Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Limites Não Relativísticos em Teoria Quântica de Campos

Vitor Gigante

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Perchine

Itajubá, 18 de Abril de 2010

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada

Limites Não Relativísticos em Teoria Quântica de Campos

Vitor Gigante

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Perchine

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada

Itajubá – MG
18 de Abril de 2010

Agradecimentos

Agradeço ao bom Deus por ter me dado a vida. À meus pais por me apoiarem, sempre e incondicionalmente. Aos amigos da Pós-Graduação, sempre prontos para ajudar no que fosse preciso e possível. Aos funcionários e professores da Pós-Graduação, principalmente ao professor Vladimir Perchine por estar sempre presente e disposto a ajudar no desenvolvimento deste trabalhao. À Fapemig pelo suporte financeiro. À minha Patrícia pelo carinho, paciência e compreenção.

Resumo

Neste trabalho estudamos limites não relativistícos em Teoria Quântica de Campos. Apresentamos alguns conceitos básicos em Teoria de Grupos e uma breve análise do grupo de Poincaré, explicitanto sua álgebra e identificando-o como um grupo de simetria de 10-parâmetros. Tomamos o limite não relativístico do grupo de Poincaré para chegar ao grupo de Galileo Extendido, um grupo de simetria de 11-parâmetros. Na última parte do trabalho estudamos a álgebra do maior grupo de transformações que deixam a equação de Schrödinger de uma partícula livre (ESPL) invariante. Verificamos que a ESPL, além das simetrias do grupo de Galileo Extendido, possui transformações de simetria associadas às simetrias de escala e conforme.

Palavras–chave Limite não relativístico, Grupo de Galileo, Grupo de Schrödinger

Abstract

In this work we study the nonrelativistic limits in Quantum Field Theory. We present some basic concepts in group theory and a brief analysis of the Poincare group, studying its algebra and identifying it as a symmetry group of 10-parameters. We take the nonrelativistic limit of the Poincare group to get the Extended Galileo group, which represents a symmetry group with 11 parameters. In the last part of this work we study the algebra of the largest group of transformations that leaves the Schrödinger equation for a free particle (SEFP) invariant. We verify that the SEFP, beyond the symmetries of the Extended Galileo group, contains symmetries transformations associated to scale and conformal symmetries.

Keywords Nonrelativistic Limit, Galileo Group, Schrödinger Group

Conteúdo

Agradecimentos **i**

Resumo **ii**

Abstract **iii**

Índice **iv**

Introdução **1**

1 Introdução **1**

2 Teoria de Grupos **5**

2.1 Axiomas 5

2.2 Representações em teoria de grupos 6

2.3 Álgebra de Lie 10

3 Representações Irredutíveis do grupo de Poincaré **13**

3.1 Leis de Multiplicação e Álgebra do grupo de Poincaré 13

3.2 Operadores de Casimir 17

3.3 Método de representações induzidas 18

3.4 Grupos de Estabilização 19

3.5 Representação nos campos 22

3.6 Representações Massivas ($p^2 > 0, p_0 > 0$) 23

3.7 Representações sem Massa ($p^2 = 0, p_0 > 0$) 24

4 Grupo de Galileo **25**

4.1 A "não-álgebra" do Grupo de Galileo 25

4.2 Limite não-relativístico 27

4.3 Raios e Representações Projetivas 29

5 Grupo de Schrödinger **35**

5.1 Teorema de Noether 35

5.2 Mais do Grupo de Galileo 37

5.3 Simetrias de escala e conforme para a equação de Schrödinger 41

6 Conclusão **48**

A Comutadores da “não-álgebra”do Grupo de Galileo **50**

B Comutadores do Grupo de Schrödinger **54**

B.1 Comutadores do grupo de Galileo Extendido 55

B.2 Comutadores dos geradores de simetria de escala e conforme 57

Bibliografia **59**

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) talvez seja hoje a teoria científica mais bem fundamentada da história da ciência moderna. Começou a ser elaborada no início da década de 30 do século XX, por nomes como Werner Heisenberg e Paul Dirac, com a finalidade de apresentar uma quantização do campo eletromagnético. Logo percebeu-se que essa quantização só seria possível através da unificação dos dois maiores pilares da física teórica do início do século XX, a relatividade restrita de Albert Einstein e a Mecânica Quântica de Niels Bohr, Wolfgang Pauli, Heisenberg, Max Born, Dirac e Erwin Schrödinger. Desenvolvida no decorrer dos anos, alcançou grande sucesso no final dos anos 40 com nomes como Richard Feynman e Julian Schwinger, que conseguiram de forma consistente explicar a interação da radiação com a matéria. A teoria da Eletrodinâmica Quântica[1], desenvolvida com os trabalhos de Schwinger e Feynman, possui concordância entre resultados teóricos e experimentais com até doze casas decimais. No final dos anos sessenta a TQC alcançou sua maior maturidade com os trabalhos de Steven Weinberg e Gerard't Hooft, entre outros, que ajudaram a construir o que hoje é conhecido como Modelo Padrão da física de partículas. O Modelo padrão é uma Teoria Quântica de Campos que descreve três das quatro interações fundamentais conhecidas na natureza (interações forte, fraca e eletromagnética), apenas a interação gravitacional, descrita pela relatividade geral de Einstein, permanece ainda inconsistente como uma teoria qûantica de campos. Grande parte da comunidade científica hoje espera a confirmação final do poder do Modelo Padrão com a descoberta do Bóson de Higgs, partícula cuja existência é predita pelo Modelo Padrão mas ainda não detectada em laborátorio. No dia 23 de novembro de 2009 deu-se início as primeiras colisões de partículas no megacolisor de partículas LHC (Large Hadron Collider) instalado no CERN, na fronteira entre a França e a Suiça, cujo um dos principais objetivos é a detecção do Bóson de Higgs.

Esta união bem sucedida da relatividade com a mecânica quântica parece ter, por um bom tempo, ofuscado as teorias não relativísticas, relegando-as à um segundo plano para a compreensão da natureza. No entanto recentemente o interesse em teorias não relativísticas parece ter resurgido, modelos em TQC tem sido empregados com sucesso para se estudar vários sistemas em física da matéria condensada. Entre os dias 18 e 26 de agosto de 2009 o professor Anthony Zee, da Universidade da Califórnia em Santa Barbara, esteve no IFT-Unesp ministrando uma série de aulas baseadas na segunda parte de seu livro Quantum Field Theory in a Nutshell[2], incluindo tópicos que tratavam exatamente do grande poder de se empregar modelos de TQC para se analisar fenômenos como superfluidez, supercondutividade, entre outros fenômenos descritos pela física da matéria condensada. Além disso na década de 90 mostrou-se que modelos duais holográficos poderiam ser de grande importância numa tentativa de unificação da gravitação com outras forças da natureza[3], [4], [5] e parece que um melhor entendimento desses modelos duais passa necessariamente por um melhor entedimento dessas dualidades holograficas num limite não relativístico[6].

Neste trabalho nos propomos a apresentar uma introdução à simetrias não relativísticas. Nosso principal objetivo é mostrar que o limite não relativístico pode ser menos trivial do que se espera e, possívelmente, mais fundamental para um melhor entendimento da natureza. O conceito de simetria é hoje, possivelmente, a ferramenta mais poderosa, que permeia e solidifica os maiores avanços da física teórica moderna. Segundo o matemático Hermann Weyl: "uma coisa é simétrica se existe algo que podemos fazer com ela de tal maneira que, depois de feita, a coisa mantém o mesmo aspecto de antes". A descrição matemática do conceito de simetria é realizada por meio da Teoria de Grupos.

A Teoria de Grupos é uma estrutura axiomática bastante estudada em Álgebra abstrata, iniciada principalmente pelas ideias do matemático Évariste Galois que no início do século XIX utilizou a ideia de teoria de grupos finitos para resolver equações algébricas de segundo, terceiro e quarto grau. Desenvolveu-se pouco tempo depois a partir de trabalhos do matemático Marius Sophie Lie que por analogia tentou utilizar métodos de grupos contínuos para resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais. Talvez tenha sido no início da década de 30 do século passado que um estudo mais sistemático e rigoroso da teoria de grupos começou a ser empregado na física, e está associado principalmente a nomes como Eugene Wigner e Hermann Weyl. No primeiro capítulo deste trabalho começamos expondo alguns conceitos básicos em Teoria de Grupos que acreditamos serem fundamentais para o entendimento dos assuntos abordados durante o trabalho, enunciamos os postulados e em seguida utilizando o conceito de grupos finitos trabalhamos com a ideia de representações em teoria de grupos e finalmente tratamos um pouco a respeito da Álgebra de Lie. Todo o capítulo foi escrito com base nas referências [7], [8], [9].

Desde o início do século XX sabemos que as leis da natureza devem ser invariantes frente tranformações do grupo de Poincaré. Um dos mais influentes trabalhos utilizando a Teoria de Grupos na física foi o escrito por Wigner em 1939[10], desde a apresentação deste trabalho o grupo de Poincaré é muito bem conhecido. No segundo capítulo partimos então para o estudo da teoria geral de representações dos grupos de simetria na teoria de campos, tratando mais especificamente do grupo de Poincaré, grupo de simetrias fundamental para toda teoria relativística, explicitamos a álgebra do grupo concluindo o grupo de Poincaré como um grupo de simetria de 10-parâmetros (três rotações, três boosts, três translações espaciais e uma temporal). Para finalizar este capítulo buscamos apresentar como surge o conceito de partículas como representações irredutíveis do grupo, este capítulo foi escrito tomando como referência parte do capítulo 2 do livro de Weinberg[11]. Até 1905, ano em que Einstein apresentou seus trabalhos sobre a relatividade especial, as leis da física (mecânica newtoniana) deveriam ser invariantes sob o que conhecemos hoje ser as transformações de Galileo.

Uma das principais consequências da mecânica relativística é a quebra do carater absoluto do tempo, observadores de diferentes referencias inerciais poderiam perceber o mesmo evento em diferentes intervalos de tempo. Uma citação bastante conhecida na história da física é a do matemático Hermann Minkowisk: "O espaço por si e o tempo por si desaparecerão em meras sombras, e somente uma espécie de união entre eles sobreviverá", talvez seja a síntese da relatividade especial. No entanto toda essa revolução científica do início do século XX de forma alguma implica que as transformações de Galileo devem ser completamente esquecidas, a mecânica newtoniana dever ser completamente resgatada no limite não relativístico. No terceiro capítulo estudamos o Grupo de Galileo. Na expectativa de o entendermos como um limite não relativístico do grupo de Poincaré, analisaremos o limite não relativístico do grupo de Poincaré e observaremos que existem algumas peculiariedades que tornam não trivial a análise deste limite, principalmente no âmbito da mecânica quântica. É neste contexto da mecânica quântica que se faz necessário o uso das representações projetivas. O conceito de representações projetivas induz uma simetria associada à transformações de fase, além dos 10 parâmetros de simetria usuais do grupo de Poincaré, assim, no limite não-relativístico, observamos uma extenção para um grupo de simetria de 11-parâmetros.

No início da década de 70 uma nova ferramenta começou a ser bastante empregada na física de altas energias. A Teoria de Campo Conforme, hoje, além de ser uma peça importante no estudo das teorias de cordas, possui também papel fundamental na física da matéria condensada, por exemplo, no estudo de fenômenos críticos. Uma referência bastante completa sobre o assunto é o livro de Di Francesco[12]. Foi também no início dos anos 70 que alguns trabalhos começaram a explorar a existência de simetrias conformes para limites de baixa energia, dois destes trabalhos são os artigos de Niederer[13] e Hagen[14]. No último capítulo deste trabalho nos propusemos a estudar com detalhes a primeira parte do trabalho de Hagen, onde é analisada a existência de simetrias de escala e conforme para a equacão de Schrödinger, assim o maior grupo de simetria para a equação de Schrödinger para uma partícula livre de massa m é um gupo de simetria de 13-parâmetros, para um trabalho bastante atualizado a respeito das simetrias da equação de Schrödinger veja [15]. A ferramenta essencial para o desenvolvimento do nosso estudo neste último capítulo é o Teorema de Noether, desenvolvido pela matemática alemã Emmy Noether e publicado primeiramente em 1918[16], que trata das implicações dinâmicas em sistemas físicos com determinada simetria. Pode-se dizer que o Teorema de Noether afirma que para toda simetria contínua da natureza (ou, de uma ação) existe uma lei de conservação, e inversamente, toda lei de conservação deve revelar uma simetria da natureza (ou, da ação). Utilizaremos o teorema de Noether para explicitar os geradores da simetria de escala e conforme e apresentaremos a álgebra que define o grupo de invariância da equação de Schrödinger.

Capítulo 2

Teoria de Grupos

2.1 Axiomas

Definição 2.1.1 *Um grupo G está definido quando, dada uma operação, "$\cdot$", para cada par ordenado de elementos deste grupo um terceiro elemento deve satisfazer os seguinte axiomas:*

(i) *Se* $f, g \in G \Rightarrow h = f \cdot g \in G$

(ii) *Para* $f, g, h \in G,\ f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$

(iii) *Existe um elemento identidade,* $e \in G$ *tal que, para todo* $f \in G$, $e \cdot f = f \cdot e = f$

(iv) *Todo elemento* $f \in G$ *tem uma inversa,* $f^{-1} \in G$, *tal que* $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$

Assim um grupo é uma tabela de multiplicação que especifica um elemento $g_1 \cdot g_2 \in G$ para todo $g_1, g_2 \in G$. No caso de os elememtos do grupo serem discretos esta tabela de multiplicação pode ser construída de forma explícita.

	e	g_1	g_2	$\cdots$
e	e	g_1	g_2	$\cdots$
g_1	g_1	$g_1 \cdot g_1$	$g_1 \cdot g_2$	$\cdots$
g_2	g_2	$g_2 \cdot g_1$	$g_2 \cdot g_2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 2.1: Tabela de multiplicação

2.2 Representações em teoria de grupos

Definição 2.2.1 *Uma representação de G é um mapeamento D_R de elementos de G em um conjunto de operadores lineares com as seguintes propriedades:*

(i) $D_R(e) = 1$, onde 1 é o operador identidade no espaço no qual o operador linear atua.

(ii) $D_R(g_1) \cdot D_R(g_2) = D_R(g_1 \cdot g_2)$, ou seja, a lei de multiplicação do grupo é mapeada em uma multiplicação natural no espaço linear no qual os operadores atuam.

O espaço no qual os operadores D_R atuam é chamado base para a representação R. Um típico exemplo de uma representação é uma representação matricial. Neste caso a base é um espaço vetorial de dimensão finita n, e um elemento abstrato g do grupo é representado por uma matriz $n \times n$

$$D_R(g)^i{}_j \qquad i, j = 1, 2, ..., n.$$

A dimensão da representação é definida como a dimensão n do espaço de base. Dado $(x^1, ..., x^n)$ um elemento qualquer do espaço de base, um elemento g do grupo induz uma transformação do espaço vetorial da forma $x^i \to D_R(g)^i{}_j x^j$. Chamamos de *representação trivial* quando identificamos a todo elemento do grupo uma matriz identidade 1.

Exemplo: Z_3

Seja Z_3 o grupo definido pela tabela de multiplicação 2.2

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tabela 2.2: Grupo Z_3

Dizemos que este é um grupo *finito* de *ordem* três. Por *ordem* entendemos o número de elementos do grupo. Este grupo possui uma outra propriedade bastante interessante

$$g_1 g_2 = g_2 g_1,$$

ou seja, os elementos do grupo comutam. Quando todos os elementos de um determinado grupo comutam dizemos que este grupo é *abeliano*. Vamos agora apresentar algumas representações para este grupo

$$D(e) = 1, \qquad D(a) = e^{2\pi \frac{i}{3}}, \qquad D(b) = e^{4\pi \frac{i}{3}} \tag{2.1}$$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

A representação (2.1) é de dimensão um e a representação (2.2) é de dimensão três.

Uma representação é dita *redutível* quando ela possui um *subespaço invariante*, ou seja a ação de qualquer $D(g)$ em qualquer vetor do subespaço ainda pertence ao subespaço. No caso do nosso exemplo anterior, o grupo Z_3, um elemento do subespaço invariante é dado por elementos da forma $\propto (1, 1, 1)$. Uma representação é dita *irredutível* se ela não for redutível. Uma representação é dita *completamente redutível* se é equivalente a uma representação cujos elementos de matriz tem a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & D_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde $D_j(g)$ é uma representação irredutível para todo j. Chamamos esta representação de *bloco diagonal*, e dizemos que ela é uma *soma direta* $(D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \cdots)$ das representações irredutíveis, ou seja, uma representação completamente redutível é aquela que pode ser decomposta em uma soma direta de representacões irredutíveis[1].

Vamos apresentar agora os conceitos de *subgrupos*, *cosets* e *fator de grupo*. Um grupo H é dito subgrupo de G quando todos seus elementos h pertencem a G e satisfazem as condições da definição 2.1.1. Então podemos, trivialmente, identificar o elemento identidade 1 e o próprio grupo G como subgrupos triviais de G. Vamos mostrar um exemplo simples, não trivial, de um subgrupo.

