

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Singularidades de Projeções e  
Aplicação à Geometria de Superfícies em  $\mathbb{R}^3$**

**Ana Paula de Paiva Pereira**

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias**

ITAJUBÁ, 21 DE JULHO DE 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

**Singularidades de Projeções e  
Aplicação à Geometria de Superfícies em  $\mathbb{R}^3$**

**Ana Paula de Paiva Pereira**

**Orientador: Prof. Dr. Fábio Scalco Dias**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática  
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em  
Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG

21 DE JULHO DE 2009

*Dedico este trabalho aos meus pais, Roberto e Vânia;  
ao meu irmão, Júnior; aos meus avós, Rosa e Avelino;  
e, à Tia Sônia.*

# Agradecimentos

“Agradeço ao Senhor das providências pela proteção e sustento.”

Agradeço ao meu orientador Fábio, não só pelo comprometimento e dedicação, mas, também, pelo cuidado, paciência e compreensão, sobretudo nos dias em que o tempo de estudo era escasso. Você foi muito importante para o meu crescimento profissional.

Àqueles que sacrificaram tanto para que eu aqui chegasse: mãe, obrigada, pelo amor incondicional e pela amizade; pai, pelo apoio e por me ensinar todos os dias; irmão, obrigada por estar sempre ao meu lado; vó Rosa, por ser “mãe” tantas vezes, e, por me dar sempre mais do que precisava; tia Sônia, obrigada por quebrar todos os galhos, sem dúvida, consegui terminar este trabalho porque me ajudou todas as vezes; meu avô Avelino, tão querido, pelo imenso carinho.

Agradeço à minha vó Teresa, pelo amor dispensado a todos; ao avô Careca, “pela casa sempre cheia de alegria e amigos”, sinto saudades! Agradeço, ainda, a Tia Bel e Tê, por cuidar desta família enorme!

A todos de minha família por participarem da minha vida de maneira tão especial.

Aos professores do ICE, em especial aos professores Luís Fernando, pelos esclarecimentos enriquecedores e críticas, sempre tão construtivas! Sou muito grata! E, ao Mestre Baêta, jamais esquecerei de suas aulas!

“Há um vilarejo ali onde areja um vento bom! Na varanda, quem descansa vê o horizonte deitar no chão.” Tenho um tremendo orgulho em pertencer à Mata. Deixei, lá, amigos de grande importância na minha vida. Dentre eles, Rosemiro (o melhor dos amigos) e sua esposa Alessandra, Camila e Giselle. Obrigada pela nossa “velha infância”. Agradeço, também, ao Luís Mauro e Regina, pela torcida e pelas orações.

Aos meus amigos inesquecíveis: Micheline, Saulo, Jussara e Vicente. Obrigada pelo apoio, pela paciência com minhas  $n$  mudanças! “Vou me lembrar de vocês, só enquanto eu respirar”!

Aos novos, mas igualmente importantes: Larissa, Vanessa e Amaro, e, Willian. Sentirei saudades eternas! Obrigada, por me alegrarem. Vocês tornaram os meus dias mais leves!

Aos mestrandos da sala de estudo, em especial, PA, Keyne, Cerqueira, Nivaldo, Gigante, Perestroika, Dante, Felipe, Guilhermes, Rafa, Tia Márcia, Adhimar, Natália, e, também, ao Sebastião e Sinval, que mesmo com toda a distância não me esqueço!

À CAPES, pelos meses financiados de dedicação exclusiva!

A todos que aqui não nomeei, mas que cruzaram meu caminho durante meu mestrado.

Há um propósito maior em tudo, mesmo que, a priori, não o reconheçamos. Há tempo para tudo nesta vida, e este é o de agradecer. Obrigada a todos!

*“Quando nada parece dar certo, lembro do cortador de pedras, martelando sua rocha talvez 100 vezes, sem que uma única rachadura apareça. Mas na centésima primeira martelada a pedra se abre em duas, e penso que não foi aquela que conseguiu isso, mas todas as que vieram antes.”*

# Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar a geometria diferencial plana local de uma superfície regular  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , usando a teoria de singularidades. Esta geometria é obtida através do estudo do contato de  $M$  com retas e planos. O contato com planos é medido através das singularidades dos elementos da família de funções altura  $H : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(p, u) \mapsto p \cdot u$ . O contato com retas, por sua vez, é medido através das singularidades dos elementos da família de projeções ortogonais  $P : M \times S^2 \rightarrow TS^2$ ,  $(p, u) \mapsto (u, p - (p \cdot u)u)$ .

Escrevendo  $M$  localmente na forma de Monge  $z = f(x, y)$  obtemos condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $f$  para identificar as singularidades genéricas de  $H_u$  e  $P_u$ . Estudamos, também, o comportamento das linhas assintóticas na vizinhança de uma cúspide de Gauss.

**Palavras chave:** Singularidades, Projeção Ortogonal, Função Altura, Cúspide de Gauss.

# Abstract

The aim of this work is to study the local flat geometry of smooth surfaces  $M$  in  $\mathbb{R}^3$  using singularity theory. This geometry is obtained by studying the contact of  $M$  with lines and planes. The contact with planes is measured by the singularities of the elements of the family of height functions  $H : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(p, u) \mapsto p \cdot u$ . The contact with lines is measured by the singularities of the elements of the family of projections to planes  $P : M \times S^2 \rightarrow TS^2$ ,  $(p, u) \mapsto (u, p - (p \cdot u)u)$ .

We write locally  $M$  in Monge form  $z = f(x, y)$  and obtain the conditions on the coefficients of the Taylor expansion of  $f$  for identifying the generic singularities of  $H_u, P_u$ . We also study the behavior of the asymptotic lines near a cusp of the Gauss map.

**Keywords:** Singularity, Orthogonal Projection, Height Functions, Cusps of Gauss Mappings

# Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Introdução	1
<b>1 Introdução à Teoria de Singularidades</b>	<b>5</b>
1.1 Aplicações de Classe $C^\infty$	5
1.2 Germes	6
1.3 Grupos de Mather e espaços tangentes	10
1.4 A Determinação finita e a Codimensão de um germe	14
1.5 Desdobramentos Versais	15
1.6 Genericidade e Transversalidade	18
<b>2 Classificação de Germes de Funções</b>	<b>20</b>
2.1 Determinação e Codimensão de Germes de Funções	20
2.2 Singularidades de Morse e Lema da Redução	24
2.3 Singularidades de Corank 1	26
2.4 Singularidades de Corank 2	28
<b>3 Germes <math>F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)</math></b>	<b>35</b>
3.1 Resumo da Classificação de Germes $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$	35
3.2 Diagramas de Bifurcação das Singularidades de $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) \leq 2$	37

<b>4</b>	<b>Geometria das Singularidades de Projeções</b>	<b>43</b>
4.1	Função Altura . . . . .	43
4.2	Geometria das Singularidades da Função Altura . . . . .	44
4.2.1	Função Altura de Curvas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	44
4.2.2	Função Altura de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	46
4.3	Projeção Ortogonal . . . . .	48
4.4	Geometria das Singularidades da Projeção Ortogonal . . . . .	49
4.5	Configuração das Curvas Assintóticas próximas à Cúspide de Gauss . . . . .	60
	<b>Bibliografia</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

3.1	Projeções estáveis de superfícies . . . . .	38
3.2	Transições no discriminante do Rabo de Andorinha . . . . .	39
3.3	$\Sigma(F_u)$ para Lábios . . . . .	39
3.4	$\Sigma(F_u)$ para Bicos . . . . .	39
3.5	$\Delta(F_u)$ para Lábios . . . . .	40
3.6	$\Delta(F_u)$ para Bicos . . . . .	40
3.7	Diagrama de bifurcação para Ganso . . . . .	40
3.8	Diagrama de bifurcação para Borboleta . . . . .	41
3.9	Diagrama de bifurcação para Gaivota . . . . .	42
4.1	Função altura . . . . .	45
4.2	Cúspide na imagem da aplicação de Gauss restrita à curva parabólica . . . . .	55
4.3	Curvas duais . . . . .	57
4.4	Configuração do tipo sela . . . . .	63
4.5	Configuração do tipo foco . . . . .	63
4.6	Configuração do tipo nó . . . . .	63
4.7	Diagrama de bifurcação do campo $Y$ . . . . .	65

# Lista de Tabelas

- 2.1 Conjunto de zeros e conjunto de pontos singulares . . . . . 29
- 2.2 Classificação dos germes  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  . . . . . 34
- 3.1 Classificação dos germes  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  . . . . . 37
- 4.1 Singularidades da Projeção Ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  . . . . . 59

# Introdução

A Geometria Genérica é um ramo da matemática que surgiu na década de sessenta graças aos trabalhos de René Thom, que, inspirado parcialmente por pesquisas de H. Whitney, proporcionou a ferramenta necessária para o estudo sistemático de fenômenos genéricos. Esta ferramenta, conhecida hoje pelo nome de Teoria de Singularidades, não só tem tido aplicações na geometria, mas também tem sido útil em campos como Sistemas Dinâmicos, Óptica, entre outros. De fato, foram nesses campos onde primeiro se aplicaram estas técnicas.

Um dos principais temas abordados pela Geometria Genérica é o estudo da geometria de contato de subvariedades do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com subespaços do espaço ambiente. Esses contatos podem ser estudados por meio da análise das singularidades de diferentes famílias de aplicações definidas sobre uma  $m$ -variedade  $M^m$ .

Montaldi [19] mostrou que se uma subvariedade é parametrizada localmente por  $\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e outra é definida localmente por uma submersão  $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-r}, 0)$  (ou vice-versa), o contato entre estas subvariedades é medido pelas  $\mathcal{K}$ -classes da composta  $\psi \circ \phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-r}, 0)$ . Na prática usamos o grupo  $\mathcal{A}$ , pois ele mede também o contato com as fibras de  $\psi^{-1}(0)$ , e fornece mais informações geométricas.

O primeiro passo é, então, estudar as  $\mathcal{A}$ -singularidades de germes de  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Existem várias listas de classificações para aplicações, por exemplo, classificações de aplicações  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  e  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  podem ser encontradas em [5], [22] e [24], respectivamente. Embora existam teoremas gerais sobre a aplicação da teoria de singularidades à geometria de subvariedades  $M^m \subset \mathbb{R}^n$ , cada par  $(n, p)$  tem suas peculiaridades e precisa ser estudado separadamente. Nesse sentido, é relevante o estudo do contato de subvariedades com subespaços lineares e esferas. Ver [3] para os resultados sobre este assunto entre os anos 1974 e 1994.

Sejam  $S^{n-1}$  a hipersfera no  $\mathbb{R}^n$  e  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma subvariedade de dimensão  $m$ . Temos em especial três famílias:

- A família de projeções em retas, chamada família de funções alturas, definida como

$$H : M \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto p \cdot u.$$

- A família de funções distância ao quadrado, definida como

$$d^2 : M \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, u) \mapsto \|p - u\|^2.$$

- A família de projeções ortogonais, definida como

$$P : M \times S^{n-1} \rightarrow TS^{n-1}$$

$$(p, u) \mapsto (u, p - (p \cdot u)u).$$

Observamos que o contato de  $M$  com hiperplanos (respectivamente, hiperesferas e retas) de dimensão  $n - 1$  é medido através das singularidades da função altura  $H$  (respectivamente, distância ao quadrado e projeção ortogonal).

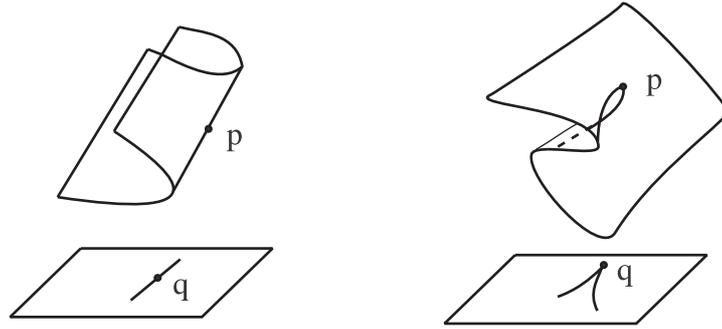
Nessa direção, encontramos vários trabalhos, em particular, para curvas em  $\mathbb{R}^3$  temos os trabalhos [10], [11] e [27], para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  os trabalhos [2] e [13], superfícies em  $\mathbb{R}^4$  os trabalhos [20] e [21], e, finalmente hipersuperfícies em  $\mathbb{R}^4$  temos o trabalho [23].

Como exemplo, consideremos uma curva  $C$  em  $\mathbb{R}^3$ , a função altura tem singularidade  $A_1$  em um ponto  $p \in C$  quando  $u$  é normal à  $C$  em  $p$ ; temos uma singularidade  $A_2$  quando  $u$  é direção binormal, e, por fim, temos uma singularidade  $A_3$  quando  $u$  é a direção binormal, e, além disso,  $p$  é um ponto de torção nula de  $C$ .

No caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , a função altura é singular se o plano de contato em questão é o plano tangente à superfície. A função altura tem uma singularidade  $A_{k \geq 2}$ , precisamente, nos pontos parabólicos. As Cúspides da aplicação de Gauss são identificadas com as singularidades da função altura do tipo  $A_3$ .

No caso da projeção ortogonal, consideremos uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  e a projeção ortogonal  $\Pi$  de  $M$  sobre um plano  $P$ , ou seja, todo ponto  $p \in M$  é projetado em um ponto  $q = \Pi(f(p))$  em  $P$ . Localmente podemos pensar na projeção como uma aplicação  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ .

Sobre o plano  $P$  veremos o “perfil” ou “contorno aparente” da superfície, como na figura abaixo.



Os pontos de  $M$  que dão origem a esse contorno são precisamente os pontos onde o plano tangente à superfície é vertical, ou seja, as singularidades de aplicações  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . Na figura podemos observar dois tipos de pontos especiais: Primeiramente, os pontos onde a superfície dobra sobre  $p$ . Tais pontos são chamados de *pontos de dobra*; e, um segundo, no encontro de duas dobras da superfície. Estes pontos são chamados de *pontos de cúspide*. Num certo sentido, Whitney [28] mostrou que, genericamente, apenas estas duas singularidades são encontradas quando projetamos superfícies num plano.

Podemos descobrir um pouco mais da geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  conhecendo a classificação de aplicações do plano no plano. Mais especificamente, o contato de uma superfície com uma reta de direção  $u$  é medido através das singularidades da projeção ortogonal na direção de  $u$ . Estas singularidades são dadas pelas singularidades dos germes  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  que foram estudadas por muitos autores, mas a lista mais completa foi obtida por Rieger em [24]. A projeção é singular se  $u \in T_p M$ . A singularidade é do tipo  $A_{k \geq 2}$  se  $u$  é direção assintótica, e do tipo lábios/bicos se  $u$  é direção assintótica e  $p$  é ponto parabólico. Os tipos de singularidades desta projeção dá informações sobre o perfil da superfície, que é a imagem do conjunto dos pontos de  $M$  onde a direção de projeção é tangente à superfície. O perfil é o discriminante da projeção.

Outra maneira de se obter informações geométricas relevantes é por meio do uso de técnicas de dualidade, sob o ponto de vista da Teoria de Singularidades, exploradas por Bruce e Wilkinson em [8]. Posteriormente, Bruce e Romero-Fuster [6], mostraram um resultado de dualidade entre a família de funções altura e a família de projeções em planos para curvas e superfícies no  $\mathbb{R}^3$ . Na verdade, mostraram que certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de funções altura têm como dual certos subconjuntos do conjunto bifurcação da família de projeções em planos. Usando, então, os modelos locais para este conjunto bifurcação, deduziram várias propriedades geométricas interessantes.

O objetivo deste trabalho é estudar a geometria diferencial local de curvas e superfícies

em  $\mathbb{R}^3$ , usando a Teoria de Singularidades.

Esta dissertação se desenvolve como a seguir:

No capítulo 1, introduzimos as noções preliminares básicas da Teoria de Singularidades, como germes, espaço de jatos, determinação e codimensão de um germe, entre outros.

No capítulo 2, apresentamos a classificação de germes de funções de  $\mathcal{R}$ -codimensão até 4. Essa classificação é usada para obter a geometria de curvas e superfícies através das singularidades da função altura.

No capítulo 3, apresentamos uma breve discussão sobre a classificação de germes de aplicações  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , que será usada para estudar a geometria de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  através das singularidades de projeções ortogonais, e, também, fizemos um estudo sobre os diagramas de bifurcação das singularidades de codimensão no máximo 2.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo da geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  através das singularidades de aplicações. Definimos o conceito de cúspide de Gauss e estabelecemos algumas equivalências geométricas desse conceito. Fizemos, também, um estudo sobre as configurações das linhas assintóticas na vizinhança de um ponto de cúspide de Gauss, e, finalizamos o capítulo com o principal teorema dessa dissertação, contido em [2], que descreve a geometria de todas as singularidades de germes de aplicações  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ .

# Capítulo 1

## Introdução à Teoria de Singularidades

Neste capítulo definimos importantes conceitos da teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis, tais como: germes de aplicações, a determinação finita e a codimensão de um germe, grupos de Mather e desdobramentos. As principais referências para este capítulo são [4], [16], [26].

### 1.1 Aplicações de Classe $C^\infty$

Nesta seção,  $U$  e  $V$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^p$ , respectivamente.

**Definição 1.1.** *Uma aplicação  $f : U \rightarrow V$  é **suave**, ou  $C^\infty$ , se esta possui derivadas de ordens arbitrárias.*

**Definição 1.2.** *Dada uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , dizemos que  $x \in U$  é um **ponto singular** se a matriz Jacobiana*

$$Df = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (x) \quad 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$$

*não possui o rank máximo possível em  $x \in \mathbb{R}^n$ . Caso contrário, dizemos que  $x$  é regular.*

**Definição 1.3.** *Dizemos que uma bijeção  $\varphi : U \rightarrow V$  é um **difeomorfismo** se  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são  $C^\infty$ . Uma aplicação  $C^\infty$   $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é um **difeomorfismo local** no ponto  $x \in U$  se existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x$  em  $U$ , tal que,  $\varphi(V)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $V \rightarrow \varphi(V)$ ,  $x \mapsto \varphi(x)$ , é um difeomorfismo.*

**Teorema 1.1. (Teorema da Função Inversa)** Uma aplicação  $C^\infty$   $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo local em  $x \in U$  se, e somente se, a Jacobiana  $D\varphi(x)$  de  $\varphi$  em  $x$  é inversível.

**Definição 1.4.** Seja  $x \in U$ . Dizemos que uma aplicação de classe  $C^\infty$   $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma **imersão** em  $x$  se  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  for injetora (notemos que necessariamente  $n \leq p$ ). Dizemos que  $f$  é **submersão** em  $x$  se  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  for sobrejetora ( $n \geq p$ ). Dizemos que  $f$  é **submersão** (respectivamente, **imersão**) se  $f$  for **submersão** (respectivamente, **imersão**) em todo  $x \in U$ .

Na busca da classificação de aplicações, as duas importantes proposições a seguir, consequências do Teorema da Função Inversa, nos dão os modelos para aplicações regulares.

**Proposição 1.1. (Forma Local das Submersões)** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $f(0) = 0$  e  $f$  é uma submersão em  $0$ . Então existe um difeomorfismo  $\varphi : V \rightarrow W$ ,  $V$  e  $W$  vizinhanças de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$ , tal que,  $\varphi(0) = 0$  e

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p).$$

**Proposição 1.2. (Forma Local das Imersões)** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $f(0) = 0$  e  $f$  é uma imersão em  $0$ . Então existe um difeomorfismo  $h : V \rightarrow W$ ,  $V$  e  $W$  vizinhanças de  $0$  em  $\mathbb{R}^p$ , tal que,  $h(0) = 0$  e

$$(h \circ f)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

## 1.2 Germes

A fim de discutir o comportamento local de uma aplicação, isto é, numa vizinhança pequena e arbitrária de um ponto  $x$ , é conveniente introduzirmos a noção de germe.

**Definição 1.5.** Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $g : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  aplicações  $C^\infty$  definidas em vizinhanças abertas  $U_1$  e  $U_2$  de  $x$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são equivalentes, e escrevemos  $f \sim g$ , se existir uma vizinhança  $U \ni x$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subset U_1 \cap U_2$  tal que  $f|_U = g|_U$ , ou seja, se  $f$  e  $g$  coincidem em uma vizinhança  $U$  de  $x$ . Esta é uma relação de equivalência.

**Definição 1.6.** As classes de equivalência sob esta relação são chamadas **germes de aplicações  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^p$  em  $x$** . Os elementos de uma classe são chamados **representantes do germe**.

Frequentemente, usamos o mesmo símbolo para denotar um germe ou seu representante.

Notemos que se  $f$  e  $g$  são representantes do mesmo germe em  $x$ , então temos  $f(x) = g(x)$ . Portanto, qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em  $x$ . Em vista desse fato, é usual a notação

$$f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

para indicar um germe de aplicação em  $x$ . Sem perda de generalidade, podemos tomar  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ .

