

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

DA CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DUAIS
AO NASCIMENTO DA TEORIA DE CORDAS

Diogo Amaral de Magalhães

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur

ITAJUBÁ, 23 DE ABRIL DE 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

DA CONSTRUÇÃO DOS MODELOS DUAIS
AO NASCIMENTO DA TEORIA DE CORDAS

Diogo Amaral de Magalhães

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Iván Medina Bascur

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG
23 DE ABRIL DE 2009

Aos meus futuros filhos.

Agradecimentos

Agradeço aos céus por ter tido fé e perseverança para a finalização deste trabalho. Agradeço ao Prof. Medina pelo tempo e empenho dedicados que muito vieram a contribuir e foram decisivos na minha formação. Em especial, agradeço ao Prof. Renato pela amizade e consideração. Em geral agradeço ao corpo docente do Programa.

Agradeço a Mam's e ao Pup's pelos incentivos e encorajamentos. Agradeço a Pop'x Trin por ter cuidado do meu quarto e expor. Agradeço ao pessoal da bnda por terem aprendido a usar fone. Um forte abraço pra galera "100-juízo". Agradeço aos meus amigos, companheiros e irmãos, Café e Léo, pela cumplicidade de vidas. Agradeço a galera da JT que domina a vizinhança do pântano; juntos formamos uma grande família. Agradeço por fazer parte de uma pequena história na vida da galera da facção 21. Agradeço aos meus antigos e sempre novos amigos Jão, Totó e Miguelito. Agradeço à minha namorada Prizinha por ter feito deste último ano o mais feliz que já tive.

Agradeço à natureza. Agradeço por existir música. Agradeço à minha bateria. Agradeço aos céus novamente pelas portas abertas e fechadas.

Se não existisse a Física ainda existiria amizade, som, amor, esperança,
crianças, fé, integridade, Vasco, perseverança, mar, arte, família e
muitas outras coisas boas para o coração...

Mas também, se não existisse Física, a mecânica da vida não seria quântica,
o espaço só seria o chato, o tempo não poderia ser um parâmetro,
o relativo não teria atributos absolutos e
o fantástico e o impressionante passaria muitas vezes despercebido...

O charme da existência está em mistérios, em segredos,
em pontos de vistas diferentes, simples e sutis, específicos e sofisticados...

O sentimento não pode parar...

Nunca pode parar...

Resumo

Este trabalho apresenta o modelo dual de Veneziano. A partir do princípio de dualidade, e usando o formalismo de operadores de vértice, obtemos a amplitude de N táquions; recuperamos a amplitude de Veneziano para o caso em que $N=4$. Em seguida, verificamos que o modelo generalizado de Veneziano é compatível com teoria quântica de campos, perturbativamente, a nível de árvore. Finalmente, constatamos que o espectro e os estados físicos do modelo dual de Veneziano coincidem com os de uma corda relativística aberta. Encontramos que a teoria quântica deste objeto é compatível com a invariância de Lorentz somente se a dimensão do espaço-tempo for igual a 26.

Modelos Duais; Modelo de Veneziano; Quantização da corda aberta.

Abstract

In this paper we present the Veneziano amplitude. We deduce from the duality principle, and making use of vertex operator formalism, the amplitude for N tachyons; we recover the Veneziano model in the case $N=4$. Next, we verify that the generalized Veneziano model is compatible with quantum field theory at tree level. Finally, we averigüe that the spectrum and physical states of the Veneziano model agree with those of a relativistic open string. We find that the quantum theory of this object is compatible with Lorentz invariance only if the spacetime dimension is equal to 26.

Dual Models; Veneziano Model; Quantization of the open string.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Construção dos modelos duais	4
2.1 Motivação experimental	4
2.2 Definição de modelos duais	5
2.2.1 Requisitos da matriz S	6
2.3 Amplitude de Veneziano	8
2.3.1 <i>Good news</i>	9
2.3.2 <i>Bad news</i>	13
3 Formalismo de operadores de vértice	14
3.1 Construção de A_4	15
3.1.1 Os objetos fundamentais do modelo de Veneziano: as cordas relativísticas abertas	17
3.1.2 Forma integral para A_4 em termos de operadores de vértice	19
3.1.3 Amplitude de 4 pontos	24
3.2 Amplitude de N pontos	26
3.2.1 Recuperando a amplitude de Veneziano	27

3.3	Fatoração	28
3.4	Espectro, <i>ghosts</i> e estados físicos	30
4	Conexão dos Modelos Duais com Teoria Quântica de Campos	32
4.1	Modelo generalizado de Veneziano	34
4.2	O táquion	35
4.3	O glúon	37
5	Modelos Duais e Teoria de Cordas	38
5.1	Alguns aspectos relativísticos não-quânticos da corda aberta	39
5.1.1	Ação de Nambu-Goto	39
5.1.2	Velocidade das extremidades da corda	42
5.1.3	Ação de Nambu-Goto no gauge estático	42
5.1.4	Tensão e massa intrínseca da corda	44
5.1.5	Relação entre o momentum angular e a energia de uma corda rígida girante	45
5.2	Quantização da corda aberta	46
5.2.1	Fixação de gauge, solução geral das equações de movimento e massa clássica da corda	47
5.2.2	Formalismo hamiltoniano	49
5.2.3	Osciladores e operador de massa ao quadrado quânticos	51
5.2.4	Espectro da corda	53
6	Considerações finais	57
	Convenções	58
	Bibliografia	59

Lista de Figuras

2.1	Fatoração para $2 \rightarrow 2$. Aqui, a ressonância R está na camada de massa. . .	8
2.2	A dualidade nos diz que a amplitude $B(s, t)$ inclui simultaneamente as contribuições dos canais s e t	11
3.1	Par quark-antiquark acoplados por infinitos osciladores. No caso contínuo, a ligação entre eles é feita por uma corda.	17
3.2	Diagrama para a função de 4 pontos.	18
3.3	A dualidade fica evidente na forma integral da amplitude graças ao fato dela ser invariante sob transformações projetivas. A dualidade implica em invariância cíclica na amplitude.	23
3.4	Fatoração para o espalhamento de 5 partículas escalares.	29
3.5	Fatoração para o espalhamento de N partículas idênticas.	29
4.1	Nas interações dos modelos duais, há uma troca de um número infinito de partículas.	33
6.1	Convenção $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ com os momenta entrando. O tempo flui da esquerda para a direita.	60

Capítulo 1

Introdução

O grande número de hádrons observados na década de 60 do século passado despertou num grande interesse na comunidade de físicos; buscou-se um modelo que fosse capaz de descrever as interações fortes, de onde veio a surgir os modelos duais. No início, não se conhecia nenhuma lagrangeana que descrevesse tais interações, que surgiram como proposta para explicar a estabilidade nuclear. Apesar do sucesso da teoria de campos com a eletrodinâmica quântica, o mesmo não acontecia com as interações fortes por dois motivos. O primeiro deles, o qual nós veremos neste trabalho que não consistia de fato em um problema, foi o grande número de hádrons existentes; isto era considerado uma inviabilidade porque seria necessária uma igual quantidade de campos. Em segundo lugar, muitos dos hádrons encontrados possuíam spin maior que 1 e, portanto, não era possível construir uma teoria quântica de campos consistente perturbativamente que descrevesse tais partículas. Através da abordagem da matriz S , trabalhou-se, então, diretamente com as amplitudes de espalhamento, as quais se relacionam diretamente com os tempos de meia-vida e secções de choque, quantidades mensuráveis em laboratório.

A primeira amplitude desenvolvida e de particular importância foi a amplitude de Veneziano [1], proposta para descrever as interações de um total de quatro partículas (envolvendo píons e outras ressonâncias). Além dos requisitos usuais impostos sobre a matriz S , foi incorporado um ingrediente adicional, a dualidade [2, 3]. Este modelo foi generalizado para N partículas escalares [4, 5] e, em seguida, a amplitude foi reescrita no formalismo de operadores. Pouco depois de Veneziano ter proposto a sua amplitude, Virasoro [6] encontrou uma amplitude para quatro ressonâncias, a qual também satisfazia ao requisito de dualidade; esta amplitude foi generalizada para N partículas escalares por Shapiro [7].

No início da década de 70, Nambu, Nielsen e Susskind [8], de forma independente, descobriram que o espectro de partículas encontrado nos modelos de ressonância dual e suas amplitudes de espalhamento podiam ser reproduzidos por objetos unidimensionais, as cordas relativísticas, cujas interações reproduziam a fórmula de Veneziano. E, não muito depois, Nambu-Goto [9], também de forma independente, propuseram uma fórmula para a ação da corda relativística como sendo a área da folha-mundo varrida por esta, a menos de uma constante.

Um comentário geral é que, já no final da década de 60, alguns físicos abandonaram os modelos duais, tendo em vista que o modelo de Veneziano não concordava com o regime *hard scattering* das interações de píons, apesar de concordar com o regime de Regge. Foi nesta época, já na década de 70 do século passado, que surgiu a Cromodinâmica Quântica, proposta por Gross, Wilczek e Politzer [10].

Recentemente, em Florença, Itália, houve uma conferência¹ que levou o nome "The birth of string theory", organizada por Andrea Cappelletti, Elena Castellani, Filippo Colomo e Paolo Di Vecchia. Este trabalho está fortemente baseado no artigo de Di Vecchia [11].

Nesta dissertação fazemos uma revisão elementar do modelo de ressonância dual, desde a aparição da amplitude de 4 pontos do modelo de Veneziano até a descoberta de que os objetos fundamentais descritos por ele são cordas relativísticas abertas.

No capítulo 2 deste trabalho mostramos como os modelos duais foram construídos, enfatizando algumas propriedades que as amplitudes almejadas deveriam satisfazer, tais como a simetria de cruzamento e o comportamento de altas energias, este bem conhecido da experiência. A seguir, apresentamos a amplitude de Veneziano, demonstrando que ela satisfaz a todas as propriedades discutidas ao longo do capítulo. No capítulo 3 generalizamos a amplitude de 4 pontos para N pontos utilizando o formalismo de operadores. Este *approach* é útil na interpretação do espectro hadrônico quando fatoramos a amplitude. É apresentada uma breve discussão acerca do espectro e da eliminação dos ghosts da teoria. Algumas das contas deste capítulo não foram estudadas e, portanto, sempre serão referidas ao trabalho [11].

No capítulo 4 apresentamos uma conexão da teoria quântica de campos com o modelo generalizado de Veneziano, analisando os dois primeiros estados da teoria: o táquion e o glúon. Na primeira parte do capítulo 5 discutimos sobre alguns aspectos clássicos da corda relativística aberta, com o objetivo de que se ganhe alguma intuição sobre este

¹O site da conferência é <http://theory.fi.infn.it/colomo/string-birth>.

objeto; na segunda parte realizamos a quantização dela, a qual culmina na identificação que o espectro e os estados físicos descritos por ela são os mesmos dos encontrados no modelo de ressonância dual².

As nossas convenções da métrica e das variáveis de Mandelstam se encontram no Apêndice.

²A demonstração rigorosa de que os objetos deste modelos são cordas, requer provar que as interações entre as cordas reproduzem as amplitudes encontradas nestes modelos; isto não será feito aqui.

Capítulo 2

Construção dos modelos duais

Neste capítulo discutiremos as bases que deram origem aos modelos duais. Primeiro, apresentamos os dados experimentais que motivaram a busca por uma teoria que descrevesse as interações fortes, a qual culminaria, enfim, nos modelos duais. Na seção seguinte, apresentamos sua definição para, somente depois, falarmos da fórmula de Veneziano.

2.1 Motivação experimental

Experimentalmente, na década de 60 do século passado, tinha-se visto que as ressonâncias hadrônicas obedecem à relação $J \sim E^2$ entre momento angular total e energia. Tais ressonâncias foram observadas para J 's cada vez maiores, chegando até $11/2$ e parecendo continuar adiante [12].

Outro fato experimental que guiou a construção dos modelos duais é que num processo de 2 partículas indo para 2, a subamplitude¹ $B(s, t)$ deve se anular quando $s \rightarrow \infty$ para um t fixo:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} B(s, t) = 0, \quad (2.1)$$

onde s e t são variáveis de Mandelstam definidas no apêndice. A forma que tal amplitude deve "morrer" / é dada pelo seguinte comportamento, quando $s \rightarrow \infty$ para t :

$$B(s, t) \sim \Gamma(-\alpha(t))(-\alpha(s))^{\alpha(t)}, \quad (2.2)$$

¹No início do capítulo seguinte ficará clara a distinção entre a amplitude A e a subamplitude B ; basicamente, a primeira inclui a conservação de momentum.

onde $\alpha(s)$ são trajetórias retilíneas de Regge²

$$\alpha(s) = \alpha' s + \alpha_0. \quad (2.3)$$

O tipo de comportamento assintótico, dado por (2.2), é chamado na literatura de comportamento de Regge.

Agora, vejamos como (2.1) pode nos levar à necessidade de se ter um número infinito de partículas na teoria, tal como análise feita em [12].

Em termos de uma soma sobre todos os J 's, a contribuição do canal t , em geral, pode ser escrita como [12]

$$A(s, t) = - \sum_J \frac{g_J^2 P_J(s)}{t - \frac{M_J^2}{\alpha'}}, \quad (2.4)$$

onde $P_J(s)$, em geral, é um polinômio de grau J em s e g_J 's são constantes de acoplamento. Se a soma do lado direito da equação acima fosse finita, ela seria evidentemente dominada pelo termo de maior potência em J e divergiria. Entretanto, (2.1) exclui esta possibilidade.

Considere a expansão em série de potências da função e^{-x} , com x sendo real:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots. \quad (2.5)$$

De fato, $e^{-x} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$; mesmo que o número de termos do lado direito de (2.5) seja infinito, o resultado obtido do lado esquerdo é finito e igual a 0. Em analogia, um dos requisitos para garantir-se (2.1), a partir da expressão (2.4), é assegurando que a teoria possua um número infinito de ressonâncias.

2.2 Definição de modelos duais

Por definição, um modelo dual é um modelo baseado em teoria de espalhamento, a qual deve satisfazer os postulados da matriz S enunciados na secção anterior, no *narrow resonance limit* (NRL) ou limite de ressonâncias estreitas. Isto significa que deve-se negligenciar a troca de mais de uma partícula ao mesmo tempo, o que não significa impor uma restrição quanto à quantidade de partículas simples que podem ser trocadas. Como já discutido, este número deve ser infinito para que a amplitude seja nula quando $s \rightarrow \infty$ para

²Neste trabalho não nos propomos em aprofundar no assunto. O conteúdo referente pode ser visto em [13, 14, 15]:

um t fixo. A experiência mostra que considerar ressonâncias cujas trajetórias de Regge são retilíneas ou próxima delas, dadas por (2.3), torna viável o limite de levar em conta apenas partículas simples trocadas [16]. Uma observação importante é que, no NRL, as propriedades de fatoração e unitariedade são coincidentes [17].

2.2.1 Requisitos da matriz S

As primeiras tentativas que utilizavam o formalismo da matriz S foram os modelos tipo *bootstrap*. Basicamente, eles se preocupavam em obter uma modelagem matemática capaz de obter os resultados observados, sem ter o compromisso de utilizar nenhum princípio ou lei física. O primeiro modelo proposto com esta perspectiva foi liderado por Chew. Sucinamente, este modelo propunha um regime democrático entre as ressonâncias observadas experimentalmente, de modo que nenhuma delas fosse mais elementar do que outra. De fato, a ausência de uma hierarquia nuclear era razoável, afinal as ressonâncias hadrônicas foram observadas para spins até $J = 11/2$ e pareciam prosseguir indefinidamente.

De maneira resumida, os requisitos da matriz S que deveriam ser satisfeitos são [16]:

1. Comportamento assintótico ou analiticidade de segundo tipo;
2. Simetria de cruzamento;
3. Fatoração;
4. Unitariedade;
5. Invariância de Poincaré;
6. Estrutura de conexidade;
7. Causalidade ou analiticidade de primeiro tipo.

Não discutiremos os três últimos itens desta lista. A seguir, veremos como os outros requisitos se edificam na construção dos modelos duais.

Comportamento assintótico

O primeiro deles nos diz que a amplitude de espalhamento deve apresentar obedecer à Eq. (2.1), segundo o comportamento (2.2), para s grande e t fixo. Adiante, veremos que o fato da teoria possuir um número infinito de partículas está relacionado com o fato da amplitude proposta por Veneziano possuir infinitos pólos simples em t .

Simetria de cruzamento

A requisição de que a amplitude completa $A_{\text{completa}} \equiv A(s, t, u)$ da teoria possua simetria de cruzamento implica que ela deve descrever as reações $A + B \rightarrow C + D$, $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$, $A + \bar{D} \rightarrow C + \bar{B}$ e $\bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B}$, em diferentes regiões para as variáveis s , t e u . Então, em determinado limite, A_{completa} deve manifestar $A + B \rightarrow C + D$, enquanto em outro, $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$, por exemplo; apesar de incluir todos os processos, A_{completa} não está pré-destinada a ser uma soma das quatro contribuições.

