

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Estudo da Estabilidade Local e das Bifurcações num
Sistema Polinomial Quadrático em \mathbb{R}^3 Oriundo de
uma Equação Escalar de Terceira Ordem.**

Carlos Renato Cerqueira

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Osório Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

ITAJUBÁ-MG,
20 DE AGOSTO DE 2009

Para Marília, Moacir e Maria Aparecida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de cursar o Mestrado em Física e Matemática Aplicada em Itajubá, na área que tanto almejava. Sou imensamente grato à dedicação e orientação do Professor Luis Fernando de Osório Mello, que foi prestativo e objetivo nas orientações. Agradeço ao Professor Baêta, aos meus amigos Adhimar, Elcio que ajudaram a compreender os programas LaTeX e Mathematica, respectivamente e ao amigo Felipe pelas dúvidas discutidas. Agradeço minha noiva, Marília, que teve muita paciência e me deu muito apoio, aos meus pais, por quem tenho muita gratidão e, por fim, agradeço o apoio fornecido pela CAPES, que financiou esse trabalho de mestrado.

Resumo

Esta Dissertação de Mestrado trata do estudo da estabilidade local e das bifurcações de Hopf genéricas de uma família de equações diferenciais quadráticas em \mathbb{R}^3 dependentes de três parâmetros reais negativos. Essa família é oriunda de outra família a três parâmetros de equações diferenciais escalares quadráticas de terceira ordem. O estudo da estabilidade dos equilíbrios é feito utilizando-se o critério de estabilidade de Routh–Hurwitz. Utilizamos ainda este critério para a determinação da superfície de Hopf no espaço de parâmetros. Calculamos analiticamente as condições de não degenerescência e transversalidade das bifurcações de Hopf genéricas. Aplicamos os resultados obtidos no estudo de um caso particular conhecido em Teoria de Controle como sistema de Lur’e.

Palavras–chave

Bifurcações de Hopf, estabilidade local, primeiro coeficiente de Lyapunov, ciclos limites, equações diferenciais quadráticas, sistema de Lur’e.

Abstract

This work deals with the study of local stability and generic Hopf bifurcations of a family of differential equations in \mathbb{R}^3 depending on three negative real parameters with only a quadratic term. This family is from another family of three parameters of the scalar quadratic differential equations of third order. The study of stability of equilibria is done using the Routh–Hurwitz criterion stability. We use this criterion again for the determination of the Hopf surface in the parameter space when studying the bifurcations. We obtain analytically the nondegenerescence and transversality conditions for the generic Hopf bifurcation. We apply our study in a particular system from the Control Theory called Lur’e system.

Keywords

Hopf bifurcations, local stability, first Lyapunov coefficient, limit cycles, quadratic differential equations, Lur’e system.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Considerações iniciais	5
2.2 Bifurcação de Hopf Genérica	10
2.3 Método da projeção	26
3 Análise da estabilidade local e das bifurcações	39
3.1 Dinâmica geral local	39
3.2 Bifurcações de Hopf no sistema (3.1)	42
3.2.1 Bifurcação de Hopf de codimensão 1	42
3.2.2 Encontrando o primeiro coeficiente de Lyapunov	45
3.2.3 A condição de transversalidade	51
3.3 Caso particular: sistema de Lur'e	52
3.3.1 A condição de transversalidade	56
4 Simulações Numéricas	57
Bibliografia	71

Anexo A

73

Anexo B

82

Lista de Figuras

1.1	Retrato de fase do sistema (1.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.6, 0.8, -0.6)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana são: $\lambda_1 = -1.64393$, $\lambda_2 = 0.221965 - 1.8975i$, $\lambda_3 = 0.221965 + 1.8975i$	3
2.1	Retrato de fase do sistema (2.5) ilustrando uma bifurcação de Hopf.	10
2.2	Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.	12
2.3	Ponto fixo da transformação de Poincaré.	13
2.4	Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.	15
2.5	Variedade central como um gráfico de $\mathbf{y} = V(z, \bar{z})$	31
2.6	Diagrama da bifurcação de Hopf genérica em um sistema tridimensional.	38
3.1	Conjunto \mathcal{D}_1 do espaço de parâmetros onde E_1 é localmente assintoticamente estável.	44
3.2	Conjunto \mathcal{D}_2 do espaço de parâmetros onde E_1 é localmente instável	45
3.3	Superfície de Hopf \mathcal{D}_3 , onde $a = a_h = -bc$	46
4.1	Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$. Quando $bc > -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é local e assintoticamente estável e, portanto, localmente atrator. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -0.772295$, $\lambda_2 = -0.213853 + 1.59498i$, $\lambda_3 = -0.213853 - 1.59498i$	58
4.2	Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$	58

- 4.3 Projecção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$ 59
- 4.4 Projecção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$ 59
- 4.5 Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$. Quando $bc = -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é local e assintoticamente estável e, portanto, um atrator fraco. A bifurcação de Hopf ocorre no valor crítico $a_h = -3.504$. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -1.2$, $\lambda_2 = 0 + 1.7088i$, $\lambda_3 = 0 - 1.7088i$ 60
- 4.6 Projecção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$ 60
- 4.7 Projecção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$ 61
- 4.8 Projecção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$ 61
- 4.9 Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -1.30716$, $\lambda_2 = 0.0535792 + 1.74849i$, $\lambda_3 = 0.0535792 - 1.74849i$ 62
- 4.10 Projecção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$ 62
- 4.11 Projecção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$ 63

- 4.12 Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$. 63
- 4.13 Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_2 = (-a, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_2} são: $\lambda_1 = 1.10054$, $\lambda_2 = -1.15027 + 2.03193i$, $\lambda_3 = -1.15027 - 2.03193i$ 64
- 4.14 Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$. 64
- 4.15 Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$. 65
- 4.16 Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$. 66
- 4.17 Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_2 = (-a, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_2} são: $\lambda_1 = 2.0673$, $\lambda_2 = -1.63365 + 2.64682i$, $\lambda_3 = -1.63365 - 2.64682i$ 66
- 4.18 Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$. 67
- 4.19 Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$. 67
- 4.20 Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$. 68

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação estudamos uma família a três parâmetros de equações diferenciais quadráticas no espaço \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, as equações dinâmicas desta família a três parâmetros são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = ax + by + cz + x^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e a, b e c são parâmetros reais e negativos, ou seja,

$$(a, b, c) \in \mathcal{D} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a < 0, b < 0, c < 0\}.$$

Esta família (1.1) pode ser vista como oriunda de uma família a três parâmetros de equações escalares quadráticas de terceira ordem, da forma

$$x''' - cx'' - bx' - ax - x^2 = 0,$$

através das definições das novas variáveis

$$y = x', \quad z = x''.$$

Usaremos indistintamente os símbolos x' ou \dot{x} para as derivadas da função x com relação à variável t .

A família de equações diferenciais (1.1) possui dois pontos de equilíbrio, denotados por $E_1 = (0, 0, 0)$ e $E_2 = (-a, 0, 0)$, para todos os valores dos parâmetros. Nesta dissertação, realizamos o estudo da estabilidade local dos equilíbrios acima e o estudo das bifurcações de

Hopf genéricas. Aplicamos, posteriormente, estes estudos na análise de um caso particular da família de sistemas (1.1), conhecido como sistema de Lur'e.

Destacamos os seguintes resultados obtidos nesta dissertação.

Considere o conjunto de parâmetros $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, onde

$$\mathcal{D}_1 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc > -a\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc < -a\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / a = a_h = -bc\}.$$

Teorema 1.0.1 *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (1.1). As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_1$, então o ponto de equilíbrio E_1 de (1.1) é hiperbólico e é local e assintoticamente estável;*
2. *Se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_2$, então o ponto de equilíbrio E_1 de (1.1) é hiperbólico e é localmente instável;*
3. *Se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_3$, então o ponto de equilíbrio E_1 de (1.1) é não hiperbólico e é local e assintoticamente estável. Mais precisamente, se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_3$, então (1.1) tem um ponto de Hopf de codimensão 1 em E_1 e para cada $a < a_h$, mas próximo de a_h , existe uma órbita periódica estável próxima do ponto de equilíbrio instável E_1 ;*
4. *O ponto de equilíbrio E_2 é hiperbólico e é localmente instável para todos os valores dos parâmetros em \mathcal{D} .*

Essencialmente, nesta dissertação, fazemos uma demonstração detalhada do Teorema 1.0.1. Para tanto, a dissertação está desenvolvida como se segue: no capítulo 2 são apresentadas as principais definições e resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos seguintes, destacando o estudo da bifurcação de Hopf genérica, o método de projeção e os diagramas de bifurcação da forma normal da bifurcação de Hopf genérica.

No capítulo 3, através da análise linear, concluímos sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio E_1 e E_2 e mostramos que o equilíbrio E_1 pode apresentar bifurcações de Hopf, o mesmo não acontecendo com o equilíbrio E_2 . Um estudo detalhado das bifurcações de Hopf no ponto de equilíbrio E_1 é feito ainda no capítulo 3, através da determinação

analítica das condições de não degenerescência e transversalidade das bifurcações de Hopf. Ainda no capítulo 3, aplicamos os resultados obtidos para (1.1) a um caso particular de grande interesse na literatura: um sistema de tipo Lur'e.

No capítulo 4 apresentamos algumas simulações numéricas para (1.1), baseadas nos resultados analíticos obtidos no capítulo 3.

Nos anexos A e B estão apresentados os resultados da implementação computacional de algoritmos aqui utilizados.

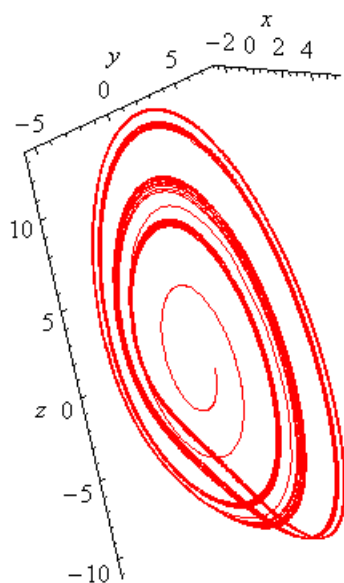


Figura 1.1: Retrato de fase do sistema (1.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.6, 0.8, -0.6)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana são: $\lambda_1 = -1.64393$, $\lambda_2 = 0.221965 - 1.8975i$, $\lambda_3 = 0.221965 + 1.8975i$.

Cabe aqui, ainda, alguns comentários sobre (1.1). Apesar de sua aparente simplicidade, as equações (1.1) apresentam um comportamento dinâmico muito rico, desde soluções estacionárias às soluções periódicas e mesmo oscilações caóticas. Esse último comportamento pode ser vislumbrado na Figura (1.1), a qual apresenta um dos possíveis “atratores caóticos” do sistema (1.1) para os seguintes valores dos parâmetros: $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$.

Outro ponto a se destacar é o seguinte: inicialmente nosso plano era estudar não só as bifurcações de Hopf genéricas de (1.1), como também suas bifurcações de Hopf degeneradas, baseado no artigo [11]. Neste artigo, os autores apresentam condições para a existência destas bifurcações. No entanto, através de nosso estudo, concluimos que o referido artigo está errado, não sendo possível a existência de bifurcações de Hopf degeneradas para o sistema (1.1).

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Considerações iniciais

A bifurcação de Hopf é uma interessante e útil ferramenta em matemática aplicada quando se trata do estudo do surgimento/desaparecimento de uma órbita periódica. O teorema clássico de Hopf fornece condições suficientes para a ocorrência desta bifurcação e ainda fornece um algoritmo para o cálculo da estabilidade do equilíbrio correspondente, bem como da estabilidade da órbita periódica bifurcante.

Existem várias vertentes mais ou menos distintas para o estudo das bifurcações de Hopf genéricas e degeneradas [2], as quais são:

1. O método das formas normais de Poincaré–Birkhoff;
2. O método das constantes de Lyapunov;
3. O método da função sucessão;
4. O método de *averaging*;
5. O método do balanço harmônico;
6. O método de Lyapunov–Schmidt;
7. O método da projeção.

Neste capítulo, o objetivo principal é estudar as bifurcações de Hopf. Primeiramente trataremos de sistemas bidimensionais onde o conceito de bifurcação de Hopf é bastante conhecido para, posteriormente, estudá-lo em um contexto mais amplo, para sistemas

n -dimensionais. As definições e o método de projeção que apresentaremos no corrente capítulo foram baseados no livro de Kuznetsov [4] e nos artigos [6, 7, 8, 9, 10].

Além do estudo das bifurcações de Hopf, anunciaremos as principais definições que serão utilizadas no decorrer do texto.

Utilizaremos a terminologia *suave* para nos referirmos às funções onde a classe de diferenciabilidade é suficientemente grande, ou seja, $f \in C^n$ com n suficientemente grande. Quando acharmos necessário explicitar a classe de diferenciabilidade faremos menção a respeito.

A notação $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^n)$ representará uma função *suave* cuja expansão de Taylor em \mathbf{x} inicia-se com os termos de ordem n , ou superiores.

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, vetores que representam as variáveis de estado e parâmetros. Assumimos que f seja de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Suponha que (2.1) tenha um ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = e_0$ quando $\mu = \mu_0$ e, denotando a variável $\mathbf{x} - e_0$ também por \mathbf{x} , escrevemos

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mu_0).$$

Seguem algumas definições que utilizaremos no decorrer deste e dos próximos capítulos.

Definição 2.1.1 *Um sistema dinâmico é uma terna $\{T, S, \varphi^t\}$, onde T é um conjunto de tempo, S é um espaço de estados e $\varphi^t : S \rightarrow S$ é uma família de operadores de evolução parametrizados por $t \in T$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $\varphi^0 = id$, onde id é a função identidade em S , $id(x) = x$, $\forall x \in S$;
2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$, isto é, $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$, $\forall x \in S$ e $\forall t, s \in T$, onde ambos os membros desta equação estejam definidos.

Definição 2.1.2 *A órbita por x_0 é um subconjunto ordenado do espaço de estados S*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x \in S : x = \varphi^t x_0, t \in T\},$$

com a ordem induzida pelo conjunto de tempo T .

Definição 2.1.3 *Um ciclo (ou uma órbita fechada) é uma órbita periódica L_0 , ou seja, uma órbita de não equilíbrio de tal forma que, para cada ponto x_0 , $\varphi^{t+T_0}x_0 = \varphi^t x_0$, para algum $T_0 > 0$, para todo $t \in T$.*

Definição 2.1.4 *Uma órbita fechada isolada no conjunto de todos os ciclos é chamada um ciclo limite.*

Definição 2.1.5 [Estabilidade] *Seja $e_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio de (2.1).*

1. *Um ponto de equilíbrio e_0 é estável se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer solução (órbita) $\mathbf{x} = \varphi(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ satisfazendo $|\varphi(0) - e_0| < \epsilon \Rightarrow |\varphi(t) - e_0| < \delta, \forall t \geq 0$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável.*
2. *Se além das condições do item acima sobre a estabilidade, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = e_0$, para toda solução com $|\varphi(0) - e_0|$, dizemos que e_0 é assintoticamente estável.*

Definição 2.1.6 *Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) é chamado hiperbólico se todos os autovalores de $Df(e_0)$ têm partes reais diferentes de zero, onde $Df(e_0)$ representa a matriz Jacobiana de f no ponto e_0 . Se a parte real de algum autovalor for nula o equilíbrio será dito não-hiperbólico ou degenerado.*

Definição 2.1.7 *Um ponto de equilíbrio hiperbólico $e_0 \in \mathbb{R}^n$ do sistema (2.1), chama-se nó se $Df(e_0)$ possuir n autovalores reais com mesmo sinal. Se este for negativo chamaremos e_0 de nó atrator e se for positivo de nó repulsor.*

Definição 2.1.8 *Um ponto de equilíbrio hiperbólico e_0 do sistema (2.1) é chamado sela se todos os autovalores de $Df(e_0)$ são reais e pelo menos dois deles possuírem sinais opostos. Utilizaremos, então, a notação sela $n-p$, para indicar uma sela com n autovalores negativos e p autovalores positivos.*

Definição 2.1.9 *Por abuso de linguagem, um ponto de equilíbrio hiperbólico e_0 do sistema (2.1) ainda será chamado sela se todos os autovalores de $Df(e_0)$ têm partes reais diferentes de zero e pelo menos dois deles possuírem partes reais com sinais opostos. Utilizaremos, então, a notação sela $n-p$, para indicar uma sela com n autovalores com partes reais negativas e p autovalores com partes reais positivas.*

Definição 2.1.10 Um ponto de equilíbrio (e_0, μ_0) do sistema (2.1) com f suave, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}^m$, é chamado ponto de Hopf se a matriz Jacobiana $Df(e_0, \mu_0)$ possui um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega > 0$, e não admite outros autovalores com partes reais nulas.

Definição 2.1.11 Um ponto de Hopf (e_0, μ_0) é chamado transversal se os autovalores complexos conjugados dependentes do parâmetro μ interceptarem o eixo imaginário com derivadas não nulas quando $\mu = \mu_0$.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais no plano dependendo do parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Para qualquer $\mu \in \mathbb{R}$, o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é equilíbrio desse sistema com a matriz Jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Introduzimos aqui a variável complexa $z = x_1 + ix_2$. Como

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 \pm x_1 (x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 \pm x_2 (x_1^2 + x_2^2),$$

temos

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \mu(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) \pm (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

podemos então reescrever (2.2) na sua forma complexa

$$\dot{z} = (\mu + i)z \pm z|z|^2. \quad (2.3)$$

Usando agora a representação $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta}$$

e, portanto,

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta} (\mu + i \pm \rho^2).$$

Assim, podemos escrever a equação (2.3) em sua forma polar

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu \pm \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Da primeira equação de (2.4) podemos perceber que $\rho = 0$ é um ponto de equilíbrio para qualquer valor de μ (obviamente só consideraremos $\rho \geq 0$). Outro ponto de equilíbrio surgirá para determinados valores de μ , dependendo do sinal do termo cúbico em (2.4). Suponha, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu - \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Então, para $\mu > 0$, $\rho(\mu) = \sqrt{\mu}$ é um ponto de equilíbrio que descreve uma órbita periódica circular percorrida com velocidade constante. Este sistema sempre tem um equilíbrio na origem que é um foco atrator se $\mu < 0$, um foco repulsor para $\mu > 0$ ou um foco atrator “fraco” (um equilíbrio não linear e topologicamente equivalente a um foco atrator), para o valor crítico $\mu = \mu_c = 0$. Para $\mu > 0$, a origem fica isolada por uma órbita fechada (ciclo limite) que é única e atratora. Este ciclo é uma circunferência de raio $\rho(\mu) = \sqrt{\mu}$. Todas as órbitas externas ou internas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quando $t \rightarrow +\infty$. Veja Figura 2.1. Este fenômeno de surgimento/desaparecimento de uma órbita periódica e a mudança de estabilidade do foco a partir de uma perturbação no parâmetro μ é conhecido na literatura como **bifurcação de Andronov–Hopf** ou, simplesmente, **bifurcação de Hopf**. O mesmo sistema de (2.4), porém com sinal oposto nos termos não-lineares,

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu + \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

pode ser analisado da mesma maneira. Teremos uma bifurcação de Andronov–Hopf para $\mu = 0$, mas, ao contrário de (2.5), o ciclo limite, que surgirá para $\mu < 0$, será repulsor. Para valores de $\mu > 0$ a origem é um foco repulsor e o sistema não possui ciclo limite, quando $\mu = \mu_c = 0$ a origem será um foco repulsor “fraco” (não linear) e para $\mu < 0$, um foco atrator. Neste último caso teremos então o ciclo limite repulsor dado por uma órbita fechada cujo traço será uma circunferência centrada na origem de raio $\rho(\mu) = \sqrt{-\mu}$. Todas as órbitas iniciando externa ou internamente ao ciclo, com exceção da origem, tendem a este ciclo quando $t \rightarrow -\infty$. Em ambos os casos acima o ponto $e_0 = (0, 0)$ é um ponto de Hopf para $\mu_0 = 0$.

