



TESE DE DOUTORADO

**Estudo Detalhado do Regulador Integrativo
Universal e Comparação com Outras
Técnicas de Controle**

Autor:

Yohan Alí Díaz Méndez

INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Itajubá, Agosto de 2018

Minas Gerais - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

Estudo Detalhado do Regulador Integrativo Universal e Comparação com Outras Técnicas de Controle

Autor: **Yohan Alí Díaz Méndez**

Orientador: **Sebastião Simões da Cunha Jr.**

Co-orientador: **Marcelo Santiago de Sousa**

Curso: **Doutorado em Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto, Materiais e Processos**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Itajubá, Agosto de 2018

Minas Gerais - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

Estudo Detalhado do Regulador Integrativo Universal e Comparação com Outras Técnicas de Controle

Autor:

Yohan Alí Díaz Méndez

Tese aprovada por banca examinadora em 16 de Agosto de 2018, conferindo ao autor o título de **Doutor em Engenharia Mecânica em Nome do Programa.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Flávio Luiz Cardoso Ribeiro - ITA

Prof. Dr. Marco Túlio Santana Alves - UFBA

Prof. Dr. Thiago Vaz da Costa - IRN/UNIFEI

Prof. Dr. Alexandre Carlos Brandão Ramos - IMC/UNIFEI

Prof. Dr. Marcelo Santiago de Sousa - IEM/UNIFEI (Co-orientador)

Prof. Dr. Sebastião Simões da Cunha Jr. - IEM/UNIFEI (Orientador)

Dedicatória

*A Deus e à Virgem de Fátima, meus protetores e
Aos meus pais, Estefanía e Ramón Alí, que sempre me apoiaram
e se sacrificaram muito para me garantir um melhor futuro e
para que Eu fosse um homem do bem . . .*

Agradecimentos

Todos os que realizam um trabalho de pesquisa como este têm plena consciência de que não é possível fazer sozinho, neste pequeno espaço faço um reconhecimento a todas essas pessoas que me apoiaram ao longo deste processo, sem vocês este humilde trabalho não teria se tornado possível, espero não ser injusto pelo fato de algumas pessoas não aparecerem aqui.

Aos orientadores deste trabalho, Prof. Dr. Sebastião Simões Cunha Jr. pela orientação, conselhos e incentivo, obrigado por acreditar na minha capacidade de conduzir esta pesquisa. Ao Prof. Dr. Marcelo Santiago de Sousa um especial agradecimento pelos questionamentos, ideias, ensinamentos e pelas horas dedicadas a este trabalho as quais foram essenciais para o desenvolvimento e conclusão do mesmo, palavras nunca serão suficientes para agradecer.

Aos colegas e amigos do nosso grupo GEMEC, pela amizade, companheirismo e convívio nas horas vagas, especialmente ao Prof. Dr. Guilherme Gomes pelo apoio e amizade.

À minha família, agradeço a todos vocês que mesmo na distância têm sido minha fonte inesgotável de inspiração, forças e exemplo para não desistir dos meus sonhos.

À Hayle, pelo amor, paciência, parceria e compreensão.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica da UNIFEI, à Pro-Reitoria de Pós-Graduação e aos seus dedicados funcionários e professores pelos conhecimentos que me foram transmitidos e os sábios conselhos.

À equipe Black Bee da UNIFEI, especialmente ao Prof. Dr. Alexandre Ramos, Rafael e Luciano os quais, gentilmente, me apoiaram no desenvolvimento de testes para a caracterização do quadrirotor.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro através do programa de bolsas e acesso a bibliografia atualizada.

Finalmente agradeço aos membros da banca, Professores Doutores: Flávio Ribeiro, Alexandre Ramos, Marco Túlio Alves, Thiago da Costa e ao Dr. Francisco Vargas pelas sugestões já dadas e pelas contribuições que possam vir para a melhorar este trabalho.

Se pude enxergar mais longe é porque me apoiei nos ombros de gigantes.

Isaac Newton

Resumo

O controle de aeronaves atualmente tem-se tornado uma tarefa desafiadora devido às não linearidades e incertezas envolvidas na sua dinâmica. Técnicas de controle linear têm sido aplicadas com sucesso demonstrando simplicidade e confiabilidade mas, dependendo da linearização local da dinâmica e escalonamento de ganhos, por outro lado, estudos realizados em técnicas de controle não linear prometem extrair maior desempenho dos controladores, contornar algumas deficiências de técnicas lineares e eliminar a dependência do escalonamento de ganhos. Esta tese aborda o estudo, aplicação e implementação numérica da técnica de controle não linear Regulador Integrativo Universal (RIU), esta técnica surgiu como uma das soluções para reduzir o fenômeno de *chattering* e melhorar a resposta transiente em sistemas controlados com técnicas baseadas em Controle por Estrutura Variável (VSC). Neste trabalho, desenvolveram-se controladores lineares e não lineares a fim de comparar seu desempenho com o RIU, posteriormente, formulou-se e resolveu-se o problema de rastreabilidade de uma aeronave tipo caça (Mirage III) através do desenvolvimento do projeto analítico do RIU e simulações numéricas permitiram demonstrar o desempenho do mesmo. Outros sistemas não lineares como um quadricóptero e o pêndulo invertido também serviram de plataforma para mostrar de maneira detalhada o processo de implementação desta técnica de controle. Dentre as principais contribuições do trabalho destacam-se o tratamento das equações da dinâmica da aeronave para aplicação do RIU, o nível de detalhe do projeto do controlador RIU e o estudo de estabilidade da lei de controle. Demonstração de estabilidade analítica e cálculo teórico dos parâmetros do controlador fazem parte do desenvolvimento do trabalho. Os resultados obtidos demonstram a funcionalidade do projeto analítico utilizado e múltiplas simulações numéricas permitiram verificar, para o caso analisado, a superioridade do RIU quando comparado com outras técnicas tanto lineares como o Regulador Linear Quadrático (LQR) quanto não lineares como a Inversão Dinâmica não Linear (NDI), também implementadas nesta tese como técnicas de comparação. O RIU demonstrou robustez e precisão, mostrando-se como uma técnica promissória para ser implementada em trabalhos futuros.

Palavras-chave: Controle de Voo, Controle Não Linear, Regulador Integrativo Universal, Inversão Dinâmica não Linear, Controle por Estrutura Variável, Demonstração de Estabilidade, Regulador Linear Quadrático.

Abstract

Nowadays, aircraft control became a challenge due to nonlinearities and uncertainties involved in aircraft dynamic. Linear control techniques have been successful applied demonstrating simplicity and reliability, however, depending on local dynamic linearization and gain scheduling, on the other hand, studies carried out on nonlinear control techniques promise to extract greater performance from controllers, tackling some shortcomings of linear techniques and eliminating gain schedule dependency. This thesis deals with the analytical study, application and numerical implementation of the non-linear control technique, Universal Integrative Regulator (RIU), This technique has emerged as one of the solutions to reduce chattering and to improve the transient response in systems controlled with Structure Variable Control (VSC) based techniques. In this work linear and non-linear controllers were developed in order to compare their performance with the RIU. The tracking problem of a fighter aircraft (Mirage III) was formulated and solved through the development of the RIU analytical project, numerical simulations allowed to demonstrate the performance of the controller. Other nonlinear systems such as a quadrirotor and inverted pendulum also served as a platform to show (in a detailed form) the process of implementing this control technique. Among the main contributions of the work are the treatment of the equations of the aircraft dynamics for application of the RIU controller, the level of detail of the design of the RIU controller and the study of stability of the control law. Demonstration of analytical stability and theoretical calculation of controller parameters are part of the development of the work. Results demonstrated the functionality of the analytical design implemented and multiple numerical simulations allowed to verify the superiority of the RIU when compared to other linear techniques such as Linear Quadratic Regulator (LQR) and nonlinear Dynamic Inversion (NDI), these techniques was also implemented in this thesis as comparison techniques. The RIU demonstrated robustness and more precision, showing itself as a promising technique to be implemented in future works.

Keywords: Flight Control, Nonlinear Control, Universal Integral Regulator, Nonlinear Dynamic Inversion, Structure Variavel Control, Stability Demonstration, Linear Quadratic Regulator.

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	x
Lista de Abreviaturas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Contexto e Motivação	1
1.2 Revisão da Literatura	4
1.3 Objetivos e Contribuições do Trabalho	8
1.3.1 Objetivos	8
1.3.2 Contribuições	8
1.4 Estrutura da Tese	9
2 Controle Linear e Inversão Dinâmica Não Linear	11
2.1 Linearização e Controle Linear	11
2.1.1 Regulador Linear Quadrático	16
2.1.2 Compensação por Técnicas de Controle Clássicas	19
2.2 Inversão Dinâmica Não Linear	21
2.2.1 Formulação Simplificada da NDI	23
2.3 Observações Sobre o Capítulo	25
3 Formulação do Problema de Controle com Regulador Integrativo Universal	27
3.1 Controle por Estrutura Variável	28
3.1.1 Formulação da Lei de Controle VSC	28
3.1.2 Definição da Superfície Deslizante	29
3.1.3 Aproximação Contínua de Modos Deslizantes	35
3.2 Regulador Integrativo Universal	40
3.2.1 Fundamentos Matemáticos	41
3.2.2 Projeto Analítico do Controlador RIU	42
3.2.3 Análise de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada	50
3.3 Observações sobre o Capítulo	54

4	Modelo Não Linear da Aeronave	56
4.1	Equações de Movimento	58
4.1.1	Equilíbrio de Forças	58
4.1.2	Equilíbrio de Momentos	61
4.1.3	Cinemática do Avião	62
4.1.4	Equações de Navegação	62
4.2	Modelagem de Forças e Momentos Aerodinâmicos	63
4.2.1	Forças e momentos aerodinâmicos longitudinais	63
4.2.2	Forças e momentos aerodinâmicos látero-direcionais	64
4.2.3	Forças e momentos aerodinâmicos totais	65
4.3	Equações da dinâmica total do Mirage III	66
4.4	Características da Aeronave Mirage III	66
4.5	Observações sobre o Capítulo	68
5	Resultados e Discussão	69
5.1	Envelope de Voo	70
5.2	Controlador por Inversão Dinâmica Não Linear	71
5.2.1	Controladores Obtidos com NDI e Simulações Numéricas	75
5.3	Controladores Obtidos com RIU e simulações	87
5.3.1	Rastreamento na Dinâmica Longitudinal	88
5.3.2	Rastreamento na Dinâmica Latero-Direcional	100
5.4	Aplicação de Controle Linear	109
5.4.1	Rastreamento da velocidade total usando LQR	110
5.4.2	Rastreamento da altitude usando controle clássico	120
5.5	Comparação entre as técnicas RIU e NDI	129
5.5.1	Rastreamento da taxa de arfagem	130
5.5.2	Rastreamento do ângulo de atitude	133
5.5.3	Rastreamento de ângulo de ataque	134
5.5.4	Rastreamento de velocidade total	137
5.5.5	Rastreamento de altitude	140
5.5.6	Rastreamento da taxa de rolagem	143
5.5.7	Rastreamento de ângulo de rolamento com amortecedor de guinada	144
5.5.8	Rastreamento de ângulo de derrapagem	147
5.6	Comparação Entre o RIU e as Técnicas Lineares	150
5.6.1	Rastreamento da velocidade total com RIU e LQR	150
5.6.2	Rastreamento de altitude usando RIU e controle clássico	153

5.7	Projeto Analítico do RIU Aplicado à Aeronave Mirage III	156
5.7.1	Dinâmica Longitudinal SISO	157
5.7.2	Dinâmica Latero-Direcional MIMO	180
5.8	Observações sobre o Capítulo	191
6	Aplicação do RIU no Quadrirotor	193
6.1	Caracterização dos parâmetros do Quadrirotor	196
6.2	Projeto analítico do RIU no quadrirotor	201
6.2.1	Determinação dos graus relativos e a matriz $A(x)$	202
6.2.2	Transformação à forma normal	204
6.2.3	Problema de rastreabilidade	206
6.2.4	Projeto do controlador	207
6.2.5	Simulações numéricas	217
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	222
7.1	Conclusões	222
7.2	Recomendações para Trabalhos Futuros	225
	Referências Bibliográficas	227
A	Desenvolvimento das Equações da Dinâmica do Avião	235
A.1	Dinâmica Longitudinal da Aeronave	235
A.1.1	Dinâmica da Velocidade Total	235
A.1.2	Dinâmica do Ângulo de Ataque	237
A.1.3	Dinâmica do Ângulo de Atitude	238
A.1.4	Dinâmica da Taxa de Arfagem	238
A.1.5	Dinâmica da Altitude	239
A.2	Dinâmica Latero-Direcional da Aeronave	239
A.2.1	Dinâmica do Ângulo de Derrapagem	239
A.2.2	Dinâmica do Ângulo de Rolagem	240
A.2.3	Dinâmica das Taxas de Rolagem a Guinada	241
B	Regulador Integrativo Universal Aplicado ao Pêndulo Invertido no Carro	243
B.1	Cálculo do Grau Relativo e Transformação à Forma Normal	245
B.2	Problema de Rastreabilidade	247
B.3	Definição do Controlador	248
B.4	Demonstração de Estabilidade do Sistema	248
B.5	Análise de Estabilidade da Dinâmica Interna	250

B.6	Cálculo do Ganho do Controlador	251
B.7	Simulações Numéricas	251
C	Expressões da Inversão Dinâmica Não Linear	257
C.1	Taxa de Arfagem	257
C.2	Ângulo de Atitude	257
C.3	Ângulo de Ataque	258
C.4	Velocidade Total	260
C.5	Altitude	260
C.6	Taxa de Rolagem	260
C.7	Ângulo de Rolagem com Amortecedor de Guinada	260
C.8	Ângulo de derrapagem	261

Lista de Figuras

2.1	Definição de ângulos, taxas e superfícies da aeronave. Adaptado de Stevens <i>et al.</i> (2016)	13
2.2	Fluxograma do processo de linearização.	15
2.3	Malha de controle interna do ângulo de atitude.	20
2.4	Malha de controle da altitude.	22
3.1	Cálculo de limites do erro de rastreamento. Adaptado de Slotine <i>et al.</i> (1991)	31
3.2	Cálculo de limites das derivadas do erro de rastreamento. Adaptado de Slotine <i>et al.</i> (1991)	32
3.3	Condição de deslizamento. Adaptado de Slotine <i>et al.</i> (1991)	34
3.4	Interpretação gráfica das condições 3.4 e 3.10. Adaptado de Slotine <i>et al.</i> (1991)	35
3.5	Fenômeno de <i>chattering</i> em modos deslizantes. Adaptado de Slotine <i>et al.</i> (1991)	36
3.6	Modos deslizantes ideal (a) e aproximação contínua (b). Retirado de Hung <i>et al.</i> (1993)	38
4.1	Esquemático do Mirage III. Adaptado de Dassault Aviation (a)	57
4.2	Orientação da Aeronave.	59
5.1	Envelope de voo do Mirage III-E. Adaptado de Dassault Aviation (b)	71
5.2	Fluxograma do código computacional para definição do controlador por NDI.	74
5.3	<i>Doublet</i> de taxa de arfagem NDI.	76
5.4	<i>Doublet</i> de ângulo de atitude NDI.	78
5.5	<i>Doublet</i> de ângulo de ataque NDI.	79
5.6	Incremento de 4% da Velocidade, rampa NDI.	80
5.7	Incremento de 2% da altitude, ponto 1 NDI.	82
5.8	Rastreamento de <i>doublet</i> de taxa de rolagem NDI.	83
5.9	<i>doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 1 NDI.	84
5.10	<i>doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 2 NDI.	85
5.11	<i>doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 3 NDI.	86
5.12	<i>doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 4 NDI.	87

5.13	<i>doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 5 NDI.	88
5.14	<i>doublet</i> de ângulo de derrapagem NDI.	89
5.15	<i>doublet</i> de taxa de arfagem RIU.	91
5.16	Velocidade durante <i>doublet</i> de taxa de arfagem RIU.	92
5.17	<i>Doublet</i> de ângulo de atitude RIU.	93
5.18	<i>Doublet</i> de ângulo de ataque RIU.	94
5.19	Incremento de 4% da velocidade total RIU.	95
5.20	Incremento de 1% da altitude, ponto 1 RIU.	96
5.21	Incremento de 1% da altitude, ponto 2 RIU.	97
5.22	Incremento de 1% da altitude, ponto 3 RIU.	98
5.23	Incremento de 1% da altitude, ponto 4 RIU.	99
5.24	Incremento de 1% da altitude, ponto 5 RIU.	100
5.25	Incremento de 2% da altitude com profundor, ponto 1 RIU.	101
5.26	<i>Doublet</i> de taxa de rolagem RIU.	102
5.27	<i>Doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 1 RIU.	103
5.28	<i>Doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 2 RIU.	104
5.29	<i>Doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 3 RIU.	105
5.30	<i>Doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 4 RIU.	106
5.31	<i>Doublet</i> de ângulo de rolagem, ponto 5 RIU.	107
5.32	<i>Doublet</i> de ângulo de derrapagem RIU.	108
5.33	Arquitetura da malha de retroação do problema de controle. Adaptado de Stevens e Lewis (2003)	111
5.34	Estrutura do compensador. Adaptado de Stevens e Lewis (2003)	112
5.35	Malha de controle de velocidade total - LQR.	115
5.36	Incremento de 4% da velocidade total (ponto 1) - LQR.	117
5.37	Incremento de 4% da velocidade total (pontos 2-5) - LQR.	119
5.38	Lugar das raízes em malha aberta, Mirage III - ponto 1.	121
5.39	Lugar das raízes em malha aberta, com atuador, ponto 1.	123
5.40	Lugar das raízes em malha fechada com atuador, ponto 1.	124
5.41	Malha de controle de altitude.	125
5.42	Polo de referência para compensador avanço-atraso de fase	126
5.43	Diagrama de Bode, sem compensador	127
5.44	Diagrama de Bode, com compensador de avanço.	128
5.45	Incremento de 2% da altitude, ponto 1, Controle Clássico.	129
5.46	Rastreamento de <i>doublet</i> de taxa de arfagem, ponto 1, RIU e NDI.	131
5.47	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. taxa de arfagem, RIU e NDI.	132

5.48	Rastreamento de <i>doublet</i> de ângulo de atitude, ponto 1, RIU e NDI.	133
5.49	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de atitude, RIU e NDI.	134
5.50	Rastreamento de <i>doublet</i> de ângulo de ataque, ponto 1, RIU e NDI.	135
5.51	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de ataque, RIU e NDI.	136
5.52	Rastreamento de velocidade total, ponto 1, RIU e NDI.	138
5.53	Erro de rastreamento acumulado, velocidade total, RIU e NDI.	139
5.54	Rastreamento de altitude, ponto 1, RIU e NDI.	141
5.55	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. altitude, RIU e NDI.	142
5.56	Rastreamento de <i>doublet</i> de taxa de rolagem, ponto 1, RIU e NDI.	143
5.57	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. taxa de rolagem, RIU e NDI.	144
5.58	Rastreamento de <i>doublet</i> de ângulo de rolagem com amortecedor de guinada, ponto 1, RIU e NDI.	145
5.59	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de rolagem, RIU e NDI.	146
5.60	Rastreamento de <i>doublet</i> de ângulo de derrapagem, ponto 1, RIU e NDI.	148
5.61	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de derrapagem, RIU e NDI.	149
5.62	Rastreamento da velocidade total, ponto 1, RIU e LQR.	151
5.63	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. velocidade total, RIU e LQR.	152
5.64	Evolução do erro de rastreamento, ponto 1, RIU e LQR.	152
5.65	Evolução do erro de rastreamento, ponto 2 até 5, RIU e LQR.	153
5.66	Rastreamento de altitude, ponto 1, RIU e Controle Clássico.	154
5.67	[a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. altitude, RIU e Controle Clássico.	155
5.68	CFL V_z e funções Kappa λ_1 e λ_2	162
5.69	Rastreamento de velocidade total com PI.	168
5.70	Comparação erro e sinal de controle para vários μ_Θ	169
5.71	Rastreamento de <i>doublet</i> ângulo de atitude com RIU, casos 1 e 2.	171
5.72	[a] Erro de rastreamento acumulado, casos 1 e 2, RIU [b] Demanda de profundor, casos 1 e 2, RIU	172
5.73	Rastreamento de <i>doublet</i> ângulo de atitude com RIU, $\frac{1}{4}K_\Theta$ e $4K_\Theta$	173
5.74	controlador RIU-caso 1 para várias amplitudes da referência.	174
5.75	controlador RIU-caso 2 para várias amplitudes da referência.	175

5.76	[a] Erro de rastreamento acumulado, casos 1 e 2, RIU [b] Demanda de profundor, casos 1 e 2, várias amplitudes da referência	176
5.77	Demonstração de estabilidade de σ_{Θ}	179
5.78	Erro e controle para escolha da camada limite μ_{Φ}	189
5.79	Máximo da K_{Φ} , [a] para $\mu_{\Phi} = 5$ [b] para $\mu_{\Phi} = 10$ [c] para $\mu_{\Phi} = 15$	190
5.80	Rastreamento de <i>doublet</i> de ângulo de rolagem com amortecedor de derrapagem.	192
6.1	Configuração "X" do quadricóptero.	195
6.2	Distribuição de massas aproximada para cálculo de inércia.	197
6.3	Configuração dos ensaios para cálculo de momentos de inércia.	199
6.4	(a) Esquemático do ensaio para determinação de constante de empuxo do motor. (b) montagem real.	200
6.5	[a] comparação entre empuxo experimental e RCplanes. [b] Regressão para determinar k_1	201
6.6	Efeito de μ_h no rastreamento e saída de controle.	210
6.7	Efeito de μ_{ϕ} no erro de rastreamento e saída de controle.	213
6.8	Efeito de μ_{θ} no erro de rastreamento e saída de controle.	215
6.9	Efeito de μ_{ψ} no erro de rastreamento e saída de controle.	218
6.10	Rastreamento e sinal de controle para altitude.	219
6.11	Rastreamento e sinal de controle para ϕ e θ	220
6.12	Rastreamento e sinal de controle para ψ	221
B.1	Pêndulo invertido no carro.	243
B.2	Dinâmica do pêndulo invertido livre.	252
B.3	Estabilização do ângulo do pêndulo.	253
B.4	Dinâmica interna do sistema.	253
B.5	Estabilização dinâmica externa com perturbação no controle.	254
B.6	Estabilização dinâmica interna com perturbação no controle.	255
B.7	Estabilização do pêndulo após perturbação de 1 grau.	256
B.8	Resposta do pêndulo com ganhos $\beta = 1$ e $\beta = 2, 4$	256

Lista de Tabelas

4.1	Dimensões, pesos e inercias. Fonte: Sousa (2005)	67
4.2	Derivativas de estabilidade. Fonte: Sousa (2005)	67
5.1	Pontos de equilíbrio para as simulações.	70
5.2	Pontos de equilíbrio para as simulações.	110
5.3	Ganhos escalonados usando LQR.	118
5.4	Comparação de desempenho com NDI.	150
5.5	Comparação de desempenho com técnicas lineares.	156
5.6	Pares de μ e ganho K_{Θ}	167
5.7	Componentes da dinâmica latero-direcional.	181
5.8	Pares de μ_{Φ} e ganho K_{Φ}	188
5.9	Sensibilidade dos parâmetros que compõem K_{Φ}	189
6.1	Constantes c_i do modelo do quadrirotor.	196
6.2	Dados do quadrirotor para inércia teórica.	197
6.3	Dados do quadrirotor e resultados para cálculo de inércia experimental.	198
7.1	Comparação de desempenho com NDI.	225
7.2	Comparação de desempenho com técnicas lineares.	225

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

g	Aceleração da gravidade
$V(x)$	Função escalar ou candidata a função de Lyapunov
$S(t)$	Superfície deslizante
$sign(\cdot)$	Função sinal
$sat(\cdot)$	Função saturação
m	Massa do avião
S	Superfície da asa [m^2]
l	Envergadura da asa [m]
\bar{q}	Pressão dinâmica [kg/ms^2]
V	Velocidade total da aeronave [m/s]
u	Velocidade do avião no eixo longitudinal do sistema de eixos do corpo
v	Velocidade do avião no eixo lateral do sistema de eixos do corpo
w	Velocidade do avião no eixo vertical do sistema de eixos do corpo
p	Taxa de rolamento
q	Taxa de arfagem
r	Taxa de guinada
h	Altitude do avião
L	Momento de rolagem
M	Momento de arfagem
N	Momento de guinada
\bar{L}	Força de sustentação
D	Força de arrasto
C_L	Coefficiente de sustentação
C_{L_0}	Coefficiente de sustentação para ângulo de ataque nulo
C_{L_α}	Derivada de C_L com relação ao ângulo de ataque
C_{L_q}	Derivada de C_L com relação à taxa de arfagem
$C_{L_{\delta_p}}$	Derivada de C_L com relação à deflexão do profundor
C_{D_0}	Coefficiente de arrasto para ângulo de ataque nulo

C_m	Coeficiente de momento de arfagem
C_{m_0}	Coeficiente de momento de arfagem para ângulo de ataque nulo
C_{m_α}	Derivada de C_m com relação ao ângulo de ataque
C_{m_q}	Derivada de C_m com relação à taxa de arfagem
$C_{m_{\delta p}}$	Derivada de C_m com relação à deflexão do profundor
C_Y	Coeficiente de força lateral no sistema de eixos do corpo
C_{Y_β}	Derivada de C_Y com relação ao ângulo de derrapagem
C_{Y_p}	Derivada de C_Y com relação à taxa de arfagem
C_{Y_r}	Derivada de C_Y com relação à taxa de guinada
$C_{Y_{\delta a}}$	Derivada de C_Y com relação à deflexão do aileron
$C_{Y_{\delta l}}$	Derivada de C_Y com relação à deflexão do leme
C_η	Coeficiente de momento de guinada
C_{η_β}	Derivada de C_η com relação ao ângulo de derrapagem
C_{η_p}	Derivada de C_η com relação à taxa de rolagem
C_{η_r}	Derivada de C_η com relação à taxa de guinada
$C_{\eta_{\delta a}}$	Derivada de C_η com relação à deflexão do aileron
$C_{\eta_{\delta r}}$	Derivada de C_η com relação à deflexão do leme
C_l	Coeficiente de momento de rolamento
C_{l_β}	Derivada de C_l com relação ao ângulo de derrapagem
C_{l_p}	Derivada de C_l com relação à taxa de arfagem
C_{l_r}	Derivada de C_l com relação à taxa de guinada
$C_{l_{\delta a}}$	Derivada de C_l com relação à deflexão do aileron
$C_{l_{\delta l}}$	Derivada de C_l com relação à deflexão do leme
e	Erro de rastreamento no RIU
\hat{e}	Erro de rastreamento estimado no RIU
\tilde{y}	Erro de rastreamento em NDI
X_e	Vetor de estados de equilíbrio na dinâmica linearizada
\bar{U}_e	Vetor de controles de equilíbrio na dinâmica linearizada
$[K]$	Matriz de ganhos no controlador LQR

Símbolos Gregos

Ω_c	Domínio ou região de atração
α	Ângulo de ataque
α_f	Ângulo de montagem do motor
β	Ângulo de derrapagem
Φ	Ângulo de rolamento
Ω	Ângulo de atitude
Ψ	Ângulo de proa
ρ	Densidade do ar
δ_p	Deflexão do profundor
δ_a	Deflexão do aileron
δ_l	Deflexão do leme
δ_ϕ	Deflexão na manete de combustível
$\bar{\theta}$	Vetor de parâmetros desconhecidos
ρ	Grau relativo total (não confundir com densidade do ar no contexto)
β_i	Ganhos do controlador por RIU
ξ	Coordenada dos estados externos da dinâmica à forma normal no RIU
η	Coordenada dos estados internos da dinâmica à forma normal no RIU
μ	Espessura da camada limite no RIU
λ^i	Variável utilizada em polinômios
λ_i	Funções tipo Kappa para análise (não confundir com o anterior)
σ	Variável de estado na dinâmica do integrador condicional

Lista de Abreviaturas

RIU	Regulador Integrativo Universal
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
NDI	<i>Nonlinear Dynamic Inversion</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
VSC	<i>Variable Structure Control</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
CG	Posição do Centro de Gravidade
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
MF	Margem de Fase
MG	Margem de Ganho
PID	Proporcional Integral Derivativo
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

O projeto de leis de controle para a aeronáutica moderna é uma tarefa desafiadora. Grandes mudanças na dinâmica da aeronave devido a maiores envelopes de voo, fazem a aeronave ser estável numa determinada condição e se tornar instável em outra (STEVENS *et al.*, 2016). Mudanças de coeficientes aerodinâmicos como o número de Mach, diferentes pressões dinâmicas ou a variação da massa da aeronave reforçam esta afirmação. Segundo Wang e Stengel (2000) aeronaves capazes de atingir voo hipersônico são altamente sensíveis a estas mudanças, especialmente a câmbios nas condições atmosféricas e parâmetros aerodinâmicos afetando seu desempenho (XU *et al.*, 2004). Um outro exemplo do efeito destas mudanças é a instabilidade apresentada em algumas aeronaves comerciais no modo dutch roll para determinadas condições de velocidade e altitude. Um outro aspecto que faz necessária a implementação de controladores é o aumento na flexibilidade estrutural, esta conduz à aparição de efeitos aeroservoelásticos os quais afetam significativamente a largura de banda dos controladores. Estes fenômenos tornam-se críticos, especialmente, quando exigidas algumas especificações de projeto, tal como restrições de desempenho e robustez, os quais estão relacionados com os objetivos de controle (SIMOES *et al.*, 2011). Estes requerimentos são conhecidos como qualidades de voo a fazem parte essencial do projeto, segundo Stevens e Lewis (2003) estes podem ser impostos através de especificações de polos e zeros em sistemas linearizados ou expressos em termos de limitações da resposta no domínio do tempo do sistema, como por exemplo: sobressinal, tempo de subida, tempo de acomodação e erro estacionário. Inclusive, estas especificações podem ser diferentes para cada fase de voo, as quais estão categorizadas em Vepa (2014).

