

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**Otimização robusta de portfólios: Avaliação da
eficiência sob condições de risco e incerteza na
abordagem de estado de baixa do mercado**

Paulo Rotela Junior

Itajubá, Novembro de 2015.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

Paulo Rotela Junior

**Otimização robusta de portfólios: Avaliação da
eficiência sob condições de risco e incerteza na
abordagem de estado de baixa do mercado**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como parte dos requisitos para obtenção do Título de **Doutor em Ciências em Engenharia de Produção**.

Área de Concentração: Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Edson de Oliveira Pamplona, Dr.

Novembro de 2015

Itajubá

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

Paulo Rotela Junior

**Otimização robusta de portfólios: Avaliação da
eficiência sob condições de risco e incerteza na
abordagem de estado de baixa do mercado**

Tese aprovada por banca examinadora em 05 de novembro de 2015, conferindo ao autor o título de *Doutor em Ciências em Engenharia de Produção*.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson de Oliveira Pamplona (Orientador)

Prof. Dr. Wesley Vieira da Silva

Prof. Dr. Anderson Luis Saber Campos

Prof. Dr. José Henrique de Freitas Gomes

Prof. Dr. José Arnaldo Barra Montevechi

Itajubá

2015

DEDICATÓRIA

A todos os amigos que me incentivaram, em especial à minha avó Maria Aparecida, minha mãe Maria das Graças e à minha namorada Aline Mendes.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por todas as oportunidades e graças concedidas.

À minha família, por me apoiar e incentivar a ir além.

À minha namorada Aline Mendes, por ter paciência, apoiar-me nos momentos difíceis e confiar em meu trabalho.

Ao professor Edson de Oliveira Pamplona, pela orientação desse trabalho, amizade, paciência, auxílio e empenho ao longo dessa pesquisa, nunca medindo esforços para me auxiliar no que fosse preciso.

Aos professores José Arnaldo Barra Montevechi, Anderson Paulo de Paiva, Pedro Paulo Balestrassi, Renato da Silva Lima, José Henrique de Freitas Gomes, Alexandre Ferreira de Pinho, Ivilina Popova, Carlos Henrique Pereira Mello e Luiz Guilherme Azevedo Mauad pela amizade e contribuições realizadas ao longo da pesquisa e do doutorado.

Aos demais professores do programa, por todo auxílio prestado ao longo do curso de doutorado.

Aos amigos Luiz Célio Rocha, Victor Valério, Rafael Miranda, Giancarlo Aquila, Marcelo Nunes, Fernando Salomon, Aneirson Silva, Leonardo Carvalho, Rogério Peruchi, Naia Antunis e Tábata Fernandes por me auxiliarem e me darem apoio em todos os momentos.

Aos funcionários do Instituto de Engenharia de Produção (IEPG) da UNIFEI.

Agradeço a CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio e incentivo à pesquisa brasileira.

Enfim, agradeço a todos que me apoiaram nesta jornada.

EPÍGRAFE

“Seu trabalho vai preencher uma grande parte da sua vida, e a única maneira de ficar realmente satisfeito é fazer o que você acredita ser um ótimo trabalho. E a única maneira de fazer um excelente trabalho é amar o que você faz.”

Steve Jobs

RESUMO

O objetivo desta tese é apresentar uma nova proposta para formação de portfólios robustos a partir da análise estocástica de eficiência de ações de empresas negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa). Para isto, informações dos ativos em períodos de baixa do mercado (*worst state*) foram agrupados por meio do agrupamento hierárquico (*hierarchical clustering*), e então submetidos a uma análise estocástica de eficiência por meio do modelo *Chance Constrained Data Envelopment Analysis*. Por fim, para se obter a ideal participação de cada ativos, estes foram submetidos a um modelo clássico da alocação de capital. Os portfólios formados com o método proposto foram analisados e comparados a outros formados por diferentes modelos. A utilização em conjunto de tais abordagens abastecidas de informações de pior estado do mercado permitiu a formação de portfólios robustos que apresentaram um maior retorno acumulado no período de validação, resultaram em portfólios com menores valores beta, e ainda permitiram a inserção de variáveis fundamentalistas na formação dos portfólios.

Palavras-Chave: Otimização robusta, Análise Envoltória de Dados, Portfólios, DEA Restringida por Chances, Estado de baixa do mercado.

ABSTRACT

The objective of this PhD dissertation is to present a new proposal for creating robust portfolios from stochastic analysis of share efficiency from companies, negotiated in the BM&FBovespa - Securities, Commodities and Futures Exchange. In order to do this, information of shares in worst state market periods were grouped by hierarchical clustering, and then submitted to a stochastic analysis of efficiency through the model Chance Constrained Data Envelopment Analysis. Finally, shares were submitted to a classic method of capital allocation, to obtain the ideal participation of each share. The portfolios formed with the proposed method were analyzed and compared to other portfolios formed through different models. The utilization of such approaches supplied with information regarding the worst market state allowed the formation of robust portfolios that presented a higher return accumulated in the validation period, resulted in portfolios with smaller beta value, and even allowed the insertion of fundamental variables in portfolio formation.

Keywords: *Robust optimization, Data Envelopment Analysis, Portfolios, Chance Constrained DEA, Market worst state.*

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| Figura 1- Produtividade x eficiência. | 21 |
| Figura 2- Representação gráfica de fronteira eficiente..... | 22 |
| Figura 3- Retorno constante de escala para um único <i>input</i> e <i>output</i> | 26 |
| Figura 4- Retorno variável de escala para um único <i>input</i> e <i>output</i> | 28 |
| Figura 5- Função de pertinência triangular..... | 37 |
| Figura 6- Conjunto viável de portfólios compostos por diversos ativos. | 43 |
| Figura 7- Efeito da diversificação. | 45 |
| Figura 8- Exemplo de coeficientes de correlação diferentes..... | 47 |
| Figura 9- Fluxograma da aplicação DEA na seleção de portfólios. | 61 |
| Figura 10- Fluxograma da aplicação <i>Fuzzy</i> DEA na otimização de portfólios. | 66 |
| Figura 11- Fluxograma da aplicação CCDEA na otimização de portfólios..... | 70 |
| Figura 12- Fluxograma do método proposto. | 77 |
| Figura 13- Estrutura lógica da abordagem quantitativa..... | 79 |
| Figura 14- Dendrograma do agrupamento por meio de <i>Clustering</i> Hierárquico considerando todas as informações do mercado..... | 85 |
| Figura 15- Dendrograma do agrupamento por meio de <i>Clustering</i> Hierárquico considerando apenas as informações de períodos de baixa do mercado. | 85 |
| Figura 16- Retorno anormal acumulado dos pares de portfólios considerando a variação do critério de risco (60% - 55%). | 100 |
| Figura 17- Retorno anormal acumulado dos pares de portfólios considerando a variação do critério de risco (54% - 50%). | 101 |
| Figura 18- Diagrama de caixa do retorno acumulado dos pares de portfólios por critério de risco (60% - 50%)..... | 103 |
| Figura 19- Retorno acumulado dos portfólios propostos e os comparativos. | 107 |
| Figura 20- Diagrama de caixa dos portfólios propostos e os comparativos..... | 107 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 1- Tabela de resultados da aplicação DEA na otimização de portfólios. | 64 |
| Tabela 2- Tabela de resultados da aplicação <i>Fuzzy</i> DEA na otimização de portfólios. . | 68 |
| Tabela 3- Tabela de eficiência e alocação dos ativos na aplicação do modelo CCDEA. | 72 |
| Tabela 4- Resultados da aplicação CCDEA por critério de risco na otimização de portfólios..... | 74 |
| Tabela 5- Lista de ativos (DMU's) que compõem a amostra..... | 82 |
| Tabela 6- Estatística descritiva das variáveis de entrada e saída do modelo para o grupo 1 e 2 considerando informações do estado total do mercado. | 86 |
| Tabela 7- Estatística descritiva das variáveis de entrada e saída do modelo para o grupo 1 e 2 considerando informações de períodos de baixa do mercado..... | 87 |
| Tabela 8- Estatística Descritiva das eficiências para o grupo 1 e 2 considerando informações do estado total do mercado. | 89 |
| Tabela 9- Estatística Descritiva das eficiências para o grupo 1 e 2 considerando informações de períodos de baixa do mercado..... | 90 |
| Tabela 10- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do estado total de mercado. | 91 |
| Tabela 11- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do período de baixa do mercado..... | 93 |
| Tabela 12- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações do estado total de mercado. | 95 |
| Tabela 13- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações do período de baixa do mercado..... | 95 |
| Tabela 14- Alocação dos ativos nos portfólios comparativos e propostos..... | 104 |
| Tabela 15- Resultados dos portfólios comparativos e dos portfólios propostos. | 106 |

LISTA DE ABREVIATURAS

| | |
|-------|---|
| BCC | Banker, Charnes e Cooper |
| CAPM | <i>Capital Asset Pricing Model</i> (Modelo de Precificação de Ativos) |
| CCDEA | <i>Chance Constrained Data Envelopment Analysis</i> (Análise Envoltória de Dados Restringida por Chances) |
| CCP | <i>Chance Constrained Programming</i> (Programação Restringida por Chances) |
| CCR | Charnes, Cooper e Rhodes |
| CRS | <i>Constant returns to scale</i> (Retorno constante de escala) |
| DEA | <i>Data Envelopment Analysis</i> (Análise Envoltória de Dados) |
| DMU | <i>Decision Making Unit</i> (Unidade tomadora decisão) |
| FDEA | <i>Fuzzy Data Envelopment Analysis</i> (Análise Envoltória de Dados <i>Fuzzy</i>) |
| OR | <i>Operational Research</i> (Pesquisa Operacional) |
| ROE | <i>Return on Equity</i> (Retorno sobre o Patrimônio Líquido) |
| ROS | <i>Return on Sales</i> (Retorno sobre as vendas) |
| SBM | <i>Slack based measure models</i> |
| VRS | <i>Variable returns to scale</i> (Retorno variável de escala) |
| WoS | <i>Web of Science</i> |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1. Problema de pesquisa | 16 |
| 1.2. Objetivos..... | 17 |
| 1.3. Estrutura da tese..... | 17 |
| 2. REVISÃO DA LITERATURA..... | 19 |
| 2.1. Análise Envoltória de Dados (DEA)..... | 19 |
| 2.1.1. Medida de eficiência..... | 20 |
| 2.1.2. Modelos clássicos da Análise Envoltória de Dados | 23 |
| 2.1.3. <i>Chance Constrained</i> DEA | 31 |
| 2.1.4. <i>Fuzzy</i> DEA..... | 35 |
| 2.2. Seleção de portfólios | 42 |
| 2.2.1. Risco sistemático e risco diversificável..... | 43 |
| 2.2.2. Diversificação | 44 |
| 2.2.3. Modelo de Markowitz | 45 |
| 2.2.4. Modelo de Sharpe..... | 49 |
| 2.2.5. Modelos robustos de otimização de portfólios..... | 52 |
| 2.2.6. Abordagem de períodos de baixa do mercado..... | 55 |
| 2.2.7. Índice Sharpe | 57 |
| 3. MÉTODO PROPOSTO | 60 |
| 3.1. Estudos preliminares..... | 60 |
| 3.1.1. DEA na otimização de portfólios | 61 |
| 3.1.2. <i>Fuzzy</i> DEA na otimização de portfólios | 65 |
| 3.1.3. <i>Chance Constrained</i> DEA na otimização de portfólios | 70 |
| 3.2. Método proposto para a otimização de portfólios robustos | 75 |
| 4. MÉTODO DE PESQUISA | 78 |
| 4.1. Classificação da pesquisa | 78 |
| 4.2. Objeto de estudo | 79 |
| 4.3. Seleção das variáveis de entrada e saída | 80 |

| | |
|---|------------|
| 4.4. Seleção da amostra e coleta de dados..... | 81 |
| 5. OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS ROBUSTOS | 83 |
| 5.1. Preparação e desenvolvimento do método proposto | 83 |
| 5.2. Resultados e análises | 88 |
| 6. CONCLUSÕES..... | 108 |
| 6.1. Conclusões gerais | 108 |
| 6.2. Sugestões para pesquisas futuras | 110 |
| REFERÊNCIAS..... | 112 |
| APÊNDICES | 124 |

1. INTRODUÇÃO

Os investimentos em ações vêm se tornando alternativas de diversificação para os investidores que, no longo prazo, buscam um aumento na rentabilidade de seu portfólio, tornando-se uma ótima alternativa quando comparados a outras aplicações financeiras (ROTELA JUNIOR, SALOMON e PAMPLONA, 2014; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015a).

A diversificação é um fator crítico na redução do risco não sistemático na teoria da seleção de portfólios. E tem crescido a quantidade de pesquisas publicadas que buscam conciliar os benefícios da diversificação com as práticas de investimentos (KIM *et al.*, 2015). A seleção de portfólios envolve a alocação de capital entre um determinado número de títulos de tal forma que o investimento gere um maior retorno e minimize os riscos, ou seja, um retorno ajustado a risco satisfatório para os investidores, como proposto por modelos como o de Markowitz (1952) (LI, SHOU e QIN, 2012; LEUNG, NG e WONG, 2014).

Mais de sessenta anos após o desenvolvimento do modelo de Markowitz (1952), esta clássica abordagem de média-variância, considerada pioneira, ainda é o principal modelo utilizado na prática da alocação de ativos e gestão de carteira, e vem dando origem a novas propostas desenvolvidas por acadêmicos (TU e ZHOU, 2000; BRODIE *et al.*, 2009; DITRAGLIA e GERLACH, 2013; ZOPOUNIDIS, DOUMPOS e FABOZZI, 2014; LEUNG, NG e WONG, 2014; LEVY e LEVY, 2014; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015a). Tanto para investidores como para o meio acadêmico, o processo de seleção de investimentos em ativos de risco permanece sendo um desafio para a gestão financeira (BEN ABDELAZIZ, AOUNI e EL FAYEDH, 2007; CALDEIRA, MOURA e SANTOS, 2013; KOLM, TUTUNCU e FABOZZI, 2014; MARKOWITZ, 2014; PALCZEWSKI e PALCZEWSKI, 2014).

Na literatura, alguns algoritmos, tais como o famoso modelo proposto por Sharpe (1963), foram criados com objetivo de linearizar e melhorar a eficiência do modelo de covariância proposto por Markowitz em 1952 (NAWROCKI e CARTER, 1998; SHING e NAGASAWA, 1999; BEN ABDELAZIZ, AOUNI e FAYEDH, 2007; DAROLLES e GOURIEROUX, 2010; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e

SALOMON, 2014). No entanto, os pesquisadores desenvolveram modelos mais sofisticados que usam multi-período ou extensões dinâmicas (BAE, KIM e MULVEY, 2014; CUI *et al.*, 2014, UTZ *et al.*, 2014; AOUNI, COLAPINTO e LA TORRE, 2014; SMIMOU 2014).

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram o conceito de Análise Envoltória de Dados – DEA (*Data Envelopment Analysis*), utilizada para avaliação e comparação de unidades organizacionais, que utilizam múltiplos insumos para produzir várias saídas em um determinado período de tempo (KUO, HUANG e WU, 2010; AMIRTEIMOORI, 2011; KAO e LIU, 2014). A Análise Envoltória de Dados é um método não paramétrico que vem se destacando entre as modelagens quantitativas no auxílio à tomada de decisão, auxiliando os gestores das mais diversas áreas, inclusive a financeira (BACHILLER, 2009; MARTIC, NOVAKOVIC e BAGGIA, 2009; BAL, ÖRKÇÜ e ÇELEBIOGLU, 2010; KAO, LU e CHIU, 2011; LIU *et al.*, 2013; KAO, 2014; MIRANDA *et al.*, 2014; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014; AZADI *et al.*, 2015).

Os modelos da DEA vêm sendo aplicados de diferentes maneiras na área de finanças. E, de acordo com Liu *et al.* (2013), os periódicos mais importantes da área haviam publicado, até sua pesquisa, mais de 50 aplicações para a DEA em finanças. Uma cuidadosa busca na literatura indica que Lopes, Lanzer e Lima (2006) foram os primeiros autores a utilizarem a DEA na seleção de ativos, e voltaram a discutir a proposta em Lopes, Carneiro e Schneider (2010). Autores como Patari, Leivo e Honkapuro (2010) utilizaram a DEA na avaliação do desempenho de portfólios, pesquisa a qual deram continuidade com o trabalho publicado por Patari, Leivo e Honkapuro (2012). Mais recentemente a DEA continua sendo utilizada na formação e avaliação da eficiência de portfólios (EDIRISINGHE e ZHANG, 2010; PREMACHADRA *et al.*, 2012; LIM, OH e ZHU, 2014; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015a).

Tal conceito, que desde então tem sido amplamente discutido, vem dando origem a variações dos clássicos modelos DEA até os dias de hoje. Em algumas destas, segundo Chen *et al.* (2013), Silva, Marins e Santos (2014) e Rotela Junior *et al.* (2015b), o raciocínio incerto e aproximado já pode ser considerado, como o proposto

por Lertworasirikul *et al.* (2003) ou Azadi *et al.* (2015), um modelo DEA com coeficientes *Fuzzy*, ou o proposto por Sengupta (1987), que associou a Programação Restringida por Chances (*Chance Constrained Programming - CCP*), proposta por Charnes e Cooper (1963), ao modelo DEA (JIN, ZHOU e ZHOU, 2014).

De acordo com Kim, Kim e Fabozzi (2014) e Kim *et al.* (2015), os modelos clássicos da otimização de portfólios, como os propostos por Markowitz (1952) e Sharpe (1963), não podem ser considerados robustos, já que são sensíveis às pequenas variações de suas entradas.

Então, mais recentemente os pesquisadores começaram a incorporar a incerteza, por erros de estimativa diretamente no processo de otimização do portfólio, por meio de técnicas matemáticas que se referem à otimização robusta (FABOZZI *et al.*, 2007; FABOZZI, HUANG e ZHOU, 2010; SANTOS, 2010; KIM *et al.*, 2014; FLIEGE e WERNER, 2014; DUPAVOVÁ e KOPA, 2014; KAPSOS, CHRISTOFIDES e RUSTEM, 2014; KIM *et al.*, 2015).

Entretanto, apesar de alguns trabalhos como o de Bertsimas e Sim (2004) já terem confirmado uma relação entre o aumento do retorno de um portfólio formado a partir de informações de períodos de baixa do mercado e o aumento da robustez, Kim *et al.* (2015) acreditam que a robustez dos modelos de portfólios robustos é provavelmente alcançada apostando-se sistematicamente na informação de períodos de baixa do mercado, ou seja, na formação de um portfólio robusto, períodos de baixa (*bear market*) são mais relevantes do que períodos de alta da bolsa (*bull market*). Logo, as informações de retorno de ações em dias com pior desempenho são de suma importância para alcançar um portfólio considerado robusto (KIM *et al.*, 2015).

Baseado em tais informações, a associação entre os modelos clássicos DEA com Programação Restringida por Chances e agrupamento hierárquico pode ser uma alternativa no processo de otimização de portfólios, inclusive considerando-se as informações de períodos de baixa do mercado.

1.1. Problema de pesquisa

A diversificação reduz o risco de um portfólio, simplesmente através de investimentos em ativos que se movem independentemente um do outro, ou seja, ela se

aproveita de ativos com baixa correlação. Entretanto, tem sido relatado que a correlação entre os diferentes ativos financeiros aumenta durante períodos de crise do mercado (Kim *et al.*, 2015). Considerando tal afirmação, o problema desta tese resume-se em como otimizar portfólios de ações, nos quais o acionista possa considerar, além dos parâmetros de média e variância utilizados nos modelos consagrados, outras variáveis que representem seus interesses. E, ainda, utilizar informações de períodos de baixa do mercado ao contemplar a aleatoriedade e incerteza das variáveis, para proporcionar maior robustez ao portfólio, para que este apresente um bom comportamento tanto em períodos de alta quanto em momentos de recessão e colapso do mercado.

1.2. Objetivos

Em função da discussão anteriormente realizada, esta tese tem como objetivo geral desenvolver uma proposta para formação de portfólios robustos a partir da análise estocástica de eficiência de ações de empresas negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo.

E, como objetivos específicos:

- Utilizar a sistemática *Hierarchical Clustering* no agrupamento dos ativos por similaridade;
- Apresentar e utilizar o modelo *Chance Constrained Data Envelopment Analysis* (CCDEA) na redução do espaço de busca, considerando aleatoriedade e incerteza nas variáveis;
- Fornecer ao modelo CCDEA dados de períodos de baixa do mercado (*bear market*) e compará-lo ao mesmo modelo quando abastecido de informações completas;
- Utilizar a clássica abordagem de Sharpe (1963) para determinar a alocação de capital;
- Analisar a importância das informações de mercado durante períodos de baixa do mercado para alcançar um desempenho robusto;
- Comparar os resultados obtidos com o método proposto aos resultados obtidos por modelos clássicos da otimização de portfólios.

1.3. Estrutura da tese

Esta tese está estruturada em seis capítulos. O primeiro capítulo, aqui apresentado, teve como objetivo introduzir, justificar e contextualizar o problema de pesquisa. Além disso, foram apontados os objetivos a serem alcançados e delimitações da pesquisa. Por fim, para se atingir tais objetivos, os demais capítulos foram organizados da seguinte maneira:

- O capítulo dois apresentará uma visão geral sobre a Análise Envoltória de Dados (DEA), abordando os modelos clássicos da Análise Envoltória de Dados. Depois serão apresentados os modelos *Chance Constrained* DEA e o modelo *Fuzzy* DEA, como alternativas para inserção da aleatoriedade e risco nos modelos DEA clássicos. Na sequência, tratará da seleção de portfólios, apresentando os riscos sistemático e diversificável. Depois comentará sobre a ideia por trás da diversificação, e então serão apresentados os principais modelos utilizados na seleção de portfólios. Por fim, apresentará um dos principais modelos robustos de otimização de portfólios, e depois discutirá como a abordagem do estado de baixa do mercado influencia em tal modelo;
- No capítulo três será apresentada uma nova estratégia para a formação de portfólios robustos, utilizando para isso, um modelo de análise estocástica da eficiência, abastecido de informações de períodos de baixa do mercado, associado aos modelos clássicos da alocação de ativos;
- Já no capítulo quatro, será apresentada a classificação da pesquisa, determinação do objeto de estudo, discussão da seleção das variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*) do modelo CCDEA, seleção da amostra e a coleta de dados.
- No capítulo cinco serão apresentados os resultados obtidos com a aplicação do método proposto no objeto de estudo, e ainda, comparações com os resultados obtidos por modelos clássicos da alocação de portfólios;
- Finalmente, o capítulo seis encerrará a tese, apresentando as conclusões e as contribuições desta pesquisa, além das sugestões para pesquisas futuras.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Conforme discutido no capítulo anterior, este capítulo apresentará, por meio de uma fundamentação teórica, todo o suporte teórico necessário para o desenvolvimento desta pesquisa. Serão apresentados modelos da Análise Envoltória de Dados, que tiveram início com o modelo proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978). Então, serão apresentados modelos mais sofisticados que contemplam a aleatoriedade e risco. Após a apresentação dos modelos de análise de eficiência, será discutido o efeito da diversificação na seleção de portfólios. Em seguida serão apresentados modelos clássicos da alocação de investimentos, e também os modelos robustos, que incorporam a incerteza na prática da alocação de ativos. Na sequência será discutida a importância das informações de períodos de baixa do mercado na formação de portfólios robustos. Encerrando o capítulo, será apresentado o índice Sharpe, métrica mais utilizada na avaliação do desempenho de portfólios.

2.1. Análise Envoltória de Dados (DEA)

Todas as operações de negócios ou processos envolvem a transformação, agregando valor aos materiais, transformando-os em produtos e serviços que atendem as expectativas dos clientes. A transformação envolve o uso de insumos constituídos de trabalho, materiais, máquinas, energia e outros recursos que possibilitarão a criação de produtos acabados, serviços e outros resultados. Os gestores em muitas vezes estão interessados em avaliar quão eficiente pode ser um processo em relação a vários outros, considerando múltiplas medidas de desempenho (entradas e saídas) de um sistema. De acordo com Zhu (2009) a avaliação comparativa de desempenho de processos e negócios ajuda os mesmos a se tornarem mais produtivos e eficientes.

A avaliação de desempenho pode ser uma importante ferramenta de melhoria contínua para manter-se competitivo, podendo forçar qualquer unidade de negócios a evoluir constantemente a fim de sobreviver e prosperar em um ambiente de negócios, sendo capaz de enfrentar a concorrência a nível global.

Por meio da avaliação de desempenho, pode-se (i) revelar os pontos fortes e fracos das operações, atividades ou processos; (ii) preparar melhor o negócio para atender as necessidades dos clientes; e (iii) identificar oportunidades para melhorar as

operações e processos atuais, ou ainda criar novos produtos, processos e serviços (ZHU, 2009).

2.1.1. Medida de eficiência

A medida de eficiência é uma questão importante para qualquer tipo de empresa ou organização. A medição da eficiência permite que as empresas ou organizações comparem o seu desempenho com seus principais concorrentes e auxiliam no desenvolvimento de uma estratégia para melhorarem seu desempenho.

A razão entre uma saída e uma única entrada é utilizada com frequência na medição de desempenho, especialmente na área financeira, como por exemplo, o ROE (*Return on Equity* – Retorno sobre o Patrimônio Líquido) e o ROS (*Return on Sales* – Retorno sobre as vendas), que podem ser utilizados como indicadores que caracterizam o desempenho financeiro (HAWAWINI e VIALLET, 2010).

Cooper, Seiford e Tone (2007) iniciam seu livro apresentando a forma mais básica de se medir à eficiência; a razão em duas medidas, como apresentado em (1). Esta medida de produtividade assume forma de razão quando utilizada para avaliar um trabalhador ou empregado, por exemplo, medir a produção por horas trabalhadas ou produção por empregado utilizado.

$$\frac{\textit{output}}{\textit{input}} \tag{1}$$

A produtividade expressa por tal razão está relacionada com a forma de utilização dos recursos para realizar a produção. O conceito sugere que o insumo esteja sendo utilizado da melhor forma possível, sem excesso (FERREIRA e GOMES, 2009).

Já a eficiência, segundo Mello *et al.* (2005), compara o que foi produzido, dado os recursos disponíveis, com o que poderia ter sido produzido utilizando-se dos mesmos recursos.

O eixo Y da Figura 1 representa a produção Q_y ; já o eixo X representa os recursos X_i , e a curva S representada pela expressão matemática em (2) é chamada de fronteira de eficiência, indicando quanto foi produzido ao máximo para cada nível de recurso utilizado.

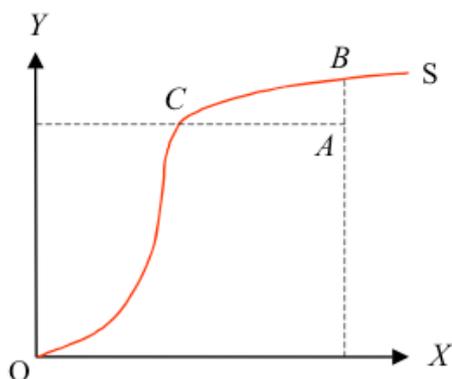


Figura 1- Produtividade x eficiência.

Fonte: Adaptado de Mello *et al.* (2005), Ferreira e Gomes (2009) e Cook e Seiford (2009).

$$Q_y = f_y(X_i) \quad (2)$$

Uma vez que B e C são considerados eficientes já que estão localizados na fronteira de eficiência, pode-se observar que C é mais eficiente que B. Para isso, basta observar que para produzir Q_B é necessário aumentar a quantidade do insumo X_i , representado pelo segmento \overline{CA} .

Já, analisando-se o ponto A, considerado ineficiente, há pelo menos duas formas de torna-lo eficiente: (i) deslocar o ponto A até o ponto C, reduzindo a quantidade dos recursos utilizados de X_A para X_C , mantendo constantes os produtos (orientação a *inputs* ou a insumo); (ii) deslocar o ponto A até o ponto B, aumentando a quantidade produzida de Q_A para Q_B , mantendo a mesma utilização do insumo X_A (orientação a *outputs* ou a produto).

A Figura 2 apresenta o conceito de fronteira de eficiência e será válida na demonstração do cálculo da eficiência de um processo qualquer. Considerou-se o ponto B, dado como eficiente pela capacidade de conseguir gerar uma maior quantidade de produtos utilizando uma menor quantidade de recursos, representado pelas coordenadas (X_B, Y_B) ; e o ponto A, ineficiente e representado pelas coordenadas (X_A, Y_A) .

A linha que tem origem no ponto $(0, 0)$ e passa pelo ponto B representa a fronteira eficiente. Projetando-se horizontalmente o ponto A, tem-se A'' , representado pelas coordenadas $(0, Y_A)$ e A'' , cujas coordenadas serão calculadas a partir do sistema explicitado por Mello *et al.* (2005) e Ferreira e Gomes (2009), e numericamente representado por Cooper, Seiford e Tone (2007) e Cook e Seiford (2009).

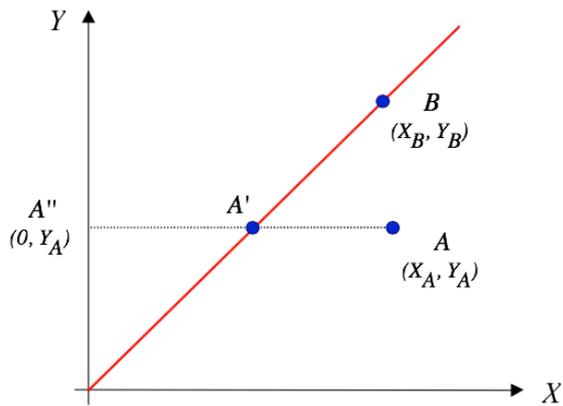


Figura 2- Representação gráfica de fronteira eficiente.

Fonte: Adaptado de Mello *et al.* (2005), Ferreira e Gomes (2009) e Cook e Seiford (2009).

O sistema (3) fornece as coordenadas:

$$\begin{cases} Y = Y_A \\ Y = \frac{Y_B}{X_B} X \end{cases} \quad (3)$$

Logo, A' é representado pelas coordenadas apresentadas em (4):

$$\left(\frac{Y_A X_B}{Y_B}, Y_A \right) \quad (4)$$

A produtividade da entidade B é o coeficiente angular α da reta, dado por (5):

$$\alpha = \frac{Y_B}{X_B} \quad (5)$$

Para cálculo da eficiência (w_o) do ponto A, considerando-se a orientação a *inputs*, tem-se (6):

$$w_o = \frac{\overline{A'A''}}{\overline{A''A}} = \frac{Y_A X_B}{X_A Y_B} = \frac{Y_A}{X_A} \frac{1}{\frac{Y_B}{X_B}} = \frac{P_A}{P_B} \quad (6)$$

Então, a eficiência de uma entidade é simplesmente a razão entre sua produtividade (P_A) e a produtividade da entidade eficiente, ou a mais eficiente, (P_B). Para tal constatação, levou-se em consideração apenas um produto e um recurso.

Entretanto, o dilema é identificar *benchmarks* e avaliar a produtividade ou eficiência quando mais de uma entrada ou saída devem ser levados em consideração,

comprometendo a utilidade desta forma mais básica de avaliação da eficiência (COOPER, SEIFORD e TONE, 2007).

2.1.2. Modelos clássicos da Análise Envoltória de Dados

Entre as várias ferramentas de medição da eficiência, tais como os métodos convencionais de estatística, métodos não paramétricos e métodos de inteligência artificial, a Análise Envoltória de Dados - DEA (*Data Envelopment Analysis*) pode efetivamente medir a eficiência relativa de unidades tomadoras de decisão – DMU's (*Decision Making Units*), que utilizam múltiplos insumos ou entradas (*inputs*) para produzir múltiplas saídas (*outputs*) (EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014). A DEA é um método não paramétrico que vem sendo utilizada amplamente em diferentes tipos de empresas e organizações, como bancos, escolas e hospitais (BACHILLER, 2009; MARTIC, NOVAKOVIC e BAGGIA, 2009; KAO, LU e CHIU, 2011; LIU *et al.*, 2013; KAO, 2014; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014; AZADI *et al.*, 2015).

A DEA é um dos campos mais populares em Pesquisa Operacional (OR - *Operational Research*), e desde 1995 vem aumentando cada vez mais o número de publicações sobre o assunto. Entre 1995 e 2003 o número de publicações relevantes era de aproximadamente 225 por ano. Porém, entre 2004 e 2007 este número cresceu chegando a 360 publicações por ano (MARTIC, NOVAKOVIC e BAGGIA, 2009). Lampe e Hilgers (2015) adotaram a Thomson Reuters *Web of Science* (WoS) como fonte de informações para sua pesquisa, já que esta cobre mais de 10.000 periódicos de alto impacto e 120.000 conferências internacionais, sendo um dos bancos de dados de citações mais importantes do mundo. Entre os anos de 1987 e 2011, 4021 publicações sobre DEA foram incluídas no conjunto de dados (LAMPE e HILGERS, 2015).

Liu *et al.* (2013), em sua pesquisa, aponta que entre os anos de 1978 e 2010, um total de 4936 artigos sobre DEA foram publicados, dos quais 36,5% (1802) são puramente metodológicos, enquanto 63,5% (3134) envolvem aplicações. Liu *et al.* (2013) propõem a reunião das aplicações DEA em 24 áreas, cuja exigência é possuir pelo menos 20 artigos publicados na base WoS, que respondem a duas perguntas: Como a DEA é desenvolvida em aplicações no mundo real? Quais são as principais aplicações da DEA?

O valor da DEA reside na sua capacidade para avaliar eficiência individual relativa ou o desempenho de uma unidade tomadora de decisão dentro de um grupo de interesse, que opera dentro de um determinado domínio de aplicação (LIU *et al.*, 2013). Estas unidades são comparadas entre si e distinguem pelas quantidades de recursos (entradas - *inputs*) que consomem e de bens (saídas - *outputs*) que produzem (COOPER, SEIFORD e TONE, 2007; KAO, LU e CHIU, 2011; COOK e ZHU, 2014). Para Silva, Marins e Santos (2014), Mahdiloo *et al.* (2014), Kao (2014) e Azadi *et al.* (2015), a DEA permite, entre outras coisas, a identificação das DMU's que são referências (*benchmarks*) para a identificação das demais unidades tomadoras de decisão analisadas.

Diversos autores, como Bal, Örkücü e Çelebioglu (2010) e Miranda *et al.* (2014), mostram que a DEA tem se destacado entre as modelagens quantitativas no auxílio à tomada de decisão, auxiliando os gestores das mais diversas áreas. Charnes, Cooper e Rhodes (1978) desenvolveram o primeiro modelo DEA para avaliação da eficiência de programas de ensino públicos.

Segundo Ferreira e Gomes (2009), uma das principais vantagens da Análise Envoltória de Dados, teoria baseada em *benchmarking* de DMU's, é não precisar estabelecer quaisquer relações funcionais entre os insumos relevantes (mão de obra, matéria-prima, energia, transporte, entre outros) e os resultados esperados (tipos variados de produção e prestação de serviços), dispensando a análise com medidas únicas, ou seja, os insumos e produtos podem ter unidades diferentes.

O objetivo da dissertação desenvolvida por Rhodes, que deu origem ao modelo que será apresentado a seguir, era desenvolver um método que permitia comparar a eficiência entre escolas públicas. Para isso, utilizou-se de valores aritméticos, melhoria da autoestima em testes psicológicos e habilidade psicomotora, como produtos de seu modelo. E, como insumos o número de professores-hora e o tempo gasto pela mãe com leituras para o filho (FERREIRA e GOMES, 2009).

Segundo Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), os pesos para variável de entrada e saída do modelo geral da DEA podem ser obtidos a partir da solução do modelo proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), dado por (7) – (10):

$$\max w_o = \frac{\sum_{q=1}^b u_q y_{qo}}{\sum_{p=1}^a v_p x_{po}} \quad (7)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{q=1}^b u_q y_{qi}}{\sum_{p=1}^a v_p x_{pi}} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$u_q \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (9)$$

$$v_p \geq 0, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (10)$$

No qual i representa o índice da DMU, $i = 1, \dots, n$; q é o índice da saída, com $q = 1, \dots, b$; p é o índice da entrada, $p = 1, \dots, a$; y_{qi} é o valor da q -ésima saída para a i -ésima DMU; x_{pi} é o valor da p -ésima entrada para a i -ésima DMU; u_q é o peso associado à q -ésima saída; v_p é o peso associado à p -ésima entrada; w_o é a eficiência relativa de DMU_o, que é a DMU sob avaliação; e y_{qo} e x_{po} são, respectivamente, dados de saídas e entradas da DMU_o (MIRANDA *et al.*, 2014).

Quando obtido $w_o = 1$, isto significa que a DMU_o, DMU em análise, deve ser considerada eficiente quando comparada às demais unidades contempladas no modelo. Caso $w_o < 1$, essa DMU deve ser considerada ineficiente (JABLONSKY, 2012).

O modelo apresentado por (7) - (10) não é linear, sendo um caso da Programação Fracionária, mas que pode ser linearizado. Então, o modelo conhecido por CCR ou CRS (*constant returns to scale* - modelo com retornos constantes de escala) foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), e apresentado de forma linearizada, conforme (11) - (15), forma denominada modelo dos multiplicadores.

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q y_{qo} \quad (11)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p x_{po} = 1 \quad (12)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q y_{qi} - \sum_{p=1}^a v_p x_{pi} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$u_q \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (14)$$

$$v_p \geq 0, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (15)$$

Para ter uma apreciação geométrica para o modelo CCR, um problema de retorno constante de escala pode ser representado como na Figura 3. Esta figura proporciona uma ilustração de uma única saída e uma entrada, no qual a inclinação da reta representa uma função de produção linear com rendimentos constantes de escala, ou seja, ocorrem aumentos proporcionais entre a produção (eixo da ordenada) e a utilização de insumos (eixo da abscissa).

Segundo Cook e Seiford (2009), o modelo envelope (16) - (19), por dualidade, assume o mesmo valor da função objetivo obtida com o modelo dos multiplicadores, no qual λ são os pesos assumidos pelo modelo. “No modelo envoltório, a medida de eficiência representada pelo escalar θ deve ser multiplicada por todos os insumos para colocar a DMU na fronteira eficiente, por meio de decréscimos nos valores dos insumos” (FERREIRA e GOMES, 2009, p. 73).

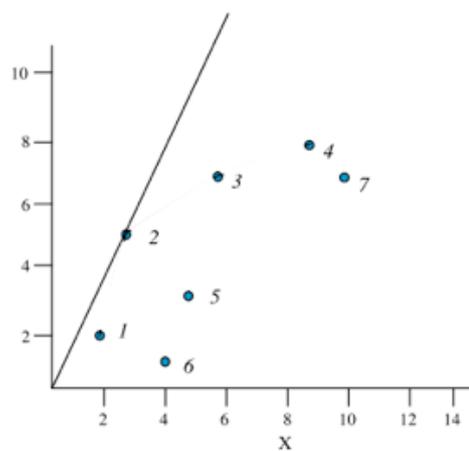


Figura 3- Retorno constante de escala para um único *input* e *output*.

Fonte: Adaptado de Cook e Seiford (2009).

$$\min \theta \quad (16)$$

Sujeito a:

$$\theta x_{po} - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{pi} \geq 0 \quad \forall p \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{bi} - y_{bo} \geq 0 \forall q \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (18)$$

$$\lambda_i \geq 0 \forall i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

Se no modelo dos multiplicadores (11) - (15) as variáveis de decisão são os pesos u_q e v_p , no modelo do envelope (16) - (19) θ e os pesos λ_i são as variáveis de decisão.

Até este ponto foram apresentados os modelos cujo objetivo é minimizar insumos ao produzir, pelo menos, os mesmos níveis de saídas, o que fica mais claro quando observada a função objetivo representada por (16). Ou seja, um modelo que maximiza as saídas mantendo inalteradas as entradas, modelo este chamado de orientado a entrada (*input oriented*). Há outro tipo de modelo que tenta maximizar os resultados enquanto utiliza não mais do que a quantidade observada de qualquer entrada. Este modelo é chamado de orientado a saída (*output oriented*) (BANKER *et al.*, 2004; MELLO *et al.*, 2005; COOPER, SEIFORD e TONE, 2007; COOK e SEIFORD, 2009; LEE, CHU e ZHU, 2011).

Ainda segundo os autores, ressalta-se que o modelo que envolve a razão das saídas pelas entradas, correspondente às equações (7) - (8) é dito como *input oriented*. Assim, invertendo as razões das equações (7) - (8), e buscando a minimização de tal formulação (7) - (10), encontra-se o modelo denominado *output oriented*.

Segundo Cook e Seiford (2009) há ainda uma terceira opção representada pelos modelos SBM (*Slack based measure models*) ou pelo modelo Aditivo (*Addictive model*), que lidam com os excessos de entrada e deficiências de saída simultaneamente, de forma a maximizar ambos conjuntamente. Entretanto, não serão tratados nesta pesquisa.

É válido lembrar que, segundo Ferreira e Gomes (2009), com rendimentos constantes de escala, a eficiência orientada a insumo é sempre igual à eficiência orientada a produto. “Em ambos os casos, a eficiência orientada a insumos ou a produto, as DMU’s eficientes sobre a fronteira de possibilidades de produção têm sempre eficiência técnica igual à unidade” (FERREIRA e GOMES, 2009, p. 79).

Banker, Charnes e Cooper (1984) transformaram a suposição de retorno de escala constante do modelo CCR por meio de uma restrição de convexidade (TOLOO e NALCHIGAR, 2009; MELLO *et al.*, 2013), criando o modelo BCC, devido ao nome dos autores ou VRS (*variable returns to scale*), modelo que admite o retorno variável de escala (BANKER *et al.*, 2004; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014). Isso é retratado na versão redesenhada da Figura 3 sob a forma de Figura 4. De acordo com Banker *et al.* (2004), tal modelo pode ser representado conforme (20) – (24):

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q y_{qo} + c_o \quad (20)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p x_{po} = 1 \quad (21)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q y_{qi} - \sum_{p=1}^a v_p x_{pi} + c_o \leq 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (22)$$

$$u_q \geq 0, \quad q=1,2,\dots,b \quad (23)$$

$$v_p \geq 0, \quad p=1,2,\dots,a \quad (24)$$

Vale observar que para obtenção da formulação do modelo BCC foi inserida de forma aditiva nas equações (20) e (22) uma variável auxiliar irrestrita c_o , denominada fator de escala (BANKER, CHARNES e COOPER, 1984). Tal variável indica onde a DMU em análise se encontra, seja na porção de retorno crescente, decrescente ou constante de escala (MELLO *et al.*, 2013).

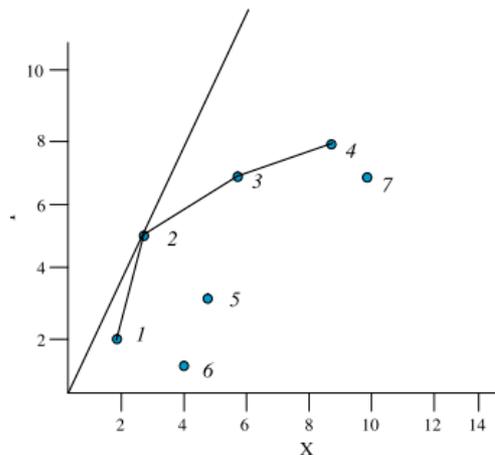


Figura 4- Retorno variável de escala para um único *input* e *output*.

Fonte: Adaptado de Banker *et al.* (2004) e Cook e Seiford (2009).

Na Figura 4, o segmento do ponto 1 ao ponto 2, constitui uma porção da fronteira eficiente com retornos crescente de escala; o ponto 2 se caracteriza como retorno constante de escala; e todos os demais segmentos, de 2-3 e 3-4, constituem uma porção da fronteira de eficiência com retornos decrescentes de escala.

