

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Introdução a Teoria de Campos Conforme e  
Interações de Cordas Abertas**

**Eliane Pereira**

**Orientador: Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur**

ITAJUBÁ, 14 DE ABRIL DE 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

# Introdução a Teoria de Campos Conforme e Interações de Cordas Abertas

**Eliane Pereira**

**Orientador: Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

14 DE ABRIL DE 2010

*Dedico a minha família:*

*minha mãe Dulce,*

*meu pai José e*

*minha irmã Viviane.*

*Pelo amor, carinho,*

*compreensão e por ter*

*acreditado em mim.*

# Agradecimentos

Aproveito a oportunidade para agradecer a todos que, com seus conhecimentos, incentivos, e críticas colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial agradeço: ao prof. Ricardo Medina, pela sua orientação, pelo seu comprometimento no meu processo de formação científico e amizade; ao prof. Luiz Antônio Barreiro pela ajuda com o software Mathematica que foi muito útil no desenvolvimento de cálculos desta dissertação; aos meus pais e à minha irmã por sua solidariedade, compreensão e apoio ao meu desenvolvimento.

Agradeço a CAPES-REUNI pelo apoio financeiro, durante este dois anos de mestrado.

# Resumo

Fazemos uma introdução elementar para a teoria de campos conforme em duas dimensões e aplicações em teoria de cordas. Obtemos as amplitudes de espalhamento para a teoria de cordas abertas em nível de árvore. Usando essas amplitudes encontramos a lagrangeana que descreve as interações de três táquions, dois táquions com um fóton e dois táquions com uma partícula de Fierz-Pauli. Determinamos a ação efetiva de baixa energia abeliana e não abeliana até ordem  $\alpha'^3$  e  $\alpha'^2$ , respectivamente, sendo  $\alpha'$  a constante fundamental da teoria de cordas.

**Palavras-chave** Teoria de cordas; teoria de campos conforme; ação efetiva de baixa energia.

# Abstract

We give an elementary introduction to conformal field theory in two dimensions and its applications to string theory. We obtain scattering amplitudes for the open string at tree level. Using these amplitudes we find the lagrangian that describes the interactions of three tachyons, two tachyons with one photon and two tachyons with one Fierz-Pauli particle. We determine the abelian and the non-abelian low energy effective actions at order  $\alpha'^3$  and  $\alpha'^2$ , respectively, where  $\alpha'$  is the string fundamental constant.

**Keywords** string theory; conformal field theory; low energy effective action.

# Conteúdo

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Agradecimentos</b>  | <b>ii</b>   |
| <b>Resumo</b>  | <b>iii</b>  |
| <b>Abstract</b>  | <b>iv</b>   |
| <b>Índice</b>  | <b>v</b>    |
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>viii</b> |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>    |
| <b>2 Revisão de Teoria de Campos Conforme em <math>D=2</math></b>        | <b>3</b>    |
| 2.1 Ação de Polyakov e Simetrias . . . . .                               | 3           |
| 2.2 Ação de Polyakov e Teoria de Campos Conforme em Duas Dimensões . . . | 4           |
| 2.3 Expansão de Produto de Operadores . . . . .                          | 7           |
| 2.4 Identidade de Ward . . . . .   | 8           |
| 2.5 Ordenamento Normal . . . . .   | 11          |
| 2.6 Operadores Quase Primário e Primário . . . . .                       | 13          |
| 2.7 Uma Transformação Conforme Importante . . . . .                      | 14          |
| 2.8 Consideração Sobre Teoria de Campos Conforme com Bordas . . . . .    | 16          |
| 2.9 Mapeamento Entre Estado e Operador . . . . .                         | 16          |
| 2.9.1 Exemplo . . . . .  | 18          |
| <b>3 Interações</b>  | <b>21</b>   |
| 3.1 Soma Sobre Todas as Topologias . . . . .                             | 22          |
| 3.2 Matriz $S$ . . . . .   | 24          |
| 3.3 Operadores de Vértices . . . . .                                     | 26          |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>Amplitudes em Nível de Árvore</b>                                   | <b>28</b> |
| 4.1      | Algumas funções de correlação e a amplitude de espalhamento . . . . .  | 28        |
| 4.2      | Amplitude de Veneziano . . . . .                                       | 31        |
| 4.3      | Constante de Normalização dos Operadores de Vértice . . . . .          | 36        |
| 4.4      | Amplitude de Espalhamento de Três e Quatro Bósons de Calibre . . . . . | 40        |
| 4.5      | Propriedades da Amplitude de Espalhamento . . . . .                    | 42        |
| 4.5.1    | Invariância Cíclica . . . . .  | 42        |
| 4.5.2    | Paridade da Folha-Mundo . . . . .                                      | 45        |
| 4.5.3    | Invariância de Calibre . . . . .                                       | 48        |
| <b>5</b> | <b>Teoria “Segundo-quantizada” na Camada de Massa</b>                  | <b>50</b> |
| 5.1      | Teoria Cúbica . . . . .  | 50        |
| 5.2      | Dedução da Lagrangeana . . . . .                                       | 53        |
| 5.2.1    | Uso das Amplitudes de três táquions . . . . .                          | 54        |
| 5.2.2    | Uso das Amplitudes de quatro táquions . . . . .                        | 55        |
| 5.2.3    | Uso do Teorema da Equivalência . . . . .                               | 57        |
| <b>6</b> | <b>Ação Efetiva de Baixa Energia</b>                                   | <b>59</b> |
| 6.1      | Dedução da Ação Efetiva da Teoria Abelianas . . . . .                  | 60        |
| 6.2      | Dedução da Ação Efetiva não Abelianas . . . . .                        | 64        |
|          | <b>Considerações Finais</b>  | <b>68</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>  | <b>70</b> |
| <b>A</b> |  | <b>72</b> |
| A.1      | Regras de Feynman . . . . .  | 72        |
| <b>B</b> |  | <b>74</b> |
| B.1      | Transformação $SL(2;\mathbf{R})$ e ordenamento cíclico . . . . .       | 74        |
| <b>C</b> |  | <b>79</b> |
| C.1      | Equivalência entre as fórmulas da amplitude de espalhamento . . . . .  | 79        |
| C.2      | Amplitude de Espalhamento . . . . .                                    | 80        |
| C.3      | Transformação dos Coeficientes . . . . .                               | 82        |



|  |           |
|--|-----------|
| <b>D</b>   | <b>84</b> |
| D.1 Teorema da Equivalência . . . . .  | 84        |
| <b>E</b>   | <b>86</b> |
| E.1 Expansão da Função Gamma . . . . .                                       | 86        |
| <b>F</b>   | <b>87</b> |
| F.1 Identificação dos Coeficientes Arbitrário no Caso Abelianos. . . . .     | 87        |
| F.2 Amplitude de Quatro Pontos . . . . .                                     | 89        |
| <b>G</b>   | <b>93</b> |
| G.1 Algumas definições e relações que surgem em uma teoria não abeliana . .  | 93        |
| G.2 Identificação dos Coeficientes Arbitrário no Caso Não Abelianos. . . . . | 94        |
| G.3 Amplitude de três pontos . . . . .                                       | 98        |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Exemplo de processo de espalhamento de 2 cordas $\rightarrow$ 1 corda no caso de (a) cordas abertas; (b) cordas fechadas. . . . .  | 1  |
| 2.1 | Produtos de seis operadores locais. . . . .  | 8  |
| 2.2 | Mapeamento da folha-mundo da corda fechada. . . . .  | 15 |
| 2.3 | Mapeamento da folha-mundo da corda aberta. . . . .   | 15 |
| 2.4 | Coroa circular $r_i <  z  < r_f$ no plano complexo. . . . .  | 17 |
| 3.1 | Folhas-mundo de diferentes topologias contribuem no espalhamento de quatro cordas fechadas. . . . .  | 22 |
| 3.2 | Exemplos de superfície de Riemann para a corda aberta (a) $g = 0$ , $b = 1$ e $\chi = 1$ ; b) $g = 0$ , $b = 2$ e $\chi = 0$ ; c) $g = 0$ , $b = 3$ e $\chi = -1$ . . . . .                                      | 23 |
| 3.3 | Superfícies de Riemann com operadores de vértice inseridos. . . . .  | 24 |
| 3.4 | Diagrama com três folhas mundo que descrevem o espalhamento de cinco cordas abertas. As três superfícies são topologicamente equivalentes e fornecem uma mesma contribuição na integral funcional (3.8). . . . . | 25 |
| 4.1 | As duas ordens ciclicamente não equivalentes para três cordas abertas. . .   | 32 |
| 4.2 | Processo de espalhamento (em nível de árvore) de quatro táquions. . . . .  | 35 |
| 4.3 | Transformação cíclica nos estados externos num processo de espalhamento de $n$ cordas. . . . .   | 42 |
| 4.4 | (a) Uma configuração qualquer das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ do domínio $D$ .<br>(b) Uma configuração qualquer das variáveis $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ do domínio $D'$ .                                   | 44 |
| 4.5 | “Twist” em um dos discos associados a uma amplitude de três cordas. . . . .  | 45 |
| 5.1 | Requerimento da unitariedade em nível de árvore para a amplitude de $n$ cordas. . . . .  | 51 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.2 | Requerimento da unitariedade em nível de árvore para a amplitude de 4 cordas. . . . .                                    | 53 |
| 6.1 | A figura mostra que no caso da ação efetiva temos $s \ll 1/\alpha'$ . . . . .  | 60 |
| B.1 | Gráfico da curva $w = \frac{az+b}{cz+d}$ . . . . .   | 75 |
| B.2 | Mapeamento dado por (B.3), onde $z_1 = A$ , $z_2 = B$ , $z_3 = C$ , $w_1 = B$ , $w_2 = C$ e $w_3 = A$ . . . . .          | 76 |
| B.3 | Mapeamento dado por (B.3) no caso em que são satisfeitas as condições em (B.9) e (B.10), e também $z_3 < -d/c$ . . . . . | 77 |
| B.4 | Mapeamento dado por (B.3) no caso em que são satisfeitas as condições em (B.9) e (B.10), e também $z_3 > -d/c$ . . . . . | 77 |

# Capítulo 1

## Introdução

A diferença da teoria quântica de campos, que descreve interações entre objetos fundamentais que são pontuais, a teoria de cordas descreve as interações entre objetos fundamentais unidimensionais (cordas). Estas cordas podem ser abertas ou fechadas (veja a figura 1.1)

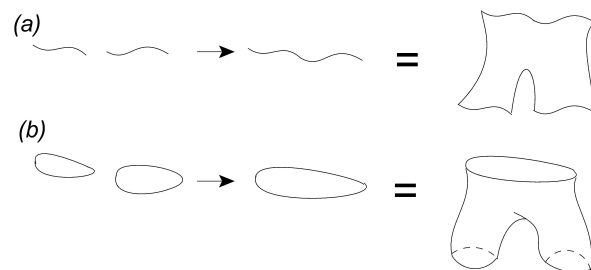


Figura 1.1: Exemplo de processo de espalhamento de 2 cordas  $\rightarrow$  1 corda no caso de (a) cordas abertas; (b) cordas fechadas.

Nos modos quânticos de vibração destas cordas surgem fótons, grávitons e uma torre infinita de estados massivos (incluindo táquions, no caso da teoria de cordas bosônicas). Portanto, na hora de estudar as interações de cordas, surgem de forma natural o eletromagnetismo de Maxwell (ou as teorias de Yang-Mills, mais correções) e uma teoria quântica da gravitação, entre outras coisas. Este é um dos grandes atrativos da teoria de cordas. O outro atrativo (tradicional) é que, após o trabalho de Scherk e Schwarz [1] ela tem sido proposta como uma candidata à unificação das forças da natureza.

No desenvolvimento histórico da teoria de cordas um aspecto importante foi a descoberta (por Polyakov) de como descrever as interações por meio de um procedimento,

em “primeira quantização”, que utilizasse integrais de caminho [2]. Na abordagem de Polyakov o notável é que a teoria que está por trás da quantização da corda livre é uma teoria conforme em duas dimensões e que é só este requisito, aquele de manter a teoria quântica sendo conforme, que é necessário satisfazer para obter as interações das cordas em forma única.

O presente trabalho originou-se do estudo da autora sobre algumas seções dos textos [3][4] e algumas seções dos artigos [5][6][7]. Também foram consultadas algumas seções dos textos [8][9]. Não há originalidade alguma nesta dissertação, mas somente o entendimento da autora sobre o assunto.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 desenvolvemos um estudo básico da teoria de campos conforme em duas dimensões. No capítulo 3 apresentamos o formalismo da integral de caminho de Polyakov que possibilita encontrar a matriz  $S$  da teoria de cordas e determinamos o operador de vértice associado a alguns estados físicos da corda. No capítulo 4 apresentamos a amplitude de Veneziano, determinamos a amplitude de espalhamento para três e quatro bósons de calibre e mostramos algumas simetrias da amplitude de espalhamento de estados não massivos. No capítulo 5 mostramos que a teoria “segundo quantizada” (com um número infinito de campos), quando considerada na camada de massa e em nível de árvore, é cúbica nas interações. No capítulo 6 deduzimos a ação efetiva de baixa energia da corda bosônica, tanto no caso abeliano quanto no caso não abeliano. No apêndice A apresentamos as regras de Feynman que de forma geral foram usadas nos cálculos desta dissertação. No apêndice B mostramos uma propriedade das transformações  $SL(2, \mathbf{R})$  que guarda relação com o ordenamento cíclico de números na reta real (útil para a demonstração da propriedade de simetria cíclica das amplitudes de espalhamento). No apêndice C mostramos duas fórmulas equivalentes para a amplitude de espalhamento e desenvolvemos alguns cálculos importantes para o capítulo 5. No Apêndice D demonstramos o teorema da equivalência (necessário de usar na hora de determinar os coeficientes das lagrangeanas em  $D=26$ , as que aparecem nesta dissertação). No apêndice E damos um roteiro para obter a expansão de função Gama (que aparece nos cálculos do capítulo 6). Os apêndices F e G contêm outros cálculos relevantes para o capítulo 6.

Nos cálculos mais longos dos capítulos 5 e 6 usamos o pacote FeynCalc 3.5 do software Mathematica.

# Capítulo 2

## Revisão de Teoria de Campos Conforme em D=2

Neste capítulo vamos desenvolver os elementos básicos da teoria de campos conforme relevantes para o desenvolvimento da teoria de cordas perturbativa.

Este capítulo está baseado no capítulo 4 da referência[3] e no capítulo 2 da referência[4]. Quando usarmos outra referência deixaremos isso explícito no texto.

### 2.1 Ação de Polyakov e Simetrias

Vamos começar o nosso estudo com a ação da corda bosônica livre conhecida como ação de Polyakov:

$$S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.1)$$

sendo  $\alpha'$  a constante fundamental da teoria de cordas. Aqui utilizamos uma métrica intrínseca auxiliar da folha-mundo  $g_{ab}(\sigma^0, \sigma^1)$  (onde  $\sigma^0 = \tau$  e  $\sigma^1 = \sigma$ ) com assinatura  $(-, +)$  e a corda está imersa no espaço-tempo de Minkowski de dimensão D com assinatura  $(-, +, \dots, +)$ .

Vejam as simetrias da ação de Polyakov:

1. Invariância de Poincaré:

$$\begin{aligned} X'^\mu(\sigma^0, \sigma^1) &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma^0, \sigma^1) + a^\mu, \\ g'_{ab}(\sigma^0, \sigma^1) &= g_{ab}(\sigma^0, \sigma^1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Difeomorfismo (ou simetria de reparametrização):

$$\begin{aligned}\sigma^{0,1} &\rightarrow \sigma'^{0,1}(\sigma^0, \sigma^1), \\ X'^{\mu}(\sigma'^0, \sigma'^1) &= X^{\mu}(\sigma^0, \sigma^1), \\ g'_{ab}(\sigma'^0, \sigma'^1) &= g_{cd}(\sigma^0, \sigma^1) \frac{\partial \sigma^c}{\partial \sigma'^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \sigma'^b}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

3. Invariância de Weyl (ou reescalonamento conforme da métrica):

$$\begin{aligned}g'_{ab}(\sigma^0, \sigma^1) &= \exp(2\omega(\sigma^0, \sigma^1)) g_{ab}(\sigma^0, \sigma^1), \\ X'^{\mu}(\sigma^0, \sigma^1) &= X^{\mu}(\sigma^0, \sigma^1).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Pelo difeomorfismo, podemos manipular dois graus de liberdade na métrica  $g_{ab}$  e pela invariância de Weyl outro grau de liberdade também pode ser manipulado.

Para fixar o calibre vamos usar o calibre conforme ( $g^{ab} = \eta^{ab}$ ).

## 2.2 Ação de Polyakov e Teoria de Campos Conforme em Duas Dimensões

Estamos focando nossa atenção em duas dimensões, porque este é o caso de interesse da teoria de cordas. Na teoria de campos conforme usaremos o tempo euclidiano para a folha-mundo, ou seja,  $(\sigma^1, \sigma^2) = (\sigma^1, i\sigma^0)$  (com assinatura  $(+, +)$ ). Assim, após usar o calibre conforme, a ação de Polyakov (2.1) fica dada por

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu).\tag{2.5}$$

É útil neste caso usar as coordenadas do plano complexo para a folha-mundo:  $z = \sigma^1 + i\sigma^2$  e  $\bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2$ . Destas relações vem que  $\partial_z = \partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$  e  $\partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$  e assim a ação (2.5) torna-se

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu,\tag{2.6}$$

onde  $d^2z = 2d^2\sigma$ .

A equação do movimento associada a ação (2.6) é

$$\partial\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) = 0. \quad (2.7)$$

Esta é a equação de uma onda livre, ou seja, os campos  $X^\mu(z, \bar{z})$ , que satisfazem a equação de movimento, vem dados por uma soma de uma função holomórfica e outra anti-holomórfica de  $z$ :

$$X^\mu(z, \bar{z}) = F^\mu(z) + G^\mu(\bar{z}). \quad (2.8)$$

O tensor energia-momento,  $T_{ab}$ , é de particular importância na teoria da campos conforme. Nós definimos o tensor  $T_{ab}$  por

$$T_{ab} = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}} \left. \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} \right|_{g^{ab}=\eta^{ab}}, \quad (2.9)$$

Agora vamos mostrar uma importante propriedade do tensor  $T_{ab}$ : ele possui traço nulo. Isto é válido mesmo antes de fazer  $g^{ab} = \eta^{ab}$  em (2.9). Aqui variamos a ação dada em 2.1 com relação a transformação de escala da métrica  $g^{ab}$ :

$$\delta S_p = \int d^2\sigma \frac{\delta S_p}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \epsilon T^\alpha_\alpha. \quad (2.10)$$

Na última passagem usamos que  $\delta g_{ab} = \epsilon g_{ab}$ . Como  $\epsilon$  é uma quantidade infinitesimal e arbitrária e pelo fato de  $\delta S_p$  ser nulo para a transformação em questão temos que

$$T^\alpha_\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Agora usando a definição (2.9) encontramos que

$$T_{ab} = -\frac{1}{\alpha'} \left( \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \delta_{ab} \partial^c X^\mu \partial_c X_\mu \right). \quad (2.12)$$

O tensor energia-momento em coordenadas complexas é

$$T_{zz}(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu \quad e \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (2.13)$$



O fato de  $T_{zz}(z)$  e  $T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$  serem holomórfica e anti-holomórfica, respectivamente, para campos  $X^\mu$  que satisfazem a equação de movimento são consistente com a solução de (2.7).

Por outro lado, após usar o calibre conforme a condição (2.11) torna-se

$$T_{z\bar{z}} = 0 \quad (2.14)$$

As equações de conservação do tensor energia-momento,  $\partial^a T_{ab} = 0$ , em coordenadas complexas são

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} + \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0. \quad (2.15)$$

Note que (2.15) é consistente com (2.13) e (2.14).

Na seção 2.1 fixamos o calibre conforme na ação de Polyakov, entretanto a ação tem um calibre residual. Podemos mostrar que a ação (2.5) é invariante sobre a transformação

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}). \quad (2.16)$$

Isto implica que a métrica (euclideana) da folha-mundo é reescalada,

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 = 2dzd\bar{z} \rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 ds^2, \quad (2.17)$$

Uma teoria de campos que satisfaz a propriedade anterior é chamada de teoria de campos conforme.

Vejamus que consequência traz esta simetria adicional. Para isso calcularemos a corrente de Noether associada às transformações de simetria  $z' = z + \epsilon(z)$  e  $\bar{z}' = \bar{z} + \epsilon(\bar{z})$ , onde  $\epsilon(z)$  e  $\epsilon(\bar{z})$  são infinitesimais. Aqui vamos usar o truque, conhecido como “método de Noether”, no qual promovemos os parâmetros infinitesimais  $\epsilon$  a serem dependente das duas coordenadas da folha-mundo. Da variação da ação e da definição (2.9) é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z [T_{zz} \partial_{\bar{z}} \epsilon + T_{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \bar{\epsilon}], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde usamos que a métrica muda como  $\delta g_{ab} = \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a$  (após usar o calibre conforme) e o traço do tensor energia-momento é nulo ( $T_{z\bar{z}} = 0$ ).

Como  $\epsilon$  é infinitesimal e arbitrário, integrando por partes e eliminando os termos de fronteira em (2.18) temos que

$$\partial_{\bar{z}}[T_{zz}\epsilon] + \partial_z[T_{\bar{z}\bar{z}}\bar{\epsilon}] = 0. \quad (2.19)$$

Os parâmetros  $\epsilon$  e  $\bar{\epsilon}$  são independentes, portanto podemos separar as correntes. Consideremos  $\delta z = \epsilon(z)$  com  $\delta\bar{z} = 0$ . De (2.19) temos que

$$J^z = 0, \quad J^{\bar{z}} = T_{zz}(z)\epsilon(z) = T(z)\epsilon(z). \quad (2.20)$$

Da mesma forma para  $\delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$  com  $\delta z = 0$  em (2.19) temos que

$$\bar{J}^{\bar{z}} = 0, \quad \bar{J}^z = \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (2.21)$$

## 2.3 Expansão de Produto de Operadores

Um importante objeto da teoria de cordas perturbativa é a função de correlação de operadores locais,

$$\langle \hat{O}_{i_1}(z_1, \bar{z}_1) \hat{O}_{i_2}(z_2, \bar{z}_2) \cdots \hat{O}_{i_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle, \quad (2.22)$$

onde os  $\hat{O}_i(z_i, \bar{z}_i)$  são os operadores locais. Aqui  $(z, \bar{z})$  é um ponto na folha-mundo. É importante entender o comportamento da função de correlação quando dois operadores aproximam-se um do outro. A técnica para descrever este limite é conhecida como expansão de produto de operadores. A figura 2.1 ilustra a situação em que há um produto de seis operadores locais, quando  $z \rightarrow w$  e  $\bar{z} \rightarrow \bar{w}$ , ou seja, a distância  $|z - w|$  é pequena comparada a distância entre  $(w, \bar{w})$  e os outros pontos. A expansão do produto de um par de operadores locais é uma série de Laurent em  $z - w$  e  $\bar{z} - \bar{w}$ , divergente em alguma região circular de raio não nulo.

Seja  $\{\hat{O}_1(z, \bar{z}), \dots, \hat{O}_j(z, \bar{z})\}$  o conjunto de operadores locais de uma teoria conforme. A teoria conforme que vamos considerar na quantização da corda de Polyakov vai possuir

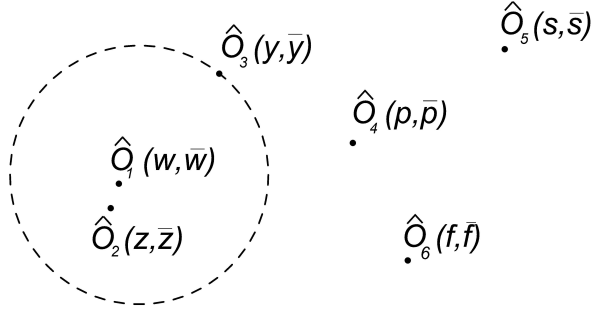


Figura 2.1: Produtos de seis operadores locais.

um número infinito destes operadores. A expansão de produto de operadores é definida como

$$\hat{O}_i(z, \bar{z})\hat{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w})\hat{O}_k(w, \bar{w}). \quad (2.23)$$

As funções  $C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w})$  são chamadas de coeficientes dos produtos dos operadores. Queremos escrever (2.23) para muitos operadores, ou seja, escrevemos a função de correlação ordenada temporalmente como

$$\langle \hat{O}_i(z, \bar{z})\hat{O}_j(w, \bar{w}) \cdots \rangle = \sum_k C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w})\langle \hat{O}_k(w, \bar{w}) \cdots \rangle, \quad (2.24)$$

Os coeficientes  $C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w})$  dependem de  $i$ ,  $j$  e  $k$  e apenas do par de operadores que foram expandidos.

## 2.4 Identidade de Ward

A identidade de Ward não existe, apenas, na teoria de campos conforme. Esta identidade é uma relação que surge numa teoria quântica de campos cada vez que ela possui uma simetria (global ou local).

Aqui vamos primeiro encontrar a forma geral da identidade de Ward e depois reescrevê-la em coordenadas complexas.

Agora vamos estudar as simetrias da folha-mundo. Sabemos da teoria de campos clássica que quando temos uma simetria global há uma corrente conservada (teorema de

Noether). A nível quântico as funções de correlação são os objetos de nossos estudos. Aqui consideramos uma coleção de campos  $\varphi_i$  com uma ação invariante sob uma transformação infinitesimal do tipo

$$\varphi'_i(\sigma) = \varphi_i(\sigma) + \epsilon \delta \varphi_i(\sigma), \quad (2.25)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal constante. O produto  $[d\varphi] \exp(-S[\varphi])$  é invariante sobre a transformação (2.25) (usamos a notação  $[d\varphi] = \prod_i d\varphi_i$  para a medida da integral funcional dos campos  $\varphi_i$ ).

Consideremos a função de correlação mais geral com ordenamento temporal<sup>1</sup>:

$$\langle \hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\varphi] e^{-S[\varphi]} O_1(\sigma_1) \cdots O_n(\sigma_n), \quad (2.26)$$

onde  $Z$  é o funcional de vácuo ( $Z = \int [d\varphi] e^{-S[\varphi]}$ ).

Na demonstração da identidade de Ward usamos, novamente, o truque do método de Noether. Nós promovemos o parâmetro  $\epsilon$  a ser dependente das coordenadas da folha-mundo ( $\epsilon \rightarrow \epsilon(\sigma)$ ).

$$\hat{O}'_i(\sigma) = \hat{O}_i(\sigma) + \epsilon(\sigma) \delta \hat{O}_i(\sigma). \quad (2.27)$$

Dado que no caso de  $\epsilon$  ser constante a transformação (2.25) é uma transformação de simetria, a mudança de (2.26) sob (2.27) deve ser proporcional a  $\partial \epsilon$  (em primeira ordem): No caso de  $\epsilon$  constante, a mudança de (2.26) deve ser proporcional à  $\partial \epsilon$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi'] \exp(-S[\varphi']) O'_1(\sigma_1) \cdots O'_n(\sigma_n) \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi] \exp\left(-S[\varphi] - \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) O_1(\sigma_1) \cdots O_n(\sigma_n) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi] e^{-S[\varphi]} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} J^\alpha \partial_\alpha \epsilon\right) O_1(\sigma_1) \cdots O_n(\sigma_n) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.28)$$

---

<sup>1</sup>No membro da esquerda, em (2.26), devimos ter escrito  $\langle T\{\hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n)\} \rangle$ , onde “ $T\{\dots\}$ ” denota o ordenamento temporal. Nesta dissertação assumiremos que, cada vez que calcularmos uma função de correlação os operadores estarão ordenados temporalmente. Omitiremos, portanto, o símbolo “ $T\{\dots\}$ ”

onde colocamos o fator  $1/2\pi$  por conveniência. Assim encontramos, após usar integração por partes, que

$$\langle \partial_\alpha \hat{J}^\alpha(\sigma) \hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle = 0, \quad \text{para } \sigma \neq \sigma_i. \quad (2.29)$$

Note que se  $\hat{O}_1(\sigma_1) = \cdots = \hat{O}_n(\sigma_n) = 1$  obtemos a versão quântica do teorema de Noether.