Exemplo: S_3

[1]Qualquer representação d-dimensional de um grupo abeliano pode ser escrito como uma soma direta de d representações unidimensionais, ou seja, todas representações irredutíveis de grupos abelianos são unidimensionais.

O grupo S_3 é conhecido como grupo de permutação em três objetos, e seus elementos são:

$$e \qquad a_1 = (1,2,3) \qquad a_2 = (3,2,1)$$
$$a_3 = (1,2) \qquad a_4 = (2,3) \qquad a_5 = (3,1)$$

onde a_1 é uma permutação cíclica dos elementos, a_2 uma permutação anticíclica, a_3 troca a posição dos objetos que estão nas posições 1 e 2, e da mesma forma para os elementos a_4 e a_5. A tabela de multiplicação para este grupo é dada por 2.3. Neste caso notemos

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_5	a_3	a_4
a_2	a_2	e	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_3	a_2	e	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	e

Tabela 2.3: Grupo S_3

que o grupo Z_3 é um subgrupo de S_3. Observe também que o grupo S_3 possui três outros subgrupos $\{e, a_3\}, \{e, a_4\}, \{e, a_5\}$.

Dois subgrupos H_1 e H_2 de G são ditos *conjugados* se existe um elemento $g \in G$ tal que

$$gH_1 = H_2 g \tag{2.3}$$

Exemplo: $a_4\{e, a_3\} = \{e, a_5\}a_4$

Porque os grupos, $\{e, a_3\}, \{e, a_4\}, \{e, a_5\}$, são conjugados entre si vamos resumí-los em um único grupo e denotálo de Z_2 (também conhecido como grupo de paridade) com sua tabela dada por 2.4

	e	p
e	e	p
p	p	e

Tabela 2.4: Grupo Z_2

Um subgrupo $H \subset G$ é dito um *subgrupo invariante* de G quando para todo $g \in G$

$$gH = Hg. \tag{2.4}$$

Exemplo: Z_3 é um subgrupo invariante de S_3.

Considere agora elementos h_i de um subgrupo $H \subset G$ e um dado elemento $g \in G$ e que não pertençam a H, então $g_j \cdot h_i$ e $h_i \cdot g_j$ não pertencem ao subgrupo de H. Os conjuntos gerados por

$$g \cdot h_i \qquad h_i \cdot g \qquad i = 1, 2, ...$$

são chamados, respectivamente, de *cosets a esquerda* e *cosets a direita* de um subgrupo de H em G. O número de elementos distintos que um dado coset de um subgrupo possui é o mesmo que o número de elementos distintos que o próprio subgrupo possui, isto é fácil verificar. Tome $h_i = h_j \Leftrightarrow i = j$, agora assuma que a afirmação da igualdade do número de elementos distintos seja falsa, então deve existir pelo menos um $x \in G$ tal que, $xh_i = xh_j$ para $i \neq j$, ou seja, existe pelo menos um $h_i = h_j$ para $i \neq j$, o que por hipótese é uma contradição. Tendo em vista este resultado podemos escrever um dado grupo G como a soma de um dado subgrupo e seus cosets,

$$G = H + x_1H + x_2H + \cdots . \tag{2.5}$$

Daí a ordem de um grupo deve ser um multiplo da ordem de um subgrupo qualquer, uma vez que, como mostrado acima, um subgrupo e seu coset devem ter a mesma ordem.

Exemplo:

$S_3 = \{\underbrace{e, a_1, a_2}_{Z_3}, \overbrace{a_3, a_4, a_5}^{a_3Z_3}\} = Z_3 + a_3Z_3.$

Note que a escolha de a_3Z_3 como coset não é única. A escolha de a_5Z_3, ou a_4Z_3 também formariam completamente o grupo S_3.

Quando identificamos cada coset como um único elemento do espaço construimos o que chamamos de *coset-space*, e denotamos por G/H. Para o caso do nosso exemplo anterior, identificando Z_3 como e, e a_3Z_3 como p (a_3, ou a_4, ou a_5), então $S_3/Z_3 = Z_2$.

$$\begin{array}{ccccc} G/H & \cdot & H & = & G \\ \{e, a_3\} & & \cdot \{e, a_1, a_2\} & = & \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \end{array} \tag{2.6}$$

Note que S_3/Z_3 é um subgrupo de S_3. No entanto, nem sempre é possível escolher elemenos de G/H de tal forma que este seja um subgrupo de G. Esta possibilidade será sempre possível apenas quando H for um subgrupo invariante de G, e neste caso G/H é conhecido como *grupo quociente*. A mensagem importante aqui é, se H é um subgrupo invariante de G, então o grupo G é um *produto direto* do subespaço invariante H com o grupo quociente

G/H,

$$G = G/H \otimes H. \quad (2.7)$$

2.3 Álgebra de Lie

Até o momento introduzimos alguns conceitos, e para isso utilizamos alguns exemplos de grupos discretos, isto é, grupos que contém um número finito de elementos e no qual é possível contruir tabelas do tipo 2.1. No entanto existe um outro tipo de grupo de extrema relevância na física em que não é possível contruir tais tabelas de multiplicação. Neste grupo um dado elemento depende de um ou mais parâmetros reais, $\theta^a, a = 1, 2, ..., N$, de forma diferenciável e contínua, dizemos que este é um *grupo contínuo*, conhecido como *Grupo de Lie*. Uma vez que os elementos deste grupo estão parametrizados da forma especificada acima ocorre que estes elementos podem ser identificados como pontos em uma variedade. Não vamos nos preocupar em entrar detalhadamente na questão topológica[2], no entanto, a propriedade de compacidade deste espaço é bastante útil, devido a existência de um teorema que afirma a não existência de representações unitárias de dimensão finita de grupos contínuos não-compactos. Representações unitárias são de fundamental importância, pois como veremos um pouco mais adiante estarão de alguma forma relacionadas a operadores hermitianos, e dos postulados da mecânica quântica sabemos que observáveis físicas estão intimamente associadas a operadores hermitianos. Vamos agora nos ater a obter algumas propriedades algébricas do *Grupo de Lie*. Primeiramente vamos parametrizar os elementos do grupo de tal forma que para $\theta = 0$,

$$g(\theta)|_{\theta=0} = e. \quad (2.8)$$

Então, dada uma representação, os operadores lineares desta representação serão parametrizados por[3],

$$D_R(0) = 1. \quad (2.9)$$

E da condição de diferenciabilidade, para θ^a infinitesimal, na vizinhança do elemento identidade podemos escrever:

$$D_R \cong 1 + i\theta_a T^a_R, \quad (2.10)$$

[2]Caso o leitor tenha interesse, um texto introdutório em topologia pode ser encontrado no segundo capítulo do livro de Rudin[17]

[3]Utilizaremos um abuso de linguagem, tratando a representação de um dado elemento do grupo, definido por um parâmetro, como a representação do próprio parâmetro.

com

$$T_R^a \equiv -i\frac{\partial D_R}{\partial\theta_a}\bigg|_{\theta=0}, \tag{2.11}$$

onde T_R^a são chamados de geradores do grudo na representação R, e definidos com o fator i de forma que T_R^a sejam hermitianos e $D_R(\theta)$ unitários. É possível mostrar que, os elementos $g(\theta)$ de um grupo podem sempre ser representados por

$$D_R(\theta) = e^{i\theta_a T_R^a}. \tag{2.12}$$

Note que da forma infinitesimal de (2.12) retomamos (2.10).

Retornando à definição 2.2.1, temos que o produto de duas matrizes $D_R(g_1) = e^{i\theta_a T^a}$ e $D_R(g_2) = e^{i\theta_b T^b}$ deve ser igual a $D(g_1 g_2)$, ou seja,

$$e^{i\theta_a T_R^a} e^{i\theta_b T_R^b} = e^{i\gamma_c(\theta_a,\theta_b)T_R^c}. \tag{2.13}$$

Sendo a inversa de (2.12) dada por

$$D_R(\theta)^{-1} = e^{-i\theta_a T_R^a}, \tag{2.14}$$

vamos calcular a expressão $D_R(\theta_a)^{-1}D_R(\theta_b)^{-1}D_R(\theta_a)D_R(\theta_b)$ até segunda ordem em θ. Para não carregar índices demasiadamente vamos suprimir o índice R

$$\begin{aligned} &D(\theta_a)^{-1}D(\theta_b)^{-1}D(\theta_a)D(\theta_b) \\ &\qquad = (1 - i\theta_i T^i - \frac{1}{2}\theta_j T^j \theta_i T^i)(1 - i\theta_k T^k - \frac{1}{2}\theta_k T^k \theta_l T^l) \\ &\qquad \times (1 + i\theta_m T^m - \frac{1}{2}\theta_m T^m \theta_n T^n)(1 + i\theta_p T^p - \frac{1}{2}\theta_p T^p \theta_q T^q) \\ &\qquad = (1 + \theta_a\theta_b T^a T^b - \theta_a\theta_b T^b T^a) + O(\theta^3). \end{aligned} \tag{2.15}$$

No entanto de (2.13), sabemos que (2.15) deve ser da forma $e^{i\gamma_c T^c}$. Assim

$$\theta_a\theta_b[T^a, T^b] = i\gamma_c(\theta_a,\theta_b)T^c. \tag{2.16}$$

Finalmente suponha $\gamma_c = f_c + \theta_a f_c^a + \theta_b f_c^b + \theta_a\theta_b f^{ab}{}_c + \mathbf{O}(3)$. No entanto, de (2.16) γ_c deve ser linear em θ_a e θ_b, ou seja

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c. \tag{2.17}$$

Dizemos então que os geradores formam uma álgebra sob comutação, (2.17), conhecida como *álgegra de Lie*. A constante $f^{ab}{}_c$ é conhecida como *constante de estrutura* e possui algumas propriedades bastante importantes. Devido ao fato de que $[T^a, T^b] = -[T^b, T^a]$, temos

$$f^{ab}{}_c = -f^{ba}{}_c. \tag{2.18}$$

Dizemos que a constante de estrutura é antisimétrica nos índices ab (na verdade a constante de estrutura é antisimétrica em todos seus índices mas não mostraremos este fato aqui). Dado D_R uma representação unitária, temos T^b e T^a hermitianos, e consequentemente

$$\begin{aligned} [T^a, T^b]^\dagger &= -i f^{ab}{}_c{}^* T^c \\ = [T^b, T^a] &= i f^{ba}{}_c T^c = -i f^{ab}{}_c T^c, \end{aligned} \tag{2.19}$$

ou seja, a constante de estrutura deve ser real. Finalmente os geradores satisfazem o que conhecemos como identidade de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{2.20}$$

Os conceitos apresentados neste capítulo juntamente com o Teorema de Noether, que será apresentado na seção 5.1, formam as ferramentas básicas para o estudo de simetrias na física teórica.

Capítulo 3

Representações Irredutíveis do grupo de Poincaré

3.1 Leis de Multiplicação e Álgebra do grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré é o grupo das tranformações lineares

$$x^m \to x'^m = \Lambda^m{}_n x^n + a^m, \qquad \text{com } \Lambda, a \to constantes, \tag{3.1}$$

que preservam a forma do intervalo $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Desta definição podemos escrever a seguinte condição de igualdade

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} d(\Lambda^\mu{}_m x^m + a^\mu) d(\Lambda^\nu{}_n x^n + a^\nu) = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_m \Lambda^\nu{}_n dx^m dx^n.$$

Então segue que

$$\eta_{mn} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_m \Lambda^\nu{}_n. \tag{3.2}$$

Vamos agora verificar se as transformações do grupo de Poincaré realmente satisfazem os axiomas de um grupo 2.1.1. Para isto vamos escrever a equação (3.1), sem nos preocuparmos com os índices, da seguinte forma

$$x' = T(\Lambda, a)x = \Lambda x + a.$$

Então a lei de multplicação (primeiro postulado) será:

$$T_1(\Lambda_1, a_1) T_2(\Lambda_2, a_2)x = T_1(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2 x + a_2) = \Lambda_1(\Lambda_2 x + a_2) + a_1 = \Lambda_1\Lambda_2 x + \Lambda_1 a_2 + a_1$$

ou seja,

$$T_1(\Lambda_1, a_1) T_2(\Lambda_2, a_2) = T(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1) \tag{3.3}$$

Para verificar o segundo axioma basta nos utlizarmos da lei de multplicação (3.3). O passo seguinte será verificar a existência do elemento identidade, ou seja, deve haver uma transformação Γ que satisfaça a condição de igualdade

$$T_1(\Lambda_1, a_1)\,\Gamma x = \Gamma\, T_1(\Lambda_1, a_1)x.$$

É fácil verificar que Γ existe e é dada por

$$\Gamma = T(1, 0). \tag{3.4}$$

Finalmente nos resta verificar a existência do elemento inverso, ou seja, uma transformação Γ que satisfaça a condição de igualdade

$$T_1(\Lambda_1, a_1)\,\Gamma x = \Gamma\, T_1(\Lambda_1, a_1)x = T_1(1, 0)x.$$

Novamente usando a lei de multiplicação é fácil determinar que tal transformação é dada por

$$\Gamma = T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a). \tag{3.5}$$

Logo a transformação (3.1) satisfaz todas as condições necessárias de um autêntico grupo.

Vamos voltar agora à equação (3.2) e escreve-lá na forma matricial

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \tag{3.6}$$

segue que $(det\Lambda)^2 = 1$, ou $det\Lambda = \pm 1$. Consideremos também a componente-00 da eq.(3.2) na sua forma explícita,

$$1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^i{}_0. \tag{3.7}$$

Então $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, ou seja, ou $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Àquelas transformações que obedecem (3.1), cujo $det\Lambda = 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ são também conhecidas como *Grupo de Lorentz não-homogêneo ortocronus próprio*, usualmente denotada por $ISO(3,1)$[1]. Deste momento em diante, o que chamamos de grupo de Poincaré será $ISO(3,1)$.

Vamos agora nos preocupar em explicitar a álgebra do grupo de Poincaré. Como vimos $T(\Lambda, a)$ são transformações de simetria no espaço-tempo, segundo um outro trabalho de Wigner[18] à estas transformações de simetria no espaço-tempo devem estar associadas transformações unitárias de estados no espaço de Hilbert. De acordo com a seção 2.3,

[1] O *Grupo de Lorentz ortocronus próprio* denotado por $SO(3,1)$, é definido simplesmente tomando a=0 em (3.1)

equação (2.12), é sempre possível, para grupos contínuos, escrever um operador unitário na forma $e^{i\theta_a T^a}$. Vamos denotar o operador unitário associado a $T(\Lambda, a)$ por $U(\Lambda, a)$, e sendo $T(1+\omega, \epsilon)$ uma tranformação infinitesimal de $T(\Lambda, a)$ próxima à identidade, escrevemos um operador unitário para esta transformação infinitesimal na forma

$$U(1+\omega, \epsilon) = 1 + i\epsilon_a P^a - \frac{i}{2}\omega_{ab}J^{ab}. \tag{3.8}$$

Observe que a transformação identidade de (3.1) é $\Lambda^m{}_n = \delta^m{}_n,\ a^m = 0$, para uma transformação próxima à identidade,

$$\Lambda^m{}_n = \delta^m{}_n + \omega^m{}_n, \qquad a^m = \epsilon^m, \tag{3.9}$$

onde $\omega^m{}_n$ e ϵ^m são infinitesimais. Substituindo (3.9) em (3.2) temos

$$\omega_{mn} = -\omega_{nm}, \tag{3.10}$$

frequentemente estaremos usando a propriedade de ω ser antissimétrico para evoluirmos nos cálculos. De (3.5) e (3.3)

$$U(\Lambda, a)U(1+\omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) = U(1 + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) \tag{3.11}$$

expandindo(3.11) em primeira ordem em (ω, ϵ)

$$i\epsilon_a UP^aU^{-1} - \frac{i}{2}\omega_{ab}UJ^{ab}U^{-1} = i(\Lambda\epsilon)_a P^a - i(\Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_a P^a - \frac{i}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{ab}J^{ab}. \tag{3.12}$$

