

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DINÂMICA INTERVALAR DE ESTRUTURAS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Autor: **Fabiano Sangi de Oliveira**  
Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Itajubá, Julho de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DINÂMICA INTERVALAR DE ESTRUTURAS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Autor: **Fabiano Sangi de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Curso: **Mestrado em Engenharia Mecânica**

Área de concentração: **Projeto, Materiais e Processos**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Julho de 2018  
MG-Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DINÂMICA INTERVALAR DE ESTRUTURAS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Autor: **Fabiano Sangi de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Composição da Banca Examinadora:

**Dr. Fernando José de Oliveira Moreira - EMBRAER**

**Dr. Bruno Silva de Sousa - IEM/UNIFEI**

**Dr. José Juliano de Lima Junior - IEM/UNIFEI**

# **Dedicatória**

*Dedico este trabalho à todos que contribuíram de alguma forma, em qualquer grau, para sua realização.*

# Agradecimentos

À toda minha família, pela ajuda e torcida.

Ao competente Professor Dr. José Juliano de Lima Junior, orientador desse trabalho, pela amizade, receptividade, por todas as orientações, e por transmitir com paciência o conhecimento, de outra forma as coisas teriam sido bem mais difíceis.

Ao sr. Pedro Pereira Ribeiro Filho e dona Luzia Pedon Pereira Ribeiro, pela amizade e por toda a ajuda que me foi prestada durante esse período.

À todos os meus colegas da UNIFEI, pelas conversas, incentivos, etc.

À todos os pagadores de impostos desse país, inclusive eu, por terem dado condições financeiras à CAPES de fornecer uma bolsa de pesquisa.

À CAPES por fornecer uma bolsa de pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UNIFEI pela oportunidade de realizar os estudos.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade de ler o trabalho e participar da banca, assim como pelas contribuições para o mesmo.

*Diante de toda a subjetividade da palavra sucesso, caso alguém o possua sem ter trabalhado para isso, certamente ele não o pertence, e sim a outra pessoa.*

Fabiano Sangi de Oliveira

# Resumo

Oliveira, F. S. de (2018). *Análise Dinâmica Intervalar de Estruturas Utilizando o Método dos Elementos Finitos*. 103 p.. Dissertação (Mestrado em Projeto, Materiais e Processos) - Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá.

No presente trabalho, o objetivo é estudar e quantificar incertezas paramétricas em sistemas estruturais sujeitos às vibrações mecânicas, utilizando a Análise Intervalar e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Para isso, apresenta-se uma metodologia, juntamente com a proposição de um novo método para solucionar o Problema do Autovalor Intervalar Generalizado. Desenvolveu-se quatro programas, além de um *toolbox* com diversas funções, para obter os autovalores, as frequências naturais e os modos de vibração incertos, que são utilizados para solucionar os exemplos numéricos apresentados. Assim, é possível verificar a viabilidade da utilização da análise intervalar e do MEF para a quantificação de incertezas paramétricas em tais sistemas. Quatro métodos de solução são utilizados para validar o método proposto, o *Deif's Solution Theorem* (DST), o *Eigenvalue Inclusion Principle* (EIP), o *Parameter Vertex Solution Theorem* (PVST) e o método de *Monte Carlo*, que é amplamente utilizado para validação de novos métodos. Em ordem decrescente, mostra-se que no DST, EIP e PVST os intervalos são superestimados, em comparação com o método de Monte Carlo. Através dos resultados numéricos, fica evidenciado que o método proposto retorna os resultados intervalares com excelente precisão para os problemas, em comparação com Monte Carlo. Sendo assim, demonstra-se, que a forma mais indicada para resolver o problema do autovalor intervalar generalizado, é utilizando o método proposto.

**Palavras-Chave:** Análise dinâmica intervalar. Vibrações mecânicas. Problema do autovalor intervalar. Quantificação de incertezas. Método dos elementos finitos.

# Abstract

Oliveira, F. S. de (2018). *Dynamic Interval Analysis of Structures Using the Finite Element Method*. 103 p.. Dissertation (Master in Project, Materials and Processes) - Institute of Mechanical Engineering, Federal University of Itajubá, Itajubá.

In the present work, the objective is to study and quantify parametric uncertainties in structural systems subject to mechanical vibrations, using Interval Analysis and Finite Element Method (FEM). For this, a methodology was presented, together with the proposition of a new method to solve the Generalized Interval Eigenvalue Problem. We have developed four programs, as well as a toolbox with several functions, to obtain the eigenvalues, the natural frequencies and the uncertain vibration modes, which are used to solve the presented numerical examples. Thus, it was possible to verify the feasibility of the use of the interval analysis and the FEM for the quantification of parametric uncertainties in such systems. Four methods of solution are used to validate the proposed method, the *Deif's Solution Theorem* (DST), the *Eigenvalue Inclusion Principle* (EIP), the *Parameter Vertex Solution Theorem* (PVST), and the *Monte Carlo* method, which is widely used for validation of new methods. In decreasing order, it is shown that in DST, EIP and PVST the intervals are overestimated, compared to the Monte Carlo method. Through the numerical results, it is evidenced that the proposed method returns the interval results with excellent precision for the problems, in comparison with Monte Carlo. Thus, it is demonstrated that the most adequate way to solve the generalized interval eigenvalue problem is to use the proposed method.

**Keywords:** Interval dynamic analysis. Mechanical vibrations. Interval eigenvalue problem. Quantification of uncertainties. Finite element method.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Algoritmos</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Acrônimos</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Símbolos Gregos</b>	<b>xvi</b>
<b>Lista de Símbolos Latinos</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Símbolos Subscritos</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Símbolos Sobrescritos</b>	<b>xx</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Estado da Arte . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	4
1.2.1 Objetivos gerais . . . . .	4
1.2.2 Objetivos específicos . . . . .	4
1.3 Contribuição do Trabalho . . . . .	5
1.4 Organização do Trabalho . . . . .	5
<b>2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Matriz de Rigidez do Elemento de Barra . . . . .	8
2.3 Matriz de Massa do Elemento de Barra . . . . .	19
2.4 Matriz de Rigidez e Massa do Elemento de Viga . . . . .	25
2.5 Matriz de Rigidez e Massa do Elemento de Pórtico . . . . .	30
<b>3 ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA INTERVALAR</b>	<b>34</b>
3.1 Matrizes de Rigidez e Massa Intervalares . . . . .	34
3.2 Aritmética Intervalar . . . . .	36
3.3 O Problema do Autovalor Intervalar . . . . .	37
3.3.1 Deif's solution theorem . . . . .	37
3.3.2 Eigenvalue inclusion principle . . . . .	38
3.3.3 Método proposto . . . . .	39

3.4	Método de Monte Carlo . . . . .	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA VALIDAÇÃO</b>	<b>45</b>
4.1	Treliça Plana com 8 Barras . . . . .	45
4.2	Viga Escalonada com 3 Elementos . . . . .	47
4.3	Pórtico Plano com 4 Elementos . . . . .	49
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES DE OUTROS EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>52</b>
5.1	Treliça Plana com 24 Barras . . . . .	52
5.2	Treliça Espacial com 60 barras . . . . .	55
5.3	Pórtico Plano com 10 Elementos . . . . .	57
	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>61</b>
	Perspectivas Futuras . . . . .	62
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>66</b>
	APÊNDICE A . . . . .	67
	O Problema do Autovalor . . . . .	67
	APÊNDICE B . . . . .	70
	Artigo Publicado no COBEM 2017 . . . . .	70
	APÊNDICE C . . . . .	80
	Artigos Publicados no CILAMCE 2017 . . . . .	80

# Lista de Figuras

2.1	Elemento de barra na coordenada local. . . . .	8
2.2	Funções de interpolação lineares. . . . .	9
2.3	Elemento de barra inclinado no plano. . . . .	12
2.4	Elemento de barra no espaço tridimensional. . . . .	15
2.5	Elemento de barra em movimento no plano. . . . .	19
2.6	Elemento de barra em movimento no espaço tridimensional. . . . .	23
2.7	Viga com carregamento dependente do tempo. . . . .	26
2.8	Elemento de viga discretizado. . . . .	27
2.9	Elemento de viga discretizado com carregamento axial. . . . .	30
2.10	Elemento de pórtico no plano. . . . .	31
3.1	Números pseudo-aleatórios. . . . .	42
3.2	Esfera de raio $r$ inscrita no cubo de lado $2r$ . . . . .	42
3.3	Aproximação do número $\pi$ por Monte Carlo. . . . .	44
4.1	Treliça com oito barras. . . . .	46
4.2	Quatro primeiros autovalores intervalares da treliça com oito barras usando <i>Eigenvalue Inclusion Principle</i> (esquerda), Monte Carlo (centro) e o Método Proposto (direita). . . . .	47
4.3	Viga escalonada com três elementos. . . . .	48
4.4	Simulações com método de Monte Carlo para viga escalonada com três elementos. . . . .	49
4.5	Pórtico plano com quatro elementos. . . . .	50
4.6	Simulações com método de Monte Carlo para o pórtico plano com quatro elementos. . . . .	51
5.1	Treliça plana com 24 barras. . . . .	53
5.2	Primeiras quatro frequências naturais da treliça com 24 barras. . . . .	53
5.3	Modos de vibração da treliça com 24 barras para $\alpha = 5\%$ . . . . .	55
5.4	Treliça espacial com 60 barras. . . . .	56
5.5	Resposta em frequência dos 3 primeiros modos de vibração da treliça com 60 barras. . . . .	57
5.6	Pórtico plano com 10 elementos. . . . .	58
5.7	Resposta em frequência dos 4 primeiros modos de vibração do pórtico com 10 elementos. . . . .	59
5.8	Modos de vibração do pórtico com 10 elementos. . . . .	60

# Lista de Tabelas

3.1	Dados estatísticos para o <i>GCLM</i> e função <i>rand</i> (Matlab) com MT. . . . .	42
4.1	Autovalores intervalares para treliça com oito barras para $\alpha = 2\%$ . . . . .	47
4.2	Áreas das seções transversais e momentos de inércia de área incertos para a viga escalonada com três elementos. . . . .	48
4.3	Autovalores Intervalares para viga escalonada com três elementos. . . . .	48
4.4	Frequências naturais do pórtico plano com quatro elementos em rad/s. . . . .	51
5.1	Frequências naturais em Hz da treliça com 24 barras para $\alpha = 5\%$ . . . . .	54
5.2	Primeiras 15 frequências naturais em Hz da treliça com 60 barras. . . . .	56
5.3	Frequências naturais em Hz do pórtico com 10 elementos. . . . .	58

# Lista de Algoritmos

3.1	APROXIMAÇÃO DO NÚMERO $\pi$ . . . . .	43
-----	---------------------------------------	----

# Lista de Acrônimos

**CAPES** Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de  
Nível Superior

**EMBRAER** Empresa Brasileira de Aeronáutica

**IEM** Instituto de Engenharia Mecânica

**MATLAB** *Matrix Laboratory*

**MG** Minas Gerais

**UNIFEI** Universidade Federal de Itajubá

# Lista de Abreviaturas

$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
<b>DCA</b>	<i>Difference of Convex Functions Algorithm</i>
<b>DST</b>	<i>Deif's Solution Theorem</i>
<b>EIP</b>	<i>Eigenvalue Inclusion Principle</i>
<b>EUI</b>	<i>Extra Unitary Interval</i>
<b>FRF</b>	Função Resposta em Frequência
<b>GCL</b>	Gerador Congruente Linear
<b>GCLM</b>	Gerador Congruente Linear Multiplicativo
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MT</b>	<i>Mersenne Twister</i>
<b>PVST</b>	<i>Parameter Vertex Solution Theorem</i>
<b>QB</b>	<i>Quadratic Programming with Box Constrains</i>

# Lista de Símbolos Gregos

$\Delta$	Raio de matriz intervalar
$\alpha$	Fator percentual de variação de parâmetro
$\beta$	Ângulo em (rad)
$\lambda$	Autovalores do sistema em (rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$\omega$	Frequência de excitação em (rad/s)
$\omega_n$	Frequência natural em (rad/s)
$\psi$	Ângulo em (rad)
$\rho$	Massa específica em (kg/m <sup>3</sup> )
$\sigma$	Tensão normal no elemento discretizado em (N/m <sup>2</sup> )
$\theta$	Ângulo em (rad)
$\varepsilon$	Deformação no elemento discretizado

# Lista de Símbolos Latinos

$A$	Área da seção transversal em (m)
$E$	Módulo de Young em (N/m <sup>2</sup> )
$F_{iX}$	Força aplicada no nó $i$ na direção $X$ na coordenada global em (N)
$F_{iY}$	Força aplicada no nó $i$ na direção $Y$ na coordenada global
$F_{iZ}$	Força aplicada no nó $i$ na direção $Z$ na coordenada global
$F_{jX}$	Força aplicada no nó $j$ na direção $X$ na coordenada global
$F_{jY}$	Força aplicada no nó $j$ na direção $Y$ na coordenada global
$F_{jZ}$	Força aplicada no nó $j$ na direção $Z$ na coordenada global
$I$	Momento de inércia de área em (m <sup>4</sup> )
$L$	Comprimento do elemento em (m)
$T$	Energia cinética em (J)
$U_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $X$ na coordenada global em (m)
$U_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $X$ na coordenada global
$V_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $Y$ na coordenada global
$V_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $Y$ na coordenada global
$W_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $Z$ na coordenada global
$W_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $Z$ na coordenada global
$[D]$	Matriz dinâmica
$[F]_e$	Vetor com carregamentos no elemento na coordenada global
$[H(j\omega)]$	Função resposta em frequência em (m/N)
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema em (N/m)
$[K]_e$	Matriz de rigidez do elemento na coordenada global

$[M]$	Matriz de massa do sistema em (kg)
$[M]_e$	Matriz de massa do elemento na coordenada global
$[N]$	Matriz com as funções de interpolação
$[R]$	Matriz de transformação da coordenada local para a global
$[S]$	Matriz diagonal com os sinais dos autovetores centrais
$[d]_e$	Vetor com deslocamentos do elemento na coordenada global
$[k]_e$	Matriz de rigidez do elemento na coordenada local
$[m]_e$	Matriz de massa do elemento na coordenada local
$\curvearrowright_+$	Direção positiva de aplicação dos momentos
$\uparrow_+$	Direção positiva de aplicação das forças
$\{f(t)\}$	Vetor com excitação externa
$\{u(t)\}$	Vetor com as coordenadas generalizadas
$\{u\}_e$	Vetor com os deslocamentos nodais
$\{x\}$	Vetor com os autovetores ou modos de vibrar
$f_i$	Força aplicada no nó $i$ na direção $x$ na coordenada local
$f_j$	Força aplicada no nó $j$ na direção $x$ na coordenada local
$f_n$	Frequência natural em (Hz)
$m$	Número de graus de liberdade
$n$	Número de elementos
$t$	Tempo em (s)
$u_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $x$ na coordenada local em (m)
$u_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $x$ na coordenada local
$v_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $y$ na coordenada local
$v_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $y$ na coordenada local
$w_i$	Deslocamento do nó $i$ na direção $z$ na coordenada local
$w_j$	Deslocamento do nó $j$ na direção $z$ na coordenada local

# Lista de Símbolos Subscritos

- Limite inferior do intervalo
- $e$  Elemento
- $n$  n-ésimo valor
- $p$  Pórtico
- $v$  Viga

# Lista de Símbolos Sobrescritos

- Limite superior do intervalo
- $-1$  Inversa de matriz
- $\cdot$  Velocidade
- $\ddot{\phantom{x}}$  Aceleração
- $I$  Representação de número intervalar
- $T$  Transposta de matriz
- $c$  Valor central ou médio do intervalo

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O homem, ao longo da história, vem tentando entender os fenômenos naturais que o cercam, e para torná-los mais palpáveis formulam teorias e leis, que se alicerçam na matemática e física. Porém, devido à complexidade de modelar tais fenômenos, fica difícil prever com exatidão o que irá acontecer com os sistemas em operação com o passar do tempo. Um exemplo bastante didático é a taxa de corrosão em sistemas vibratórios mecânicos, como no caso de estruturas em aço. Sabendo-se que a frequência natural do sistema é função da massa e rigidez, e que a corrosão acarreta na perda de massa e mudança na rigidez, conseqüentemente, ocorrerá mudanças nas frequências naturais do sistema devido à taxa de corrosão. Outro exemplo são as incertezas nos modelos e também nos parâmetros, acarretando como conseqüências, incertezas na previsão das frequências naturais do sistema.

Os erros são inerentes à todos os processos conhecidos. Podem ser erros de medição, aproximações, arredondamentos, entre outros. Dessa forma, o intuito de uma análise intervalar, é fornecer intervalo com limites inferior e superior onde o valor exato da variável em análise esteja contido, ou seja, intervalo no qual os erros presentes no sistema estejam computados.

A abordagem é importante tanto na fase de projeto como na reabilitação de estruturas, como por exemplo treliças, vigas, pórticos, pois as mesmas são muito utilizadas em coberturas de estádios, torres de transmissão, galpões de aplicações gerais, e outros. As incertezas devem ser quantificadas para garantir maior vida útil da estrutura, evitando falhas repentinas, e assim garantindo a segurança das instalações e principalmente das pessoas.

Assim, deve-se, na fase de projeto, identificar tais incertezas e assegurar que na operação do sistema as frequências naturais não fiquem próximas ou iguais as frequências de excitação e ocorra o fenômeno da ressonância, que pode levar o sistema a falhar. Pode-se para isso, quantificar os intervalos em que as frequências naturais estarão contidas.

Para proporcionar robustez e agilidade na análise estrutural, técnicas computacionais são

cada vez mais empregadas. Uma técnica amplamente utilizada é o Método dos Elementos Finitos, que permite boa implementação e maleabilidade na resolução de problemas muitas vezes complexos. Em conjunto com a análise intervalar, o MEF pode ser aplicado para quantificar incertezas em sistemas estruturais diversos.

Como é de conhecimento, as incertezas não são tratadas pelos cálculos que utilizam parâmetros médios, ou seja, através da matemática convencional. Desta forma, deve-se utilizar alguma ferramenta matemática que possa levar em consideração as incertezas, seja de modelo, seja de parâmetros. Então, decidiu-se utilizar a análise intervalar e o MEF como uma forma de quantificar as incertezas *paramétricas* presentes em sistemas sujeitos às vibrações mecânicas.

Sendo assim, em detrimento de se trabalhar com valores carregados de erros, valores médios, utiliza-se um intervalo onde o valor ótimo da variável em questão está contido.

## 1.1 Estado da Arte

Devido à importância de quantificar incertezas em sistemas diversos, estudos utilizando vários métodos de solução foram realizados ao longo dos anos para a solução do Problema do Autovalor Intervalar. Foi apresentado em [Rohn \(1987, 1990\)](#) alguns teoremas e suas provas de como calcular os autovalores de matriz simétrica intervalar.

Em [Deif \(1991\)](#) foi apresentado métodos para calcular os autovalores de matriz dinâmica intervalar simétrica e assimétrica, lembrando que para o caso assimétrico os autovalores podem ser complexos. Apresentou ainda a propriedade de invariância dos sinais dos autovetores dentro do intervalo da matriz dinâmica. Foram resolvidos exemplos numéricos para demonstrar a utilização dos métodos propostos.

Foi discutido em [Chen et al. \(1994b\)](#) um método para calcular os autovalores de matriz dinâmica intervalar simétrica utilizando perturbação com aproximação de primeira ordem. Foi resolvido como exemplo numérico um sistema com cinco graus de liberdade, e os resultados foram comparados com o método apresentado por [Deif \(1991\)](#). Em [Chen et al. \(1994a\)](#) foi utilizado perturbação com aproximação de segunda ordem, sendo realizadas comparações com a aproximação de primeira ordem.

Para matriz de massa do sistema, definida positiva, e matriz de rigidez, semi-definida positiva, [Qiu et al. \(1995\)](#) apresentou o Problema do Autovalor Intervalar Generalizado, juntamente com um método iterativo de solução utilizando o quociente de Rayleigh. Na realidade, o que foi feito, é a generalização do problema apresentado por [Deif \(1991\)](#), aproveitando os resultados da invariância dos sinais dos autovetores.

[Dimarogonas \(1995\)](#) estudou um método para calcular autovalores relacionados à dinâmica

de rotores, com incertezas presentes na matriz de rigidez do sistema. Apresentou ainda, gráfico de resposta no tempo para o sistema com vibração forçada, assim como simulações utilizando o método de Monte Carlo para os autovalores e autovetores.

Utilizando o Método dos Elementos Finitos, foi analisado em [Dessombz et al. \(2001\)](#) procedimento para encontrar os limites da função transferência para sistemas mecânicos com parâmetros incertos. Um algoritmo iterativo foi introduzido, obtendo solução conservadora de problemas lineares.

Um método para resolver o problema do autovalor de estruturas com parâmetros intervalares foi apresentado em [Chen et al. \(2003\)](#). Utilizando o MEF, o método baseia-se na perturbação de matrizes, com incertezas nas matrizes de rigidez e massa do sistema. Foram apresentados dois exemplos numéricos para demonstrar a aplicabilidade do método, sendo o primeiro exemplo uma viga engastada-livre e o outro um chassi de automóvel.

Para obter a resposta dinâmica de estruturas com parâmetros intervalares, foi utilizado em [Chen e Wu \(2004\)](#) um método de otimização intervalar. O método combina a extensão do intervalo de funções com a teoria da perturbação da resposta dinâmica. Devido ao fato do método ser baseado na expansão da série de Taylor de primeira ordem, o mesmo deve ser aplicado somente onde o intervalo de incerteza dos parâmetros é pequeno. Para intervalos maiores, a série de Taylor de segunda ordem deve ser considerada.

Com incertezas nas matrizes de rigidez e massa do sistema, devido a incertezas nos parâmetros geométricos e do material, foi utilizado em [Qiu et al. \(2005\)](#) o MEF e a decomposição não negativa de matrizes para resolver o problema do autovalor intervalar generalizado. Foram apresentados dois métodos de solução, o *Parameter vertex solution theorem* e o *Eigenvalue inclusion principle*, que foram comparados com o método apresentado por [Deif \(1991\)](#) através de exemplos numéricos.

O método de análise modal intervalar para estimar parâmetros modais, Função Resposta em Frequência (FRF) e modos de vibração de estruturas foi apresentado em [Sim et al. \(2007\)](#). Para calcular o limite inferior e superior dos autovalores, foi introduzida a suposição referente a não mudança dos sinais dos autovetores, apresentada em [Deif \(1991\)](#). Foi resolvido exemplo numérico de estrutura com cinco graus de liberdade, sendo apresentado as frequências naturais, os modos de vibração, a FRF e simulações de Monte Carlo.

Em [Hladík et al. \(2011\)](#) foram discutidos alguns métodos de solução para calcular os autovalores intervalares para matrizes simétricas. Foram mostrados alguns teoremas e algoritmos para implementação computacional. Exemplos numéricos foram resolvidos para comparar os resultados dos diferentes métodos.

Foi abordado em [Muscolino e Sofi \(2012\)](#) a análise estocástica de estruturas lineares, com pequenas variações nos parâmetros estruturais, e submetidas a excitações aleatórias Gaussianas

de média zero. A ideia chave do método é adotar uma aproximação de primeira ordem da resposta aleatória derivada, melhorando adequadamente a análise de intervalo ordinário. Para validar o procedimento, são analisadas duas estruturas com propriedades de rigidez incertas sob excitação de ruído branco uniformemente modulado.

Algoritmos para implementação computacional, referentes à análise estática e dinâmica, foram apresentados em [Sága et al. \(2014\)](#) com o objetivo de solucionar modelos que utilizam o MEF em estruturas com parâmetros incertos. Foram resolvidos exemplos numéricos para comparar os resultados obtidos por meio dos diferentes métodos. Um dos algoritmos apresentados utiliza o método de Monte Carlo.

A avaliação dos limites inferior e superior das frequências naturais de estruturas com parâmetros incertos, mas limitados, foi abordada em [Sofi et al. \(2015\)](#). A solução do problema do autovalor intervalar generalizado foi realizada levando em consideração a variabilidade real e as dependências de parâmetros estruturais incertos que afetam as matrizes de massa e rigidez. Para este objetivo, as incertezas de intervalo foram tratadas aplicando a *improved interval analysis via extra unitary interval* (EUI). A precisão do método proposto foi demonstrada por meio de exemplos numéricos.

Como mencionado anteriormente em [Chen e Wu \(2004\)](#), quando as incertezas nos parâmetros de intervalo são grandes, deve-se usar a expansão da série de Taylor de segunda ordem em detrimento da de primeira ordem. Foi o que fizeram em [Li et al. \(2017\)](#), onde o problema do autovalor intervalar foi modelado como uma série de problemas de *quadratic programming with box constraints* (QB) e resolvido utilizando *difference of convex functions algorithm* (DCA). Utilizou-se ainda, o MEF para solucionar os exemplos numéricos, sendo uma treliça e uma placa.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos gerais

O objetivo geral desse trabalho é estudar e quantificar incertezas paramétricas em sistemas estruturais sujeitos às vibrações mecânicas, utilizando a análise intervalar e o MEF.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- Apresentar uma metodologia para quantificar incertezas na análise dinâmica de sistemas

estruturais utilizando a análise intervalar e o MEF;

- Desenvolver um programa computacional que determine os autovalores, as frequências naturais e modos de vibração incertos, isto é, dentro de uma faixa;
- Verificar a viabilidade da utilização da análise intervalar e do MEF para quantificar incertezas em sistemas estruturais vibratórios.

### 1.3 Contribuição do Trabalho

Ao longo dos anos muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos nesta área, com significativas contribuições. Considera-se que o presente trabalho cumpriu seu papel no tocante a isso, sendo feito detalhamento de como realizar uma análise estrutural dinâmica intervalar utilizando o MEF. É proposto um método para solucionar o Problema do Autovalor Intervalar, juntamente com diversos programas desenvolvidos para esse fim. É apresentado ainda, alguns exemplos e resultados que não são encontrados na literatura.

### 1.4 Organização do Trabalho

Como foi visto, no Capítulo 1 faz-se uma breve introdução sobre o tema a ser abordado. Busca-se ainda, apresentar o estado da arte em ordem cronológica, com o intuito de demonstrar o que já foi pesquisado na área e a evolução dos métodos propostos. Também são traçados os objetivos a serem alcançados no presente trabalho, assim como suas contribuições.

No Capítulo 2 é demonstrado como obter as matrizes de rigidez e massa para o elemento de barra em duas e três dimensões, para o elemento de viga, e para o elemento de pórtico em duas dimensões, utilizando o MEF, realizando a transformação da coordenada local para a global quando necessário..

No Capítulo 3, são apresentadas ferramentas para a análise estrutural dinâmica na presença de incertezas paramétricas. Inicialmente, demonstra-se, como obter as matrizes de rigidez e massa intervalares nas coordenadas globais do sistema, utilizando o MEF. Posteriormente, analisa-se, algumas propriedades básicas da aritmética intervalar, pois a mesma pode ser utilizada para quantificar incertezas em sistemas estruturais. Apresenta-se ainda, três métodos de solução para o Problema do Autovalor Intervalar Generalizado, incluindo um método proposto. Por fim é abordado o método de Monte Carlo.

No Capítulo 4, com o intuito de validar o método proposto, juntamente com os programas implementados computacionalmente, discuti-se três exemplos numéricos apresentados em ou-

tras literaturas da área, com incertezas nas matrizes de massa e rigidez do sistema. O primeiro exemplo trata-se de uma treliça plana com oito barras, onde os parâmetros incertos estão presentes nas áreas das seções transversais das barras. No segundo exemplo é apresentado uma viga escalonada com incertezas nas seções transversais das áreas e nos momentos de inércia de área. Um pórtico plano com incertezas no módulo de Young, nas seções transversais das áreas e nos momentos de inercia de área é apresentado no terceiro exemplo. Também, são apresentadas simulações utilizando o método de Monte Carlo para comparar com os resultados obtidos pelos outros métodos.