Segundo Stevens *et al.* (2016), controladores em malha fechada, ajudam a contornar estas variações mudando a dinâmica da aeronave, este *feedback* é feito para uma determinada condição de voo e, em controladores lineares, são ajustados através de um processo denominado escalonamento de ganhos, contornando desta forma as mudanças no número de Mach

e/ou na pressão dinâmica. O controle linear clássico tem sido aplicado através de uma abordagem de controle na qual projeta-se um determinado compensador para cada *loop* independente. Segundo Stevens *et al.* (2016) esta estratégia permitiu fazer uso de ferramentas como Lugar Geométrico das Raízes (LGR), diagramas de Bode e Nyquist os quais fazem possível visualizar as modificações no sistema devido ao compensador. Esta estratégia mostra-se eficaz para sistemas SISO, porém, quanto mais entradas e saídas são adicionada à malha de controle, mais difícil se torna garantir o sucesso deste tipo de abordagem. Posteriormente, surgiu o denominado controle moderno, o grande sucesso desta nova abordagem foi principalmente pelo fato de utilizar como sistema, um modelo no espaço dos estados o qual contém maiores informações da dinâmica e a introdução de um processo sistemático para a determinação simultânea de uma matriz de ganhos. De acordo com Stevens *et al.* (2016), esta nova estratégia adotou critérios de desempenho matematicamente precisos os quais permitem atender as qualidades de voo previamente mencionadas. O grande sucesso desta última estratégia pode ser visto na atualidade, tal como no Boeing 767 no qual tem se implementado este tipo de controladores nos seus pilotos automáticos.

Apesar dos esforços colocados no controle moderno para eliminar a dependência do método de tentativa e erro e a influência da experiência do projetista na escolha dos compensadores, o escalonamento de ganhos necessário para à adaptação do controlador à condição de operação continua sendo essencial. Deve-se estar ciente destas limitações que apresentam as leis de controle lineares, especificamente porque a grande maioria dos fenômenos físicos existentes na natureza são não lineares. A linearização é feita sob hipóteses que mesmo sendo válidas em casos específicos (normalmente por conveniência do projetista), fornecem pequenas faixas de operação. Tal como mencionado anteriormente, o desenvolvimento de novos materiais e o crescimento da demanda por aviões cada vez mais leves têm influenciado na criação de projetos de aeronaves mais flexíveis, com fuselagens mais compridas, perfis aerodinâmicos mais finos e alongamentos maiores. Esta flexibilidade e outros itens como os altos ângulos atingidos durante manobras de aeronaves de combate são razões suficientes para justificar o uso de modelos não lineares no projeto de sistemas de controle.

Segundo Slotine *et al.* (1991), métodos de controle linear estão baseados na suposição de pequenas faixas de operação, quando a faixa de operação requerida é ampla, o controlador linear possui um desempenho pobre ou instável devido às não linearidades do sistema não terem sido compensadas adequadamente. Cabe salientar também que a maioria das técnicas de controle lineares estão baseadas na hipótese implícita de que todos os sistemas são linearizáveis, omitindo a existência de não linearidades descontínuas que não satisfazem o princípio de sobreposição. Por outro lado, técnicas de controle não lineares permitem lidar com as não linearidades dos sistemas numa faixa de operação maior (SLOTINE *et al.*, 1991). O conceito de faixa de operação é relacionado em sistemas não lineares com a região de atração, a qual segundo Lee *et al.* (2015) é pequena em sistemas dinâmicos linearizados.

De acordo com Khalil (2002a) para a implementação de técnicas lineares em sistemas não lineares o primeiro passo a seguir é lineariza-lo ao redor de algum ponto de operação nominal e analisar o modelo linear resultante. Durante alguma época uma prática adotada foi o estudo da estabilidade do sistema linear para estabelecer conclusões sobre o comportamento do sistema original, porém, a informação obtida não era suficiente (KHALIL, 2002A), (SLOTINE *et al.*, 1991). A abordagem tradicionalmente adotada para o controle de aeronaves na atualidade é baseada no uso do modelo do avião linearizado em diferentes condições de voo (pontos de operação) tal como foi mencionado anteriormente, mas utilizando escalonamento de ganhos (VO E SESHAGIRI, 2008). Esta abordagem requer a determinação de um conjunto de ganhos para cada ponto do envelope de voo. Algumas técnicas de controle linear como controle ótimo (NAIR *et al.*, 2012), regulador linear quadrático ótimo (AKYAZI *et al.*, 2012) e Proporcional Integral Derivativo (SUDHA E DEEPA, 2016) já foram implementados satisfatoriamente com este propósito, porém, no caso de sistemas altamente não lineares, onde o escalonamento de ganhos não seja eficiente ou quando este não consiga extrair o desempenho requerido no projeto, técnicas de controle linear perdem utilidade. Segundo Sousa (2013), a implementação de leis de controle não lineares permite extrair um maior desempenho da aeronave e comandar sua dinâmica de maneira mais satisfatória, além disso, leis de controle não lineares não possuem restrições ao respeito de pequenos deslocamentos, como consequência, dispensa o uso de escalonamento de ganhos, o que as torna ferramentas adequadas para a análise de estabilidade de aeronaves tipo caça.

Algumas das técnicas de controle não linear mais utilizadas na atualidade estão baseadas na linearização por realimentação, método simples que permite transformar total ou parcialmente o modelo não linear do sistema original num modelo linear equivalente com uma forma mais simples, porém, este método não leva em conta incertezas no modelo nem perturbações (SLOTINE *et al.*, 1991). Já técnicas robustas de controle não linear como controle por estrutura variável contornam estas limitações e têm provado ser efetivas. A correta compensação de sistemas não lineares requer um amplo conhecimento matemático devido à complexidade dos parâmetros envolvidos na análise. Por outro lado, a simplicidade funcional de técnicas de controle lineares e a capacidade de serem sintonizadas através de compensações no domínio da frequência têm influenciado no grande sucesso delas na indústria, inclusive Slotine *et al.* (1991) atribui o poder do método de resposta em frequência à facilidade de representação gráfica, isto, facilita o projeto de controladores já que permite enxergar o significado físico dos parâmetros envolvidos.

Nesta tese trabalhar-se-á com o modelo não linear de uma aeronave representada por um número finito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Pretende-se inicialmente controlar a dinâmica de uma aeronave, para isto, utiliza-se uma técnica baseada em controle por estrutura variável conhecida como **regulador integrativo universal** desenvolvida por Khalil (2000) e concebida desde Mahmoud e Khalil (1996), cuja capacidade para resolver

problemas de estabilidade e rastreamento de sistemas não lineares de fase mínima foi demonstrada analiticamente em Seshagiri e Khalil (2005). Em Seshagiri e Khalil (2005) o exemplo analisado foi um sistema de equações diferenciais genérico o qual carece de detalhes enquanto à implementação do controlador e a determinação analítica dos seus parâmetros. A primeira aplicação em controle de voo desta técnica foi no trabalho de Vo e Seshagiri (2008) e posteriormente em Promptun e Seshagiri (2009) no qual a dinâmica da aeronave foi simplificada, considerando unicamente a dinâmica linear do curto período. Em ambos os trabalhos, detalhes sobre a implementação analítica do controlador e da demonstração de estabilidade foram omitidos. Nesta tese, as equações da dinâmica da aeronave serão tratadas por inteiro (sem linearizar) e detalhes sobre o cálculo e/ou escolha dos parâmetros constituintes da lei de controle assim como particularidades da demonstração de estabilidade serão fornecidos. Será verificada a robustez desta técnica através de simulações ao longo de todo o envelope de voo da aeronave.

A seguir é apresentada uma breve revisão sobre o uso de modelos não lineares de aeronaves e fazer-se-á uma revisão da literatura sobre a evolução de técnicas de controle não linear, especialmente as que conduziram à criação do RIU. Inicia-se com controle por estrutura variável, modos deslizantes (SMC) até chegar ao regulador integrativo universal (RIU). Será contextualizada a contribuição de alguns dos trabalhos na área e serão discutidas algumas aplicações destas técnicas no controle de aeronaves.

1.2 Revisão da Literatura

Técnicas de controle modernas como controle ótimo têm sido aplicadas por vários pesquisadores no controle de voo. Tuzcu (2001) considerou um regulador linear quadrático (LQR) para o controle de manobras de uma aeronave flexível, devido à limitação de todos os estados não poderem ser determinados diretamente a partir da saída, projetou-se um observador de estados ótimo. O problema de controle foi resolvido separando as variáveis grandes (de maior amplitude) da dinâmica de corpo rígido das variáveis pequenas correspondentes à dinâmica estrutural, as deformações elásticas foram consideradas como pequenas perturbações para reduzir a complexidade do controlador. Em Shearer (2006), o controle de trajetória de uma aeronave foi feito por meio de dois processos, controle lateral utilizando LQR e controle longitudinal através de inversão dinâmica, uma malha interna de controle lida com as velocidades lineares e angulares e uma malha externa se encarrega do acoplamento dos movimentos laterais e longitudinais.

Algumas técnicas de controle não linear, especificamente as baseadas em linearização por realimentação, requerem um conhecimento detalhado do modelo da planta a ser controlada, em vista disso, precisa que os projetistas destes controladores entendam com profundidade as equações não lineares da dinâmica de voo de aeronaves. Segundo Slotine *et al.* (1991),

a linearização por realimentação permite a obtenção de um modelo a partir de um sistema não linear que permite capturar a dinâmica "chave" do sistema original numa faixa operacional de interesse, desta forma, permite facilmente projetar um controlador não linear, sendo esta a base para implementação da **inversão dinâmica não linear** (NDI). Esta técnica de controle não linear tem demonstrado resultados satisfatórios no controle de aeronaves não lineares na última década, e foi o alvo de estudo nos trabalhos de Lubas (2008), Givisiéz (2009) e Kamei (2011). Uma das principais razões do sucesso desta técnica é o fato deste controlador gerar um único conjunto de ganhos válido para todo o envelope de voo da aeronave, o que representa uma imensa vantagem quando comparado ao escalonamento de ganhos usado em controladores lineares (GIVISIÉZ, 2009). No trabalho de Lubas (2008), o modelo não linear de um avião caça F-16 é desenvolvido e, através de simulações é verificada a capacidade da inversão dinâmica em lidar com incertezas de até 10% no modelo, um *loop* interno efetua a inversão propriamente dita usando como variáveis de entrada os estados realimentados e, um *loop* externo é utilizado para resolver o problema de rastreabilidade, este último age como um "minimizador" da diferença entre a resposta real e desejada do sistema no domínio do tempo.

Em Givisiéz (2009), aplicou-se a inversão dinâmica ao controle de trajetória horizontal de uma aeronave comercial Airbus A300. Embora tenha comprovado a superioridade desta técnica com respeito às técnicas lineares, reconhece a limitação desta técnica para manter a estabilidade do sistema não linear quando grandes incertezas na modelagem estão envolvidas. Seguindo a mesma ideia, Kamei (2011), conseguiu também projetar um controlador para rastreamento baseado em inversão dinâmica aplicado à mesma aeronave, mas induzindo falhas nos atuadores das superfícies de controle. Demonstrou-se após as simulações a garantia da qualidade de voo mesmo em situações de degradação da aeronave (KAMEI, 2011). Todos estes trabalhos coincidem num ponto, a complexidade no desenvolvimento do controlador, especificamente no cálculo das derivadas das saídas, conhecidas na literatura como derivadas de Lie.

Devido à linearização por realimentação lidar diretamente com o modelo nominal do sistema não linear, e a inversão dinâmica se tratar de uma transformação exata baseada em tal modelo, ao entendimento do autor desta tese, é lógico que a capacidade de rejeição de incertezas no modelo e de perturbações precise do uso de controladores mais robustos que sejam usados em conjunto com a inversão dinâmica, a robustez nesta tese se refere à habilidade do controlador para garantir um funcionamento satisfatório mesmo na presença de incertezas.

Para tentar contornar esta deficiência da inversão dinâmica, Slotine *et al.* (1991) afirma e recomenda o uso de técnicas robustas de controle não linear como **controle por modos deslizantes** (SMC). Estas já levam em consideração além do modelo nominal, alguma caracterização do modelo de incertezas. Em Xu *et al.* (2004) controlou-se a dinâmica longitudinal de uma aeronave hipersônica usando modos deslizantes, os perigosos efeitos adversos provocados por incertezas no modelo e a alta sensibilidade de aeronaves supersônicas às mudanças atmosféricas motivaram o uso desta técnica. Tanto a altitude quanto a velocidade da aeronave foram

satisfatoriamente controlados. Estabilidade e robustez foram garantidas mas em detrimento de desempenho, isto é, demandando altos valores de ganho o que conduziu ao uso de controle adaptativo em conjunto com modos deslizantes. Em Da Silva (2007) a técnica SMC foi usada para o controle da dinâmica longitudinal (estaticamente instável) de uma aeronave hipersônica, tanto para estabilizar o sistema na presença de perturbações quanto para fazer o rastreamento de referências de velocidade e altitude. O trabalho de Da Silva (2007) foi de grande importância pelo fato de ter desenvolvido uma análise de estabilidade de modos deslizantes segundo o método direto de Lyapunov assim como também por fornecer um procedimento matemático detalhado para o projeto deste tipo de controladores.

Aproveitando a capacidade dos modos deslizantes em lidar com incertezas paramétricas aerodinâmicas, Bouadi *et al.* (2011b) propôs um controlador adaptativo combinando as técnicas NDI e SMC para o controle de trajetória longitudinal de uma aeronave de transporte cujo modelo é não linear. Leis adaptativas permitiram estimar os parâmetros do controlador a fim de garantir convergência exponencial do erro de rastreamento do sistema mesmo na presença de incertezas. A técnica SMC já foi satisfatoriamente testada no controle de aeronaves tanto de fase mínima (PROMTUN E SESHAGIRI, 2009) quanto de fase não mínima (SHKOLNIKOV E SHTESSEL, 2001), assim como também em múltiplos sistemas não lineares como válvulas (BAEZA, 2013) e no dispositivo pêndulo invertido em (JEDDA *et al.*, 2015).

Como demonstrado em Xu *et al.* (2004), os modos deslizantes (ou controle à estrutura variável) requerem alta atividade de controle, Seshagiri e Khalil (2005) advertem que o incremento dos ganhos para reduzir os erros é indesejável porque isto pode excitar dinâmicas de alta frequência não modeladas, especificamente por causa do fenômeno de *chattering* provocado quando modos deslizantes ideais são implementados, isto é, usando funções de chaveamento (*switching control*). Cabe salientar que os modos deslizantes pelo fato de serem técnicas de controle por estrutura variável, apresentam uma capacidade intuitiva de solucionar um sistema de ordem n através da solução de um sistema de primeira ordem (SOUSA, 2013), porém, desvantagens como a oscilação excessiva e permanente nos atuadores (*chattering*) e degradação da resposta transiente tem levado esta técnica a experimentar varias melhoras ao longo dos anos.

Com o intuito de evitar o efeito de *chattering* (próprio do controle por modos deslizantes), foi aproximada a função *sign* (próprio de controle por estrutura variável) pela função saturação (KHALIL, 2002B). Já para contornar a degradação da resposta transiente, Khalil (2000) propôs a utilização de um controlador com ação integral condicional, esta técnica é conhecida como **regulador integrativo universal** (RIU), esta técnica precisa unicamente do conhecimento do grau relativo do sistema (ρ) e do sinal do ganho de alta frequência. Posteriormente Seshagiri e Khalil (2005) desenvolveram estudos analíticos de estabilidade demonstrando a capacidade desta técnica para estabilizar assintoticamente sistemas não lineares de fase mínima. A introdução de um integrador condicional para melhorar a resposta transiente e ao mesmo tempo garantir a recuperação do desempenho do controle por modos deslizantes ideal foi sua principal

contribuição.

O regulador integrativo universal foi aplicado satisfatoriamente no controle da dinâmica longitudinal (SESHAGIRI E PROMTUN, 2008), (ENE, 2013) e lateral (VO E SESHAGIRI, 2008) da aeronave caça F-16 e mostrou excelentes resultados no controle de uma aeronave muito flexível em Sousa (2013) e de Sousa *et al.* (2013). Nestes dois últimos, por meio do uso de observadores de alto ganho foi possível estimar as derivadas de velocidade e altitude e também dos ângulos de ataque, de atitude e de guinada, e através do RIU foi possível projetar também amortecedores de arfagem e de guinada além de se realizar o rastreamento de velocidade, altitude e ângulo de rolamento. A robustez desta técnica de controle demonstrou uma alta capacidade para compensar os efeitos da flexibilidade estrutural, refletidos na diminuição da eficiência das superfícies de controle (SOUSA, 2013).

Em Liu *et al.* (2009), o problema de estabilização de um conversor elétrico DC foi resolvido introduzindo a ação integral condicional ao SMC (em outras palavras, RIU). Os parâmetros do controlador foram ajustados com o intuito de alcançar estabilidade assintótica sob variações de carga. A similaridade entre esta técnica de controle e o controlador PID foi também mencionada neste trabalho. No trabalho de Benamor *et al.* (2011), o RIU é proposto para o controle de nível em sistemas de tanques MIMO não lineares. Comprovou-se numericamente e experimentalmente a redução do erro e da resposta transiente devido à influência da função saturação e do próprio integrador assim como também, a robustez à variação dos parâmetros da planta. Já em Ren *et al.* (2017) foram feitos testes experimentais comprovando a eficiência do RIU neste tipo de aplicação. Um trabalho similar foi desenvolvido em Prusty *et al.* (2016), os quais utilizaram a aproximação contínua de modos deslizantes em conjunto com o integrador condicional para o controle de nível em tanques, tanto para sistemas SISO quanto para sistemas MIMO, compararam-se as respostas do RIU com o controlador PI demonstrando a superioridade do RIU enquanto ao tempo de acomodação e o sobressinal (*overshoot*). Com respeito à aplicação do RIU no pêndulo invertido não linear, no trabalho Díaz-Méndez *et al.* (2017) o RIU foi aplicado pelo autor desta tese com o intuito de mostrar a aplicação do projeto analítico e cálculo dos parâmetros do controlador.

No trabalho de Burger (2011), utilizou-se o RIU no controle de trajetória de submarinos e de formação de submarinos na presença de perturbações (variação nas correntes oceânicas). Analisou-se analiticamente a estabilidade e demonstrou-se a convergência assintótica dos veículos individualmente e em formação, finalmente, ressaltou-se a facilidade de implementação desta técnica, tal como em Sousa (2013) e Campos *et al.* (2017). Nestes últimos, o ganho e os parâmetros do controlador foram obtidos através de um processo de tentativa e erro. Nesta tese, um dos principais objetivos e principais contribuições será determinar de maneira analítica e sistemática o ganho do controlador, e através de um embasamento teórico, justificar o valor dos outros parâmetros do controlador. Para isto ser possível, deve ser feito um correto manuseio das equações da dinâmica dos sistemas (aeronave, quadrirotor).

1.3 Objetivos e Contribuições do Trabalho

1.3.1 Objetivos

O objetivo principal deste estudo é fornecer uma análise detalhada sobre o projeto do controlador não linear regulador integrativo universal (RIU) com ênfase na obtenção analítica dos seus parâmetros sintonizáveis e na demonstração analítica de estabilidade da técnica de controle, aplicada no controle de voo na aeronave de combate, Mirage III. Pretende-se comparar o desempenho desta técnica com outras, tanto não lineares quanto técnicas de controle linear, especificamente aplicado ao problema de rastreabilidade de uma aeronave caça cujo modelo é não linear. Para atender os objetivos principais desta tese é necessário que os seguintes objetivos específicos sejam cumpridos:

- Estudar as equações da dinâmica de aeronaves não lineares e adequá-las à forma requerida para a análise de estabilidade não linear;
- Fixar as teorias matemáticas e conceitos relacionados à análise e estabilidade de sistemas não lineares e entender a profundidade do projeto analítico do RIU (baseado em SMC);
- Estudar e implementar técnicas de controle lineares a fim de serem comparadas com a técnica não linear alvo do estudo desta tese;
- Aplicar analiticamente a técnica de controle regulador integrativo universal, a fim de mostrar detalhadamente o processo de obtenção dos seus parâmetros;
- Demonstrar analiticamente a estabilidade da dinâmica não linear, especificamente na dinâmica da aeronave, para isto acontecer, previamente deve ser transformada à sua forma normal através de linearização por realimentação (requer-se o atendimento do objetivo anterior);
- Implementar e verificar através de simulações numéricas a estabilidade, desempenho e capacidade de controle do RIU ao longo de todo o envelope de voo da aeronave;
- Comparar o desempenho de técnicas de controle tanto lineares quanto não lineares a fim de demonstrar a superioridade do regulador integrativo universal enquanto ao desempenho;

1.3.2 Contribuições

Devido ao fato que nem todo objetivo representa uma contribuição, as contribuições da tese são sumarizadas a seguir:

- Aplicação do projeto analítico do RIU à dinâmica completa não linear da aeronave alvo de estudo da tese (*affine in the input form*);

- Cálculo analítico dos ganhos do controlador RIU e outros parâmetros de projeto;
- Proposição de uma estratégia gráfica através de simulações para justificar a escolha da camada limite;
- Demonstrar analiticamente a estabilidade do sistema (aeronave+controlador);
- Aplicação do projeto analítico RIU a problemas de rastreabilidade variados (SISO, MIMO) e com aplicações novidasas (Pêndulo Invertido Não Linear, Quadrirotor);
- Obtenção da estrutura de um controlador RIU para sistemas MIMO mutuamente acoplados;
- Comparação do RIU com outras técnicas de controle tanto lineares quanto não lineares;

1.4 Estrutura da Tese

Este trabalho está organizado conforme será exposto a seguir.

No Capítulo 1, é feita uma introdução ao tema principal do trabalho em questão, apresenta-se uma revisão sobre a abordagem típica de controle linear e as vantagens do controle não linear aplicada a controle de voo, descreve-se brevemente a evolução da técnica principal desta tese e listam-se alguns trabalhos relevantes nos quais esta se destacou.

No Capítulo 2, apresentam-se as técnicas de controle lineares e não lineares a serem aplicadas ao problema de rastreamento da aeronave Mirage II e comparadas com o RIU, sendo Inversão Dinâmica Não Linear (NDI) a principal técnica de comparação não linear. Técnicas de linearização da dinâmica e métodos de controle ótimo e de controle clássico são as técnicas de controle linear consideradas.

No Capítulo 3, fornece-se a formulação do problema de controle do regulador integrativo universal (RIU), introduzir-se-á ao controle por modos deslizantes (técnica de controle base do RIU) e todo o embasamento teórico para o projeto analítico do RIU. O capítulo 4 é dedicado à apresentação do modelo não linear da aeronave rígida utilizada neste estudo.

No Capítulo 5, mostram-se os resultados obtidos com as técnicas: RIU, NDI, LQR, controle clássico e a aplicação analítica do RIU aos problemas de rastreabilidade. Simulações numéricas com todas as técnicas mencionadas anteriormente, análise dos resultados e demonstração de estabilidade da dinâmica longitudinal da aeronave também fazem parte deste capítulo.

No Capítulo 6, são apresentados os resultados do projeto analítico do RIU aplicado a um quadrirotor e simulações numéricas que demonstram a funcionalidade do projeto. A aplicação do RIU para o quadrirotor foi feita com o intuito de implementar o RIU em drones, tipo quadrirotor, da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI).

Por fim, no Capítulo 7, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros oriundas deste trabalho são listadas.

Capítulo 2

Controle Linear e Inversão Dinâmica Não Linear

Uma introdução sucinta à teoria de pequenas perturbações é feita neste capítulo. Esta permitirá a linearização da dinâmica da aeronave em torno de pontos de equilíbrio a fim de fazer o escalonamento de ganhos ao longo do envelope de voo da aeronave. Técnicas de controle linear como Regulador Linear Quadrático (LQR), e controle clássico usando compensação de sistemas no domínio da frequência e pelo lugar das raízes serão também discutidos brevemente. A técnica de controle não linear, Inversão Dinâmica Não Linear (NDI), pelas siglas em inglês *Nonlinear Dynamic Inversion*, será apresentada com o intuito de ser aplicada no controle de uma aeronave rígida. A comparação destas técnicas com o RIU precisará do estabelecimento de critérios de desempenho que permitam avaliar as vantagens e desvantagens entre elas.

2.1 Linearização e Controle Linear

Sabe-se que um ponto de equilíbrio é aquele onde os estados do sistema podem permanecer por tempo indeterminado (SLOTINE *et al.*, 1991), ou seja, o sistema encontra-se numa condição de repouso. De acordo com Stevens e Lewis (2003), aeronaves em vôo reto e nivelado atendem esta condição, isto é, possuem pontos no qual todas as componentes de forças e momentos resultantes no centro de gravidade são nulas. Nesta condição é possível ter ângulos aerodinâmicos nulos ou constantes. Uma prática comum é determinar estes valores para uma altitude e velocidade específica do envelope de vôo da aeronave. Nesta tese assume-se também que a massa da aeronave permanece constante devido aos curtos períodos de simulação. Encontrar matematicamente os estados para uma condição de equilíbrio específica segundo Stevens e Lewis (2003), requer a solução simultânea das equações não lineares, representadas de maneira

expansão por serie de Taylor multi-variável conduz à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{X}} f_1 \delta \dot{X} + \nabla_X f_1 \delta X + \nabla_{\bar{U}} f_1 \delta \bar{U} &= 0 \\ &\vdots \\ \nabla_{\dot{X}} f_n \delta \dot{X} + \nabla_X f_n \delta X + \nabla_{\bar{U}} f_n \delta \bar{U} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sendo:

$$\nabla_X f_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial X_1}, \frac{\partial f_i}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial X_n} \right] \quad (2.3)$$

O qual contém a totalidade das derivadas parciais de f_i devido a perturbações simultâneas em todos os elementos do vetor de estados, logo, a Equação 2.1 pode ser reescrita na forma do espaço dos estados linear como:

$$E \dot{X} = AX + Bu \quad (2.4)$$

Sendo:

$$E \dot{X} = - \begin{bmatrix} \nabla_{\dot{X}} f_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\dot{X}} f_n \end{bmatrix}_{\bar{U}=\bar{U}_e, X=X_e} \quad A = \begin{bmatrix} \nabla_X f_1 \\ \vdots \\ \nabla_X f_n \end{bmatrix}_{\bar{U}=\bar{U}_e, X=X_e} \quad B = \begin{bmatrix} \nabla_U f_1 \\ \vdots \\ \nabla_U f_n \end{bmatrix}_{\bar{U}=\bar{U}_e, X=X_e} \quad (2.5)$$

Estas matrizes são conhecidas como matrizes Jacobianas e serão determinadas numericamente para cada ponto de equilíbrio. Para aplicar numericamente esta metodologia é preciso referir-se ao conhecido problema de valor inicial, este é baseado no fato de que dada uma condição inicial $X(t_0)$ e uma entrada de controle $U(t)$ é possível determinar valores sequenciais discretos de algum estado como definido na Equação 2.6.

$$X(t_0 + kT), k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Que satisfaçam as equações de estado (Equação 2.7).