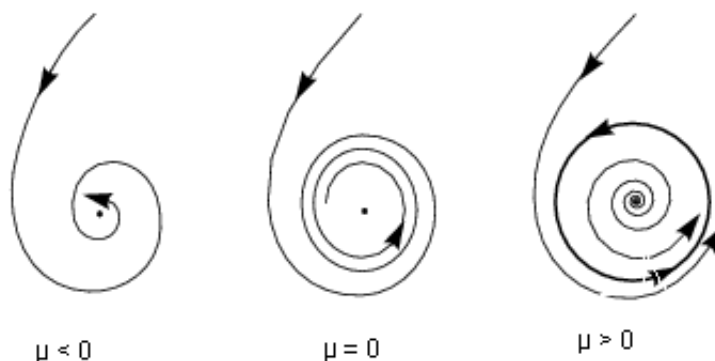


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2.5) ilustrando uma bifurcação de Hopf.

Definição 2.1.12 *Os sistemas (2.2), ou equivalentemente, (2.3) e (2.4), serão denominados **formas normais das bifurcações de Hopf**.*

A seguinte definição será usada na próxima seção, onde estudaremos a bifurcação de Hopf genérica.

Definição 2.1.13 *Dois sistemas*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y}, \zeta), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \zeta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.8)$$

são ditos *localmente topologicamente equivalentes em torno da origem se existir uma aplicação $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto (h_\mu(\mathbf{x}), k(\mu))$, definida em uma vizinhança $V = U_0 \times V_0$ de $(\mathbf{x}, \mu) = (0, 0)$, contida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, satisfazendo:*

1. $k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo definido em V_0 ;
2. $h_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo para cada μ , definido na vizinhança U_0 de $\mathbf{x} = 0$, $h_0(0) = 0$, levando órbitas de (2.7) contidas em U_0 em órbitas de (2.8) em $h_\mu(U_0)$, preservando a direção do tempo.

2.2 Bifurcação de Hopf Genérica

Nesta seção encontraremos condições para que um sistema seja localmente topologicamente equivalente à forma normal da bifurcação de Hopf, que acabamos de definir acima. Este resultado será obtido no Teorema 2.2.1.

Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

que como definido no início do capítulo, representa a forma normal da bifurcação de Hopf cujo sinal dos termos cúbicos é negativo e, conseqüentemente, apresentando uma órbita periódica atratora para $\mu > 0$.

Lema 2.2.1 *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4), \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4)$ representa os termos de ordem 4 e superiores, e depende suavemente de μ , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (2.9).

Demonstração 2.2.1 A prova será dividida em duas partes.

Parte I: Existência e unicidade do ciclo.

Escrevendo (2.10) nas coordenadas polares (ρ, θ) , obtemos

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\mu - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1 + \Psi(\rho, \theta), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $\Phi = \mathcal{O}(|\rho|^4)$ e $\Psi = \mathcal{O}(|\rho|^3)$. Não indicaremos a dependência em μ dessas funções para não complicarmos a notação. Uma órbita de (2.11), partindo de $(\rho, \theta) = (\rho_0, 0)$, tem a seguinte representação (veja Figura 2.2): $\rho = \rho(\theta; \rho_0)$, $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$ com ρ satisfazendo a equação

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho(\mu - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta)}{1 + \Psi(\rho, \theta)} = \rho(\mu - \rho^2) + R(\rho, \theta), \quad (2.12)$$

onde $R = \mathcal{O}(|\rho|^4)$. Note que a transformação de (2.11) para (2.12) é equivalente a uma reparametrização do tempo com $\dot{\theta} = 1$, implicando que o tempo de retorno para o semi-eixo $\theta = 0$ é o mesmo para todas as órbitas que partem desse eixo com $\rho_0 > 0$. Como $\rho(\theta; 0) \equiv 0$, podemos escrever a expansão de Taylor para $\rho(\theta; \rho_0)$ da seguinte forma

$$\rho = u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \mathcal{O}(|\rho_0|^4). \quad (2.13)$$

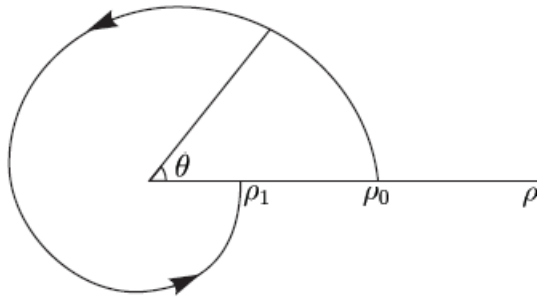


Figura 2.2: Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.

Substituindo (2.13) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots) = \\ & = (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)[\mu - (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^2] + R(\rho, \theta) \\ & = u_1(\theta)\rho_0\mu + u_2(\theta)\rho_0^2\mu + u_3(\theta)\rho_0^3\mu - u_1^3(\theta)\rho_0^3 + \dots + R(\rho, \theta), \end{aligned}$$

de onde vem as seguintes equações diferenciais lineares resultantes das correspondentes potências de ρ_0

$$\frac{du_1}{d\theta} = u_1\mu, \quad \frac{du_2}{d\theta} = u_2\mu, \quad \frac{du_3}{d\theta} = u_3\mu - u_1^3.$$

Como queremos para $\theta = 0$, $\rho = \rho_0$, estabelecemos as condições iniciais $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_3(0) = 0$, obtendo assim

$$u_1(\theta) = e^{\mu\theta}, \quad u_2(\theta) \equiv 0, \quad u_3(\theta) = e^{\mu\theta} \frac{1 - e^{2\mu\theta}}{2\mu}.$$

Note que essas expressões são independentes de $R(\rho, \theta)$. Como na expressão de $u_3(2\pi)$ vale a igualdade

$$e^{2\pi\mu} \frac{1 - e^{2(2\pi)\mu}}{2\mu} = \frac{e^{2\pi\mu}}{2\mu} \left[1 - (1 + 2(2\pi)\mu + \frac{(2(2\pi))^2\mu^2}{2!} + \dots) \right] = -e^{2\pi\mu} [2\pi + \mathcal{O}(\mu)],$$

podemos concluir que a transformação de retorno ou de Poincaré

$$\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$$

tem a forma

$$\rho_1 = e^{2\pi\mu}\rho_0 - e^{2\pi\mu}[2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4), \quad (2.14)$$

para todo $R = \mathcal{O}(\rho^4)$. A função (2.14) pode ser facilmente analisada para ρ_0 e $|\mu|$ suficientemente pequenos. Existe uma vizinhança da origem onde essa função tem somente o

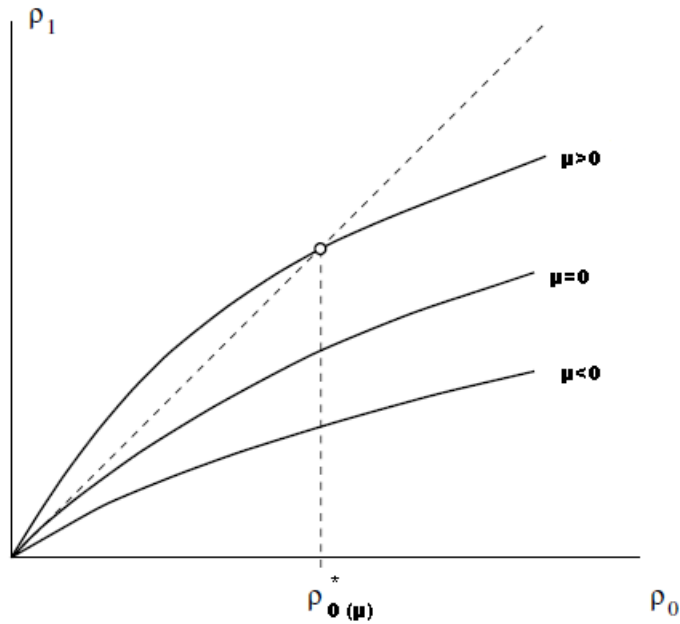


Figura 2.3: Ponto fixo da transformação de Poincaré.

ponto fixo trivial para pequenos valores de $\mu < 0$ e um ponto fixo extra, $\rho_0^* = \sqrt{\mu} + \dots$, para pequenos valores de $\mu > 0$, veja Figura 2.3. Para verificar essa última afirmação, consideremos a função (2.14) escrita na forma

$$\rho_1 = \rho_0 \tilde{S}(\mu, \rho_0), \quad (2.15)$$

onde

$$\tilde{S}(\mu, \rho) = e^{2\pi\mu}(1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3).$$

Teremos, então, a equação dos pontos fixos, para $\rho_0 > 0$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\mu, \rho_0) &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{2\pi\mu}(1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3) &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2 + e^{-2\pi\mu}\mathcal{O}(\rho_0^3) &= e^{-2\pi\mu} \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2 + e^{-2\pi\mu}\mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Seja

$$S(\mu, \rho_0) = 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\mu)]\rho_0^2 + e^{-2\pi\mu}\mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\mu}.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita na função $S(\mu, \rho_0)$, para $(\mu, \rho_0) = (0, 0)$, comprovamos a afirmação. De fato, $S(0, 0) = 0$ e $S_\mu(0, 0) = 2\pi \neq 0$, o que nos permite escrever

μ como função de ρ_0 numa vizinhança de $\rho_0 = 0$ e calcular

$$\mu'(\rho_0) = \frac{-S_{\rho_0}(\rho_0, \mu(\rho_0))}{S_{\mu}(\rho_0, \mu(\rho_0))} = \frac{2(2\pi + \mathcal{O}(\mu))\rho_0 + e^{-2\pi\mu}\mathcal{O}(\rho_0^2)}{(\dots)\rho_0^2 - 2\pi e^{-2\pi\mu}\mathcal{O}(\rho_0^3) + 2\pi e^{-2\pi\mu}}.$$

Portanto, temos que

$$\mu'(0) = 0, \quad \mu''(0) = 2,$$

implicando, pela expansão de Taylor em torno de $\rho = 0$, $\mu(0) = 0$, que

$$\mu(\rho_0) = \rho_0^2 + \dots,$$

que é uma função injetora no domínio $\rho_0 \geq 0$.

A estabilidade dos pontos fixos também é obtida de (2.14). Derivando (2.15) com relação a ρ_0 , obtemos

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_0} = \tilde{S}(\mu, \rho_0) + \rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\mu, \rho_0).$$

Para provarmos a estabilidade de ρ_0^* basta mostrarmos que

$$\frac{d\rho_1(\rho_0^*)}{d\rho_0} < 1.$$

De fato, como $\tilde{S}(\mu, \rho_0) = 1$ para $\rho_0 = \rho_0^*$, $\mu = \mu(\rho_0^*)$, resta vermos que $\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\mu(\rho_0^*), \rho_0^*)$ é negativo. Calculando

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\mu, \rho_0) = \rho_0 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \rho_0}(\mu, \rho_0),$$

obtemos

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\mu, \rho_0) = \rho_0^2 [-2e^{2\pi\mu}[2\pi + \mathcal{O}(\mu)] + \mathcal{O}(\rho_0)],$$

que, para pequenos valores de $\rho_0^* > 0$, $\mu(\rho_0^*) > 0$, satisfaz o esperado.

Levando em conta que o ponto fixo positivo da função corresponde a um ciclo limite do sistema, podemos concluir que o sistema (2.11), ou (2.10), com quaisquer termos $\mathcal{O}(|\rho|^4)$, tem um único (e estável) ciclo limite bifurcando da origem quando $\mu > 0$ como no sistema (2.9). Portanto, em outras palavras, os termos de ordem superior não afetam o surgimento do ciclo limite numa vizinhança de $(x_1, x_2) = (0, 0)$ com $|\mu|$ suficientemente pequeno.

Parte II: Construção dos homeomorfismos.

Estabelecida a existência e unicidade do ciclo limite, indicaremos agora como proceder para se obter os homeomorfismos necessários e concluir a equivalência topológica dos retratos de fase.

Fixemos μ pequeno, mas positivo. Ambos os sistemas (2.9) e (2.10) têm um ciclo limite em alguma vizinhança da origem. Assuma que já tenha sido realizada no sistema (2.10) a

reparametrização do tempo, resultando num tempo de retorno constante 2π , (veja **Parte I**). Além disso, aplicamos um escalonamento linear nas coordenadas do sistema (2.10) de modo que o ponto de intersecção do ciclo e o semi-eixo horizontal seja $x_1 = \sqrt{\mu}$.

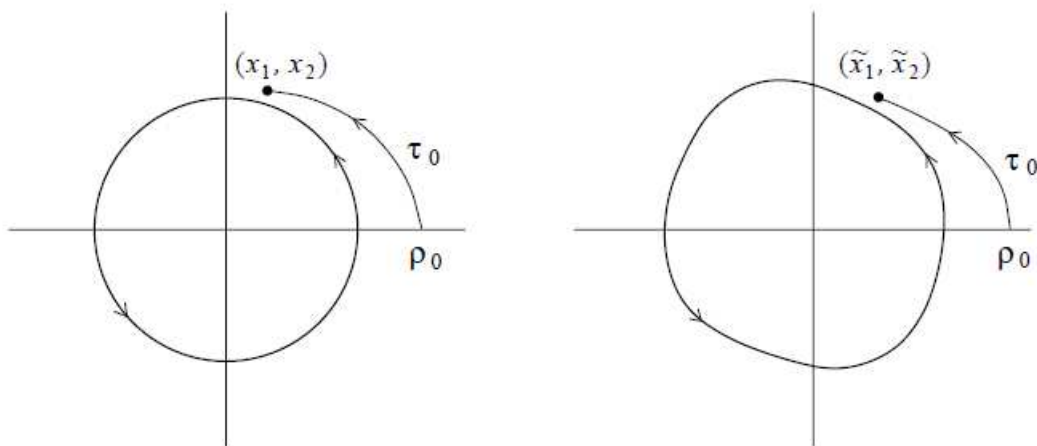


Figura 2.4: Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.

Defina a função $\mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$ do seguinte modo: pegue o ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e encontre valores (ρ_0, τ_0) , onde τ_0 é o tempo mínimo que uma órbita do sistema (2.9) leva para alcançar o ponto \mathbf{x} partindo do semi-eixo horizontal com $\rho = \rho_0$ e construa uma órbita do sistema (2.10) no intervalo $[0; \tau_0]$ partindo desse ponto. Denote o ponto resultante por $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, veja Figura 2.4. Assuma que $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, para $\mathbf{x} = 0$.

A função construída é um homeomorfismo que, para $\mu > 0$, leva órbitas do sistema (2.9), em alguma vizinhança da origem, em órbitas de (2.10), preservando a direção do tempo. O caso $\mu < 0$ pode ser considerado da mesma forma com uma nova mudança de coordenadas. ■

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

com f suave, tendo para $\mu = 0$ o equilíbrio $e_0 = 0$ com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega > 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, como $\lambda = 0$ não é um autovalor da matriz Jacobiana, o sistema tem um único equilíbrio $e_0(\mu)$ em alguma vizinhança da origem para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno. Podemos então, através de uma mudança de coordenadas, levar este equilíbrio para a origem. Portanto, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $e_0 = 0$ é ponto de equilíbrio do sistema para $|\mu|$ suficientemente pequeno.

Então, o sistema pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \quad (2.16)$$

onde f é uma função suave com componentes $f_{1,2}$, tendo expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos de primeira ordem, $f = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|)$. A matriz Jacobiana $A(\mu) = f_{\mathbf{x}}(0, \mu_0)$ possui dois autovalores

$$\lambda_1(\mu) = \lambda(\mu), \lambda_2(\mu) = \bar{\lambda}(\mu),$$

onde

$$\lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu),$$

e a condição para a bifurcação de Hopf é

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega > 0.$$

Seja $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$ autovetor complexo correspondente ao autovalor $\lambda(\mu)$ e dado por

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu),$$

e seja $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$ autovetor da matriz transposta $A^\top(\mu)$ correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}(\mu)$,

$$A^\top(\mu)p(\mu) = \bar{\lambda}(\mu)p(\mu).$$

É sempre possível normalizar p com respeito a q , tal que

$$\langle p(\mu), q(\mu) \rangle = 1,$$

onde $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ é o produto escalar usual em \mathbb{C}^2 . Qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado unicamente, para todo μ pequeno, como

$$\mathbf{x} = zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu),$$

para algum complexo z . Temos, então, a seguinte fórmula explícita para se determinar z

$$z = \langle p(\mu), \mathbf{x} \rangle. \quad (2.17)$$

Para verificar esta fórmula, notemos que

$$\langle p, \mathbf{x} \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle p, \mathbf{x} \rangle = z\langle p, q \rangle + \bar{z}\langle p, \bar{q} \rangle.$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$, basta vermos que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{q} \rangle &= \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda} \right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, pois para $|\mu|$ suficientemente pequeno temos $\omega(\mu) > 0$, concluímos que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Lema 2.2.2 *O sistema (2.16) pode ser escrito, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na forma*

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + g(z, \bar{z}, \mu),$$

onde $g = \mathcal{O}(|z|^2)$ é uma função suave de (z, \bar{z}, μ) , dada por

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \langle p(\mu), F^*(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle.$$

Demonstração 2.2.2 Em (2.16) temos $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu)$, de onde podemos fazer

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2),$$

sendo $A = f_{\mathbf{x}}(0, \mu_0)$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ representando a expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos quadráticos (no mínimo). Temos, assim, que $f(\mathbf{x}) - A\mathbf{x} = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$, porém, para simplificar a notação tomemos $F^*(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$. Assim, de (2.17) temos que a variável complexa z satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p(\mu), \dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle p, A\mathbf{x} + F^*(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle p, A\mathbf{x} \rangle + \langle p, F^*(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda} \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\ &= \lambda(\mu)z + \langle p(\mu), F^*(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle, \end{aligned}$$

(2.18)

obtendo, então, a forma (2.18), como queríamos. ■

Escrevendo g em série de Taylor nas duas variáveis complexas (z e \bar{z}), temos

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\mu) z^k \bar{z}^l,$$

onde

$$g_{kl}(\mu) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\mu), f(zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \mu) \rangle \Big|_{z=0},$$

para $k+l \geq 2, k, l = 0, 1, \dots$

Suponha que, para $\mu = 0$, a função $f(x, \mu)$ em (2.16) seja representada na forma

$$f(\mathbf{x}, 0) = A\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{24}D(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{120}E(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^6), \quad (2.19)$$

onde $A = f_{\mathbf{x}}(0, \mu_0)$ e $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ e $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ são funções multilineares simétricas de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas, temos

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k, & (2.20) \\ C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l, \\ D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) &= \sum_{j,k,l,m=1}^2 \frac{\partial^4 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_m} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l \mathbf{u}_m, \\ E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{j,k,l,m,p=1}^2 \frac{\partial^5 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_m \partial \eta_p} \Big|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l \mathbf{u}_m \mathbf{v}_p, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

onde $q = q(0), p = p(0)$, e os coeficientes de Taylor $g_{k,l}, k+l=2$, dos termos quadráticos em $g(z, \bar{z}, 0)$ podem ser expressos, agora, pelas fórmulas

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

Cálculos similares com C, D e E nos dão

$$g_{30} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{12} = \langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$\begin{aligned}
g_{40} &= \langle p, D(q, q, q, q) \rangle, \quad g_{31} = \langle p, D(q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{22} = \langle p, D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\
g_{13} &= \langle p, D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{04} = \langle p, D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\
g_{50} &= \langle p, E(q, q, q, q) \rangle, \quad g_{41} = \langle p, E(q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{32} = \langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\
g_{23} &= \langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{14} = \langle p, E(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{05} = \langle p, E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle.
\end{aligned}$$

Lema 2.2.3 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \quad (2.21)$$

onde $\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^3).$$

Demonstração 2.2.3 A mudança de variável inversa é dada pela expressão

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\bar{z} \dot{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} + \frac{1}{2} (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^3).
\end{aligned}$$

Escolhendo, então

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos os termos quadráticos de (2.2.3). Essas substituições são sempre possíveis, pois, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega$ com $\omega > 0$. ■

Lema 2.2.4 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (2.22)$$

onde $\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $c_1 = c_1(\mu)$.

Demonstração 2.2.4 A transformação inversa é

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\bar{z}^2\dot{z} + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2}\right)z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2}\right)z^2\bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12}\right)z\bar{z}^2 + \\ &\quad \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2}\right)\bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})w^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})w^2\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})w\bar{w}^2 + \\ &\quad \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03})\bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4). \end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos todos os termos cúbicos com exceção do termo $\omega^2\bar{w}$, que será tratado separadamente. As substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero, para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $\omega^2\bar{w}$ seria escolher

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isso é possível para $\mu \neq 0$ pequeno, mas quando $\mu = 0$ o denominador se anula, pois $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega - i\omega = 0$. Para obtermos então uma transformação que dependa suavemente de μ , escolhemos $h_{21} = 0$, no que resulta

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}.$$

■

O termo $w^2\bar{w}$ é chamado de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico $z^2\bar{z}$ na equação (2.22).