Esta importante propriedade referente aos espalhamentos de partículas, a qual decorre das próprias regras de Feynman, é expressa por

$$A(\phi(\vec{p}) + \dots \rightarrow \dots) = A(\dots \rightarrow \dots + \bar{\phi}(-\vec{p})). \quad (2.6)$$

Ela contém a informação que a matriz S para qualquer processo que envolve uma partícula de momento \vec{p} no estado inicial é igual à matriz S com a sua antipartícula com momento $-\vec{p}$ no estado final.

Consideremos a teoria cúbica para um campo escalar ϕ de massa M , dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (2.7)$$

Em nível de árvore, as regras de Feynman nos levam ao seguinte resultado para a amplitude completa:

$$A(s, t, u) = -\lambda^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right). \quad (2.8)$$

Deste exemplo, observamos que qualquer mudança entre as variáveis de Mandelstam s , t e u , não modifica a amplitude completa, o que assegura que a amplitude completa possui a simetria de cruzamento. Por exemplo, se trocamos s por t e t por s em (2.8), temos que $A(s, t, u) = A(t, s, u)$.

Fatoração

A primeira importância da propriedade de fatoração é a obtenção da informação das massas das partículas que participam nas interações de uma teoria através da análise dos pólos simples da amplitude.

O segundo motivo que faz desta propriedade importante é a confirmação de que os resíduos da amplitude estejam corretos. Por exemplo, o resíduo da amplitude de um

espalhamento de 4 partículas é igual a

$$Res(A_4) = \sum_R A_3(12R)A_3(R34), \quad (2.9)$$

desde que A_4 represente a amplitude onde as partículas externas estão na camada de massa ($p_i^2 = -M^2$) e todas as partículas R , trocadas, possuam a mesma massa. Com (2.9), temos a informação do spin máximo de partículas de mesma massa, além de termos condições de inferir alguma coisa acerca da interação dos píons com outras partículas.

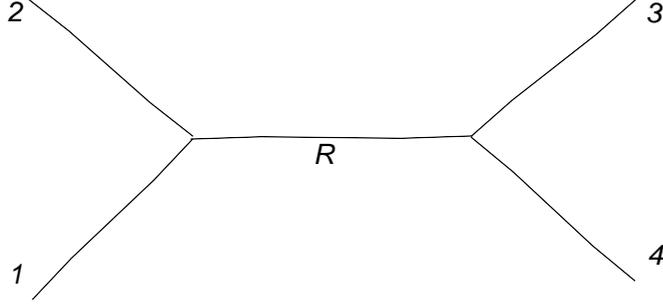


Figura 2.1: Fatoração para $2 \rightarrow 2$. Aqui, a ressonância R está na camada de massa.

Unitariedade

A matriz S é uma matriz unitária que leva o estado inicial ($t \rightarrow -\infty$) até o estado final ($t \rightarrow +\infty$), tal que a matriz transição T obedece à relação $T - T^\dagger = iT^\dagger T$. Para o processo $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ define-se a matriz amplitude M_{fi} por [18]

$$\langle f|T|i\rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) A_{fi}, \quad (2.10)$$

tal que

$$M_{fi} = \sum_r K_{fi}^r A_r(s, t, u), \quad (2.11)$$

onde K_{fi}^r são fatores covariantes.

Assim, a amplitude A obedece à relação de unitariedade desde que para M_{fi} tenha-se:

$$M_{fi} - M_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n M_{fn}^* M_{ni} \delta^4(P_n - P_i). \quad (2.12)$$

2.3 Amplitude de Veneziano

Analisando o processo $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$, Veneziano buscava por uma amplitude com as seguintes propriedades analíticas:

1. Que ela contivesse um conjunto infinito de pólos em s e u com t fixo;
2. Que ela se comportasse assintoticamente, tal como (2.2);
3. Que a amplitude respeitasse a simetria de cruzamento nos 3 canais.

Entretanto, somente com estas propriedades, foi impossível construir uma amplitude que reproduzisse os dados experimentais observados. O ingrediente que faltava à estruturação da teoria foi a dualidade³ [2, 3]. Com esta propriedade adicional, Veneziano [1] propôs sua fórmula para o espalhamento de 4 partículas escalares:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}, \quad (2.13)$$

onde $\alpha(s) = \alpha's + \alpha_0$ e $\Gamma(u)$ é a função gama de Euler, definida por

$$\Gamma(u) \equiv \int_{0^+}^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx. \quad (2.14)$$

2.3.1 Good news

Nesta parte de nosso trabalho, demonstramos alguns dos requisitos desejados que a amplitude proposta por Veneziano satisfaz.

Comportamento assintótico

Começamos por mostrar que ela possui o mesmo comportamento assintótico, dado por (2.2).

Para u grande,

$$\Gamma(u) \sim \sqrt{2\pi} u^{u-1/2} e^{-u}, \quad (2.15)$$

conhecida como fórmula de Stirling. Logo, a amplitude (2.13), para s grande e t fixo, tem o comportamento

$$A(s, t) \sim \Gamma(-\alpha(t))(-\alpha(s))^{\alpha(t)}. \quad (2.16)$$

Mas $\alpha(t)$ vem dado por (2.3). Junto com $\alpha(s) \sim \alpha's$ para s grande, segue que a amplitude de Veneziano tem o comportamento esperado para $s \rightarrow \infty$ e t fixo:

$$A(s, t) \sim s^{\alpha't+1}. \quad (2.17)$$

³Logo em seguida, tratamos com bastante atenção esta propriedade.

Assim, a amplitude (2.13) tende a 0, como requer a condição (2.1), pois, nesta região física, t é suficientemente negativo, tal que $\alpha't + 1 < 0$.

Infinitos pólos simples

Mostraremos, primeiro, mostraremos que a fórmula de Veneziano contém infinitos pólos simples, concordando com a exigência de que a teoria deve conter um número infinito de partículas. Em seguida, demonstraremos que a amplitude de Veneziano expressa os pólos (simples) oriundos dos canais s e t : isto é a dualidade manifesta.

A teoria das variáveis complexas possui um teorema que diz que dada uma função com certas singularidades simples, ela é igual a qualquer outra função que possua as mesmas singularidades a menos de uma função inteira. Portanto, pode-se mostrar que a função beta de Euler é escrita como:

$$B(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{v+n} \frac{(-1)^n}{n!} (u-1)(u-2)\cdots(u-n+1) \right] + \frac{1}{v}, \quad (2.18)$$

com

$$\lim_{v \rightarrow \infty} B(u, v) = 0. \quad (2.19)$$

Logo, a amplitude de Veneziano fica

$$\begin{aligned} B(\alpha(t), \alpha(s)) &= \frac{1}{-\alpha(t)} + \frac{1}{-\alpha(t)+1} \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{1}{-\alpha(t)+2} \frac{(-1)^2}{2!} (-\alpha(s)-1) + \cdots \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)-n} \frac{(\alpha(s)+1)(\alpha(s)+2)\cdots(\alpha(s)+n)}{n!} - \frac{1}{\alpha(t)} \\ &= \frac{P_0(s)}{\alpha(t)} + \frac{P_1(s)}{\alpha(t)-1} + \frac{P_2(s)}{\alpha(t)-2} + \cdots . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Os polinômios $P_J(s)$ representam polinômios de grau J em s ; a Eq. (2.20) representa a amplitude de Veneziano em termos do pólos em t . Aqui fica evidente que os infinitos pólos de cada um dos canais da amplitude de Veneziano são simples. Uma expressão análoga pode ser deduzida para a amplitude segundo pólos no canal s :

$$\begin{aligned} B(\alpha(s), \alpha(t)) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(s)-n} \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\cdots(\alpha(t)+n)}{n!} - \frac{1}{\alpha(s)} \\ &= \frac{P_0(t)}{\alpha(s)} \alpha' + \frac{P_1(t)}{\alpha(s)-1} + \frac{P_2(t)}{\alpha(s)-2} + \cdots . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aqui já fica evidente que a amplitude de Veneziano expressa simultaneamente os pólos (simples) oriundos dos canais s e t .

Dualidade

O grande milagre da amplitude de Veneziano (2.13) é que ela não soma os pólos em s e em t simultaneamente, ao contrário de teoria de campos, onde a amplitude completa inclui separadamente essas amplitudes parciais. Na discussão anterior, vimos que a amplitude Veneziano contém infinitos pólos simples em s e t , mas ainda não argumentamos acerca da relação entre as duas; isto se dá através da dualidade.

A grosso modo, a dualidade nos diz que

$$B(s, t) = B(t, s). \quad (2.22)$$

Todavia, isto não é evidente comparando (2.20) com (2.21). Em princípio, a primeira delas possui somente pólos em t , enquanto a segunda, em s . Para que tenha sentido escrever (2.22), precisamos da continuação analítica destas funções.

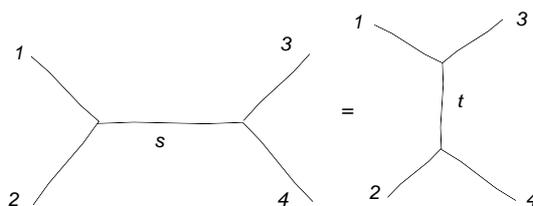


Figura 2.2: A dualidade nos diz que a amplitude $B(s, t)$ inclui simultaneamente as contribuições dos canais s e t .

A dualidade é um tipo de *bootstrap*⁴ [2, 18], a qual é derivada a partir das regras de soma de energia finita⁵. A dualidade é uma forma de prever os parâmetros de Regge (dados de alta energia) de uma teoria a partir dos dados experimentais de baixa energia. Isto significa que a dualidade implica na não contagem dos pólos provenientes dos canais s e t simultaneamente, onde os dados de baixa energia são obtidos do canal s e os dados de alta energia do canal t [2, 3, 13, 14, 15].

⁴As primeiras tentativas que utilizavam o formalismo da matriz S foram os modelos do tipo *bootstrap*. Basicamente, eles se preocupavam em obter uma modelagem matemática que fosse capaz de obter resultados observados, sem ter o compromisso de utilizar nenhum princípio ou lei física. O primeiro modelo proposto com esta perspectiva foi liderado por Chew. Sucintamente, este modelo propunha um regime democrático entre os hádrons, de modo que nenhum deles fosse mais elementar do que outro. De fato, a ausência de uma hierarquia nuclear era razoável, afinal as ressonâncias hadrônicas foram observadas para spins até $J = 11/2$ e pareciam prosseguir indefinidamente.

⁵Não nos propomos em estudar este assunto. Veja os artigos originais [2, 3] para detalhes.

A extensão analítica é fundamental para que fosse obtido este resultado. Sem ela, não poderíamos falar em dualidade e ainda continuaríamos fazendo a dupla contagem na amplitude completa, somando tanto a contribuição da amplitude com pólos em s quanto a amplitude com pólos em t .

Com o fato de a amplitude de Veneziano obedecer à dualidade, temos que $B(s, t) = B(t, s)$, $B(t, u) = B(u, t)$ e $B(u, s) = B(s, u)$, fica claro que a amplitude completa não é a soma de 6 termos, como poderíamos pensar em um princípio, mas sim de 3 termos:

$$A(s, t, u) = A(s, t) + A(t, u) + A(u, s). \quad (2.23)$$

Simetria de cruzamento

A expressão de Veneziano satisfaz à simetria de cruzamento, pois, uma vez que a amplitude completa deve conter os processos $A + B \rightarrow C + D$, $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$, $A + \bar{D} \rightarrow C + \bar{B}$ e $\bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B}$, em diferentes regiões das variáveis s , t e u , vemos que qualquer troca dessas variáveis mantém a Eq. (2.23) invariante.

Fatoração

Consideremos a amplitude em termos dos pólos em s , dada por (2.21). A partir da análise do denominador desta expressão, podemos obter a massa das ressonâncias.

Agora, tomemos o terceiro termo do numerador, $P_2(t)$. Como sabemos, o grau do polinômio nos fornece a informação da partícula trocada com maior spin, ou seja, 2. Podemos ver isso através de uma análise bastante simples.

Uma lagrangiana de interação que pode reproduzir o espalhamento de duas partículas escalares com uma tensorial é dada por

$$\mathcal{L} \sim \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi h_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

que reproduz um vértice que depende do momentum ao quadrado da ressonância. Logo, a amplitude vai com a variável de Mandelstam t ao quadrado.

Assim sendo, não temos a informação precisa de quem são as constantes λ 's em

$$P_2(t) = \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t^1 + \lambda_0 t^0. \quad (2.25)$$

Portanto, não temos a informação do espectro completo da teoria, apesar de já sabermos as massas das partículas que o compõem. Isto, como discutiremos no Cap. 3, nos levará à formulação da teoria segundo operadores de vértice.

2.3.2 *Bad news*

Apesar de apresentar as propriedades discutidas, a amplitude de Veneziano não é unitária e não obedece ao regime de *hard scattering*, o qual não discutimos aqui.

O fato da amplitude não ser unitária está relacionada com o fato que Veneziano não considerou loops, trabalhando com diagramas somente a nível de árvore. Posteriormente, com a intenção de sarar o problema da unitariedade, a amplitude foi calculada considerando-se diagramas com loops [19], os quais demandaram que a teoria, para ser consistente, precisava ser formulada em uma dimensão $D = 26$ [20].

Um argumento rápido que mostra que os modelos duais a nível de árvore não são unitários é o seguinte. No NRL, temos que o tempo de meia-vida τ das ressonâncias é muito grande. Visto que a taxa de decaimento Γ é dada pelo recíproco de τ , o que nos leva a $\Gamma \rightarrow 0$, temos que a amplitude de Bright-Wigner não possui parte imaginária. De fato, isto nos leva a uma inconsistência, pois o módulo da amplitude ao quadrado deve ser estritamente maior que 0. Isto pode ser visto fazendo o estado inicial igual ao estado final na fórmula (2.12), o que nos fornece $M_{jj} - M_{jj}^* = 0$.

Capítulo 3

Formalismo de operadores de vértice

O sucesso da amplitude de Veneziano fez com que se buscasse uma generalização para Eq. (2.13). Neste capítulo, mostraremos como foi construída a amplitude de espalhamento para N píons utilizando um formalismo de operadores. A importância de uma fórmula geral para a amplitude de N partículas reside em que, a partir dela, pode-se encontrar o espectro completo da teoria, o que não acontece necessariamente na fórmula de Veneziano. Isto se deve ao fato que da amplitude de 4 pontos não se enxerga os hádrons do espectro que se acoplam com um número maior ou igual a três mésons fundamentais.

A amplitude completa A_N (para N táquions) vem dada por uma soma de subamplitudes correspondentes às permutações das pernas externas:

$$A_N = \sum_{k=1}^{\frac{(N-1)!}{2}} A_N^{(k)}, \quad (3.1)$$

onde $A_N^{(k)}$ vem dada por¹

$$A_N^{(k)} = (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{i=1}^N p_i \right) B_N^{(k)}. \quad (3.2)$$

A subamplitude $B_N^{(k)}$ é uma função que depende dos momenta e, basicamente, é ela quem fornece a amplitude de espalhamento; conhecendo-a, conseguimos obter (3.2) e (3.1) posteriormente. No caso em que $N = 4$, a fórmula (3.2) reproduz a soma de 3 termos em (2.23). Por simplicidade de notação escreveremos B_N ao invés de $B_N^{(k)}$ e A_N ao invés de $A_N^{(k)}$. O número $\frac{(N-1)!}{2}$ corresponde ao número de permutações dos números $1, 2, \dots, N$ as que não sejam cíclica ou anticíclicamente equivalentes. Cada termo da amplitude (3.1)

¹Trabalharemos aqui em um espaço-tempo de dimensão D , embora nos primeiros anos dos modelos duais sempre assumiu-se que $D=4$.

possui pólos simples nas variáveis

$$s_{i,j} = -(p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j)^2. \quad (3.3)$$

Nosso trabalho nas próximas secções deste capítulo será deduzir, no formalismo de operadores de vértice, A_N usando como ingrediente básico a dualidade; antes, Veneziano havia proposto uma amplitude para o espalhamento de $2 \rightarrow 2$ sem ter feito nenhuma dedução. Na primeira destas secções, deduzimos a amplitude para 4 pontos; na segunda, discutimos que os objetos fundamentais do modelo de Veneziano são cordas relativísticas abertas. A seguir, encontramos uma expressão integral para a amplitude de 4 pontos, tal que a dualidade fica manifesta, graças à incorporação do grupo projetivo. Finalmente, fazemos a generalização para N pontos.

Antes de considerarmos a construção da amplitude de espalhamento em termos de operadores de vértice, mencionamos aqui que a expressão dessa amplitude foi obtida primeiro usando o formalismo de diagramas duais planares. Esse formalismo estava baseado na idéia de construir uma expressão integral para a amplitude de N pontos demandando que ela apresentasse como únicas singularidades pólos simples nos $\frac{N(N-3)}{2}$ canais planares [11].