Agora consideramos  $\epsilon(\sigma)$  igual a 1 em uma região  $R$  e 0 na fora desta região. Usando os mesmos procedimentos anteriores desta vez encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [d\varphi] e^{-S[\varphi]} \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_R d^2\sigma \sqrt{g} \hat{J}^\alpha \partial_\alpha \epsilon \right) [O_1(\sigma_1) + \epsilon \delta O_1(\sigma_1)] \times \\ &\times O_2(\sigma_2) \cdots O_n(\sigma_n). \end{aligned} \quad (2.30)$$

e assim na ordem de  $\epsilon$  encontramos que

$$-\frac{1}{2\pi} \int_R d^2\sigma \partial_\alpha \langle \hat{J}^\alpha(\sigma) \hat{O}_1(\sigma_1) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle = \langle \delta \hat{O}_1(\sigma_1) \hat{O}_2(\sigma_2) \cdots \hat{O}_n(\sigma_n) \rangle. \quad (2.31)$$

A expressão (2.31) é conhecida como identidade de Ward. Em uma teoria em duas dimensões em coordenadas complexas, após usar o teorema da divergência em (2.31), a identidade de Ward pode ser reescrita como

$$i \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R} dz \langle \hat{J}_z(z, \bar{z}) \hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle - i \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R} d\bar{z} \langle \hat{J}_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle = \langle \delta \hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \rangle, \quad (2.32)$$

onde  $\partial R$  é a borda da região  $R$ .

A equação (2.32) é válida para quaisquer inserções de operadores.

No formalismo do espaço de Hilbert, ao trabalharmos na representação de Heisenberg, a identidade de Ward vem dada por (2.32) mas sem “ $\langle$ ” nem “ $\rangle$ ”. Para o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.32) de acordo com o teorema do resíduo temos que

$$i \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial R} dz \hat{J}_z(z, \bar{z}) \hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots = -Res[\hat{J}_z(z, \bar{z}) \hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots]. \quad (2.33)$$

Na última passagem usamos que as variáveis  $z$  e  $\bar{z}$  são independentes. Das equações (2.33), (2.32) e (2.20) podemos reescrever a identidade de Ward como

$$\delta\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) = -Res[\hat{J}_z(z)\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1)] = -Res[\epsilon(z)\hat{T}(z)\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1)], \quad (2.34)$$

no caso em que transformação é dada por  $\delta z = \epsilon(z)$ ,  $\delta\bar{z} = 0$ .

Similarmente de (2.32) e (2.21) obtemos que

$$\delta\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1) = -Res[\hat{J}_{\bar{z}}(\bar{z})\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1)] = -Res[\bar{\epsilon}(\bar{z})\hat{T}(\bar{z})\hat{O}_1(z_1, \bar{z}_1)], \quad (2.35)$$

no caso em que transformação é dada por  $\delta z = 0$ ,  $\delta\bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ .

O sinal de menos em (2.35) vem do fato da integral  $\oint d\bar{z}$  ser realizada na direção oposta à de  $\oint dz$ .

## 2.5 Ordenamento Normal

Antes de apresentar o ordenamento normal para um produto de campos quânticos  $\hat{X}^\mu(z, \bar{z})$  e  $\hat{X}^\nu(z', \bar{z}')$  nas seguintes linhas veremos que o análogo quântico da equação de movimento (2.7) é dado por  $\langle\partial\bar{\partial}\hat{X}^\mu(z, \bar{z})\rangle = 0$ . Para demonstrar este resultado precisamos da seguinte integral de caminho

$$Z = \langle 1 \rangle = \int [dX] \exp(-S[X]). \quad (2.36)$$

Na continuação vamos usar que a integral funcional da derivada total do integrando em (2.36) é zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \exp(-S[X]) \\ &= - \int [dX] \exp(-S[X]) \frac{\delta S[X]}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \\ &= - \left\langle \left[ \frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial}\hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Agora, repitamos o procedimento anterior, mas comecemos com a derivada total de  $\exp(-S)\hat{X}^\nu(z', \bar{z}')$ . Podemos deduzir, assim, que o propagador do campo  $\hat{X}^\mu(z, \bar{z})$ ,  $\langle\hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \times \hat{X}^\nu(z', \bar{z}')\rangle$ , satisfaz a equação  $\partial_z\partial_{\bar{z}}\langle\hat{X}^\mu(z, \bar{z})\hat{X}^\nu(z', \bar{z}')\rangle = -\eta^{\mu\nu}\pi\alpha' \langle\delta^2(z - z', \bar{z} - \bar{z}')\rangle$ . Usando o cálculo rigoroso da função de Green de dois pontos de campos escalares[9] obtemos, para nosso caso, que

$$\left\langle \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \hat{X}^\nu(z', \bar{z}') \right\rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2. \quad (2.38)$$

O propagador (2.38) apresenta uma singularidade quando  $(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')$  conhecida como divergência ultravioleta. Assim definimos, então o ordenamento normal do produto de  $\hat{X}^\mu(z, \bar{z})$  e  $\hat{X}^\nu(z', \bar{z}')$  como

$$: \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \hat{X}^\nu(z', \bar{z}') : = \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \hat{X}^\nu(z', \bar{z}') + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2. \quad (2.39)$$

Pode-se provar que a definição em (2.39) coincide com aquela vista em teoria quântica de campos, em que, ao escrever  $\hat{X}^\mu(z, \bar{z})$  e  $\hat{X}^\nu(z', \bar{z}')$  em termos de operadores de criação e de aniquilação, os primeiros em cada produto ficam do lado esquerdo e os segundo ficam do lado direito.

Agora vamos estender a ideia de ordenamento normal para um número arbitrário de operadores, ou seja, usamos o teorema de Wick. Seja  $\hat{F} = F(\hat{X})$  um funcional de  $\hat{X}$ . Definimos o ordenamento funcional  $: \hat{F} :$  por

$$: \hat{F} : = \exp \left( \frac{\alpha'}{4} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_1 - z_2|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1, \bar{z}_1)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_2, \bar{z}_2)} \right) \hat{F}. \quad (2.40)$$

Por exemplo, quando  $\hat{F} = \hat{X}^{\mu_1}(z_1, \bar{z}_1) \hat{X}^{\mu_2}(z_2, \bar{z}_2) \hat{X}^{\mu_3}(z_3, \bar{z}_3)$  da fórmula (2.40) obtemos que

$$\begin{aligned} : \hat{X}^{\mu_1}(z_1, \bar{z}_1) \hat{X}^{\mu_2}(z_2, \bar{z}_2) \hat{X}^{\mu_3}(z_3, \bar{z}_3) : &= \hat{X}^{\mu_1}(z_1, \bar{z}_1) \hat{X}^{\mu_2}(z_2, \bar{z}_2) \hat{X}^{\mu_3}(z_3, \bar{z}_3) + \\ &+ \left( \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z_1 - z_2|^2 \hat{X}^{\mu_3}(z_3, \bar{z}_3) \right) + \\ &+ 2 \text{ permutações.} \end{aligned} \quad (2.41)$$

A generalização de (2.40) para o caso de um produto de dois funcionais de  $X$ ,  $: \hat{F} :$  e  $: \hat{G} :$ , vem dado por

$$: \hat{F} :: \hat{G} := \exp \left( -\frac{\alpha'}{2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_1 - z_2|^2 \frac{\delta}{\delta X_F^\mu(z_1, \bar{z}_1)} \frac{\delta}{\delta X_{G\mu}(z_2, \bar{z}_2)} \right) : \hat{F} \hat{G} :. \quad (2.42)$$

Um exemplo importante é quando  $\hat{F} = e^{ik_1 \cdot \hat{X}(z, \bar{z})}$  e  $\hat{G} = e^{ik_2 \cdot \hat{X}(z', \bar{z}')}$ . Nesse caso, de (2.42) vem que

$$: e^{ik_1 \cdot \hat{X}(z, \bar{z})} :: e^{ik_2 \cdot \hat{X}(z', \bar{z}')} : = |z - z'|^{\alpha' k_1 \cdot k_2} : e^{ik_1 \cdot \hat{X}(z, \bar{z})} e^{ik_2 \cdot \hat{X}(z', \bar{z}')} :. \quad (2.43)$$

## 2.6 Operadores Quase Primário e Primário

A teoria de campos conforme em duas dimensões tem um conjunto (infinito) de operadores locais  $\{\hat{O}_i\}$ . Existe um subconjunto especial de  $\{\hat{O}_i\}$  chamado de operadores primários os quais mudam, sob uma transformação conforme

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}), \quad (2.44)$$

como[9]:

$$\hat{O}'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \hat{O}(z, \bar{z}), \quad (2.45)$$

onde  $h$  e  $\bar{h}$  são números reais e  $(h, \bar{h})$  é chamado de peso conforme de  $\hat{O}(z, \bar{z})$ .

Consideremos as transformações  $z = z + \epsilon(z)$  e  $\bar{z} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$ , onde  $\epsilon(z)$  e  $\bar{\epsilon}(\bar{z})$  são parâmetros infinitesimais. É possível mostrar que a versão infinitesimal da transformação de (2.45) vem dada por

$$\delta \hat{O} = -(h\hat{O}\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z\hat{O}) - (\bar{h}\hat{O}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}}\hat{O}). \quad (2.46)$$

A transformação descreve uma translação, rotação e dilatação se  $\epsilon$  for, respectivamente, constante complexa, um número puramente imaginário e um número real.

Agora, existem operadores  $\hat{O}$  que infinitesimalmente transformam como (2.46), mas que não são primários. Para ver isto comparemos (2.46) com a identidade de Ward (2.34). Desta comparação, quando  $\delta z = \epsilon z$  e  $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon} \bar{z}$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \hat{T}(z)\hat{O}(z', \bar{z}') &= \dots + h\frac{\hat{O}(z', \bar{z}')}{(z - z')^2} + \frac{\partial\hat{O}(z', \bar{z}')}{(z - z')} + \text{termos regulares}, \\ \hat{T}(\bar{z})\hat{O}(z', \bar{z}') &= \dots + \bar{h}\frac{\hat{O}(z', \bar{z}')}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} + \frac{\bar{\partial}\hat{O}(z', \bar{z}')}{(\bar{z} - \bar{z}')} + \text{termos regulares}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pode-se provar que se o  $\hat{O}$  é primário então a sua ‘‘OPE’’ com  $\hat{T}$  e com  $\hat{\bar{T}}$  é truncada na ordem  $(z - z')^{-2}$  e  $(\bar{z} - \bar{z}')^{-2}$ . Ou seja, nesse caso em (2.47)

$$\begin{aligned} \hat{T}(z)\hat{O}(z', \bar{z}') &= h\frac{\hat{O}(z', \bar{z}')}{(z - z')^2} + \frac{\partial\hat{O}(z', \bar{z}')}{(z - z')} + \text{termos regulares}, \\ \hat{\bar{T}}(\bar{z})\hat{O}(z', \bar{z}') &= \bar{h}\frac{\hat{O}(z', \bar{z}')}{(\bar{z} - \bar{z}')^2} + \frac{\bar{\partial}\hat{O}(z', \bar{z}')}{(\bar{z} - \bar{z}')} + \text{termos regulares}. \end{aligned} \quad (2.48)$$



Um operador quase primário seria aquele em que em (2.47) existem termos de ordem  $(z - z')^3$  ou  $(\bar{z} - \bar{z}')^3$  ou de ordem superior.

Note que todo o operador primário é quase primário, mas nem todo operador quase primário é primário.

Alguns operadores primários usuais e seus pesos conformes são os seguintes:

$$\begin{aligned} \hat{X}^\mu & (0, 0), & \partial \hat{X}^\mu & (1, 0), \\ \bar{\partial} \hat{X}^\mu & (0, 1), & \partial^2 \hat{X}^\mu & (2, 0), \\ : e^{ik \cdot \hat{X}} : & \left( \frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\alpha' k^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

O peso conforme dos operadores em (2.49) é obtido através da fórmula (2.42), onde  $\hat{F}$  deve ser o tensor energia-momento dado em (2.13) e  $\hat{G}$  o operador que se deseja saber o peso conforme.

E o tensor energia-momento, é um operador primário? No caso dos D campos escalares  $\hat{X}^\mu$  da ação de Polyakov, onde  $T(z)$  vem dado em (2.13), pode-se provar que:

$$\hat{T}(z)\hat{T}(z') = \frac{D/2}{(z - z')^4} + \frac{2\hat{T}(z')}{(z - z')^2} + \frac{\partial \hat{T}(z')}{(z - z')} + \dots \quad (2.50)$$

Para esse caso vemos que  $\hat{T}$  é um operador quase-primário de peso (2,0). Mas, usando argumentos de simetria e de análise dimensional pode-se provar que ele possui esse peso em qualquer teoria conforme em duas dimensões. Ainda mais, se essa teoria for unitária pode-se provar que a “OPE” de  $\hat{T}(z)$  com  $\hat{T}(w)$  é sempre da forma[3]:

$$\hat{T}(z)\hat{T}(z') = \frac{c/2}{(z - z')^4} + \frac{2\hat{T}(z')}{(z - z')^2} + \frac{\partial \hat{T}(z')}{(z - z')} + \dots, \quad (2.51)$$

onde a constante  $c$  é chamada de *carga central*. Ela é importante, pois para que uma teoria conforme em duas dimensões não possua anomalia  $c$  deve ser nula. É demandando este último requisito que na abordagem de Polyakov para a corda bosônica obtém-se que a dimensão do espaço-tempo deve ser  $D=26$ .

## 2.7 Uma Transformação Conforme Importante

Existe uma outra parametrização da folha-mundo que permite uma visualização natural das inserções pontuais de operadores no plano complexo.

A transformação conforme peculiar que será considerada vem dada por

$$z = \exp(-iw) = \exp(\tau - i\sigma), \quad (2.52)$$

onde  $w = \sigma + i\tau$ ,  $\tau$  é a coordenada do tempo e  $\sigma$  é a coordenada de posição da folha-mundo.

No caso da corda fechada esta transformação mapeia o cilindro no plano complexo como é mostrado na figura 2.2. Neste caso temos uma periodicidade a qual pode ser vista fazendo a identificação  $\sigma \leftrightarrow \sigma + 2\pi$ .

Superfícies de tempos iguais no cilindro são transformados em círculos de raios iguais no plano complexo. Desta forma o passado, muito longe ( $\tau \rightarrow -\infty$ ), torna-se a origem  $z = 0$  do plano complexo e o futuro, muito longe ( $\tau \rightarrow \infty$ ), é mapeado em  $z = \infty$  (veja figura 2.2).

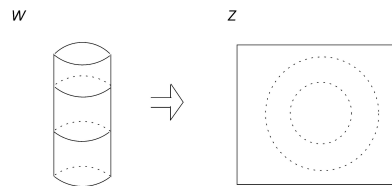


Figura 2.2: Mapeamento da folha-mundo da corda fechada.

No caso da corda aberta a folha-mundo não é periódica e (2.52) ela é mapeada no semi-plano complexo superior, como mostra a figura 2.3. Neste caso  $\sigma$  está restrito ao intervalo  $[0, \pi]$ . A linha com  $\tau$  constante transforma-se em semi-circunferência no semi-plano complexo superior ( $Im(z) \geq 0$ ).

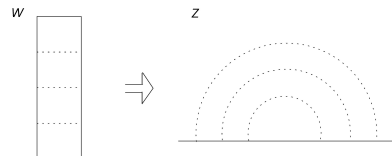


Figura 2.3: Mapeamento da folha-mundo da corda aberta.

## 2.8 Consideração Sobre Teoria de Campos Conforme com Bordas

Até agora todas as “OPE”s que calculamos nesta dissertação se referiam à corda fechada (pois foi usado o propagador dado em o (2.38)). Mas as aplicações que veremos nos capítulos 5 e 6 consistem nas interações entre estados de cordas abertas. Daí que seja necessário considerar, daqui em diante, o propagador de campos  $\hat{X}^\mu(z, \bar{z})$  que estão definidos na parte superior do plano complexo<sup>2</sup>:

$$\langle \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \hat{X}^\nu(w, \bar{w}) \rangle = G^{\mu\nu}(z, \bar{z}; w, \bar{w}), \quad (2.53)$$

onde  $G^{\mu\nu}$  satisfaz o problema:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} G^{\mu\nu}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = -\eta^{\mu\nu} \pi \alpha' \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}), \quad (2.54)$$

com a condição

$$\partial_\sigma G^{\mu\nu}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad (2.55)$$

onde  $\sigma$  representa a coordenada perpendicular ao eixo real ( $\sigma = 0$  corresponde aos pontos do eixo real.)

Usamos o método de imagens e assim podemos deduzir que

$$G^{\mu\nu}(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = -\eta^{\mu\nu} \frac{\alpha'}{2} (\ln|z - w|^2 + \ln|z - \bar{w}|^2) \quad (2.56)$$

## 2.9 Mapeamento Entre Estado e Operador

A ideia principal que está por trás do mapeamento entre estados e operadores é que a cada estado físico da teoria é associado de forma biunívoca um operador local. Esses são os operadores (chamados operadores de vértice) que serão utilizados para calcular as amplitudes de espalhamento.

---

<sup>2</sup>Veja o segundo exemplo da seção 2.7

Na continuação vamos usar o formalismo da integral de caminho para fazer o mapeamento entre estado e operador. Vamos ver que o segredo está no fato do passado remoto ser transformado na origem do plano complexo.

Vamos escrever a integral de caminho (euclideana) para um funcional  $\Psi(\varphi)$  no cilindro

$$\Psi_f[\varphi_f(\sigma), \tau_f] = \int [d\varphi_i] \int_{\varphi(\tau_i)=\varphi_i}^{\varphi(\tau_f)=\varphi_f} [d\varphi] e^{-S[\varphi]} \Psi_i[\varphi_i(\sigma), \tau_i], \quad (2.57)$$

onde  $\varphi(\tau_i)$  e  $\varphi(\tau_f)$  são as condições de fronteira inicial e final.

Após fazer a transformação (2.52) obtemos uma expressão similar a (2.57) no plano complexo:

$$\Psi_f[\varphi_f(\sigma), r_f] = \int [d\varphi_i] \int_{\varphi(r_i)=\varphi_i}^{\varphi(r_f)=\varphi_f} [d\varphi] e^{-S[\varphi]} \Psi_i[\varphi_i(\sigma), r_i], \quad (2.58)$$

onde, desta vez, as condições de fronteira são  $\varphi(r_i) = \varphi_i$  e  $\varphi(r_f) = \varphi_f$ . A integral funcional (2.58) é realizada no plano complexo numa coroa circular  $r_i < |z| < r_f$  como mostra a figura 2.4.

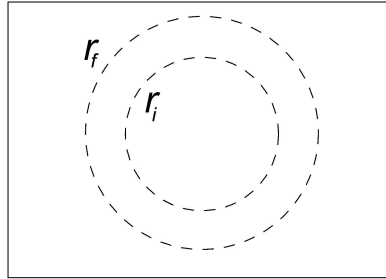


Figura 2.4: Coroa circular  $r_i < |z| < r_f$  no plano complexo.

O efeito do estado inicial é mudar o peso da integral funcional sobre o interior do anel  $|z| = r_i$ . Se o estado inicial estiver no passado muito distante, que equivale no plano complexo a  $z = 0$ , a integral é realizada no círculo  $|z| \leq r_f$ . Assim o efeito do estado inicial é mudar o peso da integral funcional no ponto  $z = 0$ . Este é o ponto que corresponde ao operador local  $\hat{O}(z = 0)$ . Assim o funcional de onda dos diferentes estados vem dado por

$$\Psi[\varphi_f(\sigma), r] = \int^{\varphi(r)=\varphi_f} [d\varphi] e^{-S[\varphi]} \hat{O}(z = 0), \quad (2.59)$$

onde subentende-se que é realizada uma integração sobre todos os valores do campo  $\varphi$  em  $z = 0$ .

### 2.9.1 Exemplo

Veremos aqui o mapeamento para alguns estados da corda aberta. Antes disso precisamos de um resultado preliminar que fornece à expressão do operado  $\hat{X}^\mu(w)$  em modos normais de vibrações:

$$\hat{X}^\mu(w) = \hat{x}^\mu - 2\alpha' \hat{p}^\mu w + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^\mu (e^{inw} + e^{-in\bar{w}}), \quad (2.60)$$

onde  $(w, \bar{w})$  são as coordenadas de um ponto da fita euclideana.

Argumentaremos aqui o conhecido resultado de que os operadores  $\hat{\alpha}_m^\mu$  satisfazem a álgebra de osciladores harmônicos e daí vem que se  $m > 0$  eles representam operadores de aniquilação e quando  $m < 0$  eles representam operadores de criação do modo de vibração  $|m|$ .

De (2.60) é fácil determinar  $\partial_w \hat{X}^\mu$  na fita:

$$\partial_w \hat{X}^\mu(w) = -\sqrt{2\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n^\mu e^{inw}, \quad \text{com } \hat{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^\mu. \quad (2.61)$$

Sendo  $\partial_w \hat{X}^\mu$  um campo primário de peso  $h = 1$ . Vimos na seção 2.7 que o mapeamento da fita no semiplano complexo é dado por  $z = e^{-iw}$ . Como os operadores primários transformam por (2.45), podemos escrever que

$$\partial_z \hat{X}^\mu(z) = \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^{-1} \partial_w \hat{X}^\mu(w) = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_n \frac{\hat{\alpha}_n^\mu}{z^{n+1}}. \quad (2.62)$$

A partir de (2.62) temos que

$$\hat{\alpha}_n^\mu = i \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial \hat{X}^\mu(z). \quad (2.63)$$

Da expressão (2.63) é possível encontrar a relação de comutação do operador  $\hat{\alpha}_n^\mu$  que é dada por,

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

que é a álgebra que queremos encontrar.

Portanto o estado fundamental satisfaz que  $\hat{\alpha}_m^\mu |0\rangle = 0$ , para  $m > 0$ .

Nas seguintes linhas argumentaremos que procedem os seguintes mapeamentos entre estados e operadores (no caso em que  $p^\mu=0$ ):

| Estado                         | Operador                 |
|--------------------------------|--------------------------|
| $ 0\rangle$                    | 1                        |
| $\hat{\alpha}_m^\mu  0\rangle$ | $\partial^m \hat{X}^\mu$ |

Como primeiro passo mostremos que o funcional do campo  $X^\mu$  no estado fundamental é dado por

$$\Psi_0[X_f^\mu] = \int^{X_f^\mu} [dX^\mu] e^{-S[X^\mu]}, \quad (2.65)$$

onde  $X_f^\mu = X^\mu(|z| = r)$  é a condição de fronteira final.

Para isto verifiquemos se  $\hat{\alpha}_m^\mu |0\rangle = 0$  para  $m > 0$ . Para mostrar isto usamos a integral de contorno (2.63) apenas em  $|w| < r$ .

$$\hat{\alpha}_m^\mu \Psi_0[X_f^\mu] = \int^{X_f^\mu} [dX^\mu] e^{-S[X^\mu]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial \hat{X}^\mu(w). \quad (2.66)$$

Note que a integral de caminho não contém pólos, ou seja,

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^m \partial \hat{X}^\mu(w) = 0 \quad \text{para } m \geq 0. \quad (2.67)$$

Portanto  $\hat{\alpha}_m^\mu \Psi_0[X_f^\mu] = 0$  como queríamos.

Agora como segundo passo estudamos um estado excitado. Propomos como um funcional de onda

$$\Psi_m[X_\rho] = \int^{X_f} [dX] e^{-S[X]} \partial^m X(z=0). \quad (2.68)$$

Examinemos a ação do operador aniquilação  $\hat{\alpha}_n^\mu$  em (2.68) é dado por

$$\hat{\alpha}_n^\nu \Psi_m[X_\rho] \sim \int^{X_f(r)} [dX^\mu] e^{-S[X^\mu]} \oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial \hat{X}^\nu(w) \partial^m \hat{X}^\mu(z=0). \quad (2.69)$$

A "OPE" de  $\partial \hat{X}^\nu(w) \partial \hat{X}^\mu(w)$  é

$$\partial\hat{X}^\nu(w)\partial\hat{X}^\mu(z) = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\frac{1}{(w-z)^2} + \text{termos regulares}. \quad (2.70)$$

Portanto a integral de caminho da equação (2.69) pode ser reescrita como

$$\oint \frac{dw}{2\pi i} w^n \partial_z^{m-1} \frac{1}{(w-z)^2} \Big|_{z=0} = m! \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n-m-1} = 0, \quad (2.71)$$

a menos que  $m = n$ . Com isto vemos que o funcional  $\Psi_m[X_p]$  efetivamente é aquele correspondente ao  $m$ -ésimo estado excitado.

Finalmente, repetindo o procedimento anterior para os estados com momento não nulo ( $p^\mu \neq 0$ ) e usando que

$$\partial\hat{X}(z) : e^{ik \cdot \hat{X}(w)} : = -i\alpha' k \frac{: e^{ik \cdot \hat{X}(w)} :}{z-w}, \quad (2.72)$$

obtemos o seguinte mapeamento:

| Estado                            | Operador   |
|-----------------------------------|--|
| $ 0, k\rangle$                    | $:e^{ik \cdot \hat{X}(w)} :$                         |
| $\hat{\alpha}_m^\mu  0, k\rangle$ | $: \partial^m \hat{X}^\mu e^{ik \cdot \hat{X}(w)} :$ |

# Capítulo 3

## Interações

Este capítulo está baseado nos capítulos 5 e 6 da referência[3], com consulta ao capítulo 3 do texto de referência[4].

Agora temos bagagem suficiente para discutir as interações na teoria de cordas. O ponto chave das interações é que elas estão contidas na teoria livre, ou seja, toda a informação sobre interações está contida na ação de Polyakov.

A teoria quântica que descreve a corda de Polyakov é uma “CFT” em  $d = 2$  (desde que a dimensão do espaço-tempo seja  $D = 26$ ). Este requisito é necessário mantê-lo ao incorporar as interações. Sendo assim, a forma destas interações fica determinada de forma única (os acoplamentos dos campos que descrevem as interações dos estados da corda ficam todos determinados)<sup>1</sup>.

O nosso objetivo é calcular a matriz S. Para isto partimos da função de correlação que é um importante objeto das teorias perturbativas.

Numa teoria com campos quânticos  $\hat{\varphi}_I(x)$ , a partir de funções de correlação da forma

$$\langle \hat{\varphi}_{I_1}(x_1) \cdots \hat{\varphi}_{I_n}(x_n) \rangle \quad (3.1)$$

é possível obter as amplitudes de espalhamento após uma transformação de Fourier em (3.1). As pernas, nos diagramas de Feynman que conduzem a essas amplitudes, estão fora da camada de massa ( $k_j^2 \neq M_I^2$ ).

---

<sup>1</sup>Nos capítulos 5 e 6, quando considerarmos o teorema de equivalência e estudamos as lagrangeanas da teoria em  $D = 26$ , veremos que há sutilezas por trás desta afirmação pois haverá acoplamento que ficarão indeterminados. O motivo disto vem do fato que nas interações que estudaremos neste capítulo os estados externos sempre estão na camada de massa.



Como veremos neste capítulo, o notável da descrição das interações das cordas *à la Polyakov*, é que através do cálculo de funções de correlação de uma teoria em duas dimensões é possível obter as amplitudes de espalhamento das cordas no espaço-tempo de Minkowski em  $D=26$  dimensões.

A restrição deste procedimento será que ele só permite calcular as amplitudes de espalhamento de estados que estão na camada de massa.