O modelo envoltório ou do envelope com rendimentos variáveis, representado por (25) - (29), é a mais importante extensão do modelo original CCR, se diferenciando deste modelo pela adição de uma restrição (28), limitando o somatório dos pesos λ ao valor de 1 (MARTIC, NOVAKOVIC e BAGGIA, 2009; LEE, CHU e ZHU, 2011).

$$\min \theta \quad (25)$$

Sujeito a:

$$\theta x_{po} - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{pi} \geq 0 \forall p \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{bi} - y_{bo} \geq 0 \forall q \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (28)$$

$$\lambda_i \geq 0 \forall i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

Diferentemente do modelo CCR/CRS, que gera o mesmo resultado independente da orientação do modelo (orientado à entrada ou saída), o modelo BCC/VRS orientado a entrada gera valores de eficiências diferentes do modelo orientado a saída (FAN, YUAN e QIN, 2013).

Os modelos BCC apresentados são classificados como orientados à entrada. Logo, no modelo envoltório (25) - (29), a eficiência é dada por θ , tal que $0 \leq \theta \leq 1$. Neste momento, é válido apresentar o modelo BCC/VRS orientado a saída (*output oriented*) conforme (30) - (34). Entretanto, em (30), ϕ representa por quanto todos os produtos devem ser multiplicados, mantendo-se constante os recursos, tal que $1 \leq \phi \leq \infty$. Logo, o valor da eficiência será dado por $\frac{1}{\phi}$ (MELLO *et al.*, 2005; FERREIRA e GOMES, 2009).

$$\max \phi \quad (30)$$

Sujeito a:

$$x_{po} - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{pi} \geq 0 \forall p \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{bi} - \phi y_{bo} \geq 0 \forall q \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (33)$$

$$\lambda_i \geq 0 \forall i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Supondo que haja n DMU's: DMU₁, DMU₂, DMU₃,..., DMU_n, conforme Cooper, Seiford e Tone (2007), as variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*) para cada DMU devem ser escolhidas de modo a representar o interesse dos gestores, deve haver dados numéricos positivos para cada entrada e saída, em princípio deve optar por um menor número de *inputs* e um maior número de *outputs* para que os valores de eficiência reflitam bem esta relação, e, por fim, as unidades de medida de diferentes *inputs* e *outputs* não precisam ser congruentes.

Ainda, segundo Cooper, Seiford e Tone (2007), para que os modelos tradicionais, tanto o CCR/CRS quanto o BCC/VRS, proporcionem uma boa discriminação dos dados, é necessário que o número de DMU's (n) seja o número de entradas multiplicado pelo número de saídas ou que seja três vezes maior do que a soma do número de entradas e saídas do modelo ($a+b$). A regra básica é escolher n igual ou maior que $x\{ab, 3(a+b)\}$.

Com relação às variáveis utilizadas em um modelo DEA, Charnes *et al.* (1994) e Siriopoulos e Tziogkidis (2010) afirmam que entradas ou saídas altamente correlacionadas não afetam significativamente os resultados de eficiência, diferentemente de outros autores que propõem a utilização de variáveis de entradas ou saídas não correlacionadas.

Diversas implementações têm sido feitas nos modelos CCR/CRS e BCC/VRS, dando origem a variações nos modelos clássicos. Entretanto, na maioria das vezes a técnica DEA, baseada em uma programação matemática, tem tratado os dados como

sendo determinísticos. Em resposta à crítica de que na maioria das aplicações reais há erro e ruído aleatório nos dados, uma série de propostas e soluções matemáticas têm sido apresentadas a fim de incorporar variações estocásticas nos dados.

2.1.3. *Chance Constrained DEA*

Como uma técnica não paramétrica de eficiência, a Análise Envoltória de Dados (DEA) tem ganhando cada vez mais popularidade na medição de desempenho em questões financeiras. Os modelos clássicos e utilizados com maior frequência na literatura são do tipo determinístico, e não consideram os erros aleatórios das variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*). Segundo Aigner, Lovell e Schmidt (1977), Talluri, Narasimhan e Nair (2006), Jin, Zhou e Zhou (2014) e Azadi e Saem (2012) a aleatoriedade generalizada nos processos de avaliação são provenientes dos erros na coleta de dados.

Uma das primeiras tentativas de preencher tal lacuna envolveu o desenvolvimento da Restrição por Chances em modelos matemáticos da Análise Envoltória de Dados (CHARNES e COOPER, 1959), a fim de incorporar variações estocásticas nos dados, o que pode ser visto nos trabalhos de Timmer (1971), Banker (1986), Desai (1986), Sengupta (1987), Land, Lovell e Thore (1993), Olesen e Petersen (1995), Cooper, Huang e Li (1996), Cooper *et al.* (1998), Morita e Seiford (1999), Sueyoshi (2000), e em trabalhos mais recentes como Desai, Ratick e Schinnar (2005) e Jin, Zhou e Zhou (2014).

Ainda segundo Jin, Zhou e Zhou (2014), a maior contribuição na programação DEA estocástica pode ser encontrada na pesquisa desenvolvida por Sengupta (1987), que utilizou a Programação Restringida por Chances (*Chance Constrained Programming* - CCP), proposta por Charnes e Cooper (1963).

Saen e Azadi (2011) definem a Programação Restringida por Chances como um tipo de abordagem de otimização estocástica, adequada para resolver problemas de otimização com variáveis aleatórias incluídas nas restrições, e às vezes na função objetivo, assim como feito por Charnes, Cooper e Rhodes (1959). A CCP pode efetivamente refletir a confiabilidade de se satisfazer, ou mesmo o risco de violar, um sistema com restrições sob condições de incerteza. A CCP não requer que todas as restrições sejam totalmente satisfeitas, elas são satisfeitas de acordo com probabilidades

proporção de ser inferior ou igual a β_i , que representa um nível de eficiência esperado para a i -ésima DMU, que segundo Cooper, Huang e Li (1996) e Jin, Zhou e Zhou (2014), possui variação $[0,1]$, sendo definido como um nível de aspiração. Já α_i é considerado um critério de risco em nome da utilidade de um tomador de decisão. Por outro lado, $1-\alpha_i$ indica a probabilidade de atingir a exigência, sendo considerado um nível de confiança (JIN, ZHOU e ZHOU, 2014). Assim como β_i , o critério de risco (α_i) é um valor medido no intervalo entre 0 e 1. No modelo apresentado, quando $\alpha_i=0$ é necessário que a relação entre *output/input* torne-se menor ou igual a β_i .

Para se obter um modelo viável computacionalmente, a formulação deve ser reescrita, conforme a proposta de Charnes e Cooper (1963). Nesta proposta considera-se a aleatoriedade, e para isso, assume-se que a variável estocástica \hat{x}_{ip} de cada *input* pode ser expressa como $\hat{x}_{ip} = \bar{x}_{ip} + a_{ip} \xi$, no qual p possui variação $[1,b]$ e i de $[1,n]$, no qual \bar{x}_{ip} é o valor esperado de \hat{x}_{ip} e a_{ip} é o desvio padrão. De forma parecida, a variável estocástica \hat{y}_{iq} de cada *output* pode ser expressa como $\hat{y}_{iq} = \bar{y}_{iq} + b_{iq} \xi$, no qual q possui variação $[1,a]$ e i de $[1,n]$, no qual \bar{y}_{iq} é o valor esperado de \hat{y}_{iq} e b_{iq} é o desvio padrão. Uma vez que a parte da perturbação estocástica indica que os erros são provenientes da coleta de dados, é natural supor que a variável aleatória ξ segue uma distribuição normal ($N(0,\sigma^2)$).

Após apresentação do modelo, é conveniente adquirir sua formulação determinística equivalente, a fim de facilitar a resolução do modelo. Então a formulação da função objetivo, representada pela equação (35) pode ser reescrita como:

$$E \sum_{q=1}^b u_q \hat{y}_{oq} = \sum_{q=1}^b u_q \bar{y}_{oq} \quad (39)$$

As restrições representadas, conforme (36)-(37), incluindo o processo estocástico, podem ser reescritas em (40)-(41):

$$E \left(\sum_{p=1}^a v_p \hat{x}_{op} \right) = \left(\sum_{p=1}^a v_p \bar{x}_{op} \right) = 1 \quad (40)$$

$$P_r \left(\frac{\sum_{q=1}^b u_q \hat{y}_{iq}}{\sum_{p=1}^a v_p \hat{x}_{ip}} \leq \beta_i \right) = P_r \left(\sum_{q=1}^b u_q \hat{y}_{iq} - \beta_i \sum_{p=1}^a v_p \hat{x}_{ip} \leq 0 \right) \geq 1 - \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (41)$$

Que pode ser escrita em sua forma equivalente, conforme (42):

$$P_r \left(\frac{\left(\sum_{q=1}^b u_q \hat{y}_{iq} - \beta_i \sum_{p=1}^a v_p \hat{x}_{ip} \leq 0 \right) - E_i}{\sqrt{V_i}} \geq \frac{E_i}{\sqrt{V_i}} \right) \geq 1 - \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (42)$$

No qual E_i e V_i indicam a média e variância de cada variável aleatória. Logo, podem ser representadas conforme (43)-(44):

$$E_i = \sum_{q=1}^b u_q \bar{y}_{iq} - \beta_i \sum_{p=1}^a v_p \bar{x}_{ip} \quad (43)$$

$$V_i = \left(\sum_{q=1}^b u_q \bar{y}_{iq} - \beta_i \sum_{p=1}^a v_p \bar{x}_{ip} \right)^2 \sigma^2 \quad (44)$$

Deste modo, a variável aleatória $\frac{\left(\sum_{q=1}^b u_q \hat{y}_{iq} - \beta_i \sum_{p=1}^a v_p \hat{x}_{ip} \leq 0 \right) - E_i}{\sqrt{V_i}}$ segue uma distribuição normal de média zero e variância um, logo equação (42) pode ser apresentada conforme (45):

$$\frac{-E_i}{\sqrt{V_i}} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (45)$$

Cuja forma equivalente é apresentada conforme (46):

$$\sum_{p=1}^a v_p \beta_i (\bar{x}_{ip} + \Phi^{-1}(1 - \alpha_i) a_{ip} \sigma) - \sum_{q=1}^b u_q (\bar{y}_{iq} + \Phi^{-1}(1 - \alpha_i) b_{iq} \sigma) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

Finalmente, chega-se ao modelo dos multiplicadores. Aqui, Φ representa uma função de distribuição normal padrão, e Φ^{-1} é o inverso da função. Assim o modelo original pôde ser reformulado como o modelo de programação linear, cujo equivalente é apresentado conforme (47)-(50) (SAEN e AZADI, 2011; JIN, ZHOU e ZHOU, 2014):

$$\max \sum_{q=1}^b u_q \cdot \bar{y}_{oq} \quad (47)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p \bar{x}_{op} = 1 \quad (48)$$

$$\sum_{p=1}^a v_p \beta_i (\bar{x}_{ip} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) a_{ip} \sigma) - \sum_{q=1}^b u_q (\bar{y}_{iq} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) b_{iq} \sigma) \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (49)$$

$$u_q, v_p, w_r \geq 0 \quad (50)$$

O modelo representado por (47) - (50) reescrito na forma do modelo do envelope, conforme (51)-(54):

$$\min \theta \quad (51)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i (\bar{x}_{ip} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) a_{ip} \sigma) \leq \bar{x}_{op} \quad p=1,2,\dots,a \quad (52)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\bar{y}_{iq} + \Phi^{-1}(1-\alpha_i) b_{iq} \sigma) \leq \bar{y}_{oq} \quad q=1,2,\dots,b \quad (53)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n \quad (54)$$

O modelo dos multiplicadores (47)-(50) e do envelope (51)-(54) apresentados ampliam as aplicações da Análise Envoltória de Dados (DEA) na área financeira e auxiliam a tomada de decisão. Além da situação determinística, a eficiência pode ser medida considerando variáveis aleatórias. Os níveis de aspiração e confiança do modelo podem ser definidos de acordo com diferentes situações na aplicação prática, atendendo a particularidades dos casos.

2.1.4. Fuzzy DEA

De acordo com Emrouznejad e Tavana (2014), Zadeh (1965) introduziu a teoria dos conjuntos *Fuzzy* para lidar com a imprecisão e incerteza inerente aos julgamentos humanos nos processos de tomada de decisão. Amindoust *et al.* (2012) apresentam uma forma de se expressar um conjunto *Fuzzy* sob um ponto de vista matemático. Para isso, pode-se considerar um conjunto X , conforme (55):

$$X = x_1, x_2, \dots, x_n \quad (55)$$

No qual, x_i representa elementos do conjunto X , sendo $i=1,2,..n$. O valor de pertinência (μ) expressa o grau de pertinência relacionado a cada elemento em um conjunto *Fuzzy* A (AMINDOUST *et al.*, 2012), que é representado conforme (56):

$$A = \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n) \quad (56)$$

Emrouznejad e Tavana (2014) afirmam que dados precisos e exatos são fundamentais e indispensáveis em uma análise DEA convencional. Entretanto, os valores de *inputs* e *outputs* observados no mundo real podem ser imprecisos ou vagos. Vários autores têm proposto diferentes modelos *Fuzzy* para lidar com dados imprecisos ou ambíguos utilizando a Análise Envoltória de Dados, chegando-se aos modelos *Fuzzy Data Envelopment Analysis (Fuzzy DEA)*.

De acordo com autores como Liang e Wang (1993), Aouni, Martel e Hassaine (2009), Silva, Marins e Santos (2014), Miranda *et al.* (2014) e Silva, Miranda e Marins (2015), as funções de pertinência triangular podem ser utilizadas para inserir a incerteza nos parâmetros de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*) do modelo *Fuzzy* DEA, já que representam bem a *expertise* humana em julgar corretamente o comportamento de variáveis comuns em diversas situações práticas.

Um número *Fuzzy* \tilde{a} , conforme Figura 5, é dito ser um número *Fuzzy* triangular e pode ser expresso por $\tilde{a} = (x^l, x^m, x^u)$ se a função de pertinência apresentar a seguinte forma (57):

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^m - x}{x^l}, & x^m - x^l \leq x \leq x^m \\ 1 - \frac{x - x^m}{x^u}, & x^m \leq x \leq x^m + x^u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (57)$$

No qual, $x^m \in R$ é o valor central, mais provável, e x^l e $x^u > 0$ são os valores que determinam a amplitude de \tilde{a} . Quando os valores que determinam a amplitude são iguais, ou seja, $x^l = x^u$, então \tilde{a} pode ser chamado de valor *Fuzzy* triangular simétrico e denotado por simplesmente $\tilde{a} = (x^m, x^u)$ (GUO e TANAKA, 2001; AMINDOUST *et al.*, 2012; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014).

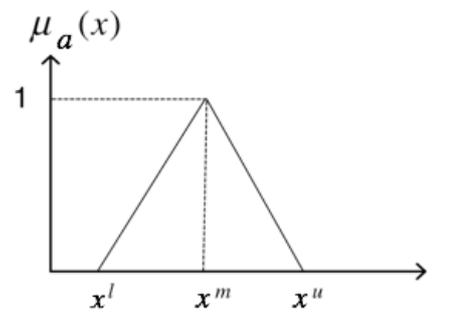


Figura 5- Função de pertinência triangular.

Fonte: Adaptado de Emrouznejad e Tavana (2014) e Silva, Miranda e Marins (2015).

Segundo a definição de Lertworasirikul *et al.* (2003), a Análise Envoltória de Dados *Fuzzy* (*Fuzzy Data Envelopment Analysis – FDEA* ou *Fuzzy DEA*) é uma ferramenta para comparar a performance de um conjunto de atividades ou organizações sob condições de incerteza. Dados imprecisos em modelos FDEA são representados por conjuntos *Fuzzy* e modelos FDEA tomam forma de modelos de programação linear *Fuzzy*. No entanto, existem alguns modelos FDEA que não usam a programação linear *Fuzzy*, tais modelos são baseados nos conceitos de fronteiras superior e inferior (DESPOSTIS e SMIRLIS, 2002; BIONDI NETO *et al.*, 2011).

Desde o estudo original desenvolvido por Sengupta (1987) e Sengupta (1992), há um interesse crescente em modelos *Fuzzy* DEA (FDEA), modelos estes que podem ser mais realistas, representando melhor os problemas reais do que os modelos convencionais da Análise Envoltória de Dados (EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014).

Miranda *et al.* (2014) e Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011) afirmam que diversos pesquisadores têm formulado modelos FDEA para lidar com situações que apresentam dados de entrada e saída imprecisos ou vagos. Em sua pesquisa, Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011), Miranda *et al.* (2014) e Emrouznejad e Tavana (2014), ao total, citam seis das principais abordagens que tratam do modelo *Fuzzy* DEA, que são abordagem da tolerância (*The tolerance approach*), abordagem baseada em nível- α (*The α -level based approach*), abordagem no ranking *Fuzzy* (*The Fuzzy ranking approach*), abordagem possibilística (*The possibility approach*), aritmética *Fuzzy* (*Fuzzy arithmetic*) e *Fuzzy* aleatório (*Fuzzy random/type-2 Fuzzy set*).

Wen e Li (2009), Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011), Miranda *et al.* (2014), Silva, Marins e Santos (2014) e outros autores como Rotela Junior *et al.* (2015a)

julgam que a abordagem nível- α é o modelo mais utilizado de *Fuzzy* DEA, sendo esta abordagem sido proposta por Kao e Liu (2000). Emrouznejad e Tavana (2014) afirmam que tal fato pode ser evidenciado analisando-se o número de artigos publicados que utilizam tal abordagem comparada as demais, conforme pode ser visto em seu trabalho e também no apresentado por Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011).

Na abordagem baseada em nível- α (*The α -level based approach*), a ideia principal é converter o modelo *Fuzzy* DEA em um par de modelos de programação paramétricos com finalidade de encontrar os limites inferior e superior para cada nível- α das funções de pertinência na avaliação da eficiência.

Segundo Emrouznejad e Tavana (2014), resolvendo-se este modelo a um dado valor para o nível- α , chega-se a um intervalo de eficiência para cada DMU em análise. E através deste intervalo, pode-se obter o valor de eficiência da programação *Fuzzy*.

Para Chen *et al.* (2013), quando avaliando características de risco e estimando a eficiência, é adequado a utilização do modelo *Fuzzy* DEA, onde a entrada e saída são valores não-específicos.

O modelo *Fuzzy* DEA CCR (FDEA CCR), que admite retorno constante de escala, é apresentado por Emrouznejad e Tavana (2014), conforme o modelo dos multiplicadores (58) – (62):

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q \tilde{y}_{qo} \quad (58)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p \tilde{x}_{po} = 1 \quad (59)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q \tilde{y}_{qi} - \sum_{p=1}^a v_p \tilde{x}_{pi} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (60)$$

$$u_q \geq \varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (61)$$

$$v_p \geq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (62)$$

No qual i representa o índice da DMU, $i = 1, \dots, n$; q é o índice da saída, com $q = 1, \dots, b$; p é o índice da entrada, $p = 1, \dots, a$; y_{qi} é o valor da q -ésima saída para a i -ésima DMU; x_{pi} é o valor da p -ésima entrada para a i -ésima DMU; u_q é o peso associado à q -

ésima saída; v_p é o peso associado à p -ésima entrada; w_o é a eficiência relativa de DMU_o, que é a DMU sob avaliação; e y_{qo} e x_{po} são, respectivamente, dados de saídas e entradas da DMU_o; o símbolo ε é a constante não-aquimediana, ou seja, um número pequeno ou infinitesimal, e \sim representa a imprecisão das variáveis, inserida pela utilização da lógica *Fuzzy* (MIRANDA *et al.*, 2014; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014; SILVA, MARINS e SANTOS, 2014; SILVA, MIRANDA e MARINS, 2015; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015a). Assim como nos demais modelos, caso a DMU apresente um valor de 1, será tida como eficiente, caso contrário, classificada como ineficiente.

A função objetivo (58) pode apresentar um valor de eficiência acima de um ($w_o > 1$) devido às restrições (59) e (60) que envolvem parâmetros *Fuzzy* e são resolvidos utilizando uma probabilidade (LERTWORASIRIKUL *et al.*, 2003, MIRANDA *et al.*, 2014).

Segundo Hatami-Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011), o modelo ainda pode ser representado em sua forma *primal* ou modelo do envelope, representado por (16) - (19), entretanto, o símbolo dado por \sim representa a imprecisão das variáveis, conforme (63) - (66):

$$\min \theta \quad (63)$$

Sujeito a:

$$\theta \tilde{x}_{po} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_{pi} \geq 0 \forall p \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (64)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{y}_{bi} - \tilde{y}_{bo} \geq 0 \forall q \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (65)$$

$$\lambda_i \geq 0 \forall i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (66)$$

Neste caso, o modelo apresentado conforme (58) - (62) foi representado por uma função de pertinência triangular, no qual, segundo Hatami -Marbini, Emrouznejad e Tavana (2011), $\tilde{x}_{pi} = (x_{pi}^l, x_{pi}^m, x_{pi}^u)$ e $\tilde{y}_{qi} = (y_{qi}^l, y_{qi}^m, y_{qi}^u)$ são, respectivamente, as entradas e saídas *Fuzzy* triangulares, e então, o modelo foi reescrito em (67) - (71):

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q (y_{qo}^l, y_{qo}^m, y_{qo}^u) \quad (67)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p (x_{po}^l, x_{po}^m, x_{po}^u) = 1 \quad (68)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q (y_{qi}^l, y_{qi}^m, y_{qi}^u) - \sum_{p=1}^a v_p (x_{pi}^l, x_{pi}^m, x_{pi}^u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (69)$$

$$u_q \geq \varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (70)$$

$$v_p \geq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (71)$$

Agora, segundo Emrouznejad e Tavana (2014), o modelo *Fuzzy* DEA CCR com função de pertinência triangular pode ser transformado em um modelo de programação por intervalos utilizando-se a abordagem de nível- α conforme (72) - (76):

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qo}^l + \alpha y_{qo}^m, (1-\alpha)y_{qo}^u + \alpha y_{qo}^m) \quad (72)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{po}^l + \alpha x_{po}^m, (1-\alpha)x_{po}^u + \alpha x_{po}^m) = 1 \quad (73)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qi}^l + \alpha y_{qi}^m, (1-\alpha)y_{qi}^u + \alpha y_{qi}^m) \quad (74)$$

$$- \sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{pi}^l + \alpha x_{pi}^m, (1-\alpha)x_{pi}^u + \alpha x_{pi}^m) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_q \geq \varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (75)$$

$$v_p \geq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (76)$$

E, por fim, conforme proposto por Kao e Liu (2000), tal modelo pode ser dividido em dois outros modelos, que darão os valores do limite superior, conforme (77) - (81), e inferior de eficiência, conforme (82) - (86).

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qo}^u + \alpha y_{qo}^m) \quad (77)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{po}^u + \alpha x_{po}^m) = 1 \quad (78)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qi}^u + \alpha y_{qi}^m) - \sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{pi}^u + \alpha x_{pi}^m) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (79)$$

$$u_q \geq \varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (80)$$

$$v_p \geq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (81)$$

$$\max w_o = \sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qo}^l + \alpha y_{qo}^m) \quad (82)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{po}^l + \alpha x_{po}^m) = 1 \quad (83)$$

$$\sum_{q=1}^b u_q ((1-\alpha)y_{qi}^l + \alpha y_{qi}^m) - \sum_{p=1}^a v_p ((1-\alpha)x_{pi}^l + \alpha x_{pi}^m) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (84)$$

$$u_q \geq \varepsilon, \quad q = 1, 2, \dots, b \quad (85)$$

$$v_p \geq \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, a \quad (86)$$

O valor de $\alpha \in [0, 1]$ permite a geração de cenários, ou seja, diferentes valores de eficiência, respeitando-se a faixa de variação determinada pela função de pertinência (HATAMI-MARBINI, EMROUZNEJAD e TAVANA, 2011; EMROUZNEJAD e TAVANA, 2014; SILVA, MARINS e SANTOS, 2014).

Na abordagem baseada no nível- α , segundo Silva, Marins e Santos (2014), quando o valor de $\alpha=0$, os valores dos parâmetros estão abaixo da média, ou seja, será o valor do limite inferior da função de pertinência, cenário pessimista (MIRANDA *et al.*, 2014). Contudo, quando o valor dos parâmetros está acima da média, serão exatamente os valores do limite superior da função de pertinência.

Quando o valor de $\alpha=1$, segundo Enrouznejad e Tavana (2014), tem-se um cenário nos qual os valores dos parâmetros de saída e entrada são formados pelos dados médios da função de pertinência, considerando então os valores mais prováveis, ou seja, cenário que desconsidera a incerteza, cenário dito otimista (MIRANDA *et al.* 2014).

Para obtenção do modelo *Fuzzy* DEA BCC, que admite retorno variável de escala, basta ser adicionada a variável irrestrita c_0 à função objetivo e restrição, dadas respectivamente por (58) e (60), no modelo dos multiplicadores. Ou ainda, adicionar a

restrição $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ao modelo do envelope (63) - (66), da mesma forma já apresentada para os modelos clássicos.

2.2. Seleção de portfólios

Hoje, as técnicas quantitativas, como as de previsão de retorno, alocação e otimização de portfólios, medição de risco e rebalanceamento, têm grande presença no mercado financeiro. Sua expansão tem sido possível graças à redução do custo dos esforços computacionais e aumento da disponibilidade e sofisticação dos *softwares*, permitindo que investidores incorporem suas preferências e previsões.

Os conceitos de otimização de portfólio e diversificação têm sido fundamental no entendimento dos mercados financeiros e no desenvolvimento das tomadas de decisão financeiras (FABOZZI *et al.* 2007).

A Figura 6 esboça todas as possíveis carteiras compostas por n títulos. Segundo Ross, Westerfield e Jaffe (2012), a área sombreada representa o conjunto viável quando muitos ativos são considerados. Como no exemplo dado pelos autores, o ponto 1 pode representar um portfólio composto por 40 ativos, enquanto ponto 2 pode ser composto por 50 ativos, e o ponto 3 composto pelos mesmos 50 ativos, se diferenciando do portfólio 2 apenas na proporção de cada ativo. O importante é observar que a área limita o retorno e o desvio padrão obtidos pelo investidor, ou seja, não se pode escolher um portfólio com retorno esperado acima do que é dado pela região sombreada, ou mesmo escolher um portfólio com menor risco.

É interessante observar também que o investidor vai sempre buscar um portfólio entre os pontos MV e X, pontos, respectivamente, com menor desvio-padrão e maior retorno esperado. Tal curva recebe o nome de conjunto eficiente (ROSS, WESTERFIELD e JAFFE, 2012).

Por exemplo, considerando o ponto R pertencente ao conjunto eficiente, e W diretamente abaixo deste; se W contém o nível de risco ao qual o investidor aceita correr, este investidor deve optar por R, já que estará sujeito a um maior retorno esperado, ao mesmo risco.

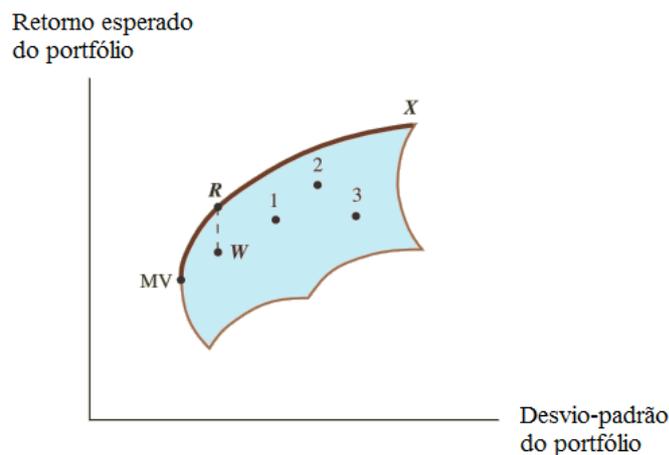


Figura 6- Conjunto viável de portfólios compostos por diversos ativos.

Fonte: Ross, Westerfield e Jaffe (2012).

2.2.1. Risco sistemático e risco diversificável

Dado as informações dos tópicos anteriores, o retorno e risco de um portfólio são de relevância óbvia. Baseado nesta informação, uma forma de expressar o retorno de um ativo qualquer pode ser (87):

$$r = E(r) + U \quad (87)$$

No qual, r é o retorno total do ativo no período, $E(r)$ representa a parte esperada e U representa a parte inesperada do retorno do ativo. O que isto diz é que o retorno real é diferente do retorno esperado por eventos inesperados ou surpresas que podem ocorrer no período. Em um determinado período, o retorno inesperado ou a parte resultante de surpresas e imprevistos, poderá ser positivo ou negativo, se apresentando como verdadeiro risco de qualquer investimento (ROSS, WESTERFIELD e JORDAN, 2008; ROSS, WESTERFIELD e JAFFE, 2012). Afinal, se o investidor recebe exatamente o esperado, o investimento é previsível, por definição, denominado livre de riscos.

Brealey, Myers e Allen (2010) e Ross, Westerfield e Jaffe (2012), definem o primeiro tipo de risco como risco sistemático, sendo o que afeta um grande número de ativos, cada um, em maior ou menor grau. Tem amplo efeito no mercado, às vezes conhecido também por risco de mercado. Tal risco refere-se ao risco de colapso do sistema financeiro, impacto sobre as taxas de juros e câmbio, inflação, e os preços dos ativos em geral (QUIRY *et al.*, 2009).

O segundo tipo de surpresa é chamado risco não sistemático, afetando um único ativo ou mesmo um pequeno grupo de ativos. Como são exclusivos para determinadas empresas ou ativos, é conhecido por risco específico, único ou diversificável (FABOZZI e PETERSON, 2003; QUIRY *et al.*, 2009; BREALEY, MYERS e ALLEN, 2010; ROSS, WESTERFIELD e JAFFE, 2012).

A distinção entre os dois tipos de risco permite a quebra de U , parte inesperada do retorno, em duas partes. Então, a partir de (87) se obtém (88).

$$r = E(r) + m + \varepsilon \quad (88)$$

Sendo, por convenção, ε a parcela de risco não sistemático, parcela esta que, segundo Brealey, Myers e Allen (2010) e Kim *et al.* (2015), pode ser potencialmente eliminada pela diversificação; e m responde pela parcela de risco sistemática ou risco de mercado (*market risks*), por isso a letra m (ROSS *et al.*, 2010).

Sabe-se agora que ε é a parcela não sistemática do risco, sendo possivelmente única para um dado ativo. Por esta razão, de acordo com Ross *et al.* (2010), não está relacionada com a parcela não sistemática da maioria dos outros ativos.

2.2.2. Diversificação

Em (88), uma vez que os valores de ε de um ativo podem compensar ao outro, o risco não sistemático de um portfólio será menor do que o risco não sistemático de qualquer um dos dois títulos (ROSS *et al.*, 2012), em outras palavras, vemos aqui o efeito da diversificação. E este efeito continua com a adição de um terceiro, quarto ou n -ésimo ativo ao portfólio, reduzindo o risco não sistemático à adição de cada ativo.

Segundo Ross *et al.* (2010), parte do risco associado a um único ativo pode ser eliminado pela formação de portfólios, proporcionando o efeito da diversificação. A Figura 7 representa a diversificação e risco de um portfólio composto por ativos com pesos iguais, no qual (a) é o risco total, (b) o risco não sistemático e (c) o risco de mercado.

O risco total cai à medida que se aumenta o número de ativos que compõem o portfólio. Pode-se observar que o risco sistemático (c) não é afetado pela diversificação. Já, segundo Ross, Westerfield e Jaffe (2012) pode-se dizer que a média ponderada do

risco não sistemático (b) tende a zero quando o número de ativos com pesos iguais numa carteira vai para o infinito.

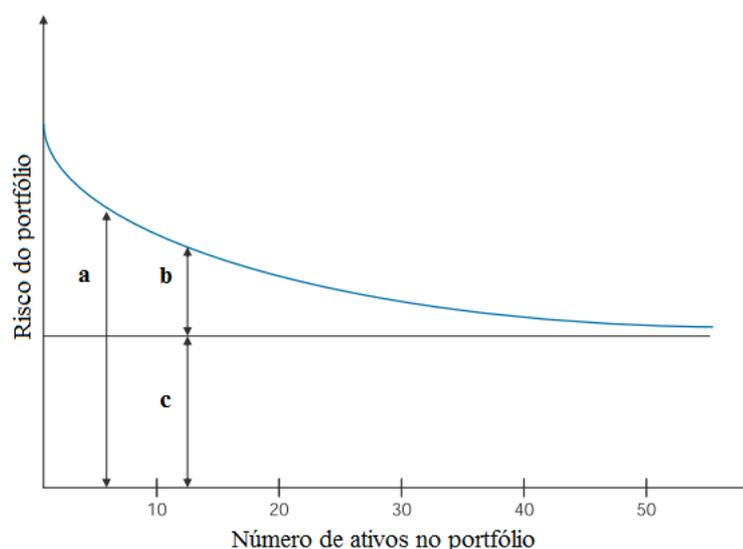


Figura 7- Efeito da diversificação.

Fonte: Quiry *et al.* (2009), Brealey, Myers e Allen (2010) e Ross, Westerfield e Jaffe (2012).

2.2.3. Modelo de Markowitz

Rubinstein (2002) afirma que o trabalho proposto por Markowitz foi a primeira formalização matemática da diversificação de investimentos: “*the whole is greater than the sum of its parts*”, ou seja, o todo é maior do que a soma de suas partes. Por meio da diversificação, o risco pode ser reduzido (geralmente não totalmente eliminado), sem alterar o retorno esperado do portfólio.

Ainda, segundo o autor, o aspecto mais importante do trabalho desenvolvido por Markowitz (1952) foi o de mostrar que o importante para o investidor não é o risco de um único ativo, mas sim a contribuição deste ativo para a variância do portfólio. E, esta é uma questão de sua covariância com os demais ativos que compõem o portfólio.

Então, a diversificação reduz o risco do portfólio, por meio de investimentos em ativos independentes um do outro, ou seja, aproveita ativos com baixa correlação (KIM *et al.*, 2015).

Markowitz (1952) introduziu uma estrutura de otimização de portfólios com base em uma relação de risco e retorno (média-variância), ou seja, um contexto baseado em dois critérios. Os princípios introduzidos por meio deste modelo ainda são o cerne

de muitas abordagens modernas para alocação de ativos, análise de investimentos, gestão de risco, orçamento de capital e tomada de decisão sob condições de incerteza (LEUNG, NG e WONG, 2012; ZOPOUNIDIS, DOUMPOS e FABOZZI, 2014; LEVY e LEVY, 2014; MANSINI, OGRYCZAK e SPERANZA, 2014; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015a).

Os conceitos de otimização de portfólios expressados por Markowitz (1952) e de forma mais completa por Markowitz (1959) têm sido fundamental para o desenvolvimento e compreensão de mercados financeiros e tomada de decisão sobre investimentos (BEN ABDELAZIZ, AOUNI e EL FAYEDH, 2007; KOLM, TUTUNCU e FABOZZI, 2014; MARKOWITZ, 2014; PALCZEWSKI e PALCZEWSKI, 2014; KIM *et al.*, 2015), e provavelmente é a regra de investimento mais comumente empregada por acadêmicos e investidores profissionais. Dai a imensa pesquisa sobre as implicações teóricas e práticas sobre o paradigma de média-variância (FABOZZI *et al.* 2007; LEUNG, NG e WONG, 2012; LEVY e LEVY, 2014), tanto que Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014) afirmam que aproximadamente 19.016 artigos encontrados no Google Scholar citam o trabalho original “*Portfolio Selection*” de Markowitz (1952), e quando se busca a expressão “*Modern portfolio theory*”, aproximadamente 590.000 resultados são exibidos, além de 217 livros no *site* da Amazon.

Segundo Rubinstein (2002), Ben Abdelaziz, Aouni e El Fayedh (2007) e Leung, Ng e Wong (2012), o modelo proposto por Markowitz (1952, 1959), na qual a seleção de portfólio é baseada em um modelo de investimentos de período simples, é considerado um marco na teoria moderna de finanças para a construção de uma carteira ótima, alocação de ativos e diversificação de investimentos.

Considerando um investimento composto por n ativos S_1, S_2, \dots, S_n que no futuro darão retornos totais r_1, r_2, \dots, r_n , pode-se representar o vetor destes retornos como $r = [r_1, \dots, r_n]^T$. O portfólio será representado pelo vetor $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$, no qual ω representa a proporção do total de fundos investidos no ativo i , sendo $\omega_i > 0$. Então, conforme Sharpe (1963) e Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014), o retorno total e incerto do portfólio (r_p) depende linearmente dos pesos dos investimentos feitos em cada ativo, conforme (89):

$$r_p(\omega) = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \dots + \omega_n r_n = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i = \omega^T r \quad (89)$$

Considerando σ_i o desvio-padrão de r_i , ρ_{ij} representa o coeficiente de correlação entre os retornos dos ativos S_i e S_j , e Ψ representa a matriz ($n \times n$) de covariância do retorno de todos os ativos, conforme (90), no qual, para todo $i \neq j$, assume-se que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, e que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ (DAMODARAN, 2012; KOLM, TUTUNCU e FABOZZI, 2014). Segundo Brealey, Myers e Allen (2010) a diversificação de uma carteira funciona porque os retornos de diferentes ativos não se movem exatamente juntos, ou seja, os ativos podem estar não correlacionados ou correlacionados negativamente. Conforme se pode observar na Figura 8, o coeficiente de correlação ρ_{ij} entre os ativos S_i e S_j , pode ser igual a 1, ou seja, correlação positiva perfeita (a), -1 representando uma correlação negativa perfeita (b) ou igual 0, no qual a correlação é nula (c). O efeito da diversificação é aplicado sempre que existe um valor menor do que uma correlação perfeita ($\rho_{ij} < 1$) (ROSS, WESTERFIELD e JAFFE, 2012).

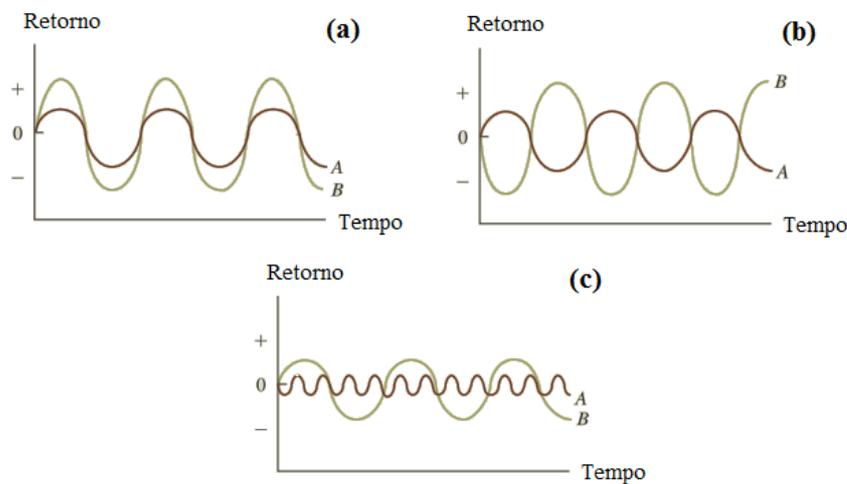


Figura 8- Exemplo de coeficientes de correlação diferentes.

Fonte: Adaptado de Ross *et al.* (2010) e Ross, Westerfield e Jaffé (2012).

$$\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (90)$$

Para um dado portfólio ω , pode-se representar a variância e o desvio padrão, respectivamente, conforme (91) - (92).

$$V(\omega) = \omega^T \psi \omega \quad (91)$$

$$\sigma(\omega) = \sqrt{\omega^T \psi \omega} \quad (92)$$

O desvio-padrão do retorno do portfólio, dado por $\sigma(\omega)$, refere-se à volatilidade do portfólio, usada como medida de risco do portfólio ω .

Pode-se ainda representar os retornos esperados dos títulos como $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$, no qual, $\mu_i = E(r_i)$ para todo $i=1, \dots, n$.

Supondo Φ , subconjunto dos \mathbb{R}^n , denota um conjunto de permissões de uma carteira em particular, ou seja, $\omega \in \Phi$, isto significa que os pesos alocados a cada ativo que compõem o portfólio devem satisfazer algumas restrições impostas a este portfólio. Então, utilizando tal notação, um problema de média-variância pode ser representado conforme (93):

$$\max_{\omega \in \Phi} \mu^T \omega - \lambda \omega^T \psi \omega \quad (93)$$

No qual, $\lambda \in (0, \infty)$ representa o coeficiente de aversão do investidor ao risco, um parâmetro que determina a troca entre o retorno esperado do portfólio e seu risco. Um maior o valor de λ indica investidores com maior aversão ao risco.

Fabozzi *et al.* (2007) e Leung, Ng e Wong (2012) definem o modelo de média-variância, utilizado por acadêmicos e investidores, como um modelo no qual o objetivo é encontrar pesos ótimos que maximizam o retorno do portfólio tomando um valor específico de risco, dado por σ_{\max}^2 .

Segundo Kim, Kim e Fabozzi (2014) e Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014), formulações para um problema de otimização média-variância podem ser obtidos pela minimização da variância do portfólio sujeito a um mínimo valor de retorno esperado (R_{\min}), ou também pela maximização do retorno esperado sujeito restrição de um valor determinado para a variância do portfólio, respectivamente, conforme (94)-(95) e (96)-(97).

$$\min_{\omega \in \Phi} \omega^T \psi \omega \quad (94)$$

Sujeito a:

$$\mu^T \omega \geq R_{\min} \quad (95)$$

$$\max_{\omega \in \Phi} \mu^T \omega \quad (96)$$

Sujeito a:

$$\omega^T \Psi \omega \leq \sigma_{\max}^2 \quad (97)$$

Fabozzi *et al.* (2007), Leung, Ng e Wong (2012) e Rotela Junior *et al.* (2015a), como Markowitz (1952), ainda sugerem a inserção da restrição dada por (98), no qual se assume o peso total do portfólio, no qual ι é um vetor de uns.

$$\omega^T \iota = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (98)$$

De acordo com Sharpe (1963) e Frankfurter, Philips e Seagle (1976), o modelo proposto por Markowitz (1952), dado por (96) - (98), é operacionalizado por técnicas de Programação Quadrática, cujo objetivo é otimização de carteiras levando-se em conta o vetor de médias (μ), a matriz de variância e covariância (Ψ) dos retornos esperados das ações, que são opções a fazerem parte da carteira, sendo estes parâmetros estimados a partir de informações de séries históricas.

Markowitz (1952) sugeriu que o processo de seleção carteiras deve ser abordado por fazer estimativas probabilísticas do desempenho futuro de ativos, a análise dessas estimativas para determinar um conjunto eficiente de carteiras e a seleção que prevê as carteiras que melhor se adaptam às preferências do investidor.

De acordo com Sharpe (1963), Markowitz (1952) criou um algoritmo que otimiza carteiras a partir dos portfólios das extremidades (*corner portfolios*), no qual tal algoritmo se baseia no ativo de maior retorno esperado e o toma como primeiro *corner portfolio*, e a partir desta, o modelo otimiza as demais carteiras. Definido o conjunto dos portfólios das extremidades, é traçada a curva da fronteira eficiente, tendo início na carteira de maior retorno. E, os portfólios situados entre os das extremidades são considerados eficientes.

2.2.4. Modelo de Sharpe

Para Sharpe (1963) a quantidade de recursos computacionais para realizar a análise de um portfólio, utilizando o método apresentado, está relacionada com os

seguintes fatores: o número de títulos analisados, fato que irá afetar a extensão do modelo computacional; o número de *corner portfolios*; e a complexidade a matriz de variância e covariância.

Segundo Darolles e Gourieroux (2010), Sharpe (1963) estendeu o trabalho de Markowitz (1952), apresentando um modelo simplificado das relações entre ativos, oferecendo evidências sobre custos, bem como a conveniência de usar o modelo para aplicações práticas. “O modelo tem duas virtudes: é o mais simples que pode ser construído sem deixar de supor a existência de algum tipo de relação entre os títulos e há evidências de que este modelo captura boa parte dessas relações” (SHARPE, 1963, p. 281).