3.1 Construção de A_4

Apresentamos aqui o argumento dado por Veneziano em [16].

Consideremos o espalhamento $A + B \rightarrow C + D$, olhando especificamente para o canal s , tal que A e B estão livres inicialmente. Em analogia à definição da Física Nuclear, quando o operador de vértice \hat{V} atua sobre A e B , faz com que elas interajam. No NRL consideramos a emissão de uma única ressonância, R , quando \hat{V} aniquila estas partículas iniciais. Neste limite, demanda-se a presença de um único pólo (simples) no canal em que a partícula é trocada, cuja posição do pólo é dada por $s = M_R^2$, onde M_R é a massa da ressonância R . Passado algum tempo, \hat{V} atua novamente sobre R criando as partículas C e D . Dessa forma, a amplitude para o processo deveria ser dada por

$$\sum_R \langle p_a, p_b | \hat{V} | R \rangle \frac{1}{s - M_R^2} \langle R | \hat{V} | p_c, p_d \rangle + TA. \quad (3.4)$$

onde TA é um termo analítico na variável s . Ao trabalhar com um modelo dual assume-se que $TA = 0$, pois dessa forma é satisfeito o limite (2.1). Em (3.4), $|p_a, p_b \rangle$ denota o estado de momentum das partículas A e B livres em $t = -\infty$ e $|p_c, p_d \rangle$ o das partículas

C e D , livres em $t = +\infty$, enquanto que $|R\rangle$ e M_R denotam o estado e a massa da ressonância, respectivamente.

Seja B_4 a subamplitude referente ao processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Sendo assim, teríamos que A_4 vem dada por

$$A_4 = (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) B_4. \quad (3.5)$$

Definimos o operador de vértice $\langle p_1 | \hat{V}_2 | R \rangle$ por meio de $\langle p_1, p_2 | \hat{V} | R \rangle$; de forma análoga, \hat{V}_3 . Da diagonalização do operador de massa ao quadrado,

$$\hat{M}^2 |R\rangle \equiv M_R^2 |R\rangle, \quad (3.6)$$

segue que

$$\frac{1}{s - \alpha' \hat{M}^2} |R\rangle = \frac{1}{s - \alpha' M_R^2} |R\rangle. \quad (3.7)$$

Assumindo que os estados $|R\rangle$ formem um conjunto completo, temos

$$\sum_R |R\rangle \langle R| = 1, \quad (3.8)$$

de modo que a amplitude fica

$$\begin{aligned} A_4 &= \sum_R \langle p_1 | \hat{V}_2 | R \rangle \frac{1}{s - M_R^2} \langle R | \hat{V}_3 | p_4 \rangle \\ &= \langle p_1 | \hat{V}_2 \frac{1}{s - \hat{M}^2} \left(\sum_R |R\rangle \langle R| \right) \hat{V}_3 | p_4 \rangle \\ &= \langle p_1 | \hat{V}_2 \frac{1}{s - \hat{M}^2} \hat{V}_3 | p_4 \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

Utilizando a definição

$$\hat{V}_i \equiv \hat{V}(1, p_i), \quad (3.10)$$

a Eq. (3.9) fica reescrita como

$$A_4 = \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \frac{1}{s - \hat{M}^2} \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle. \quad (3.11)$$

Analogamente, agora referente ao processo $4 + 1 \rightarrow 2 + 3$, temos que

$$A'_4 = \langle p_4 | \hat{V}(1, p_1) \frac{1}{t - \hat{M}^2} \hat{V}(1, p_2) | p_3 \rangle. \quad (3.12)$$

A motivação para a definição (3.10) ficará clara na próxima secção, ao escrevermos uma expressão integral para a amplitude.

A dualidade que nos referimos na secção 2.3.1 diz, precisamente, que estas amplitudes são iguais. Todavia, não é óbvio perceber isso olhando-as tal como estão escritas acima. A idéia, então, foi buscar por algum grupo de simetria para a amplitude, o qual levasse à percepção direta de que as expressões (3.11) e (3.12) são iguais. De fato, como veremos, a dualidade garante a simetria cíclica [16].

3.1.1 Os objetos fundamentais do modelo de Veneziano: as cordas relativísticas abertas

Os primeiros a observarem que os objetos fundamentais dos modelos de Veneziano são cordas relativísticas abertas foram Nambu, Nielsen e Susskind. Esta secção está particularmente baseada no trabalho de Susskind da referência [8]. No contexto deste trabalho, sua importância maior é conhecermos a expressão para o operador de vértice do táquion e termos convicção de que a amplitude completa para o espalhamento de 4 mésons é dada por uma soma de 3 termos e que reproduz a amplitude completa de Veneziano.

Susskind introduziu a idéia de dois quarks acoplados por infinitos osciladores harmônicos, nas posições $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. No limite contínuo, passa a ser uma corda o elo de ligação entre eles. Em outras palavras, o par quark-antiquark, que formam a estrutura interna do méson, estão ligados por uma cordinha, a qual faz o papel similar aos de linha de fluxo, por onde se propaga a interação. Dessa forma, o quark está em uma extremidade da corda e o antiquark na outra, de tal maneira que não há nenhum outro quark ao longo da corda.



Figura 3.1: Par quark-antiquark acoplados por infinitos osciladores. No caso contínuo, a ligação entre eles é feita por uma corda.

Neste modelo, o conjunto infinito de osciladores harmônicos vem descritos como sendo os quanta ordinários de um campo escalar; os quarks emitem e absorvem quanta um de cada vez.

As equações de movimento são

$$\frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi_\mu}{\partial \theta^2} = 0, \quad (3.13)$$

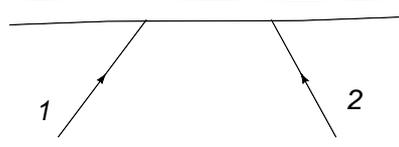


Figura 3.2: Diagrama para a função de 4 pontos.

com as condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \chi_\mu(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0,\pi} = 0, \quad (3.14)$$

onde $\chi_\mu(\theta, t)$ corresponde à posição μ da corda no instante t e θ é o parâmetro interno da corda, que vai de 0 até π . A solução $\chi_\mu(\theta)$ destas equações vem dada, basicamente, por uma soma infinita dos operadores de criação e aniquilação, com o fator em comum $\cos(l\theta)$, onde l é o índice de soma. O operador hamiltoniano \hat{H} é basicamente o operador \hat{M}^2 , o qual é dado por

$$\hat{M}^2 \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} (n\hat{a}_n^\dagger \cdot \hat{a}_n) - 1, \quad (3.15)$$

a menos de uma constante. O conjunto de autoestados no espaço dos osciladores harmônicos vem definido por

$$|\lambda, P \rangle \equiv \prod_n \frac{(\hat{a}_{\mu_n, n}^\dagger)^{\lambda_{\mu_n, n}}}{\sqrt{\lambda_{\mu_n, n}}} e^{ip \cdot \hat{q}} |0, 0 \rangle, \quad (3.16)$$

onde μ varre todos os índices usuais do espaço-tempo.

O operador de vértice $\hat{T}_p(\theta)$ é definido como

$$\hat{T}_p(\theta) \equiv : e^{ip \cdot \hat{\chi}(\theta)} : \quad (3.17)$$

A Fig. 3.2 mostra uma corda se propagando (dupla barra) e interagindo com 2 píons (barras simples). Este operador translada o momentum do quark em $\theta = 0$ em p unidades. A amplitude de espalhamento associada ao diagrama da Fig. 3.2 vem dada por

$$T_{00}(k_1, k_2) = - \langle 0 | \hat{T}_0(k_1) \frac{1}{\hat{p}^2 + \hat{M}^2} \hat{T}_0(k_2) | 0 \rangle. \quad (3.18)$$

A amplitude completa é dada por uma soma de 8 termos: $T_{00}(k_1, k_2)$, $T_{\pi\pi}(k_1, k_2)$, $T_{0\pi}(k_1, k_2)$, $T_{\pi 0}(k_1, k_2)$, $T_{\pi\pi}(k_2, k_1)$, $T_{00}(k_2, k_1)$, $T_{0\pi}(k_2, k_1)$ e $T_{\pi 0}(k_2, k_1)$. Pode-se provar que estes ter-

mos obedecem às seguintes relações:

$$T_{00}(k_1, k_2) = T_{\pi\pi}(k_1, k_2) \quad (3.19)$$

$$T_{0\pi}(k_1, k_2) = T_{\pi 0}(k_1, k_2) \quad (3.20)$$

$$T_{\pi\pi}(k_2, k_1) = T_{00}(k_2, k_1) \quad (3.21)$$

$$T_{0\pi}(k_2, k_1) = T_{\pi 0}(k_2, k_1). \quad (3.22)$$

Pode-se mostrar também que a amplitude completa fica escrita como uma soma de 3 termos, tal como a amplitude de Veneziano²:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 x^{-s-1-m^2} (1-x)^{-t-1-m^2} dx &+ 2 \int_0^1 x^{-u-1-m^2} (1-x)^{-t-1-m^2} dx + \\ &+ 2 \int_0^1 x^{-s-1-m^2} (1-x)^{-u-1-m^2} dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Notemos que apareceram os três termos da amplitude completa de Veneziano. O primeiro deles, por exemplo, é igual a duas vezes o valor de (3.18). Qualquer um dos termos de (3.24) satisfaz à dualidade; entretanto, não fazemos esta demonstração aqui, pois, neste capítulo, encontraremos uma expressão integral para a amplitude na qual a dualidade fica manifesta.

3.1.2 Forma integral para A_4 em termos de operadores de vértice

Após fazer a mudança de variável $\theta \rightarrow z$, através de $z = e^{i\theta/2}$, o operador de vértice, definido por (3.17), pode ser reescrito, a menos de uma constante, da seguinte forma

$$\hat{V}(z, p) \equiv : e^{ip \cdot \hat{Q}(z)} : \equiv e^{ip \cdot \hat{Q}^{(-)}(z)} e^{ip \cdot \hat{q}} e^{2\alpha' \hat{p} \cdot p \log z} e^{ip \cdot \hat{Q}^{(+)}(z)}, \quad (3.24)$$

onde $\hat{Q}^\mu(z)$ é o operador de Fubini e Veneziano, o qual é definido por [21]

$$\hat{Q}_\mu(z) \doteq \hat{Q}_\mu^{(+)}(z) + \hat{Q}_\mu^{(0)}(z) + \hat{Q}_\mu^{(-)}(z), \quad (3.25)$$

sendo

$$\hat{Q}_\mu^{(+)}(z) \doteq i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_n)_\mu}{\sqrt{n}} z^{-n} \quad (3.26)$$

$$\hat{Q}_\mu^{(-)}(z) \doteq -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_n^\dagger)_\mu}{\sqrt{n}} z^n \quad (3.27)$$

$$\hat{Q}_\mu^{(0)}(z) \doteq \hat{q}_\mu - 2i\alpha' \hat{p}_\mu \ln z. \quad (3.28)$$

²O trabalho de Susskind apresenta a convenção para as variáveis de Mandelstam diferente da nossa.

O ordenamento " : " em (3.24) denota que os operadores $\hat{Q}^{(-)}(z)$ ficam à esquerda dos operadores $\hat{Q}^{(+)}(z)$. Aqui, então, fica claro que quando escrevemos (3.10), estávamos considerando $z = 1$.

Tem-se ainda os comutadores

$$[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

$$[(\hat{a}_n)_\mu, (\hat{a}_m^\dagger)_\nu] = i\eta_{\mu\nu}\delta_{nm}. \quad (3.30)$$

Com o trabalho de Susskind [8] escrevemos diretamente a expressão integral para a amplitude, idêntica à fórmula proposta por Veneziano. Entretanto, seguiremos nosso desenvolvimento a partir de (3.11), para assim chegar a uma expressão da amplitude na qual fique manifesta a dualidade. A primeira etapa nesta secção será escrever a amplitude A_4 dada por (3.11) como uma integral sob a posição dos operadores de vértice. Na segunda etapa introduzimos o grupo $SL(2, R)$ no formalismo, para obter uma expressão da amplitude que seja manifestamente invariante sob dualidade.

Começemos definindo o operador \hat{D} tal como

$$\hat{D} \doteq -1/(\hat{L}_0 - 1), \quad (3.31)$$

onde³

$$\hat{L}_0 \doteq \hat{p}^2 + \hat{M}^2 + 1, \quad (3.32)$$

sendo \hat{p} o operador de momentum, $\hat{p}^\mu|p_i \rangle = p_i^\mu|p_i \rangle$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Com estas

³Adiante ficará explicado que o operador \hat{p}^2 coincide com o operador \hat{M}^2 somente quando aplicados sobre estados da teoria que são físicos; portanto, $\hat{L}_0|phys \rangle = 1|phys \rangle$.

definições, a amplitude de 4 pontos em (3.11) fica como

$$A_4 = - \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \frac{1}{\hat{L}_0 - 1} \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle \quad (3.33)$$

$$= \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \left(\int_0^1 z_2^{-\hat{L}_0} dz_2 \right) \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle$$

$$= \int_0^1 dz_2 \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) z_2^{-\hat{L}_0+1-1} \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle$$

$$= \int_0^1 dz_2 \langle p_1 | z_2 \hat{V}(1, p_2) z_2^{-\hat{L}_0-1} \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle$$

$$= \int_0^1 dz_2 \langle p_1 | z_2^{\hat{L}_0} \hat{V}(1, p_2) z_2^{-\hat{L}_0-1} \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle . \quad (3.34)$$

Para a última passagem, veja nota de rodapé na página anterior. Uma relação importante que satisfaz $\hat{V}(z, p)$, a qual não será porvada aqui, é a seguinte [11]

$$z^{\hat{L}_0} \hat{V}(1, p) z^{-\hat{L}_0} = \hat{V}(z, p) z^{\alpha_0}. \quad (3.35)$$

Lembremos que ainda não mencionamos quem é α_0 ; para esta conta, adiantaremos que $\alpha_0 = 1$ [22]. Daí,

$$A_4 = \int_0^1 dz_2 \langle p_1 | \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle . \quad (3.36)$$

O operador $\hat{V}(1, p)$ foi definido de tal forma que satisfaça às relações

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \langle 0 | \hat{V}(z_1, p_1) \equiv \langle p_1 |, \quad (3.37)$$

$$\lim_{z_4 \rightarrow \infty} z_4^2 \hat{V}(z_4, p_4) | 0 \rangle \equiv | p_4 \rangle, \quad (3.38)$$

cuja motivação está relacionada com o grupo de simetria desejado para a teoria que será apresentado adiante. A expressão (3.36) fica reescrita, então, como

$$A_4 = \lim_{z_1 \rightarrow 0} \lim_{z_3 \rightarrow 1} \lim_{z_4 \rightarrow \infty} \int_0^1 dz_2 \langle 0 | \hat{V}(z_1, p_1) \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(z_3, p_3) z_4^2 \hat{V}(z_4, p_4) | 0 \rangle . \quad (3.39)$$

Nossa segunda etapa será demonstrar que a amplitude dada por (3.39) pode ser escrita como

$$A_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dV_{abc}} \langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle, \quad (3.40)$$

com $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, onde dV_{abc} é o elemento de volume invariante sob uma transformação $SL(2, R)$, definido por

$$dV_{abc} \equiv \frac{dz_a dz_b dz_c}{|(z_a - z_b)(z_b - z_c)(z_c - z_a)|}, \quad (3.41)$$

com z_a, z_b, z_c sendo variáveis de integração. O quociente de diferenciais em (3.40),

$$\frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dV_{abc}},$$

denota que em (3.41) há somente uma variável de integração.

Uma transformação projetiva $SL(2, R)$ na variável z_i é definida como

$$z_i \rightarrow z'_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad (3.42)$$

com $ad - bc = 1$. Note que

$$dz \rightarrow dz'_i = dz_i / (cz_i + d)^2. \quad (3.43)$$

Logo, pode-se mostrar facilmente que (3.41) permanece invariante sob transformações projetivas nas variáveis z_a, z_b, z_c . Também é possível provar que uma função $f(y_1, y_2, y_3)$ que é invariante sob uma mesma transformação projetiva nas três variáveis y_1, y_2 e y_3 só pode ser uma função constante. Então, seu valor pode ser obtido escolhendo y_1, y_2 e y_3 de forma totalmente arbitrária.

O grupo projetivo tem 3 geradores. Além do gerador das dilatações \hat{L}_0 ($z' \rightarrow \alpha z$), o qual já foi definido, ele possui outros dois: \hat{L}_1 das inversões ($z' \rightarrow -1/z$) e \hat{L}_{-1} das translações ($z' \rightarrow z + z_0$). Veremos que se os operadores de vértice \hat{V}_i transformam-se como campos projetivos de peso 1 [11], então

$$\hat{U} \hat{V}(z_i, p) \hat{U}^{-1} = \frac{1}{(cz_i + d)^2} \hat{V}\left(\frac{az_i + b}{cz_i + d}, p_i\right), \quad (3.44)$$

com $i = 1, 2, 3, 4$, onde \hat{U} mantém $|0\rangle$ e $|p\rangle$ invariantes. Então a amplitude A_4 em (3.40) permanece invariante. Pode-se provar que a definição de $\hat{V}(z, p)$ dada anteriormente é consistente com (3.44) no caso que a transformação projetiva considera somente dilatações⁴.