Comparando os coeficientes em (3.12), temos

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\omega_{ab}UJ^{ab}U^{-1} &= i\Lambda_{ab}\omega^b{}_c\Lambda^{-1cd}a_dP^a + \frac{i}{2}\Lambda_{ac}\omega^{cd}\Lambda^{-1}{}_{db}J^{ab} \\
\omega_{ab}UJ^{ab}U^{-1} &= 2\Lambda_{ca}\omega^{ab}\Lambda^{-1}{}_{bd}a^dP^c + \Lambda_{ca}\omega^{ab}\Lambda^{-1}{}_{bd}J^{cd} \\
UJ^{ab}U^{-1} &= \Lambda_c{}^a\Lambda_d{}^bJ^{cd} + \Lambda_c{}^a\Lambda_d{}^b(a^dP^c - a^cP^d) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

e

$$UP^aU^{-1} = \Lambda_b{}^aP^b \tag{3.14}$$

Das formas infinitesimais das equações (3.13) e (3.14) temos,

$$U(1+\omega)J^{ab}U((1+\omega)^{-1},-(1+\omega)^{-1}\epsilon) = (\delta_c{}^a+\omega_c{}^a)(\delta_d{}^b+\omega_d{}^b)(J^{cd}-\epsilon^c P^d+\epsilon^d P^c)$$

$$(1+i\epsilon_c P^c - \frac{i}{2}\omega_{cd}J^{cd})J^{ab}(1-i\epsilon_c P^c - \frac{i}{2}\omega_{dc}J^{cd}) = (\delta_c{}^a\delta_d{}^b+\delta_c{}^a\omega_d{}^b+\delta_d{}^b\omega_c{}^a)\times$$
$$(J^{cd}-\epsilon^c P^d+\epsilon^d P^c)$$

$$(J^{ab}+i\epsilon_c P^c J^{ab} - \frac{i}{2}\omega_{cd}J^{cd}J^{ab})(1-i\epsilon_c P^c + \frac{i}{2}\omega_{cd}J^{cd}) = (\delta_c{}^a\delta_d{}^b+\delta_c{}^a\omega_d{}^b+\delta_d{}^b\omega_c{}^a)\times$$
$$(J^{cd}-\epsilon^c P^d+\epsilon^d P^c)$$

$$J^{ab}+\frac{i}{2}\omega_{cd}J^{ab}J^{cd} - i\epsilon_c J^{ab}P^c - \frac{i}{2}\omega_{cd}J^{cd}J^{ab} + i\epsilon_c P^c J^{ab} = J^{ab}-\epsilon^a P^b+\epsilon^b P^a+\omega_d{}^b J^{ad}+\omega_c{}^a J^{cb} \tag{3.15}$$

e

$$\frac{i}{2}\omega_{cd}P^a J^{cd} - i\epsilon_c P^a P^c - \frac{i}{2}\omega_{cd}J^{cd}P^a + i\epsilon_c P^c P^a = \omega_b{}^a P^b. \tag{3.16}$$

Igualando os coeficientes em (3.15) e (3.16)

$$\begin{aligned}
[i\omega_{cd}J^{ab}, J^{cd}] &= 2\omega_d{}^b J^{ad} + 2\omega_c{}^a J^{cb} \\
&= 2\eta^{cb}\omega_{dc}J^{ad} + 2\eta^{da}\omega_{cd}J^{cb} \\
&= -2\eta^{cb}\omega_{cd}J^{ad} + 2\eta^{da}\omega_{cd}J^{cb} \\
&= -(\eta^{cb}\omega_{cd}J^{ad} + \eta^{db}\omega_{dc}J^{ac}) \\
&+ \eta^{da}\omega_{cd}J^{cb} + \eta^{ca}\omega_{dc}J^{db},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
[i\epsilon_c P^c, J^{ab}] &= -\epsilon^a P^b + \epsilon^b P^a \\
&= -\eta^{ac}\epsilon_c P^b + \eta^{cb}\epsilon_c P^a,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$[i\epsilon_c P^c, P^a] = 0. \tag{3.19}$$

O conjunto das equações (3.17), (3.18), (3.19) é a álgebra do grupo de Poincaré,

$$\begin{aligned}
&[iP^a, P^b] = 0, \\
&[iJ^{ab}, P^c] = \eta^{ac}P^b - \eta^{bc}P^a, \\
&[iJ^{ab}, J^{cd}] = \eta^{ad}J^{cb} - \eta^{ac}J^{db} + \eta^{bd}J^{ac} - \eta^{cb}J^{ad}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Definindo

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}, \qquad K^i = J^{i0}, \qquad P^0 = H, \tag{3.21}$$

podemos escrever a álgebra (3.20) mais explicitamente da forma

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \\
&[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [K_i, P_j] = iH\delta^{ij}, \qquad [P_i, P_j] = 0 \\
&[K_i, H] = iP_i, \qquad [P_i, H] = [J_i, H] = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Podemos observar de (3.22) que J^i satisfaz a álgebra $SO(3)$ e devem ser geradores de rotações espaciais. K^i, P^i são vetores sob rotação e H um escalar. Assim o grupo de Poincaré é um grupo de simetria com 10-parâmetros.

3.2 Operadores de Casimir

Operadores de Casimir são extremamente importantes para a classificação de representações irredutíveis. Para qualquer álgebra de Lie com geradores G_A

$$[G_A, G_B] = f_{ABC} G_C$$

podemos construir uma álgebra $\epsilon(L)$ com geradores do tipo $G_A, G_A G_B, G_A G_B G_C, \cdots$. Por definição um operador de Casimir é um elemento de $\epsilon(L)$ que comuta com todos G_A.

$$C_i \in \epsilon(L) \, / \, [C_i, G_A] = 0.$$

No caso de G_A realizar uma representação irredutível

$$[C_i, G_A] = 0 \Rightarrow C_i = \lambda_i 1, \quad \text{esta propriedade é conhecida como lema de Schur.}$$

Os números $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ caracterizam a representação,

$$\lambda \; \textit{diferentes} \Leftrightarrow \textit{representações não equivalentes}.$$

Diremos que um determinado grupo é de rank N quando este conter N diferentes $\lambda's$. O Grupo de Poincaré é um grupo de rank 2, ou seja, podemos construir dois operadores de Casimir a partir de seus geradores. O primeiro operador de Casimir nos é familiar[2]

$$P_m P^m = m^2. \tag{3.23}$$

O segundo operador de casimir é $W_m W^m$, onde W^m é o chamado vetor de Pauli-Lubanski,

$$W_m = -\frac{1}{2} \epsilon_{mnkp} J^{nk} P^p. \tag{3.24}$$

Para verificarmos que $W_m W^m$ realmente é um operador de Casimir primeiramente observemos que W^m é um 4-vetor, então $W_m W^m$ é um invariante de Lorentz e deve comutar

[2]Neste capítulo estaremos sempre tratando com o que é conhecido em mecânica quântica como representação de momentum, $P^a \varphi(p) = p^a \varphi(p)$, onde $\varphi(p)$ é o vetor estado.

com J^{mn}. Agora, de sua forma explícita

$$\begin{aligned}
[W_m, P^l] &= [-\frac{1}{2}\epsilon_{mnkp}J^{nk}P^p, P^l] \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{mnkp}[J^{nk}P^p, P^l] \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{mnkp}[J^{nk}, P^l]P^p \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{mnkp}[P^l, J^{nk}]P^p \\
&= \frac{i}{2}\epsilon_{mnkp}(\eta^{ln}P^k - \eta^{lk}P^n)P^p \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde na última igualdade utilizamos o fato de que os P's comutam entre si e a antisimetria de ϵ_{mnkp}. Então W_mW^m comuta com P^l.

3.3 Método de representações induzidas

Dado um grupo G que contém um subgrupo H, então podemos escrever representações irredutíveis de G como somas das representações de H. Esse método é ainda mais conveniente quando H é um grupo abeliano, pois como vimos na seção 2.2, representações irredutíveis de H devem ser unidimensionais. O grupo de Poincaré P contém o subgrupo abeliano das translações T_4

$$x^m \to x'^m = x^m + a^m$$

ou seja,

$$\textit{Representação irredutível de } \mathcal{P} = \oplus\,(\textit{representações de } T_4)$$

Vamos agora tomar um elemento $\psi_A(p_0, p_1, p_2, p_3)$ do espaço linear. Onde A são índices do espaço-tempo que definem ψ como escalares, ou vetores, ou tensores, e p_m é o 4-momento de uma dada partícula. Uma possível representação unitária de T_4 é dada por

$$U(1,a)\varphi_A(p_m) = e^{ia_mP^m}\varphi_A(p_m) \tag{3.26}$$

Para construir diferentes representações irredutíveis do grupo de Poincaré tomamos $\psi_A(p_m)$ com "diferentes"p_m. Tentaremos descobrir estes "diferentes"p_m respondendo à pergunta—quais são os p_m que pertencem à mesma representação irredutível? Mostraremos que se uma representação irredutível de $\mathcal{P}$ contém uma representação de T_4 com um dado p_m então ela também conterá representações de T_4 com $\Lambda^n{}_m p^m$ para todos $\Lambda^n{}_m$. Vejamos:

Da lei de multiplicação (3.3) temos

$$U(\Lambda, 0)U(1, a) = U(\Lambda, \Lambda a) = U(1, \Lambda a)U(\Lambda, 0) \tag{3.27}$$

definindo $U(1, a) \equiv U(a)$ e $U(\Lambda, 0) \equiv U(\Lambda)$, então

$$U(\Lambda)U(a) = U(\Lambda a)U(\Lambda). \tag{3.28}$$

Atuando com (3.28) no estado $\varphi_A(p)$

$$U(\Lambda)U(a)\varphi_A(p) = e^{ia_m P^m}U(\Lambda)\varphi_A(p) = U(\Lambda a)U(\Lambda)\varphi_A(p). \tag{3.29}$$

Agora seja $a' = \Lambda a$,

$$\begin{aligned} U(a')U(\Lambda)\varphi_A(p) &= e^{i(\Lambda^{-1}a')_m p^m}U(\Lambda)\varphi_A(p) \\ &= e^{i(\Lambda p)^m a'_m}U(\Lambda)\varphi_A(p), \end{aligned} \tag{3.30}$$

o que significa que o estado $U(\Lambda)\varphi_A(p)$ realiza a representação unidimensional de $T_4(a)$ com $(\Lambda p)_m$. Ou seja, todos os $p's$ que são ligados por alguma transformação de Lorentz correspondem à mesma representação irredutível. p_1 e p_2 correspondem a representacões diferentes se não existe nenhum Λ tal que $p_1 = \Lambda p_2$. Há 6 classes de vetores (aqui trocamos nossa estranha palavra “diferentes”pela mais charmosa, classe) no espaço de Minkowski. Apenas (1), (2) e (6) possuem interpretações físicas. Vamos analisar um pouco melhor

1)	$p^2 > 0$	$p_0 > 0$	partículas massivas
2)	$p^2 = 0$	$p_0 > 0$	partículas sem massa
3)	$p^2 > 0$	$p_0 < 0$	energias negativas
4)	$p^2 = 0$	$p_0 < 0$	energias negativas
5)	$p^2 < 0$		Táquions
6)	$p^a = 0$		vácuo

Tabela 3.1: Classes de vetores invariantes sob tranformação de Lorentz

as duas primeiras, mas antes de analisarmos cada uma destas representações precisamos apresentar um outro conceito.

3.4 Grupos de Estabilização

Na seção anterior mostramos que se existe uma transformação Λ tal que caso $p' = \Lambda p$ então p' e p correspondem à mesma representação. Mas existem transformações que não mudam o vetor

$$\Lambda_{p_0} p_0 = p_0. \quad \textbf{obs:}\ 0 \text{ não é um índice do espaço-tempo.} \tag{3.31}$$

O conjunto dessas transformações forma um subgrupo chamado *grupo de estabilidade de* p_0 ou *pequeno grupo de* p_0. Mostraremos 2 fatos:

(1) O grupo de Estabilidade é gerado pelo vetor de Pauli-Lubanski.

(2) Representação do grupo de estabilidade define completamente a representação do grupo de Poincaré.

Vejamos:

(1)

$$\Lambda_m{}^n p_n = p_m \Leftrightarrow \omega_m{}^n p_n = 0.$$

Para um dado p_n, $\omega_m{}^n p_n = 0$ é um sistema de 4 equações lineares para 6 incógnitas ω_{mn}. Mas só 3 das equações são independentes, $\omega_m{}^n p_n p^m \equiv 0$. Então a solução geral para ω_{mn} deve depender de 3 parâmetros livres. Um ansatz é:

$$\omega_{mn} = \epsilon_{mnkl} p^k b^l.$$

Onde b^l são 4 parâmetros, mas só 3 deles entram na solução, pois para $b^l \sim p^k$, $\omega_{mn} = 0$. Então o pequeno grupo é gerado como

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{2}\omega_{mn}J^{mn}} \varphi_A(p) &= e^{-\frac{i}{2}\epsilon_{mnkl}p^k b^l J^{mn}} \varphi_A(p) = \\ = e^{-\frac{i}{2}\epsilon_{mnkl} b^l J^{mn} P^k} \varphi_A(p) &= e^{\frac{i}{2} b^m W_m} \varphi_A(p). \end{aligned} \tag{3.32}$$

(2)

Representação do grupo de estabilidade define completamente a representação do grupo de Poincaré. Já sabemos que sob translação o estado $\varphi_A(p)$ se transforma como $U(a)\varphi_A(p) = e^{-ipa}\varphi_A(p)$, vamos então considerar agora como estes estados se transformam sob uma transformação de Lorentz $U(\Lambda)$. Utilizando (3.14)

$$\begin{aligned} P^b U(\Lambda)\varphi_A(p) &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^b U(\Lambda)\varphi_A(p) = U(\Lambda)(\Lambda_a^{-1b} P^a)\varphi_A(p) \\ &= \Lambda^b{}_a p^a U(\Lambda)\varphi_A(p). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto $U(\Lambda)\varphi_A(p)$ deve ser combinação linear dos estados $U(\Lambda)\varphi_B(\Lambda p)$

$$U(\Lambda)\varphi_A(p) = C_{AB}(\Lambda, p)\varphi_B(\Lambda p). \tag{3.34}$$

Agora, seja Λ_{p_0} uma transformação que satisfaça

$$\Lambda_{p_0} p_0 = p_0, \tag{3.35}$$

ou seja, Λ_{p_0} é um elemento do grupo de estabilização, então podemos escrever (3.34) da seguinte forma,

$$U(\Lambda_{p_0})\varphi_A(p_0) = D_{AB}(\Lambda_{p_0})\varphi_B(p_0). \tag{3.36}$$

Os coeficientes $D_{AB}(\Lambda_{p_0})$ formam então uma matriz que realiza uma representação do grupo de establização.

Defina Λ_p um elemento do grupo de Lorentz que transforma $p_0 \to p$,

$$\Lambda_p p_0 = p,$$

e

$$\varphi_A(p) \equiv U(\Lambda_p)\varphi_A(p_0). \tag{3.37}$$

Seja também um elemento Λ, que realiza a transformação

$$\Lambda p = p'.$$

Temos então as seguintes transformações

$$\begin{gathered} \Lambda_p p_0 = p \qquad , \qquad \Lambda_{p'} p_0 = p' \\ \Lambda \Lambda_p p_0 = \Lambda_{p'} p_0, \end{gathered} \tag{3.38}$$

e consequentemente

$$\Lambda_{p'}^{-1} \Lambda \Lambda_p p_0 = p_0. \tag{3.39}$$

Ou seja, de acordo com (3.35) $\Lambda_{p'}^{-1} \Lambda \Lambda_p$ é um elemento do grupo de estabilização. Então

$$\Lambda = \Lambda_{p'} \Lambda_{p_0} \Lambda_p^{-1}. \tag{3.40}$$

Finalmente utilizando as transformações (3.38) e (3.36)

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\varphi_A(p) &= U(\Lambda_{p'})U(\Lambda_{p_0})U(\Lambda_p^{-1})\varphi_A(p) \\ &= U(\Lambda_{p'})U(\Lambda_{p_0})\varphi_A(p_0) = U(\Lambda_{p'})D_{AB}(\Lambda_{p_0})\varphi_B(p_0) \\ &= D_{AB}(\Lambda_{p_0})\varphi_B(p') = D_{AB}(\Lambda_{p_0})\varphi_B(\Lambda p) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Podemos perceber que a estrutura do pequeno grupo para todo vetor p dentro de uma representação irredutível é a mesma. Então, da nossa discussão na seção anterior, podemos escolher qualquer representante p, descrever seu pequeno grupo, e isso vai definir a representação do grupo de Poincaré. Este método de determinar representaçõs de um grupo a partir das representações de seu pequeno grupo é conhecido como método das representações induzidas.

3.5 Representação nos campos

Vamos a partir de agora seguir um caminho um pouco diferente. Afim de obter uma intuição mais física sobre o que foi escrito até aqui, seguiremos as ideias apresentadas no segundo capítulo do livro de Maggiore[19]. Mas antes de discutirmos as representações propriamente, precisamos preencher uma lacuna. No início da seção 2.3 falamos sobre um teorema que nega a existência de representações unitárias de dimensão finita de grupos contínuos não-compactos. Até aqui tratamos abusivamente das representações unitárias, e em momento algum nos referimos quanto à natureza de sua dimensionalidade. O fato é que o grupo ISO(3,1) é não-compacto[3], assim representações unitárias destes grupos devem necessariamente ser de dimensão infinita. A resolução desta questão é dada com a introdução de um objeto $\varphi(x)$, que em teoria de campos é conhecido como campo. Um campo é uma função das coordenadas e que sob transformações (3.1) devem também se transformar.

$$\varphi(x) \to \varphi'(x'). \tag{3.42}$$

Para nossos propósitos aqui, basta tomarmos o mais simples dos campos, o campo escalar

$$\varphi(x) = \varphi'(x'). \tag{3.43}$$

A transformação do campo escalar escrita na forma (3.43) não nos acrescenta muitas informações, apenas que da representação escalar resulta a representação trivial dos geradores $J^{ab} = 0$. Uma outra transformação para os campos é possível

$$\delta_0\varphi = \varphi'(x) - \varphi(x). \tag{3.44}$$

[3]Existe um teorema em análise matemática que afirma que conjuntos compactos devem ser fechados, ou seja, devem conter todos seus pontos limites. O grupo de Poincaré não é fehado, uma vez que um dos parâmetros que definem o grupo, v, está definido no intervalo $|v| < 1$

Aqui o sistema de coordenadas é mantido fixo. A transformação (3.43) nos permite estudar como um único grau de liberdade (campo calculado num dado ponto P) muda quando mudamos as coordenadas do ponto P de x para x'. Sendo então P mantido fixo, a base do espaço é feita de um único grau de liberdade $\varphi(P)$, consequentemente unidimensional. Quando consideramos a transformação (3.44) estamos comparando diferentes graus de liberdade, comparando os campos em pontos distintos do espaço-tempo. A base do espaço agora é o conjunto $\varphi(P)$, com P variando por todo o espaço-tempo, ou seja, é um espaço de funções, e consequentemente de dimensão infinita. É neste espaço de dimensão infinita que obtemos geradores com representação de dimensão infinita e que poderão ser associados com observáveis físicas. Não entraremos em detalhes a respeito da forma destes geradores, mas certamente devem satisfazer (3.20).