Então, o modelo de Sharpe (1963), é baseado no modelo proposto por Markowitz (1952), mas assume uma hipótese mais simples, a de que os retornos de vários títulos se relacionam apenas por meio de relações comuns com algum tipo de fator básico subjacente, que não se manifesta claramente (SHARPE, 1963). Ou seja, os retornos entre os ativos não estão correlacionados entre si, mas sim com um único índice representativo dos retornos de todo o mercado (ZANINI e FIGUEIREDO, 2005), conforme (99):

$$r_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \quad (99)$$

No qual, R_m é o nível de retorno de um índice qualquer, por exemplo, a taxa de retorno do mercado; ε é o erro padrão aleatório do modelo desenvolvido por Sharpe, sendo uma variável aleatória independente de média zero e variância σ_i^2 ; α_i é o componente do retorno do ativo i que é independente do desempenho do mercado, uma variável aleatória; e β_i mede a expectativa de mudança no retorno do ativo i dada uma mudança no R_m .

Outro pressuposto feito por Sharpe (1963) é que o valor futuro de R_m é, em partes, determinado por fatores aleatórios, conforme (100):

$$r_i = \alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \quad (100)$$

Sendo, α_{n+1} um parâmetro e ε_{n+1} uma variável aleatória independente de média zero e variância σ_{n+1}^2 . Neste caso, assumiu-se que a covariância entre ε_i e ε_j é zero sempre que $i \neq j$.

Então, como demonstrado por Sharpe (1963), o retorno obtido por um portfólio pode ser considerado o resultado de (i) uma série de investimentos em n ativos e (ii) um investimento no índice, conforme (101). Definido ω_{n+1} como média ponderada que é responsável pelo resultado de r_p para um dado valor de R_m , tem-se (102). Substituindo (101) - (102) em (89), tem-se (103):

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i (\alpha_i + \varepsilon_i) + \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i \right] R_m \quad (101)$$

$$\omega_{n+1} = \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i \quad (102)$$

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i (\alpha_i + \varepsilon_i) + \omega_{n+1} (\alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i (\alpha_i + \varepsilon_i) \quad (103)$$

Para Frankfurter, Philips e Seagle (1976), tal pressuposto limita o leque de possíveis retornos, mas oferece uma grande vantagem, a de propor um modelo simplificado para otimização de portfólios, apresentado por (104) - (105):

$$\max \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^2 \sigma_i^2 \quad (104)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (105)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i = \omega_{n+1} \quad (106)$$

$$\omega_i \geq 0 \forall i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (107)$$

Esta formulação indica a razão para o uso dos parâmetros α_{n+1} e σ_{n+1}^2 para descrever o valor esperado e a variância do futuro valor de R_m . O fato também indica a razão para chamar isto de modelo diagonal. A matriz de variância e covariância, que é completa quando n ativos são considerados, pode ser expressa como uma matriz com valores diferentes de zero apenas ao longo da diagonal, incluindo uma $(n+1)$ -ésimo ativo, definido como indicado (SHARPE, 1963). Isto reduz drasticamente o número de cálculos necessários para resolver o problema de análise de portfólio, permitindo que o

problema seja reconhecido diretamente em termos dos parâmetros básicos do modelo diagonal.

2.2.5. Modelos robustos de otimização de portfólios

Pesquisadores têm utilizado a base da teoria desenvolvida por Markowitz (1952) para apresentarem novas propostas e variações da consagrada teoria, como as apresentados por Zakamouline e Koekebakker (2009), Leung, Ng e Wong (2012), Markowitz (2014), Simaan (2014), Levy e Levy (2014), Kolm, Tutuncu e Fabozzi (2014), Palczewski e Palczewski, Bernard e Vanduffel (2014) e Grechuk e Zabarankin (2014), ou ainda, modelos mais sofisticados que utilizam extensões multiperiódicas ou dinâmicas, como os de Bae, Kim e Mulvey (2014), Cui *et al.* (2014), Utz *et al.* (2014), Aouni, Colapinto e La Torre (2014) e Smimou (2014).

As soluções para a otimização de portfólios muitas vezes são influenciadas por uma má especificação dos modelos ou por erros devido à aproximação, estimativa ou ainda informações incompletas. Como demonstrado por Black e Litterman (1992), uma pequena variação no retorno esperado dos ativos pode resultar em uma grande alteração na alocação dos investimentos no portfólio ótimo. Ou seja, os modelos clássicos da otimização de portfólios não são robustos, pois são suscetíveis a pequenas variações nas entradas de dados (KIM *et al.*, 2015). De fato, Kim, Kim e Fabozzi (2014) afirmam que o principal ponto de questionamento documentado sobre o modelo de Markowitz (1952), é sua alta sensibilidade resultante de uma pequena variação de suas entradas.

Recentemente os pesquisadores começaram a incorporar a incerteza por erros de estimativa diretamente no processo de otimização do portfólio, por meio de técnicas matemáticas que se referem à otimização robusta. Então, diferentemente da abordagem tradicional, no qual as entradas para a estrutura de alocação de portfólio são tratadas como determinísticas, a otimização robusta de portfólio incorpora a noção de que tais entradas foram estimadas com erros (FABOZZI *et al.*, 2007; FABOZZI, HUANG e ZHOU, 2010; SANTOS, 2010). Neste caso, as entradas, tais como retorno esperado e covariância dos ativos, não são previsões tradicionais, mas sim conjuntos de incertezas, por exemplo, intervalos de confiança (SANTOS, 2010).

Antes da criação da otimização robusta, a aleatoriedade nos dados foi moldada utilizando a programação estocástica (BIRGE e LOUVEAUX, 1997). Outros métodos

como estimadores robustos (*robust estimators*), técnicas de reamostragem (*bootstrapping*) ou abordagens Bayesianas (*Bayesian approaches*) são desenvolvidos para melhorar a estabilidade (FABOZZI *et al.*, 2007; KIM, KIM e FABOZZI, 2014).

Uma maneira de tornar um problema de otimização em robusto, com relação aos erros de estimativa, é se exigir que a solução ótima permaneça ótima para todos os valores do retorno esperado que estejam próximos das estimativas de retorno esperado $\hat{\mu}$. Então, pode-se expressar tal exigência no problema de otimização da seguinte maneira: em vez de utilizar o valor estimado $\hat{\mu}$ de μ , considera-se um conjunto de vetores que estão próximos do estimado $\hat{\mu}$, e resolve-se o problema de otimização para todos os vetores do conjunto (FABOZZI *et al.*, 2007).

A ideia é que o retorno esperado seja estimado considerando a aleatoriedade dos dados, algum erro, mas o valor estimado não pode ser muito distante do valor esperado. Segundo Fabozzi *et al.* (2007), matematicamente, esta ideia é incorporada na definição de conjunto sob condições de incerteza para $\hat{\mu}$, conforme (108):

$$U_{\delta}(\hat{\mu}) = \left\{ \mu \mid \left| \mu_i - \hat{\mu}_i \right| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (108)$$

No qual, o conjunto $U_{\delta}(\hat{\mu})$ inclui todos os vetores $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$, em que cada componente μ_i está no intervalo $\left[\hat{\mu}_i - \delta_i, \hat{\mu}_i + \delta_i \right]$. Do ponto de vista estatístico, ainda segundo os autores, este intervalo pode ser escolhido para ser o intervalo de confiança para cada valor estimado μ_i .

Então, segundo Kim, Kim e Fabozzi (2014), a proposta foi realizar uma modificação no modelo de Markowitz (1952), de forma que, mesmo que μ assuma um valor pessimista dentro do conjunto sob condições de incerteza, a alocação permanecerá ótima. Para isso, deve-se resolver o problema *max-min*, proposto por Halldórsson e Tutuncu (2003), dado conforme (109) - (110):

$$\max_{\omega} \left\{ \min_{\mu \in U_{\delta}(\hat{\mu})} \left\{ \mu^T \omega \right\} - \lambda \omega^T \psi \omega \right\} \quad (109)$$

Sujeito a:

$$\omega^T \iota = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (110)$$

O problema pode ser reformulado em sua forma equivalente, a versão clássica do problema de otimização robusta de portfólios, conforme apresentado em maiores detalhes no trabalho de Fabozzi *et al.* (2007), representado por (111) - (112). Sendo que, $|\omega|$ indica o valor absoluto das entradas do vetor de pesos ω (KIM, KIM e FABOZZI, 2014).

$$\max_{\omega} \hat{\mu}^T \omega - \delta^T |\omega| - \lambda \omega^T \psi \omega \quad (111)$$

Sujeito a:

$$\omega^T \iota = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (112)$$

No portfólio, caso o peso de um dado ativo i seja negativo, o retorno esperado em pior caso para o ativo i é $\hat{\mu}_i + \delta_i$, então, se perde o maior quantidade possível. Se o peso do ativo i for positivo, o pior caso de retorno esperado para o ativo i é $\hat{\mu}_i - \delta_i$, ou seja, se ganha o menor valor possível (FABOZZI *et al.*, 2007). Os autores ainda observam que $\hat{\mu}_i \omega_i - \delta_i |\omega_i| = \left(\hat{\mu}_i - \delta_i \right) \omega_i$, quando ω_i é positivo, e $\hat{\mu}_i \omega_i - \delta_i |\omega_i| = \left(\hat{\mu}_i + \delta_i \right) \omega_i$, quando ω_i é negativo. Então, nesta versão robusta, os ativos cujas médias de retorno são menos precisas (tem maior erro de estimação δ_i) serão penalizados na função objetivo, e tendem a ter menor peso na alocação da carteira ótima.

Como o modelo apresentado por (111) - (112) é de mesma complexidade do modelo de Markowitz (1952), Fabozzi *et al.* (2007) ainda propuseram a substituição dos valores absolutos de pesos, dados por $|\omega_i|$ por um vetor de dimensão n dado por Υ , chegando então ao modelo conforme (113) - (115). O modelo dito robusto reduz o retorno esperado de ativos com grande erro de estimação.

$$\max_{\omega} \mu^T \omega - \delta^T \Upsilon - \lambda \omega^T \psi \omega \quad (113)$$

Sujeito a:

$$\omega^T \iota = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (114)$$

$$\Upsilon_i \geq \omega_i; \Upsilon_i \geq -\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (115)$$

2.2.6. Abordagem de períodos de baixa do mercado

A otimização robusta foi desenvolvida para resolver problemas onde há incerteza no ambiente de decisão, e, portanto, é muitas vezes referida como otimização sob condições de incerteza, como os modelos mais recentes apresentados por Fabozzi, Huang e Zhou (2010), Kim *et al.* (2014), Fliege e Werner (2014), Dupavová e Kopa (2014) e Kapsos, Christofides e Rustem (2014).

Tem sido relatado que a correlação entre ativos financeiros aumenta durante baixas do mercado (*bear market*). E o mercado acionário não é diferente, é o que afirmam autores como Campbell, Koedijk e Kofman (2002) e Kim *et al.* (2015). De diferentes formas, trabalhos como o de Yang e Bessler (2008) que avaliaram o *crash* ou quebra do mercado em 1987, ou o trabalho de Silvapulle e Granger (2001) que utilizaram ações negociadas no mercado americano para confirmar maior correlação quando os retornos do mercado são negativos. Os investidores não podem se beneficiar do efeito da diversificação quando ele é mais necessário. E, para piorar as coisas, a correlação dentro do mercado de capitais tem aumentado ao longo de períodos mais recentes (KIM *et al.*, 2015).

Como dito anteriormente, a alocação proposta por um modelo de otimização é dada a partir de pontos extremos de uma região viável, o que faz com que o modelo seja sensível a alterações nos parâmetros de entrada. Uma vez que as variáveis de entrada são estimadas a partir de dados históricos, estas podem não refletir bem o mercado futuro. Então, como as ações durante períodos de crise se apresentam mais positivamente correlacionadas, modelos como o de Markowitz (1952) podem não ser adequados para proteger investidores.

Para superar este problema, duas soluções têm sido apresentadas: empregar variáveis de entrada menos sensíveis aos dados históricos ou inserir conjuntos de

incerteza sobre os parâmetros de entrada nos modelos tradicionais e em seguida reformular os modelos a fim de obter a melhor solução de pior caso (problemas *max-min*), conforme detalhado anteriormente na abordagem proposta por Fabozzi *et al.* (2007).

No trabalho proposto por Kim *et al.* (2015), estes fazem a suposição de que o mercado pode ser dividido em vários estados, cada um com características próprias, o que, segundo os autores, não é uma suposição nova, já tendo sido feita por Turner, Startz e Nelson (1989), Chu, Santoni e Liu (1996) e Schaller e Van Norden (1997). Entretanto, o interesse dos autores não foi o de detalhar o comportamento de cada um dos possíveis estados, mas sim o de encontrar um portfólio estático ideal.

A proposição provada por Kim *et al.* (2015, p. 4) é a de que “quando vários estados existem em um mercado, o portfólio estático de média-variância ideal para um investidor avesso ao risco é o portfólio robusto, no qual seu retorno esperado é constante em todos os estados”.

Entre as várias abordagens para aumentar a robustez do modelo de média-variância, a otimização robusta de portfólios aplica técnicas de otimização robusta para alocação por meio da solução de problemas *max-min*. Segundo Kim *et al.* (2015), apesar da otimização de pior caso parecer ser uma extensão natural do modelo de média-variância para alcançar a robustez, não houve uma análise mais aprofundada sobre o valor de se concentrar sobre as piores situações de mercado.

Assim, em concordância com Kim, Kim e Fabozzi (2014), a principal contribuição do trabalho de Kim *et al.* (2015) é a de demonstrar a importância das informações de retorno de ações em dias com pior desempenho para alcançar um portfólio considerado robusto. Em outras palavras, em vez de selecionar ativos que sempre tem um bom desempenho, tanto em momentos de baixa (*bear market*) quanto em alta da bolsa (*bull market*), considera-se ativos que tem bom desempenho especialmente em períodos de baixa. Embora diversos trabalhos nessa área foquem a estrutura de conjuntos de incerteza, Bertsimas e Sim (2004) já haviam confirmado uma relação entre o aumento do retorno de um portfólio, formado a partir de informações de períodos de baixa do mercado, e o aumento da robustez.

Kim *et al.* (2015), em uma análise de diversos setores da indústria dos EUA, Reino Unido e Japão, observando informações contidas em melhores e piores períodos, encontraram evidências de que ao se enfatizar em eventos extremos de cauda esquerda (valores abaixo da média), resulta-se na construção de portfólios com desempenho mais robusto do que portfólios construídos em melhor caso, bem como carteiras de média-variância sem informação de estado.

Para construção de tais portfólios, os autores coletaram retornos diários de ativos em um período de j anos, iniciando em 1973, e ordenaram o índice de mercado do menor para o maior retorno durante o período de j anos. Então os retornos diários foram divididos em n grupos, neste caso, por opção dos autores, em 10 grupos. Logo, o primeiro dos grupos pode ser considerado o de estado de baixa (*worst-state*) e o último grupo, como de melhor estado (*best-state*). Os retornos diários dos ativos do primeiro grupo ($1/n$ do total de dias, com os mais baixos retornos do índice de mercado) foram usados para construir os portfólios de pior caso (*worst-case*). Da mesma forma, o n -ésimo grupo ($1/n$ do total de dias, com os melhores retornos do índice de mercado) foi utilizado para formar os portfólios de melhor caso (*best-case*). E, por fim, para a construção dos portfólios sem conhecimento dos estados, utilizou-se a abordagem de média-variância. Então os portfólios foram testados em vários estados do mercado.

A observação feita prevê argumentos de que a construção de portfólios em períodos de desaceleração do mercado alcança a robustez. E, os autores acreditam que a robustez dos modelos de portfólios robustos, otimizados por meio da abordagem *max-min*, é provavelmente alcançada apostando-se sistematicamente na informação de períodos de baixa do mercado (KIM *et al.*, 2015).

Outra valiosa contribuição da pesquisa desenvolvida por Kim *et al.* (2015) é a afirmação de que, durante períodos de crise (*market crashes*), ativos com um baixo beta reduzem o risco geral do portfólio e oferecem melhores retornos do que os ativos que possuem beta mais alto.

2.2.7. Índice Sharpe

As medidas de desempenho são ferramentas importantes para as tomadas de decisão de gestão. Tais decisões podem, por exemplo, classificar oportunidades de investimento (HOMM e PIGORSCH, 2012).

O índice Sharpe (*Sharpe Ratio*), proposto inicialmente por Sharpe (1966) e depois discutido novamente por Sharpe (1994), é a mais comum e usada métrica para medir e comparar o desempenho de portfólios (FARINELLI *et al.*, 2008; ZAKAMOULINE, KOEKEBAKKER, 2009; HOMM e PIGORSCH, 2012; SCHUSTER e AUER, 2012; SCHUHMACHER e ELING, 2012; AUER e SCHUHMACHER, 2013).

Segundo Sharpe (1994), sendo, R_{at} o retorno de um fundo qualquer no período t , R_{mt} o retorno de um portfólio *benchmark*, ou mesmo de taxa de retorno do mercado no período t , e d_t pode ser a diferença entre tais retornos, conforme (116):

$$d_t = R_{at} - R_{mt} \quad (116)$$

Sendo \bar{d} o valor médio de d_t , com base nos dados históricos, no qual $t=1, \dots, T$, então, tem-se (117):

$$\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_t \quad (117)$$

E, o desvio padrão σ_d no período pode ser dado por (118):

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (d_t - \bar{d})^2}{T-1}} \quad (118)$$

Então, o índice Sharpe (*Sharpe Ratio*), dado por S_R , e com base em dados históricos, pode ser representado conforme (119). Sendo então uma medida significativa do desempenho do portfólio quando o risco pode ser medido, de forma adequada, pelo desvio-padrão (FARINELLI *et al.*, 2008; ZAKAMOULINE e KOEKEBAKKER, 2009). Pode ser definido, de forma simples, como a razão entre a média e o desvio padrão do excesso de retorno esperado de uma oportunidade de investimento, ou seja, definido como uma razão entre recompensa e risco (*reward-to-risk*) (HOMM e PIGORSCH, 2012; SCHUSTER e AUER, 2012).

$$S_R = \sqrt{\frac{\bar{d}}{\sigma_d}} \quad (119)$$

Durante certo tempo, autores como Farinelli *et al.* (2008) Zakamouline e Koekebakker (2009) e Homm e Pigorsch (2012), consideravam que o índice Sharpe não era a métrica mais adequada para medir o desempenho. A justificativa para isso é de que tal medida só pode ser utilizada quando o excesso de retornos é normalmente distribuído. Autores como Eling e Schuhmacher (2007) e Auer e Schuhmacher (2013) contrariam tal teoria, afirmando que se trata de uma medida confiável, até mesmo para fundos de investimentos, mesmo que dificilmente apresentem retornos normalmente distribuídos. Em meio a tal discussão, o índice Sharpe (S_R) continua sendo a métrica mais utilizada (AUER e SCHUHMACHER, 2013).

3. MÉTODO PROPOSTO

Os modelos utilizados na prática da seleção de ativos para formação de portfólios, como visto no Capítulo 2, têm como base o modelo proposto por Markowitz (1952). No que se observou na literatura, mesmo os modelos ditos robustos são originados a partir do clássico modelo de média e variância. Outra informação valiosa, contida no capítulo anterior, é a afirmação de que os modelos de otimização robusta alcançam a desejada robustez se concentrando nas informações de períodos de baixa do mercado, ou seja, em eventos extremos de cauda esquerda de uma distribuição. No que diz respeito à DEA, esta é uma ferramenta de estudo da Pesquisa Operacional que permite, por meio de métodos não paramétricos, a medição da eficiência de unidades tomadoras de decisão, que se distinguem pela quantidade de *inputs* que utilizam e *outputs* que produzem. Além disso, uma série de propostas tem sido elaborada a fim de incorporar risco e incerteza nos modelos DEA.

Em função de tais constatações, este capítulo apresenta uma nova estratégia para a formação de portfólios robustos, utilizando para isso, um modelo de análise estocástica da eficiência. Partindo-se dessa observação, o modelo de Análise Envoltória de Dados (DEA) associado à Programação Restringida por Chances, modelo este que considera a incerteza e risco, será utilizado em conjunto com o agrupamento hierárquico, os quais associados, podem ser alternativas, diminuindo o espaço amostral, selecionando então, dentre um conjunto maior, um número menor de ativos dados como eficientes, para então serem otimizados em um modelo de alocação de ativos. Diferente dos modelos de média e variância, tal modelo permite incorporar outras variáveis que representem os interesses dos investidores. E, ainda pode-se optar por abastecer tal modelo com informações de períodos de baixa do mercado, alcançando uma maior robustez. Por fim, o modelo proposto será validado e comparado a outras abordagens disponíveis na literatura.

3.1. Estudos preliminares

Para aquisição de conhecimento sobre os modelos da Análise Envoltória de Dados (DEA), dos clássicos ao estocástico, e sua aplicabilidade na formação de portfólios, estudos preliminares foram propostos.

Iniciou-se com a aplicação do modelo clássico da DEA associado ao consagrado modelo da alocação de ativos. Testada a aplicabilidade dos modelos, optou-se por tentar incorporar a incerteza e risco, por meio de uma função de pertinência triangular na associação da Análise Envoltória de Dados e da Lógica *Fuzzy* na otimização de portfólios. Por fim, testou-se a viabilidade de utilização de um modelo DEA estocástico na redução do espaço de busca para a formação de portfólios. E, os resultados dos estudos preliminares serão aqui apresentados e discutidos.

3.1.1. DEA na otimização de portfólios

Em um primeiro momento, o propósito foi o de verificar se a Análise Envoltória de Dados (DEA) poderia ser utilizada como uma ferramenta no auxílio à tomada de decisão anteriormente à alocação dos ativos. Então, analisou-se o comportamento de um portfólio de ativos selecionados por meio da DEA, otimizado pela abordagem de Sharpe, e o comparou-se a dois outros portfólios, um deles obtido por meio da abordagem de Sharpe e outro por meio da DEA.

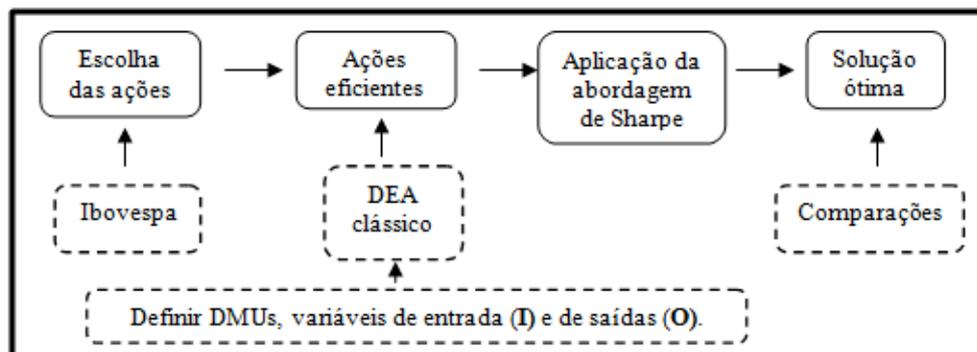


Figura 9- Fluxograma da aplicação DEA na seleção de portfólios.

Aqui se descreve um método para seleção de portfólios aplicando o conceito proposto por Sharpe, com a incorporação de modelos matemáticos da PO, já comentados anteriormente. A Figura 9 apresenta os passos que serão seguidos para condução desta etapa da pesquisa.

Utilizou-se a base científica desenvolvida por Markowitz (1952) para propor um método para seleção de portfólios de investimentos no mercado de ações. Entretanto, para a seleção dos ativos eficientes, foi utilizado um clássico modelo DEA.

Neste caso, a amostra inicial foi constituída por ações de empresas de capital aberta da Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa), obtidas por meio de consultas ao banco de dados do *software* Economática[®]. Nesta etapa da pesquisa, optou-se pelas 40 empresas com maior participação no Ibovespa (Índice Bovespa), sejam estes ativos do tipo ON ou PN.

Após a definição da amostra, determinou-se o conjunto de indicadores de entrada e saída (*inputs* e *outputs*) utilizados na análise de eficiência por meio do modelo DEA. Para a modelagem deste modelo DEA, utilizou-se o *software* Microsoft Excel[®] e seu suplemento *Solver*.

Utilizou-se os trabalhos de Powers e McMullen (2000), Lopes, Lanzer e Lima (2006) e Lopes, Carneiro e Schneider (2010) como base para a definição de indicadores. Esses autores propõem que os indicadores de retorno de um, dois e três anos e lucro por ação compõem o conjunto de *outputs*, enquanto os indicadores como Beta (60 meses), preço/lucro e volatilidade (36 meses) compõem o conjunto de *inputs*. Segundo Powers e McMullen (2000), os indicadores buscam ativos que proporcionem os maiores valores de retornos e lucro por ação enquanto apresentam o menor preço/lucro e risco.

Analisando-se os trabalhos citados, verificou-se que os indicadores associados ao risco, Beta (60 meses) e volatilidade (36 meses), poderiam trazer informações imprecisas sobre o risco associado às carteiras comparativamente ao período abrangido pela rentabilidade. Visando fornecer ao modelo variáveis de entrada (*inputs*) que reflitam o risco associado aos períodos dos retornos analisados, propôs-se utilizar como indicadores de risco a volatilidade das ações selecionadas em prazos iguais aos utilizados nos retornos, em janelas de 12 meses, ou seja, anos 1, 2 e 3. Utilizando-se períodos iguais para risco e retorno, pretende-se, assim, fornecer ao modelo, variáveis de entrada (*inputs*) equivalentes quanto ao período das observações. Acreditou-se que essa modificação no conjunto de indicadores da medida de risco pode trazer informações que permitirão ao modelo DEA selecionar ativos avaliados comparativamente como eficientes.

Ao decidir quais atributos devem ser classificados como *outputs* ou *inputs*, optou-se em favor do tratamento dos atributos com benefícios como saídas e o tratamento de atributos com custos como entradas.

Os dados foram coletados com o auxílio do *software* Economática[®]. Dessa forma, esta etapa visa avaliar a eficiência de ações (DMU's), em que as entradas ou *inputs* são todos os indicadores que se deseja minimizar, e saídas ou *outputs* são todos os indicadores que se deseja maximizar. Onde, as três das entradas representam a média das volatilidades das ações, em janelas de 12 meses. E, P/L representa a média do preço sobre lucro no período de 36 meses. Já, com relação as saídas, três delas representam as médias dos retornos dos ativos, em janelas de 12 meses; e LPA representa a média do lucro por ação, considerando o período de 36 meses (Apêndice A).

Os dados negativos foram tratados conforme propõem Cook e Zhu (2008), sendo acrescidos do valor que tornava positivo o valor mais negativo, sem alterar a análise.

Os modelos considerados eficientes, ou seja, com valor igual a 1 no resultado, foram considerados participantes do portfólio. Observa-se que, das 40 ações iniciais, apenas 15 foram consideradas eficientes de acordo com os indicadores selecionados (Apêndice A).

Com o objetivo de comparação, três propostas de portfólios foram realizadas. Para isso, utilizaram-se os retornos mensais dos últimos 36 meses para cada um dos ativos, ou seja, de abril de 2010 a março de 2013. Os dados foram coletados com o *software* Economática[®] e posteriormente tratados.

No primeiro portfólio proposto, utilizou-se o suplemento *Solver* do *Microsoft Excel*[®] para otimizar os 40 ativos iniciais por meio da abordagem de Sharpe, obtendo os pesos recomendados para cada um dos 40 ativos, sendo denominada portfólio Sharpe.

Na segunda proposta, a mesma atividade foi realizada, entretanto foram considerados apenas os 15 ativos reconhecidos como eficientes pelo modelo DEA, ou seja, DMU's com valores de eficiência iguais a 1, sendo denominado portfólio DEA-Sharpe.

E, por fim, a terceira proposta, na qual se utilizaram os 15 ativos considerados eficientes por meio da DEA. O critério para alocação de capital foi, contudo, simplesmente a divisão por igual do montante a ser investido entre os ativos eficientes, exatamente como proposto por Lopes, Carneiro e Schneider (2010), sendo denominada carteira DEA(1/N).

Com as três propostas formuladas e otimizadas pelos critérios e restrições às quais foram submetidas, deu-se início ao processo de verificação da existência de retornos anormais. Para isso, utilizou-se a metodologia de verificação Modelo de Precificação de Ativos (CAPM - *Capital Asset Pricing Model*) de Sharpe (1964), na qual foi possível comparar o portfólio no que diz respeito ao retorno esperado.

Para identificar retornos anormais dos ativos para cada um dos portfólios, calculou-se a diferença entre o retorno esperado fornecido pelo CAPM e o retorno observado no período de análise.

Ainda, para uma análise mais completa, utilizou-se o índice Sharpe (S_R). O S_R estabelece uma relação entre o excesso de rentabilidade de determinada carteira de investimento em relação à taxa de juros livre de risco e ao risco do investimento.

Na Tabela 1 são apresentados os resultados de variância, retorno e S_R , obtidos com os portfólios propostos.

Tabela 1- Tabela de resultados da aplicação DEA na otimização de portfólios.

| | Sharpe | DEA (1/N) | DEA-Sharpe |
|----------------------------------|---------------|------------------|-------------------|
| Beta (β) | 0,355 | 0,314 | 0,313 |
| Retorno esperado | 0,92% | 0,90% | 0,90% |
| Variância | 0,07% | 0,16% | 0,08% |
| Retorno | 1,49% | 1,54% | 2,43% |
| S_R | 0,280 | 0,187 | 0,584 |
| N. de ativos | 13 | 15 | 8 |
| Retorno acumulado | 82,46% | 84,44% | 127,29% |

Buscou-se obter o modelo que apresenta melhor relação retorno/risco medida pelo S_R , de modo a obter um melhor resultado do que a abordagem de Sharpe.

A aplicação da DEA mostrou-se viável e proporcionou uma excelente discriminação das unidades de análise. O portfólio formado pela associação da DEA e da abordagem de Sharpe apresentou um melhor desempenho medido pelo S_R , e, em termos de rentabilidade média mensal, superou a carteira comparativa em 29 dos 36 meses analisados.

Outro benefício observado é que, apesar do reduzido número de ações componentes da carteira DEA-Sharpe (oito ações), o risco calculado da carteira ficou muito próximo ao risco calculado da carteira Sharpe (13 ações). Essa redução no

número de ações, associada à manutenção do risco observado sob controle, tende a gerar economias referentes ao custo de rebalanceamento de carteiras, trazendo ganhos indiretos ao investidor.

A consagrada abordagem de Sharpe mostra-se eficiente em seu objetivo, entretanto, em algumas situações, obtém-se um grande número de ativos compondo a carteira e participações impossíveis de serem realizadas na prática, o que dificulta sua utilização.

A DEA já vem sendo considerada parte integrante de um conjunto de técnicas capazes de auxiliar na seleção de ativos para a composição de carteira. Já a combinação da DEA com a abordagem de Sharpe auxiliando na composição da carteira mostrou-se eficiente, e algumas vantagens podem ser citadas: utilizou-se um maior número de variáveis na análise, ou seja, uma melhor análise, que pode contemplar diferentes indicadores; como resultado, obteve-se um número reduzido de ativos compondo a carteira, o que torna viável sua utilização; e obteve-se o melhor S_R entre as carteiras analisadas.

A abordagem utilizada nesta aplicação gerou a seguinte publicação:

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; SALOMON, F. R. Otimização de Portfólios: Análise de Eficiência. *RAE – Revista de Administração de Empresas*, v. 54, n. 4, p. 405-413, 2014.

Tal publicação representa a primeira contribuição validada desta pesquisa, referente ao uso da Análise Envoltória de Dados (DEA) na avaliação da eficiência de ativos, auxiliando à otimização de portfólios.

3.1.2. Fuzzy DEA na otimização de portfólios

Em um segundo momento, o propósito foi o de analisar o comportamento de um portfólio selecionado por meio da Análise Envoltória de Dados (DEA) associada à lógica *Fuzzy* e otimizado pela abordagem de Sharpe. Como base de comparação, foram utilizados outros dois portfólios, obtidos por meio da abordagem de Sharpe. Neste caso, os modelos *Fuzzy* DEA ou FDEA foram utilizados para avaliar a eficiência de ativos negociados na BM&FBovespa sob condições incerteza, por meio de indicadores de entrada e saída, como retorno, variância, lucro por ação e preço-lucro. O estudo

permitiu identificar de forma confiável os ativos eficientes e os que foram mais sensíveis ao efeito da incerteza.

Esta aplicação, assim como a anterior, utilizou as bases científicas propostas por Markowitz (1952) e Sharpe (1963) como inspiração para apresentar uma alternativa para montagem de portfólios de ações. A Figura 10 representa os passos para a condução desta etapa da pesquisa.

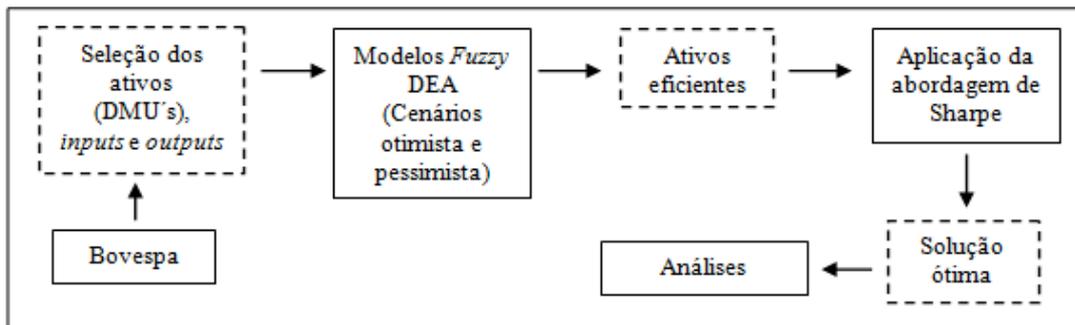


Figura 10- Fluxograma da aplicação *Fuzzy* DEA na otimização de portfólios.

Para amostra inicial foi composta por ações de empresas de capital aberto negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa), obtidas através de consultas ao banco de dados do *software* Economática[®].

Inicialmente, determinou-se o conjunto de indicadores de entradas (*inputs*) e saídas (*outputs*) utilizados na análise de eficiência por meio do modelo DEA (Apêndice B e C). Como o foco desta etapa não é a discussão das melhores variáveis para o modelo, então, utilizaram-se os mesmos indicadores propostos por Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014).

A amostra utilizada não foi à mesma do estudo preliminar anteriormente apresentado. Optou-se pela utilização das 24 empresas com maior participação no Ibovespa, sejam ativos do tipo ON ou PN. A amostra selecionada poderia ser maior, porém selecionou-se o número mínimo para atender à exigência da DEA com relação ao número de DMU's, considerando a utilização de oito indicadores, quatro de entrada e quatro de saída.

Como discutido anteriormente, as funções de pertinência triangular são utilizadas para inserir a incerteza nos parâmetros de entrada e saída do modelo. De acordo com autores como Liang e Wang (1993), Aouni *et al.* (2009) e Silva, Marins e

Santos (2014), elas representam a experiência humana para julgar corretamente o comportamento de variáveis comuns em muitas situações práticas.

Como feito anteriormente, os dados negativos foram tratados conforme propõem Cook e Zhu (2008), sendo acrescidos do valor que torna positivo o valor mais negativo, sem alterar a análise do modelo *Fuzzy* DEA. Para a modelagem do modelo *Fuzzy* DEA, utilizou-se o *software The General Algebraic Modeling (GAMS®)* na versão 23.6.5 e *Solver CPLEX* na versão 12.2.1.

Considerando os resultados de eficiência obtidos (Apêndice D), com objetivo de comparação, três carteiras foram propostas. Então, utilizaram-se os retornos mensais dos últimos 36 meses para cada um dos ativos, ou seja, de abril de 2011 a março de 2014, coletados com auxílio do *software Economática®*.

Quando aplicado o modelo FDEA, notou-se que apenas seis ações foram consideradas eficientes em ambos os cenários, tanto pessimista quanto otimista. Estas ações consideradas eficientes em ambos os cenários foram utilizadas na montagem do portfólio denominado FDEA-6.

Entretanto, para a montagem do portfólio denominado FDEA-11, considerou-se as ações que em qualquer um dos cenários, tanto otimista quanto pessimista, fossem consideradas como eficientes. Portfólio este composto por 11 ativos.

Nos artigos propostos por Kao e Liu (2000) e Miranda *et al.* (2014), os autores utilizam a média geométrica entre as abordagens DEA otimistas e pessimistas para estabelecer um índice de risco global, como também é proposto por Chin *et al.* (2009).

Em ambos os portfólios, posteriormente à aplicação do modelo *Fuzzy* DEA, utilizou-se o suplemento *Solver* do *Microsoft Excel®* para otimizar, por meio do modelo de Sharpe, os ativos considerados eficientes. Então, obteve-se os pesos recomendados para cada um dos ativos que compõem as carteiras (Apêndice E).

Por fim, um terceiro portfólio foi proposto, denominado de carteira comparativa (C_C), no qual utilizou-se apenas o suplemento *Solver* do *Microsoft Excel®* para otimizar os 24 ativos iniciais por meio da abordagem de Sharpe, obtendo-se os pesos recomendados para cada um dos ativos. Vale ressaltar que nesta carteira nenhuma pré-seleção por meio do modelo *Fuzzy* DEA foi realizada.

Após a montagem dos portfólios, iniciou-se a verificação da existência de retornos anormais. Para isso, assim como na primeira etapa, utilizou-se a metodologia do Modelo de Precificação de Ativos (CAPM), no qual foi possível comparar o portfólio com relação ao seu retorno esperado.

Como sugerido na pesquisa de Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), para uma análise mais completa utilizou-se o índice Sharpe (S_R).

A Tabela 2 apresenta os principais resultados obtidos com a aplicação do *Fuzzy* DEA. A tabela ainda mostra os resultados de desvio-padrão, retorno, S_R obtidos com portfólios propostos e o número de ativos que os compõem.

Tabela 2- Tabela de resultados da aplicação *Fuzzy* DEA na otimização de portfólios.

| | C_C | FDEA-11 | FDEA-6 |
|----------------------------------|----------------------|----------------|---------------|
| Beta (β) | 0,36 | 0,38 | 0,39 |
| Retorno Esperado | 0,58% | 0,59% | 0,59% |
| Desvio-padrão | 0,39% | 0,39% | 0,39% |
| Retorno | 1,78% | 1,92% | 1,98% |
| S_R | 2,59 | 2,93 | 3,12 |
| Número de ativos | 13 | 6 | 4 |
| Retorno acumulado | 41,32% | 98,25% | 102,14% |

Esta proposta teve como objetivo avaliar a possibilidade e a viabilidade da utilização da Análise Envoltória de Dados associada à lógica *Fuzzy* na montagem de carteira de ações.

Diversos estudos, não apenas com uso do modelo DEA como outros modelos matemáticos, tratam os casos como determinísticos, sendo precisos em sua determinação das variáveis de entrada e saída. Entretanto, sabe-se que na prática, os problemas reais são naturalmente incertos e imprecisos.

Buscou-se um obter um modelo que considera a incerteza e imprecisão, e ainda que apresente uma melhor relação de retorno/risco, contudo, sem obtenção de um aumento brusco na variância.

A aplicação dos modelos FDEA mostrou-se viável, proporcionando uma excelente discriminação das unidades de análise. Vale observar que o modelo *Fuzzy* DEA auxilia na redução do espaço de busca, já que determina por meio de diversos

cenários quais ações devem ser consideradas eficientes, reduzindo o número de ações que serão submetidos ao modelo de Markowitz ou a abordagem proposta por Sharpe, por exemplo.

A bem conhecida abordagem de Sharpe provou ser eficiente em seu objetivo. No entanto, a sua utilização prática pode ser difícil e até mesmo comprometida, uma vez que se obtém um grande número de ativos que compõem a carteira, ou mesmo participações impossíveis de serem realizadas.

Outra vez pode ser citado o benefício do reduzido número de ações que compõem a carteira FDEA-6. Esta redução associada à manutenção do risco observado sob controle, tende a gerar economias referentes ao custo de rebalanceamento de portfólios, proporcionando ganhos indiretos ao investidor.

A Análise Envoltória de Dados já é considerada parte de um conjunto de técnicas que auxiliam na escolha de ativos para compor um portfólio. Além disso, a combinação da abordagem FDEA também pode ajudar em tal composição. A associação dos modelos *Fuzzy* DEA com os modelos clássicos de otimização de portfólios foi bem sucedido, e duas vantagens principais podem ser citadas: um maior número de variáveis pôde ser utilizado na análise para tornar o modelo mais interessante e completo, já que pôde contemplar diferentes indicadores e variáveis; como resultado, obteve-se um reduzido número de ativos compondo o portfólio, o que torna seu uso possível e ainda apresentou melhor S_R entre os portfólios analisados.

A abordagem utilizada nesta proposta gerou a seguinte publicação:

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; SILVA, A. F.; SALOMON, F. R.; VALERIO, V. E. M.; CARVALHO, L. A. Data Envelopment Analysis and Fuzzy Theory: Efficiency Evaluation under uncertainty in portfolio optimization. *WSEAS Transactions on Business and Economics*, v. 12, 2015.

Esta publicação representa mais uma contribuição validada referente ao uso da Análise Envoltória de Dados (DEA), desta vez associada à Lógica *Fuzzy*, na avaliação da eficiência de ativos. Modelos estes otimizados sob condições de risco e incerteza, auxiliando a otimização de portfólios.

3.1.3. *Chance Constrained* DEA na otimização de portfólios

Para completar os estudos preliminares, por fim, o objetivo foi o de analisar portfólios de ações montados utilizando a avaliação da eficiência sob condições de risco e incerteza, e otimizar a alocação de capital por meio da abordagem de Sharpe. Foram propostos três portfólios compostos de ações de empresas de capital aberto negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa). Para esta proposta foi utilizado o modelo *Chance Constrained* DEA (CCDEA), resultante da associação da Análise Envoltória de Dados à Programação Restringida por Chances.

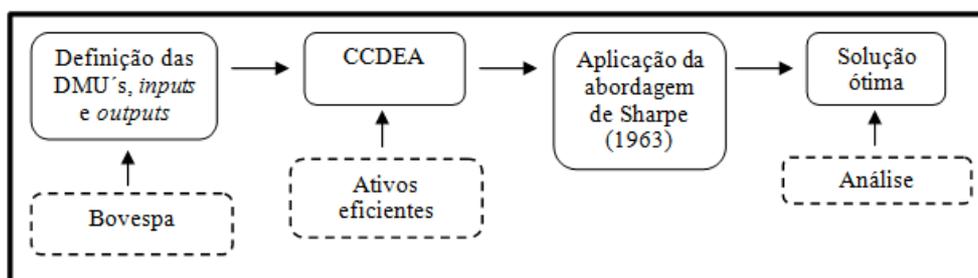


Figura 11- Fluxograma da aplicação CCDEA na otimização de portfólios.

Novamente utilizou-se a base científica de otimização de portfólios para apresentar um método para seleção de portfólios de ações, considerando variáveis estocásticas. Para seleção dos ativos considerados eficientes serão utilizados os resultados do modelo *Chance Constrained* DEA, como descreve a Figura 11.

Para a amostra, optou-se por ações PN e ON de empresas de capital aberto negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa) que possuem participação no Índice Bovespa (Ibovespa). Então, obteve-se uma amostra composta 59 empresas.

Após a seleção da amostra, determinou-se o conjunto de indicadores de entradas (*inputs*) e saídas (*outputs*) utilizados na análise de eficiência por meio do modelo *Chance Constrained* DEA. Entretanto, nesta etapa não foram utilizadas as variáveis de entrada e saída apresentadas em etapas anteriores, e sim, sugerido um novo conjunto.

Baseado nos trabalhos de Powers e McMullen (2000), Lopes, Lanzer e Lima (2006) e Lopes, Carneiro e Schneider (2010), Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014) e Rotela *et al.* (2015a), durante a seleção dos *outputs* adotados para o modelo,

optou-se pela utilização do retorno, lucro por ação. Já, os *inputs* adotados foram volatilidade, preço sobre lucro e beta.

Foram coletados, com o auxílio do *software* Economática[®], dados históricos dos últimos 36 meses para tais variáveis. Então, para cada DMU (ativo), foi possível calcular a média e variância de cada uma das variáveis adotadas para a análise de eficiência (Apêndice F). Entretanto, as variáveis adotadas pelos pesquisadores e analistas podem ser as mais diversas possíveis, desde que representem bem os interesses dos investidores.