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \quad (2.7)$$

O passo T normalmente é fixo e suficientemente pequeno de tal forma que a entrada de controle $U(t)$ possa ser considerada constante nesse intervalo. Ainda em Stevens e Lewis (2003), quando a expansão por série de Taylor multi-variável é aplicada à equação diferencial não linear (Equação 2.7) ao redor do ponto de equilíbrio (X_e, \bar{U}_e) , desprezando os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\dot{X} + \delta\dot{X} = f(X_e, U_e) + \frac{\partial f}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f}{\partial U} \delta U \quad (2.8)$$

Sendo os termos em derivadas parciais análogos às matrizes jacobianas mencionadas anteriormente e as perturbações: $\delta X = (X - X_e)$ e $\delta U = (U - U_e)$ o suficientemente pequenas. Lembre-se que o ponto (X_e, \bar{U}_e) é aquele que faz o sistema estar em equilíbrio, isto é:

$$\dot{X} = f(X_e, U_e) = 0 \quad (2.9)$$

Finalmente a Equação diferencial não autónoma (Equação 2.7) por expansão por série de Taylor e teoria de pequenas perturbações transforma-se na equação diferencial linear independente do tempo representada pela Equação 2.10 a seguir. O fluxograma do processo de linearização descrito nesta seção é mostrado na Figura 2.2.

$$\delta\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f}{\partial U} \delta U \equiv \dot{x} = Ax + Bu \quad (2.10)$$

Neste trabalho a determinação dos estados e controles de equilíbrio (X_e, \bar{U}_e) é realizada utilizando a função *fminsearch* do MATLAB® (a função *fsolve* pode ser utilizada também), com o intuito de fazer a "trimagem" da aeronave em uma altitude e velocidade previamente selecionada pelo usuário, o processo de linearização é idêntico ao mostrado na Figura 2.2 e similar ao implementado em Vargas e Paglione (2015).

2.1.1 Regulador Linear Quadrático

O Regulador Linear Quadrático (LQR, *Linear Quadratic Regulator* pelas siglas em inglês) já teve seu desempenho demonstrado tanto no trabalho de Tuzcu (2001) e Shearer (2006) quanto na aplicação direta na indústria aeronáutica tal como mostrado no trabalho de Gangsaas *et al.* (2008). Esta técnica consiste na determinação de uma entrada de controle $u(t)$ capaz de minimizar o índice de desempenho quadrático J definido pela Equação 2.11. Em Stevens e Lewis (2003) afirma-se que tal escolha permite regular os estados da aeronave e conduzir

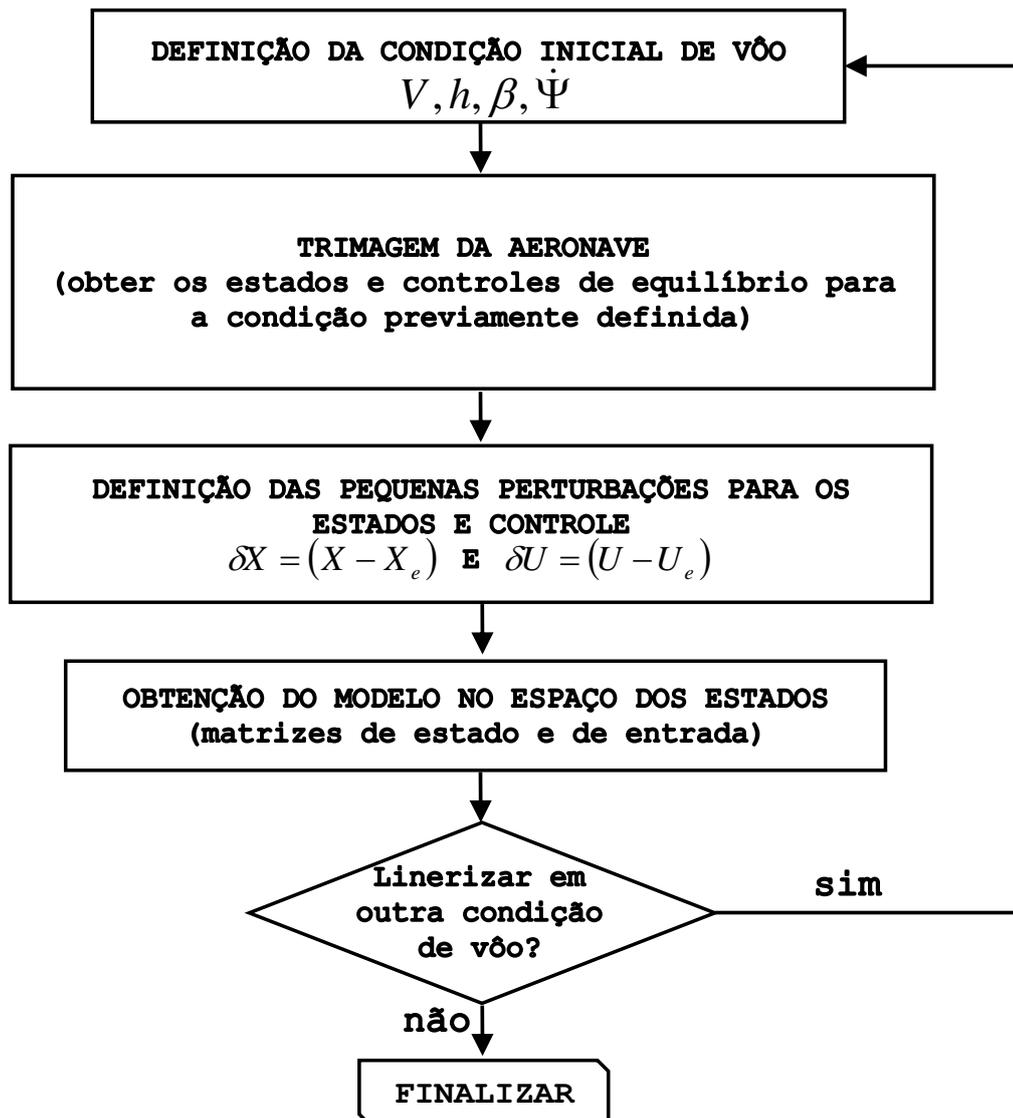


Figura 2.2: Fluxograma do processo de linearização.

qualquer erro inicial a zero garantindo ao mesmo tempo a estabilidade do sistema.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.11)$$

Na Equação 2.11, Q e R são matrizes de ponderação simétricas positivas definidas que estabelecem o desempenho desejado pelo projetista para os estados e controles. Houve duas razões para adotar esta técnica de controle linear moderna nesta tese: *i)* LQR permite calcular um conjunto de ganhos que regulam simultaneamente vários estados de tal forma que não seja necessário projetar um controlador diferente para cada malha de controle independentemente como no caso das teorias de controle clássicas (STEVENS E LEWIS, 2003) e *ii)* esta técnica permite determinar de maneira sistemática as matrizes de ganhos (OGATA E YANG, 2002). O problema de regulação ótima pode ser formulado de forma breve assumindo inicialmente que a planta trata-se de um sistema linear invariante no tempo da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.12)$$

Sendo $x(t) \in R^n$ os estados, $u(t) \in R^m$ as entradas de controle e $y(t) \in R^p$ as saídas do sistema. A malha de controle é fechada através da realimentação das saídas de tal forma que o controle de entrada seja como na Equação 2.13.

$$u = -Ky \quad (2.13)$$

Onde K é a matriz de ganhos de ordem $m \times p$ cujos coeficientes serão determinados numericamente. Substituindo a Equação 2.13 em 2.12 obtêm-se as equações do sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = Ax - BKCx = (A - BKC)x = A_c x \quad (2.14)$$

Logo, expressa-se o índice de desempenho J em função do ganho, resultando em:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T (Q + C^T K^T R K C) x dt \quad (2.15)$$

O problema de projeto será então selecionar os ganhos K de tal forma que o índice de desempenho J seja minimizado. Segundo Stevens e Lewis (2003), este problema de otimização dinâmica pode ser transformado num problema estático equivalente, para isto, supõe-se que existe uma matriz P constante simétrica positiva definida tal que:

$$\frac{d}{dt} (x^T P x) = -x^T (Q + C^T K^T R K C) x \quad (2.16)$$

Logo, pela definição de integrais impróprias o índice de desempenho pode ser reescrito como:

$$J = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t -\frac{d}{dt} (x^T P x) x dt \quad (2.17)$$

Resolvendo a Equação 2.17 conduz à Equação 2.18.

$$J = \frac{1}{2} x(0)^T P x(0) - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} x(t)^T P x(t) \right] \quad (2.18)$$

Assumindo que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, ou seja, os estados tendem a zero ($x \rightarrow 0$) enquanto o tempo tende a infinito ($t \rightarrow \infty$), logo, a Equação 2.17 se reduz a:

$$J = \frac{1}{2} x(0)^T P x(0) \quad (2.19)$$

Desta forma J é independente de K e vai depender unicamente da matriz auxiliar P e das condições iniciais, se P de fato satisfaz a Equação 2.16, usando a Equação 2.14 é possível chegar em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T P x) &= -x^T (Q + C^T K^T R K C) x \\ &\downarrow \\ \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} &= -x^T (Q + C^T K^T R K C) x \\ &\downarrow \\ x^T (A_c^T P + P A_c) x &= -x^T (Q + C^T K^T R K C) x \end{aligned} \quad (2.20)$$

E finalmente:

$$A_c^T P + P A_c + C^T K^T R K C + Q = 0 \quad (2.21)$$

A Equação 2.21 é conhecida como Equação de Lyapunov da qual é possível obter uma matriz P simétrica positiva definida. Logo, se for garantido que $A_c = (A - BKC)$ é estável problema de controle se reduz a encontrar o valor da matriz de ganhos K que satisfaça a Equação 2.21 e ao mesmo tempo minimize o índice de desempenho J . A escolha da matriz de ganhos definida na Equação 2.22, assumindo $C = I$, atende este objetivo. Detalhes sobre esta escolha podem ser consultados em Stevens e Lewis (2003), os quais foram omitidos nesta tese por não fazerem parte dos objetivos da mesma e fazerem parte da teoria básica da concepção de controladores LQR.

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.22)$$

Ainda é necessário definir as matrizes Q e R . Segundo Alves *et al.* (2012), o procedimento de projeto para encontrar a realimentação K pode ser resumido como: *i*) selecionar os parâmetros de projeto Q e R , *ii*) resolver a equação algébrica de Lyapunov (Equação 2.21) para P e *iii*) encontrar o valor ótimo de K definido pela Equação 2.22. Para realizar o passo *iii*) utilizar-se-á a rotina do MATLAB® chamada `lyap(A,Q)`.

Uma maneira de selecionar as matrizes de desempenho Q e R é utilizando a regra de Bryson (STEVENS E LEWIS, 2003), a qual as define em função dos desvios máximos dos estados e dos controles como $Q = \text{diag}\{q_i\}$ e $R = \text{diag}\{r_i\}$ respectivamente, sendo q_i e r_i como definidos na Equação 2.23.

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{(\text{máximo valor de } x_i)^2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ r_i &= \frac{1}{(\text{máximo valor de } u_j)^2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como foi mencionado no início do presente capítulo, utilizando a teoria de pequenas perturbações linearizar-se-á a dinâmica da aeronave em diferentes pontos de operação ao longo do envelope de voo, havendo então a necessidade do escalonamento de ganhos para cada um deles, isto torna possível a aplicação do controlador LQR. O processo para determinação dos ganhos do controlador LQR descrito nesta seção será utilizado para realizar o rastreamento da velocidade total da aeronave usando o profundor com o intuito de comparar seu desempenho

com as técnicas não lineares NDI e RIU. Pelo fato destas últimas serem o suficientemente robustas para garantir que um mesmo conjunto de ganhos seja válido em vários pontos do envelope, incentivar-se-á de alguma maneira à aplicação de técnicas não lineares, especialmente o RIU. Comparações do desempenho entre LQR e RIU são mostradas no capítulo de resultados.

2.1.2 Compensação por Técnicas de Controle Clássicas

Deve-se salientar nesta parte que, a aplicação de controle clássico é única e exclusivamente para ser comparado com o RIU a através de critérios específicos determinar qual oferece maiores vantagens. Técnicas de controle clássico são muito bem explicadas em livros de controle clássico como Ogata e Yang (2002), a abordagem de controle clássico apresentada nesta tese é exclusivamente para a implementação de um autopiloto de altitude, exatamente igual à apresentada em Stevens e Lewis (2003). O nome "controle clássico" deve-se à abordagem mista adotada nesta tese entre técnicas de compensação de sistemas tanto no domínio da frequência (especificamente um compensador de avanço) quanto pelo lugar das raízes. O procedimento será aplicado ao rastreamento de um sinal de referência de altitude da aeronave usando como entrada de controle a deflexão do profundor. Considerar-se-á a dinâmica do atuador e o controle de cada estado da dinâmica interna é feito independentemente. Esta abordagem foi proposta em Stevens e Lewis (2003) e consiste basicamente em dois (2) passos descritos a seguir.

Passo 1, projeto da malha de controle interna para o ângulo de atitude

Tal como mencionado em Stevens e Lewis (2003), controladores complexos como o controlador de altitude ou piloto automático para pouso requerem do uso de compensadores internos mais simples como o caso do controlador de ângulo de atitude. A Figura 2.3 mostra o diagrama de blocos deste tipo de controladores com compensação proporcional cujo ganho K_θ pode reduzir o erro estacionário e melhorar a resposta transiente (quanto maior for o ganho). A realimentação da taxa de arfagem é usada para fornecer maior amortecimento ao modo curto período e a realimentação do ângulo de atitude aprimora o amortecimento do modo fugóide.

Basicamente este passo consiste em fixar o valor de K_θ e através do auxílio da técnica Lugar Geométrico das Raízes (LGR) é selecionado o valor do ganho proporcional da taxa de arfagem (K_q) de tal forma que o amortecimento do curto período seja o adequado. Esta metodologia de projeto tem a desvantagem de causar ruído nos sensores de taxa de arfagem pelo fato de se precisarem valores de K_q cada vez maiores se o valor de K_θ for aumentado, o qual é necessário a fim de reduzir o erro estacionário $e = (\theta_{ref} - \theta)$ (STEVENS E LEWIS, 2003).

Este problema pode ser solucionado substituindo o compensador proporcional K_θ por um compensador Proporcional Integral (PI). Desta maneira, o polo na origem adicionado pela parte integral consegue zerar o erro estacionário. Em Stevens e Lewis (2003) esta estratégia foi

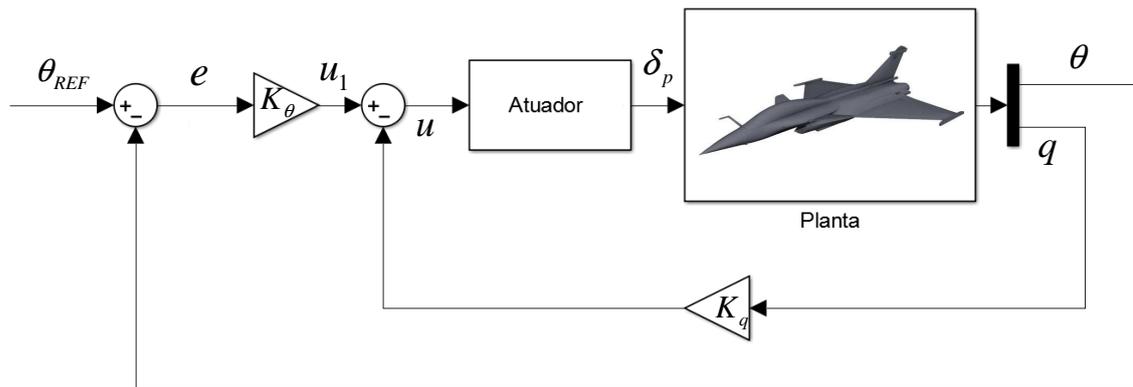


Figura 2.3: Malha de controle interna do ângulo de atitude.

aplicada na aeronave F-16 e percebeu-se que o compensador PI degrada o amortecimento do curto período. A solução proposta foi a adição de um compensador de avanço/atraso de fase com o zero posicionado à esquerda dos polos do curto período, isto, com o intuito de deslocá-los à esquerda do plano complexo aprimorando desta forma às margens de fase e ganho.

Passo 2, compensação da malha externa para controle de altitude

Neste passo deve-se adicionar a altitude (H) como mais um estado da planta (compondo a malha externa do sistema). Já as realimentações de θ e q do primeiro passo 1, conformam a malha interna do sistema. A adição de uma realimentação de altitude na malha de controle tem um grande efeito nos polos do modo fugoide e um efeito relativamente fraco nos polos do curto período (STEVENS E LEWIS, 2003). Levando-se em conta a afirmação anterior deve-se considerar que os polos do curto período obtidos na malha de controle interna manter-se-ão com poucas variações até o final do projeto da técnica de controle. A realimentação externa da altitude contará com um compensador de avanço de fase a fim de melhorar as margens de fase e ganho ou simplesmente estabilizar o sistema. Ainda segundo Stevens e Lewis (2003), caso seja requerido aprimorar o desempenho da resposta, um compensador de atraso de fase pode ser adicionado em serie com o primeiro. Por simplicidade nesta tese o compensador do ângulo de atitude do *loop* interno será do tipo proporcional com valor K_θ e o compensador de atraso de fase será opcional. A malha de controle total do sistema é ilustrada na Figura 2.4.

2.2 Inversão Dinâmica Não Linear

Mesmo que a abordagem com escalonamento de ganhos resulte útil em aplicações de controle linear, o fato de estabelecer vários pontos de equilíbrio e a interpolação dos ganhos para cada um deles faz esta técnica requerer de um tempo considerável de projeto. Com o in-

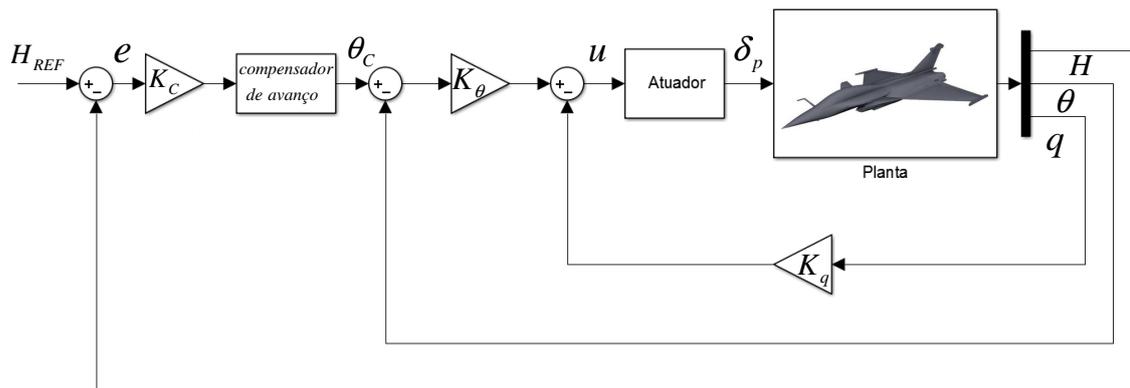


Figura 2.4: Malha de controle da altitude.

tuito de evitar a construção do escalonamento de ganhos e obter um conjunto de ganhos válido para grande parte do envelope de voo, surge a técnica de Inversão dinâmica Não Linear. Esta, pelo fato de ser projetada a partir de um modelo completo não linear do sistema a ser controlado, demanda grandes recursos computacionais (GIVISIÉZ, 2009). Segundo Stevens e Lewis (2003), a inversão dinâmica é uma das poucas técnicas diretamente estendíveis de sistemas lineares para não lineares, e é nestes últimos que demonstram sua verdadeira capacidade. A inversão dinâmica não é mais do que uma interpretação do problema de rastreabilidade baseado em linearização por realimentação (SLOTINE *et al.*, 1991).

Esta técnica consiste em, literalmente inverter as equações da dinâmica. Pelo fato de considerar diretamente as não linearidades do sistema, o manuseio das equações deve ser cuidadoso já que qualquer erro pode afetar significativamente o desempenho do controlador. De acordo com Givisiéz (2009), o objetivo da técnica consiste na busca de uma entrada de controle de tal forma que o sistema dinâmico a ser controlado se comporte segundo uma dinâmica desejada previamente definida, desde que a mesma não viole as limitações físicas do sistema. Uma vez feito isto, obtém-se um problema de controle linear e qualquer outra técnica linear pode ser aplicada para garantir o rastreamento da referência desejada. No caso de um sistema não linear onde as entradas não estejam expressas explicitamente nas equações da dinâmica, será necessário o uso de ferramentas matemáticas como derivadas de Lie, com o intuito de encontrar a relação entrada-saída.

2.2.1 Formulação Simplificada da NDI

Considere o sistema não linear representado na forma de variáveis de estado e com relação direta com o controle (*affine form*) da Equação 2.24, a qual segundo Stevens e Lewis (2003) é

comum para sistemas de aeronaves clássicos.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + g(x, t) u(t) \\ y &= h(x, t)\end{aligned}\tag{2.24}$$

Define-se $x(t) \in R^n$ como o vetor de estados, $u(x, t) \in R^m$ como o vetor de entradas e $y \in R^p$ como o vetor de saída com $p = m$ (não confundir p com taxa de rolagem). No caso de controle de aeronaves $p = m$ indica que usa-se um único controle para cada saída controlada (STEVENS E LEWIS, 2003), o qual facilitará a inversibilidade de $g(x, t)$ em passos posteriores.

A fim de determinar a entrada de controle, procede-se a derivar a saída com respeito a x , resultando na Equação 2.25. Invertendo esta última obtém-se o controle $u_c(t)$ necessário (Equação 2.26).

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} [f(x, t) + g(x, t) u(t)]\tag{2.25}$$

$$u_c(t) = G^{-1}(x) [-F(x) + \dot{y}_{des}]\tag{2.26}$$

De acordo com a Equação (6.90) de Slotine *et al.* (1991), a resposta desejada para um problema de rastreabilidade por NDI é da forma:

$$v = \dot{y}_{des}(t) = y_{des}^{\rho} - k_{\rho-1} \tilde{y}^{(\rho-1)} - \dots - k_0 \tilde{y}\tag{2.27}$$

Sendo v equivalente a um controlador linear e ρ o grau relativo do sistema. Este parâmetro torna-se útil quando a primeira derivada parcial da saída não tem uma relação linear direta com o controle. O grau relativo representa o número de derivadas da saída, necessárias para achar tal relação. $\tilde{y} = y_{real} - y_{des}$ representa o erro entre a resposta real e a desejada. O vetor de ganhos $K = [k_{\rho-1}, \dots, K_0]$ deve garantir que a Equação 2.27 possua autovalores com parte real negativa e desta maneira, assegurar a rastreabilidade da saída.

Como foi mencionado anteriormente, é possível que após a primeira derivada da saída a controlar, nenhuma das entradas de controle "apareça", isto, devido a $\left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial t}\right] g(x, t)$ ser nulo. Para auxiliar nestes casos surge a denominada derivada de Lie. A principal vantagem desta derivada é que não precisa do cálculo de derivadas temporais para achar uma relação direta entre a entrada e a saída, conseqüentemente, facilita sua implementação numérica. Esta

derivada será brevemente explicada a seguir, aplicada diretamente ao problema de inversão dinâmica em questão.

De acordo com Slotine *et al.* (1991), dada uma função escalar $h(x)$ e um campo vetorial $f(x)$, define-se uma nova função escalar $L_f h(x)$ chamada derivada de Lie de $h(x)$ com respeito de $f(x)$ e expressada como:

$$L_f h(x) = \nabla h(x) \cdot f(x) \quad (2.28)$$

Isto é, será a derivada direcional de $h(x)$ ao longo da direção de $f(x)$. Fazendo-se as derivadas de Lie repetidamente obtém-se as Equações 2.29.

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^i h(x) &= L_f (L_f^{i-1} h(x)) = \nabla (L_f^{i-1} h(x)) \cdot f(x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Analogamente, caso exista um outro campo vetorial $g(x)$, a função escalar $L_g L_f h(x)$ poderá ser escrita como: $\nabla (L_f h(x)) \cdot g(x)$. O que finalmente conduz à seguinte relação com a Equação 2.25:

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) u = L_f h(x) + L_g h(x) u \quad (2.30)$$

Derivando repetidamente esta expressão teremos e expressão da Equação 2.31.

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \quad (2.31)$$

Deve-se lembrar que a saída terá relação diretamente com a entrada sempre que tivermos $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$. Dessa forma a lei de controle por inversão dinâmica em termos da derivada de Lie, será definida como:

$$u_{control} = [L_g L_f^{r-1} h(x)]^{-1} (v - L_f^r h(x)) \quad (2.32)$$

Escolhe-se v como na Equação 2.27 de tal forma que a saída desejada correspondente ao estado controlado (observável) possa ser rastreada com a correta escolha dos ganhos $K = [k_{\rho-1}, \dots, K_0]$ os quais são ajustados a fim de garantir estabilidade assintótica da saída contro-

lada. Já a estabilidade dos estados internos (não observáveis), segundo Brinker e Wise (1996) *apud* Givisiéz (2009), não é garantida se o sistema for de fase não mínima (dinâmica interna instável em sistemas não lineares) e por causa disso, um outro vetor de saída deveria ser escolhido a fim de considerar estes estados. Deve-se lembrar, segundo Ogata e Yang (2002), que um sistema de fase não mínima (em plantas lineares) não é mais do que um sistema com no mínimo um polo ou zero com parte real positiva, já para sistemas não lineares que é o caso do RIU, um sistema de fase não mínima é aquele que possui dinâmica interna instável (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

2.3 Observações Sobre o Capítulo

Percebeu-se ao longo deste capítulo que técnicas de controle linear, especificamente as baseadas em controle clássico (por exemplo, compensador de avanço de fase), embora tenham se mostrado efetivas na indústria (especialmente pelo fato dos requerimentos de projeto "qualidades de voo" dependerem da verificação de critérios baseados em parâmetros de estabilidade lineares), carecem de um procedimento sistemático para sintonização dos ganhos do controlador caso haja mais de um ponto de operação. Por outro lado controladores modernos como LQR contornam este problema mas ainda dependem do escalonamento de ganhos. Finalmente, de acordo com a teoria da técnica NDI, percebe-se que a dependência do escalonamento de ganhos pode ser descartada. Demonstrar-se-á em capítulos posteriores que esta técnica consegue contornar tal situação mas, a complexidade das equações e dificuldade de manipulação representam uma limitação considerável (alto preço a ser pago pela robustez).

Capítulo 3

Formulação do Problema de Controle com Regulador Integrativo Universal

O Regulador Integrativo Universal (RIU) é uma técnica relativamente recente a qual introduz ação integral ao controlador por estrutura variável (VSC, pelas siglas em inglês de *Structure Variable Control*) também conhecido como controle por modos deslizantes, tal como mencionado na seção anterior. Este controlador possui uma estrutura simples e fácil de implementar, precisa unicamente do conhecimento do grau relativo e do sinal do ganho de alta frequência. O RIU foi proposto por Khalil (2000) para sistemas não lineares SISO (*Single-Input Single-Output*) e foi estendido em Seshagiri e Khalil (2005) para sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*). Nesta técnica não se usa o SMC ideal, é necessário fazer uma aproximação da técnica do SMC por meio da substituição da função $sign(\cdot)$ (descontínua) por uma contínua definida pela função saturação $sat(\cdot)$ a fim de reduzir o fenômeno de *chattering*. A principal novidade desta técnica de controle é a inclusão de um integrador condicional o qual age exclusivamente dentro da camada limite da superfície deslizante. Segundo Vo e Seshagiri (2008), a estrutura deste controlador é um caso especial do projeto genérico de um controlador de regulação de saída robusto para sistemas transformáveis à forma normal, cujo integrador condicional permite o uso de pequenos ganhos.