A invariância de A_4 sob transformações $SL(2, R)$ fica evidente após notar que

$$\langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (cz_i + d)^2} \langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}\left(\frac{az_i + b}{cz_i + d}, p_i\right) | 0 \rangle. \quad (3.45)$$

⁴Não é óbvio que o operador \hat{L}_0 , definido em (3.32), se comporte como o gerador de dilatações. Para ver isso é necessário provar que [11] $[\hat{L}_0, \hat{V}(z, p)] = z \frac{d\hat{V}}{dz} + \hat{V}$.

e levar em conta (3.42). Em outras palavra, a transformação do primeiro termos "compensa" a transformação do segundo, o que garante que a amplitude escrita na forma integral, (3.39), possui a dualidade manifesta. Isto nos permite fazer uma permutação cíclica entre as pernas externas, de modo que a amplitude se mantenha invariante, ou seja: $A_4 = A'_4$.

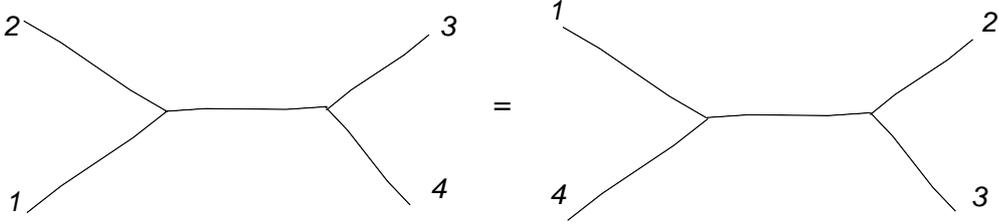


Figura 3.3: A dualidade fica evidente na forma integral da amplitude graças ao fato dela ser invariante sob transformações projetivas. A dualidade implica em invariância cíclica na amplitude.

Finalmente, para provar a equivalência entre as expressões de A_4 em (3.39) e (3.40), começamos com (3.40). Escolhendo $z_a = z_1$, $z_b = z_3$ e $z_c = z_4$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dV_{abc}} \langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle = \\ & = (z_3 - z_1)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dz_1 dz_3 dz_4} \langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Na continuação, a invariância sob o grupo projetivo nos permite escolher valores arbitrários para z_1, z_3, z_4 , desde que $z_1 < z_3 < z_4$. Escolhendo $z_1 = 0$, $z_3 = 1$ e $z_4 = \infty$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dV_{abc}} \langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle = \\ & = \lim_{z_4 \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z_4}\right) \int_0^1 dz_2 \langle 0 | \hat{V}(0, p_1) \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(1, p_3) z_4^2 \hat{V}(z_4, p_4) | 0 \rangle = \\ & = \int_0^1 dz_2 \langle p_1 | \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(1, p_3) | p_4 \rangle, \end{aligned} \quad (3.47)$$

como queríamos demonstrar.

3.1.3 Amplitude de 4 pontos

Nesta parte, concentramo-nos em desenvolver o termo $\langle 0 | \prod_{i=1}^4 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle$ contido em (3.40). Para isto utiliza-se a definição do operador de vértice dada por (3.24).

Vejamos primeiro quanto dá $\hat{V}(z, p)\hat{V}(w, k)$. Da definição (3.24) e usando que

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A}, \hat{B}]},$$

com $[\hat{A}, \hat{B}] = \text{constante}$, resulta

$$\begin{aligned} \hat{V}(z, p)\hat{V}(w, k) &= \left(e^{ip \cdot \hat{Q}^{(-)}(z)} e^{ik \cdot \hat{Q}^{(-)}(w)} e^{ip \cdot \hat{q}} e^{ik \cdot \hat{q}} e^{2\alpha' \hat{p} \cdot p \log z} e^{2\alpha' \hat{k} \cdot p \log w} e^{ip \cdot \hat{Q}^{(+)}(z)} e^{ik \cdot \hat{Q}^{(+)}(w)} \right) \times \\ &\quad \times \left(e^{[2\alpha' \hat{p} \cdot p \ln z, ik \cdot \hat{q}]} e^{[ip \cdot \hat{Q}^{(+)}(z), ik \cdot \hat{Q}^{(-)}(w)]} \right) \\ &= : \hat{V}(z, p)\hat{V}(w, k) : e^{i2\alpha' \ln(z) p_\mu k_\nu [\hat{p}^\mu, \hat{q}^\nu]} e^{-p_\mu k_\nu [\hat{Q}_\mu^{(+)}(z), \hat{Q}_\nu^{(-)}(w)]} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Note que o produto $e^{i2\alpha' \ln(z_i) p_{i\mu} p_{j\nu} [\hat{p}^\mu, \hat{q}^\nu]} e^{-p_{i\mu} p_{j\nu} [\hat{Q}_\mu^{(+)}(z_i), \hat{Q}_\nu^{(-)}(z_j)]}$ sempre carrega a contribuição

$$(z_i - z_j)^{2\alpha' p_i \cdot p_j} \equiv (z_i - z_j)^{2\alpha' \alpha_{ij}}, \quad (3.49)$$

já que temos que

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_\mu^{(+)}(z), \hat{Q}_\nu^{(-)}(w)] &= \left[i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_n)_\mu}{\sqrt{n}} z^{-n}, -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_{n'}^\dagger)_\nu}{\sqrt{n'}} w^{n'} \right] \\ &= 2\alpha' \sum \left[(\hat{a}_n)_\mu, (\hat{a}_{n'}^\dagger)_\nu \right] \frac{z^{-n} w^{n'}}{\sqrt{nn'}} \\ &= 2\alpha' \eta_{\mu\nu} \sum_n \frac{w^n}{z^n} \\ &= -2\alpha' \eta_{\mu\nu} \ln \left(1 - \frac{w}{z} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo (3.49) em (3.48), segue que

$$\hat{V}(z, p) \hat{V}(w, k) =: \hat{V}(z_1, p_1) \hat{V}(z_2, p_2) : (z - w)^{2\alpha' p \cdot k}. \quad (3.51)$$

Aproveitemos o resultado (3.51) e vejamos o produto entre 3 vértices.

$$\begin{aligned} \hat{V}(z_1, p_1) \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(z_3, p_3) &= : \hat{V}(z_1, p_1) \hat{V}(z_2, p_2) : \\ &\quad \left(e^{ip \cdot \hat{Q}^{(-)}(z)} e^{ip \cdot \hat{q}} e^{2\alpha' \hat{p} \cdot p \log z} e^{ik \cdot \hat{Q}^{(+)}(w)} \right) (z_1 - z_2)^{2\alpha' p \cdot k} \end{aligned}$$

A exponencial em $\hat{Q}_\sigma^{(-)}(z_3)$ do terceiro vértice deve passar da direita para a esquerda, como exige o ordenamento. Para isso, ele deve transpor as exponenciais com $\hat{Q}_\nu^{(+)}(z_2)$ e $\hat{Q}_\mu^{(+)}(z_1)$, do segundo vértice e primeiro vértice, respectivamente, cujas contribuições são

$(1 - z_3/z_2)^{2\alpha'\alpha_{23}}$ e $(1 - z_3/z_1)^{2\alpha'\alpha_{13}}$. Além destas, restam ainda os fatores $z_2^{2\alpha'\alpha_{23}}$ e $z_1^{2\alpha'\alpha_{13}}$, resultantes da passagem da exponencial em \hat{q} do terceiro vértice sobre as exponenciais em \hat{p} do segundo e primeiro vértice, respectivamente. Logo, fica claro como aparece a expressão

$$\prod_{i<j}^3 (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}} \quad (3.52)$$

no cálculo que envolve o produto de 3 vértices. Generalizando para o caso de N vértices, temos

$$\prod_{i=1}^N \hat{V}(z_i, p_i) =: \prod_{i=1}^N \hat{V}(z_i, p_i) : \prod_{i<j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}}. \quad (3.53)$$

Resta, finalmente, "braquetear" a equação (3.53). Desde que o operador de aniquilação atuando pela direita no estado fundamental e o operador de criação atuando pela esquerda também no estado fundamental tem resultado igual ao operador $\hat{1}$, resta operar com os produtórios das exponenciais em \hat{q} e \hat{p} .

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{i=1}^N \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle &= \langle 0 | : \prod_{i=1}^N \hat{V}(z_i, p_i) : \prod_{i<j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 1 e^{ip_1 \cdot \hat{q}} e^{ip_2 \cdot \hat{q}} \dots e^{2\alpha' \hat{p}_1 \cdot p \log z_1} e^{2\alpha' \hat{p}_2 \cdot p \ln z_2} \dots 1 | 0 \rangle \prod_{i<j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}} \\ &= \langle 0 | \sum_i p_i (1 + 2\alpha' p_1 \cdot \hat{p} \ln z_1 + \dots) (1 + 2\alpha' p_2 \cdot \hat{p} \ln z_2 + \dots) \dots | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \prod_{i<j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}} \\ &= \langle 0 | \sum_i p_i | 0 \rangle = (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_i p_i \right) \prod_{i<j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) em (3.39), a amplitude para 4 pontos fica

$$A_4 = (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{dV_{abc}} \prod_{\substack{i<j \\ i=1}}^{j=4} (z_j - z_i)^{2\alpha'\alpha_{ij}}, \quad (3.55)$$

com $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Aqui sim a dualidade está manifesta; no fundo, possuir invariância projetiva garante a dualidade. É possível mostrar que (3.55) recupera a fórmula de Veneziano (2.13), independente de quais sejam as 3 variáveis reais z escolhidas. Para não perdermos a continuidade do raciocínio, apresentamos esta dedução no final da próxima secção.

3.2 Amplitude de N pontos

Na amplitude de 5 pontos é introduzido um propagador entre $\hat{V}(1, p_2)$ e $\hat{V}(1, p_3)$ e outro entre $\hat{V}(1, p_3)$ e $\hat{V}(1, p_4)$:

$$A_5 = \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \frac{1}{\hat{L}_0 - 1} \hat{V}(1, p_3) \frac{1}{\hat{L}_0 - 1} \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle . \quad (3.56)$$

Desenvolvamos (3.56).

Primeiro, escrevemos o segundo dos propagadores na forma integral

$$A_5 = \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \frac{1}{\hat{L}_0 - 1} \hat{V}(1, p_3) \left(\int_0^1 dz_3 z_3^{-\hat{L}_0} \right) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle . \quad (3.57)$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_5 &= \int_0^1 dz_3 \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \frac{-1}{-\hat{L}_0 + 1} \left(z_3^{-\hat{L}_0+1} z_3^{\hat{L}_0} \hat{V}(1, p_3) z_3^{-\hat{L}_0-1} \right) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle \\ &= - \int_0^1 dz_3 \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \left(\frac{z_3^{-\hat{L}_0+1}}{-\hat{L}_0 + 1} \right) \left(z_3^{\hat{L}_0} \hat{V}(1, p_3) z_3^{-\hat{L}_0-1} \right) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle \\ &= - \int_0^1 dz_3 \langle p_1 | \hat{V}(1, p_2) \left(\int_0^{z_3} dz_2 z_2^{-\hat{L}_0} \right) \hat{V}(z_3, p_3) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle \\ &= - \int_0^1 dz_3 \int_0^{z_3} dz_2 \langle p_1 | \left(z_2^{\hat{L}_0} \hat{V}(1, p_2) z_2^{-\hat{L}_0-1} \right) \hat{V}(z_3, p_3) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle \\ &= - \int_0^1 dz_3 \int_0^{z_3} dz_2 \langle p_1 | \hat{V}(z_2, p_2) \hat{V}(z_3, p_3) \hat{V}(1, p_4) | p_5 \rangle . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Analogamente ao que foi argumentado para a amplitude de 4 pontos, a expressão (3.58) deve ser igual a da amplitude para o processo no canal t , tal que se torna necessária a existência do grupo projetivo. Com

$$\lim_{z_1 \rightarrow 0} \langle 0 | \hat{V}(z_1, p_1) \equiv \langle p_1 | \quad (3.59)$$

$$\lim_{z_5 \rightarrow \infty} z_5^2 \hat{V}(z_5, p_5) | 0 \rangle \equiv | p_5 \rangle , \quad (3.60)$$

segue que

$$A_5 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 dz_5}{dV_{abc}} \langle 0 | \prod_{i=1}^5 \hat{V}(z_i, p_i) | 0 \rangle , \quad (3.61)$$

com $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$. Finalmente, utilizando (3.54), obtemos que

$$A_5 = -(2\pi)^D \delta^D \left(\sum_i p_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4 dz_5}{dV_{abc}} \prod_{i < j}^5 (z_j - z_i)^{2\alpha' \alpha_{ij}}. \quad (3.62)$$

Notemos que (3.55) não leva um sinal negativo, como acontece em (3.62).

Em geral, quando o número de partículas envolvidas no espalhamento é par, a amplitude não contém o fator -1 ; o contrário acontece se o número for ímpar. Podemos, então, generalizar o procedimento para N pontos, o que nos leva à seguinte expressão:

$$A_N = (-1)^N (2\pi)^D \delta^D \left(\sum_i p_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_N}{dV_{abc}} \prod_{i < j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha' \alpha_{ij}}, \quad (3.63)$$

com $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$.

Para fins de clareza, lembremos que A_N dada por (3.63) denota $A_N^{(k)}$. Assim, B_N , ou ainda, $B_N^{(k)}$, é dada por

$$B_N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_N}{dV_{abc}} \prod_{i < j}^N (z_j - z_i)^{2\alpha' \alpha_{ij}}. \quad (3.64)$$

Frisemos, também, que a amplitude completa é obtida através de uma soma de expressões $A_N^{(k)}$, a qual vem dada por (3.1). Uma restrição importante que não foi dita antes é que o modelo construído aplica-se apenas partículas sem spin e sem qualquer grau de liberdade interno.

Enfatizemos também a crucialidade de que ao possuir invariância projetiva, a amplitude de N pontos dada por (3.63) satisfaz ao requisito de dualidade; portanto, possui invariância cíclica.

3.2.1 Recuperando a amplitude de Veneziano

Fazemos aqui um resgate da amplitude de Veneziano (2.13) a partir de (3.63), quando $N = 4$.

Tomemos $a = z_1$, $b = z_3$ e $c = z_4$, tal que dV_{abc} fica

$$dV_{abc} = \frac{dz_1 dz_2 dz_3}{|(z_1 - z_3)(z_3 - z_4)(z_4 - z_1)|}. \quad (3.65)$$

Substituindo (3.65) em (3.64), recebemos

$$B_4 = \frac{(z_3 - z_1)^{2\alpha' \alpha_{13}} (z_4 - z_1)^{2\alpha' \alpha_{14}} (z_4 - z_3)^{2\alpha' \alpha_{43}}}{|z_1 - z_3| |z_3 - z_4| |z_4 - z_1|} \quad (3.66)$$

$$\int_{z_1}^{z_3} dz_2 (z_2 - z_1)^{2\alpha' \alpha_{21}} (z_3 - z_2)^{2\alpha' \alpha_{23}} (z_4 - z_2)^{2\alpha' \alpha_{24}}. \quad (3.67)$$

Agora, a invariância da amplitude sob o grupo projetivo nos permite escolher $z_1 = 0$, $z_3 = 1$ e $z_4 = \infty$. Assim, B_4 fica:

$$\begin{aligned} B_4 &= \lim_{z_4 \rightarrow \infty} (z_4 - 1)^{2\alpha'\alpha_{14}-1} z_4^{2\alpha'\alpha_{13}-1} \int_0^1 dz_2 z_2^{2\alpha'\alpha_{12}} (1 - z_2)^{2\alpha'\alpha_{23}} (z_4 - z_2)^{2\alpha'\alpha_{24}} \\ &= \int_0^1 z_2^{2\alpha'\alpha_{12}} (1 - z_2)^{2\alpha'\alpha_{23}} dz_2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Substituindo $\alpha_{12} = -\frac{s}{2} + \frac{1}{\alpha'}$ e $\alpha_{14} = -\frac{t}{2} + \frac{1}{\alpha'}$ em (3.68), obtemos exatamente a Eq. (2.13).

3.3 Fatoração

A fatoração foi invocada como um dos requisitos da matriz S. Queremos, agora, compreender esta propriedade na amplitude de N pontos, primeiro para uma teoria $\lambda\phi^3$ de um campo escalar de massa M e, a seguir, para os modelos duais.