O conjunto de todos os germes  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  será denotado por

$$\mathcal{E}_{n,p} := \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p\}.$$

Quando  $p = 1$  (germes de funções), a notação usada é  $\mathcal{E}_n$ . Geometricamente, se  $f_1$  e  $f_2$  forem dois representantes da classe de equivalência de  $f$ , os gráficos dessas funções coincidem num aberto contendo a origem.

O germe de uma aplicação  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  é dito **singular** se a matriz Jacobiana  $Df(0)$  não tem rank máximo, caso contrário,  $f$  é dito regular.

**Definição 1.7.** *Definimos*

$$m_n^k := \{f \in \mathcal{E}_n : D^v f(0) = 0, \text{ para todo } |v| < k\},$$

onde  $k$  é um inteiro positivo,  $v \in \mathbb{N}^n$ ,  $|v| = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .

Para  $k = 1$  escreveremos simplesmente

$$m_n := \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}.$$

**A álgebra  $\mathcal{E}_{n,p}$  :**

a.  $\mathcal{E}_n$  é um anel comutativo, com identidade [1].

As operações  $[f] + [g] = [f + g]$  e  $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$ , onde  $[f]$  e  $[g]$  denotam os germes de  $f$  e  $g$  respectivamente, estão bem definidas e fazem de  $\mathcal{E}_n$  um anel comutativo com identidade [1].

b.  $\mathcal{E}_n$  é um anel local (isto é, possui um único ideal maximal). O seu único ideal maximal é  $m_n$ . De fato, seja  $\mathcal{M}$  um outro ideal e suponha que  $f \in \mathcal{M} - m_n$ . Então  $f(0) \neq 0$ , portanto  $\frac{1}{f}$  está bem definida. Temos  $(\frac{1}{f}) \cdot f = 1 \in \mathcal{M}$ , portanto,  $\mathcal{M} = \mathcal{E}_n$ .

c.  $\mathcal{E}_{n,p}$  é um  $\mathcal{E}_n$ -módulo.

$(\mathcal{E}_{n,p}, +)$  é, claramente, um grupo abeliano.  $\mathcal{E}_n$  é um anel, e a operação

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_{n,p} &\longrightarrow \mathcal{E}_{n,p} \\ (f, F) &\mapsto f.F = (f.F_1, \dots, f.F_p)\end{aligned}$$

satisfaz

$$\begin{aligned}f.(g.F) &= (f.g).F \\ f.(F + G) &= f.F + f.G \\ (f + g).F &= f.F + g.F \\ 1.F &= F.\end{aligned}$$

onde  $f, g \in \mathcal{E}_n$  e  $F, G \in \mathcal{E}_{n,p}$ .

Apresentamos, a seguir, um resultado bastante utilizado em Teoria de Singularidades.

**Lema 1.1. (*Lema de Hadamard*)** *Sejam  $U$  uma vizinhança convexa de 0 em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : U \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^\infty$ , tal que  $f(0, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^q$ . Então existem funções  $f_1, \dots, f_n$  definidas em  $U \times \mathbb{R}^q$  tais que  $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ , onde  $x_1, \dots, x_n$  são funções coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Considere

$$\begin{aligned}h : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) := f(tx, y).\end{aligned}$$

Assim,  $h(0) = f(0, y) = 0$  e  $h(1) = f(x, y)$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e regra da cadeia:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= h(1) - h(0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} h(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y) dt.\end{aligned}$$

Portanto,  $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x, y)$ , onde  $f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y) dt$ .

■

Pelo Lema de Hadamard podemos escrever  $m_n^k \subset \mathcal{E}_n$  como

$$m_n^k = \langle x^v : v = (v_1, \dots, v_n), |v| = k \rangle,$$

ou seja,  $m_n^k$  é o ideal gerado pelos monômios  $x_1^{v_1}, \dots, x_n^{v_n}$  onde os  $v_j$  são inteiros não negativos e  $v_1 + v_2 + \dots + v_n = k$ ,  $k$  inteiro positivo.

**Definição 1.8.** *Sejam  $R$  um anel e  $M$  um  $R$ -módulo. Um  $R$ -módulo é **finitamente gerado** se existem elementos  $a_1, \dots, a_n \in M$  tais que para todo  $m \in M$*

$$m = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n,$$

$r_1, \dots, r_n \in R$ .

**Lema 1.2. (Lema de Nakayama)** *Seja  $R$  um anel comutativo com identidade 1. Seja  $m$  um ideal de  $R$  tal que  $1 + x$  é inversível em  $R$ ,  $\forall x \in m$ . Sejam  $M$  um  $R$ -módulo, e,  $A$  e  $B$   $R$ -submódulos de  $M$  com  $A$  finitamente gerado. Se  $A \subset B + mA$  então  $A \subset B$ .*

**Demonstração:** Sejam  $a_1, \dots, a_t$  geradores de  $A$ . Por hipótese, temos

$$a_i = b_i + \lambda_{i1} a_1 + \dots + \lambda_{it} a_t$$

onde  $\lambda_{ij} \in m$ ,  $b_j \in B$ ,  $i, j = 1, \dots, t$ .

Seja  $\Lambda = (\lambda_{ij})$ . Então

$$(I - \Lambda) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Mas  $\det(I - \Lambda) = 1 - \lambda$ , onde  $\lambda \in m$ . Logo  $\det(I - \Lambda)$  é inversível em  $R$ . Assim,  $a_i \in B$ . Portanto,  $A \subset B$ .

■

Vamos, agora, introduzir uma outra relação de equivalência entre germes de aplicações.

**Definição 1.9.** *Dizemos que os germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$  são  **$k$ -equivalentes** se  $D^v f(0) = D^v g(0)$ ,  $\forall v \in \mathbb{N}^n$ ,  $|v| \leq k$ , onde  $|v| = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .*

**Definição 1.10.** A classe de equivalência de todos os germes  $g$ , que são  $k$ -equivalentes a  $f$ , é chamada  **$k$ -jato** de  $f$ . Denotamos o  $k$ -jato de  $f$  por  $j^k f(0)$  e por  $J^k(n, p)$  o conjunto de  $k$ -jatos de germes  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Assim, dizemos que dois germes  $f$  e  $g \in \mathcal{E}_{n,p}$  admitem o mesmo  $k$ -jato se as suas derivadas de ordem menor ou igual a  $k$  coincidem. Logo,  $f$  e  $g$  possuem o mesmo polinômio de Taylor de grau  $k$  na origem.

Podemos identificar o espaço de  $k$ -jatos, de aplicações  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com o espaço  $\frac{\mathcal{E}_n}{m_n^{k+1}}$  da seguinte forma: consideremos a aplicação jato

$$\begin{aligned} j^k : \mathcal{E}_n &\rightarrow J^k(n, 1) \\ f &\mapsto j^k f(x); \end{aligned}$$

temos que  $j^k$  é um homomorfismo sobrejetor e  $\ker(j^k) = m_n^{k+1}$ . Logo, pelo teorema do homomorfismo temos que

$$J^k(n, 1) \cong \frac{\mathcal{E}_n}{m_n^{k+1}} \text{ (isomorfismo de anéis).}$$

**Observação 1.1.**  $J^k(n, 1)$  é um espaço vetorial de dimensão  $\binom{n+k}{k}$ .

No caso geral, temos que

$$J^k(n, p) \cong \frac{\mathcal{E}_n}{m_n^{k+1}} \times \dots \times \frac{\mathcal{E}_n}{m_n^{k+1}} \text{ (} p \text{ cópias).}$$

### 1.3 Grupos de Mather e espaços tangentes

Sejam  $G$  um grupo e  $M$  um conjunto.

**Definição 1.11.** Uma ação de  $(G, \cdot)$  em  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \alpha(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo:

1.  $\alpha(1, x) = x$ , onde  $1$  é a identidade de  $G$ ;
2.  $\alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$ , para  $\forall x \in M, \forall g, h \in G$ .

**Definição 1.12.** *Seja  $G$  uma variedade  $n$ -dimensional  $C^\infty$  e  $(G, \cdot)$  um grupo.  $G$  é **Grupo de Lie** se a aplicação*

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab^{-1} \end{aligned}$$

é  $C^\infty$ .

Dada uma ação, podemos introduzir uma relação de equivalência em  $M$  da seguinte forma

$$x \sim y \text{ se, e somente se, existe } g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x.$$

As classes de equivalência são chamadas **órbitas** sob a ação de  $G$ . Denotamos a classe de equivalência que contém  $x$  por  $G \cdot x = \{ y : y = g \cdot x, g \in G \}$  e a chamamos de  $G$ -órbita de  $x$ .

Estamos interessados nas classes de equivalência que são órbitas da ação de certos grupos que atuam sobre  $\mathcal{E}_{n,p}$ . Os principais, conhecidos como grupos de Mather, são os usualmente denotados por  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{C}$ ; no entanto, descreveremos aqui apenas os três primeiros, que serão utilizados neste trabalho.

Consideremos o grupo  $\mathcal{R} := \{ \varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) : \varphi \text{ é germe de difeomorfismo} \}$ . A ação deste sobre  $m_n \mathcal{E}_{n,p}$ , por composição à direita

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times m_n \mathcal{E}_{n,p} &\rightarrow m_n \mathcal{E}_{n,p} \\ (\varphi, f) &\mapsto \varphi \cdot f = f \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

é chamada  $\mathcal{R}$ -equivalência. O grupo  $\mathcal{R}$  é também chamado de grupo de mudanças de coordenadas na fonte.

Consideremos, agora, o grupo  $\mathcal{L} := \{ k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) : k \text{ é germe de difeomorfismo} \}$ . A ação deste sobre  $m_n \mathcal{E}_{n,p}$ , por composição à esquerda

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \times m_n \mathcal{E}_{n,p} &\longrightarrow m_n \mathcal{E}_{n,p} \\ (k, f) &\longmapsto k \cdot f = k \circ f \end{aligned}$$

é chamada  $\mathcal{L}$ -equivalência. O grupo  $\mathcal{L}$  é também chamado de grupo de mudanças de coordenadas na meta.

O grupo  $\mathcal{A} = \{ (\varphi, k) : \varphi \in \mathcal{R} \text{ e } k \in \mathcal{L} \}$ , é obtido como o produto direto  $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$  e sua ação é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times m_n \mathcal{E}_{n,p} &\longrightarrow m_n \mathcal{E}_{n,p} \\ ((\varphi, k), f) &\longmapsto (\varphi, k) \cdot f = k \circ f \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

**Definição 1.13.** Dizemos que dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes (respectivamente,  $\mathcal{L}$ -equivalentes) se existir  $\varphi \in \mathcal{R}$  (respectivamente,  $k \in \mathcal{L}$ ) tal que  $f = g \circ \varphi^{-1}$  (respectivamente,  $f = k \circ g$ ).

**Definição 1.14.** Dizemos que dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se existir  $(\varphi, k) \in \mathcal{A}$  tal que  $g = k \circ f \circ \varphi^{-1}$ . Ou seja,  $f$  e  $g$  pertencem à mesma  $\mathcal{A}$ -órbita.

Em outras palavras,  $f$  e  $g \in m_n \mathcal{E}_{n,p}$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se existirem germes de difeomorfismos  $\varphi \in \mathcal{R}$  e  $k \in \mathcal{L}$  tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Ações de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{A}$  sobre  $m_n \mathcal{E}_{n,p}$  induzem ações dos grupos de Lie (de dimensão finita)  $J^k \mathcal{R}$ ,  $J^k \mathcal{L}$  e  $J^k \mathcal{A}$  sobre  $J^k(n, p)$ .

Como exemplo, consideremos a ação de  $J^k \mathcal{R}$  sobre  $J^k(n, p)$

$$\begin{aligned} J^k \mathcal{R} \times J^k(n, p) &\longrightarrow J^k(n, p) \\ (\gamma, z) &\longmapsto \gamma \cdot z \end{aligned}$$

onde  $\gamma = j^k(\varphi(0))$ ,  $z = j^k(f(0))$ ,  $\varphi \in \mathcal{R}$ ,  $f \in m_n \mathcal{E}_{n,p}$ , e

$$\gamma \cdot z = j^k(\varphi(0)) \cdot j^k(f(0)) = j^k(\varphi \cdot f)(0) = j^k(f \circ \varphi^{-1})(0).$$

Consideremos a aplicação órbita

$$\begin{aligned} \gamma_f : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto \gamma_f(g) = g \circ f. \end{aligned}$$

Observemos que a imagem de  $\gamma_f$  é a  $G$ -órbita de  $f$ ,  $G \cdot f$ .

Estamos interessados em descrever o “espaço tangente” à  $\mathcal{A}$ -órbita de  $f$ . Notemos que, em dimensão finita, as  $\mathcal{G}$ -órbitas de uma ação  $C^\infty$  de um grupo de Lie  $G$  sobre  $M$ , são variedades imersas. Assim, a derivada da aplicação órbita de  $G$  em  $M$ ,  $T_e \gamma_f$ , leva  $T_e G$  sobre  $T_f(G \cdot f)$ .

Uma sugestão de Renè Thom é que para dimensão infinita, no caso do grupo  $\mathcal{A}$ , segue uma formulação análoga a do caso finito. Para isso comecemos com a definição seguinte:

**Definição 1.15.** *Sejam  $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ ,  $T\mathbb{R}^n$  e  $T\mathbb{R}^p$  os fibrados tangentes de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^p$ , respectivamente,  $\pi_p$  o germe da projeção natural e  $Tf$  a aplicação tangente induzida por  $f$ . Um germe de campo de vetores ao longo de  $f$ ,  $\zeta$ , é um germe de aplicação tal que  $\pi_p \circ \zeta = f$*

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R}^p \\ \pi_n \downarrow & \nearrow \zeta & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

Denotamos o conjunto de todos os germes de campos vetoriais ao longo de  $f$  por  $\theta(f)$ .

Se denotarmos por  $\theta(n)$  o conjunto de germes na origem de campos de vetores do  $\mathbb{R}^n$  (ou seja, campos de vetores ao longo da identidade  $I_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ), um elemento  $\xi \in \theta(n)$  será aplicado por  $tf$  a um campo de vetores de  $\theta(f)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} tf : \theta(n) &\rightarrow \theta(f) \\ \xi &\mapsto tf(\xi) = Tf \circ \xi. \end{aligned}$$

Escolhendo  $(x_1, \dots, x_n)$  como um sistema local de coordenadas em  $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $\theta(n)$  é um  $\mathcal{E}_n$ -módulo livre com base  $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ .

Por outro lado, se  $\eta \in \theta(p)$ , então temos outra aplicação

$$\begin{aligned} \omega f : \theta(p) &\rightarrow \theta(f) \\ \eta &\mapsto \omega f(\eta) = \eta \circ f. \end{aligned}$$

Da mesma forma, escolhendo  $(y_1, \dots, y_p)$  como um sistema local de coordenadas em  $(\mathbb{R}^p, 0)$ , temos que  $\theta(p)$  é um  $\mathcal{E}_p$ -módulo livre gerado por  $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$ ,  $\omega f$  é simplesmente a aplicação induzida por

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{E}_p &\longrightarrow \mathcal{E}_n \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f. \end{aligned}$$

**Definição 1.16.** *Os **espaços tangentes** às  $\mathcal{G}$ -órbitas em  $f$ , onde  $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}\}$  são:*

$$\begin{aligned} T\mathcal{R}f &= tf(m_n\theta(n)); \\ T\mathcal{L}f &= \omega f(m_p\theta(p)); \\ T\mathcal{A}f &= T\mathcal{R}f + T\mathcal{L}f. \end{aligned}$$

Os espaços tangentes acima se referem ao caso em que a fonte e a meta dos germes são fixas ( $x = 0$  e  $y = 0$ ). Se permitimos que estas variem, definimos os “espaços tangentes

estendidos” às  $\mathcal{G}$ -órbitas em  $f$ , onde  $\mathcal{G} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}\}$  como sendo:

$$T\mathcal{R}_e f = tf(\theta(n));$$

$$T\mathcal{L}_e f = \omega f(\theta(p));$$

$$T\mathcal{A}_e f = T\mathcal{R}_e f + T\mathcal{L}_e f.$$

## 1.4 A Determinação finita e a Codimensão de um germe

Pretende-se, agora, de modo mais específico, estudar a seguinte questão: quando uma função  $f$  é determinada, em uma vizinhança de um ponto  $p$ , por um de seus polinômios de Taylor em  $p$ , no sentido de qualquer outra função  $g$  que tenha o mesmo polinômio de Taylor de  $f$  coincide com ela em torno de  $p$ , a menos de uma mudança de coordenadas?

**Definição 1.17.** *Sejam  $f \in \mathcal{E}_{n,p}$  e  $\mathcal{G}$  um grupo agindo sobre  $\mathcal{E}_{n,p}$ . Dizemos que o germe  $f$  é  $k$ -**determinado** em relação a  $\mathcal{G}$  se, para qualquer  $g \in \mathcal{E}_{n,p}$  tal que  $j^k f(0) = j^k g(0)$ , tem-se  $g \in \mathcal{G}$ -órbita de  $f$ . Dizemos, também, que o germe  $f$  é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado.*

Um germe é **finitamente determinado** se este é  $k$ -determinado para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

A determinação finita significa que o germe é equivalente a um de seus polinômios de Taylor e que o problema da classificação pode ser reduzido ao espaço dos  $k$ -jatos, que é um espaço vetorial de dimensão finita.

**Definição 1.18.** *O grau de  $k$ -determinação do germe  $f$ , denotado por  $\det(f, \mathcal{G})$ , é o menor inteiro  $k$  tal que  $f$  é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado. O germe  $f$  é dito  $k$ -finitamente determinado quando  $\det(f, \mathcal{G}) < \infty$ .*

A investigação da determinação finita começou com os trabalhos de John Mather em 1960 com uma série de artigos sobre o que viria a ser a teoria de singularidades. Em 1968, Mather deu duas condições, uma suficiente e outra necessária para uma função ser determinada por, pelo menos, um de seus polinômios de Taylor. Terence Gaffney e Andrew du Plessis melhoraram bastante as aproximações do grau de determinação de germes. Mas, foi somente em [7] que a questão do grau de determinação finita foi completamente resolvida usando as ações de grupos unipotentes.

O Teorema abaixo é conhecido como o critério da determinação finita para os grupos de Mather, a demonstração pode ser encontrada em [26].

**Teorema 1.2.** *Seja  $f \in \mathcal{E}_{n,p}$  e  $\mathcal{G}$  um grupo de Mather. Temos*

- (i) *Se  $f$  é  $k$ - $\mathcal{G}$ -determinado então  $m_n^{k+1}\theta(f) \subset T\mathcal{G}f$ .*
- (ii) *Se  $m_n^{k+1} \subset T\mathcal{G}f$  então  $f$  é  $(\epsilon k + 1)$ - $\mathcal{G}$ -determinado.*
- (iii) *Se  $\det(f, \mathcal{G}) = d < \infty$ , então  $m_n^{(d+1)\epsilon}\theta(f) \subset T\mathcal{G}f$ .*

Onde  $\epsilon = 1$  para  $\mathcal{G} = \mathcal{R}$  e  $\epsilon = 2$  para  $\mathcal{G} = \mathcal{L}, \mathcal{A}$ .

As afirmações (a)-(d) abaixo seguem das afirmações (i),(ii) e (iii) do teorema acima.

**Corolário 1.1.** *Para  $f \in \mathcal{E}_{n,p}$  e  $\mathcal{G}$  um grupo de Mather, são equivalentes*

- (a)  *$f$  é finitamente  $\mathcal{G}$ -determinado;*
- (b) *Para algum  $k$ ,  $m_n^k\theta(f) \subset T\mathcal{G}f$ ;*
- (c)  *$\det(f, \mathcal{G}) < \infty$ ;*
- (d)  *$\det(f, \mathcal{G}_e) < \infty$ .*

**Definição 1.19.** *Seja  $\mathcal{G}$  um dos grupos usuais  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{A}$ . A  $\mathcal{G}$ -codimensão e a  $\mathcal{G}_e$ -codimensão de um germe  $f$  são dadas, respectivamente, por*

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{m_n \mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G}f} \right) \quad \text{cod}(f, \mathcal{G}_e) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathcal{E}_{n,p}}{T\mathcal{G}_e f} \right).$$

## 1.5 Desdobramentos Versais

Seja  $f$  um germe finitamente determinado. Podemos considerar as “deformações de  $f$ ” (família de germes de aplicações que contém o germe  $f$ ) e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família especial que contém todos estes tipos. Na verdade, queremos que qualquer outra deformação de  $f$  seja obtida a partir desta família. Tal família chama-se deformação versal. Assim, vamos formalizar esses conceitos.

**Definição 1.20.** Um **desdobramento** a  $s$ -parâmetros de um germe  $f \in m_n \mathcal{E}_{n,p}$  é um germe

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \\ (x, u) &\longmapsto (f(x, u), u) \end{aligned}$$

tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$ . O germe  $F_u(x) = f(x, u)$  é chamado uma **deformação** de  $f$ .

Em outras palavras, uma deformação de  $f$  é uma família de germes de aplicações que contém o germe  $f$ .