### 3.1 Soma Sobre Todas as Topologias

Sabemos que a integral de caminho para a propagação de uma partícula livre relativística descreve uma soma sobre todas as linhas-mundo possíveis para a partícula. Em teoria de cordas a ideia é similar só que a soma é realizada sobre todas as folhas-mundo de diferentes topologias. Por exemplo, consideremos quatro cordas que interagem. As folhas-mundo possíveis são resultantes das diversas formas que as quatro cordas interagem (veja figura 3.1).

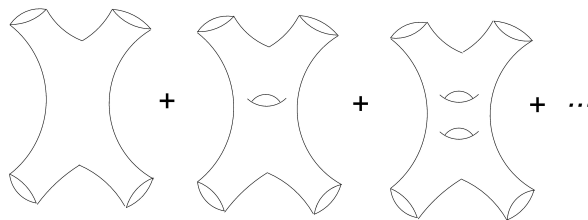


Figura 3.1: Folhas-mundo de diferentes topologias contribuem no espalhamento de quatro cordas fechadas.

Cada folha-mundo é uma superfície de Riemann.

Consideremos a integral de caminho euclideana de Polyakov para a folha-mundo de uma topologia dada

$$\int [dX][dg] \exp(-S_{cordas}), \quad (3.2)$$

onde  $S_{cordas}$  vem dado nas equações (3.3), (3.4) e (3.5).

Observe que além da somar sobre todos os campos somamos também sobre todas as métricas com a topologia dada.

O peso  $e^{(-S_{cordas})}$  da integral de caminho (3.2) agora é constituída pela ação de Polyakov e mais dois termos adicionais (contidos em  $\chi$ ):

$$S_{cordas} = S_{Poly} + \lambda\chi, \quad (3.3)$$

onde

$$S_{Poly} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (3.4)$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma g^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k, \quad (3.5)$$

sendo  $\lambda$  um número real,  $R$  é o escalar de Ricci e  $k = t^a n_b \nabla_a t^b$  a curvatura geodésica da borda ( $t^a$  e  $n_a$  são, respectivamente, vetores tangente e normal à borda.). A soma (3.5) é invariante sobre transformações de difeomorfismo e de Weyl.

O termo  $\chi$ , conhecido como número de Euler, depende somente da topologia da folha-mundo. Ele vem dado por

$$\chi = 2 - 2g - b, \quad (3.6)$$

onde  $g$  é o gênero (número de “alças”) e  $b$  o números de bordas da superfície de Riemann. Veja um exemplo na ilustração 3.2.

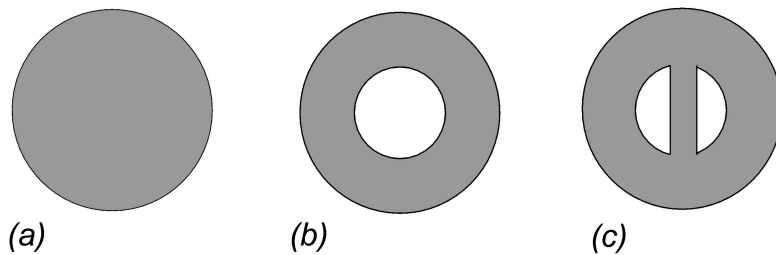


Figura 3.2: Exemplos de superfície de Riemann para a corda aberta (a)  $g = 0$ ,  $b = 1$  e  $\chi = 1$ ; b)  $g = 0$ ,  $b = 2$  e  $\chi = 0$ ; c)  $g = 0$ ,  $b = 3$  e  $\chi = -1$ .

A integral funcional que contem a contribuição de todas as topologias vem dada por<sup>2</sup>

$$\sum_{topologia} e^{-\lambda\chi} \int [dX][dg] e^{-S_{poly}}. \quad (3.7)$$

Para uma teoria que somente descreve interações de cordas abertas (que é o nosso caso) definimos a constante de acoplamento como  $g_0 = e^{\lambda/2}$ . Após um mapeamento conforme pode-se ver que o espalhamento em nível de árvore corresponde à folha-mundo com topologia de um disco ( $g = 0$  e  $b = 1$ ) e assim as amplitudes são proporcionais a  $1/g_0^2$ .

## 3.2 Matriz S

Na presente seção apresentamos como calcular a matriz S de  $m$  estados da corda. Para cada corda externa com momento  $k_i$  e estado  $\Lambda_i$  corresponde um operador de vértice  $\hat{V}_{\Lambda_i}(k_i)$ . Assim o elemento de matriz S, de  $m$  cordas que se espalham, é obtido da função de correlação de operadores de vértice:

$$A^{(m)}(\Lambda_i, k_i) = \sum_{topologias} g_0^{-2\chi} \frac{1}{Vol} \int [dX][dg] e^{-S_{Poly}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(k_i), \quad (3.8)$$

onde “Vol” representa o volume (infinito) das trajetórias de calibre que são equivalentes.

A fórmula (3.8) leva em consideração todas as ordens perturbativas de um espalhamento (nível de árvore, 1-“loop”, 2-“loops”, etc) (Veja a figura 3.3).

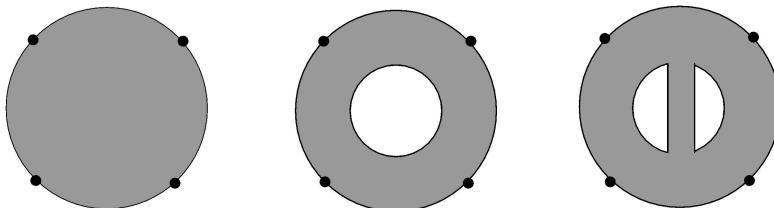


Figura 3.3: Superfícies de Riemann com operadores de vértice inseridos.

<sup>2</sup>A expressão em (3.7) é formalmente infinita. Na seção 3.2 será visto que devido à invariância de calibre da teoria a expressão (3.7) deve ser dividida pelo volume das trajetórias de calibre e assim obteremos com um valor finito para cada uma das integrais de caminho.

Neste trabalho as amplitudes de espalhamento que consideraremos são todas em nível de árvore.

Por se tratar de uma teoria com invariância de calibre (difeomorfismo e transformação de Weyl), para fixar o calibre, e portanto simplificar “*Vol*” em (3.8), é necessário usar o método de Faddeev-Popov e logo introduzir campos fantasmas nessa expressão. Nesta dissertação não foi estudado este assunto. Nos conformaremos em mencionar o resultado que surge no caso das amplitudes em nível de árvore, após usar o calibre conforme e realizar a integração funcional dos campos fantasmas: a dimensão crítica (isto é, aquele em que não há anomalia de Weyl) é  $D=26$ . E a fixação de calibre nos permite ficar com qualquer superfície topologicamente equivalente a um disco. Em particular vamos escolher o semiplano superior (veja figura 3.4).

Na continuação apresentamos três representações equivalentes em nível de árvore para o espalhamento de cinco cordas abertas. A figura 3.4 mostra como a folha-mundo é mapeada (por meio de um mapeamento conforme) no disco ou sobre o semi-plano superior. As pernas externas aparecem como inserção na borda. Na teoria de campos conforme em  $d=2$  as inserções são operadores de vértices.

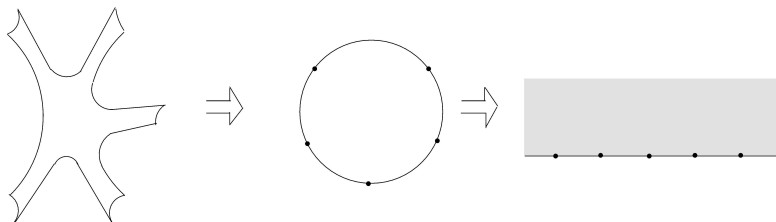


Figura 3.4: Diagrama com três folhas mundo que descrevem o espalhamento de cinco cordas abertas. As três superfícies são topologicamente equivalentes e fornecem uma mesma contribuição na integral funcional (3.8).

Após usar o calibre conforme em (3.8) a amplitude de espalhamento da corda aberta fica dada por

$$A^{(m)} = \frac{1}{g_0^2} \frac{1}{Vol(SL(2; \mathbf{R}))} \int [dX] e^{-S'_{Poly}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(k_i), \quad (3.9)$$

onde  $S'_{Poly} = (1/2\pi\alpha') \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu$  e  $SL(2; \mathbf{R})$  é o grupo projetivo, corresponde à trans-

formação

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \quad (3.10)$$

com  $ad - bc = 1$  ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são parâmetros reais). O volume do grupo projetivo,  $Vol(SL(2; \mathbf{R}))$ , é infinito (de tal forma que (3.9) é finita) e vem dado por

$$Vol(SL(2; \mathbf{R})) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_a dx_b dx_c}{|(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)|}. \quad (3.11)$$

### 3.3 Operadores de Vértices

Aqui discutiremos um importante método que permite obter o espectro da corda aberta. Usamos o mapeamento entre estados e operadores para substituir o estado pelo operador de vértice. Iniciamos com o estado fundamental que corresponde ao táquion. Seu operador de vértice vem dado por

$$\hat{V} = g_0 \int_{\partial M} ds : e^{ik \cdot \hat{X}} : , \quad (3.12)$$

onde  $g_0$  é a constante de acoplamento de corda aberta. Note que a integral (3.12) é realizada na borda de  $M$ , onde  $M$  é inicialmente um disco no plano complexo. Após mapear esse disco no semi-plano complexo superior  $\partial M$  se tornará a reta real (veja a figura 3.4). Em nossos cálculos trabalharemos, então, com esta última borda.

Precisamos conhecer o peso conforme do operado  $: e^{ik \cdot \hat{X}} :$ . Usamos o propagador (2.56) para fazer a contração de Wick. O resultado da “OPE” de  $: e^{ik \cdot \hat{X}} :$  com  $\hat{T}$ , dado em (2.13), é

$$\hat{T}(z) : e^{ik \cdot \hat{X}(w, \bar{w})} : = \frac{\alpha' k^2}{4} : e^{ik \cdot \hat{X}} : \left( \frac{1}{z - w} + \frac{1}{z + \bar{w}} \right)^2 + \dots \quad (3.13)$$

Como o operador  $: e^{ik \cdot \hat{X}(w, \bar{w})} :$  vive na reta real temos que  $w = \bar{w}$ . Então (3.13) torna-se

$$\hat{T}(z) : e^{ik \cdot \hat{X}(w)} : = \frac{\alpha' k^2}{(z - w)^2} : e^{ik \cdot \hat{X}(w)} : + \dots \quad (3.14)$$

Assim o operador  $: e^{ik \cdot \hat{X}} :$  é primário de peso  $\alpha' k^2$ . Ao inserir os operadores de vértice na integral de caminho de Polyakov é necessário que a expressão deles seja invariante de Weyl. Como a dimensão de escalonamento de  $\int_{\partial M} ds$  é  $-1$ , o peso conforme de  $: e^{ik \cdot \hat{X}} :$  teria que ser igual a 1. Portanto na expressão (3.14) temos que

$$M^2 \equiv -k^2 = -\frac{1}{\alpha'}. \quad (3.15)$$

Esta é a massa do táquion.

Agora, o operador associado ao primeiro estado excitado é

$$\hat{V} = g_0'' \zeta^\mu \int_{\partial M} ds : \partial \hat{X}_\mu e^{ik \cdot \hat{X}} : \quad (3.16)$$

onde  $\zeta^\mu$  é o vetor de polarização e  $g_0''$  é a constante de normalização que será estudada no próximo capítulo. Realizando um procedimento similar ao visto em (3.14) e (3.15) temos que neste caso a invariância de Weyl requer que  $M^2 = -k^2 = 0$ . Portanto trata-se do fóton. Vejamos se o operador de vértice do fóton é primário. Para isso nós calculamos

$$\hat{T}(z) \zeta^\mu : \partial \hat{X}_\mu e^{ik \cdot \hat{X}} : = 4\alpha' \frac{ik^\mu \zeta_\mu}{(z-w)^3} : e^{ik \cdot \hat{X}} + \dots \quad (3.17)$$

Então, para que o operador de vértice do fóton seja primário o vetor de polarização deve satisfazer a condição  $\zeta^\mu k_\mu = 0$ . Isto não é outra coisa que o requisito que satisfaz o vetor de polarização quando trabalhamos no calibre de Lorentz ( $\partial_\mu A^\mu$ ).

Finalmente examinemos o operador de vértice do segundo estado excitado (o estado de Fierz-Pauli):

$$\hat{V} = g_0' \zeta^{\mu\nu} \int_{\partial M} ds : \partial \hat{X}_\mu \partial \hat{X}_\nu e^{ik \cdot \hat{X}} :, \quad (3.18)$$

onde  $\zeta^{\mu\nu}$  é o tensor de polarização e  $g_0'$  é a constante de normalização, a que será estudada no capítulo 4.

Repetindo o procedimento anterior e obtemos que para que o operador de vértice seja primário o tensor polarização tem que satisfazer a condição  $\zeta^{\mu\nu} k_\mu = \zeta^{\mu\nu} k_\nu = 0$  e da invariância de Weyl vem que  $M^2 = -k^2 = \frac{1}{\alpha'}$ .

# Capítulo 4

## Amplitudes em Nível de Árvore

No presente capítulo vamos calcular algumas amplitudes de espalhamento de cordas abertas em nível de árvore. Também vamos determinar a constante de normalização do operador de vértice do campo de Fierz-Pauli e vamos estudar as simetrias da amplitude de espalhamento de cordas abertas não massivas: invariância cíclica, invariância de calibre e invariância sob um “twist”.

### 4.1 Algumas funções de correlação e a amplitude de espalhamento

Nesta seção vamos calcular funções de correlação na teoria de campos conforme com bordas, pois estamos interessados nas amplitudes de espalhamento de cordas abertas.

A função de Green (de um campo escalar conforme) que satisfaz a condição de contorno de Neumann no semi plano complexo superior, dada em (2.55), vem dada por[3][4]<sup>1</sup>

$$G(z, \bar{z}; w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - w|^2 + \frac{1}{2\pi} \ln|z - \bar{w}|^2. \quad (4.1)$$

Em (3.9) foi visto que a amplitude de espalhamento vem dada essencialmente pela função de correlação de operadores de vértice. No caso de  $n$  táquions ela vem dada por

$$A(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{g_0^2 \text{Vol}(SL(2; \mathbf{R}))} \int [dX] e^{-S'_{Poly}} \prod_{j=1}^n V(x_j, k_j), \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Este resultado já foi apresentado, num formato levemente diferente, na equação (2.55).

onde o operador de vértice do táquion já foi visto em (3.12) e vem dado por

$$\hat{V} = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{V}(x, k) = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx : e^{ik \cdot \hat{X}} : , \quad (4.3)$$

onde  $k^2 = 1/\alpha'$ .

Assim a expressão (4.2) pode ser reescrita como

$$A(k_1, \dots, k_n) = \frac{g_0^{n-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{R}))} \int \prod_{j=1}^n dx_j \langle \hat{V}(x_1, k_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n) \rangle, \quad (4.4)$$

onde

$$\langle \hat{V}(x_1, k_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n) \rangle = \int [dX] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X\right) \exp\left(i \sum_{j=1}^n k_j \cdot X(x_j)\right), \quad (4.5)$$

onde, desta vez,  $M$  representa o semi-plano superior complexo.

O cálculo desta integral é bem conhecido em teoria de campos. Ela vem dada a partir da igualdade[13]

$$\begin{aligned} \int [dX] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X + iJ \cdot X\right) &= iC(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \times \\ &\times \exp\left(\frac{\pi\alpha'}{2} \int_M d^2z d^2z' \times \right. \\ &\left. \times J(z, \bar{z}) G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J(z', \bar{z}')\right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $G(z, \bar{z}; z', \bar{z}')$  é o propagador ( $G(x, x') = -1/\partial\bar{\partial}$ ) dado em (4.1) e  $J^\mu(x) = \sum_{j=1}^n k_j^\mu \delta(x - x_j)$  é a fonte.  $C$  é a constante de normalização<sup>2</sup> a qual inclui o fator  $\det^{-1/2}(\partial\bar{\partial})$ . A função delta representa a conservação do momento. Ela surge da contribuição do modo zero  $x^\mu$  na integração funcional em  $X^\mu$ [3][4].

Portanto a função de correlação em (4.5) pode ser reescrita como[3]

$$\langle \hat{V}(x_1, k_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n) \rangle = iC(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \exp\left(\alpha' \sum_{j,l=1}^n k_j \cdot k_l \ln|x_j - x_l|\right). \quad (4.7)$$

<sup>2</sup>Veja mais detalhes sobre a determinação desta constante na seção 4.2.



Os termos em que  $j = l$  (os que dão uma contribuição que não depende de  $x_j$  nem  $k_j^\mu$ ) devem ser desconsiderados na hora de implementar um ordenamento normal[3]. Portanto fica

$$\left\langle \hat{V}(x_1, k_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n) \right\rangle = iC(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \prod_{j < l} |x_j - x_l|^{2\alpha' k_j \cdot k_l}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.4) obtemos, então, que a amplitude de espalhamento para  $n$  táquions torna-se

$$A(k_1, k_2, \dots, k_n) = iC(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \frac{g_0^n}{Vol(SL(2, \mathbf{R}))} \int \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{j < l} |x_j - x_l|^{2\alpha' k_j \cdot k_l}. \quad (4.9)$$

Aqui a constante  $C$  absorveu o fator  $g_0^2$ .  $C$  será determinada na seção 4.2.

Há também uma outra forma, mais direta de chegar ao resultado em (4.8). Esta consistiria em usar a versão do teorema de Wick (em (2.42)) para o caso da corda aberta:

$$: \hat{F} :: \hat{G} := \exp \left( -2\alpha' \int dx_1 dx_2 \ln |x_1 - x_2| \frac{\delta}{\delta X_F^\mu(x_1)} \frac{\delta}{\delta X_{G\mu}(x_2)} \right) : \hat{F} \hat{G} :. \quad (4.10)$$

Agora vamos determinar a função de correlação de operadores de vértice do primeiro estado excitado:

$$\hat{V}(x, k, \zeta) = \zeta^\mu : \partial_x \hat{X}_\mu e^{ik \cdot \hat{X}(x)} :, \quad (4.11)$$

onde  $\zeta^\mu$  é o vetor polarização. Aqui vamos usar um truque. Reescrevemos o operador em (4.11) da seguinte forma[7]

$$\hat{V}(x, k, \zeta) = \left[ : e^{ik \cdot \hat{X}(x) + \zeta^\mu \partial_x \hat{X}_\mu(x)} : \right] \Big|_{\text{linear em } \zeta^\mu}. \quad (4.12)$$

Nos cálculos, quando for necessário expandir a exponencial consideraremos somente os termos lineares em  $\zeta^\mu$ . Das formulas (4.10) e (4.12) é possível determinar a função de correlação para  $n$  bósons vetoriais sem massa, a qual é dada por[7][8]

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{V}(x_1, k_1, \zeta_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n, \zeta_n) \right\rangle &= iC(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \cdots + k_n) g_0^{n''} \prod_{n \geq i > j \geq 1} |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \\ &\times \exp\left( \sum_{i > j} \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right) \Big|_{\text{linear em } \zeta^\mu}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Salientamos novamente que no uso da expressão em (4.13) consideramos apenas os termos lineares em  $\zeta_j^\mu$ .

A fórmula (4.13) será usada na seção 4.4 para calcular a amplitude de três e de quatro bósons de calibre.

No cálculo da função de correlação dos outros estados excitados usamos o mesmo truque anterior[7]. Por exemplo, para o operador de vértice

$$\hat{V}(x, k, \zeta) = \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_n} : \partial_x \hat{X}_{\mu_1} \cdots \partial_x \hat{X}_{\mu_n} e^{ik \cdot \hat{X}(x)} : , \quad (4.14)$$

usamos a expressão

$$\hat{V}(x, k, \zeta) = \left[ : e^{ik \cdot \hat{X}(x) + \zeta^{\mu_1} \partial_x \hat{X}_{\mu_1}(x) + \cdots + \zeta^{\mu_2} \partial_x \hat{X}_{\mu_2}(x)} : \right] \Big|_{\text{linear}}, \quad (4.15)$$

onde, após considerarmos os termos lineares em  $\zeta_j^{\mu_j}$ , devemos fazer a identificação  $\zeta_j^{\mu_1 \mu_2} = \zeta_j^{\mu_1} \zeta_j^{\mu_2}$ .

## 4.2 Amplitude de Veneziano

Nesta seção nós propomos encontrar a amplitude de espalhamento de quatro táquions com o apropriado fator de normalização. Ela corresponde à amplitude que historicamente ficou conhecida como “Amplitude de Veneziano”.

Relembramos que amplitude de espalhamento para  $n$  táquions vem dada por

$$A(k_1; \cdots; k_n) = \frac{C}{\text{Vol}(SL(2; \mathbf{R}))} \int \prod_{i=1}^n d x_i \left\langle \hat{V}(x_1, k_1) \cdots \hat{V}(x_n, k_n) \right\rangle, \quad (4.16)$$

onde  $C$  é a constante de normalização e  $\text{Vol}(SL(2; \mathbf{R}))$  é o volume (infinito) invariante sob transformações  $SL(2; \mathbf{R})$ , definido em (3.11)<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Pode-se provar que o elemento de volume em (3.11), que aparecerá novamente em (4.58) e (4.59), permanece invariante sob transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  (dada em (3.10)) em  $x_a$ ,  $x_b$  e  $x_c$  com os mesmos parâmetros.

A integral que aparece em (4.16) é divergente pois o integrando dela é invariante sob transformações  $SL(2; \mathbf{R})$  (com os mesmos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ) nas variáveis  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e, tal como foi mencionado anteriormente, o volume invariante do grupo  $SL(2; \mathbf{R})$  é infinito. Mas a expressão completa da amplitude em (4.16) é finita. O valor dela pode ser obtido realizando a integração em (4.16) somente em  $n - 3$  das  $n$  variáveis de integração, fixando as outras três variáveis de integração em valores arbitrários (distintos) reais e suprimindo o fator  $Vol(SL(2; \mathbf{R}))$ [8]. É importante, na hora de fixar essas três variáveis, escolher todos os casos em que elas estejam distribuídas em ordem ciclicamente não equivalente. Isto ficará mais claro nos cálculos a seguir.

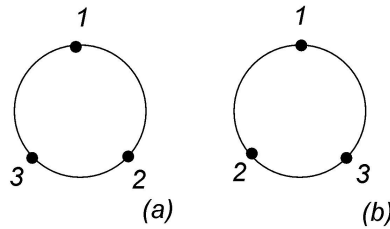


Figura 4.1: As duas ordens ciclicamente não equivalentes para três cordas abertas.

Vamos começar nossos cálculos pela amplitude de espalhamento de três táquions. Seguindo o procedimento indicado anteriormente quando  $n = 3$  em (4.16) fica:

$$A^{(3)}(k_1; k_2; k_3) = Cg_0^3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \left\langle : e^{ik_1 \cdot \hat{X}(x_1)} :: e^{ik_2 \cdot \hat{X}(x_2)} :: e^{ik_3 \cdot \hat{X}(x_3)} : \right\rangle + (k_2 \longleftrightarrow k_3), \quad (4.17)$$

Cada operador de vértice contribui com um fator  $g_0$ . O primeiro e o segundo termo de (4.17) são representados, respectivamente, pela figura 4.1 (a) e figura 4.1 (b). Usamos a expressão (4.8) com  $n = 3$  para determinar a função de correlação em (4.17). Fica:

$$A^{(3)}(k_1; k_2; k_3) = iCg_0^3(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3) \times (x_1 - x_2)^{1+2\alpha'(k_1 \cdot k_2)}(x_1 - x_3)^{1+2\alpha'(k_1 \cdot k_3)}(x_2 - x_3)^{1+2\alpha'(k_2 \cdot k_3)} + (k_2 \longleftrightarrow k_3). \quad (4.18)$$

Para simplificar (4.18) usamos a conservação do momento  $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu = 0$  e a condição de camada massa para o táquion,  $k_i^2 = 1/\alpha'$ , e obtemos que

$$2\alpha'(k_1 \cdot k_2) = \alpha'(k_3^2 - k_1^2 - k_2^2) = -1, \quad (4.19)$$

e da mesma forma encontramos que  $2\alpha'(k_1 \cdot k_3) = -1$  e  $2\alpha'(k_2 \cdot k_3) = -1$ . Note que, então, os dois termos de (4.18) são iguais. Então a amplitude para três táquions fica dada por[4]

$$A^{(3)}(k_1; k_2; k_3) = i2Cg_0^3(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (4.20)$$

Note que a resposta efetivamente não depende de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (como era de se esperar). Agora, quando  $n = 4$ , se escolhermos fixar  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_4$ , em (4.16) fica

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= Cg_0^4(x_4 - x_3)(x_4 - x_1)(x_3 - x_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left\langle \prod_{j=1}^4 : e^{ik_j \cdot \hat{X}(x_j)} : \right\rangle + \\ &+ (k_2 \longleftrightarrow k_3). \end{aligned} \quad (4.21)$$

A amplitude (4.21) contém a soma sobre diferentes ordenamentos dos operadores de vértice. Usando a expressão (4.8) com  $n = 4$  para determinar a função de correlação, fica

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= iCg_0^4(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)(x_4 - x_3)(x_4 - x_1)(x_3 - x_1) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \prod_{j<l} |x_j - x_l|^{2\alpha'k_j \cdot k_l} + (k_2 \longleftrightarrow k_3). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora podemos fixar a posição de  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_4$  na reta real. Façamos a particular escolha  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 1$  e  $x_4 \rightarrow +\infty$ . Assim, usando a conservação do momento e a condição de camada de massa para o táquion, pode-se provar que a integral (4.22) fica dada por:

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= iCg_0^4(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_2)^{2\alpha'k_1 \cdot k_2} (1 - x_2)^{2\alpha'k_2 \cdot k_3} + (k_2 \longleftrightarrow k_3). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Na continuação introduzimos as variáveis de Mandelstam:

$$s = -(k_1 + k_2)^2, \quad u = -(k_1 + k_3)^2, \quad t = -(k_1 + k_4)^2. \quad (4.24)$$

Da conservação do momento e da condição de camada de massa,  $k_j^2 = 1/\alpha'$ , é possível mostrar que:

$$s + t + u = -\frac{4}{\alpha'}. \quad (4.25)$$

Agora, usamos que  $2\alpha'(k_i \cdot k_j) = -2 + \alpha'(k_i + k_j)^2$  e assim a amplitude (4.23) fica dada por:

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= iCg_0^4(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 (x_2)^{-2\alpha's-2} (1-x_2)^{-2\alpha't-2} + (u \longleftrightarrow s). \end{aligned} \quad (4.26)$$

A integral (4.26) pode ser reescrita como a soma de outras três integrais com os seguintes limites de integração:  $-\infty < x_2 < 0$ ,  $0 < x_2 < 1$  e  $1 < x_2 < \infty$ . Estes três intervalos fornecem as contribuições dos canais  $s$ ,  $t$  e  $u$ . Em (4.26) fica:

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= i2Cg_0^4(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ &\times [I(s, t) + I(t, u) + I(u, s)], \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde

$$I(s, t) = \int_0^1 dy y^{-\alpha s-2} (1-y)^{-\alpha t-2} = \frac{\Gamma(-\alpha's-1)\Gamma(-\alpha't-1)}{\Gamma(\alpha'u-2)}. \quad (4.28)$$

Apresentamos  $I(s, t)$  em termos de funções Gama de Euler, porque assim ela fica escrita de forma explicitamente simétrica, quando trocamos  $s$  por  $t$ , em outras palavras, as contribuições dos canais  $s$  e  $t$  são iguais ( $I(s, t) = I(t, s)$ ). Esta propriedade é conhecida como dualidade.

Vamos analisar mais detalhadamente  $I(s, t)$ . A função  $\Gamma$  possui infinitos pólos simples em  $x = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\Gamma(x) \rightarrow \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}, \quad (4.29)$$

quando  $x \rightarrow -n$ .