Consideremos o espalhamento de 5 partículas escalares com interação cúbica. Como nosso propósito é somente apresentar a regra de fatorização, omitiremos as integrais e as funções deltas, implícitas na expressão da amplitude completa A_5 . Usando regras de Feynmann, pode-se chegar em

$$\begin{aligned} A_5 &= V(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \frac{1}{s_{1,2} + M^2} V(p_1 + p_2, p_3, -p_1 - p_2 - p_3) \times \\ &\quad \times \frac{1}{s_{1,3} + M^2} V(p_4, p_5, -p_4 - p_5) + \text{outros termos}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Utilizando a notação

$$\begin{aligned} A(12345) &\equiv V(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \frac{1}{s_{1,2} + M^2} V(p_1 + p_2, p_3, -p_1 - p_2 - p_3) \\ &\quad \frac{1}{s_{1,3} + M^2} V(p_4, p_5, -p_4 - p_5), \end{aligned} \quad (3.70)$$

obtemos que a amplitude A_5 toma a forma

$$\begin{aligned} A_5 &= A(12345) + A(12453) + A(12534) + A(13245) + A(13524) + \\ &\quad + A(13452) + A(14523) + A(14235) + A(14352) + A(15234) + \\ &\quad + A(15342) + A(15423) + A(23145) + A(24135) + A(25134). \end{aligned} \quad (3.71)$$

A título de ilustração, se esta fosse uma teoria dual, estariam excluídos os últimos três diagramas de (3.71), pois eles são os duais de $A(14523)$, $A(15342)$ e $A(13452)$, respectivamente.

Fazendo o corte no canal (1,3), as amplitudes que geram pólos se $s_{1,3} \rightarrow -M^2$ são $A(12345)$, $A(13245)$ e $A(23145)$. A contagem desta duas últimas não serão consideradas aqui. Considerando somente os pólos oriundos de $A(12345)$, a fatorização nos fornece

$$A_5 \sim \frac{A(123R)A(R45)}{s_{1,3} - M^2}. \quad (3.72)$$

Para estar na camada de massa a partícula de massa M deve ter quadrado de momentum $p^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = -M^2$.

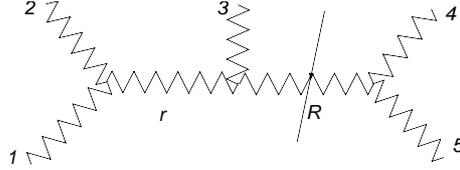


Figura 3.4: Fatoração para o espalhamento de 5 partículas escalares.

Generalizando a fórmula de fatorização da teoria $\lambda\phi^3$ para N partículas, se $s_{1,J} \rightarrow M^2$ recebemos

$$A(1, 2, \dots, N) \sim \frac{A(1, 2, \dots, J)A(J + 1, J + 2, \dots, N)}{s_{1,J} - M^2}. \quad (3.73)$$

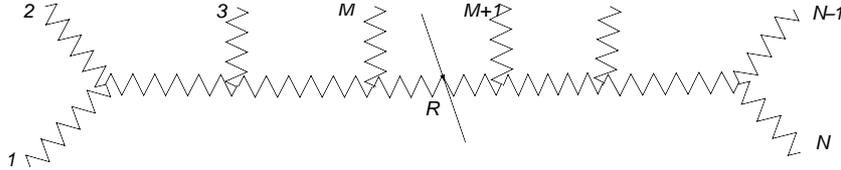


Figura 3.5: Fatoração para o espalhamento de N partículas idênticas.

De fato, não é possível ver direto de (3.63) seus pólos. Em (3.11) e (3.34), os pólos da amplitude de 4 pontos saem diretamente. Inserindo a relação de completeza do conjunto completo ortonormal $|\lambda, P\rangle$, o qual é definido por (3.16), escrevamos uma equação análoga

para a amplitude de N pontos com os propagadores \hat{D} :

$$\begin{aligned}
A_N &= \langle p_1 | \hat{V}(1, p_1) \hat{D} \hat{V}(1, p_2) \hat{D} \cdots \hat{V}(1, p_M) \hat{D} \left(\sum_{\lambda} |\lambda, P \rangle \langle \lambda, P| \right) \hat{V}(1, p_{M+1}) \hat{D} \cdots \\
&\quad \cdots \hat{V}(1, p_{N-1}) | p_N \rangle \\
&= \sum_{\lambda} \langle p_1 | \hat{V}(1, p_1) \hat{D} \hat{V}(1, p_2) \hat{D} \cdots \hat{V}(1, p_M) \left(\frac{1}{\hat{p}^2 + \hat{M}^2} |\lambda, P \rangle \right) \\
&\quad \langle \lambda, P | \hat{V}(1, p_{M+1}) \hat{D} \cdots \hat{V}(1, p_{N-1}) | p_N \rangle \\
&= \sum_{\lambda} \left(\langle p_1 | \hat{V}(1, p_1) \hat{D} \hat{V}(1, p_2) \hat{D} \cdots \hat{V}(1, p_M) | \lambda, P \rangle \right) \frac{1}{P^2 + m_{\lambda} - 1} \\
&\quad \left(\langle \lambda, P | \hat{V}(1, p_{M+1}) \hat{D} \cdots \hat{V}(1, p_{N-1}) | p_N \rangle \right), \tag{3.74}
\end{aligned}$$

onde $m_{\lambda} = 0, 1, \dots$ ⁵ e lembrando que estamos trabalhando com $\alpha' = 1$. Então, tomando o limite adequado $s_{1,M} \rightarrow m_{\lambda}$, não fica nenhuma soma sobre os estados de massa diferentes. Como pode-se perceber com a Eq. (3.74), escrever a amplitude generalizada no formalismo de operadores torna muito clara a propriedade de fatoração, ajudando a ter um *feedback* mais eficiente sobre o espectro.

No caso do modelo de Veneziano, a fórmula é do mesmo tipo que (3.73), mas não idêntica, pois depende da partícula que está sendo examinada no pólo. Somente no caso que a partícula trocada for escalar, caso do táquion, elas seriam idênticas. De fato, nos modelos duais são infinitas as partículas trocadas, o que mostra uma sutileza importante. No caso que ela é o táquion, não há problemas com a fatoração, no sentido de que as pernas externas das subamplitudes ainda são táquions. Entretanto se esta partícula é o fóton, ou qualquer outro estado excitado da teoria, a função não pode ser a mesma, visto que as pernas externas das subamplitudes não são mais somente táquions.

3.4 Espectro, *ghosts* e estados físicos

Este tópico é extremamente importante, mas não foi aberto neste trabalho; nos conformaremos aqui em fazer um breve resumo a respeito, acompanhando [11].

O espectro de estados que foi obtido na Eq. (3.74) e explicitado em (3.16) satisfaz à condição

$$\hat{M}^2 |\lambda, P \rangle = \frac{n-1}{\alpha'} |\lambda, P \rangle, \tag{3.75}$$

⁵Não é difícil ver que os autovalores de M^2 são $m_{\lambda} - 1$. De fato, como veremos no capítulo 5, na secção 5.2, M^2 se comporta como uma combinação linear de operadores número de partículas.

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. O estado fundamental $|0, P \rangle$, correspondente a $n = 0$, é o vácuo dos osciladores. Ele é um táquion, pois $M^2 = -1/\alpha' < 0$. O primeiro estado excitado, $n = 1$, vem dado por $(\hat{a}_{1\mu})^\dagger|0, P \rangle$ e corresponde a um vetor não massivo. O segundo estado excitado, $n = 2$, vem dado pelas seguintes possibilidades: $(\hat{a}_{1\mu})^\dagger(\hat{a}_{1\nu})^\dagger|0, P \rangle$ e $(\hat{a}_{2\mu})^\dagger|0, P \rangle$

Visto que A_N é invariante de Lorentz, como consequência de adotar um procedimento de quantização que é invariante de Lorentz surgem estados de norma negativa (ghosts), os quais não fazem parte do espaço de Hilbert. Como exemplo, há o estado $(\hat{a}_{10})^\dagger|0, P \rangle$, $((\hat{a}_{10})^\dagger)^3|0, P \rangle$, etc. Em geral, todos os estados que contiverem um número ímpar de componentes temporais. Surge daí o problema de conciliar a Mecânica Quântica com a Relatividade Especial, ao formular o modelo dual.

O resultado é que pode-se trabalhar com a expressão já obtida para a amplitude (3.64), restringindo-se o espaço de estados físicos a um subconjunto dos estados $|\lambda, P \rangle$ em (3.16) dado por [23]

$$(\hat{L}_0 - 1)|phys, P \rangle = \hat{L}_m|phys, P \rangle, \quad (3.76)$$

com $m = 1, 2, 3$, onde $p^2 = -(n - 1)/\alpha'$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Em termos do modo zero e dos osciladores definidos anteriormente, podemos chegar a

$$\hat{L}_n = \sqrt{2\alpha'n\hat{p}} \cdot \hat{a}_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n)} \hat{a}_{n+m} \cdot \hat{a}_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \sqrt{m(n-m)} \hat{a}_{m-n} \cdot \hat{a}_m, \quad (3.77)$$

com $n \geq 0$.

Os estados físicos podem ser descritos por $D - 2$ osciladores transversais [24], com $I = 2, 3, \dots, D - 1$. Se $D = 26$ estes estados físicos formam um conjunto completo [25]. Todos estes novos resultados se dão ao fazer $\alpha_0 = 1$, [22], o que implica na aparição de um táquion (como estado fundamental da teoria).

Capítulo 4

Conexão dos Modelos Duais com Teoria Quântica de Campos

Até esse momento da evolução dos modelos de ressonância dual não se conhecia nenhuma lagrangeana que os descrevesse. Em 1971, Scherk [26] publicou o primeiro trabalho que apresentou uma conexão entre teoria quântica de campos e os modelos duais, vendo que a amplitude de Veneziano pode ser recuperada por uma teoria ϕ^3 para um campo escalar de massa M no limite de baixas energias.

Desenvolvendo-se a amplitude de Veneziano, dada por (2.13), considerando as trajetórias de Regge $\alpha(s) = \alpha's - \alpha'M^2$, percebe-se que

$$\begin{aligned} B(\alpha(s), \alpha(t)) &= \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \\ &\approx -\frac{\alpha(s) + \alpha(t)}{\alpha(s)\alpha(t)} \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\alpha'M^2 \ll 1$. Em termos da constante de acoplamento g e do parâmetro de Regge α' , a amplitude A_N é dada por

$$A_N = \frac{g^{N-2}}{2^{N-3}} (\alpha')^{\frac{1}{2}(N-4)} B_N, \quad (4.2)$$

de modo que, no limite $\lim_{\alpha' \rightarrow 0}$, A_4 fica

$$A_4 = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} \right). \quad (4.3)$$

Logo, a amplitude completa A_4 é dada por

$$A_4 = \lambda^2 \left(\frac{1}{s - M^2} + \frac{1}{t - M^2} + \frac{1}{u - M^2} \right). \quad (4.4)$$

Esta fórmula é idêntica à Eq. (2.8).

Finalmente, olhando para a expressão dada pela amplitude em (2.7) e pela expressão obtida acima em (4.4), vemos que elas são iguais. Destarte, podemos ver que neste limite particular, $\alpha' \rightarrow 0$, a amplitude de Veneziano pode ser reproduzida pela mesma lagrangeana que leva à amplitude em (2.7), isto é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (4.5)$$

Em 1972, Neveu e Scherk [27] publicaram outro artigo, apresentando uma conexão entre os campos massivos de Yang-Mills e os modelos de ressonância dual. Como mencionam os autores, os modelos duais pareciam ser uma abordagem que está entre a matriz S e a teoria de campos das interações fortes. Frisemos que a conexão é independente da teoria ser abeliana ou não-abeliana. É importante ressaltar que até a publicação destes trabalhos, sem a existência de uma lagrangeana para a teoria, tudo era feito por meio de propriedades observadas referentes aos espalhamentos.

Como já discutido, sabemos que a amplitude de espalhamento é dada por uma soma infinita sobre todos os estados de mesma massa. Sendo assim, a lagrangeana da teoria deve ser tal que contenha um número infinito de campos, cada qual correspondendo a uma das partículas do espectro. Sendo o táquion o estado fundamental da teoria, o glúon o primeiro nível excitado e assim por diante, a lagrangeana da teoria vem dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_G + \dots + \mathcal{L}_{int}, \quad (4.6)$$

onde \mathcal{L}_T , \mathcal{L}_G e \mathcal{L}_{int} representam, respectivamente, a lagrangeana do táquion, do glúon e termos de interação entre 2 táquions com alguns campos da teoria.

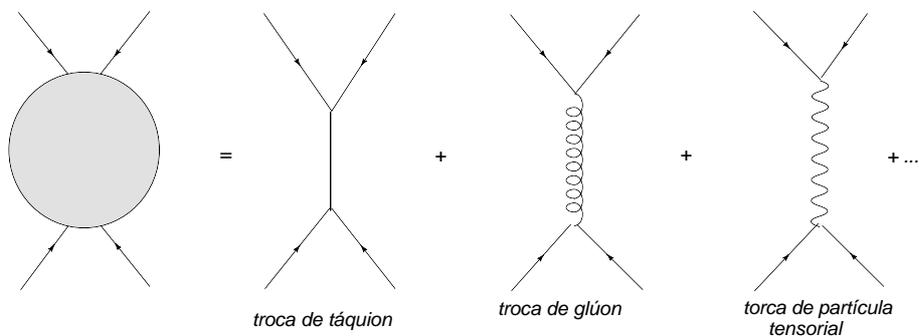


Figura 4.1: Nas interações dos modelos duais, há uma troca de um número infinito de partículas.

4.1 Modelo generalizado de Veneziano

Como mencionado no final da secção 3.2, a amplitude para N pontos dada por (3.63) foi construída para N partículas sem spin nem graus de liberdade internos. Além disso, sabia-se que os mésons eram classificados segundo o grupo de simetria $SU(3)$, o qual atribuía um número quântico de sabor às partículas.

Com esta crença, Chan e Paton [28] incorporaram um grau de liberdade interno na amplitude. Eles destacam a importância das propriedades de fatorização e de simetria cíclica das amplitudes. A primeira delas junto com o formalismo de operadores deixa transparente o espectro hadrônico, enquanto a importância da segunda está relacionada com a dualidade, como já discutido, garantindo a simetria bosônica.

Assim, a amplitude B_N foi multiplicada por um fator, chamado de fator de Chan-Paton:

$$tr(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_N}), \quad (4.7)$$

onde as λ^{a_i} 's são as matrizes geradoras do grupo $SU(n)$ na representação fundamental (elas são matrizes hermitianas $N \times N$). Tais matrizes respeitam a relação de completeza, expressa por

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} tr(A\lambda_a)tr(B\lambda^a) = tr(AB). \quad (4.8)$$

Dessa forma, a amplitude total vem dada, a menos de um fator global, por

$$A_N = \sum tr(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_N}) B_N(p_1 \dots p_N). \quad (4.9)$$

A relação (4.8) é primordial para provar a fatorização da amplitude. Desta vez o número total de termos em (4.9) é $(N-1)!$ e corresponde ao número de permutações não ciclicamente equivalentes dos números $1, 2, \dots, N$. Vejamos o exemplo de A_4 .

Antes, introduzimos a notação

$$tr(ijkl) \equiv tr(\lambda^{a_i} \lambda^{a_j} \lambda^{a_k} \lambda^{a_l}). \quad (4.10)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} A_4 = & \mu \cdot (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) [B_4(p_1, p_2, p_3, p_4)tr(1234) + B_4(p_1, p_2, p_4, p_3)tr(1243) + \\ & + B_4(p_1, p_3, p_2, p_4)tr(1324) + B_4(p_1, p_3, p_4, p_2)tr(1342) + \\ & + B_4(p_1, p_4, p_2, p_3)tr(1423) + B_4(p_1, p_4, p_3, p_2)tr(1432)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mas $B_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = B_4(p_4, p_3, p_2, p_1)$, visto que essas duas amplitudes correspondem a um mesmo diagrama dual observado de lados opostos. Então, usando a notação

$$f_{YM} \equiv \mu \cdot (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad (4.12)$$

temos que

$$\begin{aligned} A_4 &= f_{YM} \{ [tr(1243) + tr(1342)] B(-\alpha(s), -\alpha(u)) + \\ &+ [tr(1324) + tr(1423)] B(-\alpha(t), -\alpha(u)) + \\ &+ [tr(1234) + tr(1432)] B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = B_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ é a amplitude de Veneziano, com s e t as variáveis de Mandelstam.

A expressão generalizada de Veneziano será usada ao confirmar que determinadas lagrangeanas que reproduzam as interações de 4 táquions por meio da troca de um táquion e de um glúon, respectivamente.