**Definição 1.21.** Dois desdobramentos a  $s$ -parâmetros  $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0)$  de  $f$  são **isomorfos** se existirem germes de difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0) \\ \psi : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \end{aligned}$$

que são desdobramentos a  $s$ -parâmetros das funções identidades sobre  $(\mathbb{R}^n, 0)$  e  $(\mathbb{R}^p, 0)$ , respectivamente, tais que

$$G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}.$$

Dado  $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ , definimos o “**pull-back**” de  $F$  por  $h$ , denotado por  $h^*F$ , como sendo o desdobramento a  $t$ -parâmetros

$$(h^*F)(x, v) = (F_{h(v)}(x), v).$$

No caso em que  $F$  e  $G$  são desdobramentos de  $f$  com número de parâmetros diferentes, a definição de isomorfismo é dada pelo “pull-back”.

Dois desdobramentos a  $s$ -parâmetros  $F$  e  $G$  de  $f$  são ditos **equivalentes** se existir um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ , tal que,  $G$  é isomorfo a  $h^*F$ .

**Definição 1.22.** Seja  $F$  um desdobramento a  $s$ -parâmetros de  $f$ . Um desdobramento a  $t$ -parâmetros  $G$  é dito **induzido** de  $F$  se existir um germe  $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  tal que  $G$  é isomorfo a  $h^*F$ .

**Definição 1.23.**

1.  $F$  é um **desdobramento  $\mathcal{G}$ -versal** se todo desdobramento de  $f$  é induzido por  $F$ . Neste caso, dizemos que  $F_u$  é uma **deformação versal**.
2.  $F$  é **trivial** se é isomorfo ao desdobramento constante  $(x, u) \mapsto (f(x), u)$ .

3.  $F_u(x)$  é **estável** se todos os desdobramentos de  $f$  são triviais.

Segue agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais, devido a Martinet [18].

**Teorema 1.3. (Critério de versalidade)** *O desdobramento  $F$  é versal se, e somente se,*

$$T\mathcal{G}_e f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_{n,p},$$

onde  $\dot{F}_j(x) = \frac{\partial F_u}{\partial u_j}(x)$ .

Observamos que, se  $f$  é  $k$ -determinada, podemos trabalhar em  $J^k(n, p)$ , isto é,  $F$  é versal se, e somente se,

$$j^k(T\mathcal{G}_e f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\}) = J^k(n, p).$$

**Definição 1.24.**

- *O conjunto dos pontos críticos de  $F$  é*

$$\Sigma(F) = \{(x, u) : DF_x(x, u) \text{ é singular}\},$$

onde  $DF_x$  denota a derivada de  $F$  com relação a  $x$ .

- *O conjunto discriminante de  $F$  é dado por*

$$\Delta(F) = \{(F(x, u), u) : (x, u) \in \Sigma(F)\}.$$

- *O conjunto bifurcação é definido por*

$$Bif(F) = \{u \in \mathbb{R}^s : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ com } f_u \text{ instável em } x\}.$$

Uma aplicação importante dos desdobramentos versais é a seguinte:

**Proposição 1.3.** *Quaisquer dois desdobramentos versais de um germe  $f$ , com o mesmo número de parâmetros, têm conjunto de pontos críticos, discriminante e bifurcação difeomorfos.*

**Demonstração:** Ver por exemplo [4].

## 1.6 Genericidade e Transversalidade

Fortemente relacionado com o conceito de versalidade está o conceito de genericidade.

**Definição 1.25.** *Uma propriedade  $P$  de elementos de  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  é **genérica** se o conjunto de todos os  $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  satisfazendo  $P$  contém um conjunto  $A$  o qual deve ser uma intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos.*

Em outras palavras, dizemos que uma propriedade é genérica em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  se ela se verifica para um conjunto residual de aplicações. A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade. O resultado central, neste contexto, é conhecido como teorema de transversalidade de Thom (ver por exemplo [16]).

**Definição 1.26.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $Y \subset \mathbb{R}^p$  uma variedade diferenciável. Dizemos que  $f$  é transversal a  $Y$  em  $x$ , e representamos por  $f \pitchfork Y$ , se  $f(x) \notin Y$ , ou  $f(x) \in Y$  e*

$$D_{f(x)}Y + D_x f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^p.$$

*Dizemos que  $f$  é transversal a  $Y$ , se  $f \pitchfork Y$  em  $x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

Como mostra o seguinte teorema, o conceito de transversalidade pode ser entendido como uma generalização do conceito de valor regular de uma aplicação diferenciável.

**Teorema 1.4. [16]** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $Y \subset \mathbb{R}^p$  uma variedade diferenciável com  $f$  transversal a  $Y$ . Então,  $f^{-1}(Y)$  é uma subvariedade diferenciável em  $\mathbb{R}^n$ , que tem a mesma codimensão de  $Y$ .*

A seguir, enunciaremos os teoremas de transversalidade, que são as principais ferramentas para provar que certas condições geométricas (as quais podem ser traduzidas em termos de condições de transversalidade em espaços de jatos) são satisfeitas para um subconjunto residual (e portanto denso) de aplicações.

**Teorema 1.5. (Transversalidade de Thom)** *Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e  $W$  uma subvariedade de  $J^k(M, N)$ . Consideremos*

$$T_W = \{f \in C^\infty(M, N) : j^k f \pitchfork W\}.$$

*Então,  $T_W$  é um subconjunto residual de  $C^\infty(M, N)$  com a topologia  $C^\infty$  de Whitney.*

A seguir, enunciaremos um teorema de James Montaldi, um dos mais eficientes resultados de transversalidade (ou de genericidade).

**Teorema 1.6. (Montaldi) [19]** *Sejam  $X, Y, Z, U$  variedades diferenciáveis e  $\mathcal{G}$  um dos grupos de Mather:  $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$ . Se  $F : Y \times U \rightarrow Z$  é uma aplicação diferenciável, então, dada uma aplicação  $g : X \rightarrow Y$ , pode-se definir uma composta  $F_g : X \times U \rightarrow Z$  por  $F_g(x, u) = F(g(x), u)$ . Suponha-se que  $F : Y \times U \rightarrow Z$  seja uma aplicação localmente  $\mathcal{G}$ -versal, e seja  $S$  uma subvariedade  $\mathcal{G}^k$ -invariante de  $J^k(X, Z)$ . Então, para um conjunto residual de imersões  $X \hookrightarrow Y$ , a aplicação  $k$ -jato  $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$  é transversal a  $S$ , onde o subscrito 1 significa que estamos considerando os  $k$ -jatos com respeito a primeira variável  $x$ .*

# Capítulo 2

## Classificação de Germes de Funções

O objetivo deste capítulo é classificar germes  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $0 \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) \leq 4$ , e, também, explicitar o seu desdobramento versal.

Do capítulo 1, Proposição (1.1), sabemos que se  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  é um germe de uma função  $C^\infty$  que não possui ponto singular,  $f$  pode ser escrita da forma:  $f \sim_{\mathcal{R}} x_1$ . Se  $f$  é singular na origem, o objetivo é elaborar uma lista de singularidades finitamente determinadas. Para estes germes utilizaremos o Lema de Morse e o Lema da Redução, os quais classificam os pontos singulares não degenerados e inicia a classificação dos degenerados, respectivamente. Consideraremos, neste capítulo, apenas germes  $f \in \mathcal{E}_n$  e a  $\mathcal{R}$ -equivalência. As principais referências para este capítulo são [9] e [16].

### 2.1 Determinação e Codimensão de Germes de Funções

Nesta seção, apresentaremos algumas definições básicas e, para estabelecer uma relação interessante envolvendo os invariantes  $\text{cod}(f, \mathcal{R})$  e  $\text{det}(f, \mathcal{R})$ , reescreveremos o Teorema (1.2) no caso particular onde  $\mathcal{G} = \mathcal{R}$ , obtendo, assim, o resultado conhecido como Lema de Mather.

**Definição 2.1.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $r = \text{rank}(D^2f)(x)$ , onde  $D^2f(x)$  é a matriz Hessiana de  $f$  em  $x$ . Definimos **corank** como  $\text{corf} := n - r$ .*

**Definição 2.2.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Um ponto singular  $x \in U$  é **não degenerado** se  $D^2f(x)$  é inversível. Caso contrário, o ponto  $x$  é chamado **degenerado**.*

**Exemplo 2.1.** *Para funções de uma variável, um ponto  $x$  é um ponto singular não degenerado se, e somente se,  $f'(x) = 0$  e  $f''(x) \neq 0$ .*

O corank é a medida de degenerescência de pontos singulares. Assim, o corank é diferente de zero exatamente quando o ponto  $x$  é degenerado.

**Definição 2.3.** *O Ideal Jacobiano  $Jf$  de um germe  $f \in \mathcal{E}_n$  é o ideal de  $\mathcal{E}_n$  gerado pelos germes das derivadas parciais  $D_i f$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; isto é,*

$$Jf = \langle D_1 f, \dots, D_n f \rangle_{\mathcal{E}_n}.$$

Segue das definições (1.16) e (2.3), que o espaço tangente e o espaço tangente estendido a  $f$ , segundo o grupo  $\mathcal{R}$ , é o ideal  $m_n Jf$  e  $Jf$ , respectivamente. Temos então:

$$T\mathcal{R}f = m_n Jf \quad T\mathcal{R}_e f = Jf.$$

Adotaremos, neste trabalho,  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{m_n}{Jf} \right)$ , pois é esta que será usada para estabelecer quais as singularidades que são genéricas nas famílias de projeções, segundo o Teorema de Montaldi (1.6). A codimensão de um germe definida, desta forma, pode ser encontrada em [9] e [1].

Assim, a  $\mathcal{R}$ -codimensão e a  $\mathcal{R}_e$ -codimensão de um germe de função serão dadas, respectivamente, por:

$$\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{m_n}{Jf} \right) \quad \text{cod}(f, \mathcal{R}_e) = \dim_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathcal{E}_n}{Jf} \right).$$

O Critério de Versalidade (1.3), para o caso onde  $\mathcal{G} = \mathcal{R}_e$ , se reescreve como:

$$Jf + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_n. \quad (2.1)$$

onde  $\dot{F}_j(x) = \frac{\partial F_u}{\partial u_j}(x)$ .

Sendo  $f \in \mathcal{E}_n$  tal que  $0 < \text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ , segue a seguinte relação entre a  $\mathcal{R}$ -codimensão e a  $\mathcal{R}_e$ -codimensão :

$$\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \text{cod}(f, \mathcal{R}_e) - 1. \quad (2.2)$$

Temos, ainda, para o grupo  $\mathcal{R}$  e  $f \in m_2^2$  com  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ , que

$$\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{m_n Jf} - n - 1. \quad (2.3)$$

Em 1968 Mather deu duas condições, uma suficiente e outra necessária, para uma função ser determinada pelo seu  $k$ -ésimo polinômio de Taylor. Como consequência, Mather caracterizou tais funções determinando para quais isto ocorre. Estes Teoremas são conhecidos como Lemas de Mather:

**Teorema 2.1. (Condição Suficiente)** Se  $m_n^k \subset m_n Jf$ , então  $f \in \mathcal{E}_n$  é  $k$ -determinado.

**Teorema 2.2. (Condição Necessária)** Se  $f \in \mathcal{E}_n$  é  $k$ -determinado, então  $m_n^{k+1} \subset m_n Jf$ .

**Corolário 2.1.** Um germe  $f \in \mathcal{E}_n$  é finitamente determinado se, e somente se, existe um inteiro positivo  $k$  tal que  $m_n^k \subset m_n Jf$ . Se  $k$  é o menor inteiro com esta propriedade, então  $\det(f, \mathcal{R}) \in \{k, k - 1\}$ .

**Demonstração:** A primeira afirmação segue diretamente dos Teoremas (2.1) e (2.2).

Seja  $k$  o menor inteiro tal que  $m_n^k \subset m_n Jf$ . Então, pelo Teorema (2.1),  $f$  é  $k$ -determinado. Por outro lado,  $m_n^{k-1} \not\subset m_n Jf$ , então, pelo Teorema (2.2),  $f$  não é  $k - 2$ -determinado. Logo,  $\det(f, \mathcal{R}) = k$  ou  $k - 1$ . ■

**Corolário 2.2.** A determinação finita de um germe  $f \in m_n^2$  é equivalente a  $m_n^k \subset Jf$ .

Decorrem as seguintes propriedades para a determinação e codimensão:

**Observação 2.1.**

***Propriedades de determinação e codimensão***

- (i) Se um germe  $f \in m_n^2$  é finitamente determinado, então a origem é um ponto singular isolado.
- (ii) Um germe  $f \in m_n^2$  possui codimensão finita se, e somente se, é finitamente determinado.
- (iii) Se  $f \in m_n^2$  é independente de uma de suas variáveis, então  $f$  não é finitamente determinado.
- (iv) Um germe  $f \in m_n^2$  possui  $\det(f, \mathcal{R}) = 2$  se, e somente se, a origem é um ponto singular não degenerado de  $f$ .

**Proposição 2.1.** Seja  $f \in m_n^2$  um germe  $k$ -determinado. Se  $g \in m_n^2$  é equivalente a  $f$ , então  $f$  e  $g$  possuem a mesma determinação e codimensão.

**Demonstração:** Ver [16] ou [9]. ■

Abaixo, seguem duas proposições que fornecem uma relação, interessante, entre determinação-codimensão e corank-codimensão.

**Proposição 2.2.** *Seja  $f \in m_n^2$  com  $0 < \text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ . Então  $\det(f, \mathcal{R}) \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) + 2$ .*

**Demonstração:** Seja  $l = \text{cod}(f, \mathcal{R})$  com  $0 < \text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ . Então, pela Observação (2.1-ii) a  $\det(f, \mathcal{R})$  é finita. Pelo Corolário (2.2), existe um menor inteiro positivo  $k$ , tal que  $m_n^k \subset Jf$ .

Como  $l = \text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim \frac{m_n}{Jf}$ , temos que:

$$l = \dim \frac{m_n}{Jf} = \dim \frac{m_n}{m_n^2} + \dim \frac{m_n^2}{m_n^3} + \cdots + \dim \frac{m_n^{k-1}}{Jf} \geq k - 1.$$

Por outro lado,  $m_n^k \subset Jf$ , segue que,  $m_n^{k+1} \subset m_n Jf$ . Então, pelo Teorema (2.1),  $\det(f, \mathcal{R}) = k + 1$ . Portanto,  $\det(f, \mathcal{R}) \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) + 2$ . ■

Temos a seguinte relação entre corank e codimensão:

**Proposição 2.3.** *Seja  $f \in m_n^2$  um germe com  $0 < \text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$  e  $\text{cor}f = k$ . Então,  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) \geq \frac{k(k+1)}{2}$ .*

**Demonstração:** Ver [9]. ■

Notemos, então, pela Proposição (2.3) que, quando a  $\mathcal{R}$ -codimensão de um germe  $f \in m_n^2$  está entre 1 e 4, então o corank de  $f$  é igual a 1 ou 2; e ainda, quando o corank de  $f$  é igual a 2 temos a  $\mathcal{R}$ -codimensão igual a 3 ou 4.

Para a classificação de funções de  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , necessitamos calcular a determinação e a codimensão de alguns germes “especiais”. Apresentamos, a seguir, alguns destes cálculos.

**Exemplo 2.2.** *O germe de  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 - xy^2$ , possui  $\det(f, \mathcal{R}) = \text{cod}(f, \mathcal{R}) = 3$ .*

**Demonstração:** Temos que  $Jf = \langle 3x^2 - y^2, xy \rangle_{\mathcal{E}_2}$ .

(Determinação) Como  $j^2f(0) = 0$ , onde  $j^2f(0)$  é a expansão de Taylor até ordem 2, então,  $\det(f, \mathcal{R}) \neq 2$ . Temos,

$$\begin{aligned} m_2Jf &= \langle x, y \rangle \langle 3x^2 - y^2, xy \rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= \langle 3x^3 - xy^2, x^2y, 3x^2y - y^3, xy^3 \rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= m_2^3. \end{aligned}$$

Assim,  $m_2^3 \subset m_2Jf$ , e pelo Teorema (2.1),  $\det(f, \mathcal{R}) = 3$ .

(Codimensão) Pela Equação (2.3), podemos escrever:  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = \dim \frac{\mathcal{E}_2}{m_2Jf} - 3$ . Então, como  $\dim \frac{\mathcal{E}_2}{m_2^3} = 6$ , temos que  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 3$ . ■

**Exemplo 2.3.** *Os germes de  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^3 + y^3$ ,  $g(x, y) = -x^2y - y^4$ , possuem  $\det(f, \mathcal{R}) = \text{cod}(f, \mathcal{R}) = 3$  e  $\det(g, \mathcal{R}) = \det(-g, \mathcal{R}) = \text{cod}(g, \mathcal{R}) = \text{cod}(-g, \mathcal{R}) = 4$ , respectivamente; e,  $g$  não é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $-g$ .*

**Demonstração:** Obviamente,  $\det(g, \mathcal{R}) = \det(-g, \mathcal{R})$  e  $\text{cod}(g, \mathcal{R}) = \text{cod}(-g, \mathcal{R})$ . Os cálculos da determinação e da codimensão dos germes  $f$  e  $g$  seguem de forma análoga ao Exemplo anterior. Pode ser visto em [9] a demonstração de que  $g$  não é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $-g$ . ■

## 2.2 Singularidades de Morse e Lema da Redução

O resultado seguinte é conhecido como **Lema de Morse** e nos diz que se a origem é um ponto singular não degenerado,  $f$  é determinado por seu polinômio de Taylor de grau 2 na origem.

**Teorema 2.3. (Lema de Morse)** *Seja  $f \in m_n^2$ . Então  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 0$  se, e somente se,  $f$  tem uma singularidade não degenerada na origem, ou seja,  $f$  é Morse. Neste caso  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_s^2 + x_{s+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 0$ , então  $\dim \frac{m_n}{Jf} = 0$ . Assim  $Jf = m_n$ . Logo, segue da Observação (2.1-iv) e da Definição (2.2) que 0 é uma singularidade não degenerada.

( $\Leftarrow$ ) Não é difícil verificar que se  $f$  é não degenerada, então  $Jf = m_n$ , logo,  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 0$ .

Finalmente, como  $Jf = m_n$ , temos que  $m_n^2 \subset m_n Jf$ , e, pelo Teorema de Mather (2.1),  $\det(f, \mathcal{R}) = 2$ , ou seja,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $j^2 f(0)$ , que é uma forma quadrática não degenerada. Segue, por uma adequada mudança linear de coordenadas [17], que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_s^2 + x_{s+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

■

O Lema de Morse classifica totalmente os germes de corank e codimensão iguais a zero. Para a classificação de germes de corank e codimensão diferentes de zero, precisamos primeiramente do seguinte resultado. Sendo  $f \in m_n^2$  tal que  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) \geq 1$ , então  $D^2 f(0)$  tem rank  $r < n$ .

**Lema 2.1.** (*Lema da Redução ou “Splitting Lemma”*) *Seja  $f \in m_n^2$  um germe  $\mathcal{R}$ -finitamente determinado de corf = k. Então,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente ao germe*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto g(x_1, \dots, x_k) + (\pm x_{k+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2),$$

onde  $g \in m_k^3$ .

**Demonstração:** Podemos encontrar coordenadas locais nas quais a submatriz

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right)_{k+1 \leq i, j \leq n}$$

da matriz Hessiana de  $f$ , é não singular. Assim, a restrição de  $f$  ao subespaço  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$  tem uma singularidade não degenerada na origem. Seja  $f_0 = f|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}}$ . Logo,  $f_0 \in \mathcal{E}_{n-k}$  é Morse. Portanto,  $f_0$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a

$$q(x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=k+1}^n \pm x_i^2.$$

Mas,

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = f_0(x_{k+1}, \dots, x_n) + f'(x_1, \dots, x_n),$$

onde  $f'(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$ . Afirmamos que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a

$$h(x_1, \dots, x_n) = q(x_{k+1}, \dots, x_n) + \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$$

onde  $\tilde{f}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$ . De fato, temos  $q = f_0 \circ \varphi$  onde  $\varphi$  é germe de difeomorfismo nas variáveis  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Seja  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n))$ . Assim,

$$\begin{aligned} f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_k, \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n)) \\ &= f_0 \circ \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n) + f' \circ \psi(x_1, \dots, x_n) \\ &= q + \tilde{f}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{f} = f' \circ \psi$ , e mais

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) &= f' \circ \psi(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= f'(0, \dots, 0, \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n)) = 0. \end{aligned}$$

Temos que  $h$  é uma deformação de  $q$ . Mas,  $Q(u, x_{k+1}, \dots, x_n) = q(x_{k+1}, \dots, x_n) + u$  é uma deformação versal de  $q$ . Logo,  $h$  é induzida de  $Q$ , isto é,  $h$  é equivalente (como deformação) a  $g^*Q$  para algum  $g : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . Em particular,  $h$  é equivalente (como germe) a

$$\begin{aligned} (g^*Q)(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= Q(g(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= q(x_{k+1}, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Como o  $\text{cor}f$  é  $k$  segue que  $g \in m_k^3$ . ■

**Proposição 2.4.** *Os germes  $f$  e  $g$  do Lema da Redução possuem a mesma codimensão.*

## 2.3 Singularidades de Corank 1

Consideremos um germe  $f \in m_n^2$  para o qual  $\text{cor}f = 1$ . Pelo Lema da Redução, temos que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma  $q(x_2, \dots, x_n) + g(x_1)$ . Então, o problema neste caso, se reduz a classificar funções de uma só variável.