3.6 Representações Massivas ($p^2 > 0, p_0 > 0$)

Como vimos na seção 3.2 $W^m W_m$ é um escalar de Lorentz, então podemos calculá-lo no referencial que nos for mais conveniente. Para o caso de uma partícula com massa este referencial parece ser o referencial de repouso da partícula $p\mu = (m, 0, 0, 0)$. Dado $W^m = \frac{1}{2}\epsilon^{mnk\rho} J_{nk} P_\rho$, então

$$W^0 = \frac{1}{2}\epsilon^{0nk0} J_{nk} m = 0 \tag{3.45}$$

e

$$W^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ink\rho} J_{nk} P_\rho = \frac{1}{2}\epsilon^{ink0} J_{nk} m = \frac{m}{2}\epsilon^{ijk} J_{jk} = mJ^i. \tag{3.46}$$

Então para o estado de uma partícula com massa m

$$-W^m W_m = m^2 j(j+1) \tag{3.47}$$

Não é difícil perceber que sob rotações espaciais, $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ é um subespaço invariante, ou seja, rotações espaciais é um pequeno grupo para representações massivas. As representações massivas são caracterizadas pela massa m e pelo número $j = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$[4], e os estados dentro de cada representação são caracterizadas por $j_z = -j, -j+1, ..., j$. O que significa dizer que partículas massivas de número j tem $2j+1$ graus de liberdade.

[4] O fato de valores semi-inteiros para j serem permitidos remete ao fato de que estamos afirmando que o grupo de rotações é SU(2), e não SO(3). SU(2) e SO(3) são grupos Homeomorficos, localmente possuem as mesmas características. A importância de preterirmos SU(2) ao invés de SO(3), é justificada porque SU(2) permite incluir representações spnoriais.

3.7 Representações sem Massa ($p^2 = 0, p_0 > 0$)

No caso de $p^2 = 0$ não é possível tomar o referencial de repouso da partícula, mas podemos analisar o sistema no referencial $p^\mu = (E, 0, 0, E)$. Recordando, o pequeno grupo é o conjunto de transformações que deixam p^μ invariantes. No caso em questão apenas rotações no plano (x, y) deixam p^μ invariantes. O conjunto de transformações no plano é o grupo abeliano $SO(2)$, gerado pela matriz $J^3 = J^{12}$. Sabemos também que uma vez que $SO(2)$ é abeliano, suas representações irredutíveis devem ser unidimensionais e rotuladas por autovalores h de J^3, com $h = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, ...$[5]. Fisicamente h representa a projeção do momento angular na direção de propagação da partícula, conhecido como helicidade.

$$h = \hat{p} \cdot \vec{J}. \tag{3.48}$$

Em um estado de helicidade h, uma rotação $U(1)$[6] do pequeno grupo é representada por

$$U(\theta) = e^{-i\theta h}. \tag{3.49}$$

Então do ponto de vista do grupo de Poincaré partículas sem massa com helicidade $+h$ e $-h$ correspondem à diferentes representações, e consequentemente são de diferentes espécies, e tais partículas portanto teriam um único grau de liberdade[7], $+h$ ou $-h$.

[5]No caso de o pequeno grupo ser caracterizado apenas por rotações no plano, o fato de os autovalores h serem quantidades discretas está associado à características topológicas do espaço.

[6]A troca $SO(2) \to U(1)$ é justificada pela existência de um isomorfismo entre os grupos $SO(2)$ e $U(1)$

[7]No caso de teorias invariantes também sob tranformação de paridade $((x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x^0, -x^1, -x^2, -x^3))$ partículas com estados de helicidade opostos estão relacionadas. No eletromagnetismo, partículas sem massa e com helicidade $h = \pm 1$ são conhecidas como fótons.

Capítulo 4

Grupo de Galileo

4.1 A "não-álgebra"do Grupo de Galileo

O grupo de Galileo é o grupo das transformações lineares que modificam o espaço e o tempo segundo:

$$\begin{aligned} x^i \to x'^i &= R^i{}_j x^j + a^i + v^i t \\ t \to t' &= t + s, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde R é uma rotação, a uma translação no espaço, v a velocidade de um sistema de coordenadas S' que se move em relação a S, e s uma translação no tempo. O grupo de Galileo é então caracterizado por dez parâmetros. Para as transformções (4.1) a lei de multiplicação é dada por

$$T_1(R_1, a_1, v_1, s_1)T_2(R_2, a_2, v_2, s_2) = T(R_1R_2, R_1a_2 + a_1 + v_1s_2, R_1v_2 + v_1, s_1 + s_2), \tag{4.2}$$

e de fato as transformações (4.1) satifazem as condições 2.1.1, onde o elemento identidade e o elemento inverso são dados por

$$\begin{aligned} &T(1, 0, 0, 0), \\ &T(R^{-1}, -R^{-1}(a - sv), -R^{-1}v, -s), \end{aligned} \tag{4.3}$$

respectivamente.

Como já sabemos, associadas a estas transformações $T(R, a, v, s)$ do espaço-tempo, temos transformações unitárias que atuam no espaço linear. A forma mais geral para estas tranformações unitárias pode ser escrita como

$$U(T) = \prod_{\alpha=1}^{10} e^{i\theta_\alpha T^\alpha} \tag{4.4}$$

Para escrever o que convencionamos chamar de "não-álgebra" usaremos a mesma técnica apresentada no terceiro capítulo do livro de Ballentine[20]. Diferente da álgebra que apresentamos para o grupo de Poincaré (3.20), neste caso seremos mais explícitos e, desde o início, identificaremos cada gerador à sua respectiva transformação, veja a tabela (4.1).

Transformações do espaço-tempo	Operadores Unitários
Rotação ao longo do eixo i	
$\mathbf{x} \to R_i(\theta_i)\mathbf{x}$	$e^{-i\theta_i J^i}$
Translação ao longo do eixo i	
$x \to x^i + a^i$	$e^{-ia_i P^i}$
Boost ao longo do eixo i	
$x \to x^i + v^i t$	$e^{iv_i K^i}$
Translação do tempo	
$t \to t + s$	e^{isH}

Tabela 4.1: Operadores Unitários

O método é o seguinte – escolhemos um determinado par de geradores, substituimos em (2.15), em seguida realizamos as mesmas sequências de transformações no espaço-tempo e então comparamos a transformação resultante com (2.15). Vejamos alguns exemplos de como calcular os comutadores.

(1) $[P_1, P_2]$

Primeiramente de (2.15) temos

$$e^{-i\theta_1 P^1} e^{-i\theta_2 P^2} e^{i\theta_1 P^1} e^{i\theta_2 P^2} = 1 + \theta_1\theta_2[P_2, P_1]. \tag{4.5}$$

As transformações correspondentes no espaço-tempo são,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (x_1, x_2 - \theta_2, x_3, t) \to (x_1 - \theta_1, x_2 - \theta_2, x_3, t)\\ &\to (x_1 - \theta_1, x_2, x_3, t) \to (x_1, x_2, x_3, t),\end{aligned} \tag{4.6}$$

ou seja, uma transformação identidade. Então a transformação $e^{-i\theta_1 P^1} e^{-i\theta_2 P^2} e^{i\theta_1 P^1} e^{i\theta_2 P^2}$ no espaço linear deve corresponder a uma transformação identidade também no espaço linear. De (4.5) temos

$$1 + \theta_1\theta_2[P_2, P_1] = 1, \tag{4.7}$$

consequentemente $[P_1, P_2] = 0$. De uma forma mais geral temos

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{4.8}$$

(2) $[K_1, H]$

$$e^{i\theta H}e^{i\theta_1 K^1}e^{-i\theta H}e^{-i\theta_1 K^1} = 1 + \theta_1\theta[K_1, H]. \tag{4.9}$$

Associada às transformações unitárias $e^{i\theta H}e^{i\theta_1 K^1}e^{-i\theta H}e^{-i\theta_1 K^1}$ no espaço linear, temos as seguintes transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (x_1 - \theta_1 t, x_2, x_3, t) \to (x_1 - \theta_1 t, x_2, x_3, t - \theta) \\ &\to (x_1 - \theta_1 t + \theta_1(t - \theta), x_2, x_3, t - \theta) \to (x_1 - \theta_1\theta, x_2, x_3, t),\end{aligned} \tag{4.10}$$

ou seja, uma translação de parâmetro $\theta_1\theta$ na direção x_1, logo

$$1 + \theta_1\theta[K_1, H] = 1 + i\theta_1\theta P_1, \tag{4.11}$$

e

$$[K_i, H] = iP_i. \tag{4.12}$$

O cálculo de outros comutadores é apresentado no Apêndice A. Com este método conseguimos construir toda a álgebra do nosso grupo.

$$\begin{aligned}&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [K_i, K_j] = 0, \\ &[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \qquad [K_i, P_j] = 0, \\ &[K_i, H] = iP_i, \qquad [P_i, H] = [J_i, H] = [P_i, P_j] = 0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

e esta é nossa “não-álgebra”do grupo de Galileo.

4.2 Limite não-relativístico

Por que nossa seção anterior chama-se não-álgebra? Para construir (4.13) utilizamos representações unitárias do tipo $e^{i\theta_a T^a}$ e o fato de que, de acordo com (2.2.1) temos $D_R(g_1)\cdot D_R(g_2) = D_R(g_1 \cdot g_2)$, aparentemente nada parece errado. Então se todos nossos cálculos realizados na seção anterior foram feitos corretamente nada mais natural esperar que no limite não-relativístico ($v \ll 1$) a álgebra do grupo de Poicaré deve reduzir-se à álgebra do grupo de Galileo (4.13). Vamos voltar ao livro de Weinberg[11]. Para um sistema de partículas de massa m e velocidade v ($c = \hbar \equiv 1$), espera-se que os operadores de momento e momento-angular sejam da ordem $J^i \sim 1$, $P^i \sim mv$, e o operador energia $H \sim M + W$, onde $M \sim m$ é a massa total, e $W \sim mv^2$ é a energia cinética. Então no limite não relativístico de (3.22) conservamos as relações de comutação:

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \\
&[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \\
&[P_i, H] = [J_i, H] = [P_i, P_j] = 0, \\
&\text{com } [P_i, M] = [J_i, M] = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Até então não temos maiores problemas, todos nossos comutadores (4.14) tem concordado com os resultados (4.13) obtidos na seção anterior, mas um resultado bastante inesperado ocorre com $[K_i, P_j]$. Segundo a álgebra de Poincaré $KP \sim m + mv^2$, no limite não-relativístico $KP \sim m$, ou seja, o comutador $[K_i, P_j]$ na álgebra de Galileo deveria ser do tipo $[K_i, P_j] = iM\delta_{ij}$, com $K \sim \frac{1}{v}$. Então diferentemente de (4.13) a álgebra do grupo de Galileo seria dada por

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \qquad [K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \qquad [K_i, K_j] = 0, \\
&[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \qquad [K_i, P_j] = iM\delta_{ij}, \\
&[K_i, H] = iP_i, \qquad [P_i, H] = [J_i, H] = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Na próxima seção vamos tentar entender um pouco melhor a origem do termo $[K_i, P_j] = iM\delta_{ij}$.

Concluiremos esta seção apresentando a equação de Schrödinger como limite não-relativístico (LNR) da equação de Klein-Gordon. Nossa referência será o capítulo III.5 do livro de Zee[2]. Um dos objetos fundamentais na descrição de uma teoria de campos[1] é a lagrangeana $\mathscr{L}$. Para uma teoria de campo escalar invariante de Lorentz a lagrangeana

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \qquad \lambda > 0 \tag{4.16}$$

descreve um grupo de bosons que interagem entre si. De uma forma geral a lagrangeana (4.16) pode ser ecrita como $\mathscr{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$, onde a parte quadrática nos dá o termo de massa enquanto que outras potências são responsáveis por termos não lineares nas equações de movimento e correspondem a auto interações dos campos. Desconsiderando na lagrangeana (4.16) os termos de potência superior a dois, a equação de movimento

[1]Caso o leitor não esteja familiarizado com a formulação Lagrangiana da mêcanica e teoria clássica de campos, boas referências para estes assuntos são os livros de Nivaldo Lemos[21], o primeiro capítulo do livro de mecânica de Landau[22] e o livro de teoria clássica de campos também de Landau[23].

associada a esta teoria é dada por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0. \tag{4.17}$$

A equação (4.17) é conhecida como equação de Klein-Gordon, e uma solução para esta equação é uma onda plana

$$\Phi(x) = e^{-ip\cdot x}, \qquad p \cdot x \equiv Et - \vec{p} \cdot \vec{x}. \tag{4.18}$$

com $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Assim um modo com energia $E = m + \epsilon$ oscilaria no tempo como $\Phi \propto e^{-iEt}$. No LNR a energia cinética ϵ é muito menor que a massa de repouso m. Assim parece coerente supor

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \varphi(\vec{x}, t), \tag{4.19}$$

com o campo $\varphi(\vec{x}, t)$ oscilando muito mais lentamente no tempo que e^{-imt}. Substituindo (4.19) em (4.17) obtemos

$$(-2im\partial_t + \partial_t{}^2)\varphi - \nabla^2\varphi = 0. \tag{4.20}$$

No limite não-relativístico temos

$$i\partial_t\varphi << m\varphi. \tag{4.21}$$

Assim desprezando o termo $\partial_t{}^2\varphi$, pequeno comparado com $-2im\partial_t\varphi$, temos que no limite não relativístico a equação (4.17) se reduz a

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\nabla^2}{2m}\varphi. \tag{4.22}$$

A equação (4.22) é a conhecida equação de Schrödinger para uma partícula livre. Finalmente substituindo (4.19) em (4.16) obtemos

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\varphi^\dagger i\partial_t\varphi - (i\partial_t\varphi^\dagger)\varphi] - \frac{1}{2m}\partial^i\varphi^\dagger\partial_i\varphi - g^2(\varphi^\dagger\varphi)^2, \tag{4.23}$$

esta é a lagrangeana que descreve uma teoria de campos escalares não relativísticos.

4.3 Raios e Representações Projetivas

Vamos relembrar um fato que conhecemos desde nossos primeros estudos sobre mecânica quântica, veja por exemplo o capítulo 7 de Gottfried[24]:

> Se $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são vetores em um sistema no espaço de Hilbert, então somente o valor absoluto de seu produto escalar $\langle\beta|\,\alpha\rangle$ tem significado físico, e portanto

todos vetores $\lambda |\alpha\rangle$, etc., onde $|\lambda| = 1$, representam o mesmo estado físico; além disso, todos estes vetores tem o mesmo valor esperado para qualquer operador hermitiano.

O que chamamos de *raio* é o conjunto de vetores normalizados ($\langle\alpha|\,\alpha\rangle = 1$), onde $|\alpha\rangle$, $|\alpha'\rangle$ pertencem ao mesmo raio se $|\alpha\rangle = \lambda |\alpha'\rangle$.

Nos cálculos da seção 4.1 nos baseamos simplesmente no primeiro axioma da teoria de representaões de grupos 2.2.1, apresentado no início da seção 2.1,

$$U(\Gamma_1)U(\Gamma_2) = U(\Gamma_1\Gamma_2). \tag{4.24}$$

O que fizemos foi firmar que $U(\Gamma_1)U(\Gamma_2)|\alpha\rangle$ e $U(\Gamma_3)|\alpha\rangle$ descrevem o mesmo sitema físico. Se agora levarmos em consideração o que sabemos a respeito do conceito de raio, $U(\Gamma_1)U(\Gamma_2)|\alpha\rangle$ e $U(\Gamma_3)|\alpha\rangle$ não são necessariamente o mesmo vetor, mas devem diferir por, no máximo, um fator de fase $|\lambda| = 1$,

$$U(\Gamma_1)U(\Gamma_2)|\alpha\rangle = e^{i\omega(\Gamma_1,\Gamma_2)}U(\Gamma_1\Gamma_2)|\alpha\rangle\,. \tag{4.25}$$

Assim,

$$U(\Gamma_1)U(\Gamma_2) = e^{i\omega(\Gamma_1,\Gamma_2)}U(\Gamma_1\Gamma_2). \tag{4.26}$$

A relação (4.26) é o que conhecemos como *representações projetivas*. Sabe-se que todos os grupos de simetria com representações projetivas podem ser extendidos de tal forma que suas representações podem ser definidas como não-projetivas[2], ($\omega = 0$). No entanto, de acordo com alguns resultados de Bargmann[25] e Inönü e Wigner[26] o grupo de Galileo parece ser uma excessão. Segundo Bargmann, para o grupo de Galileo, representações com significado físico devem ser aquelas de representações projetivas. Inönü e Wigner mostraram que funções da base do grupo de Galileo não podem construir estados localizados, ou estados com velocidades definidas. Essas informações podem ser encontradas também no trabalho de Levy-Leblond[27][3], bastante interessante a respeito do grupo de Galileo.

