \omega^2 (1 510 068 096 - 3 (136 209 628 183 + 6 391 603 584 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 4 (408 359 241 561 + 52 976 717 080 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 32 (6 654 527 129 + 741 621 144 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& \quad 384 (162 593 819 + 99 083 172 a^2 \alpha^2) \omega^8 - 434 350 080 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) + \\
& 9216 (-47 790 + 9 (-28 693 + 13 032 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 2 (-269 304 + 70 825 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad (421 263 + 195 332 a^2 \alpha^2) \omega^6 - (34 263 + 310 730 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 900 a^2 \alpha^2 \omega^{10}) + \\
& 768 s^2 (1 982 232 + 18 (-3 917 155 + 134 249 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 2 (108 318 177 + 4 131 206 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 6 (30 529 704 + 18 621 853 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 3 (4 567 911 + 14 756 728 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 27 (7833 + 168 818 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 38 880 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) + 64 s^4 \\
& (-35 733 312 - 81 (-48 375 731 + 10 044 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (6 207 906 726 - 2 038 321 578 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad (1 715 184 582 - 8 650 287 368 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 6 (224 863 992 + 306 865 025 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 108 (1 395 186 + 2 499 689 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 19 178 640 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) + 16 s^6 (75 385 728 + \\
& \quad 54 (-365 652 127 + 3 443 972 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (80 668 898 599 + 16 161 347 180 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 10 (5 265 304 458 + 4 043 842 559 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 12 (-3 178 156 712 + 879 098 011 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& \quad 24 (-130 153 983 + 239 064 218 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 165 697 920 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) - 16 s^8 (9 720 000 + \\
& \quad 27 (-371 987 927 + 6 898 464 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 3 (66 186 745 655 + 4 746 518 587 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 5 (-37 075 628 404 + 2 161 164 353 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (17 489 427 382 - 30 074 925 740 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 96 (-21 976 782 + 103 459 307 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 484 669 440 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) - \\
& 4 s^{10} \omega^2 (4 761 630 252 - 510 154 798 629 \omega^2 - 100 523 539 310 \omega^4 - 350 564 958 240 \omega^6 + \\
& \quad 7 520 799 168 \omega^8 + 4 a^2 \alpha^2 (24 605 856 - 4 734 334 311 \omega^2 + 26 230 725 875 \\
& \quad \omega^4 - 5 662 338 800 \omega^6 + 1 432 625 664 \omega^8 + 556 839 360 \omega^{10})) - \\
& 8 R^7 s^5 \omega^4 (4 915 584 s^{14} \omega^2 + 2 s^{12} (320 588 + (7 935 509 - 371 520 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 8 490 300 \omega^4) + \\
& \quad 4 s^2 (-2848 + 6 (-4648 + 451 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 4 (37 471 + 15 516 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 42 (6032 + 135 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (24 591 - 9072 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 9180 \omega^{10}) - \\
& \quad 336 (205 \omega^6 - 108 \omega^8 + 3 a^2 \alpha^2 \omega^4 (-33 + 32 \omega^2)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 s^{10} \left(a^2 \alpha^2 (4888 + 510399 \omega^2 + 652392 \omega^4) - \right. \\
& \quad \left. 4 (145586 + 964929 \omega^2 + 79470 \omega^4 + 476742 \omega^6) \right) - \\
& s^8 \left(a^2 \alpha^2 (78399 + 1917256 \omega^2 + 393588 \omega^4 + 980352 \omega^6) + \right. \\
& \quad \left. 4 (-376846 + 2301686 \omega^2 + 3492454 \omega^4 + 2053073 \omega^6 - 300132 \omega^8) \right) - \\
& s^6 \left(a^2 \alpha^2 (71518 - 436981 \omega^2 - 1637704 \omega^4 - 995880 \omega^6 + 92736 \omega^8) + \right. \\
& \quad \left. 4 (107876 + 961550 \omega^2 + 4409992 \omega^4 + 655812 \omega^6 + 307503 \omega^8 - 22284 \omega^{10}) \right) + \\
& s^4 \left(a^2 \alpha^2 (3841 + 119512 \omega^2 + 1448280 \omega^4 + 246960 \omega^6 + 102312 \omega^8 - 4032 \omega^{10}) + \right. \\
& \quad \left. 4 (18868 - 27194 \omega^2 + 857804 \omega^4 - 179242 \omega^6 + 148638 \omega^8 - 9381 \omega^{10} + 108 \omega^{12}) \right) + \\
R^{19} s \omega^{10} & \left(5621895168 s^{18} \omega^8 + 64 s^{16} \omega^6 (370480827 - (359399975 + 118031904 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \right. \\
& \quad 90908856 \omega^4) + 16 s^{14} \omega^4 (78363693 - (7252556609 + 1821957744 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 24 (291950573 + 42886336 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 4 (371030863 + 89048304 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 154779936 \omega^8) + s^{12} \omega^2 (-140984064 - 9 (920134721 + 464803008 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (836704579172 + 70629884008 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (831117276688 - 52046629696 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 32 (12049944014 + 1438997289 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 144 (-64911669 + 28562464 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 401254848 \omega^{12}) + \\
& 64 (-38880 + 108 (-3177 + 3832 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 486 (-3457 + 5804 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 3 (-1578567 + 4745224 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (-7703070 + 26713154 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 4 (-1454229 + \\
& \quad 4187902 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 32 (-15795 + 20078 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 132480 a^2 \alpha^2 \omega^{14}) + \\
& 16 s^2 (508032 + 432 (-295409 + 2694 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 2 (-405816939 + 73233260 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 6 (-334028137 + 43493528 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (-2332608941 + 7993356 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& \quad 2 (-560511839 + 6924309 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 4 (-22716255 + 45571928 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + \\
& \quad 288 (-1565 + 68479 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + 69120 a^2 \alpha^2 \omega^{16}) + \\
& 4 s^4 (-958032 + 3456 (516774 + 42727 a^2 \alpha^2) \omega^2 - (2228313267 + 3940121344 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 4 (3718775955 + 10133400887 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 4 (5126669918 + 16179605231 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 4 (2378850176 + 3168045249 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 4 (-518855539 + 926508348 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + \\
& \quad 144 (-693027 + 2607952 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + 9630720 a^2 \alpha^2 \omega^{16}) - \\
& 2 s^8 (1555200 + 432 (-3504251 + 395712 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (160307040517 + 14738956152 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (107836575783 - 182737504084 a^2 \alpha^2) \\
& \quad \omega^6 - 5 (-69579207503 + 59956415752 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& \quad 8 (-30044630921 + 6219821114 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - 64 (89038251 + 163287842 a^2 \alpha^2) \omega^{12} - \\
& \quad 1152 (724042 + 879695 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + 23016960 a^2 \alpha^2 \omega^{16}) + s^6 (20901888 - \\
& \quad 1728 (7563693 + 301732 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 32 (7635040504 + 2109916877 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad (788049199617 + 65963318160 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (525564481280 - 17177373296 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& \quad 40 (-1178789863 + 3438216050 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 128 (-230076480 + 176664121 a^2 \alpha^2) \\
& \quad \omega^{12} + 768 (-1825509 + 4893892 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + 68152320 a^2 \alpha^2 \omega^{16}) - \\
& s^{10} \omega^2 (488085696 - 142205446080 \omega^2 + 934470793757 \omega^4 + 1063179585148 \omega^6 - \\
& \quad 194266770144 \omega^8 - 86793341056 \omega^{10} - 2170793088 \omega^{12} + \\
& \quad 48 a^2 \alpha^2 (616032 + 184866339 \omega^2 + 7798092887 \omega^4 + 10279163562 \\
& \quad \omega^6 + 2589482452 \omega^8 - 381104376 \omega^{10} + 18636240 \omega^{12})) + \\
& 4 R^{22} \omega^{14} (-1024 s^{18} \omega^6 (6290075 + 1533768 \omega^2) + 4 s^{16} \omega^4 (-3614021739 + \\
& \quad 8 (1609441709 + 178374720 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 1536 (1900763 + 262728 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& \quad 177208320 \omega^6) + 4608 a^2 \alpha^2 \omega^2 (894 + 1504 \omega^2 + 5109 \omega^4 + 10776 \omega^6) + \\
& s^{14} \omega^2 (-1690351902 + 3 (44513849051 + 3224162640 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad 4 (22793316863 + 6901784536 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 96 (383057731 + 13363916 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad 192 (18641719 + 7950096 a^2 \alpha^2) \omega^8) + s^{12} (-1314144 + \\
& \quad 108 (124341831 + 7695908 a^2 \alpha^2) \omega^2 - (620495005055 + 46701183652 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad 6 (-77320483469 + 2352015507 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 8 (23313169890 + 1735431673 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& \quad 288 (20809074 + 23518865 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 274993920 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^{10} (232\,803\,072 + 240 (-454\,479\,823 + 3\,153\,663 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& (778\,200\,385\,451 + 142\,463\,366\,444 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 2 (267\,081\,606\,811 + 57\,288\,165\,642 a^2 \alpha^2) \\
& \omega^6 - 16 (7\,132\,337\,955 + 3\,392\,431\,492 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 384 (-1\,022\,538 + 24\,147\,469 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 1\,168\,784\,640 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) - \\
& 64 s^2 (-27 (580\,473 + 2\,901\,062 \omega^2 + 5\,381\,535 \omega^4 + 3\,826\,687 \omega^6 + 296\,484 \omega^8) + \\
& 2 a^2 \alpha^2 (328\,104 + 11\,599\,326 \omega^2 + 9\,672\,174 \\
& \omega^4 - 12\,100\,792 \omega^6 - 9\,854\,415 \omega^8 + 142\,992 \omega^{10})) - \\
& 16 s^4 (-3 (-74\,502\,162 + 368\,505\,498 \omega^2 + 1\,221\,063\,824 \omega^4 + 958\,874\,573 \omega^6 + \\
& 112\,007\,151 \omega^8 + 5\,993\,604 \omega^{10}) + 2 a^2 \alpha^2 (-978\,048 - 90\,352\,341 \omega^2 - 1\,256\,492\,600 \\
& \omega^4 - 2\,037\,551\,607 \omega^6 - 179\,360\,330 \omega^8 - 29\,487\,582 \omega^{10} + 1\,326\,240 \omega^{12})) + \\
& s^8 (-2\,439\,714\,168 + 204\,737\,740\,902 \omega^2 + 2\,579\,159\,265 \omega^4 + 178\,733\,927\,260 \omega^6 + \\
& 124\,897\,142\,048 \omega^8 + 8\,375\,846\,112 \omega^{10} + \\
& 4 a^2 \alpha^2 (12\,960\,000 + 1\,157\,002\,920 \omega^2 - 32\,414\,694\,256 \omega^4 - 66\,876\,664\,445 \\
& \omega^6 - 16\,359\,400\,212 \omega^8 - 5\,953\,425\,936 \omega^{10} + 14\,808\,960 \omega^{12})) - \\
& 4 s^6 (-1\,270\,695\,168 + 37\,482\,327\,525 \omega^2 + 80\,316\,608\,362 \omega^4 + 30\,063\,920\,797 \omega^6 - \\
& 10\,700\,745\,180 \omega^8 - 1\,095\,900\,264 \omega^{10} + \\
& 2 a^2 \alpha^2 (3\,758\,400 + 1\,219\,052\,592 \omega^2 - 2\,335\,466\,747 \omega^4 - 10\,978\,246\,960 \omega^6 + 431\,867\,666 \\
& \omega^8 + 389\,202\,312 \omega^{10} + 48\,997\,440 \omega^{12})) + R^{21} s \omega^{12} (5\,375\,188\,992 s^{18} \omega^8 + \\
& 192 s^{16} \omega^6 (269\,595\,717 - 4 (25\,599\,649 + 7\,727\,808 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 25\,635\,008 \omega^4) + \\
& 16 s^{14} \omega^4 (1\,063\,823\,706 - (26\,713\,191\,973 + 2\,801\,804\,016 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& 12 (-687\,964\,889 + 36\,388\,912 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 4 (1\,019\,866\,405 + 147\,483\,072 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 55\,267\,152 \omega^8) + \\
& s^{12} \omega^2 (87\,941\,376 - 3 (34\,835\,897\,725 + 4\,048\,180\,128 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& 4 (468\,914\,279\,091 + 56\,368\,567\,286 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 64 (19\,300\,199\,684 + 2\,385\,201\,929 a^2 \alpha^2) \\
& \omega^6 + 64 (1\,698\,487\,789 + 185\,332\,332 a^2 \alpha^2) \omega^8 - 576 (14\,337\,597 + 9\,590\,120 a^2 \alpha^2) \omega^{10}) + \\
& 256 (-213\,840 + 513 (-2967 + 1876 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 54 (-91\,904 + 64\,177 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& 9 (-929\,995 + 735\,012 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 10 (-605\,772 + 370\,459 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 540 (963 + 4064 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 109\,440 a^2 \alpha^2 \omega^{12}) + \\
& 64 s^2 (2\,856\,384 + 54 (-4\,385\,217 + 88\,316 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 2 (-540\,455\,247 + 34\,050\,842 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 6 (289\,173\,428 + 63\,449\,509 a^2 \alpha^2) \omega^6 - (1\,059\,913\,947 + 509\,884\,112 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 18 (4\,686\,626 + 4461 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 36 (-21\,315 + 180\,692 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 129\,600 a^2 \alpha^2 \omega^{14}) + \\
& 32 s^4 (-12\,729\,312 + 108 (17\,522\,643 + 601\,216 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& 6 (-454\,207\,190 + 277\,826\,613 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (182\,168\,641 - 13\,316\,167\,900 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& (1\,817\,171\,433 + 10\,544\,864\,797 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 18 (-60\,592\,492 + 25\,969\,273 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + \\
& 6 (-15\,756\,501 + 8\,116\,780 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 10\,480\,320 a^2 \alpha^2 \omega^{14}) + \\