No decorrer deste capítulo fazer-se-á um percurso sobre a evolução desde o VSC até o RIU, fazendo ênfase nos conceitos e nas ferramentas matemáticas utilizadas. Na seção 3.1 é feita uma breve revisão sobre o controle por estrutura variável e conceitos sobre controle por modos deslizantes como camada limite e método equivalente são discutidos. Estes, são básicos para o entendimento do projeto analítico do RIU. Finalmente na seção 3.2 apresenta-se passo a passo o processo de implementação e cálculo dos parâmetros do controlador RIU baseado nos trabalhos de Khalil (2000) e Seshagiri e Khalil (2005).

3.1 Controle por Estrutura Variável

O controle por estrutura variável (VSC) foi proposto na metade do século passado e concebido na antiga União Soviética por Emelyanov e seus colegas de pesquisa (HUNG *et al.*, 1993). Seu nome deve-se principalmente ao fato de utilizar uma função de chaveamento com uma lógica que altera a estrutura da lei de controle e faz com que as trajetórias do sistema (pontos no espaço de estados) estejam contidas numa superfície de chaveamento, portanto, esta lei de controle é conhecida também como controle por superfícies ou modos deslizantes SMC (pelas siglas em inglês *Sliding Mode Control*) (DA SILVA, 2007).

Trata-se de uma lei de controle robusta capaz de lidar com incertezas no modelo ou com dinâmicas não modeladas. Em Slotine *et al.* (1991), as primeiras são chamadas de incertezas estruturadas ou paramétricas e as últimas de não estruturadas. Esta técnica é baseada no fato de que um sistema de primeira ordem é mais fácil de controlar do que sistemas não lineares de ordem n (SLOTINE *et al.*, 1991). Isto quer dizer que, ao invés de fazer uma malha de controle para cada estado a controlar, constrói-se uma superfície deslizante (a qual contém os estados a serem controlados) a qual será a única dinâmica a ser controlada.

3.1.1 Formulação da Lei de Controle VSC

Considere-se um sistema não linear variante no tempo definido segundo a Equação 3.1.

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (3.1)$$

Define-se $x \in R^n$ como o vetor de estados, $u \in R^m$ o vetor de controle, sendo n e m a ordem do sistema e o número de controles respectivamente. Propõe-se uma variável de controle por estrutura variável da forma:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_{i+}(x, t) & \text{se } s_i(x, t) > 0 \\ u_{i-}(x, t) & \text{se } s_i(x, t) < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Sendo que $1 \leq i \leq m$ e as funções u_{i+} , u_{i-} e s_i são funções contínuas, s_i é chamada função de chaveamento escalar e a função vetorial $s(x, t)$ definida pelas funções de chaveamento, isto é, $s(x, t) = [s_1(x, t), s_2(x, t), \dots, s_m(x, t)]^T$ é denominada função de chaveamento. Analogamente, $u(x, t)$ é definido pelos controles u_i e é chamado de controle a estrutura variável $u(x, t) = [u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t)]^T$. De acordo com Da Silva (2007), a alteração da função que determina uma variável de controle u_i ocorre no conjunto de pontos do espaço de

estados no qual $s_i(x, t) = 0$, tal como na Equação 3.2. Para qualquer valor de i , o conjunto de pontos no espaço de estados que satisfaz $s_i(x, t) = 0$ é denominado superfície de chaveamento e é representado por S_i .

Considere-se o vetor de estados inicial do sistema $x(t_0)$ em um instante de tempo t_0 , e assume-se que $x(t_0)$ está contido em uma superfície de chaveamento S_i , se para qualquer tempo t dentro do intervalo $|t_0 - t_f|$ o vetor de estados $x(t)$ ainda pertence a S_i , a resposta para $x(t)$ é denominada **modo deslizando** no intervalo $|t_0 - t_f|$. Uma vez feitas tais definições o problema de controle pode ser resumido em dois passos (DA SILVA, 2007):

i) Definir uma função de chaveamento $s(x, t)$, que define um conjunto de superfícies de chaveamento $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ no qual existem modos deslizando que satisfazem um objetivo de controle.

ii) Determinar um controle a estrutura variável como o definido pela Equação 3.2 tal que uma superfície de chaveamento S_i seja atingida em um tempo finito, para qualquer condição inicial do vetor de estados contida em uma vizinhança no espaço dos estados.

3.1.2 Definição da Superfície Deslizando

A formulação feita até o momento é muito genérica, para ilustrar o uso dos modos deslizando, aplicar-se-á ao problema de rastreabilidade proposto em Slotine *et al.* (1991). Considere o sistema não linear de uma entrada descrito pela Equação 3.3.

$$x^{(n)} = f(X) + b(X)u \quad (3.3)$$

Sendo $X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]$ o vetor de estados, x a saída pretendida do sistema e o escalar u a entrada de controle. Pela própria concepção da lei de controle, as funções $f(X)$ e $b(X)$ não são exatamente conhecidas mas as incertezas nelas estão limitadas superiormente por funções contínuas dependentes de X , faz-se necessário conhecer o sinal destas funções e o valor do seu limite. O problema de controle consiste em fazer que o vetor de estados X rastreie um vetor de referência desejada $X_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]$ a qual deve satisfazer a condição $X_d(0) = X(0)$ de tal forma que o objetivo de controle seja possível, caso contrário, só será possível após o regime transiente da resposta tenha ocorrido.

A fim de simplificar a notação, define-se $\tilde{X} = X - X_d = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}]$ como sendo o erro do sistema e definem-se as funções de chaveamento dependentes do tempo $S(t)$ que estão

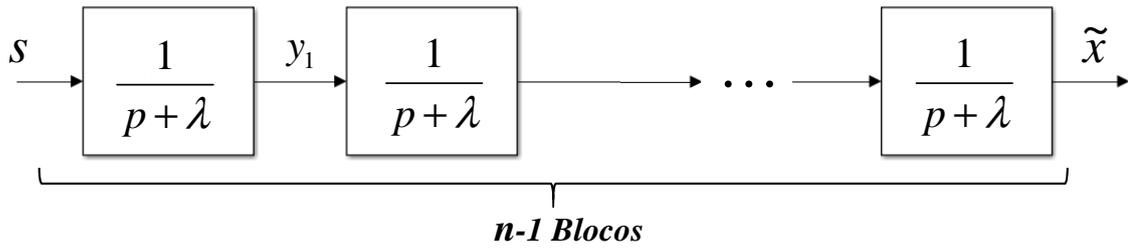


Figura 3.1: Cálculo de limites do erro de rastreamento.
Adaptado de Slotine *et al.* (1991)

definidas no espaço dos estados R^n como $s(\tilde{x}, t) = 0$, sendo:

$$s(\tilde{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad (3.4)$$

Sendo λ um escalar positivo relacionado com a taxa de decaimento do erro. Se considerarmos por exemplo um sistema de segunda ordem ($n = 2$) ou terceira ordem ($n = 3$), a Equação 3.4 resultaria em: $s = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$ ou $s = \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x}$ respectivamente, ou seja, a soma ponderada do erro e suas derivadas. Usando a condição inicial $X_d(0) = X(0)$, o problema de rastreamento $X \equiv X_d$ é equivalente a manter as trajetórias do erro na superfície $S(t)$ para todo $t > 0$, portanto, se $s = 0$ o problema se reduz a uma equação diferencial linear cuja solução única é $\tilde{x} = 0$ (de aqui vem a afirmação de que é mais fácil controlar um sistema de primeira ordem do que controlar vários sistemas de ordem n). De acordo com Slotine *et al.* (1991), limitantes superiores na superfície s podem ser diretamente traduzidos em limitantes para o vetor erro de rastreamento \tilde{x} , portanto, o escalar s representa uma medida verdadeira do desempenho do rastreamento. Sob a hipótese de $\tilde{X}(0) = 0$, tem-se que:

$$\forall t \geq 0, |s(t)| \leq \Phi \Rightarrow \forall t \geq 0, |\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \epsilon, (i = 0, \dots, n-1) \quad (3.5)$$

Sendo $\epsilon = \Phi/\lambda^{n-1}$, sendo Φ a camada limite. Devido à própria definição da função de chaveamento da Equação 3.4, é possível obter o erro de rastreamento \tilde{x} através de uma sequência de filtros passa baixa de primeira ordem, tal como ilustrado na Figura 3.1, sendo $p = (d/dt)$ o operador de Laplace. Se analisarmos a saída do primeiro filtro y_1 teremos:

$$y_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-T)} s(T) dT \quad (3.6)$$

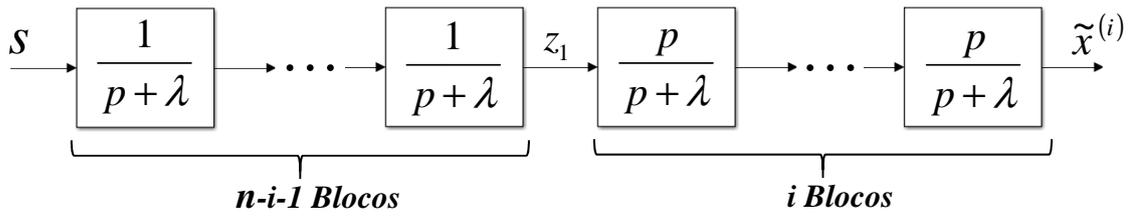


Figura 3.2: Cálculo de limites das derivadas do erro de rastreamento.
Adaptado de Slotine *et al.* (1991)

Com $|s| \leq \Phi$, obtém-se a inequação da Equação 3.7.

$$|y_1(t)| \leq \int_0^t e^{-\lambda(t-T)} dT = (\Phi/\lambda) (1 - e^{-\lambda t}) \leq \Phi/\lambda \quad (3.7)$$

Aplicando o mesmo raciocínio com os filtros sucessivos até a saída $y^{n-1} = \tilde{x}$ tem-se como resultado:

$$|\tilde{x}| \leq \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}} = \epsilon \quad (3.8)$$

De maneira similar, as derivadas do erro podem ser obtidas através da sequência mostrada na Figura 3.2. A partir do resultado anterior tem-se: $|z_1| \leq \Phi/\lambda^{n-1-i}$, logo, notando que: $\frac{p}{p+\lambda} = \frac{p+\lambda-\lambda}{p+\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}$, é possível, observando a Figura 3.2 chegar na Equação 3.9, demonstrando a validade da hipótese descrita na Equação 3.5:

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \left(\frac{\Phi}{\lambda^{n-1-i}} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda} \right)^i = (2\lambda)^i \epsilon \quad (3.9)$$

Finalmente no caso mais interessante $\tilde{X}(0) \neq 0$, os limites da Equação 3.5 para \tilde{x}^i são atendidos assintoticamente com uma constante de tempo $(n-1)/\lambda$. Como consequência, um problema de rastreamento de ordem n foi substituído pelo problema de estabilização de primeira ordem da função escalar s . Com o intuito de manter $s = 0$ escolhe-se um controle u de tal forma que fora da superfície $S(t)$ a condição da Equação 3.10 seja atendida.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, \quad \eta > 0 \quad (3.10)$$

A qual segundo Slotine *et al.* (1991), quer dizer que a distância ao quadrado até a superfí-

cie decresce ao longo de todas as trajetórias do sistema. Conseqüentemente, quando a trajetória do sistema alcança a superfície, permanece nesta, isto é, uma vez atendida a condição de deslizamento (Equação 3.10), a superfície de deslizamento se transforma em um conjunto invariante. Tal como se ilustra na Figura 3.1.2.

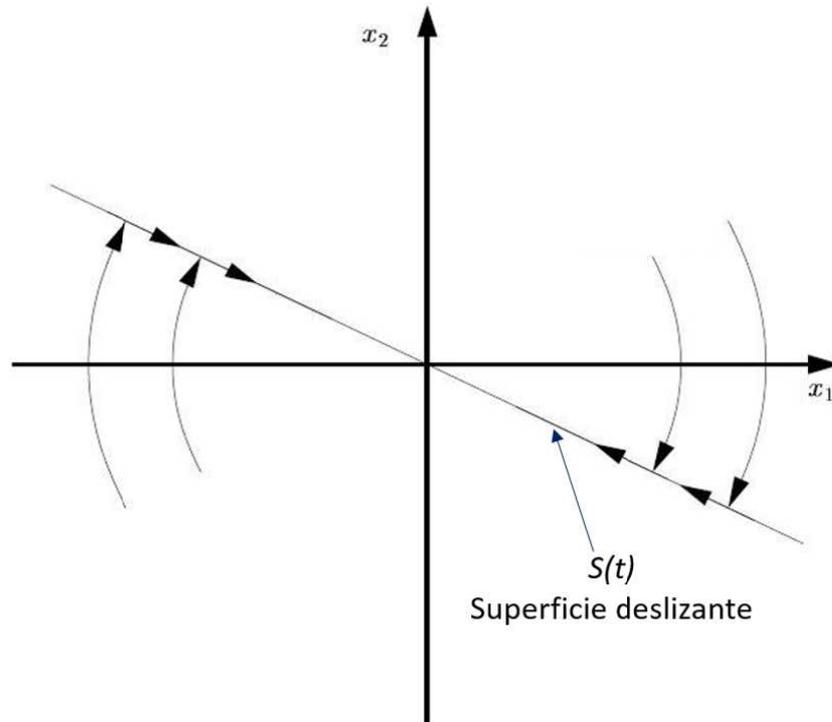


Figura 3.3: Condição de deslizamento.
Adaptado de Slotine *et al.* (1991)

Cabe salientar que a condição de deslizamento torna o sistema o suficiente robusto para lidar com incertezas no modelo e perturbações. Atendida a condição de deslizamento, a função de chaveamento passa a se chamar de superfície de deslizamento (SLOTINE *et al.*, 1991), e o comportamento do sistema uma vez nessa superfície é chamado de modo deslizante e as trajetórias do sistema serão definidas pela Equação 3.11.

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} = 0 \quad (3.11)$$

Logo, a superfície $s(t)$, além de ser um lugar será também uma dinâmica. É importante destacar que, se a condição de deslizamento (Equação 3.10) for atendida, mesmo com $\tilde{X}(0) \approx \tilde{X}_d(0)$, a superfície $s(t)$, será alcançada num tempo finito menor que $|s(t=0)|/\eta$. Assume-se por exemplo $s(t=0) > 0$ e define-se $t_{alcanca}$ o tempo requerido para atingir a superfície $s = 0$. Integrando a Equação 3.10 no intervalo $[0 \quad t_{alcanca}]$ chega-se em: $t_{alcanca} \leq |s(t=0)|/\eta$, um

resultado similar é encontrado se assumirmos $s(t = 0) < 0$. Conclui-se então que uma vez na superfície, o erro tende exponencialmente para "zero" com uma constante de tempo $(n - 1)/\lambda$ (devido à sequência dos $n - 1$ filtros de constante de tempo $1/\lambda$ cada). Na Figura 3.4 ilustra-se o atendimento da condição de deslizamento para a superfície deslizante anteriormente definida (Equação 3.10).

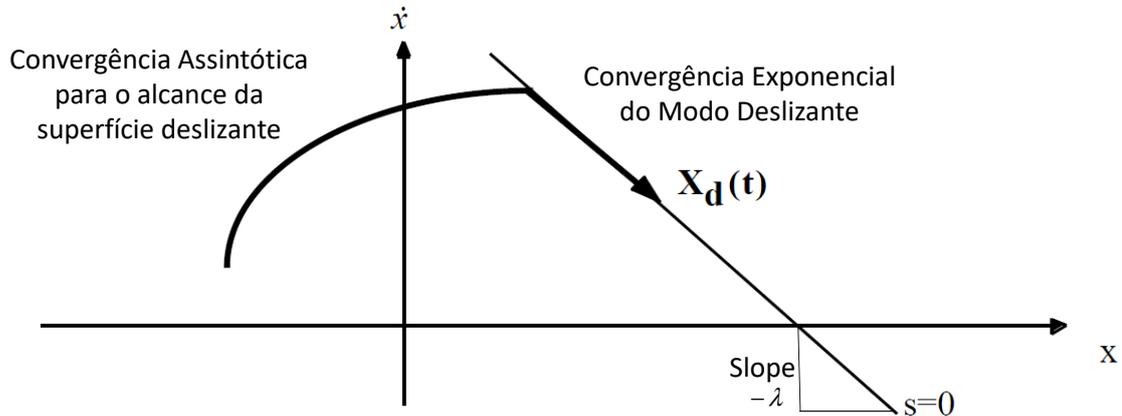


Figura 3.4: Interpretação gráfica das condições 3.4 e 3.10.
Adaptado de Slotine *et al.* (1991)

Resumindo, o controle por modos deslizantes consiste na definição de uma superfície deslizante em função do erro (Equação 3.4), de tal forma que atendendo a condição de deslizamento (Equação 3.10), as trajetórias do sistema (por exemplo x e \dot{x} na Figura 3.4), partindo desde fora da superfície possam convergir à superfície $s = 0$ em um tempo menor do que $(n - 1)/\lambda$ e posteriormente com uma constante de tempo $1/\lambda$ consiga atender $\tilde{X} = \tilde{X}_{des}$. O controle u deve ser escolhido de tal forma que a condição de deslizamento seja atendida, além disso, devido à capacidade da lei de controle em lidar com perturbações e incertezas no modelo faz-se necessário que o controle seja "descontínuo ao longo de $s(t)$ ".

Como na prática o chaveamento de controle não é instantâneo nem o valor de s é conhecido com precisão produz-se o fenômeno conhecido como *chattering*, o qual gera alta atividade permanente e excessiva de controle, a qual pode excitar dinâmicas de alta frequência que até o momento não foram consideradas no modelo (SLOTINE *et al.*, 1991). Na Figura 3.5 ilustra-se o fenômeno de *chattering* causado pelo controle por chaveamento, posteriormente será mostrada uma solução a este problema.

3.1.3 Aproximação Contínua de Modos Deslizantes

De acordo com Hung *et al.* (1993), a hipótese de que o controle pode ser chaveado de um valor a outro a uma velocidade infinitamente alta é a principal causa de *chattering*. As duas principais razões para isto ocorrer são a presença de atrasos de tempo finitos no cálculo

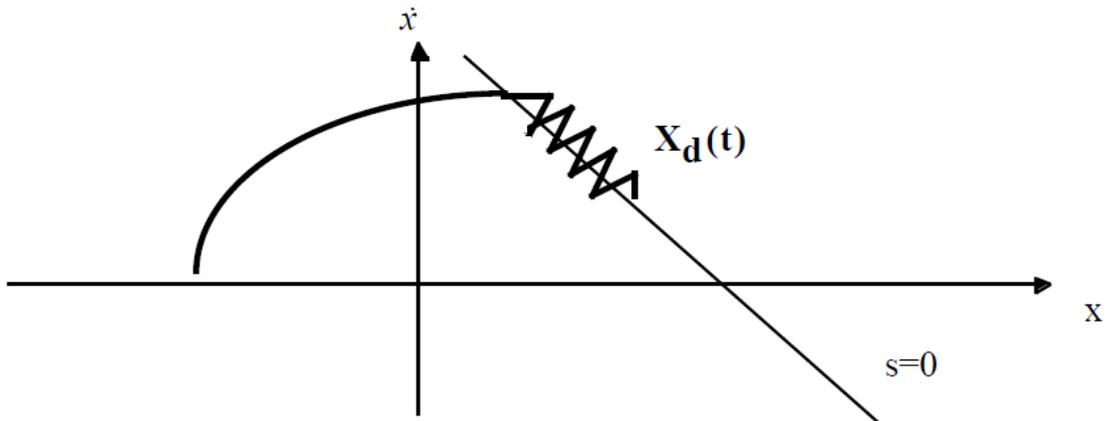


Figura 3.5: Fenômeno de *chattering* em modos deslizantes.
Adaptado de Slotine *et al.* (1991)

do controle e a limitação dos atuadores físicos. Vários métodos têm sido implementados para eliminar este fenômeno ou pelo menos para reduzir seus efeitos, entre eles temos:

Sintonização da lei de alcance

Consiste em sintonizar os parâmetros q_i e k_i na lei de alcance (Equação 3.12), próximo da superfície deslizante ($s \approx 0$) tal que $|\dot{s}_i| \approx q_i$, escolhendo o ganho k_i o suficientemente pequeno, a quantidade de movimento vai se reduzir na medida que as trajetórias se aproximam da superfície de chaveamento e como resultado a amplitude do *chattering* se reduz. Um problema ocorre caso $q_i = 0$ devido a que o tempo de alcance pode-se tornar infinito, a sintonização do termo k_i pode incrementar a velocidade de alcance na medida que este também aumenta.

$$\dot{s}_i = -q_i \text{sign}(s_i) - k_i s_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

Aproximação contínua

Utilizada também com o intuito de reduzir o *chattering*, consiste em substituir o controle de chaveamento ideal descontínuo definido pela Equação 3.13 por uma aproximação contínua chamada função de saturação, descrita pela Equação 3.14.

$$u(s) = \text{sign}(s) = \begin{cases} +1 & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

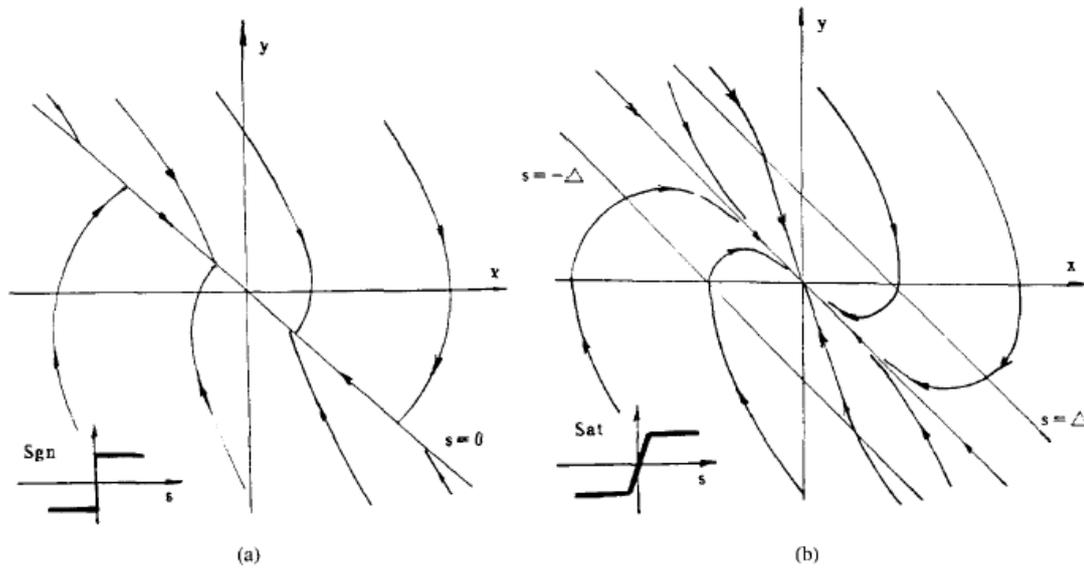


Figura 3.6: Modos deslizantes ideal (a) e aproximação contínua (b).
Retirado de Hung *et al.* (1993)

$$u(s) = sat(s) = \begin{cases} +1 & s > \mu \\ s/\mu & |s| \leq \mu \\ -1 & s < -\mu \end{cases} \quad (3.14)$$

Com esta aproximação consegue-se que dentro da camada limite (μ) aja a função aproximada enquanto que fora desta o controle continue com as características do controle chaveado descontínuo (Equação 3.13). Ao contrário do que acontece com a função sinal, a superfície s com a função saturação não é forçada a seguir a linha $s = 0$ se não, a permanecer na vizinhança $\pm\mu$. De acordo com Hung *et al.* (1993) as seguintes conclusões desta aproximação podem ser obtidas: *i*) Os modos deslizantes não existem devido às trajetórias do sistema não terem sido forçadas a permanecer na superfície $s = 0$, *ii*) Não há *chattering* devido ao controle aproximado ser utilizado dentro da camada limite, e *iii*) a propriedade de invariância não existe mais.

Mostra-se na Figura 3.6 o comportamento das trajetórias do sistema no plano de fases (assumindo sistema de segunda ordem). Na Figura 3.6 (a), a existência de um modo deslizante pelo fato das trajetórias permanecerem coladas em $s = 0$. A Figura 3.6 (b), mostra a influência da aproximação contínua descrita pela função saturação. nas trajetórias do sistema é mostrada na Figura 3.6b. Neste gráfico a variável $\Delta = \mu$ (camada limite).

Método de Controle Equivalente

O método de controle equivalente é descrito em Da Silva (2007) como uma técnica para a determinação de equações diferenciais que podem representar modos deslizantes de sistemas de controle a estrutura variável. Em secções subsequentes será ressaltada a importância de aplicação deste método na formulação do problema de controle com RIU. Uma breve descrição sobre o funcionamento do método é feita aqui baseado no trabalho de Da Silva (2007).

Considere-se uma planta não linear variante no tempo de ordem n com m variáveis de controle, tal como a mostrada na Equação (3.1), e considere-se um vetor de controle com funções de chaveamento escalares invariantes no tempo, considere-se também que são satisfeitas as condições necessárias e suficientes para a existência de um modo deslizante na interseção das superfícies de chaveamento S_1, S_2, \dots, S_r com $r \leq m$ e representada por $S_{1,2,\dots,r} = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_r$. Sabe-se que durante o modo deslizante a Equação 3.15 deve ser satisfeita.

$$s_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.15)$$

Derivando em função do tempo cada trajetória definida pela Equação 3.15, tem-se que durante o modo deslizante as equações definidas pela Equação 3.16 devem ser satisfeitas.

$$\dot{s}_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.16)$$

Devido a s_i ser função do vetor de estados x , a derivada temporal de s_i pode ser escrita utilizando a regra da cadeia em função da derivada temporal de x , tal como mostrado na Equação 3.17.

$$\dot{s}_i(x) = \nabla(s_i(x))^T \dot{x} = \nabla(s_i(x))^T f(t, x, u) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.17)$$

Da própria definição das variáveis de controle apresentada na Equação 3.2 sabe-se que durante o modo deslizante as variáveis de controle u_1, u_2, \dots, u_r são indeterminadas e cada variável de controle $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+m}$ é definida por uma respectiva função contínua u_i^- ou u_i^+ . Na Equação 3.18 mostra-se a dependência da função f com as variáveis de controle.

$$\nabla(s_i(x))^T \dot{x} = \nabla(s_i(x))^T f(t, x, u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+m}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.18)$$

Segundo Da Silva (2007), é razoável considerar que tais variáveis de controle podem ser determinadas de modo que o sistema de equações definido pela Equação 3.18 seja satisfeita, portanto, considera-se um conjunto de funções contínuas $u_1 = u_1^{eq}, u_2 = u_2^{eq}, \dots, u_r = u_r^{eq}$ capazes de satisfazer a Equação 3.18 durante um modo deslizante, o qual ocorre sobre $S_{1,2,\dots,r}$ com amplitudes limitadas pelas amplitudes das respectivas funções u_i^- e u_i^+ , isto é:

$$\min(u_i^-, u_i^+) \leq u_i^{eq} \leq \max(u_i^-, u_i^+), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.19)$$

Tal conjunto de variáveis de controle $u_1 = u_1^{eq}, u_2 = u_2^{eq}, \dots, u_r = u_r^{eq}$ é denominado controle equivalente e a equação diferencial definida pelo controle equivalente pode representar os modos deslizantes do sistema a estrutura variável sobre $S_{1,2,\dots,r}$. Dito de outra maneira, o controle equivalente é o conjunto de controles $u_1 = u_1^{eq}, u_2 = u_2^{eq}, \dots, u_r = u_r^{eq}$ que satisfazem a Equação 3.18.

3.2 Regulador Integrativo Universal

Como foi mencionado na introdução desta tese, a concepção do regulador integrativo universal começou no final do século passado com o trabalho desenvolvido por Mahmoud e Khalil (1996), os quais introduziram controle integral para garantir estabilidade assintótica em sistemas não lineares SISO, de fase mínima, transformáveis à forma normal e considerando o problema de rastreabilidade de uma referência constante. A palavra "Universal" do nome desta técnica de controle teve origem devido à família de plantas às quais esta técnica pode ser aplicada, sendo esta qualquer planta que compartilhe o mesmo grau relativo e mesmo sinal do ganho de alta frequência (KHALIL, 2000). Aproveitando a flexibilidade de Mahmoud e Khalil (1996) enquanto à escolha da técnica de controle a ser utilizada para estabilizar o ponto de equilíbrio do sistema, Khalil (2000) propôs o RIU para sistemas SISO, de fase mínima, mas usando observadores de alto ganho, além disso sugeriu um procedimento de sintonização dos parâmetros chave do controlador.