**Proposição 2.5.** *Seja  $f \in m_n^2$  um germe com  $\text{cor}f = 1$  e  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = k - 2$ . Então,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \pm x_1^k \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

**Demonstração:** Como  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ , então, pela Observação (2.1-ii),  $f$  é um germe finitamente determinado. Segue do Lema da Redução que

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto g(x_1) \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

onde  $g \in m_1^3$ . Além disso, pela Proposição (2.4),  $\text{cod}(g, \mathcal{R}) = \text{cod}(f, \mathcal{R}) = k - 2$ .

Assim, é suficiente mostrarmos que  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $\pm x_1^k$ . Suponhamos  $g \in m_1^j, \forall j$ . Logo,  $\frac{\mathcal{E}_1}{m_1^j} \subset \frac{\mathcal{E}_1}{Jg}, \forall j$ . Portanto,  $\frac{\mathcal{E}_1}{Jg} \geq j, \forall j$ . Assim,  $g$  possui  $\text{cod}(g, \mathcal{R})$  infinita, o que é uma contradição.

Então, existe um inteiro  $j$  tal que  $g \in m_1^j$  e  $g \notin m_1^{j+1}$ . Logo, segue do Lema de Hadamard que  $g(x_1) = x_1^j h(x_1)$  e  $h(0) \neq 0$ . Temos

$$\begin{aligned} k - 2 = \text{cod}(g, \mathcal{R}) &= \dim \frac{\mathcal{E}_1}{Jg} - 1 \\ &= \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\langle jx_1^{j-1}h + x_1^j \frac{dh}{dx_1} \rangle} - 1 \\ &= \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\langle x_1^{j-1}(jh + x_1 \frac{dh}{dx_1}) \rangle} - 1. \end{aligned}$$

Como  $\left(jh + x_1 \frac{dh}{dx_1}\right)(0) \neq 0$ , o germe  $jh + x_1 \frac{dh}{dx_1}$  é invertível, logo

$$k - 2 = \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\langle x_1^{j-1}(jh + x_1 \frac{dh}{dx_1}) \rangle} - 1 = \dim \frac{\mathcal{E}_1}{\langle x_1^{j-1} \rangle} - 1 = j - 2.$$

Segue que  $j = k$ .

Suponhamos  $k$  ímpar. Seja  $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  um germe dado por  $\phi(x_1) = x_1(h(x_1))^{1/k}$ . Temos que  $\phi'(0) \neq 0$ . Logo,  $\phi$  é inversível. Agora,  $g(x_1) = (\phi(x_1))^k$ . Segue que  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $x_1^k$ . Analogamente, se  $k$  é par e  $h(0) > 0$  temos que  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $x_1^k$ . Se  $k$  é par e  $h(0) < 0$ , tomando  $\phi(x_1) = x_1(-h(x_1))^{1/k}$ , segue que  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $-x_1^k$ . Portanto,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \pm x_1^k \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

■

Se, na Proposição acima, nos restringirmos aos germes com  $1 \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) \leq 4$ , então, a menos da soma de uma forma quadrática nas outras variáveis, obtemos os germes,  $x^3$ ,  $\pm x^4$ ,  $x^5$  e  $\pm x^6$ .

Estas singularidades são conhecidas como  $A_{k-1}$  pois a  $\mathcal{R}_e$ -codimensão é  $k-1$ , e possuem  $\mathcal{R}$ -codimensão igual a  $k-2$ . Pelo Teorema da Versalidade (1.3), o desdobramento versal é dado por

$$(\pm 1)^{k+1}x^k + u_{k-2}x^{k-2} + \cdots + u_1x.$$

## 2.4 Singularidades de Corank 2

Consideremos, agora, germes de  $\text{cor}f = 2$ . Portanto, pela Proposição (2.3), segue que  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) \in \{3, 4\}$ . Segue, ainda, do Lema da Redução, que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow g(x, y) \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

onde  $g \in m_2^3$ . Assim, classificar  $f$  é equivalente a classificar  $g$ .

Para a classificação de germes com corank 2, precisamos da classificação de formas cúbicas em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.4.** Um polinômio homogêneo  $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$  em  $\mathbb{R}[x, y]$  de terceiro grau é chamado **uma forma cúbica em  $\mathbb{R}^2$** .

**Proposição 2.6.** Seja  $p$  uma forma cúbica em  $\mathbb{R}^2$ . Existe uma mudança linear de coordenadas  $\tau$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $p \circ \tau$  é uma das seguintes cinco formas cúbicas em  $\mathbb{R}^2$ :

$$0, x^3, x^2y, x^3 - xy^2, x^3 + y^3. \quad (2.4)$$

As formas em (2.4) não são, duas a duas, linearmente equivalentes.

**Demonstração:** Mostraremos primeiro a unicidade: duas formas em (2.4) não são linearmente equivalentes, isto é, não podem ser transformadas uma na outra através de um isomorfismo linear  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Temos que a forma nula é invariante sob  $\tau$ , assim só as outras formas têm que ser consideradas.

Consideremos o conjunto dos zeros e o conjunto dos pontos singulares destas formas:

	Conjunto de zeros	Conjunto de pontos singulares
$x^3$	$\{x = 0\}$	$\{x = 0\}$
$xy^2$	$\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$	$\{y = 0\}$
$x^3 - xy^2$	$\{x = 0\} \cup \{x = y\} \cup \{x = -y\}$	$\{0\}$
$x^3 + xy^2$	$\{x = 0\}$	$\{0\}$

Tabela 2.1: Conjunto de zeros e conjunto de pontos singulares

Afirmamos que se  $p$  e  $q$  são formas cúbicas em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $p \circ \tau = q$ , então,  $\tau$  leva o conjunto de zeros de  $q$  no conjunto de zeros de  $p$ . De fato, seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $q(x, y) = 0$ . Então  $p \circ \tau(x, y) = 0$ , assim  $\tau(x, y) \in p^{-1}(0)$ , isto é,  $\tau(q^{-1}(0)) \subset p^{-1}(0)$ . Como  $q \circ \tau^{-1} = p$ , podemos raciocinar analogamente para mostrar que  $p^{-1}(0) \subset \tau(q^{-1}(0))$ .

Além disso,  $\tau$  leva o conjunto dos pontos singulares de  $q$  no conjunto dos pontos singulares de  $p$ . De fato, temos que  $\tau(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$  com  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial p \circ \tau}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\tau(x_0, y_0))\alpha + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}}(\tau(x_0, y_0))\gamma. \\ \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial p \circ \tau}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}(\tau(x_0, y_0))\beta + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{y}}(\tau(x_0, y_0))\delta. \end{aligned}$$

Colocando na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(\tau(x_0, y_0)) \\ \frac{\partial p}{\partial y}(\tau(x_0, y_0)) \end{bmatrix}.$$

Portanto, se  $(x_0, y_0)$  é ponto singular de  $q$  temos que  $\tau(x_0, y_0)$  é ponto singular de  $p$ , e, reciprocamente, se  $(x_1, y_1)$  é ponto singular de  $p$ , temos que existe  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(x_1, y_1) = \tau(x_0, y_0)$ . Assim  $(x_0, y_0)$  é ponto singular de  $q$ .

Observando a tabela acima temos que duas formas em (2.4) ou seus conjuntos de zeros ou seus conjuntos de pontos singulares não podem ser transformados um no outro através de um isomorfismo linear. Com isso, concluímos, que quaisquer duas formas em (2.4) são não linearmente equivalentes.

Mostraremos, agora, que toda forma cúbica  $p \in \mathbb{R}[x, y]$  é linearmente equivalente a uma das formas em 2.4. Sejam  $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ ,  $\tau(x, y) = (\alpha x + \beta y, \delta x + \gamma y)$ , com  $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$  e  $p'(x, y) = p(\tau(x, y)) = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3$ , com

$$\begin{aligned}
a' &= a\alpha^3 + b\alpha^2\gamma + c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3 \\
b' &= 3a\alpha^2\beta + b(2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta) + c(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + 3d\gamma^2\delta \\
c' &= 3a\alpha\beta^2 + b(2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma) + c(2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2) + 3d\gamma\delta^2 \\
d' &= a\beta^3 + b\beta^2\delta + c\beta\delta^2 + d\delta^3.
\end{aligned}$$

Podemos escolher  $\tau$  tal que  $d' = 0$ , pois se  $a = 0$ , tomamos  $\alpha = \delta = 0$  e  $\beta = \gamma = 1$ ; se  $a \neq 0$ , tomamos  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\gamma = 0$  e  $\beta$  é tal que  $a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d = 0$ . Consequentemente, podemos tomar  $p$  da seguinte forma  $p(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2$ .

Agora,  $\tau$  pode ser escolhido de forma que  $b' = d' = 0$ , pois se  $c \neq 0$ , tomamos  $\alpha = \delta = 1$ ,  $\beta = 0$  e  $\gamma = -\frac{b}{2c}$ ; e quando  $c = 0$  temos dois casos: se  $b \neq 0$ , podemos tomar  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 1$ ,  $\delta = -\frac{a}{b}$ , e, se  $b = 0$  podemos tomar  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\delta = 1$  e  $\gamma = 1$ .

Assim, não há nenhuma restrição em assumir  $p$  da forma  $p(x, y) = ax^3 + cxy^2$ .

Observemos agora os seguintes casos:

- se  $a = 0$  e  $c = 0$ , então  $p(x, y) = 0$ ;
- se  $a = 0$  e  $c \neq 0$ , então  $p(x, y) = cxy^2$ , se  $\tau(x, y) = \left(\frac{x}{c}, y\right)$ , temos  $p \circ \tau(x, y) = xy^2$ ;
- se  $a \neq 0$  e  $c = 0$ , temos  $p(x, y) = ax^3$ , se  $\tau(x, y) = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/3}x, y\right)$ , temos  $p \circ \tau(x, y) = x^3$ ;
- se  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$  temos  $p(x, y) = ax^3 + cxy^2$ , assim se  $\frac{c}{a} > 0$ , tomando  $\tau(x, y) = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/3}x, \left(\frac{a^{1/3}}{c}\right)^{1/2}y\right)$ , obtemos  $p \circ \tau(x, y) = x^3 + xy^2$ , e se  $\frac{c}{a} < 0$ , tomando  $\tau(x, y) = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/3}x, \left(-\frac{a^{1/3}}{c}\right)^{1/2}y\right)$ , obtemos  $p \circ \tau(x, y) = x^3 - xy^2$ .

■

As formas cúbicas em (2.4), as quais  $p$  é equivalente, são chamadas **formas cúbicas normais**. Note que uma forma cúbica  $p$  possui a mesma forma normal que  $-p$ , considerando a transformação linear  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ .

É fácil mostrar, ainda, que além das formas cúbicas normais em (2.4) serem, duas a duas, linearmente inequivalentes, também são  $\mathcal{R}$ -inequivalentes como germes.

**Observação 2.2.** *Se observarmos os pontos singulares das Formas Normais em (2.4), vemos que a origem é um ponto singular de  $0$ ,  $x^3$  e  $x^2y$  que não é isolado. Como germes equivalentes possuem mesma codimensão e determinação, temos por (2.1-ii), que qualquer germe equivalente à  $0$ ,  $x^3$  ou  $x^2y$  possui codimensão e determinação infinitas. Consideremos, porém, um germe equivalente a  $x^3 - xy^2$  ou  $x^3 + y^3$ , segue dos Exemplos (2.2) e (2.3) que este germe possui determinação e codimensão iguais a 3.*

**Proposição 2.7.** *Seja  $f \in m_n^2$  um germe com  $\text{corf} = 2$  e  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 3$ . Então,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a um dos seguintes germes*

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x^3 - xy^2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow (x^3 + y^3) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

**Demonstração:** Como  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) < \infty$ , então, pela Observação (2.1-ii),  $f$  é um germe finitamente determinado. Segue do Lema da Redução que

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto g(x, y) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

onde  $g \in m_2^3$ . Além disso, pela Proposição (2.4),  $\text{cod}(g, \mathcal{R}) = \text{cod}(f, \mathcal{R}) = 3$ .

Mostraremos primeiro que  $\det(g, \mathcal{R}) = 3$ . Como  $Jg \subset m_2^2$ , segue que,  $\mathcal{A} := m_2 Jg \subset m_2^3$ . Note que

$$\dim \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{A}} = \dim \frac{\mathcal{E}_2}{m_2^3} + \dim \frac{m_2^3}{\mathcal{A}}.$$

E ainda,  $\dim \frac{\mathcal{E}_2}{m_2^3} = 6$ , e pela Relação (2.3),  $\dim \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{A}} = 3 + \text{cod}(g, \mathcal{R}) = 6$ . Temos, então, que  $\dim \frac{m_2^3}{\mathcal{A}} = 0$  e, segue que,  $\mathcal{A} = m_2^3$ . Logo, pelo Teorema (2.1) concluímos que  $\det(g, \mathcal{R}) = 3$ . Então  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $j^3g(0)$ , e como  $g \in m_2^3$  então  $j^3g(0)$  é uma forma cúbica em  $\mathbb{R}^2$ , e a afirmação segue da Observação (2.2) e da inequivalência dos germes das formas cúbicas em (2.4). ■

Estas singularidades são chamadas  $D_{4\pm}$ . O desdobramento versal é dado por

$$x^3 \pm xy^2 + u_3x^2 + u_2x + u_1y.$$

**Teorema 2.4.** *Seja  $f \in m_n^2$  um germe com  $\text{corf} = 2$  e  $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 4$ . Então,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a um dos seguintes germes*

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow \pm(x^2y + y^4) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

**Demonstração:** Pelo Lema da Redução, temos que  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente ao germe

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow g(x, y) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2,$$

onde  $g \in m_2^3$  tem a mesma codimensão de  $f$ .

Seja  $g$  um germe com  $\text{cod}(g, \mathcal{R}) = 4$ . Esta demonstração será dividida em cinco partes:

(i)

Não é difícil ver, com cálculos análogos à Proposição anterior, que  $\det(g, \mathcal{R}) = 4$ . Assim  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $j^4g(0)$ . Sendo  $g \in m_2^3$ , é suficiente considerar o caso em que  $g$  é um polinômio que pode ser escrito como a soma  $p + h$ , onde  $p$  é uma forma cúbica em  $\mathbb{R}^2$  e  $h$  é um polinômio homogêneo de grau 4 em  $\mathbb{R}^2$ . Como o grau de um polinômio é invariante sobre transformações lineares, usando a Proposição (2.4), não há restrições em assumir que  $p$  é uma forma cúbica normal.

(ii)

Será provado, aqui, que  $p$  é da forma  $x^2y$ . Excluimos, facilmente, as formas  $x^3 - xy^2$  e  $x^3 + y^3$ , as quais possuem determinação 3. Pois, caso contrário,  $g \sim p$ , sendo  $p = T_g^3$ , teríamos a contradição  $\det(g, \mathcal{R}) = 3$  pela Proposição (2.1).

Podemos excluir, também,  $p = 0$ , pois isto implicaria em  $g \in m_2^4$  e então  $Jg \subset m_2^3$ . Então, teríamos a seguinte contradição

$$\text{cod}(g, \mathcal{R}) = \dim \frac{m_2}{Jg} \geq \dim \frac{m_2}{m_2^3} = \dim \frac{\mathcal{E}_2}{m_2^3} - 1 = 5.$$

Para verificar que  $p$  não pode ser da forma  $x^3$ , seja  $h(x, y) := ay^4 + bxy^3 + x^2q(x, y)$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $q$  uma forma quadrática em  $\mathbb{R}^2$ . Pelo Teorema da Função Inversa temos que

$$(x, y) \mapsto (x + 1/3q(x, y), y)$$

define um difeomorfismo na origem transformando  $g$  em  $x^3 + ay^4 + bxy^3$  mais termos de ordem superior. Sendo  $\det(f, \mathcal{R}) = 4$ , segue da Proposição (2.1) que  $g$  é equivalente a

$j := x^3 + ay^4 + bxy^3$ . Provaremos que  $\text{cod}(j, \mathcal{R}) \geq 5$ , chegando assim numa contradição usando, novamente, a Proposição (2.1).

Se  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , então  $Jj = \langle x^2, ay^3 \rangle_{\mathcal{E}_2}$ , e verifica-se facilmente que  $x, y, xy, y^2$ , e  $xy^2$  são linearmente independentes formando uma base em  $\frac{m}{Jj}$ . Se  $b \neq 0$ , consideremos:  $x, y, xy, y^2$  e  $y^3$ . Para provar que são linearmente independentes, estudaremos a equação

$$\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon y^3 + (3x^2 + by^3)h(x, y) + (4ay^3 + 3bxy^2)\kappa(x, y) = 0$$

para  $x$  e  $y$  pequenos com coeficientes reais  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  e germes  $h, \kappa$  em  $\mathcal{E}_2$ . Examinando os coeficientes de Taylor para  $x, y, xy, y^2, x^2$ , e  $xy^2$ , encontramos imediatamente que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, h(0)$ , e  $\kappa(0)$  são iguais a zero. Resta, então, mostrar que  $\epsilon$  também se anula. Isto segue observando o coeficiente de Taylor para  $y^3$ .

(iii)

Seja  $h$  como em (ii). Através de uma mudança de coordenadas encontraremos que  $g$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $x^2y + ay^4$  para  $a$  real.

Para formas quadráticas arbitrárias  $q_1$  e  $q_2$  em  $\mathbb{R}^2$ , a função dada por  $x \mapsto x + q_1(x, y)$ ,  $y \mapsto y + q_2(x, y)$  é um difeomorfismo local na origem, pelo Teorema da Função Inversa. Este transforma  $g$  em  $x^2y + x^2q_2(x, y) + 2xyq_1(x, y) + h(x, y)$ , mais termos de ordem superior. Especificamente  $q_1(x, y) := -(b/2)y^2$  e  $q_2 := -q$ , e a afirmação segue como na parte (ii).

(iv)

Uma transformação linear coordenada  $\tau(u, v) = (x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  transforma  $x^2y + ay^4$  em  $u^2v + v^4$  ou em  $-u^2v - v^4$ . Por (2.1-iv)  $a \neq 0$ . Para  $a > 0$ , temos  $\tau(u, v) := (a^{1/8}u, a^{-1/4}v)$ , e para  $a < 0$ , temos  $\tau(u, v) := (|a|^{1/8}u, -|a|^{-1/4}v)$ .

(v)

Finalmente, pelo Exemplo (2.3) os germes  $x^2y + y^4$  e  $-x^2y - y^4$  em  $\mathcal{E}_2$  são inequivalentes. ■

Estas singularidades são conhecidas como  $D_{5\pm}$ . O desdobramento versal é dado por

$$\pm(x^2y + y^4) + wx^2 + ty^2 + ux + vy.$$

Finalmente podemos enunciar o Teorema de Renè Thom que classifica os germes  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $0 \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) \leq 4$ .

**Teorema 2.5. (Teorema de Renè Thom)** *Seja  $f \in m_n^2$  tal que  $0 \leq \text{cod}(f, \mathcal{R}) \leq 4$ . Então, a menos da soma de uma forma quadrática nas outras variáveis,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a um dos seguintes germes da Tabela abaixo.*

Símbolo	Nome	Germe	Desdobramento Versal	$\text{cod}(f, \mathcal{R})$
$A_1$	Morse	$\pm x^2$	$\pm x^2$	0
$A_2$	Dobra	$x^3$	$x^3 + ux$	1
$A_3$	Cúspide	$\pm x^4$	$\pm x^4 + ux^2 + vx$	2
$A_4$	Rabo de andorinha	$x^5$	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	3
$A_5$	Borboleta	$\pm x^6$	$\pm x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	4
$D_{4-}$	Umbílico elíptico	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	3
$D_{4+}$	Umbílico hiperbólico	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	3
$D_{5\pm}$	Umbílico parabólico	$\pm(x^2y + y^4)$	$\pm(x^2y + y^4) + wx^2 + ty^2 + ux + vy$	4

Tabela 2.2: Classificação dos germes  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$

# Capítulo 3

## Germes $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

Apresentaremos, neste capítulo, um resumo da classificação de germes  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  com corank 1 e  $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) \leq 2$  sob a ação do grupo  $\mathcal{A}$  e mostraremos, através do diagrama de adjacências, as possíveis transições para cada singularidade encontrada. Precisamos desta classificação para estudarmos a geometria diferencial de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  através das singularidades de projeção ortogonal. Como referência para este capítulo sugerimos [26], [25] usando o método da transversal completa ou originalmente [24].

### 3.1 Resumo da Classificação de Germes $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

Seja  $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe de uma aplicação  $C^\infty$ . Se o corank de  $F$  é igual a 1, podemos, através de uma mudança de coordenadas na fonte e na meta escrever  $F$  na forma  $F(x, y) = (x, f(x, y))$ .

Denotamos por  $a_{ki}$  o coeficiente do monômio  $x^k y^i$  na série de Taylor de  $f$  na origem. Se  $a_{01} \neq 0$ , então  $F$  é um germe de um difeomorfismo e portanto,  $F \sim_{\mathcal{A}} (x, y)$ . Assim, suponhamos  $a_{01} = 0$ .