Quando  $s \rightarrow (n-1)/\alpha'$ ,  $I(s, t)$  se comporta como:

$$I(s, t) \rightarrow \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(-\alpha's-1+n)} \frac{\Gamma(-\alpha't-1)}{\Gamma(-\alpha't-1-n)}. \quad (4.30)$$

Aqui reescreveremos parte da contribuição da amplitude de espalhamento de quatro táquions, a partir do resultado (4.30), como:

$$I(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{P_n(\alpha't)}{n-1-\alpha's}, \quad P_0(\alpha't) = 1, \quad (4.31)$$

onde  $P_n(\alpha't)$  é um polinômio na variável  $t$  de grau  $n$ :

$$P_n(\alpha't) \equiv \frac{\Gamma(-\alpha't - 1)}{\Gamma(-\alpha't - 1 - n)} = (-\alpha't - 2)(-\alpha't - 3) \cdots (-\alpha't - n - 1), \quad (4.32)$$

para  $n > 0$ .

A formula (4.31) contém infinitos pólos simples, estes são interpretados como os quadrado da massa das partículas intermediadoras (veja a figura 4.2),  $M_n^2$ , onde

$$M_n^2 = s = \frac{1}{\alpha'}(n - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

A formula (4.33) corresponde ao espectro de massa da corda aberta.

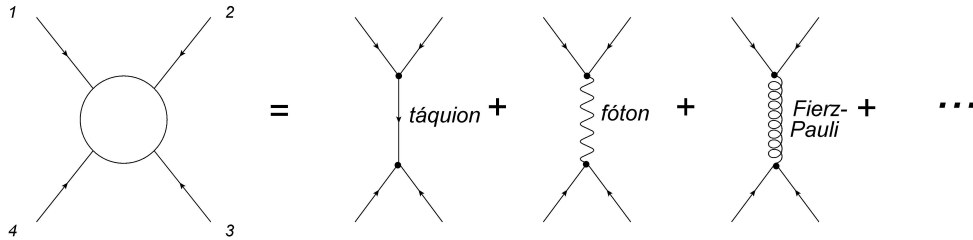


Figura 4.2: Processo de espalhamento (em nível de árvore) de quatro táquions.

Agora vamos determinar a constante de normalização  $C$  de (4.16). Do requerimento da unitariedade temos que  $A^{(4)}$  e  $A^{(3)}$  estão relacionadas por meio de[4]:

$$A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) = i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A^{(3)}(k_1; k_2; k)A^{(3)}(-k; k_3; k_4)}{-k^2 + \alpha'^{-1}} + \text{termos analíticos em } k^2 = 1/\alpha'. \quad (4.34)$$

Ao substituir (4.20) em (4.34) fica que

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= -i4C^2 g_0^6 (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \frac{\alpha'}{\alpha' s + 1} + \\
&+ \text{termos regulares em } s = -\frac{1}{\alpha'}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, gostaríamos de obter o comportamento de  $A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4)$ , dada em (4.27), quando  $s \rightarrow -1/\alpha'$ . Usando a expressão em (4.31) com  $n = 0$  e outra análoga para  $I(u, s)$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= -i4C g_0^4 (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \frac{1}{\alpha' s + 1} + \\
&+ O\left(\left(s + \frac{1}{\alpha'}\right)^0\right).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Ao comparar (4.35) com (4.36) encontramos que[4]:

$$C = \frac{1}{\alpha' g_0^2}. \tag{4.37}$$

Finalmente, substituindo (4.37) em (4.27) obtemos que a amplitude de quatro táquions vem dada por:

$$A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) = \frac{i2g_0^2}{\alpha'} (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) [I(s, t) + I(t, u) + I(u, s)], \tag{4.38}$$

onde  $I(s, t)$  vem dada em (4.28). Esta é a amplitude de Veneziano, proposta em 1968[8].

### 4.3 Constante de Normalização dos Operadores de Vértice

Nesta seção vamos ver que é possível expressar a constante de normalização dos operadores de vértice de outros estados do espectro da corda aberta, além do táquion, em termos de  $g_0$  (a constante de acoplamento das interações de táquions)[4]. Em particular vamos achar a constante de normalização do operador de vértice do segundo estado excitado. Para isto vamos usar novamente a condição de unitariedade.

Comecemos tentando determinar a constante de normalização do operador de vértice do fóton,  $g_0''$ . Para isto consideremos a amplitude de espalhamento de um fóton e dois táquions. Ela vem dada por

$$\begin{aligned}
A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) &= C g_0'' g_0^2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \times \\
&\times \left\langle : e^{ik_1 \cdot X(x_1) + \zeta_1^\mu \partial X_\mu(x_1)} :: e^{ik_2 \cdot X(x_2)} :: e^{ik_3 \cdot X(x_3)} : \right\rangle \Big|_{\text{linear em } \zeta_1} + \\
&+ (k_2 \longleftrightarrow k_3). \tag{4.39}
\end{aligned}$$

A função de correlação é obtida de forma análoga ao realizado na seção 4.1. Assim pode-se provar que a expressão (4.39) torna-se

$$\begin{aligned}
A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) &= iC g_0'' g_0^2 (x_3 - x_2)^{2\alpha'(k_2 \cdot k_3) + 1} (x_3 - x_1)^{2\alpha'(k_1 \cdot k_3) + 1} (x_2 - x_1)^{2\alpha'(k_1 \cdot k_2) + 1} \times \\
&\times \left\{ -i(2\alpha') \frac{(k_2 \cdot \zeta_1)}{(x_2 - x_1)} - i(2\alpha') \frac{(k_3 \cdot \zeta_1)}{(x_3 - x_1)} \right\} (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3) + \\
&+ (k_2 \longleftrightarrow k_3). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Da conservação do momento e das condições de camada de massa do fóton ( $k_1^2 = 0$ ) e do táquion ( $k_2^2 = k_3^2 = 1/\alpha'$ ) vem que

$$(k_2 \cdot k_3) = -\frac{1}{\alpha'}, \quad (k_1 \cdot k_3) = 0, \quad (k_1 \cdot k_2) = 0. \tag{4.41}$$

Substituímos o resultado (4.41) em (4.40) e usamos a condição de estado físico,  $(k_1 \cdot \zeta_1) = 0$ , e encontramos que

$$A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = iC g_0'' g_0^2 (k_2 \cdot \zeta_1 + k_3 \cdot \zeta_1) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3) = 0. \tag{4.42}$$

Na última passagem usamos a conservação do momento e a condição de estado físico. Como a amplitude de espalhamento (4.42) é nula não é possível determinar a constante  $g_0''$ . A partir de uma condição de unitariedade como aquela em (4.34), considerando o polo  $k^2 = 0$ . Isto significa que deveríamos buscar  $g_0''$  usando a condição de unitariedade (4.34) para a amplitude de quatro e de três fótons. O resultado é que[4]

$$g_0'' = \frac{g_0}{\sqrt{2\alpha'}}. \tag{4.43}$$

Não provaremos isto aqui. Em contrapartida vamos determinar a constante de normalização do operador de vértice do segundo estado excitado (partícula de Fierz-Pauli).



Para isso consideremos a amplitude de espalhamento de uma partícula de Fierz-Pauli e dois táquions

$$\begin{aligned}
A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) &= C g'_0 g_0^2 (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \times \\
&\times \left\langle : e^{ik_1 \cdot X(x_1) + \zeta_1^\mu \partial X_\mu(x_1) + \zeta_1^\nu \partial X_\nu(x_1)} :: e^{ik_2 \cdot X(x_2)} :: e^{ik_3 \cdot X(x_3)} : \right\rangle + \\
&+ (k_2 \longleftrightarrow k_3), \tag{4.44}
\end{aligned}$$

onde  $g'_0$  é a constante de normalização do operador de vértice do estado de Fierz-Pauli. Após calcular a função de correlação temos que

$$\begin{aligned}
A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) &= i C g'_0 g_0^2 (x_3 - x_2)^{2\alpha'(k_2 \cdot k_3) + 1} (x_3 - x_1)^{2\alpha'(k_1 \cdot k_3) + 1} (x_2 - x_1)^{2\alpha'(k_1 \cdot k_2) + 1} \times \\
&\times (2\alpha)^2 \left\{ \frac{(k_2^\mu k_2^\nu \zeta_{1\mu\nu})}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{(k_3^\mu k_3^\nu \zeta_{1\mu\nu})}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{(k_2^\mu k_3^\nu \zeta_{1\mu\nu})}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k_2^\nu k_3^\mu \zeta_{1\mu\nu})}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} \right\} (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3) + \\
&+ (k_2 \longleftrightarrow k_3). \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Da condição de estado físico temos que  $k_1^\mu \zeta_{1\mu\nu} = k_1^\nu \zeta_{1\mu\nu} = 0$ , e da conservação do momento temos que

$$(k_2 \cdot k_3) = -\frac{3}{2\alpha'}, \quad (k_1 \cdot k_3) = \frac{1}{2\alpha'}, \quad (k_1 \cdot k_2) = \frac{1}{2\alpha'}. \tag{4.46}$$

Com isto a amplitude torna-se

$$A^{(3)}(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = \frac{i g'_0 (2\alpha')^2}{\alpha'} \zeta_1^{\nu\mu} (k_{2\mu} k_{3\nu} + k_{3\mu} k_{2\nu}) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3), \tag{4.47}$$

onde já foi substituído o valor da constante  $C$  achada em (4.37).

Para o pólo  $\alpha'^{-1}$  a condição de unitariedade (aplicada à amplitude de Veneziano) vem dada por

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A^{(3)}(k_1; k_2; k)^{\mu\nu} A^{(3)}(-k; k_3; k_4)_{\mu\nu}}{-k^2 - \alpha'^{-1}} + \\
&+ \text{termos analíticos em } k^2 = -1/\alpha'. \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Para usarmos a fórmula (4.47) em (4.48) retiramos o tensor de polarização da expressão de  $A^3$  e assim aparecem  $A^{(3)}(k_1; k_2; k)^{\mu\nu}$  e  $A^{(3)}(-k; k_3; k_4)_{\mu\nu}$ . A amplitude de espalhamento

(4.47) está na camada de massa, mas quando usamos a condição de unitariedade há mais de uma expressão que podemos usar para essas expressões cinemáticas. Por isto acrescentamos nelas o termo  $\lambda\eta^{\mu\nu}$ . Ao acrescentarmos este termo na contribuição dos momentos em (4.47) a amplitude não é alterada, pois ele é contraído com o tensor polarização. Portanto escrevemos a condição de unitariedade (4.48) como

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= -i16(g'_0\alpha')^2 \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{(k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu + \lambda\eta^{\mu\nu})(k_{3\mu}k_{4\nu} + k_{4\mu}k_{3\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu})}{-k^2 - \alpha'^{-1}} \\
&\quad \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k)(2\pi)^{26} \delta^{26}(-k + k_3 + k_4) + \\
&\quad + \text{termos analíticos em } k^2 = -1/\alpha'.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Após contrairmos os termos de (4.49) usamos a relação  $2\alpha'k_i \cdot k_j = -2 + \alpha'(k_i + k_j)^2$ . Em seguida escrevemos (4.49) em termos das variáveis de Mandelstam definidas em (4.24) e consideramos o caso em que  $s \sim 1/\alpha'$ . Depois destes procedimentos simples encontramos que

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= -i16g_0'^2\alpha'(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\
&\quad \times \left[ \alpha'^2 t^2 + 5\alpha' t + \frac{13}{2} - 6\alpha' \lambda + 26\alpha'^2 \lambda^2 \right] \frac{1}{\alpha' s - 1} + \\
&\quad + \text{termos regulares em } s = \frac{1}{\alpha'}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Usando as expressões (4.38) e (4.31) com  $n = 2$  encontramos que a amplitude de Veneziano se comporta como

$$\begin{aligned}
A^{(4)}(k_1; k_2; k_3; k_4) &= -\frac{i2g_0'^2}{\alpha'} (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\
&\quad \times \left[ \alpha'^2 t^2 + 5\alpha' t + 6 \right] \frac{1}{\alpha' s - 1} + O\left( \left( s + \frac{1}{\alpha'} \right)^0 \right).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Comparamos as equações (4.50) e (4.51) e assim podemos encontrar o valor de  $\lambda$ : ele deve satisfazer a expressão  $26\alpha^2\lambda^2 - 6\alpha\lambda + 1/2 = 0$ . Encontramos também o valor da constante de normalização  $g'_0$ , a que depende somente da constante de acoplamento  $g_0$ . Obtemos

$$g'_0 = \frac{g_0}{2\sqrt{2}\alpha'}. \tag{4.52}$$

## 4.4 Amplitude de Espalhamento de Três e Quatro Bósons de Calibre

Aqui vamos calcular a amplitude de espalhamento de três e quatro bósons de calibre. A fórmula da função de correlação dos correspondentes operadores de vértice já foi discutida na seção 4.1. Substituindo a expressão de (4.13) em (4.4) temos que a amplitude de espalhamento de  $n$  bósons de calibre vem dada por

$$\begin{aligned}
A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; \dots; k_n, \zeta_n) &= i(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \frac{g_0''^{n-2}}{\text{Vol}(SL(2, \mathbf{R}))} \times \\
&\times \int \prod_{j=1}^n dx_j \prod_{n \geq i > j \geq 1} |x_i - x_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \times \\
&\times \exp\left( \sum_{i>j} \frac{\alpha' \zeta_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i \neq j} \frac{\alpha' k_i \cdot \zeta_j}{(x_i - x_j)} \right) \Big|_{\text{linear em } \zeta^\mu},
\end{aligned} \tag{4.53}$$

onde  $g_0''$  está relacionado com  $g_0$  por meio de (4.43).

Usemos (4.53) para determinar a fórmula de amplitude de três pontos. Na expansão da exponencial consideramos somente os termos lineares em  $\zeta^\mu$ . Note que temos termos do tipo  $(\zeta \cdot \zeta)(k \cdot \zeta)$  e  $(k \cdot \zeta)(k \cdot \zeta)(k \cdot \zeta)$ . Da conservação do momento e da condição de camada de massa,  $k_j^2 = 0$ , vem que

$$\begin{aligned}
k_1^\mu &= -(k_2 + k_3)^\mu, \\
k_1^2 &= (k_2 + k_3)^2 = 2k_2 \cdot k_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

e da mesma forma para os outros  $k_i \cdot k_j$ . Assim a amplitude de três pontos vem dada por [8][5]

$$\begin{aligned}
A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3) &= -i(2\alpha')^2 g_0'' [(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\
&\quad + (2\alpha')(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)] \times \\
&\times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Note que os termos  $(\zeta \cdot \zeta)(k \cdot \zeta)$  reproduzem a amplitude de Yang-Mills de três pontos.

De maneira similar podemos determinar a amplitude de quatro pontos. Aqui usamos as variáveis de Mandelstam  $s$ ,  $t$  e  $u$  definidas pelas fórmulas de (4.24). A conservação do

momento e a condição de camada de massa implicam que  $s + t + u = 0$ . Vamos escrever a amplitude do canal  $s$ - $t$ , isto é, aquela em que as cordas externas estão localizadas no disco em ordem horária (1234). Da formula (4.53) para  $n = 4$  é possível encontrar a amplitude de quatro pontos, a que vem dada por[7]

$$A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3, k_4, \zeta_4) = \frac{\Gamma(-\alpha's - 1)\Gamma(-\alpha't - 1)}{\Gamma(\alpha'u + 2)} K(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3; k_4, \zeta_4), \quad (4.56)$$

onde o termo cinemático é dado por

$$\begin{aligned} K(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3; k_4, \zeta_4) = & ig_0''^2 (\alpha's + 1) (\alpha't + 1) (\alpha'u + 1) \times \\ & \times \left\{ 2\alpha'^2 s \{ (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3) [(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2)] + \right. \\ & + \frac{1}{3} [(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) - (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)] [(\zeta_4 \cdot k_1) - (\zeta_4 \cdot k_2)] \} + \\ & + 2\alpha'^2 t \{ (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) [(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_3) + (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2)] + \\ & + \frac{1}{3} [(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2) - (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)] [(\zeta_4 \cdot k_3) - (\zeta_4 \cdot k_2)] \} + \\ & + 2\alpha'^2 u \{ (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_2) [(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_3)] + \\ & + \frac{1}{3} [(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)] [(\zeta_4 \cdot k_3) - (\zeta_4 \cdot k_1)] \} + \\ & + \alpha'^2 \frac{st}{(\alpha'u + 1)} [(\zeta_1 \cdot \zeta_3) - \alpha'(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)] [(\zeta_2 \cdot \zeta_4) - \alpha'(\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_2)] + \\ & + \alpha'^2 \frac{tu}{(\alpha's + 1)} [(\zeta_1 \cdot \zeta_2) - \alpha'(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1)] [(\zeta_3 \cdot \zeta_4) - \alpha'(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_3)] + \\ & + \alpha'^2 \frac{su}{(\alpha't + 1)} [(\zeta_1 \cdot \zeta_4) - \alpha'(\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_1)] [(\zeta_2 \cdot \zeta_3) - \alpha'(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)] + \\ & - \alpha'^2 s [(\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_3) + \\ & + (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_4)] + \\ & + \alpha'^2 t [(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + \\ & + (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_1)] + \\ & + \alpha'^2 u [(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_2) + (\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_4) + \\ & + (\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + (\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)] \} \times \\ & \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (4.57)$$

## 4.5 Propriedades da Amplitude de Espalhamento

Nesta seção apresentaremos três propriedades importantes que satisfazem as amplitudes de espalhamento de cordas abertas não massivas (em nível de árvore). Estas são invariância cíclica, invariância de calibre e simetria de “twisting” (ou paridade da folha mundo).

Estas propriedades são importantes para verificar se o resultado de cálculos longos, como aquele da seção 4.4 ao passar de (4.53) (com  $n = 4$ ) para (4.57), estão corretos.

### 4.5.1 Invariância Cíclica

Esta propriedade diz que a amplitude de espalhamento de  $n$  cordas abertas é invariante sob uma transformação cíclica, isto é,  $A(1, 2, \dots, n) = A(n, 1, \dots, n-1)$ <sup>4</sup> (veja figura 4.3).

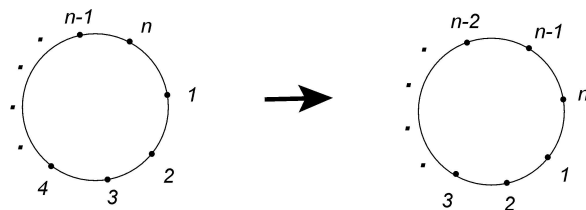


Figura 4.3: Transformação cíclica nos estados externos num processo de espalhamento de  $n$  cordas.

Nesta subseção veremos que a simetria  $SL(2, \mathbf{R})$  é fundamental para provar esta propriedade. Vejamos:

A amplitude de espalhamento de  $n$  cordas abertas não massivas dispostas no disco no ordenamento  $(1, 2, \dots, n)$  (no sentido horário) vem dada por

$$A(1, 2, \dots, n) \sim \int_D \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{dV_{abc}} \left\langle \hat{V}(x_1, k_1, \zeta_1) \hat{V}(x_2, k_2, \zeta_2) \cdots \hat{V}(x_n, k_n, \zeta_n) \right\rangle, \quad (4.58)$$

e já apareceu em (3.11) num formato um tanto diferente (mas equivalente). O volume de integração  $D$  corresponde a  $\mathbf{R}^n$  com a restrição  $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ .

Usamos “ $\sim$ ” porque nesta seção não precisamos nos preocupar com as constantes que acompanham a expressão da amplitude. Em (4.58)  $dV_{abc}$  é o elemento de volume do grupo

<sup>4</sup>Nas subseções 4.5.1 e 4.5.2 estaremos usando a notação  $A(k_1, \zeta_1; \dots; k_n, \zeta_n) = A(1, \dots, n)$ .

$SL(2, \mathbf{R})^5$ , definindo por

$$dV_{abc} = \frac{dx_a dx_b dx_c}{|(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)|} \quad (4.59)$$

Ele apareceu no integrando da equação (3.11)

As coordenadas  $x_a$ ,  $x_b$  e  $x_c$  podem ser escolhidas de maneira arbitrária ao substituir (4.59) em (4.58), desde que elas sejam diferentes. A forma da transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  de uma variável dada já foi apresentada na fórmula (3.10), e a repetimos na continuação:

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d}, \quad (4.60)$$

onde  $ad - bc = 1$  (sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  reais). Daqui vem que

$$dx = \frac{dx'}{(cx' + d)^2}. \quad (4.61)$$

Considerando variáveis  $x_a$ ,  $x_b$  e  $x_c$  que transformam de acordo a (4.60) (com os mesmos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ) não é difícil provar que o elemento de volume  $dV_{abc}$ , definido em (4.59) permanece invariante, isto é,

$$dV_{abc} = \frac{dx_a dx_b dx_c}{|(x_a - x_b)(x_b - x_c)(x_c - x_a)|} = \frac{dx'_a dx'_b dx'_c}{|(x'_a - x'_b)(x'_b - x'_c)(x'_c - x'_a)|} = dV'_{abc} \quad (4.62)$$

Agora, realizando um argumento similar àquele visto no final da seção 3.3, temos que a combinação  $dx \hat{V}(x, k, \zeta)$  deve ser invariante conforme na borda  $\partial M$  (que neste caso é a reta real). Em particular ela deve ser invariante conforme sob a transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  (4.60).

Da argumentação anterior concluímos que ao realizar uma mesma transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  em todas as  $x_i$ 's da integral em (4.58), a expressão  $dx_1 dx_2 \cdots dx_n \hat{V}(x_1, k_1, \zeta_1) \hat{V}(x_2, k_2, \zeta_2) \cdots \times \hat{V}(x_n, k_n, \zeta_n)$  permanece invariante e, em vista de que  $dV_{abc}$  também permanece invariante sob essa transformação, a integral completa de (4.58) permanece invariante.

A conclusão é que a amplitude de espalhamento em (4.58) é invariante sob uma mesma transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  em todas as variáveis de integração  $x_i$ 's.

---

<sup>5</sup>A transformação de simetria associada a este grupo já foi apresentada na seção 3.2.

No apêndice B é argumentado que sempre é possível encontrar uma transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  que leva um conjunto de pontos da reta real,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (onde  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ), a um outro conjunto de pontos  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ , onde  $x'_1 = x_n, x'_2 = x_1, \dots, x'_{n-1} = x_{n-2}$  e  $x'_n = x_{n-1}$  (veja na figura 4.4 ). Então, realizando esta específica transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  em (4.58) ficaria:

$$A(1, 2, \dots, n) \sim \int_{D'} \frac{dx'_2 \cdots dx'_n dx'_1}{dV'_{abc}} \left\langle \hat{V}(x'_2, k_1, \zeta_1) \cdots \hat{V}(x'_n, k_{n-1}, \zeta_{n-1}) \hat{V}(x'_1, k_n, \zeta_n) \right\rangle, \quad (4.63)$$

onde  $D'$  corresponde a  $R^n$  com a restrição  $x'_2 < x'_3 < \dots < x'_n < x'_1$ .

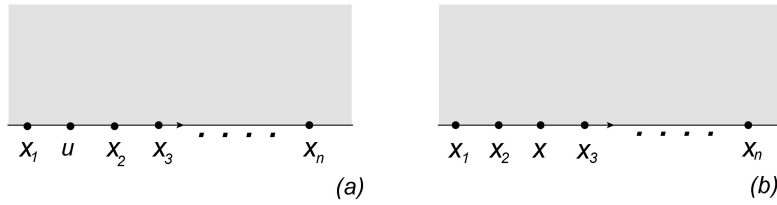


Figura 4.4: (a) Uma configuração qualquer das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  do domínio  $D$ .  
 (b) Uma configuração qualquer das variáveis  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  do domínio  $D'$ .

Mas, para o integrando em (4.63) temos  $\langle \hat{V}(x'_2, k_1, \zeta_1) \cdots \hat{V}(x'_n, k_{n-1}, \zeta_{n-1}) \hat{V}(x'_1, k_n, \zeta_n) \rangle = \langle \hat{V}(x'_1, k_n, \zeta_n) \cdots \hat{V}(x'_2, k_1, \zeta_1) \hat{V}(x'_n, k_{n-1}, \zeta_{n-1}) \rangle$ , pois devemos lembrar que está implícito um ordenamento temporal e que dentro de um ordenamento temporal de um produto de operadores, eles podem ser escritos em qualquer ordem.

Portanto, em (4.63) podemos escrever que

$$A(1, 2, \dots, n) \sim \int_{D'} \frac{dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n}{dV'_{abc}} \left\langle \hat{V}(x'_1, k_n, \zeta_n) \hat{V}(x'_2, k_1, \zeta_1) \cdots \hat{V}(x'_n, k_{n-1}, \zeta_{n-1}) \right\rangle, \quad (4.64)$$

O segundo membro de (4.64) não é outra coisa do que  $A(n, 1, \dots, n-1)$ , com o qual fica demonstrada a simetria cíclica.

## 4.5.2 Paridade da Folha-Mundo

A transformação de paridade da folha-mundo consiste na transformação de coordenada  $\sigma' = \pi - \sigma$ , onde  $\sigma \in [0, \pi]$ . Esta transformação muda a orientação da folha-mundo. Graficamente da equivale a uma “twist” do disco (veja a figura 4.5).

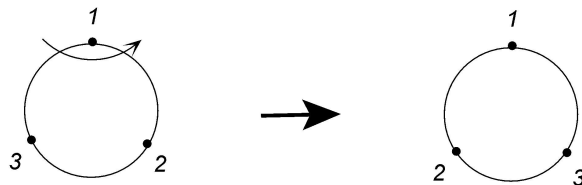


Figura 4.5: “Twist” em um dos discos associados a uma amplitude de três cordas.

A propriedade correspondente da amplitude de espalhamento estabelece que sob um “twisting” a amplitude de  $n$  cordas abertas não massivas transforma como

$$A(1, 2, 3, \dots, n) = (-1)^n A(1, n, n-1, \dots, 2), \quad (n = 3, 4, \dots). \quad (4.65)$$

Aqui faremos um esboço da demonstração desta propriedade. O caso em que  $n = 3$  pode ser provado diretamente pois a amplitude de três bósons sem massa foi encontrada na seção anterior, na fórmula (4.55). Não é difícil provar que usando a conservação do momento ( $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu = 0$ ) e a condição de estado físico ( $\zeta_1 \cdot k_1 = \zeta_2 \cdot k_2 = \zeta_3 \cdot k_3 = 0$ ) pode-se chegar a que

$$A(1, 2, 3) = -A(1, 3, 2), \quad (4.66)$$

o que comprovaria que (4.65) é válida no caso em que  $n = 3$ .

Agora, para provar que (4.65) também é válida para  $n = 4, 5, \dots$ , usaremos o fato de que, do ponto de vista de cada uma das variáveis dos canais da amplitude,  $s_{i,j} = -(k_i + k_{i+1} + \dots + k_j)^2$ <sup>6</sup>, ela admite uma expansão com um número infinito de polos simples. Por exemplo, no caso da amplitude  $A(1, 2, 3, 4)$  obtida em (4.56) e (4.57), ela

<sup>6</sup>Esta correspondem à generalização das variáveis de Mandelstam, as que aparecem no espalhamento de quatro partículas e que foram definidas em (4.24).



pode ser expandida, em analogia ao visto no caso da amplitude de quatro táquions (na seção 4.2), como

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{k_{-1}(1, 2, 3, 4)}{s + \frac{1}{\alpha'}} + \frac{k_0(1, 2, 3, 4)}{s} + \frac{k_1(1, 2, 3, 4)}{s - \frac{1}{\alpha'}} + \dots, \quad (4.67)$$

onde  $k_{-1}(1, 2, 3, 4)$ ,  $k_0(1, 2, 3, 4)$ ,  $k_1(1, 2, 3, 4)$ ,  $\dots$ , são expressões cinemáticas conhecidas, as que dependem dos momentos  $k_i$ , das polarizações  $\zeta_i$  e de  $\alpha'$ .  $s = s_{1,2} = -(k_1 + k_2)^2$  é uma das variáveis de Mandelstam, definidas em (4.24).