Lema 2.2.5 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{40}}{24} z^4 + \frac{g_{31}}{6} z^3 \bar{z} + \frac{g_{22}}{4} z^2 \bar{z}^2 + \frac{g_{13}}{6} z \bar{z}^3 + \frac{g_{04}}{24} \bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5), \quad (2.23)$$

onde $\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$ e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{40}}{24} w^4 + \frac{h_{31}}{6} w^3 \bar{w} + \frac{h_{22}}{4} w^2 \bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6} w \bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24} \bar{w}^4,$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos de quarta ordem

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^5).$$

Demonstração 2.2.5 A transformada inversa é

$$w = z - \frac{h_{40}}{24} z^4 - \frac{h_{31}}{6} z^3 \bar{z} - \frac{h_{22}}{4} z^2 \bar{z}^2 - \frac{h_{13}}{6} z \bar{z}^3 - \frac{h_{04}}{24} \bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{40}}{6} z^3 \dot{z} - \frac{h_{31}}{6} (3z^2 \bar{z} \dot{z} + z^3 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{22}}{4} (2z \bar{z}^2 \dot{z} + 2z^2 \bar{z} \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{13}}{6} (\bar{z}^3 \dot{z} + 3z \bar{z}^2 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{04}}{6} \bar{z}^3 \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{40}}{24} - \frac{h_{40}}{6} \lambda \right) z^4 + \left(\frac{g_{31}}{6} - \frac{h_{31}}{2} \lambda - \frac{h_{31}}{6} \bar{\lambda} \right) z^3 \bar{z} + \left(\frac{g_{22}}{4} - \frac{h_{22}}{2} \lambda - \frac{h_{22}}{2} \bar{\lambda} \right) z^2 \bar{z}^2 \\ &\quad + \left(\frac{g_{13}}{6} - \frac{h_{13}}{6} \lambda - \frac{h_{13}}{6} \bar{\lambda} \right) z \bar{z}^3 + \left(\frac{g_{04}}{24} - \frac{h_{04}}{6} \bar{\lambda} \right) \bar{z}^4 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{24} (g_{40} - 3\lambda h_{40}) w^4 + \frac{1}{6} (g_{31} - (2\lambda + \bar{\lambda}) h_{31}) w^3 \bar{w} + \frac{1}{4} (g_{22} - (\lambda + 2\bar{\lambda}) h_{22}) w^2 \bar{w}^2 + \\ &\quad \frac{1}{6} (g_{13} - 3\bar{\lambda} h_{13}) w \bar{w}^3 + \frac{1}{24} (g_{04} - (4\bar{\lambda} - \lambda) h_{04}) \bar{w}^4 + \mathcal{O}(|w|^5). \end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$h_{40} = \frac{g_{40}}{3\lambda}, h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda + \bar{\lambda}}, h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\bar{\lambda}},$$

$$h_{13} = \frac{g_{13}}{3\bar{\lambda}}, h_{04} = \frac{g_{04}}{4\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos assim, todos os termos de ordem quatro. Temos que estas substituições são sempre possíveis uma vez que, para $|\mu|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega$, com $\omega > 0$. ■

Lema 2.2.6 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 5} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^6), \quad (2.24)$$

onde $\lambda = \lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\mu)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3 + \frac{h_{40}}{24} w^4 + \frac{h_{31}}{6} w^3 \bar{w} \\ + \frac{h_{22}}{4} w^2 \bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6} w \bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24} \bar{w}^4 + \frac{h_{50}}{120} w^5 + \frac{h_{41}}{24} w^4 \bar{w} + \frac{h_{23}}{12} w^2 \bar{w}^3 + \frac{h_{14}}{24} w \bar{w}^4 + \frac{h_{05}}{120} \bar{w}^5,$$

para $|\mu|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico e um termo de ordem 5

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.25)$$

com $c_1 = c_1(\mu)$ e $c_2 = c_2(\mu)$.

Demonstração 2.2.6 Obviamente a suposição das transformações definidas nos lemas anteriores nos levam a este resultado. As transformações

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2, \\ z = w + \frac{h_{40}}{24} w^4 + \frac{h_{31}}{6} w^3 \bar{w} + \frac{h_{22}}{4} w^2 \bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6} w \bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24} \bar{w}^4, \quad (2.26)$$

com

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda},$$

$$h_{40} = \frac{g_{40}}{3\lambda}, h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda + \lambda}, h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\lambda}, h_{13} = \frac{g_{13}}{3\lambda}, h_{04} = \frac{g_{04}}{4\lambda - \lambda},$$

definidas nos Lemas 2.2.3 e 2.2.5 anulam os respectivos termos, mas também alteram outros termos. Os coeficientes $g_{21}/2$ e $g_{32}/12$ dos termos $z^2 \bar{z}$ e $z^3 \bar{z}^2$, respectivamente, na equação (2.24) foram modificados pelas transformações de (2.26). Os termos de ordem 6 ou maiores, afetam somente $\mathcal{O}(|w|^6)$ e podem ser truncados. ■

Seguem então os lemas.

Lema 2.2.7 *O coeficiente $c_1(\mu)$ da equação (2.25), para $\mu = 0$, é dado por*

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega} \left(g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.27)$$

Demonstração 2.2.7 Diferenciando a primeira expressão de (2.26), obtemos

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}}.$$

Substituindo \dot{w} e seu complexo conjugado $\dot{\bar{w}}$, usando (2.25), obtemos

$$\dot{z} = \lambda w + \lambda h_{20}w^2 + (\lambda + \bar{\lambda})h_{11}w\bar{w} + \bar{\lambda}h_{02}\bar{w}^2 + c_1w^2\bar{w} + \dots$$

Por outro lado, na equação (2.24),

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{30}z^3 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}g_{12}z\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{03}\bar{z}^3 + \dots,$$

se substituirmos z e \bar{z} , dados pela primeira expressão de (2.26), escrevemos apenas os termos que nos interessam, temos

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \lambda w + \frac{1}{2}(\lambda h_{20} + g_{20})w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(\lambda h_{02} + g_{02})\bar{w}^2 + \\ & \left(g_{20}h_{11} + g_{11}\left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11}\right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right)w^2\bar{w} + \dots \end{aligned}$$

Comparando, então os coeficientes do termo $w^2\bar{w}$ nas duas equações obtidas, utilizando os valores encontrados para h_{20} , h_{11} e h_{02} ,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda} - \lambda,$$

temos

$$\begin{aligned} c_1 &= g_{20}\frac{g_{11}}{\lambda} + g_{11}\left(\frac{g_{20}}{2\lambda} + \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda}\right) + \frac{g_{02}\bar{g}_{02}}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned}$$

Essa fórmula nos dá a dependência de c_1 em relação a μ , lembrando que λ e g_{ij} são funções suaves do parâmetro. No valor de bifurcação $\mu = 0$, a última equação se reduz a

$$c_1(0) = \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega - i\omega)}{2\omega^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega - i\omega)} + \frac{g_{21}}{2},$$

concluindo, finalmente o resultado

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

■

Lema 2.2.8 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\mu) + i\omega(\mu))w + c_1(\mu)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\text{Re } c_1(0) \neq 0$. Então, a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \quad (2.28)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro e $s = \text{sin}(\text{Re } c_1(0)) = \pm 1$.

Demonstração 2.2.8 Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\mu)t$, que preserva a direção, pois, $\omega(\mu) > 0$, para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{\gamma(\mu) + i\omega(\mu)}{\omega(\mu)}w + \frac{c_1(\mu)}{\omega(\mu)}w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} = (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde

$$\chi = \chi(\mu) = \frac{\gamma(\mu)}{\omega(\mu)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\mu(\chi))}{\omega(\mu(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro, pois

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de μ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau,$$

com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $l_1(\chi) = \text{Re } d_1(\chi) - \chi e_1(\chi)$ é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (2.29)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots \\
\Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2)[(\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots] \\
&= (\chi + i)w + [l_1(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 + \dots \\
&= (\chi + i)w + [Re d_1 - \chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + \dots \\
&= (\chi + i)w + [Re d_1 + i Im d_1]w|w|^2 + \dots \\
&= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \dots .
\end{aligned}$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}},$$

que é possível, pois $Re c_1(0) \neq 0$ e, portanto, $l_1(0) \neq 0$.

A equação toma, então, a forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} + l_1 \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \right|^2 + \dots \\
\Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4) = (\chi + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \\
\text{com } s &= \text{sinal}(l_1(0)) = \text{sinal}(Re c_1(0)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 2.2.1 A função $l_1(\chi)$ é chamada de primeiro coeficiente de Lyapunov.

O que a equação (2.29) nos diz é que o primeiro coeficientes de Lyapunov, para $\chi = 0$, pode ser calculado pela fórmula

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega^2} Re(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21}). \quad (2.30)$$

Observação 2.2.1 O valor de $l_1(0)$ dependerá da normalização dos autovetores q e p , enquanto que seu sinal é invariante pela escolha de q e p , obviamente considerando a normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

Podemos agora resumir os resultados obtidos nos seguintes teoremas.

Teorema 2.2.1 (Teorema da bifurcação de Hopf genérica) Qualquer sistema dinâmico da forma (2.1), onde f é suave, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathbb{R}$, tendo para todo $|\mu|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $e_0 = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \gamma(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

onde $\gamma(0) = 0, \omega(0) = \omega > 0$, satisfazendo:

1. $l_1(0) \neq 0$ (condição de não degenerescência);
2. $\gamma'(0) \neq 0$ (condição de transversalidade),

é local e topologicamente equivalente, em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & -1 \\ 1 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Demonstração do Teorema 2.2.1 Utilizando os Lemas 2.2.3, 2.2.4, 2.2.6, 2.2.7 e 2.2.8, transformamos o sistema (2.1) na equação (2.28) e então pelo Lema 2.2.1, concluímos o resultado. ■

Portanto, o Teorema 2.2.1 nos garante que um sistema em duas dimensões que possui autovalores imaginários puros e satisfaz as condições (1) e (2) desse mesmo teorema, possui uma bifurcação de Hopf.

2.3 Método da projeção

Foi estudada a bifurcação de Hopf em sistemas de duas dimensões, o objetivo agora é obter um método para estudá-la em sistemas de n -dimensões. Tal método baseia-se em transformar o sistema, escrevendo-o em uma base formada pelos seus autovetores. Porém, somente autovetores correspondentes aos autovalores críticos (responsáveis pela bifurcação) são usados para se projetar o sistema e restringi-lo ao caso bidimensional.

Primeiramente faremos um resumo de alguns resultados de Álgebra Linear que serão utilizados nesta seção.

Seja A uma matriz quadrada e λ um autovalor de A com multiplicidade algébrica m , com $v_1, v_2, \dots, v_l, 1 \leq l \leq m$, autovetores linearmente independentes correspondentes a λ . Para cada autovetor v_j , existe uma escolha maximal de vetores $w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_k^{(j)}$, onde $k = k(j) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} Aw_1 &= \lambda w_1, \\ Aw_2 &= \lambda w_2 + w_1, \\ &\dots \\ Aw_k &= \lambda w_k + w_{k-1}. \end{aligned}$$

Note que podemos escolher o vetor $w_1 = w_1^{(j)}$ como sendo o próprio autovetor v_j .

Definição 2.3.1 Os vetores $w_i^{(j)}$, com $i \geq 2$, são chamados autovetores generalizados de A correspondentes ao autovalor λ .

Os autovetores generalizados $w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_k^{(j)}$, relativos a um autovalor λ são sempre linearmente independentes e o subespaço

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{x} = \alpha_1 w_1^{(j)} + \alpha_2 w_2^{(j)} + \dots + \alpha_k w_k^{(j)}, \alpha_i \in \mathbb{C}\}$$

é A -invariante.

O estudo das formas normais de Jordan nos garante que o espaço \mathbb{C}^n pode ser decomposto em subespaços A -invariantes correspondentes aos autovalores de A e gerados pelos respectivos autovetores e autovetores generalizados. Esses subespaços são chamados de **autoespaços generalizados** de A . Se a matriz A é real, esses subespaços A -invariantes do \mathbb{R}^n serão gerados pelos autovetores e autovetores generalizados de A , correspondentes aos autovalores reais e às partes reais e imaginárias dos autovalores complexos com, por exemplo, parte imaginária positiva. Ver Kuznetsov [4] e Pontryagin [5].

Seja e_0 um ponto de equilíbrio não-hiperbólico de

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.31)$$

onde $f(\mathbf{x}, 0)$, dada por (2.19) é uma função suave, $A = f_{\mathbf{x}}(0, \mu_0)$ corresponde à parte linear do sistema e possui um par de autovalores imaginários puros $\lambda = i\omega$ e $\bar{\lambda} = -i\omega, \omega > 0$ e não admite outro autovalor com parte real nula. Seja $q \in \mathbb{C}^n$ o autovetor correspondente à λ . Então

$$A(\mu_0)q(\mu_0) = i\omega q(\mu_0), \quad A(\mu_0)\bar{q}(\mu_0) = -i\omega\bar{q}(\mu_0).$$

Introduzindo agora o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}$ com a propriedade

$$A^\top(\mu_0)p(\mu_0) = -i\omega p(\mu_0), \quad A^\top(\mu_0)\bar{p}(\mu_0) = i\omega\bar{p}(\mu_0),$$

e satisfazendo à normalização

$$\langle p(\mu_0), q(\mu_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(\mu_0) q_i(\mu_0) = 1,$$

onde $A^\top(\mu_0)$ é a matriz transposta de $A(\mu_0)$ e $\langle p(\mu_0), q(\mu_0) \rangle$ é o produto escalar padrão em \mathbb{C}^n .

Considere o autoespaço real T^c , correspondente a λ e $\bar{\lambda}$. T^c tem dimensão dois e é gerado por $\{Re\ q, Im\ q\}$. O autoespaço real generalizado T^{su} , corresponde a todos os outros autovalores de A , tem dimensão $n-2$.

Sempre podemos decompor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em

$$\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y}_{su},$$

onde $z \in \mathbb{C}$, $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ e $\mathbf{y}_{su} \in T^{su}$, uma vez que $T^{su} \oplus T^c = \mathbb{R}^n$.

Lema 2.3.1 *Seja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{y} \in T^{su}$ se, e somente se, $\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$.*

Demonstração 2.3.1 Parte I ($\mathbf{y} \in T^{su} \Rightarrow \langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$).

Sejam $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ os autovalores reais de A e $\eta_1, \bar{\eta}_1; \eta_2, \bar{\eta}_2; \dots; \eta_k, \bar{\eta}_k$, os autovalores complexos (não reais) de A , diferentes de λ e $\bar{\lambda}$.

Seja T_{ν_i} o autoespaço generalizado correspondente ao autovalor ν_i e $T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ o autoespaço real generalizado correspondente aos autovalores $\eta_j, \bar{\eta}_j$.

Temos, então, que

$$T^{su} = T_{\nu_1} \oplus T_{\nu_2} \oplus \dots \oplus T_{\nu_l} \oplus T_{\eta_1, \bar{\eta}_1} \oplus T_{\eta_2, \bar{\eta}_2} \oplus \dots \oplus T_{\eta_k, \bar{\eta}_k}.$$

Como T_{ν_i} são espaços generalizados, é fato que para cada i existe um $N_{\nu_i} \in \mathbb{N}$, tal que, se $\mathbf{y} \in T_{\nu_i}$, então $(A - \nu_i I_n)^{N_{\nu_i}} \mathbf{y} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, (A - \nu_i I_n)^{N_{\nu_i}} \mathbf{y} \rangle = \langle (A^\top - \bar{\nu}_i I_n)^{N_{\nu_i}} p, \mathbf{y} \rangle = \langle (\bar{\lambda} - \bar{\nu}_i)^{N_{\nu_i}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= (\lambda - \nu_i)^{N_{\nu_i}} \langle p, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

e, como $\lambda \neq \nu_i$, temos que

$$\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Do mesmo modo, como $T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ são espaços generalizados, para cada j existe um $N_{\eta_j} \in \mathbb{N}$, tal que, se $\mathbf{y} \in T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$, então $(A - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, (A - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (A^\top - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} p, (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (A^\top - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A^\top - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (\bar{\lambda} - \eta_j)^{N_{\eta_j}} (\bar{\lambda} - \eta_j)^{N_{\eta_j}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= (\lambda - \bar{\eta}_j)^{N_{\eta_j}} (\lambda - \eta_j)^{N_{\eta_j}} \langle p, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

e como $\lambda \neq \eta_j$ e $\lambda \neq \bar{\eta}_j$, temos que

$$\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Portanto, para qualquer $\mathbf{y} \in T^{su}$, como podemos escrever

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^l \mathbf{y}_{\nu_i} + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}_{\eta_j},$$

com $\mathbf{y}_{\nu_i} \in T_{\nu_i}$ para $i = 1, \dots, l$ e $\mathbf{y}_{\eta_j} \in T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ para $j = 1, \dots, k$, podemos concluir então que

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{y} \rangle &= \langle p, \mathbf{y}_{\nu_1} + \dots + \mathbf{y}_{\nu_l} + \mathbf{y}_{\eta_1} + \dots + \mathbf{y}_{\eta_k} \rangle \\ &= \langle p, \mathbf{y}_{\nu_1} \rangle + \dots + \langle p, \mathbf{y}_{\nu_l} \rangle + \langle p, \mathbf{y}_{\eta_1} \rangle + \dots + \langle p, \mathbf{y}_{\eta_k} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Parte II ($\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{y} \in T^{su}$).

Seja \mathbf{y} qualquer, tal que $\mathbf{y} \in T^{su} \oplus T^c \subset \mathbb{R}^n$. Portanto, podemos escrever

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{su} + \mathbf{y}_c,$$

com $\mathbf{y}_{su} \in T^{su}$ e $\mathbf{y}_c \in T^c$. Como T^c é gerado por q, \bar{q} , mas $\mathbf{y}_c \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{y}_c = \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q},$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$, concluímos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{su} + \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q}. \quad (2.32)$$

Queremos mostrar aqui $\mathbf{y}_c = 0$, será mostrado que $\alpha = 0$.

Da hipótese, temos

$$0 = \langle p, \mathbf{y} \rangle = \langle p, \mathbf{y}_{su} + \mathbf{y}_c \rangle = \langle p, \mathbf{y}_{su} \rangle + \langle p, \mathbf{y}_c \rangle.$$

No início do Lema 2.3.1 (**Parte I**), temos que $\langle p, \mathbf{y}_{su} \rangle = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{y}_c \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle p, \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q} \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \langle p, q \rangle + \bar{\alpha} \langle p, \bar{q} \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0, \end{aligned}$$

pois $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

de onde

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Como λ não é real, temos $\lambda \neq \bar{\lambda}$ e, portanto, $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. ■

Usando o lema anterior, podemos agora explicitar z e \mathbf{y} com relação a \mathbf{x} . Sendo

$$\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

com

$$zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c \text{ e } \mathbf{y} \in T^{su},$$

vale que

$$\langle p, \mathbf{x} \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, \mathbf{y} \rangle.$$

Como $\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$, pois $\mathbf{y} \in T^{su}$ (Lema 2.3.1),

$$\langle p, \mathbf{x} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

e lembrando que $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$, como visto na decomposição do Lema 2.3.1 (**Parte II**), concluímos que

$$\begin{cases} z &= \langle p, \mathbf{x} \rangle, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \langle p, \mathbf{x} \rangle q - \langle \bar{p}, \mathbf{x} \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Teorema 2.3.1 (Teorema da Variedade Central) *Localmente, existe um conjunto invariante $W^c(0)$ de (2.31) que é tangente a T^c em $e_0 = 0$. Tal conjunto é o gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas.*

Se ψ^t denota o fluxo associado a (2.31), então existe uma vizinhança U de $e_0 = 0$, tal que se $\psi^t \mathbf{x} \in U$, para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\psi^t \mathbf{x} \rightarrow W^c(0)$ para $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Ver Kuznetsov [4].

Definição 2.3.2 W^c é chamado de variedade central do ponto de equilíbrio e_0 .

Considere uma variedade central W^c que tenha a mesma classe de diferenciabilidade (finita) que f (se $f \in C^k$ para algum k finito, W^c é também uma variedade de classe C^k) em uma vizinhança U de e_0 . Contudo, quando $k \rightarrow \infty$, a vizinhança U pode diminuir, podendo resultar na não-existência de uma variedade W^c de classe C^∞ , para algum sistema C^∞ .