[2] No livro de Weinberg[11], seção 2.7, mostra-se que o próprio grupo de Poincaré $ISO(3,1)$ possui uma representação projetiva intrinseca, no entanto para este caso o fator de fase pode ser reduzido a apenas uma diferença de sinais $U(\Lambda_1, a_1)U(\Lambda_2, a_2) = \pm U(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$.

[3] Apesar de bastante completo, hoje este trabalho parece conter algumas interpretações equivocadas a respeito das representações irredutíveis do grupo de Galileo, como por exemplo representações irredutíveis de massa negativa estariam associadas à antipartículas.

Assim para uma representação projetiva (4.26), temos

$$e^{i\omega}U = 1 + s_\mu T^\mu + i\omega 1. \tag{4.27}$$

Comparando (4.27) com (2.15), os 11 parâmetros $\{\omega, s_\mu\}$ devem claramente ser de segunda ordem em θ, e então a relação de comutação entre dois geradores T_μ, T_ν quaisquer é descrita como uma combinação linenar dos geradores e do operador identidade, que pode ser escrita como

$$[T_\mu, T_\nu] = ic_{\mu\nu}{}^\lambda T_\lambda + ib_{\mu\nu}1. \tag{4.28}$$

Pode-se mostrar que, de fato exceto para $[K, P]$, os termos múltiplos da identidade podem ser todos removidos utilizando uma mudança de fase para alguns vetores e a relação (2.20).

Vamos tentar obter uma melhor intuição física do grupo de Galileo estudando as propriedades de invariância da equação de schrödinger,

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} + W(x,t)\varphi = i\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{4.29}$$

Por simplicidade vamos tomar $W'(x',t') = W(x,t)$, e um caso de boost na direção x^1.

$$x = x' + vt, \qquad t = t'. \tag{4.30}$$

Assumindo que (4.29) seja invariante frente (4.30), a equação no sistema linha deve ter a forma

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\varphi'(x',t')}{\partial x'^2} + W'(x',t')\varphi' = i\frac{\partial\varphi'(x',t')}{\partial t'}. \tag{4.31}$$

Para uma transformação do tipo (4.30) temos

$$d^3x = d^3x'. \tag{4.32}$$

De (4.32) temos que a densidade de probabilidade em um ponto do espaço-tempo deve ser a mesma nos dois sistemas de coordenadas

$$|\varphi(x,t)|^2 = |\varphi'(x',t')|^2, \tag{4.33}$$

consequentemente

$$\varphi(x,t) = e^{if(x,t)}\varphi'(x',t'). \tag{4.34}$$

Para (4.30) os operadores diferenciais se transformam como

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.35}$$

Substituindo (4.35) e (4.34) em (4.31)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+W\varphi+i\Big[\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}-v\Big]\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\
&+\Big[\frac{i}{2m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2m}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]^2-v\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\Big]=i\frac{\partial\varphi}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Assim para obtermos (4.29)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}-v=0\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0\\
&\frac{1}{2m}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]^2-v\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}=0,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

então

$$
f(x,t)=mvx-\frac{1}{2}mv^2t. \tag{4.38}
$$

No limite relativístico temos, para uma partícula de spin 0, a equação de Klein-Gordon

$$
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-m^2\varphi=0. \tag{4.39}
$$

No caso de um boost na direcação x^1

$$
t'=\gamma(t-vx^1),\qquad x'^1=\gamma(x^1-vt), \tag{4.40}
$$

os operadores diferenciais se tranformam como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}&=\gamma^2\Big(\frac{\partial'^2}{\partial t'^2}-2v\frac{\partial'}{\partial t'}\frac{\partial'}{\partial x'}+v^2\frac{\partial'}{\partial x'^2}\Big),\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\gamma^2\Big(\frac{\partial'^2}{\partial x'^2}-2v\frac{\partial'}{\partial t'}\frac{\partial'}{\partial x'}+v^2\frac{\partial'}{\partial t'^2}\Big).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Assim diferentemente de (4.29) a equação de Klei-Gordon é invariante sob transformação de um boost sem a nececessidade do aparecimento de uma fase nos campos.

Para finalizar este capítulo vamos tratar um pouco sobre o que é conhecido como regra de superseleção de Bargmann. Seja T uma transformacão no espaço-tempo dada por uma translação $\vec{a}$, um boost de Galileo $\vec{v}$, e suas respectivas transformações inversas

$$
T\equiv T_1(1,-\vec{a},0,0)T_2(1,0,-\vec{v},0)T_3(1,\vec{a},0,0)T_4(1,0,\vec{v},0), \tag{4.42}
$$

de acordo com (4.2)

$$
T=(1,0,0,0). \tag{4.43}
$$

Agora, seja W a transformação correspondente a T no espaço de estados,

$$
W=U^\dagger(\vec{a})U^\dagger(\vec{v})U(\vec{a})U(\vec{v}) \tag{4.44}
$$

Sendo T uma transformação identidade, então um dado estado físco sob uma transformação de W deve representar o mesmo estado físico do estado original, e de acordo com nossa discussão a respeito dos conceitos de raios, o estado transformado deve diferir somente por um fator de fase do estado original. Utilizando a fórmula $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ pode-se mostrar que

$$W = e^{-ima_i v^i}. \tag{4.45}$$

Assim para um estado $|\psi_m\rangle$ de massa m, temos

$$W\,|\psi_m\rangle = e^{-ima_i v^i}\,|\psi_m\rangle\,, \tag{4.46}$$

ou seja, o estado transformado de fato difere do estado original apenas por uma fase. No entanto para um estado de superposição de estados de diferentes massas temos

$$W(\alpha_1\,|\psi_{m_1}\rangle + \alpha_2\,|\psi_{m_2}\rangle) = e^{-im_1 a_i v^i}(\alpha_1\,|\psi_{m_1}\rangle + \alpha_2 e^{-i\Delta m(a_i v^i)}\,|\psi_{m_2}\rangle), \tag{4.47}$$

onde $\Delta m = m_2 - m_1$. Assim no caso de ψ ser uma superposição de estados de diferentes massas, $\psi = \psi_{m_1} + \psi_{m_2}$, temos que a aplicação de W acarreta o aparecimento de uma fase relativa entre os dois estados $\psi_{m_1} + \psi_{m_2}$. Segundo Bargmann[25] este fato implica que um estado quântico não pode ser escrito como superposição de estados de diferentes massas, conhecido como superseleção de massas. Em mecânica quântica relatvística este fato parece ser ignorado, e comumente usado para descrever o decaimento de partículas. Vamos então mostrar um fato bastante interessante, veja capítulo 7 de Gottfried[24], se W_L for uma transformação relativística então, para uma aproximação em primeira ordem

$$W_L(\alpha_1\,|\psi_{m_1}\rangle + \alpha_2\,|\psi_{m_2}\rangle) \stackrel{1^\circ \text{ ordem}}{\longrightarrow} W(\alpha_1\,|\psi_{m_1}\rangle + \alpha_2\,|\psi_{m_2}\rangle). \tag{4.48}$$

Utilizando a representação de Heisenberg, onde a dependência temporal é carregada pelos vetores da base, temos

$$|\vec{r}, t+\tau\rangle = e^{iH\tau}\,|\vec{r}, t\rangle \tag{4.49}$$

Um boost de Lorentz em $|\vec{r}, t\rangle$ é

$$U_L\,|\vec{r}, t\rangle = \left|\vec{r} + \vec{v}t, t + v^i r_i/c^2\right\rangle + O(v^2/c^2). \tag{4.50}$$

Então

$$\begin{aligned} W_L{}^\dagger\,|\vec{r}, t\rangle &= U_L{}^\dagger(\vec{v})U^\dagger(\vec{a})U_L(\vec{v})U(\vec{a})\,|\vec{r}, t\rangle \\ &= U_L{}^\dagger(\vec{v})U^\dagger(\vec{a})\left|\vec{r} + \vec{a} + \vec{v}t, t + v^i(r+a)_i/c^2\right\rangle \\ &= \left|\vec{r}, t + v^i a_i/c^2\right\rangle = e^{iv^i a_i H/c^2}\,|\vec{r}, t\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Sendo $H = mc^2 + O(v^2)$

$$\langle \vec{r}, t| \, W_L \, |\psi_m\rangle = \rangle \vec{r}, t| \, e^{-imc^2\tau} \, |\psi_m\rangle = \psi_m(\vec{r}, t + \tau), \qquad \tau = a_i v^i / c^2. \tag{4.52}$$

Assim

$$\langle \vec{r}, t| \, W_L(\alpha_1 \, |\psi_{m_1}\rangle + \alpha_2 \, |\psi_{m_2}\rangle) = e^{is}\{\alpha_1 \psi_{m_1}(\vec{r}, t) + \alpha_2 e^{-i\tau\Delta E} \psi_{m_2}\}, \tag{4.53}$$

onde $\Delta E = (m_2 - m_1)c^2$, o que corresponde exatamente a (4.47). Em 2001 Greenberger[28] publicou um trabalho propondo uma interpretação física para a fase relativa entre os estados de diferentes massa, segundo Greenberger esta fase seria resquício de uma diferença no tempo próprio de diferentes observadores que não se anularia para LNR, e afirma que as transformações de Galileo (4.1) não seriam adequadas quando consideradas no ambiente da mecânica quântica. No próximo capítulo vamos verificar que a álgebra (4.15) de fato não possui todas as transformações de simetria da equação de Schrödinger.

Capítulo 5

Grupo de Schrödinger

5.1 Teorema de Noether

O teorema de Noether é tratado na imensa maioria dos livros textos como parte integrante da Teoria Clássica de Campos. No livro de mecânica analítica do professor Nivaldo Lemos[21] o Teorema de Noether é apresentado de forma bastante detalhada e com alguns exemplos. A apresentação que faremos aqui do teorema de Noether possivelmente não seja a mais comumentemente apresentada nos livros textos e nossa referência para esta seção será o livro de Maggiore[19], o leitor pode consultar também o livro de Zee[2] na seção I.9.

Seja uma dada transformação infinitesimal nas cooerdenadas x e no campo φ determinada por

$$\begin{aligned} x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} &= x^{\mu} + \epsilon^{a} A^{\mu}{}_{a}(x) \\ \varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i'(x') &= \varphi_i(x) + \epsilon^{a} F_{i,a}(\varphi, \partial\varphi), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde ϵ^a, com $a = 1, ..., N$, são parâmetros infinitesimais e $A^{\mu}{}_{a}(x)$ e $F_{i,a}(\varphi, \partial\varphi)$ funções dadas. As equações (5.1) definem uma transformação de simetria no caso de a ação permanecer invariante sob estas tranformações. No caso de os parâmetros ϵ serem constantes dizemos que a simetria é global, se permitirmos que os parâmetros sejam funções das coordenadas e ainda assim a ação permanecer invariante dizemos que a simetria é local.

Suponha então que (5.1) sejam simetrias globais e não locais da teoria. Seja φ_i dada uma configuração inicial, realizaremos as transformações (5.1) permitindo que os parâmetros ϵ sejam funções de x que variam lentamente. Agora uma vez que assumimos que (5.1) não é uma simetria local, não há razão para crermos que sob estas transformações a acão permanecerá invariante ($\delta S = 0$), mas sim que teremos termos $O(\epsilon)$ não nulos,

$$S(\varphi') = S(\varphi) + O(\epsilon). \tag{5.2}$$

Contudo, sendo ϵ uma função infinitesimal de x que varia lentamente, podemos expandir $O(\epsilon)$,

$$S(\varphi') = S(\varphi) + \int d^4x[\epsilon^a(x)K_a(\varphi) - (\partial_\mu \epsilon^a(x))j^\mu{}_a(\varphi) + O(\partial\partial\epsilon)] + O(\epsilon^2). \tag{5.3}$$

Observemos então que a equação (5.3) deve ser válida para qualquer função ϵ que varia lentamente, e deve se aplicar também para o caso de ϵ constante. Sabemos que para ϵ constante temos uma simetria global e neste caso $\delta S = 0$, assim $K_a(\varphi) = 0$ para qualquer φ. Então

$$S(\varphi') = S(\varphi) - \int d^4x[(\partial_\mu \epsilon^a(x))j^\mu{}_a(\varphi) + O(\partial\partial\epsilon)] + O(\epsilon^2). \tag{5.4}$$

Suponha agora ϵ uma função que decai suficientemente rápida no infinito, então uma integração por partes nos fornece,

$$S(\varphi') = S(\varphi) + \int d^4x[\epsilon^a(x)\partial_\mu j^\mu{}_a(\varphi) + O(\partial\partial\epsilon)] + O(\epsilon^2). \tag{5.5}$$

Observe que até o momento não impusemos qualquer condição a respeito do campo φ, a saber, não exigimos que o campo satisfaça as equações de movimento. Pois então vamos agora fazer esta exigência necessária, $\varphi = \varphi^{cl}$, ou seja, $\delta S = 0$. Daí

$$\partial_\mu j^\mu{}_a(\varphi^{cl}) = 0. \tag{5.6}$$

Chega-se à conclusão de que para soluções clássicas das equações de movimento, existem N correntes $j^\mu{}_a$ conservadas. E de acordo com (5.3) j^μ deve ser uma função não nula, uma vez que estamos tratando com uma simetria global e $S(\varphi') \neq S(\varphi)$. Finalmente definimos a carga associada a corrente conservada como

$$Q_a \equiv \int d^3x j^0{}_a(\vec{x}, t). \tag{5.7}$$

O que faremos nas próximas seções será empregar diretamente o Teorema de Noether para estudar simetrias da equação de Schrödinger, identificar as cargas associadas como geradores e calcular a álgebra do grupo.

5.2 Mais do Grupo de Galileo

A primeira parte do trabalho de Hagen[14] demonstra a possibilidade de definir simetrias de escala e conforme, além das usuais simetrias de rotações, translações e boosts, como parte constituinte das operações de invariância da equação Schrödinger. Nesta seção seguiremos o trabalho de Hagen e mostraremos explicitamente que as representações físicas do grupo de Galileo (4.15), de fato, constituem operações de invariância da equação de Schrödinger.

A lagrangeana para spin zero, reveja (4.23), é dada por,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\varphi^\dagger E\varphi - (E\varphi^\dagger)\varphi] - U_0\varphi^\dagger\varphi + \frac{1}{2m}p^i\varphi^\dagger p_i\varphi + \mathscr{L}_I, \tag{5.8}$$

onde o termo proporcional a U_0 descreve o potencial a que o sistema está sujeito, e $\mathscr{L}_I$ um termo de acoplamento que assumimos ser invariante sob quaisquer transformações do grupo de Galileo extendido.