& 8 s^6 (27\,589\,248 - 108 (94\,676\,883 + 1\,046\,872 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& (103\,894\,884\,095 + 21\,482\,684\,772 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (201\,703\,189\,479 + 47\,686\,522\,402 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& 6 (4\,401\,287\,668 + 5\,995\,005\,093 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 8 (-3\,087\,468\,100 + 1\,467\,242\,653 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + \\
& 144 (-13\,425\,281 + 24\,548\,716 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 97\,320\,960 a^2 \alpha^2 \omega^{14}) - \\
& s^8 (30\,606\,336 + 2160 (-16\,772\,255 + 647\,616 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (1\,371\,388\,028\,513 + \\
& 113\,695\,649\,856 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 32 (-61\,500\,813\,741 + 10\,682\,602\,562 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& 3792 (-430\,556\,868 + 137\,762\,983 a^2 \alpha^2) \omega^8 - 128 (-719\,199\,741 + 1\,154\,251\,205 a^2 \alpha^2) \\
& \omega^{10} - 2304 (-2\,303\,473 + 16\,067\,104 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 1\,103\,293\,440 a^2 \alpha^2 \omega^{14}) - \\
& 2 s^{10} \omega^2 (1\,188\,879\,012 - 397\,789\,623\,915 \omega^2 + 663\,750\,469\,358 \omega^4 - \\
& 51\,654\,294\,500 \omega^6 - 252\,336\,192\,480 \omega^8 - 1\,239\,335\,424 \omega^{10} + \\
& 8 a^2 \alpha^2 (9\,082\,368 - 824\,435\,601 \omega^2 + 42\,784\,941\,097 \omega^4 + 30\,186\,085\,562 \\
& \omega^6 - 5\,396\,925\,496 \omega^8 + 414\,126\,000 \omega^{10} + 50\,328\,000 \omega^{12})) + \\
& 2 R^{10} s^2 \omega^4 (96 s^{16} \omega^4 (2\,655\,466 + 5\,438\,149 \omega^2) + 16 s^{14} \omega^2 (1\,250\,343 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (58\,336\,438 - 1\,148\,760 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (54\,694\,702 - 5\,587\,668 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 33\,268\,914 \omega^6) + \\
2 s^{12} & (15\,930 + (49\,311\,843 - 285\,360 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 8 (-57\,778\,859 + 5\,573\,231 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 8 (-44\,265\,664 + 13\,363\,287 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& 8 (7\,063\,787 + 7\,131\,492 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 61\,349\,232 \omega^{10}) + \\
2 s^{10} & (53\,208 + (42\,894\,184 - 1\,097\,284 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 3 (58\,640\,345 + 24\,654\,638 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 12 (86\,261\,549 + 13\,061\,734 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 8 (17\,159\,864 + 3\,922\,041 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 16 (3\,469\,889 + 648\,396 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 2\,756\,352 \omega^{12}) - \\
s^8 & (-232\,764 + 8 (1\,237\,712 + 382\,597 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (263\,677\,303 + 61\,459\,720 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& (806\,450\,110 - 244\,352\,308 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 160 (-4\,835\,539 + 408\,847 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 16 (4\,598\,266 + 892\,635 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 32 (391\,595 + 2736 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 1\,826\,400 \omega^{14}) - \\
192 \omega^{10} & (164 \omega^2 - 54 \omega^4 + 21 a^2 \alpha^2 (-33 + 16 \omega^2)) - \\
16 s^2 \omega^4 & (\omega^2 (56\,960 + 139\,440 \omega^2 + 22\,484 \omega^4 - 124\,512 \omega^6 - 9777 \omega^8 - 522 \omega^{10}) + \\
& 3 a^2 \alpha^2 (3415 + 38\,300 \omega^2 + 11\,270 \omega^4 + 85\,008 \omega^6 + 12\,852 \omega^8 + 1188 \omega^{10})) + \\
s^6 \omega^2 & (1\,802\,461 - 7\,289\,942 \omega^2 - 11\,373\,208 \omega^4 + 242\,266\,400 \omega^6 + 62\,166\,688 \omega^8 + \\
& 19\,158\,144 \omega^{10} - 1\,086\,528 \omega^{12} - 167\,520 \omega^{14} + 4 a^2 \alpha^2 (-294\,630 + 10\,705\,966 \\
& \omega^2 + 41\,021\,474 \omega^4 + 43\,646\,463 \omega^6 + 2\,029\,808 \omega^8 + 153\,888 \omega^{10} + 49\,104 \omega^{12})) - \\
4 s^4 \omega^2 & (-22\,742 + 849\,822 \omega^2 + 2\,510\,320 \omega^4 - 5\,081\,672 \omega^6 - 15\,506\,512 \omega^8 - \\
& 2\,518\,216 \omega^{10} - 216\,528 \omega^{12} + 6156 \omega^{14} + 504 \omega^{16} + a^2 \alpha^2 (16\,222 + 1\,779\,472 \omega^2 + 694\,257 \\
& \omega^4 + 4\,483\,696 \omega^6 + 1\,349\,784 \omega^8 + 542\,880 \omega^{10} + 17\,856 \omega^{12} - 1872 \omega^{14})) + \\
R^9 s^3 \omega^4 & (-204\,427\,008 s^{16} \omega^4 - 16 s^{14} \omega^2 (4\,730\,076 + (51\,894\,265 - 1\,934\,496 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& 46\,307\,244 \omega^4) - 16 s^{12} (28\,404 + (19\,360\,435 - 221\,744 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& (75\,115\,818 - 6\,954\,546 a^2 \alpha^2) \omega^4 - 423 (-42\,431 + 22\,432 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 22\,676\,316 \omega^8) + s^{10} \\
& (-2\,021\,037 + 4 (-53\,886\,363 + 3\,872\,458 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 64 (7\,905\,201 + 3\,499\,340 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 32 \\
& (13\,677\,976 + 3\,747\,015 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 96 (2\,796\,443 + 761\,136 a^2 \alpha^2) \omega^8 - 58\,932\,096 \omega^{10})) + \\
s^8 & (-2\,650\,194 + (59\,849\,763 + 16\,720\,640 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 4 (168\,290\,721 + 2\,657\,366 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 32 (-48\,334\,039 + 1\,121\,394 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 96 (-1\,163\,804 + 355\,551 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& 64 (816\,389 + 139\,680 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - 2\,552\,832 \omega^{12}) + \\
s^6 & (164\,059 + 4 (-1\,076\,927 + 749\,964 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (50\,604\,832 - 60\,007\,280 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \\
& 8 (14\,189\,928 + 29\,036\,741 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (87\,529\,952 - 41\,953\,600 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \\
& 384 (111\,361 + 22\,662 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 16 (206\,345 + 17\,568 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 296\,640 \omega^{14}) + \\
384 \omega^8 & (574 \omega^2 - 216 \omega^4 + 21 a^2 \alpha^2 (-55 + 32 \omega^2)) + \\
16 s^2 \omega^2 & (\omega^2 (85\,440 + 278\,880 \omega^2 + 299\,656 \omega^4 - 486\,528 \omega^6 - 43\,359 \omega^8 - 4\,500 \omega^{10}) + \\
& 6 a^2 \alpha^2 (683 + 15\,320 \omega^2 - 11\,270 \omega^4 + 86\,352 \omega^6 + 12\,852 \omega^8 + 2\,592 \omega^{10})) + \\
8 s^4 \omega^2 & (-a^2 \alpha^2 (6960 + 519\,149 \omega^2 - 980\,392 \omega^4 + 1\,615\,560 \omega^6 - 427\,392 \\
& \omega^8 + 10\,368 \omega^{10} + 1152 \omega^{12}) + 2 (78\,740 + 604\,152 \omega^2 + 252\,788 \\
& \omega^4 - 7\,653\,688 \omega^6 - 1\,306\,752 \omega^8 - 262\,086 \omega^{10} + 6\,009 \omega^{12} + 684 \omega^{14})) + \\
R^{11} s \omega^6 & (-637\,972\,992 s^{18} \omega^4 - 16 s^{16} \omega^2 (36\,028\,572 + (189\,558\,779 - 2\,865\,024 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& 120\,871\,956 \omega^4) - 16 s^{14} (829\,197 + (152\,246\,483 - 1\,310\,256 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& (353\,541\,208 - 19\,593\,186 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (59\,757\,781 - 18\,582\,768 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 40\,342\,764 \omega^8) + \\
4 s^4 & (7509 + 4 (-56\,855 + 963\,397 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 480 (4\,783 + 42\,518 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& 2 (565\,200 + 8\,438\,221 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 16 (-1\,485\,665 + 1\,017\,303 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& 16 (-1\,250\,578 + 419\,967 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 8 (-335\,015 + 91\,566 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + \\
& 24 (-3917 + 1221 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + (4020 - 1728 a^2 \alpha^2) \omega^{16} + 144 \omega^{18}) + \\
192 \omega^{10} & (41 \omega^2 - 12 \omega^4 + 6 a^2 \alpha^2 (-77 + 32 \omega^2)) + s^{12} (-73\,798\,131 - 2\,138\,687\,828 \omega^2 + \\
& 700\,715\,312 \omega^4 - 568\,090\,464 \omega^6 + 564\,492\,784 \omega^8 + 19\,278\,528 \omega^{10} + \\
& 8 a^2 \alpha^2 (21\,816 + 11\,866\,679 \omega^2 + 179\,480\,256 \omega^4 + 89\,735\,400 \omega^6 + 4\,001\,760 \omega^8)) + \\
16 s^2 \omega^4 & (-3 \omega^2 (-28\,480 - 55\,776 \omega^2 + 25\,672 \omega^4 + 25\,568 \omega^6 + 1685 \omega^8 + 36 \omega^{10}) + \\
& 2 a^2 \alpha^2 (20\,490 + 153\,200 \omega^2 + 133\,434 \omega^4 + 156\,240 \omega^6 + 21\,627 \omega^8 + 936 \omega^{10})) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^{10} \left(-87\,547\,224 + 455\,328\,767 \omega^2 + 6\,425\,390\,084 \omega^4 + 7\,099\,629\,216 \omega^6 - \right. \\
& \quad \left. 440\,866\,304 \omega^8 + 115\,386\,112 \omega^{10} + 33\,003\,264 \omega^{12} - 16 a^2 \alpha^2 (-45\,321 - 16\,468\,507 \right. \\
& \quad \left. \omega^2 - 72\,077\,999 \omega^4 - 59\,363\,812 \omega^6 - 6\,330\,114 \omega^8 + 2\,148\,480 \omega^{10}) \right) + \\
& s^8 \left(1\,404\,294 + 262\,541\,762 \omega^2 + 1\,784\,783\,581 \omega^4 + 1\,376\,415\,332 \omega^6 + 51\,944\,288 \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 214\,206\,784 \omega^{10} + 19\,299\,888 \omega^{12} + 4\,600\,896 \omega^{14} - 8 a^2 \alpha^2 (-86\,958 - 22\,944\,699 \omega^2 + \right. \\
& \quad \left. 88\,069\,618 \omega^4 + 193\,262\,371 \omega^6 + 13\,693\,064 \omega^8 - 917\,724 \omega^{10} + 974\,592 \omega^{12}) \right) - \\
& s^6 \left(1\,884\,832 + 11\,801\,335 \omega^2 - 21\,312\,628 \omega^4 + 385\,263\,904 \omega^6 + 789\,227\,072 \omega^8 + \right. \\
& \quad \left. 215\,976\,576 \omega^{10} + 15\,334\,144 \omega^{12} - 1\,442\,096 \omega^{14} - 140\,352 \omega^{16} + \right. \\
& \quad \left. 8 a^2 \alpha^2 (-84\,916 + 9\,167\,838 \omega^2 + 59\,934\,760 \omega^4 + 85\,860\,826 \right. \\
& \quad \left. \omega^6 + 22\,183\,623 \omega^8 - 2\,062\,504 \omega^{10} - 426\,780 \omega^{12} + 65\,376 \omega^{14}) \right) - \\
& 2 R^{20} \omega^{12} \left(256 s^{18} \omega^6 \left(50\,692\,301 + 15\,216\,336 \omega^2 \right) + 16 s^{16} \omega^4 \right. \\
& \quad \left(808\,418\,529 - 64 \left(89\,259\,406 + 13\,798\,575 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - \right. \\
& \quad \left. 2 \left(923\,817\,307 + 160\,519\,104 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + 63\,382\,176 \omega^6 \right) - \\
& \quad \left. 768 a^2 \alpha^2 \omega^2 \left(-5814 - 26\,256 \omega^2 - 103\,117 \omega^4 - 88\,664 \omega^6 + 17\,436 \omega^8 \right) + \right. \\
& \quad \left. 2 s^{14} \omega^2 \left(126\,080\,280 - 9 \left(3\,842\,842\,261 + 684\,391\,216 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 \left(48\,327\,011\,493 + 8\,052\,054\,434 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + 48 \left(1\,215\,737\,899 + 348\,369\,518 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 48 \left(122\,914\,327 + 42\,555\,072 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + 44\,075\,808 \omega^{10} \right) - 2 s^{12} \left(3\,981\,312 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 72 \left(15\,653\,861 + 4\,038\,906 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - \left(249\,150\,213\,969 + 12\,284\,690\,060 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \left(-61\,670\,016\,818 + 48\,046\,322\,115 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 + 8 \left(-28\,857\,263\,532 + 2\,444\,770\,091 a^2 \alpha^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \omega^8 - 8 \left(5\,130\,575\,074 + 776\,084\,991 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} + 288 \left(-17\,911 + 2\,499\,595 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} \right) + \right. \\
& \quad \left. 8 s^4 \left(102\,300\,840 - 18 \left(96\,209\,337 + 9\,902\,048 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 \left(1\,809\,227\,379 + 713\,394\,592 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 - \left(9\,888\,089\,301 + 8\,787\,309\,278 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 9 \left(543\,484\,333 + 510\,286\,012 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + 12 \left(-41\,997\,511 + 56\,757\,459 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 48 \left(-318\,615 + 1\,531\,064 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} + 1\,998\,720 a^2 \alpha^2 \omega^{14} \right) - \right. \\
& \quad \left. 2 s^{10} \left(33\,390\,144 + 3 \left(-7\,103\,291\,845 + 387\,169\,992 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(371\,087\,015\,550 + 69\,590\,791\,868 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \left(606\,433\,694\,815 + 61\,375\,064\,024 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \left(98\,161\,517\,131 + 16\,375\,794\,652 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 - 32 \left(1\,117\,213\,107 + 441\,216\,569 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 576 \left(2\,047\,408 + 1\,045\,225 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} + 72\,334\,080 a^2 \alpha^2 \omega^{14} \right) + 32 s^2 \right. \\
& \quad \left. \left(-27 \left(283\,032 + 1\,959\,766 \omega^2 + 5\,713\,373 \omega^4 + 8\,111\,675 \omega^6 + 5\,013\,228 \omega^8 + 406\,160 \omega^{10} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 a^2 \alpha^2 \left(121\,824 + 10\,387\,764 \omega^2 + 37\,031\,892 \omega^4 + 50\,633\,520 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \omega^6 + 25\,493\,081 \omega^8 + 3\,095\,184 \omega^{10} + 1\,155\,924 \omega^{12} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. s^8 \left(653\,247\,072 - 99\,502\,368\,636 \omega^2 + 265\,359\,211\,933 \omega^4 + 301\,061\,837\,862 \omega^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 220\,185\,809\,172 \omega^8 - 49\,567\,261\,344 \omega^{10} - 2\,312\,861\,184 \omega^{12} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 a^2 \alpha^2 \left(-5\,101\,056 - 1\,082\,603\,124 \omega^2 + 43\,783\,281\,566 \omega^4 + 104\,310\,758\,041 \omega^6 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 57\,704\,519\,934 \omega^8 + 7\,786\,865\,888 \omega^{10} + 1\,890\,777\,888 \omega^{12} + 1\,676\,160 \omega^{14} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. 2 s^6 \left(-845\,642\,592 + 38\,105\,088\,264 \omega^2 + 119\,882\,043\,272 \omega^4 + 114\,048\,541\,439 \omega^6 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 13\,335\,770\,708 \omega^8 - 10\,811\,134\,592 \omega^{10} - 877\,030\,272 \omega^{12} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 a^2 \alpha^2 \left(-1\,814\,400 + 1\,187\,507\,808 \omega^2 - 4\,065\,012\,957 \omega^4 - 27\,196\,577\,610 \omega^6 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 6\,354\,314\,885 \omega^8 + 2\,309\,739\,892 \omega^{10} + 375\,956\,736 \omega^{12} + 16\,652\,160 \omega^{14} \right) \right) \right) - \\