Conforme necessário, os dados foram tratados e passaram pelos testes estatísticos mais diversos por meio da utilização do *software* Minitab[®]. Os dados negativos foram transformados, sendo acrescidos do valor que torna positivo o valor mais negativo da série, sem alterar a análise de eficiência, estratégia adotada por Cook e Zhu (2008), Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), Miranda *et al.* (2014) e Rotela *et al.* (2015a).

Para a modelagem do modelo CCDEA, foram utilizados o *softwares* como *Solver* do *Microsoft Excel*[®] e *MaxDEA*[®].

Na aplicação do modelo proposto, utilizou-se, para o nível de eficiência (β_i), o valor de 1, e para o critério de risco (α_i) os valores de 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 e 0,9. Uma vez selecionados os ativos classificados como eficientes, para os diferentes critérios de risco, utilizou-se a abordagem proposta por Sharpe (1963) para determinar a ideal alocação de capital entre os ativos que irão compor a carteira.

Para identificação da existência de retornos anormais calculou-se a diferença entre o retorno esperado fornecido pela sistemática *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), proposto por Sharpe (1964), e o retorno observado no período de análise.

Novamente, na tentativa de uma análise mais completa, utilizou-se também o índice Sharpe (S_R) que, segundo Zakamouline e Koekebakker (2009), Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014) e Rotela *et al.* (2015a), é comumente usado para medir o desempenho de uma carteira.

Considerando os critérios de risco (α_i) determinados anteriormente, foram obtidos os resultados de eficiência para o modelo CCDEA com diferentes níveis de probabilidade ($1 - \alpha_i$) de se atender as restrições, os quais são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3- Tabela de eficiência e alocação dos ativos na aplicação do modelo CCDEA.

| (1- α_i) | Ativos | 10% | Portfólio 1 (%) | 30% | Portfólio 2 (%) | 50% | Portfólio 3 (%) | 70% | 90% |
|------------------|--------|-------|--------------------|-------|--------------------|-------|--------------------|-------|-------|
| DMU1 | ALLL3 | 0,553 | - | 0,473 | - | 0,431 | - | 0,403 | 0,371 |
| DMU2 | ABEV3 | 1,35 | 0,209 | 1,132 | 0,228 | 1 | 0,264 | 0,888 | 0,745 |
| DMU3 | BVMF3 | 0,852 | - | 0,7 | - | 0,616 | - | 0,519 | 0,407 |
| DMU4 | BRML3 | 1,215 | 0 | 0,953 | - | 0,809 | - | 0,709 | 0,583 |
| DMU5 | BRPR3 | 1,468 | 0 | 1,194 | 0 | 1 | 0 | 0,861 | 0,725 |
| DMU6 | BBDC3 | 1,432 | 0 | 1,122 | 0 | 0,947 | - | 0,768 | 0,587 |
| DMU7 | BBDC4 | 1,255 | 0 | 1,03 | 0 | 0,872 | - | 0,713 | 0,542 |
| DMU8 | BRAP4 | 0,895 | - | 0,817 | - | 0,739 | - | 0,633 | 0,531 |
| DMU9 | BBAS3 | 1,53 | 0 | 1,117 | 0 | 1 | 0 | 0,82 | 0,626 |
| DMU10 | BRFS3 | 1,069 | 0,117 | 0,904 | - | 0,807 | - | 0,713 | 0,57 |
| DMU11 | BISA3 | 0,996 | - | 0,751 | - | 0,613 | - | 0,486 | 0,36 |
| DMU12 | CCRO3 | 1,443 | 0,014 | 1,162 | 0,031 | 1 | 0,059 | 0,845 | 0,638 |
| DMU13 | CMIG4 | 1,643 | 0 | 1,229 | 0 | 1 | 0 | 0,936 | 0,794 |
| DMU14 | CTIP3 | 0,913 | - | 0,788 | - | 0,703 | - | 0,625 | 0,525 |
| DMU15 | HGTX3 | 0,878 | - | 0,665 | - | 0,566 | - | 0,499 | 0,421 |
| DMU16 | CIEL3 | 1,363 | 0,493 | 1,148 | 0,517 | 1 | 0,563 | 0,909 | 0,785 |
| DMU17 | CSAN3 | 1,19 | 0,002 | 0,958 | - | 0,854 | - | 0,754 | 0,546 |
| DMU18 | CPFE3 | 1,04 | 0 | 0,865 | - | 0,812 | - | 0,718 | 0,6 |
| DMU19 | CYRE3 | 1,086 | 0 | 0,814 | - | 0,677 | - | 0,56 | 0,431 |
| DMU20 | DTEX3 | 0,994 | - | 0,723 | - | 0,604 | - | 0,511 | 0,351 |
| DMU21 | ECOR3 | 1,318 | 0 | 1,137 | 0 | 1 | 0 | 0,873 | 0,735 |
| DMU22 | ELET3 | 0,998 | - | 0,642 | - | 0,583 | - | 0,49 | 0,384 |
| DMU23 | ELPL4 | 1,088 | 0 | 0,856 | - | 0,782 | - | 0,673 | 0,545 |
| DMU24 | EMBR3 | 1,039 | 0,005 | 0,889 | - | 0,8 | - | 0,719 | 0,606 |
| DMU25 | ENBR3 | 1,011 | 0 | 0,875 | - | 0,785 | - | 0,695 | 0,586 |
| DMU26 | ESTC3 | 0,969 | - | 0,863 | - | 0,755 | - | 0,67 | 0,569 |
| DMU27 | EVEN3 | 1,386 | 0 | 0,907 | - | 0,714 | - | 0,568 | 0,436 |
| DMU28 | FIBR3 | 2,432 | 0 | 1,612 | 0 | 1 | 0 | 0,735 | 0,506 |
| DMU29 | GFSA3 | 1,514 | 0 | 0,793 | - | 0,602 | - | 0,465 | 0,336 |
| DMU30 | GGBR4 | 0,842 | - | 0,646 | - | 0,537 | - | 0,455 | 0,378 |
| DMU31 | GOAU4 | 0,909 | - | 0,686 | - | 0,572 | - | 0,484 | 0,401 |
| DMU32 | GOLL4 | 2,12 | 0 | 0,664 | - | 0,417 | - | 0,299 | 0,21 |
| DMU33 | HYPE3 | 0,503 | - | 0,439 | - | 0,392 | - | 0,349 | 0,293 |
| DMU34 | ITSA4 | 1,258 | 0 | 0,944 | - | 0,788 | - | 0,637 | 0,475 |
| DMU35 | ITUB4 | 1,184 | 0 | 0,943 | - | 0,778 | - | 0,645 | 0,518 |
| DMU36 | JBSS3 | 0,797 | - | 0,591 | - | 0,494 | - | 0,451 | 0,323 |
| DMU37 | LIGT3 | 1,11 | 0 | 0,886 | - | 0,77 | - | 0,691 | 0,599 |
| DMU38 | RENT3 | 1,021 | 0 | 0,822 | - | 0,732 | - | 0,647 | 0,544 |
| DMU39 | LAME4 | 0,85 | - | 0,685 | - | 0,59 | - | 0,505 | 0,403 |
| DMU40 | LREN3 | 0,866 | - | 0,725 | - | 0,63 | - | 0,539 | 0,469 |
| DMU41 | MRFG3 | 2,529 | 0 | 1,084 | 0 | 0,796 | - | 0,608 | 0,434 |
| DMU42 | MMXM3 | 0,37 | - | 0,137 | - | 0,089 | - | 0,065 | 0,045 |
| DMU43 | MRVE3 | 1,019 | 0 | 0,652 | - | 0,588 | - | 0,486 | 0,38 |
| DMU44 | NATU3 | 0,818 | - | 0,706 | - | 0,629 | - | 0,544 | 0,477 |
| DMU45 | OIBR4 | 0,954 | - | 0,889 | - | 0,813 | - | 0,693 | 0,576 |
| DMU46 | PCAR4 | 0,935 | - | 0,817 | - | 0,731 | - | 0,644 | 0,571 |
| DMU47 | PDGR3 | 1,151 | 0 | 0,811 | - | 0,638 | - | 0,5 | 0,371 |
| DMU48 | PETR3 | 0,8 | - | 0,746 | - | 0,692 | - | 0,582 | 0,469 |

Tabela 3- Tabela de eficiência e alocação dos ativos na aplicação do modelo CCDEA (continuação).

| (1- α_i) | Ativos | 10% | Portfólio 1 (%) | 30% | Portfólio 2 (%) | 50% | Portfólio 3 (%) | 70% | 90% |
|------------------|--------|-------|--------------------|-------|--------------------|-------|--------------------|-------|-------|
| DMU49 | PETR4 | 1,023 | 0 | 0,75 | - | 0,701 | - | 0,587 | 0,473 |
| DMU50 | QUAL3 | 1,008 | 0 | 0,843 | - | 0,748 | - | 0,651 | 0,507 |
| DMU51 | RSID3 | 0,696 | - | 0,589 | - | 0,514 | - | 0,416 | 0,319 |
| DMU52 | SBSP3 | 1,551 | 0,013 | 1,127 | 0,018 | 0,939 | - | 0,794 | 0,666 |
| DMU53 | CSNA3 | 0,863 | - | 0,63 | - | 0,585 | - | 0,486 | 0,386 |
| DMU54 | CRUZ3 | 0,939 | - | 0,808 | - | 0,724 | - | 0,644 | 0,548 |
| DMU55 | VIVT4 | 1,303 | 0 | 0,011 | - | 1,000 | 0 | 0,942 | 0,860 |
| DMU56 | TIMP3 | 1,173 | 0 | 0,947 | - | 0,833 | - | 0,748 | 0,634 |
| DMU57 | TBLE3 | 1,425 | 0 | 1,160 | 0,027 | 1,000 | 0,114 | 0,914 | 0,749 |
| DMU58 | UGPA3 | 1,341 | 0,147 | 1,092 | 0,176 | 0,941 | - | 0,826 | 0,657 |
| DMU59 | VALE3 | 1,046 | 0 | 0,967 | - | 0,855 | - | 0,718 | 0,603 |
| TOTAL | - | - | 1 | - | 1 | - | 1 | - | - |

Apenas com a alteração do critério de risco adotado, pode-se dar origem a um portfólio diferente, já que sua composição será dada pelos possíveis ativos classificados como eficientes.

Conforme apresentado na Tabela 3, pode-se constatar que com a redução do critério de risco (α_i), observa-se um menor número de ativos identificados como eficientes. O que denota que quanto menor o valor de α_i , maior a aversão ao risco.

Vale observar que, para a amostra em questão, quando o critério de risco adotado foi igual a 0,3 e 0,1, a probabilidade de atendimento das restrições aumentou de tal forma que o modelo não resultou em nenhum ativo classificado como eficiente, ou seja, com valor de eficiência igual a 1.

Apenas para os ativos considerados eficientes, nos critérios de risco adotados, utilizou-se o modelo proposto por Sharpe para determinar a alocação ideal de capital no portfólio. Logo, a partir dos resultados anteriormente apresentados, três portfólios foram obtidos. Portfólios estes com nível de probabilidade de atendimento das restrições iguais a 10%, 30% e 50%, cujas proporções de participação de cada ativo nas carteiras são apresentadas, respectivamente, nas colunas Portfólios 1, 2 e 3 da Tabela 3. É conveniente observar que nem todos os ativos considerados eficientes são alocados quando utilizada a abordagem proposta por Sharpe, fato que justifica a presença de valores de participação iguais à zero nas colunas anteriormente mencionadas.

Nesta proposta, o objetivo foi a avaliação da eficiência, sob condições de incerteza e risco, de ações negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo. Para isso, foi apresentado o modelo DEA de abordagem estocástica, *Chance*

Constrained Data Envelopment Analysis (CCDEA). A ideia por trás da utilização do CCDEA não tem pretensão de substituir abordagens consagradas como a de Markowitz (1952) ou Sharpe (1963), mas sim, utilizar, de forma estocástica, diferentes variáveis que permitiram encontrar uma amostra reduzida de ações consideradas eficientes, contemplando a aleatoriedade das variáveis que compõem o modelo. Ou seja, o modelo proposto pode ser visto como uma ferramenta de apoio às decisões de investimentos em ações.

Na Tabela 4, são apresentados os critérios de risco (α_i) adotados em cada portfólio, os resultados de retorno, desvio-padrão e S_R , obtidos por cada um dos portfólios propostos.

Tabela 4- Resultados da aplicação CCDEA por critério de risco na otimização de portfólios.

| | Portfólio 1 | Portfólio 2 | Portfólio 3 |
|--|--------------------|--------------------|--------------------|
| Critério de risco (α_i) | 90% | 70% | 50% |
| Beta da carteira (β) | 0,316 | 0,333 | 0,273 |
| Retorno esperado | 0,90% | 0,91% | 0,89% |
| Desvio-padrão | 1,46% | 1,45% | 1,41% |
| Retorno | 2,68% | 2,72% | 2,75% |
| Índice Sharpe | 1,21 | 1,24 | 1,31 |
| N. de ativos | 8 | 6 | 4 |
| Retorno acumulado | 158,49% | 153,01% | 165,49% |

Então, as ações selecionadas foram avaliadas por diferentes variáveis de entrada e saída, não apenas retorno e risco, e trouxe como resposta quais dentre essas devem ser consideradas eficientes, logo, este modelo pôde auxiliar consagradas teorias de otimização de portfólios.

Posteriormente, as ações consideradas eficientes foram submetidas à abordagem proposta por Sharpe (1963) que determinou a alocação ideal de capital em cada um dos ativos que compõem os portfólios.

Com a alteração do nível de probabilidade de atendimento das restrições do modelo CCDEA, obteve-se três diferentes grupos de ativos considerados eficientes, que então foram submetidos ao modelo de otimização que propõe a alocação do capital investido, resultando em três diferentes portfólios.

A aplicação do modelo CCDEA mostrou-se viável e proporcionou uma excelente discriminação das unidades de análise (DMU's). Observou-se que o Portfólio 3 destacou-se dos demais quando analisado o desempenho medido pelo índice S_R .

Como nos estudos preliminares anteriores, outro benefício observado é o número reduzido de ações que compõem os três portfólios, porém, desta vez associado à manutenção sob controle do risco observado, podem gerar economias referentes ao custo de rebalanceamento de carteiras, trazendo ganhos indiretos aos investidores.

Por fim, pode-se observar que a abordagem estocástica no modelo DEA pode auxiliar na composição de portfólios. E, combinado com a abordagem Sharpe algumas vantagens foram observadas: avaliação da eficiência sob condições de risco e incerteza, considerando aleatoriedade dos dados; um maior número de variáveis estocásticas na análise, tornando-se mais eficiente que o uso de modelos tradicionais determinísticos; utilização de diferentes variáveis selecionadas pelo analista para comparação entre diferentes unidades tomadoras de decisão; um número reduzido de ativos compondo os portfólios, tornando viável sua utilização.

A abordagem utilizada nesta proposta gerou a seguinte publicação:

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; ROCHA, L. C.; VALERIO, V. E. M.; PAIVA, A. P. Stochastic portfolio optimization using efficiency evaluation. *Management Decision*, v. 53, n.8, 2015.

Esta publicação é uma contribuição validada referente ao uso da Análise Envoltória de Dados (DEA) associada à Programação Restringida por Chances, modelo CCDEA, na avaliação da eficiência de ativos.

3.2. Método proposto para a otimização de portfólios robustos

Para estabelecer uma estratégia para a otimização de portfólios robustos por meio da análise estocástica de eficiência, este trabalho teve como ponto de partida as seguintes observações:

- i. Os resultados dos estudos preliminares indicam que a Análise Envoltória de Dados (DEA) tem uma boa aplicabilidade na determinação de ativos para composição de portfólios. A DEA permite avaliar ativos por

critérios que representam o interesse dos investidores, apoiando os modelos clássicos de média e variância;

- ii. Modelos DEA que consideram a aleatoriedade dos dados permitem ao investidor realizar uma redução no espaço de busca por ativos que possuam bom comportamento, realizando uma boa discriminação dos dados;
- iii. A variação do critério de risco do modelo de análise estocástica de eficiência permite atender investidores com diferentes atitudes frente ao risco.
- iv. Um ponto de dificuldade da aplicação do CCDEA na otimização de portfólios, dependendo dos dados, é provavelmente o comportamento contraditório das restrições, fato que dificulta a identificação de ativos eficientes;
- v. O agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) permite agrupar indivíduos ou ativos baseado na similaridade ou dissimilaridade entre estes grupos iniciais;
- vi. Modelos robustos de portfólios atingem sua robustez se concentrando nas informações de períodos de crise ou recessão do mercado, ou seja, dias com baixo desempenho são fundamentais para formação de um portfólio que apresente um bom resultado em qualquer estado do mercado.

Sendo assim, considerando as observações realizadas, o método proposto para formação de portfólios robustos pode ser estruturado da seguinte maneira:

Passo 1: seleção dos ativos a serem avaliados pelo modelo, definição de variáveis que representem os interesses dos investidores, determinação da leitura das variáveis (*inputs* ou *outputs*) e coleta e preparação dos dados.

Passo 2: segmentação das informações de períodos de baixa do mercado, baseada em retornos diários do Ibovespa.

Passo 3: agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) dos ativos, buscando aumentar o grau de similaridade e conseqüente redução do grau de divergência entre as restrições do modelo de análise estocástica de eficiência;

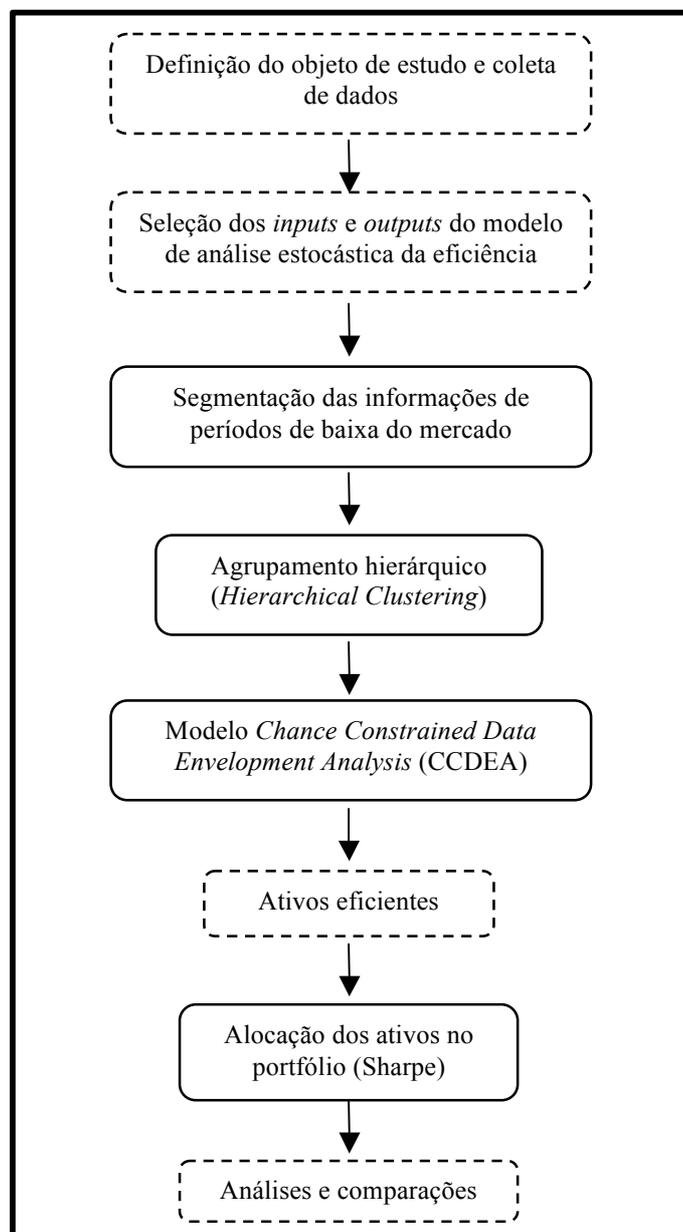
Passo 4: determinação da faixa adotada para a definição do critério de risco;

Passo 5: identificação dos ativos eficientes por meio da aplicação do modelo de análise estocástica de eficiência, *Chance Constrained DEA*, conforme (47) - (50).

Passo 6: identificação da alocação ideal dos ativos eficientes nos portfólios, por meio de modelos clássicos da otimização de portfólio, como o proposto por Sharpe (1963), conforme (104) - (107).

A Figura 12 apresenta o fluxograma do método proposto para a otimização de portfólios robustos, conforme os passos anteriormente descritos.

Figura 12- Fluxograma do método proposto.



4. MÉTODO DE PESQUISA

Considerando a fundamentação teórica estabelecida no Capítulo 2, os estudos preliminares apresentados e o método proposto no Capítulo 3, o Capítulo 4 tem a função de descrever a estratégia adotada para a condução da aplicação prática do método proposto. Desta forma, este capítulo se resume à classificação e detalhamento do método de pesquisa, apresentação do objeto de estudo, seleção e discussão das variáveis adotadas e a coleta de dados.

4.1. Classificação da pesquisa

Esta pesquisa pode ser classificada como de natureza aplicada, já que se caracteriza por seu interesse prático, isto é, que os resultados sejam aplicados ou utilizados imediatamente nas soluções de problemas que ocorrem na realidade (CAUCHICK MIGUEL *et al.*, 2010; MARTINS, MELLO e TURRIONI, 2014).

Com relação aos seus objetivos, é classificada como pesquisa normativa, já que, segundo Bertrand e Fransoo (2002), está primariamente interessada no desenvolvimento de políticas, estratégias e ações que permitem o aperfeiçoamento dos resultados disponíveis na literatura, para obter uma solução ótima para novas definições de problemas ou para comparar várias estratégias relativas a um problema específico.

Quanto à forma de se abordar o problema é considerado uma pesquisa quantitativa, pois considera que tudo pode ser quantificado, o que significa traduzir as opiniões e informações em números para classificá-las e analisá-las. Bertrand e Fransoo (2002) definem a pesquisa quantitativa como sendo uma pesquisa em que modelos de relações causais entre variáveis de controle e variáveis de desempenho são desenvolvidos, analisados e testados.

Na Figura 13 é apresentada a estrutura lógica da abordagem quantitativa proposta por Bryman (1989), cujas principais etapas do ciclo se baseiam na (a) formulação de hipótese a partir da teoria; (b) observações e coleta de dados; (c) análise dos dados; e (d) obtenção e controle dos resultados.

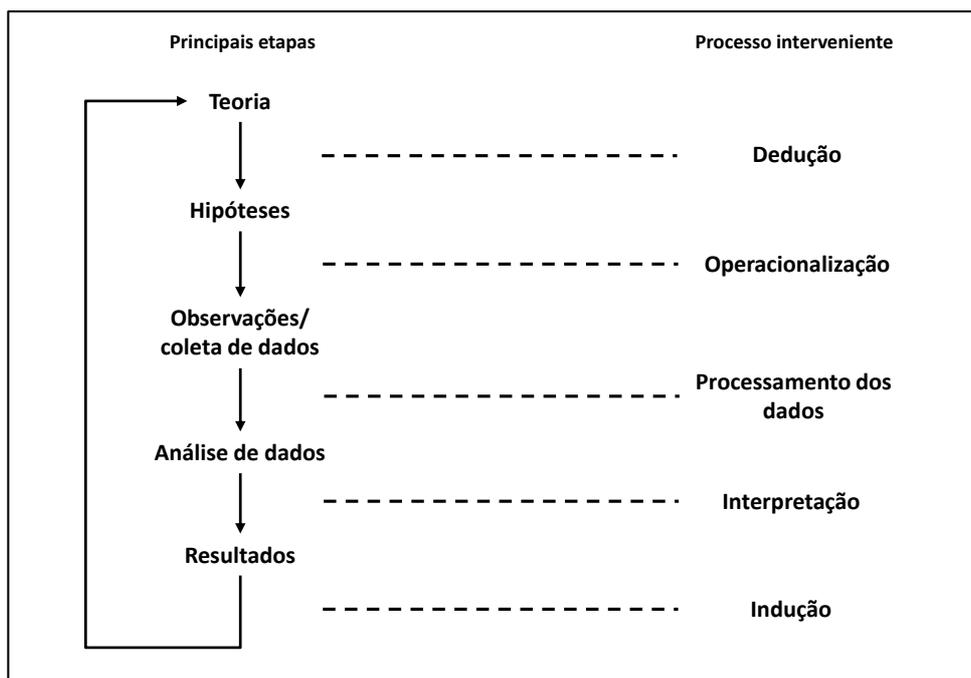


Figura 13- Estrutura lógica da abordagem quantitativa.

Fonte: Bryman (1989).

E, o método de pesquisa utilizado é a modelagem matemática, que segundo Martins, Mello e Turrioni (2014), é empregado quando se deseja experimentar, por meio de um modelo, um sistema real, determinando-se como este sistema responderá as modificações que lhe são propostas. Logo, a utilização de modelos de otimização caracteriza os métodos da programação matemática ou modelagem matemática.

Mitroff *et al.* (1974) apresentam o modelo da operacionalização deste tipo de pesquisa, e seu modelo consiste de quatro etapas: (a) conceitualização do problema e do sistema sob estudo; (b) modelagem, que representa a construção do modelo quantitativo, definindo as relações causais entre as variáveis; (c) solução pelo modelo; (d) implantação, fase na qual os resultados do modelo são implantados e um novo ciclo pode começar.

4.2. Objeto de estudo

Para a aplicação do método proposto, considerou-se como objeto de estudo a Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa).

A BM&FBovespa é a bolsa oficial do Brasil, oferecendo uma ampla gama de produtos e serviços, tais como: negociação de ações, títulos de renda fixa, câmbio

pronto e contratos derivativos referenciados em ações, ativos financeiros, índices, taxas, mercadorias, moedas, entre outros; listagem de empresas e outros emissores de valores mobiliários; depositária de ativos; empréstimo de títulos; e licença de softwares (BM&FBOVESPA, 2015).

4.3. Seleção das variáveis de entrada e saída

Definido o objeto de estudo, deu-se início a seleção do conjunto de indicadores que serão utilizados como variáveis de entrada e saída (*inputs* e *outputs*) na análise de eficiência.

Levou-se em consideração a afirmação feita por Charnes *et al.* (1994) e Siriopoulos e Tziogkidis (2010), de que entradas ou saídas altamente correlacionadas não afetam significativamente os resultados de eficiência. Então, não houve uma preocupação com a realização de testes de correlação entre as possíveis variáveis de entrada ou as de saída, contrariando autores como Ferreira e Gomes (2009).

Então, optou-se por identificar na literatura as variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*) utilizadas em aplicações DEA no mercado de ações. E, para isso, utilizou-se os trabalhos de Powers e McMullen (2000), Lopes, Lanzer e Lima (2006), Lopes, Carneiro e Schneider (2010), Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), Rotela Junior *et al.* (2015a) e Rotela Junior *et al.* (2015b). Levou-se em consideração também a afirmação feita por Kim *et al.* (2015), de que em períodos de crise, ativos com baixo beta reduzem o risco do portfólio e proporcionam melhor retorno do que ativos com alto beta. Contrariando as propostas de Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014) e Rotela Junior *et al.* (2015a), uma das variáveis consideradas para tal análise foi o beta dos ativos.

Outra alteração nos parâmetros foi necessária. Segundo os autores citados anteriormente, o lucro por ação pode ser uma boa variável de saída para o modelo. Entretanto, o modelo utilizado nesta etapa será abastecido de informações diárias, logo se propôs a substituição do lucro por ação pela liquidez dos ativos.

Então, para esta pesquisa, levando-se em conta as discussões realizadas nos estudos preliminares, as limitações da pesquisa e o fato da DEA ser um método não paramétrico, optou-se pela utilização de informações diárias de retorno, liquidez do

ativo e lucro-preço (LP) como variáveis de saída do modelo (*outputs*). E, como variáveis de entrada (*inputs*) foram adotadas o beta, preço-lucro (PL) e a volatilidade.

Para os *outputs* do modelo utilizou-se o retorno do ativo, baseado em seu fechamento diário; a liquidez do ativo, que foi calculada em janelas mensais; e o lucro-preço (LP), calculado em janela de doze meses; Já, para os *inputs* do modelo, utilizou-se o beta, calculado em janela de 36 meses, ou seja, levando-se em conta os últimos 36 valores históricos da série, a partir de uma data específica; o preço-lucro (PL), calculado em janelas mensais; e, por fim, volatilidade, base diária.

4.4. Seleção da amostra e coleta de dados

Para compor a amostra, optou-se por ativos negociados na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo, e que possuem participação no Índice Bovespa (Ibovespa). Entretanto, é necessário que tais ativos apresentem informações de um longo horizonte de tempo.

Em sua pesquisa, Kim *et al.* (2015) utilizaram dados diários do retorno do índice de mercado para identificar os períodos de baixa do mercado. Os autores, dentro de um intervalo de tempo, classificaram todos os retornos do índice em ordem crescente. Feito isso, dividiram este período em n outros. Com um período mais longo, os autores definiram n como dez, e para a definição do período de baixa do mercado, e foi selecionado o décimo que corresponde aos menores valores apresentados por tal índice. Na pesquisa aqui realizada, para melhor identificar o período de crise, a mesma estratégia proposta por Kim *et al.* (2015) foi adotada.

Então, se deu início a seleção da amostra. Entretanto, observou-se que dentre todos os ativos que compunham o Ibovespa, apenas 61 possuíam informações completas de todas variáveis selecionadas para o modelo DEA. A lista de ativos (DMU's) que compõem a amostra é apresentada na Tabela 5. Notou-se que antes de tal data a amostra não seria suficiente para uma análise como a proposta nesta etapa. Então, as informações para esta aplicação correspondem a dados diários compreendidos entre os meses de novembro de 2009 e novembro de 2014.

Todas as informações sobre as variáveis selecionadas anteriormente foram coletadas por meio do *software* Economática[®] para o período estipulado.

Tabela 5- Lista de ativos (DMU's) que compõem a amostra.

| DMU's | ATIVOS | DMU's | ATIVOS | DMU's | ATIVOS | DMU's | ATIVOS |
|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| DMU1 | ABEV3 | DMU17 | CSAN3 | DMU33 | GOLL4 | DMU49 | PETR4 |
| DMU2 | BBAS3 | DMU18 | CSNA3 | DMU34 | HGTX3 | DMU50 | POMO4 |
| DMU3 | BBDC3 | DMU19 | CTIP3 | DMU35 | HYPE3 | DMU51 | RENT3 |
| DMU4 | BBDC4 | DMU20 | CYRE3 | DMU36 | ITSA4 | DMU52 | RSID3 |
| DMU5 | BRAP4 | DMU21 | DTEX3 | DMU37 | ITUB4 | DMU53 | SANB11 |
| DMU6 | BRFS3 | DMU22 | ELET3 | DMU38 | JBSS3 | DMU54 | SBSP3 |
| DMU7 | BRKM5 | DMU23 | ELET6 | DMU39 | LAME4 | DMU55 | SUZB5 |
| DMU8 | BRML3 | DMU24 | ELPL4 | DMU40 | LIGT3 | DMU56 | TBLE3 |
| DMU9 | BVMF3 | DMU25 | EMBR3 | DMU41 | LREN3 | DMU57 | TIMP3 |
| DMU10 | CCRO3 | DMU26 | ENBR3 | DMU42 | MRFG3 | DMU58 | USIM5 |
| DMU11 | CESP6 | DMU27 | ESTC3 | DMU43 | MRVE3 | DMU59 | VALE3 |
| DMU12 | CIEL3 | DMU28 | EVEN3 | DMU44 | NATU3 | DMU60 | VALE5 |
| DMU13 | CMIG4 | DMU29 | FIBR3 | DMU45 | OIBR4 | DMU61 | VIVT4 |
| DMU14 | CPFE3 | DMU30 | GFSA3 | DMU46 | PCAR4 | - | - |
| DMU15 | CPLE6 | DMU31 | GGBR4 | DMU47 | PDGR3 | - | - |
| DMU16 | CRUZ3 | DMU32 | GOAU4 | DMU48 | PETR3 | - | - |

Para validação dos resultados utilizou-se informações diárias obtidas, também por meio do *software* Economática[®], entre os períodos de novembro de 2014 a junho de 2015. Para isso, calculou-se o retorno anormal acumulado no período de validação para cada portfólio, conforme as participações definidas pelos modelos utilizados na otimização.

5. OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS ROBUSTOS

A presente pesquisa utilizou a base científica proposta por Markowitz (1952) para propor um método para a seleção de portfólios de ações, considerando a avaliação estocástica da eficiência. Como visto nos trabalhos de Lopes, Lanzer e Lima (2006), Lopes, Carneiro e Schneider (2010) e Rotela Junior, Pamplona e Salomon (2014), a Análise Envoltória de Dados (DEA) vem sendo adotado como mais uma ferramenta no auxílio à otimização de carteiras. Vários autores, como Rotela Junior *et al.* (2015a) e Rotela Junior *et al.* (2015b), têm apresentado as técnicas da Análise Envoltória de Dados associada às abordagens que permitem incorporar a incerteza a tais modelos, por meio da Lógica *Fuzzy* ou ainda aliada a *Chance Constrained Programming*.

Paralelamente ao desenvolvimento de tais abordagens, diversos autores têm utilizado modelos de otimização contemplando dados estocásticos, como os já discutidos anteriormente, para apresentar modelos da otimização robusta de portfólios, obtidos por meio da abordagem *max-min*, por exemplo.

Entretanto, como afirmado anteriormente, Kim *et al.* (2015) acreditam que a robustez dos modelos de portfólios robustos é provavelmente alcançada apostando-se sistematicamente na informação de períodos de baixa do mercado.

Baseado em tais afirmações e considerando o método proposto no Capítulo 3, o Capítulo 5 tem a função de realizar uma aplicação do método proposto. Desta forma, este capítulo se resume à preparação, desenvolvimento e aplicação do método de pesquisa. Em seguida, os resultados serão apresentados, analisados e comparados com outros métodos utilizados na otimização de portfólios.

5.1. Preparação e desenvolvimento do método proposto

Iniciou-se com a realização da coleta de dados em uma única base. Com os dados reunidos, utilizou-se a proposta de Kim *et al.* (2015). Nesta proposta, tem-se que, os retornos diários dos ativos foram usados para construir os portfólios de pior caso (*worst-case*) ($1/n$ do total de dias, com os mais baixos retornos do índice de mercado).

Então, no período adotado para o estudo, classificou-se em ordem crescente o retorno do Ibovespa. Logo, as demais informações da planilha acompanharam tal

classificação. E para a definição do período de baixa do mercado, optou-se pela definição de n igual a quatro, ou seja, selecionou-se o quartil referente aos piores resultados do Ibovespa, 25% das informações completas, proporcionando ao modelo mais de trezentas informações diárias. Obtém-se o valor de 1, quando $n=1$, logo, serão consideradas informações completas do período adotado para estudo, desde 2009 a 2014. E, tem-se o valor de 0,25, quando $n=4$, sendo este o quartil adotado para obtenção das informações de baixa do mercado.

Considerando as informações foi possível calcular, para cada DMU (ativo), a média e variância de cada uma das variáveis adotadas para a análise de eficiência em cada um dos cenários determinados, sendo estes de informações completas do mercado ($n=1$) e períodos de baixa do mercado ($n=4$).

Observou-se que mesmo com a variação do critério de risco, o número de ativos dados como eficientes era bem reduzido, o que se levou a acreditar que o modelo CCDEA estava sendo composto por restrições com grande divergência, o que dificultava a boa discriminação das unidades de análise. Então, foram testadas diferentes formas de utilização do agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*), e a opção que se mostrou mais viável foi, para cada um dos dois estados considerados, realizar o agrupamento por grau de similaridade das DMU's, levando-se em consideração as médias e variâncias de todas as seis variáveis selecionadas para o modelo.

Tal iniciativa ajudou a agrupar as DMU's aumentando significativamente o grau de similaridade entre os grupos nos quais as eficiências seriam analisadas. A Figura 14 apresenta o agrupamento das DMU's em estudo, quando considerados todas as informações dos ativos ($n=1$) desde 2009 a 2014. Já a Figura 15 apresenta o agrupamento das DMU's quando analisadas informações colhidas em períodos de baixa do mercado, já definido anteriormente ($n=4$). Figuras estas obtidas por meio do *software* Minitab®.

Então, para cada um dos dois cenários propostos, estado total de mercado e estado de baixa do mercado, foram realizados dois agrupamentos, nos quais, os ativos que compõem os grupos apresentam maior similaridade.

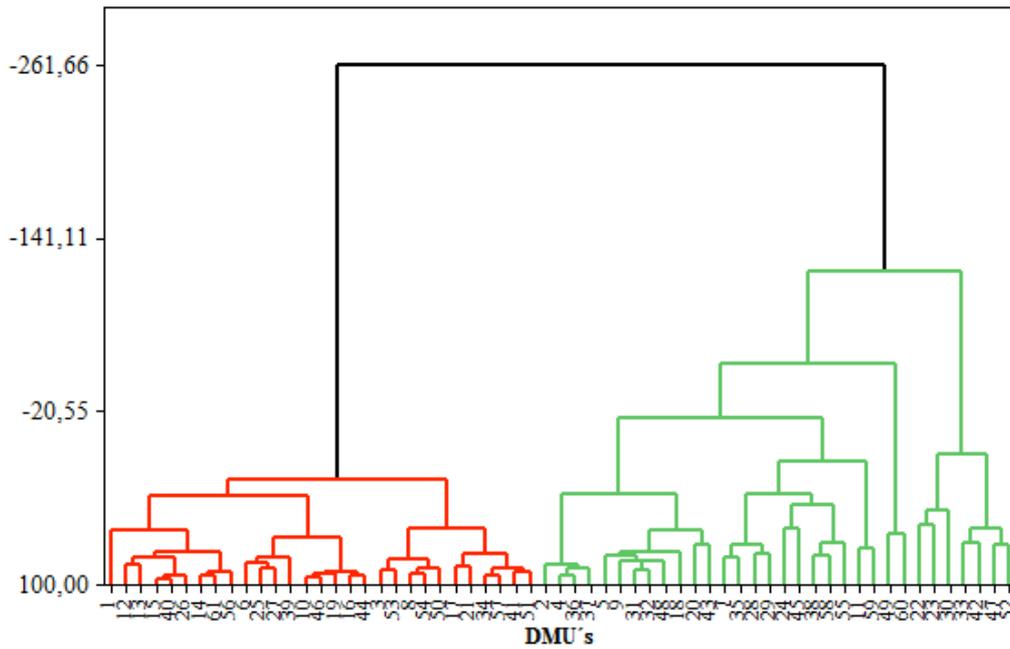


Figura 14- Dendrograma do agrupamento por meio de *Clustering* Hierárquico considerando todas as informações do mercado.

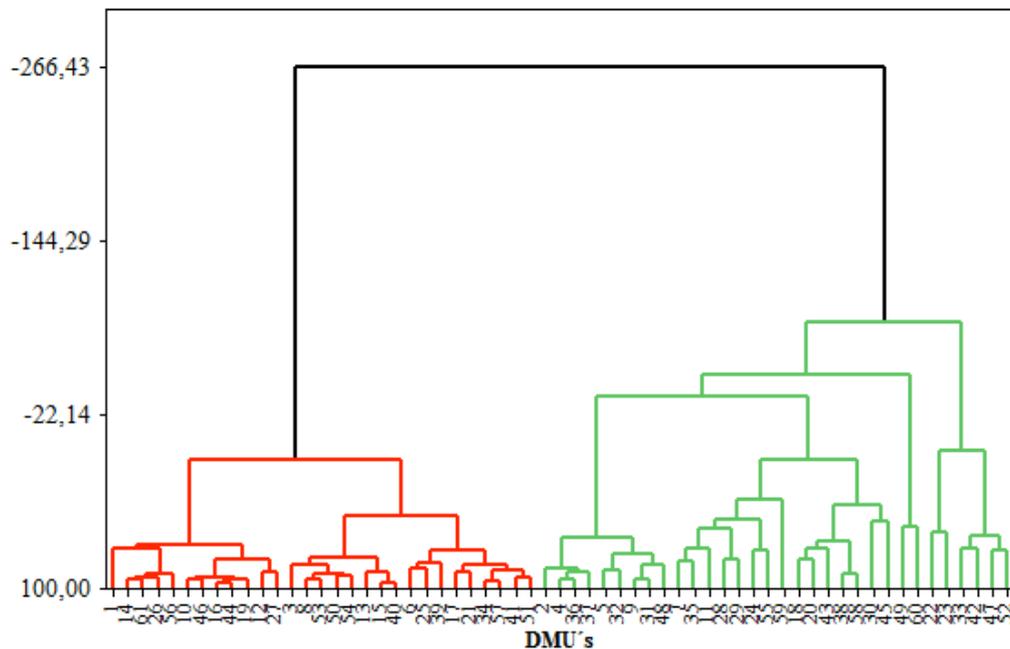


Figura 15- Dendrograma do agrupamento por meio de *Clustering* Hierárquico considerando apenas as informações de períodos de baixa do mercado.

Nota-se que, na Figura 14, os ativos foram agrupados por grau de similaridade. Em vermelho tem-se o grupo 1 e em verde o grupo 2, considerando o período completo

de informações (n=1), desde 2009 a 2011. O objetivo deste agrupamento é reunir ativos com maior grau de similaridade considerando todos os *inputs* e *outputs* do modelo CCDEA, e com isso, obter a redução do grau de divergência entre as restrições do modelo estocástico de análise de eficiência, alcançando uma melhor discriminação das DMU's. Abaixo da figura, são listadas as DMU's que compõem cada *cluster*.

A mesma leitura pode ser feita por meio da Figura 15. Tem-se em vermelho o grupo 1, e em verde o grupo 2. Entretanto, nesta, o agrupamento foi realizado considerando as informações de baixa do mercado (n=4).

O agrupamento pode ser em um número maior de grupos, contudo, dado ao número de variáveis, o modelo exige um número mínimo de DMU's para uma boa discriminação dos dados (COOPER, SEIFORD e TONE, 2007), o que levou a formação de apenas dois grupos. Desde que respeite as recomendações na aplicação dos modelos, esta solução pode ser adotada a fim de facilitar o atendimento das restrições do modelo CCDEA.

Considerando informações do estado total do mercado, a Tabela 6 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis de entrada e saída das DMU's que respectivamente compõem o grupo 1 e 2. As tabelas de valores pontuais referentes a tais grupos ou *clusters* podem ser vistas nos Apêndice G e H, respectivamente.

Tabela 6- Estatística descritiva das variáveis de entrada e saída do modelo para o grupo 1 e 2 considerando informações do estado total do mercado.

| Grupo 1 | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Vol. | |
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| Média | 0,07 | 3,52 | 0,65 | 0,09 | 7,03 | 9,19 | 0,63 | 0,01 | 19,11 | 132,21 | 1,87 | 0,09 |
| Mediana | 0,07 | 3,39 | 0,59 | 0,03 | 6,31 | 1,89 | 0,61 | 0,01 | 19,49 | 18,88 | 1,77 | 0,08 |
| Desv. Pad. | 0,03 | 0,78 | 0,26 | 0,22 | 3,13 | 18,73 | 0,18 | 0,01 | 9,55 | 327,64 | 0,25 | 0,06 |
| Mínimo | 0,01 | 2,17 | 0,29 | 0,00 | 2,55 | 0,18 | 0,30 | 0,00 | 1,00 | 1,98 | 1,45 | 0,01 |
| Máximo | 0,13 | 4,79 | 1,30 | 1,19 | 14,42 | 92,35 | 0,99 | 0,02 | 42,94 | 1706,57 | 2,31 | 0,27 |
| Grupo 2 | | | | | | | | | | | | |
| Média | -0,02 | 6,02 | 1,62 | 0,27 | 3,36 | 286,57 | 1,05 | 0,01 | 12,27 | 3365,30 | 2,39 | 0,19 |
| Mediana | -0,02 | 5,41 | 1,04 | 0,10 | 6,32 | 31,91 | 1,06 | 0,01 | 10,24 | 1393,75 | 2,33 | 0,14 |
| Desv. Pad. | 0,06 | 2,29 | 1,63 | 0,59 | 10,38 | 650,30 | 0,22 | 0,01 | 15,98 | 4451,30 | 0,45 | 0,15 |
| Mínimo | -0,17 | 3,10 | 0,35 | 0,01 | -26,73 | 0,54 | 0,59 | 0,00 | -30,46 | 2,07 | 1,70 | 0,03 |
| Máximo | 0,08 | 10,70 | 7,05 | 2,59 | 17,39 | 3173,20 | 1,50 | 0,05 | 47,87 | 14978,71 | 3,29 | 0,60 |

Já considerando informações dos períodos de baixa do mercado, a Tabela 7 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis de entrada e saída das DMU's que respectivamente compõem o grupo 1 e 2. As tabelas de valores pontuais referentes a tais grupos ou *clusters* podem ser vistas nos Apêndices I e J, respectivamente.