No trabalho atual utilizar-se-á a técnica de controle RIU proposta em Khalil (2000) e estendida em Seshagiri e Khalil (2005) para sistemas MIMO com o intuito de resolver o problema de rastreabilidade aplicado a uma aeronave cuja dinâmica é não linear, com grau relativo bem definido e capaz de ser transformado à forma normal via linearização de entrada-saída. A principal inovação deste método deve-se à melhora da resposta transiente do sistema causada pela ação integral, a qual é realizada com a introdução de um integrador o qual age condicionalmente, dentro da camada limite. Isto é, o RIU é um controlador por modos deslizantes contínuo (utilizando saturador) com um integrador condicional.

Inicialmente apresentar-se-ão os fundamentos matemáticos necessários para realizar a transformação do sistema à forma normal como a derivada de Lie e a construção de difeomorfismos locais. Seguidamente será apresentado o procedimento de projeto de lei de controle por RIU proposto por Seshagiri e Khalil (2005) e finalmente será fornecida uma descrição do processo adotado por Seshagiri e Khalil (2005) para a demonstração de estabilidade do conjunto (Aeronave + Lei de controle de voo, tipo RIU), procedimento baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov (método direto). É importante ressaltar que o procedimento para demonstração de estabilidade apresentado em Seshagiri e Khalil (2005) é genérico, portanto, a contribuição deste trabalho neste quesito é a demonstração de que a dinâmica de voo do conjunto previamente mencionado é estável, seguindo os critérios definidos em Seshagiri e Khalil (2005).

3.2.1 Fundamentos Matemáticos

Numerosas técnicas de controle como Inversão Dinâmica não Linear (NDI) ou linearização por realimentação da saída requerem o cálculo das derivadas da saída e de acordo com o nível de dependência das saídas escolhidas com as entradas de controle respectivas pode ser necessário obter as expressões das derivadas para ordens superiores. Uma ferramenta matemática que auxilia nesta tarefa é a derivada de Lie (a qual pode ser implementada numericamente) descrita brevemente a seguir.

Derivada de Lie

Considere-se o campo vetorial $f : R^n \rightarrow R^n$ dependente dos estados x , ou seja, $f(x)$ com derivadas parciais contínuas até qualquer ordem requerida. Se for dada uma função $h(x)$ também com derivadas parciais contínuas até qualquer ordem e denotando o gradiente desta função como ∇h , tem-se que:

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.20)$$

Segundo Slotine *et al.* (1991), este gradiente é representado como um vetor linha de elementos $(\nabla h)_j = \partial h / \partial x_j$. Similarmente, dado um campo vetorial $f(x)$, o jacobiano de f é denotado por ∇f .

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.21)$$

Representado pela matriz $(m \times n)$ de elementos $(\nabla f)_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$. Logo, define-se a

derivada de Lie como na Definição 3.1 (definição 6.1 em Slotine *et al.* (1991)):

Definição 3.1 *Seja uma função escalar $h : R^n \rightarrow R$ com derivadas parciais contínuas até qualquer ordem e, $f : R^n \rightarrow R^n$. A derivada de Lie com respeito a f é uma função escalar definida por $L_f h = \nabla h f$.*

Logo, a derivada de Lie $L_f h = \nabla h f$ não é mais do que a derivada direcional de h ao longo da direção do vetor f . Derivando repetidas vezes pode-se chegar na Equação 3.22.

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) f \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Analogamente, se existir outro campo vetorial g , a função escalar $L_g L_f h(x)$ será:

$$L_g L_f h = \nabla(L_f h) g \quad (3.23)$$

Difeomorfismo local

Um difeomorfismo pode ser visto como uma generalização do conceito conhecido como transformação de coordenadas e descrito na definição 3.2 (tal como em definição 6.3 de Slotine *et al.* (1991)):

Definição 3.2 *Seja a função $\phi : R^n \rightarrow R^n$ definida na região Ω , ϕ é chamado de difeomorfismo se é contínuo e com derivadas parciais também contínuas suaves e se a inversa ϕ^{-1} existe e também é smooth.*

Caso a região Ω seja o espaço dos estados completo R^n , $\phi(x)$ é chamado de difeomorfismo global os quais são pouco comuns. Já difeomorfismos locais encontram-se com maior frequência e estes são formados na vizinhança de um determinado ponto, como por exemplo, um ponto de equilíbrio. Dada uma função não linear $\phi(x)$ é possível verificar se trata-se de um difeomorfismo local usando o seguinte teorema (lemma 6.2 em Slotine *et al.* (1991)):

Teorema 3.3 *Seja $\phi(x)$ uma função suave definida na região Ω em R^n . Se a matriz jacobiana $\nabla \phi$ é não singular no ponto $x = x_0$ de Ω , logo $\phi(x)$ define um difeomorfismo local numa subregião de Ω .*

Nesta tese, o conceito de difeomorfismo local será usado para transformar a dinâmica do sistema a ser controlado à forma normal com o intuito de demonstrar que a transformação de coordenadas de fato existe e é verdadeira. Para fazer isto é suficiente mostrar que o jacobiano

$\nabla\phi$ é invertível, isto é, que o gradiente dos elementos de $\phi(x)$ são todos linearmente independentes, esta condição é análoga à condição de controlabilidade em sistemas lineares (SLOTINE *et al.*, 1991).

3.2.2 Projeto Analítico do Controlador RIU

O procedimento para construir um controlador baseado na lei de controle por modos deslizantes com integrador condicional, também conhecido como regulador integrativo universal (RIU) é descrito nesta seção de acordo com o trabalho proposto por Seshagiri e Khalil (2005). Esta abordagem é para sistemas MIMO de fase mínima e adaptável a sistemas SISO.

Definição do sistema a controlar

Considere-se um sistema não linear MIMO modelado como na Equação 3.24 a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_i(x, \theta) + \sum_{j=1}^m g_j(x, \theta)[u_j + \delta_j(x, \theta, w)] \\ y_i &= h_i(x, \theta) \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sendo $x \in R^n$ o vetor de estados do sistema e n a ordem do mesmo, $u \in R^m$ o vetor de controle sendo m o número de controles disponíveis, $y \in R^m$ o vetor de saída, θ é um vetor de parâmetros constantes desconhecidos pertencente ao conjunto $\Theta \subset R^p$, $w(t)$ é uma parte de um sinal exógeno contínuo que pertence ao conjunto compacto $W \subset R^q$, $f_i(\cdot)$ e $g_j(\cdot)$ são campos vetoriais suaves (*smooth*) dentro do conjunto $D = D_x \times \Theta$, sendo D_x um subconjunto aberto de R^n , $h_i(\cdot)$ são funções contínuas em D e as perturbações $\delta_j(\cdot)$ são funções contínuas em $D \times W$.

Transformação à forma normal

Desconsiderando as perturbações do sistema da Equação 3.24, assume-se que o sistema tem um vetor de graus relativos uniforme $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$ em D_x o qual é calculado através da Equação 3.25.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \quad \begin{aligned} 0 &\leq k \leq \rho_i - 2 \\ 0 &\leq i, j \leq m \end{aligned} \quad (3.25)$$

Uma vez calculado o grau relativo, constrói-se a matriz $A(x, \theta)$ tal como na Equação

$$A(x, \theta) = \{L_{g_j} L_f^{\rho_i - 1} h_i\} \quad (3.26)$$

$A(x, \theta)$ deve ser não singular $\forall x \in D_x$ e $\forall \theta \in \Theta$ e a distribuição $\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ deve ser involutiva (KHALIL, 2000). Ao entendimento do autor desta tese a matriz $A(x, \theta)$ deve ser quadrada pelo fato do número de controles e de saídas serem iguais. O autor interpreta as condições acima como a garantia de que o difeomorfismo construído seja invertível e como consequência verifica-se a independência linear dos vetores que compõem a $A(x, \theta)$ (equivalente à condição de controlabilidade em sistemas lineares), desta forma a transformação de coordenadas (Equação 3.27) é verdadeira (Vide definição 3.2). Também ao entendimento do autor, a não singularidade parcial de $A(x, \theta)$, ou seja, a delimitação do domínio no qual $A(x, \theta)$ é não singular, poderia ser usada como condição limitante para definir os conjuntos D_x e Θ . Sendo atendidas as Equações 3.25 e RIU2, pode ser calculado um difeomorfismo local, escrito na Equação 3.27.

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x, \theta) = \begin{bmatrix} T_1(x, \theta) \\ T_2(x, \theta) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \eta \in R^{n-\rho} \\ \xi \in R^{\rho} \\ \rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m \end{array} \quad (3.27)$$

Na Equação 3.27, η é a dinâmica interna do sistema a qual só existirá caso $\rho < n$, ξ será denominada neste trabalho como a dinâmica externa. Está última variável é produto da transformação de coordenadas e definida através de derivadas de Lie da saída, como mostrado a seguir na Equação 3.28.

$$\xi = \{\xi^i\} \quad \text{sendo} \quad \xi^i = L_f^{j-1} h_i \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq \rho_i \end{array} \quad (3.28)$$

A dinâmica interna deve ser escolhida de tal forma que atenda a seguinte condição:

$$L_{g_j} \eta_i = 0 \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq (n - \rho) \end{array} \quad (3.29)$$

Desta forma finaliza-se de construir o difeomorfismo local $T(x, \theta)$, portanto, as transformações de coordenadas definidas pelas Equações 3.28 e 3.29 permitem reescrever o sistema na

forma normal (Equação 3.30).

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \phi(\eta, \xi, \theta) \\ \dot{\xi}^i &= A_i \xi^i + B_i \left[b_i(\eta, \xi, \theta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\eta, \xi, \theta) [u_i + \delta_i(\eta, \xi, \theta, w)] \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sendo esta nova dinâmica determinada a partir da seguinte transformação (KHALIL, 2000):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1} & 1 \leq i \leq (\rho - 1) \\ \dot{\xi}_\rho = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} = L_f \eta_j & 1 \leq j \leq (n - \rho) \end{cases} \quad (3.31)$$

Sendo $b(\xi, \eta) = L_f^\rho h_i(x)$ e $a(\xi, \eta) = L_g L_f^{\rho-1} h_i(x) = A(x)$. O conjunto (A_i, B_i) na Equação 3.30 é a forma canônica controlável que representa a cadeia de integradores ρ_i , onde as matrizes A_i e B_i são definidas pelas Equações 22 e 23 do trabalho de Singh e Khalil (2005) e apresentadas na Equação 3.32 a seguir.

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{\rho_i \times \rho_i}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\rho_i \times 1} \quad (3.32)$$

Definição do problema de rastreabilidade

Para o problema de rastreabilidade ser totalmente formulado devem-se estabelecer algumas condições que representam as propriedades necessárias para ser possível o rastreamento do sinal de referência. Devem existir pontos de equilíbrio e a dinâmica interna do sistema deve ser exponencialmente estável, vide hipótese 4 em Seshagiri e Khalil (2005). Enquanto aos requisitos que devem ser atendidos pela referência temos:

i) As referências $r_i(t)$ e suas derivadas até a ρ_i -ésima derivada devem estar limitadas (não podem tender a infinito), e $r_i^{\rho_i}(t)$ contínua $\forall t \geq 0$.

ii) Quando o tempo tende ao infinito o limite da referência deve ser constante (convergir

para um valor estacionário) e o limite da ρ_i -ésima derivada da referência deve ser nulo, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) = r_{i,ss}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} r_i^{(\rho_i)}(t) = 0$.

Um caso especial que atende estas condições é uma referência constante (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). É requerido também que os sinais exógenos $w(t)$ se aproximem de uma constante w_{ss} . O atendimento do primeiro requisito manterá o erro limitado a um valor máximo e o cumprimento do segundo garantirá que o erro convirja assintoticamente para "zero". Uma vez conhecida a referência e suas derivadas é preciso definir um vetor $\bar{w}(t) = \{r_i^{(\rho_i)}\}$ e um vetor $v(t) = \{v^i\}$ que as contenha (as derivadas da referência) a fim de introduzi-las na dinâmica do erro a qual é descrita através da Definição 3.4. Para isto, define-se: $r_{ss} \in X \subset R^m$ e $d = (r_{ss}, \theta, w_{ss})$ pertencente ao conjunto $D_d = X \times \Theta \times W$.

Definição 3.4 Para cada $d \in D_d$ existe um único ponto de equilíbrio $\bar{x} = \bar{x}(d) \in D_x$ e um único controle $\bar{u} = \bar{u}(d)$ tal que $f(\bar{x}, \theta) + g(\bar{x}, \theta)[\bar{u} + \delta(\bar{x}, \theta, w_{ss})] = 0$ e $r_{ss} = h(\bar{x}, \theta)$.

Logo a dinâmica do erro (Equação 3.33) pode ser obtida fazendo a mudança de variáveis $z = \eta - \bar{\eta}$ e $e^i = \xi^i - \bar{\xi}^i - v^i$, sendo $\bar{\eta}$ e $\bar{\xi}^i$ os pontos de equilíbrio da dinâmica interna e externa respectivamente. Com $\bar{\xi}^i(d) = [r_{i,ss}, 0, \dots, 0]^T$ e como foi mencionado anteriormente $v^i(t) = [r_i - r_{i,ss}, r_i^{(1)}, \dots, r_i^{(\rho_i-1)}]$.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \phi(z, e + v, d) \\ \dot{e}^i &= A_i e^i + B_i \left[b_i(z, e + v, d) - r_i^{(\rho_i)} + \sum_{j=1}^m a_{ij}(z, e + v, d) \times (u_i + \delta_i(z, e + v, d, \bar{w})) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Com o intuito de limitar a análise no domínio (z, e) faz-se necessário definir os limites destas variáveis, isto será feito através da seguinte definição (SESHAGIRI E KHALIL, 2005):

Definição 3.5 Existem constantes positivas l_1 e l_2 independentes de d , de tal forma que $\forall d_d, w \in W, v \in \Lambda$ e $\bar{w} \in \Lambda_0, e \in E = \{|e| < l_1\}$ e $z \in Z = \{|z| < l_2\}$.

Estes limites serão utilizados com o intuito de demonstrar que a origem $z = 0$ da dinâmica zero do sistema $\dot{z} = \phi(z, 0, d)$, e conseqüentemente a dinâmica interna, são exponencialmente estáveis. Para isto acontecer, o teorema 3.6 deve ser atendido.

Teorema 3.6 Existe uma função própria de classe $C^1, V_z : Z \rightarrow R_+$ possivelmente dependente de d e funções classe Kappa independentes de d : $\lambda_i : [0, l_2) \rightarrow R_+ (i = 1, 2, 3)$ e $\gamma_i : [0, l_0 + l_1) \rightarrow R_+$ de tal forma que:

$$\begin{aligned} \lambda_1(|z|) \leq V_z(t, z, d) \leq \lambda_2(|z|) \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \phi(z, e + v, d) \leq \lambda_3(|z|) \quad \forall |z| \geq \gamma(|e + v|) \end{aligned} \quad (3.34)$$

E para todo $e \in E$, $z \in Z$, $d \in D_d$, conduzindo a $\gamma(l_0) < \lambda_2^{-1}(\lambda_1(l_2))$. Desta forma $z = 0$ é exponencialmente estável. Deve-se lembrar que V_z trata-se de uma candidata a função de Lyapunov (CFL) e que $|v| < l_0$. Uma função classe Kappa $\lambda : [0, a)$ de acordo com Khalil (2002a) (Definição 4.2) é aquela que: *i*) quando avaliada em zero é nula ($\lambda(0) = 0$) e *ii*) é estritamente crescente, ou seja, $\lambda(a) > 0, \forall a > 0$.

Projeto do controlador

Como foi mencionado anteriormente, o controlador RIU é uma melhora do controle por modos deslizantes usando integradores condicionais. Definir-se-á inicialmente a superfície deslizante sem o integrador (Equação 3.35), cabe salientar que a ordem é definida pelo grau relativo respectivo.

$$s_i = \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_j^i + e_{\rho_i}^i \quad (3.35)$$

Sendo que as constantes k_j^i são escolhidas de tal forma que o polinômio $\lambda^{\rho_i-1} + k_{\rho_i-1}^i \lambda^{\rho_i-2} + \dots + k_1^i$ seja *Hurwitz*, ou seja, que seus autovalores $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{\rho_i-1}$ possuam estritamente parte real negativa, de tal forma que quando as superfícies sejam restritas a $s_i = 0$, o erro e suas derivadas convirjam para zero (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Caso as derivadas do erro não estejam disponíveis, utilizar-se-ão observadores de alto ganho para estimá-las. Derivando a superfície deslizante da Equação 3.35 obtém-se:

$$\dot{s}_i = F_i(z, e + v, d, r_i^{\rho_i}) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\cdot) [u_j + \delta_j(\cdot)] \quad (3.36)$$

Sendo $F_i(\cdot) = b_i(\cdot) - r_i^{\rho_i} + \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_{j+1}^i$. A seguinte definição é necessária para levar em conta as incertezas no modelo.

Definição 3.7 *Define-se a matriz $A(\cdot) = a_{ij}$ cujos termos são usados nas Equações 3.25, 3.33 e 3.36 como $A(z, e + v, d) = \Gamma(z, e + v, d, r_i^{\rho_i}) \hat{A}(e + v)$ sendo \hat{A} uma matriz conhecida não*

singular e $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m]$, com $\gamma(\cdot) \geq \gamma_0 > 0$ e $1 \leq i \leq m$ para todo $e \in E$, $z \in Z$, $d \in D_d$ e alguma constante positiva γ_0 .

Aplicando-se o método de controle equivalente descrito na subseção de VSC, para controle por modos deslizantes ideal, o controle é da forma:

$$\begin{aligned} u &= \hat{A}^{-1}(e, v)[- \hat{F}(e, v, \bar{w}) + v] \\ v_i &= -\beta_i(e, v, \bar{w}) \text{sign}(s_i) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sendo $\hat{F}(\cdot)$ um valor nominal de $F(\cdot)$ o qual pode ser escolhido como $\hat{F}(\cdot) = 0$ e não estar restrito obrigatoriamente a $\hat{F}(\cdot) = \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_{j+1}^i - r_i^{\rho_i} + \hat{b}(\cdot)$. Sendo $\hat{b}(\cdot)$ um valor nominal de $b(\cdot)$. A determinação do ganho $\beta_i(e, v, \bar{w})$ do controlador será explicada posteriormente.

Faz-se a seguir a introdução do integrador condicional modificando a superfície deslizante ideal, obtendo-se:

$$s_i = k_0^i \sigma_i + \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_j^i + e_{\rho_i}^i \quad (3.38)$$

Sendo σ_i a saída do integrador condicional da Equação 3.39. Percebe-se que a partir deste passo faz-se uma **aproximação contínua** do controlador por modos deslizantes usando-se a função saturação $\text{sat}(\cdot)$:

$$\dot{\sigma}_i = -k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sat}\left(\frac{s_i}{\mu_i}\right), \quad k_0^i > 0 \quad (3.39)$$

Sendo μ_i a espessura da camada limite a qual deve ser o suficientemente pequena para atingir o desempenho do SMC ideal (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Logo, o controle para a aproximação contínua por modos deslizantes será:

$$\begin{aligned} u &= \hat{A}^{-1}(e, v)[- \hat{F}(e, v, \bar{w}) + v] \\ v_i &= -\beta_i(e, v, \bar{w}) \text{sat}(s_i/\mu_i) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dentro da camada limite ($|s_i| \leq \mu_i$), o integrador condicional transforma-se em $\dot{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_{j+1}^i + e_{\rho_i}^i = e_a^i$, sendo e_a^i denominado em Seshagiri e Khalil (2005) como "erro aumentado", definido como a combinação linear do erro e suas derivadas até a ordem $(\rho_i - 1)$. Já fora da camada limite ($|s_i| > \mu_i$), o integrador se reduz a $\dot{\sigma}_i = -k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sign}(s_i/\mu_i)$ o

que indica que a função $sign(s_i/\mu_i)$ age unicamente nesta região. Derivando a superfície deslizando, desta vez considerando o integrador condicional, usando a Equação 3.40 e a definição 3.7, obtém-se:

$$\dot{s}_i = \Delta_i(z, e, \bar{w}, \sigma, d, \tilde{w}) - \gamma_i(z, e + v, \bar{w})\beta_i(e, v, \bar{w})\text{sat}(s_i/\mu_i) \quad (3.41)$$

Sendo $\{\Delta_i(\cdot)\} = F(\cdot) - \Gamma(\cdot)\hat{F}(\cdot) + A(\cdot)\delta(\cdot) + \{k_0^i [-k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sat}(s_i/\mu_i)]\}$. Logo, é possível determinar o valor de $\beta_i(\cdot)$ de tal forma que $\dot{s}_i \leq 0$, posteriormente na análise de estabilidade demonstrar-se-á que tal condição é necessária para $s\dot{s}_i \leq 0$. Conseqüentemente, a estabilidade da dinâmica da superfície deslizando será assintoticamente estável na origem $s_i = 0$. A determinação do ganho $\beta_i(\cdot)$ pode ser feita através da definição 3.8 a seguir (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

Definição 3.8 *Considere-se a expressão:*

$$\max \left| \frac{\Delta_i(\cdot)}{\gamma_i(\cdot)} \right| \leq \nu(e, v, \bar{w}), \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.42)$$

Para algumas funções conhecidas $\nu(\cdot)$, maximiza-se a expressão 3.42 ao longo de todo o conjunto compacto $(z, e, \sigma) \in \psi_c$, com ψ_c definido pelos limites de funções de Lyapunov, $d \in D_d$, $v \in \Lambda$, $\bar{w} \in \Lambda_0$ e $w \in W$. As funções $\beta_i(\cdot)$ são escolhidas como $\beta_i(\cdot) = \nu(\cdot) + q_i$ com $q_i > 0$.

A partir das Equações 3.41 e 3.42 é possível concluir que dentro de ψ_c , e fora da camada limite ($|s_i| \geq \mu_i$) a seguinte afirmação é válida: $s\dot{s}_i \leq -\gamma_0 q_i |s_i|$. Ao entendimento do autor desta tese, a condição $q_i > 0$ garantirá que se a função de Lyapunov $V_s = (1/2)s_i^2$ for escolhida, logo $\dot{V}_s = s\dot{s}_i \leq 0$ será obrigatoriamente negativa definida e como consequência a dinâmica da superfície deslizando será assintoticamente estável. Cabe salientar que devido ao amplo conhecimento das equações da dinâmica do avião que é requerido e à dificuldade de chegar na Equação 3.42 alguns autores como Sousa (2013) e Campos *et al.* (2017) determinaram os ganhos $\beta_i(\cdot)$ mediante um processo de tentativa e erro. Nesta tese, estes ganhos $\beta_i(\cdot)$ serão determinados analiticamente tal como descrito na definição 3.8 sendo está uma das principais contribuições desta tese.

Projeto de realimentação da saída

De acordo com Seshagiri e Khalil (2005) caso as derivadas do erro não estejam disponíveis, é necessária a utilização de observadores de alto ganho para estimá-las, estes observadores

com dinâmica linear são modelados como mostrado na Equação 3.43.

$$\begin{aligned}\hat{e}_j^i &= \hat{e}_{j+1}^i + \alpha_j^i (e_1^i - \hat{e}_1^i) / (\epsilon_i)^j & 1 \leq j \leq \rho_i - 1 \\ \hat{e}_{\rho_i}^i &= \alpha_{\rho_i}^i (e_1^i - \hat{e}_1^i) / (\epsilon_i)^{\rho_i}\end{aligned}\quad (3.43)$$

Sendo $\epsilon_i > 0$ um parâmetro a ser sintonizado, e as constantes positivas α_j^i são escolhidas de tal forma que as raízes do polinômio $\lambda^{\rho_i} + \alpha_1^i \lambda^{\rho_i-1} + \dots + \alpha_{\rho_i-1}^i \lambda + \alpha_{\rho_i}^i = 0$ possuam parte real negativa. \hat{e}_j^i representa uma estimação de e_j^i . O uso do observador modifica o erro ($e_j^i \rightarrow \hat{e}_j^i$) e a superfície deslizante ($s_i \rightarrow \hat{s}_i$), como consequência o controlador inteiro RIU, fica da forma (SESHAGIRI E KHALIL, 2005):

$$\hat{s}_i = k_0^i \sigma_i + \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i \hat{e}_j^i + \hat{e}_{\rho_i}^i \quad (3.44)$$

$$\dot{\sigma}_i = -k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sat}(\hat{s}_i / \mu_i) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}u &= S_i \text{sat}(Y_i(\hat{e}, v, \bar{w}, \sigma)) / S_i \\ v_i &= -\beta_i(\hat{e}, v, \bar{w}) \text{sat}(\hat{s}_i / \mu_i)\end{aligned}\quad (3.46)$$

As Equações 3.44, 3.45 e 3.46 representam a superfície deslizante, o integrador condicional e o controle do sistema respetivamente.

Sendo $Y_i(\hat{e}, v, \bar{w}, \sigma) = \hat{A}^{-1}(\hat{e}, v)[- \hat{F}(\hat{e}, v, \bar{w}) + v]$, o ganho $\beta_i(\hat{e}, v, \bar{w}) = v(\hat{e}, v, \bar{w}) + q_i$ e S_i o máximo valor de $|Y(\hat{e}, v, \bar{w}, \sigma)|$, tal maximização é feita no conjunto $v \in \Lambda$, $\bar{w} \in \Lambda_0$, $\sigma_i \leq \mu_i / k_0^i$ e $e \in \Lambda_{ee}$ onde $\Lambda_e \subset \Lambda_{ee}$. Com Λ_e como um conjunto compacto de R^p .

Ainda de acordo com Seshagiri e Khalil (2005), o controlador só estará completo quando os parâmetros μ_i e ϵ_i forem sintonizados. Recomenda-se inicialmente reduzir a camada limite gradativamente até que a resposta transiente sob realimentação parcial dos estados esteja o suficientemente próxima da resposta do controle por modos deslizantes ideal e finalmente reduzir ϵ_i . Em Khalil (2008) comprova-se e posteriormente recomenda-se não reduzir ϵ_i mais do que $c_a \sqrt{\mu}$ (c_a é uma constante positiva que limita o erro de rastreamento) porque produz um acréscimo no erro estacionário (entre o erro real e o estimado) além de prejudicar ainda mais o *peaking phenomenon* caracterizado por um comportamento impulsivo na resposta transiente do observador. Detalhes sobre o cálculo de c_a podem ser encontrados em Khalil (2008).