& 2 R^{12} \omega^6 \left(576 a^2 \alpha^2 \omega^{12} \left(-11 + 4 \omega^2 \right) - 96 s^{18} \omega^4 \left(9\,620\,594 + 11\,373\,137 \omega^2 \right) - \right. \\
& \quad \left. 16 s^{16} \omega^2 \left(11\,616\,021 + 22 \left(9\,131\,309 + 23\,940 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \left(92\,804\,642 - 3\,454\,740 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 34\,179\,780 \omega^6 \right) + 2 s^{14} \left(-663\,120 + 3 \left(-158\,340\,677 + 456\,912 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 4 \left(-608\,746\,933 + 18\,504\,902 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + 8 \left(-192\,371\,296 + 14\,829\,159 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 144 \left(-2\,195\,099 + 673\,990 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + 92\,698\,896 \omega^{10} \right) + \right. \\
& \quad \left. 2 s^6 \left(-107\,448 - 4 \left(2\,492\,139 + 2\,975\,057 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - \left(32\,468\,879 + 43\,565\,896 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(84\,844\,859 + 201\,166\,192 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - 4 \left(68\,489\,473 + 40\,690\,487 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \left(-89\,758\,680 + 17\,527\,699 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} + 16 \left(-2\,232\,344 + 433\,477 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 24 \left(-17\,578 + 30\,375 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{14} - 32 \left(-4\,528 + 1\,935 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{16} + 55\,68 \omega^{18} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 s^{12} \left(-4263696 - 455044091 \omega^2 + 613244850 \omega^4 + 2444399520 \omega^6 - \right. \\
& \quad \left. 487844400 \omega^8 + 152753904 \omega^{10} + 56887440 \omega^{12} + 2 a^2 \alpha^2 (4968 + 686746 \right. \\
& \quad \left. \omega^2 + 256832863 \omega^4 + 507320780 \omega^6 + 51158592 \omega^8 - 47581488 \omega^{10}) \right) + \\
& 16 s^2 \omega^6 \left(-2 \omega^2 (-8544 - 13944 \omega^2 + 12703 \omega^4 + 3012 \omega^6 + 144 \omega^8) + \right. \\
& \quad \left. 3 a^2 \alpha^2 (6830 + 38300 \omega^2 + 47558 \omega^4 + 18768 \omega^6 + 2205 \omega^8 + 36 \omega^{10}) \right) + \\
& 2 s^{10} \left(-6573183 + 1858816 \omega^2 + 1620918865 \omega^4 + 3438263389 \omega^6 + 514170628 \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 257639968 \omega^{10} + 28202000 \omega^{12} + 9768816 \omega^{14} + 4 a^2 \alpha^2 (3510 + 6473079 \omega^2 + \right. \\
& \quad \left. 166874464 \omega^4 + 81460953 \omega^6 + 62989314 \omega^8 + 6945294 \omega^{10} - 5368896 \omega^{12}) \right) + \\
& s^8 \left(-985788 + 66974481 \omega^2 + 744805890 \omega^4 + 1111549622 \omega^6 - 352617718 \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 623067664 \omega^{10} - 37859136 \omega^{12} + 8741824 \omega^{14} + 1059840 \omega^{16} - \right. \\
& \quad \left. 4 a^2 \alpha^2 (-17604 - 20564742 \omega^2 + 164396521 \omega^4 + 559940468 \right. \\
& \quad \left. \omega^6 + 192059587 \omega^8 - 3765888 \omega^{10} - 4186308 \omega^{12} + 1016208 \omega^{14}) \right) - \\
& 4 s^4 \omega^2 \left(2 (-7509 + 113710 \omega^2 + 8975 \omega^4 + 1878936 \omega^6 + 5829572 \omega^8 + \right. \\
& \quad \left. 1983428 \omega^{10} + 193610 \omega^{12} + 1620 \omega^{14} - 144 \omega^{16}) + \right. \\
& \quad \left. a^2 \alpha^2 (-1114848 - 9281484 \omega^2 - 24085920 \omega^4 - 19435039 \omega^6 - 8130248 \right. \\
& \quad \left. \omega^8 - 2700600 \omega^{10} - 148680 \omega^{12} - 4716 \omega^{14} + 144 \omega^{16}) \right) + \\
& R^{17} s \omega^8 \left(2680595712 s^{18} \omega^8 + 64 s^{16} \omega^6 (9731811 - 8 (13635653 + 10275957 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \right. \\
& \quad \left. 122190600 \omega^4) + 16 s^{14} \omega^4 \right. \\
& \quad \left. (-118111284 - (749600041 + 654145776 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (8075324104 + 245985798 a^2 \alpha^2) \right. \\
& \quad \left. \omega^4 + (2126114370 - 632434464 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 456221256 \omega^8) \right) + \\
& s^{12} \omega^2 \left(-48864384 - 3 (2493783113 + 251228448 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \right. \\
& \quad \left. 4 (-36412073375 + 555387106 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \right. \\
& \quad \left. 16 (-10244391341 + 6265143912 a^2 \alpha^2) \omega^6 - 288 (-761533424 + 66928197 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 48 (-699314609 + 88385952 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + 2684680512 \omega^{12}) \right) + \\
& s^8 \left(-124416 - 864 (398813 + 46704 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 3 (15554788449 + 1334594848 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \right. \\
& \quad \left. 4 (31147651659 + 39614376028 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 3 (33133540101 + 96771338960 a^2 \alpha^2) \right. \\
& \quad \left. \omega^8 + 4 (-58091832123 + 33259517344 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - 17328 (2765909 + 491936 a^2 \alpha^2) \right. \\
& \quad \left. \omega^{12} + 64 (89988511 + 22788690 a^2 \alpha^2) \omega^{14} - 2304 (-182672 + 21655 a^2 \alpha^2) \omega^{16} \right) + \\
& 2 s^6 \left(393984 - 864 (711593 + 47238 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 8 (2285505687 + 919656052 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \right. \\
& \quad \left. (85463802994 - 9293987696 a^2 \alpha^2) \omega^6 + (105249704765 - 63995534812 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \right. \\
& \quad \left. 2 (9731570805 + 2603753588 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + \right. \\
& \quad \left. 4 (-2958012257 + 3544819556 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 32 (-15920601 + 24714908 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + \right. \\
& \quad \left. 60288 (852 + 715 a^2 \alpha^2) \omega^{16} + 787968 a^2 \alpha^2 \omega^{18} \right) + \\
& s^4 \left(-1451520 + 31104 (11131 + 2064 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 48 (117239267 + 67933048 a^2 \alpha^2) \omega^4 - \right. \\
& \quad \left. 16 (1561596479 + 1943803966 a^2 \alpha^2) \omega^6 - (40869635983 + 77153344160 a^2 \alpha^2) \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 16 (2006594763 + 2884966166 a^2 \alpha^2) \omega^{10} + \right. \\
& \quad \left. (-8497518660 + 4464993584 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 256 (-3895460 + 8670197 a^2 \alpha^2) \omega^{14} + \right. \\
& \quad \left. 128 (-59013 + 1111832 a^2 \alpha^2) \omega^{16} + 1391616 a^2 \alpha^2 \omega^{18} \right) + \\
& s^{10} \omega^2 \left(-235177992 - 748751310 \omega^2 - 243438755369 \omega^4 - 504229252092 \omega^6 - \right. \\
& \quad \left. 184387994128 \omega^8 + 67623216480 \omega^{10} + 6226593984 \omega^{12} + 250132608 \omega^{14} - \right. \\
& \quad \left. 8 a^2 \alpha^2 (383616 + 493964202 \omega^2 + 979529532 \omega^4 + 11444147065 \right. \\
& \quad \left. \omega^6 + 14998815256 \omega^8 + 254749248 \omega^{10} + 96416064 \omega^{12}) \right) + 32 \omega^2 \\
& \left(-\omega^2 (44064 + 295461 \omega^2 + 925584 \omega^4 + 1766486 \omega^6 + 1654272 \omega^8 + 139968 \omega^{10}) + \right. \\
& \quad \left. 2 a^2 \alpha^2 (16848 + 176976 \omega^2 + 2215770 \omega^4 + 7337069 \right. \\
& \quad \left. \omega^6 + 8979848 \omega^8 + 4089616 \omega^{10} + 343984 \omega^{12} + 14976 \omega^{14}) \right) + \\
& 8 s^2 \omega^2 \left(-14261616 - 133001784 \omega^2 - 484460649 \omega^4 - 896671181 \omega^6 - \right. \\
& \quad \left. 874958402 \omega^8 - 326942122 \omega^{10} - 25735232 \omega^{12} - 42048 \omega^{14} + \right. \\
& \quad \left. 2 a^2 \alpha^2 (14688 + 32196072 \omega^2 + 221276688 \omega^4 + 421599612 \omega^6 + 287867375 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega^8 + 90\,428\,028\,\omega^{10} + 35\,207\,024\,\omega^{12} + 2\,443\,296\,\omega^{14} + 3456\,\omega^{16} \Big) \Big) + \\
R^{13} s \omega^6 & \left(-1\,058\,658\,048\,s^{18}\omega^6 - 16\,s^{16}\omega^4 \left(149\,082\,396 + \left(351\,027\,589 + 19\,769\,184\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \right. \\
& 85\,872\,828\,\omega^4 \Big) + 16\,s^{14}\omega^2 \left(-9\,426\,294 - 11 \left(52\,267\,985 + 585\,456\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 - \right. \\
& 6 \left(83\,448\,761 + 715\,843\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \left. \left. \left(215\,555\,450 - 85\,849\,920\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + 96\,546\,384\,\omega^8 \right) \right) + \\
s^{12} & \left(-290\,304 + 27 \left(-33\,256\,607 + 11\,168\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 - 4 \left(2\,769\,942\,119 + 79\,334\,782\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& 16 \left(-479\,951\,449 + 63\,090\,532\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 - 192 \left(23\,592\,154 + 7\,068\,797\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + \\
& \left. \left(3\,448\,520\,656 - 1\,869\,113\,088\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + 1\,098\,915\,264\,\omega^{12} \right) + \\
2s^{10} & \left(-1\,213\,596 - 21 \left(25\,744\,087 + 395\,592\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + 3 \left(75\,775\,091 + 307\,390\,728\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& 8 \left(1\,468\,003\,149 + 741\,089\,365\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + \\
& 8 \left(42\,846\,983 + 335\,566\,864\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 - 48 \left(37\,164\,513 + 2\,895\,493\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + \\
& \left. \left(373\,253\,640 - 287\,580\,672\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} + 116\,452\,320\,\omega^{14} \right) + \\
s^8 & \left(-4\,804\,272 + \left(-176\,006\,551 + 4\,604\,928\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + 32 \left(170\,863\,073 + 112\,793\,507\,a^2\alpha^2 \right) \right. \\
& \omega^4 + \left. \left(21\,455\,689\,997 + 709\,966\,352\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + 4 \left(2\,746\,639\,871 + 437\,933\,234\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + \right. \\
& 128 \left(-46\,675\,697 + 6\,445\,777\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + 32 \left(-10\,849\,168 + 4\,329\,693\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} - \\
& \left. 16 \left(-8\,068\,021 + 4\,516\,992\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{14} + 18\,763\,968\,\omega^{16} \right) + \\
s^6 & \left(-520\,992 + 8 \left(6\,470\,707 + 9\,915\,700\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \left(465\,505\,436 - 1\,440\,296\,752\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \left(1\,739\,296\,866 - 8\,193\,047\,312\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 - \left(1\,133\,447\,139 + 8\,552\,935\,328\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + \\
& 4 \left(-630\,809\,013 + 65\,067\,922\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + 32 \left(-33\,984\,133 + 4\,511\,602\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} + \\
& 864 \left(21\,337 + 31\,148\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{14} - 768 \left(-11\,285 + 4\,776\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{16} + 368\,256\,\omega^{18} \Big) + \\
32\omega^8 & \left(16\omega^2 \left(178 + 249\omega^2 - 312\omega^4 - 18\omega^6 \right) + \right. \\
& 3a^2\alpha^2 \left(3415 + 15\,320\omega^2 + 22\,990\omega^4 + 3408\omega^6 + 288\omega^8 \right) \Big) + 8s^2\omega^2 \\
& \left(\omega^2 \left(22\,527 - 227\,420\omega^2 - 1\,248\,744\omega^4 - 5\,059\,888\omega^6 - 5\,627\,560\omega^8 - 869\,968\omega^{10} - \right. \right. \\
& 47\,712\omega^{12} + 288\omega^{14} \Big) + a^2\alpha^2 \left(278\,864 + 4\,459\,392\omega^2 + 18\,182\,436\omega^4 + 30\,133\,520\omega^6 + \right. \\
& 20\,686\,369\omega^8 + 4\,690\,040\omega^{10} + 1\,055\,904\omega^{12} + 35\,568\omega^{14} + 576\omega^{16} \Big) \Big) - \\
s^4\omega^2 & \left(24\,898\,896 + 197\,176\,128\omega^2 + 532\,265\,923\omega^4 + 1\,075\,159\,092\omega^6 + \right. \\
& 1\,304\,689\,568\omega^8 + 383\,503\,232\omega^{10} + 45\,775\,888\omega^{12} - 557\,824\omega^{14} - 96\,576\omega^{16} + \\
& 8a^2\alpha^2 \left(2\,150\,200 - 11\,805\,752\omega^2 - 42\,243\,732\omega^4 + 26\,235\,194\omega^6 + 19\,502\,426\omega^8 - \right. \\
& 30\,924\,913\omega^{10} - 2\,403\,560\omega^{12} - 122\,448\omega^{14} + 5472\omega^{16} \Big) \Big) \Big) + \\
2R^{14}\omega^6 & \left(96s^{18}\omega^6 \left(17\,502\,416 + 8\,594\,197\omega^2 \right) - 16a^2\alpha^2\omega^{10} \right. \\
& \left. \left(2049 + 7660\omega^2 + 12\,960\omega^4 + 576\omega^6 \right) - \right. \\
32s^{16}\omega^4 & \left(-27\,560\,169 - \left(152\,868\,083 + 20\,022\,300\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \\
& \left. \left(78\,587\,282 - 23\,471\,766\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + 51\,079\,848\omega^6 \right) + \\
2s^{14}\omega^2 & \left(9\,605\,358 + 3 \left(681\,354\,001 + 9\,168\,240\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \\
& 8 \left(459\,960\,958 + 37\,310\,119\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + 8 \left(-179\,000\,978 + 187\,372\,371\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + \\
& 144 \left(-21\,556\,045 + 8\,537\,408\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 - 869\,066\,448\omega^{10} \Big) + \\
2s^{12} & \left(7776 + 36 \left(1829\,333 + 804\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \left(2\,318\,693\,817 + 175\,341\,668\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \left(2\,363\,811\,788 - 36\,658\,074\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + \\
& 16 \left(333\,247\,454 + 23\,180\,385\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + 432 \left(1\,326\,815 + 3\,085\,821\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + \\
& 16 \left(-73\,095\,389 + 37\,351\,602\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} - 250\,613\,328\omega^{14} \Big) - \\
2s^{10} & \left(-36\,288 - 12 \left(8\,306\,569 + 188\,604\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + \left(-775\,629\,279 + 148\,191\,212\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \left(8\,347\,758\,807 + 6\,417\,748\,732\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + \left(7\,013\,938\,857 + 7\,508\,562\,252\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + \\
& 8 \left(-899\,618\,855 + 94\,236\,853\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} - 8 \left(27\,922\,876 + 10\,269\,549\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} - \\
& 72 \left(-2\,662\,219 + 1\,382\,628\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{14} + 27\,668\,736\omega^{16} \Big) - \\