Tabela 7- Estatística descritiva das variáveis de entrada e saída do modelo para o grupo 1 e 2 considerando informações de períodos de baixa do mercado.

| Grupo 1 | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Vol. | |
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| Média | -0,98 | 3,15 | 0,65 | 0,09 | 7,12 | 9,46 | 0,63 | 0,01 | 19,39 | 123,06 | 1,86 | 0,09 |
| Mediana | -0,97 | 3,12 | 0,60 | 0,03 | 6,32 | 2,12 | 0,60 | 0,01 | 19,27 | 18,35 | 1,77 | 0,07 |
| Desv. Pad. | 0,29 | 0,70 | 0,26 | 0,22 | 3,13 | 20,24 | 0,18 | 0,01 | 8,48 | 318,48 | 0,24 | 0,06 |
| Mínimo | -1,52 | 1,95 | 0,29 | 0,01 | 2,62 | 0,20 | 0,29 | 0,00 | 7,77 | 2,14 | 1,45 | 0,01 |
| Máximo | -0,46 | 4,53 | 1,31 | 1,19 | 14,61 | 102,62 | 0,98 | 0,02 | 40,20 | 1686,56 | 2,29 | 0,23 |
| Grupo 2 | | | | | | | | | | | | |
| Média | -1,86 | 4,42 | 1,62 | 0,31 | 3,25 | 308,54 | 1,05 | 0,01 | 12,70 | 3152,21 | 2,37 | 0,20 |
| Mediana | -1,78 | 4,12 | 1,04 | 0,10 | 6,44 | 35,82 | 1,06 | 0,01 | 10,61 | 1127,46 | 2,31 | 0,14 |
| Desv. Pad. | 0,39 | 1,93 | 1,63 | 0,69 | 10,92 | 692,02 | 0,22 | 0,01 | 18,73 | 4112,77 | 0,44 | 0,15 |
| Mínimo | -2,79 | 2,01 | 0,36 | 0,01 | -29,27 | 0,58 | 0,60 | 0,00 | -30,61 | 1,89 | 1,70 | 0,03 |
| Máximo | -1,14 | 9,85 | 7,10 | 3,17 | 18,03 | 3312,95 | 1,51 | 0,05 | 65,25 | 13506,95 | 3,25 | 0,64 |

Assim como em outras pesquisas, os dados negativos foram transformados, sendo acrescidos do valor que torna positivo o valor mais negativo da série de uma mesma variável, sem alterar a análise de eficiência (COOK e ZHU, 2008; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014; MIRANDA *et al.*, 2014; ROTELA *et al.*, 2015a e ROTELA *et al.*, 2015b).

Vale ressaltar que nesta pesquisa as variáveis de entrada foram consideradas independentes, assim como as variáveis de saída.

Para a modelagem do modelo CCDEA, foram utilizados o *softwares* como *Solver* do *Microsoft Excel*[®] e *MaxDEA*[®].

Utilizou-se para o modelo CCDEA, dados pelas equações (47)-(50), o nível de eficiência (β_i) igual a 1. Observou-se que, para os dados em questão, uma boa faixa de discriminação das unidades de análise é obtida quando o critério de risco (α_i) varia entre 0,5 e 0,6. Para obter-se esta faixa, iniciou-se a resolução do modelo CCDEA, e observou-se que, quando critério de risco definido era maior do que 0,5, o modelo tinha dificuldades em encontrar ativos eficientes. E, quando adotado um critério de risco

menor que 0,6, o modelo passava a identificar um grande número de ativos como eficiente. Então, considerando as informações utilizadas no estudo, esta foi o intervalo adotado para o critério de risco, no qual, obteve-se a melhor discriminação das DMU's.

Tal faixa pode variar de acordo com os dados em avaliação no modelo CCDEA. Já a variação dentro da faixa estipulada no passo anterior, pode ser relacionada como uma forma de se inserir a aversão do investidor ao risco. No caso específico desta pesquisa, optou-se pela variação de 0,01 dentro da faixa definida como ideal para variação da probabilidade de atendimento das restrições $(1-\alpha_i)$, gerando onze portfólios para cada estado em estudo.

Para a análise dos resultados, foi proposta a utilização do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), apresentado por Sharpe (1964) para a identificação da existência de retornos anormais (ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014; ROTELA *et al.*, 2015a; ROTELA *et al.*, 2015b).

Ainda, utilizou-se o índice Sharpe (S_R), métrica mais utilizada e adotada por vários autores para avaliar o desempenho de portfólios (ZAKAMOULINE e KOEKEBAKKER, 2009; HOMM e PIGORSCH, 2012; AUER e SCHUHMACHER, 2013; ROTELA JUNIOR, PAMPLONA e SALOMON, 2014; ROTELA *et al.*, 2015a).

Como dito anteriormente, no modelo de otimização de portfólios proposto, utilizou-se informações diárias obtidas considerando o período de novembro de 2009 a novembro de 2014. Entretanto, para validação dos resultados utilizou-se informações diárias entre os períodos de novembro de 2014 a junho de 2015. Para isso, calculou-se o retorno acumulado no período de validação para cada portfólio, conforme as participações definidas pelos modelos utilizados na otimização.

5.2. Resultados e análises

Considerando os critérios de risco (α_i) adotados anteriormente, foi realizada a avaliação da eficiência dos grupos propostos. A Tabela 8 apresenta os resultados de eficiência dos grupos 1 e 2, respectivamente, quando submetidos ao modelo CCDEA com diferentes níveis de probabilidade $(1-\alpha_i)$ de se atender as restrições do modelo, abastecidos de informações de todo o estado do mercado no período estipulado. A

tabela de valores pontuais de eficiência para tais grupos pode ser vista nos Apêndices K e L, respectivamente.

Tabela 8- Estatística Descritiva das eficiências para o grupo 1 e 2 considerando informações do estado total do mercado.

| Grupo 1 | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| Média | 1,25 | 1,19 | 1,13 | 1,08 | 1,04 | 1,00 | 0,96 | 0,93 | 0,90 | 0,88 | 0,86 |
| Mediana | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 0,99 | 0,96 | 0,95 | 0,92 | 0,89 | 0,87 |
| Desv. Pad. | 0,17 | 0,16 | 0,15 | 0,15 | 0,14 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0,11 |
| Mínimo | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,83 | 0,80 | 0,76 | 0,73 | 0,70 | 0,68 | 0,67 | 0,66 |
| Máximo | 1,56 | 1,49 | 1,40 | 1,34 | 1,27 | 1,22 | 1,17 | 1,12 | 1,08 | 1,04 | 1,00 |
| Grupo 2 | | | | | | | | | | | |
| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| Média | 2,25 | 2,07 | 1,93 | 1,81 | 1,69 | 1,50 | 1,34 | 1,22 | 1,10 | 1,00 | 0,82 |
| Mediana | 1,80 | 1,68 | 1,58 | 1,47 | 1,37 | 1,25 | 1,11 | 1,02 | 0,96 | 0,90 | 0,82 |
| Desv. Pad. | 2,12 | 2,02 | 1,84 | 1,77 | 1,71 | 1,37 | 1,16 | 1,04 | 0,81 | 0,63 | 0,15 |
| Mínimo | 1,10 | 1,02 | 0,96 | 0,90 | 0,83 | 0,74 | 0,66 | 0,60 | 0,55 | 0,51 | 0,47 |
| Máximo | 13,53 | 12,77 | 11,70 | 11,24 | 10,81 | 8,77 | 7,52 | 6,77 | 5,39 | 4,34 | 1,00 |

Da mesma forma, a Tabela 9 apresenta os resultados de eficiência dos grupos 1 e 2, respectivamente, quando submetidos ao modelo CCDEA com diferentes níveis de probabilidade ($1 - \alpha_i$) de se atender as restrições do modelo. Porém, neste ponto da pesquisa, o modelo CCDEA foi abastecido com informações de períodos de baixa do mercado. Vale observar que com a redução do critério de risco (α_i), aumenta-se a probabilidade de atendimento das restrições do modelo de otimização, deixando o modelo mais rigoroso. Com isso, menos ativos são classificados como eficientes. Da mesma forma, a tabela de valores pontuais de eficiência para tais grupos pode ser vista nos Apêndices M e N, respectivamente.

A análise de *clustering* se deu com a finalidade de agrupar ativos que possuem certo grau de similaridade, em busca de uma melhor discriminação das DMU's, já que quando são agrupados tais ativos, reduz-se a divergência entre as restrições do modelo CCDEA. Entretanto, os ativos dados como eficientes nos grupos de cada estado de mercado serão reunidos e otimizados conforme proposto por Sharpe.

Tabela 9- Estatística Descritiva das eficiências para o grupo 1 e 2 considerando informações de períodos de baixa do mercado.

| Grupo 1 | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| Média | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,90 | 0,89 | 0,88 | 0,87 | 0,86 | 0,85 |
| Mediana | 0,97 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,87 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,85 |
| Desv. Pad. | 0,15 | 0,15 | 0,14 | 0,14 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | 0,12 | 0,12 |
| Mínimo | 0,70 | 0,68 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,66 | 0,66 | 0,66 | 0,65 | 0,65 |
| Máximo | 1,22 | 1,20 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,10 | 1,08 | 1,06 | 1,04 | 1,02 | 1,00 |

| Grupo 2 | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| Média | 1,25 | 1,14 | 1,09 | 1,03 | 0,99 | 0,95 | 0,89 | 0,85 | 0,82 | 0,79 | 0,75 |
| Mediana | 1,08 | 1,03 | 0,97 | 0,93 | 0,91 | 0,88 | 0,85 | 0,83 | 0,81 | 0,79 | 0,76 |
| Desv. Pad. | 1,09 | 0,79 | 0,70 | 0,62 | 0,57 | 0,54 | 0,38 | 0,31 | 0,27 | 0,25 | 0,21 |
| Mínimo | 0,39 | 0,39 | 0,38 | 0,38 | 0,37 | 0,36 | 0,32 | 0,33 | 0,35 | 0,31 | 0,31 |
| Máximo | 6,79 | 5,05 | 4,47 | 4,01 | 3,68 | 3,48 | 2,37 | 1,83 | 1,49 | 1,34 | 1,00 |

Considerando informações do estado completo do mercado, para cada critério de risco (α_i) adotado, os ativos dados como eficientes na Tabela 8 foram submetidos à proposta de Sharpe. Então, na Tabela 10 é apresentada a alocação dos ativos em onze portfólios, propostos de acordo com a variação do critério de risco (α_i), quando o modelo é abastecido de informações do estado completo do mercado, ou seja, $n=1$. Nesta tabela são listados todos os ativos selecionados no início desta pesquisa, entretanto alguns não foram dados como eficientes pelo modelo CCDEA, e logo não foram submetidos à otimização proposta por Sharpe. É interessante observar que nem todos ativos dados como eficientes serão utilizados na alocação quando submetidos ao modelo de Sharpe.

Conforme discutido anteriormente, quanto mais rigoroso for o modelo CCDEA, por meio do aumento da probabilidade de atendimento das restrições, menos ativos serão dados como eficientes. Tal fato denota que quanto menor o valor de α_i , maior a aversão ao risco. Logo, com redução do critério de risco (α_i), o portfólio tende a ser composto por um menor número de ativos. Este comportamento leva as seguintes classificações: (a) $\alpha_i < 0,5$ pode ser classificado como conservador (averso ao risco), (b) $\alpha_i=0,5$ como risco natural e (c) $\alpha_i > 0,5$ classificado como tomador de risco (SUEYOSHI, 2000; ROTELA JUNIOR *et al.*, 2015b).

A partir de informações do estado total de mercado (*total state* - TS), a Tabela 10 apresenta a participação percentual de cada um dos ativos em onze portfólios propostos a partir da variação do critério de risco, que para mais fácil discussão foram identificados como TS-1 à TS-11.

Tabela 10- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do estado total de mercado.

| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Portfólios | TS-1 | TS-2 | TS-3 | TS-4 | TS-5 | TS-6 | TS-7 | TS-8 | TS-9 | TS-10 | TS-11 |
| DMU1 | 0,046 | 0,048 | 0,050 | 0,054 | 0,057 | 0,061 | 0,068 | 0,080 | 0,097 | 0,107 | 0,139 |
| DMU2 | 0,015 | 0,016 | 0,017 | 0,019 | 0,020 | 0,022 | 0,026 | 0,032 | 0,040 | 0,045 | 0,061 |
| DMU3 | 0,025 | 0,027 | 0,028 | 0,031 | 0,033 | 0,036 | - | - | - | - | - |
| DMU4 | 0,024 | 0,026 | 0,027 | 0,030 | 0,032 | 0,035 | 0,040 | 0,049 | 0,061 | 0,067 | 0,091 |
| DMU5 | 0,008 | 0,009 | 0,010 | 0,012 | 0,014 | 0,017 | 0,021 | 0,028 | - | - | - |
| DMU6 | 0,038 | 0,040 | 0,042 | 0,045 | 0,047 | 0,051 | 0,057 | 0,066 | 0,080 | 0,088 | - |
| DMU7 | 0,017 | 0,018 | 0,019 | 0,021 | 0,022 | 0,024 | 0,027 | 0,032 | - | - | - |
| DMU8 | 0,017 | 0,018 | 0,019 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU9 | 0,013 | 0,014 | 0,014 | 0,016 | 0,017 | 0,019 | - | - | - | - | - |
| DMU10 | 0,028 | 0,029 | 0,031 | 0,033 | 0,035 | 0,038 | 0,043 | 0,052 | - | - | - |
| DMU11 | 0,017 | 0,018 | 0,019 | 0,021 | 0,023 | 0,025 | 0,028 | 0,034 | 0,043 | 0,047 | 0,063 |
| DMU12 | 0,033 | 0,034 | 0,036 | 0,038 | 0,040 | 0,043 | 0,048 | 0,056 | 0,068 | 0,074 | 0,096 |
| DMU13 | 0,021 | 0,022 | 0,023 | 0,025 | 0,027 | 0,029 | 0,033 | 0,040 | 0,050 | 0,055 | 0,074 |
| DMU14 | 0,029 | 0,031 | 0,033 | 0,036 | 0,039 | 0,042 | 0,049 | 0,060 | 0,075 | - | - |
| DMU15 | 0,019 | 0,020 | 0,022 | 0,024 | 0,026 | - | - | - | - | - | - |
| DMU16 | 0,030 | 0,031 | 0,033 | 0,036 | 0,038 | 0,042 | 0,047 | - | - | - | - |
| DMU17 | 0,023 | 0,024 | 0,025 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU18 | 0,003 | 0,004 | 0,004 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU19 | 0,032 | 0,034 | 0,035 | 0,038 | 0,040 | 0,043 | 0,048 | - | - | - | - |
| DMU20 | 0,007 | 0,007 | 0,008 | 0,010 | 0,011 | 0,013 | - | - | - | - | - |
| DMU21 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU22 | 0,004 | 0,005 | 0,005 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,012 | 0,016 | - | - | - |
| DMU23 | 0,007 | 0,007 | 0,008 | 0,010 | 0,011 | 0,012 | 0,015 | 0,019 | 0,025 | 0,028 | - |
| DMU24 | 0,004 | 0,005 | 0,006 | 0,008 | 0,009 | 0,011 | 0,014 | 0,020 | 0,027 | 0,032 | 0,046 |
| DMU25 | 0,027 | 0,028 | 0,029 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU26 | 0,020 | 0,022 | 0,023 | 0,026 | 0,028 | 0,031 | - | - | - | - | - |
| DMU27 | 0,028 | 0,029 | 0,030 | 0,033 | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU28 | 0,011 | 0,012 | 0,012 | 0,014 | 0,015 | 0,017 | 0,020 | 0,025 | - | - | - |
| DMU29 | 0,012 | 0,013 | 0,014 | 0,016 | 0,017 | 0,018 | 0,021 | 0,026 | - | - | - |
| DMU30 | 0,001 | 0,001 | 0,002 | 0,002 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | - | - | - | - |
| DMU31 | 0,006 | 0,007 | 0,008 | 0,010 | 0,011 | - | - | - | - | - | - |
| DMU32 | 0,006 | 0,007 | 0,008 | 0,010 | 0,011 | 0,013 | - | - | - | - | - |
| DMU33 | 0,005 | 0,006 | 0,006 | 0,007 | - | - | - | - | - | - | - |

Tabela 10- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do estado total de mercado (continuação).

| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Portfólios | TS-1 | TS-2 | TS-3 | TS-4 | TS-5 | TS-6 | TS-7 | TS-8 | TS-9 | TS-10 | TS-11 |
| DMU34 | 0,023 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU35 | 0,012 | 0,013 | 0,014 | 0,015 | 0,016 | 0,018 | 0,021 | 0,026 | - | - | - |
| DMU36 | 0,021 | 0,023 | 0,024 | 0,027 | 0,028 | 0,031 | 0,036 | 0,044 | 0,056 | 0,062 | - |
| DMU37 | 0,021 | 0,022 | 0,024 | 0,026 | 0,028 | 0,031 | 0,036 | 0,044 | 0,056 | 0,062 | - |
| DMU38 | 0,010 | 0,011 | 0,011 | 0,012 | 0,013 | 0,014 | 0,017 | 0,020 | 0,025 | - | - |
| DMU39 | 0,022 | 0,023 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU40 | 0,021 | 0,022 | 0,024 | 0,027 | 0,028 | - | - | - | - | - | - |
| DMU41 | 0,021 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU42 | 0,003 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | 0,005 | 0,007 | - | - | - | - | - |
| DMU43 | 0,006 | 0,007 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,010 | 0,012 | - | - | - | - |
| DMU44 | 0,021 | 0,022 | 0,024 | 0,026 | 0,028 | - | - | - | - | - | - |
| DMU45 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,003 | 0,005 | - | - | - | - |
| DMU46 | 0,029 | 0,031 | 0,033 | 0,036 | 0,038 | 0,041 | 0,046 | - | - | - | - |
| DMU47 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,003 | 0,004 | - | - | - | - |
| DMU48 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | 0,007 | 0,008 | 0,010 | 0,013 | - | - | - | - |
| DMU49 | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,009 | 0,010 | 0,012 | 0,015 | 0,020 | 0,028 | 0,032 | 0,046 |
| DMU50 | 0,024 | 0,025 | 0,026 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU51 | 0,022 | 0,023 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU52 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU53 | 0,013 | 0,014 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU54 | 0,023 | 0,024 | 0,026 | 0,028 | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU55 | 0,011 | 0,012 | 0,013 | 0,015 | 0,016 | 0,017 | 0,020 | 0,025 | 0,032 | 0,036 | 0,050 |
| DMU56 | 0,038 | 0,040 | 0,043 | 0,047 | 0,049 | 0,054 | 0,061 | 0,073 | 0,091 | 0,100 | 0,134 |
| DMU57 | 0,020 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU58 | 0,001 | 0,002 | 0,002 | 0,003 | 0,004 | 0,005 | 0,007 | 0,011 | 0,016 | 0,018 | - |
| DMU59 | 0,011 | 0,012 | 0,013 | 0,016 | 0,018 | 0,020 | - | - | - | - | - |
| DMU60 | 0,012 | 0,013 | 0,015 | 0,017 | 0,019 | 0,022 | 0,027 | 0,036 | 0,048 | 0,054 | 0,077 |
| DMU61 | 0,034 | 0,036 | 0,038 | 0,041 | 0,044 | 0,048 | 0,055 | 0,066 | 0,083 | 0,092 | 0,123 |
| TOTAL | 1 |

É interessante observar que, por meio do modelo de alocação de ativos, foram formados onze portfólios (TS-1 a TS-11). Cada coluna representa a ideal proporção do ativo no portfólio, que somados devem dar o valor de 1, ou seja, 100% do investimento. Vale também observar que alguns dos ativos listados na tabela apresentam o símbolo -, que significa que estes ativos não foram dados como eficientes pelo modelo CCDEA. Já, outros ativos apresentam participação 0,000, o que significa que tais ativos foram

zerados pelo modelo clássico da alocação de portfólios. Então, este ativo não irá compor o portfólio em questão. Esta mesma leitura vale para a Tabela 11.

A Tabela 11 apresenta a participação dos ativos em outros onze portfólios, propostos de acordo com a variação do critério de risco (α_i) quando o modelo é abastecido somente com informações de períodos de baixa do mercado (*worst state-WS*). É interessante observar que, quando o modelo foi abastecido de informações de períodos de baixa do mercado, um menor número de ativos foi dado como eficiente. Apenas alguns destes, quando submetidos à proposta de Sharpe, foram selecionados para compor os portfólios, o que justifica a participação igual à zero nas colunas das Tabelas 9 e 10.

Estes onze portfólios propostos a partir da variação do critério de risco, para mais fácil discussão foram identificados como Portfólios WS-1 à WS-11.

Tabela 11- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do período de baixa do mercado.

| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Portfólios | WS-1 | WS-2 | WS-3 | WS-4 | WS-5 | WS-6 | WS-7 | WS-8 | WS-9 | WS-10 | WS-11 |
| DMU1 | 0,176 | 0,176 | 0,188 | 0,195 | 0,195 | 0,203 | 0,232 | 0,235 | 0,235 | 0,235 | 0,235 |
| DMU2 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| DMU3 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU4 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| DMU5 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU6 | 0,093 | 0,093 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU7 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU8 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU9 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU11 | 0,027 | 0,027 | 0,035 | 0,040 | 0,040 | 0,046 | 0,065 | 0,067 | 0,067 | 0,067 | 0,067 |
| DMU12 | 0,095 | 0,095 | 0,101 | 0,105 | 0,105 | 0,110 | 0,126 | 0,127 | 0,127 | 0,127 | 0,127 |
| DMU13 | 0,056 | 0,056 | 0,065 | 0,071 | 0,071 | 0,076 | 0,098 | 0,101 | 0,101 | 0,101 | 0,101 |
| DMU14 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU15 | 0,041 | 0,041 | 0,049 | 0,053 | 0,053 | - | - | - | - | - | - |
| DMU16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU17 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU18 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU19 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU20 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU21 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU22 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - |

Tabela 11- Alocação dos ativos nos portfólios otimizados a partir de informações do período de baixa do mercado (continuação).

| (α_i) | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Portfólios | WS-1 | WS-2 | WS-3 | WS-4 | WS-5 | WS-6 | WS-7 | WS-8 | WS-9 | WS-10 | WS-11 |
| DMU23 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,015 | - | - | - | - |
| DMU24 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,003 | 0,003 | 0,006 | 0,018 | 0,019 | 0,019 | 0,019 | 0,019 |
| DMU25 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU26 | 0,097 | 0,097 | 0,107 | 0,113 | 0,113 | 0,119 | - | - | - | - | - |
| DMU27 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU28 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU29 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU30 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU31 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU32 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU33 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU34 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU35 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - |
| DMU36 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - |
| DMU37 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| DMU38 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU39 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU40 | 0,045 | 0,045 | 0,052 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU41 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU42 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU43 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU44 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU45 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU46 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU47 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU48 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU49 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| DMU50 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU51 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU52 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU53 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU54 | 0,046 | 0,046 | 0,054 | 0,058 | 0,058 | 0,063 | - | - | - | - | - |
| DMU55 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,014 | 0,015 | 0,015 | 0,015 | 0,015 |
| DMU56 | 0,166 | 0,166 | 0,176 | 0,182 | 0,182 | 0,188 | 0,212 | 0,214 | 0,214 | 0,214 | 0,214 |
| DMU57 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU58 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU59 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| DMU60 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| DMU61 | 0,158 | 0,158 | 0,172 | 0,179 | 0,179 | 0,188 | 0,219 | 0,222 | 0,222 | 0,222 | 0,222 |
| TOTAL | 1 |

Na Tabela 11 é apresentada a participação ideal de cada ativo em cada um dos portfólios propostos. Novamente, vale lembrar que os ativos cuja participação foi substituída pelo símbolo -, foram os ativos que não foram considerados eficientes pelo modelo CCDEA. E, os ativos com participação 0,000, foram os ativos desconsiderados, pelo modelo de Sharpe (1963), para compor o portfólio.

Na Tabela 12, para cada portfólio otimizado a partir de informações completas do mercado, são apresentados o critério de risco adotado (α_i), beta da carteira (β), resultados de retorno (R_E e R), desvio-padrão (DP), índice Sharpe (S_R) obtidos e o número de ativos (N).

Tabela 12- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações do estado total de mercado.

| | TS-1 | TS-2 | TS-3 | TS-4 | TS-5 | TS-6 | TS-7 | TS-8 | TS-9 | TS-10 | TS-11 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| α_i | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| β | 0,702 | 0,700 | 0,691 | 0,691 | 0,763 | 0,713 | 0,680 | 0,689 | 0,668 | 0,674 | 0,616 |
| R_E | 1,07% | 1,07% | 1,06% | 1,07% | 1,09% | 1,07% | 1,06% | 1,06% | 1,05% | 1,06% | 1,03% |
| DP | 8,80% | 8,51% | 8,71% | 8,90% | 8,69% | 8,87% | 8,97% | 8,95% | 8,70% | 8,61% | 9,65% |
| R | -3,05% | -2,68% | -3,33% | -2,10% | -1,00% | -0,22% | 0,35% | 0,39% | 2,10% | 1,54% | 2,96% |
| S_R | -0,467 | -0,440 | -0,504 | -0,356 | -0,240 | -0,145 | -0,079 | -0,074 | 0,120 | 0,055 | 0,200 |
| N | 57 | 54 | 52 | 48 | 45 | 41 | 34 | 26 | 19 | 17 | 12 |
| RAA | -1,59% | -1,12% | -1,84% | 0,05% | 1,48% | 2,57% | 3,90% | 4,70% | 7,44% | 6,53% | 9,31% |

Já na Tabela 13 são apresentadas as mesmas informações, porém para os portfólios otimizados a partir das informações de períodos de baixa do mercado.

Tabela 13- Resultados por critério de risco dos portfólios otimizados com informações do período de baixa do mercado.

| | WS-1 | WS-2 | WS-3 | WS-4 | WS-5 | WS-6 | WS-7 | WS-8 | WS-9 | WS-10 | WS-11 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| α_i | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| β | 0,458 | 0,458 | 0,446 | 0,444 | 0,444 | 0,438 | 0,432 | 0,429 | 0,429 | 0,429 | 0,429 |
| R_E | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,95% | 0,95% | 0,95% | 0,95% | 0,95% |
| DP | 7,67% | 7,67% | 8,16% | 8,05% | 8,05% | 8,38% | 8,36% | 8,32% | 8,32% | 8,32% | 8,32% |
| R | 2,52% | 2,52% | 2,65% | 3,85% | 4,03% | 5,34% | 5,73% | 5,73% | 5,73% | 5,73% | 5,73% |
| S_R | 0,202 | 0,203 | 0,206 | 0,358 | 0,358 | 0,366 | 0,525 | 0,575 | 0,575 | 0,575 | 0,575 |
| N | 11 | 11 | 11 | 10 | 10 | 10 | 9 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| RAA | 5,58% | 5,58% | 5,42% | 6,62% | 6,62% | 7,24% | 8,91% | 9,16% | 9,16% | 9,16% | 9,16% |

Para o cálculo do beta da carteira (β), utilizou-se o beta médio individual dos ativos e multiplicou-se pela proporção ideal de cada ativo no portfólio proposto. Já, o

retorno esperado (R_E) pôde ser calculado por meio da equação do CAPM, considerando o beta histórico dos ativos; o retorno (R) apresentado na tabela é o retorno no período de validação; e o desvio-padrão (DP) foi calculado com base em informações diárias. E, por fim, o índice Sharpe pôde ser calculado conforme apresentado no capítulo 2.2.7.

A principal discussão a ser realizada neste ponto do trabalho é a de mostrar a importância da informação dos períodos de crise e recessão do mercado para a otimização robusta de portfólios, quando otimizados por meio do modelo CCDEA em conjunto com modelos clássicos da alocação de ativos. Então, as Tabelas 11 e 12 permitirão análises e comparações entre os portfólios otimizados a partir de informações completas do mercado (portfólios TS-1 ao TS-11) e os que foram otimizados a partir de informações de período de baixa do mercado (portfólios WS-1 ao WS-11). Para isso, os portfólios serão comparados aos pares, de acordo com o critério de risco adotado (α_i).

Comparando-se os resultados de S_R obtidos pelos portfólios TS-1 e WS-1, apresentados nas Tabelas 11 e 12, pode-se observar que o portfólio TS-1 apresentou um S_R de -0,467, enquanto o portfólio WS-1 apresentou o valor de 0,202. Em ambos os casos, foi avaliada a eficiência dos ativos, considerando α_i igual a 60%. Os 61 ativos inicialmente propostos foram avaliados pelo modelo CCDEA com relação a sua eficiência, e os resultados para ambos os estados contemplados na pesquisa foram apresentados nas Tabelas 7 e 8. No portfólio TS-1, após a alocação pelo modelo de Sharpe, 57 ativos foram utilizados para compor a carteira. Já no portfólio WS-1, a partir da amostra inicial, apenas 11 foram selecionados ao final do processo de otimização.

Na comparação entre os portfólios TS-2 e WS-2, ambos otimizados considerando um critério de risco igual a 59%, observa-se que o portfólio TS-2 apresentou um S_R de -0,440, sendo composto por 54 ativos. Já o portfólio WS-2 apresentou um S_R de 0,203, sendo composto por 11 ativos ao final da alocação pelo modelo de Sharpe (1963).

Quando adotado um critério de risco igual a 58%, foram propostos os portfólios TS-3 e WS-3, que apresentaram valores de S_R igual a -0,504 e 0,206, respectivamente. A otimização neste caso se deu da mesma maneira que nos anteriores, ou seja, partiu-se inicialmente da amostra inicial composta por 61 ativos, cada qual em seu estado de mercado. E, com o auxílio do modelo CCDEA identificou-se os ativos eficientes, e estes

foram submetidos à proposta de Sharpe (1963). Ao fim do processo, para compor os portfólios TS-3 e TS-4 foram selecionados, respectivamente, 52 e 11 ativos.

Adotando-se a mesma estratégia, porém considerando-se o critério de risco igual a 57%, e com informações completas do mercado, propôs-se o portfólio TS-4, cujo S_R obtido foi de -0,356, sendo este composto por 48 ativos. Entretanto, quando o modelo CCDEA foi abastecido de informações de períodos de baixa do mercado, ao fim do processo, propôs-se o portfólio WS-4, composto de apenas dez ativos, cujo S_R obtido foi de 0,358.

Os portfólios TS-5 e WS-5 foram otimizados a partir de informações completas do período e de períodos de baixa do mercado, respectivamente. Para o portfólio TS-5, composto por 45 ativos, obteve-se um S_R igual a -0,240, enquanto que para o portfólio WS-5, composto por apenas dez ativos, o valor obtido de S_R foi igual a 0,358.

Desta vez, quando adotado o critério de risco igual a 55%, considerando as informações completas do período, propôs-se o portfólio TS-6. Quando consideradas as informações apenas de períodos de baixa do mercado, propôs-se o portfólio WS-6. Ao final da alocação, os portfólios TS-6 e WS-6 foram compostos por 41 e dez ativos, respectivamente. E, quanto ao S_R , os valores obtidos foram de -0,145 para o portfólio TS-6 e 0,366 para o portfólio WS-6.

Para o critério de risco igual a 54% foram propostos os portfólios TS-7 e WS-7, nos quais, após a determinação da alocação, 34 e nove ativos compuseram tais portfólios, respectivamente. Com relação ao S_R , para o portfólio TS-7 o valor obtido foi de -0,079 enquanto que para o portfólio WS-7 foi de 0,525.

Em ambos os estados, quando adotado o critério de risco igual a 53%, foram propostos os portfólios TS-8 e WS-8, compostos ao fim da otimização por 26 e oito ativos, respectivamente. O S_R obtido para tais portfólios foi de -0,074 e 0,575, respectivamente.

Considerando-se o critério de risco igual a 52%, e com informações completas do mercado, propôs-se o portfólio TS-9, cujo S_R obtido foi de 0,120, sendo este composto por 19 ativos. Entretanto, quando os modelos foram abastecidos de informações de períodos de baixa do mercado, ao fim do processo, propôs-se o portfólio WS-9, composto de apenas oito ativos, cujo S_R obtido foi de 0,575.

Adotando-se o critério de risco igual a 51%, foram propostos os portfólios TS-10 e WS-10, nos quais, após a determinação da alocação, 17 e oito ativos compuseram tais portfólios, respectivamente. Com relação ao S_R , para o portfólio TS-10 o valor obtido foi de 0,055 enquanto que para o portfólio WS-10 foi de 0,575.

E, por fim, considerando um critério de risco igual a 50% e a partir de informações do estado total de mercado, foi proposto o portfólio TS-11, composto por 17 ativos, no qual o S_R obtido foi de 0,200. E a partir de informações de períodos de baixa do mercado, para o mesmo critério de risco, foi proposto o portfólio WS-11. Sendo este composto por apenas oito ativos, e o S_R obtido foi de 0,575.

É interessante salientar que para os critérios de risco de 52%, 51% e 50%, o modelo de análise estocástica de eficiência, quando abastecido de informações de períodos de baixa do mercado, indicou como eficientes os mesmo ativos. Logo, a participação dos ativos nas carteiras WS-9, WS-10 e WS-11 foi a mesma. Entretanto, vale lembrar que os valores de eficiência obtidos não foram os mesmos.

Vale observar que os portfólios otimizados a partir de dados históricos de períodos de baixa do mercado obtiveram melhores resultados no índice Sharpe (S_R) do que os otimizados a partir de informações completas, nos diferentes valores de critério de risco (α_i) adotados.

Nas Tabelas 11 e 12 ainda são apresentados os valores de retorno esperado dos portfólios, que foram calculados conforme apresentado anteriormente. Para isso se fez necessário o cálculo dos valores de beta (β) de cada um dos portfólios, também exibidos nestas tabelas. Para os portfólios otimizados a partir de informações completas do mercado (TS-1 ao TS-11), os retornos esperados (R_E) variam entre 1,03% e 1,09% a.m. Já para os portfólios otimizados a partir de informações de períodos de baixa do mercado (WS-1 ao WS-11), os retornos esperados (R_E) se concentram na faixa entre 0,95% e 0,96% a.m.

No que diz respeito às rentabilidades médias (R) obtidas, encontrou-se valores de -3,05%, -2,68%, -3,33%, -2,10%, -1,00%, -0,22%, 0,35%, 0,39%, 2,10%, 1,54% e 2,96% para os portfólios de TS-1 ao TS-11, respectivamente. Já para os portfólios otimizados a partir de períodos de baixa do mercado, WS-1 ao WS-11, as rentabilidade médias (R) efetivamente obtidas foram de 2,52%, 2,52%, 2,65%, 3,85%, 4,03%, 5,34%,

5,73%, 5,73%, 5,73%, 5,73% e 5,73%, respectivamente. Tal fato demonstra a existência de retornos anormais quando comparadas às rentabilidades esperadas, ambos apresentados nas Tabelas 11 e 12.

A partir de informações coletadas dentro do período selecionado para validação, obteve-se o retorno anormal acumulado (RAA) dos portfólios. Realizou-se a comparação dos portfólios aos pares, no qual um deles foi otimizado a partir de informações completas do período ($n=1$) e o outro apenas com informações de períodos de crise do mercado ($n=4$). As Figuras 16 e 17 apresentam o retorno acumulado em pares formados de acordo com o nível de probabilidade ($1-\alpha_i$) de atendimento das restrições do modelo CCDEA.

A Figura 16 (a)-(f) apresenta o retorno acumulado para os pares de portfólios quando adotado o critério de risco de 60% a 55%. Já a Figura 17 (a)-(e) apresenta o retorno acumulado para os pares de portfólios quando adotada a faixa de 54% a 50% para o critério de risco (α_i).

É interessante observar que os portfólios otimizados a partir de informações de períodos de baixa do mercado (WS-1 ao WS-11), apresentaram melhores valores de S_R . Ainda, os valores beta dos portfólios formados, independentemente do critério de risco adotado, foram menores do que os apresentados pelos portfólios TS-1 ao TS-11. Kim *et al.* (2015) afirmam que portfólios ditos robustos, otimizados por meio de modelos estocásticos, alcançam tal robustez devido ao fato de se concentrarem especialmente em informações de períodos de crise do mercado financeiro. Kim *et al.* (2015) ainda acreditam que portfólios robustos tendem a serem compostos por ativos que apresentam um baixo valor de beta, e que tais ativos tendem a se comportar melhor do que ativos que possuem alto valor de beta, em qualquer outra classificação de período.

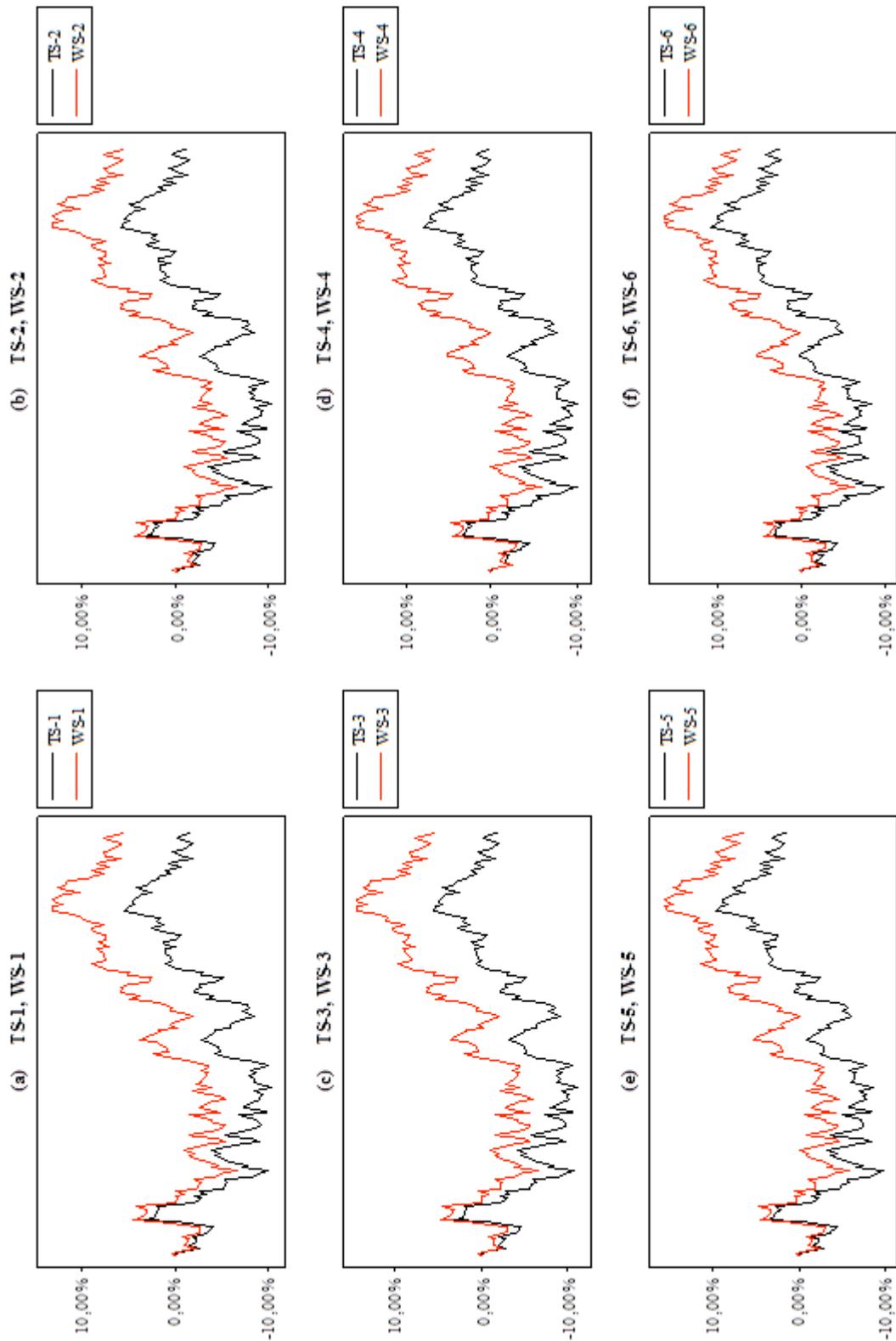


Figura 16- Retorno anormal acumulado dos pares de portfólios considerando a variação do critério de risco (60% - 55%).

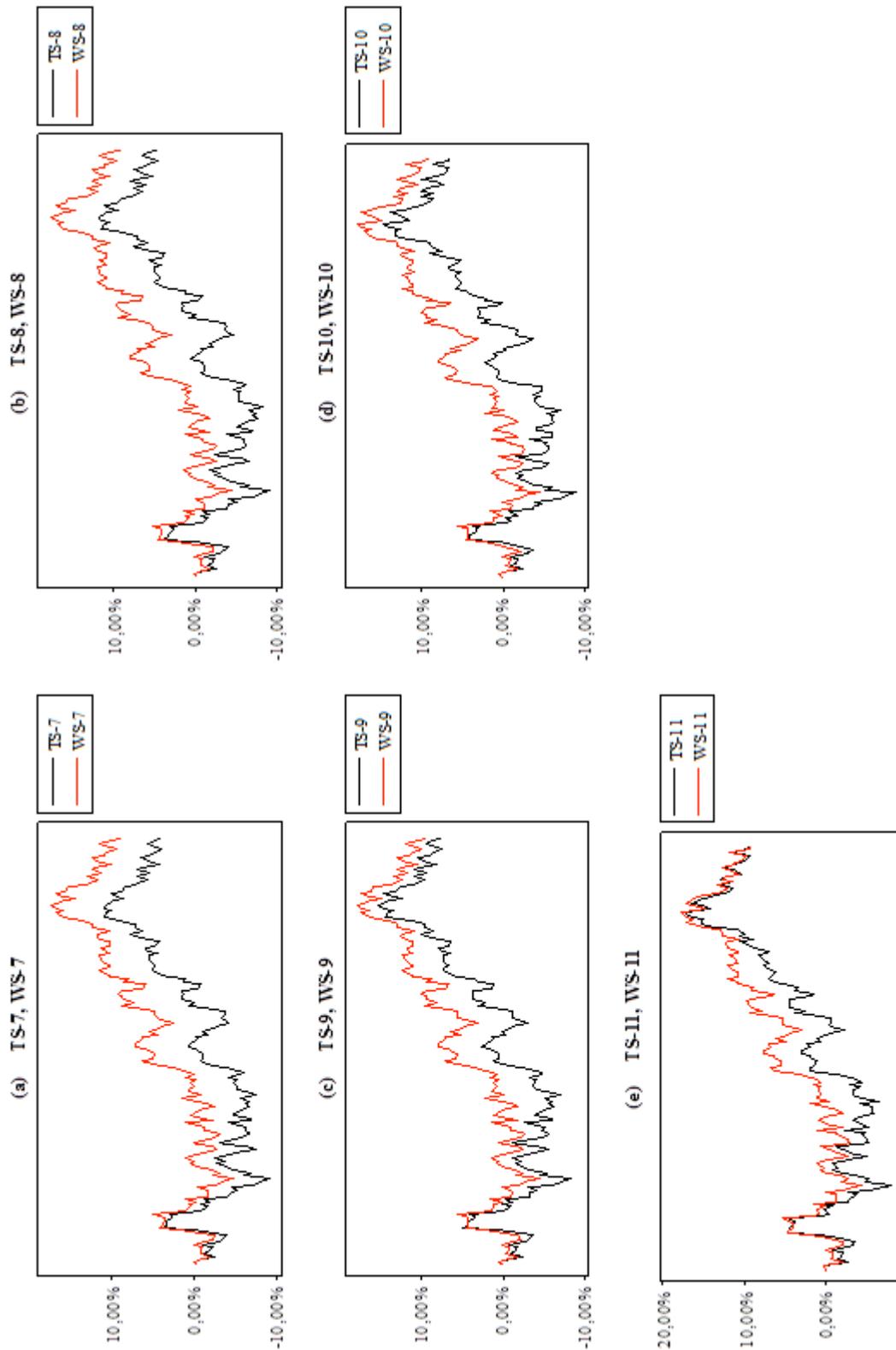


Figura 17- Retorno anormal acumulado dos pares de portfólios considerando a variação do critério de risco (54% - 50%).