Assim, o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{z} &= Bz + g(z, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= C\mathbf{y} + h(z, \mathbf{y}), \end{cases} \quad (2.34)$$

onde $z \in T^c$, $\mathbf{y} \in T^{su}$, B é uma matriz 2×2 formada pelos autovalores com partes reais nulas e C é uma matriz $(n-2) \times (n-2)$ formada pelos autovalores com partes reais não nulas. As funções g e h têm a expansão de Taylor começando com os termos quadráticos.

A variedade central W^c do sistema (2.34) pode ser localmente representada como um gráfico de uma função suave

$$W^c = \{(z, \bar{z}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = V(z, \bar{z})\}.$$

Veja Figura 2.5. Aqui, $V : T^c \rightarrow T^{su}$, e devido à propriedade de tangência de W^c , $V(z, \bar{z}) = \mathcal{O}(|z|^2)$.

Qualquer vetor $\mathbf{z} \in T^c$ pode ser representado como $\mathbf{z} = wq + \bar{w}\bar{q}$, onde $w = \langle p, \mathbf{z} \rangle \in \mathbb{C}$. A variedade central bidimensional pode ser parametrizada por w, \bar{w} por meio de uma imersão da forma $\mathbf{x} = H(w, \bar{w})$, onde $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem sua expansão de Taylor da forma

$$H(w, \bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{2 \leq j+k \leq 5} \frac{1}{j!k!} h_{jk} w^j \bar{w}^k + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.35)$$

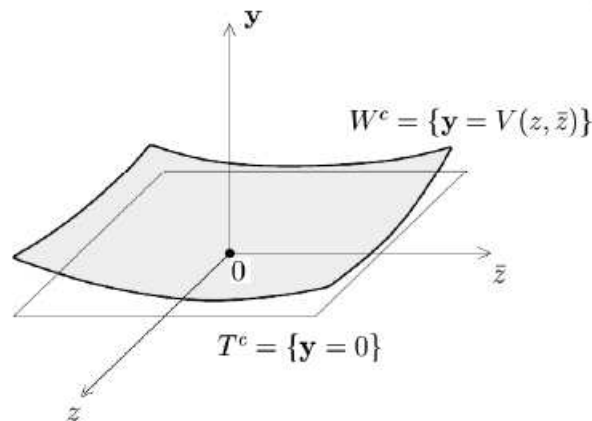


Figura 2.5: Variedade central como um gráfico de $\mathbf{y} = V(z, \bar{z})$.

com $h_{jk} \in \mathbb{C}^n$ e $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$. Substituindo (2.35) em (2.31), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' = f(H(w, \bar{w})), \quad (2.36)$$

onde f é dada pela expansão (2.19). De acordo com a fórmula (2.25), temos que o campo restrito à variedade central pode ser escrito na forma

$$w' = i\omega w + \frac{1}{2}g_{21}w|w|^2 + \frac{1}{12}g_{32}w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.37)$$

com $g_{jk} \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, o que estamos fazendo é projetar o campo de vetores sobre a variedade central. Assim, sobre a variedade central, a equação diferencial se comporta como no plano.

Temos

$$\begin{aligned} H_w &= q + h_{20}w + h_{11}\bar{w} + \frac{1}{2}h_{30}w^2 + h_{21}w\bar{w} + \frac{1}{2}h_{12}\bar{w}^2 + \frac{1}{6}h_{40}w^3 + \frac{1}{2}\bar{h}_{31}w^2\bar{w} + \frac{1}{2}h_{22}w\bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}h_{13}\bar{w}^3 + \frac{1}{4}h_{32}w^2\bar{w}^2 + \dots, \\ H_{\bar{w}} &= \bar{q} + h_{11}w + h_{02}\bar{w} + h_{12}w\bar{w} + \frac{1}{2}h_{21}w^2 + \frac{1}{2}h_{03}\bar{w}^2 + \frac{1}{2}h_{13}w\bar{w}^2 + \frac{1}{2}h_{22}w^2\bar{w} + \frac{1}{6}h_{31}w^3 + \\ &\quad + \frac{1}{6}h_{04}\bar{w}^3 + \frac{1}{6}h_{32}w^3\bar{w} + \dots \end{aligned}$$

Aplicando $H_w, H_{\bar{w}}, w', \bar{w}'$ em (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' &= qi\omega w - \bar{q}i\omega\bar{w} + h_{20}i\omega w^2 - h_{02}i\omega\bar{w}^2 + \frac{1}{2}h_{30}i\omega w^3 + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}qg_{21} + \frac{1}{2}h_{21}i\omega\right)w^2\bar{w} + \left(\frac{1}{2}\bar{q}\bar{g}_{21} - \frac{1}{2}h_{12}i\omega\right)w\bar{w}^2 - \frac{1}{2}h_{03}i\omega\bar{w}^3 + \frac{1}{6}h_{40}i\omega w^4 + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}g_{21}h_{20} + \frac{1}{3}h_{31}i\omega\right)w^3\bar{w} + \left(\frac{1}{2}g_{21}h_{11} + \frac{1}{2}\bar{g}_{21}h_{11}\right)w^2\bar{w}^2 + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}h_{02}\bar{g}_{21} - \frac{1}{3}h_{13}i\omega\right)w\bar{w}^3 - \frac{1}{6}h_{04}i\omega\bar{w}^4 + \left(\frac{1}{12}qg_{32} + \frac{1}{2}g_{21}h_{21} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12}h_{32}i\omega + \frac{1}{4}h_{21}\bar{g}_{21}\right)w^3\bar{w}^2 + \dots \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(H(w, \bar{w})) &= A(q)w + A(\bar{q})\bar{w} + w^2\left(\frac{1}{2}B(q, q) + \frac{1}{2}A(h_{20})\right) + \bar{w}^2\left(\frac{1}{2}B(\bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2}A(h_{02})\right) + \\ &\quad w\bar{w}\left(B(q, \bar{q}) + A(h_{11})\right) + w^3\left(\frac{1}{6}C(q, q, q) + \frac{1}{2}B(h_{20}, q) + \frac{1}{6}A(h_{30})\right) + w^2\bar{w}\left(\frac{1}{2}C(\bar{q}, q, q) + \right. \\ &\quad \left. B(h_{11}, q) + \frac{1}{2}B(\bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{2}A(h_{21})\right) + w\bar{w}^2\left(\frac{1}{2}C(q, \bar{q}, \bar{q}) + B(h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{2}B(q, h_{02}) + \frac{1}{2}A(h_{12})\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{6} A(h_{03}) \right) + w^4 \left(\frac{1}{24} D(q, q, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{20}, q, q) + \frac{1}{6} B(h_{30}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{8} B(h_{20}, q, q) + \frac{1}{24} A(h_{40}) \right) + w^3 \bar{w} \left(\frac{1}{6} D(\bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, q, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} B(h_{21}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{6} A(h_{31}) \right) + w^2 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, q, q) + C(\bar{q}, h_{11}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} B(h_{12}, q) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{11}) + \frac{1}{4} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{4} B(h_{02}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(\bar{q}, h_{21}) + \frac{1}{4} A(h_{22}) \right) + \\
& \bar{w}^4 \left(\frac{1}{24} D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(h_{03}, \bar{q}) + \frac{1}{8} B(h_{02}, h_{02}) + \frac{1}{24} A(h_{04}) \right) + \\
& w \bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(q, h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(q, h_{03}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, h_{11}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{6} A(h_{13}) \right) + w^3 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{12} E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{12} D(h_{02}, q, q, q) + \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} C(h_{12}, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{11}, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{21}, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + \right. \\
& \left. \frac{1}{4} B(h_{22}, q) + \frac{1}{4} B(h_{12}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{21}) + \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{30}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{31}) + \frac{1}{12} A(h_{32}) \right).
\end{aligned}$$

Aplicando $H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}'$ e $f(H(w, \bar{w}))$ em (2.36), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} qi\omega = A(q), \\ \bar{q}i\omega = -A(\bar{q}), \\ h_{20} = (2i\omega I_n - A)^{-1} B(q, q), \\ h_{11} = -A^{-1}(B(q, \bar{q})), \\ h_{02} = (-2i\omega I_n - A)^{-1} B(\bar{q}, \bar{q}), \\ h_{30} = (3i\omega I_n - A)^{-1} (C(q, q, q) + 3B(h_{20}, q)), \\ h_{03} = (-3i\omega I_n - A)^{-1} (C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 3B(h_{02}, \bar{q})), \end{array} \right. \quad (2.38)$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Obtemos um sistema singular para o termo h_{21}

$$(i\omega I_n - A)h_{21} = C(q, q, \bar{q}) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}), \quad (2.39)$$

que possui solução se, e somente se,

$$\langle p, C(q, q, \bar{q}) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = 0.$$

Sendo assim,

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle,$$

onde h_{11} e h_{20} são dados por (2.38).

O primeiro coeficiente de Lyapunov, conforme equação (2.29), é dado por

$$l_1 = \frac{Re\ c_1(0)}{\omega} = \frac{1}{2\omega} Re\ g_{21},$$

ou seja,

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} Re[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle + 2\langle p, B(h_{11}, q) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle]. \quad (2.40)$$

Podemos encontrar o valor de h_{21} resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega I_n - A & q \\ \bar{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(q, q, \bar{q}) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

tal que $\langle p, h_{21} \rangle = 0$.

Lema 2.3.2 *O sistema (2.41) é não singular e se (ϑ, r) é solução, tal que $\langle p, \vartheta \rangle = 0$, ϑ é solução de (2.39).*

Demonstração 2.3.2 Escrevamos $\mathbb{R}^n = T^c \oplus T^{su}$, onde T^c e T^{su} são, respectivamente, autoespaço generalizado de A correspondente aos autovalores com parte real nula e autovalores com parte real não nula, ambos invariantes por A . Pelo Lema 2.3.1, temos que $\vartheta \in T^{su}$ se, e somente se, $\langle p, \vartheta \rangle = 0$.

Defina

$$v = C(q, q, \bar{q}) - G_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}).$$

Seja (ϑ, r) a solução da equação obtida a partir de (2.41). Equivalentemente,

$$\begin{aligned} (i\omega I_n - A)\vartheta + r q &= 0, \\ \langle p, \vartheta \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Da segunda equação de (2.42) segue que $\vartheta \in T^{su}$, e conseqüentemente, $(i\omega I_n - A)\vartheta \in T^{su}$. Portanto $\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle = 0$.

Agora, do produto interno de p com o primeiro termo de (2.42), vem

$$\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta + r q \rangle = 0,$$

de onde

$$\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle + r\langle p, q \rangle = 0.$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle = 0$, temos

$$r\langle p, q \rangle = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Substituindo $r = 0$, na primeira equação de (2.42), temos que

$$(i\omega I_n - A)\vartheta = 0,$$

de onde

$$\vartheta = \alpha q, \tag{2.43}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$. No entanto,

$$0 = \langle p, \vartheta \rangle = \langle p, \alpha q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle = \alpha,$$

que em (2.43), nos fornece $\vartheta = 0$. Portanto, $(\vartheta, r) = (0, 0)$. Logo, o sistema (2.41) é não singular.

Seja agora (ϑ, r) solução de (2.41). Então, temos

$$(i\omega I_n - A)\vartheta + r q = v, \langle p, \vartheta \rangle = 0. \tag{2.44}$$

Da segunda equação de (2.44), segue que $v \in T_{su}$, e que

$$(i\omega I_n - A)\vartheta \in T_{su}$$

o que implica que

$$\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle = 0.$$

Fazendo o produto interno de p com a primeira equação de (2.44) temos que

$$\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta + r q \rangle = \langle p, v \rangle$$

o que implica que

$$\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle + r\langle p, q \rangle = \langle p, v \rangle.$$

Como $\langle p, v \rangle = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$, $\langle p, (i\omega I_n - A)\vartheta \rangle = 0$, segue que $r = 0$. Substituindo $r = 0$ na primeira equação de (2.44) obtemos

$$(i\omega I_n - A)\vartheta = v.$$

Logo, ϑ é solução de (2.39). ■

Consideremos novamente a equação diferencial (2.1) tal que as condições definidas na página 6 sejam satisfeitas. Temos que $f(\mathbf{x})$ é uma função de \mathbf{x} suave com respeito a μ , com sua expansão de Taylor dada por (2.19) e $A(\mu) = f_{\mathbf{x}}(0, \mu_0)$ corresponde à parte linear do sistema com um par de autovalores complexos

$$\lambda_1(\mu) = \lambda(\mu), \lambda_2(\mu) = \bar{\lambda}(\mu),$$

onde

$$\lambda(\mu) = \gamma(\mu) + i\omega(\mu),$$

satisfazendo a condição de Hopf para $\mu = 0$

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega > 0.$$

Um ponto de Hopf e_0 é um ponto de equilíbrio de (2.1) onde a matriz Jacobiana $A = f_{\mathbf{x}}(e_0, \mu_0)$ tem um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega > 0$, e não admite nenhum outro autovalor com parte real nula. No ponto de Hopf, uma variedade central de dimensão dois está bem definida e é invariante pelo fluxo de (2.1) podendo ser continuada com uma classe de diferenciabilidade suficientemente grande para valores dos parâmetros tomados suficientemente próximos. De fato, é conveniente definir uma série de Taylor infinita da variedade central, bem como de sua continuação, com duas destas variedades tendo contado com uma arbitrária e suficientemente grande classe de diferenciabilidade.

Um ponto de Hopf é chamado **transversal** se os autovalores complexos que dependem do parâmetro interceptam o eixo imaginário com derivadas não nulas. Em uma vizinhança de um ponto de Hopf transversal - ponto H1 - com $l_1 \neq 0$ a dinâmica do sistema (2.1), reduzido a uma família parâmetro dependente de variedades centrais, é orbitalmente topologicamente equivalente à seguinte forma normal complexa

$$w' = (\gamma + i\omega)w + l_1 w|w|^2,$$

$w \in \mathbb{C}$, γ, ω e l_1 são funções a valores reais possuindo derivadas de ordens arbitrariamente grandes, as quais são continuações de $0, \omega$ e o primeiro coeficiente de Lyapunov no ponto H1. Veja [4]. Quando $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) uma família de órbitas periódicas estáveis (instáveis) podem ser encontradas nesta família de variedades, reduzindo a um ponto de equilíbrio em H1.

O próximo teorema nos mostra como verificar a condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica.

Teorema 2.3.2 (Condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica)

Considere o sistema (2.1), cuja matriz Jacobiana $A(\mu)$ possui um par de autovalores imaginários puros para $\mu = 0$, $\lambda_{1,2} = \gamma(\mu) \pm i\omega(\mu)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$. Então,

$$\gamma'(0) = \text{Re}\langle p, A'(0)q \rangle,$$

onde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfazem

$$A(0)q = i\omega q, \quad A^\top(0)p = -i\omega p, \quad \langle p, q \rangle = 1.$$

Demonstração 2.3.2 Derivando ambos os membros da equação

$$A(\mu)q(\mu) = \lambda(\mu)q(\mu)$$

com relação a μ , obtemos

$$A'(\mu)q(\mu) + A(\mu)q'(\mu) = \lambda'(\mu)q(\mu) + \lambda(\mu)q'(\mu).$$

Aplicando, agora, o produto escalar por p em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned} \langle p, A'q + Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q + \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle p, Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q \rangle + \langle p, \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle A^\top p, q' \rangle &= \lambda' \langle p, q \rangle + \lambda \langle p, q' \rangle. \end{aligned}$$

Para $\mu = 0$, $A^\top p = -i\omega p$, portanto

$$\begin{aligned} \langle p, A'(0)q \rangle + i\omega \langle p, q' \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle + i\omega \langle p, q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'(0)q \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle \end{aligned}$$

e, finalmente, como $\langle p, q \rangle = 1$,

$$\langle p, A'(0)q \rangle = \gamma'(0) + i\omega'(0).$$

■

Teorema 2.3.3 (Bifurcação Hopf de codimensão 1 ou genérica) Qualquer sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mu), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (2.45)$$

com f suave, tendo para todo $\|\mu\|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ com autovalores críticos

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \gamma(\mu) \pm i\omega(\mu),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega > 0$, e os demais autovalores com partes reais diferentes de zero, satisfazendo as seguintes condições:

1. $l_1(0) \neq 0$ (condição de não degenerescência),
2. $\gamma'(0) \neq 0$ (condição de transversalidade),

por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa sobre a continuação da variedade central

$$\dot{z} = (\chi + i)z + sz|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4),$$

com $s = \text{sign}(l_1(0)) = \text{sign}(\text{Re } c_1(0))$.

Sob as hipóteses do teorema acima, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 1.

Veja agora a Figura 2.6 ilustrando o diagrama da bifurcação de Hopf genérica em \mathbb{R}^n .

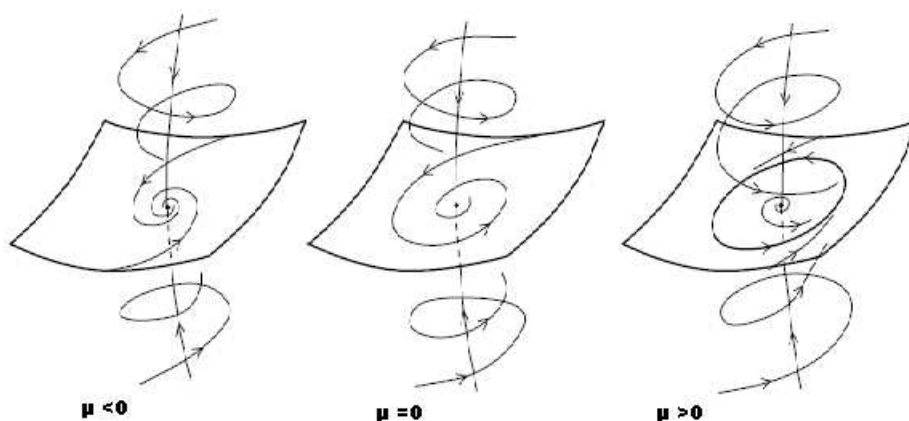


Figura 2.6: Diagrama da bifurcação de Hopf genérica em um sistema tridimensional.

Capítulo 3

Análise da estabilidade local e das bifurcações de Hopf

3.1 Dinâmica geral local

Neste capítulo, o objetivo é estudar a estabilidade local e as condições para as quais a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1) apresenta bifurcações de Hopf.

As equações dinâmicas da família estudada aqui são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = ax + by + cz + x^2, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e a, b e c são parâmetros reais negativos. Assim, para nosso estudo, iremos considerar o conjunto de parâmetros

$$\mathcal{D} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a < 0, b < 0, c < 0\}. \quad (3.2)$$

A família de equações diferenciais (3.1) tem dois pontos de equilíbrio $E_1 = (0, 0, 0)$ e $E_2 = (-a, 0, 0)$ para todos os valores dos parâmetros. Para o estudo da estabilidade dos pontos E_1 e E_2 faremos uso do Lema 3.1.1 a seguir, conhecido como critério de Routh–Hurwitz, cuja demonstração pode ser encontrada em Pontryagin [5], página 59.

Lema 3.1.1 *Considere o polinômio $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. As raízes de $p(\lambda)$ têm partes reais negativas se, e somente se,*

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2a_1 > a_0.$$

A matriz Jacobiana de (3.1) calculada em E_1 é dada por

$$Df_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

O polinômio característico de Df_{E_1} é dado por

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Df_{E_1}) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a. \quad (3.4)$$

Como os coeficientes de (3.4) são positivos, segue que este polinômio não tem raiz real positiva. Assim, (3.4) tem pelo menos uma raiz real negativa λ_1 .

Pelo Lema 3.1.1, $E_1 = (0, 0, 0)$ é assintoticamente estável se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} -c &> 0, \\ -b &> 0, \\ -a &> 0, \\ bc + a &> 0. \end{aligned}$$

Vamos agora encontrar as raízes do polinômio característico (3.4). Considere $\lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a = 0$, a equação característica.