Para chegarmos no nosso objetivo de explicitar a álgebra do grupo de Galileo, vamos buscar analisar separadamente cada uma das várias transformações que constituem o grupo de Galileo Extentido. Começando pela mais simples delas, para uma transformação de fase local

$$\varphi \to e^{im\theta(x,t)}\varphi, \tag{5.9}$$

No caso de ocorrer simplesmente uma transformação de fase temos ${A^\mu}_a(x) = 0$, dizemos que a simetria é interna, não mudam as coordenadas. Quando temos uma transformação também nas coordenadas dizemos que esta é uma simetria do espaço-tempo. Para simetrias internas, d^4x é invariante e a condição de invariância da ação é equivalente à invariância da lagrangiana, mas em geral a condição de invariância de uma teoria é dada pela invâriancia da ação.

$$\delta\mathscr{L} = -m\varphi^\dagger\varphi\frac{\partial}{\partial t}\delta\theta - \frac{1}{2}[\varphi^\dagger p^i\varphi - (p^i\varphi^\dagger)\varphi]\partial_i\delta\theta. \tag{5.10}$$

Então de acordo com nossa discussão a respeito do teorema de Noether, temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t} + \partial_i\mathfrak{p}^i = 0 \tag{5.11}$$

e a carga associada (gerador de simetria)

$$M = m\int d^3x\varphi^\dagger\varphi, \tag{5.12}$$

onde definimos

$$\mathfrak{m} = m\varphi^\dagger\varphi, \tag{5.13}$$

$$\mathfrak{p}^i = \frac{1}{2}[\varphi^\dagger p^i\varphi - (p^i\varphi^\dagger)\varphi]. \tag{5.14}$$

Vejamos agora como se dá as transformações de rotação e translação. Segundo Hagen[14], para estas transformações devemos considerar

$$\begin{aligned} \delta(d^3xdt) &= d^3xdt\partial_i\delta x^i \\ \delta(\frac{\partial}{\partial t}) &= (\frac{\partial}{\partial t}\delta x^i)\partial_i \\ \delta(\frac{\partial}{\partial x_i}) &= -(\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x^j)\partial_j \end{aligned} \tag{5.15}$$

e para variações locais

$$\delta\varphi = 0. \tag{5.16}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^3xdt\Big(&\mathscr{L}\partial_i\delta x^i + \frac{1}{2}[\varphi^\dagger p_i\varphi - (p_i\varphi^\dagger)\varphi]\frac{\partial}{\partial t}\delta x^i \\ &- \frac{1}{2m}[(p_i\varphi^\dagger)(p^j\varphi) + (p^j\varphi^\dagger)(p_i\varphi)]\partial_j\delta x^i\Big) \end{aligned} \tag{5.17}$$

A lei de conservação correspondente é

$$\frac{\partial\mathfrak{p}^i}{\partial t} + \partial_j T^{ij} = 0 \tag{5.18}$$

onde T^{ij} é o tensor simétrico

$$T^{ij} = \mathscr{L}\delta^{ij} - \frac{1}{2m}[(p^i\varphi^\dagger)(p^j\varphi) + (p^j\varphi^\dagger)(p^i\varphi)] \tag{5.19}$$

E as cargas conservadas associadas a esta lei de conservação

$$P_i = \int d^3x\mathfrak{p}_i \tag{5.20}$$

e

$$J_i = \int d^3x\epsilon_{ijk}x^j\mathfrak{p}^k \tag{5.21}$$

Para translações temporais temos

$$\frac{\partial\mathfrak{h}}{\partial t} + \partial_i\mathfrak{h}^i = 0 \tag{5.22}$$

onde

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{2}[\varphi^\dagger E\varphi - (E\varphi^\dagger)\varphi] - \mathscr{L} \tag{5.23}$$

e

$$\mathfrak{h}^i = -\frac{1}{2m}[p^i\varphi^\dagger E\varphi + (E\varphi^\dagger)p^i\varphi], \tag{5.24}$$

com a energia total dada por

$$H = \int d^3x\mathfrak{h} \tag{5.25}$$

Para um boost temos as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \delta(d^3xdt) &= d^3xdt\, t\, \partial_i\delta v^i, \\ \delta(\frac{\partial}{\partial t}) &= -\delta v^i\partial_i - t(\frac{\partial}{\partial t}\delta v^i)\partial_i, \\ \delta(\frac{\partial}{\partial x_i}) &= -t(\frac{\partial}{\partial x_i}\delta v^j)\partial_j, \end{aligned} \tag{5.26}$$

e

$$\delta\varphi = imx^i\delta v_i\varphi. \tag{5.27}$$

Assim a lei de conservação resultante é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{m}x^i - t\mathfrak{p}^i) + \partial_j(x^i\mathfrak{p}^j - tT^{ij}) = 0, \tag{5.28}$$

e a carga conservada associada a esta corrente é dada por

$$K_i = \int d^3x\mathfrak{m}x_i - tP_i. \tag{5.29}$$

Vamos agora recordar um resultado fundamental em teoria quântica de campos, veja por exemplo o capítulo 5 de Aitchison[29]

$$\begin{aligned} &[\varphi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \\ &[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)] = [\pi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)] = 0, \end{aligned} \tag{5.30}$$

onde

$$\pi = \frac{\partial}{\partial(\partial_t\varphi)}\mathscr{L}. \tag{5.31}$$

Assim de (5.8) podemos escrever

$$\begin{aligned} &[\varphi(\vec{x},t), \varphi^\dagger(\vec{x}',t)] = \delta(\vec{x}-\vec{x}'), \\ &[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)] = [\varphi^\dagger(\vec{x},t), \varphi^\dagger(\vec{x}',t)] = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Vejamos um exemplo de como as relações de comutação (5.32) podem nos fornecer a álgebra do grupo de Galileo.

Exemplo: $[P_i, P_j]$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^3x \int d^3x'.\frac{1}{4}.(-i)^2[(\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi)(x), (\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_j\varphi^\dagger.\varphi)(x')] \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\Big\{[\varphi^\dagger.\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] - [\partial_i\varphi^\dagger.\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] \\
&- [\varphi^\dagger.\partial_i\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi'] + [\partial_i\varphi^\dagger.\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi']\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\Big\{\varphi^\dagger.[\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger].\partial'_j\varphi' + \varphi'^\dagger[\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi']\partial_i\varphi \\
&- \partial_i\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger].\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.[\partial_i\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi'].\varphi - \varphi^\dagger.[\partial_i\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger].\varphi' - \partial'_j\varphi'^\dagger.[\varphi^\dagger, \varphi'].\partial_i\varphi \\
&+ \partial_i\varphi^\dagger.[\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger].\varphi' + \partial'_j\varphi'^\dagger.[\partial_i\varphi^\dagger, \varphi'].\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\Big\{\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\partial_i\delta(x-x') - \varphi'^\dagger.\partial_i\varphi.\partial'_j\delta(x-x') \\
&- \partial_i\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\delta(x-x') + \varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\partial'_j\delta(x-x') - \varphi^\dagger.\varphi'\partial_i\partial'_j\delta(x-x') + \partial'_j\varphi'^\dagger.\partial_i\varphi\delta(x-x') \\
&+ \partial_i\varphi^\dagger.\varphi'\partial'_j\delta(x-x') - \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\delta(x-x')\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\Big\{\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\partial_i + \varphi'^\dagger.\partial_i\varphi.\partial_j - \partial_i\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\partial_j \\
&+ \varphi^\dagger.\varphi'\partial_i\partial_j + \partial'_j\varphi'^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi'\partial_j - \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\Big\}\delta(x-x') \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_i\Big(\int d^3x'.\partial'_j\varphi'.\delta(x-x')\Big) + \partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\varphi \\
&- \partial_i\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi + \varphi^\dagger.\partial_i\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'.\delta(x-x')\Big) + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_i\varphi \\
&- \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'.\delta(x-x')\Big) - \partial_i\Big(\int d^3x'.\partial'_j\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_i.\partial_j\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_i\partial_j\varphi^\dagger.\varphi + \varphi^\dagger.\partial_i\partial_j\varphi \\
&+ \partial_j\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_i\partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_i.\partial_j\varphi - \partial_i\partial_j\varphi^\dagger.\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\varphi\Big\} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

onde utlizamos $\delta(x-x') \propto \int dke^{i(x'-x)k}$ para fazer $\partial'_i\delta(x-x') = -\partial_i\delta(x-x')$ e a última igualdade pode ser concluída de uma dupla integração por partes no primeiro e segundo termos da integral e do fato de que $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$. De fato, toda a álgebra do Grupo de Galileo extendido (4.15) pode ser construida através deste método, veja alguns outros exemplos no Apêndice B.1

5.3 Simetrias de escala e conforme para a equação de Schrödinger

Até o momento temos usado em nosso trabalho o sistema de unidades onde $c \equiv 1$ e $\hbar \equiv 1$, bastante difundido em física de altas energias. Neste sistema de unidades a ação ($S \propto \hbar$), por exemplo, é uma quantidade adimensional. Além disso, para $c \equiv 1$ e $\hbar \equiv 1$, a dimensionalidade de todas quantidades físicas podem ser definidas através de um único parâmetro, por exemplo

$$\begin{aligned} [massa] = [energia] = [momentolinear] = M, \\ [comprimento] = [tempo] = 1/M. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Assim para $c \equiv 1$ e $\hbar \equiv 1$ a massa assume um carater de parâmetro de escala. Quando presentes na lagrangeana estes termos de massa que definem uma escala para a teoria são responsáveis pela quebra da simetria de escala. Seria de se esperar que no LNR a tentativa de estudar qualquer tipo de simetria de escala fosse imediatamente descartada uma vez que a massa é um parâmetro intrínseco à teoria, não existe a possibilidade de tomarmos $m \to 0$. No entanto na física não relativística a massa não é mais um parâmetro de escala, uma vez que o parâmetro c não mais possui relevância nesta teoria, Hagen[14] sugere então a possibilidade de uma simetria de escala para a equação de Schrödinger. De fato, tomando-se $x'_i = e^{\sigma} x_i$ e $t' = e^{2\sigma} t$, temos

$$\begin{aligned} \partial_t &\to e^{2\sigma} \partial_{t'}, \\ \partial_i &\to e^{\sigma} \partial'_i, \end{aligned} \tag{5.35}$$

consequentemente

$$i\partial_t - \frac{1}{2m}\partial^2{}_i \to e^{2\sigma}(i\partial'_t - \frac{1}{2m}\partial'^2{}_i). \tag{5.36}$$

Portanto

$$\begin{aligned} x'_i &= e^{\sigma} x_i, \\ t' &= e^{2\sigma} t. \end{aligned} \tag{5.37}$$

sugere uma simetria de escala global da equação de Schrödinger[1]. Segundo Hagen a lei de transformação para φ correspondente às tranformações de escala descrita por (5.37) é

[1]É importante observar que esta é uma simetria para a equação de Schrödinger de uma partícula livre. Para a teoria não relativística o termo na lagrangiana (5.8) proporcional a U_0 será responsável por uma quebra de simetria de escala.

dada por

$$\varphi'(\vec{x'}, t') = e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi(\vec{x}, t). \tag{5.38}$$

Vejamos as consequências de assumirmos (5.37) e (5.38) como uma simetria local, ou seja $\sigma = \sigma(x, t)$, para a teoria (5.8).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial x'^i}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x^j} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'^i} \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

Então

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial x'^i}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x^j} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x^i} \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} = e^{2\sigma}(1 + 2t\frac{\partial \sigma}{\partial t}) \quad &, \quad \frac{\partial t'}{\partial x^i} = e^{2\sigma}(2t\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}). \\ \frac{\partial x'^i}{\partial t} = e^{\sigma}x^i\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad &, \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = e^{\sigma}(\delta^i{}_j + x^i\frac{\partial \sigma}{\partial x^j}). \end{aligned} \tag{5.41}$$

Podemos escrever, na forma infinitesimal

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial t'}{\partial x^j} \\ \frac{\partial x'^i}{\partial t} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} = 1 + \begin{pmatrix} 2\delta\sigma + 2t\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} & x^i\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} \\ 2t\frac{\partial \delta\sigma}{\partial x^j} & \delta^i{}_j\delta\sigma + x^i\frac{\partial \delta\sigma}{\partial x^j} \end{pmatrix} + O(\delta\sigma^2). \tag{5.42}$$

E a matriz inversa é dada por[2]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial t'}{\partial x^j} \\ \frac{\partial x'^i}{\partial t} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}^{-1} = 1 - \begin{pmatrix} 2\delta\sigma + 2t\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} & x^i\frac{\partial \delta\sigma}{\partial t} \\ 2t\frac{\partial \delta\sigma}{\partial x^j} & \delta^i{}_j\delta\sigma + x^i\frac{\partial \delta\sigma}{\partial x^j} \end{pmatrix} + O(\delta\sigma^2). \tag{5.43}$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - \Big(2\delta\sigma + 2t\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma\Big).\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma.x^i.\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{5.44}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Big(\delta^j{}_i.\delta\sigma + x^j.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma\Big)\frac{\partial}{\partial x^j} - 2t\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma.\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.45}$$

Para calcularmos a variação da medida de integração $\delta(d^3xdt)$, basta calcularmos

$$d^3x'dt' = detJd^3xdt, \tag{5.46}$$

onde J é a matriz jacobiana definida como

$$J \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t'}{\partial t} & \frac{\partial t'}{\partial x^j} \\ \frac{\partial x'^i}{\partial t} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

[2]A matriz inversa de uma matriz que pode ser escrita como $(1+A)$, onde A é uma matriz infinitesimal, é $(1-A)$, pois $(1+A)(1-A) = 1 - A + A - A^2 = 1$

Novamente, de (5.41)

$$J = 1 + \begin{pmatrix} 2\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} & 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^j} \\ x^i\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} & \delta^i{}_j\delta\sigma + x^i\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^j} \end{pmatrix} + O(\delta\sigma^2). \tag{5.48}$$

Assim

$$\begin{aligned} detJ &= 1 + \Big(2\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} + \delta^i{}_i\delta\sigma + x^i\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\Big) + O(\delta\sigma^2) \\ &= 1 + 5\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} + x^i\frac{\partial\sigma}{\partial x^i} + O(\delta\sigma^2), \end{aligned} \tag{5.49}$$

e

$$\delta(d^3xdt) = \Big(5\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} + x^i\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\Big)d^3xdt. \tag{5.50}$$

De (5.38) e (5.41), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) - \Big(2\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big(1 - \frac{3}{2}\delta\sigma\Big) - \frac{3}{2}\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \Big(2\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}x^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{5.51}$$

logo

$$\delta\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big) = \frac{\partial\varphi'}{\partial t'} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{7}{2}\delta\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{3}{2}\varphi\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} - 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial t}x^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \tag{5.52}$$

Também de (5.38) e (5.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi'}{\partial x'^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) - \Big(\delta^j{}_i\delta\sigma + x^j\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) - 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-\frac{3}{2}\sigma}\varphi\Big) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big(1 - \frac{3}{2}\delta\sigma\Big) - \frac{3}{2}\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial x^i} - \delta\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}x^j\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \end{aligned} \tag{5.53}$$

Assim

$$\delta\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'^i} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{5}{2}\delta\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - \frac{3}{2}\varphi\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}x^j\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.54}$$

Desprezando em (5.8) o termo proporcional a U_0 e assumindo $\mathscr{L}_I$ invariante sob transformações de escalas

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\varphi^\dagger E\varphi - (E\varphi^\dagger)\varphi] + \frac{1}{2m}p^i\varphi^\dagger p_i\varphi, \tag{5.55}$$

e

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2}[\delta(\varphi^\dagger).E\varphi + \varphi^\dagger.\delta(E\varphi) - \delta(E\varphi^\dagger).\varphi - (E\varphi^\dagger).\delta\varphi] + \frac{1}{2m}\delta(p^i\varphi^\dagger).(p_i\varphi) + \frac{1}{2m}(p^i\varphi^\dagger).\delta(p_i\varphi). \tag{5.56}$$

Assim, de (5.50), (5.52), (5.54), (5.55), (5.56) temos

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \delta(d^3xdt)\mathscr{L} + (d^3xdt)\delta\mathscr{L} \\
&= \int \Big(5\delta\sigma + 2t\frac{\partial\delta\sigma}{\partial t} + x^i\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\Big)\Big(\frac{1}{2}[\varphi^\dagger E\varphi - (E\varphi^\dagger)\varphi] + \frac{1}{2m}p^i\varphi^\dagger p_i\varphi\Big)d^3xdt \\
&+ \Big(\frac{1}{2}[\delta(\varphi^\dagger).E\varphi + \varphi^\dagger.\delta(E\varphi) - \delta(E\varphi^\dagger).\varphi - (E\varphi^\dagger).\delta\varphi] + \frac{1}{2m}\delta(p^i\varphi^\dagger).(p_i\varphi) \\
&+ \frac{1}{2m}(p^i\varphi^\dagger).\delta(p_i\varphi)\Big)(d^3xdt) \\
&= \int \Big\{ i\frac{5}{2}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\delta\sigma - i\frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\delta\sigma + \frac{5}{2m}(p^i\varphi^\dagger).(p_i\varphi).\delta\sigma + it\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma \\
&- it\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma + \overbrace{\frac{t}{m}(p^i\varphi^\dagger).(p_i\varphi).\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma}^{3} + \overbrace{\frac{i}{2}.x^i.\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{1} - \overbrace{\frac{i}{2}.x^i.\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{1} \\
&+ \overbrace{\frac{1}{2m}.x^j.(p^i\varphi^\dagger).(p_i\varphi).\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\sigma}^{1} - i\frac{3}{4}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\delta\sigma - i\frac{7}{4}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\delta\sigma - i\frac{3}{4}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma \\
&- it\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma - \overbrace{\frac{i}{2}.x^i.\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma}^{2} + i\frac{7}{4}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\delta\sigma + i\frac{3}{4}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma + it\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma \\
&+ \overbrace{\frac{i}{2}.x^i.\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial t}\delta\sigma}^{2} + i\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\varphi.\delta\sigma + \frac{5}{4m}.\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi.\delta\sigma + \overbrace{\frac{3}{4m}.\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{4} \\
&+ \overbrace{\frac{1}{2m}.x^j.\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{1} + \overbrace{\frac{t}{m}.\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{5} + \frac{5}{4m}.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi.\delta\sigma \\
&+ \overbrace{\frac{3}{4m}.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^\dagger.\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{4} + \overbrace{\frac{i}{2m}.x^j.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{1} + \overbrace{\frac{t}{m}.\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^\dagger.\frac{\partial}{\partial t}\varphi.\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\sigma}^{5}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