Alias, a generalização de (4.67) para o caso de uma amplitude de  $n$  pontos vem dada por:

$$A(1, 2, \dots, n) = \frac{k_{-1}(1, \dots, n)}{s_{1,2} + \frac{1}{\alpha'}} + \frac{k_0(1, \dots, n)}{s_{1,2}} + \frac{k_1(1, \dots, n)}{s_{1,2} - \frac{1}{\alpha'}} + \dots, \quad (4.68)$$

Analogamente, se considerarmos a amplitude  $A(1, n, n-1, \dots, 2)$  também podemos expandir ela em termos de  $s_{1,2}$ ,

$$A(1, n, n-1, \dots, 2) = \frac{k'_{-1}(1, \dots, n)}{s_{1,2} + \frac{1}{\alpha'}} + \frac{k'_0(1, \dots, n)}{s_{1,2}} + \frac{k'_1(1, \dots, n)}{s_{1,2} - \frac{1}{\alpha'}} + \dots, \quad (4.69)$$

desde que fique claro que os resíduos  $k'_p(1, \dots, n)$  são, em princípio, diferentes daqueles em (4.68).

Então, para provar a propriedade de “twisting” da amplitude (equação (4.65)), teríamos que provar que os resíduos cinemáticos de (4.68) e (4.69) estão relacionadas por

$$k'_p(1, \dots, n) = (-1)^n k_p(1, \dots, n), \quad (p = -1, 0, 1, \dots). \quad (4.70)$$

Aqui só provaremos o caso em que  $p = 0$ . Os restantes casos demandam de uma análise similar mas que não será estudada aqui.

Comecemos considerando o caso em que  $n = 4$ . Da relação de unitariedade para  $A(1, 2, 3, 4)$  (em torno do polo  $s_{1,2} = s = 0$ ) temos que[4]

$$A(1, 2, 3, 4) = i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A(1, 2, k)_\mu A(-k, 3, 4)^\mu}{k^2} + (\text{termos regulares em } s = 0). \quad (4.71)$$

Em semelhança com a relação de unitariedade para o estado de Fierz-Pauli a partir da amplitude de quatro táquions (equação (4.48)), as expressões cinemáticas  $A(1, 2, k)_\mu$  e  $A(-k, 3, 4)^\mu$  são obtidas a partir das correspondentes amplitudes de três cordas não massivas, tirando o vetor de polarização correspondente.

Ao considerar a expansão em série de Lanrent em torno de  $s = 0$ , em (4.67) fica:

$$A(1, 2, 3, 4) = \frac{k_0(1, 2, 3, 4)}{s} + (\text{termos regulares em } s = 0). \quad (4.72)$$

Portanto, vemos que comparando as expressões de  $A(1, 2, 3, 4)$ , dadas em (4.71) e (4.72), temos que

$$\frac{k_0(1, 2, 3, 4)}{s} = i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A(1, 2, k)_\mu A(-k, 3, 4)^\mu}{k^2}. \quad (4.73)$$

Agora, usando a relação de “twisting” para três cordas abertas não massivas, já confirmada em (4.66), temos que

$$A(1, 2, k)_\mu = -A(2, 1, k)_\mu \text{ e } A(-k, 3, 4)_\mu = A(-k, 4, 3). \quad (4.74)$$

Para chegar a (4.74), além de (4.66) foi usada a invariância cíclica da amplitude.

Daí que em (4.73) fica:

$$\frac{k_0(1, 2, 3, 4)}{s} = i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A(2, 1, k)_\mu A(-k, 4, 3)^\mu}{k^2}. \quad (4.75)$$

Mas o segundo membro de (4.75) não é outra coisa que o termo dominante da expressão de  $A(2, 1, 4, 3)$ , quando usada a relação de unitariedade para ela (em torno do polo  $s = 0$ ).

Mas, da propriedade cíclica temos que essa amplitude é igual a  $A(1, 4, 3, 2)$ . Disto último concluímos que esse termo é igual a  $k'_0(1, 4, 3, 2)/s$ . Comparando-o com primeiro membro de (4.75) concluímos que

$$k_0(1, 2, 3, 4) = k'_0(1, 2, 3, 4). \quad (4.76)$$

Isto mostra que (4.70) é válido quando  $p = 0$  e  $n = 4$ . Assumiremos, então, que essa relação também seja válida para os restantes valores de  $p$  com  $n = 4$ .

O caso em que  $n = 5$  inicia-se considerando a relação de unitariedade para  $A(1, 2, 3, 4, 5)$  (em torno do polo  $s_{1,2} = 0$ ).

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{A(1, 2, k)_\mu A(-k, 3, 4, 5)^\mu}{k^2} + (\text{termos regulares em } s_{1,2} = 0). \quad (4.77)$$

Das relações de “twisting” para  $n = 3$  e  $n = 4$  temos que

$$A(1, 2, k)_\mu = -A(2, 1, k)_\mu \text{ e } A(-k, 3, 4, 5)^\mu = A(-k, 5, 4, 3)^\mu \quad (4.78)$$

Realizando o mesmo procedimento feito anteriormente, quando  $n = 4$ , vamos concluir que

$$k_0(1, 2, 3, 4, 5) = -k'_0(1, 2, 3, 4, 5). \quad (4.79)$$

Isto mostra que (4.70) é válido quando  $p = 0$  e  $n = 5$ . Mais uma vez, assumiremos que essa relação também seja válida para os restantes valores de  $p$  com  $n = 5$ . Dai vem que a relação de “twisting” (equação (4.65)) também seja válida quando  $n = 5$ .

Daqui já vemos que de forma indutiva será possível provar que (4.65) é válida também para  $n = 6, 7, \dots$  e assim por diante.

### 4.5.3 Invariância de Calibre

Esta propriedade consiste em que a amplitude de espalhamento (em nível de árvore) de  $n$  cordas abertas que são bósons de calibre permanece invariante sob uma transformação  $\zeta_j \rightarrow \zeta_j + \rho_j k_i$  (onde  $\rho_j$ <sup>7</sup> é uma constante arbitrária). Isto é equivalente a provar que a amplitude em questão zera quando  $\zeta_j = k_j$ :

$$A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; \dots; k_n, \zeta_n) \Big|_{\zeta_j = k_j} = 0 \quad (\text{para } j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.80)$$

Nesta dissertação nos limitaremos a ver um exemplo de (4.80). Mais a prova dela pode-se encontrar na seção 7.1.5 de[8].

---

<sup>7</sup>Esta transformação corresponde a uma transformação de calibre, no espaço dos momentos, para a  $j$ -ésima corda envolvida no espalhamento.

Consideremos a amplitude de três bósons de calibre, dada em (4.55). Fazendo  $\zeta_1 = k_1$  ela fica

$$\begin{aligned}
A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3) \Big|_{\zeta_1=k_1} &= -i(2\alpha')^2 g [(\zeta_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot \zeta_2) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + (k_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\
&\quad + (2\alpha')(k_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)] \times \\
&\quad \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3).
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Agora, da conservação do momento ( $k_1^\mu + k_2^\mu + k_3^\mu = 0$ ) e da condição de camada de massa ( $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2$ ) é possível provar que

$$k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_3 = k_3 \cdot k_1 = 0. \tag{4.82}$$

Portanto em (4.81) fica

$$\begin{aligned}
A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3) \Big|_{\zeta_1=k_1} &= -i(2\alpha')^2 g (\zeta_3 \cdot k_1) [(\zeta_2 \cdot k_1) + (\zeta_2 \cdot k_3)] \times \\
&\quad \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3).
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Da conservação do momento vem que  $(\zeta_2 \cdot k_1) + (\zeta_2 \cdot k_3) = -(\zeta_2 \cdot k_2)$ , mas  $(\zeta_2 \cdot k_2) = 0$  condição de estado físico. Esta última é a condição (que foi vista na seção 3.3) para que o operador de vértice do fóton fosse primário. Portanto (4.83) fica como

$$A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3) \Big|_{\zeta_1=k_1} = 0. \tag{4.84}$$

# Capítulo 5

## Teoria “Segundo-quantizada” na Camada de Massa

Neste capítulo vamos discutir que as interações de cordas abertas (em nível de árvore) podem ser descritas por uma lagrangeana que contém os infinitos campos que surgem no espectro da corda (campo escalar do táquion, campo do fóton, campo de Fierz-Pauli, etc.). Estes campos estão definidos em  $D = 26$  dimensões, no espaço-tempo de Minkowski. Veremos que a lagrangeana covariante que reproduz as amplitudes de espalhamento, vistas nos capítulos 3 e 4, pode ser escrita com termos de interação puramente cúbicos. Determinaremos os coeficientes desses termos em alguns casos específicos.

Chamaremos de “teoria segundo-quantizada (na camada de massa)” a esta teoria que contém infinitos campos e que, quando quantizada, reproduz as amplitudes de espalhamento mencionadas anteriormente.

### 5.1 Teoria Cúbica

Já estudamos, nos capítulos 3 e 4, a forma da amplitude de espalhamento de  $n$  cordas abertas. Ela vem dada por

$$A^{(n)} = \frac{g_0^{n-2}}{\text{Vol}(SL(2, \mathbf{R}))} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \left\langle \prod_{j=1}^n \hat{V}_j(x_j, k_j) \right\rangle, \quad (5.1)$$

onde  $V_j(x_j, k_j)$  é o operador de vértice da  $j$ -ésima corda envolvida no espalhamento.

Na apêndice C.1 mostramos que a amplitude 5.1 pode ser reescrita por uma sequência de operadores de vértice e propagadores de acordo com a fórmula[15][8]

$$A^{(n)} = g_0^{n-2} \left\langle \phi_1 \left| \hat{V}(1, k_2) \hat{\Delta} \hat{V}(1, k_3) \cdots \hat{\Delta} \hat{V}(1, k_{n-1}) \right| \phi_n \right\rangle, \quad (5.2)$$

onde  $\hat{\Delta}$  é o propagador dado por  $1/(\hat{L}_0 - 1)$  e  $\hat{V}(1, k_n)$  é o operador de vértice de um dado estado da corda.

O interessante da fórmula (5.2) é que está explicitamente manifesta a unitariedade. Do requerimento da unitariedade segue uma propriedade importante. A amplitude de espalhamento de  $n$  cordas em nível de árvore  $1\ 2\ 3 \cdots n$  pode ser divididos em subamplitudes como  $1\ 2\ 3 \cdots P \rightarrow (P+1) \cdots n$ . O novo processo de espalhamento é intermediado por uma corda, isto é, temos um resíduo resultado da fatoração (veja a figura 5.1).

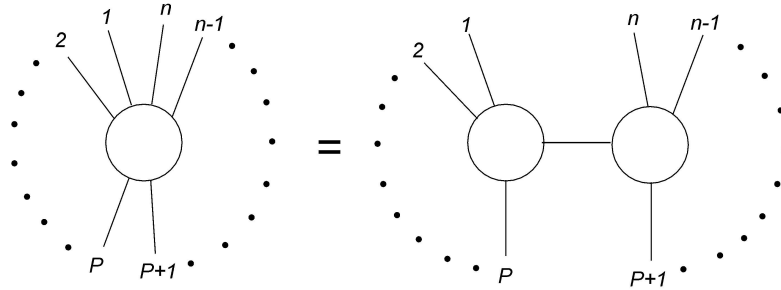


Figura 5.1: Requerimento da unitariedade em nível de árvore para a amplitude de  $n$  cordas.

Vamos precisar da amplitude de espalhamento de três cordas, então de (5.2) com  $n=3$  temos

$$A^{(3)} = g_0 \left\langle \phi_1 \left| \hat{V}(1, k_2) \right| \phi_3 \right\rangle. \quad (5.3)$$

Para exemplificar consideremos o espalhamento de 4 cordas. Da expressão 5.2 para  $n=4$  temos

$$A^{(4)} = g_0^2 \left\langle \phi_1 \left| \hat{V}(1, k_2) \hat{\Delta} \hat{V}(1, k_3) \right| \phi_4 \right\rangle. \quad (5.4)$$

Seja o estado  $|\lambda, p\rangle$  que satisfaz a relação de

$$\sum_{\lambda} |\lambda, p\rangle \langle \lambda, p| = 1. \quad (5.5)$$

Podemos inserir a unidade entre o operador de vértice e o propagador. Assim a amplitude de espalhamento de quatro cordas pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A^{(4)} &= g_0^2 \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \langle \phi_1 | \hat{V}(1, k_2) | \lambda_1, p_1 \rangle \langle \lambda_1, p_1 | \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + \hat{M}^2} | \lambda_2, p_2 \rangle \times \\ &\quad \times \langle \lambda_2, p_2 | \hat{V}(1, k_3) | \phi_4 \rangle, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $\hat{M}^2$  é a massa de ressonância e  $p_1^\mu = (k_1 + k_2)^\mu$ ,  $p_2^\mu = (k_3 + k_4)^\mu$ . Do operador de massa ao quadrado segue que

$$\hat{M}^2 |\lambda, p\rangle \equiv M_\lambda^2 |\lambda, p\rangle. \quad (5.7)$$

Das expressões (5.7), (5.6) e da relação  $\langle \lambda_1, p_1 | | \lambda_2, p_2 \rangle = \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{p_1, p_2}$  implica que

$$\begin{aligned} A^{(4)} &= g_0^2 \sum_{\lambda_1} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + M_{\lambda_1}^2} \langle \phi_1 | \hat{V}(1, k_2) | \lambda_1, p_1 \rangle \times \\ &\quad \times \langle \lambda_1, p_1 | \hat{V}(1, k_3) | \phi_4 \rangle, \end{aligned} \quad (5.8)$$

Observe que temos infinitos pólos simples. Estes corresponde a propagação de uma corda intermediadora. Análoga ao que vimos para a amplitude de Veneziano (veja figura 4.2).

Veja que o resíduo da amplitude de espalhamento (5.8) vem dado por

$$Res[A^{(4)}] = g^2 \sum_{\lambda_1} \langle \phi_1 | \hat{V}(1, k_2) | \lambda_1, p_1 \rangle \langle \lambda_1, p_1 | \hat{V}(1, k_3) | \phi_4 \rangle. \quad (5.9)$$

Note que o resíduo é constituído de duas amplitude de três cordas do tipo (5.3), então a amplitude de 5.8 não tem termos analíticos em  $(k_1 + k_2)^2$ . Assim vemos que a amplitude de quatro cordas é constituída apenas de vértice cúbico, ou seja, não possui nenhum vértice quártico veja a figura 5.2. De forma análoga podemos mostrar a mesmo para a amplitude de  $n$  cordas.

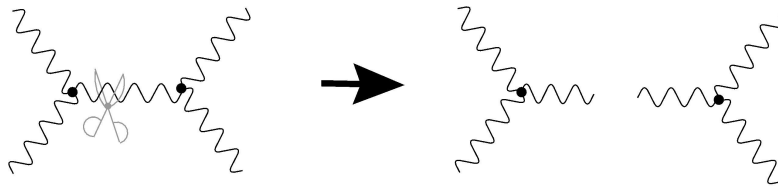


Figura 5.2: Requerimento da unitariedade em nível de árvore para a amplitude de 4 cordas.

Que a teoria bosônica contendo infinitos campos fosse cúbica ao descrever as interações em nível de árvore é um resultado que já se conhecia nos primórdios da teoria de cordas. Isto ocorre inclusive para campos na da camada de massa[14].

## 5.2 Dedução da Lagrangeana

Uma peculiaridade da teoria de cordas é que primeiro obtemos a amplitude de espalhamento. E a partir da amplitude é possível determinar a lagrangeana da teoria. Em teoria quântica de campos a ordem é contrária, ou seja, fornecemos uma lagrangeana e a partir dela calculamos a amplitude de espalhamento.

Agora começaremos a descrever os ingredientes importantes, em teoria de cordas, para obtermos a lagrangeana. Já discutimos na seção anterior que a teoria é cúbica, portanto a estrutura da lagrangeana não envolverá termos do tipo  $\phi^4$ . Vimos na seção 4.2 que a amplitude espalhamento é constituída pela soma de infinitas contribuições proveniente das partículas trocadas pelos estados externos da interação. Assim, a lagrangeana “segundo-quantizada” deve ser composta pelos infinitos campos que descrevem os estados do espectro da corda. Familiarmente as lagrangeanas são constituídas de dois termos: os termos livres e os de interações. No caso da corda aberta isto se traduz em

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \dots + \mathcal{L}_{int}, \quad (5.10)$$

onde  $\mathcal{L}_t$ ,  $\mathcal{L}_f$ ,  $\mathcal{L}_g$  são, respectivamente, a lagrangeana do táquion, do fóton, de Fierz-Pauli. “...” corresponde à lagrangeana livre dos restantes estados massivos da corda aberta e  $\mathcal{L}_{int}$  corresponde à lagrangeana de interação (em nível de árvore) de todos os estados da corda. A proposta desta seção é obter uma parte de  $\mathcal{L}_{int}$  aquela que descreve as interações



(em nível de árvore) de três táquions, dois táquions com um fóton e dois táquions com um campo de Fierz-Pauli. Para o campo de Maxwell estamos trabalhando no calibre de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.11)$$

Vamos considerar uma teoria cúbica para os campos. Assim propomos a lagrangeana de interação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \frac{1}{g_0^2} \left[ a_1 \phi^3 + a_2 A^\mu (\partial_\mu \phi) \phi + a_3 H^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) + a_4 (\partial_\mu H^{\mu\nu}) (\partial_\nu \phi) \phi + \right. \\ & \left. + \frac{a_5}{\alpha'} \eta_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \phi^2 + a_6 \eta_{\mu\nu} H^{\mu\nu} (\partial^\sigma \phi) (\partial_\sigma \phi) + a_7 (\partial^\sigma H^{\mu\nu}) \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \phi) \phi + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\phi$ ,  $A^\mu$  e  $H^{\mu\nu}$  representam, respectivamente, o campo de táquion, de fóton e de Fierz-Paulie e onde “...” denota os termos restantes de interação cúbica (que não serão determinados).

A lagrangeana (5.12) contém apenas termos cúbicos dependentes de  $\phi$ ,  $A_\mu$  e  $H^{\mu\nu}$  que são independentes, ou seja, qualquer outra combinação de termos cúbicos pode ser reescrita como combinação linear dos termos já existente em (5.12). Para ver isto devemos integrar por partes a nova combinação e usar que um termo de derivada total não altera a dinâmica da teoria<sup>1</sup>.

Temos uma pergunta pertinente a ser feita. Qual é o valor dos coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$ ? A sugestão do método da matriz S é que comparemos a amplitude de espalhamento da teoria de cordas com a obtida a partir das regras de Feynman da lagrangeana (5.12).

### 5.2.1 Uso das Amplitudes de três táquions

Para determinar o valor de  $a_1$  precisamos das amplitudes de três táquions. Primeiro vamos calcular a amplitude de espalhamento do termo  $a_1 \phi^3$  de (5.12). Da regras de Feynman, em nível de árvore, obtemos(veja apêndice C.2)

$$A(k_1; k_2; k_3) = i6a_1 g_0' (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (5.13)$$

<sup>1</sup>Por exemplo,  $H^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) = -(\partial_\nu H^{\mu\nu}) (\partial_\mu \phi) \phi - H^{\mu\nu} (\partial_\nu \partial_\mu \phi) \phi +$  derivada total.

A amplitude de espalhamento de três táquions da teoria de cordas é dada pela fórmula 4.20, a qual é repetida aqui (usamos a constante de normalização  $g'_0$  dada por (4.52).)

$$A(k_1; k_2; k_3) = i4\sqrt{2}g'_0(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (5.14)$$

Aqui comparamos (5.13) com (5.14) encontramos  $a_1 = 2\sqrt{2}/3$ .

O coeficiente  $a_2$  fica indeterminado, porque por um lado, como vimos na seção 4.3, a amplitude de espalhamento da teoria de cordas de dois táquions e um fóton é igual a zero e por outro, amplitude de espalhamento do termo  $A^\mu(\partial_\mu\phi)\phi$  da lagrangeana (5.12) é também nulo quando trabalhamos no calibre de Lorentz (veja apêndice C.2). Portanto  $a_2$  é arbitrário.

Agora vamos determinar os coeficientes relacionados com a amplitude de dois táquions e uma partícula de Fierz-Pauli. Das regras de Feynman calculamos as amplitudes de espalhamento dos termos de (5.12) que contém uma partícula de Fierz-Pauli (veja apêndice C.2). Apenas a amplitude de espalhamento do termo com coeficiente  $a_3$  é diferente de zero a qual é dada por

$$A(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = -i2a_3g'_0\zeta_{1\mu\nu}(k_2^\mu k_3^\nu)(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (5.15)$$

Para dois táquions e uma partícula de Fierz-Pauli a amplitude, na teoria de cordas, é dada por (4.47)

$$A(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = i8g'_0\alpha\zeta_1^{\mu\nu}k_{2\mu}k_{3\nu}(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (5.16)$$

Comparamos (5.15) com (5.16) obtemos  $a_3 = -4\alpha'$ .

No que diz respeito a amplitude de três pontos, ao igual que  $a_2$  os coeficientes  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  permanecem arbitrários. Na seguinte subseção será visto que somente três deles são plenamente arbitrários e que quando fica determinado em termos deles.

## 5.2.2 Uso das Amplitudes de quatro táquions

Nesta seção veremos que as expressões das amplitudes de três pontos considerada na subseção anterior são consistentes com a expressão da amplitude de Veneziano. No sentido

que chegamos as mesmas conclusões para os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_7$ . Só temos a ressalva que  $a_4$  fica dado em termos de  $a_5, a_6$  e  $a_7$ .

Consideremos o espalhamento de quatro táquions intermediado por um táquion. Aqui estamos interessados na contribuição que vem do canal  $s$  (veja a figura 4.2). Neste canal temos duas contribuições, em outras palavras, temos que somar  $I(s, t) + I(u, s)$ . Assim da amplitude de Veneziano dado por (4.38) e de (4.31), quando a partícula intermediador é uma táquion, obtemos

$$A(k_1; k_2; k_3; k_4) \Big|_{s \rightarrow -\frac{1}{\alpha'}} = i32\alpha' g_0'^2 \left\{ \frac{1}{-\alpha' s - 1} + O \left[ \left( s + \frac{1}{\alpha'} \right)^0 \right] \right\} \times \\ \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \quad (5.17)$$

Das regras de Feynman, a amplitude de espalhamento de (5.12) com vertes cúbicos de três táquions é

$$A(k_1; k_2; k_3; k_4) \Big|_{s \rightarrow -\frac{1}{\alpha'}} = i36a_1^2 g_0'^2 \left\{ \frac{\alpha'}{-\alpha' s - 1} + O \left[ \left( s + \frac{1}{\alpha'} \right)^0 \right] \right\} \times \\ \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \quad (5.18)$$

De (5.17) e (5.18) encontramos que  $a_1 = \pm 2\sqrt{2}/3$ . Adotamos o sinal positivo por causa do resultado encontrado na seção anterior.

É fácil verificar que não temos contribuição para a amplitude de Veneziano quando a partícula intermediadora é um fóton, ou seja, basta realizar a soma  $I(s, t) + I(u, s)$ , onde usamos a condição de pólo  $s = 0$  e a relação  $s + t + u = -\frac{4}{\alpha'}$  (dada em (4.25)).

Agora consideremos a contribuição da partícula de Fierz-Pauli como partícula intermediadora. Da amplitude de Veneziano dado por (4.38) e de (4.31) encontramos que

$$A(k_1; k_2; k_3; k_4) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{\alpha'}} = -i16\alpha' g_0'^2 \left\{ \frac{(\alpha' t + 2)(\alpha' t + 3)}{\alpha' s - 1} + O \left[ \left( s + \frac{1}{\alpha'} \right)^0 \right] \right\} \times \\ \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \quad (5.19)$$

Da da lagrangeana (5.12) queremos obter a amplitude de espalhamento de quatro táquions que trocam uma partícula de Fierz-Pauli. Os vértices da lagrangeana (5.12) foram calculados na apêndice C.2. Note que existe contribuição de vinte e cinco diagramas para a amplitude de quatro pontos. Após computar todo os diagramas, usar a condição de pólo  $s = 1/\alpha'$  e a relação entre as variáveis da Mandelstam chegamos

$$\begin{aligned}
A(k_1; k_2; k_3; k_4) \Big|_{s \rightarrow \frac{1}{\alpha'}} &= -ig_0^2 \left\{ \alpha' a_3^2 t^2 + 5a_3^2 t + \right. \\
&\quad + \frac{338}{25\alpha'} a_3^2 - \frac{192}{25\alpha'} a_4^2 - \frac{32}{25\alpha'} a_5^2 - \frac{72}{25\alpha'} a_6^2 + \frac{8}{25\alpha'} a_7^2 + \\
&\quad \left. + \frac{144}{25\alpha'} a_3 a_5 + \frac{216}{25\alpha'} a_3 a_6 - \frac{184}{25\alpha'} a_4 a_7 - \frac{96}{25\alpha'} a_5 a_6 \right\} \left\{ \frac{1}{(\alpha' s - 1)} + \right. \\
&\quad \left. + O \left[ \left( s + \frac{1}{\alpha'} \right)^0 \right] \right\} (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Agora comparamos (5.19) com (5.20) encontramos  $a_3 = \pm 4\alpha'$ . A dotamos o sinal de menos por causa do resultado encontrado na seção anterior. Observe que  $a_4$  fica em função do coeficientes  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  ( $a_4 = f(a_5, a_6, a_7)$ ), ou seja,

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{48} \left( \pm \sqrt{-384a_5^2 - 1152a_6a_5 - 6912\alpha'a_5 - 864a_6^2 + 625a_7^2 + 93696\alpha'^2 - 10368\alpha'a_6 +} \right. \\
&\quad \left. - 23a_7 \right) \quad (5.21)
\end{aligned}$$

### 5.2.3 Uso do Teorema da Equivalência

Agora vamos argumentar que há uma forma mais complexa de escrever a lagrangeana cúbica. De acordo com o teorema da equivalência (Veja no apêndice D.1 a demonstração do teorema da equivalência) podemos fazer uma redefinição de campos sem que nenhuma mudança ocorra na matriz S.

Vamos, por exemplo, ver que a lagrangeana cúbica 5.12 pode possuir termos quárticos. Aqui vamos dar um exemplo para o campo  $H^{\mu\nu}$ , o mesmo raciocínio é válido para os outros campos. Após transformação  $H^{\mu\nu} = \tilde{H}^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}(\tilde{H})$ , tal que  $T^{\mu\nu}(\tilde{H})$  contenha termos de ordem superior ao apresentado na lagrangeana. Consideramos  $T^{\mu\nu}(\tilde{H}) = c_2(\partial^\alpha \partial_\alpha H^{\mu\nu})H + \dots$ . Assim o termo  $H^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  torna-se

$$H^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \rightarrow H^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + c_2(\partial^\alpha \partial_\alpha H^{\mu\nu})H \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (5.22)$$

Nas últimas duas subseções vimos que nem todos os coeficientes da lagrangeana podem ser fixados por comparação das matrizes S. De acordo com o teorema da equivalência podemos fazer uma transformação do tipo  $H^{\mu\nu} = \tilde{H}^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}(\tilde{H})$  sem que nenhuma transformação ocorra na matriz S. Temos

$$T^{\mu\nu}(\tilde{H}) = b_1 H \eta^{\mu\nu} + b_2 \partial^\alpha \partial_\alpha H^{\mu\nu} + b_3 \partial^\mu \partial^\nu H + \dots \quad (5.23)$$

onde  $\dots$  são os termos de ordem superior.