No Capítulo 5 são abordados outros exemplos numéricos para a aplicabilidade do *método proposto*, com o objetivo de obter alguns resultados comumente utilizados em análise dinâmica de sistemas estruturais, porém na presença de incertezas paramétricas. É analisada uma treliça plana com 24 barras, apresentando incertezas em algumas áreas das barras. Analisa-se também uma treliça espacial com 60 barras, que apresenta incertezas nas áreas das barras e no módulo de Young. Por fim é analisado um pórtico plano com 10 elementos, que apresenta incertezas no módulo de Young, nas áreas das seções transversais e nos momentos de inércia de área.

Finalmente, são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras para o trabalho. Faz-se comparação entre os resultados intervalares obtidos com o método proposto e os outros métodos apresentados. Por fim são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é demonstrado como obter as matrizes de rigidez e massa para o elemento de barra em duas e três dimensões, para o elemento de viga, e para o elemento de pórtico em duas dimensões, utilizando o MEF, realizando a transformação da coordenada local para a global quando necessário. Este desenvolvimento é importante para possibilitar um melhor entendimento de como fazê-lo na presença de incertezas paramétricas.

### 2.1 Introdução

Segundo [Hutton \(2004\)](#), o Método dos Elementos Finitos (MEF), é uma técnica computacional usada para obter soluções aproximadas de problemas de valor de contorno em engenharia. Esses problemas são as vezes chamados de problemas de campo, onde o campo é o domínio de interesse, que representa, na maioria das vezes, uma estrutura física. Problemas de engenharia que podem ser resolvidos utilizando o MEF estão presentes nas áreas de Análise Estrutural, Transferência de Calor, Transferência de Massa, Escoamento de Fluido, entre outras.

De acordo com [Chandrupatla e Belegundu \(2014\)](#) o MEF tornou-se uma ferramenta poderosa na solução numérica de uma grande variedade de problemas em engenharia. No MEF os domínios podem ser geometricamente complexos e a probabilidade de se obter uma solução exata é baixa, mesmo assim, é uma técnica poderosa para a obtenção de soluções aproximadas com boa precisão. Ainda segundo [Chandrupatla e Belegundu \(2014\)](#) problemas complexos podem ser modelados com relativa facilidade devido aos avanços na tecnologia da computação, sendo o computador parte essencial da análise.

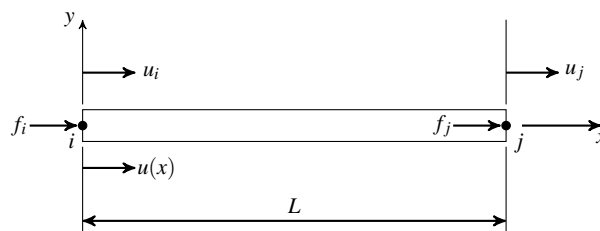
Na aplicação do MEF em análise estrutural, a estrutura ou domínio é discretizada em pequenos elementos ou subdomínios, onde a união da contribuição de cada elemento leva à resposta total da estrutura. Alguns importantes elementos unidimensionais que são vistos a seguir são:

*elemento de barra, elemento de viga e elemento de pórtico.*

## 2.2 Matriz de Rigidez do Elemento de Barra

Primeiramente, para a formulação em elementos finitos de um elemento de barra, conforme ilustrado por meio da Figura (2.1), são necessárias algumas considerações:

1. Material é homogêneo, isotrópico e linear;
2. A barra é geometricamente reta, possuindo seção transversal constante;
3. As forças são aplicadas somente nas extremidades da barra no baricentro da seção transversal;
4. A barra suporta apenas carregamento axial.



**Figura 2.1:** Elemento de barra na coordenada local.

Utilizando a função de deslocamento linear,

$$u(x) = a + bx \quad (2.1)$$

com as seguintes condições de contorno,

$$u(x = 0) = u_i \quad u(x = L) = u_j \quad (2.2)$$

para determinação das funções de interpolação, aplica-se as condições de contorno da Equação (2.2) para os deslocamentos nodais  $u(x)$  na Equação (2.1).

Realizando os devidos cálculos, chega-se a Equação (2.3).

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \left(\frac{x}{L}\right)u_j \quad (2.3)$$

Fazendo,

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.4)$$

dessa forma,

$$u(x) = N_1(x)u_i + N_2(x)u_j \quad (2.5)$$

Colocando na forma matricial a Equação (2.5),

$$u(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$u(x) = [N] \{u\}_e \quad (2.7)$$

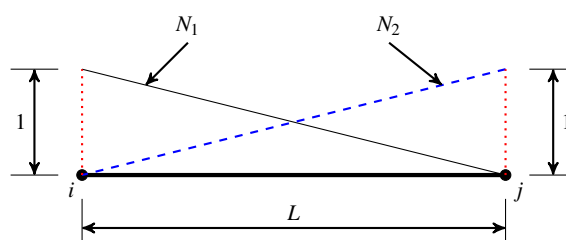
onde  $[N]$  é a matriz com as funções de interpolação e  $\{u\}_e$  é o vetor com os deslocamentos nodais.

As funções de interpolação possuem as seguintes características:

$$N_1(0) = 1 \quad N_2(0) = 0 \quad (2.8)$$

$$N_1(L) = 0 \quad N_2(L) = 1 \quad (2.9)$$

Os resultados apresentados nas Equações (2.8) e (2.9), podem ser observados graficamente por meio da Figura (2.2).



**Figura 2.2:** Funções de interpolação lineares.

Utilizando a formulação direta para obter a matriz de rigidez, a deformação no elemento discretizado é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_x = \frac{u_j - u_i}{L} \quad (2.11)$$

A tensão normal é dada por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.12)$$

Dessa forma, substituindo a Equação (2.10) na Equação (2.12), tem-se

$$\sigma_x = E \frac{du(x)}{dx} \quad (2.13)$$

Como a força é dada por

$$f(x) = A\sigma_x \quad (2.14)$$

Substituindo a Equação (2.12) na Equação (2.14), vem

$$f(x) = AE \frac{du(x)}{dx} \quad (2.15)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( AE \frac{du(x)}{dx} \right) \quad (2.16)$$

Considerando que não existe variação de força no elemento, ou seja, as forças são aplicadas

somente nos nós, segue que

$$\frac{d}{dx} \left[ EA \frac{du(x)}{dx} \right] = 0 \quad (2.17)$$

Substituindo a Equação (2.11) na Equação (2.15), tem-se

$$f(x) = AE \frac{u_j - u_i}{L} \quad (2.18)$$

Observando a Equação (2.18), nota-se que se a mesma tiver sinal positivo, implica que o elemento está sob tração, e dessa forma a força  $f_j$  tem sinal positivo. Sendo assim, por questão de equilíbrio, a força  $f_i$  tem sinal negativo. Dessa forma, tem-se

$$-f_i = AE \frac{u_j - u_i}{L} \quad f_j = AE \frac{u_j - u_i}{L} \quad (2.19)$$

Colocando na forma matricial, fica

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

A Equação (2.20) deve ser aplicada a cada elemento discretizado, dessa forma

$$[k]_e \{u\}_e = \{f\}_e \quad (2.21)$$

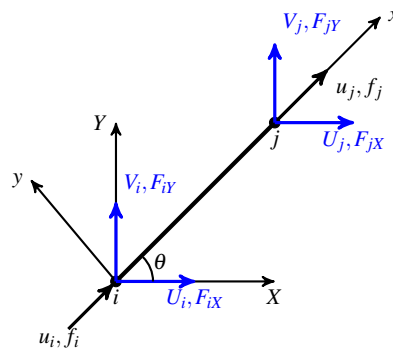
Finalmente a matriz de rigidez do elemento na coordenada local é dada por

$$[k]_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e o vetor de carga do elemento é dado por

$$\{f\}_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Para a solução de problemas estruturais bidimensionais e tridimensionais, faz-se necessário utilizar um sistema de coordenadas globais comum à todos os elementos.



**Figura 2.3:** Elemento de barra inclinado no plano.

Analisando a Figura (2.3), tem-se

$$u_i = U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \quad (2.24)$$

$$u_j = U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \quad (2.25)$$

$$F_{iX} = f_i \cos \theta \quad (2.26)$$

$$F_{iY} = f_i \sin \theta \quad (2.27)$$

$$F_{jX} = f_j \cos \theta \quad (2.28)$$

$$F_{jY} = f_j \sin \theta \quad (2.29)$$

sendo que  $u_i, u_j, f_i, f_j$  estão nas coordenadas locais.

Colocando as Equações (2.24) e (2.25) na forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [R_2] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

onde

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

é conhecida como Matriz de Transformação das coordenadas locais para as globais, para o caso bidimensional.

Colocando também em forma matricial as Equações (2.26) a (2.29).

$$\begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Substituindo a Equação (2.31) na Equação (2.20),

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R_2] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Pré-multiplicando a Equação (2.34) por  $[R_2]^T$ ,

$$[R_2]^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R_2] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Substituindo a Equação (2.33) na Equação (2.35),

$$[R_2]^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R_2] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

fazendo,

$$[K_2]_e = [R_2]^T [k]_e [R_2] \quad (2.37)$$

$$\{d_2\}_e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\{F_2\}_e = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

chega-se a,

$$[K_2]_e \{d_2\}_e = \{F_2\}_e \quad (2.40)$$

onde  $[K_2]_e$  é a matriz de rigidez do elemento nas coordenadas globais,  $\{d_2\}_e$  e  $\{F_2\}_e$  são os vetores de deslocamentos e carregamentos, respectivamente, também nas coordenadas globais para duas dimensões.

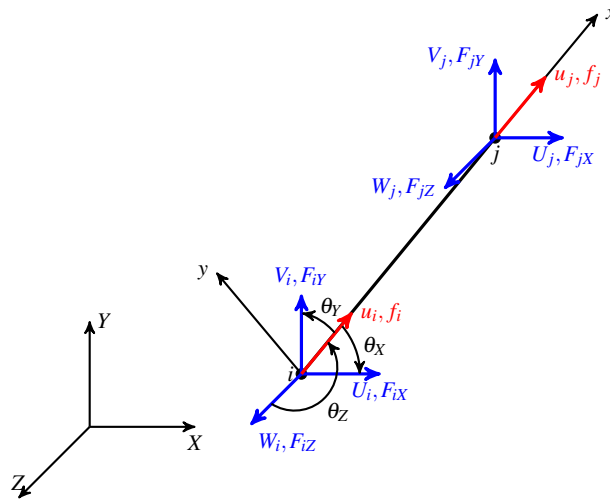
Na aplicação do MEF, os nós são definidos de forma a favorecer a conectividade entre os diversos elementos da estrutura em análise. Sendo assim, observando mais uma vez a Figura (2.3), e aplicando trigonometria básica, chega-se aos seguintes resultados:

$$\cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L} \quad (2.41)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (2.42)$$

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (2.43)$$

Expandindo a análise para os casos tridimensionais, deve-se considerar e utilizar como auxílio para a formulação, a Figura (2.4).



**Figura 2.4:** Elemento de barra no espaço tridimensional.

$$u_i = U_i \cos \theta_X + V_i \cos \theta_Y + W_i \cos \theta_Z \quad (2.44)$$

$$u_j = U_j \cos \theta_X + V_j \cos \theta_Y + W_j \cos \theta_Z \quad (2.45)$$

Colocando as Equações (2.44) e (2.45) na forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [R_3] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

onde  $[R_3]$  é a Matriz de Transformação das coordenadas locais para as globais no espaço tridimensional.

$$F_{iX} = f_i \cos \theta_X \quad (2.48)$$

$$F_{iY} = f_i \cos \theta_Y \quad (2.49)$$

$$F_{iZ} = f_i \cos \theta_Z \quad (2.50)$$

$$F_{jX} = f_j \cos \theta_X \quad (2.51)$$

$$F_{jY} = f_j \cos \theta_Y \quad (2.52)$$

$$F_{jZ} = f_j \cos \theta_Z \quad (2.53)$$

Colocando também as Equações (2.48) a (2.53) na forma matricial, leva a

$$\begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{jZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & 0 \\ \cos \theta_Y & 0 \\ \cos \theta_Z & 0 \\ 0 & \cos \theta_X \\ 0 & \cos \theta_Y \\ 0 & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Substituindo a Equação (2.47) na Equação (2.20) e pré-multiplicando por  $[R_3]^T$ .

$$[R_3]^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R_3] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} = [R_3]^T \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Substituindo a Equação (2.54) na Equação (2.55),

$$[R_3]^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [R_3] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{jZ} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Sendo assim, as matrizes de rigidez, deslocamentos nodais e carregamentos do elemento nas coordenadas globais em três dimensões, são respectivamente,

$$[K_3]_e = [R_3]^T [k]_e [R_3] \quad (2.57)$$

$$\{d_3\}_e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\{F_3\}_e = \begin{Bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{jZ} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

assim

$$[K_3]_e \{d_3\}_e = \{F_3\}_e \quad (2.60)$$

A análise tridimensional é semelhante à bidimensional. Dessa forma, utilizando o conceito de cossenos diretores, tem-se

$$\cos \theta_X = \frac{X_j - X_i}{L} \quad (2.61)$$

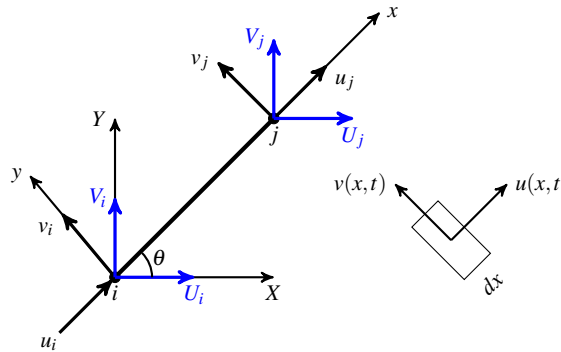
$$\cos \theta_Y = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (2.62)$$

$$\cos \theta_Z = \frac{Z_j - Z_i}{L} \quad (2.63)$$

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (2.64)$$

## 2.3 Matriz de Massa do Elemento de Barra

Para a formulação da matriz de rigidez do elemento de barra, levou-se em consideração somente os deslocamentos axiais, devido ao fato de que as juntas são supostamente pinadas, permitindo o livre movimento rotacional. Entretanto, para o caso da matriz de massa, deve-se levar em consideração o deslocamento de massa transversal, pois o mesmo contribui para a energia cinética do sistema como todo. Esse fato pode ser observado por meio da Figura (2.5), onde o elemento discretizado se movimenta de tal forma no plano.



**Figura 2.5:** Elemento de barra em movimento no plano.

Considerando o elemento de volume diferencial  $dx$  apresentado na Figura (2.5), com deslocamentos axial e transversal, a energia cinética no elemento diferencial é dada por,

$$dT = \frac{1}{2} \rho A dx \left[ \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (2.65)$$

$$dT = \frac{1}{2} \rho A dx (\dot{u}^2(x,t) + \dot{v}^2(x,t)) \quad (2.66)$$

A energia cinética total do elemento de barra é dada pela Equação (2.68).

$$\int_0^T dT = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2(x,t) + \dot{v}^2(x,t)) dx \quad (2.67)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{u}^2(x,t) dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{v}^2(x,t) dx \quad (2.68)$$

Utilizando as funções de interpolação da Equação (2.4), tem-se

$$u(x,t) = N_1(x)u_i(t) + N_2(x)u_j(t) \quad (2.69)$$

$$v(x,t) = N_1(x)v_i(t) + N_2(x)v_j(t) \quad (2.70)$$

Derivando as Equações (2.69) e (2.70) e colocando na forma matricial, vem

$$\dot{u}(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i(t) \\ \dot{u}_j(t) \end{Bmatrix} = [N(x)] \{ \dot{u}(t) \} \quad (2.71)$$

$$\dot{v}(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_i(t) \\ \dot{v}_j(t) \end{Bmatrix} = [N(x)] \{ \dot{v}(t) \} \quad (2.72)$$

Substituindo as Equações (2.71) e (2.72) na Equação (2.68), leva a

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \{ \dot{u} \}^T [N]^T [N] \{ \dot{u} \} dx + \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \{ \dot{v} \}^T [N]^T [N] \{ \dot{v} \} dx \quad (2.73)$$

Fazendo

$$\{ \dot{d}_2 \} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_i \\ \dot{v}_j \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Então

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{d}_2 \}^T [m_2]_e \{ \dot{d}_2 \} \quad (2.75)$$

sendo

$$[m_2]_e = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & N_1 N_2 & 0 \\ 0 & N_1^2 & 0 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & 0 & N_2^2 & 0 \\ 0 & N_1 N_2 & 0 & N_2^2 \end{bmatrix} dx \quad (2.76)$$

Resolvendo a integral da Equação (2.76), chega-se a Equação (2.77), que é a matriz de massa do elemento de barra na coordenada local para o caso bidimensional.

$$[m_2]_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Analisando mais uma vez a Figura (2.5), tem-se

$$u_i = U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \quad (2.78)$$

$$v_i = -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta \quad (2.79)$$

$$u_j = U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \quad (2.80)$$

$$v_j = -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta \quad (2.81)$$

Colocando as Equações (2.78) a (2.81) na forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = [R_{2m}] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

onde  $[R_{2m}]$  é a Matriz de Transformação, que faz a transformação das coordenadas locais para as coordenadas globais. Processo realizado por meio da Equação (2.83).

$$[M_2]_e = [R_{2m}]^T [m_2]_e [R_{2m}] \quad (2.83)$$

Assim,

$$[M_2]_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) & 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) & 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 & 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 & 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Como,  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , tem-se na Equação (2.85) a matriz de massa do elemento na coordenada global para o caso bidimensional.

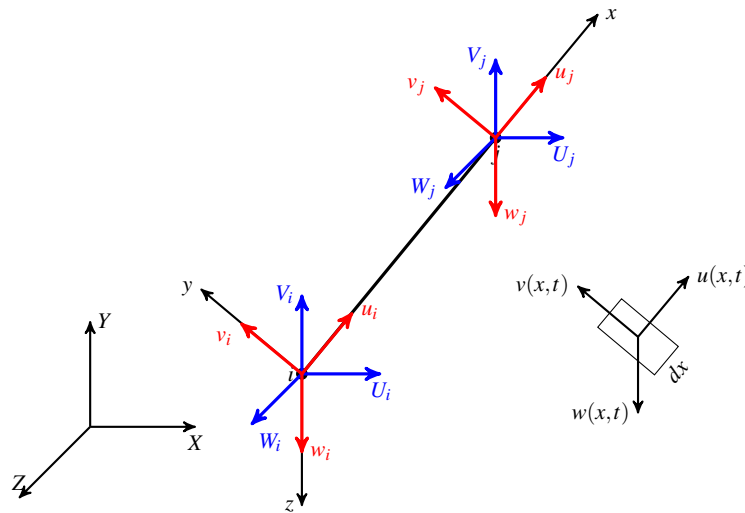
$$[M_2]_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Observe que a Equação (2.85) é idêntica à Equação (2.77), esse fato mostra que a massa não depende das coordenadas do sistema, e conseqüentemente não necessita de transformação de coordenadas. Segundo Hutton (2004) isso ocorre porque a massa é uma propriedade escalar absoluta.

Para o caso tridimensional a análise é similar à feita para duas dimensões. Na Figura (2.6) pode-se observar a discretização do elemento de barra em movimento no espaço.

A energia cinética do elemento de volume diferencial  $dx$  é fornecida por meio da Equação (2.87).

$$dT = \frac{1}{2} \rho A dx \left[ \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (2.86)$$



**Figura 2.6:** Elemento de barra em movimento no espaço tridimensional.

$$dT = \frac{1}{2} \rho A dx (\dot{u}^2(x,t) + \dot{v}^2(x,t) + \dot{w}^2(x,t)) \quad (2.87)$$

A energia cinética total é dada pela Equação (2.89).

$$\int_0^T dT = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2(x,t) + \dot{v}^2(x,t) + \dot{w}^2(x,t)) dx \quad (2.88)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{u}^2(x,t)) dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{v}^2(x,t)) dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{w}^2(x,t)) dx \quad (2.89)$$

Utilizando as funções de interpolação da Equação (2.4), tem-se

$$w(x,t) = N_1(x)w_i(t) + N_2(x)w_j(t) \quad (2.90)$$

Derivando a Equação (2.90) e colocando na forma matricial, leva a

$$\dot{w}(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_i(t) \\ \dot{w}_j(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

Substituindo as Equações (2.71), (2.72) e (2.91) na Equação (2.89), chega-se a

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \{\dot{u}\}^T [N]^T [N] \{\dot{u}\} dx + \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \{\dot{v}\}^T [N]^T [N] \{\dot{v}\} dx + \frac{1}{2}\rho A \int_0^L \{\dot{w}\}^T [N]^T [N] \{\dot{w}\} dx \quad (2.92)$$

Fazendo

$$\{\dot{d}_3\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_i \\ \dot{v}_j \\ \dot{w}_i \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \quad (2.93)$$

Assim

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{d}_3\}^T [m_3]_e \{\dot{d}_3\} \quad (2.94)$$

sendo

$$[m_3]_e = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & 0 & 0 & N_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_2 & 0 & 0 & N_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 N_2 & 0 & 0 & N_2^2 \end{bmatrix} dx \quad (2.95)$$

Resolvendo a integral da Equação (2.95), chega-se na matriz de massa na coordenada local

para o caso tridimensional, que é dada pela Equação (2.96).

$$[m_3]_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Como foi mostrado anteriormente, a massa independe das coordenadas do sistema, dessa forma

$$[M_3]_e = [m_3]_e \quad (2.97)$$

onde  $[M_3]_e$  é a matriz de massa do elemento na coordenada global para o caso tridimensional.

## 2.4 Matriz de Rigidez e Massa do Elemento de Viga

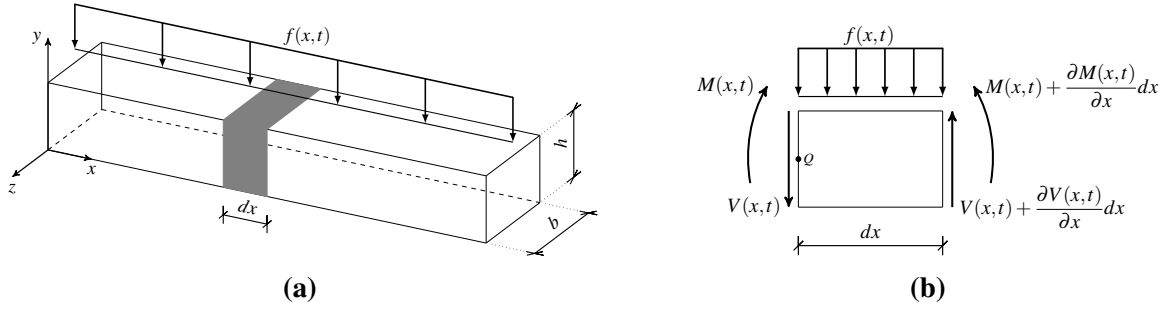
Para a formulação em elementos finitos, de um elemento de viga utilizando a teoria de *Euler-Bernoulli*, algumas considerações são necessárias:

1. O material é linear elástico, homogêneo e isotrópico;
2. A deformação por cisalhamento é muito pequena para ser considerada, sendo isso verdade para  $\frac{l}{b} \geq 10$  e  $\frac{l}{h} \geq 10$ ;
3. Desconsidera-se também a inércia de rotação da viga.

Considerando uma viga de comprimento  $l$ , apresentada por meio da Figura (2.7a), e o diagrama de corpo livre de um elemento diferencial desta viga, apresentado por meio da Figura (2.7b), sendo  $M(x,t)$  o momento de flexão,  $V(x,t)$  a força de cisalhamento, e  $f(x,t)$  a força externa por unidade de comprimento da viga.

Aplicando a segunda Lei de Newton, tem-se

$$\uparrow^+ \sum F_y = \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.98)$$



**Figura 2.7:** Viga com carregamento dependente do tempo.

$$\cancel{V(x,t)} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - \cancel{V(x,t)} - f(x,t) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - f(x,t) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.100)$$

sendo  $\rho$  e  $A(x)$  a massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ) e a área da seção transversal da viga ( $\text{m}^2$ ), respectivamente, e  $v$  a deflexão na direção  $y$  em (m).

Realizando o somatório de momentos em torno do ponto  $Q$ , tem-se

$$\curvearrow_+ \sum M_Q = 0 \quad (2.101)$$

$$\cancel{M(x,t)} + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - \cancel{M(x,t)} + \left[ V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx - [f(x,t) dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.102)$$

$$\left[ \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right] dx + \left[ \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - \frac{f(x,t)}{2} \right] (dx^2) = 0 \quad (2.103)$$

Assumindo  $dx$  ser muito pequeno, implica em  $(dx)^2$  ser quase zero, assim a Equação (2.103) torna-se

$$V(x,t) = - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (2.104)$$

Substituindo a Equação (2.104) na Equação (2.100), leva a

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} dx - f(x,t) dx = \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.105)$$

Pela teoria de *Euler-Bernoulli* a relação entre o momento de flexão  $M$  e a deflexão  $v$ , pode ser expressa como

$$M(x,t) = EI_z(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.106)$$

sendo  $E$  o módulo de Young ( $\text{N/m}^2$ ) e  $I_z(x)$  o momento de inércia de área da seção transversal da viga em torno do eixo  $z$  ( $\text{m}^4$ ).

Substituindo a Equação (2.106) na Equação (2.105) e dividindo por  $dx$ , tem-se

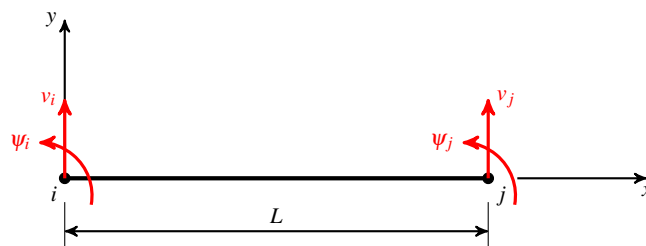
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI_z(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] - f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.107)$$

Para o caso de vibração livre a força externa aplicada  $f(x,t) = 0$ , e assumindo  $EI(x)$  e  $A(x)$  sendo constantes ao longo do comprimento da viga, chega-se a

$$EI_z \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.108)$$

A Equação (2.108) é conhecida como Equação Dinâmica da Viga, modelo de Euler-Bernoulli.

Por meio da Figura (2.8) é apresentado um elemento da viga discretizado, com deslocamento  $v$  e rotação  $\psi$ .



**Figura 2.8:** Elemento de viga discretizado.

Assumindo a função de deslocamento cúbica para interpolar o elemento

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2.109)$$

sendo

$$\frac{dv(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = \psi \quad (2.110)$$

Aplicando as condições de contorno  $x = 0$  e  $x = l$ , tem-se

$$v(0) = a_0 = v_i \quad (2.111)$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = a_1 = \psi_i \quad (2.112)$$

$$v(L) = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 = v_j \quad (2.113)$$

$$\frac{dv(L)}{dx} = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 = \psi_j \quad (2.114)$$

Resolvendo as Equações (2.111) a (2.114) simultaneamente e substituindo os resultados na Equação (2.109), chega-se a

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) v_i + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \psi_i + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) v_j + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \psi_j \quad (2.115)$$

Fazendo

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, \quad N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.116)$$

tem-se

$$v(x) = N_1(x)v_i + N_2(x)\psi_i + N_3(x)v_j + N_4(x)\psi_j \quad (2.117)$$

Colocando na forma matricial, leva a

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \psi_i \\ v_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} \quad (2.118)$$

$$v(x) = [N]\{d\} \quad (2.119)$$

onde a matriz  $[N]$  contém as funções de interpolação.