Quando $s \rightarrow -1/\alpha'$, o comportamento de $B(-\alpha(s), -\alpha(t))$ e $B(-\alpha(s), -\alpha(u))$ é o mesmo, sendo dado por

$$B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \sim -\frac{1}{\alpha's + 1}, \quad (4.14)$$

$$B(-\alpha(s), -\alpha(u)) \sim -\frac{1}{\alpha's + 1}. \quad (4.15)$$

Assim, o resíduo de (4.13), denotado por $Res(A_{GV})$, com $s \rightarrow -1/\alpha'$ é

$$Res(A_{GV}) = -f_{YM} [tr(1243) + tr(1342) + tr(1234) + tr(1432)]. \quad (4.16)$$

Para o caso que é trocado um glúon, temos o limite $s \rightarrow 0$. Assim,

$$B(-\alpha(s), -\alpha(t)) \sim -\frac{\alpha't + 2}{\alpha's} \quad (4.17)$$

$$B(-\alpha(s), -\alpha(u)) \sim \frac{\alpha't + 2}{\alpha's}. \quad (4.18)$$

Logo, o resíduo da amplitude generalizada de Veneziano neste limite é dado por

$$Res(A_{GV}) = -f_{YM} (\alpha't + 2) [tr(1243) - tr(1342) - tr(1234) + tr(1432)]. \quad (4.19)$$

4.2 O táquion

A lagrangeana do táquion vem dada por [29]

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_a \partial_\mu \phi^a - \frac{1}{2} \phi^a \phi_a + g \frac{i}{6} \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} d_{abc} \phi^a \phi^b \phi^c, \quad (4.20)$$

onde g é a constante de acoplamento e $d_{ijk} \equiv -itr(\lambda_{a_i}\{\lambda_{a_j}, \lambda_{a_k}\})$. No espaço dos momenta, a equação de movimento é

$$\frac{1}{\alpha'} - p^2 = 0. \quad (4.21)$$

Dela, obtemos que o propagador $\tilde{\Delta}_b^a$ vem dado por

$$\tilde{\Delta}_b^a = \frac{\delta_b^a}{\frac{1}{\alpha'} - p^2} \quad (4.22)$$

e também concluimos que o vértice da interação tem a forma

$$V_{abc} = ig\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}d_{abc}. \quad (4.23)$$

Das expressões (4.22) e (4.23), sabendo que $A = V\Delta V$, pode-se deduzir que a contribuição do canal s será

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2g^2}{1 + \alpha's}d_{abc}d_{gh}^c \\ &= -\frac{2g^2}{1 + \alpha's} [tr(1234) + tr(1243) + tr(1342) + tr(1432)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Portanto, pode-se concluir que a amplitude completa em termos das variáveis de Mandelstam é dada por

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2g^2}{1 + \alpha's} [tr(1234) + tr(1243) + tr(1342) + tr(1432)] + \\ &\quad -\frac{2g^2}{1 + \alpha't} [tr(1423) + tr(1432) + tr(1234) + tr(1324)] + \\ &\quad -\frac{2g^2}{1 + \alpha'u} [tr(1324) + tr(1342) + tr(1243) + tr(1423)]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

No limite $s \rightarrow -1/\alpha'$, recebemos que o resíduo da amplitude completa (4.25) é

$$Res(A) = -2g^2 [tr(1234) + tr(1243) + tr(1342) + tr(1432)]. \quad (4.26)$$

Temos que o resíduo (4.26) deve ser igual ao obtido em (4.16). Logo, podemos determinar o valor da constante f_{YM} na fórmula generalizada de Veneziano:

$$f_{YM} = 2g^2. \quad (4.27)$$

Uma vez estabelecido este valor, ele está fixo, no sentido de que devemos encontrar o mesmo valor para o caso em que é trocado um glúon. Analisaremos esta situação em seguida.

4.3 O glúon

A lagrangeana do glúon vem dada pela lagrangeana (já foi desprezado o termo quártico)

$$\mathcal{L}_G = -gf_{abc}\partial^\mu\phi^a A_\mu^b\phi^c - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\nu^a\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\nu^a\partial^\nu A_\mu^a). \quad (4.28)$$

onde f'_{ijk} s são as constantes de estrutura do grupo $SU(n)$ e, em termos das matrizes λ' s, vem dadas por $f_{ijk} \equiv -i\text{tr}(\lambda_{a_i}[\lambda_{a_j}, \lambda_{a_k}])$. Com o gauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, a equação de movimento no espaço dos momenta fica

$$-p_a^2 = 0. \quad (4.29)$$

Então, o propagador $\tilde{\Delta}_{ab}^{\mu\nu}$ é

$$\tilde{\Delta}_{ab}^{\mu\nu} = \frac{-\eta^{\mu\nu}\delta_{ab}}{p^2}. \quad (4.30)$$

Também concluimos que o vértice vem dado por

$$V_{abc}^\mu = -igf_{abc}(p_1^\mu - p_2^\mu). \quad (4.31)$$

Das expressões (4.30) e (4.31), pode-se deduzir que a amplitude é

$$A = -2g^2\frac{\alpha't + 2}{\alpha's}[\text{tr}(1243) - \text{tr}(1342) - \text{tr}(1234) + \text{tr}(1432)]. \quad (4.32)$$

Pode-se concluir que a amplitude completa em termos das variáveis s , t e u é dada por

$$\begin{aligned} A = & -2g^2\frac{\alpha't + 2}{\alpha's}[\text{tr}(1234) - \text{tr}(1243) - \text{tr}(1342) + \text{tr}(1432)] + \\ & -2g^2\frac{\alpha'u + 2}{\alpha't}[\text{tr}(1423) - \text{tr}(1432) - \text{tr}(1234) + \text{tr}(1324)] + \\ & -2g^2\frac{\alpha's + 2}{\alpha'u}[\text{tr}(1324) - \text{tr}(1342) - \text{tr}(1243) + \text{tr}(1423)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

No limite $s \rightarrow 0$, temos que o resíduo da amplitude anterior é

$$\text{Res}(A) = -2g^2(\alpha't + 2)[\text{tr}(1234) - \text{tr}(1243) - \text{tr}(1342) + \text{tr}(1432)]. \quad (4.34)$$

De fato, $f_{YM} = 2g^2$, agora a partir de (4.19) e (4.34). Com isso, vemos que o resíduo dado por (4.19) é igual ao encontrado agora.

Destarte, verificamos que o modelo generalizado de Veneziano discutido na secção 4.1 recupera a física obtida a partir de uma teoria de campos não abeliana.

Capítulo 5

Modelos Duais e Teoria de Cordas

Foi observado independentemente por Nambu, Nielsen e Susskind [8] que os osciladores dos modelos duais no formalismo de operadores poderiam ser considerados como modos de vibração da uma corda relativística no formalismo de operadores. Nambu e Goto [9] propuseram uma ação para a corda em termos da área da folha-mundo. Goddard, Goldstone, Rebbi e Thorn [30] quantizaram a corda livre descrita pela ação de Nambu-Goto.

Em nosso desenvolvimento, temos uma amplitude para o espalhamento de 4 táquions, apesar de não conhecermos a natureza da interação entre os táquions. Este último capítulo tem por objetivo apresentar a corda aberta descrita pela ação de Nambu-Goto e de identificar nela aspectos comuns àqueles dos modelos duais. Uma prova rigorosa de que os entes fundamentais descritos pelo modelo dual de Veneziano são cordas abertas livres demandaria uma demonstração de que as interações da corda de Nambu-Goto reproduzem as amplitudes desse modelo; isto não será feito aqui.

Com o propósito de ganhar alguma intuição acerca do objeto físico que está sendo descrito, abordamos na primeira secção alguns aspectos relativísticos não-quânticos da corda. Na medida do possível, estes aspectos serão relacionados com àqueles discutidos no decorrer deste trabalho. Na segunda secção, contemplamos os aspectos quânticos da corda aberta, verificando que o espectro obtido será o mesmo daquele dos modelos duais. Além disso, aparecerá naturalmente que a dimensão do espaço-tempo deve ser igual a 26. A primeira das duas secções foi confeccionada com base no capítulo 6 de [31]; a segunda, basicamente, no capítulo 12 da mesma referência.

5.1 Alguns aspectos relativísticos não-quânticos da corda aberta

A proposta de uma lagrangeana para a corda relativística nos leva a tirar algumas conclusões, as quais serão discutidas nesta secção:

1. A velocidade das extremidades da corda é igual à velocidade da luz;
2. Os graus de liberdade da corda podem ser descritos em termos das D-2 componentes transversais da velocidade da corda;
3. O parâmetro T_0 contido na ação de Nambu-Goto é interpretado como a tensão da corda;
4. A massa intrínseca da corda é nula;
5. Há uma relação linear, para uma corda rígida girante, entre o momento angular J e o quadrado da energia E^2 ;
6. No limite de baixas energias, $\alpha' \rightarrow 0$, temos que $T_0 \rightarrow \infty$, o que pode ser entendido na afirmação que um objeto extenso (corda) tende a um objeto pontual (partícula).

5.1.1 Ação de Nambu-Goto

Uma forma de construir uma ação que descreve a dinâmica de um objeto unidimensional, a corda, pode ser intuída a partir da ação da partícula relativística, S_{PR} . Esta ação, quando escrita manifestamente como um escalar de Lorentz, é proporcional ao comprimento da linha-mundo percorrida pela partícula no espaço-tempo. Por analogia, a ação de Nambu-Goto pode ser achada como sendo proporcional à área da folha-mundo varrida pela corda. A consistência de unidades demanda que a constante de proporcionalidade tenha dimensões de força, denotada por T_0 , dividido por velocidade (e aqui adotamos como parâmetro a velocidade da luz, c):

$$S_{NG} = -\frac{T_0}{c} A_{fm}, \quad (5.1)$$

onde A_{fm} denota a área da folha-mundo. Por enquanto não temos nenhuma interpretação de que tipo de parâmetro poderia descrever o parâmetro T_0 . Pode ser deduzido que a área

da folha-mundo é dada por [31]

$$A_{fm} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \left(\dot{X}\right)^2 (X')^2}, \quad (5.2)$$

onde $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ representa o parâmetro temporal e $\sigma \in [0, \sigma_1]$ denota o parâmetro espacial da superfície varrida pela corda no espaço-tempo de Minkowski. Em (5.2) temos que $\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ e $X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$. Assim, substituindo (5.2) em (5.1), obtemos

$$S_{NG} = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \left(\dot{X}\right)^2 (X')^2}. \quad (5.3)$$

É possível demonstrar que a ação dada por (5.3) é invariante sob reparametrizações, ou seja, que ela permanece invariante sob a seguinte transformação:

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau, \sigma), \quad (5.4)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma'(\tau, \sigma), \quad (5.5)$$

ou ainda

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma), \quad (5.6)$$

o que podemos interpretar afirmando que S_{NG} possui 2 graus de liberdade de gauge.

A ação de Nambu-Goto pode ser reescrita como

$$S_{NG} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}_{NG} \left(\dot{X}^\mu, X'^\mu \right), \quad (5.7)$$

onde a lagrangeana de Nambu-Goto vem dada por

$$\mathcal{L}_{NG} \left(\dot{X}^\mu, X'^\mu \right) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \left(\dot{X}\right)^2 (X')^2}. \quad (5.8)$$

Para deduzirmos as equações de movimento a partir do princípio variacional, a variação de (5.7) deve ser igual a zero, sempre que

$$\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0. \quad (5.9)$$

Assim, usando a integração por partes na variação de (5.7), pode-se concluir que

$$0 = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu} \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu} \right) \right] \delta X^\mu. \quad (5.10)$$

Para que (5.10) seja válida (para uma corda com extremidades livres) sob qualquer variação δX^μ e que satisfaça as Eqs. (5.9) é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu} \right) = 0, \quad (5.11)$$

que são as equações de movimento da corda, e que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (5.12)$$

que são condições de contorno da mesma. (5.11) e (5.12) são válidas para $\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1$.

Introduzindo a notação, a qual define as densidades de momenta,

$$P_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad (5.13)$$

$$P_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial X'^\mu}, \quad (5.14)$$

(5.11) e (5.12) ficam reescritas, respectivamente, como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_\mu^\tau + \frac{\partial}{\partial \sigma} P_\mu^\sigma = 0, \quad (5.15)$$

$$P_\mu^\sigma \Big|_{\sigma=0} = P_\mu^\sigma \Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0, \quad (5.16)$$

onde as expressões

$$P_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (5.17)$$

$$P_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (5.18)$$

foram obtidas usando a Eq. (5.8) nas definições (5.13) e (5.14).

Definindo-se os momentum linear $P_\mu(\tau)$ e o momentum angular $M_{\mu\nu}(\tau)$ da corda, respectivamente, por meio de

$$P_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma P_\mu^\tau, \quad (5.19)$$

$$M_{\mu\nu}(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma [X_\mu(\tau, \sigma) P_\nu^\tau(\tau, \sigma) - X_\nu(\tau, \sigma) P_\mu^\tau(\tau, \sigma)], \quad (5.20)$$

pode-se demonstrar, usando as equações de movimento, que elas são quantidades conservadas: $\frac{d}{d\tau}P_\mu(\tau) = 0$ e $\frac{d}{d\tau}M_{\mu\nu}(\tau)=0$. A conservação de $P_\mu(\tau)$ será importante quando falarmos dos aspectos quânticos da corda, ao fixarmos o gauge nas equações de movimento, usando o gauge do cone de luz. A conservação de $M_{\mu\nu}(\tau)$ será útil para demonstrar a relação linear entre $M_{\mu\nu}(\tau)$ e o quadrado da energia E de uma corda relativística rígida que gira com certa velocidade angular.

5.1.2 Velocidade das extremidades da corda

Usando (5.18) pode-se mostrar que

$$P_\mu^\sigma P^{\mu\sigma} = -\frac{T_0}{c^2} \dot{X}^2. \quad (5.21)$$

Usando as condições de contorno dadas por (5.16) na expressão logo acima, recebemos

$$\dot{X}^2 \Big|_{\sigma=0} = \dot{X}^2 \Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (5.22)$$

Desta relação, concluímos que os vetores $\dot{X}_{\sigma=0}^\mu$ e $\dot{X}_{\sigma=\sigma_1}^\mu$ são tipo luz. Em outras palavras, concluímos que as extremidades da corda se movimentam com a velocidade da luz.

5.1.3 Ação de Nambu-Goto no gauge estático

A fim de obtermos o segundo item da lista de objetivos acima, introduzamos o gauge estático:

$$X^0(\tau, \sigma) = c\tau = ct. \quad (5.23)$$

Isto significa, fisicamente, que escolhemos o parâmetro temporal τ como sendo o tempo t de algum referencial de Lorentz. Frisemos que o gauge não está totalmente fixado, pois ainda há um outro grau de liberdade não fixado. No gauge estático, então, temos que

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \left(ct, \vec{X}(t, \sigma) \right), \quad (5.24)$$

de onde vem que

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right). \quad (5.26)$$

Aqui, $\vec{X} = \vec{X}(\tau, \sigma)$ denota a posição espacial $D - 1$ dimensional do ponto (τ, σ) da corda. Logo, no gauge estático, podemos reescrever a lagrangeana de Nambu-Goto como

$$\mathcal{L}_{NG}^{ge} = -T_0 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \right]}. \quad (5.27)$$

Agora, consideremos o comprimento espacial da corda, $s(\sigma)$ dado por

$$s(\sigma) = \int_0^\sigma \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{D-1}^2} = \int_0^\sigma \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} \right| d\sigma'. \quad (5.28)$$

Por construção, a expressão integral para $s(\sigma)$ é invariante sob reparametrização em σ' . Na continuação, vamos escrever \mathcal{L}_{NG} usando como parâmetro s , ao invés de σ . Temos que

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \frac{ds}{d\sigma}. \quad (5.29)$$

Pode-se mostrar que

$$\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right| = 1. \quad (5.30)$$

Em (5.30), vemos que, além de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ ser um vetor tangente à corda, ele é unitário.

Para um dado vetor \vec{u} , sua componente perpendicular a um vetor unitário \hat{n} vem dada por

$$\vec{u}_\perp = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \hat{n}) \hat{n}. \quad (5.31)$$

Assim, a velocidade transversal da corda, definida como aquela componente de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ que é perpendicular a $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$, vem dada por

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad (5.32)$$

a qual é invariante sob reparametrizações, visto que o comprimento da corda s permanece invariante sob elas. Usando (5.30), é possível deduzir que

$$\vec{v}_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2, \quad (5.33)$$

onde

$$\vec{v}_\perp^2 \equiv \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp. \quad (5.34)$$

Substituindo (5.29) em (5.27), pode-se deduzir que

$$\mathcal{L}_{NG}^{ge} = -T_0 \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (5.35)$$

Finalmente, a ação de Nambu-Goto, em termos da velocidade transversal no gauge estático, é escrita como

$$S_{NG}^{ge} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{s(\sigma_1)} ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (5.36)$$

Da expressão (5.36) ficam evidentes duas coisas. A primeira é que há $D - 2$ variáveis dinâmicas na teoria, correspondentes às $D - 2$ componentes da velocidade transversal \vec{v}_{\perp} . De fato, isso coincide com os modelos duais, no sentido de que somente $D - 2$ das componentes dos osciladores \hat{a}_{μ} contribuem nas amplitudes de espalhamento. A segunda é que no gauge estático a ação de Nambu-Goto pode ser interpretada como a soma de ações de partículas relativísticas livres, com velocidade \vec{v}_{\perp} e energia de repouso $T_0 ds$ cada uma.