Após a apresentação dos gráficos de retorno acumulado, preocupou-se com a realização de um teste estatístico para comparação entre as séries de retorno anormal acumulado obtidos para cada par de portfólios, associados por critério de risco. Então, optou-se pela utilização do teste *2-Sample-t*, que permite verificar se dois grupos independentes se diferem. Então, os resultados obtidos em tais testes, para todos os pares de portfólios, foram valores de *P-value* menores do que 0,05. Então, pode-se afirmar que o retorno anormal acumulado dos portfólios otimizados com informações do estado baixa do mercado é estatisticamente maior do que o retorno acumulado obtido com os portfólios otimizados a partir de informações do período completo. A Figura 18 apresenta o diagrama de caixa (*boxplot*) dos pares de portfólios associados por critério de risco.

Os resultados anteriores evidenciam que o método proposto abastecido de informações de períodos de baixa do mercado apresenta resultados melhores do que quando abastecido de informações do período completo.

Entretanto, para confirmar a aplicabilidade do método apresentado, fez-se necessário uma comparação dos portfólios obtidos com o método proposto e outros portfólios, montados a partir da utilização de modelos clássicos da otimização de portfólios. Para esta comparação, utilizaram-se os modelos propostos por Markowitz (1952) e Sharpe (1963).

Na sequência, a partir de informações do estado total ($n=1$) identificou-se a ideal participação dos ativos por meio do modelo de Markowitz (1952), contudo, maximizando o índice Sharpe da carteira. Este portfólio foi denominado Markowitz comparativo (MC). E a partir do mesmo conjunto de informações, identificou-se a ideal alocação dos ativos por meio do modelo de Sharpe (1963). Este outro portfólio foi denominado Sharpe comparativo (SC). Na Tabela 14 são apresentadas as participações dos ativos nos portfólios comparativos. E também são apresentadas novamente as participações de quatro dos onze portfólios propostos, dois destes (TS-1 e TS-11) abastecidos com o mesmo conjunto de informações das carteiras comparativas, e outros dois (WS-1 e WS-11) a partir de informações de períodos de baixa do mercado ($n=4$). Nesta comparação, optou-se por considerar apenas os portfólios montados considerando critérios de risco de 60% e 50%, valores limites da faixa adotada.

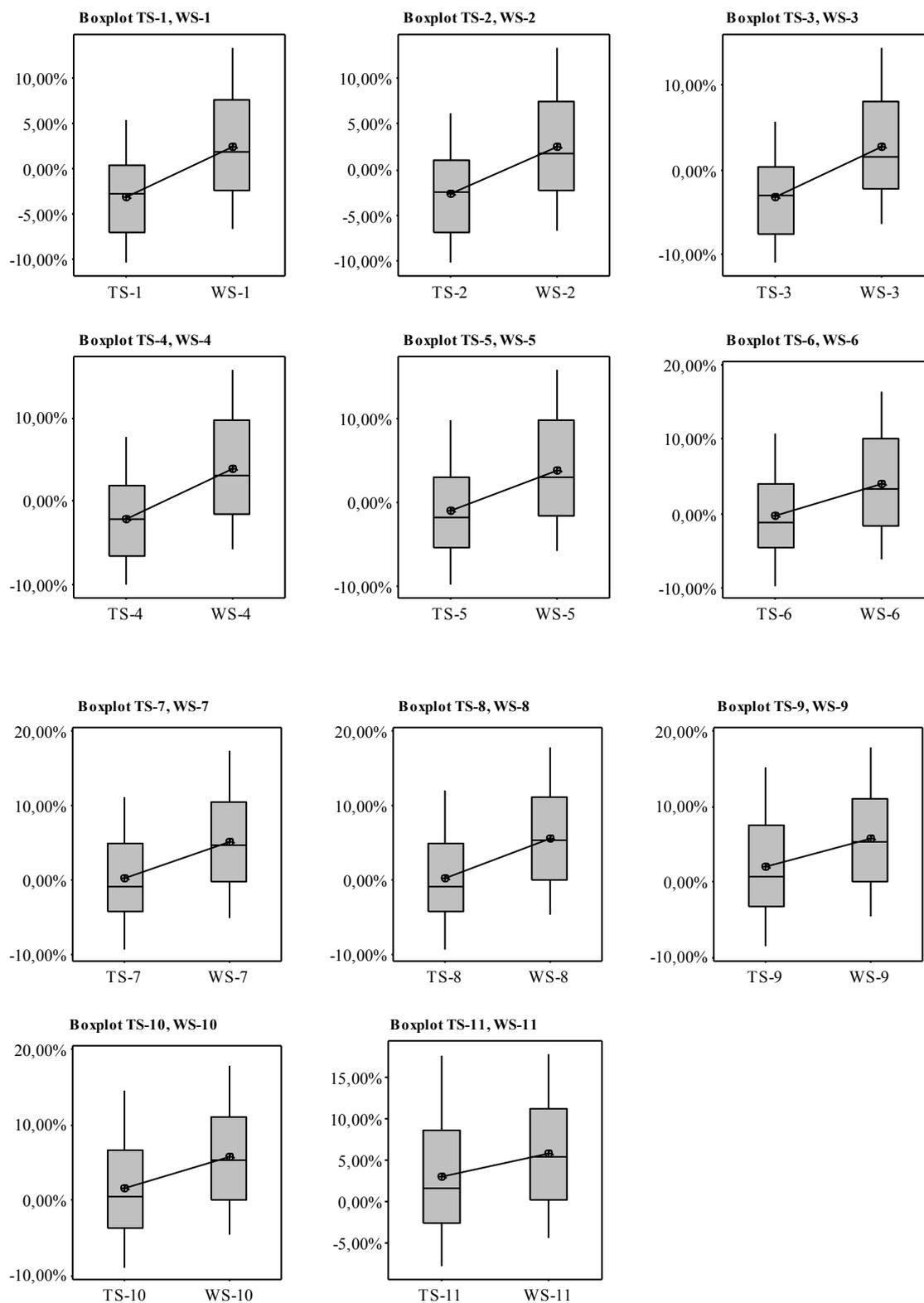


Figura 18- Diagrama de caixa do retorno acumulado dos pares de portfólios por critério de risco (60% - 50%).

Tabela 14- Alocação dos ativos nos portfólios comparativos e propostos.

| (α_i) | - | - | 60% | 60% | 50% | 50% |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Portfólios | MC | SC | TS-1 | WS-1 | TS-11 | WS-11 |
| DMU1 | 0,171 | 0,046 | 0,046 | 0,176 | 0,139 | 0,235 |
| DMU2 | 0,000 | 0,014 | 0,015 | 0,000 | 0,061 | 0,000 |
| DMU3 | 0,000 | 0,025 | 0,025 | - | - | - |
| DMU4 | 0,000 | 0,024 | 0,024 | 0,000 | 0,091 | 0,000 |
| DMU5 | 0,000 | 0,007 | 0,008 | 0,000 | - | - |
| DMU6 | 0,090 | 0,038 | 0,038 | 0,093 | - | - |
| DMU7 | 0,000 | 0,017 | 0,017 | 0,000 | - | - |
| DMU8 | 0,000 | 0,017 | 0,017 | - | - | - |
| DMU9 | 0,000 | 0,012 | 0,013 | - | - | - |
| DMU10 | 0,000 | 0,027 | 0,028 | - | - | - |
| DMU11 | 0,000 | 0,017 | 0,017 | 0,027 | 0,063 | 0,067 |
| DMU12 | 0,120 | 0,033 | 0,033 | 0,095 | 0,096 | 0,127 |
| DMU13 | 0,000 | 0,020 | 0,021 | 0,056 | 0,074 | 0,101 |
| DMU14 | 0,000 | 0,028 | 0,029 | - | - | - |
| DMU15 | 0,000 | 0,019 | 0,019 | 0,041 | - | - |
| DMU16 | 0,014 | 0,029 | 0,030 | - | - | - |
| DMU17 | 0,000 | 0,022 | 0,023 | - | - | - |
| DMU18 | 0,000 | 0,003 | 0,003 | - | - | - |
| DMU19 | 0,103 | 0,032 | 0,032 | - | - | - |
| DMU20 | 0,000 | 0,006 | 0,007 | - | - | - |
| DMU21 | 0,000 | 0,013 | - | - | - | - |
| DMU22 | 0,000 | 0,004 | 0,004 | 0,000 | - | - |
| DMU23 | 0,000 | 0,006 | 0,007 | 0,000 | - | - |
| DMU24 | 0,000 | 0,004 | 0,004 | 0,000 | 0,046 | 0,019 |
| DMU25 | 0,083 | 0,027 | 0,027 | - | - | - |
| DMU26 | 0,000 | 0,020 | 0,020 | 0,097 | - | - |
| DMU27 | 0,106 | 0,028 | 0,028 | - | - | - |
| DMU28 | 0,000 | 0,011 | 0,011 | - | - | - |
| DMU29 | 0,000 | 0,012 | 0,012 | 0,000 | - | - |
| DMU30 | 0,000 | 0,001 | 0,001 | - | - | - |
| DMU31 | 0,000 | 0,006 | 0,006 | - | - | - |
| DMU32 | 0,000 | 0,006 | 0,006 | - | - | - |
| DMU33 | 0,000 | 0,005 | 0,005 | - | - | - |
| DMU34 | 0,032 | 0,023 | 0,023 | - | - | - |
| DMU35 | 0,000 | 0,012 | 0,012 | 0,000 | - | - |
| DMU36 | 0,000 | 0,021 | 0,021 | 0,000 | - | - |
| DMU37 | 0,000 | 0,021 | 0,021 | 0,000 | - | 0,000 |
| DMU38 | 0,000 | 0,010 | 0,010 | 0,000 | - | - |
| DMU39 | 0,000 | 0,021 | 0,022 | - | - | - |
| DMU40 | 0,000 | 0,021 | 0,021 | 0,045 | - | - |
| DMU41 | 0,000 | 0,021 | 0,021 | - | - | - |

Tabela 14- Alocação dos ativos nos portfólios comparativos e propostos (continuação).

| (α_i) | - | - | 60% | 60% | 50% | 50% |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Portfólios | MC | SC | TS-1 | WS-1 | TS-11 | WS-11 |
| DMU42 | 0,000 | 0,003 | 0,003 | - | - | - |
| DMU43 | 0,000 | 0,006 | 0,006 | - | - | - |
| DMU44 | 0,000 | 0,020 | 0,021 | - | - | - |
| DMU45 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - |
| DMU46 | 0,017 | 0,029 | 0,029 | - | - | - |
| DMU47 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - |
| DMU48 | 0,000 | 0,003 | 0,003 | - | - | - |
| DMU49 | 0,000 | 0,005 | 0,005 | 0,000 | 0,046 | 0,000 |
| DMU50 | 0,042 | 0,023 | 0,024 | - | - | - |
| DMU51 | 0,000 | 0,022 | 0,022 | - | - | - |
| DMU52 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - |
| DMU53 | 0,000 | 0,013 | 0,013 | - | - | - |
| DMU54 | 0,000 | 0,023 | 0,023 | 0,046 | - | - |
| DMU55 | 0,000 | 0,011 | 0,011 | 0,000 | 0,050 | 0,015 |
| DMU56 | 0,043 | 0,038 | 0,038 | 0,166 | 0,134 | 0,214 |
| DMU57 | 0,000 | 0,020 | 0,020 | - | - | - |
| DMU58 | 0,169 | 0,001 | 0,001 | 0,000 | - | - |
| DMU59 | 0,009 | 0,011 | 0,011 | 0,000 | - | - |
| DMU60 | 0,000 | 0,011 | 0,012 | 0,000 | 0,077 | 0,000 |
| DMU61 | 0,000 | 0,033 | 0,034 | 0,158 | 0,123 | 0,222 |
| TOTAL | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Em seguida, para validação dos resultados obtidos por tais portfólios, utilizou-se o mesmo período de validação utilizado na comparação anterior, ou seja, de novembro de 2014 a junho de 2015.

Na Tabela 15, tanto para os portfólios propostos (TS-1, TS-11, WS-1 e WS-11) quanto para os portfólios comparativos (MC e SC) são apresentados o critério de risco adotado (α_i), beta da carteira (β), resultados de retorno (R_E e R), desvio-padrão (DP), índice Sharpe (S_R) obtidos e número de ativos (N) que o compõem.

Na análise anterior já ficou evidente a vantagem de utilização de informações de períodos de baixa na otimização de portfólios robustos. Entretanto, neste momento comparam-se os portfólios otimizados a partir de uma análise estocástica de eficiência por meio do CCDEA associado ao agrupamento hierárquico e à proposta de Sharpe aos portfólios comparativos otimizados a partir de modelos clássicos e determinísticos da otimização de portfólios.

É interessante observar que os portfólios Markowitz comparativo (MC) e Sharpe comparativo (SC) foram compostos por 13 e 58 ativos ao final da otimização, e apresentaram S_R de -0,272 e -0,460, respectivamente. Novamente fica evidente o melhor desempenho dos portfólios otimizados pelo método proposto a partir de informações de períodos de baixa do mercado.

Os portfólios WS-1 e WS-11 apresentam valores de beta iguais a 0,458 e 0,429, respectivamente, enquanto os portfólios comparativos MC e SC apresentam valores de beta iguais a 0,475 e 0,702.

Tabela 15- Resultados dos portfólios comparativos e dos portfólios propostos.

| | MC | SC | TS-1 | WS-1 | TS-11 | WS-11 |
|------------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|
| α_i | - | - | 60% | 60% | 50% | 50% |
| β | 0,475 | 0,702 | 0,702 | 0,458 | 0,616 | 0,429 |
| R_E | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,96% | 0,95% | 0,95% |
| DP | 7,20% | 8,60 % | 8,80% | 7,67% | 9,65% | 8,32% |
| R | -1,00% | -3,00% | -3,00% | 2,52% | 2,96% | 5,73% |
| S_R | -0,272 | -0,460 | -0,467 | 0,202 | 0,200 | 0,575 |
| N | 13 | 58 | 57 | 11 | 12 | 8 |
| RAA | 1,35% | -1,57% | -1,59% | 5,58% | 9,31% | 9,16% |

A partir de informações coletadas dentro do período selecionado para validação, obteve-se o retorno acumulado (RAA) dos portfólios. Novamente os resultados apresentados na Tabela 15 evidenciam a presença de retornos anormais. A Figura 19 apresenta os retornos acumulados obtidos pelos portfólios em análise.

A Figura 19 (a) apresenta o retorno acumulado dos portfólios propostos, quando adotado o critério de risco de 60%, e dos portfólios comparativos MC e MS. Já a Figura 19 (b) apresenta o retorno acumulado para os portfólios propostos, quando adotado o valor de 50% para o critério de risco (α_i), e também dos portfólios comparativos.

Em seguida, após a apresentação dos gráficos de retorno acumulado, preocupou-se com a realização de um teste estatístico para comparação entre as séries de retornos acumulados obtidos para os portfólios em análise. Então, optou-se pela utilização do teste ANOVA (*analysis of variance*), que permite verificar se grupos independentes se diferem. Então, os resultados obtidos foram valores de *P-value* menores do que 0,05. Então, pode afirmar que os retornos acumulados dos portfólios otimizados com informações do estado de baixa do mercado (WS-1 e WS-11) são estatisticamente

maiores do que os retornos acumulados obtidos com os portfólios otimizados a partir do estado total (TS-1 e TS-11), quando comparados dentro do mesmo critério de risco. E também são estatisticamente maiores do que os retornos acumulados apresentados pelos portfólios comparativos (MC e SC). A Figura 20 apresenta o diagrama de caixa (*boxplot*) dos portfólios em análise.

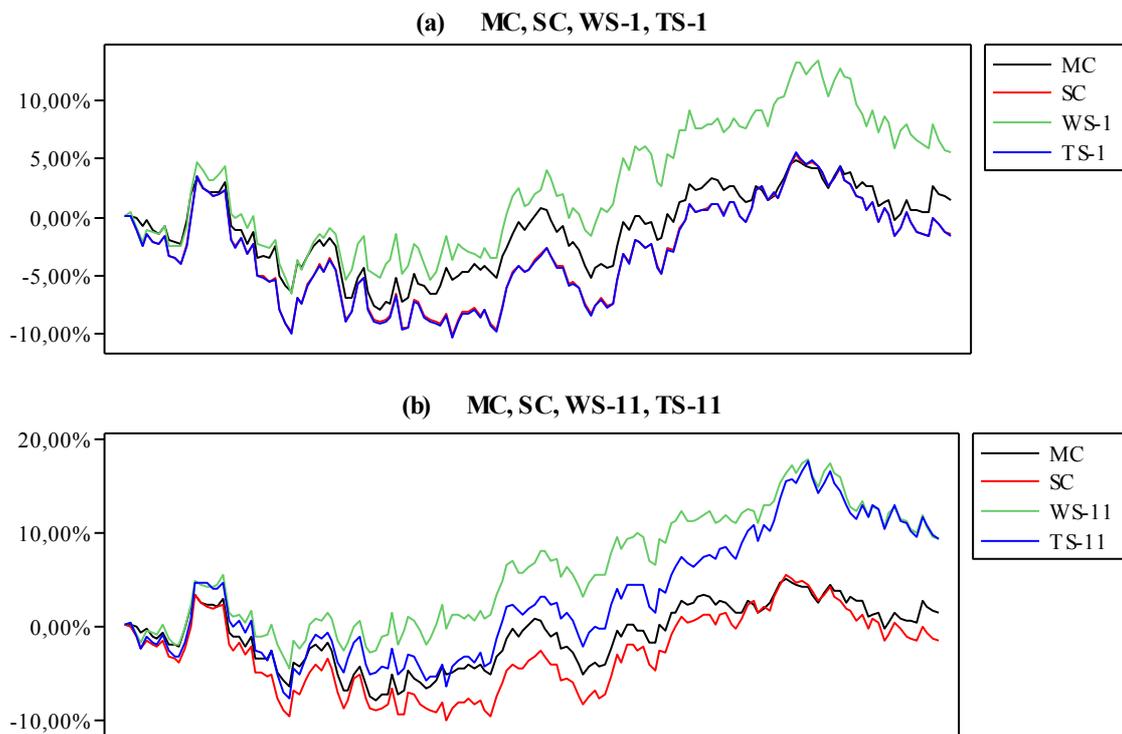


Figura 19- Retorno acumulado dos portfólios propostos e os comparativos.

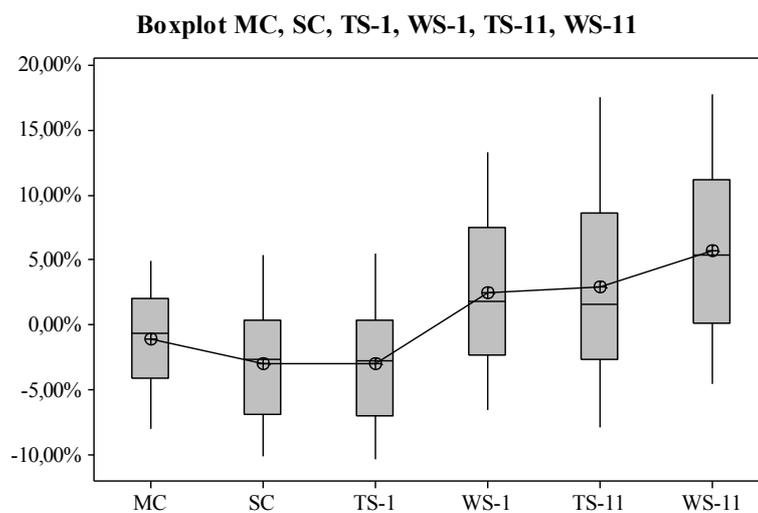


Figura 20- Diagrama de caixa dos portfólios propostos e os comparativos.

6. CONCLUSÕES

6.1. Conclusões gerais

Esta pesquisa teve como objetivo a avaliação estocástica da eficiência de ações negociadas na Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo para a formação de um portfólio robusto. Para isso, foi utilizado o modelo *Chance Constrained Data Envelopment Analysis* (CCDEA) associado ao agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) e ao modelo para alocação de ativos proposto por Sharpe (1963). Com intuito de proporcionar maior robustez aos portfólios, a sequência descrita anteriormente foi abastecida com informações de períodos de baixa do mercado, que correspondem a uma fração do período completo, fração esta referente aos piores retornos do Ibovespa no período.

A otimização proposta não tem a pretensão de substituir abordagens consagradas como as de Markowitz (1952) e Sharpe (1963), mas sim, por meio de dados estocásticos de diferentes variáveis, promover a redução do espaço de busca por ativos ditos eficientes, que posteriormente serão submetidos a abordagens que promovem a ideal alocação dos ativos nos portfólios.

O método proposto se utiliza de indicadores fundamentalistas e de mercado, se diferenciando dos métodos tradicionais da teoria de portfólios (média e variância), para realizar uma análise mais completa dos ativos por meio de uma avaliação da eficiência, utilizando para isso variáveis definidas como *inputs* e *outputs*. Nesta pesquisa, optou-se pela utilização do retorno, liquidez do ativo, lucro-preço (LP), beta, preço-lucro (PL) e volatilidade. Entretanto, o modelo permite a adoção de outros indicadores que também representem os interesses dos investidores, sendo estes fundamentalistas ou de mercado.

A utilização do agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) permitiu o agrupamento dos ativos com maior grau de similaridade levando em consideração as diferentes variáveis adotadas, tanto para os valores de média quanto de variância. E, novamente a aplicação do CCDEA se mostrou viável, proporcionando uma excelente discriminação das DMU's.

A variação do nível probabilidade de atendimento das restrições $(1-\alpha_i)$ do modelo CCDEA permite atender às exigências de investidores com diferentes atitudes

frente ao risco, desde o mais conservador ao mais tomador de risco. Quanto maior o rigor no atendimento de tais restrições, menor será o valor resultante na análise de eficiência, assim resultando em um número menor de ativos eficientes.

A alteração do critério de risco (α_i) entre os valores de 0,5 e 0,6, variados em 0,01, faixa esta que possibilitou melhor discriminação das unidades de análise, permitiu a formação de onze portfólios para cada cenário adotado. Considerando informações do estado completo, foram apresentados os portfólios TS-1 ao TS-11. E, para as informações de períodos de baixa do mercado foram propostos os portfólio WS-1 ao WS-11. Além disso, foram propostos os portfólios Markowitz comparativo (MC) e Sharpe comparativo (SC), otimizados a partir dos consagrados modelos da otimização de portfólios propostos por Markowitz (1952) e Sharpe (1963). Estes últimos foram abastecidos de informações sem qualquer preocupação com diferenciação sobre estados do mercado.

Quando comparados os portfólios TS-1 ao TS-11 e WS-1 ao WS-11, os portfólios otimizados a partir de informações de períodos de baixa do mercado apresentaram, no período de validação considerado, um melhor desempenho medido pelo índice Sharpe (S_R). O resultado se alinha a afirmação de Kim *et al.* (2015), ou seja, a otimização robusta permite a montagem de portfólios que alcançam sua robustez concentrando-se especialmente em informações de períodos de baixa do mercado.

De forma geral, os portfólios formados a partir do método proposto (WS-1 ao WS-11) apresentaram um melhor desempenho medido pelo índice Sharpe (S_R), e também no acúmulo de retornos anormais no período de validação. As médias das séries de retornos anormais se mostraram estatisticamente maiores do que as obtidas por todos os portfólios comparativos.

Outro fato que vale ser destacado é que, para cada critério de risco adotado, foi obtido um menor valor de beta pelos portfólios otimizados a partir de informações de períodos de recessão do mercado quando comparados aos abastecidos por informações de todo o período ou ainda os portfólios comparativos (MC e SC). Portfólios resultantes da otimização robusta tendem a ser compostos por ativos com baixos valores de beta, que apresentam bom comportamento em qualquer classificação de estado do mercado (*bull ou bear market*).

Um benefício resultante desta otimização é o reduzido número de ativos que compõem os portfólios. Mas esta redução do espaço de busca é alcançada principalmente com o aumento da exigência no nível de atendimento das restrições do modelo CCDEA. Este fato, associado à manutenção sob controle do risco observado, pode gerar economias referentes ao custo de rebalanceamento dos portfólios, gerando ganhos indiretos aos investidores.

A Análise Envoltória de Dados (DEA) já vem sendo utilizada na otimização de portfólios, e pode-se observar que a abordagem estocástica, *Chance Constrained Data Envelopment Analysis* (CCDEA) também permite a redução no espaço de busca por ativos eficientes, considerando diferentes variáveis. A aplicação do agrupamento hierárquico (*Hierarchical Clustering*) permitiu ao modelo CCDEA uma melhor discriminação dos dados, mesmo com a redução do critério de risco, já que se obteve uma redução no grau de contradição entre as restrições do modelo, fornecidas pelos dados.

Por fim, algumas vantagens foram observadas: avaliação da eficiência sob condições de risco e incerteza; um maior número de informações dos ativos foi utilizado, por meio de diferentes variáveis estocásticas; utilizaram-se variáveis fundamentalistas e de mercado, se diferenciando dos modelos clássicos da teoria de portfólios; a associação do método da análise estocástica de eficiência aos modelos clássicos da otimização de portfólios proporcionou bons resultados; obteve-se um número reduzido de ativos compondo o portfólio, tornando viável sua utilização.

6.2. Sugestões para pesquisas futuras

Há ainda alguns pontos que podem ser avaliados futuramente. Assim, as sugestões para estes estudos podem ser direcionadas para os seguintes tópicos:

- Como dito anteriormente, optou-se pela utilização de indicadores fundamentalistas e de mercado para compor a análise de eficiência. Contudo, não houve um estudo detalhado sobre os indicadores que proporcionam os melhores resultados ao modelo. Então, pode-se realizar uma discussão aprofundada sobre as variáveis ideais a serem utilizadas no modelo CCDEA;

- Sugere-se a comparação do método proposto frente outros métodos da otimização robusta de portfólios identificados na literatura;

- Realizou-se uma associação entre um modelo DEA estocástico e um modelo clássico e determinístico da alocação de investimentos. Porém, após a análise estocástica de eficiência, sugere-se, para estudos futuros, a utilização de modelos estocásticos na alocação dos ativos;

- Ainda, sugere-se o desenvolvimento de um projeto de *software* do método proposto para otimização de portfólios robustos;

- Por fim, sugere-se a aplicação do método proposto a outros mercados, a um número maior de ativos e uma série mais longa de dados.

REFERÊNCIAS

AIGNER, D.; LOVELL, A.; SCHMIDT, P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal Economics*, v. 6. n. 1, 1977.

AMINDOUST, A.; AHMED, S.; SAGHAFINIA, A.; BAHREININEJAD, A. Sustainable supplier selection: A ranking model based on fuzzy inference system. *Applied Soft Computing*, n. 12, p. 1668-1677, 2012.

AMIRTEIRMOORI, A. A DEA two-stage decision processes with shared resources. *Central European Journal of Operations Research*, v. 21, p. 141-151, 2011.

AOUNI, B.; MARTEL, J.; HASSAINE, A. Fuzzy Goal Programming Model: An overview of the current state of the art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, v. 16, n. 5, 2009.

AOUNI, B.; COLAPINTO, C.; LA TORRE, D. Financial portfolio management through the goal programming model: Current state-of-the-art. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 536-545, 2014.

AUER, B.; SCHUHMACHER, F. Performance hypothesis testing with the Sharpe Ratio: The case of hedge funds. *Finance Research Letters*, v. 10, n. 4, p. 196-208, 2013.

AZADI, M.; SAEN, R. F. Developing a new chance-constrained DEA model for suppliers selection in the presence of undesirable outputs. *International Journal of Operational Research*, v. 13, n. 11, p. 44-66, 2012.

AZADI, M.; SAEN, R. F.; TAVANA, M. Supplier selection using chance-constrained data envelopment analysis with non-discretionary factors and stochastic data. *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, v. 10, n. 2, p. 167-196, 2012.

AZADI, M.; JAFARIAN, M.; SAEN, R. F.; MIRHEDAYATIAN, S. M. A new fuzzy DEA model for evaluation of efficiency and effectiveness of suppliers in sustainable supply chain management context. *Computers & Operations Research*, v. 54, p. 274-285, 2015.

BACHILLER P. Effect of ownership on efficiency in Spanish companies. *Management Decision*, v. 47. n. 2, p. 289-307, 2009.

BAE, G.; KIM, W.; MULVEY, J. Dynamic asset allocation for varied financial markets under regime switching framework. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 450-458, 2014.

BAL, H., ORKCU, H. e ÇELEBIOGLU, S. Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. *Computer & Industrial Engineering*, v. 37. n. 1, 2010.

BANKER, R. *Stochastic data envelopment analysis*. Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1986.

BANKER, R.; COOPER, W.; SEIFORD, L.; THRALL, R.; ZHU, J. Returns to scale in different DEA models. *European Journal of Operational Research*, v. 154, n. 2, p. 345-362, 2004.

BEN ABDELAZIZ, F.; AOUNI, B.; EL FAYEDH, R. Multi-objective stochastic programming for portfolio selection. *European Journal of Operational Research*, v. 177, n. 3, 2007.

BERNARD, C.; VANDUFFEL S. Mean–variance optimal portfolios in the presence of a benchmark with applications to fraud detection. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 469-480, 2014.

BERTRAND, J.; FRANSOO, J. Operations Management research methodologies using quantitative modeling. *International Journal of Operations & Production Management*, v. 22, n. 2, 2002.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. *Operations Research*, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004.

BIONDI NETO, L.; MELLO, J.; MEZA, L.; GOMES, E.; BERGIANTE, N. A geometrical approach for Fuzzy DEA frontiers using different T norms. *WSEAS Transactions on Systems*, v. 10, n. 5, p. 127-136, 2011.

BIRGE, J.; LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. New York: Springer, 1997.

BLACK, F.; LITTEMAN, R. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysis Journal*, n. 48, p. 28-43, 1992.

BM&FBOVESPA. *O que a Bolsa faz?*, 2015. Disponível em:
<<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/intros/intro-sobre-a-bolsa.aspx?idioma=pt-br>>
Acesso em: 31 maio, 2015.

BREALEY, R.; MYERS, S.; ALLEN, F. *Principles of Corporate Finance (Finance, Insurance and Real Estate)*. 10. ed. New York: McGraw-Hill Irwin, 2010.

BRODIE, J.; DAUBECHIES, I.; MOL, C.; GIANNONE, D.; LORIS, I. Sparse and stable Markowitz portfolios. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 106, n. 30, 2009.

BRYMAN, A. *Research methods and organization studies*. Londres: Unwin Hyman, 1989.

CALDEIRA, J.; MOURA, G.; SANTOS, A. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. *Revista Brasileira de Economia*, v. 67, n. 1, p. 45-65, 2013.

CAMPBELL, R.; KOEDIJK, K.; KOFMAN, P. Increased correlation in bear markets. *Financial Analysts Journal*, v. 58, n. 1, p. 87-94, 2002.

CAUCHICK MIGUEL, A.; FLEURY, A.; MELLO, C. H. P.; NAKANO, D. N.; TURRIONI, J. B.; HO, L.; MORABITO, R.; MARTINS, R. A.; PUREZA, V. *Metodologia de pesquisa em Engenharia de Produção e gestão de operações*. 1. ed. Editora Campus, 2010.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; LEWIN, A. Y.; SEIDORD, L. M. *Data Envelopment Analysis: theory, methodology and applications*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Chance constrained programming. *Management Science*, v. 6, n. 1, p. 73-79, 1959.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints. *Management Science*, v. 11, n. 1, 1963.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, n. 6, p. 429-444, 1978.

CHEN, Y-C.; CHIU, Y-H.; HUANG, C-W.; TU, C-H. The analysis of bank business performance and market risk—Applying Fuzzy DEA. *Economic Modelling*, v. 32, p. 225-232, 2013.

CHIN, K-S.; WANG, Y-M.; POON, G.; YANG, J-B. Failure mode and effects analysis using a group-based evidential reasoning. *Computers & Operations Research*, v. 36, n. 6, p. 1768-1779, 2009.

CHU, C.; SANTONI, G.; LIU, T. Stock market volatility and regime shifts in returns. *Information Sciences*, v. 94, p. 179-190, 1996.

CHUNG, C. A. *Simulation modeling handbook: a practical approach*. Florida: CRC Press, 2004.

COOK, W.; SEIFORD, L. Data Envelopment analysis (DEA) – Thirty years on. *European Journal of Operational Research*, v. 192, p. 1-17, 2009.

COOK, W.; ZHU, J. *Data Envelopment Analysis: Modelling operational processes and measuring productivity*. Worcester: Create Space Independent Publishing Platform, 2008.

COOK, W.; ZHU, J. *Data Envelopment Analysis – A Handbook on the modeling of internal structures and networks*. New York: Springer Science + Business, 2014.

- COOPER, W.; HUANG, Z.; LI, S. Satisficing DEA models under chance constraints. *Annals of Operational Research*, v. 66, n.4, 1996.
- COOPER, W.; HUANG, Z.; LELAS, V.; OLESEN, O. Chance constrained programming formulations for stochastic characterisations of efficiency and dominance in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, v. 9, p. 53-79, 1998.
- COOPER, W.; SEIFORD, L.; TONE, K. *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, application, references and DEA-Solver Software*, 2. ed. New York: Springer Science + Business, 2007.
- CUI, X.; GAO, J.; LI, X.; LI, D. Optimal multi-period mean–variance policy under no-shorting constraint. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 459-468, 2014.
- DAMODARAN, A. *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2012.
- DAROLLES, S.; GOURIEROUX, C. Conditionally fitted Sharpe performance with an application to hedge fund rating. *Journal of Banking & Finance*, v. 34, p. 578-593, 2010.
- DESAI, A. *Extensions to measure of relative efficiency with an application to educational productivity*. University of Pennsylvania (Dissertação de Doutorado), Philadelphia, 1986.
- DESAI, A.; RATICK, S.; SCHINNAR, A. Data envelopment analysis with stochastic variations in data. *Socio-Economic Planning Sciences*, v. 39, n. 2, p. 147-164, 2005.
- DESPOSTIS, D.; SMIRLIS, Y. Data Envelopment Analysis with Imprecise Data. *European Journal of Operational Research*, v. 140, n. 1, 2002.
- DITRAGLIA, F.; GERLACH, J. Portfolio selection: An extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, v. 37, n. 2, p. 305-323, 2013.
- DUPOCOVÁ, J.; KOPA, M. Robustness of optimal portfolios under risk and stochastic dominance constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 434-441, 2014.
- EDIRISHINGHE, N.; ZHANG, X. Input/output selection in DEA under expert information, with application to financial markets. *European Journal of Operational Research*, v. 207, n. 3, 2010.
- ELING, M.; SCHUHMACHER, F. Does the choice of performance measure influence the evaluation of hedge funds? *Journal of Banking & Finance*, v. 31, n.9, p. 2632-2647, 2007.

EMROUZNEJAD, A.; TAVANA, M. *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis*, 1 ed, New York: Springer Science + Business Media, 2014.

FABOZZI, F.; HUANG, D.; ZHOU, G. Robust portfolio: contributions from operations research and finance. *Annals of Operations Research*, v. 176, p. 191-220, 2010.

FABOZZI, F.; KOLM, P.; PACHAMANOVA, D.; FOCARDI, S. Robust portfolio optimization: Recent trends and future directions. *The Journal of Portfolio Management*, v. 33, n. 3, 2007.

FABOZZI, F.; PETERSON, P. *Financial Management and Analysis*. 2. ed. New Jersey: New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2003.

FAN, Y.; YUAN, X.; QIN, J. Research on China's Regional Cultural Industries' efficiency based on Factor Analysis and BCC & Super Efficiency Model. *International Business Research*, v. 6, n. 7, p. 22-31, 2013.

FARINELLI, S.; FERREIRA, M.; ROSSELLO, D.; THOENY, M.; TIBILETTI, L. Beyond Sharpe Ratio: Optimal asset allocation using different performance ratios. *Journal of Banking & Finance*, v. 32, n. 10, p. 2057-2063, 2008.

FERREIRA, C. M.; GOMES, A. P. *Introdução à Análise Envoltória de Dados – Teoria, Modelos e Aplicação*. Viçosa: Editora UFV, 2009.

FLIEGE, J.; WERNER, R. Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 422-433, 2014.

FRANKFURTER, G.; PHILIPS, H.; SEAGLE, J. Performance of the Sharpe Portfolio selection model: a comparison. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 11, n. 2, p. 195-204, 1976.

GRECHUK, B.; ZABARANIN, M. Inverse portfolio problem with mean-deviation model. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 481-490, 2014.

GUO, P.; TANAKA, H. Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets & Systems*, v. 119, p. 149-160, 2001.

HALDÓRSSON, B.; TUTUNCU, R. An interior-point method for a class of saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 116, n. 3, p. 559-590, 2003.

HATAMI-MARBINI, A.; EMROUZNEJAD, A.; TAVANA, M. A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, v. 214, n. 3, p. 457-472, 2011.

HAWAWINI, G.; VIALLET, C. *Finanças para Executivos – Gestão para a criação de valor*. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

HOMM, U.; PIGORSCH, C. Beyond the Sharpe Ratio: An application of the Aumann-Serrano index to performance measurement. *Journal of Banking & Finance*, v. 36, n. 8, p. 2274-2284, 2012.

JIN, J.; ZHOU, D.; ZHOU, P. Measuring environmental performance with stochastic environmental DEA: The case of APEC economies. *Economic Modelling*, v. 38, 2014.

JABLONSKY, J. Multicriteria approaches for ranking of efficient units in DEA models. *Central European Journal of Operations Research*, v. 20, p. 435-449, 2012.

KAO, C.; LIU, S. Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 133, 2000.

KAO, C.; LIU, S. T. Multi-period efficiency measurement in data envelopment analysis: The case of Taiwanese commercial banks. *Omega*, v. 47, p. 90-98, 2014.

KAO, C. Efficiency decomposition for general multi-stage systems in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 232, n. 1, p. 117–124, 2014.

KAO, L-J.; LU, C-J.; CHIU, C-C. Efficiency measurements using independent component analysis and data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 210, p. 310–317, 2011.

KAPSOS, M.; CHRISTOFIDES, N.; RUSTEM, B. Worst-case robust Omega ratio. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 499-507, 2014.

KIM, J.; KIM, W.; FABOZZI, F. Robust developments in robust portfolios with a worst-case approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 161, n. 1, p. 103-121, 2014.

KIM, W.; KIM, M.; KIM, J.; FABOZZI, F. Robust portfolios that do not tilt factor exposure. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 411-421, 2014.

KIM, W.; KIM, J.; MULVEY, J.; FABOZZI, F. Focusing on the worst state for robust investing. *International Review of Financial Analysis*, v. 39, p. 19-31, 2015.

KOLM, P.; TUTUNCU, R.; FABOZZI, F. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 356-371, 2014.

KUO L.; HUANG S.; WU Y. Operational efficiency integrating the evaluation of environmental investment: the case of Japan. *Management Decision*, v. 48, n. 10, p. 1596–1616, 2010.

LAMPE H.; HILGERS, D. Trajectories of efficiency measurement: A bibliometric analysis of DEA and SFA. *European Journal of Operational Research*, v. 240, n. 1, 2015.

LAND, K.; LOVELL, C. A.; THORE, S. Chance constrained data envelopment analysis. *Managerial and Decision Economics*, v. 14, p. 541-554, 1993.

LEE, H.; CHU, C.; ZHU, J. Super-efficiency DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research*, v. 212, n. 1, p. 141-147, 2011.

LERTWORASIRIKUL, S.; FANG, S.; JOINES, J.; NUTTLE, H. Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 139, 2003.

LEVY, H.; LEVY, M. The benefits of differential variance-based constraints in portfolio Optimization. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 372-381, 2014.

LEUNG, P-L.; NG, H-Y.; WONG, W-K. An improved estimation to make Markowitz's portfolio optimization theory users friendly and estimation accurate with application on the US stock market investment. *European Journal of Operational Research*, v. 222, p. 85-95, 2012.

LI, X.; SHOU, B.; QIN, Z. An expected regret minimization portfolio selection model. *European Journal of Operational Research*, v. 218, n. 2, p. 484-492, 2012.

LIANG, G.; WANG, W. Evaluating human reliability using Fuzzy relation. *Microelectronics Reliability*, v. 33, n. 1, 1993.

LIM, S.; OH, K.; ZHU, J. Use of DEA cross-efficiency evaluation in portfolio selection: An application to Korean stock market. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 1, p. 361-368, 2014.

LIU, J. S.; LU, L. Y. Y.; LU, W.-M.; LIN, B. J. Y. A survey of DEA applications. *Omega*, v. 41, n. 5, p. 893-902, 2013.

LOPES, A. L.; CARNEIRO, M.; SCHNEIDER, A. Markowitz na otimização de carteiras selecionadas por Data Envelopment Analysis – DEA. *Revista Gestão e Sociedade*, v. 4, n. 9, 640-656, 2010.

LOPES, A. L.; LANZER, E.; LIMA, V. M. Avaliação do desempenho de carteiras de ações selecionadas pelo modelo de Análise Envoltória de dados – DEA. Anais do Congresso da Associação dos Analistas e Profissionais de Investimento do Mercado de Capitais, ed. 19, Fortaleza, 2006.

MAHDILOO, M.; TAVANA, M.; SAEN, R.; NOORIZADEH, A. A game theoretic approach to modeling undesirable outputs and efficiency decomposition in data envelopment analysis. *Applied Mathematics and Computation*, v. 244, p. 479-492, 2014.

MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 518-535, 2014.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, Wiley, Yale University Press, 1970, Basil Blackwell, 1991, 1959.

MARKOWITZ, H. Mean-variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 346-355, 2014.

MARTINS, R.; MELLO, C.H.; TURRIONI, J. B. *Guia para elaboração de Monografia e TCC em Engenharia de Produção*. São Paulo: Atlas, 2014.

MARTIC, M.; NOVAKOVIC, M.; BAGGIA, A. Data Envelopment Analysis – Basic models and their utilization. *Organizacija*, v. 42, n. 2, 2009.

MELLO, J. S.; MEZA, L.; GOMES, E.; BIONDI NETO, L. Curso de Análise Envoltória de Dados. XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. *Anais...* Gramado-RS, p. 2520-2547, 2005.

MELLO, J. S.; MEZA, L.; SILVEIRA, J.; GOMES, E. About negative efficiencies in Cross Evaluation BCC input oriented models. *European Journal of Operational Research*, v. 229, n. 3, p. 732-737, 2013.

MINH, N. K.; KHANH, P. V. A Chance-Constrained Data Envelopment Analysis Approach to Problem Provincial Productivity Growth in Vietnamese Agriculture from 1995 to 2007. *Open Journal of Statistics*, n. 1, p. 217-235, 2011.

MIRANDA, R.; MONTEVECHI, J. A.; SILVA, A. F.; MARINS, F. A. A new approach to reducing search space and increasing efficiency in simulation optimization problems via the Fuzzy-DEA-BCC. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2014, Article ID 450367, 2014.

MITROFF, I.; BETZ, F.; PONDY, L.; SAGASTI, F. On managing science in the systems age: two schemas for the study of science as a whole systems phenomenon. *Interfaces*, v. 4, n. 5, 1974.

MORITA, H.; SEIFORD, L. Characteristics on stochastic DEA efficiency. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, v. 42, p. 389-404, 1999.

NAWROCKI, D. N.; CARTER, W. L. Earnings announcements and portfolio selection. Do they add value? *International Review of Financial Analysis*, n. 7, 1998.