3.2.3 Análise de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada

É conveniente reconhecer que a realimentação de estados usando observadores de alto ganho cria uma dinâmica rápida e uma dinâmica lenta as quais podem ser representadas na forma singular perturbada (SINGH E KHALIL, 2005). A análise de estabilidade é feita com o sistema nesta forma (LEE *et al.*, 2015). Procedese a escrever o sistema em malha fechada na forma singular perturbada fazendo a mudança de variáveis proposta em Khalil (2002b) $\zeta = [e_1, e_2, \dots, e_{\rho_i-1}]$ onde $\zeta^i \in R^{\rho_i-1}$, logo, a forma perturbada é escrita como na Equação 3.47 (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_i &= -k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sat}[(\hat{s}_i - N_i(\epsilon_i)\phi^i)/\mu_i] \\
 \dot{\zeta} &= M_i \zeta^i + C_i (s_i - k_0^i \sigma_i) \\
 \dot{s}_i &= \Delta_i(z, e, \bar{w}, d, \tilde{w}) - \gamma_i(z, e + v, d) \beta_i(e, v, \bar{w}) \text{sat}(s_i/\mu_i) + \Delta_i^*(\cdot) \\
 \dot{z} &= \phi(z, e + v, d) \\
 \epsilon \dot{\phi}^i &= L_i \phi^i + \epsilon_i B_i \left[b_i(\cdot) - r_i^{(\rho_i)} + \sum_{j=2}^m a_{ij}(\cdot) (u_j + \delta_j(\cdot)) \right]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Sendo as matrizes M_i , C_i , L_i e $N_i(\epsilon_i)$ definidas como:

$$\begin{aligned}
 M_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -k_1^i & -k_2^i & \dots & \dots & -k_{\rho_i-1}^i \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 L_i &= \begin{bmatrix} -\alpha_1^i & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_{\rho_i}^i & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, N_i^T(\epsilon_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_i^2 \epsilon_i^{\rho_i-2} \\ \vdots \\ 0 \\ k_i^{\rho_i-1} \epsilon_i \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Definiu-se o erro estimado dimensionado como $\phi^i = \{\phi_j^i\}$ o qual pode ser escrito como

$\phi_j^i = (e_j^i - \hat{e}_j^i)/(\epsilon_i)^{\rho_i - j}$, a expressão $\Delta_i^*(\cdot)$ é definida como:

$$\begin{aligned} \Delta_i^*(\cdot) &= k_0^i \mu_i [\text{sat}(\hat{s}_i/\mu_i) - \text{sat}(s_i/\mu_i)] \\ &+ \sum_{j=1}^m a_{ij}(z, e + v, d) \times [S_j \text{sat}(Y_i(\hat{e}, v, \bar{w}, \sigma)/S_j) - Y_j(\hat{e}, v, \bar{w}, \sigma)] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Definição das candidatas a funções de Lyapunov

Com o intuito de demonstrar a estabilidade assintótica do sistema da Equação 3.47 (considerando a dinâmica de ϕ unicamente se o observador for implementado), definem-se candidatas a função de Lyapunov apropriadas para cada caso. Nesta tese serão utilizadas as mesmas funções quadráticas propostas por Seshagiri e Khalil (2005), são elas:

$$V_i^s(s_i) = \frac{1}{2}s_i^2, \quad V_i^\sigma(\sigma_i) = \frac{1}{2}\sigma_i^2, \quad V_i^\zeta(\zeta_i) = \zeta_i^T Q_i \zeta_i, \quad V_i^\phi(\phi_i) = \phi_i^T P_i \phi_i \quad (3.50)$$

Para o caso da dinâmica do erro (ζ) e do erro estimado (ϕ), as matrizes simétricas Q_i e P_i não nulas devem satisfazer as equações de Lyapunov $Q_i M_i + M_i^T Q_i = -I$ e $P_i L_i + L_i^T P_i = -I$ respetivamente. A origem destas funções vem do método generalizado de Krassovskii. O uso da função identidade ao entendimento do autor desta tese é feito com o objetivo de simplificar o procedimento, qualquer matriz simétrica positiva definida irá funcionar (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Para completar a análise de estabilidade do sistema inteiro deve-se considerar a estabilidade da dinâmica interna cuja função de Lyapunov V_z deve satisfazer a Equação 3.34.

Definição do conjunto compacto $\Psi_c \times \Sigma_\epsilon$

O conjunto compacto $\Psi_c \times \Sigma_\epsilon$ serve como uma estimativa do domínio de atração do sistema o qual é definido como na Equação 3.51 (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$\begin{aligned} \Psi_c &= \Omega_c \times \Omega_{cz} \\ \Omega_c &= \prod_{i=1}^m \Omega_{ci}, \quad \Sigma_\epsilon = \prod_{i=1}^m \Sigma_{\epsilon_i} \\ \Omega_{ci} &= \{V_i(\zeta) \leq (c_i + \mu_i)^2 \chi_i, V_i(s) \leq (1/2)c_i^2, V_i(\sigma) \leq (1/2)(\mu_i/k_0^i)^2\} \\ \Omega_{cz} &= \{V_z(t, z, d) \leq \lambda_4(l_0 + l_3 |c|)\} \\ \Sigma_{\epsilon_i} &= \{V_i(\phi) \leq \epsilon_i^2 v_i\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sendo $c_i > \mu_i$, a função classe Kappa $\lambda_4 = \lambda_2 \circ \gamma$, $|e| \leq l_3 |c| < \min\{l_1, \lambda_4^{-1}(\lambda_1(l_2)) - l_0\}$ e constantes positivas χ_i , l_3 e v_i independentes de μ_i .

Demonstração de estabilidade

Procede-se a mostrar que o conjunto compacto definido pela Equação 3.51 é invariante positivo, isto é, que torna a primeira derivada das candidatas a funções de Lyapunov da Equação 3.50 negativas definidas, desta forma este conjunto pode ser considerado como uma estimativa do domínio de atração do sistema (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Nas Equações 3.52 até 3.55 apresenta-se a relação entre as derivadas das funções de Lyapunov e os valores máximos permitidos de algumas das funções apresentadas ao longo desta seção. A estabilidade do sistema (aeronave+controlador) será demonstrada sempre que o lado direito destas equações seja tal que todas as derivadas sejam negativas definidas.

$$\dot{V}_i^\zeta \leq -|\zeta^i|^2 + 2|\zeta^i| |Q_i C_i| (|s_i| + k_0^i |\sigma_i|) \quad (3.52)$$

$$\dot{V}_i^\sigma \leq -k_0^i |\sigma_i|^2 + \mu_i |\sigma_i| \quad (3.53)$$

$$\dot{V}_i^s \leq -|s_i| [\gamma_i(\cdot)\beta_i(\cdot) - |\Delta_i(\cdot)| - |\Delta_i^*(\cdot)|] \quad (3.54)$$

$$\dot{V}_i^\phi \leq -\frac{|\phi^i|^2}{\epsilon_i} + 2|\phi^i| |M_i B_i| \Xi_i \quad (3.55)$$

No trabalho de Seshagiri e Khalil (2005), já foi demonstrado que com a escolha do conjunto compacto da Equação 3.51 as Equações 3.52 até 3.55 são negativas definidas sempre que: *i*) $\chi_i = 4|Q_i C_i|^2 \lambda_{max}(Q_i)$ para a Equação 3.52, *ii*) $|\sigma_i| \leq \mu_i/k_0^i$ para a Equação 3.53, *iii*) $|\Delta_i^*(\cdot)| \leq \gamma_0 q_i$ e a Equação 3.42 seja atendida, isto para a Equação 3.54 e *iv*) $\Xi_i = \max |b_i(\cdot) - r_i^{\rho_i} + \sum_{j=1}^m a_{ij}[u_j + \delta_j(\cdot)]|$ para a Equação 3.55.

Nesta tese serão adotadas estas relações a fim de demonstrar a estabilidade do sistema, sendo o "sistema" definido como o problema de rastreabilidade a ser resolvido e, conseqüentemente estimar o domínio de atração.

Controlador RIU simplificado

Duas versões do controlador por regulador integrativo universal foram apresentadas ao longo desta subseção. Na Equação 3.40 este foi definido através da aplicação do controle equivalente, usando os modos deslizantes contínuos com a função saturação e uma versão modificada pela adição dos observadores de alto ganho descrita pela Equação 3.46. Cabe salientar que em Seshagiri e Khalil (2005) a opção de anular a função $\hat{F}(\cdot)$ do controle equivalente é claramente exposta, é importante também esclarecer aqui, que a determinação do ganho do controlador β_i através da maximização da Equação 3.42 é obrigatória unicamente se é o ganho mínimo o desejado, porém, segundo os trabalhos de Seshagiri e Khalil (2001), Khalil (2002a) e Vo e Seshagiri (2008) este pode ser escolhido suficientemente alto de tal forma que possa contornar todas as imperfeições no modelo contidas em \hat{s} , ou no caso de controle de aeronaves, poderia ser definido como a máxima deflexão permitida da superfície de controle, tal como feito em Seshagiri e Promtun (2008).

Esta flexibilidade na escolha de $\hat{F}(\cdot)$ e β_i , conduz à simplificação do controlador RIU para sistemas SISO (SESHAGIRI E KHALIL, 2005), sendo finalmente como na Equação 3.56.

$$u = -\beta_i \text{sat} \left(\frac{\hat{s}_i}{\mu_i} \right) = -\beta_i \text{sat} \left(\frac{k_0 \sigma_i + k_1 \hat{e}_1 + k_2 \hat{e}_2 + \dots + \hat{e}_\rho}{\mu_i} \right) \quad (3.56)$$

O controlador nesta forma simplificada será o utilizado nas simulações numéricas que serão mostradas na seção de resultados.

Cabe salientar que o projeto analítico do RIU descrito nesta seção foi aplicado (previamente para o exame de qualificação) ao problema de estabilização do pêndulo invertido, clássico exemplo de aplicação para testar o desempenho de leis de controle tanto lineares quanto não lineares, especialmente, quando o objetivo de controle é a estabilização do pêndulo na vizinhança do seu ponto de equilíbrio instável. Pelo fato do sistema do pêndulo invertido não ser de fase mínima (demonstrado no próprio exemplo), devido à dinâmica interna ser instável, o procedimento descrito nesta seção não aplica totalmente, no entanto, usando uma estratégia simples para estabilizá-la foi possível completar o procedimento aqui descrito. Este exemplo de aplicação encontra-se disponível no Apêndice B desta tese e foi publicado num congresso internacional como Díaz-Méndez *et al.* (2017).

3.3 Observações sobre o Capítulo

Neste capítulo apresentaram-se as principais características do controle por modos deslizantes (SMC), técnica base para implementação da técnica RIU. SMC é uma técnica robusta

capaz de lidar com incertezas e possui uma estrutura simples representada por uma superfície de chaveamento a qual altera constantemente a saída de controle. Conceitos como conjunto invariante e condição de deslizamento (ou condição de convergência) foram apresentados assim como também o método de controle equivalente, essencial para entender a estrutura do controlador RIU.

A partir da introdução do conceito de *chattering* inerente em SMC, foi possível justificar a existência de um integrador condicional no RIU e todo o processo para determinação do controlador RIU foi descrito. Dentre os principais passos para a obtenção dos parâmetros do RIU discutiram-se: *i*) a construção de um difeomorfismo local, essencial para transformar o sistema à forma normal e separar o problema de controle em dois (dinâmica externa e interna), *ii*) a análise de estabilidade da dinâmica interna, *iii*) o projeto do controlador para regular a dinâmica externa e *iv*) a demonstração de estabilidade do conjunto (planta+controlador).

Como informação adicional, deve-se ressaltar que apesar da aplicação do RIU não ser uma novidade no controle de voo, a maneira como os autores (por exemplo: Seshagiri e Promtun (2008) e Vo e Seshagiri (2008)) abordaram o problema de rastreabilidade não apresenta um projeto analítico completo do RIU como o descrito nesta seção. Nesses trabalhos, as Equações da aeronave foram linearizadas e a escolha dos parâmetros do controlador simplificada. Logo, uma das maiores inovações do presente trabalho é a apresentação detalhada deste processo não só no controle de aeronaves mas também de outros sistemas não lineares, tal como o quadricóptero e o pêndulo invertido não linear. Até o momento, não encontraram-se registros de controle de quadricópteros usando o RIU, o que representa mais uma inovação desta tese.

Capítulo 4

Modelo Não Linear da Aeronave

Neste capítulo, apresenta-se brevemente o modelo da aeronave não linear, da aeronave Mirage III, adotado nesta tese, o qual servirá de planta para a aplicação da técnica de controle Regulador Integrativo Universal (RIU). A transformação do sistema à forma *affine in the input*, a qual é necessária para aplicação do projeto do RIU não é feita neste capítulo, o Apêndice A tem esta função.

As equações que descrevem o movimento da aeronave têm como base a segunda lei de Newton cujas relações são (SOUSA, 2005): *i*) a taxa de variação do momento linear da aeronave é igual à soma das forças atuantes, sendo estas, as forças inerciais, propulsivas e aerodinâmicas e *ii*) a taxa de variação do momento angular da aeronave é igual aos momentos atuantes em torno do centro de gravidade (CG) da aeronave, sendo estes, os produzidos pelas forças aerodinâmicas e propulsivas.

O modelo estudado aqui trata-se de uma aeronave tridimensional com seis graus de liberdade e cujas equações de movimento são formuladas utilizando como referência o sistema de eixos do corpo e assumindo terra plana (GIVISIÉZ, 2009), (SOUSA, 2005). As equações de movimento genéricas são deduzidas e o modelo resultante é desacoplado de tal forma que as dinâmicas longitudinal e lateral sejam estudadas separadamente. Segundo Fossen (2011) a hipótese chave para este desacoplamento ser válido deve-se ao fato da fuselagem ser esbelta (comprimento muito maior do que a largura e altura da aeronave) e pela velocidade longitudinal do avião ser maior do que a vertical e lateral.

Considerando o mencionado previamente, faz-se necessário definir as principais hipóteses assumidas na modelagem, as quais são: *i*) desacoplamento das dinâmicas longitudinal e látero-direcional, *ii*) assume-se terra plana, *iii*) trata-se de uma aeronave rígida, isto é, não são consideradas deformações estruturais, *iv*) a massa da aeronave é invariante no tempo devido aos curtos tempos de simulação e ν coeficientes e derivativas de estabilidade são constantes.

Como previamente mencionado, neste trabalho os parâmetros inseridos no modelo de aeronave corresponde a um Mirage III, idêntico ao utilizado em Sousa (2005) e cujo modelo

genérico assemelha-se à aeronave comercial Airbus A-300 estudada em Givisiéz (2009) e Kamei (2011). Abordagens para a obtenção de modelos similares também foram implementadas em Tanaka *et al.* (2014), Zhubing *et al.* (2012) e Khatri *et al.* (2012). O Mirage III tem sido o avião caça francês com maior sucesso após a segunda guerra mundial que ainda permanece em serviço, possui uma grande asa delta e entradas de ar circulares nos motores com cones de choque e um compartimento retangular na parte traseira capaz de transportar tanto um tanque de combustível quanto um motor a jato (DASSAULT AVIATION, C). A Figura 4.1 ilustra as três vistas da aeronave em estudo e suas principais dimensões:

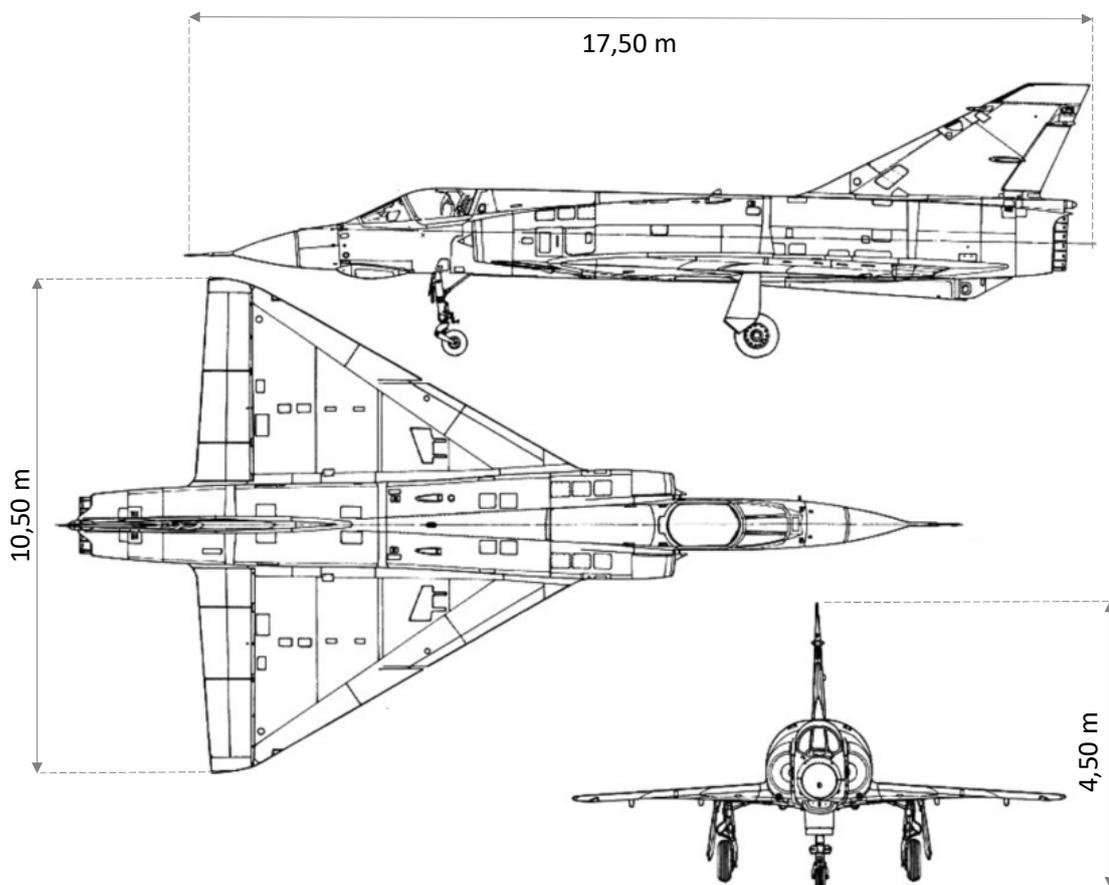


Figura 4.1: Esquemático do Mirage III.
Adaptado de Dassault Aviation (a)

4.1 Equações de Movimento

Um conjunto de equações diferenciais não lineares representam os movimentos da aeronave em estudo. Os movimentos a serem considerados neste trabalho são o movimento longitudinal, o movimento lateral e direcional sendo estes últimos movimentos mutuamente acoplados. O movimento longitudinal é caracterizado como um voo com as asas niveladas onde o vetor velocidade permanece contido no plano de simetria da aeronave, os graus de liberdade

considerados são três: translação nos eixos x e z e rotação ao redor do eixo y , (vide Figura 4.2). Já os movimentos látero-direcionais compreendem translação ao longo do eixo y e rotações ao redor dos eixos x e z .

Para descrever a orientação da aeronave com respeito ao sistema de eixos do corpo fez-se uma abordagem explicativa baseada em rotações similar à adotada por Roskam (1998). Referindo-nos à Figura 4.2, o sistema de eixos do corpo (setas pretas) composto pelos eixos x_b , y_b e z_b inicialmente encontra-se alinhado com os eixos longitudinal, lateral e direcional respectivamente, *i*) rotacionando-o ao redor do eixo z_b (setas vermelhas) aparece no plano xy o ângulo de proa (ψ), *ii*) rotacionando-o ao redor do eixo y_b (setas verdes) aparece no plano xz o ângulo de atitude (θ) e *iii*) rotacionando-o ao redor do eixo x_b (setas azuis) aparece no plano yz o ângulo de rolamento (ϕ). As velocidades angulares ao redor do sistemas de eixos do corpo são p , q e r para os eixos x_b , y_b e z_b respectivamente. Caso a velocidade do vento relativo (V) não esteja alinhada com o eixo longitudinal do avião, aparecerão os ângulos aerodinâmicos α e β sendo o primeiro o ângulo de ataque e o segundo o ângulo de derrapagem do avião.

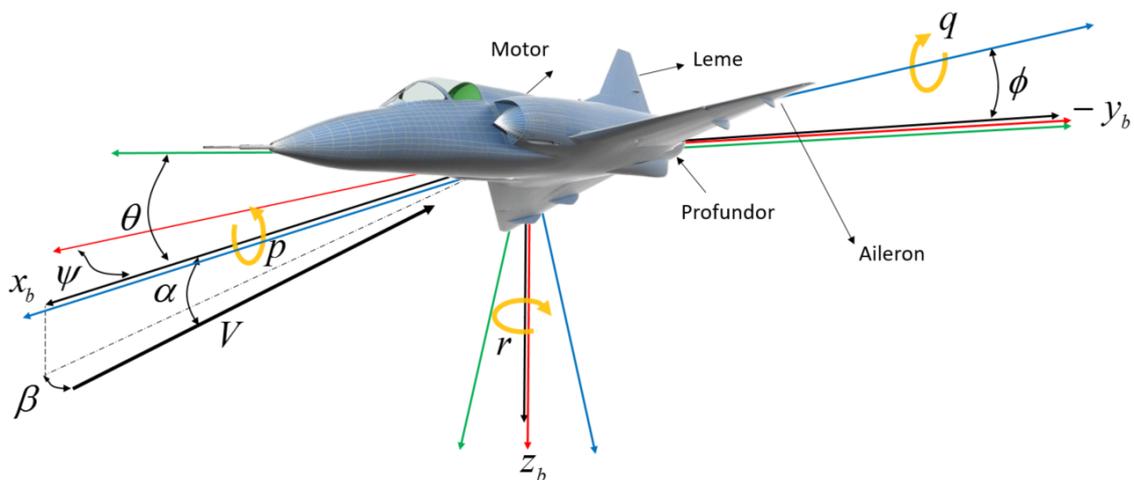


Figura 4.2: Orientação da Aeronave.

De maneira genérica, as equações de movimento de uma aeronave rígida consistem de um conjunto de equações obtidas através da aplicação das leis de Newton, das equações de corpo rígido de Euler e de um conjunto de relações cinemáticas relacionando as diferentes coordenadas dos sistemas de referência (VEPA, 2014). Segue nos próximos itens uma breve discussão sobre a derivação das equações de movimento usando o sistemas de eixos do corpo (fixado à aeronave), de tal forma que se totalizem as doze equações que descrevem a dinâmica básica da aeronave. A maior parte da apresentação das equações é baseada nos trabalhos de Givisiéz (2009) e Sousa (2005).

4.1.1 Equilíbrio de Forças

De acordo com a mecânica Newtoniana, faz-se o somatório das forças atuantes na aeronave. A totalidade destas forças é equivalente à taxa de variação do momento linear (SOUSA, 2005).

$$\{\vec{F}\}_B = m\{\dot{\vec{V}}_B\}_B + m\{\Omega_B\}_B\{\vec{V}_B\}_B \quad (4.1)$$

Sendo $\{\vec{F}\}_B$ o somatório das forças externas que agem sobre a aeronave (inerciais, aerodinâmicas e propulsivas), $\{\vec{V}_B\}_B = \{u, v, w\}$ é o vetor de velocidades translacionais do avião no sistema de eixos do corpo, m é a massa total da aeronave e $\{\Omega_B\}_B$ é o tensor de velocidades angulares descrito como:

$$\{\Omega_B\}_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

As forças externas escritas no sistema de eixos do corpo são definidas pela seguinte equação:

$$\{\vec{F}\}_B = \{\vec{F}_A\}_B + \{\vec{W}_I\}_B + \{\vec{T}\}_B \quad (4.3)$$

Sendo as forças aerodinâmicas $\{\vec{F}_A\}_B = \{F_x, F_y, F_z\}$ e as forças propulsivas $\{\vec{T}\}_B = \{T_x, T_y, T_z\} = \{T \cos \alpha_f, 0, T \sin \alpha_f\}$ e α_f o ângulo de montagem do motor em relação ao eixo longitudinal da aeronave, no caso do Mirage III assumir-se-á que $\alpha_f = 0$. Já as forças inerciais \vec{W}_I , precisam ser transformadas ao sistema de eixos do corpo devido a estarem ligadas ao sistema de eixos inercial (preso à terra), por meio de $\{\vec{W}_I\}_B = T_{B,I} \vec{W}_I T_{I,B}$ a matriz de transformação entre estes dois sistemas é dada pela Equação 4.4.

$$T_{I,B} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \psi \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Finalmente substituindo a Equação 4.4 na Equação 4.1 e isolando as componentes da

velocidade total (V) tem-se como resultado:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= m^{-1}(F_x + T \cos \alpha_f) - g \sin \phi + rv - qw \\ \dot{v} &= m^{-1}F_y + g \sin \phi \cos \theta + pw - ru \\ \dot{w} &= m^{-1}(F_z + T \sin \alpha_f) + g \cos \phi \cos \theta + qu - pv\end{aligned}\quad (4.5)$$

Continuando com as dinâmicas das variáveis aerodinâmicas: velocidade total, ângulo de derrapagem e ângulo de ataque, estas podem ser obtidas usando as relações seguintes: $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $\beta = \arcsen(v/V)$ e $\alpha = \arctan(w/u)$ (STEVENS *et al.*, 2016). Logo:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{V}(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) \\ \dot{\beta} &= \frac{\left(\frac{\dot{v}}{V} - \frac{v\dot{V}}{V^2}\right)}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} \\ \dot{\alpha} &= \frac{\left(\frac{\dot{w}}{u} - \frac{w\dot{u}}{u^2}\right)}{\sqrt{1 + (w/u)^2}}\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.1.2 Equilíbrio de Momentos

Um procedimento similar ao somatório de forças da seção anterior é feito aqui para o balanço de momentos, sendo a totalidade dos momentos externos igual à taxa de variação do momento angular, tal como definido na Equação 4.7 (SOUSA, 2005).

$$\{\vec{M}\}_B = I_B \{\dot{\vec{\omega}}_B\}_B + \{\Omega_B\}_B I_B \{\vec{\omega}_B\}_B \quad (4.7)$$

Sendo $\{\vec{M}\}_B = \{L, M, N\}$ o somatório de momentos externos, $\{\vec{\omega}_b\}_B = \{p, q, r\}$ o vetor de velocidades angulares e I_B o tensor de inercia no sistema de coordenadas do corpo. De acordo com Givisiéz (2009), é aqui que este sistema de referência se torna útil devido a que o tensor de inercia definido pela Equação 4.8, é constante no tempo sob esta formulação.

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Devido ao campo gravitacional ser uniforme e assumindo que a planta propulsiva não

gera momento algum, unicamente serão considerados momentos aerodinâmicos, logo, isolando $\{\vec{\omega}_B\}_B$ da Equação 4.7 obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= (c_1 r + c_2 p)q + c_3 L + c_4 N \\ \dot{q} &= c_5 p r - c_6 (p^2 - r^2) + c_7 M \\ \dot{r} &= (c_8 p - c_2 r)q + c_4 L + c_9 N\end{aligned}\quad (4.9)$$

Sendo as constantes c_i ($1 \leq i \leq 9$) como definidas em Sousa (2005) e apresentadas na Equação 4.10.

$$\begin{aligned}\Gamma &= I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2, \quad \Gamma c_1 = (I_{yy} - I_{zz}) - I_{xz}^2 \\ \Gamma c_2 &= (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}, \quad \Gamma c_3 = I_{zz} \\ \Gamma c_4 &= I_{xz}, \quad c_5 = (I_{zz} - I_{xx})/I_{yy} \\ c_6 &= I_{xz}/I_{yy}, \quad c_7 = 1/I_{yy} \\ \Gamma c_8 &= I_{xx}(I_{xx} - I_{yy}) + I_{xz}^2, \quad \Gamma c_9 = I_{xx}\end{aligned}\quad (4.10)$$

4.1.3 Cinemática do Avião

A cinemática da aeronave determina-se através da orientação da aeronave em relação ao sistema de coordenadas da terra, isto é possível conhecendo as componentes da velocidade no referencial do corpo e relacionando-as com as velocidades no referencial da terra (vide Equação 4.11). Para isto, sucessivas transformações ortogonais são necessárias as quais requerem do conhecimento dos ângulos de Euler $\{\theta, \phi, \psi\}$ definidos por meio de rotações no início desta seção, um estudo detalhado deste processo pode ser encontrado em Roskam (1998) e Etkin e Reid (1996).

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}\quad (4.11)$$

Ne Equação 4.11, $\{U, V, W\}^T$ são as velocidades lineares no referencial da terra e $\{u, v, w\}^T$ as velocidades lineares no referencial do corpo. Utilizando o fato de $\vec{\omega} = ip + jq + kr =$

$\dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \operatorname{sen} \phi \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Invertendo as Equações 4.12, obtém-se a cinemática do avião apresentada na Equação 4.13 a seguir.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \operatorname{sen} \phi \\ \dot{\psi} &= (q \operatorname{sen} \phi + r \cos \phi) \sec \theta \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.4 Equações de Navegação

As equações de navegação já foram mostradas na Equação 4.11, cabe salientar que a única dinâmica de navegação considerada neste trabalho será a dinâmica da altitude da aeronave a qual é obtida pela relação $\dot{h} = \dot{z}$, o sinal negativo deve-se ao fato do eixo zb ser considerado positivo para abaixo. Logo as equações de navegação serão como na Equação 4.14

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \phi \cos \psi + v (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \phi \operatorname{sen} \psi) + w (\cos \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi) \\ \dot{y} &= u \cos \theta \operatorname{sen} \phi + v (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi) + w (\cos \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \phi \cos \psi) \\ \dot{z} &= u \operatorname{sen} \theta - v \operatorname{sen} \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2 Modelagem de Forças e Momentos Aerodinâmicos

As forças consideradas serão unicamente as aerodinâmicas devido ao fato das propulsivas e inerciais já terem sido incluídas na dinâmica descrita na Equação 4.5. A modelagem de forças e momentos é feita dividindo o estudo em duas etapas, uma primeira etapa permite obter as grandezas longitudinais sob a condição de voo estacionário reto e nivelado onde serão obtidas as grandezas $\{F_x, M, F_z\}$ (sendo M o momento aerodinâmico ao redor do eixo yb). A segunda etapa permite obter as forças e momentos látero-direcionais $\{F_y, L, N\}$ sendo L e N os momentos aerodinâmicos ao redor dos eixos xb e zb respectivamente, isto sob a condição de voo estacionário com velocidade lateral não nula. Desta forma conseguem-se completar as Equações 4.5 e 4.9.