**Lema 3.1.** *As  $J^2\mathcal{A}$ -órbitas singulares em  $J^2(2, 2)$  são*

$$(x, y^2), \quad (x, xy) \quad e \quad (x, 0).$$

**Demonstração:** Notemos que  $j^2 f(0) = (x, a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)$ . Podemos eliminar o termo  $a_{10}x$  usando um difeomorfismo na meta. Se  $a_{02} \neq 0$ , então a mudança  $(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, y - \frac{a_{11}}{2a_{02}}x)$  elimina o termo  $xy$ . Para eliminar o termo  $x^2$  usamos

uma mudança de variáveis na meta da forma  $(X, Y) \mapsto (u, v) = (X, Y - \alpha X^2)$ . O germe final é da forma  $(u, a_{02}v^2)$ . Uma mudança escalar reduz ao germe  $(u, v^2)$ .

Se  $a_{02} = 0$  e  $a_{11} \neq 0$ , então uma mudança de variáveis na meta da forma  $(X, Y) \mapsto (u, v) = (X, Y - a_{20}X^2)$ , reduz à forma  $(u, uv)$ .

Se  $a_{02} = a_{11} = 0$ , então  $J^2f \simeq (x, 0)$ .

**Proposição 3.1.** *O germe  $F(x, y) = (x, y^2)$  é 2- $\mathcal{A}$ -determinado.*

### Classificação dos germes cujo 2-jato é igual a $(x, xy)$ :

Consideremos um  $k$ -jato cujo 2-jato é  $(x, xy)$ . Usando uma mudança de coordenadas, na fonte, da forma  $(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, y - p(x, y))$  podemos eliminar todos os termos divisíveis por  $x$  na segunda componente, exceto  $xy$ . Então, esse  $k$ -jato é equivalente a  $(x, xy + \sum_{i=3}^k a_{0i}y^i)$ .

**Proposição 3.2.** *Os germes de  $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) \leq 2$  cujo 2-jato é igual a  $(x, xy)$  são equivalentes a um dos seguintes germes*

Cúspide	$(x, xy + y^3)$	$\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) = 0$
Rabo de andorinha	$(x, xy + y^4)$	$\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) = 1$
Borboleta	$(x, xy + y^5 + y^7)$	$\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) = 2$

### Classificação dos germes cujo 2-jato é igual a $(x, 0)$ :

**Lema 3.2.** *As  $J^3\mathcal{A}$ -órbitas singulares em  $J^3(2, 2)$  que têm o 2-jato equivalente a  $(x, 0)$ , são:*

$$(x, y^3 \pm x^2y), \quad (x, y^3), \quad (x, xy^2), \quad (x, x^2y), \quad \text{e} \quad (x, 0).$$

**Proposição 3.3.** *Um  $(k+1)$ -jato cujo  $k$ -jato ( $k \geq 3$ ) é equivalente a  $(x, y^3)$  é equivalente a  $(x, y^3 \pm x^k y)$  ou  $(x, y^3)$ . O germe  $(x, y^3 \pm x^k y)$  ( $k \geq 2$ ) é  $(k+1)$ -determinado e tem  $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) = (k-1)$ .*

Podemos mostrar que um  $k$ -jato, cujo  $(k-1)$ -jato ( $k \geq 4$ ) é equivalente a  $(x, xy^2)$ , é equivalente a  $(x, xy^2 + \sum_{i=4}^k a_{0i}y^i)$ . Se  $a_{04} \neq 0$ , então o 4-jato é equivalente a  $(x, xy^2 + y^4)$ .

**Proposição 3.4.** *As órbitas finitamente determinadas da “raiz”  $(x, xy^2 + y^4)$  são dadas por  $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1})$ ,  $k \geq 2$ . Este germe é  $(2k+1)$ -determinado e tem  $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) = k$ .*

Os demais germes conduzem a  $k$ -jatos de codimensão  $> 2$ .

Em conclusão temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.5.** *Os germes de  $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) \leq 2$  de aplicações  $F : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  e seus desdobramentos  $\mathcal{A}_e$ -versais são os seguintes:*

Nome	Forma Normal	Desdobramento versal	$\text{cod}(F, \mathcal{A}_e)$
Submersão	$(x, y)$	$(x, y)$	0
Dobra	$(x, y^2)$	$(x, y^2)$	0
Cúspide	$(x, xy + y^3)$	$(x, xy + y^3)$	0
Rabo de andorinha	$(x, xy + y^4)$	$(x, xy + y^4 + uy^2)$	1
Lábios/Bicos	$(x, y^3 \pm x^2y)$	$(x, y^3 \pm x^2y + uy)$	1
Borboleta	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	$(x, xy + y^5 + y^7 + uy^2 + vy^3)$	2
Ganso	$(x, y^3 + x^3y)$	$(x, y^3 + x^3y + uy + vxy)$	2
Gaiivota	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	$(x, xy^2 + y^4 + y^5 + uy + vy^3)$	2

Tabela 3.1: Classificação dos germes  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

## 3.2 Diagramas de Bifurcação das Singularidades de $\text{cod}(F, \mathcal{A}_e) \leq 2$

Nesta seção vamos descrever a geometria do discriminante da projeção ortogonal  $P_0(x, y) = (x, f(x, y))$  e as mudanças que ocorrem em famílias a 1 ou 2 parâmetros. Como, em geral, a família de projeções ortogonais é um desdobramento versal das singularidades da Proposição (3.5), basta determinar os discriminantes das formas normais e suas deformações para obter modelos das singularidades dos discriminantes e das suas deformações. O discriminante da projeção ortogonal é chamado de perfil ou contorno aparente da superfície  $M$ , como comentamos na Introdução.

### Submersão :

*Forma Normal:*  $F = (x, y)$ ;

*Conjunto dos pontos críticos:*  $\Sigma(F)$  neste caso é vazio.

**Dobra :**

*Forma Normal:*  $F = (x, y^2)$ ;

*Conjunto dos pontos críticos:*  $\Sigma(F) = \{y = 0\}$ ;

*Discriminante:*  $\Delta(F) = \{(x, 0)\}$  que é uma curva  $C^\infty$ .

**Cúspide :**

*Forma Normal:*  $F = (x, xy + y^3)$ .

*Conjunto dos pontos críticos:*  $\Sigma(F) = \{(x, u) : x + 3y^2 = 0\}$ . Este pode ser parametrizado por  $x = -3y^2$ . Então,  $\Sigma(F) = \{(-3y^2, y)\}$  e temos:

*Discriminante:*  $\Delta(F) = \{(-3y^2, -2y^3)\}$  que é uma cúspide. Na figura (3.1), abaixo, temos o desenho das projeções estáveis: submersão, dobra e cúspide, respectivamente.

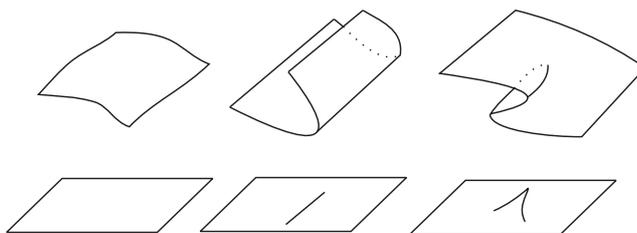


Figura 3.1: Projeções estáveis de superfícies

**Rabo de Andorinha :**

*Forma Normal:*  $F = (x, xy + y^4)$

*Conjunto dos pontos críticos:*  $\Sigma(F) = \{(x, u) : x + 4y^3 = 0\}$ , que pode ser parametrizado por  $x = -4y^3$ . Assim  $\Sigma(F) = \{(-4y^3, y)\}$ . Então:

*Discriminante:*  $\Delta(F) = \{(-4y^3, -3y^4)\}$ .

Consideremos o desdobramento versal  $F(x, y, u) = (x, xy + y^4 + uy^2)$  deste germe. Temos:

*Conjunto dos pontos críticos de  $F_u$ :*  $\Sigma(F_u) = \{(-4y^3 - 2uy, y)\}$ ;

*Discriminante de  $F_u$ :*  $\Delta(F_u) = \{(-4y^3 - 2uy, -3y^4 - uy^2)\}$ .

As deformações na curva  $\Delta(F_u)$  são dadas na Figura (3.2), onde duas cúspides aparecem em um lado da transição.

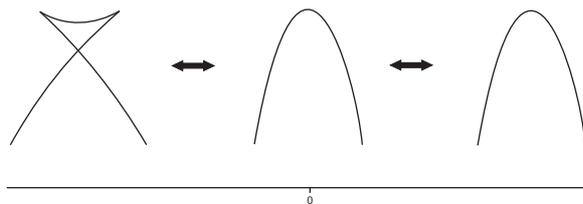


Figura 3.2: Transições no discriminante do Rabo de Andorinha

### Lábios/Bicos :

*Desdobramento Versal:*  $F(x, y, u) = (x, y^3 \pm x^2y + uy)$ ;

*Conjunto dos pontos críticos de  $F_u$ :*  $3y^2 \pm x^2 + u = 0$

Isto significa que  $\Sigma(F_u)$  passa pelas transições de Morse.

Temos as seguintes transições no conjunto dos pontos críticos para Lábios:

$\Sigma(F_{u+})$  é dado pela equação  $3y^2 + x^2 + u = 0$ .

Para  $u < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{u} + \frac{3y^2}{u} = 1$ .

Para  $u = 0 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 0$ .

Para  $u > 0 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = -u$ .

Estas transições estão ilustradas na Figura (3.3) abaixo.



Figura 3.3:  $\Sigma(F_u)$  para Lábios

Para Bicos segue que:

$\Sigma(F_{u-})$  é dado pela equação  $3y^2 - x^2 + u = 0$ .

Para  $u < 0 \Rightarrow \frac{3y^2}{u} - \frac{x^2}{u} = 1$ .

Para  $u = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ .

Para  $u > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{u} - \frac{3y^2}{u} = 1$ .

Observe estas transições na Figura (3.4) abaixo.

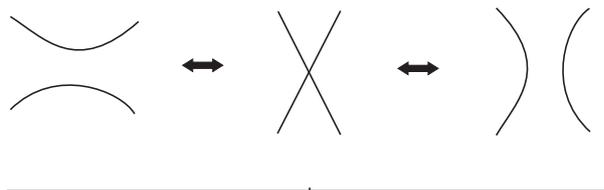


Figura 3.4:  $\Sigma(F_u)$  para Bicos

As transições no discriminante para Lábios/Bicos seguem nas figuras, (3.5) e (3.6), abaixo:



Figura 3.5:  $\Delta(F_u)$  para Lábios



Figura 3.6:  $\Delta(F_u)$  para Bicos

### Ganso:

*Desdobramento versal:*  $F(x, y, u, v) = (x, y^3 + x^3y + uy + vxy)$ .

Esperamos encontrar algumas singularidades de codimensão 1 em uma curva no espaço dos parâmetros  $(u, v)$ . Somente as singularidades Lábios/Bicos podem acontecer neste caso.

*Conjunto dos pontos críticos de  $F_u$ :*  $3y^2 + x^3 + vx + u = 0$ .

Assim, as singularidades Lábios/Bicos ocorrem quando o conjunto dos pontos críticos é singular, ou seja, denotando  $f = y^3 + x^3y + uy + vxy$ , quando,  $f_y = f_{xy} = f_{yy} = 0$ .

Resolvendo o sistema obtemos  $u = 2x^3$  e  $v = -3x^2$ . Então as singularidades Lábios/Bicos ocorrem na curva cúspide  $(u, v) = (2x^3, -3x^2)$ . As transições no conjunto discriminante são dadas na Figura (3.7).

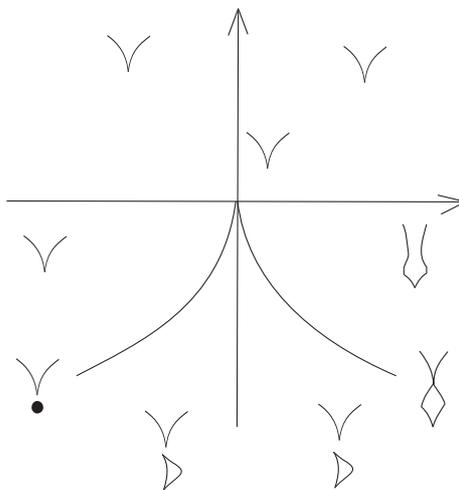


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação para Ganso

### Borboleta :

*Desdobramento Versal:*  $F(x, y, u, v) = (x, xy + y^5 \pm y^7 + uy^2 + vy^3)$ .

Podemos esperar singularidades do tipo rabo de andorinha acontecerem em uma curva no plano  $(u, v)$ . Estas ocorrem quando  $f_y = f_{yy} = f_{yyy} = 0$ , ou seja, ao longo da curva  $(u, v) = (20y^3 \pm 84y^5, -10y^2 \pm 35y^4)$  que é uma cúspide. Existe também uma outra curva onde singularidades do tipo cúspide e dobra ocorrem. Esta curva é parametrizada por  $(\frac{-10}{27}t^3 + \dots, \frac{-5}{3}t^2 + \dots)$  que também é uma cúspide. As bifurcações são mostradas na Figura (3.8), onde na curva tracejada ocorrem singularidades do tipo rabo de andorinha e na outra curva singularidades do tipo cúspide e dobra.

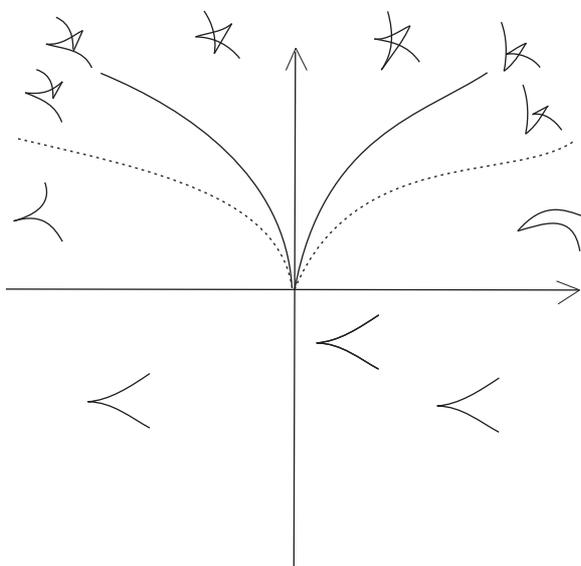


Figura 3.8: Diagrama de bifurcação para Borboleta

### Gaiivota :

*Desdobramento Versal:*  $F(x, y, u, v) = (x, xy^2 + y^4 + y^5 + uy + vy^3)$ .

Esperamos encontrar singularidades do tipo rabo de andorinha e estas ocorrem quando  $f_y = f_{yy} = f_{yyy} = 0$ , ou seja, na curva  $(u, v) = (-4y^3 - 15y^4, -4y - 10y^2)$ , e, a singularidade Lábios/Bicos é dado por  $u = 0$  (só bicos).

Temos também multi-singularidades de tipo dobras tangentes. Esta bifurcação acontece quando existem dois pontos singulares distintos  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , e as curvas dobras correspondentes são tangenciais. Como  $\Sigma$  é dado por  $f_y = 0$ , a direção tangente é ao longo de  $v = (f_{yy}, -f_{xy})$ , e portanto a direção tangente à curva dobra é dada por  $DF \cdot v = f_{yy} \cdot (1, f_x)$ .

Então as dobras são tangentes se as direções  $(1, f_x(x_1, y_1, u, v))$  e  $(1, f_x(x_2, y_2, u, v))$  são paralelas, ou seja se, e somente se,  $y_1 = \pm y_2$ . Como  $(x_1, f(x_1, y_1, u, v)) = (x_2, f(x_2, y_2, u, v))$  temos  $x_1 = x_2$  e portanto  $y_1 = -y_2$ . Agora  $f(x_1, y_1, u, v) = f(x_1, -y_1, u, v)$  e  $f_y(x_1, y_1, u, v) = f_y(x_1, -y_1, u, v) = 0$  implica que a função  $g(y) = f(x_1, y, u, v) - f(x_1, y_1, u, v)$  tem duas raízes duplas  $y_1$  e  $-y_1$ . Então  $f(x_1, y, u, v) - f(x_1, y_1, u, v) = (y - y_1)^2(y + y_1)^2(y - y_3)$ . Comparando os coeficientes obtemos  $u = y_1^4$  e  $v = -2y_1^2$ . Então as singularidades dobras tangentes ocorrem ao longo da curva  $(y_1^4, -2y_1^2)$ . Veja na Figura (3.9), onde na curva tracejada ocorrem singularidades do tipo rabo de andorinha, sobre o eixo  $u = 0$  singularidades do tipo Lábios/Bicos e na outra curva singularidades dobras tangentes.

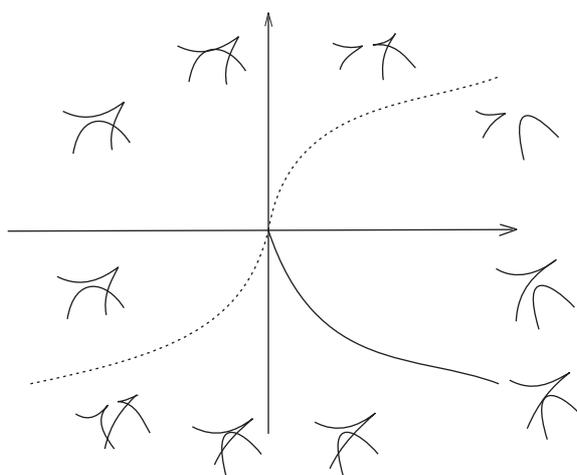
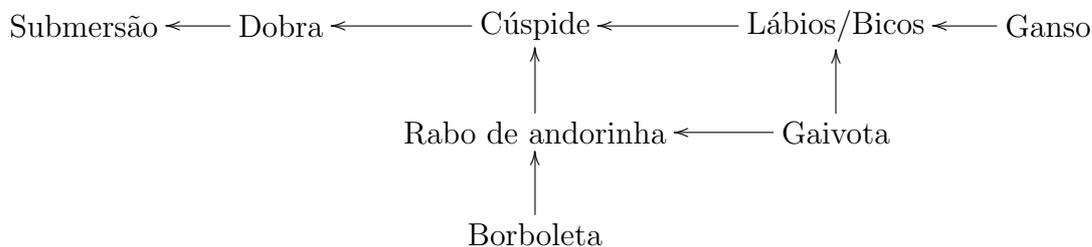


Figura 3.9: Diagrama de bifurcação para Gaiyota

Podemos, então, desenhar o **Diagrama de Adjacência** das singularidades de  $\text{cod}(f, \mathcal{A}_e) \leq 2$ :



# Capítulo 4

## Geometria das Singularidades de Projeções

Neste capítulo estudamos, principalmente, o contato de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$  com planos e retas. Este estudo é feito pela análise das singularidades das famílias de projeções em retas (famílias de funções alturas) e projeções em planos (projeções ortogonais). Mais especificamente, nos capítulos 2 e 3 obtivemos, respectivamente, uma classificação de germes de funções e de germes de aplicações  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . Agora, identificaremos geometricamente as singularidades classificadas no Teorema (2.5) e na Proposição (3.5). As referências gerais para este capítulo são [2], [4], [13] e [15].

### 4.1 Função Altura

Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma curva ou superfície suave  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ . Identificamos neste trabalho  $M$  com a imagem da aplicação  $X$ . A família de projeções em retas, ou família de funções altura é dada por

$$\begin{aligned} h : M \times S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) &\longmapsto x \cdot u \end{aligned}$$

onde  $S^2$  é a esfera em  $\mathbb{R}^3$ , com centro na origem e raio 1, e,  $\cdot$  denota o produto interno usual. Para  $u$  fixo, a função  $h_u$  é a **função altura** na direção  $u$ .

Como estamos interessados na geometria diferencial local, quando  $M$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , sendo  $p$  um ponto de  $M$ , podemos, por mudanças de coordenadas, identificar  $p$  com a origem e fixar coordenadas locais  $(x, y, z)$  em  $p = (0, 0, 0)$  tal que o eixo- $z$  seja

normal a  $M$  em  $p$  e o plano tangente seja formado pelo plano  $(x, y)$ . Assim, escrevemos  $M$ , localmente, na forma de Monge, ou seja, como um gráfico de função  $z = f(x, y)$ , tal que  $f = f_x = f_y = 0$  em  $(0, 0)$ .

Escolhemos uma carta em  $S^2$  próxima de  $(0, 0, 1)$  dada por  $(a, b, 1)$ . Então a família modificada de funções altura é dada, localmente, por

$$\begin{aligned} h : M \times (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (a, b)) &\longmapsto h_{(a,b)}(x) = ax + by + f(x, y). \end{aligned}$$

Fixando  $u_0 = (0, 0, 1)$ , teremos  $h_{u_0}(x, y) = f(x, y)$ .

O seguinte Teorema é uma consequência direta do Teorema de Montaldi (1.6), pois a família  $h$  é  $\mathcal{A}$ -versal.