Substituímos 5.23 em 5.12 encontramos que os coeficientes  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  mudam (veja os cálculos no apêndice C.3):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_5 &= a_5 + 26a_5 b_1, & \tilde{a}_6 &= a_6 + a_3 b_1 + 26a_6 b_1, \\ \tilde{a}_7 &= a_7 + a_4 b_1 + 26a_7 b_1 - \frac{2}{\alpha'} a_5 b_2 - \frac{2}{\alpha'} a_5 b_3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Portanto os coeficientes  $a_5$ ,  $a_6$  e  $a_7$  são arbitrários.

# Capítulo 6

## Ação Efetiva de Baixa Energia

Já discutimos no capítulo anterior que na Teoria de Cordas obtemos a lagrangeana a partir da amplitude de espalhamento. Pensamos na amplitude de espalhamento da Teoria de Cordas como uma soma de contribuições dos infinitos estados físicos dela. A ação efetiva para campos não massivos é resultado da soma das contribuições de todos os modos massivos (veja a figura 6.1). Note que uma teoria que é cúbica, no limite de baixas energias passa a conter, além de termos cúbicos, termos quárticos e de ordem superior<sup>1</sup>. A ideia que esta por trás da ação efetiva de baixa energia é que, no espalhamento de cordas em baixas energias é possível detectar apenas os estados não massivos. A influência dos estados massivos só se manifesta através de termos que corrigem as correspondentes ações de bósons de calibre (ação de Maxwell, no caso da teoria abelianas, ação de Yang-Mills, no caso da teoria não abeliana).

No presente capítulo vamos obter a ação efetiva em nível de árvore da corda bosônica no caso abeliano e também no caso não abeliano.

A seção 6.1 deste capítulo usamos como referência a seção três do artigo[6] e a seção 6.2 esta baseada na seção sete dos artigos[5][10] (a referência [10] contém algumas correções do artigo [5]).

---

<sup>1</sup>No caso da figura (6.1) só aparecem as contribuições dos termos quárticos devido a que nesse caso estamos considerando uma amplitude de quatro pontos, mas se considerássemos amplitudes de cinco ou mais pontos veríamos que aparecem também contribuições de termos de ordem cinco e superior.

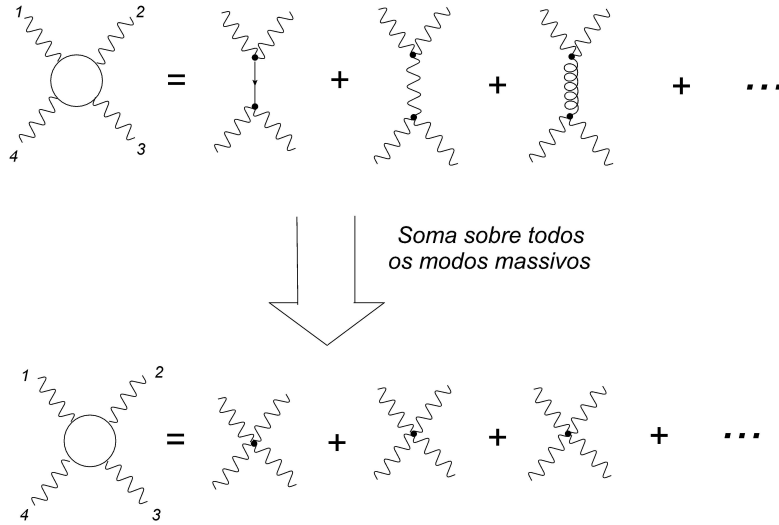


Figura 6.1: A figura mostra que no caso da ação efetiva temos  $s \ll 1/\alpha'$ .

## 6.1 Dedução da Ação Efetiva da Teoria Abeliana

Na presente seção vamos obter a ação efetiva de baixa energia em nível de árvore para a corda bosônica no caso abeliano. A ação efetiva é organizada em potências da constante fundamental da corda  $\alpha'$ , ou seja, queremos encontrar as correções da lagrangiana de Maxwell provenientes da teoria de cordas. Construiremos a mais geral lagrangiana invariante de calibre. Escrevemos aqui a ação efetiva até ordem de  $\alpha'^3$ .

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{4} \int d^{26}x \{ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \alpha' d_0 \partial^\mu F_\mu^\nu \partial^\rho F_{\rho\nu} + (2\alpha')^2 [d_1 F_\mu^\rho F_\nu^\mu F_\sigma^\nu F_\rho^\sigma + d_2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \\
 & + d_3 \partial^\lambda F_\lambda^\mu \partial^2 \partial^\rho F_{\rho\mu}] + (2\alpha')^3 \sum_{i=1}^7 c_i J_i + O(\alpha^4) \}, \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, & J_2 &= \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial_\alpha F_\nu{}^\rho F_\rho{}^\lambda F_{\lambda\mu}, \\
J_3 &= \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial^\beta F_{\mu\nu} F_\alpha{}^\rho F_{\beta\rho}, & J_4 &= \partial^\alpha F_\alpha{}^\mu \partial^\beta F_{\beta\mu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \\
J_5 &= \partial^\alpha F_\alpha{}^\mu \partial^\beta F_\mu{}^\lambda F_\beta{}^\nu F_{\lambda\nu}, & J_6 &= F^{\mu\nu} \partial^2 F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \\
J_7 &= F^{\mu\nu} \partial^2 F_\nu{}^\lambda F_\lambda{}^\rho F_{\rho\mu}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

e

$$\partial^2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\lambda F_{\lambda\nu} - \partial_\nu \partial^\lambda F_{\lambda\mu}. \tag{6.4}$$

Salientamos que o termo de mais baixa ordem, ou seja, da ordem  $\alpha^0$  em (6.1) corresponde à ação de Maxwell. Observe também que (6.1) não contém termos do tipo  $F^{2n+12}$ .

Agora estamos interessados em determinar os coeficientes  $d_0, d_1, d_2, d_3$  e  $c_i$  (onde  $i = 1, 2, \dots, 7$ ), mas em analogia ao visto na subseção 5.2.3 do capítulo 5, não conseguimos fixar todos os coeficientes, quando comparamos a amplitude de espalhamento da teoria de cordas com a obtida a partir das regras de Feynman da ação (6.1). O ponto chave é o teorema da equivalência (veja no apêndice D.1), a qual permite fazer a transformação  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$ ,  $T_\mu(\tilde{A})$  é um vetor local covariante, sem que nenhuma mudança ocorra com a matriz S. Onde,

$$\begin{aligned}
T_\mu(A) &= 2\alpha' b_1 \partial^\rho F_{\rho\mu} + (2\alpha')^2 [b_2 F^{\rho\nu} \partial_\mu F_{\rho\nu} + b_3 (\partial^\rho F_\rho{}^\nu) F_{\mu\nu} + b_4 \partial^2 \partial^\rho F_{\rho\mu}] + \\
&+ (2\alpha')^3 [b_5 (\partial^\beta F_{\beta\mu}) F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} + b_6 (\partial^\beta F_{\mu\lambda}) F_\beta{}^\nu F_\nu{}^\lambda + b_7 (\partial^2 F_\mu{}^\lambda) (\partial^\rho F_{\rho\lambda})] + \\
&+ O(\alpha^4).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Agora desejamos ver quais dos coeficientes da ação (6.1) ficam arbitrários, ou seja, substituimos (6.5) em (6.1), após algumas manipulações (veja no apêndice F.1 os cálculos.), concluimos que a ação efetiva preserva sua forma desde que os coeficientes  $d_0, d_3, c_4, c_5, c_6$  e  $c_7$  sejam arbitrários, pois eles mudam como:

---

<sup>2</sup>Termo do tipo  $F^3$  não aparece na ação efetiva, porque  $F_\lambda{}^\mu F_\nu{}^\lambda F_\mu{}^\nu = -F_\lambda{}^\mu F_\nu{}^\lambda F_\mu{}^\nu = -F_\nu{}^\lambda F_\lambda{}^\mu F_\mu{}^\nu = -F_\lambda{}^\mu F_\nu{}^\lambda F_\mu{}^\nu$ . Assim o termo  $F^3$  é nulo.



$$\begin{aligned}
\tilde{d}_0 &= d_0 - 8b_1, & \tilde{d}_3 &= d_3 - 2b_1^2 + d_0b_1, \\
\tilde{c}_4 &= c_4 - 4b_5, & \tilde{c}_5 &= c_5 - 4b_6, \\
\tilde{c}_6 &= c_6 + d_2b_1, & \tilde{c}_7 &= c_7 - d_1b_1.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Vamos fixar os coeficientes  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ . Observe que a ação (6.1) não contém termos cúbicos, portanto é necessário calcular a amplitude de quatro pontos. É suficiente para fixar os coeficientes determinarmos apenas os termos  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot \zeta)$  e  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)(\zeta \cdot k)$  na amplitude de quatro pontos. Das regras de Feynman encontramos a amplitude de espalhamento correspondente a ação (6.1) (Veja no apêndice F.2 um roteiro dos cálculos).

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{4} \{ (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4)[2(2\alpha')^2 s^2(d_1 + 4d_2) - 4d_1(2\alpha')^2 ut + (4c_1 + c_3)(2\alpha')^3 s^3 + \\
&\quad + (\frac{1}{2}c_2 - 2c_3)(2\alpha')^3 ust] + (\zeta_1 \cdot \zeta_2)[(2\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_3)((4c_1 + c_3)(2\alpha')^3 s^2 + \\
&\quad + (c_2 - c_3)(2\alpha')^3 ut) + (\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1)(c_2 + 2c_3)(2\alpha')^3 su + \\
&\quad + (\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(c_2 + 2c_3)(2\alpha')^3 st] + \dots \},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

para obter (6.7) usamos que os momentos externos  $k_j$  e o vetor polarização  $\zeta_j$  satisfaz:

$$k_j^2 = 0, \tag{6.8}$$

$$\zeta^j k_j = 0, \tag{6.9}$$

onde formula (6.8) é a condição de camada de massa e (6.9) corresponde à condição de estado físico.

A amplitude de quatro pontos da teoria de cordas para bósons de calibre já foi obtida na seção 4.4. Então a amplitude espalhamento para corda bosônica no caso abeliano é dado por:

$$A_4 = -4 \left[ \frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} + \frac{\Gamma(-\alpha't)\Gamma(-\alpha'u)}{\Gamma(1+\alpha's)} + \frac{\Gamma(-\alpha'u)\Gamma(-\alpha's)}{\Gamma(1+\alpha't)} \right] \times H \tag{6.10}$$

onde,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4} \left( (2\alpha')^2 \frac{tu}{1+\alpha's} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + 2perm. \right) + \\
&\quad - \frac{1}{4} \left( (2\alpha')^3 \frac{tu}{1+\alpha's} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_3) + 5perm. \right) + \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{6.11}$$

A expansão da função  $\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)/\Gamma(1+\alpha'u)$  (veja o apêndice E.1) começa como:

$$\frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} = \frac{1}{\alpha'^2 st} - \zeta(2) + u\zeta(3)\alpha' + O(\alpha'^2), \tag{6.12}$$

onde  $\zeta(k)$  é a função Zeta de Riemann e  $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$ . Da conservação do momento e da condição de camada de massa é fácil mostrar  $s + u + t = 0$ . Assim

$$\left[ \frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} + \frac{\Gamma(-\alpha't)\Gamma(-\alpha'u)}{\Gamma(1+\alpha's)} + \frac{\Gamma(-\alpha'u)\Gamma(-\alpha's)}{\Gamma(1+\alpha't)} \right] = -3\zeta(2) + O(\alpha'^2). \tag{6.13}$$

Vamos expandir em  $s$  o termo  $1/(1+\alpha's)$  (pólo do táquion) de (6.10) obtemos:

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{2}\pi^2 \left[ \left( (2\alpha')^2 ut - \frac{1}{2}(2\alpha')^3 ust \right) (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) - (2\alpha')^3 ut (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_3) + \dots \right] + \\
&\quad + O(\alpha^4).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

A expressão 6.14 reproduz a dos termos  $F^4$  vindo da ação 6.1.

Agora já temos as ferramentas, suficientes, para obter os coeficientes. Para isto, comparemos a amplitude de espalhamento obtida da teoria de cordas (6.14) com a amplitude adquirida através das regras de Feynman (6.7). Nós encontramos  $d_1 = -\frac{1}{2}\pi^2$ ,  $d_2 = \frac{1}{8}\pi^2$ ,  $c_1 = -\frac{1}{12}\pi^2$ ,  $c_2 = -\frac{2}{3}\pi^2$  e  $c_3 = \frac{1}{3}\pi^2$ .

Notamos que todos os termos da ação efetiva (até a ordem  $\alpha'^3$ ) que não contribuem para a amplitude de espalhamento contém  $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ .

Finalmente achamos a ação efetiva a nível de arvore da corda bosônica no caso abeliano.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4} \int d^26 x \left\{ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (2\alpha')^2 \left[ -\frac{1}{2}\pi^2 F_\mu^\rho F_\nu^\mu F_\sigma^\nu F_\rho^\sigma + \frac{1}{8}\pi^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] + \right. \\
&\quad + (2\alpha')^3 \left[ -\frac{1}{12}\pi^2 \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{2}{3}\pi^2 \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial_\alpha F_\nu^\rho F_\rho^\lambda F_{\lambda\mu} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{3}\pi^2 \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial^\beta F_{\mu\nu} F_\alpha^\rho F_{\beta\rho} \right] + O(\alpha'^4) \right\}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

## 6.2 Dedução da Ação Efetiva não Abeliana

O foco, agora, dos nossos estudos é a corda bosônica não abeliana e não massiva. Vamos obter as correções, em nível de árvore, da ação efetiva até ordem de  $\alpha'^2$ . Apresentamos, na teoria de corda, a modificação da ação de Yang-Mills por adição de termos na potência da constante fundamental da corda.

$$\begin{aligned}
S = a_0 \int d^{26}x \operatorname{tr} \left\{ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\alpha' (a_1 F_\mu^\lambda F_\lambda^\nu F_\nu^\mu + a_2 D^\lambda F_\lambda^\mu D^\rho F_{\rho\mu}) + \right. \\
+ (2\alpha')^2 \left[ a_3 F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + a_4 F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F^{\nu\rho} F_{\mu\rho} + \right. \\
+ a_5 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} + a_6 F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} + \\
+ a_7 F^{\mu\nu} D^\lambda F_{\mu\nu} D^\rho F_{\rho\lambda} + a_8 D^\lambda F_{\lambda\mu} D^\rho F_{\rho\nu} F^{\mu\nu} + \\
\left. \left. + a_9 D^\rho D^\lambda F_\lambda^\mu D_\rho D^\sigma F_{\sigma\mu} \right] + O(\alpha'^3) \right\} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
a_0 = -\frac{1}{8g_0'^2} (2\alpha')^2, \\
F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]. \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Enfatizamos, novamente, que o termos da ordem  $\alpha'^0$  em (6.16) corresponde ação de Yang-Mills. Em (6.16) o campo  $A_\mu$  está na representação fundamental e o grupo de calibre é SU(N) ou SO(N)[5].

A soma (6.16) contém apenas termos independentes. Para mostrar que (6.16) não possui termos redundantes é útil usar as relações:

$$\begin{aligned}
D^2 F_{\mu\nu} &= D_\mu N_\nu - D_\nu N_\mu + 2[F_{\mu\lambda}, F_{\nu\lambda}], \\
\operatorname{tr}(F^{\mu\nu} F_\nu^\rho D^2 F_{\rho\mu}) &= \operatorname{tr}\{2F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu [F_\mu^\rho, F_{\nu\rho}] - 2F^{\mu\nu} N_\mu N_\nu - F^{\lambda\rho} D^\mu F_{\lambda\rho} N_\mu\} + \\
&\quad + \operatorname{derivada total}, \\
\operatorname{tr}(D^2 F^{\mu\nu} D^2 F_{\mu\nu}) &= \operatorname{tr}\{2(D^\mu N^\nu)(D_\mu N_\nu) - 12F^{\mu\nu} N_\mu N_\nu - 8F^{\lambda\rho} D^\mu F_{\lambda\rho} N_\mu + \\
&\quad + 8F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu [F_\mu^\rho, F_{\nu\rho}]\} + \operatorname{derivada total}, \quad (6.18)
\end{aligned}$$

onde  $N_\mu \equiv D^\rho F_{\rho\mu}$ .

Nas demonstrações das formulas (6.18) usamos a identidade de Bianchi e a relação:

$$[D_\mu, D_\nu]F_{\rho\sigma} = [F_{\mu\nu}, F_{\rho\sigma}], \quad (6.19)$$

que convertem combinações de derivadas covariantes em termos sem derivadas.

Já discutimos, na seção anterior, que não é possível fixar todos os coeficientes da ação efetiva quando os campos estão na camada de massa, em outras palavras, não podemos fixar a partir da matriz S da corda aberta todos os coeficientes. Para resolver esta ambiguidade usamos o teorema da equivalência(veja apêndice D.1). A ideia é fazer uma redefinição de campo que respeite a invariância de calibre, ou seja,

$$A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A}) \quad (6.20)$$

onde,

$$\begin{aligned} T_\mu(A) = & 2\alpha' b_1 D^\rho F_{\rho\mu} + (2\alpha')^2 [b_2 F^{\rho\nu} D_\mu F_{\rho\nu} + b_3 (D_\mu F^{\rho\nu}) F_{\rho\nu} + b_4 (D^\rho F_\rho{}^\nu) F_{\mu\nu} + b_5 F_\mu{}^\nu D^\rho F_{\rho\nu} + \\ & + b_6 D^2 D^\rho F_{\rho\mu}] + O(\alpha'^3). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Após substituirmos (6.21) em (6.16) achamos que  $a_2$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  e  $a_9$  mudam como (veja na seção G.2 os cálculos.):

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2 - 4b_1, & \tilde{a}_7 &= a_7 - 4b_2 + 4b_3 - 3a_1 b_1, \\ \tilde{a}_8 &= a_8 - 4b_4 + 4b_5 + 8b_1^2 - 6a_1 b_1 - 8a_2 b_1, \\ \tilde{a}_9 &= a_9 + 4b_6 + 2b_1^2 - 2a_2 b_1. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Assim  $a_2$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  e  $a_9$  devem ser arbitrários.

Agora queremos encontrar os valores de  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  e  $a_6$ . Das regras de Feynman encontramos a amplitude de três vértices da ação (6.16) (veja mais detalhe dos cálculos na seção G.3):

$$A_3 = C_1 + C_2, \quad (6.23)$$

onde

$$C_1 = 2ia_0g_0''^3 \{ (k_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) + (k_2 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (k_3 \cdot \zeta_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_3) \} \times \\ \times tr(\lambda^{a_1}[\lambda^{a_2}\lambda^{a_3}])(2\pi)^{26}\delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3) \quad (6.24)$$

$$C_2 = -6a_0a_1(2\alpha')g_0''^3(k_1 \cdot \zeta_3)(k_2 \cdot \zeta_1)(k_3 \cdot \zeta_2)tr(\lambda^{a_1}[\lambda^{a_2}\lambda^{a_3}]). \quad (6.25)$$

A contribuição para a amplitude de três pontos vinda do termo  $F^2$  corresponde a amplitude de espalhamento de Yang-Mills de três vértices. Da contribuição obtida de  $F^3$  comparamos com a amplitude de espalhamento da teoria de cordas (veja a seção 4.4):

$$A_3 = -i(2\alpha')^3 g_0''(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + \dots, \quad (6.26)$$

onde os  $\dots$  é a parte da amplitude da teoria de cordas que reproduz a amplitude de espalhamento de Yang-Mills de três vértice. Assim encontramos  $a_1 = 4i/3$ .

Para estabelecermos os valores de  $a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  é suficiente calcular os termos  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot \zeta)$  da amplitude de quatro pontos. Procedemos de maneira similar ao utilizado na seção G.3 para encontrar a amplitude de quatro pontos. As contribuições vem dos diagramas do termo  $F^3$  e dos diagramas do termos  $F^4$ . Aqui separamos  $tr(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ .

$$A_4 = \frac{(2\alpha')^2}{4} \left\{ (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_4 \cdot \zeta_3)[2a_4t^2 + a_3u^2 + 4a_5(t+u)^2 - \frac{1}{2}(ts - su)] + \right. \\ \left. + (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)[4a_5t^2 + a_3u^2 + 2a_4(t+u)^2 - \frac{1}{2}(ts - tu)] + \right. \\ \left. - (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4)[2a_3st + (a_3 + 8a_6)(s+t)u] \right\} \dots, \quad (6.27)$$

A expressão mais geral da matriz S da teoria de cordas de quatro bósons vetoriais não massivos é dado por (4.56). Aqui precisamos analisar, somente, os termos  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot \zeta)$ :

$$A_4 = \frac{(2\alpha')^4}{4} \frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} \left[ \frac{tu}{1+\alpha's}(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + \frac{su}{1+\alpha't}(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \right. \\ \left. + \frac{st}{1+\alpha'u}(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) \right] + \dots. \quad (6.28)$$

Agora expandimos (6.28) nos pólos dos táquions  $\{1/(1+\alpha's), 1/(1+\alpha't) \text{ e } 1/(1+\alpha'u)\}$ :

$$\begin{aligned}
A_4 = \frac{(2\alpha')^4 \Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{4 \Gamma(1+\alpha'u)} & \left\{ tu(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + su(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \right. \\
& + st(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) - \alpha' stu(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + \\
& - \alpha' stu(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) - \alpha' stu(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + \\
& + \alpha'^2 s^2 tu(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + \alpha'^2 t^2 su(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\
& \left. + \alpha'^2 u^2 st(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + \dots \right\}. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

A expansão da função  $\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)/\Gamma(1+\alpha'u)$  até a ordem  $\alpha'^0$  (veja o apêndice E.1):

$$\frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} = \frac{1}{\alpha'^2 st} - \frac{1}{6}\pi^2 + O(\alpha'). \tag{6.30}$$

Das expressões (6.29) e (6.30) a amplitude de espalhamento para a corda bosônica torna:

$$A_4 = (2\alpha')^2 [B_1 + B_2 + O(\alpha'^3)], \tag{6.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{6}\pi^2 \alpha'^2 tu(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) - \frac{1}{6}\pi^2 \alpha'^2 su(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\
& - \frac{1}{6}\pi^2 \alpha'^2 st(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) \\
B_2 &= \alpha'^2 su(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + \alpha'^2 tu(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\
& + \alpha'^2 u^2(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4). \tag{6.32}
\end{aligned}$$

Agora comparamos a amplitude da teoria de cordas (6.32) com a amplitude obtida das regras de Feynman (6.27) encontramos os coeficientes da ação (6.16).

$$a_3 = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_4 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_5 = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}, \quad a_6 = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2}. \tag{6.33}$$

Perceba que os termos sem influencia na matriz S contém  $D^\rho F_{\rho\mu}$  (é nulo para os campos de Yang-Mills que satisfazem as equações de movimento).

# Considerações Finais

Neste trabalho foi visto que as interações entre cordas relativísticas (imersas no espaço-tempo de Minkowski) podem ser determinadas, por um procedimento de primeira quantização, usando como ferramenta matemática a teoria de campos conforme em duas dimensões. Esta é a abordagem da integral de caminho de Polyakov. O simples fato de que os objetos fundamentais em questão sejam cordas (e não objetos pontuais) determina de forma única a maneira em que esses objetos devem interagir: há uma única constante de acoplamento ( $g_0$ ) e uma única constante fundamental ( $\alpha'$ ) na teoria.

Nesta dissertação foram estudadas as interações de cordas abertas, em nível de árvore. Foi achada a amplitude de espalhamento de  $n$  cordas abertas (como uma integral múltipla em  $n - 3$  variáveis). Foi visto que a partir dessa expressão é possível ver que a lagrangeana da teoria “segundo-quantizada” (isto é, a lagrangeana que contém os campos associados aos infinitos estados físicos da corda aberta), quando considerada na camada de massa e em nível de árvore, é cúbica.

Também foram estudadas algumas propriedades das amplitudes de espalhamento de cordas abertas não massivas (em nível de árvore). Foi visto que, além da propriedade cíclica (que é válida na situação geral em que as cordas abertas externas estão em qualquer estado físico), a amplitude de espalhamento de estados não massivos (bósons de calibre) possui simetria de paridade da folha-mundo (simetria de “twisting”) e é invariante de calibre.

Nesta dissertação também foi abordado o conceito de “ação efetiva de baixa energia”. Foi visto que “baixa energia” refere-se ao fato de que em uma experiência de espalhamento de cordas abertas, a energias baixas, somente enxergaria-se os estados não massivos (fótons no caso da teoria abeliana e glúons no caso da teoria não abeliana). A influência dos estados massivos da corda aberta só se manifestaria por meio de termos que corrigem as equações de Maxwell (ou as equações de Yang-Mills). Foram achados estes termos de correção na lagrangeana: até ordem  $\alpha'^3$  no caso da teoria abeliana e até ordem  $\alpha'^2$  na teoria não abeliana.

A partir dos assuntos abordados neste trabalho apresentam-se basicamente duas linhas de estudo a seguir no futuro. A primeira ainda lidando com cordas bosônicas e a segunda com supercordas (que é a teoria que se leva mais a sério):

1. Achar a lagrangeana de baixa energia para a corda fechada (em nível de árvore). Obteríamos a lagrangeana de Einstein-Hilbert mais correções, entre outras coisas. Aprender a calcular amplitudes de espalhamento em 1-“loop” (ou ordem superior). Usar o resultado anterior para ver se a lagrangeana da teoria “segundo quantizada” permanece sendo cúbica ou não. Usar as amplitudes de bósons de calibre, em nível de loops, para ver que novos termos surgiriam na lagrangeana efetiva de baixa energia (a cada ordem em  $\alpha'$ ).
2. Generalizar os resultados dos capítulos 5 e 6 para o caso da teoria de supercordas.

Neste trabalho não abordamos a demonstração de que a teoria de cordas bosônicas esta definida consistentemente só em  $D=26$ . No formalismo estudado aqui para deduzirmos a dimensão do espaço-tempo é necessário o conhecimento de campos fantasmas, o que não foi estudado neste trabalho. O resultado  $D = 26$  poderia ser também deduzido, por exemplo, quantizando a corda bosônica no calibre de cone de luz, ao requisitarmos a invariância de Lorentz[12].



# Bibliografia

- [1] J. Scherk, J. H. Schwarz, *Dual models for nonhadrons*, Phys.Lett. **B52**(1974), 347..
- [2] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic string*, Phys.Lett. **B103**(1981), 207..
- [3] D. Tong, *String theory*, Cambridge, Uk: Univ. Pr (2009), [<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html>].
- [4] J. Pochinski, *String theory*, vol. 1: *An introduction to the bosonic string*, Cambridge, Uk: Univ. Pr (1998).
- [5] A. A Tseytlin, *Vector field effective action in the open superstring theory*, Nucl. Phys. **B 276**(1986) 391.
- [6] O. D. Andreev and A. A Tseytlin, *Partition-function representation for the Open superstring effective action: cancellation of Möbius infinities and derivative corrections to Born-Infeld lagrangian*, Nucl. Phys. **B331**(1988/89), 205..
- [7] H. Kawai, D.C. Lewellen and S.H.H. Tye, *A relation between tree amplitudes of closed and open Strings*, Nucl. Phy. **B269**(1986),1.
- [8] M. B. Green, J.H. Schwarz, and Witten, *Superstring theory*, vol.1:*Introduction*, Cambridge Uk: Univ. Pr (1987). Cambridge monographs on mathematical physics.
- [9] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer, (1996).
- [10] A. A Tseytlin, *Ambiguity in effective action in string theories*, Phys. Lett. **B176**(1986), 62.
- [11] G. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, third edition, San Diego, USA: Academic Press, (1985).
- [12] B. Zwiebach, *A first course in string theory*, Cambridge, UK: Univ. Pr (2004).