Finalmente, para obter a matriz de rigidez do elemento de viga, aplica-se o método de *Galerkin*, que pode ser visto em detalhes em [Hutton \(2004\)](#), no termo de quarta ordem da Equação (2.108), que é identificado como resíduo, assim

$$EI_z \int_0^L N_i(x) \frac{d^4 v(x)}{dx^4} dx = 0 \quad (2.120)$$

onde  $N_i(x)$  são as funções de interpolação apresentadas na Equação (2.116).

Resolvendo-se a Equação (2.120) e realizando algumas manipulações, observando a necessidade de baixar a ordem do integrando, pois as funções de interpolação são cúbicas, obtém-se

$$[k_v]_e = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

onde  $[k_v]_e$  é a matriz de rigidez do elemento de viga na coordenada local.

Para obtenção da matriz de massa do elemento de viga na coordenada local, segue-se procedimento semelhante ao realizado para a matriz de rigidez. Entretanto, para este caso, os

deslocamentos nodais são dependentes do tempo. Assim a Equação (2.117) torna-se

$$v(x,t) = N_1(x)v_i(t) + N_2(x)\psi_i(t) + N_3(x)v_j(t) + N_4(x)\psi_j(t) \quad (2.122)$$

Aplicando agora o método de *Galerkin* ao termo de segunda ordem da Equação (2.108), tem-se

$$\rho A \int_0^L N_i(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.123)$$

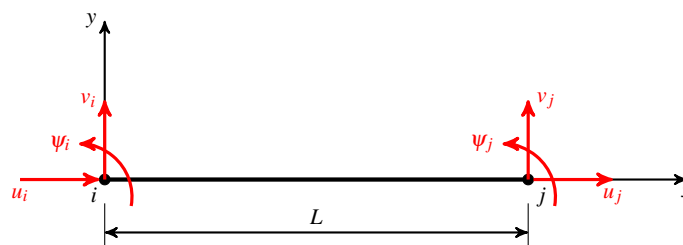
Resolvendo-se a Equação (2.123) e realizando algumas manipulações, leva a

$$[m_v]_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

onde  $[m_v]_e$  é a matriz de massa do elemento de viga na coordenada local.

## 2.5 Matriz de Rigidez e Massa do Elemento de Pórtico

Para a formulação do elemento de viga com o objetivo de solucionar problemas que envolvem pórticos, é necessário a inclusão do carregamento axial no elemento, conforme apresentado por meio da Figura (2.9).



**Figura 2.9:** Elemento de viga discretizado com carregamento axial.

Observe, que esse elemento, é a junção do elemento de barra apresentado por meio da Figura (2.1) com o elemento de viga apresentado por meio da Figura (2.8). Sendo assim, para chegar a matriz de rigidez desse elemento, basta realizar a junção da Equação (2.22) com a

Equação (2.121), respeitando os graus de liberdade para cada elemento. A matriz de rigidez para o elemento de pórtico na coordenada local é mostrada por meio da Equação (2.125).

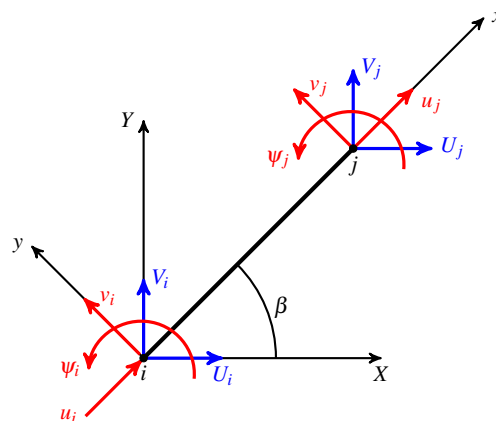
$$[k_p]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

Semelhantemente, para a matriz de massa, faz-se a junção da Equação (2.77) com a Equação (2.124), chegando-se a

$$[m_p]_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

onde  $[m_p]_e$  é a matriz de massa do elemento de pórtico na coordenada local.

Como as várias vigas que compõem o pórtico podem estar em diversas orientações, é necessário realizar a transformação de coordenadas. Para isso, observa-se a Figura (2.10), que ilustra a relação entre as coordenadas locais e globais.



**Figura 2.10:** Elemento de pórtico no plano.

Assim, tem-se que

$$u_i = U_i \cos \beta + V_i \sin \beta \quad (2.127)$$

$$v_i = -U_i \sin \beta + V_i \cos \beta \quad (2.128)$$

$$u_j = U_j \cos \beta + V_j \sin \beta \quad (2.129)$$

$$v_j = -U_j \sin \beta + V_j \cos \beta \quad (2.130)$$

$$\psi_i = \Psi_i \quad (2.131)$$

$$\psi_j = \Psi_j \quad (2.132)$$

Colocando na forma matricial, leva a

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \psi_i \\ u_j \\ v_j \\ \psi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \Psi_i \\ U_j \\ V_j \\ \Psi_j \end{Bmatrix} \quad (2.133)$$

Fazendo

$$[R_p] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

onde  $[R_p]$  é a Matriz de Transformação das coordenadas locais para as globais.

Dessa forma, finalmente chega-se a

$$[K_p]_e = [R_p]^T [k_p]_e [R_p] \quad (2.135)$$

$$[M_p]_e = [R_p]^T [m_p]_e [R_p] \quad (2.136)$$

onde  $[K_p]_e$  e  $[M_p]_e$  são respectivamente a matriz de rigidez e de massa do elemento de pórtico na coordenada global.

## Capítulo 3

# ANÁLISE ESTRUTURAL DINÂMICA INTERVALAR

Neste capítulo, são apresentadas ferramentas para a análise estrutural dinâmica na presença de incertezas paramétricas. Inicialmente, demonstra-se, como obter as matrizes de rigidez e massa intervalares nas coordenadas globais do sistema, utilizando o MEF. Posteriormente, analisa-se, algumas propriedades básicas da aritmética intervalar, pois a mesma pode ser utilizada para quantificar incertezas em sistemas estruturais. Apresenta-se ainda, três métodos de solução para o Problema do Autovalor Intervalar Generalizado, incluindo um método proposto. Por fim é abordado o método de Monte Carlo, pois os resultados obtidos com o mesmo serão utilizados para comparar com os resultados obtidos pelos outros métodos de solução.

### 3.1 Matrizes de Rigidez e Massa Intervalares

Com a aplicação do MEF, é possível resolver problemas complexos envolvendo análise estrutural, com elevado número de elementos. Assim, é necessário realizar a montagem das matrizes de rigidez e massa do sistema na coordenada global, que é a soma linear da contribuição da matriz de rigidez  $[K]_e$  e massa  $[M]_e$  de cada elemento na coordenada global. Para realizar a soma, usa-se os graus de liberdade entre as conectividades dos nós. Dessa forma,

$$[K] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^n [K]_{e\phi} \quad (3.1)$$

$$[M] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^n [M]_{e\phi} \quad (3.2)$$

sendo  $n$  o número de elementos,  $[K]_0$  e  $[M]_0$  são matrizes nulas  $m \times m$ .

As matrizes de rigidez e massa são funções do vetor  $\{a\}$ , que contém os parâmetros geométricos e estruturais, assim tem-se

$$[K] = [K(a)] \quad (3.3)$$

$$[M] = [M(a)] \quad (3.4)$$

com

$$\{\underline{a}\} \leq \{a\} \leq \{\bar{a}\}, \quad a_\phi^I = [\underline{a}_\phi, \bar{a}_\phi] \quad \text{ou} \quad \underline{a}_\phi \leq a_\phi \leq \bar{a}_\phi \quad \phi = 1, 2, \dots, n$$

sendo  $\{\underline{a}\} = (\underline{a}_\phi)$  e  $\{\bar{a}\} = (\bar{a}_\phi)$ , respectivamente, o limite inferior e superior do parâmetro estrutural  $\{a\}$ , com  $\{a\} \in \{a\}^I$ .

Assim, as Equações (3.1) e (3.2) podem ser reescritas em função dos parâmetros geométricos e/ou estruturais incertos.

$$[K]^I = [\underline{K}, \bar{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^n a_\phi^I [K]_{e_\phi} \quad (3.5)$$

$$[M]^I = [\underline{M}, \bar{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^n a_\phi^I [M]_{e_\phi} \quad (3.6)$$

com

$$[\underline{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^n \underline{a}_\phi [K]_{e_\phi} \quad (3.7)$$

$$[\bar{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^n \bar{a}_\phi [K]_{e_\phi} \quad (3.8)$$

$$[\underline{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^n \underline{a}_\phi [M]_{e_\phi} \quad (3.9)$$

$$[\bar{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^n \bar{a}_\phi [M]_{e_\phi} \quad (3.10)$$

As Equações (3.5) a (3.10) são conhecidas como a decomposição não negativa de matriz par,

sendo  $[K]^I = [\underline{K}, \overline{K}]$  e  $[M]^I = [\underline{M}, \overline{M}]$  semi-definidas positivas e  $a_\phi^I = [\underline{a}, \overline{a}]$  positivos.

Sendo assim, com incertezas presentes nas matrizes de rigidez e massa do sistema, leva para o Problema do Autovalor Intervalar Generalizado, representado por meio da Equação (3.11).

$$[K]^I \{x\} = \lambda [M]^I \{x\} \quad (3.11)$$

A solução da Equação (3.11) fornece  $\lambda^I = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ , que são os limites inferior e superior para os autovalores, e  $\{x\}^I = [\underline{x}, \overline{x}]$ , que são os limites inferior e superior para os autovetores associados.

Devido ao fato dos autovalores serem incertos, logicamente as frequências naturais tendem para serem incertas, com  $\underline{\lambda} = \underline{\omega}_n^2$  e  $\overline{\lambda} = \overline{\omega}_n^2$ .

## 3.2 Aritmética Intervalar

Segundo Hansen e Walster (2003), na matemática, existem números reais e uma aritmética real para combiná-los, assim como uma análise real para estudar as propriedades desses números e sua aritmética. A matemática de intervalo é uma generalização em que os números de intervalo substituem números reais, a aritmética de intervalo substitui a aritmética real e a análise de intervalo substitui a análise real.

Com o intervalo fechado denotado por  $[b, c]$ , sendo o conjunto de números reais dados por  $[b, c] = \{x \in \mathbb{R} : b \leq x \leq c\}$ , algumas operações básicas da aritmética intervalar são descritas a seguir. Segundo Moore et al. (2009), o ponto chave nessas definições é que a computação com intervalos é a computação com conjuntos.

Se  $B^I = [\underline{b}, \overline{b}]$  e  $C^I = [\underline{c}, \overline{c}]$ , tem-se

$$B^I + C^I = [\underline{b} + \underline{c}, \overline{b} + \overline{c}] \quad (3.12)$$

$$B^I - C^I = [\underline{b} - \overline{c}, \overline{b} - \underline{c}] \quad (3.13)$$

$$B^I \times C^I = [\min(\underline{b}\underline{c}, \underline{b}\overline{c}, \overline{b}\underline{c}, \overline{b}\overline{c}), \max(\underline{b}\underline{c}, \underline{b}\overline{c}, \overline{b}\underline{c}, \overline{b}\overline{c})] \quad (3.14)$$

$$B^I \div C^I = B^I \times \frac{1}{C^I} = [\underline{b}, \bar{b}] \times \left[ \frac{1}{\bar{c}}, \frac{1}{\underline{c}} \right] = \left[ \frac{\underline{b}}{\bar{c}}, \frac{\bar{b}}{\underline{c}} \right] \text{ com } [\underline{c}, \bar{c}] \neq 0. \quad (3.15)$$

$$[B^I]^{-1} = [\underline{b}, \bar{b}]^{-1} = \left[ \frac{1}{\bar{b}}, \frac{1}{\underline{b}} \right] \text{ com } [\underline{b}, \bar{b}] \neq 0. \quad (3.16)$$

Essas operações podem ser utilizadas nas Equações (3.5) e (3.6) para a obtenção das matrizes  $[K]^I$  e  $[M]^I$  de forma direta, sem precisar utilizar a decomposição não negativa de matriz par. Observe que as operações tendem para obter sempre o maior intervalo possível, onde realmente todos os erros estarão computados. Entretanto, deve-se realizar uma análise minuciosa dos resultados obtidos, para não ocorrer superestimação dos intervalos. Algumas propriedades comuns e não comuns entre números reais e intervalares, assim como cuidados que devem ser tomados com a aritmética intervalar, podem ser vistos em [Albuquerque \(2015\)](#).

### 3.3 O Problema do Autovalor Intervalar

Aqui são apresentados alguns métodos de solução para a Equação (3.11), entre eles um método proposto pelo autor.

#### 3.3.1 Deif's solution theorem

O *Deif's Solution Theorem* foi apresentado em [Deif \(1991\)](#) para o problema do autovalor intervalar padrão. Mais tarde, em [Qiu et al. \(1995\)](#) foi feita a generalização do método, ou seja, introduziu-se a solução para o problema do autovalor intervalar generalizado. Caso a matriz dinâmica seja simétrica, o problema padrão e o generalizado apresentam os mesmos resultados para os autovalores.

Sendo  $[K]^I$  semi-definida positiva e  $[M]^I$  definida positiva, defini-se

$$[K]^c = \frac{[\bar{K}] + [K]}{2}, \quad [M]^c = \frac{[\bar{M}] + [M]}{2}, \quad [\Delta K] = \frac{[\bar{K}] - [K]}{2}, \quad [\Delta M] = \frac{[\bar{M}] - [M]}{2} \quad (3.17)$$

onde  $[K]^c$  e  $[M]^c$  são matrizes centrais das matrizes de rigidez e massa intervalares, respectivamente, e  $[\Delta K]$  e  $[\Delta M]$  são os respectivos raios matriciais das matrizes de rigidez e massa intervalares.

Substituindo os dois primeiros termos da Equação (3.17) na Equação (3.11), leva ao pro-

blema do autovalor central, ou médio.

$$[K]^c \{x\} = \lambda [M]^c \{x\} \quad (3.18)$$

Denotando  $\{x\}_i^c$  como sendo os autovetores do problema central para  $\lambda_i^c$ , e assumindo que os sinais dos autovetores associados não mudam dentro do intervalo de  $[K]^I = [\underline{K}, \overline{K}]$  e  $[M]^I = [\underline{M}, \overline{M}]$ , pode-se definir

$$[S]^i = [diag(\text{sgn}(\{x\}_i^c))], \quad x_{ij} \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.19)$$

sendo  $[S]^i$  a matriz diagonal que contém os sinais dos autovetores centrais  $\{x\}_i^c$ .

Assim, utilizando a matriz de sinais, os autovalores e os autovetores associados podem ser determinados por meio das Equações (3.20) e (3.21).

$$([K]^c - [S]^i [\Delta K] [S]^i) \{\underline{x}\}_i = \underline{\lambda}_i ([M]^c + [S]^i [\Delta M] [S]^i) \{\underline{x}\}_i \quad (3.20)$$

$$([K]^c + [S]^i [\Delta K] [S]^i) \{\overline{x}\}_i = \overline{\lambda}_i ([M]^c - [S]^i [\Delta M] [S]^i) \{\overline{x}\}_i \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Eigenvalue inclusion principle

Exposto aqui de uma forma que facilita o entendimento, o *Eigenvalue Inclusion Principle* foi apresentado em Qiu et al. (2005), e basicamente resumiu-se em resolver as Equações (3.22) e (3.23).

$$[\underline{K}] \{\underline{x}\} = \underline{\lambda} [\overline{M}] \{\underline{x}\} \quad (3.22)$$

$$[\overline{K}] \{\overline{x}\} = \overline{\lambda} [\underline{M}] \{\overline{x}\} \quad (3.23)$$

### 3.3.3 Método proposto

Depois de estudar diversos métodos em muitos trabalhos, propõem-se aqui uma alternativa para solucionar o problema do autovalor intervalar generalizado. Os limites inferior e superior para os autovalores  $\lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  podem ser calculados por meio das Equações (3.24) e (3.25).

$$\underline{\lambda} = \min \left( [\underline{K}]\{x\} - \underline{\lambda}[\underline{M}]\{x\} = 0, [\bar{K}]\{\bar{x}\} - \bar{\lambda}[\bar{M}]\{\bar{x}\} = 0 \right) \quad (3.24)$$

$$\bar{\lambda} = \max \left( [\underline{K}]\{x\} - \underline{\lambda}[\underline{M}]\{x\} = 0, [\bar{K}]\{\bar{x}\} - \bar{\lambda}[\bar{M}]\{\bar{x}\} = 0 \right) \quad (3.25)$$

Formas parecidas de solução já foram apresentadas em outros trabalhos. Entretanto, a busca é sempre para encontrar o maior intervalo, ou seja, o envoltório para a solução, como são os casos dos métodos *Deif's solution theorem* e *eigenvalue inclusion principle*, que trabalham com combinações de mínimos com máximos das matrizes de  $[K]^I$  e  $[M]^I$ .

O diferencial do método proposto, é que ele busca a solução mais precisa para os limites do intervalo, resolvendo dois problemas determinísticos formulados por meio do MEF, utilizando combinações de mínimos com mínimos e máximos com máximos das matrizes de  $[K]^I$  e  $[M]^I$ .

## 3.4 Método de Monte Carlo

[Dimov \(2008\)](#) define o método de Monte Carlo como um método de aproximação da solução para problemas de matemática computacional, usando processos aleatórios para cada um desses problemas, com os parâmetros do processo iguais à solução do problema. O método pode garantir que o erro de aproximação seja menor que um determinado valor com certa probabilidade.

Segundo [Dunn e Shultis \(2012\)](#) o método de Monte Carlo é uma técnica de análise, ou seja, uma metodologia para usar meios de amostra para estimar meios populacionais. Ainda, de acordo com [Dunn e Shultis \(2012\)](#), o termo Monte Carlo foi inventado quando os computadores digitais foram utilizados pela primeira vez para implementar o procedimento que, até então, tinha sido chamado de amostragem estatística.

Este método numérico é amplamente utilizado, permitindo a estimativa das respostas para uma grande variedade de problemas diretos e inversos, sendo altamente flexível. Pode ser utilizado em equações integrais e integro-diferenciais de alta dimensão, problemas de valores de contorno para equações diferenciais em domínios com limites complicados, simulação de fluxos

turbulentos, estudo de estruturas caóticas, etc.

O nome dado ao método, Monte Carlo, surgiu devido a comparações com os jogos de azar bastante explorados na cidade de Monte Carlo, em Mônaco, durante os esforços para projetar e testar a bomba de hidrogênio. Tornou-se uma técnica de análise prática em meados do século XX, com o advento dos computadores digitais, podendo-se gerar números pseudo-aleatórios e calcular longas somas. O programa nuclear, deu grande impulso ao método de Monte Carlo como procedimento numérico. Uma abordagem bastante completa sobre a história do método pode ser vista em [Dunn e Shultis \(2012\)](#).

O ponto central para a realização de todos os cálculos envolvendo o método de Monte Carlo, é possuir algum mecanismo para produzir uma grande sequência de números aleatórios, estando uniformemente distribuídos ao longo do intervalo aberto  $(0,1)$ . Outro fator, de maior importância, é a necessidade de uma sequência de números aleatórios que deve ser a mesma sempre que o programa é executado, para que os erros de código possam ser encontrados e que os mesmos resultados sejam produzidos quando o mesmo código é executado em computadores diferentes.

É informado em [Fishman \(1996\)](#) que a reprodutibilidade é uma característica importante ao projetar um experimento de Monte Carlo, pois não é incomum realizar uma execução preliminar para identificar erros na lógica do programa, sendo que esses erros levam geralmente a mudanças no programa. Porém, essas mudanças não devem afetar a lógica de geração das amostras, mantendo a capacidade de reproduzir exatamente a mesma variação de amostragem em corridas sucessivas.

Entretanto, os computadores digitais, por serem máquinas determinísticas, são incapazes de produzir resultados aleatórios por si só, ou seja, sem o auxílio de algum dispositivo externo acoplado que produzisse sinais verdadeiramente aleatórios. Dessa forma, todo computador que fosse executar o código teria que ter esse dispositivo auxiliar acoplado, sendo impraticável. Além disso, com a utilização desses dispositivos, não haveria repetibilidade na geração dos números, sendo impossível depurar um código de Monte Carlo se, em cada corrida, fosse usada uma sequência diferente de números aleatórios.

Alternativamente, para produzir a mesma sequência de números cada vez que um programa é executado, é usar um gerador de números *pseudo-aleatórios*, que exibem muitas das qualidades de números aleatórios verdadeiros. O gerador utiliza algoritmos adequados que podem gerar sequências extremamente longas de números que passam em muitos testes estatísticos para aleatoriedade que, dado os números anteriores, geralmente apenas o último número, na sequência, o próximo número pode ser calculado de forma eficiente.

Como exemplo de geradores de números pseudo-aleatórios tem-se os baseados em con-

gruência linear, que são amplamente utilizados, sendo sua forma geral

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \pmod{m}, \quad i \geq 0 \quad (3.26)$$

onde o número inteiro  $a > 1$  é conhecido como multiplicador, o inteiro  $c$  como incremento e o inteiro  $m$  como módulo do gerador. Iniciando com um número inteiro  $x_0$ , conhecido como semente, a sequência de inteiros  $x_i$  estará na faixa  $0 \leq x_i < m$ . A notação  $\pmod{m}$  significa que o valor de  $ax_i + c$  é dividido por  $m$ , e o resto da divisão é feito como  $x_{i+1}$ .

Para  $x_i$  estar compreendido no intervalo  $[0, 1)$  é necessário realizar a operação por meio da Equação (3.27).

$$p_i = \frac{x_i}{m} \quad (3.27)$$

Sendo assim,  $p_i$  são os números pseudo-aleatórios no intervalo  $[0, 1)$ . Entretanto, devido a aritmética modular, os valores dos inteiros  $x_i$  não podem exceder  $m - 1$ , e para uma semente diferente de zero,  $x_i$  nunca pode ser zero, assim  $p_i$  deve estar no intervalo aberto  $(0, 1)$ . Para muitas simulações de Monte Carlo, é importante que o gerador de números pseudo-aleatórios nunca retorne um  $p_i$  que seja exatamente 1 ou 0.

No Gerador Congruente Linear (GCL) mais frequentemente programado, é atribuído zero ao incremento  $c$  na Equação (3.26), levando a

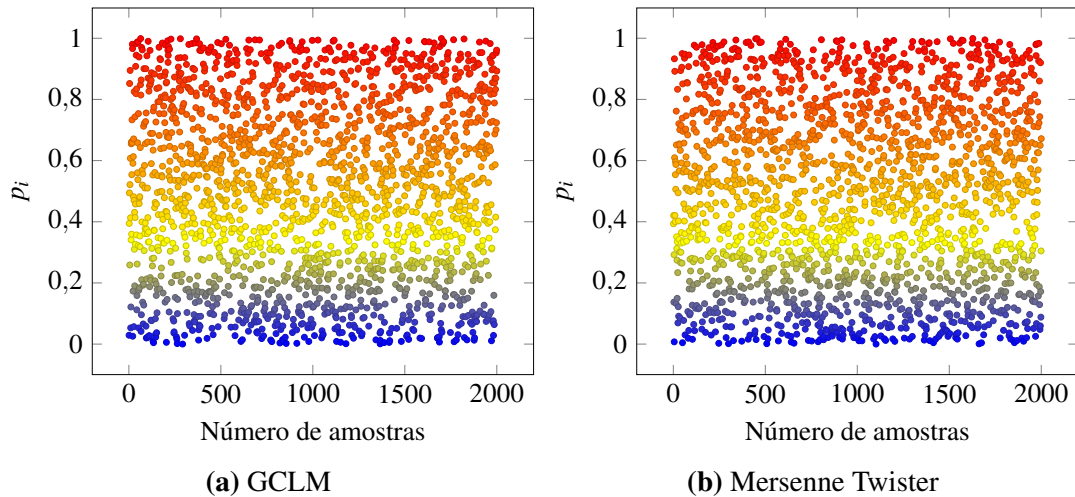
$$x_{i+1} = ax_i \pmod{m}, \quad i \geq 0 \quad (3.28)$$

conhecido como Gerador Congruente Linear Multiplicativo (GCLM).

Em Fishman (1996) foram apresentados diversos testes realizados para vários multiplicadores a serem utilizados com o módulo  $m = 2^{31} - 1$ , que é um primo de Mersenne. Selecionando um dos multiplicadores que apresentaram melhores resultados,  $a = 62089911$ , com  $x_0 = 1$ , é possível fazer comparação entre o GCLM e o gerador de números pseudo-aleatórios padrão utilizado pelo *Matlab*. Os resultados gráficos para um número de amostras igual a  $2,0 \times 10^3$  são mostrados por meio da Figura (3.1).

Como pode ser observado, os resultados apresentados por meio da Figura (3.1a) utilizam o GCLM e os da Figura (3.1b) utilizam o método de *Mersenne Twister* (MT), o qual é o padrão da função *rand* do *Matlab* atualmente. Visualmente, é difícil fazer análise qualitativa entre os gráficos, porém eles parecem não apresentar diferenças reprováveis. Dados estatísticos para os dois geradores podem ser observados por meio da Tabela (3.1), os quais os resultados estão bem próximos.

Alguns estudos informam que o gerador com o método MT possui vantagens com relação ao GCLM, e até mesmo com relação aos outros métodos de gerar, uma delas é o maior tamanho de período atingido, entretanto é considerado difícil de programar. Já o GCLM é considerado de



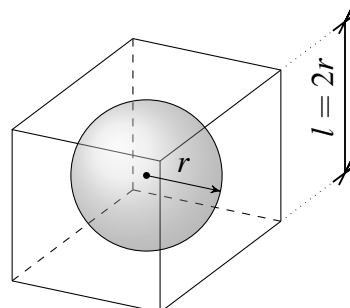
**Figura 3.1:** Números pseudo-aleatórios.

**Tabela 3.1:** Dados estatísticos para a *GCLM* e função *rand* (Matlab) com MT.

	<u>GCLM</u>	<u>MT</u>
Mínimo	1,1254E-04	1,3254E-04
Média	0,5037	0,4932
Máximo	0,9991	0,9991
Variância	0,0826	0,0825
Desvio padrão	0,2873	0,2873

fácil implementação, e pode ser usado em diversos estudos. Segundo [Moler \(2004\)](#), o *Matlab* utilizou o GCLM na função *rand* até o ano de 1995, com os parâmetros  $a = 7^5$ ,  $c = 0$  e  $m = 2^{31} - 1$ , depois passou a utilizar um algoritmo baseado no trabalho de [Marsaglia e Zaman \(1991\)](#), e a partir de 2007 passou a utilizar o MT. Mais sobre o MT pode ser encontrado em [Matsumoto e Nishimura \(1998\)](#), que foram seus idealizadores.

Para efeito de aplicabilidade, utilizando o GCLM com  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 62089911$  e  $x_0 = 1$ , e o gerador com MT, é apresentado como exemplo a aproximação do número  $\pi$  utilizando o método de Monte Carlo. Os cálculos são baseados na relação existente entre um cubo e uma esfera inscrita nesse cubo, conforme pode ser observado na Figura (3.2).



**Figura 3.2:** Esfera de raio  $r$  inscrita no cubo de lado  $2r$ .

A relação entre o volume do cubo e o volume da esfera é dada pela Equação (3.29).

$$\frac{V_{cubo}}{V_{esfera}} = \frac{l^3}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{6}{\pi} \quad (3.29)$$

Assim, pode-se calcular a aproximação para o número  $\pi$ , com um número total de amostras  $n$ , utilizando a Equação (3.30),

$$\pi = 6 \frac{N_{de}}{n} \quad (3.30)$$

sendo  $N_{de}$  o número total de amostras dentro da esfera.

Uma sequência lógica para a aproximação do número  $\pi$  é apresentada por meio do algoritmo (3.1).