**Teorema 4.1.** *Genericamente a função  $h_u$  tem singularidades local do tipo  $A_k$ ,  $k \leq 3$ , isto é, singularidades de codimensão menor ou igual a dois.*

## 4.2 Geometria das Singularidades da Função Altura

Nesta seção, identificaremos geometricamente os tipos de singularidades da função  $h_u$ , quando  $M$  é uma curva ou superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.2.1 Função Altura de Curvas em $\mathbb{R}^3$

Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com  $k(s) \neq 0$ ,  $\forall s \in I$  sendo a curvatura de  $\alpha$  e  $\tau$  a torção. Adotaremos o Triedro de Frenet  $X = t(s)$ (tangente),  $Y = n(s)$ (normal principal) e  $Z = b(s)$ (binormal) da curva  $\alpha$  em  $s$  como referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, o Triedro de Frenet definido por  $t(s) = \alpha'(s)$ ,  $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$  e  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ , satisfaz as equações abaixo, conhecidas como Equações de Frenet:

$$\begin{cases} t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s) \\ b'(s) &= \tau(s)n(s) \end{cases}$$

Vamos, agora, estudar as singularidades da função altura  $h_u(s) = \alpha(s) \cdot u$ . Note na Figura (4.1), que  $h_u(s)$  é a distância de  $\alpha(s)$  ao plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor  $u$ .

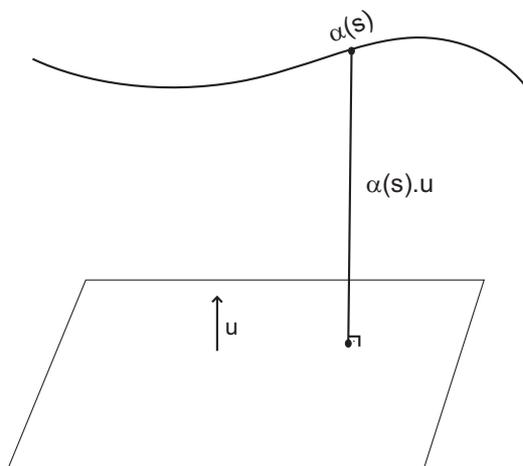


Figura 4.1: Função altura

Observemos que a função altura  $h_u$  é singular em  $s_0$  quando

$$h'_u(s_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha'(s_0) \cdot u = t(s_0) \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \text{ é um vetor do plano normal } (n, b).$$

A seguinte proposição estabelece condições geométricas para que  $h_u$  tenha um dos tipos das singularidades do Teorema (4.1).

**Proposição 4.1.** *A função altura  $h_u$  tem as seguintes singularidades em  $s_0$ :*

$$A_1 \Leftrightarrow u \text{ está no plano normal e } u \neq \pm b(s_0);$$

$$A_2 \Leftrightarrow u = \pm b(s_0) \text{ e } \tau(s_0) \neq 0;$$

$$A_3 \Leftrightarrow u = \pm b(s_0), \tau(s_0) = 0 \text{ e } \tau'(s_0) \neq 0.$$

**Demonstração:** Suponhamos  $h_u$  singular em  $s_0$ . Assim,  $t(s_0) \cdot u = 0$ . Temos que  $h_u(s_0)$  é uma singularidade do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $h'_u(s_0) = 0$  e  $h''_u(s_0) \neq 0$ . Observe que

$$\begin{aligned} h''_u(s_0) &= \alpha''(s_0) \cdot u \\ &= k(s_0)n(s_0) \cdot u \\ &= 0 \Leftrightarrow u = \pm b(s_0). \end{aligned}$$

Portanto, a singularidade é do tipo  $A_1$  se, e somente se,  $u$  é um vetor do plano normal, e,  $u \neq \pm b(s_0)$ .

A singularidade é do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $h'_u(s_0) = h''_u(s_0) = 0$  e  $h'''_u(s_0) \neq 0$ . Observe, novamente, que

$$\begin{aligned} h'''_u(s_0) &= k(s_0)n'(s_0) \cdot u \\ &= -k(s_0)\tau(s_0)b(s_0) \cdot u - k^2(s_0)t(s_0) \cdot u \\ &= 0 \Leftrightarrow u = \pm b(s_0) \text{ e } \tau(s_0) = 0. \end{aligned}$$

Logo, a singularidade é do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $u = \pm b(s_0)$  e  $\tau(s_0) \neq 0$ .

Considere, agora,  $h'_u(s_0) = h''_u(s_0) = h'''_u(s_0) = 0$ . Desta maneira, temos, que a singularidade é do tipo  $A_3$  se, e somente se,  $h_u^{(4)}(s_0) \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} h_u^{(4)}(s_0) &= -k(s_0)\tau'(s_0)b(s_0) \cdot u - k(s_0)\tau^2(s_0)n(s_0) \cdot u - k^3(s_0)n(s_0) \cdot u \\ &\neq 0 \Leftrightarrow \tau'(s_0) \neq 0. \end{aligned}$$

■

Concluimos que a função altura sobre curvas no espaço mede o contato da curva  $\alpha$  com o plano osculador, em  $s_0$ . Observamos que o plano osculador à curva em  $s_0$  é um plano que tem, pelo menos, ordem de contato 2 com a curva em  $s_0$ . Então, a projeção de  $\alpha(I)$  na direção de  $b(s_0)$  sempre possui uma singularidade degenerada. De modo geral,  $s_0$  é do tipo  $A_k$  sempre que  $\alpha(I)$  possuir um contato de ordem  $k$  com o plano osculador.

## 4.2.2 Função Altura de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Vamos considerar  $M$  como na Seção (4.1), ou seja,  $M$  uma superfície escrita, localmente, na forma de Monge. A função  $h_{(a,b)}$  é singular na origem se, e somente se,  $a = b = 0$ . Se  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , então  $h_{(a,b)}$  é uma submersão. Neste caso, o germe  $h_{(a,b)}$  não apresenta singularidades e não nos interessa. Desta forma, considere  $u_0 = (0, 0, 1)$  e, então, estudaremos as singularidades de  $h_{u_0}(x, y) = f(x, y)$  e as descrições geométricas destas singularidades.

A seguinte proposição estabelece condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $f$  em  $(0, 0)$ , para que  $h_{u_0}$  tenha um dos tipos de singularidades do Teorema (4.1). Denotaremos, como no capítulo anterior,  $a_{k,i}$  o coeficiente do monômio  $x^k y^i$  na expansão de Taylor de  $f$  na origem.

**Proposição 4.2.** *A função altura  $h_{u_0} = f(x, y)$  possui as seguintes singularidades:*

$$A_1 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0;$$

$$A_2 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0 \text{ e } a_{03} \neq 0;$$

$$A_3 \Leftrightarrow 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0, a_{03} = 0 \text{ e } 4a_{20}a_{04} - a_{12}^2 \neq 0.$$

**Demonstração:** Pelo comentário anterior à Proposição, sabemos que  $f$  possui uma singularidade na origem. Agora, seja  $j^2 f(0, 0) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ . Sem perda de generalidade, seja  $a_{20} \neq 0$ , e, com a mudança de variável na fonte

$$\begin{aligned}x &= X - \frac{a_{11}Y}{2a_{20}} \\y &= Y\end{aligned}$$

temos que  $j^2f(0,0)$  pode ser escrito na forma  $a_{20}X^2 + \left(\frac{4a_{20}a_{02} - a_{11}^2}{4a_{20}}\right)Y^2$ , que é uma singularidade  $A_1$ , ou seja, do tipo Morse se, e somente se,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$ .

Sejam  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$  e  $j^3f(0,0) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ . Com a mudança de variável

$$\begin{aligned}x &= X - \frac{(a_{30}X^2 + a_{21}XY + a_{12}Y^2)}{2a_{20}} \\y &= Y\end{aligned}$$

podemos escrever  $j^3f(0,0)$  na forma  $a_{20}X^2 + a_{03}Y^3$ . Logo, a singularidade é do tipo  $A_2$  se, e somente se,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$  e  $a_{03} \neq 0$ .

Sejam  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ ,  $a_{03} = 0$  e  $j^4f(0,0) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4$ . Com as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned}x &= X - \frac{(a_{30}X^2 + a_{21}XY + a_{12}Y^2)}{(2a_{20})} \\y &= Y\end{aligned}$$

eliminamos os termos  $x^3$ ,  $x^2y$  e  $xy^2$ ; e com uma mudança de forma análoga à anterior, escrevemos  $j^4f(0,0)$  da forma  $a_{20}x^2 + \left(a_{04} - \frac{a_{12}^2}{4a_{20}}\right)y^4$ , que é uma singularidade  $A_3$  se, e somente se,  $\left(a_{04} - \frac{a_{12}^2}{4a_{20}}\right) \neq 0$ . ■

Seja  $p$  um ponto da superfície  $M$ , escrita na forma de Monge. Sabemos que  $h_{u_0}$  é singular se, e somente se,  $u_0$  é a direção normal de  $M$  em  $p$ .

A proposição a seguir identifica geometricamente os tipos de singularidades da função altura  $h_{u_0}$ .

**Proposição 4.3.** *As singularidades genéricas da função altura  $h_{u_0} = f(x, y)$  ao longo da direção  $u_0$  ocorrem em  $p \in M$  da seguinte maneira:*

$A_1 \Leftrightarrow p$  não é ponto parabólico;

$A_2 \Leftrightarrow p$  é ponto parabólico e a direção assintótica é transversal ao conjunto parabólico da superfície em  $p$ ;

$A_3 \Leftrightarrow p$  é ponto parabólico e a direção assintótica é tangente ao conjunto parabólico da superfície em  $p$ .

**Demonstração:** Sejam  $p \in M$  e  $j^2f(p) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ . Sabemos que a curvatura Gaussiana  $K$  em  $p$  é dada por  $K(p) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2$  e, ainda, se  $K(p) \neq 0$ ,

então  $p$  não é ponto parabólico. Pela Proposição (4.2), temos que  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0$  na singularidade  $A_1$ . Logo,  $p$  não é parabólico se, e somente se, a singularidade for do tipo  $A_1$ .

Seja  $p \in M$  ponto parabólico, ou seja,  $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ . Podemos, então, escrever  $j^3 f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ . Temos, ainda, que o conjunto parabólico de uma superfície  $z = f(x, y)$  é dado pelos pontos  $(x, y)$  que anulam o determinante da matriz Hessiana de  $f(x, y)$ . A parte linear desta equação é dada por

$$a_{20}a_{12}x + 3a_{20}a_{03}y = 0,$$

onde as singularidades são dadas por

$$\nabla \left( \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \right) = a_{20}(a_{12}, 3a_{03}) = 0.$$

O normal ao conjunto parabólico pode ser dado por  $(a_{12}, a_{03})$ . A direção assintótica principal é igual a  $(0, 1)$ . Logo,  $(0, 1)$  é transversal ao conjunto parabólico se, e somente se,  $a_{03} \neq 0$ , ou seja, pela Proposição (4.2), se, e somente se, a singularidade é do tipo  $A_2$ .

No entanto, se  $a_{03} = 0$  a direção assintótica é tangente ao conjunto parabólico. Pela proposição anterior,  $a_{03} = 0$  é uma condição para que a singularidade seja do tipo  $A_3$ . Neste caso,  $p$  é chamado **cúspide de Gauss**. ■

Enfatizaremos melhor o conceito de cúspide de Gauss nas seções posteriores, e também apresentaremos algumas equivalências para este conceito.

### 4.3 Projeção Ortogonal

Novamente, considere  $M$  como na Seção (4.1). Utilizaremos a família de projeções ortogonais para medir o contato de uma superfície  $M$  com retas no  $\mathbb{R}^3$ . A família de projeções em  $\mathbb{R}^2$  é definida pela aplicação:

$$\begin{aligned} P: M \times S^2 &\longrightarrow B \\ (p, u) &\longmapsto (u, p - (u \cdot p)u) \end{aligned}$$

onde  $B = \{(u, a) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 : u \cdot a = 0\}$ , isto é,  $B$  é o fibrado tangente de  $S^2$ . Para  $u$  fixo, a aplicação  $P_u$  é a **projeção ortogonal** na direção  $u$ , ou seja, no ponto  $p \in M$  esta aplicação descreve o contato de  $M$  com a reta que passa por  $p$  e é paralela ao vetor  $u$ .

Suponhamos que as direções de interesse estão na vizinhança do vetor  $(0, 1, 0)$ . Estas direções podem ser parametrizadas por  $(a, 1, b)$ , e projetamos no plano  $(x, z)$ . Estas projeções não são ortogonais, mas as propriedades da família das projeções ortogonais são preservadas. Logo, as coordenadas de um ponto  $p \in M$  no plano de projeção  $y = 0$  ao longo da direção  $(a, 1, b)$  são dadas por

$$(X, 0, Z) = (x, y, f(x, y)) + \lambda(a, 1, b),$$

ou seja,  $\lambda = -y$ . Então a família de projeções  $P$  pode ser reescrita, na vizinhança da origem, da forma

$$\begin{aligned} P: (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (a, b)) &\longmapsto (x - ay, f(x, y) - by) \end{aligned}$$

e temos  $P_0(x, y) = (x, f(x, y))$ , um germe de corank 1 de uma aplicação de  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ .

As singularidades genéricas de  $P_u$  são dadas pelo teorema a seguir, que é uma consequência direta do teorema de transversalidade de Montaldi (1.6), pois a família  $P$  é  $\mathcal{A}$ -versal.

**Teorema 4.2.** *Genericamente a aplicação  $P_u$  tem singularidades locais de  $\text{cod}(P_u, \mathcal{A}_e) \leq 2$ , isto é, as singularidades listadas na Proposição (3.5).*

## 4.4 Geometria das Singularidades da Projeção Ortogonal

Considere a projeção  $P_{(a,b)}(x, y) = (x - ay, f(x, y) - by)$ . Observamos que  $P_{(a,b)}(x, y)$  possui singularidade na origem se, e somente se,  $b = 0$ . Se  $b \neq 0$  então  $P_{(a,b)}(x, y)$  é germe de um difeomorfismo, e portanto,  $P_{(a,b)}(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (x, y)$ . Desta maneira, daqui para frente, consideraremos a projeção  $P_{u_0}(x, y) = (x, f(x, y))$ , onde  $u_0 = (0, 1)$ .

A proposição a seguir estabelece condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $f$  em  $(0, 0)$ , para que  $P_{u_0} = (x, f(x, y))$  tenha as singularidades do Teorema (4.2).

**Proposição 4.4.** *A projeção ortogonal  $P_{u_0}$  possui as seguintes singularidades:*

<i>Dobra</i>	$\Leftrightarrow a_{02} \neq 0;$
<i>Cúspide</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{11} \neq 0 \text{ e } a_{03} \neq 0;$
<i>Rabo de Andorinha</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{03} = 0, a_{11} \neq 0 \text{ e } a_{04} \neq 0;$
<i>Borboleta</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{03} = 0, a_{04} = 0, a_{11} \neq 0, a_{05} \neq 0 \text{ e } a_{07} \neq 0;$
<i>Lábios/Bicos</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{11} = 0, a_{03} \neq 0 \text{ e } (3a_{03}a_{21} - a_{12}^2) \neq 0;$
<i>Ganso</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{11} = 0, (3a_{03}a_{21} - a_{12}^2) = 0, a_{03} \neq 0 \text{ e } a_{31} \neq 0;$
<i>Gaivota</i>	$\Leftrightarrow a_{02} = 0, a_{11} = 0, a_{03} = 0, a_{12} \neq 0, a_{04} \neq 0 \text{ e } a_{05} \neq 0.$

**Demonstração:** Considere  $j^2P_{u_0}(0,0) = (x, a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)$ , com  $a_{02} \neq 0$ . As seguintes mudanças, na fonte e na meta

$$x = x$$

$$y = y - \frac{a_{11}x}{2a_{02}}, \text{ elimina o termo } xy;$$

$$(u, v - \alpha u^2), \text{ onde } \alpha = (a_{20} - \frac{a_{11}^2}{4a_{02}}), \text{ elimina o termo } x^2.$$

Portanto,  $j^2P_{u_0}(0,0) \sim (x, a_{02}y^2)$ . Assim,  $P_{u_0}(0,0) \sim$  Dobra se, e somente se,  $a_{02} \neq 0$ .

Considere, agora,  $a_{02} = 0$  e  $a_{11} \neq 0$ , então segue que  $j^2P_{u_0}(0,0) = (x, a_{20}x^2 + a_{11}xy)$ . Com mudança na meta, podemos escrever  $j^2P_{u_0}(0,0) \sim (x, a_{11}xy)$ . Assim, seja  $j^3P_{u_0}(0,0) = (x, xy + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)$ . Com a mudança

$$x = x$$

$$y = y - (a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2),$$

temos  $j^3P_{u_0}(0,0) \sim (x, xy + a_{03}y^3)$ . Segue que,  $P_{u_0}(0,0) \sim (x, xy + y^3)$  se, e somente se,  $a_{03} \neq 0$ , ou seja, se, e somente se, a singularidade for do tipo Cúspide.

Se  $a_{04} \neq 0$ , de forma análoga ao caso anterior,  $P_{u_0}(0,0) \sim (x, xy + y^4)$ , ou seja, uma singularidade do tipo Rabo de Andorinha. Do mesmo modo, se  $a_{05} \neq 0$  e  $a_{07} \neq 0$ , segue que  $P_{u_0}(0,0) \sim (x, xy + y^5 + y^7)$ , ou seja, uma singularidade do tipo Borboleta.

Tomemos, agora,  $a_{02} = 0$  e  $a_{11} = 0$ , então  $j^3P_{u_0}(0,0) = (x, a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)$ . Se  $a_{03} \neq 0$ , a seguinte mudança

$$x = x$$

$$y = y - \frac{a_{12}x}{3a_{03}}, \text{ elimina o termo } xy^2.$$

Eliminando  $x^3$ , por uma mudança na meta, temos que

$$j^3P_{u_0}(0,0) \sim \left( x, \left( \frac{3a_{03}a_{21} - a_{12}^2}{3a_{03}} \right) x^2y + a_{03}y^3 \right).$$

Assim,  $P_{u_0}(0,0) \sim (x, y^3 \pm x^2y)$  (Lábios/Bicos) se, e somente se,  $(3a_{03}a_{21} - a_{12}^2) \neq 0$ .

Considere, agora,  $(3a_{03}a_{21} - a_{12}^2) = 0$  e  $a_{03} \neq 0$ . Então podemos escrever  $j^4P_{u_0}(0, 0) = (x, y^3 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4)$ . As seguintes mudanças

$$y = y - \frac{a_{13}xy}{3}, \text{ elimina } xy^3;$$

$$y = y - \frac{a_{04}y^2}{3}, \text{ elimina } y^4;$$

$$y = y - \frac{a_{22}x^2}{3}, \text{ elimina } x^2y^2.$$

Temos, então, que  $j^4P_{u_0}(0, 0) \sim (x, y^3 + a_{31}x^3y + a_{40}x^4)$ ; e, com mudanças na meta, para eliminar o termo  $x^4$ , segue que  $j^4P_{u_0}(0, 0) \sim (x, y^3 + a_{31}x^3y)$ . Assim,  $P_{u_0}(0, 0) \sim$  Ganso se, e somente se,  $a_{31} \neq 0$ .

Finalmente, considere  $a_{03} = 0$ . Se  $a_{12} \neq 0$ , com mudanças na fonte e na meta, análoga as anteriores, podemos escrever  $j^3P_{u_0}(0, 0) = (x, xy^2)$ , e,  $j^4P_{u_0}(0, 0) = (x, xy^2 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{22}x^2y + a_{04}y^4)$ . As seguintes mudanças

$$y = y - \frac{a_{31}x^2}{2}, \text{ elimina } x^3y;$$

$$y = y - \frac{a_{13}y^2}{2}, \text{ elimina } xy^3;$$

$$y = y - \frac{a_{22}xy}{2}, \text{ elimina } x^2y^2;$$

$$(u, v - \alpha u^4), \text{ elimina } x^4.$$

Então,  $j^4P_{u_0}(0, 0) \sim (x, xy^2 + a_{04}y^4)$ . Agora, com mudanças feitas de forma análoga às anteriores, segue que  $j^5P_{u_0}(0, 0) \sim (x, xy^2 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5)$ . Assim,  $P_{u_0}(0, 0) \sim$  Gaivota se, e somente se,  $a_{04} \neq 0$  e  $a_{05} \neq 0$ .

■

Usando as condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de  $P_{u_0}(x, y)$  na origem encontradas na Proposição acima, pretendemos, agora, estudar geometricamente as singularidades da aplicação projeção ortogonal. Sabemos que a projeção  $P_{(a,b)}(x, y) = (x - ay, f(x, y) - by)$  é singular, na origem, se, e somente se,  $b = 0$ . Em termos geométricos,  $P_{u_0}(x, y) = (x, f(x, y))$  é singular em  $p \in M$  se, e somente se, a direção de projeção é tangente a  $M$  em  $p$ .

Observamos, ainda, que  $u_0 = (0, 1)$  é uma direção assintótica quando

$$D^2f(x, y)[u_0, u_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim, considerando  $j^2f(0, 0) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ , temos que  $u_0$  é uma direção assintótica se, e somente se,  $a_{02} = 0$ . Pela Proposição anterior, na singularidade Dobra  $u_0 \in T_pM$ , onde  $T_pM$  é o plano tangente a  $M$  em  $p$ , mas  $u_0$  não é direção assintótica.