Substituindo $\lambda = \mu + c/3$ na equação característica, vem

$$\mu^3 + p_1\mu + q_1 = 0, \quad (3.5)$$

onde

$$p_1 = -\frac{c^2}{3} - b, \quad q_1 = -\frac{2}{27}c^3 - \frac{bc}{3} - a.$$

Considere

$$\Delta_1 = \left(\frac{q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{3}\right)^3.$$

Onde $\Delta_1 > 0$ a equação algébrica (3.5) tem uma única raiz real γ_1 e um par de raízes complexas conjugadas $\rho_1 \pm i\omega_1$ da forma

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta_1}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta_1}}, \\ \rho_1 &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta_1}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta_1}} \right), \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta_1}} - \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta_1}} \right).$$

Conseqüentemente, se $\Delta_1 > 0$, as três raízes do polinômio característico (3.4) são

$$\lambda_1 = \frac{c}{3} + \gamma_1, \quad \lambda_2 = \frac{c}{3} + \rho_1 + i\omega_1, \quad \lambda_3 = \frac{c}{3} + \rho_1 - i\omega_1,$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Os autovalores da matriz Jacobina Df_{E_1} satisfazem

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a, \tag{3.6}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{c}{3}.$$

Para a condição (3.6), onde $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, temos $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = a$. Como, por hipótese, $a < 0$, segue que λ_1 é um número real negativo.

Usando o Lema 3.1.1 temos que, se $Re(\lambda_2) < 0$, então $bc + a > 0$, de onde concluímos que E_1 é um foco estável e se $Re(\lambda_2) > 0$, então $bc + a < 0$ de onde concluímos que E_1 é um foco-sela instável. Para garantir que a parte real de λ_2 seja positiva e que o ponto de equilíbrio seja um foco-sela, é necessário requerer que

$$\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} + \sqrt{\Delta_1}} + \sqrt[3]{-\frac{q_1}{2} - \sqrt{\Delta_1}} < \frac{2}{3}c. \tag{3.7}$$

A matriz Jacobiana de (3.1) calculada em $E_2 = (-a, 0, 0)$ tem a forma

$$Df_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & b & c \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

A equação característica de Df_{E_2} é igual a

$$\det(\lambda I - Df_{E_2}) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda + a = 0. \tag{3.9}$$

Pelo Lema 3.1.1, E_2 é instável para todos os valores dos parâmetros, pois $a < 0$.

Vamos estudar as raízes do polinômio característico que aparece em (3.9). Escrevendo $\lambda = \mu + c/3$, (3.9) tem a forma

$$\mu^3 + p_2\mu + q_2 = 0, \tag{3.10}$$

onde

$$p_2 = -\frac{1}{3}c^2 - b, \quad q_2 = -\frac{2}{27}c^3 - \frac{1}{3}bc + a = q_1 + 2a. \tag{3.11}$$

Considere

$$\Delta_2 = \left(\frac{q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{3}\right)^3. \quad (3.12)$$

Onde $\Delta_2 > 0$, a equação algébrica (3.9) tem uma única raiz real γ_2 e um par de raízes complexas conjugadas $\rho_2 \pm i\omega_2$ da forma

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\Delta_2}} + \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\Delta_2}}, \\ \rho_2 &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\Delta_2}} + \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\Delta_2}} \right), \\ \omega_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\Delta_2}} - \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\Delta_2}} \right). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se $\Delta_2 > 0$ as três raízes da equação característica (3.9) são

$$\lambda_1 = \frac{c}{3} + \gamma_2, \quad \lambda_2 = \frac{c}{3} + \rho_2 + i\omega_2, \quad \lambda_3 = \frac{c}{3} + \rho_2 - i\omega_2. \quad (3.13)$$

Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_2} satisfazem

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a, \quad (3.14)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c, \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{c}{3}. \quad (3.16)$$

Para a condição (3.14), onde $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, temos $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 |\lambda_2|^2 = -a > 0$. Assim, λ_1 é um número real positivo. Isto significa que o ponto de equilíbrio $E_2 = (-a, 0, 0)$ é instável. Para garantir que a parte real de λ_2 seja negativa e que E_2 é um foco-sela, requeremos que

$$\sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} + \sqrt{\Delta_2}} + \sqrt[3]{-\frac{q_2}{2} - \sqrt{\Delta_2}} > \frac{2}{3}c. \quad (3.17)$$

3.2 Bifurcações de Hopf no sistema (3.1)

3.2.1 Bifurcação de Hopf de codimensão 1

O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio $E_1 = (0, 0, 0)$, como vimos, pode ser escrito da forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a,$$

cujas raízes, os autovalores da matriz dada em (3.9), são

$$\lambda_1 = \frac{c}{3} + \frac{\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}(-c^2 - 3b)}{3\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}},$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{3} - \frac{(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}{32^{2/3}\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}},$$

$$\lambda_3 = \frac{c}{3} - \frac{(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}{32^{2/3}\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}$$

A condição necessária para a ocorrência de uma bifurcação de Hopf é que os autovalores $\lambda_{2,3}$ sejam complexos conjugados com partes reais nulas, isto é, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$, com ω maior do que zero. Agora,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c. \quad (3.18)$$

Assim $\lambda_1 = c$, o qual substituído no polinômio característico, resulta em $0 = p(c) = -(a + bc)$, isto é,

$$a = a_h = -bc. \quad (3.19)$$

Substituindo λ_2 e a_h em (3.4), obtemos

$$\omega^2(-i\omega + c) + b(-i\omega + c) = 0,$$

de onde

$$\omega = \sqrt{-b}. \quad (3.20)$$

Definimos os seguintes subconjuntos \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 e \mathcal{D}_3 do conjunto de parâmetros \mathcal{D} definido em (3.2):

$$\mathcal{D}_1 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc > -a\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc < -a\},$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc = -a\}.$$

Portanto, se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_1$, então E_1 é localmente assintoticamente estável. Veja Figura 3.1.

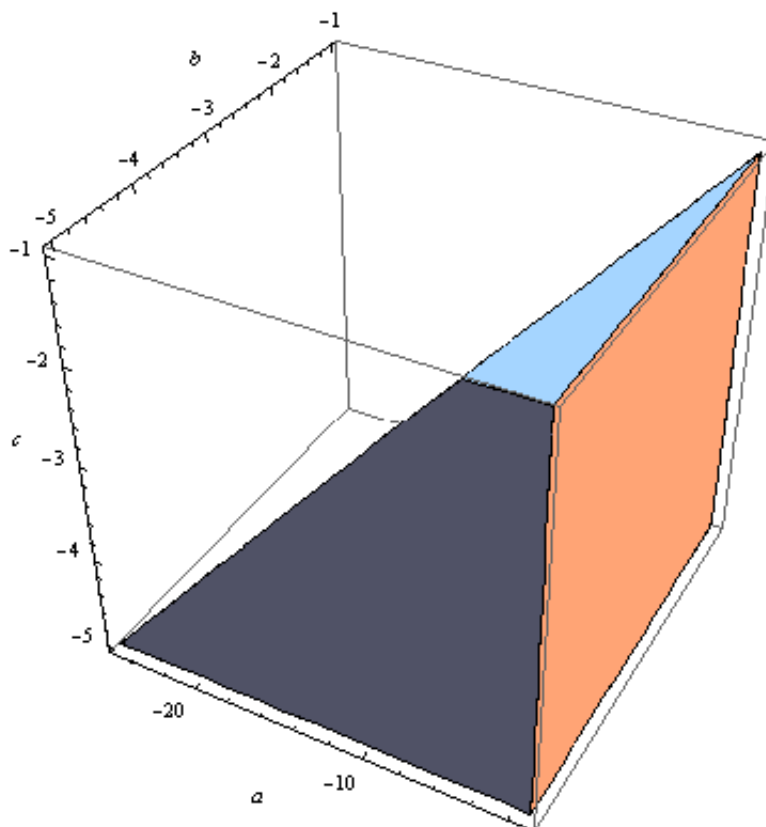


Figura 3.1: Conjunto \mathcal{D}_1 do espaço de parâmetros onde E_1 é localmente assintoticamente estável.

Se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_2$, então E_1 é instável. Veja Figura 3.2.

Nosso conjunto de bifurcação, denominado aqui de superfície de Hopf, é determinado por \mathcal{D}_3 . Veja Figura 3.3, com a superfície de Hopf $a_h = -bc$.

Para valores de parâmetros em $\mathcal{D} - \mathcal{D}_3$ os três autovalores da matriz Jacobiana no ponto E_1 tem partes reais não nulas e isso nos permite determinar o comportamento local de uma solução próxima do ponto $E_1 = (0, 0, 0)$, uma vez que, nestes casos, tal equilíbrio é **hiperbólico**. Sintetizamos estas análises no seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 *Para valores dos parâmetros em $\mathcal{D} - \mathcal{D}_3$, os autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 de Df_{E_1} tem partes reais não nulas. Logo, o equilíbrio E_1 é hiperbólico.*

Passemos, agora, a uma análise do ponto E_2 , do ponto de vista das bifurcações.

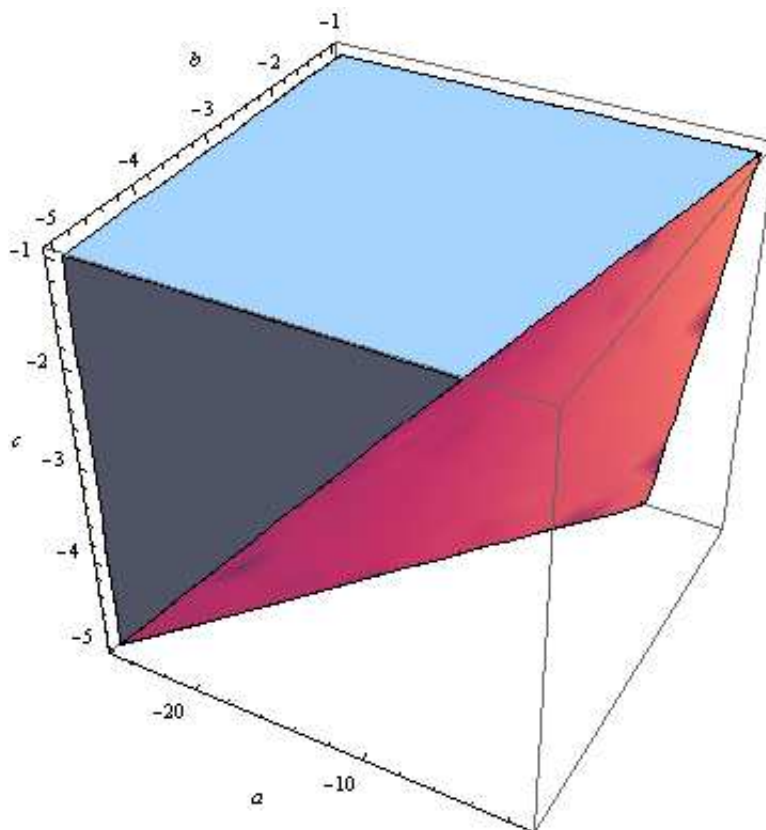


Figura 3.2: Conjunto \mathcal{D}_2 do espaço de parâmetros onde E_1 é localmente instável

Teorema 3.2.2 *Não há bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio $E_2 = (-a, 0, 0)$.*

Prova: Suponha a possibilidade de uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio E_2 . Então, o polinômio característico $\lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda + a$ de Df_{E_2} deve ter duas raízes complexas conjugadas da forma $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$, para algum $\omega \neq 0$ real. A soma das raízes deste polinômio cúbico é $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c$. Assim $\lambda_1 = c$. Daí substituindo em $\lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda + a$, resulta em $p(c) = -bc + a = 0$, isto é, $a = bc$. Isto contradiz a hipótese de que $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$. Portanto, não há bifurcação de Hopf no ponto E_2 . ■

Para estudar o comportamento do ponto de equilíbrio E_1 na superfície de Hopf \mathcal{D}_3 , precisamos determinar o primeiro coeficiente de Lyapunov. É o que passamos a fazer.

3.2.2 Encontrando o primeiro coeficiente de Lyapunov

Nesta seção aplicaremos os métodos apresentados em (2.3) para estudar a ocorrência de uma bifurcação de Hopf no ponto de equilíbrio E_1 .

Lembramos que, para valores dos parâmetros sobre a superfície de Hopf \mathcal{D}_3 , a matriz

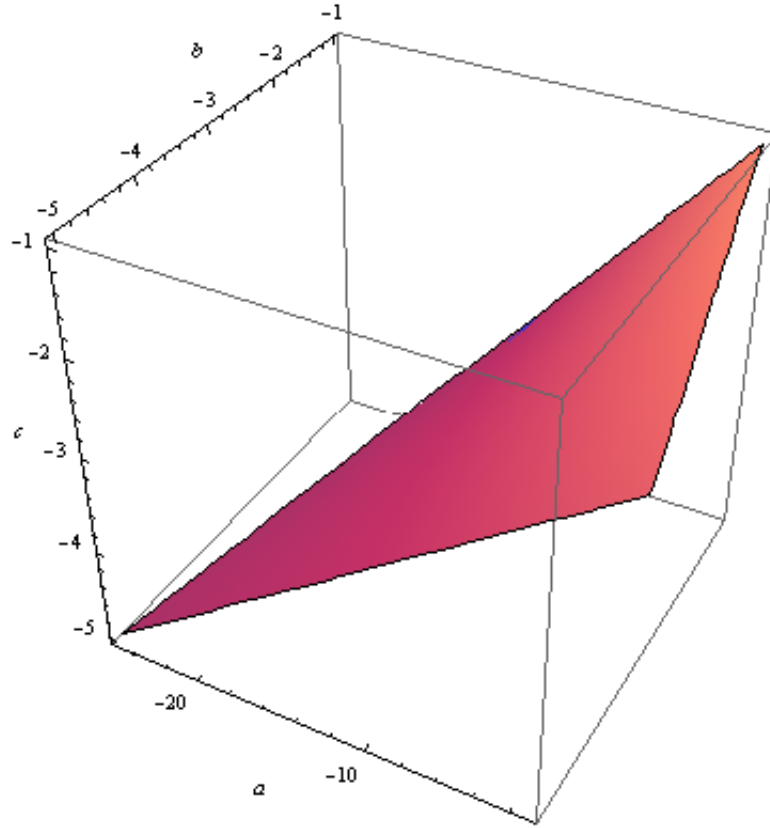


Figura 3.3: Superfície de Hopf \mathcal{D}_3 , onde $a = a_h = -bc$.

Jacobiana $A = Df_{E_1}$ tem um par de autovalores imaginários puros da forma $\lambda_{2,3} = \pm\omega i$, com $\omega > 0$. Considere $q \in \mathbb{C}^3$ um autovetor associado ao autovalor λ_2 . Então, segue que $Aq = \lambda_2 q = i\omega q$. Por outro lado, o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^3$ satisfaz $A^\top p = -i\omega p$, com a condição de normalização $\langle p, q \rangle = 1$.

O primeiro coeficiente Lyapunov da família de equações diferenciais (3.1) no ponto E_1 para valores dos parâmetros em \mathcal{D}_3 tem a forma

$$l_1(a_h) = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re}(\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)) \rangle),$$

como visto em (2.30).

Sobre a superfície de Hopf a matriz Jacobiana de (3.1) em E_1 tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Em seguida, calcularemos os correspondentes autovetores p e q . O autovetor complexo $q = (q_1, q_2, q_3)$ da matriz Jacobiana A associado ao autovalor complexo $\lambda_2 = i\omega$, $\omega = \sqrt{-b}$,

é dado por $Aq = i\omega q$. Escrevendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = (i\sqrt{-b}) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} q_2 = i\sqrt{-b}q_1, \\ q_3 = i\sqrt{-b}q_2, \\ -bcq_1 + bq_2 + cq_3 = i\sqrt{-b}q_3, \end{cases}$$

das quais resulta o autovetor

$$q = (1, i\sqrt{-b}, b), \quad (3.22)$$

e seu conjugado

$$\bar{q} = (1, -i\sqrt{-b}, b). \quad (3.23)$$

Consideremos, agora, o autovetor adjunto $p = (p_1, p_2, p_3)$ da matriz A^\top associado ao autovalor $\lambda_3 = -i\omega$. Assim,

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -bc \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

é a matriz transposta de A . Fazendo o mesmo processo anterior, obtemos o autovetor adjunto da forma

$$p = \left(1, \frac{-b - i\sqrt{-bc}}{bc}, \frac{i\sqrt{-b}}{bc}\right), \quad (3.24)$$

e seu conjugado

$$\bar{p} = \left(1, \frac{-b + i\sqrt{-bc}}{bc}, -\frac{i\sqrt{-b}}{bc}\right). \quad (3.25)$$

A normalização do autovetor adjunto p com respeito ao autovetor q é feita utilizando se a equação $pN = up$, onde pN é o autovetor normalizado e u é o fator de normalização, dado por

$$u = \frac{c}{2c + 2i\sqrt{-b}},$$

resultando em

$$pN = \left(\frac{c}{2(c + \sqrt{-bi})}, \frac{-b - i\sqrt{-bc}}{2b(c + \sqrt{-bi})}, \frac{i\sqrt{-b}}{2b(c + \sqrt{-bi})}\right). \quad (3.26)$$

Observemos que pN verifica a equação $\langle pN, q \rangle = 1$. Para facilitar usaremos a letra p para representar o autovetor adjunto normalizado pN , isto é, $p = pN$.

Temos o seguinte Lema.

Lema 3.2.1 (Normalização) *Se $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 + \bar{p}_3 q_3 = k$ então tome $pN = \bar{k}^{-1} p = (\bar{k}^{-1} p_1, \bar{k}^{-1} p_2, \bar{k}^{-1} p_3)$, onde $\bar{k}^{-1} = d$. Então $\langle pN, q \rangle = 1$.*

Prova: Escrevendo

$$\langle pN, q \rangle = \overline{(dp_1)} q_1 + \overline{(dp_2)} q_2 + \overline{(dp_3)} q_3 = \bar{d} \bar{p}_1 q_1 + \bar{d} \bar{p}_2 q_2 + \bar{d} \bar{p}_3 q_3 = \bar{d} [\bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 + \bar{p}_3 q_3],$$

obtemos

$$\frac{1}{k} k = 1. \quad \blacksquare$$

Consideremos, novamente, o sistema (3.1), o qual pode ser escrito da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.27)$$

onde $F(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ é uma função suave, a qual pode ser expandida da forma

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4),$$

onde $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ e $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})$ são **funções bilineares e trilineares simétricas**, respectivamente. O sistema (3.1), onde $a = -bc$, resulta em

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix}$$

é a matriz relativa a parte linear e

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

é a função relativa à parte não linear de (3.28).

Lema 3.2.2 *As funções multilineares simétricas $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, onde \mathbf{x}, \mathbf{y} e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, para o sistema dado em (3.1) são da forma*

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1 y_1 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

e

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0,$$

respectivamente, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^\top$.

Prova: Temos, para $i = 1, 2, 3$,

$$B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j y_k;$$

$$C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l.$$

Para o cálculo de B_1 , consideramos $F_1(\mathbf{x}) = 0$. Assim,

$$B_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

O mesmo se repete para B_2 , pois, $F_2(\mathbf{x}) = 0$. Assim,

$$B_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Para o cálculo de $B_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, consideramos $F_3(\mathbf{x}) = x^2$ e calculamos

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} = 0.$$

Portanto,

$$B_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1 y_1 + 0x_1 y_2 + 0x_1 y_3 + 0x_2 y_1 + 0x_2 y_2 + 0x_2 y_3 + 0x_3 y_1 + 0x_3 y_2 + 0x_3 y_3 = 2x_1 y_1.$$

Agora, escrevemos

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1 y_1 \end{pmatrix}.$$

Observe que o sistema (3.1) não possui termos de terceira ordem nem superiores. Desta forma,

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0.$$

Assim, concluímos a demonstração do lema. ■

Dos resultados do lema acima, temos

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1x_1 \end{pmatrix}, \quad C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv 0.$$

Da matriz Jacobiana A no ponto E_1 para $a = a_h$, dado em (3.19), da função $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ acima, de $q = (1, i\sqrt{-b}, b)$, dado em (3.22) e de seu conjugado em (3.23), obtemos

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Escrevendo $h_{11} = A^{-1}B(q, \bar{q})$, segue que

$$B(q, h_{11}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{bc} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Conseqüentemente,

$$\langle p, B(q, h_{11}) \rangle = \frac{2i\sqrt{-b}}{b^2c(c - \sqrt{-bi})}. \quad (3.34)$$

Escrevendo $h_{20} = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q)$, onde $\omega = \sqrt{-b}$ e I é a matriz identidade 3×3 , obtemos

$$h_{20} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6ib\sqrt{-b} - 3bc} \\ \frac{4i\sqrt{-b}}{6ib\sqrt{-b} - 3bc} \\ \frac{8b}{6ib\sqrt{-b} - 3bc} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$B(\bar{q}, h_{20}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{6bi\sqrt{-b} - 3bc} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Logo,

$$\langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = -\frac{4i\sqrt{-b}}{18b^2c\sqrt{-bi} - 6b^2c^2 - 12b^3}. \quad (3.36)$$

Notemos que o valor $C(q, q, \bar{q})$ é nulo, uma vez que o sistema em estudo não possui termos de terceira ordem ou superiores.