4.2.1 Forças e momentos aerodinâmicos longitudinais

Denominam-se forças aerodinâmicas longitudinais às representadas no plano de simetria do avião. Segundo Givisiéz (2009) as forças e momentos (grandezas aerodinâmicas) dependem do escoamento do ar que se desenvolve sobre a aeronave e são normalmente expressas na forma de um produto entre a pressão dinâmica, uma superfície de referência e um coeficiente aerodinâmico, logo, podem ser descritas genericamente como:

$$Q = \bar{q}SC_Q \quad (4.15)$$

Sendo $\bar{q} = (1/2)\rho V^2$ a pressão dinâmica, S a superfície de referência e C_Q o coeficiente aerodinâmico respectivo. O coeficiente aerodinâmico depende de um conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e normalmente é descrito através de uma expansão por serie de Taylor de primeira ordem (GIVISIÉZ, 2009), tal como na Equação 4.16.

$$C_Q = C_{Q_0} + C_{Q_1}x_1 + C_{Q_2}x_2 + \dots + C_{Q_n}x_n \quad (4.16)$$

Onde os coeficientes C_{Q_n} são chamados de Derivadas de Estabilidade as quais representam a influencia de uma determinada variável x_n na dinâmica da grandeza Q , estas derivadas podem ser obtidas experimentalmente ou estimadas através de simulações. No caso da dinâmica longitudinal, são considerados os coeficientes de sustentação e arrasto os quais estão escritos no referencial aerodinâmico, portanto, precisam ser "traduzidos" ao referencial do corpo para poderem ser inseridas no modelo final. Uma análise mais detalhada sobre as derivadas de estabilidade pode ser encontrada em Roskam (1998). Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto no MIRAGE III são modelados como se mostra a seguir:

$$C_{\bar{L}} = C_{\bar{L}_0} + C_{\bar{L}_\alpha}\alpha + C_{\bar{L}_q}\left(\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)q + C_{\bar{L}_{\delta p}}\delta p \quad (4.17)$$

$$C_D = C_{D_0} + kC_{\bar{L}}^2$$

Sendo $C_{\bar{L}_0}$, $C_{\bar{L}_\alpha}$, $C_{\bar{L}_q}$ e $C_{\bar{L}_{\delta p}}$ as derivativas de estabilidade e $C_{D_0} = C_D(\alpha = i_h, \delta_p = 0)$ o coeficiente de arrasto. c_{ref} e V_{ref} são respectivamente um comprimento e uma velocidade de referência. As forças aerodinâmicas longitudinais são definidas finalmente como $F_x = \bar{q}SC_x$ e $F_z = \bar{q}SC_z$.

O momento longitudinal M é construído de maneira análoga às forças, diferindo unicamente pelo fato deles serem obtidos diretamente no referencial do corpo sem precisar de

transformação alguma. Logo o momento de arfagem (M) pode ser definido como na Equação 4.18

$$M = \bar{q}S\bar{c}C_m \quad (4.18)$$

Sendo C_m definido como:

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_q}\left(\frac{c_{ref}}{V_{ref}}\right)q + C_{m_{\delta p}}\delta p \quad (4.19)$$

4.2.2 Forças e momentos aerodinâmicos látero-direcionais

As forças aerodinâmicas látero-direcionais são definidas na condição de voo estacionário e com derrapagem não nulo, como consequência, aparece uma força lateral $F_y = \bar{q}SC_y$ e dois momentos. O momento de rolagem $L = \bar{q}SbC_l$ e o momento de guinada $N = \bar{q}SbC_n$, cujos coeficientes são influenciados diretamente pelo ângulo de derrapagem β , pelas respectivas velocidade angulares p , r e pela deflexão dos controles respectivos δ_a (deflexão de aileron) e δ_l (deflexão de leme). Isto é:

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\left(\frac{b_{ref}}{V_{ref}}\right)p + C_{l_r}\left(\frac{b_{ref}}{V_{ref}}\right)r + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta l}}\delta l \\ C_n &= C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\left(\frac{b_{ref}}{V_{ref}}\right)p + C_{n_r}\left(\frac{b_{ref}}{V_{ref}}\right)r + C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta l}}\delta l \end{aligned} \quad (4.20)$$

Observando a Equação 4.20 é fácil perceber que os movimentos laterais e direcionais encontram-se acoplados. A força lateral é diretamente proporcional ao coeficiente de força lateral C_y definido como $C_y = -C_D \sin\beta + C_{y_a} \cos\beta$ o qual está escrito no referencial do corpo e depende do coeficiente C_{y_a} o qual é construído no referencial aerodinâmico e descrito por:

$$C_{y_a} = C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta a}}\delta a + C_{y_{\delta l}}\delta l \quad (4.21)$$

4.2.3 Forças e momentos aerodinâmicos totais

Finalmente as forças aerodinâmicas que agem na aeronave podem ser escritas como na Equação 4.22, sendo seus coeficientes descritos pela Equação 4.23, com $[T]_{A,B}$ como a matriz

de transformação do referencial aerodinâmico ao referencial do corpo:

$$\begin{aligned} F_x &= \bar{q}SC_x \\ F_y &= \bar{q}SC_y \\ F_z &= \bar{q}SC_z \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} = [T]_{A,B} \begin{Bmatrix} -C_D \\ -C_{y_a} \\ -C_{\bar{L}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -C_D \\ -C_{y_a} \\ -C_{\bar{L}} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Os momentos aerodinâmicos totais em expressões fechadas são:

$$\begin{aligned} L &= \bar{q}SbC_l \\ M &= \bar{q}S\bar{c}C_m \\ N &= \bar{q}S\bar{b}C_n \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sendo seus coeficientes já deduzidos nas Equações 4.19 e 4.20.

4.3 Equações da dinâmica total do Mirage III

Esta aeronave possui 12 equações que descrevem o comportamento da mesma, sendo três equações de velocidades translacionais (Equações 4.5), três equações de velocidades angulares (Equações 4.9), três equações da cinemática da aeronave (Equações 4.13) e três equações de navegação (Equações 4.14). Para o presente trabalho, somente será considerada a equação de navegação da altitude, as dinâmicas das velocidades translacionais serão substituídas pela dinâmica da velocidade absoluta assim como também será considerada a dinâmica do ângulo de ataque e do ângulo de derrapagem, dinâmicas úteis em atividades de controle. Logo, a

dinâmica final será:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= (c_1 r + c_2 p)q + c_3 L + c_4 N \\
 \dot{q} &= c_5 p r - c_6 (p^2 - r^2) + c_7 M \\
 \dot{r} &= (c_8 p - c_2 r)q + c_4 L + c_9 N \\
 \dot{\phi} &= p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \operatorname{cos} \phi \tan \theta \\
 \dot{\theta} &= q \operatorname{cos} \phi - r \operatorname{sen} \phi \\
 \dot{\psi} &= (q \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{cos} \phi) \operatorname{sec} \theta \\
 \dot{V} &= \frac{1}{V} (u \dot{u} + v \dot{v} + w \dot{w}) \\
 \dot{\beta} &= \frac{\left(\frac{\dot{v}}{V} - \frac{v \dot{V}}{V^2} \right)}{\sqrt{1 - (v/V)^2}} \\
 \dot{\alpha} &= \frac{\left(\frac{\dot{w}}{u} - \frac{w \dot{u}}{u^2} \right)}{\sqrt{1 + (w/u)^2}} \\
 \dot{h} &= u \operatorname{sen} \theta - v \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta - w \operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \theta
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.4 Características da Aeronave Mirage III

O modelo apresentado ao longo deste capítulo possui características semelhantes à aeronave Mirage III, tal como mencionado em Sousa (2005). Entende-se por semelhante como mesmas dimensões, pesos, inércias e derivadas de estabilidade. Estes dados foram extraídos diretamente de Sousa (2005), os quais são mostrados aqui nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Dimensões, pesos e inércias. Fonte: Sousa (2005)

Item: símbolo [unidade]	Valor	Item: símbolo [unidade]	Valor
Superfície da asa: S [m^2]	36	Momento de Inércia: I_{zz} [$kg \cdot m^2$]	6×10^4
Corda média aerodinâmica: c [m]	5,25	Momento de Inércia: I_{xz} [$kg \cdot m^2$]	$1,8 \times 10^3$
Massa da aeronave: m [kg]	7400	Momento de Inércia: I_{xy} [$kg \cdot m^2$]	0
Momento de Inércia: I_{xx} [$kg \cdot m^2$]	9×10^4	Momento de Inércia: I_{yz} [$kg \cdot m^2$]	0
Momento de Inércia: I_{yy} [$kg \cdot m^2$]	$5,4 \times 10^4$	-	-

Tabela 4.2: Derivativas de estabilidade. Fonte: Sousa (2005)

Derivativa	Valor	Derivativa	Valor	Derivativa	Valor
C_{L_0}	0	$C_{m_{\delta p}}$	-0,45	$C_{n_{\delta a}}$	0
C_{L_α}	2,204	C_{y_β}	-0,6	$C_{n_{\delta l}}$	-0,085
C_{L_q}	0	C_{y_p}	0	C_{l_β}	-0,05
$C_{L_{\delta p}}$	0,7	C_{y_r}	0	C_{l_p}	-0,25
C_{D_0}	0,015	$C_{y_{\delta a}}$	0,01	C_{l_r}	0,06
k	0,4	$C_{y_{\delta l}}$	0,075	$C_{l_{\delta a}}$	-0,30
C_{m_0}	0	C_{n_β}	0,150	$C_{l_{\delta l}}$	0,019
C_{m_α}	-0,17	C_{n_p}	0,055	-	-
C_{m_q}	-0,4	C_{n_r}	-0,7	-	-

4.5 Observações sobre o Capítulo

Neste capítulo, o desenvolvimento matemático para a concepção do modelo não linear da aeronave Mirage III e as principais hipóteses adotadas foram apresentadas. O modelo foi adotado do trabalho de Sousa (2005) e será utilizado como plataforma de teste dos controladores RIU, NDI e controle linear. As Equações da dinâmica obtidas (vide Equação 4.25) servirão para a aplicação do projeto analítico do RIU, estas equações encontram-se na forma $\dot{x} = f(t, x, u)$ e precisam ser transformadas à forma *affine in the input* para a correta aplicação do RIU. Esta expansão das equações é feita no Apêndice A permitindo colocar a dinâmica na forma $\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u(t)$. Cabe salientar que trata-se de um modelo de baixa fidelidade devido às suas derivativas de estabilidade serem consideradas constantes, ou seja, invariantes com respeito à condição de voo, porém, o suficientemente completo em relação à consideração das não linearidades.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

Ao longo deste trabalho foram introduzidas algumas técnicas de controle aplicáveis a sistemas não lineares como inversão dinâmica não linear (NDI) e regulador integrativo universal (RIU), vantagens e desvantagens de cada uma delas foram comentadas. A formulação do RIU, previamente escolhida como a técnica alvo de estudo nesta tese, foi detalhada e o processo para determinar seus parâmetros de sintonização foi descrito no Capítulo 3. Técnicas de controle linear como LQR e controle clássico também foram apresentadas no Capítulo 2, especialmente a metodologia para aplicação das mesmas.

Neste capítulo são apresentados os resultados da aplicação de controle linear e não linear na aeronave Mirage III previamente apresentada no Capítulo 4. Na Seção 5.1 apresentam-se os pontos do envelope de voo da aeronave nos quais serão testados os controladores e definem-se os índices de desempenho que servirão para a comparação quantitativa entre eles. Na Seções 5.2.1 e 5.3 apresentam-se respectivamente os controladores NDI e RIU obtidos, no primeiro deles, a estrutura do controlador final foi obtida através de um processo analítico (com auxílio de ferramentas computacionais) para realizar a inversão e no segundo ressalta-se que os parâmetros utilizados foram obtidos por meio de um processo de tentativa e erro. Na Seção 5.4 implementam-se os controladores LQR e clássico ao problema de rastreabilidade da velocidade total (V) e altitude (H) respectivamente.

Posteriormente, na Seção 5.7.1, o projeto analítico do RIU é aplicado à dinâmica longitudinal de aeronave Mirage com o intuito de resolver o problema de rastreabilidade do ângulo de atitude (Θ) e finalmente na Seção 5.7.2 aplica-se o projeto analítico RIU à dinâmica latero-direcional da aeronave visando rastrear um *doublet* de ângulo de rolagem com um amortecedor de derrapagem. Detalhes sobre o cálculo analítico e contribuições relevantes também são apresentadas. Cabe salientar que estas últimas subseções apresentam as principais contribuições da tese.

5.1 Envelope de Voo

Tanto para a realização das simulações numéricas dos controladores não lineares quanto para o escalonamento de ganhos com técnicas lineares, adotaram-se como condições iniciais pontos pertencentes ao envelope de voo da aeronave. Para duas altitudes diferentes, duas velocidades de equilíbrio foram predefinidas, um ponto intermediário do envelope de voo (ponto 1) também foi analisado. A Figura 5.1 ilustra os pontos utilizados no envelope de voo da aeronave Mirage III e a Tabela 5.1 apresenta as 5 condições iniciais de equilíbrio testadas.

Tabela 5.1: Pontos de equilíbrio para as simulações.

Ponto de equilíbrio	Altitude [m]	Velocidade do som [m/s]	Número de Mach	Velocidade da aeronave [m/s]
1	5000	320.50	0.78	250
2	1524	334.40	0.40	134
3	1524	334.40	1.00	334
4	10668	296.63	0.70	208
5	10668	296.63	1.30	386

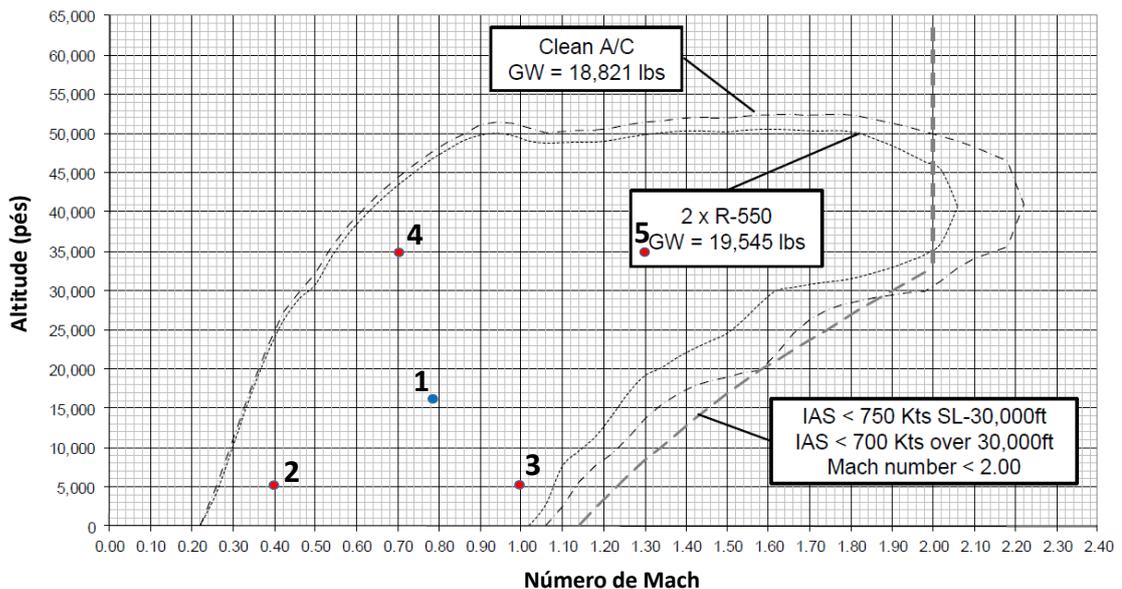


Figura 5.1: Envelope de voo do Mirage III-E.
Adaptado de Dassault Aviation (b)

Com o intuito de comparar quantitativamente a qualidade do rastreamento fornecido pelas técnicas de controle a ser implementadas, dois índices de desempenho foram propostos nesta tese, um índice desempenho denominado Erro Acumulado (EA) definido pela Equação 5.1 e um outro chamado de Atividade de Controle (AC) definido na Equação 5.2. O primeiro faz o somatório do valor absoluto do erro de rastreamento ao longo do tempo de simulação e o segundo analogamente acumula o valor absoluto do controle, estas estimativas são importantes porque

não só comparam a amplitude da superfície de controle utilizada mas também o tempo que ele é demandada durante a manobra. No recente trabalho Ren *et al.* (2017) um índice de desempenho similar conhecido como *Integral Square Error* (ISE) foi usado com o mesmo propósito. Cabe salientar e será visto em alguns resultados que não necessariamente alta demanda de controle significa maiores deflexões da superfície de controle, o tempo total que foi demandado o controle é importante e é levado em conta nas Equações 5.1 e 5.2. Outros critérios relacionados com frequência, força, eficiência e energia do controlador podem ser adotados.

$$\int_0^t abs(e)dt \quad (5.1)$$

$$\int_0^t abs(u)dt \quad (5.2)$$

5.2 Controlador por Inversão Dinâmica Não Linear

A técnica de NDI apresentada no Capítulo 2, será aplicada nesta seção à aeronave Mirage III cuja dinâmica foi desenvolvida no Capítulo 4. O objetivo principal é que alguns estados da aeronave (taxas, ângulos, etc) rastreiem sinais de referência predefinidos pelo projetista, por exemplo, *doublets* e fazer mudanças de um ponto de equilíbrio a outro para o caso da velocidade e a altitude, isto, com o intuito de ser comparado seu desempenho com o RIU. Demonstrar-se-á também a robustez desta técnica de controle testando-a em diferentes pontos do envelope de voo apresentados na Tabela 5.1.

As equações da dinâmica da aeronave (Equações 4.25) são reescritas na forma da Equação 2.24, é evidente que a dinâmica de alguns dos estados não possuem relação direta com todos os controles, inclusive, no caso da dinâmica do ângulo de atitude não existe relação direta com nenhuma das entradas de controle. É neste ponto que as derivadas de Lie ganham importância e fazem possível a obtenção de tal relação.

A seguir, apresenta-se o procedimento manual para a obtenção da dinâmica do primeiro estado (velocidade total da aeronave), em função dos controles. Deve-se lembrar que o desenvolvimento destas equações também é necessário para a aplicação do projeto analítico do RIU. No apêndice A, as equações da dinâmica da aeronave (Equações 4.25) já foram expandidas com esse propósito, porém, para o controlador atual (NDI) o ponto de partida será a Equação A.11,

denominada aqui de Equação 5.3.

$$\dot{V} = g \sin(\alpha - \Theta) + \frac{F_{et}}{m} \cos \alpha - C_d \frac{\bar{q}S}{m} \quad (5.3)$$

Lembrando-se que os coeficientes de arrasto e sustentação são definidos pela Equação 5.4.

$$\begin{aligned} C_d &= C_{d0} + kC_L^2 \\ C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_e}\delta_e + C_{Lq} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q \end{aligned} \quad (5.4)$$

Substitui-se a Equação 5.4 em 5.3. É fácil perceber que a expressão resultante mostra uma não linearidade entre o controle e o estado correspondente produzida pelo termo C_L^2 . Para contornar este problema adotou-se o procedimento usado em Givisiéz (2009) o qual consiste em linearizar a entrada de controle δ_p através de uma expansão por série de Taylor de C_L^2 e posteriormente desprezar o termo que causa a não linearidade. A expansão por série de Taylor será da forma:

$$\begin{aligned} C_L^2 &= C_{L0}^2 + 2 \left[C_{L0}C_{L\alpha}\alpha + C_{L0}C_{Lq} \left(\frac{l}{V} \right) q \right] + C_{L\alpha}^2 \alpha^2 + C_{Lq}^2 \left(\frac{l}{V} \right)^2 q^2 + 2C_{L\alpha}C_{Lq} \left(\frac{l}{V} \right) \alpha q \\ &+ 2 \left[C_{L\alpha}C_{L\delta_p}\alpha + C_{L\delta_p}C_{Lq} \left(\frac{l}{V} \right) q + C_{L0}C_{L\delta_p} \right] \delta_p + C_{L\delta_p}^2 \delta_p^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

O termo que causa a não linearidade é $C_{L\delta_p}^2 \delta_p^2$. Devido aos seus valores serem relativamente baixos, o produto dos seus quadrados será menor ainda, portanto, tal termo é desprezado da Equação 5.5, logo, a Equação 5.3 é reescrita como:

$$\dot{V} = g \sin(\alpha - \Theta) + \frac{T}{m} \cos \alpha - \frac{\bar{q}S}{m} (C_{d0} + kCLA_v) + \frac{T}{m} \cos \alpha \delta_\pi - \frac{\bar{q}S}{m} CLB_v \delta_p \quad (5.6)$$

Sendo T , \bar{q} , g , S e m a tração estática máxima do motor ao nível do mar, a pressão dinâmica, a aceleração da gravidade, a superfície da asa e a massa da aeronave respectivamente. Os termos, CLA_v e CLB_v são respectivamente as componentes da Equação 5.5 que não multiplicam (Equação 5.7) e multiplicam (Equação 5.8) a entrada de controle δ_p . Finalmente a Equação

5.6 pode ser expressa como na Equação 5.9.

$$CLA_v = C_{L_0}^2 + 2 \left[C_{L_0} C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_0} C_{L_q} \left(\frac{b}{V} \right) q \right] + C_{L_\alpha}^2 \alpha^2 + C_{L_q}^2 \left(\frac{b}{V} \right) q^2 + 2 C_{L_\alpha} C_{L_q} \left(\frac{b}{V} \right) q \alpha \quad (5.7)$$

$$CLB_v = 2 \left[C_{L_\alpha} C_{L_{\delta_p}} \alpha + C_{L_q} C_{L_{\delta_p}} \left(\frac{b}{V} \right) q + C_{L_0} C_{L_{\delta_p}} \right] \quad (5.8)$$

$$\dot{V} = F_V(V, \alpha, q, \theta) + G_V(V, \alpha, q)u \quad (5.9)$$

Sendo u o vetor de entradas de controle do sistema $u = [\delta_p, \delta_\pi, \delta_a, \delta_l]$. Este procedimento deve ser feito para a dinâmica de cada um dos estados da aeronave mas, como foi mencionado em capítulos anteriores, o manuseio das equações é trabalhoso devido à complexidade e tamanho das mesmas o que traz dificuldades para o projetista. Neste trabalho desenvolveu-se um código computacional utilizando o software comercial MATLAB® com o intuito de realizar esta tarefa e, ao mesmo tempo, determinar o grau relativo para qualquer entrada e saída previamente especificada, para isto, fez-se uso de variáveis simbólicas. Um fluxograma ilustrando a lógica utilizada no código é mostrado na Figura 5.2.

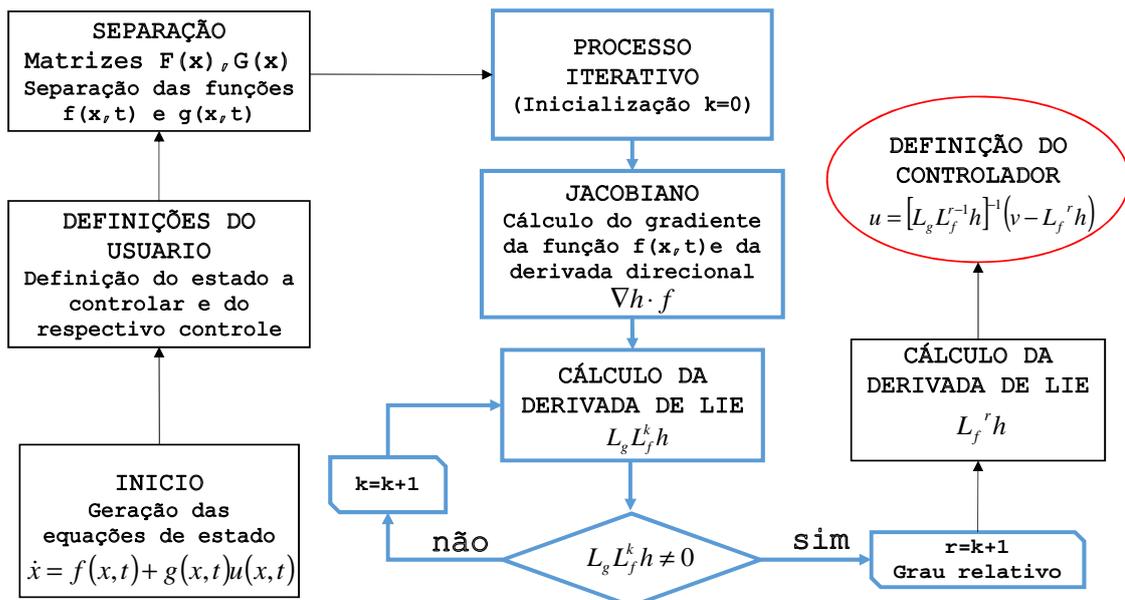


Figura 5.2: Fluxograma do código computacional para definição do controlador por NDI.

Na fase de **INICIO** do código foram digitadas as equações não lineares da aeronave (Equações 4.25), definiram-se os estados do sistema como variáveis simbólicas e procedeu-se a escrever os termos constantes (derivativas de estabilidade, parâmetros geométricos e momentos de inercia da aeronave), e sequencialmente o resto das expressões na ordem de dependência de cada uma delas até chegar nas equações da dinâmica da aeronave (Equação 4.25). Uma vez fornecidas todas as informações da dinâmica ao código, procedeu-se a realizar a **SEPARAÇÃO** das funções não lineares $f(x, t)$ e $g(x, t)$ de $\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u$, para isto, igualaram-se as equações de estado a "zero" e definiu-se a entrada de controle (escolhida pelo "usuario"), utilizou-se o comando *equationsToMatrix* do MATLAB® de tal forma que as funções multiplicadas diretamente com o controle previamente definido sejam separadas das que não multiplicam ele. Desta forma obtêm-se as componentes F_X e G_X (por exemplo F_V e G_V da Equação 5.9) dos estados $X \in [1, \dots, n]$ sendo n o número de estados do sistema. **DEFINIÇÕES** tanto da entrada de controle previamente escolhida quando dos estados a controlar são feitas. O **PROCESSO ITERATIVO** condicionado pela Equação 5.10 é inicializado com $k = 0$ e através de sequencias de sentenças *for* é calculado o **JACOBIANO** $\nabla h(x)$ na direção de $f(x)$ necessário para determinar a **DERIVADA** $L_{g_j} L_f^k h_i(x)$, caso a mesma seja nula, ou seja, não há relação direta entre a entrada e saída, procede-se a incrementar o valor de k até que o critério imposto na Equação 5.10 seja atendido. Desta forma é determinado o **GRAU RELATIVO**, o qual é preciso para a determinação da **DERIVADA DE LIE** $L_f^r h$ que falta para a definição total do controlador por inversão dinâmica. Finalmente, o ajuste dos ganhos da dinâmica do erro definida na Equação 2.27 e a implementação da malha de controle fechada na **DEFINIÇÃO DO CONTROLADOR** é feita no ambiente SIMULINK®.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) \neq 0 \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq \rho_i - 1 \\ 1 \leq i, j \leq m \end{cases} \quad (5.10)$$

O procedimento numérico iterativo para a determinação do grau relativo representado em blocos azuis da Figura 5.2 é idêntico ao usado no regulador integrativo universal (RIU).