Cancelando alguns termos, agrupando como indicado e comparando com (5.14), (5.19), (5.23) e (5.24) podemos escrever

$$
\delta S = \int d^3xdt\Big(T^{ij}x_i\partial_j + x^i\mathfrak{p}_i\frac{\partial}{\partial t} - 2t\mathfrak{h}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{4m}[\partial_i(\varphi^\dagger.\varphi)]\partial^i - 2t\mathfrak{h}^i\partial_i\Big)\delta\sigma, \tag{5.58}
$$

o que nos fornece a seguinte lei de conservação

$$
\frac{\partial}{\partial t}(x^i\mathfrak{p}_i - 2t\mathfrak{h}) + \partial_j\Big(x_iT^{ij} - 2t\mathfrak{h}^j + \frac{3}{4m^2}\partial_j\mathfrak{m}\Big) = 0 \tag{5.59}
$$

e a carga conservada correspondente à esta lei de conservação

$$
D = \int d^3xx^i\mathfrak{p}_i - 2tH. \tag{5.60}
$$

O comutador do gerador da simetria escala D com o campo φ é dado por

$$
\begin{aligned}
&[D,\varphi(\vec{x},t)] = \\
&\int d^3x.\frac{x^i}{2}.[(\varphi^\dagger.p_i\varphi - p_i\varphi^\dagger.\varphi)(x),\varphi(x')] = \int d^3x.(-i)\frac{x^i}{2}.\{[\varphi^\dagger.\partial_i\varphi,\varphi'] - [\partial_i\varphi^\dagger.\varphi,\varphi']\} - 2t[H,\varphi] \\
&= \int d^3x.(-i)\frac{x^i}{2}.\{[\varphi^\dagger,\varphi'].\partial_i\varphi - [\partial_i\varphi^\dagger,\varphi'].\varphi\} - 2t[H,\varphi] \\
&= \int d^3x.(-i)\frac{x^i}{2}.\{-\delta(\vec{x}-\vec{x}).\partial_i\varphi + \partial_i\delta(\vec{x}-\vec{x}).\varphi\} - 2t[H,\varphi] \\
&(-i)\Big\{-\frac{x^i}{2}.\partial_i\varphi + \int d^3x.\frac{x^i}{2}.\varphi.\partial_i\delta(\vec{x}-\vec{x})\Big\} - 2t[H,\varphi].
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

Integrando por partes e utilizando a equação de movimento de Heisenberg $i[H,\varphi(x,t)] = \partial_t\varphi$ temos,

$$
[D,\varphi(\vec{x},t)] = i\Big(x^i\partial_i + 2t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2}\Big)\varphi(\vec{x},t). \tag{5.62}
$$

O trabalho de Hagen[14] aponta também a existência de uma simetria conforme para (5.8)

$$
\begin{aligned}
x_i' &= x_i(1-ct)^{-1}, \\
t' &= t(1-ct)^{-1},
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

onde c é um parâmetro real arbitrário. Ou, na forma infinitesimal

$$
\begin{aligned}
\delta x_i &= x_i t\delta c, \\
\delta t &= t^2\delta c,
\end{aligned}
\tag{5.64}
$$

com a condição de que o campo φ se transforme como

$$
\delta\varphi = (\frac{1}{2}imx^2 - \frac{3}{2}t)\varphi\delta c, \tag{5.65}
$$

e novamente $\mathscr{L}_I$ seja invariante sob transformações de escalas.

Procedimento análogo aos cálculos realizados para (5.37) pode ser realizado para encontrar a seguinte lei de conservação para (5.64),

$$
\frac{\partial}{\partial t}(tx^i\mathfrak{p}_i - t^2\mathfrak{h} - \frac{1}{2}\mathfrak{m}x^2) + \partial_i\Big(x_j tT^{ij} - \frac{1}{2}x^2\mathfrak{p}^i + \frac{3t}{4m^2}\partial_i\mathfrak{m} - t^2\mathfrak{m}^i\Big) = 0 \tag{5.66}
$$

E a carga conservada associada a esta lei de conservação é dada por

$$
\begin{aligned}
C &= \int d^3x(tx^i\mathfrak{p}_i - \frac{1}{2}\mathfrak{m}x^2) - t^2H \\
&= tD + t^2 - \frac{1}{2}\int d^3x\mathfrak{m}x^2.
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

A relação de comutação do gerador (5.67) da simetria comforme com o campo φ é dada por

$$[C, \varphi(\vec{x}, t)] = i\Big(tx^i\partial_i + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}imx^2 + \frac{3}{2}t\Big)\varphi(\vec{x}, t). \tag{5.68}$$

Com (5.67) e (5.62) podemos calcular as relações de comutação dos geradores de escala D e de simetria conforme C com os geradores do grupo de Galileo. Vejamos um exemplo

Exemplo: $[P_i, D]$

$$= \int d^3x \int d^3x'.x'^j.\frac{1}{4}.(-i)^2[(\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi)(x), (\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_j\varphi^\dagger.\varphi)(x')]$$

$$- 2t[P_i, H]$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.x'^j.\Big\{\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\partial_i + \varphi'^\dagger.\partial_i\varphi.\partial_j - \partial_i\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\partial_j$$

$$+ \varphi^\dagger.\varphi'\partial_i\partial_j + \partial'_j\varphi'^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi'\partial_j - \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi.\partial_i\Big\}\delta(x - x')$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_i\Big(\int d^3x'.x'^j.\partial'_j\varphi'.\delta(x - x')\Big) + \partial_j\Big(\int d^3x'.x'^j.\varphi'^\dagger.\delta(x - x')\Big).\partial_i\varphi$$

$$- \partial_i\varphi^\dagger.\Big(\int d^3x'.x'^j.\partial'_j\varphi'.\delta(x - x')\Big) - \partial_i\partial_j\Big(\int d^3x'.x'^j.\varphi'^\dagger.\delta(x - x')\Big).\varphi$$

$$+ \varphi^\dagger.\partial_i\partial_j\Big(\int d^3x'.x'^j.\varphi'.\delta(x - x')\Big) + \int d^3x'.x'^j.\partial'_j\varphi'^\dagger\delta(x - x').\partial_i\varphi$$

$$- \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\Big(\int d^3x'.x'^j.\varphi'.\delta(x - x')\Big) - \partial_i\Big(\int d^3x'.x'^j.\partial'_j\varphi'^\dagger.\delta(x - x')\Big).\varphi\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_i(x^j.\partial_j\varphi) + \partial_j(x^j.\varphi^\dagger).\partial_i\varphi - x^j.\partial_i\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_i\partial_j(x^j.\varphi^\dagger).\varphi + \varphi^\dagger.\partial_i\partial_j(x^j\varphi)$$

$$+ x^j.\partial_j\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\partial_j(x^j.\varphi) - \partial_i(x^j.\partial_j\varphi^\dagger).\varphi\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{4\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - 4\partial_i\varphi^\dagger.\varphi + 2x^j.\varphi^\dagger.\partial_i\partial_j\varphi + 2x^j\partial_j\varphi^\dagger\partial_i\varphi - 2x^j\partial_i\varphi^\dagger\partial_j\varphi - 2x^j.\partial_i\partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\}$$

integrando por partes o terceiro e sexto termos

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{4\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - 4\partial_i\varphi^\dagger.\varphi - 2\partial_i(x^j.\varphi^\dagger).\partial_j\varphi + 2x^j\partial_j\varphi^\dagger\partial_i\varphi - 2x^j\partial_i\varphi^\dagger\partial_j\varphi$$

$$+ 2\partial_j\varphi^\dagger.\partial_i(x^j.\varphi)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\Big\{2\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - 2\partial_i\varphi^\dagger.\varphi + 4x^j.\partial_j\varphi^\dagger\partial_i\varphi - 4x^j\partial_i\varphi^\dagger\partial_j\varphi\Big\}$$

Novamente, integrando por partes os dois últimos termos e utilizando $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$

$$= -\frac{1}{4}\int d^3x.\{2\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - 2\partial_i\varphi^\dagger.\varphi\} = -iP_i \tag{5.69}$$

A álgebra completa é dada por

$$\begin{aligned}
&[P_i, C] = iK_i, \qquad [H, C] = iD, \qquad [C, D] = -2iC, \\
&[P_i, D] = -iP_i, \qquad [K_i, D] = -iK_i, \qquad [H, D] = 2iH \\
&[J_i, C] = [J_i, D] = [M, C] = [M, D] = [K, C] = 0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

As relações de comutação da álgebra (4.15) associadas com (5.70) formam o maior grupo de transformações, até então conhecido, que deixam invariante a equação livre de Schrödinger.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma revisão sobre as condições de simetria para uma teoria não-relativística de campos escalares de spin 0, onde tomamos como referências básicas o segundo capítulo do livro de Weinberg[11] e o trabalho de Hagen[14]. Observamos que uma teoria relativística deve necessariamente conter o Grupo de Poincaré como um grupo de simetrias, e que este é um grupo de simetrias de 10-parâmetros: 3 boosts, 3 rotações e 4 translações.

Na expectativa de construir o grupo de simetrias para uma teoria não-relativística, o Grupo de Galileo, tomamos o LNR do grupo de Poincaré e observamos que a álgebra do grupo de Galileo quando construída desta forma parece não ser completamente compatível com a álgebra do Gupo de Galileo quando construída de uma forma mais pragmática. Existe uma aparente inconsistência entre os comutadores dos geradores associados à boosts e translaçõs espaciais. Tomando o LNR do Grupo de Poincaré obtemos $[K_i, P_j] = iM\delta_{ij}$, quando o resultado esperado seria $[K_i, P_j] = 0$. De fato observamos que esta diferença está intrinsicamente associada à efeitos quânticos, e que para desfazer esta inconsistência deveríamos considerar não só o conceito de representações em teorias de grupo, mas sim o conceito de representações projetivas, que em mecânica quântica está associado ao conceito de raios. Assim construímos o que conhecemos como o Grupo de Galileo Extendido, que além dos 10-parâmetros de simetria do grupo de Poincaré possui também uma simetria associada à mudança de fase, $\varphi \to e^{im\theta}\varphi$.

Além disto observamos que campos relativísticos de spin 0 e massa nula possuíam simetrias de escala, a condição $m = 0$ faz-se necessária porque para uma teoria relativística o parâmetro m assume um caráter de parâmetro de escala. No LNR é sempre possível encontrarmos um referêncial de repouso para as partículas, ou seja, no LNR não existem partículas de massa nula, assim seria de se esperar que qualquer tentativa de construir uma teoria não relativística invariante sob transformação de escala, fracassasse. Contudo este caráter de parâmetro de escala para m não tem mais sentido em uma teoria não-relativística, uma vez que o próprio parâmetro c não possui mais relevância no regime de baixas energias. De fato, mostramos que uma transformação de escala do tipo $x'_i = e^{\sigma} x_i$ e $t' = e^{2\sigma} t$, é uma simetria da ESPL. Observamos também que além da simetria de escala, há a possibilidade de uma simetria conforme do tipo, $x'_i = x_i(1 - ct)^{-1}$ e $t' = t(1 - ct)^{-1}$, para a ESPL. Desta forma construimos o maior grupo de transformações de simetria para um campo escalar de spin 0, o grupo de Schrödinger, como um grupo de simetria de 13-parâmetros, e surpreendentemente este grupo de simetrias adicionais está definido dentro de uma teoria não-relativística. Estes resultados estão longe de esgotar o tema abordado, o interesse pelo grupo de Schrödinger tem sido cada vez maior dentro da comunidade científica desde a descoberta de uma correspondência AdS/CFT não-relativística, que relaciona propriedades da mecânica quântica não-relativística com propriedades do espaço AdS[6], e mais recentemente a equação de Schrödinger tem sido estudada dentro de um grupo de simetrias ainda maior, contendo também simetrias sob troca de partículas que obedecem a diferentes estatísticas[15].

Apêndice A

Comutadores da “não-álgebra”do Grupo de Galileo

(i) $[P_1, H]$

Primeiramente de (2.15) temos

$$e^{i\theta H}e^{i\theta_1 P_1}e^{-i\theta H}e^{-i\theta_1 P_1} = 1 + \theta_1\theta_2[P_1, H]. \tag{A.1}$$

As transformações correspondentes no espaço-tempo são

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (x_1 + \theta_1, x_2, x_3, t) \to (x_1 + \theta_1, x_2, x_3, t - \theta)\\ &\to (x_1, x_2, x_3, t - \theta) \to (x_1, x_2, x_3, t),\end{aligned} \tag{A.2}$$

ou seja, uma transformação identidade. Então a transformação $e^{i\theta H}e^{i\theta_1 P_1}e^{-i\theta H}e^{-i\theta_1 P_1}$ no espaço linear deve corresponder também à uma transformação identidade no espaço linear. De (A.1) temos

$$1 + \theta_1\theta[P_1, H] = 1, \tag{A.3}$$

consequentemente $[P_1, H] = 0$. De uma forma mais geral

$$[P_i, H] = 0. \tag{A.4}$$

(ii) $[K_1, K_2]$

$$e^{i\theta_2 K^2}e^{i\theta_1 K_1}e^{-i\theta_2 K^2}e^{-i\theta_1 K_1} = 1 + \theta_1\theta_2[K_1, K_2]. \tag{A.5}$$

Transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (x_1 - \theta_1 t, x_2, x_3, t) \to (x_1 - \theta_1 t, x_2 - \theta_2 t, x_3, t)\\ &\to (x_1, x_2 - \theta_2 t, x_3, t) \to (x_1, x_2, x_3, t),\end{aligned} \tag{A.6}$$

logo

$$1 + \theta_1\theta_2[K_1, K_2] = 1, \tag{A.7}$$

e

$$[K_i, K_j] = 0. \tag{A.8}$$

(iii) $[J_1, H]$

$$e^{i\theta H}e^{i\theta_1 J^1}e^{-i\theta H}e^{-i\theta_1 J^1} = 1 + \theta_1\theta[J_1, H]. \tag{A.9}$$

Transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t) \to (R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t-\theta)\\ &\to (R_1^{-1}(\theta_1)R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t-\theta) \to (x_1, x_2, x_3, t),\end{aligned} \tag{A.10}$$

logo

$$1 + \theta_1\theta[J_1, H] = 1, \tag{A.11}$$

e

$$[J_i, H] = 0. \tag{A.12}$$

(iv) $[P_1, K_2]$

$$e^{i\theta_2 K_2}e^{i\theta_1 P_1}e^{-i\theta_2 K_2}e^{-i\theta_1 P_1} = 1 + \theta_1\theta_2[P_1, K_2]. \tag{A.13}$$

Transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, t) &\to (x_1+\theta_1, x_2, x_3, t) \to (x_1+\theta_1, x_2-\theta_2 t, x_3, t)\\ &\to (x_1, x_2-\theta_2 t, x_3, t) \to (x_1, x_2, x_3, t)\end{aligned} \tag{A.14}$$

logo

$$1 + \theta_1\theta_2[P_1, K_2] = 1, \tag{A.15}$$

e

$$[P_i, K_j] = 0. \tag{A.16}$$

(v) $[J_1, J_2]$

$$e^{i\theta_2 J^2}e^{i\theta_1 J^1}e^{-i\theta_2 J^2}e^{-i\theta_1 J^1} = 1 + \theta_1\theta_2[J_1, J_2]. \tag{A.17}$$

Transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, t) &\to (R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t) \to (R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t)\\ &\to (R_1(-\theta_1)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t)\\ &\to (R_2(-\theta_2)R_1(-\theta_1)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t),\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde,

$$R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$
$$R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

As matrizes (A.19) podem ser ecritas como uma expanção em série de potências,

$$R_i(\theta) = 1 - i\theta M_i + \cdots , \tag{A.20}$$

onde

$$M_i = i\frac{dR_i}{d\theta}\Big|_{\theta=0}, \tag{A.21}$$

e

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.22}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_2(-\theta_2)&R_1(-\theta_1)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1) \\ &= \left(1 + i\theta_2 M_2 - \frac{\theta_2^2 M_2^2}{2}\right)\left(1 + i\theta_1 M_1 - \frac{\theta_1^2 M_1^2}{2}\right) \\ &\times \left(1 - i\theta_2 M_2 - \frac{\theta_2^2 M_2^2}{2}\right)\left(1 - i\theta_1 M_1 - \frac{\theta_1^2 M_1^2}{2}\right) \\ &= 1 + \theta_1\theta_2(M_1M_2 - M_2M_1) \\ &= 1 + \theta_1\theta_2 i(M_3) \\ &= R_3(-\theta_1\theta_2), \end{aligned} \tag{A.23}$$

então

$$(\mathbf{x}, t) \to (R_3(-\theta_1\theta_2)\mathbf{x}, t). \tag{A.24}$$

logo

$$1 + \theta_1\theta_2\theta[J_1, J_2] = 1 + i\theta_1\theta_2 J_3, \tag{A.25}$$

e

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k. \tag{A.26}$$

(vi) $[J_1, K_2]$

$$e^{i\theta_2 K^2} e^{i\theta_1 J^1} e^{-i\theta_2 K^2} e^{-i\theta_1 J^1} = 1 + \theta_1\theta_2[J_1, K_2]. \tag{A.27}$$