2s^8 & \left(-155\,304 - 6 \left(6\,106\,277 + 393\,264\,a^2\alpha^2 \right) \omega^2 + 2 \left(532\,562\,713 + 399\,753\,884\,a^2\alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \left(6\,374\,568\,372 - 1\,291\,774\,180\,a^2\alpha^2 \right) \omega^6 + \left(7\,192\,150\,172 - 4\,159\,284\,780\,a^2\alpha^2 \right) \omega^8 + \\
& \left(-271\,054\,279 + 1\,525\,809\,970\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{10} + 8 \left(-203\,024\,416 + 19\,671\,031\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{12} + \\
& 8 \left(7\,761\,566 + 3\,470\,955\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{14} - 48 \left(-386\,105 + 153\,582\,a^2\alpha^2 \right) \omega^{16} + 869\,664\omega^{18} \Big) - \\
4s^2\omega^4 & \left(-2\omega^2 \left(-7509 + 56\,855\omega^2 + 504\,195\omega^4 + 1\,330\,968\omega^6 + 582\,112\omega^8 + 39\,360\omega^{10} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a^2 \alpha^2 (836\,592 + 6\,689\,088 \omega^2 + 17\,883\,014 \omega^4 + 21\,090\,000 \\
& \quad \omega^6 + 10\,901\,611 \omega^8 + 1\,468\,452 \omega^{10} + 177\,696 \omega^{12} + 4032 \omega^{14}) + \\
s^4 \omega^2 & (4\,727\,376 + 50\,868\,312 \omega^2 + 213\,829\,456 \omega^4 + 465\,487\,829 \omega^6 + 659\,255\,854 \omega^8 + \\
& \quad 381\,749\,824 \omega^{10} + 56\,407\,072 \omega^{12} + 2\,891\,488 \omega^{14} - 59\,520 \omega^{16} - \\
& \quad 4 a^2 \alpha^2 (-242\,064 + 18\,385\,216 \omega^2 + 119\,015\,036 \omega^4 + 193\,363\,694 \omega^6 + 96\,040\,674 \\
& \quad \omega^8 + 26\,068\,490 \omega^{10} + 17\,074\,499 \omega^{12} + 915\,668 \omega^{14} + 15\,120 \omega^{16})) + \\
s^6 \omega^2 & (-9\,837\,000 + 272\,029\,832 \omega^2 + 823\,013\,858 \omega^4 + 1\,831\,434\,804 \omega^6 + \\
& \quad 2\,769\,109\,281 \omega^8 + 1\,121\,474\,198 \omega^{10} + 186\,611\,976 \omega^{12} - 8\,083\,136 \omega^{14} - 834\,624 \omega^{16} + \\
& \quad 4 a^2 \alpha^2 (-2\,406\,528 + 129\,008\,592 \omega^2 + 836\,446\,700 \omega^4 + 1\,817\,114\,352 \omega^6 + 856\,519\,606 \\
& \quad \omega^8 - 200\,211\,665 \omega^{10} - 18\,961\,724 \omega^{12} - 1\,180\,800 \omega^{14} + 78\,624 \omega^{16})) - \\
2 R^{18} \omega^{10} & (96 s^{18} \omega^6 (63\,227\,809 + 31\,504\,880 \omega^2) + 16 s^{16} \omega^4 \\
& \quad (46\,461\,087 - 10 (164\,684\,755 + 59\,291\,532 a^2 \alpha^2) \omega^2 - \\
& \quad \quad 22 (4\,521\,895 + 13\,413\,744 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 170\,131\,800 \omega^6) + \\
64 a^2 \alpha^2 \omega^2 & (8424 + 44\,244 \omega^2 + 325\,169 \omega^4 + 705\,432 \omega^6 + 516\,476 \omega^8 + 14\,256 \omega^{10}) + \\
2 s^{14} \omega^2 & (-158\,080\,518 - 27 (113\,423\,539 + 79\,617\,360 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 40 (2\,752\,127\,653 + 278\,894\,881 a^2 \alpha^2) \omega^4 + 8 (9\,763\,336\,568 + 387\,245\,517 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad (7\,642\,835\,456 - 891\,404\,352 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 845\,281\,488 \omega^{10}) + \\
2 s^{12} & (-1\,329\,696 - 144 (4\,198\,423 + 373\,221 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad (42\,905\,197\,118 - 2\,146\,785\,332 a^2 \alpha^2) \omega^4 - (46\,077\,274\,317 + 69\,462\,033\,842 a^2 \alpha^2) \omega^6 + \\
& \quad (31\,585\,613\,084 - 55\,500\,212\,376 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 24 (2\,336\,551\,604 + 87\,936\,735 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - \\
& \quad 1872 (-1\,711\,313 + 207\,438 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 111\,470\,688 \omega^{14}) - \\
s^{10} & (10\,310\,976 + 12 (-130\,416\,013 + 64\,541\,664 a^2 \alpha^2) \omega^2 + \\
& \quad 4 (43\,407\,034\,939 + 7\,455\,238\,194 a^2 \alpha^2) \omega^4 + (345\,546\,166\,153 - 64\,982\,651\,704 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& \quad 12 (-33\,645\,584\,944 + 983\,213\,653 a^2 \alpha^2) \omega^8 + 16 (2\,172\,953\,753 + 1\,652\,697\,195 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - \\
& \quad 128 (103\,695\,980 + 26\,901\,897 a^2 \alpha^2) \omega^{12} + 1728 (-364\,287 + 55\,130 a^2 \alpha^2) \omega^{14}) + \\
8 s^2 & (-1\,372\,464 - 13\,834\,152 \omega^2 - 61\,756\,182 \omega^4 - 144\,845\,967 \omega^6 - 181\,164\,148 \omega^8 - \\
& \quad 102\,789\,168 \omega^{10} - 8\,327\,808 \omega^{12} + 2 a^2 \alpha^2 (17\,280 + 4\,388\,544 \omega^2 + 41\,203\,692 \omega^4 + \\
& \quad \quad 133\,459\,560 \omega^6 + 156\,786\,851 \omega^8 + 65\,032\,592 \omega^{10} + 11\,357\,076 \omega^{12} + 962\,640 \omega^{14})) + \\
s^8 & (19\,753\,632 - 15\,405\,235\,992 \omega^2 + 121\,255\,960\,203 \omega^4 + 301\,461\,557\,538 \omega^6 + \\
& \quad 37\,362\,661\,250 \omega^8 - 65\,728\,209\,932 \omega^{10} - 1\,590\,931\,776 \omega^{12} + 207\,300\,096 \omega^{14} + \\
& \quad 8 a^2 \alpha^2 (-259\,200 - 133\,811\,784 \omega^2 + 8\,363\,662\,479 \omega^4 + 17\,134\,591\,183 \omega^6 + 17\,789\,195\,894 \\
& \quad \omega^8 + 5\,071\,878\,159 \omega^{10} + 344\,424\,116 \omega^{12} + 35\,271\,360 \omega^{14} + 77\,760 \omega^{16})) + \\
2 s^4 & (16\,833\,312 - 1\,224\,603\,288 \omega^2 - 6\,618\,049\,548 \omega^4 - 13\,231\,908\,054 \omega^6 - \\
& \quad 12\,453\,026\,719 \omega^8 - 4\,236\,738\,996 \omega^{10} - 396\,656\,192 \omega^{12} - 5\,166\,720 \omega^{14} + \\
& \quad 4 a^2 \alpha^2 (27\,648 - 30\,543\,696 \omega^2 - 305\,807\,072 \omega^4 - 1\,561\,712\,904 \omega^6 - 1\,936\,624\,492 \\
& \quad \omega^8 - 202\,124\,061 \omega^{10} + 243\,219\,056 \omega^{12} + 20\,348\,360 \omega^{14} + 156\,672 \omega^{16})) + \\
2 s^6 & (-76\,852\,800 + 4\,953\,135\,528 \omega^2 + 18\,097\,883\,448 \omega^4 + 27\,808\,804\,015 \omega^6 + \\
& \quad 10\,269\,717\,867 \omega^8 - 3\,832\,438\,386 \omega^{10} - 1\,400\,532\,624 \omega^{12} - 45\,709\,632 \omega^{14} + \\
& \quad 2 a^2 \alpha^2 (-902\,016 + 542\,006\,208 \omega^2 - 3\,911\,033\,890 \omega^4 - 29\,081\,258\,588 \omega^6 - 22\,782\,875\,637 \\
& \quad \omega^8 + 2\,742\,234\,782 \omega^{10} + 1\,017\,023\,488 \omega^{12} + 96\,287\,488 \omega^{14} + 1\,899\,648 \omega^{16})) - \\
R^{15} s \omega^8 & (238\,620\,672 s^{18} \omega^6 + 16 s^{16} (293\,192\,532 \omega^4 + (286\,363\,271 + 124\,998\,336 a^2 \alpha^2) \omega^6 - \\
& \quad 234\,095\,628 \omega^8) - 16 s^{14} \omega^2 \\
& \quad (-51\,339\,987 - (867\,690\,899 + 120\,275\,184 a^2 \alpha^2) \omega^2 + (1\,966\,516\,548 - 74\,778\,870 a^2 \alpha^2) \omega^4 + \\
& \quad (1\,520\,645\,890 - 448\,466\,832 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 431\,770\,440 \omega^8) + \\
s^{12} & (6\,355\,584 + (4\,395\,135\,183 + 57\,514\,752 a^2 \alpha^2) \omega^2 + 4 (3\,553\,497\,405 + 1\,050\,870\,302 a^2 \alpha^2) \\
& \quad \omega^4 + 64 (259\,918\,607 + 431\,241\,335 a^2 \alpha^2) \omega^6 + 96 (-335\,346\,650 + 184\,222\,753 a^2 \alpha^2) \omega^8 + \\
& \quad 144 (-127\,924\,693 + 41\,872\,672 a^2 \alpha^2) \omega^{10} - 3\,029\,423\,808 \omega^{12}) + \\
s^2 & (1\,410\,048 - 32 (-886\,383 + 1\,709\,156 a^2 \alpha^2) \omega^2 - 48 (-3\,335\,717 + 13\,223\,960 a^2 \alpha^2) \omega^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 32 \left(-14\,699\,679 + 58\,424\,833 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 + \left(801\,363\,585 - 2\,021\,856\,848 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + \\
& \left(754\,244\,676 - 833\,575\,136 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} - 32 \left(-6\,224\,407 + 5\,469\,489 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} - \\
& 128 \left(-110\,585 + 247\,297 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{14} - 2304 \left(11 + 540 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{16} - \\
& 4 \omega^4 \left(-\omega^2 \left(-7509 + 45\,484 \omega^2 + 508\,576 \omega^4 + 1\,046\,400 \omega^6 + 80\,640 \omega^8 \right) + 12 a^2 \alpha^2 \left(139\,432 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 743\,232 \omega^2 + 1\,468\,003 \omega^4 + 1\,304\,512 \omega^6 + 400\,992 \omega^8 + 32\,256 \omega^{10} + 768 \omega^{12} \right) \right) + \\
& 2 s^{10} \left(21\,595\,896 + 2\,791\,203\,006 \omega^2 + 12\,839\,650\,085 \omega^4 + 18\,488\,289\,172 \omega^6 + \right. \\
& \quad \left. 46\,204\,036\,136 \omega^8 - 3\,461\,307\,776 \omega^{10} - 1\,969\,901\,960 \omega^{12} - 229\,852\,128 \omega^{14} + \right. \\
& \quad \left. 4 a^2 \alpha^2 \left(15\,552 + 66\,255\,078 \omega^2 + 148\,851\,844 \omega^4 - 3\,790\,757\,655 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \omega^6 + 1\,781\,498\,920 \omega^8 + 688\,435\,164 \omega^{10} + 176\,171\,616 \omega^{12} \right) \right) + \\
& s^8 \left(88\,223\,472 + 4\,238\,139\,148 \omega^2 - 43\,135\,899\,388 \omega^4 - 104\,165\,531\,413 \omega^6 + \right. \\
& \quad \left. 8\,684\,974\,260 \omega^8 + 33\,619\,755\,056 \omega^{10} - 1\,769\,599\,776 \omega^{12} - 433\,019\,104 \omega^{14} - \right. \\
& \quad \left. 21\,202\,944 \omega^{16} + 8 a^2 \alpha^2 \left(222\,912 + 27\,582\,558 \omega^2 - 4\,191\,477\,479 \omega^4 - 6\,522\,470\,240 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \omega^6 - 6\,088\,980\,651 \omega^8 - 22\,618\,976 \omega^{10} - 14\,832\,336 \omega^{12} + 17\,466\,912 \omega^{14} \right) \right) + \\
& s^6 \left(54\,555\,552 - 2\,611\,609\,456 \omega^2 - 16\,696\,671\,278 \omega^4 - 32\,486\,766\,952 \omega^6 - \right. \\
& \quad \left. 10\,466\,972\,549 \omega^8 + 7\,535\,680\,916 \omega^{10} + 2\,288\,790\,752 \omega^{12} - 166\,459\,008 \omega^{14} - \right. \\
& \quad \left. 16\,017\,024 \omega^{16} + 16 a^2 \alpha^2 \left(258\,120 - 103\,737\,504 \omega^2 + 598\,675\,360 \omega^4 + 3\,267\,826\,897 \omega^6 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1\,774\,169\,991 \omega^8 - 602\,331\,802 \omega^{10} - 37\,890\,100 \omega^{12} - 2\,954\,232 \omega^{14} + 280\,656 \omega^{16} \right) \right) + \\
& s^4 \left(-2\,928\,960 + 678\,692\,712 \omega^2 + 3\,744\,267\,184 \omega^4 + 7\,970\,048\,850 \omega^6 + \right. \\
& \quad \left. 10\,109\,566\,914 \omega^8 + 5\,228\,958\,749 \omega^{10} + 923\,429\,460 \omega^{12} + 42\,820\,000 \omega^{14} - 2\,196\,096 \omega^{16} - \right. \\
& \quad \left. 8 a^2 \alpha^2 \left(310\,176 - 47\,288\,304 \omega^2 - 283\,360\,012 \omega^4 - 980\,064\,022 \omega^6 - 1\,236\,375\,409 \omega^8 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 164\,717\,274 \omega^{10} + 148\,977\,136 \omega^{12} + 10\,176\,320 \omega^{14} + 163\,680 \omega^{16} + 1152 \omega^{18} \right) \right) - \\
& 2 R^{16} \omega^8 \left(192 s^{18} \omega^6 \left(-668\,807 + 5\,335\,283 \omega^2 \right) + 16 s^{16} \omega^4 \right. \\
& \quad \left(-116\,924\,931 - 2 \left(127\,363\,417 + 110\,195\,820 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \\
& \quad \left. \left(630\,916\,144 - 172\,743\,372 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + 270\,519\,588 \omega^6 \right) + \\
& 64 a^2 \alpha^2 \omega^6 \left(17\,429 + 69\,678 \omega^2 + 108\,533 \omega^4 + 75\,160 \omega^6 + 4176 \omega^8 \right) + \\
& 2 s^{14} \omega^2 \left(-61\,691\,220 - 3 \left(1\,101\,412\,555 + 130\,422\,288 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + \right. \\
& \quad \left. 4 \left(5\,253\,129\,565 + 87\,722\,762 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \left(28\,987\,822\,224 - 4\,543\,720\,968 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 + \right. \\
& \quad \left. \left(9\,613\,760\,848 - 2\,321\,004\,096 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 + 1\,512\,429\,648 \omega^{10} \right) + \\
& 2 s^{12} \left(-171\,072 - 108 \left(3\,252\,465 + 40\,804 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - 14 \left(135\,572\,659 + 100\,507\,310 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 - \right. \\
& \quad \left(24\,992\,317\,877 + 16\,014\,303\,798 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - \\
& \quad \left. 16 \left(1\,712\,099\,194 + 1\,360\,306\,021 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 - 200 \left(-83\,814\,236 + 23\,316\,009 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} + \right. \\
& \quad \left. \left(3\,717\,009\,184 - 794\,315\,232 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} + 336\,883\,008 \omega^{14} \right) + 2 s^{10} \\
& \quad \left(-681\,696 - 3 \left(170\,703\,131 + 17\,174\,664 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 - \left(11\,295\,221\,445 + 908\,102\,332 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \quad \left. 2 \left(55\,399\,081 + 13\,394\,900\,350 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 + \left(-40\,891\,713\,919 + 24\,669\,423\,914 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 4 \left(7\,347\,702\,421 + 1\,411\,068\,182 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} - 40 \left(-77\,003\,936 + 4\,799\,421 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} - \right. \\
& \quad \left. 720 \left(-663\,401 + 139\,386 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{14} + 22\,055\,328 \omega^{16} \right) + \\
& s^4 \left(-136\,512 - 144 \left(1\,305\,803 + 167\,376 a^2 \alpha^2 \right) \omega^2 + 8 \left(-171\,877\,119 + 27\,851\,024 a^2 \alpha^2 \right) \omega^4 + \right. \\
& \quad \left. 4 \left(-974\,186\,999 + 208\,959\,072 a^2 \alpha^2 \right) \omega^6 - \left(5\,688\,991\,763 + 93\,551\,400 a^2 \alpha^2 \right) \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 2 \left(2\,109\,804\,023 + 240\,656\,706 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{10} + 8 \left(-120\,519\,359 + 73\,915\,388 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{12} + \right. \\
& \quad \left. 64 \left(-1\,187\,585 + 2\,813\,256 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{14} + 192 \left(894 + 47\,639 a^2 \alpha^2 \right) \omega^{16} + 23\,040 a^2 \alpha^2 \omega^{18} \right) + \\
& 8 s^2 \omega^2 \left(-176\,256 - 1\,772\,766 \omega^2 - 7\,029\,099 \omega^4 - 16\,152\,819 \omega^6 - 20\,859\,212 \omega^8 - \right. \\
& \quad \left. 10\,912\,192 \omega^{10} - 841\,536 \omega^{12} + a^2 \alpha^2 \left(353\,952 + 9\,801\,072 \omega^2 + 53\,108\,992 \omega^4 + 98\,050\,123 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \omega^6 + 73\,210\,728 \omega^8 + 18\,190\,006 \omega^{10} + 2\,669\,552 \omega^{12} + 132\,192 \omega^{14} \right) \right) - \\
& 2 s^8 \left(2\,087\,208 + 746\,925\,696 \omega^2 - 11\,671\,642\,753 \omega^4 - 46\,136\,891\,808 \omega^6 - 29\,793\,658\,286 \omega^8 + \right. \\
& \quad \left. 9\,027\,176\,184 \omega^{10} + 3\,129\,554\,808 \omega^{12} - 267\,859\,968 \omega^{14} - 24\,579\,936 \omega^{16} + \right. \\
& \quad \left. 2 a^2 \alpha^2 \left(20\,736 + 31\,199\,580 \omega^2 - 3\,547\,454\,612 \omega^4 - 3\,253\,061\,763 \omega^6 - 3\,810\,187\,354 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \omega^8 - 6\,283\,340\,563 \omega^{10} - 73\,362\,468 \omega^{12} - 28\,266\,552 \omega^{14} + 2\,226\,240 \omega^{16} \right) \right) + \\
& 2 s^6 \left(-2\,877\,552 + 297\,568\,992 \omega^2 + 475\,858\,548 \omega^4 + 998\,598\,070 \omega^6 - 1\,062\,764\,600 \omega^8 - \right.
\end{aligned}$$