---

### Algoritmo 3.1: APROXIMAÇÃO DO NÚMERO $\pi$

---

**Entrada:**  
 $n \leftarrow$  número total de amostras  
 $N_{de} \leftarrow$  número de amostras dentro da esfera  
 $N_{fe} \leftarrow$  número de amostras fora da esfera  
 $R \leftarrow$  função para gerar números pseudo-aleatórios em (0,1)

**Saída:** Aproximação do número  $\pi$

```

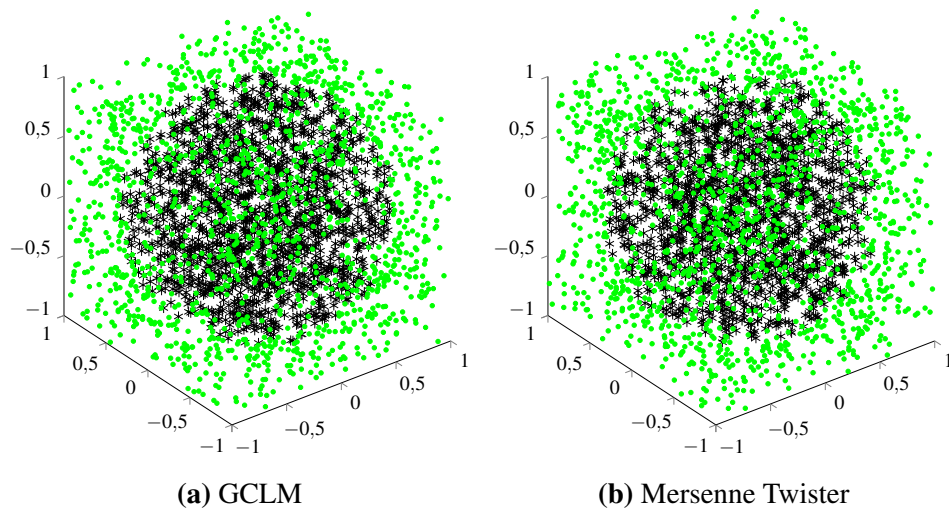
1 início
2    $N_{de} \leftarrow 0$ 
3    $N_{fe} \leftarrow 0$ 
4    $x \leftarrow 2 * R(n, 1) - 1$ 
5    $y \leftarrow 2 * R(n, 1) - 1$ 
6    $z \leftarrow 2 * R(n, 1) - 1$ 
7    $r \leftarrow x^2 + y^2 + z^2$ 
8   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
9     se  $r(i) \leq 1$  então
10      |  $N_{de} \leftarrow N_{de} + 1$ 
11    senão
12      |  $N_{fe} \leftarrow N_{fe} + 1$ 
13    fim
14  fim
15   $\pi \leftarrow 6 * \frac{N_{de}}{n}$ 
16 fim
17 retorna  $\pi$ 

```

---

Os resultados gráficos utilizando os geradores podem ser observados por meio da Figura (3.3). Nota-se claramente a imagem de uma esfera de raio  $r$  inscrita em um cubo de lado  $2r$ , neste caso específico com  $r = 1$  e  $l = 2$ . Para um total de  $10,0 \times 10^3$  amostras, o GCLM obteve como resultado  $\pi = 3,1482$  e o gerador com MT obteve  $\pi = 3,1344$ . Os dois geradores apresentaram aproximadamente o mesmo erro relativo, com o GCLM levando uma ligeira vantagem para esse número total de amostras utilizado.

Uma abordagem bastante ampla sobre diversos tipos de geradores de números pseudo-aleatórios, assim como vários testes empregados para analisar tais geradores, podem ser en-



**Figura 3.3:** Aproximação do número  $\pi$  por Monte Carlo.

contrados em [Fishman \(1996\)](#).

## Capítulo 4

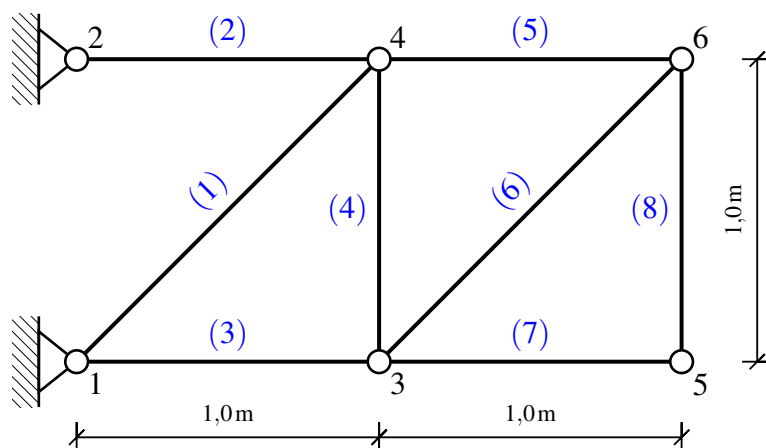
# RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA VALIDAÇÃO

Neste capítulo, com o intuito de validar o método proposto, juntamente com os programas implementados computacionalmente, discuti-se três exemplos numéricos apresentados em outras literaturas da área, com incertezas nas matrizes de massa e rigidez do sistema. O primeiro exemplo trata-se de uma treliça plana com oito barras, onde os parâmetros incertos estão presentes nas áreas das seções transversais das barras. No segundo exemplo é apresentado uma viga escalonada com incertezas nas seções transversais das áreas e nos momentos de inércia de área. Um pórtico plano com incertezas no módulo de Young, nas áreas das seções transversais e nos momentos de inercia de área é apresentado no terceiro exemplo. Também, são apresentadas simulações utilizando o método de Monte Carlo para comparar com os resultados obtidos pelos outros métodos.

### 4.1 Treliça Plana com 8 Barras

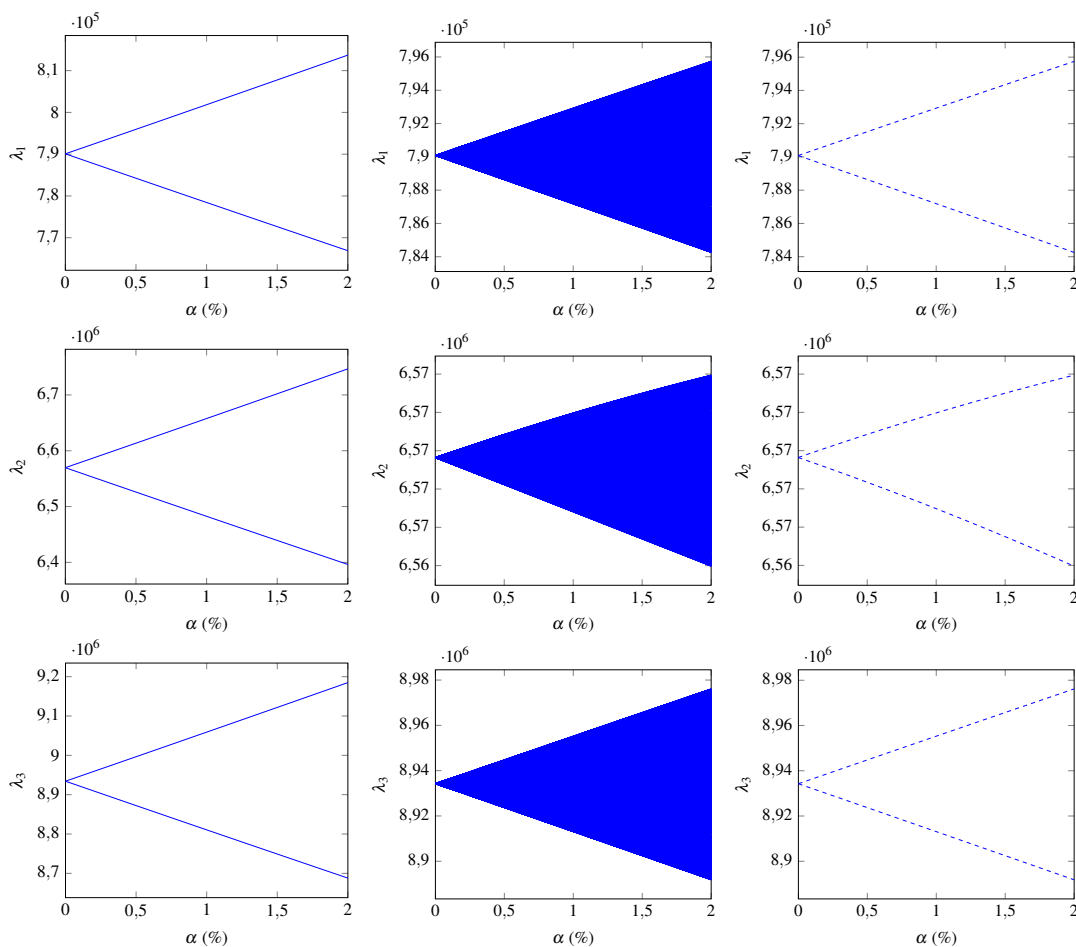
Por meio da Figura (4.1), apresentada em Qiu et al. (2005), pode-se observar uma treliça plana com oito barras, onde todas as juntas são pinadas, que será utilizada para comparar os resultados obtidos através do *método proposto*, *eigenvalue inclusion principle*, *Deif's solution theorem* e o método de *Monte Carlo*. As áreas das seções transversais das barras 1, 2, 3, 4 e 6 são consideradas com incertezas, de acordo com  $A_i^I = [A^c - \alpha A^c; A^c + \alpha A^c]$ , com  $i=1, 2, 3, 4, 6$ , sendo  $A^c = 2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , e  $\alpha$  o fator porcentual que vai fazer com que ocorra variação do parâmetro incerto, com  $\alpha$  variando de 0 a 2%. As áreas das seções transversais das barras 5, 7 e 8 são determinísticas, com  $A_5 = A_7 = A_8 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . O módulo de Young é  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e a massa específica é  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

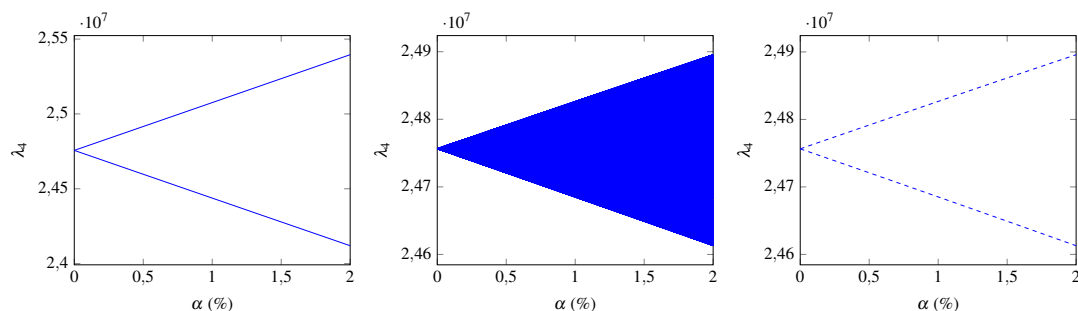
Por meio da Figura (4.2) é possível observar os resultados gráficos para os quatro primeiros



**Figura 4.1:** Treliça com oito barras.

autovalores incertos obtidos através do *método proposto*, *eigenvalue inclusion principle* e do método de *Monte Carlo*. Claramente, pode-se observar, que os resultados obtidos pelo método proposto são idênticos aos obtidos pelo método de Monte Carlo para a precisão utilizada. O *eigenvalue inclusion principle* apresenta intervalos um pouco mais amplos, levando a entender que existe uma superestimação do intervalo, com base nos resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo.





**Figura 4.2:** Quatro primeiros autovalores intervalares da treliça com oito barras usando *Eigenvalue Inclusion Principle* (esquerda), Monte Carlo (centro) e o Método Proposto (direita).

São mostrados na Tabela (4.1) resultados para os autovalores intervalares com o fator percentual  $\alpha = 2\%$  utilizando todos os métodos mencionados anteriormente, sendo que para a simulação com método de Monte Carlo foram utilizadas  $2,0 \times 10^3$  amostras. Pode-se observar que os intervalos para os autovalores obtidos através do *Deif's solution theorem* são mais superestimados do que os obtidos pelo *eigenvalue inclusion principle*. Ainda, o método de Deif melhora a convergência com o aumento do valor numérico dos autovalores, ou seja, os intervalos ficam menos superestimados com modos de vibrar maiores. Com relação ao método proposto, o mesmo converge até no mínimo a quarta casa decimal para o método de Monte Carlo.

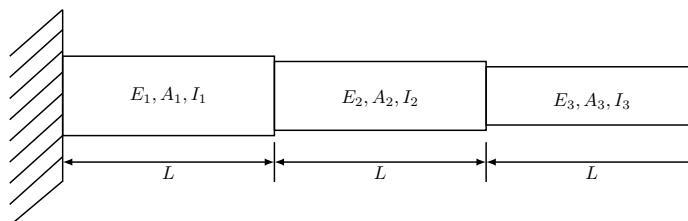
**Tabela 4.1:** Autovalores intervalares para treliça com oito barras para  $\alpha = 2\%$ .

	<u>Deif's solution theorem</u>		<u>Método proposto</u>		<u>Método de Monte Carlo</u>		<u>Eigenvalue inclusion principle</u>	
	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior
$\lambda_1$	$2,986516 \times 10^5$	$12,686709 \times 10^5$	$7,842575 \times 10^5$	$7,957449 \times 10^5$	$7,842575 \times 10^5$	$7,957439 \times 10^5$	$7,668948 \times 10^5$	$8,137204 \times 10^5$
$\lambda_2$	$5,476102 \times 10^6$	$7,706060 \times 10^6$	$6,563958 \times 10^6$	$6,573943 \times 10^6$	$6,563959 \times 10^6$	$6,573943 \times 10^6$	$6,396250 \times 10^6$	$6,746699 \times 10^6$
$\lambda_3$	$8,459529 \times 10^6$	$9,417213 \times 10^6$	$8,891796 \times 10^6$	$8,976180 \times 10^6$	$8,891796 \times 10^6$	$8,976173 \times 10^6$	$8,687945 \times 10^6$	$9,184929 \times 10^6$
$\lambda_4$	$2,379583 \times 10^7$	$2,571742 \times 10^7$	$2,461287 \times 10^7$	$2,489588 \times 10^7$	$2,461287 \times 10^7$	$2,489586 \times 10^7$	$2,411954 \times 10^7$	$2,539569 \times 10^7$
$\lambda_5$	$4,945821 \times 10^7$	$5,228110 \times 10^7$	$5,063619 \times 10^7$	$5,124036 \times 10^7$	$5,063623 \times 10^7$	$5,124036 \times 10^7$	$4,970349 \times 10^7$	$5,214413 \times 10^7$
$\lambda_6$	$5,286607 \times 10^7$	$5,651476 \times 10^7$	$5,461952 \times 10^7$	$5,462967 \times 10^7$	$5,461952 \times 10^7$	$5,462967 \times 10^7$	$5,318431 \times 10^7$	$5,614757 \times 10^7$
$\lambda_7$	$6,282357 \times 10^7$	$6,473694 \times 10^7$	$6,340755 \times 10^7$	$6,406893 \times 10^7$	$6,340760 \times 10^7$	$6,406893 \times 10^7$	$6,306639 \times 10^7$	$6,443709 \times 10^7$
$\lambda_8$	$8,302168 \times 10^7$	$8,832854 \times 10^7$	$8,548862 \times 10^7$	$8,563577 \times 10^7$	$8,548862 \times 10^7$	$8,563575 \times 10^7$	$8,376413 \times 10^7$	$8,744762 \times 10^7$

## 4.2 Viga Escalonada com 3 Elementos

Neste exemplo, a viga escalonada engastada-livre mostrada por meio da Figura (4.3), apresentada por Qiu et al. (2005), é analisada, comparando os resultados obtidos através do *método proposto*, *parameter vertex solution theorem* e simulações usando o método de *Monte Carlo*. A massa específica é  $\rho_i = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $L_i = 0,4 \text{ m}$  e o módulo de Young é  $E_i =$

$200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , para  $i = 1, 2, 3$ . As áreas das seções transversais e os momentos de inércia de área são os parâmetros incertos, que causam incertezas na resposta dinâmica da estrutura em análise, podendo ser observados por meio da Tabela (4.2).



**Figura 4.3:** Viga escalonada com três elementos.

**Tabela 4.2:** Áreas das seções transversais e momentos de inércia de área incertos para a viga escalonada com três elementos.

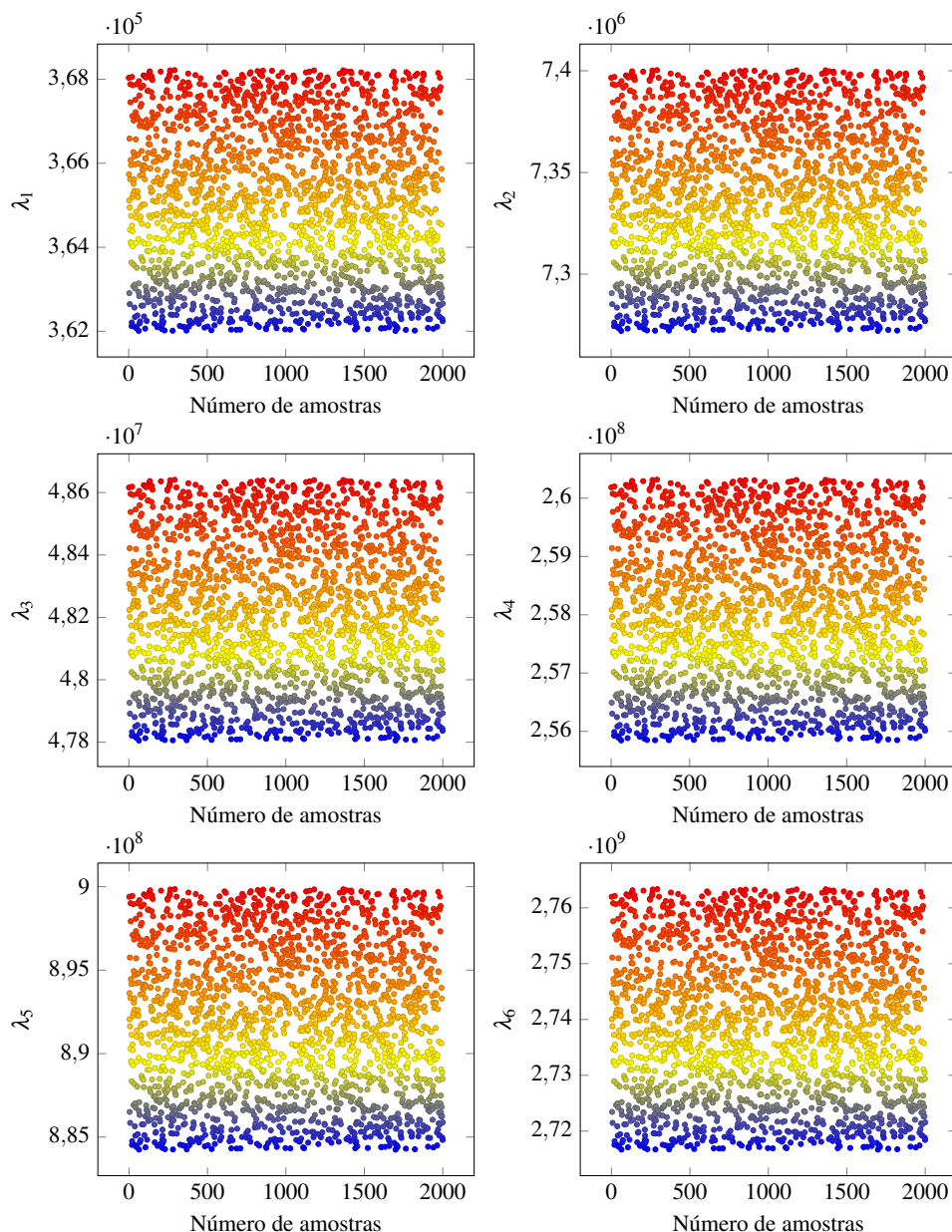
Áreas das seções transversais	Momentos de inércia de área
$A_1^I = [1,426 \times 10^{-2}; 1,454 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$	$I_1^I = [0,19980 \times 10^{-4}; 0,20020 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$
$A_2^I = [0,990 \times 10^{-2}; 1,010 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$	$I_2^I = [0,09990 \times 10^{-4}; 0,10010 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$
$A_3^I = [0,634 \times 10^{-2}; 0,646 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$	$I_3^I = [0,04995 \times 10^{-4}; 0,05005 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$

É mostrado por meio da Tabela (4.3) o limite inferior e superior para os autovalores, calculados pelos três métodos mencionados acima. Pode-se observar que, em geral, as respostas obtidas através do método proposto estão mais próximas das respostas obtidas com o método de Monte Carlo, com convergência de no mínimo duas casas decimais. Apesar dos resultados obtidos com o *parameter vertex solution theorem* estarem próximos dos obtidos com os outros dois métodos, o intervalo ainda está com algum grau de superestimação.

**Tabela 4.3:** Autovalores Intervalares para viga escalonada com três elementos.

	Método proposto		Método de Monte Carlo		The parameter vertex solution theorem	
	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior
$\lambda_1$	$3,620026 \times 10^5$	$3,682185 \times 10^5$	$3,620083 \times 10^5$	$3,682178 \times 10^5$	$3,612794 \times 10^5$	$3,689557 \times 10^5$
$\lambda_2$	$7,271976 \times 10^6$	$7,400345 \times 10^6$	$7,272092 \times 10^6$	$7,400330 \times 10^6$	$7,257447 \times 10^6$	$7,415161 \times 10^6$
$\lambda_3$	$4,780474 \times 10^7$	$4,864078 \times 10^7$	$4,780550 \times 10^7$	$4,864068 \times 10^7$	$4,770923 \times 10^7$	$4,873816 \times 10^7$
$\lambda_4$	$2,558403 \times 10^8$	$2,603177 \times 10^8$	$2,558444 \times 10^8$	$2,603172 \times 10^8$	$2,553292 \times 10^8$	$2,608389 \times 10^8$
$\lambda_5$	$8,842340 \times 10^8$	$8,998542 \times 10^8$	$8,842482 \times 10^8$	$8,998524 \times 10^8$	$8,824674 \times 10^8$	$9,016557 \times 10^8$
$\lambda_6$	$2,716636 \times 10^9$	$2,763361 \times 10^9$	$2,716678 \times 10^9$	$2,763355 \times 10^9$	$2,711208 \times 10^9$	$2,768894 \times 10^9$

Os resultados gráficos para as simulações utilizando o método de Monte Carlo podem ser vistos na Figura (4.4), para  $2,0 \times 10^3$  amostras.

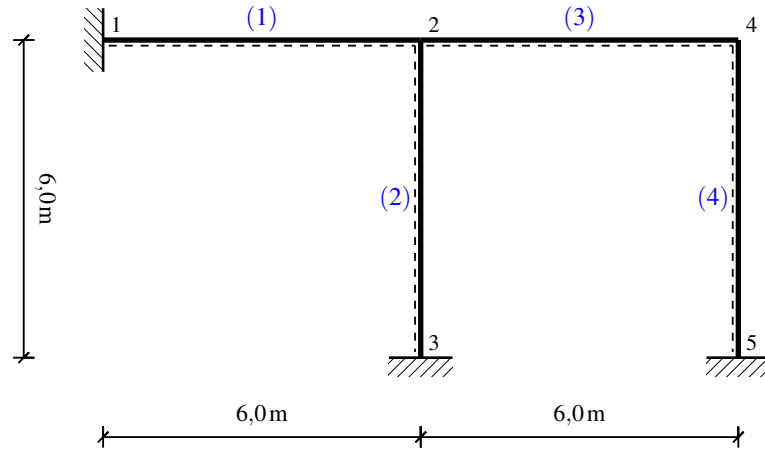


**Figura 4.4:** Simulações com método de Monte Carlo para viga escalonada com três elementos.

### 4.3 Pórtico Plano com 4 Elementos

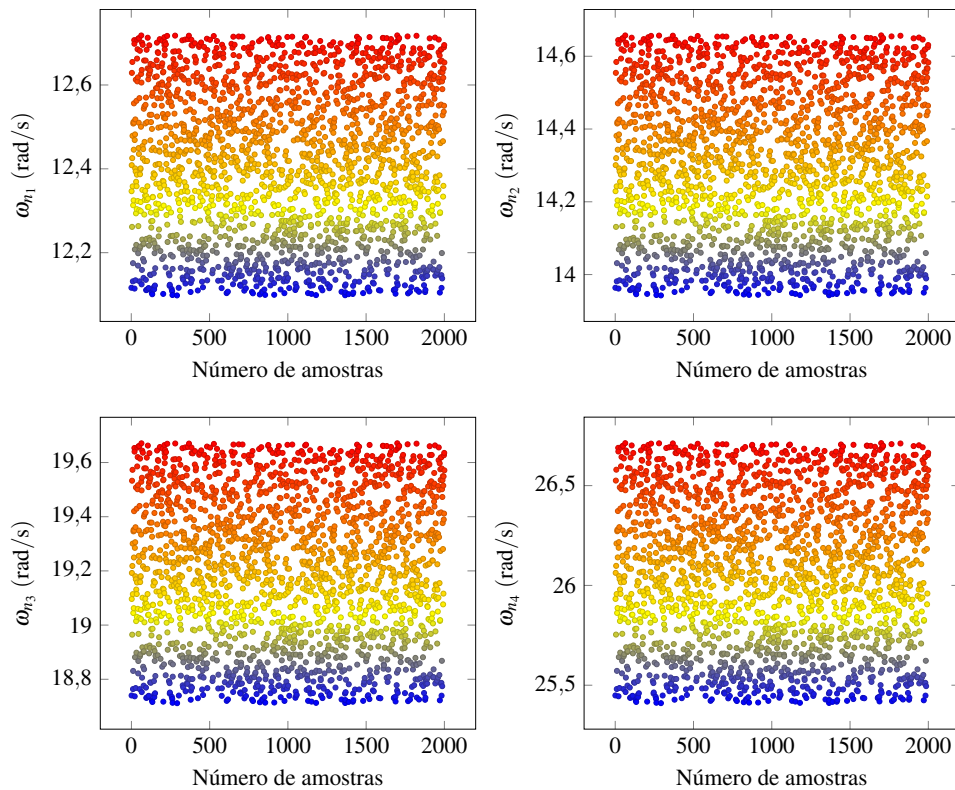
Com o intuito de expandir a análise à pórticos, é resolvido neste exemplo o pórtico apresentado por [Arndt \(2009\)](#), que pode ser visualizado por meio da [Figura \(4.5\)](#). As frequências naturais do sistema são obtidas através do *método proposto*, *Deif's solution theorem*, *eigenvalue inclusion principle* e do método de *Monte Carlo* com a utilização de  $2,0 \times 10^3$  amostras. Os parâmetros incertos são o módulo de Young, as áreas das seções transversais e os momentos de inércia de área, com  $E^I = [9,5 \times 10^7; 1,05 \times 10^8] \text{ N/m}^2$ ,  $I^I = [9,5 \times 10^{-3}; 1,05 \times 10^{-2}] \text{ m}^4$  e  $A^I =$

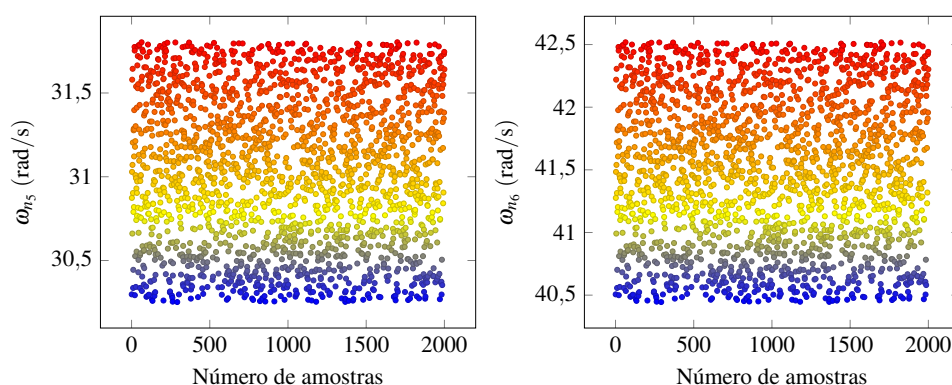
$[9,5 \times 10^{-2}; 1,05 \times 10^{-1}] \text{ m}^2$ . A massa específica vale  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Para a determinação das frequências naturais determinísticas, tem-se  $E^c = 1,0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ,  $I^c = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}^4$  e  $A^c = 1,0 \times 10^{-1} \text{ m}^2$ .