5.1.4 Tensão e massa intrínseca da corda

A fim de obtermos informações sobre a constante T_0 (com dimensões de força) introduzida na ação de Nambu-Goto relativas à massa intrínseca da corda, tomemos o limite não relativístico em (5.36):

$$\begin{aligned} S_{NG}^{ge} &= -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{s(\sigma_1)} ds \left[1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{c^2} + \dots \right] \\ &\approx \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\int_0^{s(\sigma_1)} ds \frac{1}{2} \frac{T_0}{c^2} v_{\perp}^2 - T_0 s(\sigma_1) \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

O resultado em (5.37) é da forma de uma ação não relativística

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt (K - V), \quad (5.38)$$

onde

$$K = \frac{1}{2} \frac{T_0}{c^2} v_{\perp}^2 \quad (5.39)$$

$$V = T_0 s(\sigma_1). \quad (5.40)$$

Do termo de energia potencial, podemos concluir que T_0 pode ser identificado com uma tensão constante intrínseca da corda no limite não relativístico. Do termo de energia cinética,

vemos que a densidade linear de massa ρ da corda vem dada por $\rho = T_0 s(\sigma_1)/c^2$; isto significa que toda a massa da corda vem da tensão da mesma e, portanto, a corda não possui massa intrínseca.

5.1.5 Relação entre o momentum angular e a energia de uma corda rígida girante

Nesta secção, veremos que existe uma configuração física para a corda aberta na qual pode-se achar uma relação entre o momentum angular J e a energia E da corda, similar àquela presente nos modelos duais. Uma vez escolhido o gauge estático, $M_{\mu\nu}$ obtido em (5.20), que será identificado com J , passa a ser uma quantidade conservada no tempo t do referencial de Lorentz. Tanto $M_{\mu\nu}$ quanto E permanecem invariantes sob reparametrizações em σ . Portanto, a relação entre J e E , a ser verificada nesta secção, é independente da parametrização escolhida.

Adotando a parametrização escolhida como na secção 7.3 do [31],

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{e} \quad (5.41)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1, \quad (5.42)$$

as equações de movimento da corda vêm dadas por

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 0 \quad (5.43)$$

com condições de contorno

$$\left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (5.44)$$

e densidade de momentum

$$\vec{P}^t = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \quad (5.45)$$

Consideremos o caso em que uma corda esteja girando rigidamente, com energia E , em torno de seu centro:

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\sigma}{\sigma_1}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi ct}{\sigma_1}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi ct}{\sigma_1}\right) \right), \quad (5.46)$$

onde $\sigma_1 = E/T_0$. Dada dessa forma, é possível confirmar que (5.46) satisfaz à equação de uma onda.

Construída assim, é possível mostrar que esta corda gira com a velocidade angular ω e possui comprimento l dados por:

$$\omega = \frac{\pi c T_0}{E}, \quad (5.47)$$

$$l = \frac{2E}{\pi T_0} \quad (5.48)$$

Temos que a densidade de momentum \vec{P}^t é dada por

$$\vec{P}^t = \frac{T_0}{c} \cos\left(\frac{\pi\sigma}{\sigma_1}\right) \left(-\text{sen}\left(\frac{\pi ct}{\sigma_1}\right), \cos\left(\frac{\pi ct}{\sigma_1}\right) \right). \quad (5.49)$$

Através da definição (5.20), lembrando que $\sigma_1 = E/T_0$, pode-se deduzir que o momento angular $M_{12} = J$ vem dado por

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c} \\ &= \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Obtemos, portanto, uma relação linear entre J e E^2 , tal como ocorre nos modelos de ressonância dual. Portanto, podemos fazer a seguinte identificação (no sistema de unidades $\hbar = c = 1$),

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0}. \quad (5.51)$$

No capítulo anterior vinha que o limite de baixas energias dos modelos duais é oriundo de tomar o limite $\alpha' \rightarrow 0$. A relação entre o parâmetro de Regge α' e a tensão intrínseca da corda T_0 , dada por (5.51), indica que o limite de baixas energia do ponto de vista da corda corresponde a tomar o limite $T_0 \rightarrow \infty$, isto é, a corda tende a se comportar com um ponto.

5.2 Quantização da corda aberta

A quantização da corda aberta será feita no quadro de Heisenberg. Esta forma de quantização está muito próxima da descrição hamiltoniana de um sistema clássico. Por isso a quantização propriamente dita da corda aberta somente será vista na secção 5.2.3, após termos realizado a descrição hamiltoniana da corda relativística não quantizada. Lembremos que adotamos o sistema de unidades $\hbar = c = 1$.

Em princípio, a quantização da teoria não é simples, tendo em vista que a lagrangeana de Nambu-Goto dada por

$$\mathcal{L}_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (5.52)$$

possui uma raiz quadrada, tal como ocorre com uma partícula relativística, gerando equações de movimento não lineares. Trabalhando no gauge do cone de luz, este problema é evitado: a hamiltoniana é linear nas variáveis canônicas. Denotando por X^0 e X^1 as componentes 0 e 1 da corda, definem-se as coordenadas do cone de luz por meio das expressões

$$X^+ \equiv \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}, \quad (5.53)$$

$$X^- \equiv \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}}. \quad (5.54)$$

As restantes coordenadas X^I ($I = 1, 2, \dots, D-1$) permanecem inalteradas. X^+ representa o tempo do cone de luz e a componente do momentum p^- passa a significar energia do cone de luz.

5.2.1 Fixação de gauge, solução geral das equações de movimento e massa clássica da corda

O gauge de cone de luz consiste em fazer

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \quad (5.55)$$

$$P^{\tau+}(\tau, \sigma) = \frac{p^+}{\sigma_1}, \quad (5.56)$$

nas equações de movimento (5.11) e nas expressões de $P^{\tau\mu}$ e $P^{\sigma\mu}$, dadas por (5.17) e (5.18). Em (5.55) e (5.56),

$$p^+ \equiv \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}}. \quad (5.57)$$

representa a componente "+" do momentum total p^μ da corda, que é conservado. Este gauge quebra explicitamente a covariância de Lorentz da teoria, mas como será visto na secção 5.2.4, na quantização, ele conduz diretamente a estados físicos (ausência de ghosts).

Após fixado o gauge, as equações de movimento tomam a forma

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} X^I - \frac{\pi^2}{\sigma_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} X^I = 0, \quad (5.58)$$

$$I = 2, 3, \dots, D-1,$$

juntos com as seguintes equações:

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} \left\{ \dot{X}^I \dot{X}^I + \frac{\sigma_1^2}{\pi^2} X'^I X'^I \right\} \quad (5.59)$$

$$X'^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} \dot{X}^I X'^I. \quad (5.60)$$

Em (5.59) e (5.60), estamos usando a regra de Einstein de soma implícita sobre os índices repetidos $I = 2, 3, \dots, D - 1$. Note que X^I obedece à equação usual de uma onda com velocidade σ_1/π . Visto que σ_1 é um parâmetro arbitrário na teoria, a velocidade da onda não pode ser um observável físico, já que este deve ser invariante de gauge.

Do ponto de vista da folha-mundo, a teoria descreve $D - 2$ campos escalares não massivos independentes X^I . Mas, do ponto de vista do espaço-tempo de Minkowski, esses campos X^I são $D - 2$ das componentes de um D-vetor $X^\mu(\tau, \sigma)$. As restrições sobre X^- e o fato de termos uma expressão para $X^+(\tau, \sigma)$ são importantes quando comprovarmos a convariância de Lorentz da teoria. Por meio da álgebra de Lorentz, entre outras coisas, as restrições para X^- fornecem uma relação não linear entre as componentes de p^μ e os osciladores α_n^I ; isto será de extrema importância na determinação do espectro de \hat{M}^2 , definido adiante por meio de (5.79).

Após fixar o gauge do cone de luz, também pode-se obter que as densidades de momentum em (5.17) e (5.18) adotam a forma linear:

$$P_\tau^\mu = \frac{1}{2\sigma_1\alpha'} \dot{X}_\mu, \quad (5.61)$$

$$P_\sigma^\mu = -\frac{\sigma_1}{2\pi^2\alpha'} X'_\mu. \quad (5.62)$$

Portanto, as condições de contorno em (5.12) agora vêm dadas por

$$X'_\mu|_{\sigma=0} = X'_\mu|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (5.63)$$

A solução geral de (5.58), com as condições de contorno (5.63), vem dada por

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_1}\right), \quad (5.64)$$

e a solução das equações para $X^-(\tau, \sigma)$ em (5.59) e (5.60) fica

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_1}\right), \quad (5.65)$$

onde

$$\alpha_n^- = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha'}p^+} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \alpha_q^I (\alpha_{n-q}^I), \quad (5.66)$$

com $n \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\alpha_{-n}^- = (\alpha_n^-)^* \quad \text{e} \quad \alpha_{-n}^I = (\alpha_n^I)^*. \quad (5.67)$$

A razão pela qual a expressão de X^- em (5.65) é a mesma que aquela de X^I em 5.64) encontra-se no fato de que X^- também satisfaz à equação de onda (5.58) (isto pode ser visto a partir de (5.59) e (5.60) levando em conta que os campos X^I s satisfazem (5.58)). As condições (5.67) vêm do fato que X^I e X^- são variáveis reais.

Os dois primeiros termos de (5.64) e (5.65) representam o movimento do centro de massa da corda; o terceiro é a contribuição dos osciladores. A grosso modo, podemos dizer que olhando uma corda se propagando de longe, vemos um ponto; as vibrações aparecem à medida em que nos aproximamos dela. Usando a convenção de coeficientes dada em (5.64) e (5.65), vem que

$$p^I = \int_0^{\sigma_1} P^{\tau I}(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^{\sigma_1} \frac{1}{2\sigma_1\alpha'} \dot{X}^I d\sigma. \quad (5.68)$$

Dela, dentre outras relações, podemos obter a seguinte relação entre as componentes do momentum p^μ e os osciladores α_n :

$$2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I. \quad (5.69)$$

De fato, a definição conveniente da massa da corda:

$$\begin{aligned} M^2 &\doteq -p^\mu p_\mu \\ &= 2p^+p^- - p^I p^I. \end{aligned} \quad (5.70)$$

junto com (5.69), nos leva à expressão para o espectro

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I. \quad (5.71)$$

A partir da expressão anterior, vemos que a massa atribuída à corda, para um determinado estado de vibração, depende totalmente dos osciladores α_p^I . Se a corda não vibrar, caso em que $\alpha_p^I = 0$, a massa da corda é nula: $M^2 = 0$.

5.2.2 Formalismo hamiltoniano

Em vista de que as variáveis X^I s são as variáveis que contém a evolução dinâmica da teoria é natural que, ao passar ao formalismo hamiltoniano, elas e suas variáveis conjugadas $P^{\tau I}$ s formem o conjunto de variáveis canônicas. Mas há uma sutileza que surge ao considerar-se as restrições para X^- , em (5.59) e (5.60): além delas virem dadas em termos das X^I s,

elas vêm dadas em função de p^+ , que é constante. Daí, segue que é necessário incluir $p^+(\tau)$ e sua variável conjugada $x_0^-(\tau)$ como parte das variáveis canônicas da teoria (da própria evolução dinâmica da teoria deveria surgir que $p^+(\tau)$ e $x_0^-(\tau)$ são constantes).

Logo, as variáveis canônicas são:

$$x_0^-(\tau), \quad X^I(\tau, \sigma), \quad p^+(\tau), \quad \text{e} \quad P^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (5.72)$$

Estas obedecem aos colchetes de Poisson fundamentais:

$$\{x_0^-(\tau), p^+(\tau)\} = \eta^{-+} = -1, \quad (5.73)$$

$$\{X^I(\tau, \sigma), P^{\tau I}(\tau, \sigma')\} = \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (5.74)$$

Os restantes colchetes de Poisson fundamentais, tais como $\{X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')\}$, por exemplo, são todos nulos.

A determinação do hamiltoniano H não é imediata porque as equações dinâmicas que obtivemos na secção anterior foram obtidas usando uma fixação de gauge. Não existe, em nossa abordagem, uma fórmula explícita que nos permita achar H diretamente a partir da densidade lagrangeana \mathcal{L}_{NG} em (5.8).

A forma que usaremos para encontrar H vai ser demandando que ele seja o gerador das translações em τ . Haja visto que τ no gauge do cone de luz é proporcional a X^+ e que a variável canônica que gera translações em X^+ é p^- , temos que H deve ser proporcional a p^- :

$$\begin{aligned} H &= 2\alpha' p^+ p^- \\ &= \alpha' \sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[P^{\tau I} P^{\tau I} + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X^I(\tau, \sigma) X^I(\tau, \sigma) \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Usando as equações do formalismo hamiltoniano (da forma $\frac{d}{d\tau} F = \frac{\partial}{\partial \tau} F + \{H, F\}$), pode-se comprovar que o hamiltoniano dado por (5.75) reproduz as mesmas equações dinâmicas obtidas anteriormente.

Através do colchete de Poisson

$$\{X^I(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')\} = \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (5.76)$$

depois de vários cálculos, podem-se deduzir os colchetes de Poisson para os osciladores e para o modo zero da corda:

$$\{\alpha_m^I, \alpha_n^J\} = -im\eta^{IJ} \delta_{m,-n} \quad (5.77)$$

$$\{x_0^I, \alpha_n^J\} = \sqrt{2\alpha'} \eta^{IJ} \delta_{0,n}. \quad (5.78)$$

Estes últimos são consistentes com os resultados de Poisson nas variáveis canônicas originais.

5.2.3 Osciladores e operador de massa ao quadrado quânticos

Aqui, veremos que, ao ser quantizada, a corda aberta reproduz o mesmo espectro que foi visto na secção 3.4. No caso da corda, encontrar o espectro não significa encontrar os autovalores e autovetores de \hat{H} , mas sim do operador de massa ao quadrado M^2 , definido por

$$\hat{M}^2 \doteq -\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \quad (5.79)$$

onde p^μ é o operador de momentum total da corda. Deduziremos que os autovalores são

$$M^2 = \frac{n-1}{\alpha'}, \quad (5.80)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, e que o espectro é degenerado. Também veremos que os autovetores são rotulados com índices do espaço-tempo e que, para que a teoria seja covariante, é necessário que a dimensão do espaço-tempo seja 26. Vejamos.

Aqui, as variáveis canônicas dadas em (5.72) são operadores:

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \hat{X}^\mu(\tau, \sigma) \quad (5.81)$$

$$P^{\tau\mu}(\tau, \sigma) \rightarrow \hat{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma), \quad (5.82)$$

ou seja, o conjunto completo de operadores é

$$\hat{x}_0^-(\tau), \quad \hat{X}^I(\tau, \sigma), \quad \hat{p}^+(\tau), \quad \text{e} \quad \hat{P}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (5.83)$$

Os colchetes de Poisson são trocados por comutadores dos operadores, levando em conta um fator imaginário¹. Dessa forma, temos

$$[\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^+(\tau)] = -i, \quad (5.84)$$

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\delta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (5.85)$$

O operador hamiltoniano \hat{H} vem dado por

$$\hat{H} = \alpha' \sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\hat{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \hat{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} \frac{\partial \hat{X}^I}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \frac{\partial \hat{X}^I}{\partial \sigma}(\tau, \sigma) \right]. \quad (5.86)$$

¹Se não estivesse no sistema $\hbar = c = 1$, o fator seria $i\hbar$.

Dessa forma, a solução das equações de movimento vem dada por

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_1}\right) \quad (5.87)$$

e

$$\hat{X}^-(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^- + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^- e^{-in\tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_1}\right), \quad (5.88)$$

onde

$$\hat{\alpha}_{-n}^- = (\hat{\alpha}_n^-)^\dagger, \quad \hat{\alpha}_{-n}^I = (\hat{\alpha}_n^I)^\dagger \quad (5.89)$$

$$\hat{\alpha}_n^- = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha'} \hat{p}^+} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{\alpha}_q^I (\hat{\alpha}_{n-q}^I), \quad (5.90)$$

com $n \in \mathcal{Z} - \{0\}$.

Apesar de não termos ferramentas suficientes aqui, façamos notar que as componentes transversais dos campos $\hat{Q}_\mu(z)$, definidos por (3.25), coincidem com as coordenadas da corda $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ calculadas na extremidade $\sigma = 0$, quando $z \rightarrow e^{-i\tau}$ [11].

No caso em que $n = 0$ há um problema de ordenamento na série em (5.90), visto que $\hat{\alpha}_q^I$ e $\hat{\alpha}_{-q}^I$ não comutam. Daí, segue que a versão quântica de (5.66) não está definida de forma única quando $n = 0$: ela está definida a menos de um operador constante, pois o comutador de $\hat{\alpha}_q^I$ e $\hat{\alpha}_{-q}^I$ é um operador constante. A partir de (5.90), define-se $\hat{\alpha}_0^-$ por

$$\hat{\alpha}_0^- \doteq \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} \hat{p}^+} \left(\frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I \right). \quad (5.91)$$

Isto é de extrema importância, pois $\hat{\alpha}_0^-$ é basicamente \hat{p}^- , o qual influi na expressão de \hat{M}^2 . Como conseqüência, ao escrevermos (5.79) em termos de osciladores, introduzimos um operador constante \hat{a} :

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \hat{a} \right), \quad (5.92)$$

onde os osciladores $\hat{\alpha}_n^I$ e o modo zero \hat{x}_0^I satisfazem às relações de comutação:

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m,-n}, \quad (5.93)$$

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = i\sqrt{2\alpha'} \eta^{IJ} \delta_{0,n}, \quad (5.94)$$

com $n \in \mathcal{Z}$.