U13 = FullSimplify [Refine [ComplexExpand [Re [pN. (b[h20b, h30])]]],

s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]

$$\begin{aligned}
& - (48 a^2 R^6 \alpha^2 \omega_0^8 (72 a^2 R^3 \alpha^2 \omega_0^4 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) - 6 s^5 (3 + 50 R^2 \omega_0^2 + 251 R^4 \omega_0^4 + 396 R^6 \omega_0^6) + \\
& \quad 2 R^2 s \omega_0^2 (6 (-6 a^2 \alpha^2 + \omega_0^2) + R^2 (24 + (59 + 312 R^2 - 516 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + \\
& \quad \quad 6 (6 + 66 R^2 + 144 R^4 - a^2 (9 + 320 R^2) \alpha^2) \omega_0^4 - 216 a^2 R^2 (1 + 8 R^2) \alpha^2 \omega_0^6)) + \\
& \quad R s^2 \omega_0^2 (-24 + R^2 (-118 - (307 + 1534 R^2) \omega_0^2 - 6 (1 + 174 R^2 + 708 R^4) \omega_0^4 + \\
& \quad \quad 24 a^2 \alpha^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) (-4 + \omega_0^2 (-3 + R^2 (-32 + 9 (5 + 4 R^2) \omega_0^2)))))) + \\
& \quad R s^4 (7 + \omega_0^2 (30 + R^2 (202 + 3 \omega_0^2 (96 + R^2 (565 + 2 (107 + 666 R^2) \omega_0^2)))))) + \\
& \quad 2 s^3 (6 + R^2 \omega_0^2 (114 + 90 a^2 \alpha^2 - 3 \omega_0^2 + 2 R^2 (-12 + \omega_0^2 (310 + 558 a^2 \alpha^2 + 3 \omega_0^2 - \\
& \quad \quad 3 R^2 (52 + 9 \omega_0^2 (-20 - 47 a^2 \alpha^2 + 4 R^2 (4 + 9 a^2 \alpha^2 \omega_0^2))))))))) / \\
& \left((s^4 + 2 R (s^3 + R (2 - 4 s^2 + s^4)) \omega_0^2 + R^2 s^2 (-1 + R s)^2 \omega_0^4 \right) \left(9 R^4 \omega_0^2 + \right. \\
& \quad \left. 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) \omega_0^2)^2 \right) \\
& \left(64 R^4 \omega_0^2 + 9 (s + R (-1 - 8 R^2 + 9 R s) \omega_0^2)^2 \right)
\end{aligned}$$