- [13] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton, EUA: Univ. Pr (2003).
- [14] M. Kaku and K.Kikkawa, Phys. Rev. **D10** (1974) 1110, 1823.
- [15] P. Di Vecchia, *The birth of string theory*, (2007) [arXiv:0704.0101.]

# Apêndice A

## A.1 Regras de Feynman

Nos pretendemos, neste apêndice, fornecer as ferramentas necessárias para obter as amplitudes de espalhamento.

Os propagadores dos campos são dados por[13]

$$\bullet \xrightarrow{k} \bullet \quad \text{Táquion} : \frac{-ig_0^2}{k^2 + m^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\bullet \xrightarrow[\mu]{k} \bullet \xrightarrow[\nu]{} \bullet \quad \text{Fóton} : \quad -ig_0^2 \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\bullet \xrightarrow[\mu a]{k} \bullet \xrightarrow[\nu b]{} \bullet \quad \text{Gluon} : \quad -ig_0^2 \delta^{ab} \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$\bullet \xrightarrow[\nu \mu]{k} \bullet \xrightarrow[\lambda \sigma]{} \bullet \quad \text{Fierz - Pauli} : -ig_0^2 \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{D-2}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 + m^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $G = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}$  e  $D$  é a dimensão do espaço-tempo ( $D = 26$ ).

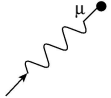
Para escrever o vértice, escrevemos a lagrangeana de interação,  $iL_{int}$ , no espaço dos momentos ( $\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$ ) e usamos a formula:

$$\mathcal{V} = i \frac{\delta^n}{\delta w_1 \cdots \delta w_n} \left[ \int L_{int} \prod_j^n d^{26} k_j \right], \quad (\text{A.5})$$


onde  $n$  é número de campos envolvidos e  $w_j$  é o campo (pode ser  $\phi$ ,  $A_\mu$ ,  $A_\mu^a$  ou  $H_{\mu\nu}$ ).

Na seção C.2, F.2 e G.3 dos apêndices C, F e G respectivamente. Encontram-se cálculos de alguns dos vértices que aparecem nesta dissertação.

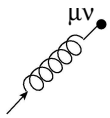
Para cada linha externas contraímos com



$$\text{Fóton} : \quad \zeta^\mu, \quad (\text{A.6})$$



$$\text{Gluon} : \quad \zeta^\mu, \quad (\text{A.7})$$



$$\text{Fierz - Pauli} : \quad \zeta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $\zeta^\mu$  e  $\zeta^{\mu\nu}$  são vetores e tensor de polarização respectivamente.

Incluimos para a amplitude de espalhamento de  $n$  partícula o fator  $g_0^n (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ . E para cada linha interna acrescentamos o fator  $1/(2\pi)^{26}$ . A função delta representa a conservação da energia e do momento.

# Apêndice B

## B.1 Transformação $SL(2; \mathbf{R})$ e ordenamento cíclico

A forma de uma transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  foi vista em (3.10) e vem dada por

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (\text{B.1})$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são reais e satisfazem a restrição

$$ad - bc = 1. \quad (\text{B.2})$$

Existe uma única transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  que leva três pontos distintos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  em outros três pontos especificados distintos  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , respectivamente (todos eles da reta real). Esta transformação vem dada por [12]

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}, \quad (\text{B.3})$$

ou bem, isolando  $w$  de (B.3) chegamos a uma equação da forma (B.1), onde:

$$\begin{aligned} a &= w_2(z_3 - z_2)(w_3 - w_1) - w_1(z_3 - z_1)(w_3 - w_2), \\ b &= w_1 z_2(z_3 - z_1)(w_3 - w_2) - w_2 z_1(z_3 - z_2)(w_3 - w_1), \\ c &= (z_3 - z_2)(w_3 - w_1) - (z_3 - z_1)(w_3 - w_2), \\ d &= z_2(z_3 - z_1)(w_3 - w_2) - z_1(z_3 - z_2)(w_3 - w_1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Do ponto de vista gráfico a curva em (B.1) é uma hipérbole:

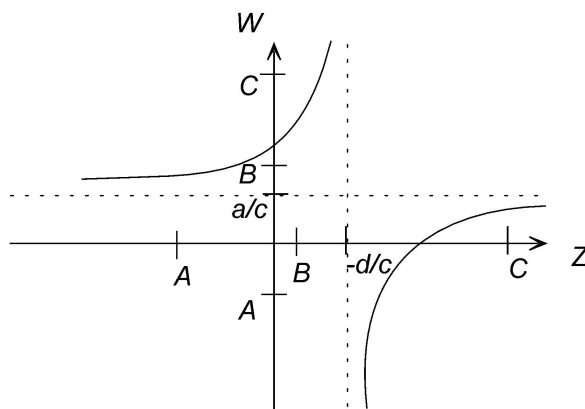


Figura B.1: Gráfico da curva  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ .

De fato, a partir de (B.1) e (B.2) é fácil provar que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2} > 0 \quad (\text{B.5})$$

e portanto a curva é sempre crescente (mas note que ela não é contínua em  $z = -d/c$ ).

### 1. Caso do mapeamento cíclico de três pontos

Se considerarmos o mapeamento de três pontos da reta real,  $z_1 = A$ ,  $z_2 = B$ ,  $z_3 = C$  (onde  $A < B < C$ ) em outros três pontos  $w_1 = B$ ,  $w_2 = C$ ,  $w_3 = A$ , então da fórmula vem que

$$-\frac{d}{c} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2 - 3ABC}{A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{a}{c} = \frac{AC^2 + CB^2 + BA^2 - 3ABC}{A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA}. \quad (\text{B.7})$$

Pode-se provar que se  $A < B < C$ , então

$$A < \frac{a}{c} < B < -\frac{d}{c} < C, \quad (\text{B.8})$$

onde  $-d/c$  e  $a/c$  vem dadas por (B.7) e (B.8), respectivamente.

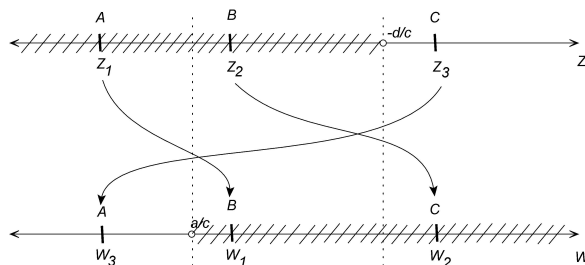


Figura B.2: Mapeamento dado por (B.3), onde  $z_1 = A$ ,  $z_2 = B$ ,  $z_3 = C$ ,  $w_1 = B$ ,  $w_2 = C$  e  $w_3 = A$ .

Portanto, o mapeamento dos pontos da reta em  $z$  nos pontos da reta real em  $w$  ocorre como apresentado na seguinte figura:

O importante é que o mapeamento cíclico não ocorre unicamente entre os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  mas ocorre entre todos os pontos da reta real em  $z$  (exceto  $z = -d/c$ ) e todos os pontos da reta real em  $w$  (exceto  $w = a/c$ ).

## 2. Caso do mapeamento cíclico de $n$ pontos

Este caso é uma consequência imediata do exposto anteriormente.

Sejam  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{R}$  tais que  $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ .

Desejamos mostrar que por meio de uma transformação  $SL(2; \mathbf{R})$ , dada em (B.1) com parâmetros por (B.5), é possível mapear os pontos anteriores  $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbf{R}$ , os que se encontram dispostos num ordenamento cíclico dado.

Para sermos mais claros consideraremos aqui somente o caso em que  $n = 4$ . A caso geral pode ser entendido facilmente a partir deste.

Então, consideremos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{R}$  tais que  $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ . Identifiquemos os pontos  $A, B, e C$ , considerados em 1., com  $z_1, z_2$  e  $z_4$ , respectivamente:

$$A = z_1, B = z_2, C = z_4. \quad (\text{B.9})$$

Consideremos a transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  que foi usada em 1. Dela vem que

$$w_1 = B = z_2; w_3 = C = z_4; w_4 = A = z_1. \quad (\text{B.10})$$

Com a análise feita em 1. é fácil se convencer de que somente há duas possibilidades (dependendo do fato de  $z_3$  ser menor ou maior que  $-d/c$ ), as que apresentamos nas figuras B.3 e B.4:

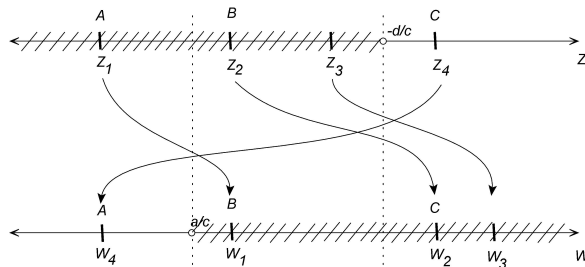


Figura B.3: Mapeamento dado por (B.3) no caso em que são satisfeitas as condições em (B.9) e (B.10), e também  $z_3 < -d/c$ .

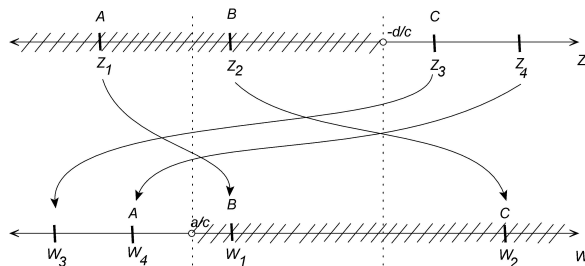


Figura B.4: Mapeamento dado por (B.3) no caso em que são satisfeitas as condições em (B.9) e (B.10), e também  $z_3 > -d/c$ .

No primeiro caso (em que  $z_3 < -d/c$ ) o mapeamento leva a pontos  $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbf{R}$  tais que  $w_4 < w_1 < w_2 < w_3$ . No segundo caso (em que  $z_3 > -d/c$ ) o mapeamento leva a pontos que satisfazem  $w_3 < w_4 < w_1 < w_2$ .

O importante é que, em qualquer um dos dois casos o mapeamento  $SL(2; \mathbf{R})$  é cíclico.

### 3. Mapeamento cíclico específico de $n$ pontos

Seguindo a linha de raciocínio de 1. e 2. não é difícil se convencer de que, escolhido um mapeamento cíclico específico entre os pontos  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  (tais que  $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ ) e os pontos  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , sempre será possível achar uma



transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  responsável por esse mapeamento. Isto significa identificar adequadamente os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  com três dos pontos  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

Em particular, sempre será possível achar uma transformação  $SL(2; \mathbf{R})$  que mapeia  $z_1 < z_2 < \dots < z_n$  em  $w_n < w_1 < \dots < w_{n-1}$  que é o mapeamento citado na seção 4.5.1 desta dissertação.

# Apêndice C

## C.1 Equivalência entre as fórmulas da amplitude de espalhamento

Esta seção seta baseado no seção 3 do artigo[15].

A amplitude de espalhamento em teoria de cordas é dada pela fórmula

$$A^{(n)} = \frac{g_0^{n-2}}{\text{Vol}(SL(2, \mathbf{C}))} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \left\langle \prod_{j=1}^n \hat{V}(x_j, k_j) \right\rangle. \quad (\text{C.1})$$

O operador de vértice satisfaz as relações

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \hat{V}(x_n, k_n) |0, 0\rangle \equiv |\phi_n\rangle, \quad \langle 0, 0 | \lim_{x_1 \rightarrow \infty} x_1^2 \hat{V}(x_1, k_1) \equiv \langle \phi_1|. \quad (\text{C.2})$$

A transformação  $SL(2, \mathbf{R})$  é definida por

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (\text{C.3})$$

onde a, b, c e d satisfaz  $ad-bc=1$ .

Da expressão C.3 podemos mostrar que

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{1}{(cx + d)^2}. \quad (\text{C.4})$$

O operador  $\hat{V}(x, k)$  é um operador primário, então ele satisfaz a relação (2.45). Do requerimento da invariância de Weyl o operador de vértice tem peso  $h=1$ . Assim de (2.45) temos

$$\hat{V}'(x', k) = \left( \frac{dx'}{dx} \right)^{-1} \hat{V}(x, k). \quad (\text{C.5})$$

Da equação (C.4) podemos rescrever (C.5) como

$$U \hat{V} \left( \frac{ax+b}{cx+d}, k \right) U^{-1} = (cx+d)^2 \hat{V}(x, k). \quad (\text{C.6})$$

Da expressão C.6 para vemos que o operador de vértice da seguinte forma

$$U \hat{V}(1, k) U^{-1} = z \hat{V}(x, k). \quad (\text{C.7})$$

Fazemos a seguinte transformação a seguinte mudança de variáveis  $\hat{y}_i = x_{i+1}/x_i$ , onde  $i=1, 2, \dots, n-2$ . O jacobiano é dado por  $\det(\partial x_i / \partial y_i)$ . Então a amplitude C.1 torna-se

$$A^{(n)} = g_0^{n-2} \left\langle \phi_1 \left| \hat{V}(1, k_2) \hat{\Delta} \hat{V}(1, k_3) \cdots \hat{\Delta} \hat{V}(1, k_{n-1}) \right| \phi_n \right\rangle. \quad (\text{C.8})$$

onde  $\hat{\Delta}$  é o propagador definido como  $\hat{\Delta} = 1/(\hat{L}_0 - 1)$ .

## C.2 Amplitude de Espalhamento

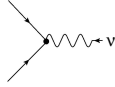
Nesta seção vamos encontrar a amplitude de espalhamento da lagrangeana 5.12. Começamos com  $L_{int} = a_1 \phi^3$ . O vértice é obtido da fórmula A.5

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} : \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3) &= i \frac{\delta^3}{\delta \phi(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_1 \int dp_1 dp_2 dp_3 \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \\ &= i 6 a_1 g_0^3. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Então a amplitude de espalhamento é dado por

$$A(k_1; k_2; k_3) = i 6 a_1 g_0^3 (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \quad (\text{C.10})$$

O vértice da lagrangeana  $L_{int} = A_\mu (\partial^\mu \phi) \phi$  é dado por



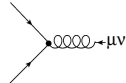
$$\begin{aligned}
: \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^\nu &= \frac{\delta^3}{\delta A^\nu(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_2 \int dp_1 dp_2 dp_3 A_\mu(p_1) p_2^\mu \phi(p_2) \phi(p_3) \\
&= a_2 g_0'^3 (k_2^\nu + k_3^\nu)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Para obtermos amplitude contraímos (C.11) com  $\zeta^\nu$  e inserimos o fator  $(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3)$ .

$$A(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = a_2 g_0'^3 (\zeta_1 \cdot k_2 + \zeta_1 \cdot k_3) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \tag{C.12}$$

Usamos a conservação do momento e condição de estado físico  $\zeta_1 \cdot k_1 = 0$  é fácil ver que a amplitude C.12 é igual a zero.

O vértice da lagrangeana  $L_{int} = a_3 H^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi)$  é



$$\begin{aligned}
: \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^{\mu\nu} &= -i \frac{\delta^3}{\delta H^{\mu\nu}(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_3 \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\
&\quad \times H^{\rho\sigma}(p_1) p_{2\rho} \phi(p_2) p_{3\sigma} \phi(p_3) \\
&= -i a_3 (k_2^\mu k_3^\nu + k_3^\mu k_2^\nu)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

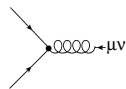
Contraímos (C.13) com o tensor polarização  $\zeta^{\mu\nu}$  e inserimos o fator  $(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3)$  encontramos

$$A(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = -i a_3 g_0'^3 \zeta_1^{\mu\nu} (k_2^\mu k_3^\nu + k_3^\mu k_2^\nu) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \tag{C.14}$$

Da conservação do momento e da condição física  $\zeta_1^{\mu\nu} k_{1\mu} = 0$  implica que

$$A(k_1, \zeta_1; k_2; k_3) = -i 2 a_3 g_0'^3 \zeta_1^{\mu\nu} (k_2^\mu k_3^\nu) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3). \tag{C.15}$$

Agora vamos determinar o vértice de  $L_{int} = a_4 (\partial_\mu H^{\mu\nu}) (\partial_\nu \phi) \phi$



$$\begin{aligned}
: \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^{\mu\nu} &= -i \frac{\delta^3}{\delta H^{\mu\nu}(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_4 \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\
&\quad \times p_{1\rho} H^{\rho\sigma}(p_1) p_{2\sigma} \phi(p_2) \phi(p_3) \\
&= -i a_4 (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu)
\end{aligned} \tag{C.16}$$

A amplitude de três pontos do vértice C.16 é igual a zero por causa da condição física.

O vértice de  $L_{int} = \frac{a_5}{\alpha'} \eta_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \phi^2$  é dado por

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} : \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^{\mu\nu} &= i \frac{\delta^3}{\delta H^{\mu\nu}(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_5 \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\
 &\times \frac{1}{\alpha'} \eta_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \\
 &= i 2 \frac{a_5}{\alpha'} \eta_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

A amplitude de três pontos do vértice C.17 é igual a zero, pois ao contrair com o tensor polarização encontramos  $\zeta^\mu{}_\mu = 0$ .

O vértice de  $L_{int} = a_6 \eta_{\mu\nu} H^{\mu\nu} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi)$  é

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} : \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^{\mu\nu} &= -i \frac{\delta^3}{\delta H^{\mu\nu}(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_6 \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\
 &\times \eta_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}(p_1) p_2^\alpha \phi(p_2) p_{3\alpha} \phi(p_3) \\
 &= -i 2 a_6 \eta^{\mu\nu} (k_2 \cdot k_3)
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

O amplitude de espalhamento de três pontos do vértice C.18 é nula, porque  $\zeta^\mu{}_\mu = 0$ .

Finamente vamos calcular o vértice de  $L_{int} = a_7 (\partial^\sigma H^{\mu\nu}) \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \phi) \phi$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} : \mathcal{V}(k_1, k_2, k_3)^{\mu\nu} &= -i \frac{\delta^3}{\delta H^{\mu\nu}(k_1) \delta \phi(k_2) \delta \phi(k_3)} a_7 \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\
 &\times \eta_{\rho\sigma} p_1^\alpha H^{\rho\sigma}(p_1) p_{2\alpha} \phi(p_2) \phi(p_3) \\
 &= -i a_7 \eta^{\mu\nu} (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3)
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Novamente, devido ao fato de  $\zeta^\mu{}_\mu = 0$ , a amplitude do vértice (C.19) é igual a zero.

### C.3 Transformação dos Coeficientes

Vamos analisar se todos os coeficientes da lagrangeana 5.12 podem ser determinados. Aqui vamos discutir apenas os termos que envolve dois táquiões e uma partícula de Fierz-Pauli. Temos que investigar como a lagrangeana transforma sobre a transformação  $H^{\mu\nu} = \tilde{H}^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}(\tilde{H})$ , onde

$$T^{\mu\nu}(\tilde{H}) = b_1 H \eta^{\mu\nu} + b_2 \partial^\alpha \partial_\alpha H^{\mu\nu} + b_3 \partial^\mu \partial^\nu H + \dots \quad (\text{C.20})$$

Substituímos a transformação  $H^{\mu\nu} = \tilde{H}^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}(\tilde{H})$  na lagrangeana 5.12 encontramos

$$\begin{aligned} L_{int} \rightarrow & L_{int} + a_3 b_1 H (\partial^\sigma \phi) (\partial_\sigma \phi) + a_4 b_1 (\partial^\sigma H) (\partial_\sigma \phi) \phi + \frac{26}{\alpha'} a_5 b_1 H \phi^2 \\ & + 26 a_6 b_1 H (\partial^\sigma \phi) (\partial_\sigma \phi) + a_7 b_1 (\partial^\sigma H) (\partial_\sigma \phi) \phi + \frac{a_5 b_2}{\alpha'} (\partial^\sigma \partial_\sigma H) \phi^2 \\ & + \frac{a_5 b_3}{\alpha'} (\partial^\sigma \partial_\sigma H) \phi^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Da expressão (C.21) verificamos que os coeficientes, da lagrangeana 5.12, mudam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{a}_5 &= a_5 + 26 a_5 b_1, & \tilde{a}_6 &= a_6 + a_3 b_1 + 26 a_6 b_1, \\ \tilde{a}_7 &= a_7 + a_4 b_1 + 26 a_7 b_1 - \frac{2}{\alpha'} a_5 b_2 - \frac{2}{\alpha'} a_5 b_3. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

# Apêndice D

Este apêndice está baseado na introdução do artigo[5].

## D.1 Teorema da Equivalência

Na dedução da ação efetiva nem sempre é possível fichar todos os coeficientes por comparação das matrizes S. Esta ambiguidade pode ser resolvida se usarmos o teorema da equivalência: diferentes lagrangeanas levam a mesma matriz S.

Consideremos um campo escalar  $\varphi$  e uma fonte externa J que depende de x. Nós definimos o funcional de energia  $W[J]$  por:

$$e^{-W[J]} = \int [d\varphi] \exp(-S[\varphi] + \varphi \cdot J). \quad (\text{D.1})$$

Agora fazemos a transformação do campo  $\varphi = \tilde{\varphi} + T(\tilde{\varphi})$ , onde  $T(\tilde{\varphi})$  é um polinômio do campo.

$$e^{-W[J]} = \int [d\tilde{\varphi}] \exp(-\tilde{S}[\tilde{\varphi}] + \tilde{\varphi} \cdot J + T(\tilde{\varphi}) \cdot J), \quad (\text{D.2})$$

onde na mudança  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$  ignoramos a mudança relacionada ao jacobiano. E definimos a ação como  $\tilde{S}[\tilde{\varphi}] := S[\varphi]$ .

Da transformação de Legendre de  $W[J_{in}]$ :

$$W[J_{in}] = S[\varphi_0] - \int d^{26}x J_{in} \varphi_0, \quad (\text{D.3})$$

esta equação é conhecida como ação efetiva.

A generalização do funcional para a matriz S:

$$\hat{\Gamma}[\varphi_{in}] = W[J_{in}], \quad J_{in} = \varphi_{in}\Delta, \quad S = \int d^{26}x \varphi\Delta\varphi + S_{in}. \quad (\text{D.4})$$

Para provar o teorema de equivalência é necessário mostrar  $\tilde{\hat{\Gamma}}[\varphi_{in}] = \hat{\Gamma}[\varphi_{in}]$ . Nós assumimos  $\tilde{\varphi}_{in} = \varphi_{in}$ . Das equações (D.3) e (D.4) encontramos:

$$\hat{\Gamma}[\varphi_{in}] = S[\varphi_0] - \int d^{26}x \varphi_{in}\Delta\varphi_0, \quad (\text{D.5})$$

Se fizermos a transformação  $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 + T(\tilde{\varphi}_0)$ . Como  $T(\tilde{\varphi}_0)$  é um polinômio do campo. Podemos derivar por parte a equação  $\int d^{26}x \varphi_{in}\Delta T(\tilde{\varphi}_0)$  e usarmos o fato  $\Delta\varphi_{in} = 0$  (equação de uma onda livre) para mostrar  $\int d^{26}x \varphi_{in}\Delta T(\tilde{\varphi}_0) = 0$ . Note que  $\int d^{26}x \varphi_{in}\Delta\varphi_0 \neq 0$ , porque temos uma singularidade. Assim mostramos  $\tilde{\hat{\Gamma}}[\varphi_{in}] = \hat{\Gamma}[\varphi_{in}]$ .

Após a transformação temos também:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right)_{\varphi_0} \equiv \left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\tilde{\varphi}}\right)_{\varphi_0} = 0, \quad (\text{D.6})$$

pois  $\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\tilde{\varphi}}\right) = \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right) \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\tilde{\varphi}}\right) = 0$ .



# Apêndice E

## E.1 Expansão da Função Gamma

Para calcular a expansão da função Gamma precisamos da formula:

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \quad (\text{E.1})$$

e da expansão de Taylor da função  $\ln\Gamma(1+z)$  [11],

$$\ln\Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} z^k, \quad (-1 < z \leq 1), \quad (\text{E.2})$$

após algumas manipulações encontramos a expansão na potência de  $\alpha'$ :

$$\frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} = \frac{1}{\alpha'^2 st} \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k} \alpha'^k (s^k + t^k - (s+t)^k) \right\} \quad (\text{E.3})$$

onde usamos  $u = -s - t$

Assim encontramos a (6.12), ou seja,

$$\frac{\Gamma(-\alpha's)\Gamma(-\alpha't)}{\Gamma(1+\alpha'u)} = \frac{1}{\alpha'^2 st} - \zeta(2) + u\zeta(3)\alpha' + O(\alpha'^2) \quad (\text{E.4})$$

onde,  $\zeta(k)$  é a função Zeta de Riemann.

# Apêndice F

## F.1 Identificação dos Coeficientes Arbitrário no Caso Abeliano.

Agora pretendemos mostrar que os coeficientes  $d_0$ ,  $d_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  e  $c_7$  da ação (6.1) são arbitrários. A ideia é obter a equação (6.6).

Primeiro vamos estudar como o termo de mais baixa ordem da ação (6.1) transforma sobre a transformação  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$ .

Substituímos  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$  em  $F_{\mu\nu}$  após manipulações simples obtemos:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu T_\nu - \partial_\nu T_\mu. \quad (\text{F.1})$$

onde  $T_\mu$  é dado por (6.5).

Da equação (F.1) encontramos:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\mu T_\nu) - 2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\nu T_\mu) + 4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu). \quad (\text{F.2})$$

Note de (F.2) e (6.5) que a contribuição na ordem  $\alpha'$ ,  $(\alpha')^2$  e  $(\alpha')^3$  vem, respectivamente, dos termos  $4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu)$ ,  $2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\mu T_\nu) - 2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\nu T_\mu) + 4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu)$  e  $4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu)$ .

Assim na ordem de  $(\alpha')$  temos:

$$\begin{aligned} 4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu) &= 4(2\alpha')b_1 F^{\mu\nu}(\partial_\mu \partial^\rho F_{\rho\nu}) \\ &= -8(\alpha')b_1(\partial^\mu F_\mu{}^\nu)(\partial^\rho F_{\rho\nu}) + \text{derivadas totais} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Da ação (6.1) e de (F.3) obtemos que  $d_0$  transforma como:

$$\tilde{d}_0 = d_0 - 8b_1 \quad (\text{F.4})$$

Na ordem de  $(\alpha')^2$  encontramos:

$$\begin{aligned} 2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\mu T_\nu) - 2(\partial^\mu T^\nu)(\partial_\nu T_\mu) + 4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu) = & - 2(2\alpha')^2 b_1^2 (\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^\mu \partial_\mu \partial^\rho F_\rho{}^\nu) + \\ & + 2(2\alpha')^2 b_1^2 (\partial^\lambda F_\lambda{}^\nu)(\partial^\mu \partial_\nu \partial^\rho F_{\rho\mu}) + \\ & + \textit{derivadas totais} \\ = & - 2(2\alpha')^2 b_1^2 (\partial^\lambda F_\lambda{}^\nu)(\partial^2 \partial^\rho F_{\rho\nu}) + \\ & + \textit{derivadas totais}. \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Neste caso, o terceiro termos do lado esquerdo de (F.5) é nulo. Para mostrar isto integramos por parte e usamos também que um tensor simétrico contraído com uma anti-simétrico é igual a zero. Os termos sem contribuição em (F.5) é proporcional a  $F^3$ .