**Figura 4.5:** Pórtico plano com quatro elementos.

Por meio da Figura (4.6) é possível observar os resultados gráficos para as simulações utilizando o método de Monte Carlo, notando-se excelente uniformidade da resposta.





**Figura 4.6:** Simulações com método de Monte Carlo para o pórtico plano com quatro elementos.

A Tabela (4.4) traz comparações entre os métodos empregados nesse exemplo. Observa-se que no Deif's solution theorem e eigenvalue inclusion principle os intervalos estão superestimados, sendo a superestimação maior no método de Deif. Os resultados obtidos com o método proposto convergem no mínimo até a segunda casa decimal com o método de Monte Carlo. Ainda é apresentado as frequências naturais determinísticas, devendo as mesmas estarem dentro do intervalo de incerteza.

**Tabela 4.4:** Frequências naturais do pórtico plano com quatro elementos em rad/s.

	Deif's Solution Theorem		Método Proposto		Método de Monte Carlo		Eigenvalue Inclusion Principle		Determinístico
	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	Limite inferior	Limite superior	
$\omega_{h1}$	8,188 855	15,583 982	12,097 947	12,718 752	12,098 018	12,718 192	11,507 442	13,371 415	12,412 231
$\omega_{h2}$	12,648 138	16,394 873	13,942 527	14,657 987	13,942 610	14,657 341	13,261 989	15,410 162	14,304 731
$\omega_{h3}$	17,383 053	21,222 888	18,711 675	19,671 864	18,711 786	19,670 997	17,798 353	20,681 325	19,197 773
$\omega_{h4}$	23,443 114	28,981 854	25,410 064	26,713 980	25,410 214	26,712 803	24,169 791	28,084 807	26,070 175
$\omega_{h5}$	26,564 183	36,092 048	30,251 827	31,804 198	30,252 006	31,802 797	28,775 227	33,436 230	31,037 719
$\omega_{h6}$	36,020 304	49,422 044	40,444 629	42,520 044	40,444 868	42,518 170	38,470 516	44,701 958	41,495 314

## Capítulo 5

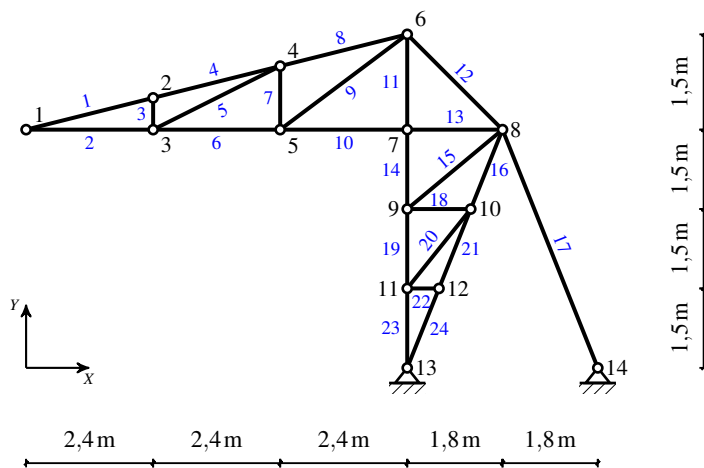
# RESULTADOS E DISCUSSÕES DE OUTROS EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são abordados outros exemplos numéricos para a aplicabilidade do *método proposto*, com o objetivo de obter alguns resultados comumente utilizados em análise dinâmica de sistemas estruturais, porém na presença de incertezas paramétricas. É analisada uma treliça plana com 24 barras, apresentando incertezas em algumas áreas das barras. Analisa-se também uma treliça espacial com 60 barras, que apresenta incertezas nas áreas das barras e no módulo de Young. Por fim é analisado um pórtico plano com 10 elementos, que apresenta incertezas no módulo de Young, nas áreas das seções transversais e nos momentos de inércia de área.

### 5.1 Treliça Plana com 24 Barras

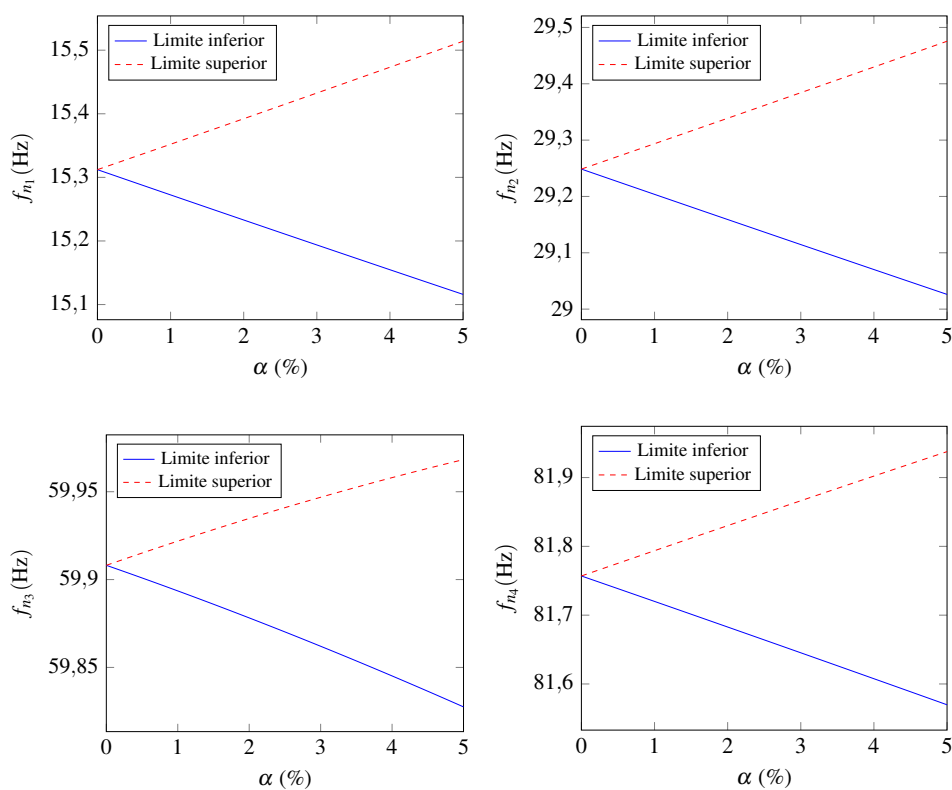
Todas as juntas da treliça são pinadas, como pode ser observado por meio da Figura (5.1). As áreas das seções transversais das barras 1, 2, 3, 6, 9, e 11 são consideradas incertas, de acordo com  $A_i^l = [A^c - \alpha A^c; A^c + \alpha A^c]$ ,  $i = 1, 2, 3, 6, 9, 11$ , sendo  $A^c = 7,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  o valor determinístico da área da seção transversal para todas as barras e  $\alpha$  o fator percentual que vai fazer com que ocorra variação dos parâmetros incertos, com  $\alpha$  variando de 0 a 5%. O módulo de Young do material é  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e a massa específica é  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Por meio da Figura (5.2) pode-se ver os limites inferior e superior para as quatro primeiras frequências naturais do sistema, variando com o fator percentual  $\alpha$ . Uma importante característica a ser observada é o comportamento monotônico das frequências naturais, seja aumentando ou diminuindo, partindo do valor determinístico. Esse fato ocasiona o aumento monotônico do intervalo de resposta à medida que  $\alpha$  aumenta. Claramente, nota-se, que há uma relação linear entre as frequências naturais e o fator percentual  $\alpha$ , podendo-se extrapolar os resultados para qualquer percentual de incerteza. Similar fato relatado para o comportamento monotônico de



**Figura 5.1:** Treliça plana com 24 barras.

autovalores pode ser visto em [Modarreszadeh \(2005\)](#) e [Qiu et al. \(2005\)](#). Pode-se ver mais sobre esse comportamento de inclusão monotônica em [Moore \(1979\)](#).



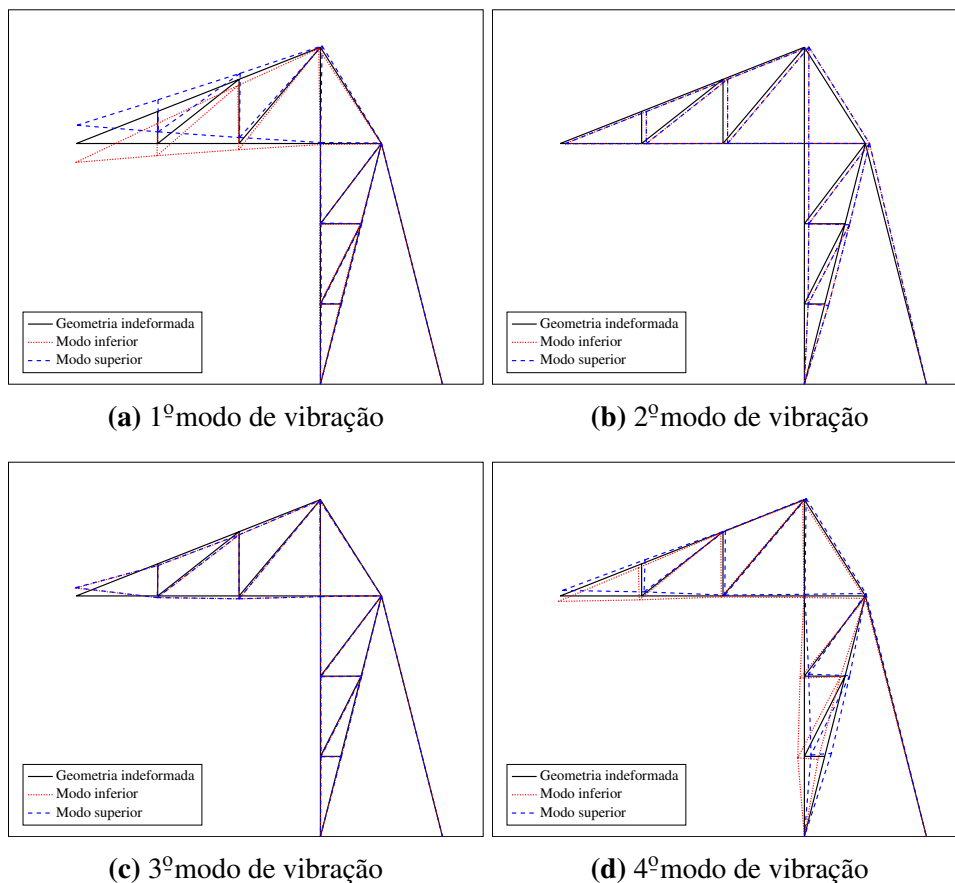
**Figura 5.2:** Primeiras quatro frequências naturais da treliça com 24 barras.

É mostrado por meio da Tabela (5.1) as frequências naturais da treliça plana com 24 barras. Observe que o valor determinístico está compreendido no intervalo de resposta incerto.

**Tabela 5.1:** Frequências naturais em Hz da treliça com 24 barras para  $\alpha = 5\%$ .

	<u>Limite inferior</u>	<u>Limite superior</u>	<u>Determinístico</u>
$f_{n_1}$	15,1159661357025	15,5140754518841	15,3121322587221
$f_{n_2}$	29,0261255977147	29,4754987827270	29,2485574767597
$f_{n_3}$	59,8275690338500	59,9683197403261	59,9081485031280
$f_{n_4}$	81,5697389115020	81,9376866832920	81,7569564213944
$f_{n_5}$	115,463470360251	116,457568098466	115,969975969413
$f_{n_6}$	164,194974258221	164,612298118465	164,417910788779
$f_{n_7}$	200,646057344249	200,870111280913	200,768953173350
$f_{n_8}$	250,977269536217	251,125573664390	251,077856478191
$f_{n_9}$	332,653856794971	334,963833675238	333,786142357375
$f_{n_{10}}$	375,971251624937	376,846284097194	376,432644067672
$f_{n_{11}}$	414,213794278194	415,901681012625	415,101593023140
$f_{n_{12}}$	494,555132186945	495,259245846416	494,899660771696
$f_{n_{13}}$	563,159020751232	563,749087088644	563,498747948164
$f_{n_{14}}$	585,911655740569	587,878627873745	586,986051007551
$f_{n_{15}}$	598,270078870493	599,985662664958	599,085788493935
$f_{n_{16}}$	665,133736884290	670,083261382431	667,669431528397
$f_{n_{17}}$	723,864449137198	727,112110807891	725,875258628739
$f_{n_{18}}$	728,373394143155	732,261946008741	729,627355764963
$f_{n_{19}}$	792,671953135157	792,821098585544	792,741023844546
$f_{n_{20}}$	954,525535207740	956,180234970587	955,396766702411
$f_{n_{21}}$	970,432595477226	970,651839983566	970,534280910250
$f_{n_{22}}$	1058,62075580532	1079,33933206175	1069,27975094039
$f_{n_{23}}$	1107,31365199122	1107,33762374965	1107,32447818503
$f_{n_{24}}$	1328,29363287601	1328,29931705228	1328,29641416024

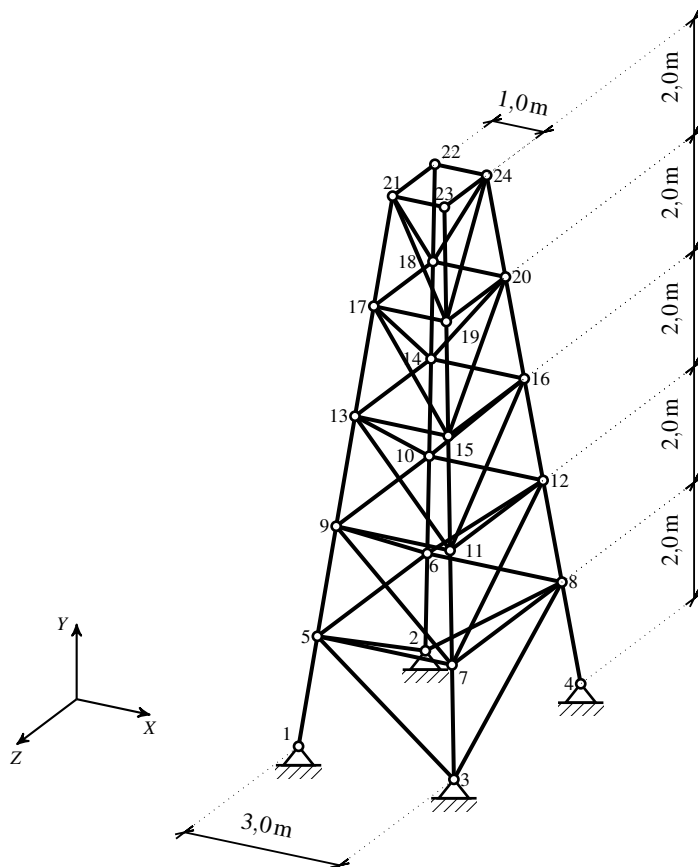
É apresentado por meio da Figura (5.3) os quatro primeiros modos de vibração intervalares da estrutura. Deve-se salientar que essa análise é apenas qualitativa, indicando como a estrutura irá se deformar quando excitada dinamicamente em suas frequências naturais, sendo bastante útil para obter a informação de qual região que terá o maior deslocamento. Como os modos de vibração são incertos, pois as frequências naturais também o são, a estrutura irá deformar em um intervalo fechado, entre um valor de modo inferior e superior, sendo esse intervalo de diferentes tamanhos.



**Figura 5.3:** Modos de vibração da treliça com 24 barras para  $\alpha = 5\%$ .

## 5.2 Treliça Espacial com 60 barras

É apresentada por meio da Figura (5.4) uma treliça espacial com 60 barras, onde todas as juntas são pinadas, com suportes fixos nos nós 1, 2, 3, e 4, que permitem somente rotação. Os parâmetros incertos são devidos às áreas das seções transversais, de acordo com  $A_i^I = [0,95 \times 10^{-4}; 1,05 \times 10^{-3}] \text{ m}^2$  e ao módulo de Young, com  $E_i^I = [199,5 \times 10^9; 220,5 \times 10^9] \text{ N/m}^2$ . A massa específica vale  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Os valores dos parâmetros determinísticos para as áreas das seções transversais e módulo de Young são, respectivamente,  $A^c = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  e  $E^c = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .



**Figura 5.4:** Treliça espacial com 60 barras.

As primeiras quinze frequências naturais intervalares e determinísticas da estrutura são informadas por meio da Tabela (5.2).

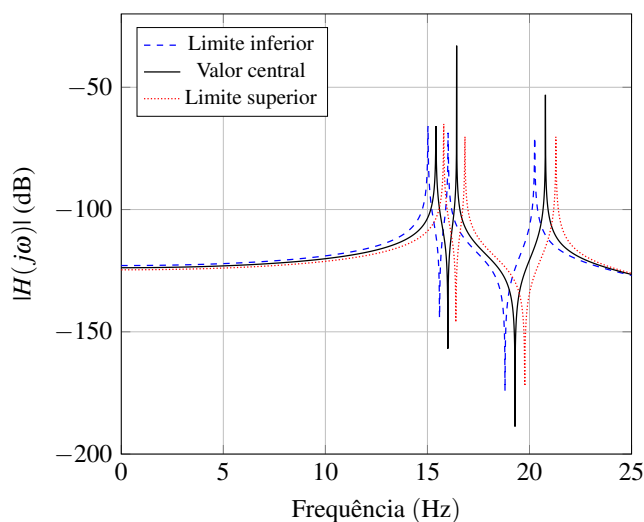
**Tabela 5.2:** Primeiras 15 frequências naturais em Hz da treliça com 60 barras.

	<u>Limite inferior</u>	<u>Limite superior</u>	<u>Determinístico</u>
$f_{n_1}$	15,0254029273269	15,7964309688143	15,4157381347935
$f_{n_2}$	16,0140436216535	16,8358037268327	16,4300620851649
$f_{n_3}$	20,2543807695540	21,2937336316277	20,7805562044540
$f_{n_4}$	42,8653930721680	45,0650292634872	43,9789653456653
$f_{n_5}$	48,7213829941327	51,2215191096366	49,9870842356297
$f_{n_6}$	50,8593340763775	53,4691790791388	52,1805757638305
$f_{n_7}$	51,8939730652137	54,5569105325876	53,2420929685996
$f_{n_8}$	73,8251491933142	77,6134842197018	75,7430049117969
$f_{n_9}$	92,4326278433021	97,1758050053681	94,8338751935713
$f_{n_{10}}$	97,6435908055875	102,654168355285	100,180210386394
$f_{n_{11}}$	100,627761713335	105,791471891927	103,241905136665

Continuação da **Tabela 5.2** da página anterior

	<u>Limite inferior</u>	<u>Limite superior</u>	<u>Determinístico</u>
$f_{n_{12}}$	103,035 900 852 417	108,323 184 609 238	105,712 603 762 173
$f_{n_{13}}$	144,375 618 555 281	151,784 248 523 603	148,126 259 206 622
$f_{n_{14}}$	144,753 527 625 160	152,181 549 984 583	148,513 985 731 375
$f_{n_{15}}$	149,989 967 771 601	157,686 697 879 495	153,886 459 963 613

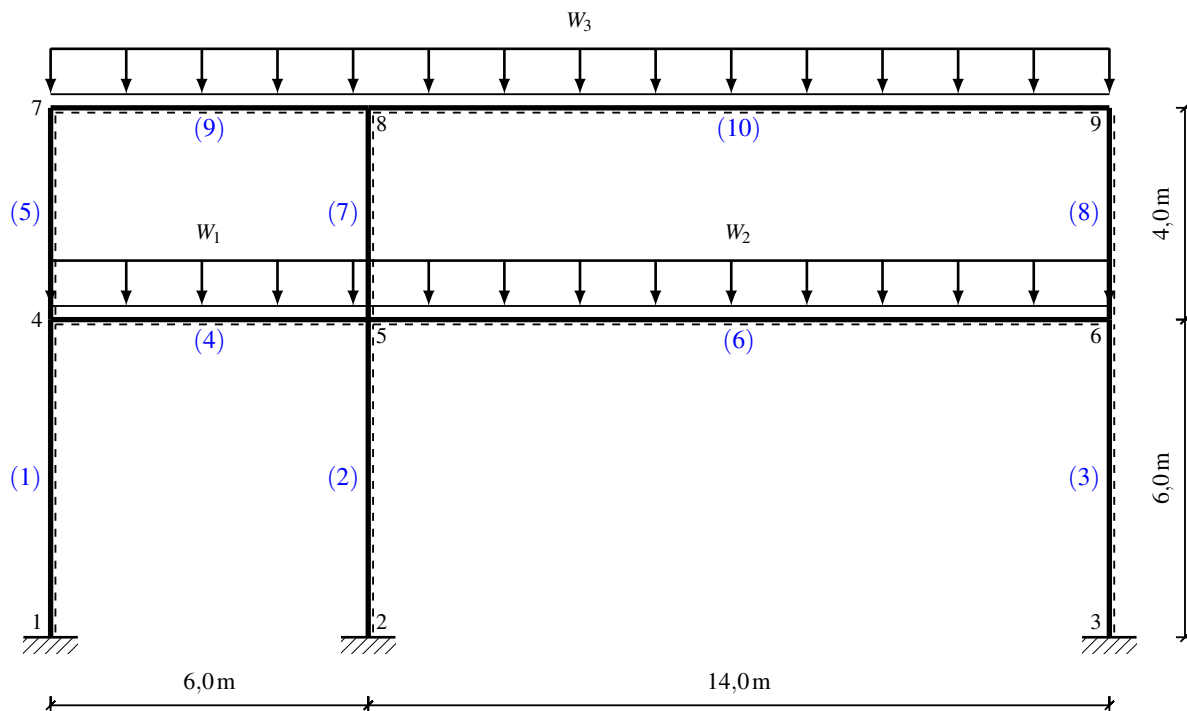
A resposta em frequência para as três primeiras frequências naturais é apresentada por meio da Figura (5.5). Nota-se que a frequência natural determinística está contida no intervalo de incertezas.



**Figura 5.5:** Resposta em frequência dos 3 primeiros modos de vibração da treliça com 60 barras.

### 5.3 Pórtico Plano com 10 Elementos

Neste exemplo é analisado um pórtico plano com 10 elementos apresentado por meio da Figura (5.6), com carregamentos distribuídos  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$ . As incertezas paramétricas estão presentes no módulo de Young com  $E^I = [1,89 \times 10^{11}; 2,31 \times 10^{11}] \text{N/m}^2$ , nas áreas das seções transversais, de acordo com  $A^I = [9,0 \times 10^{-2}; 1,1 \times 10^{-1}] \text{m}^2$  e nos momentos de inércia de área com  $I^I = [9,0 \times 10^{-3}; 1,1 \times 10^{-2}] \text{m}^4$ . Os parâmetros determinísticos para a massa específica, o módulo de Young, as áreas das seções transversais e os momentos de inércia de área são, respectivamente,  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ,  $E = 210 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ,  $A = 1,0 \times 10^{-1} \text{m}^2$  e  $I = 1,0 \times 10^{-2} \text{m}^4$ .



**Figura 5.6:** Pórtico plano com 10 elementos.

É apresentado por meio da Tabela (5.3) todas as frequências naturais intervalares e determinísticas do pórtico, para o número de elementos utilizados.

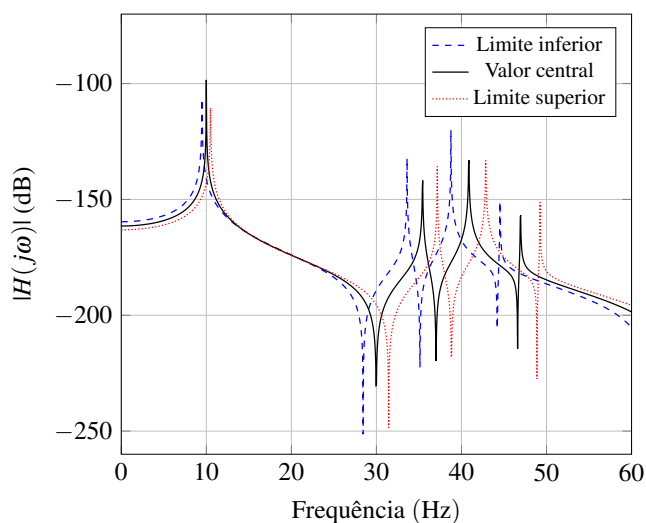
**Tabela 5.3:** Frequências naturais em Hz do pórtico com 10 elementos.

	<u>Limite inferior</u>	<u>Limite superior</u>	<u>Determinístico</u>
$f_{n_1}$	9,4899479794250	10,4915322425815	10,0032834971650
$f_{n_2}$	33,6061973038148	37,1530490291359	35,4240423256880
$f_{n_3}$	38,7647674671814	42,8560629246721	40,8616527210300
$f_{n_4}$	44,5310395936257	49,2309166188390	46,9398372303319
$f_{n_5}$	73,8280284741178	81,6199564867744	77,8215750459925
$f_{n_6}$	86,0762036143035	95,1608235889593	90,7322852538721
$f_{n_7}$	92,1693164539508	101,897013287095	97,1549901251063
$f_{n_8}$	96,8960233402869	107,122584365750	102,137376656048
$f_{n_9}$	112,554922792081	124,434149069585	118,643305962458
$f_{n_{10}}$	122,559977986369	135,495153765002	129,189560139008
$f_{n_{11}}$	148,679693270477	164,371585507767	156,722157516639
$f_{n_{12}}$	171,604178698978	189,715557733869	180,886686897107
$f_{n_{13}}$	192,499868006869	212,816611457242	202,912677394495
$f_{n_{14}}$	244,897943929806	270,744863981554	258,145099036798

Continuação da **Tabela 5.3** da página anterior

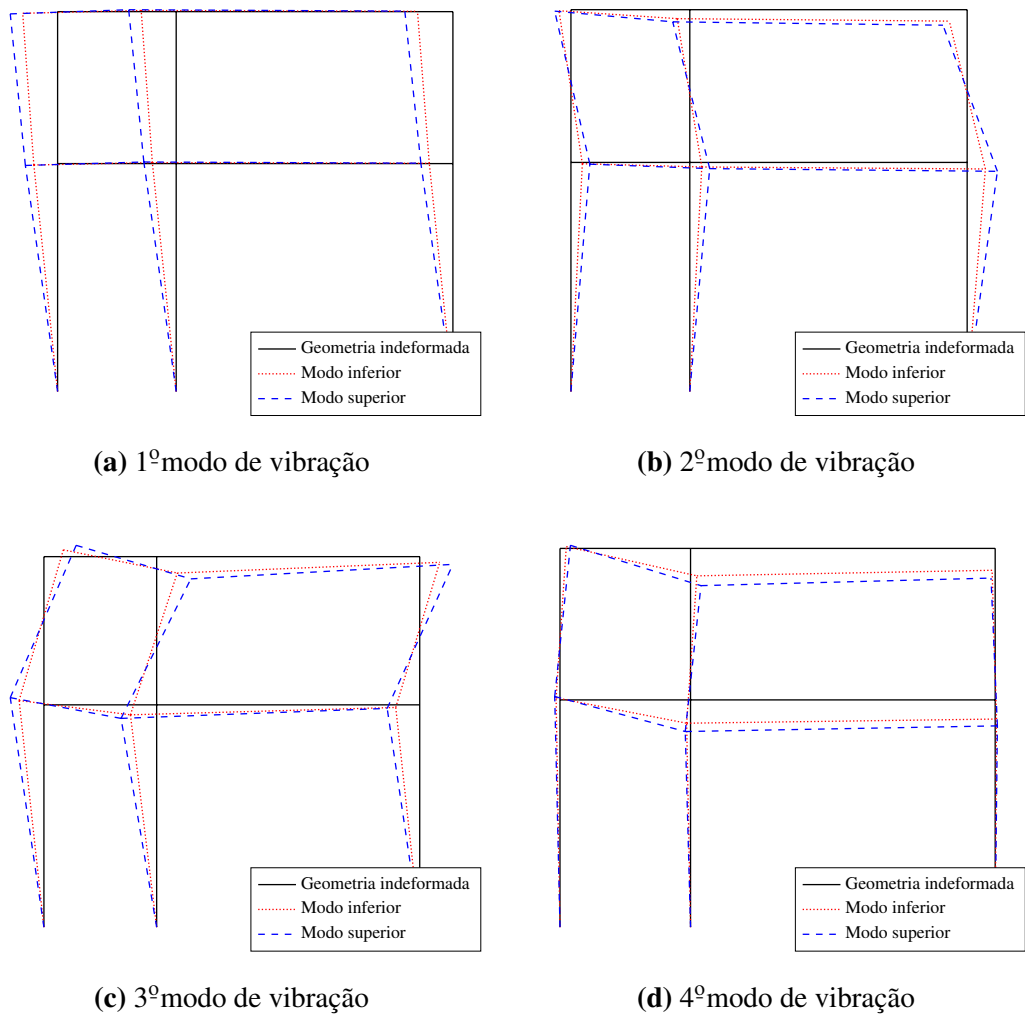
	Limite inferior	Limite superior	Determinístico
$f_{n_{15}}$	276,521 795 075 635	305,706 346 873 809	291,479 565 039 113
$f_{n_{16}}$	311,460 085 706 245	344,332 080 486 516	328,307 757 020 996
$f_{n_{17}}$	361,562 103 323 882	399,721 945 045 675	381,119 920 701 534
$f_{n_{18}}$	409,254 599 441 757	452,447 983 358 500	431,392 225 711 943

Tem-se na Figura (5.7) as curvas de resposta em frequência para as quatro primeiras frequências naturais.