- U14 = 3 Re < p, b[h21, h20] >

U14 = FullSimplify [Refine [ComplexExpand [3 Re [pN. (b[h21b, h20])]]],

s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]

$$\begin{aligned}
& - (48 a^2 R^6 \alpha^2 \omega_0^8 (-6 s^9 (1 + R^2 \omega_0^2)^3 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) + 8 a^2 R^3 \alpha^2 \omega_0^4 (1 + 2 R^2 \omega_0^2 - 8 R^4 \omega_0^4) + \\
& \quad 2 R^2 s \omega_0^2 (-4 a^2 \alpha^2 + 2 \omega_0^2 + R^2 (12 + (25 + 60 R^2 - 52 a^2 \alpha^2) \omega_0^2 + \\
& \quad \quad 2 (4 + 24 R^4 + 3 a^2 \alpha^2 + R^2 (26 - 56 a^2 \alpha^2)) \omega_0^4 + 8 a^2 R^2 (3 + 16 R^2) \alpha^2 \omega_0^6)) + \\
& \quad R s^2 \omega_0^2 (-8 + R^2 (-50 - 5 (19 + 50 R^2) \omega_0^2 + (2 - 50 (R^2 + 4 R^4)) \omega_0^4 + 24 (R^2 + 3 R^4) \omega_0^6 - \\
& \quad \quad 8 a^2 \alpha^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) (-2 - \omega_0^2 (1 + \omega_0^2 + R^2 (12 - (5 + 6 R^2) \omega_0^2 + \omega_0^4)))))) + \\
& \quad 2 s^5 (3 + \omega_0^2 (2 + R^2 (-14 + 10 \omega_0^2 + \omega_0^4 + 2 a^2 \alpha^2 (-2 + 3 \omega_0^2) - 8 R^8 \omega_0^6 (3 + 2 a^2 \alpha^2 \omega_0^2) + 2 R^6 \omega_0^4 \\
& \quad \quad (117 - 2 (27 + 61 a^2 \alpha^2) \omega_0^2) + R^4 \omega_0^2 (-60 + \omega_0^2 (115 + 42 \omega_0^2 + 4 a^2 \alpha^2 (53 - 2 \omega_0^2)))))) + \\
& \quad 2 R^2 (-15 + \omega_0^2 (-95 + 69 \omega_0^2 + 11 \omega_0^4 + a^2 \alpha^2 (26 + 11 \omega_0^2)))))) - \\
& \quad 2 s^3 (-2 + R^2 \omega_0^2 (-42 + (-1 - 122 R^2 + 48 R^4) \omega_0^2 + \omega_0^4 (-2 + 96 R^6 (2 + \omega_0^2) + R^2 \\
& \quad \quad (53 + 2 \omega_0^2) + 4 R^4 (47 + 23 \omega_0^2))) + \\
& \quad 2 a^2 \alpha^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) (5 + \omega_0^2 (2 + R^2 (-14 + \omega_0^2 (10 + \omega_0^2 + R^2 (13 + 6 \omega_0^2)))))) + \\
& \quad 2 s^7 (-2 + \omega_0^2 (-5 + R^2 (-68 + 2 a^2 \alpha^2 (1 + R^2 \omega_0^2)^3 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) + \omega_0^2 \\
& \quad \quad (-27 + 2 R^2 (-38 + \omega_0^2 (46 + R^2 (331 + 3 (5 + 4 R^2) \omega_0^2)))))) + \\
& \quad R s^8 (3 + \omega_0^2 (50 + R^2 (21 + \omega_0^2 (146 + R^2 (45 + \omega_0^2 (-170 + R^2 (39 + 2 (11 + 6 R^2) \omega_0^2)))))) + \\
& \quad R s^4 (-5 + \omega_0^2 (-2 (5 + 4 \omega_0^2) + R^2 (-44 + 7 (16 + 17 R^2) \omega_0^2 + (-35 + 400 R^2 + 902 R^4) \\
& \quad \quad \omega_0^4 + 6 (-1 + 28 R^4 (2 + R^2)) \omega_0^6 + 8 a^2 \alpha^2 (1 + 4 R^2 \omega_0^2) \\
& \quad \quad (2 + \omega_0^2 (-4 - \omega_0^2 + R^2 (-20 + \omega_0^2 (19 + \omega_0^2 + R^2 (10 + 3 \omega_0^2)))))) - R s^6 \\
& \quad (2 + \omega_0^2 (-23 - 14 \omega_0^2 + R^2 (-182 + \omega_0^2 (17 + 56 a^2 \alpha^2 + 34 \omega_0^2 + 2 R^2 (-193 + \omega_0^2 (564 + 112 a^2 \alpha^2 + \\
& \quad \quad 48 \omega_0^2 + R^2 (743 + 2 \omega_0^2 (35 + 2 a^2 \alpha^2 + 2 R^2 (-5 + 4 a^2 \alpha^2 \omega_0^2))))))))) / \\
& \left((s^4 + 2 R (s^3 + R (2 - 4 s^2 + s^4)) \omega_0^2 + R^2 s^2 (-1 + R s)^2 \omega_0^4 \right) \left((s + s^3)^2 + \right. \\
& \quad \left(16 R^4 + s^4 - 2 R s (1 + 2 s^2)^2 - 8 R^3 s (3 + 4 s^2) + 3 R^2 s^2 (10 + 8 s^2 + s^4) \right) \omega_0^2 + \\
& \quad R (16 R^5 - 2 s^3 + 8 R^4 s (-11 + 4 s^2) + 2 R^2 s (-17 - 14 s^2 + 4 s^4) + \\
& \quad \quad R (1 + 10 s^2 + 7 s^4) + R^3 (24 + 97 s^2 - 46 s^4 + 3 s^6)) \omega_0^4 + \\
& \quad \left. R^2 (-1 + R s)^2 (s + R (-2 + s^2))^2 \omega_0^6 \right) \left(9 R^4 \omega_0^2 + 4 (s + R (-1 - 3 R^2 + 4 R s) \omega_0^2)^2 \right)
\end{aligned}$$

- U15 = 6 Re < p, b[h11, h21] >

```
U15 = Simplify[Refine[ComplexExpand[Re[pN.(6 (b[h11, h21]))]],
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals]
```

0

O Segundo Coeficiente de Lyapunov

```
L2 = Simplify[
(1 / 12) (U01 + U02 + U03 + U04 + U05 + U06 + U07 + U08 + U09 + U10 + U11 + U12 + U13 + U14 + U15),
s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2) && ω0 ∈ Reals];
```

Definindo ω_0 o Segundo Coeficiente de Lyapunov fica dado por

$$\omega_0 = \sqrt{s / R + 1 / (1 - s \cdot R)}$$

```
FullSimplify[L2, s ∈ Reals && 0 < s < 1 && s < R < 1 / s && 0 < a < 1 && 0 < α < 1 / (1 - a^2)]
```

```
Clear[ω0]
```

$$\sqrt{\frac{s}{R(1 - Rs)}}$$

$$\begin{aligned} & (s^3 (1944 R^{11} s^8 (3 - 2 s^2) - \\ & 162 R^{10} s^7 (27 + 360 s^2 - 240 s^4 + 64 a^2 \alpha^2) + 27 R^9 s^4 (3 s^2 (-57 + 803 s^2 + 2908 s^4 - 2020 s^6) - \\ & 32 a^2 (-4 + 21 s^2 - 144 s^4 + 8 s^6) \alpha^2 + 128 a^4 s^2 (1 + 2 s^2) \alpha^4) + \\ & 576 s^{13} (s^4 (-13 + 3 s^2) + 2 a^2 s^2 (15 - 7 s^2) \alpha^2 + 2 a^4 (-11 + 14 s^2) \alpha^4) + \\ & 18 R^8 s^3 (s^2 (66 + 1612 s^2 - 19761 s^4 - 27363 s^6 + 20971 s^8) + \\ & 2 a^2 (108 - 1118 s^2 + 4755 s^4 - 18420 s^6 + 2284 s^8) \alpha^2 - 16 a^4 s^2 (-11 + 80 s^2 + 208 s^4) \alpha^4) + \\ & 16 R s^{10} (-9 s^4 (-49 - 393 s^2 + 28 s^4 + 12 s^6) - a^2 s^2 (1403 + 2908 s^2 - 1428 s^4 + 72 s^6) \alpha^2 + \\ & 2 a^4 (319 + 202 s^2 - 648 s^4 - 648 s^6) \alpha^4) + \\ & 3 R^7 s^2 (3 s^2 (174 - 2282 s^2 - 3772 s^4 + 109044 s^6 + 63391 s^8 - 58129 s^{10}) - \\ & 8 a^2 (-66 + 1079 s^2 - 6730 s^4 + 27243 s^6 - 83569 s^8 + 15962 s^{10}) \alpha^2 + \\ & 32 a^4 s^2 (3 - 247 s^2 + 658 s^4 + 2276 s^6) \alpha^4) + \\ & 4 R^2 s^7 (9 s^4 (273 - 2047 s^2 - 5376 s^4 - 504 s^6 + 320 s^8) + a^2 s^2 (-6113 + 51810 s^2 - \\ & 26120 s^4 - 24080 s^6 + 15312 s^8) \alpha^2 + 8 a^4 (312 - 2907 s^2 + 6501 s^4 - 4456 s^6 + 2340 s^8) \alpha^4) + \\ & 2 R^6 (9 s^3 (21 - 568 s^2 + 5220 s^4 - 7272 s^6 - 85414 s^8 - 21096 s^{10} + 25200 s^{12}) + \\ & 2 a^2 s (68 - 1554 s^2 + 11830 s^4 - 58006 s^6 + 302796 s^8 - 911954 s^{10} + 229275 s^{12}) \alpha^2 - \\ & 16 a^4 s^3 (49 + 153 s^2 - 3129 s^4 + 3574 s^6 + 13413 s^8) \alpha^4) + \\ & R^3 s^4 (-9 s^4 (-395 + 3 s^2 (2399 + 4 s^2 (-2583 - 4271 s^2 - 748 s^4 + 356 s^6))) - \\ & 8 a^2 s^2 (717 - 13917 s^2 + 73730 s^4 - 47295 s^6 - 90986 s^8 + 45504 s^{10}) \alpha^2 - \\ & 32 a^4 (-27 + 852 s^2 - 6465 s^4 + 17331 s^6 - 12389 s^8 + 930 s^{10}) \alpha^4) + \\ & R^5 (-9 s^2 (-3 + s^2 (121 + 2 s^2 (-1152 + 9960 s^2 - 23735 s^4 - 81435 s^6 - 10542 s^8 + 14242 s^{10}))) - \\ & 8 a^2 (-2 + 63 s^2 - 338 s^4 - 3121 s^6 + 13578 s^8 + 120919 s^{10} - 493586 s^{12} + 153183 s^{14}) \alpha^2 + \\ & 32 a^4 s^2 (-21 + 77 s^2 + 1539 s^4 - 9456 s^6 + 7007 s^8 + 14571 s^{10}) \alpha^4) + \\ & 2 R^4 (9 s^5 (29 - 837 s^2 + 8815 s^4 - 27676 s^6 - 51786 s^8 - 7290 s^{10} + 5872 s^{12}) + \\ & 2 a^2 s^3 (-65 + 2 s^2 (1285 - 17928 s^2 + 78641 s^4 + 787 s^6 - 300177 s^8 + 114960 s^{10})) \alpha^2 - \\ & 16 a^4 s (2 - 25 s^2 - 387 s^4 + 5042 s^6 - 17773 s^8 + 12477 s^{10} + 7113 s^{12}) \alpha^4) / \\ & (18 (-1 + Rs)^2 (R - 2 R s^2 + s^3)^3 (R + 3 R^2 s - 8 R s^2 + 4 s^3)^3 \\ & (R + 8 R^2 s - 18 R s^2 + 9 s^3)) \end{aligned}$$

Anexo III

Cálculos para o Terceiro Coeficiente de Lyapunov para
 $a = \frac{1}{2}$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

Definição de (s)

$$s = \alpha * (1 - a^2)$$

$$\frac{3\alpha}{4}$$

Numerador de L1

$$L1 := s^2 (-(-1 + s^2) (R + 3R^2 s - 8R s^2 + 4s^3) + 4a^2 s (-1 - R s + 2s^2) \alpha^2);$$