Conseqüentemente, o **primeiro coeficiente de Lyapunov** do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio $E_1 = (0, 0, 0)$ tem a forma

$$l_1(b, c) = \frac{16b - 2c^2}{4b^3c - 5b^2c^3 + 6c^5}.$$

Como $16b - 2c^2 < 0$ e $4b^3c - 5b^2c^3 + 6c^5 > 0$, segue que $l_1(b, c) < 0$, para $(a_h, b, c) \in \mathcal{D}_3$. Portanto, a bifurcação de Hopf correspondente é **não-degenerada**, pois $l_1 \neq 0$. Então, para valores dos parâmetros (a, b, c) sobre a superfície de Hopf $a = a_h = -bc$ o ponto de equilíbrio E_1 é localmente assintoticamente estável e, portanto, localmente um atrator.

Sintetizamos as análises acima no seguinte teorema.

Teorema 3.2.3 (Teorema da não degenerescência) *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao ponto de equilíbrio E_1 é dado por*

$$l_1(b, c) = \frac{16b - 2c^2}{4b^3c - 5b^2c^3 + 6c^5}. \quad (3.37)$$

Como $l_1(b, c) \neq 0$, para todos os valores de $b < 0$ e $c < 0$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf não degenerada no ponto de equilíbrio E_1 para $a = a_h$.

Então, através, do Teorema 3.2.3 mencionado acima, é possível justificar o erro ocorrido no artigo [11], comentado na Introdução desta dissertação, o qual os autores apresentam condições para a existência das bifurcações de Hopf degeneradas para o sistema (1.1).

3.2.3 A condição de transversalidade

De acordo com o Teorema 3.2.4 podemos verificar a condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica para o sistema (3.1).

Teorema 3.2.4 (Condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica)

Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1). A condição de transversalidade para as bifurcações de Hopf no ponto de equilíbrio E_1 é dada por

$$\gamma'(a_h) = \frac{1}{2b - 2c^2}. \quad (3.38)$$

Como $\gamma'(a_h) \neq 0$, para todos os valores de $b < 0$ e $c < 0$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf transversal no ponto de equilíbrio E_1 para $a = a_h$.

Prova: Considere o caso onde a matriz $A = Df_{E_1}$ relativa à parte linear do sistema (3.1), vista como dependente do parâmetro a , calculamos

$$A'(a_h) = \left. \frac{\partial A}{\partial a} \right|_{a=-bc},$$

de onde

$$A'(a_h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Resolvendo, agora, $\gamma'(a_h) = \text{Re}\langle p, A'(-bc)q \rangle$, obtemos

$$\gamma'(a_h) = \frac{1}{2b - 2c^2},$$

e, portanto, $\gamma'(a_h) \neq 0$, como queríamos. ■

Concluimos que para os pontos de Hopf com parâmetros da forma $a = a_h$ as condições de **não degenerescência** e **transversalidade** são satisfeitas.

3.3 Caso particular: sistema de Lur'e

Nesta seção, aplicaremos os resultados obtidos até aqui para o sistema (3.1) num sistema mais simples, mas que apresenta grande interesse na literatura. Este sistema é conhecido como sistema de realimentação do tipo Lur'e e pode ser encontrado em [4], p. 178.

Como já comentado na Introdução, a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1) pode ser obtida a partir da família a três parâmetros de equações escalares de terceira ordem

$$x''' - cx'' - bx' - ax - x^2 = 0, \quad (3.40)$$

bastando, para isso, definir $y = x'$ e $z = x''$.

Em (3.40), tomando $a = -1$, $b = -\beta$ e $c = -\alpha$, obtemos a família dois parâmetros de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = -\alpha z - \beta y - x + x^2, \end{cases} \quad (3.41)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha > 0, \beta > 0\}$.

Para todos os valores de $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}$, o sistema (3.41) tem dois pontos de equilíbrio $E_1 = (0, 0, 0)$ e $E_2 = (1, 0, 0)$.

Iremos analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio $E_2 = (1, 0, 0)$. A matriz Jacobiana de (3.41) calculada em $E_2 = (1, 0, 0)$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

O polinômio característico de (3.42) é dado por

$$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - 1. \quad (3.43)$$

Pelo Lema 3.1.1, o ponto $E_2 = (1, 0, 0)$ é estável se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \alpha &> 0, \\ \beta &> 0, \\ -1 &> 0, \\ \alpha\beta + 1 &> 0. \end{aligned}$$

Como a terceira condição não pode ser satisfeita, $E_2 = (1, 0, 0)$ é instável.

Iremos, agora, analisar a estabilidade do equilíbrio na origem. A matriz Jacobiana de (3.41) calculada em $E_1 = (0, 0, 0)$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

O polinômio característico de (3.44) é dado por

$$\det(\lambda I - Df_{E_1}) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1. \quad (3.45)$$

Para o estudo da estabilidade do equilíbrio E_1 faremos uso do critério de Routh–Hurwitz, Lema 3.1.1. Assim, o ponto E_1 é assintoticamente estável quando $\alpha > 1/\beta > 0$ e instável quando $0 < \alpha < 1/\beta$. Para $\alpha = 1/\beta$ a análise linear é falha.

Para encontrarmos uma relação entre α e β correspondente à bifurcação de Hopf no ponto E_1 , substituímos $\lambda = i\omega$ na última equação. Isto mostra que o polinômio característico tem um par de raízes imaginárias $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$, $\omega > 0$, se

$$\alpha = \alpha_c(\beta) = \frac{1}{\beta}, \quad \beta > 0. \quad (3.46)$$

Logo, a origem é estável se $\alpha > \alpha_c$ e instável se $0 < \alpha < \alpha_c$. A transição na estabilidade é causada por um simples par de autovalores complexos conjugados com interseção com o eixo imaginário da forma $\lambda = \pm i\omega$, onde $\omega^2 = \beta$. Assim, podemos ter uma bifurcação de Hopf para estes valores dos parâmetros.

Para analisar esta possibilidade de bifurcação, temos que calcular o primeiro coeficiente Lyapunov do sistema (3.41) relativo aos valores dos parâmetros críticos definidos pela curva de Hopf

$$\mathcal{G}_1 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathcal{G} : \alpha = \alpha_c = \frac{1}{\beta} \right\}.$$

A matriz $A = Df_{E_1}$ relativa a parte linear do sistema de Lur'e no ponto de equilíbrio E_1 é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

É simples verificar que os vetores

$$q = \left(1, i\sqrt{\beta}, -\beta \right), \quad p = \left(1, \beta + \frac{i}{\sqrt{\beta}}, i\sqrt{\beta} \right) \quad (3.47)$$

são autovetores de A e A^\top associados aos autovalores $\lambda_2 = i\omega$ e $\lambda_3 = -i\omega$, respectivamente.

A normalização do autovetor p com respeito ao autovetor q é feita utilizando-se a equação $pN = up$, onde pN é o autovetor p normalizado e u é o fator de normalização. Assim, obtemos

$$pN = \left(\frac{1}{2 - 2i\beta^{3/2}}, \frac{i}{2\sqrt{\beta}}, -\frac{\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} + 2i} \right).$$

Agora, existe somente um termo não-linear, termo quadrático, em (3.41). Conseqüente-

mente, a função bilinear simétrica $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, definida em (2.20), pode ser expressa como

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix},$$

enquanto que $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0$. Segue que

$$B(q, q) = B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$h_{11} = A^{-1}B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$h_{20} = (2i\omega I - A)^{-1}B(q, q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{-6i\beta^{3/2} - 3} \\ \frac{4\sqrt{\beta}}{3i - 6\beta^{3/2}} \\ \frac{8i\beta}{3i - 6\beta^{3/2}} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Aplicando (3.48), (3.49) em (2.40), o primeiro coeficiente de Lyapunov é escrito da forma

$$l_1(\alpha_c) = l_1(\beta) = -\frac{2(8\beta^5 + \beta^2)}{4\beta^6 + 5\beta^3 + 1}.$$

É simples verificar que o coeficiente de Lyapunov acima é negativo para todos os valores de β positivos. Assim, a bifurcação de Hopf é não-degenerada pois $l_1 \neq 0$.

Sintetizamos a análise acima no seguinte teorema.

Teorema 3.3.1 (Teorema da não degenerescência) *Considere a família a dois parâmetros de equações diferenciais (3.41). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao ponto de equilíbrio E_1 é dado por*

$$l_1(\alpha_c) = l_1(\beta) = -\frac{2(8\beta^5 + \beta^2)}{4\beta^6 + 5\beta^3 + 1}. \quad (3.50)$$

Como $l_1(\beta) \neq 0$, para todos os valores de $\beta > 0$, o sistema (3.41) tem uma bifurcação de Hopf não degenerada no ponto de equilíbrio E_1 para $\alpha = \alpha_c$.

3.3.1 A condição de transversalidade

De acordo com o Teorema 3.3.2 podemos verificar a condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica para o sistema (3.41).

Teorema 3.3.2 (Condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica)

Considere a família a dois parâmetros de equações diferenciais (3.41). A condição de transversalidade para as bifurcações de Hopf no ponto de equilíbrio E_1 é dada por

$$\gamma'(\alpha_c) = -\frac{\beta^3}{2\beta^3 + 2}. \quad (3.51)$$

Como $\gamma'(\alpha_c) \neq 0$, para todos os valores de $\beta > 0$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf transversal no ponto de equilíbrio E_1 para $\alpha = \alpha_c$.

Prova: Considere o caso onde a matriz $A = Df_{E_1}$ relativa à parte linear do sistema (3.41), vista como dependente do parâmetro α , calculamos

$$A'(\alpha_c) = \left. \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=1/\beta}$$

de onde

$$A'(\alpha_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Resolvendo, agora, $\gamma'(\alpha_c) = \text{Re}\langle p, A'(1/\beta)q \rangle$, obtemos

$$\gamma'(\alpha_c) = -\frac{\beta^3}{2\beta^3 + 2}$$

e, portanto, $\gamma'(\alpha_c) \neq 0$, como queríamos. ■

Concluimos que para os pontos de Hopf com parâmetros da forma $\alpha = \alpha_c$ as condições de **não degenerescência e transversalidade** são satisfeitas.

Capítulo 4

Simulações Numéricas

Neste capítulo, verificamos numericamente a estabilidade do sistema (3.1) nos pontos E_1 e E_2 , dependente dos parâmetros a, b, c (reais e negativos). Para isto, utilizaremos os resultados analiticamente obtidos no capítulo 3.

Todos os cálculos a serem apresentados foram feitos com o auxílio do software MATHEMATICA 6.

Aqui fixamos $b = -2.92$ e $c = -1.2$, variando o parâmetro a , obtemos os seguintes retratos de fase. A bifurcação de Hopf ocorre no valor crítico $a_h = -3.504$. A ocorrência da bifurcação de Hopf no sistema (3.1) é mostrada em Figura 4.5.

a) Retratos de fase do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio E_1 .

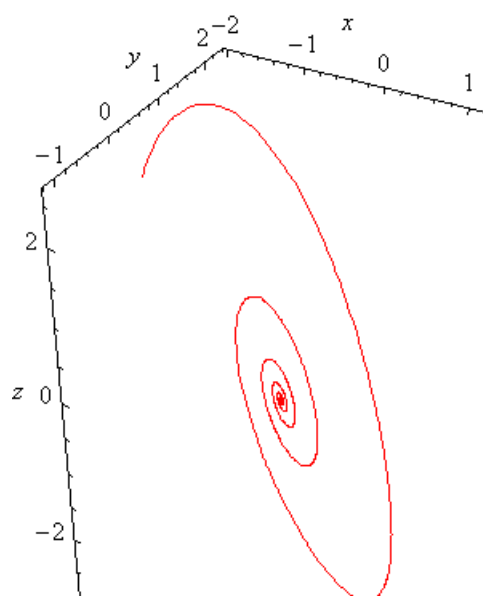


Figura 4.1: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$. Quando $bc > -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é local e assintoticamente estável e, portanto, localmente atrator. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -0.772295$, $\lambda_2 = -0.213853 + 1.59498i$, $\lambda_3 = -0.213853 - 1.59498i$.

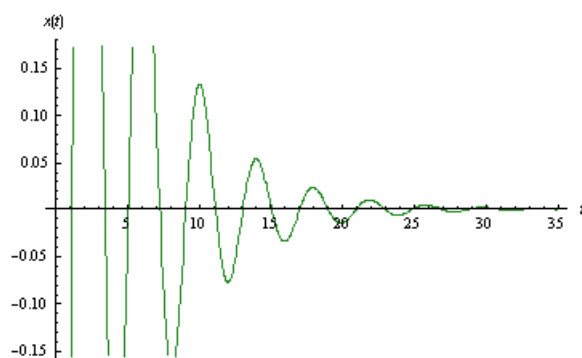


Figura 4.2: Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

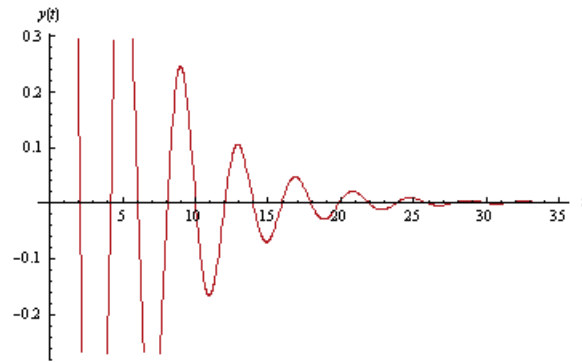


Figura 4.3: Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

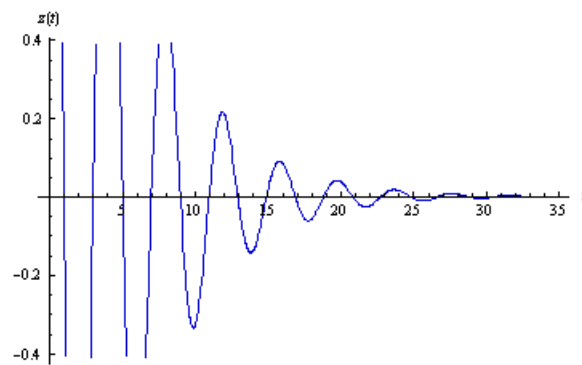


Figura 4.4: Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -2$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 35]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

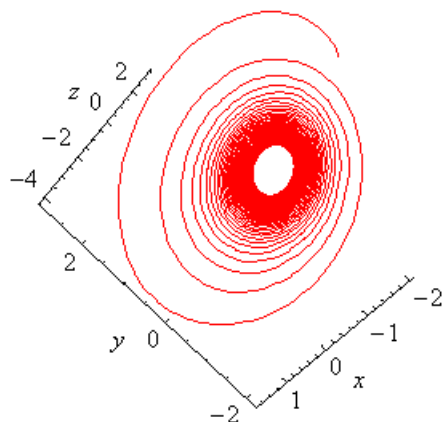


Figura 4.5: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$. Quando $bc = -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é local e assintoticamente estável e, portanto, um atrator fraco. A bifurcação de Hopf ocorre no valor crítico $a_h = -3.504$. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -1.2$, $\lambda_2 = 0 + 1.7088i$, $\lambda_3 = 0 - 1.7088i$.

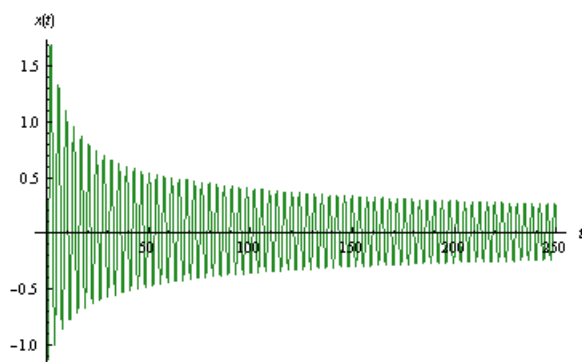


Figura 4.6: Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

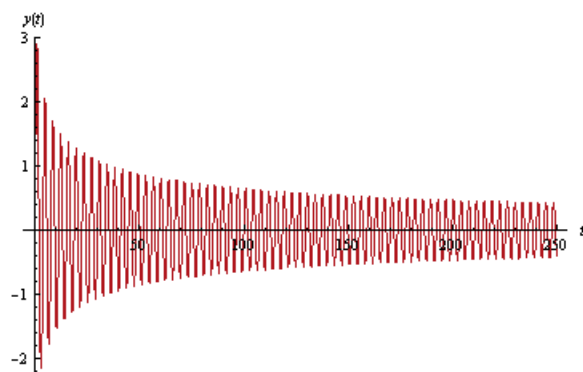


Figura 4.7: Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

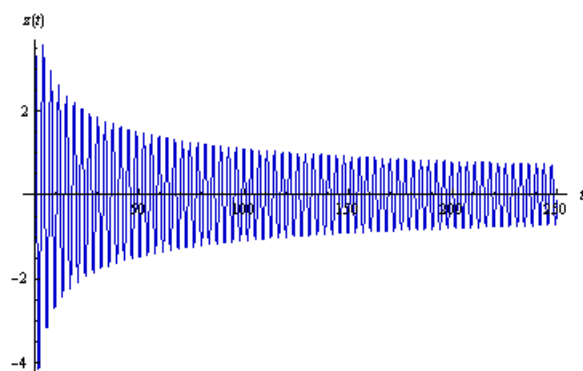


Figura 4.8: Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -3.504$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 250]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (-2, 0.5, 2)$.

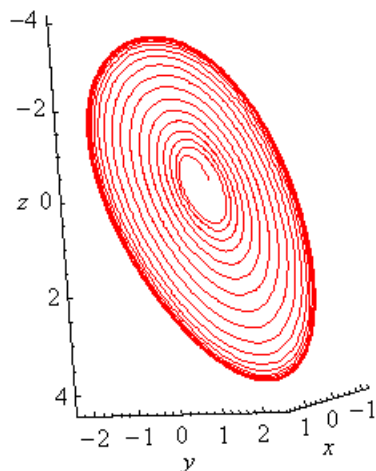


Figura 4.9: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_1 = (0, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_1} são: $\lambda_1 = -1.30716$, $\lambda_2 = 0.0535792 + 1.74849i$, $\lambda_3 = 0.0535792 - 1.74849i$.

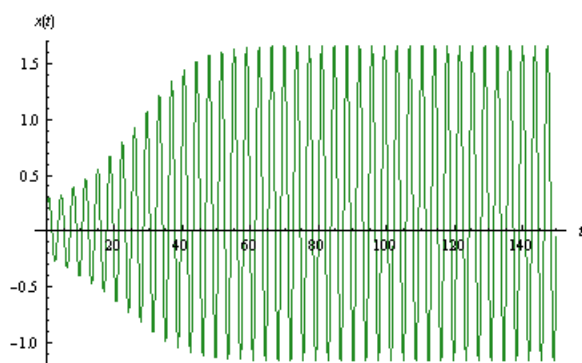


Figura 4.10: Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$.

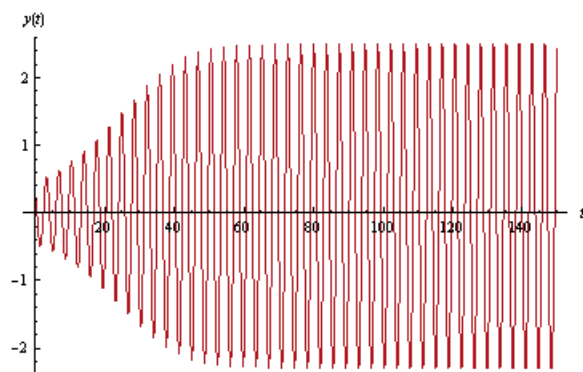


Figura 4.11: Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$.