OLESEN, O.; PETERSEN, N. Chance constrained efficiency evaluation. *Management Science*, v. 41, p. 442-457, 1995.

PALCZEWSKI, A.; PALCZEWSKI, J. Theoretical and empirical estimates of mean–variance portfolio Sensitivity. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 402-410, 2014.

PASCHOARELLI, R. *Como ganhar dinheiro no Mercado financeiro*, 2 ed. São Paulo: Editora Elsevier, 2008.

PATARI, E.; LEIVO, T.; HONKAPURO, S. Enhancement of equity portfolio performance using data envelopment analysis. *Studies in Economics and Finance*, v. 27, n. 3, p. 223-246, 2010.

PATARI, E.; LEIVO, T.; HONKAPURO, S. Enhancement of equity portfolio performance using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 220, n. 3, p. 786-797, 2012.

POWERS, J.; MCMULLEN, P. Using data envelopment analysis to select efficient large market cap securities. *Journal of Business and Management*, v. 7, n. 2, p. 31-42, 2000.

PREMACHANDRA, I; ZHU, J.; WATSON, J.; GALAGEDERA, D. Best-performing US mutual fund families from 1993 to 2008: Evidence from a novel two-stage DEA model for efficiency decomposition. *Journal of Banking & Finance*, v. 36, n. 12, p. 3302-3317, 2012.

QUIRY, P.; DALLOCCHIO, M.; LE FUR, Y.; SALVI, A. *Corporate Finance: Theory and Practice*. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons Ltd., 2009.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R.; JAFFE, J. *Corporate Finance*, 10. ed. New York: McGraw-Hill Irwin, 2012.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R.; JORDAN, B. *Fundamentals of Corporate Finance*, 8. ed. New York: McGraw-Hill Irwin, 2008.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R.; JAFFE, J.; JORDAN, B. *Corporate Finance: Core Principles & Applications*, 3. ed. New York: McGraw-Hill Irwin, 2010.

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; SALOMON, F. R. Otimização de Portfólios: Análise de Eficiência. *RAE – Revista de Administração de Empresas*, v. 54, n. 4, 2014.

ROTELA JUNIOR, P.; SALOMON, F. R.; PAMPLONA, E. O. ARIMA: An Applied Time Series Forecasting Model for the Bovespa Stock Index. *Applied Mathematics*, n. 5, p. 3383-3391, 2014.

ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; SILVA, A. F.; SALOMON, F. R.; VALERIO, V. E.; CARVALHO, L. A. Data Envelopment Analysis and Fuzzy Theory: Efficiency Evaluation under uncertainty in portfolio optimization. *WSEAS Transactions on Business and Economics*, v. 12, 2015a.

- ROTELA JUNIOR, P.; PAMPLONA, E. O.; ROCHA, L. C.; VALERIO, V. E.; PAIVA, A. P. Stochastic portfolio optimization using efficiency evaluation. *Management Decision*, v. 53, n. 8, 2015b.
- RUBINSTEIN, M. Markowitz "Portfolio Selection": A fifty-year retrospective. *The Journal of Finance*, v. 57, n. 3, 2002.
- SAEN, R. F.; AZADI, M. A chance-constrained data envelopment analysis approach for strategy selection. *Journal of Modelling in Management*, v. 6, n. 2, p. 200-214, 2011.
- SANTOS, A. A. The out-of-sample performance of robust portfolio optimization. *Brazilian Review of Finance*, v. 8, n. 2, 2010.
- SCHALLER, H.; VAN NORDEN, S. Regime switching in stock market returns. *Applied Financial Economics*, n. 7, p. 177-191, 1997.
- SCHUHMACHER, F.; ELING, M. A decision-theoretic for reward-to-risk performance measures. *Journal of Banking & Finance*, v. 36, n. 7, p. 2077-2082, 2012.
- SCHUSTER, M.; AUER, B. A note on empirical Sharpe Ratio dynamics. *Economics Letters*, v. 116, n. 1, p. 124-128, 2012.
- SENGUPTA, J. Data Envelopment Analysis for efficiency measurement in the stochastic case. *Computer and Operational Research*, v. 14, n. 2, 1987.
- SENGUPTA, J. A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 24, n.8-9, p. 259-266, 1992.
- SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, n. 9, 1963.
- SHARPE, W. F. Capital Assets prices: A Theory of Market Equilibrium under conditions of Risk. *Journal of Finance*, v. 19, 1964.
- SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance. *Journal of Business*, v. 39, p. 119-138, 1966.
- SHARPE, W. F. The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, v. 21, n. 1, p. 49-58, 1994.
- SHING, C.; NAGASAWA, H. Interactive decision system in stochastic multi-objective portfolio selection. *International Journal of Production Economics*, v. 60, 1999.
- SILVA, A. F.; MARINS, F. A.; SANTOS, M. V. Programação por Metas, Análise por Envoltória de Dados e Teoria Fuzzy na avaliação da eficiência sob incerteza: Aplicação em minifábricas do segmento de autopeças. *Gestão e Produção*, v. 21, n.3, 2014.

- SILVA, A. F.; MIRANDA, R. C.; MARINS, F. A. Um modelo fuzzy-DEA-game para estratégias de produção sob incerteza. *RAE – Revista de Administração de Empresas*, v. 55, n. 1, 2015.
- SILVAPULLE, P.; GRANGER, C. Large returns, conditional portfolio diversification: a value-at-risk approach. *Quantitative Finance*, n. 1, p. 542-551, 2001.
- SIMAAN, Y. The opportunity cost of mean-variance choice under estimation risk. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n.2, p. 382-391, 2014.
- SIMAR, L.; WILSON, P. Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier model. *Managerial Science*, v. 44, p. 49-61, 1998.
- SIRIOPOULOS, C.; TZIOGKIDIS, P. How do Greek banking institutions react after significant events? – A DEA approach. *Omega*, v. 38, p. 294-308, 2010.
- SMIMOU, K. International portfolio choice and political instability risk: A multi-objective approach. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 546-560, 2014.
- SUEYOSHI, T. Stochastic DEA for restructure strategy: an application to a Japanese petroleum company. *Journal of Financial Economics*, v. 99, n. 1, 2000.
- TALLURI, S.; NARASIMHAN, R.; NAIR, A. Vendor performance with supply risk: a chance constrained DEA approach. *International Journal of Production Economics*, v. 100, n. 2, 2006.
- TIMMER, C. Using probabilistic frontier production function to measure technical efficiency. *Journal of Political Economy*, v. 79, p. 776-794, 1971.
- TOLOO, M.; NALCHIGAR, S. A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU. *Applied Mathematical Modelling*, v. 33, p. 597-604, 2009.
- TU, J.; ZHOU, G. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Omega*, v. 28, p. 385-398, 2000.
- TURNER, C.; STARTZ, R.; NELSON, C. A Markow model of heteroskedasticity, risk, and learning in the stock market. *Journal of Financial Economics*, v. 25, n. 1, p. 3-22, 1989.
- UTZ, S.; WIMMER, M.; HISCHBERGER, M.; STEUER, R. Tri-criterion inverse portfolio optimization with application to socially responsible mutual funds. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 491-498, 2014.
- WEN, M.; LI, H. Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 223, n. 2, 2009.

WU, C.; LI, Y.; LIU, Q.; WANG, K. A stochastic DEA model considering undesirable outputs with weak disposability. *Mathematical Computational Modelling*, v. 56, n. 5-6, p. 980-989, 2013.

YANG, J.; BESSLER, D. Contagion around the October 1987 stock market crash. *European Journal of Operational Research*, v. 184, p. 291-310, 2008.

ZAKAMOULINE, V.; KOEKEBAKKER, S. Portfolio performance evaluation with generalized Sharpe ratios: Beyond the mean and variance. *Journal of Banking & Finance*, v. 33, p. 1242-1254, 2009.

ZANINI, F.; FIGUEIREDO, A. As teorias de carteira de Markowitz e de Sharpe: uma aplicação no mercado brasileiro de ações entre julho/95 e junho/2000. *RAM – Revista de Administração Mackenzie*, v. 6, n. 2, p. 38-64, 2005.

ZHU, J. *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking – Data Envelopment Analysis with Spreadsheets*, 2 ed., Worcester Polytechnic Institute, Worcester – MA: Springer Science + Business Media, 2009.

ZOPOUNIDIS, C.; DOUMPOS, M.; FABOZZI, F. Preface to the Special Issue: 60 years following Harry Markowitz's contributions in portfolio theory and operations research. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 343-345, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A- Tabela dos dados de entrada, saída e resultados de eficiência do estudo preliminar 3.1.1.

| DMU's | V1 | V2 | V3 | P/L | LPA | R1 | R2 | R3 | Eficiência |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|
| - | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>I</i> | <i>O</i> | <i>O</i> | <i>O</i> | <i>O</i> | <i>E</i> |
| DMU1 | 21,32 | 25,14 | 25,67 | 11,08 | 1,62 | -19,87 | -9,86 | -19,92 | 0,84 |
| DMU2 | 25,63 | 17,85 | 25,50 | 17,75 | 1,90 | 2,85 | -5,92 | -15,08 | 0,86 |
| DMU3 | 27,44 | 23,54 | 18,08 | 12,45 | 2,80 | -0,31 | 8,42 | 3,82 | 0,90 |
| DMU4 | 28,32 | 17,51 | 14,20 | 12,57 | 2,69 | 12,48 | 7,87 | 21,83 | 1,00 |
| DMU5 | 28,98 | 18,53 | 32,30 | 6,88 | 3,93 | 2,60 | 5,42 | 13,44 | 1,00 |
| DMU6 | 22,54 | 25,66 | 23,59 | 24,68 | 0,56 | 2,91 | 10,70 | 22,95 | 0,80 |
| DMU7 | 28,07 | 44,06 | 36,65 | -1,49 | -1,84 | 12,41 | -23,39 | -53,70 | 0,79 |
| DMU8 | 26,50 | 23,53 | 16,94 | 10,87 | 0,94 | 4,43 | 8,50 | 3,78 | 0,94 |
| DMU9 | 25,92 | 18,22 | 26,25 | 18,61 | 1,90 | 2,01 | -15,26 | -13,45 | 0,85 |
| DMU10 | 28,00 | 38,06 | 67,34 | -6,31 | -0,35 | 14,39 | -7,41 | -85,45 | 0,85 |
| DMU11 | 21,73 | 27,83 | 35,33 | 10,22 | 1,62 | -18,21 | -19,69 | -29,82 | 0,78 |
| DMU12 | 27,63 | 32,00 | 21,96 | 17,87 | 0,84 | -24,78 | -6,58 | -14,68 | 0,79 |
| DMU13 | 32,46 | 38,35 | 59,20 | -17,15 | -0,65 | -24,29 | -35,52 | -8,36 | 0,83 |
| DMU14 | 28,04 | 18,42 | 21,44 | 16,76 | 3,54 | -12,98 | 84,07 | 18,35 | 1,00 |
| DMU15 | 22,78 | 25,41 | 16,18 | 24,50 | 3,37 | 40,66 | 76,08 | 11,20 | 1,00 |
| DMU16 | 15,52 | 16,35 | 9,72 | 31,33 | 0,67 | 21,05 | 35,80 | 41,01 | 1,00 |
| DMU17 | 17,88 | 21,67 | 38,47 | 4,67 | 5,01 | 19,59 | 61,96 | -21,73 | 1,00 |
| DMU18 | 16,59 | 20,54 | 19,76 | 48,54 | 0,94 | 33,84 | 29,35 | 28,94 | 0,99 |
| DMU19 | 34,74 | 39,68 | 12,65 | 10,88 | 1,61 | -30,01 | 23,05 | 10,12 | 1,00 |
| DMU20 | 31,06 | 63,88 | 25,05 | 47,25 | 0,33 | -8,93 | -36,26 | 23,43 | 0,62 |
| DMU21 | 24,38 | 20,24 | 36,64 | 14,43 | 0,60 | 8,70 | 53,32 | -26,93 | 0,88 |
| DMU22 | 28,93 | 51,45 | 55,47 | 7,88 | 1,10 | 6,23 | 5,18 | -29,57 | 0,68 |
| DMU23 | 30,03 | 31,12 | 34,58 | -30,89 | -0,29 | -19,58 | -24,33 | -43,24 | 1,00 |
| DMU24 | 34,29 | 47,91 | 64,99 | -13,88 | -0,29 | -20,65 | -49,88 | -3,01 | 0,77 |
| DMU25 | 24,36 | 19,64 | 16,95 | 6,32 | 3,86 | 58,30 | 36,53 | 1,29 | 1,00 |
| DMU26 | 23,75 | 28,13 | 40,08 | 9,98 | 0,60 | 7,80 | -2,63 | -18,82 | 0,74 |
| DMU27 | 11,90 | 14,64 | 19,65 | 13,30 | 3,96 | 21,57 | 48,81 | 2,13 | 1,00 |
| DMU28 | 32,42 | 32,37 | 17,92 | 25,43 | 2,89 | 38,58 | 19,72 | 19,43 | 0,87 |
| DMU29 | 32,69 | 34,42 | 54,94 | -30,22 | -0,26 | -20,49 | -42,80 | -1,31 | 1,00 |
| DMU30 | 29,84 | 46,56 | 52,26 | 26,26 | 0,25 | -21,72 | 34,03 | -15,71 | 0,57 |
| DMU31 | 32,07 | 41,41 | 24,84 | 19,26 | 1,90 | 163,50 | 63,06 | -22,28 | 1,00 |
| DMU32 | 25,49 | 28,30 | 21,24 | 24,15 | 2,01 | 34,65 | -8,28 | 25,10 | 0,82 |
| DMU33 | 20,99 | 27,04 | 27,36 | 28,52 | 0,35 | -53,72 | -28,72 | 8,46 | 0,72 |
| DMU34 | 27,29 | 26,52 | 26,93 | 17,55 | 0,96 | 35,06 | 3,03 | 18,51 | 0,82 |
| DMU35 | 28,90 | 27,13 | 24,07 | 40,23 | 0,43 | 6,37 | 25,82 | 27,41 | 0,68 |
| DMU36 | 22,07 | 16,66 | 20,56 | 23,89 | 1,87 | 12,60 | 36,75 | 34,11 | 1,00 |
| DMU37 | 24,79 | 27,38 | 20,28 | 16,61 | 0,85 | 9,56 | 49,94 | 71,73 | 1,00 |
| DMU38 | 29,17 | 49,91 | 57,83 | -4,66 | -0,73 | -1,50 | -23,56 | -63,70 | 0,75 |
| DMU39 | 26,45 | 25,65 | 25,39 | 21,96 | 1,08 | 57,63 | 37,08 | -21,89 | 0,79 |
| DMU40 | 23,96 | 29,47 | 19,39 | 26,95 | 4,02 | 13,76 | 29,78 | 26,87 | 1,00 |

APÊNDICE B- Funções de pertinência triangulares das entradas (*inputs*) do estudo preliminar 3.1.2.

| DMU's | V3 | V2 | V1 | P/L |
|--------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| DMU1 | (7,87; 9,69; 10,70) | (6,66; 7,54; 8,13) | (5,65; 6,69; 7,72) | (6,10; 9,74; 15,79) |
| DMU2 | (5,42; 5,91; 6,63) | (6,87; 7,38; 7,88) | (6,05; 7,07; 8,11) | (9,16; 11,21; 14,02) |
| DMU3 | (4,09; 6,46; 7,40) | (3,49; 4,39; 5,05) | (4,02; 5,96; 8,60) | (9,14; 10,85; 12,63) |
| DMU4 | (3,11; 4,49; 5,74) | (5,55; 6,29; 7,78) | (6,18; 7,38; 8,40) | (14,32; 22,44; 28,44) |
| DMU5 | (6,21; 6,95; 7,56) | (5,42; 7,00; 7,83) | (3,79; 4,94; 6,68) | (5,42; 17,59; 159,89) |
| DMU6 | (10,78; 12,35; 13,64) | (6,82; 8,45; 10,31) | (6,34; 7,35; 8,67) | (6,73; 9,83; 16,44) |
| DMU7 | (5,01; 5,51; 6,28) | (6,03; 6,72; 7,38) | (6,03; 6,97; 7,92) | (7,90; 9,81; 11,39) |
| DMU8 | (8,24; 9,20; 9,94) | (6,10; 8,62; 10,22) | (3,15; 5,32; 3,15) | (3,58; 5,46; 6,94) |
| DMU9 | (4,25; 5,31; 6,35) | (5,40; 5,96; 6,54) | (4,10; 5,77; 6,34) | (15,89; 36,03; 90,81) |
| DMU10 | (3,08; 4,75; 6,40) | (5,40; 6,83; 7,95) | (4,42; 6,00; 6,78) | (10,91; 16,64; 20,80) |
| DMU11 | (6,27; 8,48; 10,16) | (6,26; 8,12; 9,92) | (7,34; 8,25; 9,61) | (10,87; 17,09; 27,55) |
| DMU12 | (3,34; 4,61; 5,65) | (2,87; 3,94; 5,01) | (3,09; 3,91; 4,91) | (19,71; 27,48; 34,83) |
| DMU13 | (6,16; 7,07; 7,77) | (7,35; 8,24; 9,15) | (6,36; 7,61; 8,60) | (9,76; 46,07; 186,79) |
| DMU14 | (5,60; 6,91; 7,72) | (3,02; 4,87; 6,34) | (4,41; 5,65; 7,60) | (7,77; 10,20; 13,13) |
| DMU15 | (5,32; 8,06; 11,49) | (6,21; 10,18; 12,94) | (4,77; 5,51; 6,26) | (3,76; 7,32; 12,84) |
| DMU16 | (5,02; 6,54; 9,48) | (4,79; 5,62; 4,79) | (4,62; 6,05; 6,71) | (4,93; 11,27; 20,21) |
| DMU17 | (3,60; 4,18; 5,62) | (4,46; 5,93; 6,34) | (2,67; 3,50; 4,38) | (8,99; 12,00; 14,07) |
| DMU18 | (2,89; 5,22; 7,36) | (6,94; 7,88; 9,05) | (6,44; 7,39; 8,13) | (17,39; 23,29; 36,50) |
| DMU19 | (4,83; 6,45; 10,62) | (5,89; 10,24; 11,56) | (3,81; 5,06; 5,84) | (7,44; 14,65; 20,82) |
| DMU20 | (5,91; 8,06; 10,11) | (5,03; 5,92; 6,30) | (5,62; 6,79; 7,67) | (6,26; 9,57; 14,81) |
| DMU21 | (4,70; 6,30; 6,88) | (5,01; 7,81; 9,53) | (8,34; 9,24; 9,99) | (16,95; 22,86; 29,39) |
| DMU22 | (5,31; 6,15; 7,24) | (6,05; 6,93; 7,42) | (5,57; 6,51; 7,09) | (18,35; 24,99; 30,68) |
| DMU23 | (5,75; 7,11; 8,13) | (7,99; 9,37; 10,86) | (9,44; 10,21; 11,21) | (14,31; 24,88; 36,27) |
| DMU24 | (4,59; 5,31; 6,07) | (5,41; 6,85; 8,30) | (6,90; 7,84; 8,48) | (17,59; 23,05; 29,20) |

APÊNDICE C- Funções de pertinência triangulares das saídas (*outputs*) do estudo preliminar 3.1.2.

| DMU's | R3 | R2 | R1 | LPA |
|--------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|
| DMU1 | (-2,32; -0,76; 0,72) | (-3,00; -1,07; 1,61) | (-2,60; -1,26; -0,43) | (1,42; 2,23; 3,50) |
| DMU2 | (-0,14; 0,89; 2,39) | (-1,81; -0,15; 1,07) | (-2,48; -0,73; 1,18) | (2,41; 2,69; 3,31) |
| DMU3 | (-1,74; 0,09; 2,32) | (-0,18; 1,02; 1,82) | (-1,39; 0,07; 2,10) | (2,54; 2,68; 2,86) |
| DMU4 | (-0,68; 1,49; 2,68) | (2,58; 3,83; 5,03) | (1,85; 2,97; 4,46) | (0,52; 0,60; 0,67) |
| DMU5 | (-2,17; -0,71; 0,64) | (-1,93; -0,94; 1,05) | (-2,27; -0,72; 1,29) | (0,02; 4,43; 8,03) |
| DMU6 | (-2,49; -1,47; -0,23) | (-4,55; -1,76; 1,18) | (-2,48; -1,59; -0,57) | (1,42; 2,23; 3,50) |
| DMU7 | (-0,72; 0,63; 1,95) | (-1,73; -0,19; 0,85) | (-2,22; -0,63; 1,21) | (0,85; 0,90; 1,05) |
| DMU8 | (-1,96; 0,91; 3,55) | (-2,39; -0,49; 1,22) | (1,98; -0,45; 1,58) | (3,93; 5,55; 5,55) |
| DMU9 | (-0,01; 2,59; 4,61) | (0,08; 1,05; 2,05) | (1,12; 2,24; 3,32) | (0,43; 1,27; 1,84) |
| DMU10 | (1,25; 2,51; 4,48) | (1,56; 3,69; 5,82) | (-0,55; 2,57; 5,95) | (2,23; 2,74; 3,41) |
| DMU11 | (-2,70; -0,82; 0,30) | (-0,85; 1,11; 3,29) | (-4,69; -2,96; -1,01) | (0,62; 1,02; 1,41) |
| DMU12 | (-1,97; 0,18; 2,73) | (1,91; 3,97; 4,76) | (0,23; 1,53; 2,79) | (0,35; 0,57; 0,79) |
| DMU13 | (0,68; 2,23; 3,77) | (1,09; 1,87; 2,89) | (-0,78; 0,49; 2,36) | (0,07; 0,63; 1,07) |
| DMU14 | (-1,29; 1,79; 4,13) | (-0,25; 1,55; 3,22) | (-1,05; 0,44; 2,28) | (2,54; 2,68; 2,86) |
| DMU15 | (-2,48; -0,79; 1,12) | (-1,62; 1,85; 4,98) | (0,50; 2,12; 3,82) | (1,80; 2,54; 3,59) |
| DMU16 | (-4,15; -2,05; 0,09) | (0,52; 2,53; 3,49) | (0,57; 2,42; 3,94) | (1,09; 2,17; 3,86) |
| DMU17 | (-0,98; 0,49; 1,56) | (-0,51; 0,57; 2,92) | (2,60; 2,94; 3,44) | (3,31; 4,12; 4,70) |
| DMU18 | (-1,67; -0,30; 1,45) | (-2,31; -0,15; 1,60) | (1,08; 3,19; 6,04) | (0,88; 1,08; 1,33) |
| DMU19 | (-2,43; 1,59; 4,24) | (-2,04; -0,34; 2,51) | (1,58; 2,45; 3,10) | (0,53; 0,70; 1,14) |
| DMU20 | (-3,31; -1,35; 1,27) | (2,74; 4,62; 5,84) | (1,58; 2,77; 4,29) | (1,79; 2,22; 2,80) |
| DMU21 | (-2,76; -0,54; 2,34) | (-0,16; 1,94; 4,54) | (-1,75; 0,89; 3,02) | (2,57; 2,77; 3,27) |
| DMU22 | (-3,33; -1,09; 0,91) | (0,74; 3,00; 4,80) | (1,42; 2,99; 4,64) | (0,76; 1,01; 1,11) |
| DMU23 | (2,08; 4,15; 6,41) | (0,37; 4,79; 7,39) | (-3,16; -0,96; 1,67) | (0,29; 0,44; 0,78) |
| DMU24 | (-2,80; -0,97; 1,64) | (0,32; 2,97; 5,04) | (-2,72; -0,75; 1,87) | (1,74; 1,92; 2,09) |

APÊNDICE D- Valores de eficiência em função do nível- α do estudo preliminar 3.1.2.

| Alfa (α) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | Eficiência | |
|-------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|----------|
| | | | | | | | | | | | | Pessimista | Otimista |
| DMU1 | (0,10; 0,32) | (0,10; 0,32) | (0,16; 0,34) | (0,21; 0,37) | (0,26; 0,39) | (0,31; 0,40) | (0,36; 0,41) | (0,40; 0,42) | (0,44; 0,43) | (0,47; 0,43) | (0,51; 0,41) | 0,23 | 0,35 |
| DMU2 | (0,81; 0,39) | (0,81; 0,39) | (0,87; 0,36) | (0,92; 0,32) | (0,98; 0,28) | (1,00; 0,24) | (1,00; 0,20) | (1,00; 0,17) | (1,00; 0,15) | (1,00; 0,13) | (1,00; 0,09) | 0,94 | 0,20 |
| DMU3 | (0,77; 0,44) | (0,77; 0,44) | (0,80; 0,41) | (0,84; 0,39) | (0,87; 0,37) | (0,93; 0,34) | (0,98; 0,32) | (1,00; 0,29) | (1,00; 0,27) | (1,00; 0,24) | (1,00; 0,22) | 0,89 | 0,30 |
| DMU4 | (1,00; 0,35) | (1,00; 0,35) | (1,00; 0,30) | (1,00; 0,26) | (1,00; 0,22) | (1,00; 0,18) | (1,00; 0,14) | (1,00; 0,09) | (1,00; 0,04) | (1,00; 0,01) | (1,00; 0,06) | 1,00 | 0,10 |
| DMU5 | (0,03; 1,00) | (0,03; 1,00) | (0,06; 1,00) | (0,09; 1,00) | (0,12; 1,00) | (0,15; 1,00) | (0,18; 1,00) | (0,21; 1,00) | (0,24; 1,00) | (0,27; 1,00) | (0,30; 1,00) | 0,10 | 1,00 |
| DMU6 | (0,08; 0,26) | (0,08; 0,26) | (0,14; 0,28) | (0,19; 0,30) | (0,25; 0,32) | (0,30; 0,34) | (0,36; 0,35) | (0,41; 0,36) | (0,45; 0,38) | (0,50; 0,38) | (0,54; 0,37) | 0,22 | 0,29 |
| DMU7 | (0,51; 0,14) | (0,51; 0,14) | (0,57; 0,10) | (0,62; 0,06) | (0,68; 0,03) | (0,73; 0,02) | (0,78; 0,05) | (0,82; 0,08) | (0,86; 0,09) | (0,90; 0,10) | (0,92; 0,12) | 0,68 | 0,05 |
| DMU8 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU9 | (0,84; 1,00) | (0,84; 1,00) | (0,83; 1,00) | (0,82; 1,00) | (0,81; 1,00) | (0,80; 1,00) | (0,79; 1,00) | (0,78; 1,00) | (0,77; 1,00) | (0,76; 0,98) | (0,75; 0,96) | 0,78 | 0,99 |
| DMU10 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU11 | (0,04; 0,01) | (0,04; 0,01) | (0,07; 0,02) | (0,10; 0,03) | (0,13; 0,03) | (0,15; 0,04) | (0,17; 0,05) | (0,19; 0,06) | (0,21; 0,07) | (0,23; 0,08) | (0,25; 0,09) | 0,10 | 0,03 |
| DMU12 | (0,49; 0,61) | (0,49; 0,61) | (0,49; 0,61) | (0,50; 0,61) | (0,50; 0,62) | (0,51; 0,62) | (0,51; 0,62) | (0,52; 0,62) | (0,53; 0,62) | (0,55; 0,62) | (0,57; 0,62) | 0,48 | 0,59 |
| DMU13 | (0,72; 0,55) | (0,72; 0,55) | (0,64; 0,53) | (0,65; 0,51) | (0,68; 0,48) | (0,71; 0,46) | (0,76; 0,44) | (0,82; 0,42) | (1,00; 0,39) | (1,00; 0,35) | (1,00; 0,31) | 0,76 | 0,41 |
| DMU14 | (0,95; 1,00) | (0,95; 1,00) | (0,92; 1,00) | (0,90; 1,00) | (0,89; 1,00) | (0,92; 1,00) | (0,95; 1,00) | (0,95; 1,00) | (0,94; 1,00) | (0,94; 1,00) | (0,94; 1,00) | 0,93 | 1,00 |
| DMU15 | (0,25; 1,00) | (0,25; 1,00) | (0,30; 1,00) | (0,36; 1,00) | (0,41; 1,00) | (0,46; 1,00) | (0,50; 1,00) | (0,54; 1,00) | (0,57; 1,00) | (0,60; 1,00) | (0,63; 1,00) | 0,39 | 1,00 |
| DMU16 | (0,06; 0,73) | (0,06; 0,73) | (0,11; 0,82) | (0,15; 0,92) | (0,18; 1,00) | (0,20; 1,00) | (0,23; 1,00) | (0,25; 1,00) | (0,27; 1,00) | (0,29; 1,00) | (0,31; 1,00) | 0,14 | 0,91 |
| DMU17 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU18 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU19 | (0,28; 1,00) | (0,28; 1,00) | (0,27; 1,00) | (0,31; 1,00) | (0,33; 1,00) | (0,35; 1,00) | (0,37; 1,00) | (0,39; 1,00) | (0,40; 1,00) | (0,41; 1,00) | (0,43; 1,00) | 0,31 | 1,00 |
| DMU20 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 0,86) | (1,00; 0,75) | (1,00; 0,67) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 0,96 |
| DMU21 | (0,48; 0,38) | (0,48; 0,38) | (0,50; 0,36) | (0,52; 0,35) | (0,54; 0,36) | (0,56; 0,37) | (0,59; 0,37) | (0,61; 0,39) | (0,63; 0,40) | (0,65; 0,40) | (0,67; 0,43) | 0,53 | 0,35 |
| DMU22 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU23 | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | (1,00; 1,00) | 1,00 | 1,00 |
| DMU24 | (0,10; 0,08) | (0,10; 0,08) | (0,15; 0,08) | (0,20; 0,08) | (0,25; 0,08) | (0,29; 0,08) | (0,33; 0,07) | (0,37; 0,07) | (0,41; 0,06) | (0,44; 0,06) | (0,48; 0,05) | 0,22 | 0,05 |

APÊNDICE E- Alocação dos ativos nos portfólios do estudo preliminar 3.1.2.

| | C_C | FDEA-11 | FDEA-6 |
|--------------|----------------------|----------------|---------------|
| DMU1 | 0.00% | - | - |
| DMU2 | 0.00% | - | - |
| DMU3 | 0.43% | - | - |
| DMU4 | 1.27% | 0.00% | - |
| DMU5 | 0.00% | 0.00% | - |
| DMU6 | 0.00% | - | - |
| DMU7 | 0.00% | - | - |
| DMU8 | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| DMU9 | 5.16% | - | - |
| DMU10 | 14.63% | 20.72% | 25.69% |
| DMU11 | 1.99% | - | - |
| DMU12 | 0.94% | - | - |
| DMU13 | 7.56% | - | - |
| DMU14 | 0.00% | 0.00% | - |
| DMU15 | 0.76% | 0.00% | - |
| DMU16 | 0.00% | - | - |
| DMU17 | 29.31% | 31.05% | 32.62% |
| DMU18 | 7.98% | 12.73% | 18.22% |
| DMU19 | 10.64% | 11.11% | - |
| DMU20 | 0.96% | - | - |
| DMU21 | 0.00% | - | - |
| DMU22 | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| DMU23 | 18.38% | 24.39% | 23.48% |
| DMU24 | 0.00% | - | - |
| TOTAL | 100% | 100% | 100% |

APÊNDICE F- Dados de entrada e saída do estudo preliminar 3.1.3.

| DMUs | Retorno | | LPA | | Volatilidade | | PL | | Beta | |
|-------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 |
| DMU1 | -1,579 | 4,126 | 0,232 | 0,028 | 7,699 | 0,770 | 26,122 | 4,862 | 0,710 | 0,078 |
| DMU2 | 2,438 | 2,478 | 0,615 | 0,003 | 5,693 | 2,862 | 23,564 | 9,900 | 0,197 | 0,005 |
| DMU3 | 0,273 | 3,684 | 0,557 | 0,000 | 6,947 | 0,771 | 20,846 | 7,237 | 1,083 | 0,014 |
| DMU4 | 0,516 | 5,257 | 2,204 | 1,121 | 6,448 | 2,529 | 11,904 | 21,058 | 0,496 | 0,025 |
| DMU5 | 0,335 | 4,436 | 3,020 | 4,493 | 5,026 | 0,797 | 7,286 | 12,824 | 0,415 | 0,004 |
| DMU6 | 1,194 | 2,174 | 2,746 | 0,021 | 5,906 | 1,840 | 10,388 | 2,459 | 0,811 | 0,004 |
| DMU7 | 0,406 | 1,084 | 2,746 | 0,021 | 5,638 | 1,967 | 10,813 | 0,858 | 0,857 | 0,013 |
| DMU8 | -1,264 | 0,903 | 2,669 | 5,551 | 7,172 | 1,728 | 12,859 | 73,360 | 0,878 | 0,009 |
| DMU9 | 0,103 | 2,128 | 4,346 | 0,408 | 8,004 | 4,939 | 5,723 | 0,716 | 1,221 | 0,006 |
| DMU10 | 1,829 | 1,801 | 1,220 | 0,166 | 5,863 | 0,469 | 34,524 | 89,771 | 0,451 | 0,005 |
| DMU11 | -4,406 | 5,128 | -0,380 | 0,543 | 12,889 | 6,394 | -0,124 | 32,578 | 1,658 | 0,023 |
| DMU12 | 1,497 | 3,100 | 0,646 | 0,017 | 4,345 | 0,877 | 26,549 | 14,385 | 0,283 | 0,018 |
| DMU13 | 1,033 | 4,329 | 2,723 | 0,506 | 8,197 | 8,185 | 7,083 | 8,734 | 0,207 | 0,007 |
| DMU14 | 0,665 | 2,569 | 1,151 | 0,037 | 6,547 | 2,804 | 22,878 | 23,545 | 0,427 | 0,007 |
| DMU15 | 0,085 | 7,536 | 1,904 | 0,003 | 9,581 | 3,165 | 18,898 | 16,767 | 1,122 | 0,008 |
| DMU16 | 3,319 | 1,946 | 1,451 | 0,050 | 5,860 | 1,560 | 17,941 | 8,214 | 0,334 | 0,007 |
| DMU17 | 1,416 | 3,900 | 2,736 | 7,352 | 5,211 | 0,439 | 34,532 | 58,417 | 0,789 | 0,023 |
| DMU18 | 0,150 | 1,828 | 1,242 | 0,091 | 4,786 | 0,660 | 18,618 | 15,561 | 0,182 | 0,008 |
| DMU19 | -0,479 | 3,186 | 1,531 | 0,091 | 7,290 | 10,184 | 10,632 | 5,846 | 1,254 | 0,099 |
| DMU20 | -0,026 | 8,637 | 0,706 | 0,015 | 8,283 | 1,693 | 14,777 | 7,446 | 0,948 | 0,032 |
| DMU21 | 0,620 | 2,155 | 0,751 | 0,011 | 5,151 | 3,328 | 20,449 | 11,309 | -0,029 | 0,012 |
| DMU22 | -2,890 | 10,645 | -1,872 | 22,030 | 10,898 | 16,350 | 1,855 | 13,426 | 0,573 | 0,042 |
| DMU23 | -1,436 | 10,256 | 1,340 | 3,125 | 11,767 | 7,196 | 6,678 | 33,013 | 0,643 | 0,193 |
| DMU24 | 1,414 | 1,403 | 0,624 | 0,163 | 7,539 | 0,542 | 19,844 | 58,460 | 0,351 | 0,109 |
| DMU25 | 0,040 | 0,821 | 0,831 | 0,047 | 5,001 | 4,876 | 15,169 | 14,004 | 0,184 | 0,027 |
| DMU26 | 3,078 | 10,232 | 0,548 | 0,060 | 8,497 | 2,275 | 25,296 | 25,700 | 0,801 | 0,074 |
| DMU27 | -0,035 | 4,563 | 1,080 | 0,021 | 7,879 | 5,407 | 7,123 | 1,630 | 1,221 | 0,037 |
| DMU28 | 0,088 | 12,807 | -1,730 | 0,984 | 8,599 | 0,707 | -11,513 | 52,428 | 1,039 | 0,065 |
| DMU29 | -2,820 | 12,983 | -0,547 | 2,745 | 15,454 | 11,636 | -2,663 | 54,444 | 1,978 | 0,022 |
| DMU30 | -0,521 | 3,337 | 0,978 | 0,049 | 8,461 | 1,394 | 16,993 | 19,762 | 1,174 | 0,016 |
| DMU31 | -0,427 | 3,015 | 1,402 | 0,158 | 8,503 | 1,143 | 15,293 | 22,925 | 1,196 | 0,007 |
| DMU32 | -1,781 | 10,482 | -3,906 | 1,248 | 15,473 | 2,427 | -3,157 | 1,316 | 1,888 | 0,130 |
| DMU33 | -0,293 | 17,131 | 0,216 | 0,072 | 11,421 | 17,679 | 39,230 | 48,730 | 1,212 | 0,050 |
| DMU34 | 0,093 | 1,254 | 0,841 | 0,006 | 6,219 | 0,583 | 9,578 | 0,810 | 0,915 | 0,018 |
| DMU35 | 0,232 | 1,658 | 2,553 | 0,083 | 6,651 | 0,571 | 10,916 | 1,007 | 0,968 | 0,019 |
| DMU36 | 0,771 | 4,438 | 0,162 | 0,037 | 11,915 | 11,660 | 25,865 | 13,539 | 1,333 | 0,039 |
| DMU37 | -0,003 | 2,775 | 2,034 | 0,536 | 6,558 | 3,390 | 12,088 | 27,462 | 0,450 | 0,021 |
| DMU38 | 0,999 | 1,439 | 1,469 | 0,091 | 5,732 | 2,094 | 22,191 | 25,688 | 0,703 | 0,019 |
| DMU39 | 1,059 | 2,669 | 0,323 | 0,002 | 6,944 | 2,274 | 38,163 | 23,757 | 1,018 | 0,021 |
| DMU40 | 0,602 | 3,190 | 2,843 | 0,080 | 7,542 | 2,366 | 22,631 | 12,746 | 0,994 | 0,017 |
| DMU41 | -3,024 | 11,110 | -1,523 | 0,463 | 16,508 | 22,877 | -6,769 | 77,087 | 1,016 | 0,102 |
| DMU42 | -5,148 | 10,287 | -6,497 | 4,285 | 13,944 | 21,748 | -1,773 | 16,156 | 1,621 | 0,107 |

APÊNDICE F- Dados de entrada e saída do estudo preliminar 3.1.3 (continuação).

| DMUs | Retorno | | LPA | | Volatilidade | | PL | | Beta | |
|--------------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 |
| DMU43 | -1,258 | 2,904 | 1,196 | 0,067 | 14,171 | 6,398 | 8,375 | 1,690 | 1,730 | 0,012 |
| DMU44 | 0,204 | 5,629 | 1,951 | 0,007 | 6,536 | 1,576 | 22,779 | 9,328 | 0,704 | 0,011 |
| DMU45 | -2,429 | 7,283 | 1,337 | 0,460 | 11,758 | 6,442 | 5,175 | 3,152 | 0,687 | 0,023 |
| DMU46 | 1,344 | 1,297 | 3,566 | 0,290 | 6,527 | 3,013 | 25,388 | 6,079 | 0,588 | 0,033 |
| DMU47 | -4,515 | 2,843 | -0,520 | 1,006 | 13,079 | 5,109 | -1,981 | 48,388 | 1,653 | 0,019 |
| DMU48 | -1,392 | 1,584 | 1,947 | 0,260 | 9,842 | 4,673 | 10,157 | 6,183 | 1,133 | 0,036 |
| DMU49 | -0,820 | 1,255 | 1,947 | 0,260 | 8,467 | 2,249 | 10,233 | 5,999 | 1,094 | 0,020 |
| DMU50 | 1,380 | 1,877 | 0,015 | 0,013 | 6,052 | 0,751 | 113,042 | 55,283 | 0,454 | 0,000 |
| DMU51 | -5,055 | 3,212 | -0,103 | 0,317 | 13,851 | 10,405 | 5,646 | 83,381 | 1,923 | 0,027 |
| DMU52 | 1,617 | 8,419 | 2,499 | 0,206 | 7,134 | 2,353 | 9,621 | 4,689 | 0,558 | 0,017 |
| DMU53 | -1,769 | 8,778 | 0,863 | 1,060 | 11,295 | 10,090 | 9,484 | 11,100 | 1,427 | 0,013 |
| DMU54 | 1,115 | 5,881 | 1,058 | 0,010 | 6,534 | 0,369 | 24,472 | 11,882 | 0,459 | 0,006 |
| DMU55 | 0,976 | 1,665 | 3,952 | 0,261 | 4,852 | 1,124 | 12,540 | 1,995 | 0,115 | 0,010 |
| DMU56 | 1,379 | 4,492 | 0,644 | 0,028 | 7,354 | 7,052 | 15,774 | 13,942 | 0,324 | 0,013 |
| DMU57 | 1,358 | 1,004 | 2,263 | 0,019 | 4,270 | 0,397 | 15,213 | 3,626 | 0,148 | 0,007 |
| DMU58 | 1,923 | 1,380 | 1,891 | 0,078 | 4,885 | 0,968 | 24,579 | 8,245 | 0,370 | 0,000 |
| DMU59 | -0,829 | 0,716 | 3,437 | 8,406 | 6,279 | 1,397 | 11,235 | 43,328 | 0,820 | 0,008 |

APÊNDICE G- Tabela de valores pontuais das variáveis de entrada e saída do grupo 1 do estado total de mercado (Tabela 6).

| DMU's | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Volatilidade | |
|-------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| DMU1 | 0,11 | 2,24 | 0,70 | 1,19 | 4,99 | 1,14 | 0,44 | 0,00 | 1,00 | 18,88 | 1,51 | 0,02 |
| DMU3 | 0,06 | 3,24 | 0,42 | 0,09 | 9,82 | 1,89 | 0,86 | 0,00 | 10,38 | 1,98 | 1,74 | 0,02 |
| DMU6 | 0,11 | 2,72 | 1,17 | 0,04 | 2,91 | 1,63 | 0,61 | 0,00 | 42,94 | 566,70 | 1,73 | 0,08 |
| DMU8 | 0,06 | 4,56 | 0,90 | 0,10 | 11,98 | 44,46 | 0,78 | 0,01 | 10,95 | 27,43 | 2,17 | 0,08 |
| DMU10 | 0,08 | 3,18 | 1,07 | 0,12 | 3,79 | 0,25 | 0,54 | 0,01 | 26,83 | 12,92 | 1,76 | 0,04 |
| DMU12 | 0,12 | 3,27 | 1,30 | 0,10 | 6,61 | 2,84 | 0,42 | 0,01 | 16,06 | 14,23 | 1,76 | 0,13 |
| DMU13 | 0,06 | 3,88 | 1,06 | 0,08 | 14,42 | 28,22 | 0,53 | 0,00 | 7,86 | 6,81 | 1,86 | 0,15 |
| DMU14 | 0,04 | 2,45 | 0,39 | 0,01 | 6,31 | 1,67 | 0,50 | 0,01 | 16,59 | 14,54 | 1,47 | 0,03 |
| DMU15 | 0,03 | 3,39 | 0,41 | 0,01 | 10,43 | 3,09 | 0,59 | 0,01 | 9,84 | 2,32 | 1,76 | 0,11 |
| DMU16 | 0,07 | 2,78 | 0,50 | 0,02 | 4,75 | 1,55 | 0,47 | 0,00 | 22,25 | 22,03 | 1,66 | 0,03 |
| DMU17 | 0,06 | 3,58 | 0,64 | 0,01 | 9,64 | 92,35 | 0,80 | 0,01 | 22,17 | 239,99 | 1,97 | 0,27 |
| DMU19 | 0,10 | 3,11 | 0,52 | 0,08 | 4,38 | 1,05 | 0,45 | 0,00 | 24,67 | 66,60 | 1,75 | 0,08 |
| DMU21 | 0,02 | 4,47 | 0,47 | 0,01 | 6,11 | 3,51 | 0,79 | 0,02 | 19,96 | 246,22 | 2,21 | 0,16 |
| DMU25 | 0,11 | 3,85 | 0,59 | 0,03 | 6,05 | 12,46 | 0,67 | 0,01 | 32,77 | 1706,57 | 2,07 | 0,12 |
| DMU26 | 0,03 | 3,07 | 0,44 | 0,02 | 8,66 | 6,08 | 0,44 | 0,01 | 12,64 | 16,26 | 1,68 | 0,08 |
| DMU27 | 0,13 | 4,07 | 0,40 | 0,19 | 4,11 | 0,83 | 0,46 | 0,00 | 25,48 | 33,13 | 2,03 | 0,09 |
| DMU34 | 0,12 | 4,79 | 0,62 | 0,08 | 5,41 | 1,75 | 0,71 | 0,00 | 19,49 | 18,82 | 2,31 | 0,14 |
| DMU39 | 0,07 | 4,00 | 0,75 | 0,02 | 2,55 | 0,24 | 0,99 | 0,01 | 41,50 | 171,17 | 2,06 | 0,13 |
| DMU40 | 0,04 | 3,25 | 0,39 | 0,01 | 10,86 | 16,58 | 0,54 | 0,01 | 10,84 | 21,59 | 1,75 | 0,06 |
| DMU41 | 0,09 | 4,54 | 0,78 | 0,03 | 4,45 | 0,45 | 0,96 | 0,00 | 22,99 | 12,00 | 2,21 | 0,18 |
| DMU44 | 0,03 | 3,22 | 0,78 | 0,02 | 4,36 | 0,29 | 0,48 | 0,00 | 23,31 | 8,31 | 1,77 | 0,02 |
| DMU46 | 0,07 | 2,90 | 0,71 | 0,05 | 4,00 | 0,18 | 0,61 | 0,00 | 25,28 | 7,44 | 1,70 | 0,06 |
| DMU50 | 0,12 | 4,59 | 0,29 | 0,02 | 7,88 | 3,93 | 0,73 | 0,01 | 13,61 | 14,41 | 2,13 | 0,05 |
| DMU51 | 0,07 | 3,94 | 0,51 | 0,02 | 4,49 | 1,14 | 0,82 | 0,01 | 23,92 | 51,38 | 2,04 | 0,15 |
| DMU53 | 0,01 | 4,04 | 0,85 | 0,03 | 9,71 | 10,33 | 0,91 | 0,00 | 12,79 | 73,91 | 1,95 | 0,05 |
| DMU54 | 0,08 | 3,83 | 0,43 | 0,04 | 12,66 | 14,57 | 0,73 | 0,01 | 10,14 | 143,76 | 1,99 | 0,06 |
| DMU56 | 0,07 | 2,17 | 0,38 | 0,00 | 6,91 | 0,86 | 0,30 | 0,01 | 14,77 | 5,21 | 1,45 | 0,01 |
| DMU57 | 0,09 | 4,72 | 0,71 | 0,19 | 6,47 | 10,45 | 0,72 | 0,01 | 21,93 | 305,89 | 2,25 | 0,20 |
| DMU61 | 0,06 | 2,32 | 0,54 | 0,08 | 9,28 | 2,60 | 0,39 | 0,00 | 11,10 | 3,64 | 1,47 | 0,04 |