O valor de R para L1=0

Numerador de L2

L2 :=

$$\begin{aligned}
 & (s^3 (1944 R^{11} s^8 (3 - 2 s^2) - 162 R^{10} s^7 (27 + 360 s^2 - 240 s^4 + 64 a^2 \alpha^2) + 27 R^9 s^4 (3 s^2 (-57 + 803 s^2 + \\
 & \quad 2908 s^4 - 2020 s^6) - 32 a^2 (-4 + 21 s^2 - 144 s^4 + 8 s^6) \alpha^2 + 128 a^4 s^2 (1 + 2 s^2) \alpha^4) + \\
 & \quad 576 s^{13} (s^4 (-13 + 3 s^2) + 2 a^2 s^2 (15 - 7 s^2) \alpha^2 + 2 a^4 (-11 + 14 s^2) \alpha^4) + \\
 & \quad 18 R^8 s^3 (s^2 (66 + 1612 s^2 - 19761 s^4 - 27363 s^6 + 20971 s^8) + \\
 & \quad \quad 2 a^2 (108 - 1118 s^2 + 4755 s^4 - 18420 s^6 + 2284 s^8) \alpha^2 - 16 a^4 s^2 (-11 + 80 s^2 + 208 s^4) \alpha^4) + \\
 & \quad 16 R s^{10} (-9 s^4 (-49 - 393 s^2 + 28 s^4 + 12 s^6) - a^2 s^2 (1403 + 2908 s^2 - 1428 s^4 + 72 s^6) \alpha^2 + \\
 & \quad \quad 2 a^4 (319 + 202 s^2 - 648 s^4 - 648 s^6) \alpha^4) + \\
 & \quad 3 R^7 s^2 (3 s^2 (174 - 2282 s^2 - 3772 s^4 + 109044 s^6 + 63391 s^8 - 58129 s^{10}) - \\
 & \quad \quad 8 a^2 (-66 + 1079 s^2 - 6730 s^4 + 27243 s^6 - 83569 s^8 + 15962 s^{10}) \alpha^2 + \\
 & \quad \quad 32 a^4 s^2 (3 - 247 s^2 + 658 s^4 + 2276 s^6) \alpha^4) + \\
 & \quad 4 R^2 s^7 (9 s^4 (273 - 2047 s^2 - 5376 s^4 - 504 s^6 + 320 s^8) + a^2 s^2 (-6113 + 51810 s^2 - 26120 s^4 - \\
 & \quad \quad 24080 s^6 + 15312 s^8) \alpha^2 + 8 a^4 (312 - 2907 s^2 + 6501 s^4 - 4456 s^6 + 2340 s^8) \alpha^4) + \\
 & \quad 2 R^6 (9 s^3 (21 - 568 s^2 + 5220 s^4 - 7272 s^6 - 85414 s^8 - 21096 s^{10} + 25200 s^{12}) + \\
 & \quad \quad 2 a^2 s (68 - 1554 s^2 + 11830 s^4 - 58006 s^6 + 302796 s^8 - 911954 s^{10} + 229275 s^{12}) \alpha^2 - \\
 & \quad \quad 16 a^4 s^3 (49 + 153 s^2 - 3129 s^4 + 3574 s^6 + 13413 s^8) \alpha^4) + \\
 & \quad R^3 s^4 (-9 s^4 (-395 + 3 s^2 (2399 + 4 s^2 (-2583 - 4271 s^2 - 748 s^4 + 356 s^6))) - \\
 & \quad \quad 8 a^2 s^2 (717 - 13917 s^2 + 73730 s^4 - 47295 s^6 - 90986 s^8 + 45504 s^{10}) \alpha^2 - \\
 & \quad \quad 32 a^4 (-27 + 852 s^2 - 6465 s^4 + 17331 s^6 - 12389 s^8 + 930 s^{10}) \alpha^4) + \\
 & \quad R^5 (-9 s^2 (-3 + s^2 (121 + 2 s^2 (-1152 + 9960 s^2 - 23735 s^4 - 81435 s^6 - 10542 s^8 + 14242 s^{10}))) - \\
 & \quad \quad 8 a^2 (-2 + 63 s^2 - 338 s^4 - 3121 s^6 + 13578 s^8 + 120919 s^{10} - 493586 s^{12} + 153183 s^{14}) \alpha^2 + \\
 & \quad \quad 32 a^4 s^2 (-21 + 77 s^2 + 1539 s^4 - 9456 s^6 + 7007 s^8 + 14571 s^{10}) \alpha^4) + \\
 & \quad 2 R^4 (9 s^5 (29 - 837 s^2 + 8815 s^4 - 27676 s^6 - 51786 s^8 - 7290 s^{10} + 5872 s^{12}) + \\
 & \quad \quad 2 a^2 s^3 (-65 + 2 s^2 (1285 - 17928 s^2 + 78641 s^4 + 787 s^6 - 300177 s^8 + 114960 s^{10})) \alpha^2 - \\
 & \quad \quad 16 a^4 s (2 - 25 s^2 - 387 s^4 + 5042 s^6 - 17773 s^8 + 12477 s^{10} + 7113 s^{12}) \alpha^4));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R = \text{FullSimplify} \left[\frac{1}{6(-s + s^3)} (1 - 9s^2 + 8s^4 - 4a^2s^2\alpha^2 - \right. \\
 \left. \sqrt{(1 - 18s^2 + 49s^4 - 48s^6 + 16s^8 + 40a^2s^2\alpha^2 - 72a^2s^4\alpha^2 + 32a^2s^6\alpha^2 + 16a^4s^4\alpha^4)}) \right] \\
 \frac{-64 + 324\alpha^2 - 126\alpha^4 + \sqrt{4096 + 9\alpha^2(-4608 + 9616\alpha^2 - 6480\alpha^4 + 1521\alpha^6)}}{18\alpha(-16 + 9\alpha^2)}
 \end{aligned}$$

Valores de R e α na interseção entre as curvas L1=0 e L2=0

FindRoot[{L1 == 0, L2 == 0}, {{alpha, 0.9}, {R, 1.1}}]

$$\left\{ \alpha \rightarrow 0.883059, -\frac{-64 + 324\alpha^2 - 126\alpha^4 + \sqrt{4096 + 9\alpha^2(-4608 + 9616\alpha^2 - 6480\alpha^4 + 1521\alpha^6)}}{18\alpha(-16 + 9\alpha^2)} \rightarrow 1.08105 \right\}$$

$\alpha := 0.883058788431552776450633056223718698816791178336`30. ;$

$R := 1.081053743852499679959459520637571495775330446879`30. ;$

Valor de ω_0 quando L1 e L2 se interceptam

$$\omega_0 = \sqrt{s/R + 1 / (1 - s \cdot R)}$$

1.46866890844946622127580667282

Q[a_, R_, α] := {0.5, 1.081053743852499679959459520637571495775330446879`30. ,
0.883058788431552776450633056223718698816791178336`30. };

A função g

$$g[x_] := \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right)$$

Equações do sistema

$$f1[x_, y_, z_] := -\alpha + v * \left(\frac{x^3}{3} - x \right) + v * \frac{(z - x)}{R} - v * y$$

$$f2[x_, y_, z_] := x - a$$

$$f3[x_, y_, z_] := \frac{(x - z)}{R}$$

Ponto de Equilíbrio em Q

$$p0 = \left\{ a, -\left(\alpha \left(\frac{a^3}{3} - a \right) \right), a \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, 0.404735278031128355873206817436, \frac{1}{2} \right\}$$

Matriz A em Q

$$A = \left\{ \left\{ \frac{s/R + 1}{(s - R)}, -\frac{\omega_0^2 \cdot R}{R - s}, \frac{\omega_0^2}{R - s} \right\}, \{1, 0, 0\}, \{1/R, 0, -1/R\} \right\}$$

{-1.46298126503099286431596242649 ,
-5.5683978406308491058824144591 , 5.1508982530202571008339833586 }, {1, 0, 0},
{0.925023391007691886055408330696 , 0, -0.925023391007691886055408330696 }

Autovetores q, qb, p e pb para o ponto Q

$$q = \left\{ 1, \frac{-i}{\omega_0}, \left(1 - s \cdot R - i \frac{s}{\omega_0} \right) \right\}$$

{1, -0.68088865655618791681271821949 i,
0.28402449304316307789453554696 - 0.45094853408647120943358615422 i}

qb = FullSimplify [Refine [Conjugate [q]]]

{1, 0.68088865655618791681271821949 i,
0.28402449304316307789453554696 + 0.45094853408647120943358615422 i}

Inversa da matriz W20 em Q

W20I = Chop[Simplify[Inverse[W20]]]

```
{ {0.13611800054691871058626894675 - 0.34326419945837237328781255576 i,
  0.65073605631369097318795274905 + 0.25804290400504881786580341491 i,
  -0.47924740253381217238876711767 - 0.38961981902831544645233196322 i},
  {-0.11686234980652324660430326016 - 0.046340601262752966478620396056 i,
  0.08784924312092752601895400026 - 0.56198372785614440475101543794 i,
  -0.13264385757292738288663765863 + 0.16315706003464498953370757981 i},
  {-0.08606558228237474080312509440 - 0.069969824387435479160872731969 i,
  0.13264385757292738288663765863 - 0.16315706003464498953370757981 i,
  -0.057329556545876148063177416146 - 0.20757439606360311497333450013 i}}
```

h11 = Chop[Simplify[-AI.b[q, qb]]]

```
{0, -0.8830587884315527764506330562, 0}
```

h20 = Chop[Simplify[W20I.b[q, q]]]

```
{-0.6693225154508179642221934287 + 1.6879064967347555613610471529 i,
  0.5746381934770946504286028949 + 0.22786705417405788665217210805 i,
  0.4232036306404768531394925543 + 0.34405720534006509048773788655 i}
```

h20b = Simplify[Refine[ComplexExpand[Conjugate[h20]]]]

```
{-0.6693225154508179642221934287 - 1.6879064967347555613610471529 i,
  0.5746381934770946504286028949 - 0.22786705417405788665217210805 i,
  0.4232036306404768531394925543 - 0.34405720534006509048773788655 i}
```

G21 = Chop[Simplify[p.(c[q, q, qb] + b[qb, h20] + 2 * b[q, h11])]]

```
-2.863579783642096310265231625 i
```

G21b = ComplexExpand[Conjugate[G21]]

```
2.863579783642096310265231625 i
```

Podemos ver que em Q, L1 é nulo

L1 = FullSimplify[Chop[Refine[ComplexExpand[Re[G21]]]]]

```
0
```

Matriz W30 = $[3 * i * \omega 0 * I - A]$ em Q

W30 = Simplify[3 * i * $\omega 0$ * IdentityMatrix[3] - A]

```
{ {1.46298126503099286431596242649 + 4.4060067253483986638274200185 i,
  5.5683978406308491058824144591, -5.1508982530202571008339833586 },
  {-1, 4.4060067253483986638274200185 i, 0}, {-0.925023391007691886055408330696,
  0, 0.925023391007691886055408330696 + 4.4060067253483986638274200185 i}}
```

W30I = Chop[Simplify[Inverse[W30]]]

```
{0.065531502301450442242523786537 - 0.21981593033323002523277424447 i,
 0.27780769029739313612558350857 + 0.08281999975382193358588139455 i,
 -0.23072482798690058226746621290 - 0.12505018667507274671488529604 i},
{-0.049890057831413862797959515756 - 0.014873218854714442739923072727 i,
 0.018797066122787876785373366774 - 0.29001492052791915003798390063 i,
 -0.028381751202430264678925636540 + 0.052365972720719428166906494590 i},
{-0.041434688143755465988662440454 - 0.022457121465463698211208404772 i,
 0.028381751202430264678925636540 - 0.052365972720719428166906494590 i,
 0.010752489749278043844268381793 - 0.17626569388289516413572793259 i}}
```

h30 = Simplify[W30I.(3 * b[q, h20] + c[q, q, q])]

```
{-5.309608827325050362137948276 - 2.180751387080078631748174544 i,
 -0.4949496274106660250039493798 + 1.2050841404254099629895867787 i,
 -0.6626647925817242141912733994 + 0.9756072100641963690164233470 i}
```

h30b em Q

h30b = Simplify[Refine[ComplexExpand[Conjugate[h30]]]]

```
{-5.309608827325050362137948276 + 2.180751387080078631748174544 i,
 -0.4949496274106660250039493798 - 1.2050841404254099629895867787 i,
 -0.6626647925817242141912733994 - 0.9756072100641963690164233470 i}
```

Matriz $W = [i^* \omega 0^* I - A]$ em Q

W = Simplify[i * $\omega 0$ * IdentityMatrix[3] - A]

```
{1.46298126503099286431596242649 + 1.46866890844946622127580667282 i,
 5.5683978406308491058824144591, -5.1508982530202571008339833586},
{-1, 1.46866890844946622127580667282 i, 0}, {-0.925023391007691886055408330696,
 0, 0.925023391007691886055408330696 + 1.46866890844946622127580667282 i}}
```

**V21 = {{(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[1]], (i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[2]],
(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[3]], q[[1]]}, {(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[1]],
(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[2]], (i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[3]], q[[2]]},
{(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[1]], (i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[2]],
(i $\omega 0$ IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[3]], q[[3]]}, {p[[1]], p[[2]], p[[3]], 0}}**

```
{1.46298126503099286431596242649 + 1.46866890844946622127580667282 i,
 5.5683978406308491058824144591, -5.1508982530202571008339833586, 1},
{-1, 1.46866890844946622127580667282 i, 0, -0.68088865655618791681271821949 i},
{-0.925023391007691886055408330696, 0,
 0.925023391007691886055408330696 + 1.46866890844946622127580667282 i,
 0.28402449304316307789453554696 - 0.45094853408647120943358615422 i},
{0.2777478336601917003110977493 + 0.13668936771684739116354793698 i,
 -0.5182521231659057403460723094 + 1.0530695027963297500139457482 i,
 0.7825105643478174794124548771 - 0.4812590852721802685463886913 i, 0}}
```

{T1, T2, T3} = Simplify[c[q, q, qb] + b[qb, h20] + 2 * b[q, h11] - G21 * q]

```
{-4.084626142412157325660628410 - 5.436232274285304489524424358 i,
 1.949778991825526216209964465,
 1.291327105673057719002014390 + 0.8133267963375970152388141594 i}
```