**Figura 5.7:** Resposta em frequência dos 4 primeiros modos de vibração do pórtico com 10 elementos.

Na Figura (5.8) pode-se observar os quatro primeiros modos de vibração intervalares da estrutura. A análise indica que a deformação da estrutura ocorrerá dentro do intervalo de limites inferior e superior.



**Figura 5.8:** Modos de vibração do pórtico com 10 elementos.

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Conclui-se, a priori, que os objetivos propostos foram não somente alcançados como superados. Além de ter sido apresentado metodologia para a quantificação de incertezas paramétricas em sistemas estruturais utilizando a análise intervalar e o MEF, foi ainda proposto um novo método para solucionar o problema do autovalor intervalar generalizado. Foram desenvolvidos quatro programas, além de um *toolbox* com diversas funções, para obter os autovalores, as frequências naturais e os modos de vibração incertos, que foram utilizados para solucionar os exemplos apresentados. Dessa forma, foi possível verificar a viabilidade da utilização da análise intervalar e do MEF para a quantificação de incertezas paramétricas em tais sistemas.

Ao longo do tempo, nota-se constante evolução na forma de resolver o problema do autovalor intervalar, com publicações em conceituados periódicos internacionais, como pode ser observado na Seção 1.1. Observa-se que o intervalo de resposta está cada vez menos superestimado. Tratando-se especificamente dos métodos utilizados para comparar com o *método proposto*, pode-se ver que ocorre um decrescimento da superestimação do intervalo, com o *Deif's solution theorem* sendo o que possui maior superestimação, o *eigenvalue inclusion principle* com resultados intermediários, e o *parameter vertex solution theorem* possuindo a menor superestimação entre esses três métodos.

Através de simulações utilizando o método de *Monte Carlo*, que é um método amplamente utilizado para validação de novos métodos, mostra-se que o método proposto não possui superestimação dos intervalos, como ocorrido nos outros métodos analisados. Fica evidenciado que o método proposto retorna os resultados intervalares mais precisos para os problemas, com uma precisão excelente. Sendo assim, demonstra-se, que a forma que apresenta maior precisão na solução do problema do autovalor intervalar generalizado é o método proposto.

## Perspectivas Futuras

Tendo em vista o desenvolvimento matemático apresentado e as simulações numéricas realizadas nessa dissertação, algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Expandir o método para a utilização com elementos de pórticos espaciais, elementos de placa e elementos de casca;
- Verificar a adequação do método em problemas não lineares;
- Verificar a adequação do método para problemas com amortecimento proporcional;
- Verificar a possibilidade de adaptação a problemas com excitação externa;
- Desenvolver técnicas experimentais que possam representar de forma adequada as incertezas paramétricas em estruturas;
- Estudar incerteza intervalar em otimização;
- Aplicar as teorias de Vlasov, Cisalhamento e Timoshenko para obtenção do elemento de viga.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albuquerque, J. C. V. (2015). *Análise dinâmica de estruturas com parâmetros intervalares*. PhD thesis, Universidade Federal de Itajubá.

Arndt, M. (2009). *O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná.

Chandrupatla, T. R. Belegundu, A. D. (2014). *Elementos Finitos*. Pearson.

Chapra, S. C. Canale, R. P. (2008). *Métodos numéricos para engenharia*. McGraw-Hill.

Chen, S. H., Lian, H. D., Yang, X. W. (2003). Interval eigenvalue analysis for structures with interval parameters. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39(5–6), 419–431.

Chen, S.-H., Qiu, Z., Liu, Z. (1994a). Perturbation method for computing eigenvalue bounds in structural vibration systems with interval parameters. *Communications in numerical methods in engineering*, 10(2), 121–134.

Chen, S.-H., Qiu, Z.-P., Liu, Z.-S. (1994b). A method for computing eigenvalue bounds in structural vibration systems with interval parameters. *Computers & structures*, 51(3), 309–313.

Chen, S. H. Wu, J. (2004). Interval optimization of dynamic response for structures with interval parameters. *Computers & structures*, 82(1), 1–11.

Deif, A. (1986). *Sensitivity analysis in linear systems*. Springer-Verlag.

Deif, A. (1991). The interval eigenvalue problem. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 71(1), 61–64.

Dessombz, O., Thouverez, F., Laîné, J.-P., Jézéquel, L. (2001). Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5), 949–968.

- Dimarogonas, A. D. (1995). Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 183(4), 739–749.
- Dimov, I. T. (2008). *Monte Carlo methods for applied scientists*. World Scientific.
- Dunn, W. L. Shultis, J. K. (2012). *Exploring Monte Carlo methods*. Elsevier.
- Fishman, G. S. (1996). *Monte Carlo: concepts, algorithms and applications*. Springer.
- Hansen, E. Walster, G. W. (2003). *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*, volume 264. CRC Press.
- Hladík, M., Daney, D., Tsigaridas, E. (2011). Characterizing and approximating eigenvalue sets of symmetric interval matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(8), 3152–3163.
- Hutton, D. V. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw-Hill.
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning.
- Li, Q., Qiu, Z., Zhang, X. (2017). Eigenvalue analysis of structures with interval parameters using the second-order Taylor series expansion and the dca for qb. *Applied Mathematical Modelling*.
- Marsaglia, G. Zaman, A. (1991). A new class of random number generators. *The Annals of Applied Probability*, 1(3), 462–480.
- Matsumoto, M. Nishimura, T. (1998). Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1), 3–30.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Modarreszadeh, M. (2005). *Dynamic analysis of structures with interval uncertainty*. PhD thesis, Case Western Reserve University.
- Moler, C. B. (2004). *Numerical computing with MATLAB*. SIAM.
- Moore, R. E. (1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.
- Moore, R. E., Baker, K. R., J., C. M. (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Muscolino, G. Sofi, A. (2012). Stochastic analysis of structures with uncertain-but-bounded parameters via improved interval analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 28, 152–163.

- Neumaier, A. (1990). *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Qiu, Z., Chen, S., Jia, H. (1995). The rayleigh quotient iteration method for computing eigenvalue bounds of structures with bounded uncertain parameters. *Computers & structures*, 55(2), 221–227.
- Qiu, Z., Wang, X., Friswell, M. I. (2005). Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1), 297–312.
- Rohn, J. (1987). Eigenvalues of a symmetric interval matrix. *Freiburger Intervall-Berichte*, 87(10), 67–72.
- Rohn, J. (1990). Real eigenvalues of an interval matrix with rank one radius. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 70(6), T562–T563.
- Rump, S. M. (1999). Intlab—interval laboratory. In *Developments in reliable computing* (pp. 77–104). Kluwer Academic Publishers.
- Sága, M., Vaško, M., Pecháč, P. (2014). Chosen numerical algorithms for interval finite element analysis. *Procedia Engineering*, 96, 400–409.
- Sim, J., Qiu, Z., Wang, X. (2007). Modal analysis of structures with uncertain-but-bounded parameters via interval analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 303(1), 29–45.
- Sofi, A., Muscolino, G., Elishakoff, I. (2015). Natural frequencies of structures with interval parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 347, 79–95.

# APÊNDICES

# APÊNDICE A

## O Problema do Autovalor

Segundo [Chapra e Canale \(2008\)](#), problemas de autovalores são uma classe especial de problemas de contorno que são comuns em contextos de problemas em engenharia envolvendo vibrações, elasticidade e outros sistemas oscilantes. São usados ainda em uma grande variedade de problemas de engenharia, além dos de contorno.

A equação diferencial de movimento, linear e com coeficientes constantes, para sistemas mecânicos não amortecidos com  $m$  graus de liberdade é apresentada por meio da Equação (1),

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

onde  $[M]$  e  $[K]$  são as matrizes simétricas  $m \times m$  de massa e rigidez globais do sistema, respectivamente,  $\{u(t)\}$  é o vetor coluna de dimensão  $m$  com as coordenadas generalizadas, e  $\{f(t)\}$  é a excitação externa.

Para os sistemas que não estão sujeitos à excitação externa, a equação de movimento é dada pela Equação homogênea (2).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2)$$

Como o sistema é conservativo, espera-se que as soluções da Equação (2) sejam periódicas, do tipo da Equação (3),

$$\{u(t)\} = \{x\}e^{j\omega_n t} \quad (3)$$

onde  $\{x\}$  é um vetor coluna de constantes e  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema.

Substituindo a Equação (3) na Equação (2), leva a

$$(-\lambda[M]\{x\} + [K]\{x\})e^{j\omega_n t} = \{0\} \quad (4)$$

com  $\lambda = \omega_n^2$ , onde  $\lambda$  são os autovalores do sistema. Como  $e^{j\omega_n t} \neq 0$  para todo instante de tempo, tem-se

$$([K] - \lambda[M])\{x\} = \{0\} \quad (5)$$

Para a solução não trivial, é exigido que

$$\det([K] - \lambda[M]) = \{0\} \quad (6)$$

Para a determinação dos autovetores ou modos de vibrar  $\{x\}$ , associados aos autovalores, deve ser utilizada a Equação (7), que é conhecida como o Problema do Autovalor Generalizado.

$$[K]\{x\} = \lambda[M]\{x\} \quad (7)$$

Como  $[M]$  é não singular, ou seja, possui inversa, pré-multiplicando ambos os lados da Equação (7) por  $[M]^{-1}$ , leva a

$$[M]^{-1}[K]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (8)$$

fazendo

$$[D] = [M]^{-1}[K] \quad (9)$$

chega-se a

$$[D]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (10)$$

A Equação (10) é conhecida como o Problema do Autovalor Padrão, e  $[D]$  como matriz dinâmica.

Aplicando a Transformada de Fourier na Equação (1), tem-se

$$\{u(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{U(j\omega)\} \quad (11)$$

$$\{\dot{u}(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\{U(j\omega)\} \quad (12)$$

$$\{\ddot{u}(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^2\{U(j\omega)\} \quad (13)$$

$$\{f(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{F(j\omega)\} \quad (14)$$

e fazendo as devidas manipulações, leva a Equação (15), que representa a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema.

$$[H(j\omega)] = (-\omega^2[M] + [K])^{-1} \quad (15)$$

# **APÊNDICE B**

**Artigo Publicado no COBEM 2017**



24th COBEM - 2017

24<sup>th</sup> ABCM International Congress of Mechanical Engineering  
December 3-8, 2017, Curitiba, PR, Brazil

## COBEM-2017-0183

## THE INTERVAL EIGENVALUE PROBLEM FOR VIBRATING SYSTEMS

Fabiano Sangi de Oliveira

José Juliano de Lima Junior

Federal University of Itajubá (UNIFEI) - Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho, 37500-903, Minas Gerais, Itajubá, Brazil

fabiano.sangi@unifei.edu.br

limajr@unifei.edu.br

**Abstract.** In this paper, the interval eigenvalue problem with uncertainties in the mass matrix and stiffness matrix of the system is presented, and a method to solve this problem using the Interval Analysis and the Finite Element Method (FEM) is proposed. In order to support the solution of the problems, the basic fundamentals of the eigenvalue problem and the interval analysis were presented. Comparisons were made between the proposed method and two other methods, namely the parameter vertex solution theorem and the eigenvalue inclusion principle. Numerical examples have been presented to show the applicability and reliability of the proposed method. To compare the results, simulations were performed using the Monte Carlo method, with results presented in the form of tables and graphs.

**Keywords:** Interval Analysis, Vibrating Systems, Eigenvalue Problem, Uncertainties.

## 1. INTRODUCTION

Errors are inherent in all known processes. They can be caused by measurement errors, approximations, rounding, among others. Thus, the purpose of an interval analysis is to provide an interval with lower and upper limits where the exact value of the variable under analysis is contained, that is, interval in which the errors present in the system are computed. In (Moore et al., 2009) can be seen several examples of the use of interval mathematics in the treatment of uncertainties.

The approach is important both in the design and in the rehabilitation of truss structures, as they are widely used in stadium coverings, transmission towers and general application sheds. The uncertainties must be quantified to ensure a longer life of the structure, avoiding sudden failures, and thus ensuring the safety of facilities and especially of people.

To ensure robustness and agility in structural analysis, computational techniques are increasingly employed. A widely used technique is the Finite Element Method (FEM), which allows good implementation and malleability in solving often complex problems. In conjunction with the interval analysis, FEM can be applied to quantify uncertainties in structural systems. A fairly complete approach to FEM can be seen in (Hutton, 2004).

Parameters of great importance to be determined in a dynamic analysis of structures are the natural frequencies, mainly in the design phase, whose objective is to move away the natural frequencies from those of excitation, thus avoiding the unwanted phenomenon of resonance. Theoretical studies, showing the invariance of the eigenvector signals, were performed by (Deif, 1991) in order to determine the eigenvalues for the standard interval eigenvalue problem for symmetric and asymmetric dynamic matrices. Later, (Qiu et al., 1995) presented the generalized interval eigenvalue problem, using the (Deif, 1991) method and iterative process with Rayleigh quotient. Another method of solution called the inclusion principle using FEM was presented by (Qiu et al., 2005) with the solution of several numerical examples. Modal analysis using the (Deif, 1991) method was used in (Sim et al., 2007) to solve the interval eigenvalue problem, being performed simulations using the Monte Carlo method and presenting graphical results using the Frequency Response Function. For the solution of the standard problem, in (Hladík et al., 2011) several algorithms were presented for the case of symmetric matrices. Using the matrix perturbation theory and FEM, (Albuquerque, 2015) studied the interval eigenvalue problem. Further, (Li et al., 2017) used the Taylor series of the second order to compute the eigenvalues of space truss and plate, with uncertain parameters.

## 2. REVIEW OF THE EIGENVALUE PROBLEM

It was spoken by (Chapra and Canale, 2010) that, eigenvalue problems are a special class of boundary-value problems that are common in engineering problem contexts involving vibrations, elasticity, and other oscillating systems. They are also used in a wide variety of engineering problems, in addition to the boundary-value problems.

The linear differential equation of motion with constant coefficients for non-damped mechanical systems with  $n$  de-

Oliveira, F. S. de and Lima Jr, J. J. de  
The Interval Eigenvalue Problem for Vibrating Systems

degrees of freedom is presented by Eq. (1).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

where  $[M]$  and  $[K]$  are the symmetric matrices  $n \times n$  of global mass and stiffness of the system, respectively,  $\{u(t)\}$  is the column vector of dimension  $n$  with the generalized coordinates, and  $\{f(t)\}$  is the external excitation.

For systems that are not subject to external excitation, the equation of motion is given by Eq. (2).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2)$$

As the system is conservative, the solutions of Eq. (2) are expected to be periodic, of the type of Eq. (3),

$$\{u(t)\} = \{x\}e^{j\omega_n t} \quad (3)$$

where  $\{x\}$  is a column vector of constants and  $\omega_n$  is the natural frequency of the system. Substituting Eq. (3) into Eq. (2), leads to

$$(-\lambda[M]\{x\} + [K]\{x\})e^{j\omega_n t} = \{0\} \quad (4)$$

with  $\lambda = \omega_n^2$ , where  $\lambda$  are the eigenvalues of the system. As  $e^{j\omega_n t} \neq 0$  for every instant of time, arrives to

$$([K] - \lambda[M])\{x\} = \{0\} \quad (5)$$

For the non-trivial solution, it is required that

$$\det([K] - \lambda[M]) = \{0\} \quad (6)$$

For the determination of the eigenvectors or vibration modes  $\{x\}$ , associated with eigenvalues, one must use Eq. (7), which is known as the Generalized Eigenvalue Problem.

$$[K]\{x\} = \lambda[M]\{x\} \quad (7)$$

### 3. DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS

With application of the FEM, it is possible to solve complex problems involving structures, with high number of bars. Thus, it is necessary to assemble the global mass and stiffness matrices of the system in the global coordinate, which is the linear sum of the contribution of the mass matrix  $[M]_e$  and stiffness  $[K]_e$  of each element in the global coordinate. To perform the sum, use the degrees of freedom between the connectivities of the nodes. This way,

$$[K] = [K]_0 + \sum_{i=1}^m [K]_{e_i} \quad (8)$$

$$[M] = [M]_0 + \sum_{i=1}^m [M]_{e_i} \quad (9)$$

where  $m$  is the number of elements,  $[K]_0$  and  $[M]_0$  are the null  $n \times n$  matrices.

Mass and stiffness matrices are functions of the vector  $\{a\}$ , which contains the geometric and structural parameters, in this way

$$[K] = [K(a)] \quad (10)$$

$$[M] = [M(a)] \quad (11)$$

with

$\{\underline{a}\} \leq \{a\} \leq \{\bar{a}\}$ ,  $a_i^I = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  ou  $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$   $i = 1, 2, \dots, m$   
where  $\{\underline{a}\} = (\underline{a}_i)$  and  $\{\bar{a}\} = (\bar{a}_i)$  are, respectively, the lower and upper limits of the structural parameter  $\{a\}$ , with  $\{a\} \in \{a\}^I$ .

Thus, Eq. (8) and Eq. (9) can be rewritten as functions of the uncertain structural parameters.

$$[K]^I = [\underline{K}, \bar{K}] = [K]_0 + \sum_{i=1}^m a_i^I [K]_{e_i} \quad (12)$$

$$[M]^I = [\underline{M}, \bar{M}] = [M]_0 + \sum_{i=1}^m a_i^I [M]_{e_i} \quad (13)$$

where

$$[\underline{K}] = [K]_0 + \sum_{i=1}^m \underline{a}_i [K]_{e_i} \quad (14)$$

$$[\bar{K}] = [K]_0 + \sum_{i=1}^m \bar{a}_i [K]_{e_i} \quad (15)$$

$$[\underline{M}] = [M]_0 + \sum_{i=1}^m \underline{a}_i [M]_{e_i} \quad (16)$$

$$[\bar{M}] = [M]_0 + \sum_{i=1}^m \bar{a}_i [M]_{e_i} \quad (17)$$

Thus, with uncertainties present in the matrices of mass and stiffness of the system, it leads to the generalized interval eigenvalue problem represented by Eq. (18).

$$[K]^I \{x\} = \lambda [M]^I \{x\} \quad (18)$$

The bounds for eigenvalues  $\lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  can be computed through Eq. (19) and Eq. (20).

$$\underline{\lambda} = \min ([\underline{K}] \{\underline{x}\} - \underline{\lambda} [\underline{M}] \{\underline{x}\} = 0, [\bar{K}] \{\bar{x}\} - \bar{\lambda} [\bar{M}] \{\bar{x}\} = 0) \quad (19)$$

$$\bar{\lambda} = \max ([\underline{K}] \{\underline{x}\} - \lambda [\underline{M}] \{\underline{x}\} = 0, [\bar{K}] \{\bar{x}\} - \bar{\lambda} [\bar{M}] \{\bar{x}\} = 0) \quad (20)$$

where  $\{\underline{x}\}$  is the lower bound and  $\{\bar{x}\}$  the upper bound for eigenvectors, with  $\{x\}^I = [\underline{x}, \bar{x}]$ .

#### 4. NUMERICAL EXAMPLES

Two examples are used to demonstrate the possibility of applying the proposed method. The first is a stepped beam with uncertainties in the cross-sectional areas and moments of inertia of the area. The second is a flat truss with eight bars, where the uncertain parameter is related to the areas of the cross sections of the bars. In both examples the uncertain parameters affect the mass matrix and stiffness simultaneously. Also, simulations will be presented using the Monte Carlo method for comparison of results.

Oliveira, F. S. de and Lima Jr, J. J. de  
The Interval Eigenvalue Problem for Vibrating Systems

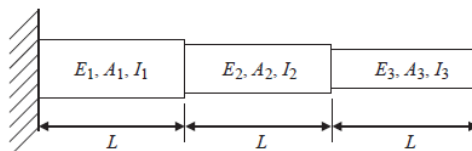


Figure 1: A three element stepped beam.

Table 1: Uncertain cross-sectional area and moment of inertia for stepped beam.

Cross-sectional area		Moments of inertia	
$A_1^I = [1.426 \times 10^{-2}, 1.454 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$		$I_1^I = [0.19980 \times 10^{-4}, 0.20020 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$	
$A_2^I = [0.990 \times 10^{-2}, 1.010 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$		$I_2^I = [0.09990 \times 10^{-4}, 0.10010 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$	
$A_3^I = [0.634 \times 10^{-2}, 0.646 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$		$I_3^I = [0.04995 \times 10^{-4}, 0.05005 \times 10^{-4}] \text{ m}^4$	

#### 4.1 A three element stepped beam

In this example, the fixed-free stepped beam shown by Fig. 1, presented by (Qiu et al., 2005), is analyzed, comparing the results obtained using the proposed method, parameter vertex solution theorem and the simulations using the Monte Carlo method. The specific mass is  $\rho_i = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $L_i = 0.4 \text{ m}$  and Young's modulus is  $E_i = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , for  $i = 1, 2, 3$ . The areas of the cross sections and the moments of inertia of the area are the uncertain parameters that cause uncertainties in the dynamic response of the structure under analysis, and can be observed by means of Tab. 1.

Table 2 shows the lower and upper bounds for the eigenvalues, calculated using the proposed method, the parameter vertex solution theorem and the Monte Carlo method. It can be observed that, in general, the answers obtained through the proposed method are closer to the answers obtained with the Monte Carlo method. The graphical results of the simulations using the Monte Carlo method can be seen by means of Fig. 2 for 2,000 samples.

#### 4.2 Eight bars truss

By means of Fig. 3, presented in (Qiu et al., 2005), it can be see a truss with eight bars, where all the joints are pinned, which will be used to compare the results obtained by means of the proposed method, the eigenvalue inclusion principle and the Monte Carlo method. The cross-sectional areas of bars 1, 2, 3, 4 and 6 are considered with uncertainties, according to  $A_i^I = [A^c - \beta A^c, A^c + \beta A^c]$ , with  $i=1, 2, 3, 4, 6$ , where  $A^c = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , and  $\beta$  is the percentage factor that will cause variation of the uncertain parameter to occur, with  $\beta$  ranging from 0 to 2%. The areas of the cross sections of bars 5, 7 and 8 are deterministic, with  $A_5 = A_7 = A_8 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . Young's module is  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  and the specific mass is  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

By means of Fig. 3 it is possible to observe comparisons between the eigenvalues obtained through the proposed method and the eigenvalue inclusion principle, the lower and upper bounds calculated through the proposed method are more tight. Table 3 shows comparisons between the proposed method, the eigenvalue inclusion principle and the Monte Carlo method for  $\beta = 2\%$ . It can be noticed that the results obtained through the proposed method converge with those

Table 2: Interval eigenvalues for the three element stepped beam.

	Proposed method		Monte Carlo method		The parameter vertex solution theorem	
	Lower bound	Upper bound	Lower Bound	Upper bound	Lower bound	Upper bound
$\lambda_1$	3.620026E+05	3.682185E+05	3.615941E+05	3.685832E+05	3.612794E+05	3.689557E+05
$\lambda_2$	7.271976E+06	7.400345E+06	7.268218E+06	7.398023E+06	7.257447E+06	7.415161E+06
$\lambda_3$	4.780474E+07	4.864078E+07	4.779937E+07	4.862997E+07	4.770923E+07	4.873816E+07
$\lambda_4$	2.558403E+08	2.603177E+08	2.557887E+08	2.602688E+08	2.553292E+08	2.608389E+08
$\lambda_5$	8.842340E+08	8.998542E+08	8.839731E+08	8.995773E+08	8.824674E+08	9.016557E+08
$\lambda_6$	2.716636E+09	2.763361E+09	2.713185E+09	2.764558E+09	2.711208E+09	2.768894E+09

24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2017)  
December 3-8, 2017, Curitiba, PR, Brazil

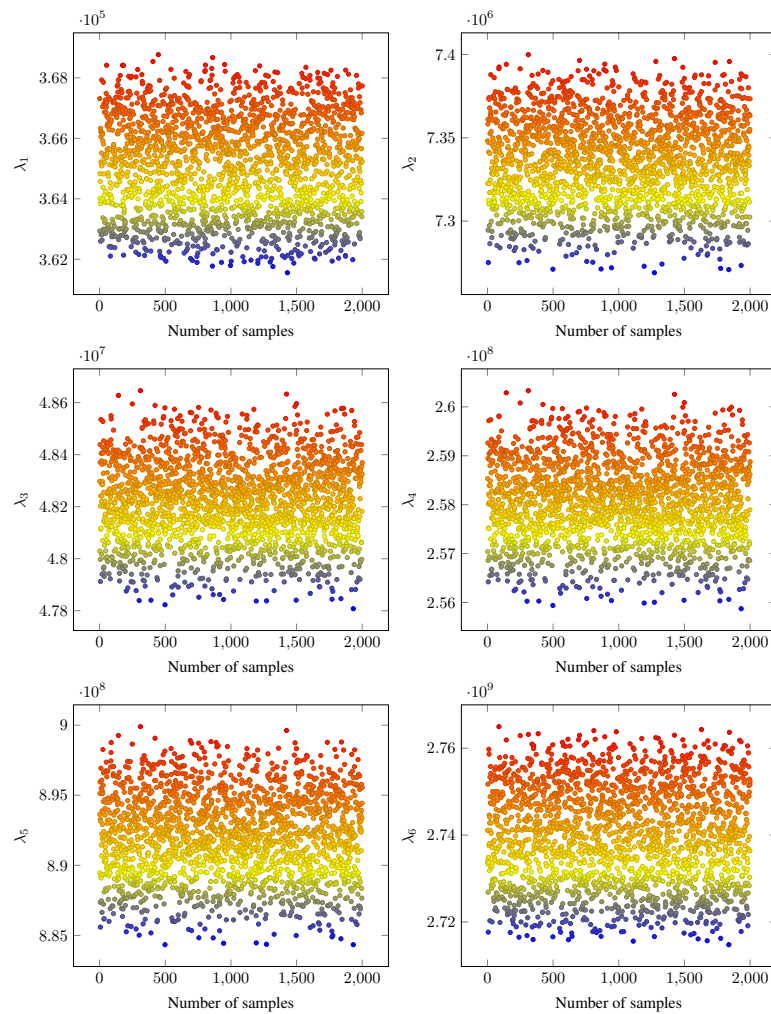


Figure 2: Simulations Monte Carlo method for three element stepped beam.