5.2.4 Espectro da corda

Em [31, 30] é obtido que o operador \hat{a} vem dado por -1 e que a teoria é covariante de Lorentz somente se a dimensão do espaço-tempo for $D = 26$. Isto foi feito demandando que a álgebra de Lorentz feche. Para chegarmos a estes resultados de uma forma mais rápida, embora não igualmente rigorosa, seguiremos a idéia apresentada no capítulo 1 de [29].

A idéia é considerar válida a definição em (5.90) para o caso $n = 0$, chegando a que

$$\hat{\alpha}_0^- = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha'}\hat{p}^+} \left[\hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \sum_{q=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{-q}^I \hat{\alpha}_q^I + \hat{\alpha}_q^I \hat{\alpha}_{-q}^I) \right]. \quad (5.95)$$

Usando a relação de comutação (5.94) e substituindo $\hat{\alpha}_0^-$ e $\hat{\alpha}_0^I$ em termos de \hat{p}^+ e \hat{p}^I , respectivamente, obtém-se que

$$2\hat{p}^+ \hat{p}^- - \hat{p}^I \hat{p}^I = \frac{1}{\alpha'} \left[\sum_{q=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_q^I)^\dagger \hat{\alpha}_q^I + \frac{1}{2}(D-2) \sum_{q=1}^{\infty} q \right], \quad (5.96)$$

de onde, comparando com (5.92), vemos que

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{q=1}^{\infty} q. \quad (5.97)$$

A soma em (5.97) é formalmente divergente, mas lhe será atribuído um valor finito por meio da continuação analítica da função Zeta de Riemann; ela vem definida por

$$\zeta(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^z}, \quad (5.98)$$

com $Re(z) > 1$. A continuação analítica de $\zeta(z)$ para $z = -1$ fornece o valor²

$$\sum_{q=1}^{\infty} q = \zeta(-1) = -1/12, \quad (5.99)$$

de onde concluímos que

$$a = -\frac{1}{24}(D-2). \quad (5.100)$$

Substituindo (5.100) em (5.92), recebemos

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{q=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_q^I)^\dagger \hat{\alpha}_q^I - \frac{1}{24}(D-2) \right), \quad (5.101)$$

²Exercício 12.4 de [31].

Definindo os osciladores normalizados a_q^I através de

$$\hat{a}_q^I = \sqrt{q} \hat{a}_q^I, \quad (5.102)$$

temos que

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{q=1}^{\infty} q (\hat{a}_q^I)^\dagger \hat{a}_q^I - \frac{1}{24} (D-2) \right), \quad (5.103)$$

onde

$$[\hat{a}_q^I, (\hat{a}_p^J)^\dagger] = \eta^{IJ} \delta_{q,p}. \quad (5.104)$$

$$p, q = 1, 2, \dots$$

Este último é o comutador usual para osciladores harmônicos. Podemos reescrever (5.103)

como:

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{D-1} q \hat{N}_{qI}^\perp - \frac{1}{24} (D-2) \right), \quad (5.105)$$

com

$$\hat{N}_{qI}^\perp = (\hat{a}_q^I)^\dagger \hat{a}_q^I, \quad (5.106)$$

sem soma em I . Portanto, (5.105) diz que \hat{M}^2 pode ser escrito com uma combinação linear de operadores de número \hat{N}_{qI}^\perp , onde este último é associado ao modo q na direção I da corda.

Estado fundamental

Em analogia à teoria quântica de um campo escalar livre, o estado fundamental da corda, $|\psi_0\rangle$, vem definido como aquele que é aniquilado pelos operadores $\hat{a}_q^{I's}$ (com $q = 1, 2, \dots$ e $I = 2, 3, \dots, D-1$):

$$\hat{a}_q^I |\psi_0\rangle = 0. \quad (5.107)$$

Mas a teoria também inclui com o grau de liberdade dos modos zero $\hat{x}_0^{I's}$ e $\hat{p}^{I's}$, e \hat{x}_0^- e \hat{p}^+ ; temos que os $\hat{p}^{I's}$ e \hat{p}^+ comutam com os \hat{a}_q^I s. Portanto, $|\psi_0\rangle$ pode ser escolhido não só satisfazendo (5.107), mas também como sendo um autoestado dos $\hat{p}^{I's}$ e \hat{p}^+ :

$$\hat{p}^+(\tau) |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad (5.108)$$

$$\hat{p}^I |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle. \quad (5.109)$$

Introduzimos, então, a notação

$$|\psi_0\rangle = |\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (5.110)$$

onde

$$\vec{p}_T = (p^2, p^3, \dots, p^{D-1}). \quad (5.111)$$

É sabido da Mecânica Quântica que o estado fundamental de uma teoria deve permanecer invariante sob as transformações de simetria da mesma. Neste caso, isso implica que $|\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle$ deve se comportar como um escalar sob transformações de Lorentz; ou seja, ele representa o estado de uma partícula escalar com momentum (\hat{p}^+, \vec{p}_T) e massa $M^2 = a/\alpha'$, onde a vem dado pela Eq. (5.100).

Estados excitados

A diagonalização dos operadores de número \hat{N}_{qI}^\perp vem dada por

$$\hat{N}_{qI}^\perp [(\hat{a}_q^I)^\dagger]^{N_{qI}} |\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle = N_{qI} [(\hat{a}_q^I)^\dagger]^{N_{qI}} |\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (5.112)$$

onde

$$N_{qI} = 0, 1, 2, \dots \quad (5.113)$$

Logo, a diagonalização do operador \hat{N}^\perp é dada por

$$\hat{N}^\perp \left\{ \prod_{q=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{D-1} [(\hat{a}_q^I)^\dagger]^{N_{qI}} |\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle \right\} = N^\perp \left\{ \prod_{q=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{D-1} [(\hat{a}_q^I)^\dagger]^{N_{qI}} |\hat{p}^+, \vec{p}_T\rangle \right\}, \quad (5.114)$$

sendo

$$N^\perp = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{D-1} q N_{qI}. \quad (5.115)$$

Portanto, os autovetores de \hat{M}^2 , a menos de um fator de normalização, vem dados por

$$|N, p\rangle = \prod_{q=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{D-1} [(\hat{a}_q^I)^\dagger]^{N_{qI}} |p^+, p_T\rangle \quad (5.116)$$

e os seus autovalores por

$$\hat{M}_{N^\perp}^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + a). \quad (5.117)$$

Na continuação, examinando o primeiro estado excitado, serão obtidos os valores de a e D . Este estado aparece quando $q = 1$ e vem dado por

$$|\psi_1 \rangle^J = (\hat{a}_1^J)^\dagger |p^+, \vec{p}_T \rangle. \quad (5.118)$$

Vemos que ele é degenerado, pois J pode assumir qualquer um dos valores $2, 3, \dots, D-1$, e a degenerescência deste nível vale $D-2$.

Portanto, $|\psi_1 \rangle^J$ corresponde ao estado de uma partícula de um campo vetorial. Pelo fato de haverem $D-2$ estados, e não $D-1$, a simetria de Lorentz obriga que este estado seja não massivo, isto é, $M^2 = 0$.

Visto que o autovalor de \hat{M}^2 associado ao estado da Eq. (5.118) vem dado por

$$\frac{1}{\alpha'}(1+a),$$

com $N_{1J} = 1$ e os restantes $N_{qI} = 0$, temos que

$$a = -1. \quad (5.119)$$

Logo, substituindo (5.100) em (5.97), obtemos a dimensão do espaço-tempo:

$$D = 26. \quad (5.120)$$

Como conclusão temos que o espectro da teoria vem dado por

$$M^2 = \frac{N^\perp - 1}{\alpha'}, \quad (5.121)$$

com $N^\perp = 0, 1, 2, \dots$, onde os autoestados vem dados por (5.116).

Capítulo 6

Considerações finais

Os modelos duais nasceram com o objetivo de descrever interações fortes. Na prática só se trabalhou com aqueles que consideravam o NRL, com as trajetórias de Regge retilíneas, isto é, $\alpha(s) = \alpha' s + \alpha_0$. Viu-se que, para $\alpha_0 = 1$, obteve-se a aparição de um táquion no espectro da teoria, apesar da teoria não possuir mais estados não físicos. Além disso, os modelos a nível de árvore não eram unitários, como a amplitude de Veneziano; isto foi contornado com amplitudes a nível de loops. De fato, tudo isso levou à idéia de abandonar um modelo dual para escrever as interações fortes. Por outro lado, sempre houve uma motivação por entender a teoria fundamental por trás dos modelos duais, afinal eles apresentavam muitos resultados interessantes. Como vimos neste trabalho, esta esperança culminou com a descoberta de que os objetos fundamentais do modelo dual de Veneziano são cordas.

Para isto, apresentamos as bases que levaram à construção dos modelos duais, dando especial atenção ao modelo de Veneziano. Verificamos que ele satisfaz às propriedades discutidas no capítulo 2, apesar de não ser unitário e conter, como estado fundamental, o táquion. Vimos que a generalização da amplitude de Veneziano de N pontos utilizando o formalismo de operadores é útil na interpretação do espectro hadrônico quando fatoramos a amplitude generalizada.

A conexão do modelo generalizado de Veneziano com uma teoria quântica de campos foi confirmada para o táquion e o glúon. Em seguida, apresentamos o objeto corda relativística aberta e vimos que algumas de suas propriedades são compatíveis com àquelas obtidas dos modelos duais, tais como os $D - 2$ graus de liberdade da teoria. Por fim, ao quantizarmos a corda aberta, encontramos que tanto o espectro quanto como os estados físicos descritos são os mesmos daqueles obtidos na amplitude do modelo dual de Veneziano.

Foi visto que tanto o modelo dual de Veneziano quanto a teoria da corda aberta apresentaram a problemática de formular a teoria de uma maneira que seja consistente com a Mecânica Quântica e com a Relatividade Restrita. Na primeira abordagem estava garantida a invariância de Lorentz, mas ainda restavam dúvidas acerca da existência de estados não físicos na teoria, os ghosts. Na segunda, ocorre o contrário ao formalismo de operadores: por construção, a teoria quântica não possui ghosts; inicialmente a invariância de Lorentz é que estava em cheque, sendo plenamente constituída quando obtido que a dimensão crítica é 26.

Posteriormente, a teoria de cordas (abertas e fechadas) seria proposta por Scherk e Schwarz [32] como uma teoria candidata a descrever todas as interações da natureza.

Convenções

Trabalharemos no sistema de unidades em que $c = \hbar = 1$. A métrica adotada será $(-, +, +, \dots, +)$, e daí $p^2 = p_\mu p^\mu = -M^2$. Para o espalhamento $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, definimos as variáveis de Mandelstam s , t e u como

$$s \equiv -(p_1 + p_2)^2 \quad (6.1)$$

$$t \equiv -(p_1 + p_4)^2 \quad (6.2)$$

$$u \equiv -(p_1 + p_3)^2, \quad (6.3)$$

onde os momenta p_1 , p_2 , p_3 e p_4 das partículas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, entram. As variáveis de Mandelstam obedecem à relação

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 M_i^2, \quad (6.4)$$

onde M_i é a massa da i -ésima partícula. Também será utilizada a seguinte notação:

$$p_1 \cdot p_2 \equiv \alpha_{12}$$

$$p_1 \cdot p_3 \equiv \alpha_{13}$$

$$p_1 \cdot p_4 \equiv \alpha_{14}.$$

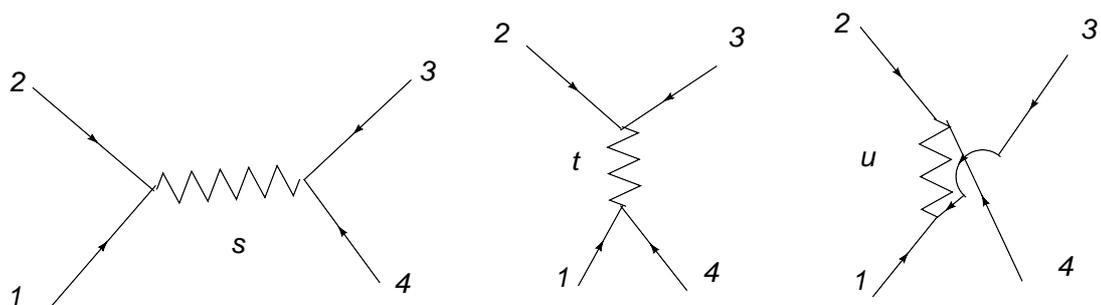


Figura 6.1: Convenção $1+2 \rightarrow 3+4$ com os momenta entrando. O tempo flui da esquerda para a direita.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Veneziano, Nuovo Cimento A**57**, 190 (1968).
- [2] R. Dolen, D. Horn e C. Schmid, Physical Review, **166**, 1768 (1968).
- [3] C. Schmid, Physical Review Letters, **20**, 689 (1968).
- [4] K. Bardakci and H. Ruegg, Phys. Rev 181 (1969) 1884.
H. M. Chan and S. T. Tsou, Phys. Letters 28B (1969) 485.
C. G. Goebel and B. Sakita, Phys. Rev. Letters 22 (1969) 257.
Z. Koba and H. B. Nielsen Nucl. Phys B10 (1969) 63.
- [5] Z. Koba e H. B. Nielsen, Nuclear Physics B**12**, 517 (1969).
- [6] M. A. Virasoro, Phys. Rev. 177 (1969) 2309.
- [7] J. A. Shapiro, Phys. Letters 33B (1970) 361.
- [8] Y. Nambu, Proc. Intern. Conf. on Symmetries and Quark Models, Wayne State University (1969).
H. B. Nielsen, Proc. 15th Intern. Conf. on High-Energy Physics, Kiev (1970).
L. Susskind, Nuovo Cimento A **69**, 457 (1970).
- [9] T. Goto, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971).
- [10] D. J. Gross and F. Wilczek, "Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories", Phys. Rev. Letters 30 1343 (1973).
H. D. Politzer, "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions", Phys. Rev. Letters 30 1346 (1973).
D. J. Gross and F. Wilczek, "Asymptotically Free Gauge Theories. I", Phys. Rev. D8 3633 (1973).

- H. D. Politzer, "Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions", Phys. Rep. 14 129 (1974).
- [11] p. Di Vecchia, "The birth of string theory"arXiv:0704.0101.
- [12] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, Superstring Theory, vol. 1, Cambridge (1986).
- [13] G. F. Chew, The analytic S matrix, W. A. Benjamin, New York, Inc (1966).
- [14] S. C. Frautschi, Regge poles and S-matrix theory, New York, W. A. Benjamin, Inc (1963).
- [15] C. A. López, Valores propios complejos en mecánica cuántica, Chile, Andres Bello (1973).
- [16] G. Veneziano, Phys. Reports **4**, 199 (1974).
- [17] S. Mandelstam, "Factorization in Dual Models and Functional Integration in String Theory",arXiv:0811.1247.
- [18] M. Ademollo, The prehistory of strings: from current algebra to the Veneziano formula, Contribuição à Conferência "The birht of string theory", Florença (2007).
- [19] K. Kikkawa, B. Sakita e M. A. Virasoro, Physics Review **184**, 1701, (1969).
- [20] C. Lovelace Physics Letters **A34**, 500, (1971).
- [21] S. Fubini e G. Veneziano, Nuovo Cimento **A67**, 29, (1967).
- [22] M. A. Virasoro, Physics Review D, **1**, 2933 (1970).
- [23] E. Del Giudice and P. Di Vecchia, Nuovo Cimento A 70, 579 (1970).
- [24] E. Del Giudice, P. Di Vecchia and S. Fubini, Annals of Physics, 70, 378 (1972).
- [25] R.C. Brower, Phys. Rev. D 6, 1655 (1972).
P. Goddard and C.B. Thorn, Phys. Lett. B 40, 235 (1972).
- [26] J. Scherk, Nuclear Physics **B31**, 222 (1971).
- [27] A. Neveu e J. Scherk, Nuclear Physics **B36**, 155 (1972).

- [28] J. E. Paton e Chan Hong-Mo, Nuclear Physics B**10**, 516 (1969).
- [29] J. Polchinski, String Theory, vol. 1, 1998, Estados Unidos da América, Cambridge.
- [30] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi e C. B. Thorn, Nuclear Physics B**56**, 109 (1973).
- [31] B. Zwiebach, A first course in string theory, Cambridge, (2004).
- [32] J. Scherk e J. H. Schwarz, Nuclear Physics B**81**, 118, (1974).