Transformações no espaço-tempo:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}, t) &\rightarrow (R_1(\theta_1)\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2 cos\theta_1 - x_3 sen\theta_1, x_2 sen\theta_1 + x_3 cos\theta_1, t) \\
&\rightarrow (x_1, x_2 cos\theta_1 - x_3 sen\theta_1 - \theta_2 t, x_2 sen\theta_1 + x_3 cos\theta_1, t) \\
&\rightarrow (x_1, x_2(cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1) - \theta_2 t cos\theta_1, x_3(cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1) + \theta_2 t sen\theta_1, t) \\
&\rightarrow (x_1, x_2, x_3 + \theta_1 t sen\theta_2, t) = (x_1, x_2, x_3 + \theta_1\theta_2 t, t)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

logo

$$1 + \theta_1\theta_2[J_1, K_2] = 1 + i\theta_1\theta_2 K_3, \tag{A.29}$$

e

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k. \tag{A.30}$$

De forma análoga pode-se mostrar

(vii) $[J_1, P_2] = iP_3$, generalizando

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k. \tag{A.31}$$

Apêndice B

Comutadores do Grupo de Schrödinger

B.1 Comutadores do grupo de Galileo Extendido

(i) $[K_i, P_j]$

$$= \int d^3x \int d^3x'.x_i.[m\varphi^\dagger.\varphi, \mathfrak{p}_j] - t[P_i, P_j]$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.[(\varphi^\dagger.\varphi)(x), (\varphi^\dagger.p_j\varphi - p_j\varphi^\dagger.\varphi)(x')] - 0$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.\Big([\varphi^\dagger.\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] - [\varphi^\dagger.\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi']\Big)$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.\Big(\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] + [\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi'].\varphi - \varphi^\dagger.[\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi'] - [\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi'].\varphi\Big)$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.\Big(\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger].\partial'_j\varphi' + \varphi'^\dagger.[\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi'].\varphi - \varphi^\dagger.[\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger].\varphi' - \partial'_j\varphi'^\dagger[\varphi^\dagger, \varphi'].\varphi\Big)$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.\Big(\varphi^\dagger.\delta(x-x').\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.\partial'_j\delta(x-x').\varphi - \varphi^\dagger.\partial'_j\delta(x-x').\varphi'$$
$$+\partial'_j\varphi'^\dagger.\delta(x-x').\varphi\Big)$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x \int d^3x'.x_i.\Big(\varphi^\dagger.\delta(x-x').\partial'_j\varphi' + \varphi'^\dagger.\partial_j\delta(x-x').\varphi + \varphi^\dagger.\partial_j\delta(x-x').\varphi'$$
$$+\partial'_j\varphi'^\dagger.\delta(x-x').\varphi\Big)$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x.x_i.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_j\varphi + \partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi + \varphi^\dagger.\partial_j\Big(\int d^3x'.\delta(x-x').\varphi'\Big)$$
$$+ \partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\}$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x.x_i.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_j\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\varphi + \varphi^\dagger.\partial_j\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\}$$

$$= -i\frac{m}{2}\int d^3x.x_i.\Big\{2\varphi^\dagger.\partial_j\varphi + 2\partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\} = -im\int d^3x.x_i.\Big\{\partial_j(\varphi'^\dagger.\varphi)\Big\}$$

(ii) $[J_i, P_j]$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^3x \int d^3x'.\epsilon_{ikm}.x_k.\frac{1}{4}.(-i)^2[(\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\varphi)(x), (\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_j\varphi^\dagger.\varphi)(x')] \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{[\varphi^\dagger.\partial_m\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] - [\partial_m\varphi^\dagger.\varphi, \varphi'^\dagger.\partial'_j\varphi'] \\
&- [\varphi^\dagger.\partial_m\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi'] + [\partial_m\varphi^\dagger.\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi']\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.[\partial_m\varphi, \varphi'^\dagger].\partial'_j\varphi' + \varphi'^\dagger[\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi']\partial_m\varphi \\
&- \partial_m\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger].\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.[\partial_m\varphi^\dagger, \partial'_j\varphi'].\varphi - \varphi^\dagger.[\partial_m\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger].\varphi' - \partial'_j\varphi'^\dagger.[\varphi^\dagger, \varphi'].\partial_m\varphi \\
&+ \partial_m\varphi^\dagger.[\varphi, \partial'_j\varphi'^\dagger].\varphi' + \partial'_j\varphi'^\dagger.[\partial_m\varphi^\dagger, \varphi'].\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\partial_m\delta(x-x') - \varphi'^\dagger.\partial_m\varphi.\partial'_j\delta(x-x') \\
&- \partial_m\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\delta(x-x') + \varphi'^\dagger.\varphi.\partial_m\partial'_j\delta(x-x') - \varphi^\dagger.\varphi'\partial_m\partial'_j\delta(x-x') + \partial'_j\varphi'^\dagger.\partial_m\varphi\delta(x-x') \\
&+ \partial_m\varphi^\dagger.\varphi'\partial'_j\delta(x-x') - \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi.\partial_m\delta(x-x')\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x \int d^3x'.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi'.\partial_m + \varphi'^\dagger.\partial_m\varphi.\partial_j - \partial_m\varphi^\dagger.\partial'_j\varphi' - \varphi'^\dagger.\varphi.\partial_m\partial_j \\
&+ \varphi^\dagger.\varphi'\partial_m\partial_j + \partial'_j\varphi'^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\varphi'\partial_j - \partial'_j\varphi'^\dagger.\varphi.\partial_m\Big\}\delta(x-x') \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_m\Big(\int d^3x'.\partial'_j\varphi'.\delta(x-x')\Big) + \partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\partial_m\varphi \\
&- \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\varphi \\
&- \partial_m\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi + \varphi^\dagger.\partial_m\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'.\delta(x-x')\Big) + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_m\varphi \\
&- \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\Big(\int d^3x'.\varphi'.\delta(x-x')\Big) - \partial_m\Big(\int d^3x'.\partial'_j\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{4}\int d^3x.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_m.\partial_j\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_m\partial_j\varphi^\dagger.\varphi + \varphi^\dagger.\partial_m\partial_j\varphi \\
&+ \partial_j\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\varphi - \partial_m\partial_j\varphi^\dagger.\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x.\epsilon_{ikm}.x_k.\Big\{\varphi^\dagger.\partial_m.\partial_j\varphi - \partial_m\partial_j\varphi^\dagger.\varphi + \partial_j\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\partial_j\varphi\Big\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3x.\epsilon_{ikm}.x_k.\partial_j(\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\varphi) = \frac{1}{2}\int d^3x.\epsilon_{ikm}.(\partial_jx_k).(\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x.\epsilon_{ijm}.(\varphi^\dagger.\partial_m\varphi - \partial_m\varphi^\dagger.\varphi) = i\epsilon_{ijm}P_m.
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

B.2 Comutadores dos geradores de simetria de escala e conforme

(i) $[P_i, C]$

$$
\begin{aligned}
&= [P, tD] + [P, t^2H] - \frac{1}{2}\int d^3x'.x'^2.[P, \mathfrak{m}] = -itP_i - \frac{1}{2}\int d^3x'.x'^2.m.[P, \varphi'^\dagger\varphi'] \\
&= -itP_i + \frac{i}{4}\int d^3x \int d^3x'.x'^2.m\Big\{\varphi'^\dagger.[\varphi^\dagger, \varphi'].\partial_i\varphi + \varphi^\dagger.[\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger].\varphi' - \varphi'^\dagger.[\partial_i\varphi^\dagger, \varphi'].\varphi \\
&- \partial_i\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger].\varphi'\Big\} \\
&= -itP_i + \frac{i}{4}\int d^3x \int d^3x'.x'^2.m\Big\{-\varphi'^\dagger.\partial_i\varphi.\delta(x-x') + \varphi^\dagger.\partial_i\delta(x-x').\varphi' + \varphi'^\dagger.\partial_i\delta(x-x').\varphi \\
&- \partial_i\varphi^\dagger.\varphi'.\delta(x-x')\Big\} \\
&= -itP_i + \frac{i}{4}.m.\int d^3x.\Big\{-x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\varphi + \varphi^\dagger.\partial_i\Big(\int d^3x'.x'^2.\delta(x-x').\varphi'\Big) \\
&+ \partial_i\Big(\int d^3x'.x'^2.\varphi'^\dagger.\delta(x-x')\Big).\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi.x^2\Big\} \\
&= -itP_i + \frac{i}{4}.m.\int d^3x.\{-x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\varphi + \varphi^\dagger.\partial_i(x'^2.\varphi) + \partial_i(x^2.\varphi^\dagger).\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi.x^2\} \\
&= -itP_i + \frac{i}{4}.m.\int d^3x.\{\varphi^\dagger.\partial_i(x'^2).\varphi + \partial_i(x^2).\varphi^\dagger.\varphi\} = -itP_i + \frac{i}{4}.m.\int d^3x.4.x^i.\varphi^\dagger.\varphi \\
&= iK_i
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

(ii) $[H, D]$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2m}\int d^3x.[p^i\varphi^\dagger p_i\varphi, D] = -\frac{1}{2m}\int d^3x\{p^i\varphi^\dagger.[p_i\varphi, D] + [p^i\varphi^\dagger, D].p_i\varphi\} \\
&= \frac{1}{2m}\int d^3x.\{\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i(-i.x^j.\partial_j\varphi - i2t.\partial_t\varphi - \frac{3}{2}i.\varphi) + \partial^i(-i.x^j.\partial_j\varphi^\dagger - i2t.\partial_t\varphi^\dagger - \frac{3}{2}i.\varphi^\dagger).\partial_i\varphi\} \\
&= -i\frac{1}{2m}\int d^3x.\{\partial^i\varphi^\dagger.\delta_i{}^j.\partial_j\varphi + \partial^i\varphi^\dagger.x^j.\partial_i\partial_j\varphi + 2t.\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\partial_t\varphi + \delta_i{}^j.\partial_j\varphi^\dagger\partial^i\varphi + x^j\partial_i\partial_j\varphi^\dagger\partial^i\varphi \\
&+ 2t.\partial_i\partial_t\varphi^\dagger\partial^i\varphi + 3.\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\varphi\}
\end{aligned}
$$

Integrando o segundo termo por partes e usando $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$, temos

$$
= -i\frac{1}{m}\int d^3x.\{\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\varphi + t.\partial_t(\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\varphi)\} = 2iH,
$$

onde o termo $t.\partial_t(\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\varphi)$ pode ser cancelado somando à lagragiana $\mathscr{L}$ um termo corresponte.

(B.4)

(iii) $[H, C]$

$$
\begin{aligned}
&= t[H,D] + t^2[H,H] - \frac{1}{2}\int d^3x.x^2.m.[H,\varphi^\dagger\varphi] \\
&= 2itH - \frac{1}{2}\int d^3x.x^2.m.(\varphi^\dagger.[H,\varphi] + [H,\varphi^\dagger]\varphi) \\
&= 2itH + \frac{i}{2}\int d^3x.x^2.m.(\varphi^\dagger.\partial_t\varphi + \partial_t\varphi^\dagger.\varphi) \\
&= 2itH + \frac{i}{2}\int d^3x.x^2.\partial_t(m.\varphi^\dagger.\varphi) \\
&= 2itH + \frac{i}{4}\int d^3x.x^2.\partial_i\{\varphi^\dagger. - i\partial^i\varphi - (-i\partial^i\varphi^\dagger.\varphi)\} \\
&= 2itH + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.(\partial_i\varphi^\dagger.\partial^i\varphi + \varphi^\dagger\partial_i\partial^i\varphi - \partial_i\partial^i\varphi^\dagger.\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\partial^i\varphi \\
&= 2itH + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\varphi^\dagger\partial_i\partial^i\varphi - \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\partial_i\partial^i\varphi^\dagger.\varphi \\
&= 2itH + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\partial^i\varphi + \frac{1}{4}\int d^3x.(2x_i.\partial^i\varphi^\dagger.\varphi + x^2.\partial_i\varphi^\dagger.\partial^i\varphi) \\
&= 2itH + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\partial^i\varphi + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\partial^i\varphi^\dagger.\partial_i\varphi + \frac{1}{2}\int d^3x.x^i.\partial_i\varphi^\dagger.\varphi) \\
&= 2itH + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\partial^i\varphi - \Big\{\frac{1}{4}\int d^3x.2x_i\varphi^\dagger.\partial^i\varphi + \frac{1}{4}\int d^3x.x^2.\varphi^\dagger.\partial_i\partial^i\varphi\Big\} \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3x.x^i.\partial_i\varphi^\dagger.\varphi \\
&= 2itH - \frac{1}{2}\int d^3x.x^i.(\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi) \\
&= 2itH - \frac{i}{2}\int d^3x.x^i.(\varphi^\dagger.p_i\varphi - p_i\varphi^\dagger.\varphi) = -iD
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

(iv) $[D, M]$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m}{2}\int d^3x\int d^3x'.x^i.[\varphi^\dagger.p_i\varphi(x) - p_i\varphi^\dagger.\varphi(x), \varphi^\dagger.\varphi(x')] - 2t[H,M] \\
&= \frac{-im}{2}\int d^3x\int d^3x'.x^i.([\varphi^\dagger.\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger.\varphi'] - [\partial_i\varphi^\dagger.\varphi, \varphi'^\dagger.\varphi']) \\
&= \frac{-im}{2}\int d^3x\int d^3x'.x^i.(\varphi^\dagger.[\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger.\varphi'] + [\varphi^\dagger, \varphi'^\dagger.\varphi'].\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger.\varphi'] - [\partial_i\varphi^\dagger, \varphi'^\dagger.\varphi'].\varphi) \\
&= \frac{-im}{2}\int d^3x\int d^3x'.x^i.(\varphi^\dagger.[\partial_i\varphi, \varphi'^\dagger].\varphi' + \varphi'^\dagger.[\varphi^\dagger, \varphi'].\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.[\varphi, \varphi'^\dagger].\varphi' - \varphi'^\dagger.[\partial_i\varphi^\dagger, \varphi'].\varphi) \\
&= \frac{-im}{2}\int d^3x\int d^3x'.x^i.(\varphi^\dagger.\partial_i\delta(x-x').\varphi' - \varphi'^\dagger.\delta(x-x').\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\delta(x-x').\varphi' \\
&+ \varphi'^\dagger.\partial_i\delta(x-x').\varphi) = \frac{-im}{2}\int d^3x.x^i.(\varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \varphi^\dagger.\partial_i\varphi - \partial_i\varphi^\dagger.\varphi + \partial_i\varphi^\dagger.\varphi) = 0
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Bibliografia

[1] R.P.Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985.

[2] A.Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.

[3] J.Maldacena, *The Illusion of Gravity*, Scientific American, November 2005, p.56.

[4] J.Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys **2**, 1998, p.232. Disponível em arXiv:hep-th/9711200

[5] E.Witten, *Anti De Sitter Space and Holography*, Adv.Theor.Math.Phys **2**, 1998, p.253. Disponível em arXiv:hep-th/9802150

[6] J.Maldacena, D.Martelli, Y.Tachikawa, *Comments in string theory backgrounds with nonrelativistic conformal symmetry*, JHEP **0810**, 2008, p.072. Disponível em arXiv:hep-th/0807.1100

[7] R.Gilmore, *Lie Groups-Physics and Geometry–An introduction for physicists, engineers and Chemists*, Cambridge University Press, 2008.

[8] H.Georgi, *Lie Algebra in Particle Physics–From Isospins to Unified Theories, Second Edition*, Westview Press, 1999.

[9] G.Arfken, *Mathematical Methods for Physicists, Third Edition*, Academic Press, 1985.

[10] E.P.Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **90**, 1939, p. 149.

[11] S.Weinberg, *The Quantum Theory of Fields–Volume I*, Cambridge University Press, 1995.

[12] P.Di Francesco, P.Mathieu e D.Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1996.

[13] U.Niederer, *The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schrödinger Equation*, Helv.Phys.Acta **45**, 1972, p.802.

[14] C.R.Hagen, *Scale and Conformal Transformations in Galilean-Covariant Field Theory*, Phys.Rev.D **5**, 1972, p.377.

[15] M.Valenzuela, *Hidden (super)symmetry of the Schrödinger equation*, arXiv:0912.0789v2 [hep-th].

[16] E.Noether, *Invariante variationsprobleme*, Nachr.Gesell.Wissenchaft.Göttingen **2**, 1918, p.235.

[17] W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*, McGRAW-HILL, 1976.

[18] E.P.Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*(Braunschweig,1931), p.251.

[19] M.Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 2005.

[20] L.E.Ballentine, *Quantum Mechanics–A Modern Development*, World Scientific, 1998.

[21] N.Lemos, *Mêcanica Analítica, Segunda Edição*, Livraria da Física, 2007.

[22] L.D.Landau e L.M.Lifshitz, *Mechanics, Third Edition*, Pergamon Press, 1976.

[23] L.D.Landau e L.M.Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition*, Pergamon Press, 1975.

[24] K.Gottfried e T-M.Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*,Springer-Verlag New York INC, 2004.

[25] V.Bargmann, *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups*, Ann.Math. **50**, 1954, p.1.

[26] J.M.Levy-Leblond, *Galilei Group and Nonrelativistic Quantum Mechanics*, J.Math.Phys. **4**, 1963, p.776.

[27] E.Inönü e E.P.Wigner, *Representations of the Galilei Group*, Nuovo Cimento **9**, 1952, p.705.

[28] D.M.Greenberger, *Inadequacy of the Usual Galilean Transformation in Quantum Mechanics*, Phys. Rev. Lett. **87**, 2001, 100405.

[29] I.J.R.Aitchison e A.J.G.Hey, *Gauge Theories in Particle Physics–Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QUED*, Taylor & Francis Group, 2003.