APÊNDICE H- Tabela de valores pontuais das variáveis de entrada e saída do grupo 2 do estado total de mercado (Tabela 6).

| DMU's | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Volatilidade | |
|-------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| DMU2 | 0,03 | 4,43 | 2,41 | 0,24 | 16,27 | 16,71 | 0,98 | 0,00 | 6,67 | 5,47 | 1,96 | 0,06 |
| DMU4 | 0,05 | 3,10 | 2,75 | 0,17 | 8,82 | 1,10 | 0,95 | 0,00 | 11,51 | 2,07 | 1,70 | 0,03 |
| DMU5 | -0,04 | 3,75 | 0,64 | 0,01 | 8,64 | 50,96 | 1,15 | 0,01 | 4,64 | 3606,81 | 2,03 | 0,08 |
| DMU7 | 0,08 | 5,12 | 0,56 | 0,01 | 2,57 | 81,76 | 0,96 | 0,03 | 23,43 | 5877,60 | 2,35 | 0,20 |
| DMU9 | 0,02 | 4,87 | 2,59 | 0,18 | 4,63 | 0,54 | 1,08 | 0,01 | 22,14 | 12,09 | 2,22 | 0,09 |
| DMU11 | 0,06 | 4,51 | 0,45 | 0,01 | 2,82 | 21,86 | 0,69 | 0,01 | 47,87 | 14978,71 | 2,13 | 0,24 |
| DMU18 | -0,07 | 6,01 | 1,34 | 0,10 | 6,35 | 35,02 | 1,26 | 0,00 | 29,69 | 4368,92 | 2,39 | 0,16 |
| DMU20 | -0,02 | 5,65 | 1,21 | 0,12 | 9,42 | 4,92 | 1,31 | 0,01 | 11,19 | 6,55 | 2,53 | 0,37 |
| DMU22 | -0,05 | 6,58 | 0,48 | 0,03 | -26,73 | 3173,20 | 0,72 | 0,02 | 14,56 | 1756,81 | 2,34 | 0,37 |
| DMU23 | -0,02 | 6,16 | 0,47 | 0,02 | -14,09 | 1137,78 | 0,65 | 0,00 | 16,24 | 1939,80 | 2,26 | 0,49 |
| DMU24 | -0,05 | 4,97 | 0,46 | 0,02 | 15,65 | 327,93 | 0,59 | 0,01 | -12,52 | 9870,91 | 2,05 | 0,40 |
| DMU28 | 0,02 | 5,50 | 0,35 | 0,02 | 14,13 | 9,03 | 0,94 | 0,03 | 7,45 | 3,79 | 2,42 | 0,16 |
| DMU29 | 0,04 | 5,70 | 0,71 | 0,04 | -2,96 | 85,79 | 1,06 | 0,02 | 6,51 | 1334,30 | 2,38 | 0,08 |
| DMU30 | -0,09 | 10,70 | 1,04 | 0,13 | 0,60 | 1649,49 | 1,50 | 0,01 | 3,36 | 97,94 | 3,29 | 0,41 |
| DMU31 | -0,05 | 4,39 | 2,04 | 0,16 | 6,29 | 3,44 | 1,21 | 0,01 | 18,27 | 88,98 | 2,20 | 0,09 |
| DMU32 | -0,05 | 4,51 | 0,55 | 0,02 | 7,21 | 6,04 | 1,20 | 0,01 | 16,65 | 91,97 | 2,22 | 0,09 |
| DMU33 | 0,01 | 10,43 | 0,54 | 0,02 | -18,88 | 534,58 | 1,10 | 0,05 | 35,23 | 5931,22 | 3,18 | 0,22 |
| DMU35 | 0,03 | 5,26 | 1,04 | 0,11 | 1,87 | 2,23 | 0,82 | 0,02 | 3,34 | 7216,83 | 2,32 | 0,35 |
| DMU36 | 0,04 | 3,32 | 1,98 | 0,10 | 9,76 | 2,63 | 1,03 | 0,00 | 10,54 | 3,54 | 1,81 | 0,06 |
| DMU37 | 0,04 | 3,28 | 3,67 | 0,33 | 8,43 | 2,02 | 1,03 | 0,00 | 12,23 | 5,12 | 1,80 | 0,06 |
| DMU38 | 0,05 | 7,54 | 0,79 | 0,05 | 1,53 | 8,78 | 1,07 | 0,00 | -5,13 | 6351,38 | 2,78 | 0,15 |
| DMU42 | -0,05 | 8,63 | 0,56 | 0,03 | -11,91 | 317,08 | 0,88 | 0,03 | 9,70 | 1604,73 | 2,94 | 0,33 |
| DMU43 | 0,01 | 8,85 | 1,13 | 0,09 | 11,28 | 11,81 | 1,36 | 0,00 | 9,81 | 11,24 | 3,07 | 0,08 |
| DMU45 | -0,12 | 8,85 | 0,77 | 0,29 | 17,39 | 166,89 | 0,83 | 0,00 | 3,48 | 21,09 | 2,60 | 0,60 |
| DMU47 | -0,11 | 9,87 | 1,80 | 0,62 | -12,91 | 1008,47 | 1,31 | 0,05 | 2,86 | 111,82 | 3,10 | 0,18 |
| DMU48 | -0,06 | 5,41 | 2,39 | 0,49 | 10,61 | 5,49 | 1,10 | 0,01 | 9,94 | 5,86 | 2,13 | 0,10 |
| DMU49 | -0,04 | 5,13 | 7,05 | 2,59 | 11,04 | 7,44 | 1,06 | 0,01 | 9,67 | 6,49 | 2,02 | 0,09 |
| DMU52 | -0,17 | 10,25 | 0,76 | 0,06 | -2,34 | 285,99 | 1,45 | 0,04 | 22,71 | 1453,20 | 3,24 | 0,12 |
| DMU55 | 0,02 | 5,41 | 0,64 | 0,07 | 3,34 | 92,45 | 0,85 | 0,01 | -30,46 | 9461,86 | 2,36 | 0,11 |
| DMU58 | -0,08 | 7,92 | 1,65 | 0,21 | 2,20 | 28,80 | 1,21 | 0,00 | -10,61 | 6447,05 | 2,74 | 0,22 |
| DMU59 | -0,02 | 3,47 | 2,11 | 0,09 | 8,01 | 42,37 | 1,11 | 0,01 | 42,99 | 13786,90 | 1,94 | 0,07 |
| DMU60 | -0,03 | 3,16 | 6,83 | 2,32 | 8,60 | 47,72 | 1,05 | 0,01 | 38,76 | 11228,40 | 1,84 | 0,06 |

APÊNDICE I- Tabela de valores pontuais das variáveis de entrada e saída do grupo 1 considerando informações de períodos de baixa do mercado (Tabela 7).

| DMU's | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Volatilidade | |
|-------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| DMU1 | -0,58 | 2,09 | 0,72 | 1,19 | 5,00 | 1,14 | 0,44 | 0,00 | 20,91 | 18,35 | 1,50 | 0,02 |
| DMU3 | -1,47 | 2,33 | 0,41 | 0,07 | 10,04 | 2,12 | 0,86 | 0,00 | 10,17 | 2,14 | 1,73 | 0,03 |
| DMU6 | -0,86 | 2,42 | 1,17 | 0,04 | 3,08 | 1,72 | 0,60 | 0,00 | 39,93 | 459,78 | 1,72 | 0,07 |
| DMU8 | -1,27 | 3,83 | 0,91 | 0,10 | 11,59 | 41,70 | 0,78 | 0,01 | 11,17 | 26,46 | 2,16 | 0,07 |
| DMU10 | -0,96 | 3,12 | 1,07 | 0,12 | 3,80 | 0,28 | 0,54 | 0,00 | 26,81 | 14,07 | 1,75 | 0,04 |
| DMU12 | -0,60 | 3,78 | 1,31 | 0,11 | 6,60 | 2,83 | 0,42 | 0,01 | 16,04 | 13,46 | 1,74 | 0,12 |
| DMU13 | -1,00 | 2,77 | 1,05 | 0,07 | 14,61 | 28,99 | 0,53 | 0,00 | 7,77 | 6,95 | 1,86 | 0,15 |
| DMU14 | -0,90 | 2,33 | 0,39 | 0,01 | 6,32 | 1,63 | 0,50 | 0,01 | 16,54 | 13,45 | 1,47 | 0,03 |
| DMU15 | -1,02 | 3,53 | 0,41 | 0,01 | 10,50 | 3,25 | 0,59 | 0,01 | 9,78 | 2,35 | 1,76 | 0,11 |
| DMU16 | -0,74 | 2,44 | 0,50 | 0,01 | 4,71 | 1,42 | 0,47 | 0,00 | 22,32 | 20,82 | 1,65 | 0,03 |
| DMU17 | -1,18 | 2,98 | 0,64 | 0,01 | 10,33 | 102,62 | 0,79 | 0,01 | 21,52 | 249,78 | 1,94 | 0,23 |
| DMU19 | -0,63 | 2,72 | 0,53 | 0,07 | 4,44 | 1,02 | 0,45 | 0,00 | 24,22 | 61,29 | 1,74 | 0,09 |
| DMU21 | -1,52 | 3,70 | 0,47 | 0,01 | 6,30 | 3,27 | 0,79 | 0,02 | 19,10 | 230,95 | 2,20 | 0,15 |
| DMU25 | -0,82 | 3,97 | 0,60 | 0,03 | 6,07 | 12,51 | 0,66 | 0,01 | 32,93 | 1686,56 | 2,05 | 0,11 |
| DMU26 | -0,79 | 2,68 | 0,44 | 0,02 | 8,77 | 6,03 | 0,44 | 0,01 | 12,45 | 15,51 | 1,68 | 0,08 |
| DMU27 | -0,56 | 4,53 | 0,41 | 0,20 | 4,23 | 0,89 | 0,46 | 0,00 | 24,83 | 33,90 | 2,03 | 0,09 |
| DMU34 | -1,09 | 3,89 | 0,63 | 0,08 | 5,46 | 1,70 | 0,71 | 0,00 | 19,27 | 17,88 | 2,29 | 0,12 |
| DMU39 | -1,50 | 2,98 | 0,73 | 0,02 | 2,62 | 0,23 | 0,98 | 0,01 | 40,20 | 152,79 | 2,04 | 0,13 |
| DMU40 | -1,02 | 3,25 | 0,38 | 0,01 | 10,68 | 16,88 | 0,54 | 0,01 | 11,06 | 22,13 | 1,75 | 0,06 |
| DMU41 | -1,39 | 3,40 | 0,78 | 0,03 | 4,54 | 0,45 | 0,96 | 0,00 | 22,52 | 11,46 | 2,19 | 0,18 |
| DMU44 | -0,85 | 2,83 | 0,79 | 0,02 | 4,42 | 0,31 | 0,48 | 0,00 | 22,98 | 8,17 | 1,77 | 0,02 |
| DMU46 | -0,89 | 2,52 | 0,72 | 0,06 | 4,05 | 0,20 | 0,61 | 0,00 | 24,97 | 8,18 | 1,70 | 0,07 |
| DMU50 | -0,97 | 4,48 | 0,29 | 0,02 | 7,97 | 4,09 | 0,73 | 0,00 | 13,49 | 14,31 | 2,13 | 0,04 |
| DMU51 | -1,19 | 3,27 | 0,52 | 0,02 | 4,62 | 1,07 | 0,82 | 0,01 | 23,07 | 46,16 | 2,02 | 0,15 |
| DMU53 | -1,37 | 3,60 | 0,86 | 0,03 | 10,08 | 9,75 | 0,89 | 0,01 | 11,93 | 57,00 | 1,94 | 0,06 |
| DMU54 | -0,99 | 3,46 | 0,43 | 0,04 | 12,65 | 14,04 | 0,72 | 0,01 | 10,10 | 142,43 | 1,98 | 0,05 |
| DMU56 | -0,46 | 2,57 | 0,38 | 0,01 | 6,89 | 0,86 | 0,29 | 0,01 | 14,83 | 5,31 | 1,45 | 0,01 |
| DMU57 | -1,05 | 4,02 | 0,73 | 0,20 | 6,75 | 10,70 | 0,71 | 0,01 | 20,17 | 223,58 | 2,22 | 0,18 |
| DMU61 | -0,69 | 1,95 | 0,56 | 0,08 | 9,28 | 2,51 | 0,39 | 0,00 | 11,09 | 3,41 | 1,48 | 0,04 |

APÊNDICE J- Tabela de valores pontuais das variáveis de entrada e saída do grupo 1 considerando informações de períodos de baixa do mercado (Tabela 7).

| DMU's | Retorno | | Liquidez | | LP | | Beta | | PL | | Volatilidade | |
|-------|---------|--------------|----------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|--------------|--------------|
| | μ_1 | σ_1^2 | μ_2 | σ_2^2 | μ_3 | σ_3^2 | μ_4 | σ_4^2 | μ_5 | σ_5^2 | μ_6 | σ_6^2 |
| DMU2 | -1,69 | 3,27 | 2,43 | 0,27 | 16,42 | 18,15 | 0,98 | 0,00 | 6,69 | 6,50 | 1,96 | 0,07 |
| DMU4 | -1,58 | 2,01 | 2,76 | 0,17 | 9,02 | 1,08 | 0,95 | 0,00 | 11,25 | 1,89 | 1,70 | 0,03 |
| DMU5 | -1,87 | 2,55 | 0,63 | 0,01 | 8,72 | 58,54 | 1,14 | 0,01 | 3,94 | 3456,51 | 2,00 | 0,07 |
| DMU7 | -1,54 | 4,47 | 0,56 | 0,01 | 2,64 | 82,35 | 0,95 | 0,03 | 25,83 | 6580,17 | 2,32 | 0,20 |
| DMU9 | -1,92 | 3,04 | 2,60 | 0,18 | 4,75 | 0,58 | 1,09 | 0,01 | 21,57 | 11,74 | 2,21 | 0,08 |
| DMU11 | -1,14 | 3,09 | 0,43 | 0,01 | 2,84 | 22,46 | 0,68 | 0,01 | 38,61 | 11486,94 | 2,10 | 0,23 |
| DMU18 | -2,07 | 4,40 | 1,31 | 0,11 | 6,41 | 41,53 | 1,26 | 0,00 | 26,98 | 4037,95 | 2,38 | 0,17 |
| DMU20 | -2,13 | 3,75 | 1,20 | 0,12 | 9,67 | 5,42 | 1,30 | 0,01 | 10,95 | 6,67 | 2,50 | 0,36 |
| DMU22 | -1,61 | 4,53 | 0,47 | 0,02 | -29,27 | 3312,95 | 0,73 | 0,02 | 11,09 | 1147,90 | 2,34 | 0,40 |
| DMU23 | -1,43 | 4,00 | 0,46 | 0,01 | -15,77 | 1194,31 | 0,65 | 0,01 | 12,15 | 1107,02 | 2,25 | 0,50 |
| DMU24 | -1,36 | 5,14 | 0,46 | 0,03 | 14,52 | 395,33 | 0,60 | 0,02 | -16,76 | 10371,00 | 2,05 | 0,41 |
| DMU28 | -1,79 | 4,21 | 0,36 | 0,02 | 14,69 | 10,10 | 0,95 | 0,03 | 7,18 | 3,66 | 2,40 | 0,16 |
| DMU29 | -1,57 | 5,33 | 0,70 | 0,03 | -2,80 | 93,14 | 1,05 | 0,03 | 8,27 | 1739,05 | 2,36 | 0,08 |
| DMU30 | -2,74 | 6,74 | 1,03 | 0,14 | 1,39 | 1891,46 | 1,51 | 0,01 | 3,11 | 90,36 | 3,25 | 0,41 |
| DMU31 | -1,86 | 2,62 | 2,01 | 0,17 | 6,46 | 3,39 | 1,21 | 0,01 | 17,63 | 81,35 | 2,18 | 0,09 |
| DMU32 | -1,89 | 2,40 | 0,55 | 0,02 | 7,41 | 5,97 | 1,20 | 0,01 | 15,97 | 81,04 | 2,20 | 0,09 |
| DMU33 | -2,08 | 7,03 | 0,54 | 0,02 | -19,82 | 542,95 | 1,11 | 0,05 | 33,24 | 5856,71 | 3,17 | 0,23 |
| DMU35 | -1,55 | 4,02 | 1,04 | 0,10 | 1,92 | 2,32 | 0,81 | 0,02 | -0,63 | 7844,74 | 2,30 | 0,36 |
| DMU36 | -1,66 | 2,25 | 2,00 | 0,11 | 10,03 | 2,73 | 1,03 | 0,00 | 10,26 | 3,40 | 1,80 | 0,06 |
| DMU37 | -1,67 | 2,10 | 3,72 | 0,36 | 8,67 | 2,04 | 1,03 | 0,00 | 11,88 | 4,66 | 1,79 | 0,06 |
| DMU38 | -1,97 | 5,48 | 0,80 | 0,06 | 1,46 | 10,28 | 1,07 | 0,00 | -8,40 | 5662,38 | 2,76 | 0,16 |
| DMU42 | -1,75 | 9,85 | 0,55 | 0,04 | -12,48 | 314,92 | 0,88 | 0,03 | 12,24 | 2124,24 | 2,93 | 0,35 |
| DMU43 | -2,22 | 6,75 | 1,12 | 0,10 | 11,83 | 12,27 | 1,36 | 0,00 | 9,30 | 9,69 | 3,05 | 0,08 |
| DMU45 | -1,45 | 6,96 | 0,78 | 0,27 | 18,03 | 152,58 | 0,83 | 0,00 | 3,51 | 20,29 | 2,62 | 0,64 |
| DMU47 | -2,55 | 8,05 | 1,81 | 0,67 | -13,38 | 1076,96 | 1,32 | 0,05 | 2,77 | 99,35 | 3,08 | 0,19 |
| DMU48 | -2,23 | 3,70 | 2,42 | 0,69 | 10,90 | 5,63 | 1,10 | 0,01 | 9,68 | 5,57 | 2,15 | 0,12 |
| DMU49 | -2,19 | 3,80 | 7,10 | 3,17 | 11,31 | 7,83 | 1,07 | 0,01 | 9,44 | 6,36 | 2,04 | 0,12 |
| DMU52 | -2,79 | 6,04 | 0,77 | 0,07 | -4,07 | 376,12 | 1,45 | 0,04 | 23,44 | 1602,49 | 3,21 | 0,12 |
| DMU55 | -1,42 | 4,81 | 0,63 | 0,06 | 3,43 | 95,29 | 0,85 | 0,01 | -30,61 | 7855,64 | 2,33 | 0,11 |
| DMU58 | -2,20 | 4,77 | 1,61 | 0,19 | 2,32 | 30,11 | 1,21 | 0,00 | -8,35 | 5062,78 | 2,72 | 0,21 |
| DMU59 | -1,76 | 2,19 | 2,13 | 0,10 | 8,16 | 48,91 | 1,10 | 0,01 | 65,25 | 13506,95 | 1,92 | 0,07 |
| DMU60 | -1,68 | 2,16 | 6,76 | 2,49 | 8,74 | 55,71 | 1,05 | 0,01 | 58,79 | 10995,56 | 1,82 | 0,06 |

APÊNDICE K- Tabela de valores pontuais de eficiência do grupo 1 considerando o estado total do mercado (Tabela 8).

| Ativos | | (α_i) | | | | | | | | | | |
|--------|-------|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Código | DMU's | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| ABEV3 | DMU1 | 1,55 | 1,49 | 1,40 | 1,34 | 1,27 | 1,22 | 1,17 | 1,12 | 1,08 | 1,04 | 1,00 |
| BBDC3 | DMU3 | 1,30 | 1,23 | 1,17 | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 0,98 | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,93 |
| BRFS3 | DMU6 | 1,41 | 1,36 | 1,31 | 1,26 | 1,21 | 1,17 | 1,13 | 1,09 | 1,05 | 1,02 | 0,98 |
| BRML3 | DMU8 | 1,14 | 1,08 | 1,06 | 0,98 | 1,00 | 0,97 | 0,92 | 0,91 | 0,90 | 0,89 | 0,88 |
| CCRO3 | DMU10 | 1,32 | 1,27 | 1,22 | 1,17 | 1,13 | 1,09 | 1,05 | 1,02 | 0,98 | 0,95 | 0,92 |
| CIEL3 | DMU12 | 1,52 | 1,44 | 1,37 | 1,31 | 1,26 | 1,21 | 1,16 | 1,11 | 1,07 | 1,04 | 1,00 |
| CMIG4 | DMU13 | 1,34 | 1,29 | 1,14 | 1,21 | 1,10 | 1,14 | 1,07 | 1,07 | 1,05 | 1,02 | 1,00 |
| CPFE3 | DMU14 | 1,50 | 1,42 | 1,35 | 1,28 | 1,23 | 1,17 | 1,12 | 1,08 | 1,04 | 1,00 | 0,96 |
| CPLE6 | DMU15 | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,06 | 1,01 | 0,98 | 0,96 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,93 |
| CRUZ3 | DMU16 | 1,36 | 1,29 | 1,22 | 1,16 | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 0,98 | 0,94 | 0,91 | 0,87 |
| CSAN3 | DMU17 | 1,14 | 1,08 | 1,03 | 0,98 | 0,94 | 0,90 | 0,86 | 0,82 | 0,81 | 0,79 | 0,78 |
| CTIP3 | DMU19 | 1,33 | 1,26 | 1,20 | 1,14 | 1,09 | 1,04 | 1,00 | 0,96 | 0,92 | 0,89 | 0,86 |
| DTEX3 | DMU21 | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,83 | 0,80 | 0,76 | 0,73 | 0,70 | 0,68 | 0,67 | 0,67 |
| EMBR3 | DMU25 | 1,13 | 1,07 | 1,02 | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,85 | 0,81 | 0,78 | 0,75 | 0,73 |
| ENBR3 | DMU26 | 1,29 | 1,22 | 1,16 | 1,11 | 1,06 | 1,01 | 0,97 | 0,94 | 0,93 | 0,92 | 0,91 |
| ESTC3 | DMU27 | 1,23 | 1,16 | 1,10 | 1,05 | 1,00 | 0,95 | 0,91 | 0,87 | 0,84 | 0,80 | 0,77 |
| HGTX3 | DMU34 | 1,03 | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,84 | 0,80 | 0,77 | 0,74 | 0,71 | 0,69 | 0,66 |
| LAME4 | DMU39 | 1,10 | 1,05 | 0,99 | 0,95 | 0,90 | 0,87 | 0,83 | 0,80 | 0,77 | 0,75 | 0,72 |
| LIGT3 | DMU40 | 1,26 | 1,19 | 1,13 | 1,08 | 1,03 | 0,99 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,93 |
| LREN3 | DMU41 | 1,04 | 0,99 | 0,94 | 0,89 | 0,85 | 0,82 | 0,78 | 0,75 | 0,73 | 0,71 | 0,69 |
| NATU3 | DMU44 | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 0,99 | 0,95 | 0,92 | 0,89 | 0,86 | 0,83 |
| PCAR4 | DMU46 | 1,33 | 1,26 | 1,20 | 1,14 | 1,09 | 1,04 | 1,00 | 0,96 | 0,92 | 0,89 | 0,86 |
| POMO4 | DMU50 | 1,11 | 1,05 | 1,02 | 0,97 | 0,93 | 0,89 | 0,83 | 0,81 | 0,79 | 0,78 | 0,77 |
| RENT3 | DMU51 | 1,11 | 1,05 | 1,00 | 0,95 | 0,91 | 0,87 | 0,83 | 0,80 | 0,77 | 0,74 | 0,71 |
| SANB11 | DMU53 | 1,10 | 1,04 | 0,99 | 0,95 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,88 | 0,86 | 0,85 | 0,84 |
| SBSP3 | DMU54 | 1,19 | 1,13 | 1,07 | 1,02 | 0,98 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,92 | 0,91 |
| TBLE3 | DMU56 | 1,56 | 1,48 | 1,40 | 1,34 | 1,27 | 1,22 | 1,17 | 1,12 | 1,08 | 1,04 | 1,00 |
| TIMP3 | DMU57 | 1,03 | 0,97 | 0,93 | 0,88 | 0,84 | 0,81 | 0,77 | 0,74 | 0,71 | 0,69 | 0,68 |
| VIVT4 | DMU61 | 1,52 | 1,44 | 1,37 | 1,30 | 1,24 | 1,19 | 1,14 | 1,10 | 1,06 | 1,03 | 1,00 |

APÊNDICE L- Tabela de valores pontuais de eficiência do grupo 2 considerando o estado total do mercado (Tabela 8).

| Ativos | | (α_i) | | | | | | | | | | |
|--------|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| Código | DMU's | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| BBAS3 | DMU2 | 1,94 | 1,80 | 1,68 | 1,58 | 1,46 | 1,35 | 1,24 | 1,14 | 1,07 | 1,03 | 1,00 |
| BBDC4 | DMU4 | 1,76 | 1,04 | 1,53 | 1,44 | 1,35 | 1,28 | 1,21 | 1,15 | 1,10 | 1,05 | 1,00 |
| BRAP4 | DMU5 | 1,91 | 1,77 | 1,66 | 1,55 | 1,44 | 1,30 | 1,17 | 1,07 | 0,99 | 0,99 | 0,86 |
| BRKM5 | DMU7 | 1,75 | 1,60 | 1,46 | 1,34 | 1,24 | 1,15 | 1,08 | 1,01 | 0,95 | 0,90 | 0,86 |
| BVMF3 | DMU9 | 1,50 | 1,38 | 1,27 | 1,19 | 1,11 | 1,04 | 0,98 | 0,93 | 0,89 | 0,85 | 0,81 |
| CESP6 | DMU11 | 2,12 | 1,90 | 1,73 | 1,59 | 1,47 | 1,37 | 1,27 | 1,19 | 1,12 | 1,06 | 1,00 |
| CSNA3 | DMU18 | 1,17 | 1,09 | 1,01 | 0,94 | 0,89 | 0,84 | 0,79 | 0,75 | 0,71 | 0,68 | 0,66 |
| CYRE3 | DMU20 | 1,64 | 1,53 | 1,42 | 1,34 | 1,23 | 1,10 | 0,98 | 0,90 | 0,83 | 0,77 | 0,71 |
| ELET3 | DMU22 | 2,03 | 1,82 | 1,61 | 1,45 | 1,32 | 1,21 | 1,11 | 1,03 | 0,96 | 0,90 | 0,85 |
| ELET6 | DMU23 | 2,30 | 2,06 | 1,82 | 1,63 | 1,49 | 1,36 | 1,26 | 1,17 | 1,09 | 1,01 | 0,95 |
| ELPL4 | DMU24 | 3,63 | 3,37 | 3,15 | 2,96 | 2,73 | 2,38 | 2,02 | 1,71 | 1,44 | 1,21 | 1,00 |
| EVEN3 | DMU28 | 1,88 | 1,75 | 1,63 | 1,53 | 1,42 | 1,25 | 1,10 | 1,00 | 0,92 | 0,86 | 0,81 |
| FIBR3 | DMU29 | 1,97 | 1,83 | 1,71 | 1,61 | 1,48 | 1,31 | 1,16 | 1,05 | 0,96 | 0,89 | 0,81 |
| GFSA3 | DMU30 | 1,89 | 1,76 | 1,64 | 1,54 | 1,42 | 1,25 | 1,07 | 0,92 | 0,78 | 0,67 | 0,55 |
| GGBR4 | DMU31 | 1,37 | 1,27 | 1,19 | 1,12 | 1,04 | 0,98 | 0,91 | 0,86 | 0,81 | 0,77 | 0,73 |
| GOAU4 | DMU32 | 1,42 | 1,32 | 1,23 | 1,16 | 1,08 | 1,00 | 0,93 | 0,88 | 0,82 | 0,78 | 0,74 |
| GOLL4 | DMU33 | 1,42 | 1,29 | 1,15 | 1,05 | 0,96 | 0,88 | 0,82 | 0,76 | 0,72 | 0,67 | 0,64 |
| HYPE3 | DMU35 | 2,12 | 1,97 | 1,84 | 1,73 | 1,61 | 1,40 | 1,21 | 1,09 | 1,00 | 0,94 | 0,88 |
| ITSA4 | DMU36 | 1,78 | 1,65 | 1,55 | 1,45 | 1,36 | 1,27 | 1,19 | 1,13 | 1,07 | 1,01 | 0,97 |
| ITUB4 | DMU37 | 1,70 | 1,58 | 1,48 | 1,39 | 1,31 | 1,24 | 1,18 | 1,12 | 1,07 | 1,03 | 0,99 |
| JBSS3 | DMU38 | 2,88 | 2,68 | 2,50 | 2,35 | 2,17 | 1,89 | 1,61 | 1,37 | 1,16 | 0,98 | 0,77 |
| MRFG3 | DMU42 | 1,71 | 1,58 | 1,47 | 1,36 | 1,26 | 1,08 | 0,91 | 0,84 | 0,78 | 0,73 | 0,69 |
| MRVE3 | DMU43 | 1,77 | 1,64 | 1,53 | 1,44 | 1,33 | 1,17 | 1,00 | 0,86 | 0,78 | 0,71 | 0,64 |
| OIBR4 | DMU45 | 1,82 | 1,69 | 1,58 | 1,48 | 1,38 | 1,20 | 1,02 | 0,88 | 0,84 | 0,83 | 0,81 |
| PDGR3 | DMU47 | 1,86 | 1,73 | 1,61 | 1,51 | 1,40 | 1,26 | 1,10 | 0,96 | 0,83 | 0,72 | 0,58 |
| PETR3 | DMU48 | 1,63 | 1,51 | 1,41 | 1,32 | 1,22 | 1,13 | 1,04 | 0,97 | 0,90 | 0,85 | 0,83 |
| PETR4 | DMU49 | 1,84 | 1,72 | 1,61 | 1,51 | 1,41 | 1,32 | 1,24 | 1,17 | 1,11 | 1,05 | 1,00 |
| RSID3 | DMU52 | 1,10 | 1,02 | 0,96 | 0,90 | 0,83 | 0,74 | 0,66 | 0,60 | 0,55 | 0,51 | 0,47 |
| SUZB5 | DMU55 | 13,53 | 12,77 | 11,70 | 11,24 | 10,81 | 8,77 | 7,52 | 6,77 | 5,39 | 4,34 | 1,00 |
| USIM5 | DMU58 | 3,20 | 2,98 | 2,78 | 2,61 | 2,41 | 2,16 | 1,88 | 1,63 | 1,38 | 1,18 | 0,70 |
| VALE3 | DMU59 | 1,45 | 1,35 | 1,26 | 1,18 | 1,11 | 1,04 | 0,99 | 0,94 | 0,89 | 0,85 | 0,85 |
| VALE5 | DMU60 | 1,77 | 1,68 | 1,59 | 1,51 | 1,44 | 1,37 | 1,31 | 1,25 | 1,20 | 1,14 | 1,00 |

APÊNDICE M- Tabela de valores pontuais de eficiência do grupo 1 considerando períodos de baixa do mercado (Tabela 9).

| Ativos | | (α_i) | | | | | | | | | | |
|---------------|--------------|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Código | DMU's | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| ABEV3 | DMU1 | 1,19 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,00 |
| BBDC3 | DMU3 | 0,97 | 0,97 | 0,96 | 0,96 | 0,95 | 0,95 | 0,94 | 0,94 | 0,94 | 0,93 | 0,93 |
| BRFS3 | DMU6 | 1,02 | 1,01 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,92 | 0,91 |
| BRML3 | DMU8 | 0,97 | 0,95 | 0,94 | 0,92 | 0,90 | 0,88 | 0,87 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,86 |
| CCRO3 | DMU10 | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,93 | 0,92 | 0,91 | 0,91 | 0,90 | 0,89 | 0,89 | 0,88 |
| CIEL3 | DMU12 | 1,22 | 1,20 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,10 | 1,08 | 1,06 | 1,04 | 1,02 | 1,00 |
| CMIG4 | DMU13 | 1,08 | 1,07 | 1,07 | 1,06 | 1,05 | 1,04 | 1,03 | 1,02 | 1,02 | 1,01 | 1,00 |
| CPFE3 | DMU14 | 0,97 | 0,97 | 0,97 | 0,96 | 0,96 | 0,95 | 0,95 | 0,94 | 0,94 | 0,94 | 0,93 |
| CPLE6 | DMU15 | 1,07 | 1,05 | 1,04 | 1,02 | 1,01 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,95 | 0,94 | 0,93 |
| CRUZ3 | DMU16 | 0,97 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,87 | 0,86 | 0,85 | 0,84 | 0,83 |
| CSAN3 | DMU17 | 0,85 | 0,85 | 0,84 | 0,84 | 0,83 | 0,82 | 0,82 | 0,81 | 0,81 | 0,80 | 0,80 |
| CTIP3 | DMU19 | 0,97 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,90 | 0,89 | 0,87 | 0,86 | 0,84 | 0,83 | 0,81 |
| DTEX3 | DMU21 | 0,71 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,69 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,67 |
| EMBR3 | DMU25 | 0,78 | 0,77 | 0,93 | 0,74 | 0,73 | 0,73 | 0,72 | 0,71 | 0,70 | 0,69 | 0,69 |
| ENBR3 | DMU26 | 1,11 | 1,09 | 1,06 | 1,04 | 1,03 | 1,01 | 0,99 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,93 |
| ESTC3 | DMU27 | 0,95 | 0,93 | 0,91 | 0,90 | 0,88 | 0,86 | 0,85 | 0,83 | 0,82 | 0,80 | 0,79 |
| HGTX3 | DMU34 | 0,84 | 0,83 | 0,81 | 0,80 | 0,78 | 0,77 | 0,76 | 0,74 | 0,73 | 0,72 | 0,71 |
| LAME4 | DMU39 | 0,71 | 0,70 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,67 | 0,66 |
| LIGT3 | DMU40 | 1,03 | 1,02 | 1,01 | 0,99 | 0,98 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,94 | 0,93 | 0,93 |
| LREN3 | DMU41 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,66 | 0,66 | 0,65 | 0,65 |
| NATU3 | DMU44 | 0,95 | 0,93 | 0,92 | 0,90 | 0,88 | 0,87 | 0,86 | 0,84 | 0,83 | 0,83 | 0,82 |
| PCAR4 | DMU46 | 0,95 | 0,93 | 0,91 | 0,90 | 0,89 | 0,88 | 0,86 | 0,85 | 0,84 | 0,83 | 0,83 |
| POMO4 | DMU50 | 0,99 | 0,97 | 0,95 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,90 | 0,88 | 0,87 | 0,86 | 0,85 |
| RENT3 | DMU51 | 0,73 | 0,68 | 0,70 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,66 | 0,67 | 0,66 | 0,66 | 0,66 |
| SANB11 | DMU53 | 0,91 | 0,89 | 0,87 | 0,85 | 0,88 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,86 | 0,85 | 0,84 |
| SBSP3 | DMU54 | 1,09 | 1,07 | 1,06 | 1,04 | 1,03 | 1,01 | 1,00 | 0,98 | 0,97 | 0,95 | 0,94 |
| TBLE3 | DMU56 | 1,21 | 1,18 | 1,16 | 1,14 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,05 | 1,04 | 1,02 | 1,00 |
| TIMP3 | DMU57 | 0,86 | 0,84 | 0,83 | 0,81 | 0,80 | 0,78 | 0,77 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,72 |
| VIVT4 | DMU61 | 1,19 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,00 |

APÊNDICE N- Tabela de valores pontuais de eficiência do grupo 2 considerando períodos de baixa do mercado (Tabela 9).

| Ativos | | (α_i) | | | | | | | | | | |
|--------|-------|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Código | DMU's | 60% | 59% | 58% | 57% | 56% | 55% | 54% | 53% | 52% | 51% | 50% |
| BBAS3 | DMU2 | 1,22 | 1,18 | 1,14 | 1,12 | 1,09 | 1,06 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,01 | 1,00 |
| BBDC4 | DMU4 | 1,37 | 1,32 | 1,27 | 1,23 | 1,19 | 1,16 | 1,12 | 1,09 | 1,06 | 1,03 | 1,00 |
| BRAP4 | DMU5 | 1,06 | 1,01 | 0,96 | 0,91 | 0,89 | 0,88 | 0,87 | 0,85 | 0,84 | 0,83 | 0,83 |
| BRKM5 | DMU7 | 1,10 | 1,05 | 1,00 | 0,96 | 0,92 | 0,88 | 0,85 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,74 |
| BVMF3 | DMU9 | 0,86 | 0,84 | 0,81 | 0,79 | 0,77 | 0,75 | 0,74 | 0,72 | 0,71 | 0,71 | 0,69 |
| CESP6 | DMU11 | 1,48 | 1,34 | 1,34 | 1,25 | 1,23 | 1,17 | 1,14 | 1,10 | 1,07 | 1,03 | 1,00 |
| CSNA3 | DMU18 | 0,69 | 0,68 | 0,68 | 0,67 | 0,67 | 0,67 | 0,66 | 0,66 | 0,65 | 0,65 | 0,65 |
| CYRE3 | DMU20 | 0,78 | 0,77 | 0,76 | 0,75 | 0,73 | 0,72 | 0,71 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,68 |
| ELET3 | DMU22 | 1,17 | 1,09 | 1,03 | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,84 | 0,80 | 0,77 | 0,74 | 0,71 |
| ELET6 | DMU23 | 1,37 | 1,28 | 1,20 | 1,16 | 1,11 | 1,06 | 1,02 | 0,99 | 0,95 | 0,92 | 0,88 |
| ELPL4 | DMU24 | 2,56 | 2,18 | 1,98 | 1,82 | 1,68 | 1,54 | 1,42 | 1,30 | 1,20 | 1,10 | 1,00 |
| EVEN3 | DMU28 | 0,96 | 0,96 | 0,94 | 0,91 | 0,88 | 0,86 | 0,86 | 0,85 | 0,84 | 0,83 | 0,82 |
| FIBR3 | DMU29 | 1,17 | 1,11 | 1,05 | 1,00 | 0,94 | 0,90 | 0,86 | 0,83 | 0,79 | 0,76 | 0,73 |
| GFA3 | DMU30 | 0,70 | 0,65 | 0,62 | 0,59 | 0,57 | 0,55 | 0,52 | 0,49 | 0,47 | 0,45 | 0,44 |
| GGBR4 | DMU31 | 0,89 | 0,86 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,73 | 0,72 | 0,72 |
| GOAU4 | DMU32 | 0,87 | 0,84 | 0,81 | 0,77 | 0,74 | 0,76 | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,73 | 0,72 |
| GOLL4 | DMU33 | 0,54 | 0,51 | 0,49 | 0,46 | 0,44 | 0,42 | 0,40 | 0,39 | 0,37 | 0,36 | 0,35 |
| HYPE3 | DMU35 | 1,35 | 1,25 | 1,17 | 1,10 | 1,03 | 0,97 | 0,92 | 0,88 | 0,84 | 0,81 | 0,78 |
| ITSA4 | DMU36 | 1,25 | 1,20 | 1,16 | 1,12 | 1,08 | 1,04 | 1,01 | 0,98 | 0,98 | 0,97 | 0,96 |
| ITUB4 | DMU37 | 1,26 | 1,22 | 1,19 | 1,17 | 1,14 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,04 | 1,02 | 1,00 |
| JBSS3 | DMU38 | 1,05 | 0,91 | 0,83 | 0,78 | 0,74 | 0,71 | 0,67 | 0,63 | 0,59 | 0,56 | 0,53 |
| MRFG3 | DMU42 | 0,93 | 0,85 | 0,79 | 0,73 | 0,68 | 0,66 | 0,63 | 0,61 | 0,59 | 0,57 | 0,54 |
| MRVE3 | DMU43 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,74 | 0,72 | 0,69 | 0,66 | 0,64 | 0,62 | 0,61 | 0,60 |
| OIBR4 | DMU45 | 1,10 | 1,09 | 1,07 | 1,01 | 0,96 | 0,90 | 0,89 | 0,88 | 0,86 | 0,85 | 0,84 |
| PDGR3 | DMU47 | 0,44 | 0,43 | 0,41 | 0,40 | 0,38 | 0,36 | 0,32 | 0,33 | 0,35 | 0,31 | 0,31 |
| PETR3 | DMU48 | 0,86 | 0,85 | 0,85 | 0,84 | 0,84 | 0,84 | 0,83 | 0,83 | 0,82 | 0,82 | 0,81 |
| PETR4 | DMU49 | 1,33 | 1,28 | 1,24 | 1,21 | 1,17 | 1,14 | 1,11 | 1,08 | 1,05 | 1,03 | 1,00 |
| RSID3 | DMU52 | 0,39 | 0,39 | 0,38 | 0,38 | 0,37 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,35 | 0,35 | 0,35 |
| SUZB5 | DMU55 | 6,79 | 5,05 | 4,47 | 4,01 | 3,68 | 3,48 | 2,37 | 1,83 | 1,49 | 1,29 | 1,00 |
| USIM5 | DMU58 | 1,13 | 1,04 | 0,95 | 0,86 | 0,80 | 0,76 | 0,73 | 0,69 | 0,66 | 0,63 | 0,60 |
| VALE3 | DMU59 | 1,05 | 1,01 | 0,98 | 0,95 | 0,92 | 0,89 | 0,88 | 0,87 | 0,87 | 0,86 | 0,85 |
| VALE5 | DMU60 | 1,64 | 1,60 | 1,56 | 1,53 | 1,50 | 1,46 | 1,43 | 1,40 | 1,37 | 1,34 | 1,00 |