Temos, então, que nos **pontos elípticos** só ocorrem singularidades do tipo Dobra; e, nas demais singularidades  $p$  será parabólico ou hiperbólico.

Considere  $u_0$  uma direção assintótica. Sabemos que  $p \in M$  é parabólico se, e somente se,  $K(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ . Considerando  $j^2 f(0, 0)$  como antes,  $p$  é parabólico se, e somente se,  $a_{11} = 0$ . Novamente, pelas condições sobre os coeficientes na Proposição anterior, as singularidades para  $p$  parabólico são do tipo Lábios/Bicos, Ganso e Gaivota; e, nas singularidades Cúspide, Rabo de andorinha e Borboleta  $p$  é hiperbólico.

As Proposições a seguir descrevem a geometria das singularidades para  $p \in M$  hiperbólico.

**Proposição 4.5.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

$$\text{Cúspide} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 \text{ é direção assintótica e } D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] \neq 0;$$

$$\text{Rabo de andorinha} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 \text{ é direção assintótica, } D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] = 0 \text{ e} \\ D^4 f(x, y)[u_0, u_0, u_0, u_0] \neq 0;$$

$$\text{Borboleta} \quad \Leftrightarrow \quad u_0 \text{ é direção assintótica, } D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] = 0, \\ D^4 f(x, y)[u_0, u_0, u_0, u_0] = 0 \text{ e } D^5 f(x, y)[u_0, u_0, u_0, u_0, u_0] \neq 0.$$

### Demonstração:

A primeira afirmação segue do comentário anterior a esta Proposição e da Proposição (4.4). Considere, agora,  $u_0$  uma direção assintótica e  $j^3 f(0, 0) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ . Então,

$$D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] = f_{xxx} \cdot 0^3 + 3 \cdot f_{xxy} \cdot 0^2 \cdot 1 + 3 \cdot f_{yyx} \cdot 0 \cdot 1^2 + f_{yyy} \cdot 1^3.$$

$$D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] = 0 \Leftrightarrow f_{yyy} = 0 \Leftrightarrow a_{03} = 0.$$

Segue da Proposição (4.4) que  $p$  é uma singularidade do tipo Rabo de Andorinha.

Finalmente, quando  $u_0$  é direção assintótica e  $D^3 f(x, y)[u_0, u_0, u_0] = 0$ , então escrevemos

$$j^4 f(0, 0) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4.$$

De maneira análoga aos casos anteriores, temos que

$$D^4 f(x, y)[u_0, u_0, u_0, u_0] = 0 \Leftrightarrow f_{yyyy} = 0 \Leftrightarrow a_{04} = 0.$$

Logo, pela Proposição (4.4), segue que  $p$  é um singularidade do tipo Borboleta. ■

Observamos, agora, a relação entre as singularidades da Proposição acima e as curvas assintóticas. Seja  $\alpha$  uma curva assintótica de  $M$  no plano  $(x, y)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com  $u_0 = \alpha'(0)$  e curvatura  $k(s)$ . Deste modo temos que:

**Proposição 4.6.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

*Cúspide*  $\Leftrightarrow k(0) \neq 0$ ;

*Rabo de Andorinha*  $\Leftrightarrow k(0) = 0$  e  $k'(0) \neq 0$ ;

*Borboleta*  $\Leftrightarrow k(0) = k'(0) = 0$  e  $k''(0) \neq 0$ .

**Demonstração:** Temos que  $\alpha$  é uma curva assintótica se, e somente se,

$$D^2 f(\alpha(s))[\alpha'(s), \alpha'(s)] = 0. \quad (4.1)$$

Então, derivando a igualdade acima obtemos

$$0 = D^3 f(\alpha(s))[\alpha'(s), \alpha'(s), \alpha'(s)] + 2D^2 f(\alpha(s))[\alpha'(s), \alpha''(s)].$$

Assim, para  $s = 0$ , temos

$$\begin{aligned} D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] = 0 &\Leftrightarrow 2D^2 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha''(0)] = 0 \\ &\Leftrightarrow 2k(0)D^2 f(\alpha(0)) \cdot [\alpha'(0), n(0)] = 0, \end{aligned}$$

onde  $n(0)$  é o vetor normal unitário de  $\alpha$ . Como  $\alpha'(0) \perp n(0)$ , concluimos que

$$D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] \neq 0 \Leftrightarrow k(0) \neq 0.$$

Logo, pela Proposição anterior, concluimos a primeira afirmação.

Para a segunda afirmação sabemos que  $D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] = 0 \Leftrightarrow k(0) = 0$ .

Derivando a Equação (4.1) duas vezes e tomando  $s = 0$ , temos

$$\begin{aligned} 0 = D^4 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] &+ 5D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] + \\ &2D^2 f(\alpha(0))[\alpha''(0), \alpha''(0)] + 2D^2 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'''(0)], \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} D^4 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] &= -5k(0)D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), n(0)] - \\ &2k^2(0)D^2 f(\alpha(0))[n(0), n(0)] - \\ &2k'(0)D^2 f(\alpha(0))[\alpha'(0), n(0)] \\ &\neq 0 \Leftrightarrow k'(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Novamente pela Proposição anterior concluímos a segunda afirmação.

Finalmente, pela Proposição anterior, temos uma singularidade Borboleta se, e somente se,

$$D^3 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), n(0)] = D^4 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] = 0 \Leftrightarrow k(0) = k'(0) = 0.$$

De maneira análoga à anterior,  $(D^2 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0)])''' = 0$ , nos leva a

$$\begin{aligned} D^5 f(\alpha(0))[\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)] &= 2D^2 f(\alpha(0))[\alpha'(0), k''(0)n(0)] \\ &\neq 0 \Leftrightarrow k''(0) \neq 0. \end{aligned}$$

■

Consideremos, agora, a curva  $X \circ \alpha$  com curvatura  $k_{X \circ \alpha}$ . Como uma curva assintótica em uma superfície tem curvatura normal igual a zero, sua curvatura como uma curva no espaço é igual à sua curvatura intrínseca  $k(s)$ . Por nossa escolha de coordenadas, escrevendo  $z = f(x, y)$ , temos que as derivadas de  $k_{X \circ \alpha}$  são iguais às derivadas de  $k(s)$ . Deste modo, temos que:

**Corolário 4.1.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

$$\begin{aligned} \text{Cúspide} &\Leftrightarrow k_{X \circ \alpha} \neq 0; \\ \text{Rabo de andorinha} &\Leftrightarrow k_{X \circ \alpha} = 0 \text{ e } k'_{X \circ \alpha} \neq 0; \\ \text{Borboleta} &\Leftrightarrow k_{X \circ \alpha} = k'_{X \circ \alpha} = 0 \text{ e } k''_{X \circ \alpha} \neq 0. \end{aligned}$$

Em termos geométricos, se  $r$  é uma reta passando por  $p$  paralela a  $u_0$ , temos:

**Corolário 4.2.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

$$\begin{aligned} \text{Cúspide} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{A reta } r \text{ possui uma ordem de contato 2 com } M \text{ em } p \text{ se,} \\ \text{e somente se, } u_0 \text{ é um vetor assintótico de } M \text{ em } p, \text{ e a curva} \\ \text{assintótica correspondente possui curvatura diferente de zero;} \end{array} \right. \\ \text{Rabo de andorinha} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{A reta } r \text{ possui uma ordem de contato 3 com } M \text{ em } p \text{ se, e so-} \\ \text{mente se, } u_0 \text{ é um vetor assintótico de } M \text{ em } p, \text{ e a correspon-} \\ \text{dente curva assintótica possui uma inflexão simples em } p; \end{array} \right. \\ \text{Borboleta} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{A reta } r \text{ possui uma ordem de contato 4 com } M \text{ em } p \text{ se, e so-} \\ \text{mente se, } u_0 \text{ é um vetor assintótico de } M \text{ em } p, \text{ e a correspon-} \\ \text{dente curva assintótica possui uma inflexão dupla em } p. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Antes de estudarmos as singularidades para  $p$  parabólico, necessitamos de mais alguns detalhes a respeito da aplicação de Gauss  $N : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ . A aplicação de Gauss é singular precisamente quando  $0 = N_x \wedge N_y = K(x, y)X_x \wedge X_y$ , isto é, no conjunto parabólico onde a curvatura Gaussiana  $K(x, y) = 0$ . Tomemos o conjunto parabólico sendo a curva suave  $(x(t), y(t))$ . A imagem  $N(t)$  desta curva sob a aplicação de Gauss é singular precisamente quando  $N'(t) = 0$ .

Quando  $N'(t) = 0$  e  $N''(t) \neq 0$ , temos que as singularidades da curva  $N(t)$  são cúspides. Este fato sugere a seguinte definição:

**Definição 4.1.** *Seja  $p$  um ponto parabólico de  $M$ . Então  $p$  é chamado **Cúspide de Gauss** quando  $N'(p) = 0$  e  $N''(p) \neq 0$ .*

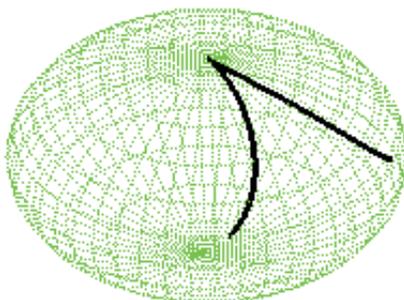


Figura 4.2: Cúspide na imagem da aplicação de Gauss restrita à curva parabólica

A proposição seguinte nos dá uma equivalência para cúspide de Gauss.

**Proposição 4.7.** *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ . Assim,  $p \in M$  é uma cúspide de Gauss da aplicação  $X$  se, e somente se, a direção assintótica de  $X$  é tangente à curva parabólica de  $X$  em  $p$ .*

**Demonstração:** Considere o conjunto parabólico de  $M$  sendo a curva suave  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e façamos  $N(t) = N|_{\alpha(t)}$ . Sabemos que

$$N'(t) = dN_p(\alpha'(t)) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{bmatrix}.$$

Seja,  $k_2 = 0$ ,  $p = \alpha(0)$  e  $v = \alpha'(0)$ . Assim, se a aplicação de Gauss  $N(t)$  é suave então o rank da Jacobiana é 1 para cada ponto  $p$  parabólico. O kernel da Jacobiana é a direção assintótica de curvatura  $v$  em  $p$  associada ao autovalor  $k_2$ . Logo, a curvatura de  $X$  na direção de  $v$  em  $p$  é zero se, e somente se,  $N'(0) = 0$ .

Portanto, se  $(x(t), y(t))$  é a curva parabólica de  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  então  $N'(0) = 0$  se, e somente se,  $p$  é uma cúspide de  $N$ .

■

**Observação 4.1.** *Da Proposição anterior podemos dizer, agora, que a função altura tem uma singularidade  $A_3$  se, e somente se,  $p$  é uma cúspide de Gauss.*

Podemos estudar as singularidades da aplicação de Gauss mais facilmente pela projeção central da origem no plano  $z = 1$ , obtendo, assim,  $(-f_x, -f_y, 1)$ . Quando projetamos no plano- $(x, y)$ , obtemos a aplicação composta  $\tilde{N}(x, y) = (-f_x, -f_y)$ . Desde que a imagem de  $N$  está contida no hemisfério superior de  $S^2$ , e a projeção central é um difeomorfismo do hemisfério superior no plano  $z = 1$ , a aplicação modificada de Gauss  $\tilde{N}$  possui as mesmas singularidades da aplicação  $N$ .

Com isso podemos apresentar mais uma equivalência para a cúspide de Gauss.

**Proposição 4.8.** *Seja  $p$  um ponto parabólico de  $M$ . Então existe uma reta  $r$  em  $\mathbb{R}^3$  com ordem de contato  $\geq 3$  com  $M$  em  $p$  se, e somente se,  $p$  é uma cúspide de Gauss de  $M$ .*

**Demonstração:** Seja  $p$  um ponto parabólico de  $M$ , então, depois de um movimento rígido em  $\mathbb{R}^3$ , podemos assumir que existe uma vizinhança coordenada de  $p$  na qual  $M$  tem a forma  $(x, y, k\frac{x^2}{2} + g(x, y))$  em  $p = (0, 0)$ . A constante  $k$  é a curvatura principal diferente de zero de  $M$  em  $p$ . A direção principal associada a  $k$  está no eixo- $x$ , e a direção principal de curvatura associada à curvatura nula está no eixo- $y$ .

( $\Rightarrow$ ) Se uma reta tem ordem de contato  $\geq 2$  com  $X$  em  $p$ , então esta reta deve ser o eixo- $y$ , pela forma que tomamos a imersão  $X$ . Agora se o eixo- $y$  tem ordem de contato  $\geq 3$  com  $X$  em  $0$ , então  $g_{yyy}(0) = 0$ . Segue que  $N'(0) = 0$ , ou seja,  $p$  é cúspide de Gauss.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $p = (0, 0)$  uma cúspide de Gauss em  $M$ , então  $N'(0) = 0$ . Logo, segue que  $g_{yyy}(0) = 0$ , que é a condição para que a reta  $r$  tenha contato de ordem 3 com  $M$  em  $p$ .

■

Seja  $C$  uma curva plana. O conjunto de todas as retas tangentes a  $C$  forma uma curva no plano projetivo afim  $\mathbb{R}P^2$ , chamada a *curva dual* de  $C$  e denotada por  $\check{C}$ . Esta dualidade pode ser vista também na esfera  $S^2$ . Se  $C$  é uma curva em  $S^2$  então a reta tangente em um ponto  $p$  de  $C$  pode ser identificada com o círculo principal em  $S^2$  tangente a  $C$  (este círculo é único). O círculo principal (equador) determina (e é determinado por) um polo

norte e um polo sul. Quando o ponto  $p$  varia sobre  $C$  os polos descrevem a curva dual de  $C$  (temos duas cópias), ver figura (4.3).

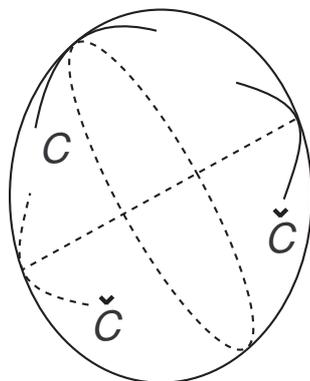


Figura 4.3: Curvas duais

Vamos, agora, criar uma nova aplicação da superfície  $M$  na esfera  $S^2$  como segue. Localmente, podemos escolher um campo de vetores unitários assintóticos  $A(p)$  ao longo da curva parabólica, e consideremos então, a chamada aplicação assintótica que leva o ponto  $p$  de  $A(p)$  em  $S^2$ . Seja  $(x(t), y(t))$  a curva parabólica de  $M$ , com imagem assintótica  $A(t)$  e imagem normal  $N(t)$ .

**Lema 4.1.** *As curvas  $A(t)$  e  $N(t)$  são duais na esfera.*

**Demonstração:** Considerando  $N'(t) \neq 0$ , então  $N'(t)$  é a direção principal cuja curvatura é diferente de zero. Agora  $A(t)$  é a direção principal cuja curvatura é zero, então  $A(t)$  é ortogonal a  $N'(t)$  para todo  $t$ , isto é,  $A(t) \cdot N'(t) = 0$ . Assim, o polo definido pelo círculo equador em  $S^2$  em  $N(t)$  é  $A(t)$ . Inversamente, como  $A(t) \cdot N(t) = 0$  segue que  $A'(t) \cdot N(t) = 0$ , ou seja, o polo definido pelo círculo equador em  $S^2$  em  $A(t)$  é  $N(t)$ . Portanto  $A(t)$  e  $N(t)$  são curvas duais na esfera.

■

**Observação 4.2.** *Como as curvas  $A(t)$  e  $N(t)$  são duais, temos que as cúspides de  $N(t)$  correspondem às inflexões de  $A(t)$ , e vice-versa.*

Finalmente, para  $p$  parabólico temos a seguinte proposição:

**Proposição 4.9.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

*Lábios/Bicos*  $\Leftrightarrow u_0$  é direção assintótica e  $p$  ponto parabólico;

*Ganso*  $\Leftrightarrow u_0$  é direção assintótica, a imagem assintótica em  $S^2$  da curva parabólica tem uma cúspide, e a imagem Gaussiana tem uma inflexão;

*Gaivota*  $\Leftrightarrow u_0$  é direção assintótica,  $p$  é uma cúspide de Gauss e a imagem assintótica da curva parabólica em  $S^2$  tem um ponto de inflexão.

**Demonstração:** Considerando  $u_0$  a direção assintótica principal em  $p \in M$ . Vimos que  $p$  é ponto parabólico se, e somente se,  $a_{11} = 0$ . Segue, pela Proposição (4.4), que neste ponto a projeção tem uma singularidade Lábios/Bicos.

Sendo  $u_0$  a direção assintótica principal e  $p \in M$  ponto parabólico, segue que,  $a_{02} = 0$  e  $a_{11} = 0$ . Logo podemos escrever  $j^3 f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$ . A curva parabólica é dada por  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ , logo temos a seguinte equação

$$(3a_{21}a_{03} - a_{12}^2)y^2 + (3a_{12}a_{30} - a_{21}^2)x^2 + (9a_{30}a_{03} - a_{21}a_{12})xy + 3a_{20}a_{03}y + a_{20}a_{12}x = 0. \quad (4.2)$$

Consideremos  $\tilde{N}(t)$  sendo a restrição da aplicação modificada de Gauss  $\tilde{N} = (-f_x, -f_y)$  à curva parabólica  $(x(t), y(t))$ . Seja  $\tilde{N}'_{|(x(t), y(t))} = (X(t), Y(t))$ . A curvatura de  $\tilde{N}(t)$  é dada por

$$k(t) = \frac{X''Y' - X'Y''}{((X')^2 + (Y')^2)^{3/2}}.$$

Calculando, desta maneira,  $k(t)$  e aplicando em  $t = 0$ , temos que

$$k(0) = \frac{3a_{21}a_{03} - a_{12}^2}{6a_{03}a_{02}^2}.$$

Logo,  $k(0) = 0$  se, e somente se,  $(3a_{21}a_{03} - a_{12}^2) = 0$ , ou seja, pela Proposição (4.4) se, e somente se, a singularidade for do tipo Ganso. Assim, nesta singularidade temos uma inflexão na imagem Gaussiana do conjunto parabólico. Como  $\tilde{N}(t)$  possui uma inflexão, pela Observação (4.2), a imagem assintótica da curva parabólica possui uma cúspide.

Considerando o mesmo 3-jato para  $f$ , obtemos novamente a equação da curva parabólica (4.2). Agora precisamos calcular  $\tilde{N}'(0)$ , que é

$$\tilde{N}'(0) = \frac{6a_{20}a_{03}}{a_{12}}.$$

Desde que  $a_{20} \neq 0$ , pois caso contrário temos singularidades mais degeneradas, segue que,  $\tilde{N}'(0) = 0$  se, e somente se,  $a_{03} = 0$ , ou seja, pela Proposição (4.4) temos uma

singularidade do tipo Gaivota. Portanto, nesta singularidade a aplicação de Gauss possui uma cúspide. Segue, da observação (4.2), que a imagem assintótica da curva parabólica em  $S^2$  tem um ponto de inflexão.

■

Concluimos esta seção, apresentando o teorema com os resultados obtidos sobre a geometria das singularidades da projeção ortogonal.

**Teorema 4.3.** *Para um mergulho genérico de uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ , a projeção ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$  apresenta uma singularidade:*

Nome	Condições Geométricas
Dobra	$u \in T_p M$ .
Cúspide	$u$ direção assintótica.
Rabo de andorinha	$u$ direção assintótica; $p$ ponto de inflexão da curva assintótica.
Lábios/Bicos	$u$ é direção assintótica; $p$ é ponto parabólico.
Borboleta	$u$ é direção assintótica; $p$ ponto de inflexão duplo da curva assintótica.
Ganso	$u$ direção assintótica; a imagem assintótica em $S^2$ da curva parabólica tem uma cúspide; a imagem Gaussiana tem uma inflexão.
Gaivota	$u$ é direção assintótica; $p$ cúspide de Gauss; a imagem assintótica da curva parabólica em $S^2$ tem um ponto de inflexão.

Tabela 4.1: Singularidades da Projeção Ortogonal  $P_{u_0}$  na direção  $u_0$  em  $p \in M$

## 4.5 Configuração das Curvas Assintóticas próximas à Cúspide de Gauss

Mostraremos, nesta seção, que existem, genericamente, três configurações topológicas distintas das curvas assintóticas em uma vizinhança de uma cúspide de Gauss. Esta classificação é possível, pois o campo das linhas assintóticas é um caso especial de singularidades das equações diferenciais ordinárias implícitas. Vamos apresentar esta classificação, primeiramente, nos moldes dos artigos [14] e [15].