Da ação (6.1) e de (F.5) encontramos que  $d_3$  transforma-se:

$$\tilde{d}_3 = d_3 - 2b_1^2. \quad (\text{F.6})$$

Na ordem  $(\alpha')^3$  obtemos

$$\begin{aligned} 4F^{\mu\nu}(\partial_\mu T_\nu) = & -4(2\alpha')^3 \{b_5(\partial^\mu F_{\mu\nu})(\partial^\beta F_\beta{}^\nu)F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} + b_6(\partial^\mu F_{\mu\nu})(\partial^\beta F^{\nu\lambda})F_\beta{}^\sigma F_{\lambda\sigma} + \\ & + b_7(\partial^\mu F_{\mu\nu})(\partial^2 F^{\nu\lambda})(\partial^\rho F_{\rho\lambda}) + \textit{derivadas totais}\}. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

O terceiro termo do lado direito de (F.7) é igual a zero. Comparamos a equação (F.7) com (6.1) encontramos:

$$\tilde{c}_4 = c_4 - 4b_5, \quad \tilde{c}_5 = c_5 - 4b_6. \quad (\text{F.8})$$

Agora vamos analisar o termo da ordem de  $\alpha'$  da ação (6.1), ou seja, como  $\alpha' d_0(\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^\rho F_\rho{}^\nu)$  transforma-se sobre a transformação  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$ .

Usamos a equação (F.1) para mostrar:

$$\alpha' d_0(\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^\rho F_\rho{}^\nu) = \alpha' d_0[\partial^\lambda F_{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial_\lambda T_\nu - \partial^\lambda \partial_\nu T_\lambda][\partial^\rho F_\rho{}^\nu + \partial^\rho \partial_\rho T^\nu - \partial^\rho \partial^\nu T_\rho]. \quad (\text{F.9})$$

Das expressão (F.9) e (6.5) os termos que contribuem a ordem  $(\alpha')^2$  são:

$$(2\alpha')d_0(\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^\rho\partial_\rho T^\nu) - (\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^\rho\partial^\nu T_\rho) = (2\alpha')d_0b_1(\partial^\lambda F_{\lambda\nu})(\partial^2\partial^\rho F_\rho{}^\nu) \quad (\text{F.10})$$

Da ação (6.1) e das equações (F.10) e (F.6) vemos que  $d_3$  transforma-se:

$$\tilde{d}_3 = d_3 - 2b_1^2 + d_0b_1. \quad (\text{F.11})$$

A contribuição de (F.9) na ordem  $(\alpha')^3$  é nula.

Agora resta analisar os termos de ordem  $(\alpha')^3$  da ação (6.1). Após a transformação  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$  é possível mostrar que a contribuição de  $d_3\partial^\lambda F_\lambda{}^\mu\partial^2\partial^\rho F_{\rho\mu}$  é nula (proporcional a  $F^3$ ). Sobram os termos  $F_\mu{}^\rho F_\nu{}^\mu F_\sigma{}^\nu F_\rho{}^\sigma$  e  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ . Após a transformação de  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$  encontramos que  $c_6$  transforma como:

$$\tilde{c}_6 = c_6 + d_2b_1, \quad (\text{F.12})$$

e de  $F_\mu{}^\rho F_\nu{}^\mu F_\sigma{}^\nu F_\rho{}^\sigma$  obtemos que  $c_7$  transforma como:

$$\tilde{c}_7 = c_7 + d_1b_1. \quad (\text{F.13})$$

## F.2 Amplitude de Quatro Pontos

Nesta seção nós utilizaremos as regras de Feynman do apêndice C para calcular a amplitude de espalhamento da teoria de campos da ação (6.1), a qual é repetida aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{4} \int d^{26}x \{ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha' d_0 \partial^\mu F_\mu{}^\nu \partial^\rho F_{\rho\nu} + (2\alpha')^2 [d_1 F_\mu{}^\rho F_\nu{}^\mu F_\sigma{}^\nu F_\rho{}^\sigma + d_2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \\ & + d_3 \partial^\lambda F_\lambda{}^\mu \partial^2 \partial^\rho F_{\rho\mu}] + (2\alpha')^3 \sum_{i=1}^7 c_i J_i + O(\alpha^4) \}, \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

onde  $c_i$  é dado por 6.3.

Precisamos calcular apenas a amplitude de quatro pontos, pois não temos na ação (F.14) termos cúbicos. Aqui vamos indicar os passos necessários para calcular a amplitude

(6.7), para isto calcularemos a amplitude de quatro pontos da seguinte lagrangeana de interação:

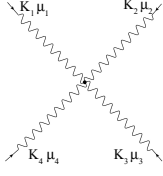
$$L_{int} = \frac{1}{4}(2\alpha')^3 \partial^\alpha F^{\mu\nu} \partial_\alpha F_{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}. \quad (\text{F.15})$$

A equação (F.15) corresponde ao termo do coeficiente  $c_1$  da ação (F.14).

Para utilizarmos as regras de Feynman precisamos expressar a lagrangeana em termos dos campos, ou seja, substituímos  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  na equação (F.15). Assim encontramos:

$$\begin{aligned} L_{int} = 2\alpha'^3 \left\{ & (\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\lambda A_\rho)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu) + (\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu) + \right. \\ & - 2(\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu) + (\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\lambda A_\rho)(\partial^\alpha \partial^\nu A^\mu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) + \\ & + (\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\nu A^\mu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) - 2(\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\nu A^\mu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) + \\ & - 2(\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\lambda A_\rho)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) - 2(\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) + \\ & \left. + 4(\partial^\lambda A^\rho)(\partial_\rho A_\lambda)(\partial^\alpha \partial^\mu A^\nu)(\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) \right\}. \quad (\text{F.16}) \end{aligned}$$

Para determinar o vértice de quatro pontos de (F.16) usamos a equação (A.5), após os cálculos achamos



$$\begin{aligned}
& : \mathcal{V}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \\
& -i32\alpha'^3 \left\{ k_2^{\mu_1} k_1^{\mu_2} k_4^{\mu_3} k_3^{\mu_4} (k_1 \cdot k_2) + k_3^{\mu_1} k_4^{\mu_2} k_1^{\mu_3} k_2^{\mu_4} (k_1 \cdot k_3) + \right. \\
& + k_4^{\mu_1} k_3^{\mu_2} k_2^{\mu_3} k_1^{\mu_4} (k_1 \cdot k_4) + k_4^{\mu_1} k_3^{\mu_2} k_2^{\mu_3} k_1^{\mu_4} (k_2 \cdot k_3) + \\
& + k_2^{\mu_1} k_1^{\mu_2} k_4^{\mu_3} k_3^{\mu_4} (k_3 \cdot k_4) + k_3^{\mu_1} k_4^{\mu_2} k_1^{\mu_3} k_2^{\mu_4} (k_2 \cdot k_4) + \\
& - g^{\mu_1 \mu_4} k_3^{\mu_2} k_2^{\mu_3} (k_1 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_4 + k_2 \cdot k_3) + \\
& - g^{\mu_2 \mu_3} k_4^{\mu_1} k_1^{\mu_4} (k_2 \cdot k_3)(k_1 \cdot k_4 + k_2 \cdot k_3) + \\
& - g^{\mu_1 \mu_3} k_4^{\mu_2} k_2^{\mu_4} (k_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4) + \\
& - g^{\mu_2 \mu_4} k_3^{\mu_1} k_1^{\mu_3} (k_2 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4) + \\
& - g^{\mu_1 \mu_2} k_4^{\mu_3} k_3^{\mu_4} (k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot k_2 + k_3 \cdot k_4) + \\
& - g^{\mu_3 \mu_4} k_2^{\mu_1} k_1^{\mu_2} (k_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_2 + k_3 \cdot k_4) + \\
& + g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} (k_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_2 + k_3 \cdot k_4) + \\
& + g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} (k_1 \cdot k_4)(k_2 \cdot k_3)(k_1 \cdot k_4 + k_2 \cdot k_3) + \\
& \left. - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} (k_1 \cdot k_3)(k_2 \cdot k_4)(k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_4) \right\} \times \\
& \times \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \tag{F.17}
\end{aligned}$$

Do vértice (F.17) é fácil calcular a amplitude de espalhamento com polarização  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  e  $\zeta_4$ , momentos externos  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  e que satisfaça as condições física em (6.8) e (6.9), ou seja, contraímos (F.17) com  $\zeta_{1\mu_1}, \zeta_{2\mu_2}, \zeta_{3\mu_3}$  e  $\zeta_{4\mu_4}$  temos:

$$\begin{aligned}
A^{(4)} = & i(2\alpha')^3 \{ (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4)s^3 + (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4)u^3 + (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)t^3 + \\
& + 2(k_3 \cdot \zeta_4)(k_4 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)s^2 + 2(k_1 \cdot \zeta_2)(k_2 \cdot \zeta_1)(\zeta_3 \cdot \zeta_4)s^2 + \\
& + 2(k_2 \cdot \zeta_4)(k_4 \cdot \zeta_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_3)u^2 + 2(k_1 \cdot \zeta_3)(k_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_4)u^2 + \\
& + 2(k_2 \cdot \zeta_3)(k_3 \cdot \zeta_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_4)t^2 + 2(k_1 \cdot \zeta_4)(k_4 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)t^2 + \\
& + \dots \}, \tag{F.18}
\end{aligned}$$

onde usamos as variáveis de Mandelstam.

Em (F.18) calculamos apenas nos termos  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot \zeta)$  e  $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)(\zeta \cdot k)$ , porque são suficientes para os cálculos da seção 6.1. As outras contribuições para a amplitude de espalhamento (6.7) é obtida por cálculos semelhantes aos anteriores.

A expressão (F.18) coincide (na camada de massa) com amplitude de espalhamento da seção 4.4 no limite  $\alpha'$

Nesta trabalho usamos o pacote FeynCalc3.5 do Mathematica para calcular as amplitudes de espalhamento.

# Apêndice G

## G.1 Algumas definições e relações que surgem em uma teoria não abeliana

Nós definimos o tensor de campo de forma não abeliana por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + if^{abc}A_{\mu b}A_{\nu c}, \quad (\text{G.1})$$

onde  $f^{abc}$  é a constante de estrutura e é totalmente anti-simétrica. A relação de comutação das matrizes geradoras do grupo de Lie,  $\lambda^a$ , é

$$[\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc}\lambda^c, \quad (\text{G.2})$$

Nós adotamos a condição de normalização:

$$\text{tr}(\lambda^a\lambda^b) = \delta^{ab}. \quad (\text{G.3})$$

A derivada covariante vem definida por

$$(D_\lambda)_{ab} = \partial_\lambda\delta_{ab} - if_{mab}A_\lambda^m. \quad (\text{G.4})$$

Assim nós temos:

$$D_\lambda F_{\mu\nu}^a = \partial_\lambda F_{\mu\nu}^a - if_{mab}A_\lambda^m F_{\mu\nu}^b. \quad (\text{G.5})$$

Vamos aplicar a derivada novamente:



$$\begin{aligned}
D_\kappa D_\lambda F_{\mu\nu}^a &= \partial_\kappa \partial_\lambda F_{\mu\nu}^a + i f^{and} A_\kappa^n \partial_\lambda F_{\mu\nu}^d - i f^{mac} \partial_\kappa (A_\lambda^m F_{\mu\nu}^c) + \\
&- f^{amc} f^{mnd} A_\kappa^n A_\lambda^d F_{\mu\nu}^c - f^{amc} f^{cnd} A_\lambda^m A_\kappa^n F_{\mu\nu}^d.
\end{aligned} \tag{G.6}$$

Podemos escrever  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \lambda^a$  nós podemos reescrever (G.1) como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{G.7}$$

e (G.4) como:

$$D_\lambda = \partial_\lambda + [A_\lambda, \cdot]. \tag{G.8}$$

Portanto, a equação (G.6) torna:

$$\begin{aligned}
D_\kappa D_\lambda F_{\mu\nu}^a &= \partial_\kappa \partial_\lambda F_{\mu\nu}^a + [A_\kappa, \partial_\lambda F_{\mu\nu}^a] + [\partial_\kappa A_\lambda, F_{\mu\nu}^a] + \\
&+ [A_\lambda, \partial_\kappa F_{\mu\nu}^a] + [A_\kappa, [A_\lambda, F_{\mu\nu}^a]].
\end{aligned} \tag{G.9}$$

Da relação (G.6) podemos mostrar:

$$[D_\mu, D_\nu] F_{\rho\sigma} = [F_{\mu\nu}, F_{\rho\sigma}]. \tag{G.10}$$

## G.2 Identificação dos Coeficientes Arbitrário no Caso Não Abeliano.

Na presente seção pretendemos determinar quais dos coeficientes da ação 6.16 não podem ser determinados.

Agora analisaremos como  $F_{\lambda\mu}$  e a derivada covariante  $D^\lambda$  transforma após a transformação  $A_\mu = \tilde{A}_\mu + T_\mu(\tilde{A})$ .

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu} &= \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda + [A_\lambda, A_\mu] \\
&\rightarrow \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda + [A_\lambda, A_\mu] + \partial_\lambda T_\mu - \partial_\mu T_\lambda + [A_\lambda, T_\mu] + [T_\lambda, A_\mu] + [T_\lambda, T_\mu] \\
&= F_{\lambda\mu} + D_\lambda T_\mu - D_\mu T_\lambda + [T_\lambda, T_\mu]
\end{aligned} \tag{G.11}$$

$$\begin{aligned}
D^\lambda &= \partial^\lambda + [A^\lambda, \ ] \\
&\rightarrow \partial^\lambda + [A^\lambda + T^\lambda, \ ] \\
&= \partial^\lambda + [A^\lambda, \ ] + [T^\lambda, \ ]
\end{aligned} \tag{G.12}$$

Dos resultados (G.11) e (G.12) implica que

$$\begin{aligned}
D^\lambda F_{\lambda\mu} &= \partial^\lambda F_{\lambda\mu} + [A^\lambda, F_{\lambda\mu}] \\
&\rightarrow \partial^\lambda F_{\lambda\mu} + \partial^\lambda D_\lambda T_\mu - \partial^\lambda D_\mu T_\lambda + \partial^\lambda [T_\lambda, T_\mu] + [T^\lambda, F_{\lambda\mu}] + \\
&+ [T^\lambda, F_{\lambda\mu}] + [T^\lambda, D_\lambda T_\mu] - [T^\lambda, D_\mu T_\lambda] + [T^\lambda [T_\lambda, T_\mu]] \\
&= D^\lambda F_{\lambda\mu} + D^\lambda D_\lambda T_\mu - D^\lambda D_\mu T_\lambda + D^\lambda [T_\lambda, T_\mu] + [T^\lambda, F_{\lambda\mu}]
\end{aligned} \tag{G.13}$$

Da expressão (G.11) podemos escrever

$$tr(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \rightarrow tr(\{F^{\mu\nu} + D^\mu T^\nu - D^\nu T^\mu + [T^\mu, T^\nu]\} \times \{F_{\mu\nu} + D_\mu T_\nu - D_\nu T_\mu + [T_\mu, T_\nu]\}) \tag{G.14}$$

Da equação G.14 estamos interessados nos termos de ordem  $\alpha'$  e  $(\alpha')^2$ . Precisamos da expressão de  $T(\tilde{A})$  dada por (6.21) a qual repetimos aqui por conveniência.

$$\begin{aligned}
T_\mu(A) &= 2\alpha' b_1 D^\rho F_{\rho\mu} + (2\alpha')^2 [b_2 F^{\rho\nu} D_\mu F_{\rho\nu} + b_3 (D_\mu F^{\rho\nu}) F_{\rho\nu} + b_4 (D^\rho F_\rho{}^\nu) F_{\mu\nu} + b_5 F_\mu{}^\nu D^\rho F_{\rho\nu} + \\
&+ b_6 D^2 D^\rho F_{\rho\mu}] + O(\alpha'^3).
\end{aligned} \tag{G.15}$$

Estamos interessados nos termos de (G.14) com um e dois T que são, respectivamente,

$$tr(-4D^\mu F_{\mu\nu} T^\nu) \tag{G.16}$$

e

$$tr(4F^{\mu\nu} T_\mu T_\nu) + tr(2D^\mu T^\nu D_\mu T_\nu) - tr(2D^\mu T^\nu D_\nu T_\mu) \tag{G.17}$$

Substituímos (G.15) em (G.16) encontramos

$$\begin{aligned}
tr(-4D^\mu F_{\mu\nu} T^\nu) &= -tr(8\alpha' b_1 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\rho F_\rho{}^\nu) + 4(2\alpha')^2 [b_2 (D^\mu F_{\mu\nu}) F^{\rho\sigma} (D^\nu F_{\rho\sigma}) + \\
&\quad + b_3 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\nu F^{\rho\sigma}) F_{\rho\sigma} + b_4 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\rho F_\rho{}^\sigma) F^\nu{}_\sigma + \\
&\quad + b_5 (D^\mu F_{\mu\nu}) F^{\nu\sigma} D^\rho F_{\rho\sigma} + b_6 (D^\mu F_{\mu\nu}) D^2 D^\rho F_\rho{}^\nu]). \quad (G.18)
\end{aligned}$$

Precisamos fazer algumas manipulações com o termo que multiplica o coeficiente  $b_3$ .

$$\begin{aligned}
tr(b_3 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\nu F^{\rho\sigma}) F_{\rho\sigma}) &= -b_3 tr((D^\mu F_{\mu\nu}) F_{\rho\sigma} (D^\nu F^{\rho\sigma}) + (D^\nu D^\mu F_{\mu\nu}) F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \\
&\quad + \text{derivadas totais}. \quad (G.19)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
D^\nu T_\nu = D^\nu D^\rho F_{\rho\nu} &= [D^\nu, D^\rho] F_{\rho\nu} + D^\rho D^\nu F_{\rho\nu} \\
&= \underbrace{[F^{\nu\rho}, F_{\rho\nu}]}_0 - D^\rho D^\nu F_{\nu\rho} \\
&= -D^\nu D^\rho F_{\rho\nu} = -D^\nu T_\nu = 0 \quad (G.20)
\end{aligned}$$

Usamos a propriedade cíclica do traço e as equações (G.19) e (G.20) podemos reescrever (G.18) como

$$\begin{aligned}
tr(-4D^\mu F_{\mu\nu} T^\nu) &= -tr(8\alpha' b_1 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\rho F_\rho{}^\nu) + 4(2\alpha')^2 [b_2 F^{\rho\sigma} (D^\nu F_{\rho\sigma})(D^\mu F_{\mu\nu}) + \\
&\quad - b_3 F_{\rho\sigma} (D^\nu F^{\rho\sigma})(D^\mu F_{\mu\nu}) + b_4 (D^\mu F_{\mu\nu})(D^\rho F_\rho{}^\sigma) F^\nu{}_\sigma + \\
&\quad - b_5 (D^\rho F_{\rho\sigma})(D^\mu F_{\mu\nu}) F^{\sigma\nu} - b_6 (D^\lambda D^\mu F_{\mu\nu})(D_\lambda D^\rho F_\rho{}^\nu)]). \quad (G.21)
\end{aligned}$$

Comparamos a equação G.21 com a ação 6.16 vemos que  $a_2$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  e  $a_9$  transforma como

$$\tilde{a}_2 = a_2 - 4b_1, \quad \tilde{a}_7 = a_7 - 4b_2 + 4b_3 \quad \tilde{a}_8 = a_8 - 4b_4 + 4b_5 \quad \tilde{a}_9 = a_9 + 4b_6. \quad (G.22)$$

O segundo termos de (G.17) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
tr(-D^\mu T^\nu D_\nu T_\mu) &= tr((D_\nu D^\mu T^\nu) T_\mu + \text{derivadas totais}) \\
&= tr([D_\nu, D^\mu] T^\nu T_\mu + (D_\mu D_\nu T^\nu) T^\mu) \\
&= tr([F_{\nu\mu}, T^\nu] T^\mu - (D^\nu T_\nu)(D^\mu T_\mu)) \\
&= tr(2F_{\nu\mu} T^\nu T^\mu - (D^\nu T_\nu)(D^\mu T_\mu)) \quad (G.23)
\end{aligned}$$

Usamos as equações G.20 e G.23 para reescrever (G.17)

$$\begin{aligned} tr(4F^{\mu\nu}T_\mu T_\nu) + tr(2D^\mu T^\nu D_\mu T_\nu) - tr(2D^\mu T^\nu D_\nu T_\mu) &= 2tr(D^\mu T^\nu D_\mu T_\nu) \\ &+ 8tr(F_{\nu\mu}T^\nu T^\mu). \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

Substituímos (G.15) em (G.24) temos

$$\begin{aligned} tr(4F^{\mu\nu}T_\mu T_\nu) + tr(2D^\mu T^\nu D_\mu T_\nu) - tr(2D^\mu T^\nu D_\nu T_\mu) &= 2(2\alpha')^2 b_1^2 tr((D^\mu D^\rho F_\rho{}^\nu)(D_\mu D^\sigma F_{\sigma\nu})) \\ &+ 8(2\alpha')^2 b_1^2 tr((D^\rho F_\rho{}^\nu)(D^\sigma F_\sigma{}^\mu)F_{\nu\mu}). \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

Comparamos a equação G.25 com a ação 6.16, com o resultado (G.22), vemos que  $a_8$  e  $a_9$  transforma como

$$\tilde{a}_8 = a_8 - 4b_4 + 4b_5 + 8b_1^2 \quad \tilde{a}_9 = a_9 + 4b_6 + 2b_1^2. \quad (\text{G.26})$$

Do resultado G.11 temos

$$\begin{aligned} (2\alpha')a_1 tr(F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F_\mu^\nu) &= (2\alpha')a_1 tr(\{F_\lambda^\mu + D^\mu T_\lambda - D_\lambda T^\mu + [T^\mu, T_\lambda]\} \times \\ &\times \{F_\nu^\lambda + D^\lambda T_\nu - D_\nu T^\lambda + [T^\lambda, T_\nu]\} \times \\ &\times \{F_\mu^\nu + D^\nu T_\mu - D_\mu T^\nu + [T^\nu, T_\mu]\}) \\ &= (2\alpha')a_1 tr(F_\lambda^\mu D^\lambda T_\nu F_\mu^\nu - F_\lambda^\mu D^\nu T_\lambda F_\mu^\nu + D^\mu T_\lambda F_\nu^\lambda F_\mu^\nu + \\ &- D_\lambda T^\mu F_\nu^\lambda F_\mu^\nu + F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda D^\nu T_\mu - F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda D_\mu T^\nu) + \\ &+ O((2\alpha)^2) \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

Após usar a propriedade cíclica do traço e substituir (G.15) em (G.27) obtemos

$$\begin{aligned} (2\alpha')a_1 tr(F_\lambda^\mu F_\nu^\lambda F_\mu^\nu) &= -6(2\alpha')^2 a_1 b_1 tr((D^\lambda F_{\lambda\mu})(D^\rho F_\rho{}^\nu)F_{\mu\nu}) + \\ &+ \textit{derivadas totais}. \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

Então  $a_8$  transforma-se como

$$\tilde{a}_8 = a_8 - 4b_4 + 4b_5 + 8b_1^2 - 6a_1b_1. \quad (\text{G.29})$$

De (G.13) implica que

$$\begin{aligned} (2\alpha')a_2tr(D^\lambda F_{\lambda\mu}D^\rho F_{\rho\mu}) &= (2\alpha')a_2tr(\{D^\lambda F_{\lambda\mu} + D^\lambda D_\lambda T_\mu - D^\lambda D_\mu T_\lambda + D^\lambda [T_\lambda, T_\mu] + [T^\lambda, F_{\lambda\mu}]\} \times \\ &\quad \times \{D^\rho F_{\rho\mu} + D^\rho D_\rho T_\mu - D^\rho D_\mu T_\rho + D^\rho [T_\rho, T_\mu] + [T^\rho, F_{\rho\mu}]\}) \\ &= -2(2\alpha')^2 a_2 b_1 tr((D^\rho D^\lambda F_{\lambda\mu})(D_\rho D^\sigma F_{\sigma}{}^\mu)) \\ &\quad - 8(2\alpha')^2 a_2 b_1 tr((D^\lambda F_{\lambda\mu})(D^\rho F_{\rho\nu})F^{\mu\nu}) + O((2\alpha)^3) + \\ &\quad + \textit{derivadas totais}. \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

Na última passagem usamos a propriedade cíclica do traço, a expressões (G.20) e (G.15). De (G.30) temos contribuição para a transformação de  $a_8$  e  $a_9$ . Consideramos todas as passagens anteriores vemos que os coeficientes  $a_2$ ,  $a_7$ ,  $a_8$  e  $a_9$  transformam como

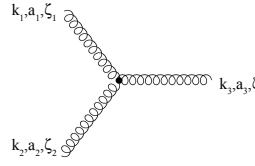
$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2 - 4b_1, & \tilde{a}_7 &= a_7 - 4b_2 + 4b_3 - 3a_1b_1, \\ \tilde{a}_8 &= a_8 - 4b_4 + 4b_5 + 8b_1^2 - 6a_1b_1 - 8a_2b_1, \\ \tilde{a}_9 &= a_9 + 4b_6 + 2b_1^2 - 2a_2b_1. \end{aligned} \quad (\text{G.31})$$

### G.3 Amplitude de três pontos

Apresentamos aqui os cálculos da amplitude de três pontos da ação (6.16). Os termos que contribui para o vértice de três bósons vetoriais não massivos são:

$$\begin{aligned} a_0tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (2\alpha')a_1F_\mu{}^\lambda F_\lambda{}^\nu F_\nu{}^\mu) &= a_0F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^b + (2\alpha')a_0a_1F_\mu{}^\lambda F_\lambda{}^\nu F_\nu{}^\mu tr(\lambda^a\lambda^b\lambda^c) \\ &= a_0g_0''^3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(if^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c}) + \dots + \\ &\quad + (2\alpha')a_0a_1g_0''^3 \left\{ (\partial_\mu A^{\lambda a} - \partial^\lambda A_\mu^a)(\partial_\lambda A^{\nu b} - \partial^\nu A_\lambda^b) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\partial_\nu A^{\mu c} - \partial^\mu A_\nu^c) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.32})$$

Os pontos  $\dots$  indicam termos não cúbicos. Agora usamos a formula (A.5) para encontramos o vértice:



$$\begin{aligned}
& : \mathcal{V}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{a_1 a_2 a_3}(k_1, k_2, k_3) = \\
& a_0 g_0''^3 \left\{ i \left[ (k_1 - k_2)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2} + (k_2 - k_3)^{\mu_1} g^{\mu_2 \mu_3} + (k_3 - k_1)^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3} \right] + \right. \\
& \left. - 3(2\alpha') a_1 (k_1^{\mu_3} k_2^{\mu_1} k_3^{\mu_2} - k_1^{\mu_2} k_2^{\mu_3} k_3^{\mu_1}) \right\} \text{tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2} \lambda^{a_3}]).
\end{aligned} \tag{G.33}$$

Da conservação do momento podemos provar  $(k_1 \cdot k_2) = (k_1 \cdot k_3) = (k_2 \cdot k_3) = 0$ . Por isto termos do tipo  $(k_i \cdot k_j)$  ( $i$  e  $j$  é igual a 1, 2 ou 3) não contribui para o vértice. Agora contraímos o vértice (G.33) com  $\zeta_{1\mu_1}$ ,  $\zeta_{2\mu_2}$ , e  $\zeta_{3\mu_3}$  e inserimos o fator  $(2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3)$  obtemos a amplitude de espalhamento:

$$A(k_1, \zeta_1; k_2, \zeta_2; k_3, \zeta_3) = C_1 + C_2, \tag{G.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2i a_0 g_0''^3 \{ (k_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) + (k_2 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (k_3 \cdot \zeta_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_3) \} \times \\
& \times \text{tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2} \lambda^{a_3}]) (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3)
\end{aligned} \tag{G.35}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= -6 a_0 a_1 g_0''^3 (2\alpha') (k_1 \cdot \zeta_3)(k_2 \cdot \zeta_1)(k_3 \cdot \zeta_2) \text{tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2} \lambda^{a_3}]) \times \\
& \times (2\pi)^{26} \delta^{26}(k_1 + k_2 + k_3)
\end{aligned} \tag{G.36}$$

Para chegarmos a amplitude de espalhamento (G.34) usamos a conservação do momento e as condições físicas  $k_j^2 = 0$  e  $\zeta^j k_j = 0$ . Os termos  $C_1$  da amplitude (G.34) correspondem a amplitude de espalhamento de três vértice da ação de Yang-Mills.