{h211, h212, h213, s} = Chop[Inverse[V21].{T1, T2, T3, 0}]

```
{-1.835783125411037995712233956 - 0.009195349824693891292011612 i,
 -0.006261009388700001716588579 - 0.077618492335919546848866490 i,
 0.267438976434386036367743836 + 0.445439085184277421440300236 i, 0}
```

h21 em Q

```
h21 = Simplify[{h211, h212, h213}]
{-1.835783125411037995712233956 - 0.009195349824693891292011612 i,
-0.006261009388700001716588579 - 0.077618492335919546848866490 i,
0.267438976434386036367743836 + 0.445439085184277421440300236 i}
```

h21b em Q

```
h21b = Simplify[Refine[ComplexExpand[Conjugate[h21]]]]
{-1.835783125411037995712233956 + 0.009195349824693891292011612 i,
-0.006261009388700001716588579 + 0.077618492335919546848866490 i,
0.267438976434386036367743836 - 0.445439085184277421440300236 i}
```

h22 em Q

```
h22 =
Chop[Simplify[-AI.(d[q, q, qb, qb] + 4 * c[q, qb, h11] + c[qb, qb, h20] + c[q, q, h20b] + 2 *
b[h11, h11] + 2 * b[q, h21b] + 2 * b[qb, h21] + b[h20b, h20] )]]
{0, 5.34610773444043651021073928, 0}
```

Matriz $W40 = 4 * i * \omega 0 * I - A$ em Q

```
W40 = Chop[Simplify[4 * i * \omega 0 * IdentityMatrix[3] - A]]
{{1.46298126503099286431596242649 + 5.8746756337978648851032266913 i,
5.5683978406308491058824144591, -5.1508982530202571008339833586},
{-1, 5.8746756337978648851032266913 i, 0}, {-0.925023391007691886055408330696,
0, 0.925023391007691886055408330696 + 5.8746756337978648851032266913 i}}
```

Inversa da matriz W40 em Q

```
W40I = Chop[Simplify[Inverse[W40]]]
{{0.038804859053644233810831066865 - 0.16579647001548011166146735128 i,
0.15715262648834491198360366807 + 0.036781757296888383583542550595 i,
-0.13662504468495636524118325054 - 0.055536894830778518472076463372 i},
{-0.028222233932649636424179653688 - 0.0066054470872220119952160144817 i,
0.0062610703279135233619695246610 - 0.19697302432002836888646804319 i,
-0.009453610427657770679575259951 + 0.023256610781867270483871199925 i},
{-0.024535790831618809681338893371 - 0.009973586015270541562436510353 i,
0.009453610427657770679575259951 - 0.023256610781867270483871199925 i,
0.014315929885876346101108746196 - 0.14645507624465488038668906930 i}}
```

h40 em Q

```
h40 = Refine[W40I.(3 * b[h20, h20] + 4 * b[q, h30] + 6 * c[q, q, h20] + d[q, q, q])]
{6.82945673675028384612355937 - 28.03901290236397835035358848 i,
-4.772861456563057154359025305 - 1.162524905623626972745326513 i,
-4.142963899633670521205303275 - 1.727711686112114161420550460 i}
```

h40b em Q

```
h40b = ComplexExpand [Conjugate [h40]]
{6.82945673675028384612355937 + 28.03901290236397835035358848 i,
 -4.772861456563057154359025305 + 1.162524905623626972745326513 i,
 -4.142963899633670521205303275 + 1.727711686112114161420550460 i}
```

h31 em Q

```
h31 = Refine[
  W20I.(3 * b[q, h21] + b[qb, h30] + 3 * b[h20, h11] + 3 * c[q, q, h11] + 3 * c[q, qb, h20] + d[q, q, q, qb] - 3 * G21 * h20)]
{-3.49934475097153972032946820 - 20.63642205076057749808454754 i,
 -5.34492662682111406665501732 + 1.85776766589460054830429243 i,
 -5.39041383020363116787945046 + 0.41071974549295476286682003 i}
```

h31b em Q

```
h31b = Simplify [Refine [ComplexExpand [Conjugate [h31]]]]
{-3.49934475097153972032946820 + 20.63642205076057749808454754 i,
 -5.34492662682111406665501732 - 1.85776766589460054830429243 i,
 -5.39041383020363116787945046 - 0.41071974549295476286682003 i}
```

G32 em Q

```
G32 = Chop [p. (6 b[h11, h21] + b[h20b, h30] + 3 b[h21b, h20] + 3 b[q, h22] + 2 b[qb, h31] +
  6 c[q, h11, h11] + 3 c[q, h20b, h20] + 3 c[q, q, h21b] + 6 c[q, qb, h21] +
  6 c[qb, h20, h11] + c[qb, qb, h30] + d[q, q, q, h20b] + 6 d[q, q, qb, h11] +
  3 d[q, qb, qb, h20] + e[q, q, q, qb, qb])]
73.7615474720559972120669200 i
```

G32b em Q

```
G32b = Simplify [Refine [ComplexExpand [Conjugate [G32]]]]
-73.7615474720559972120669200 i
```

Podemos ver que em Q, L2 é nulo

```
L2 = FullSimplify [Chop [Refine [ComplexExpand [Re [G32]]]]]
0
```

H32 em Q

```

H32 = -6 * G21 * h21 - 3 * G21b * h21 + 6 * b[h11, h21] + b[h20b, h30] + 3 * b[h21b, h20] +
  3 * b[q, h22] + 2 * b[qb, h31] + 6 * c[q, h11, h11] + 3 * c[q, h20b, h20] +
  3 * c[q, q, h21b] + 6 * c[q, qb, h21] + 6 * c[qb, h20, h11] + c[qb, qb, h30] +
  d[q, q, q, h20b] + 6 * d[q, q, qb, h11] + 3 * d[q, qb, qb, h20] + e[q, q, q, qb, qb]
{105.2928767332562095583453362 + 198.020054598645499183597311 i,
 0.66680023646975461982453862 - 0.05378669973202405378412579 i,
 -3.82665107753317933963367770 + 2.29749853882632857924941052 i}

```

h32 em Q

```

{M1, M2, M3} = H32 - G32 * q
{h321, h322, h323, s} = Inverse[V21].{M1, M2, M3, 0}
h32 = {h321, h322, h323}
{105.2928767332562095583453362 + 124.258507126589501971530391 i,
 -49.5566007272839323080047004 - 0.05378669973202405378412579 i,
 -37.0893127820064874679249039 - 18.6525875880035831156751445 i}
{45.5956450853649750511182998 - 1.9980829088901435582927881 i,
 -1.3970947412432188003846701 + 2.6969697657048517346293159 i,
 -8.4319971330053393229319086 - 8.7749662002354493883235284 i, 0. × 10-25 + 0. × 10-25 i}
{45.5956450853649750511182998 - 1.9980829088901435582927881 i,
 -1.3970947412432188003846701 + 2.6969697657048517346293159 i,
 -8.4319971330053393229319086 - 8.7749662002354493883235284 i}

```

h32b em Q

```

h32b = Simplify[Refine[ComplexExpand[Conjugate[h32]]]]
{45.5956450853649750511182998 + 1.9980829088901435582927881 i,
 -1.3970947412432188003846701 - 2.6969697657048517346293159 i,
 -8.4319971330053393229319086 + 8.7749662002354493883235284 i}

```

h41 em Q

```

h41 = W30I.(4 * b[h11, h30] + 6 * b[h20, h21] + 4 * b[q, h31] + b[qb, h40] +
  12 * c[q, h11, h20] + 6 * c[q, q, h21] + 4 * c[q, qb, h30] + 3 * c[qb, h20, h20] +
  4 * d[q, q, q, h11] + 6 * d[q, q, qb, h20] + e[q, q, q, q, qb] - 6 * G21 * h30)
{163.5808236755712201780300657 - 28.0860299967383619787658874 i,
 -8.3045711818997025382650235 - 32.4274802761709418318560816 i,
 -1.9818185271246045501285386 - 30.9547739518383246136990890 i}

```

h41b em Q

```

h41b = ComplexExpand[Conjugate[h41]]
{163.5808236755712201780300657 + 28.0860299967383619787658874 i,
 -8.3045711818997025382650235 + 32.4274802761709418318560816 i,
 -1.9818185271246045501285386 + 30.9547739518383246136990890 i}

```

h42 em Q

h42 = Chop [W20I.

(-4 * (G32 * h20 + 3 * G21 * h31 + G21b * h31) + b[h20b, h40] + 8 * b[h11, h31] + 6 * b[h20, h22] +
 6 * b[h21, h21] + 4 * b[h21b, h30] + 4 * b[q, h32] + 2 * b[qb, h41] + 12 * c[h11, h11, h20] +
 3 * c[h20, h20, h20b] + 24 * c[q, h11, h21] + 12 * c[q, h20, h21b] + 4 * c[q, h20b, h30] +
 6 * c[q, q, h22] + 8 * c[q, qb, h31] + 8 * c[qb, h11, h30] + 12 * c[qb, h20, h21] +
 c[qb, qb, h40] + 12 * d[q, q, h11, h11] + 6 * d[q, q, h20, h20b] +
 4 * d[q, q, q, h21b] + 12 * d[q, q, qb, h21] + 24 * d[q, qb, h11, h20] +
 4 * d[q, qb, qb, h30] + 3 * d[qb, qb, h20, h20] + e[q, q, q, q, h20b] +
 8 * e[q, q, q, qb, h11] + 6 * e[q, q, qb, qb, h20] + k[q, q, q, q, qb, qb]))

{374.20226016983987557005013 + 695.12752756889172013249736 i,
 137.245952791330465439112279 - 135.794608493475733864547226 i,
 164.982719132618133934038848 - 97.243396769585272839648032 i}

h42b em Q

h42b = ComplexExpand [Conjugate [h42]]

{374.20226016983987557005013 - 695.12752756889172013249736 i,
 137.245952791330465439112279 + 135.794608493475733864547226 i,
 164.982719132618133934038848 + 97.243396769585272839648032 i}

h33 em Q

**h33 = Chop [-AI. (9 b[h11, h22] + 3 b[h20, h31b] + 3 b[h20b, h31] + 9 b[h21, h21b] + b[h30b, h30] +
 3 b[q, h32b] + 3 b[qb, h32] + 6 c[h11, h11, h11] + 9 c[h11, h20b, h20] + 18 c[q, h11, h21b] +
 3 c[q, h20, h30b] + 9 c[q, h20b, h21] + 3 c[q, q, h31b] + 9 c[q, qb, h22] +
 18 c[qb, h11, h21] + 9 c[qb, h20, h21b] + 3 c[qb, h20b, h30] + 3 c[qb, qb, h31] +
 9 d[q, q, h20b, h11] + d[q, q, q, h30b] + 9 d[q, q, qb, h21b] + 18 d[q, qb, h11, h11] +
 9 d[q, qb, h20b, h20] + 9 d[q, qb, qb, h21] + 9 d[qb, qb, h11, h20] + d[qb, qb, qb, h30] +
 3 e[q, q, q, qb, h20b] + 9 e[q, q, qb, qb, h11] + 3 e[q, qb, qb, qb, h20] +
 k[q, q, q, qb, qb, qb] - 3 * (G32 + G32b) * h11 - 9 * (G21 + G21b) * h22)]**

{0, -125.421885098729059000640117, 0}

H43 em Q

```

H43 = 12 * b[h11, h32] + 6 * b[h20, h32b] + 3 * b[h20b, h41] + 18 * b[h21, h22] +
12 * b[h21b, h31] + 4 * b[h30, h31b] + b[h30b, h40] + 4 * b[q, h33] + 3 * b[qb, h42] +
36 * c[h11, h11, h21] + 36 * c[h11, h20, h21b] + 12 * c[h11, h20b, h30] +
3 * c[h20, h20, h30b] + 18 * c[h20, h20b, h21] + 36 * c[q, h11, h22] + 12 * c[q, h20, h31b] +
12 * c[q, h20b, h31] + 36 * c[q, h21, h21b] + 4 * c[q, h30, h30b] + 6 * c[q, q, h32b] +
12 * c[q, qb, h32] + 24 * c[qb, h11, h31] + 18 * c[qb, h20, h22] + 3 * c[qb, h20b, h40] +
18 * c[qb, h21, h21] + 12 * c[qb, h21b, h30] + 3 * c[qb, qb, h41] + 24 * d[q, h11, h11, h11] +
36 * d[q, h11, h20, h20b] + 36 * d[q, q, h11, h21b] + 6 * d[q, q, h20, h30b] +
18 * d[q, q, h20b, h21] + 4 * d[q, q, q, h31b] + 18 * d[q, q, qb, h22] + 72 * d[q, qb, h11, h21] +
36 * d[q, qb, h20, h21b] + 12 * d[q, qb, h20b, h30] + 12 * d[q, qb, qb, h31] +
36 * d[qb, h11, h11, h20] + 9 * d[qb, h20, h20, h20b] + 12 * d[qb, qb, h11, h30] +
18 * d[qb, qb, h20, h21] + d[qb, qb, qb, h40] + 12 * e[q, q, q, h11, h20b] +
e[q, q, q, q, h30b] + 12 * e[q, q, q, qb, h21b] + 36 * e[q, q, qb, h11, h11] +
18 * e[q, q, qb, h20, h20b] + 18 * e[q, q, qb, qb, h21] + 36 * e[q, qb, qb, h11, h20] +
4 * e[q, qb, qb, qb, h30] + 3 * e[qb, qb, qb, h20, h20] + 3 * k[q, q, q, q, qb, h20b] +
12 * k[q, q, q, qb, qb, h11] + 6 * k[q, q, qb, qb, qb, h20] + l[q, q, q, q, qb, qb, qb]

```

```
{-9508.7627043645967227578271 - 9673.8152596341930676437418 i, 0, 0}
```

G43 em Q

```
G43 = p.H43
```

```
-1318.7305506771048658752008 - 3986.6279934214386430560590 i
```

ReG43 em Q

```
G43r = Simplify [Refine [ComplexExpand [Re [G43]]]]
```

```
-1318.7305506771048658752008
```

L3 em Q

```
L3 = (1 / 144) * G43r
```

```
-9.157851046368783790800005
```