Seja, primeiramente,

$$\begin{aligned} c : I = [0, l] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto c(u), \end{aligned}$$

um arco de curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $u$ . Vamos construir uma superfície suave de forma que  $c$  seja sua curva parabólica. Para tal, tomemos uma seção normal em  $c(u)$  com  $c'(u) = T(u)$  e a movamos ao longo de  $I$ . Seja  $\varphi(u)$  o ângulo entre  $T(u)$  e  $e_2(u)$ , onde  $e_2$  é a direção principal associada a  $k_2$  com a seguinte convenção:  $k_1(u) < 0$  e  $k_2(u) = 0$ ,  $\forall u \in I$ . Consideremos o seguinte lema:

**Lema 4.2.** [14] *Seja  $c : I \rightarrow M$  um arco regular da curva parabólica, parametrizada pelo comprimento de arco  $u$ . Então a expressão:*

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[ \frac{1}{2}k_n^\perp(u)v^2 + A(u, v)v^2 \right] N(u), \quad (4.3)$$

onde  $k_n^\perp(u) = k_n(c(u), (N \wedge T)(u))$  e  $A(u, 0) = 0$ ,  $\forall u \in I$ , define uma superfície suave que contém  $c$ .

Vamos calcular os coeficientes e as derivadas da segunda forma fundamental da superfície  $\alpha$ , dada no Lema anterior. As equações de Darboux para o triedro  $\{T(u), (N \wedge T)(u), N(u)\}$  são dadas por:

$$\begin{cases} T'(u) &= k_g(u)(N \wedge T)(u) + k_n(u)N(u) \\ (N \wedge T)'(u) &= -k_g(u)T(u) + \mathcal{T}_g(u)N(u) \\ N'(u) &= -k_n(u)T(u) - \mathcal{T}_g(u)(N \wedge T)(u), \end{cases}$$

onde  $k_g(u)$  e  $\mathcal{T}_g(u)$  são, respectivamente, a curvatura e torção geodésica de  $c$  no ponto  $c(u)$ . A Torção Geodésica  $\mathcal{T}_g$  pode ser calculada da seguinte forma ([12], pág. 180):

$$\mathcal{T}_g(u) = (k_1 - k_2)(u)\cos\varphi(u)\sen\varphi(u).$$

No nosso caso ( $k_2(u) = 0$ ), temos que:

$$\mathcal{T}_g(u) = k_1(u)\cos\varphi(u)\text{sen}\varphi(u). \quad (4.4)$$

Agora, pela fórmula de Euler temos que

$$\begin{aligned} k_n(u) &= k_1(u)\text{sen}^2\varphi(u), \\ k_n^\perp(u) &= k_1(u)\cos^2\varphi(u). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Desta forma, depois de alguns cálculos, os coeficientes da segunda forma fundamental em  $(u, 0)$  e suas respectivas derivadas, são dados por:

$$\begin{aligned} e(u, 0) &= k_n(u) = k_1(u)\text{sen}^2\varphi(u). \\ f(u, 0) &= \mathcal{T}_u(u) = k_1(u)\text{sen}\varphi(u)\cos\varphi(u). \\ g(u, 0) &= k_n^\perp(u) = k_1(u)\cos^2\varphi(u). \\ e_v(u, 0) &= -k_g(u)(2k_n(u) + k_n^\perp(u)) + \mathcal{T}'_g(u). \\ f_v(u, 0) &= (k_n^\perp)'(u). \\ g_v(u, 0) &= -k_g(u)k_n^\perp(u) + 6A_v(u, 0). \end{aligned}$$

**Observação 4.3.** *Em um ponto  $u_0$  tal que  $\varphi(u_0) = 0$  e  $\varphi'(u_0) \neq 0$  temos que a direção principal de  $e_2$  é tangente à curva parabólica em  $c(u_0)$ .*

Assim, estamos prontos para apresentar o seguinte resultado:

**Teorema 4.4.** *Considere um ponto  $u_0$  onde  $\varphi(u_0) = 0$  e  $\varphi'(u_0) \neq 0$ . Considere ainda o produto  $k_g(u_0)\varphi'(u_0)$ . Então, se  $k_g(u_0) < \varphi'(u_0)$ , a configuração das linhas assintóticas é do tipo sela dobrada; se  $\varphi'(u_0) < k_g(u_0) < 9\varphi'(u_0)$ , a configuração é do tipo foco dobrado; e, se  $k_g(u_0) > 9\varphi'(u_0)$ , a configuração é do tipo nó dobrado.*

**Demonstração:** Suponha, sem perda de generalidade, que  $u_0 = 0$  com  $\varphi(u_0) = 0$  e  $\varphi'(u_0) \neq 0$ . Então,  $\mathcal{T}_g(0) = 0$ . A condição  $\varphi'(u_0) \neq 0$  garante que o contato entre a direção  $e_2$  e a curva parabólica é quadrático, isto é,  $\mathcal{T}'_g(0) \neq 0$ . De fato, de (4.4) temos

$$\mathcal{T}_g(0) = k_1(0)\cos\varphi(0)\text{sen}\varphi(0) = 0; \text{ e}$$

$$\mathcal{T}'_g(0) = k'_1(0)(\cos\varphi(0)\text{sen}\varphi(0)) + k_1(0)\varphi'(0)(-\text{sen}^2\varphi(0) + \cos^2\varphi(0)) = k_1(0)\varphi'(0) \neq 0.$$

Consideremos a equação diferencial das linhas assintóticas no fecho da região hiperbólica

$$e(u, v)du^2 + 2f(u, v)dudv + g(u, v)dv^2 = 0, \quad (4.6)$$

onde  $e$ ,  $f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental. Para estudarmos as configurações das linhas assintóticas consideremos a equação diferencial implícita

$$F(u, v, p) = e(u, v) + 2f(u, v)p + g(u, v)p^2 = 0, \text{ onde } p = \frac{dv}{du}.$$

Seja  $N = F^{-1}(0)$  e defina o campo de vetores de Lie-Cartan sobre  $N$

$$X(u, v, p) = \begin{cases} X_1(u, v, p) &= F_p(u, v, p) = 2g(u, v)p + 2f(u, v) \\ X_2(u, v, p) &= pF_p(u, v, p) = 2p(g(u, v)p + f(u, v)) \\ X_3(u, v, p) &= -(F_u(u, v, p) + pF_v(u, v, p)) = -[g_v(u, v)p^3 + (g_u(u, v) \\ &\quad + 2f_v(u, v))p^2 + (e_v(u, v) + 2f_u(u, v))p + e_u(u, v)] \end{cases}$$

Cabe ressaltar, aqui, que o campo de vetores  $X$  é tangente à superfície  $N$  e as projeções das curvas integrais de  $X$  por  $\pi(u, v, p) = (u, v)$  são as soluções da equação (4.6), ou seja, as linhas assintóticas de  $\alpha$ . O ponto  $(u_0, 0, 0) = (0, 0, 0)$  pertence a  $N$ , pois  $F(0, 0, 0) = e(0, 0) = k_1(0)\text{sen}^2\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0) = 0$ . Neste ponto, temos

$$X(u_0, 0, 0) = (2k_1(u_0)\text{sen}\varphi(u_0)\cos\varphi(u_0), 0, -2k_1(u_0)\text{sen}\varphi(u_0)\varphi'(u_0)) = (0, 0, 0),$$

ou seja,  $(u_0, 0, 0) = (0, 0, 0)$  é um ponto de equilíbrio de  $X$  sobre  $N$ . A matriz Jacobiana de  $X$  em  $(0, 0, 0)$ , é dada por

$$DX(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2f_u & 2f_v & 2g \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_{uu} & -e_{uv} & -(2f_u + e_v) \end{bmatrix}.$$

Usando as equações obtidas para a segunda forma fundamental, os autovalores de  $DX(0, 0, 0)$  são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \\ \lambda_{12} &= \frac{-e_v \pm \sqrt{(e_v)^2 - 8ge_{uu}}}{2} \\ &= \frac{k_1}{2} \left[ (k_g(0) - \varphi'(0)) \pm \sqrt{(k_g(0) - \varphi'(0))(k_g(0) - 9\varphi'(0))} \right]. \end{aligned}$$

Analisando,  $\frac{k_g(0)}{\varphi'(0)}$ , e considerando  $\varphi'(0) > 0$ , concluímos que:

Se  $\frac{k_g(0)}{\varphi'(0)} < 1 \Rightarrow k_g(0) < \varphi'(0) \Rightarrow k_g(0) - \varphi'(0) < 0$ . Portanto,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem sinais opostos, e, a configuração é do tipo sela (Figura (4.4)).

Se  $1 < \frac{k_g(0)}{\varphi'(0)} < 9$ , então,  $k_g(0) < 9\varphi'(0) \Rightarrow k_g(0) - 9\varphi'(0) < 0$ ; e,  $k_g(0) > \varphi'(0) \Rightarrow k_g(0) - \varphi'(0) > 0$ . Portanto, temos que  $\lambda_{12}$  são autovalores complexos conjugados e, a configuração é do tipo foco (Figura (4.5)).

Se  $\frac{k_g(0)}{\varphi'(0)} > 9 \Rightarrow k_g(0) > 9\varphi'(0) \Rightarrow k_g(0) - 9\varphi'(0) > 0$ . Portanto,  $\lambda_{12}$  são negativos e distintos, e, a configuração é do tipo nó (Figura (4.6)).

■

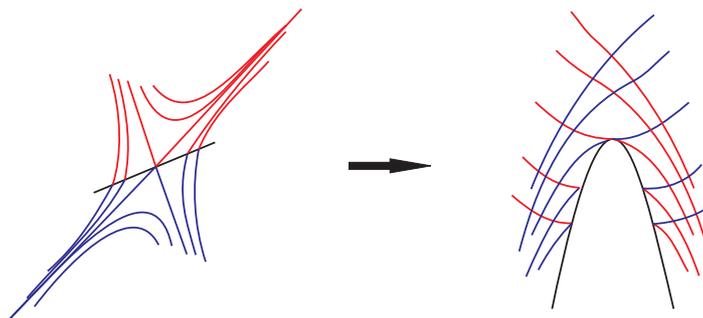


Figura 4.4: Configuração do tipo sela

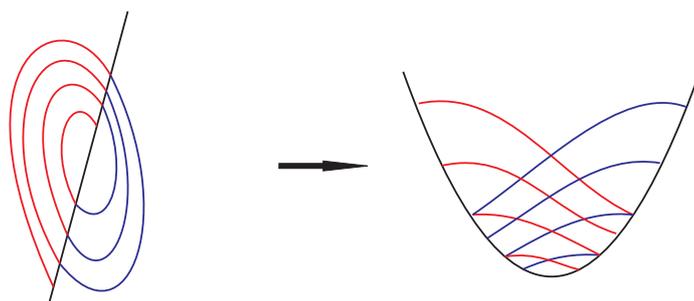


Figura 4.5: Configuração do tipo foco

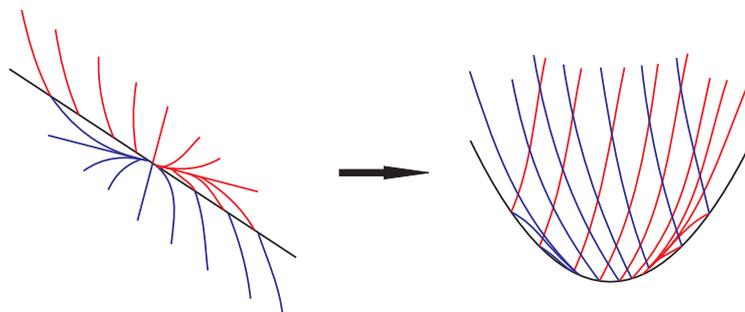


Figura 4.6: Configuração do tipo nó

Observando as Figuras (4.4), (4.5) e (4.6), podemos ver que as inflexões das curvas assintóticas convergem para uma cúspide de Gauss. Temos, então, o seguinte resultado:

**Teorema 4.5.** *Seja  $p$  um ponto parabólico de  $M$ . Então  $p$  é uma cúspide de Gauss se, e somente se,  $p$  está no fecho do conjunto dos pontos de inflexão das curvas assintóticas de  $M$ .*

**Demonstração:** Ver [2].

■

O Teorema (4.4) resolve o problema de configuração das linhas assintóticas em uma vizinhança da cúspide de Gauss. Queremos, agora, relacionar essas configurações com os coeficientes da expansão de Taylor da superfície escrita na forma de Monge. Deste modo, considere:

$$j^4 f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4.$$

A equação diferencial das linhas assintóticas é dada por:

$$f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}(dx)(dy) + f_{yy}(dy)^2 = 0.$$

Tome  $q = \frac{dx}{dy}$ , e então reescrevemos a equação acima da forma

$$G(x, y, q) = f_{xx}q^2 + 2f_{xy}q + f_{yy} = 0,$$

onde  $N = G^{-1}(0)$ . Calculando o campo de Lie-Cartan temos:

$$Y(x, y, q) = \begin{cases} Y_1(x, y, q) & = qG_q(x, y, q) \\ Y_2(x, y, q) & = G_q(x, y, q) \\ Y_3(x, y, q) & = -(G_x(x, y, q) + qG_y(x, y, q)) \end{cases}$$

vemos que a origem é ponto de equilíbrio de  $Y(x, y, q)$  se, e somente se,  $a_{03} = 0$ , que é a condição necessária para obtermos uma cúspide de Gauss. Então, substituindo esta condição no campo  $Y(x, y, q)$ , e calculando a matriz Jacobiana na origem temos

$$DY(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4a_{21} & 4a_{12} & 4a_{20} \\ -6a_{13} & -24a_{04} & -6a_{12} \end{bmatrix}.$$

Calculando, agora, os autovalores de  $DY(0, 0, 0)$  temos que

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, \\ \lambda_{12} &= -a_{12} \pm \sqrt{25a_{12}^2 - 96a_{20}a_{04}}. \end{aligned}$$

Desta forma, vemos que a configuração das linhas assintóticas depende da combinação de apenas três coeficientes. Lembramos, ainda, que  $a_{12} \neq 0$  também é uma condição necessária para obtermos a cúspide de Gauss (não obtemos centros).

Para uma melhor visualização das regiões onde ocorrem as três configurações das linhas assintóticas descritas no Teorema (4.4), tomemos  $a_{20} = 1$ , desta forma temos o seguinte diagrama de bifurcação do campo  $Y$ :

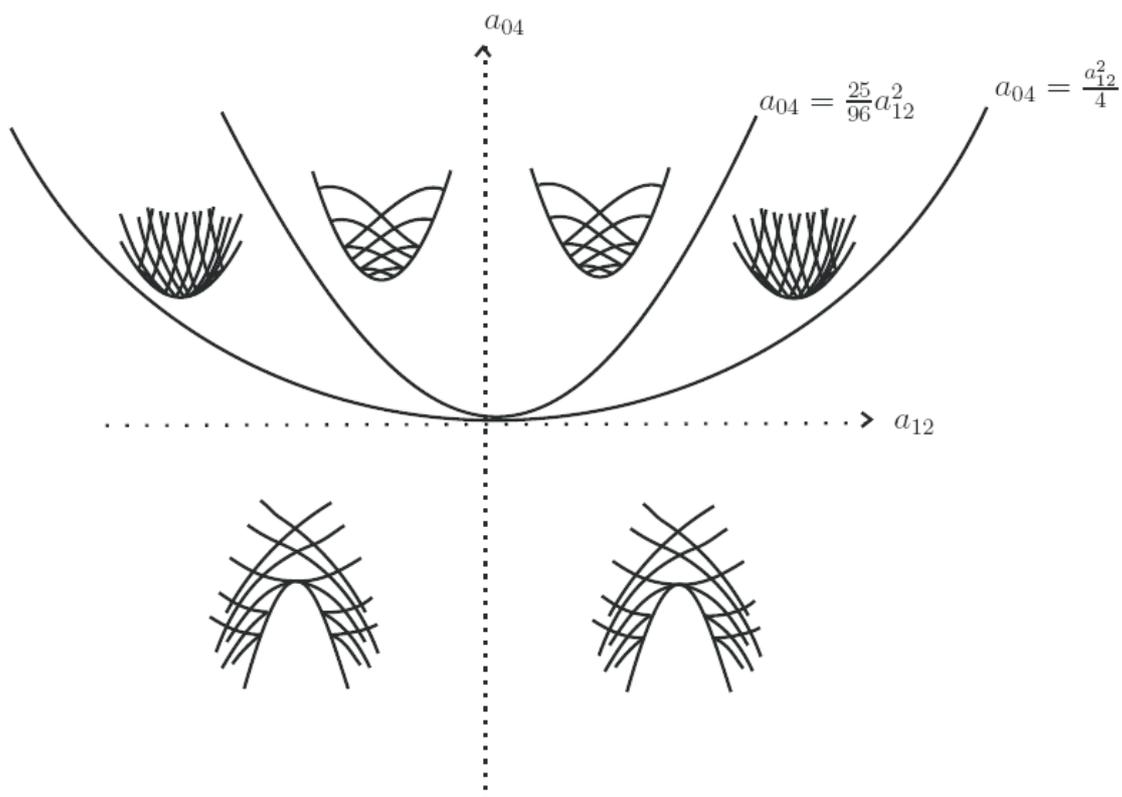


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação do campo  $Y$

# Bibliografia

- [1] ARNOLD, V. I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of  $A_k, D_k, E_k$  and Lagrangian singularities. *Functional Anal. Appl.* 6, 1973, 254-272.
- [2] BANCHOFF, T., GAFFNEY, T., McCRORY, C. Cusps of Gauss Mappings. *Pitman Research Notes in Math.* 55, 1982. Pitman Publ.: Boston-London-Melbourne.
- [3] BRUCE, J. W. Generic geometry and duality, in Singularities, *LMS Lecture Notes Series, 201, Cambridge University Press*, 1994, 29-59.
- [4] BRUCE, J.W., GIBLIN, P.J. Curves and Singularities, Cambridge University Press, 1984.
- [5] BRUCE, J. W., GAFFNEY, T. J. Simple singularities of mappings  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . *Journal London Math. Soc.* 2, 26, 1982, 465-474.
- [6] BRUCE, J. W., ROMERO FUSTER, M. C. Duality and projections of curves and surfaces in 3-space. *Quartely J. Math. Oxford ser.* 2, 42, 1991, 433-441.
- [7] BRUCE J. W., DU PLESSIS, A. A., WALL, C. T. C. Determinacy and unipotency, *Invent. Math.* 88, 1987, 521-554.
- [8] BRUCE, J.W., WILKINSON, T. V. Folding maps and focal sets. *Proceedings of Warwick Symposium on Singularities, Springer Lectures Notes in Math.* 1462, 1991, 63-72.
- [9] CASTRIGIANO, D.P.L., HAYES, S.A. Catastrophe theory. New York : Addison-Wesley, 1993.
- [10] DAVID, J.M.S. Projection-generic curves, *Journal London Math. Soc.* 2, 27, 1983, 552-562.

- [11] DIAS, F. S., NUÑO BALLESTEROS, J. J. Plane Curve diagrams and geometrical applications. *Quartely. J. Math.* 59, 2008, 287-310.
- [12] DO CARMO, M. P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, *Publicação SBM*, 2005.
- [13] GAFFNEY, T. The structure of  $T\mathcal{A}(f)$ ; classification and an application to differential geometry, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 40, (American Mathematical Society, Providence,) 1983, Part 1, 409-427.
- [14] GARCIA, R., SOTOMAYOR, J. Lines of curvature near hyperbolic principal cycles, *Pitman Research in Mathematics Series*, Edited by R. Bamon, R. Labarca, J. Lewowicz and J. Palis, 285, 1993, 255-262.
- [15] GARCIA, R., GUTIERREZ, C., SOTOMAYOR, J. Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$ . *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 123, 1989, 599-622.
- [16] GIBSON, C. G. Singular points of smooth mappings. *Research Notes in Maths.* 25, Pitman, London 1973.
- [17] LIMA, E. L. Álgebra Linear. *Coleção Matemática Universitária*, IMPA, 1998.
- [18] MARTINET, J. Singularities of Smooth Functions and Maps, *London Mathematical Society Lecture Note Series 58*, Cambridge University Press, 1982.
- [19] MONTALDI, J. A. On contact between submanifolds, *Michigan Math. J.* 33, 1986, 195-199.
- [20] MOCHIDA, D.K.H., ROMERO FUSTER, M.C., RUAS, M. A. S. The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint, *Geom. Dedicata* 54, 3, 1995, 323-332.
- [21] MOND, D. Ph.D. Thesis, *University of Liverpool*, 1982.
- [22] MOND, D. On the classification of germs of maps from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ , *Proc. London Math. Soc.* 50, 1985, 333-369.
- [23] NABARRO, A. C. Duality and contact of hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$  with hyperplanes and lines. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* 46, 2003, 637-648.

- [24] RIEGER, J. H. Families of Maps from the plane to the plane, *Journal of the London Mathematical Society.* 2, 36, 1987, 351-369.
- [25] SHENG, L. Y. Classificação de Singularidades: Método da Transversal Completa. *Dissertação de Mestrado, 2002, ICMC-USP.*
- [26] TARI, F. Singularidades de aplicações diferenciáveis, *Notas didáticas do ICMC-USP,* São Carlos, 34, 1999.
- [27] WALL, C.T.C. Geometric properties of generic differentiable manifolds, in *Geometry and Topology, Rio de Janeiro 1976. Lecture Notes in Mathematics* 597, 1977. 707-774.
- [28] WHITNEY, H. On singularities of Euclidean spaces I : Mappings of the plane into the plane. *Annals of Math.* 62, 1955, 374-410.