Oliveira, F. S. de and Lima Jr, J. J. de  
The Interval Eigenvalue Problem for Vibrating Systems

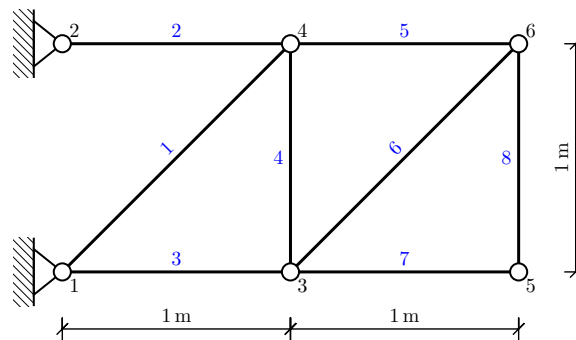


Figure 3: The eight bars truss.

Table 3: The first four interval eigenvalues for eight bars truss for  $\beta = 2\%$ .

	Proposed method		Monte Carlo method		Eigenvalue inclusion principle	
	Lower bound	Upper bound	Lower Bound	Upper bound	Lower bound	Upper bound
$\lambda_1$	7.842575E+05	7.957449E+05	7.842597E+05	7.957429E+05	7.668948E+05	8.137204E+05
$\lambda_2$	6.563958E+06	6.573943E+06	6.563960E+06	6.573942E+06	6.396250E+06	6.746699E+06
$\lambda_3$	8.891796E+06	8.976180E+06	8.891812E+06	8.976165E+06	8.687945E+06	9.184929E+06
$\lambda_4$	2.461287E+07	2.489588E+07	2.461293E+07	2.489583E+07	2.411954E+07	2.539569E+07

obtained by the Monte Carlo method at least up to the fourth decimal place. The graphical results obtained through simulations using the Monte Carlo method for  $\beta = 2\%$  are shown by means of Fig. 5 for 2,000 samples.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper, through the examples analyzed, it was demonstrated that the proposed method, together with the Finite Element Method and the Interval Analysis are important tools for the quantification of parametric uncertainties in structures, being of great relevance to guarantee the structural reliability, avoiding failures. The comparisons made with the other two methods show that the proposed method obtains better numerical results, and the results for the eight bars truss are exact, because it is a reticulated structure. For this, a computer program was developed to solve the interval eigenvalue problem, which demonstrated a rapid solution of the problems, and provided reliable solutions, with the possibility of application in practical situations. The Monte Carlo method was used to compare the results, demonstrating the reliability of the results obtained with the proposed method.

## 6. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank CAPES for providing a research grant, to the Post-Graduation Program in Mechanical Engineering of the Federal University of Itajubá - UNIFEI for the opportunity to carry out the studies and the financial support from FAPEMIG.

## 7. REFERENCES

- Albuquerque, J. C. V. (2015). *Análise dinâmica de estruturas com parâmetros intervalares*. PhD thesis, Universidade Federal de Itajubá.
- Chapra, S. C. and Canale, R. P. (2010). *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill Higher Education.
- Chen, S.-H., Qiu, Z., and Liu, Z. (1994). Perturbation method for computing eigenvalue bounds in structural vibration systems with interval parameters. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 10(2):121–134.
- Deif, A. (1986). *Sensitivity analysis in linear systems*. Springer-Verlag.
- Deif, A. (1991). The interval eigenvalue problem. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für*

24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2017)  
December 3-8, 2017, Curitiba, PR, Brazil

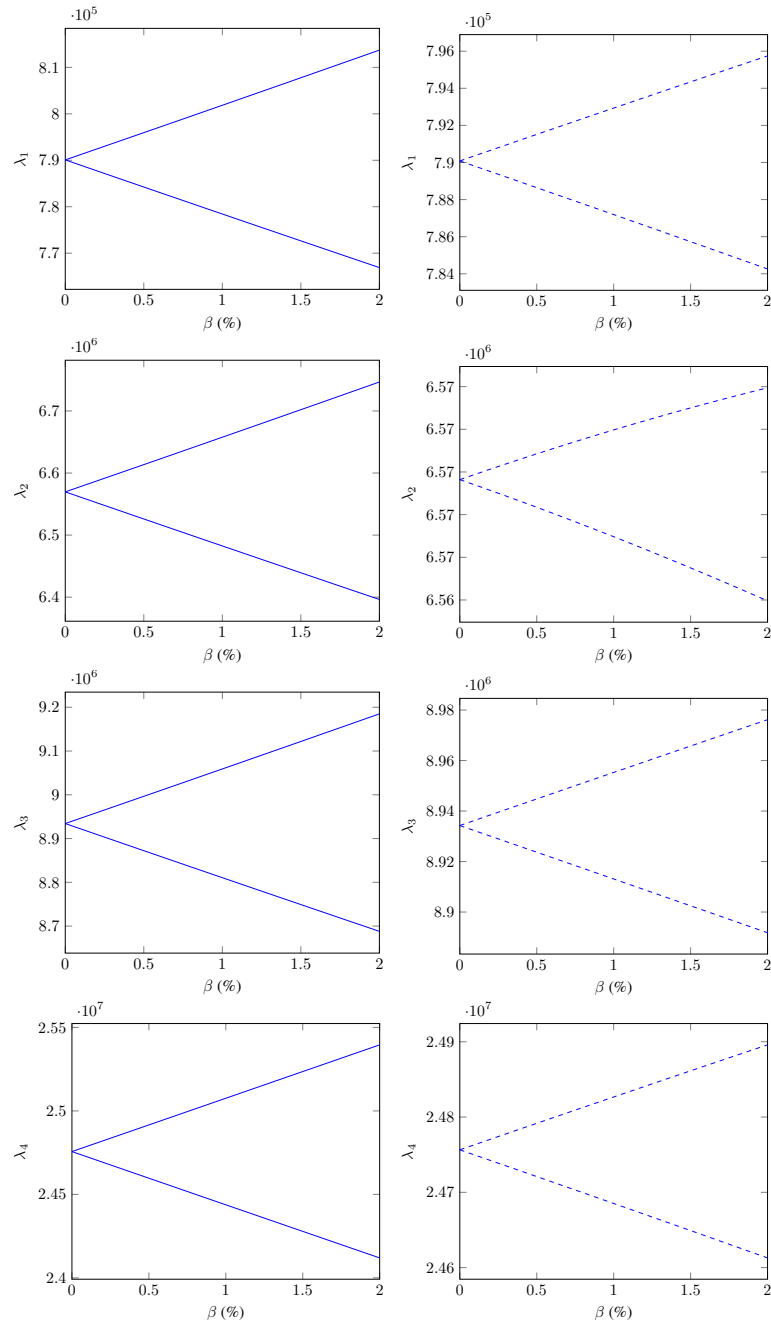


Figure 4: Bounds for the first four eigenvalues of the eight bars truss using eigenvalue inclusion principle (left) and proposed method (right).

Oliveira, F. S. de and Lima Jr, J. J. de  
The Interval Eigenvalue Problem for Vibrating Systems

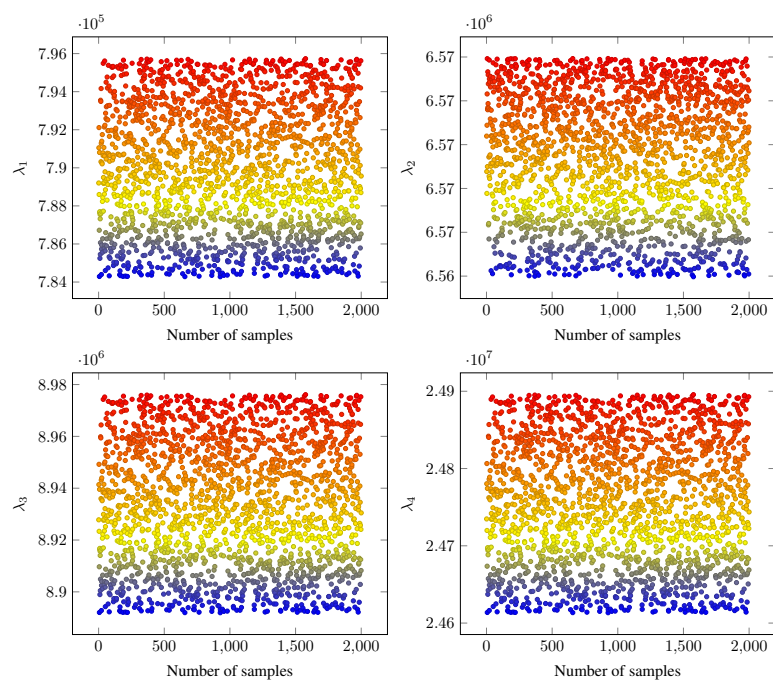


Figure 5: Simulations Monte Carlo method for the eight bars truss for  $\beta = 2\%$ .

24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2017)  
December 3-8, 2017, Curitiba, PR, Brazil

- Angewandte Mathematik und Mechanik*, 71(1):61–64.
- Dimarogonas, A. D. (1995). Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 183(4):739–749.
- Hansen, E. and Walster, G. W. (2003). *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*, volume 264. CRC Press.
- Hladík, M., Daney, D., and Tsigaridas, E. (2011). Characterizing and approximating eigenvalue sets of symmetric interval matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(8):3152–3163.
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill.
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning.
- Li, Q., Qiu, Z., and Zhang, X. (2017). Eigenvalue analysis of structures with interval parameters using the second-order Taylor series expansion and the dca for qb. *Applied Mathematical Modelling*.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Modarreszadeh, M. (2005). *Dynamic analysis of structures with interval uncertainty*. PhD thesis, Case Western Reserve University.
- Moore, R. E. (1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B., and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM.
- Neumaier, A. (1990). *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Qiu, Z., Chen, S., and Jia, H. (1995). The rayleigh quotient iteration method for computing eigenvalue bounds of structures with bounded uncertain parameters. *Computers & structures*, 55(2):221–227.
- Qiu, Z., Wang, X., and Friswell, M. I. (2005). Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1):297–312.
- Sága, M., Vaško, M., and Pecháč, P. (2014). Chosen numerical algorithms for interval finite element analysis. *Procedia Engineering*, 96:400–409.
- Sim, J., Qiu, Z., and Wang, X. (2007). Modal analysis of structures with uncertain-but-bounded parameters via interval analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 303(1):29–45.

## 8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

# **APÊNDICE C**

**Artigos Publicados no CILAMCE 2017**



**QUANTIFICATION OF UNCERTAINTIES IN DYNAMIC  
STRUCTURAL SYSTEMS USING THE INTERVAL ANALYSIS AND  
THE FINITE ELEMENT METHOD**

**Fabiano Sangi de Oliveira**

**José Juliano de Lima Junior**

fabiano.sangi@unifei.edu.br

limajr@unifei.edu.br

Federal University of Itajubá

Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho, 37500-903, Minas Gerais, Itajubá, Brazil

***Abstract.** Due to the great importance of quantifying the uncertainties present in the mechanical systems, in this work, we will present the interval eigenvalue problem, with parametric uncertainties in the global masses and stiffness matrices of the system. Numerical examples were presented, solved computationally through a proposed method, using Interval Analysis and Finite Element Method (FEM). In order to support the solution of the problems, the basic fundamentals of the eigenvalue problem and the interval analysis were presented. After solving the proposed problems, the eigenvalues and natural frequencies of the system were presented, as well as frequency response graphs. To compare results, numerical simulations were performed using the Monte Carlo method, with the presentation of results by means of table and graphs.*

***Keywords:** Interval Analysis, Vibrating Systems, Eigenvalue Problem, Finite Elements.*

## 1 INTRODUCTION

Errors are inherent in all known processes. They can be caused by measurement errors, approximations, rounding, among others. Thus, the purpose of an interval analysis is to provide an interval with lower and upper limits where the exact value of the variable under analysis is contained, that is, interval in which the errors present in the system are computed. In Moore et al. (2009) can be seen several examples of the use of interval mathematics in the treatment of uncertainties.

The approach is important both in the design and in the rehabilitation of truss structures, as they are widely used in stadium coverings, transmission towers and general application sheds. The uncertainties must be quantified to ensure a longer life of the structure, avoiding sudden failures, and thus ensuring the safety of facilities and especially of people.

To ensure robustness and agility in structural analysis, computational techniques are increasingly employed. A widely used technique is the Finite Element Method (FEM), which allows good implementation and malleability in solving often complex problems. In conjunction with the interval analysis, FEM can be applied to quantify uncertainties in structural systems. A fairly complete approach to FEM can be seen in Hutton (2004).

Parameters of great importance to be determined in a dynamic analysis of structures are the natural frequencies, mainly in the design phase, whose objective is to move away the natural frequencies from those of excitation, thus avoiding the unwanted phenomenon of resonance. Theoretical studies, showing the invariance of the eigenvector signals, were performed by Deif (1991) in order to determine the eigenvalues for the standard interval eigenvalue problem for symmetric and asymmetric dynamic matrices. Later, Qiu et al. (1995) presented the generalized interval eigenvalue problem, using the Deif (1991) method and iterative process with Rayleigh quotient. Another method of solution called the inclusion principle using FEM was presented by Qiu et al. (2005) with the solution of several numerical examples. Modal analysis using the Deif (1991) method was used in Sim et al. (2007) to solve the interval eigenvalue problem, being performed simulations using the Monte Carlo method and presenting graphical results using the Frequency Response Function (FRF). For the solution of the standard problem, in Hladik et al. (2011) several algorithms were presented for the case of symmetric matrices. Using the matrix perturbation theory and FEM, Albuquerque (2015) studied the interval eigenvalue problem. Further, Li et al. (2017) used the Taylor series of the second order to compute the eigenvalues of space truss and plate, with uncertain parameters.

## 2 REVIEW OF THE EIGENVALUE PROBLEM AND FRF

It was spoken by Chapra and Canale (2010) that, eigenvalue problems are a special class of boundary-value problems that are common in engineering problem contexts involving vibrations, elasticity, and other oscillating systems. They are also used in a wide variety of engineering problems, in addition to the boundary-value problems.

The linear differential equation of motion with constant coefficients for non-damped mechanical systems with  $n$  degrees of freedom is presented by Eq. (1).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

---

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*

where  $[M]$  and  $[K]$  are the symmetric matrices  $n \times n$  of global mass and stiffness of the system, respectively,  $u$  is the column vector of dimension  $n$  with the generalized coordinates, and  $f$  is the external excitation.

For systems that are not subject to external excitation, the equation of motion is given by Eq. (2).

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{0\} \quad (2)$$

As the system is conservative, the solutions of Eq. (2) are expected to be periodic, of the type of Eq. (3),

$$\{u(t)\} = \{x\}e^{j\omega_n t} \quad (3)$$

where  $\{x\}$  is a column vector of constants and  $\omega_n$  is the natural frequency of the system.

Substituting Eq. (3) into Eq. (2), leads to

$$(-\omega_n^2[M]\{x\} + [K]\{x\})e^{j\omega_n t} = \{0\} \quad (4)$$

As  $e^{j\omega_n t} \neq 0$  for every instant of time, arrives to

$$([K] - \omega_n^2[M])\{x\} = \{0\} \quad (5)$$

For the non-trivial solution, it is required that

$$\det([K] - \lambda[M]) = \{0\} \quad (6)$$

with  $\lambda = \omega_n^2$ , where  $\lambda$  are the eigenvalues of the system.

For the determination of the eigenvectors or vibration modes  $\{x\}$ , associated with eigenvalues, one must use Eq. (7), which is known as the Generalized Eigenvalue Problem.

$$[K]\{x\} = \lambda[M]\{x\} \quad (7)$$

Applying the Fourier Transform in Eq. (1), is found

$$\{u(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{U(j\omega)\} \quad (8)$$

$$\{\dot{u}(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\{U(j\omega)\} \quad (9)$$

---

CILAMCE 2017  
Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

*Quantification of Uncertainties in Dynamic Structural Systems Using the Interval Analysis and the FEM*

$$\{\ddot{u}(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^2 \{U(j\omega)\} \quad (10)$$

$$\{f(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{F(j\omega)\} \quad (11)$$

and doing the proper manipulations, leads to Eq. (12), which represents the Frequency Response Function (FRF) of the system.

$$[H(j\omega)] = (-\omega^2[M] + [K])^{-1} \quad (12)$$

### 3 DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS OF TRUSSES

In practice, the interest in using the FEM, is to solve complex problems involving trusses, with high number of bars. Thus, it is necessary to assemble the global mass and stiffness matrices of the system in the global coordinate, which is the linear sum of the contribution of the mass matrix  $[M]_e$  and stiffness  $[K]_e$  of each element in the global coordinate. To perform the sum, use the degrees of freedom between the connectivities of the nodes. This way,

$$[K] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m [K]_{e_\phi} \quad (13)$$

$$[M] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^m [M]_{e_\phi} \quad (14)$$

where  $m$  is the number of elements,  $[K]_0$  and  $[M]_0$  are the null  $n \times n$  matrices.

Mass and stiffness matrices are functions of the vector  $\{a\}$ , which contains the geometric and structural parameters, in this way

$$[K] = [K(a)] \quad (15)$$

$$[M] = [M(a)] \quad (16)$$

with

$$\{\underline{a}\} \leq \{a\} \leq \{\bar{a}\}, \quad a_\phi^I = [\underline{a}_\phi, \bar{a}_\phi] \quad \text{ou} \quad \underline{a}_\phi \leq a_\phi \leq \bar{a}_\phi \quad \phi = 1, 2, \dots, m$$

where  $\{\underline{a}\} = (\underline{a}_\phi)$  and  $\{\bar{a}\} = (\bar{a}_\phi)$  are, respectively, the lower and upper limits of the structural parameter  $\{a\}$ , with  $\{a\} \in \{a\}^I$ .

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

---

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*

Thus, Eq. (13) and Eq. (14) can be rewritten as functions of the uncertain structural parameters.

$$[K]^I = [\underline{K}, \overline{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m a_{\phi}^I [K]_{e_{\phi}} \quad (17)$$

$$[M]^I = [\underline{M}, \overline{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^m a_{\phi}^I [M]_{e_{\phi}} \quad (18)$$

where

$$[\underline{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m \underline{a}_{\phi} [K]_{e_{\phi}} \quad (19)$$

$$[\overline{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m \overline{a}_{\phi} [K]_{e_{\phi}} \quad (20)$$

$$[\underline{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^m \underline{a}_{\phi} [M]_{e_{\phi}} \quad (21)$$

$$[\overline{M}] = [M]_0 + \sum_{\phi=1}^m \overline{a}_{\phi} [M]_{e_{\phi}} \quad (22)$$

Thus, with uncertainties present in the matrices of mass and stiffness of the system, it leads to the generalized interval eigenvalue problem represented by Eq. (23).

$$[K]^I \{x\} = \lambda [M]^I \{x\} \quad (23)$$

The exact bounds for eigenvalues  $\lambda^I = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$  can be computed through Eq. (24) and Eq. (25).

$$\underline{\lambda} = \min ([\underline{K}]\{x\} - \underline{\lambda}[\underline{M}]\{x\} = 0, [\overline{K}]\{\overline{x}\} - \overline{\lambda}[\overline{M}]\{\overline{x}\} = 0) \quad (24)$$

$$\overline{\lambda} = \max ([\underline{K}]\{x\} - \underline{\lambda}[\underline{M}]\{x\} = 0, [\overline{K}]\{\overline{x}\} - \overline{\lambda}[\overline{M}]\{\overline{x}\} = 0) \quad (25)$$

where  $\{x\}$  is the lower bound and  $\{\overline{x}\}$  the upper bound for eigenvectors, with  $\{x\}^I = [\underline{x}, \overline{x}]$ .

Because the eigenvalues are uncertain, logically the natural frequency also tends to be uncertain, with  $\underline{\lambda} = \underline{\omega}_n^2$  and  $\overline{\lambda} = \overline{\omega}_n^2$ .

## 4 NUMERICAL EXAMPLES

Two examples are used to demonstrate the possibility of applying the proposed method. The first is a particular case of a flat truss with 24 bars, and the second is a space truss with 60 bars. For both examples there are uncertainties present in the areas of the cross sections of the bars, which makes the matrices of mass and stiffness of the structures have uncertainties. Also, for the second example, simulations using the Monte Carlo method are performed for comparison of results.

### 4.1 Flat truss with 24 bars

All joints are pinned, as can be seen by means of Fig. 1. The areas of the cross sections of bars 1, 2, 3, 6, 9, e 11 are considered uncertain, according  $A_{\phi}^I = [A^c - \alpha A^c, A^c + \alpha A^c]$ ,  $\phi = 1, 2, 3, 6, 9, 11$ , where  $A^c = 7.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  is the deterministic value of the area for all bars and  $\alpha$  is the percentage factor that will cause variation of the uncertain parameters to occur, with  $\alpha$  ranging from 0 a 5%. The Young's modulus of the material is  $E = 210 \text{ GPa}$  and the specific mass is  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

An important fact to be observed in Fig. 2 is the monotonic behavior of the structural parameters, either increasing or the inverse, starting from the deterministic value. Similar fact, related to this behavior of eigenvalues, can be seen in Modarreszadeh (2005) and Qiu et al. (2005). One can see more about this monotonic inclusion behavior in Moore (1979).

### 4.2 Space truss with 60 bars

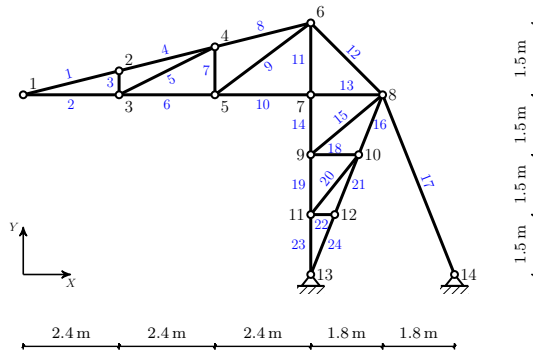
The Fig. 3, shows a space truss with 60 bars, where all joints are pinned, with fixed supports on nodes 1, 2, 3, and 4, which allow only rotation. The uncertain parameters are due to the cross-sectional area, according to  $A_{\phi}^I = [0.95 \times 10^{-3}, 1.05 \times 10^{-3}] \text{ m}^2$  and Young's module, with  $E_{\phi}^I = [199.5, 220.5] \text{ GPa}$ . The specific mass is  $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

By means of Fig. 4 the interval frequency response for the first 4 modes of vibration can be observed. In order to assure the reliability of the obtained results are shown by means of Fig. 5 graphical results of simulations using the Monte Carlo method, with number of samples equal to 2000. In table 1 it is possible to observe comparison between the results obtained through the proposed method and the simulations with the Monte Carlo method. Note that the results converge at least to the second decimal place.

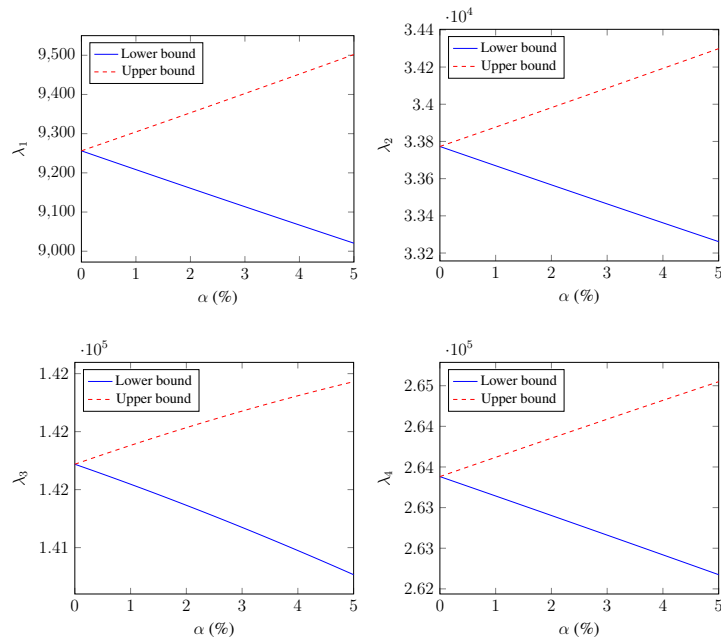
## 5 CONCLUSIONS

In this paper, it was demonstrated, through the analyzed examples, that the Finite Element Method, together with the interval analysis, are important tools for the quantification of parametric uncertainties in structures, being of great relevance to guarantee structural reliability, avoiding failures. For this, a computational program was developed to solve the interval eigenvalue problem using the proposed method, which demonstrated a rapid solution of the problems, and provided reliable solutions, with the possibility of application in practical situations. The Monte Carlo method was used to compare the results, demonstrating the reliability of the obtained results.

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*

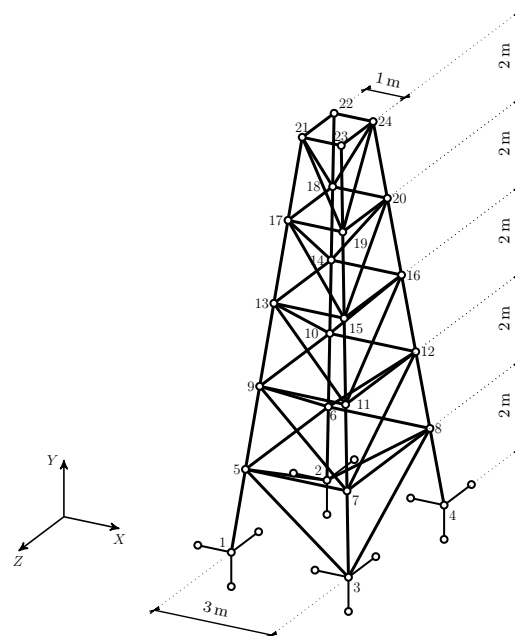


**Figure 1: Flat truss with 24 bars.**

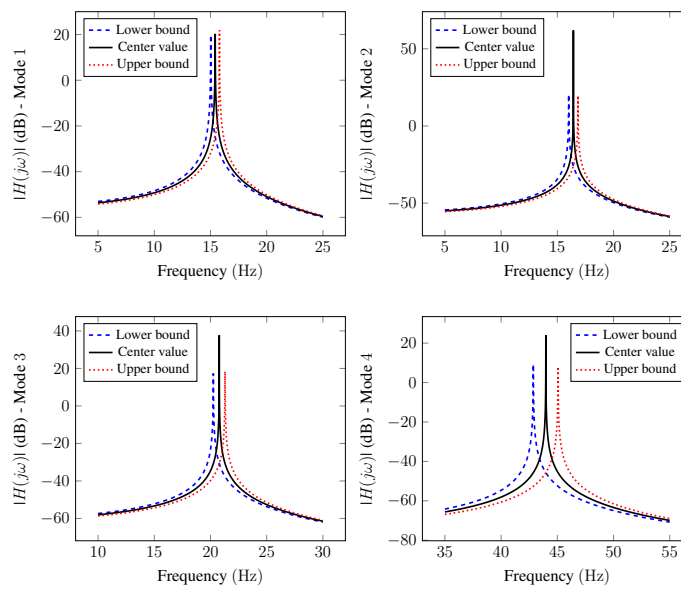


**Figure 2: Eigenvalues of the truss with 24 bars.**

*Quantification of Uncertainties in Dynamic Structural Systems Using the Interval Analysis and the FEM*



**Figure 3: Space truss with 60 bars.**



**Figure 4: Frequency response of the truss with 60 bars.**

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior

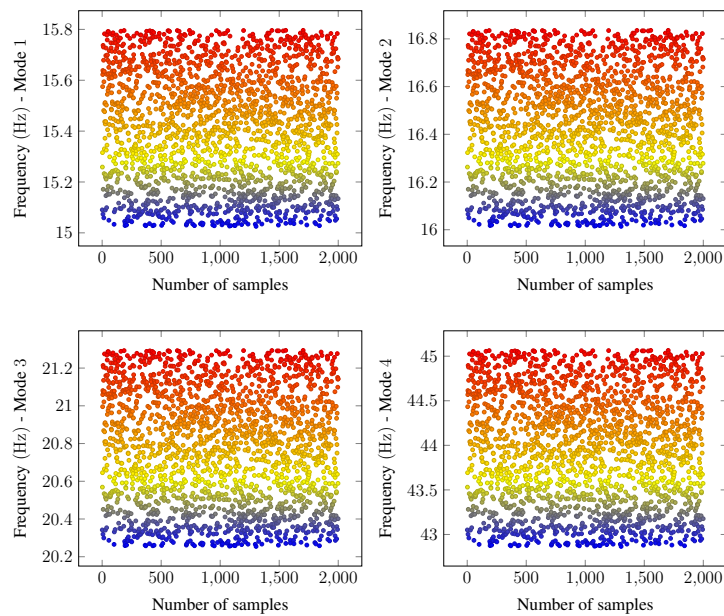


Figure 5: Simulations Monte Carlo method for truss with 60 bars.