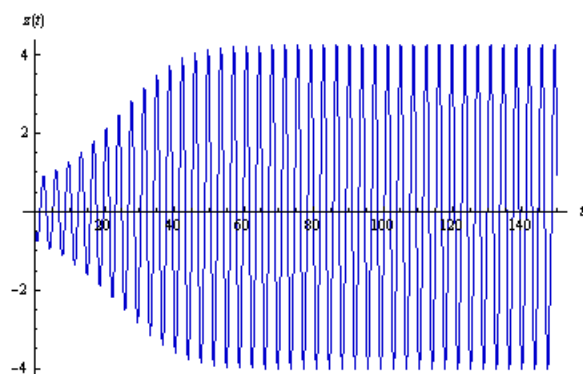


Figura 4.12: Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -4$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 150]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (0.2, 0.3, -0.2)$.

a) Retratos de fase do sistema (3.1) no ponto de equilíbrio E_2 .

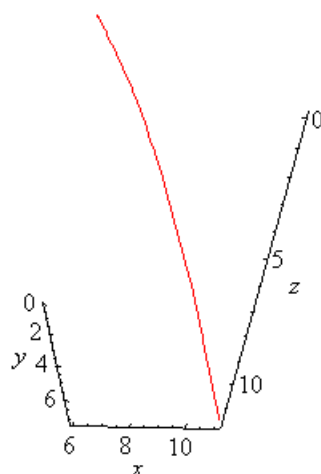


Figura 4.13: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_2 = (-a, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_2} são: $\lambda_1 = 1.10054$, $\lambda_2 = -1.15027 + 2.03193i$, $\lambda_3 = -1.15027 - 2.03193i$.

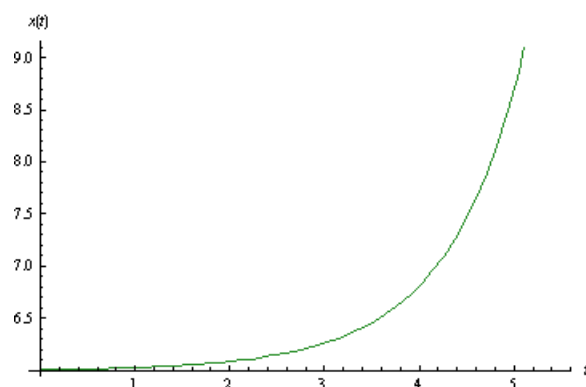


Figura 4.14: Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$.

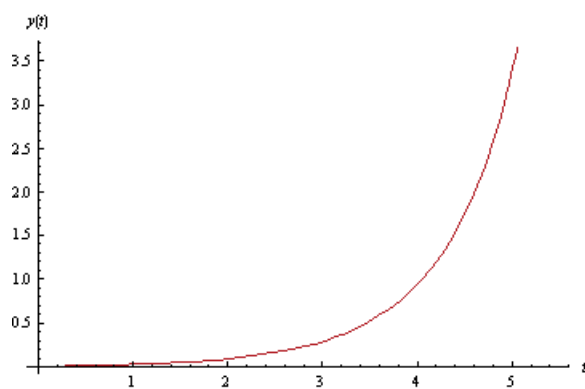


Figura 4.15: Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$.

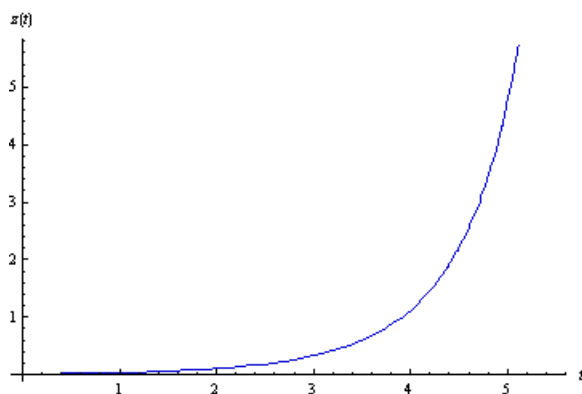


Figura 4.16: Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 5.5]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (6.01, 0.01, 0.01)$.

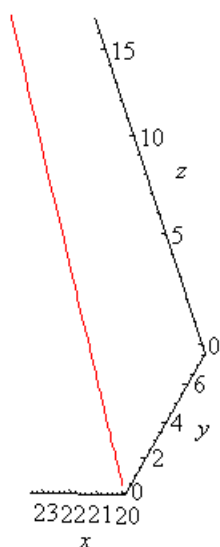


Figura 4.17: Retrato de fase do sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$. Quando $bc < -a$ o ponto $E_2 = (-a, 0, 0)$ é localmente instável e, portanto, localmente repulsor. Os autovalores da matriz Jacobiana Df_{E_2} são: $\lambda_1 = 2.0673$, $\lambda_2 = -1.63365 + 2.64682i$, $\lambda_3 = -1.63365 - 2.64682i$.

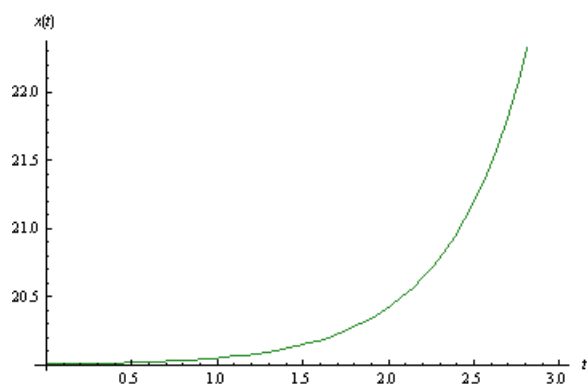


Figura 4.18: Projeção da solução no eixo $x(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$.

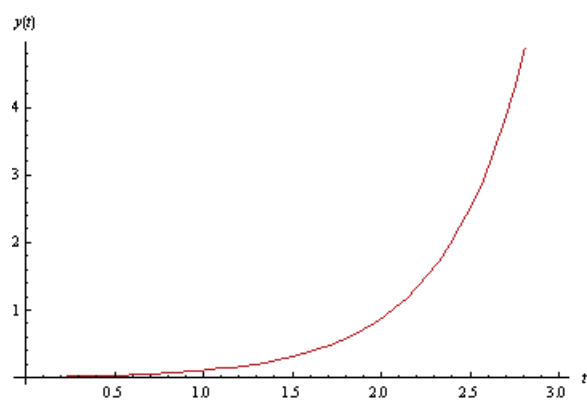


Figura 4.19: Projeção da solução no eixo $y(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$.

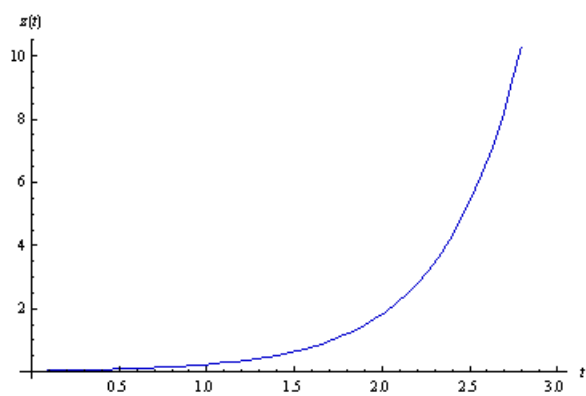


Figura 4.20: Projeção da solução no eixo $z(t)$ em função do tempo de integração no sistema (3.1) para valores de parâmetro $a = -20$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$. Intervalo de integração: $[0, 3]$. Condição inicial: $(x, y, z) = (20.01, 0.01, 0.01)$.

Conclusões

Neste trabalho estudamos analiticamente e numericamente o comportamento dinâmico do sistema tipo (1.1), o qual é um sistema quadrático tridimensional não-linear dependente de parâmetros a, b e c reais negativos.

O sistema (1.1) possui dois equilíbrios $E_1 = (0, 0, 0)$ e $E_2 = (-a, 0, 0)$, para o conjunto de parâmetros $\mathcal{D} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a < 0, b < 0, c < 0\}$. Se, $(a, b, c) \in \mathcal{D}_1 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc > -a\}$, então E_1 é localmente assintoticamente estável. Se $(a, b, c) \in \mathcal{D}_2 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc < -a\}$, então E_1 é instável. Mostramos que o sistema apresenta bifurcações de Hopf na origem, o qual ocorre no conjunto $\mathcal{D}_3 = \{(a, b, c) \in \mathcal{D} / bc = -a\}$. Como o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo, E_1 é localmente assintoticamente estável e, portanto, localmente um atrator e os ciclos limites bifurcantes são atratores.

A superfície de Hopf, que fornece o lugar geométrico no espaço de parâmetros para o qual o sistema apresenta bifurcações de Hopf, foi determinada para o equilíbrio na origem utilizando o critério de estabilidade de Routh–Hurwitz.

Concluimos que as bifurcações de Hopf em E_1 são de codimensão 1, visto que as condições de não degenerescência (veja Teorema (4.0.3)) e transversalidade (veja Teorema (4.0.4)) são satisfeitos.

Teorema 4.0.3 (Teorema da não degenerescência) *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1). O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao ponto de equilíbrio E_1 é dado por*

$$l_1(b, c) = \frac{16b - 2c^2}{4b^3c - 5b^2c^3 + 6c^5}. \quad (4.1)$$

Como $l_1(b, c) \neq 0$, para todos os valores de $b < 0$ e $c < 0$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf não degenerada no ponto de equilíbrio E_1 para $a = a_h$.

Teorema 4.0.4 (Condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica) *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.1). A condição de*

transversalidade para as bifurcações de Hopf no ponto de equilíbrio E_1 é dada por

$$\gamma'(a_h) = \frac{1}{2b - 2c^2}. \quad (4.2)$$

Como $\gamma'(a_h) \neq 0$, para todos os valores de $b < 0$ e $c < 0$, o sistema (3.1) tem uma bifurcação de Hopf transversal no ponto de equilíbrio E_1 para $a = a_h$.

Assim, também, podemos observar que o Retrato de fase da Figura 1.1, exposto na Introdução desta dissertação apresenta um dos possíveis “atratores caóticos” do sistema (1.1) para os seguintes valores dos parâmetros: $a = -6$, $b = -2.92$ e $c = -1.2$.

Foi feito um estudo da dinâmica local para o caso particular do sistema (1.1) conhecido como sistema de Lur’e (3.41), que segue o mesmo estudo analítico e sistemático desenvolvido no sistema (1.1).

Como proposta para trabalhos futuros podemos citar:

1. Estudar a estabilidade global do sistema (1.1);
2. Estudar a existência da órbitas homoclínicas no sistema (1.1);
3. Apresentar um tratamento mais rigoroso das “oscilações caóticas” apresentadas no sistema (1.1) para determinados valores dos parâmetros.

Bibliografia

- [1] M. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France, **51**(1923), 45–188.
- [2] W. W. Farr, C. Li, I. S. Labouriau, W. F. Langford, *Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th problem*, SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 13–30.
- [3] M. Hirsch, S. Smale e R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, second edition, Academic Press, San Diego, 2004.
- [4] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer–Verlag, New York, 2004.
- [5] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Addison–Wesley Publishing Company Inc., 1962.
- [6] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Stability and Hopf bifurcation in the Watt governor system*, Commun. Appl. Nonlinear Anal., **13** (2006), 1–17.
- [7] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Bifurcation analysis of the Watt governor system*, Computacional and Applied Mathematics, **26** (2007), 19–44.
- [8] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Stability and Hopf bifurcation in an hexagonal governor system*, Nonlinear Anal.: Real World Appl., **9** (2008), 889–898.
- [9] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Hopf bifurcations in a Watt governor with a spring*, J. Nonlinear Math. Phys., **15** (2008), 278–289.
- [10] J. Sotomayor, L. F. Mello, D. B. Santos e D. C. Braga, *Bifurcation analysis of a model for biological control*, Math. Comp. Modelling, **48** (2008), 375–387.
- [11] L. Zhou, F. Chen, *Hopf bifurcation and Si'lnikov chaos of Genesio system*, Chaos, Solitons & Fractals, **40** (2009), 1413–1422.

- [12] X. Wu, Z. Guan , Z. Wu , T. Li. *Chaos synchronization between Chen system and Genesio system*, Physics A, **364** (2007), 484–487.
- [13] Software MATHEMATICA 6: <http://www.wolfram.com/>

Anexo A

■ Sistema (3.1)

$$f_1[x_-, y_-, z_-] := y,$$

$$f_2[x_-, y_-, z_-] := x,$$

$$f_3[x_-, y_-, z_-] := a * x + b * y + c * z + x^2.$$

■ Equilíbrios

$$e = \text{Simplify}[\text{Solve}[\{f_1[x, y, z] == 0, f_2[x, y, z] == 0, f_3[x, y, z] == 0\}, \{x, y, z\}]].$$

$$\{\{y \rightarrow 0, z \rightarrow 0, x \rightarrow 0\}, \{y \rightarrow 0, z \rightarrow 0, x \rightarrow -a\}\}.$$

Equilíbrio origem (e_0)

$$e_0 = \{x, y, z\} /. e[[1]].$$

$$\{0, 0, 0\}.$$

Equilíbrio $x = -a$

$$e_1 = \{x, y, z\} /. e[[2]].$$

$$\{-a, 0, 0\}.$$

■ Parte linear do campo – matriz Jacobiana A

$$Df[\{x_-, y_-, z_-\}] := \{$$

$$\{Derivative[1, 0, 0][f_1][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 1, 0][f_1][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f_1][x, y, z]\},$$

$$\{Derivative[1, 0, 0][f_2][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f_2][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 0, 1][f_2][x, y, z]\}, \{Derivative[1, 0, 0][f_3][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 1, 0][f_3][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f_3][x, y, z]\}.$$

$$A[\{x_-, y_-, z_-\}] := Df[\{x, y, z\}].$$

Matriz Jacobiana A

$$A[\{x, y, z\}].$$

$$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{a + 2x, b, c\}\}.$$

$$\text{MatrixForm}[A[\{x, y, z\}]]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a + 2x & b & c \end{pmatrix}.$$

■ Matriz Jacobiana aplicada na origem (e_0)

$$A = A[e_0].$$

$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{a, b, c\}\}.$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

■ Polinômio característico calculado na origem e_0

$$p[\lambda_-] := \text{Det}[A - \lambda * \text{IdentityMatrix}[3]].$$

$$\text{Reduce}[p[\lambda]].$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a.$$

Autovalores A

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow \frac{c}{3} + \frac{\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{3\sqrt[3]{2}} - \\ &\quad \frac{\sqrt[3]{2}(-c^2 - 3b)}{\sqrt[3]{2}(-c^2 - 3b)}, \\ \lambda_2 &\rightarrow \frac{c}{3} - \frac{(1 - i\sqrt{3})\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{6\sqrt[3]{2}} + \\ &\quad \frac{(1 + i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}{(1 + i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}, \\ \lambda_3 &\rightarrow \frac{c}{3} - \frac{(1 + i\sqrt{3})\sqrt[3]{2c^3 + 9bc + 27a + 3\sqrt{3}\sqrt{-4b^3 - c^2b^2 + 18acb + 4ac^3 + 27a^2}}}{6\sqrt[3]{2}} + \\ &\quad \frac{(1 - i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}{(1 - i\sqrt{3})(-c^2 - 3b)}. \end{aligned}$$

Metódo de Cardano

Escrevendo $\lambda = \mu + \frac{c}{3}$, vem

$$\text{Simplify } p[\lambda] = \lambda^3 - c\lambda^2 - b\lambda - a.$$

$$\left(\frac{c}{3} + u\right)^3 - c\left(\frac{c}{3} + u\right)^2 - b\left(\frac{c}{3} + u\right) - a.$$

$$R = \left(\frac{c}{3} + u\right)^3 - c\left(\frac{c}{3} + u\right)^2 - b\left(\frac{c}{3} + u\right) - a.$$

Expand[R].

$$-\frac{2c^3}{27} - \frac{uc^2}{3} - \frac{bc}{3} + u^3 - a - bu.$$

$$p = -\frac{c^2}{3} - b.$$

$$q = -\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a.$$

Equação característica

$$u^3 + pu + q = 0.$$

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3.$$

$$\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b\right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a\right)^2.$$

Expand[\Delta].

$$\begin{aligned}
& -\frac{b^3}{27} - \frac{c^2b^2}{108} + \frac{acb}{6} + \frac{ac^3}{27} + \frac{a^2}{4}. \\
\gamma &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}. \\
\gamma &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} + \\
& \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}}. \\
\rho &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right). \\
& \left(-\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} \right). \\
\omega &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \right). \\
& \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} \right) \\
& + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} \right). \\
\lambda_1 &= \frac{c}{3} + \gamma. \\
\frac{c}{3} &+ \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} + \\
& \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}}. \\
\lambda_2 &= \frac{c}{3} + \rho + i\omega. \\
\frac{c}{3} &- \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} - \\
& \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} + i\omega. \\
\lambda_3 &= \frac{c}{3} + \rho - i\omega.
\end{aligned}$$

$$\frac{c}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) - \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} -$$

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(\frac{2c^3}{27} + \frac{bc}{3} + a \right) + \sqrt{\frac{1}{27} \left(-\frac{c^2}{3} - b \right)^3 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2c^3}{27} - \frac{bc}{3} - a \right)^2}} - i\omega.$$

■ Superfície de Hopf

Superfície de bifurcação

$$a = -bc.$$

$$-bc.$$

Reescrevendo a matriz Jacobiana

$$A = \text{FullSimplify}[A].$$

$$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-bc, b, c\}\}.$$

$$\text{MatrixForm}[A]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo o polinômio característico

$$p_1[\lambda] := \text{Det}[A - \lambda * \text{IdentityMatrix}[3]].$$

$$\text{Simplify}[p_1[\lambda]].$$

$$-bc + \lambda(b + (c - \lambda)\lambda).$$

$$d = -bc + \lambda(b + (c - \lambda)\lambda).$$

$$\text{Factor}[d].$$

$$-\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda - bc.$$

■ Autovetores da matriz A- autovalores e respectivos autovetores

$$AV = \text{FullSimplify}[\text{Refine}[\text{Eigensystem}[A], b \in \text{Reals} \ \&\& \ b < 0 \ \&\& \ c \in \text{Reals} \ \&\& \ c < 0]].$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -i\sqrt{-b} & i\sqrt{-b} & c \\ \left\{ \frac{1}{b}, \frac{i}{\sqrt{-b}}, 1 \right\} & \left\{ \frac{1}{b}, -\frac{i}{\sqrt{-b}}, 1 \right\} & \left\{ \frac{1}{c^2}, \frac{1}{c}, 1 \right\} \end{array} \right).$$

$$\lambda_1 = c.$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{-b}.$$

$$\pm i\sqrt{-b}.$$

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

■ Autovetor complexo q, satisfazendo $Aq = i\omega q$

$$q = \{1, i\sqrt{-b}, b\}.$$

$$\{1, i\sqrt{-b}, b\}.$$

■ Reescrevendo o autovetor complexo q

$$q = \{1, i\omega, b\}.$$

$$\{1, i\omega, b\}.$$

■ O conjugado do vetor q-(qc)

$$qc = \text{FullSimplify}[\text{Refine}[\text{Conjugate}[q], b \in \text{Reals} \ \&\& \ b < 0]].$$

$$\{1, -i\omega, b\}.$$

■ Confirmando o vetor q

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

$$\text{FullSimplify}[A.q - i\omega q].$$

$$\{0, 0, 0\}.$$

■ Matriz transposta de A(AT)

$$AT = \text{Transpose}[A].$$

$$\{\{0, 0, -bc\}, \{1, 0, b\}, \{0, 1, c\}\}.$$

MatrixForm (AT)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -bc \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

■ Autovalores de AT - autovalores e respectivos autovetores

$$AP = \text{FullSimplify}[\text{Refine}[\text{Eigensystem}[AT], b \in \text{Reals} \ \&\& \ b < 0 \ \&\& \ c \in \text{Reals} \ \&\& \ c < 0]].$$

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{-b} & i\sqrt{-b} & c \\ \{i\sqrt{-bc}, -c - i\sqrt{-b}, 1\} & \{-i\sqrt{-bc}, i\sqrt{-b} - c, 1\} & \{-b, 0, 1\} \end{pmatrix}.$$

■ Autovetor adjunto p, satisfazendo $ATp = -i\omega p$

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

$$p = \left\{1, \frac{-b - ic\sqrt{-b}}{bc}, \frac{i\sqrt{-b}}{bc}\right\}.$$

$$\left\{1, \frac{-b - i\sqrt{-bc}}{bc}, \frac{i\sqrt{-b}}{bc}\right\}.$$

■ Reescrevendo o autovetor adjunto complexo p

$$p = \left\{1, \frac{-b - ic\omega}{bc}, \frac{i\omega}{bc}\right\}.$$

$$\left\{1, \frac{-b - i\omega c}{bc}, \frac{i\omega}{bc}\right\}.$$

■ O conjugado do vetor p(pc)

$$pc = \text{FullSimplify}[\text{Conjugate}[p], b \in \text{Reals} \ \&\& \ b < 0 \ \&\& \ c \in \text{Reals} \ \&\& \ c < 0 \ \&\& \ \omega > 0].$$

$$\left\{1, \frac{i\omega}{b} - \frac{1}{c}, -\frac{i\omega}{bc}\right\}.$$

■ Confirmando o vetor p

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

$FullSimplify[AT.pc - i \omega pc]$.