Table 1: Natural frequency truss with 60 bars.

Frequency (Hz)				
Modes	<i>Proposed Method</i>		<i>Monte Carlo Method</i>	
	Lower bound	Upper bound	Lower Bound	Upper bound
1	15.0254	15.7964	15.0255	15.7963
2	16.0140	16.8358	16.0142	16.8357
3	20.2544	21.2937	20.2546	21.2936
4	42.8654	45.0650	42.8658	45.0647

**ACKNOWLEDGEMENTS**

The authors would like to thank CAPES for providing a research grant and for the Post-Graduation Program in Mechanical Engineering of the Federal University of Itajubá - UNIFEI for the opportunity to carry out the studies.

**REFERENCES**

- Albuquerque, J. C. V. (2015). *Análise dinâmica de estruturas com parâmetros intervalares*. PhD thesis, Universidade Federal de Itajubá.
- Chapra, S. C. and Canale, R. P. (2010). *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill Higher Education.
- Chen, S.-H., Qiu, Z., and Liu, Z. (1994). Perturbation method for computing eigenvalue bounds in structural vibration systems with interval parameters. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 10(2):121–134.
- Deif, A. (1986). *Sensitivity analysis in linear systems*. Springer-Verlag.
- Deif, A. (1991). The interval eigenvalue problem. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 71(1):61–64.
- Dimarogonas, A. D. (1995). Interval analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 183(4):739–749.
- Hansen, E. and Walster, G. W. (2003). *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*, volume 264. CRC Press.
- Hladík, M., Daney, D., and Tsigaridas, E. (2011). Characterizing and approximating eigenvalue sets of symmetric interval matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(8):3152–3163.
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill.
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical vibrations: theory and applications*. Cengage learning.
- Li, Q., Qiu, Z., and Zhang, X. (2017). Eigenvalue analysis of structures with interval parameters using the second-order Taylor series expansion and the dca for qb. *Applied Mathematical Modelling*.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Modarreszadeh, M. (2005). *Dynamic analysis of structures with interval uncertainty*. PhD thesis, Case Western Reserve University.
- Moore, R. E. (1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B., and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM.
- Neumaier, A. (1990). *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge.

---

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*

Qiu, Z., Chen, S., and Jia, H. (1995). The rayleigh quotient iteration method for computing eigenvalue bounds of structures with bounded uncertain parameters. *Computers & structures*, 55(2):221–227.

Qiu, Z., Wang, X., and Friswell, M. I. (2005). Eigenvalue bounds of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1):297–312.

Sága, M., Vaško, M., and Pecháč, P. (2014). Chosen numerical algorithms for interval finite element analysis. *Procedia Engineering*, 96:400–409.

Sim, J., Qiu, Z., and Wang, X. (2007). Modal analysis of structures with uncertain-but-bounded parameters via interval analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 303(1):29–45.

---

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017



## QUANTIFICATION OF UNCERTAIN PARAMETERS IN STATIC STRUCTURES USING THE INTERVAL ANALYSIS AND THE FINITE ELEMENT METHOD

**Fabiano Sangi de Oliveira**

**José Juliano de Lima Junior**

fabiano.sangi@unifei.edu.br

limajr@unifei.edu.br

Federal University of Itajubá

Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho, 37500-903, Minas Gerais, Itajubá, Brazil

**Abstract.** *In this paper, a method was presented that uses the Interval Analysis and the Finite Element Method (FEM). The aim is to determine some uncertain structural parameters, important both in the design phase and in the rehabilitation of structures. Examples of such parameters that have been determined are: nodal displacements, internal forces in the bars, internal stresses in the bars, the deformations of the bars and the support reactions. At first, to support the solution of the proposed problems and make possible the understanding, the necessary foundations of FEM and the Interval Arithmetic were presented. Subsequently, numerical examples of flat and space trusses were presented, when there are uncertainties in the overall stiffness matrix of the structure and in the vector of loads. A computational routine was implemented to solve the proposed problems. For the validation of the proposed method, numerical results and simulation graphs were presented using the Monte Carlo Method. The proposed method proved to be efficient for the solution of the presented problems, being in compliance with the Monte Carlo simulations.*

**Keywords:** *Interval Analysis, Static Structures, Uncertain Parameters, Finite Elements.*

## 1 INTRODUCTION

Errors are inherent in all known processes. They can be measurement errors, approximations, rounding, among others. Thus, the purpose of an interval analysis is to provide an interval with lower and upper limits where the exact value of the variable under analysis is contained, that is, interval in which the errors present in the system are computed. In Moore et al. (2009) can be seen several examples of the use of interval mathematics in the treatment of uncertainties.

The approach is important both in the design and in the rehabilitation of truss structures, as they are widely used in stadium coverings, transmission towers and general application sheds. The uncertainties must be quantified to ensure a longer life of the structure, avoiding sudden failures, and thus ensuring the safety of facilities and especially of people.

To ensure robustness and agility in structural analysis, computational techniques are increasingly employed. A widely used technique and the Finite Element Method FEM, which allows good implementation and malleability in solving often complex problems. In conjunction with interval mathematics, FEM can be applied to quantify uncertainties in structural systems. A fairly complete approach to FEM can be seen in Hutton (2004).

## 2 REVIEW OF FEM FOR BAR ELEMENT

The bar element is commonly used in solving structural problems involving trusses. Firstly, for the finite element formulation of a bar element, with nodes  $i$  e  $j$ , according to the discretization illustrated by means of Fig. 1, some considerations are necessary:

1. Material obeys Hooke's Law;
2. The bar is geometrically straight;
3. The forces are applied only at the ends of the bar in your barycenter;
4. The bar only supports axial loading.

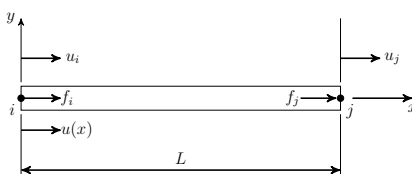


Figure 1: Bar element in local coordinate.

Using the direct approach and the linear interpolation functions  $N_1$  e  $N_2$ , with the characteristics presented by means of the Fig. 2, and with the aid of material resistance, is found in Eq. (1) the stiffness matrix of the bar element in the local coordinate.

$$[k]_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

where  $E$  is the Young's modulus,  $A$  is the cross-sectional area and  $L$  is the length of the bar member.

---

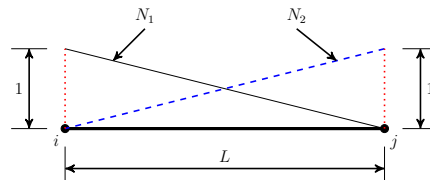
*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*


Figure 2: Linear shape functions.

## 2.1 Bar Element in Plane

For the solution of two-dimensional and three-dimensional problems it is necessary to carry out the transformation of the local to global coordinate, common to all elements.

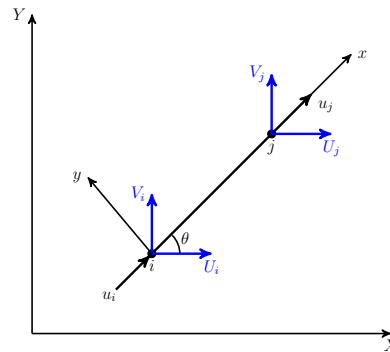


Figure 3: Slope element in the plane.

Analyzing Fig. 3, which has 2 degrees of freedom per node,  $U$  and  $V$ , and performing some substitutions, arrives at the matrix

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

which is known as the Transformation Matrix of the local coordinates for the global coordinates, for the two-dimensional case.

Where

$$\cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L} \quad (3)$$

$$\sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (4)$$

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (5)$$

Using Eq. (2) and Eq. (1), it leads to the stiffness matrix of element in the global coordinate.

$$[K_2]_e = [R_2]^T [k]_e [R_2] \quad (6)$$

## 2.2 Bar element in space

For this case, coordinate transformation is also necessary. The same approach described above is used for the three-dimensional case, however, here are 3 degrees of freedom per node, namely  $U$ ,  $V$  and  $W$ .

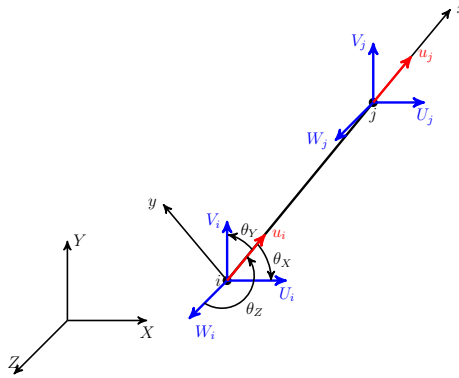


Figure 4: Bar element in three-dimensional space.

Analyzing Fig. 4 and realizing the necessary substitutions, is found in Eq. (7) the Matrix of Transformation of the local coordinate to the global coordinate, in the three-dimensional case.

$$[R_3] = \begin{bmatrix} \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_X & \cos \theta_Y & \cos \theta_Z \end{bmatrix} \quad (7)$$

where

$$\cos \theta_X = \frac{X_j - X_i}{L} \quad (8)$$

$$\cos \theta_Y = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad (9)$$

---

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*

$$\cos \theta_Z = \frac{Z_j - Z_i}{L} \quad (10)$$

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (11)$$

Using Eq. (1) and Eq. (7), it leads to the stiffness matrix in the global coordinate for the three-dimensional case.

$$[K_3]_e = [R_3]^T [k]_e [R_3] \quad (12)$$

### 3 STRUCTURAL ANALYSIS OF TRUSSES

In practice, the interest in using the FEM is to solve complex problems involving trusses, with high number of bars. Thus, it is necessary to perform the assembly of the global stiffness matrix of the system in the global coordinate, which is the linear sum of the contribution of the stiffness matrix of each element. To perform the sum, use the degrees of freedom between the connectivity of the nodes. This way,

$$[K] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m [K]_{e_\phi} \quad (13)$$

where  $m$  is the number of elements,  $[K]_0$  is null matrix  $n \times n$  and  $[K]$  is the matrix of stiffness of the system.

With the load vector  $\{F\}$ , already in the global coordinate, because it is transformed during obtaining the stiffness matrix in the global coordinate, and  $[K]$ , one can construct the equilibrium equation 14.

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (14)$$

where  $\{d\}$  is the vector with the nodal displacements.

With calculated  $\{d\}$ , one can calculate other important structural parameters, like the internal force, the strain and stress in the element, as well as the support reactions.

Some basic definitions of Interval Mathematics are described below. Being  $B^I = [\underline{b}, \bar{b}]$  e  $C^I = [\underline{c}, \bar{c}]$ , arithmetic operations are.

- $B^I + C^I = [\underline{b} + \underline{c}, \bar{b} + \bar{c}]$
- $B^I - C^I = [\underline{b} - \bar{c}, \bar{b} - \underline{c}]$
- $B^I \times C^I = [\min(\underline{b}\underline{c}, \underline{b}\bar{c}, \bar{b}\underline{c}, \bar{b}\bar{c}), \max(\underline{b}\underline{c}, \underline{b}\bar{c}, \bar{b}\underline{c}, \bar{b}\bar{c})]$

---

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

*Quantification of Uncertain Parameters in Static Structures Using the Interval Analysis and the FEM*

$$\bullet B^I \div C^I = B^I \times \frac{1}{C^I} = [\underline{b}, \bar{b}] \times \left[ \frac{1}{\bar{c}}, \frac{1}{\underline{c}} \right] = \left[ \frac{\underline{b}}{\bar{c}}, \frac{\bar{b}}{\underline{c}} \right] \text{ with } [\underline{c}, \bar{c}] \neq 0.$$

The key point in these definitions is that computing with intervals is computing with sets Moore et al. (2009).

The global stiffness matrix is a function of the vector  $\{a\}$ , which contains the geometric and structural parameters, in this way

$$[K] = [K(a)] \quad (15)$$

with

$$\{\underline{a}\} \leq \{a\} \leq \{\bar{a}\}, \quad a_\phi^I = [\underline{a}_\phi, \bar{a}_\phi] \quad \text{ou} \quad \underline{a}_\phi \leq a_\phi \leq \bar{a}_\phi \quad \phi = 1, 2, \dots, m$$

where  $\{\underline{a}\} = (\underline{a}_\phi)$  and  $\{\bar{a}\} = (\bar{a}_\phi)$  are, respectively, the lower and upper limits of the structural parameter  $\{a\}$ , with  $\{a\} \in \{a\}^I$ .

Thus, a Eq. (13) can be rewritten as a function of the uncertain structural parameters.

$$[K]^I = [\underline{K}, \bar{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m a_\phi^I [K]_{e_\phi} \quad (16)$$

$$[\underline{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m \underline{a}_\phi [K]_{e_\phi} \quad (17)$$

$$[\bar{K}] = [K]_0 + \sum_{\phi=1}^m \bar{a}_\phi [K]_{e_\phi} \quad (18)$$

In the situation where the load vector  $\{F\}$  has uncertainties, thus Eq. (14) can be rewritten as follows.

$$[\underline{K}, \bar{K}] \{\underline{d}, \bar{d}\} = \{\underline{F}, \bar{F}\} \quad (19)$$

There are some methods to solve Eq. (19), which can be seen in Sága et al. (2014), in Hansen and Walster (2003) and Deif (1986). In this paper, it is proposed to solve two deterministic problems, as follows

$$\{\underline{d}\} = \min[\underline{K}^{-1} \underline{F}, \bar{K}^{-1} \bar{F}] \quad (20)$$

$$\{\bar{d}\} = \max[\underline{K}^{-1} \underline{F}, \bar{K}^{-1} \bar{F}] \quad (21)$$

The exact solutions to the proposed problems are given by Eq. (20) and Eq. (21).

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior

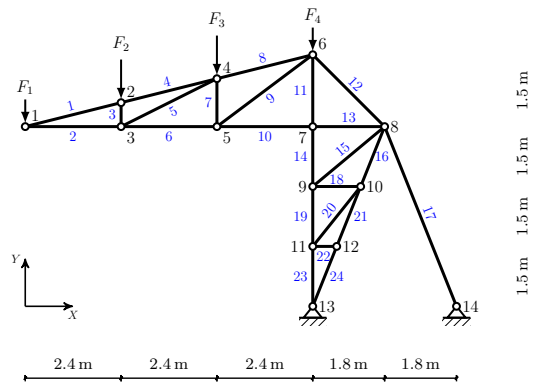


Figure 5: Flat truss with 24 bars.

## 4 NUMERICAL EXAMPLES

Two examples will be used to demonstrate the possibility of applying the proposed method. The first is a particular case of a flat truss with 24 bars, presenting uncertainties in the cross-sectional areas of some bars and loading. The second example is a space truss with 60 bars where the uncertainties are present in the Young's modulus.

### 4.1 Flat truss with 24 bars

All joints are pinned, as can be seen by means of Fig. 5. The areas of the cross sections of bars 1, 2, 3, 6, 9, e 11 are considered uncertain, according  $A_{\phi}^I = [A^c - \alpha A^c, A^c + \alpha A^c]$ ,  $\phi = 1, 2, 3, 6, 9, 11$ , where  $A^c = 7.0 \times 10^{-4} m^2$  is the deterministic value of the area for all bars and  $\alpha$  is the percentage factor that will cause variation of the uncertain parameters to occur, with  $\alpha$  ranging from 0 a 10%. Also, there are uncertainties in loading  $F_1^I = [F_1 - \alpha F_1, F_1 + \alpha F_1]$ , where  $F_1 = 5$  kN,  $F_2 = F_3 = 10$  kN and  $F_4 = 5$  kN. The Young's modulus of the material is  $E = 210 \times 10^9 N/m^2$ .

### 4.2 Space truss with 60 bars

The Fig. 6 shows a space truss with 60 bars, where all joints are pinned, with fixed supports on nodes 1, 2, 3, e 4, which allow only rotation. In this example, the uncertain parameter will be due to the property of the material, with Young's modulus  $E_{\phi}^I = [199.5, 220.5]$  GN/m<sup>2</sup>. The cross-sectional area for all the bars is  $A_{\phi} = 1.0 \times 10^{-3} m^2$ , with loadings  $F = 15.0$  kN.

## 5 RESULTS AND DISCUSSIONS

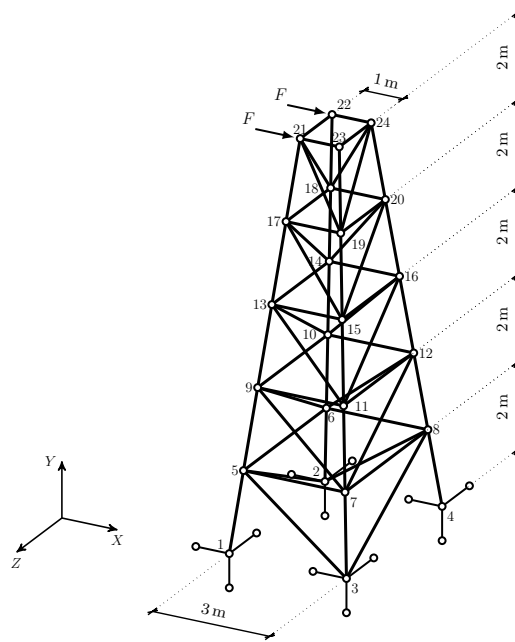
### 5.1 Flat truss

For the Figures 7, 8 and 9 the dotted line refers to the *upper bound* and the solid line to the *lower bound*. The displacements for node 1 in the x ( $d_x$ ) and y ( $d_y$ ) axis directions are shown by Fig. 7. Results for the internal force, stress and strain for element 11, can be observed by

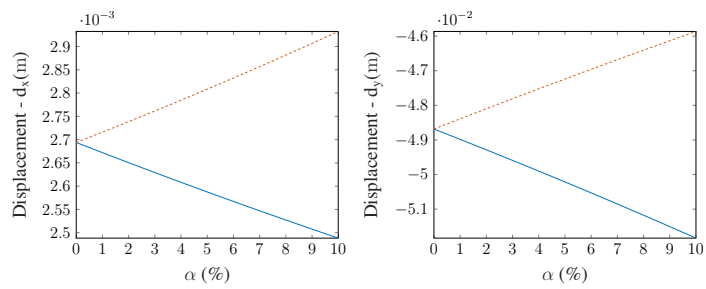
CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

*Quantification of Uncertain Parameters in Static Structures Using the Interval Analysis and the FEM*

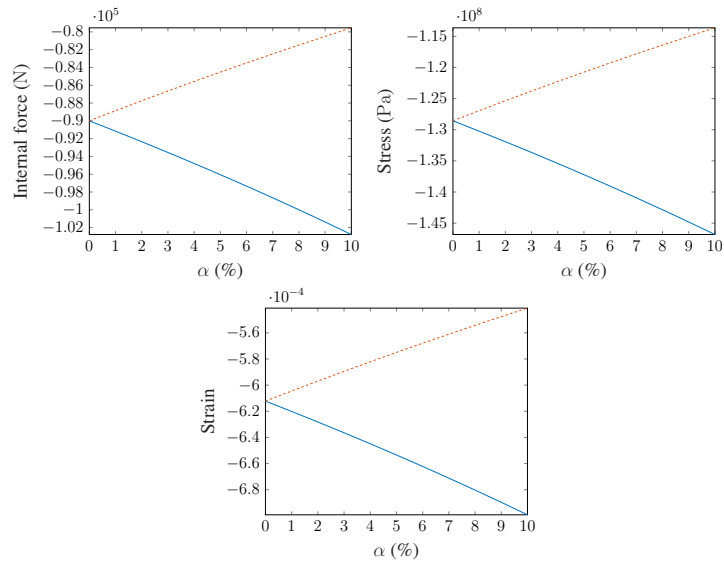


**Figure 6: Space truss with 60 bars.**

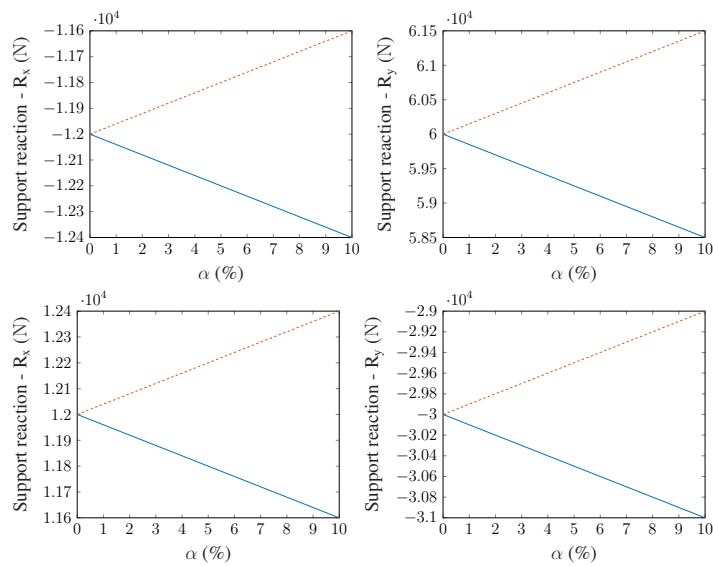


**Figure 7: Nodal displacements to node 1 for truss with 24 bars.**

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*



**Figure 8:** Force, stress and strain for element 11 for truss with 24 bars.



**Figure 9:** Reactions of support for nodes 13 (top) e 14 (bottom) for truss with 24 bars.

*Quantification of Uncertain Parameters in Static Structures Using the Interval Analysis and the FEM*

**Table 1: Displacements for node 21 for truss with 60 bars.**

Nodal displacements (m)				
Proposed Method		Monte Carlo Method		
	Lower bound	Upper bound	Lower Bound	Upper bound
$d_x$	0.00923125	0.01020296	0.00923140	0.01020276
$d_y$	0.00071351	0.00078861	0.00071352	0.00078860
$d_z$	-0.00172121	-0.00155729	-0.00172118	-0.00155731

means of Fig. 8, and Fig. 9 shows the results for the support reactions on nodes 13 and 14. These structural parameters are of great importance in the structural design phase, and with the computational implementation one can simulate several conditions and configurations for the trusses.

An important fact to be observed in these figures is the monotonic behavior of the structural parameters as a function of  $\alpha$ , either increasing or the inverse, starting from the deterministic value. Similar fact occurs with the symmetric matrix eigenvalues using FEM, which can be seen in Modarreszadeh (2005), remembering that this is the case also of this paper, that is, symmetric stiffness matrix. One can see more about this monotonic inclusion behavior in Moore (1979).

## 5.2 Space truss

Table 1 shows the nodal displacements for node 21 in the directions of the axes  $x$  ( $d_x$ ),  $y$  ( $d_y$ ) and  $z$  ( $d_z$ ), using the proposed method and the Monte Carlo method. The simulations were performed using the Monte Carlo method, which is a robust numerical method in stochastic analysis, to guarantee the reliability of the results obtained with the proposed method. By means of Fig. 10, the graphical results of the simulations with number of samples equal to 2,000 can be observed. Note that the results converge to at least the sixth decimal place.

It should be emphasized the importance of implementing the method computationally for the quantification of uncertainties, because in this case the truss has 60 bars arranged in the three-dimensional space, being able to change important parameters easily and quickly during the analysis. Of course the program solves problems involving trusses with any number of bars.

## 6 CONCLUSIONS

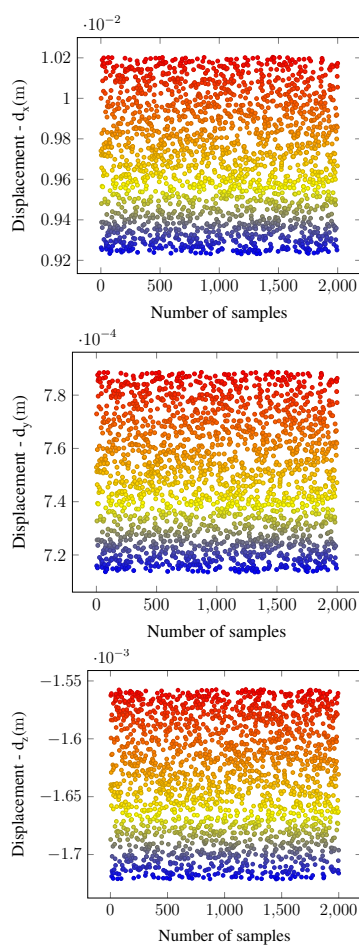
In this paper, through the examples analyzed, it can be demonstrated that the Finite Element Method, together with the interval mathematics, is an important tool for the quantification of parametric uncertainties in structures. This quantification is of great importance to guarantee the structural reliability, avoiding failures. For this, a computer program was developed, which demonstrated speed in the solution of problems, and provided reliable solutions, with possibility of application in practical situations. The Monte Carlo method was used to compare the results, demonstrating the reliability of the obtained results.

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017

---

*F. S. Oliveira, J. J. Lima Junior*



**Figure 10: Simulations Monte Carlo method for truss with 60 bars.**

---

*Quantification of Uncertain Parameters in Static Structures Using the Interval Analysis and the FEM*

---

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank CAPES for providing a research grant and for the Post-Graduation Program in Mechanical Engineering of the Federal University of Itajubá - UNIFEI for the opportunity to carry out the studies.

## REFERENCES

- Deif, A. (1986). *Sensitivity analysis in linear systems*. Springer-Verlag.
- Hansen, E. and Walster, G. W. (2003). *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*, volume 264. CRC Press.
- Hutton, D. (2004). *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill.
- Li, Q., Qiu, Z., and Zhang, X. (2017). Eigenvalue analysis of structures with interval parameters using the second-order Taylor series expansion and the dca for qb. *Applied Mathematical Modelling*.
- Modarreszadeh, M. (2005). *Dynamic analysis of structures with interval uncertainty*. PhD thesis, Case Western Reserve University.
- Moore, R. E. (1979). *Methods and applications of interval analysis*. SIAM.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B., and Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM.
- Neumaier, A. (1990). *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Sága, M., Vaško, M., and Pecháč, P. (2014). Chosen numerical algorithms for interval finite element analysis. *Procedia Engineering*, 96:400–409.

---

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, P.O. Farias (Editor), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017