$\{0, 0, 0\}$.

■ Normalização de p com respeito a q

Fator de normalização u

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

Produto interno ($\langle pc, q \rangle = n$)

$$n = FullSimplify[pc.q].$$

$$2 - \frac{2i\sqrt{-b}}{c}.$$

$$n = 2 - \frac{2i\sqrt{-b}}{c}.$$

$\bar{E} = FullSimplify[Conjugate[n], b \in Reals \ \&\& \ b < 0 \ \&\& \ c \in Reals \ \&\& \ c < 0]$.

$$\frac{2i\sqrt{-b}}{c} + 2.$$

$$\bar{E} = \frac{2i\sqrt{-b}}{c} + 2.$$

$$u = FullSimplify[1/\bar{E}].$$

$$\frac{c}{2c + 2i\sqrt{-b}}.$$

■ Reescrevendo u em termo de ω

$$u_1 = \frac{c}{2i\omega + 2c}.$$

$$\frac{c}{2c + 2i\omega}.$$

Normalizando p(pN) $pN = u_1 * p$

$$\left\{ \frac{c}{2c + 2i\sqrt{-b}}, \frac{-b - i\sqrt{-b}c}{b(2c + 2i\sqrt{-b})}, \frac{i\sqrt{-b}}{b(2c + 2i\sqrt{-b})} \right\}.$$

$$\omega = \sqrt{-b}.$$

■ Conjugado de pN(pNa)

$$pNa = \left\{ \frac{c}{2c - 2i\sqrt{-b}}, \frac{-b + i\sqrt{-b}c}{b(2c - 2i\sqrt{-b})}, -\frac{i\sqrt{-b}}{b(2c - 2i\sqrt{-b})} \right\}.$$

■ Confirmando a normalização ($\langle p, q \rangle = 1$)

$$\omega = -b.$$

$FullSimplify[Refine[pNa . q]]$.

1.

■ Matriz inversa de A(AI)

$AI = Simplify[Inverse[A]]$.

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{-1}{bc} \right\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\} \right\}.$$

$MatrixForm[AI]$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & -\frac{1}{bc} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simplify[A . AI].

{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}.

■ As funções multilineares B,C,D e E

Definição da função B(x1,x2,x3)

$B_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}] := \{0, 0, 2x1y1\}$.

MatrixForm[$B_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}]$]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x1y1 \end{pmatrix}.$$

$B_i[q, q] := \{0, 0, 2\}$.

MatrixForm[$B_i[q, q]$]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$B_i[q, qc] := \{0, 0, 2\}$.

MatrixForm[$B_i[q, qc]$].

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Definição da função C(x1,x2,x3)

$C_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}] := \{0, 0, 0\}$.

MatrixForm[$C_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}]$].

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definição da função D(x1,x2,x3)

$D_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}, \{u1-, u2-, u3-\}] := \{0, 0, 0\}$.

MatrixForm[$D_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}, \{u1, u2, u3\}]$]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definição da função E(x1,x2,x3)

$$E_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}, \{u1-, u2-, u3-\}, \{v1-, v2-, v3-\}] := \{0, 0, 0\}.$$

$$\text{MatrixForm}[E_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}, \{u1, u2, u3\}, \{v1, v2, v3\}]]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■ **Determinando o número complexo G_{21}**

Os vetores complexos h_{11} e h_{20}

$$h_{11} = \text{FullSimplify}[AI.B_i[q, qc]] \left\{ -\frac{2}{bc}, 0, 0 \right\}.$$

$$\text{MatrixForm}[h_{11}]$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{bc} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h_{20} = \text{Inverse}[2i\omega \text{IdentityMatrix}[3] - A].B_i[q, q].$$

$$\left\{ \frac{2}{6i\sqrt{-bb} - 3bc}, \frac{4i\sqrt{-b}}{6i\sqrt{-bb} - 3bc}, \frac{8b}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \right\}.$$

$$\text{MatrixForm}[h_{20}]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \\ \frac{4i\sqrt{-b}}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \\ \frac{8b}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \end{pmatrix}.$$

As funções Bilineares $B_i[qc, h_{20}]$ e $B_i[q, h_{11}]$.

$$B_i[qc, h_{20}] := \left\{ 0, 0, \frac{4}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \right\}$$

$$\text{MatrixForm}[B_i[qc, h_{20}]]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{6i\sqrt{-bb} - 3bc} \end{pmatrix}.$$

$$B_i[q, h_{11}] := \left\{ 0, 0, \frac{-4}{bc} \right\}$$

$$\text{MatrixForm}[B_i[q, h_{11}]]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{bc} \end{pmatrix}.$$

■ **Componentes de G_{21}**

$$C1 = \text{Simplify}[pNa.C_i[q, q, qc]].$$

$$0.$$

$$P1 = \text{FullSimplify}[pNa.B_i[qc, h_{20}]].$$

$$\frac{2i\sqrt{-b}}{b(c-i\sqrt{-b})(6i\sqrt{-bb}-3bc)}.$$

$$P2 = \frac{-2pNa.B_i[q, h_{11}]}{4}.$$

$$\frac{b^2c - i\sqrt{-b}bc^2}{4}.$$

■ **Determinando G_{21}**

$$G_{21} = FullSimplify[P1 + P2 + C1].$$

$$\frac{2i}{3(-b)^{3/2}(2b+c(c-3i\sqrt{-b}))} + \frac{4}{b^2c - i\sqrt{-b}bc^2}.$$

■ **Determinando L_1**

$$L_1 = Simplify[Refine[ComplexExpand[Re[G_{21}], b < 0 \&\& c < 0 \&\& \omega > 0]].$$

$$\frac{16b - 2c^2}{bc^5 - 5b^2c^3 + 4b^3c}.$$

■ **Condição de Transversalidade**

$$A = \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$D[A, a].$$

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}.$$

$$D[A, a] /. a \rightarrow -bc.$$

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}.$$

$$q = \{1, i\sqrt{-b}, b\}.$$

$$\{1, i\sqrt{-b}, b\}.$$

$$f = (D[A, a] /. a \rightarrow -bc). q.$$

$$\{0, 0, 1\}.$$

$$pNa = \left\{ \frac{c}{2c - 2i\sqrt{-b}}, \frac{i\sqrt{-bc} - b}{2bc - 2i\sqrt{-bb}}, -\frac{i\sqrt{-b}}{2bc - 2i\sqrt{-bb}} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{c}{2c - 2i\sqrt{-b}}, \frac{i\sqrt{-bc} - b}{2bc - 2i\sqrt{-bb}}, -\frac{i\sqrt{-b}}{2bc - 2i\sqrt{-bb}} \right\}.$$

$$\lambda'(-bc) = pNa. f.$$

$$\frac{i\sqrt{-b}}{2bc - 2i\sqrt{-bb}}.$$

$$\gamma' = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Conjugate[Re[\lambda]]], b < 0 \&\& c < 0]].$$

$$\frac{1}{2b - 2c^2}.$$

Anexo B

Sistema de Lur'e

$$f_1[x_-, y_-, z_-] := y,$$

$$f_2[x_-, y_-, z_-] := x,$$

$$f_3[x_-, y_-, z_-] := -\alpha z - \beta y - x + x^2.$$

■ Equilíbrios

$$e = \text{Simplify}[\text{Solve}[f_1[x, y, z] == 0, f_2[x, y, z] == 0, f_3[x, y, z] == 0, x, y, z]].$$

$$\{\{y \rightarrow 0, z \rightarrow 0, x \rightarrow 0\}, \{y \rightarrow 0, z \rightarrow 0, x \rightarrow 1\}\}.$$

Equilíbrio origem (e_0)

$$e_0 = \{x, y, z\} /. e[[1]].$$

$$\{0, 0, 0\}.$$

Equilíbrio $x = 1$

$$e_1 = \{x, y, z\} /. e[[2]].$$

$$\{1, 0, 0\}.$$

■ Parte linear do campo - matriz Jacobiana A

$$DF_{x(0)}[\{x_-, y_-, z_-\}] := \{$$

$$\{Derivative[1, 0, 0][f_1][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 1, 0][f_1][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f_1][x, y, z]\},$$

$$\{Derivative[1, 0, 0][f_2][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f_2][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 0, 1][f_2][x, y, z]\}, \{Derivative[1, 0, 0][f_3][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f_3][x, y, z],$$

$$Derivative[0, 0, 1][f_3][x, y, z]\}.$$

$$A[\{x_-, y_-, z_-\}] := Df[\{x, y, z\}].$$

Matriz Jacobiana A

$$A[\{x, y, z\}].$$

$$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{2x - 1, -\beta, -\alpha\}\}.$$

$$\text{MatrixForm}[A[\{x, y, z\}]]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x - 1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

■ Matriz Jacobiana aplicada na origem (e_0)

$$A = A[e_0].$$

$\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-1, -\beta, -\alpha\}$.

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

■ **Polinômio característico calculado na origem e_0**

$p[\lambda_-] := \text{Det}[A - \lambda * \text{IdentityMatrix}[3]].$

$\text{Reduce}[p[\lambda]].$

$p(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1.$

Polinômio

$\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 1.$

■ **Superfície de bifurcação de hopf**

Superfície de bifurcação

$$\alpha = \frac{1}{\beta}.$$

$$\frac{1}{\beta}.$$

Reescrevendo a matriz Jacobiana

$A = \text{FullSimplify}[A].$

$\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-1, -\beta, -\frac{1}{\beta}\}$.

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\beta & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Reescrevendo o polinômio característico

$p_1[\lambda] := \text{Det}[A - \lambda * \text{IdentityMatrix}[3]].$

$\text{Simplify}[p_1[\lambda]].$

$$-\frac{\beta\lambda^3 + \lambda^2 + \beta^2\lambda + \beta}{\beta}.$$

■ **Autovetores da matriz A- autovalores e respectivos autovetores**

$\text{AV} = \text{FullSimplify}[\text{Refine}[\text{Eigensystem}[A], \beta \in \text{Reals} \ \&\& \ \beta > 0 \ \&\& \ \alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha > 0]].$

$$\left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\beta} & -i\sqrt{\beta} & i\sqrt{\beta} \\ \{\beta^2, -\beta, 1\} & \left\{-\frac{1}{\beta}, \frac{i}{\sqrt{\beta}}, 1\right\} & \left\{-\frac{1}{\beta}, -\frac{i}{\sqrt{\beta}}, 1\right\} \end{array} \right).$$

■ **Autovetor complexo q, satisfazendo $Aq = i\omega q$**

$q = \{1, i\sqrt{\beta}, -\beta\}.$

$\{1, i\sqrt{\beta}, -\beta\}.$

■ **O conjugado do vetor q**(qc)

qc= FullSimplify[Refine[Conjugate[q], $\beta \in \text{Reals} \ \&\& \ \beta > 0$]].

$$\{1, -i\sqrt{\beta}, -\beta\}.$$

■ **Confirmando o vetor q**

$$\omega = \sqrt{\beta}.$$

FullSimplify[A.q - i ω q].

$$\{0, 0, 0\}.$$

■ **Matriz transposta de A**(AT)

AT=Transpose[A].

$$\{\{0, 0, -1\}, \{1, 0, -\beta\}, \{0, 1, -\frac{1}{\beta}\}\}.$$

MatrixForm (AT)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

■ **Autovalores de AT - autovalores e respectivos autovetores**

AP=FullSimplify[Refine[Eigensystem[AT], $\beta \in \text{Reals} \ \&\& \ \beta > 0 \ \&\& \ \alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha > 0$]].

$$\left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{\beta} & -i\sqrt{\beta} & i\sqrt{\beta} \\ \{\beta, 0, 1\} & \left\{-\frac{i}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\beta} - i\sqrt{\beta}, 1\right\} & \left\{\frac{i}{\sqrt{\beta}}, i\sqrt{\beta} + \frac{1}{\beta}, 1\right\} \end{array} \right).$$

■ **Autovetor adjunto p, satisfazendo ATp = -i ω p**

$$\omega = \sqrt{\beta}.$$

$$p = \left\{1, \beta + \frac{i}{\sqrt{\beta}}, i\sqrt{\beta}\right\}.$$

$$\left\{1, \beta + \frac{i}{\sqrt{\beta}}, i\sqrt{\beta}\right\}.$$

■ **O conjugado do vetor p** (pc)

pc =FullSimplify[Refine[Conjugate[p], $\beta \in \text{Reals} \ \&\& \ \beta > 0 \ \&\& \ \alpha \in \text{Reals} \ \&\& \ \alpha > 0 \ \&\&$

$\omega > 0$].

$$\left\{1, \beta - \frac{i}{\sqrt{\beta}}, -i\sqrt{\beta}\right\}.$$

■ **Confirmando o vetor p**

$$\omega = \sqrt{\beta}.$$

FullSimplify[AT.pc - i ω pc].

$$\{0, 0, 0\}.$$

■ **Normalização de p com respeito a q**

Fator de normalização u

$$\omega = \sqrt{\beta}.$$

Produto interno ($\langle pc, q \rangle = n$).

$$n = FullSimplify[pc.q].$$

$$2i\beta^{3/2} + 2.$$

$\bar{E} = FullSimplify[Conjugate[n], \beta \in Reals \ \&\& \ \beta > 0 \ \&\& \ \alpha \in Reals \ \&\& \ \alpha > 0]$.

$$2 - 2i\beta^{3/2}.$$

$$u = FullSimplify[1/\bar{E}].$$

$$\frac{1}{2 - 2i\beta^{3/2}}.$$

■ Normalizando p(pN)

$$pN = u1 * p.$$

$$Simplify[pN].$$

$$\left\{ \frac{1}{2 - 2i\beta^{3/2}}, \frac{i}{2\sqrt{\beta}}, -\frac{\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} + 2i} \right\}.$$

■ Conjugado de pN(pNa)

$pNa = FullSimplify[Conjugate[pN], \beta \in Reals \ \&\& \ \beta > 0 \ \&\& \ \alpha \in Reals \ \&\& \ \alpha > 0]$.

$$\left\{ \frac{1}{2i\beta^{3/2} + 2}, -\frac{i}{2\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\frac{2i}{\sqrt{\beta}} - 2\beta} \right\}.$$

■ Confirmando a normalização ($\langle p, q \rangle = 1$)

$$\omega = \sqrt{\beta}.$$

$$FullSimplify[Refine[pNa.q]].$$

1.

■ Matriz inversa de A(AI)

$$AI = Simplify[Inverse[A]].$$

$$\left\{ \left\{ -\beta, -\frac{1}{\beta}, -1 \right\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\} \right\}.$$

MatrixForm[AI]

$$\begin{pmatrix} -\beta & -\frac{1}{\beta} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Simplify[A.AI].$$

$$\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}.$$

■ As funções multilineares B,C,D e E

Definição da função B(x1,x2,x3)

$$B_i[\{x1_-, x2_-, x3_-\}, \{y1_-, y2_-, y3_-\}] := \{0, 0, 2x1y1\}.$$

$$MatrixForm[B_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}]].$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix}.$$

$$B_i[q, q] = B_i[q, qc] := \{0, 0, 2\}.$$

$$\text{MatrixForm}[B_i[q, q] = B_i[q, qc]].$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Definição da função C(x1,x2,x3)

$$C_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}] := \{0, 0, 0\}.$$

$$\text{MatrixForm}[C_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}]].$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definição da função D(x1,x2,x3)

$$D_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}, \{u1-, u2-, u3-\}] := \{0, 0, 0\}$$

$$\text{MatrixForm}[D_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}, \{u1, u2, u3\}]].$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definição da função E(x1,x2,x3)

$$E_i[\{x1-, x2-, x3-\}, \{y1-, y2-, y3-\}, \{z1-, z2-, z3-\}, \{u1-, u2-, u3-\}, \{v1-, v2-, v3-\}] := \{0, 0, 0\}$$

$$\text{MatrixForm}[E_i[\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}, \{z1, z2, z3\}, \{u1, u2, u3\}, \{v1, v2, v3\}]].$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■ **Determinando o número complexo G_{21}**

Os vetores complexos h_{11} e h_{20}

$$h_{11} = \text{FullSimplify}[AI.B_i[q, qc]].$$

$$\{-2, 0, 0\}.$$

$$\text{MatrixForm}[h_{11}]$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$h_{20} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[2i\omega \text{IdentityMatrix}[3] - A].B_i[q, q]].$$

$$\left\{ \frac{2}{-6i\beta^{3/2} - 3}, \frac{4\sqrt{\beta}}{3i - 6\beta^{3/2}}, \frac{8i\beta}{3i - 6\beta^{3/2}} \right\}.$$

MatrixForm $[h_{20}]$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-6i\beta^{3/2} - 3}{4\sqrt{\beta}} \\ \frac{3i - 6\beta^{3/2}}{8i\beta} \\ 3i - 6\beta^{3/2} \end{pmatrix}.$$

As funções Bilineares $B_i[qc, h_{20}]$ e $B_i[q, h_{11}]$

$$B_i[qc, h_{20}] := \left\{ 0, 0, \frac{4}{-6i\beta^{3/2} - 3} \right\}.$$

MatrixForm $[B_i[qc, h_{20}]]$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -6i\beta^{3/2} - 3 \end{pmatrix}.$$

$$B_i[q, h_{11}] := \{0, 0, -4\}.$$

MatrixForm $[B_i[q, h_{11}]]$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

■ Componentes de G_{21}

$$C1 = \text{Simplify}[pNa.C_i[q, q, qc].$$

0.

$$P1 = \text{FullSimplify}[pNa.B_i[qc, h_{20}]].$$

$$\frac{2i\sqrt{\beta}}{-6\beta^3 + 9i\beta^{3/2} + 3}.$$

$$P2 = -2pNa.B_i[q, h_{11}].$$

$$\frac{8}{2i}.$$

$$\frac{2i}{\sqrt{\beta}} - 2\beta$$

■ Determinando G_{21}

$$G_{21} = \text{FullSimplify}[P1 + P2 + C1].$$

$$\frac{10i\sqrt{\beta} - 24\beta^2}{6\beta^3 - 9i\beta^{3/2} - 3}.$$

■ Determinando L_1

$$L_1 = \text{Simplify}[\text{Refine}[\text{ComplexExpand}[\text{Re}[G_{21}]], b < 0 \ \&\& \ c < 0 \ \&\& \ \omega > 0]].$$

$$\frac{2(8\beta^5 + \beta^2)}{4\beta^6 + 5\beta^3 + 1}.$$

■ Condição de Transversalidade

$$A = \{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-1, -\beta, -\alpha\}\}.$$

$$\{\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{-1, -\beta, -\alpha\}\}.$$

$$D[A, \alpha].$$

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, -1\}\}.$$

$$D[A, \alpha] /. \alpha \rightarrow 1/\beta.$$

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, -1\}\}.$$

$$q = \{1, i\sqrt{\beta}, -\beta\}.$$

$$\{1, i\sqrt{\beta}, -\beta\}.$$

$$f = (D[A, \alpha] /. \alpha \rightarrow 1/\beta). q$$

$$\{0, 0, \beta\}.$$

$$pNa = \left\{ \frac{1}{2i\beta^{3/2} + 2}, -\frac{i}{2\sqrt{\beta}}, -\frac{\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} - 2i} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{1}{2i\beta^{3/2} + 2}, -\frac{i}{2\sqrt{\beta}}, -\frac{\sqrt{\beta}}{2\beta^{3/2} - 2i} \right\}.$$

$$\gamma'(1/\beta) = pNa. f.$$

$$-\frac{\beta^{3/2}}{2\beta^{3/2} - 2i}.$$

$$t = -\frac{\beta^{3/2}}{2\beta^{3/2} - 2i}.$$

$$e = FullSimplify[ComplexExpand[Conjugate[Re[t]]], b < 0 && c < 0].$$

$$-\frac{\beta^3}{2\beta^3 + 2}.$$