5.2.1 Controladores Obtidos com NDI e Simulações Numéricas

As simulações foram feitas para cada um dos pontos do envelope de voo definidos na Seção 5.1, e os dados da aeronave como dimensões, derivadas de estabilidade e momentos de inercia foram apresentados no Capítulo 4. Espera-se que o controlador por NDI aplicado ao Mirage III faça as taxas de arfagem (q), rolagem (p), e guinada (r), os ângulos de: ataque (α), de atitude (Θ), de rolagem (Φ) e de derrapagem (β) rastream *doublets* com amplitudes máximas escolhidas dependendo do estado a controlar. Implementaram-se filtros de primeira e segunda

ordem para suavizar a referência comandada. Da mesma forma referências comandadas do tipo rampa são utilizadas para testar a capacidade dos controladores para fazer rastreamentos de velocidade e altitude. A suavização dos sinais de referências garantem que as derivadas destes sinais (especialmente *doublets*) tenham um valor limitado, desta maneira, para o projeto analítico do RIU, é possível adequar as referências para atenderem os requisitos necessários para o problema de rastreabilidade ser atendido, além disso, sinais suavizados são mas representam melhor a realidade dos sinais comandados.

Controle de taxa de arfagem com NDI

Utilizando-se a lógica computacional baseada em Inversão Dinâmica apresentado na Figura 5.2 foi possível obter as derivadas de Lie correspondentes ao controlador de taxa de arfagem sendo a entrada de controle a deflexão do profundor, o controlador obtido é apresentado na Equação 5.11.

$$\delta_p^q = [L_g L_f^0 h_q]^{-1} (\dot{y}_{q_{des}} - 4e_q - L_f^1 h_q) \quad (5.11)$$

Para este sistema de grau relativo um ($\rho = 1$) comandou-se um sinal de referência do tipo *doublet* de taxa de arfagem entre os 5 e 30 segundos, com amplitude máxima de 6 °/s, suavizado por um filtro de primeira ordem com constante de tempo $\tau = 1s$, a Figura 5.3 mostra que a taxa de arfagem real acompanha o comando filtrado com precisão em todos os pontos do envelope de voo definidos na Tabela 5.1. Como era de se esperar, nos pontos de menor pressão dinâmica, requer-se também maior deflexão de profundor para rastrear o sinal comandado.

Controle do ângulo de atitude com NDI

Para testar o desempenho da técnica NDI no rastreamento de ângulos da aeronave, propôs-se como sinal de referência (para rastreamento do ângulo de atitude), um *doublet* de amplitude 15° e implementou-se um filtro de segunda ordem para suavizar o alcance do ângulo desejado. O grau relativo para a entrada profundor é dois ($\rho = 2$) e a estrutura do controlador obtido é apresentada na Equação 5.12 a seguir.

$$\delta_p^\theta = [L_g L_f^1 h_\theta]^{-1} (\ddot{y}_{\theta_{des}} - 30\dot{e}_\theta - 2e_\theta - L_f^2 h_\theta) \quad (5.12)$$

A resposta do ângulo de atitude real é mostrada na Figura 5.4, mais uma vez o controlador mostra-se capaz de garantir a rastreabilidade do sinal de referência ao longo dos pontos

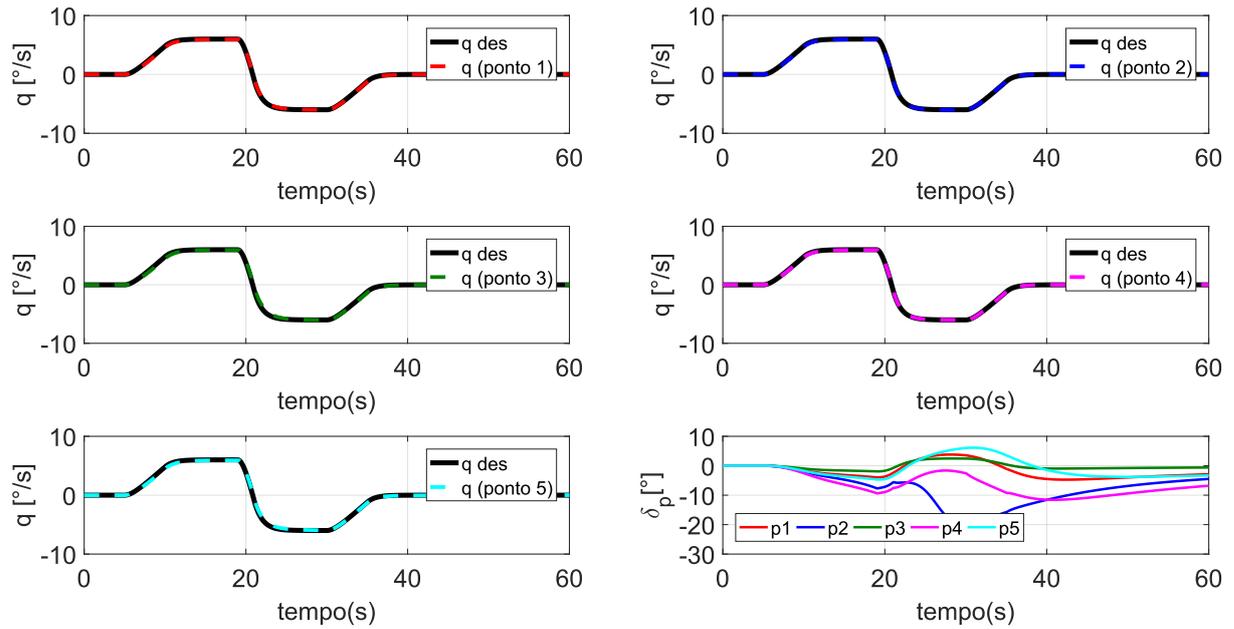


Figura 5.3: Doublet de taxa de arfagem NDI.

envelope de voo testados sem precisar de escalonamento de ganhos. Percebe-se que neste caso o ângulo de atitude inicial (de equilíbrio) varia com cada ponto. A atividade de controle é maior quanto menor a velocidade, porém, as simulações já contemplam o atuador, isto é, a manobra é executável dentro das capacidades da aeronave.

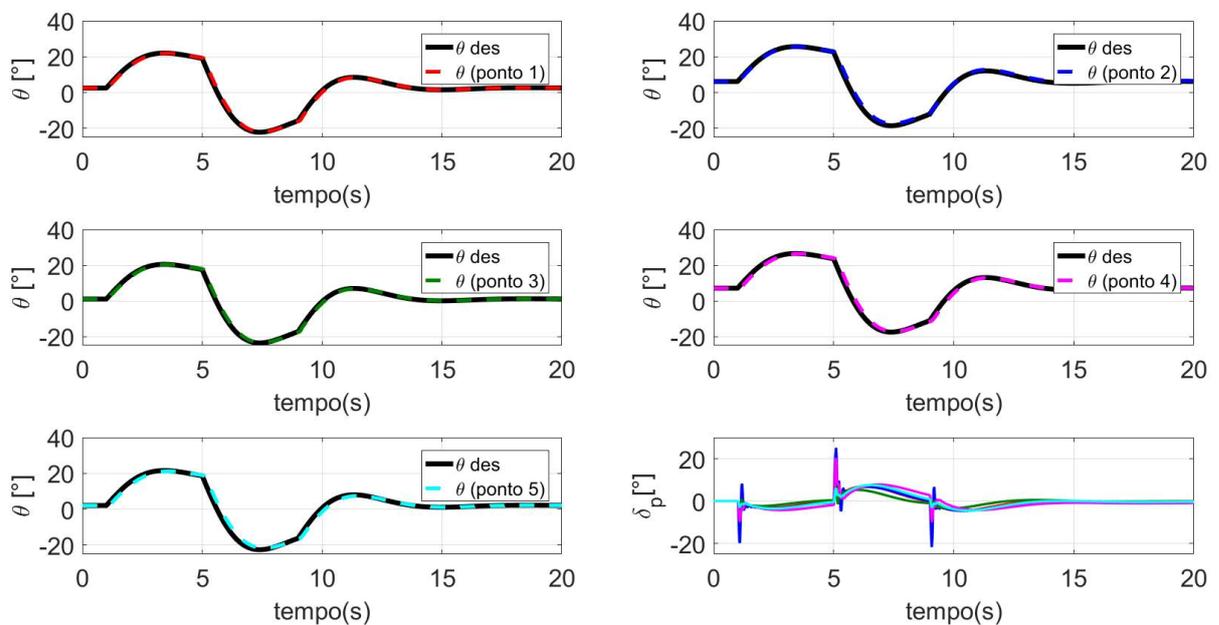


Figura 5.4: Doublet de ângulo de atitude NDI.

Controle do ângulo de ataque com NDI

O grau relativo obtido para o controle do ângulo de ataque usando profundor foi de dois ($\rho = 2$). Com o intuito de verificar o comportamento do controlador no rastreamento do ângulo de ataque utilizou-se como sinal de referência um *doublet* de 10° com filtro de segunda ordem, o controlador baseado em NDI obtido é descrito pela Equação 5.13.

$$\delta_p^\alpha = [L_g L_f^1 h_\alpha]^{-1} (\ddot{y}_{\alpha_{des}} - 10\dot{e}_\alpha - 10e_\alpha - L_f^2 h_\alpha) \quad (5.13)$$

Em todos os pontos simulados, é possível verificar que o rastreamento do sinal de referência foi feito com um erro de rastreamento quase nulo durante os 20 segundos de simulação, tal como se mostra na Figura 5.5. Percebe-se também que, os pontos com menor velocidade de equilíbrio normalmente requerem maior deflexão de profundor para realizar a manobra.

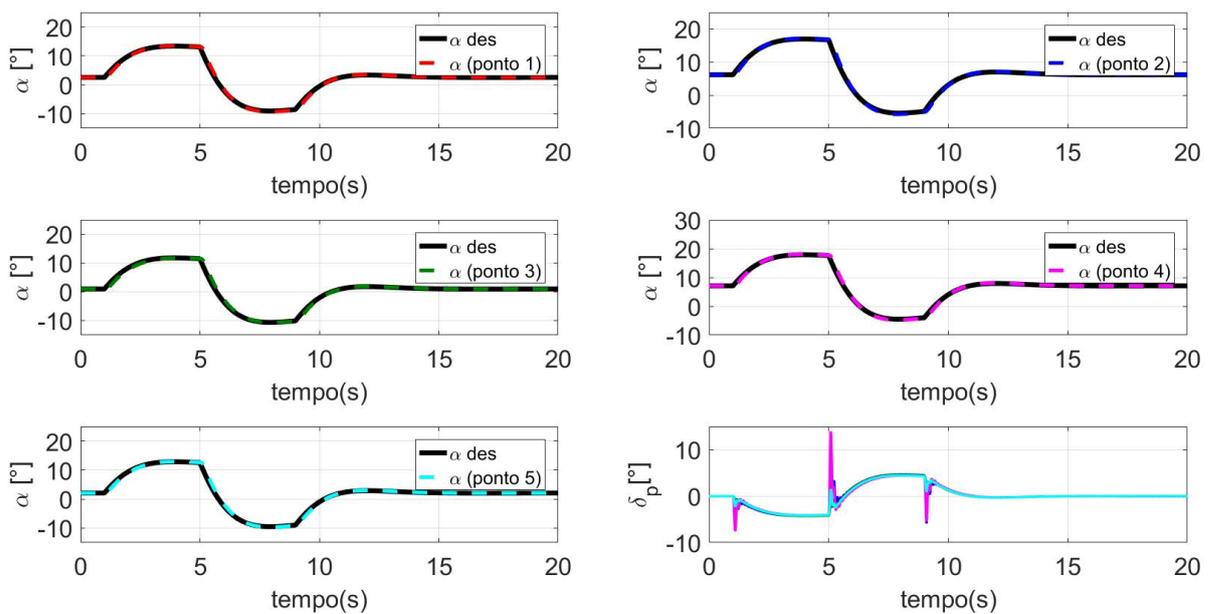


Figura 5.5: *Doublet* de ângulo de ataque NDI.

Controle de velocidade total com NDI

Algumas dificuldades para controlar a velocidade total diretamente com o profundor foram encontradas, não foi possível encontrar um conjunto de ganhos que permitisse rastrear o sinal de referência. Optou-se por dividir o problema de rastreamento em 3 partes, isto é, consideraram-se as componentes da velocidade total: velocidade longitudinal (u), lateral (v) e vertical (w) como estados independentes e determinou-se o grau relativo de cada, sendo os seguintes: controle de u com manete ($\rho_u = 1$), controle de v com aileron ($\rho_v = 2$) e controle

de w com profundor ($\rho_w = 2$). Deve-se lembrar que nesta tese não é considerada a influência da deflexão das superfícies de controle nas forças aerodinâmicas e sim nos momentos (vide Apêndice A), como consequência, os graus relativos de v e w aparecem aumentados em uma unidade. Os controladores por NDI obtidos são definidos na Equação 5.14, cabe salientar que a escolha dos ganhos do controlador foi feita por tentativa e erro.

$$\delta_{\pi,a,p}^V = \begin{cases} \delta_{\pi}^u = [L_g L_f^0 h_u]^{-1} (\dot{y}_{u_{des}} - 2e_u - L_f^1 h_u) \\ \delta_a^v = [L_g L_f^1 h_v]^{-1} (\ddot{y}_{v_{des}} - 4\dot{e}_v - 1e_v - L_f^2 h_v) \\ \delta_p^w = [L_g L_f^1 h_w]^{-1} (\ddot{y}_{w_{des}} - 1\dot{e}_w - 1e_w - L_f^2 h_w) \end{cases} \quad (5.14)$$

Como sinal de referência, comanda-se um incremento de velocidade total de 4% da velocidade inicial, para ser atingido em 20 segundos aumentando de forma linear (tipo rampa). A resposta da aeronave sob este sinal de referência é mostrado na Figura 5.6. Pode-se observar que o máximo pico da velocidade máxima foi pequeno e com respeito que a atividade de controle, é possível perceber que o esforço da manete de combustível foi menor ao 50% do total e o máximo valor da deflexão do profundor menor a 0,04 graus. É possível perceber que não era necessário um controlador para a velocidade lateral (v) devido a não existir perturbações nessa direção, como consequência, não houve demanda de controle, este fato permite verificar o desacoplamento das dinâmicas longitudinal e látero-direcional. A simulação foi feita somente para o primeiro ponto do envelope de voo, em secções subsequentes é feita a comparação com o controlador RIU só neste ponto do envelope de voo com o intuito de manter a estrutura do trabalho, mas sem equivalência entre eles. O controlador de velocidade NDI apresenta a atuação simultânea de três controles.

Controle da altitude com NDI

Tal como mencionado no início desta seção e no Apêndice A, a expansão por série de Taylor utilizada por Givisiéz (2009) para linearizar o coeficiente de arrasto (realizada com o objetivo de eliminar a não linearidade entre o controle e a saída e fazer possível a determinação numérica do grau relativo segundo o procedimento proposto nesta tese), faz com que haja dependência direta entre estados como a velocidade total e a altitude com a deflexão do profundor devido à força aerodinâmica de arrasto que a própria deflexão produz. Isto, faz reduzir a ordem do grau relativo em uma unidade, como consequência, mesmo que o grau relativo determinado numericamente para o controle da altitude com profundor seja dois ($\rho = 2$), é preciso derivar mais uma vez a altitude de tal forma que a contribuição do profundor seja no momento aerodinâmico e não na força. Finalmente o grau relativo será três ($\rho = 3$). O controlador por NDI

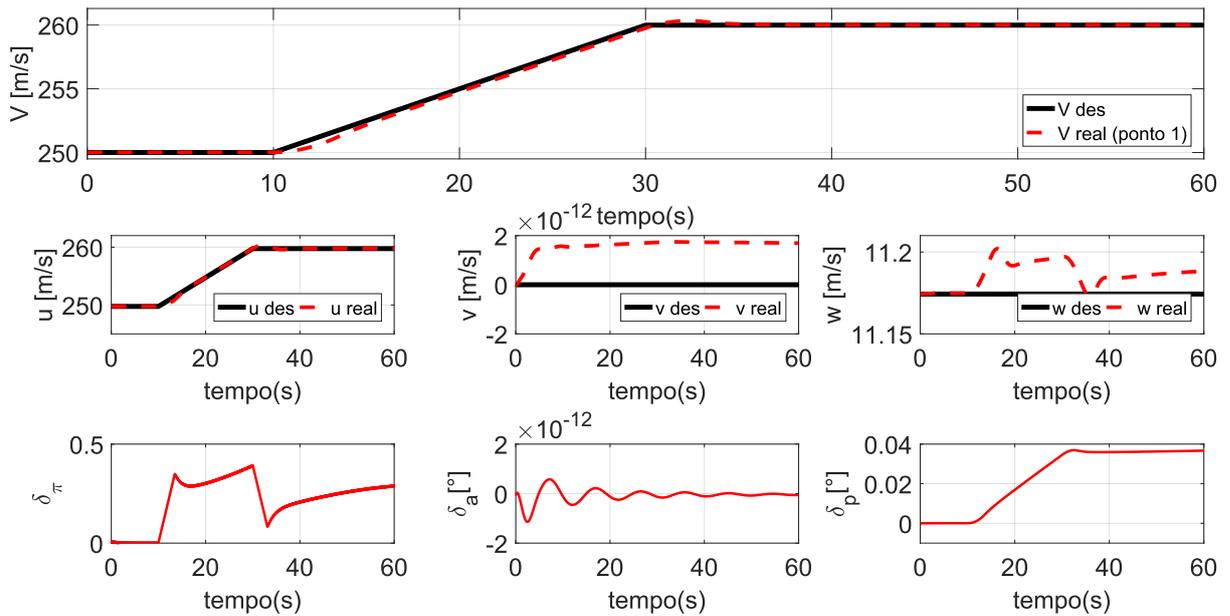


Figura 5.6: Incremento de 4% da Velocidade, rampa NDI.

obtido para o rastreamento de altitude é mostrado na Equação 5.15.

$$\delta_p^H = [L_g L_f^2 h_H]^{-1} (\ddot{y}_{H_{des}} - 1\ddot{e}_H - 2\dot{e}_H - 1e_H - L_f^3 h_H) \quad (5.15)$$

O rastreamento da referência tipo rampa para incremento de 2% da altitude de equilíbrio do ponto 1 pode ser observado na Figura 5.7.

Percebe-se a ocorrência de oscilações no controle, especificamente nos instantes que o sinal de referência muda de direção, porém, o rastreamento da altitude é feito satisfatoriamente e o controle demandado não excede os limites impostos nele.

Controle da taxa de rolagem com NDI

Enquanto à dinâmica lateral da aeronave, o primeiro estado a ser simulado foi a taxa de rolagem, como era de se esperar, devido à dependência direta entre as dinâmicas das velocidades angulares e os momentos aerodinâmicos (vide Equações 4.24 e 4.25), e ao mesmo tempo por estes serem função das entradas de controle, o grau relativo é um ($\rho = 1$). O qual foi demonstrado usando a metodologia descrita no início desta seção. Um *doublet* de $8^\circ/s$ previamente suavizado com um filtro de primeira ordem com constante de tempo unitária foi adotado como sinal de referência, o controlador obtido é mostrado na Equação 5.16 e a resposta da taxa

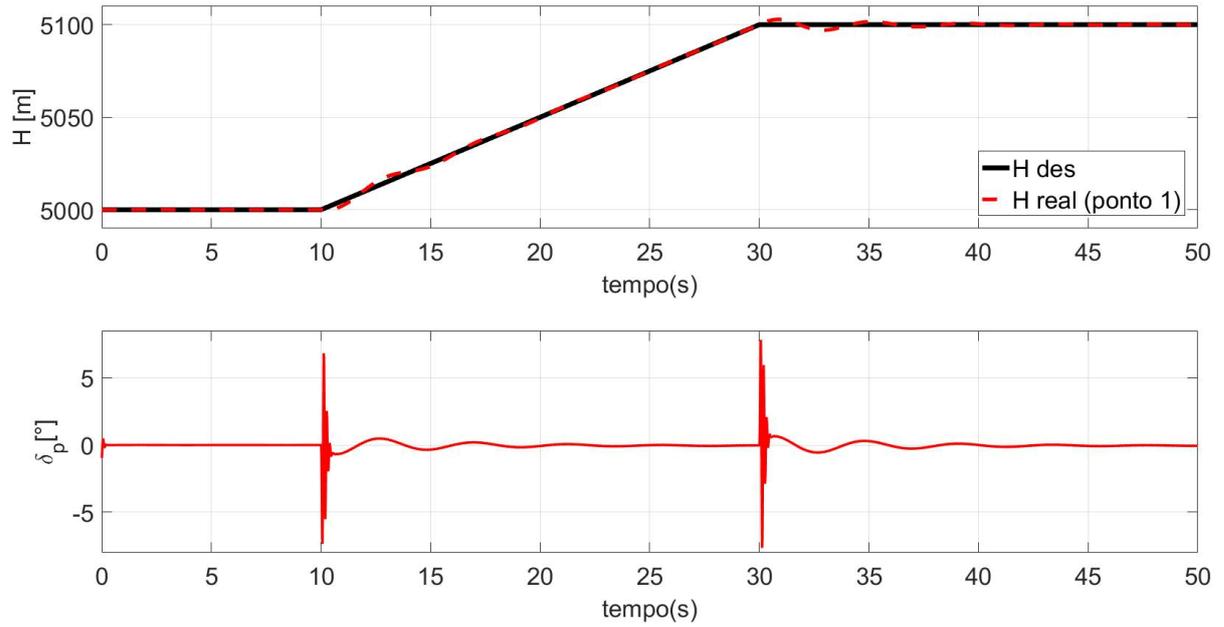


Figura 5.7: Incremento de 2% da altitude, ponto 1 NDI.

de rolagem é ilustrada na Figura 5.8.

$$\delta_a^p = [L_g L_f^0 h_p]^{-1} (\dot{y}_{p_{des}} - 1e_p - L_f^1 h_p) \quad (5.16)$$

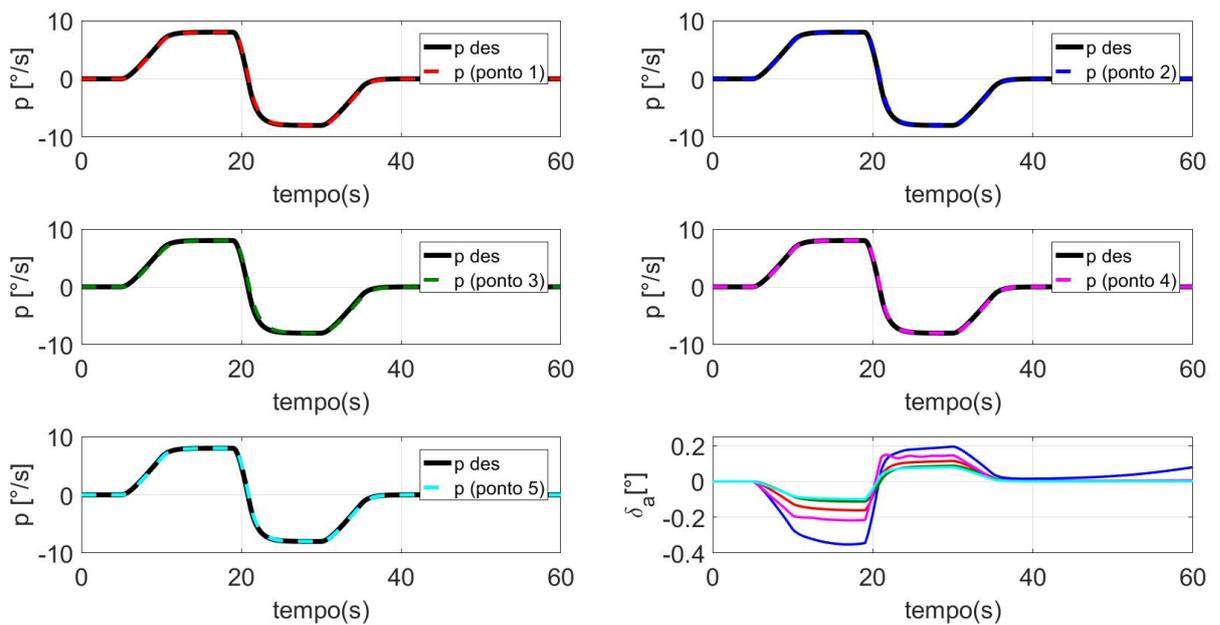


Figura 5.8: Rastreamento de *doublet* de taxa de rolagem NDI.

Controle do ângulo de rolagem com amortecedor de guinada com NDI

Os valores determinados de grau relativo para o ângulo de rolagem ϕ e taxa de guinada r são dois ($\rho = 2$) e um ($\rho = 1$) respectivamente. O acoplamento entre a dinâmica lateral e direcional torna razoável o uso de um amortecedor de guinada enquanto o ângulo de rolagem rastreia um *doublet*, desta forma amortece-se o modo *Dutch Roll*. O *doublet* de referência comandado é de 10° de amplitude passando previamente por um filtro de primeira ordem $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ com constante de tempo $\tau = 1$ s. O controlador obtido é representado pela Equação 5.17.

$$\begin{aligned}\delta_a^\phi &= [L_g L_f^1 h_\phi]^{-1} (\ddot{y}_{\phi_{des}} - 20\dot{e}_\phi - 30e_\phi - L_f^2 h_\phi) \\ \delta_l^r &= [L_g L_f^0 h_r]^{-1} (\dot{y}_{r_{des}} - 2e_r - L_f^1 h_r)\end{aligned}\quad (5.17)$$

Os resultados das simulações são apresentados separadamente desde o ponto 1 até o 5 do envelope de voo. Na Figura 5.9 (ponto 1) observa-se um rastreamento quase perfeito do sinal de referência, a máxima amplitude de aileron exigida durante a manobra ocorreu aproximadamente aos 21 segundos, simultaneamente a máxima deflexão do leme na tentativa de manter a taxa de guinada nula também ocorreu nesse instante.

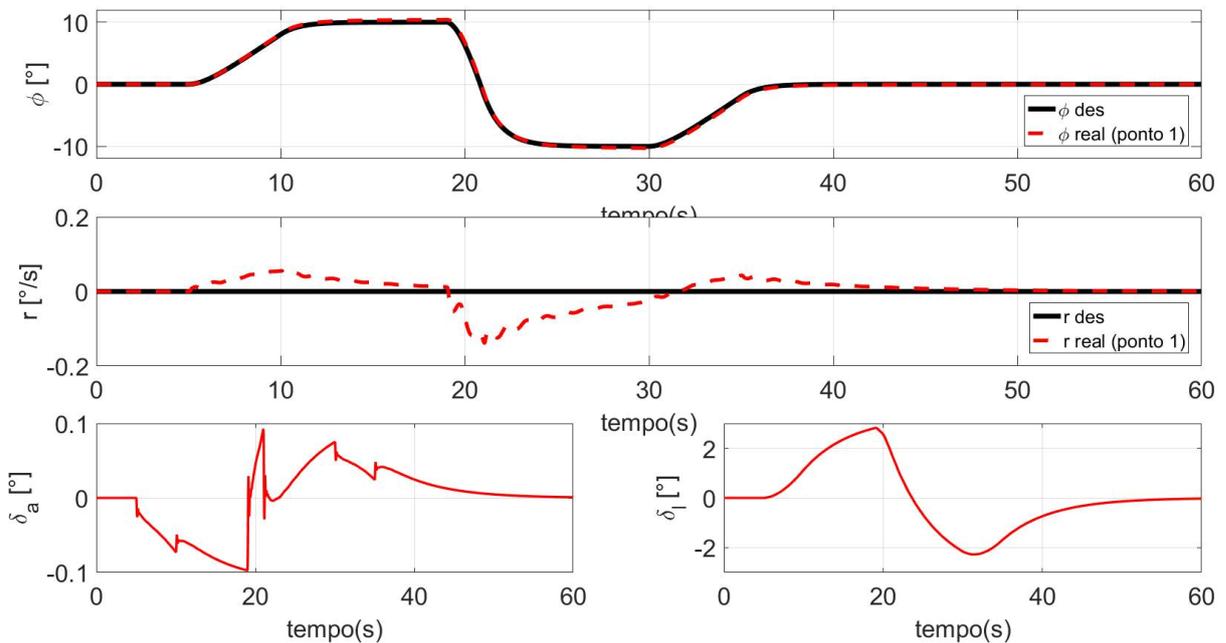


Figura 5.9: *doublet* de ângulo de rolagem, ponto 1 NDI.

A resposta do ângulo de rolagem no ponto 2 (Figura 5.10) foi similar ao ponto 1 enquanto à qualidade do rastreamento (erro de rastreamento desprezível). Mais uma vez percebe-se que a baixa pressão dinâmica exige maior deflexão das superfícies de controle a fim do estado controlado acompanhar o sinal de referência.

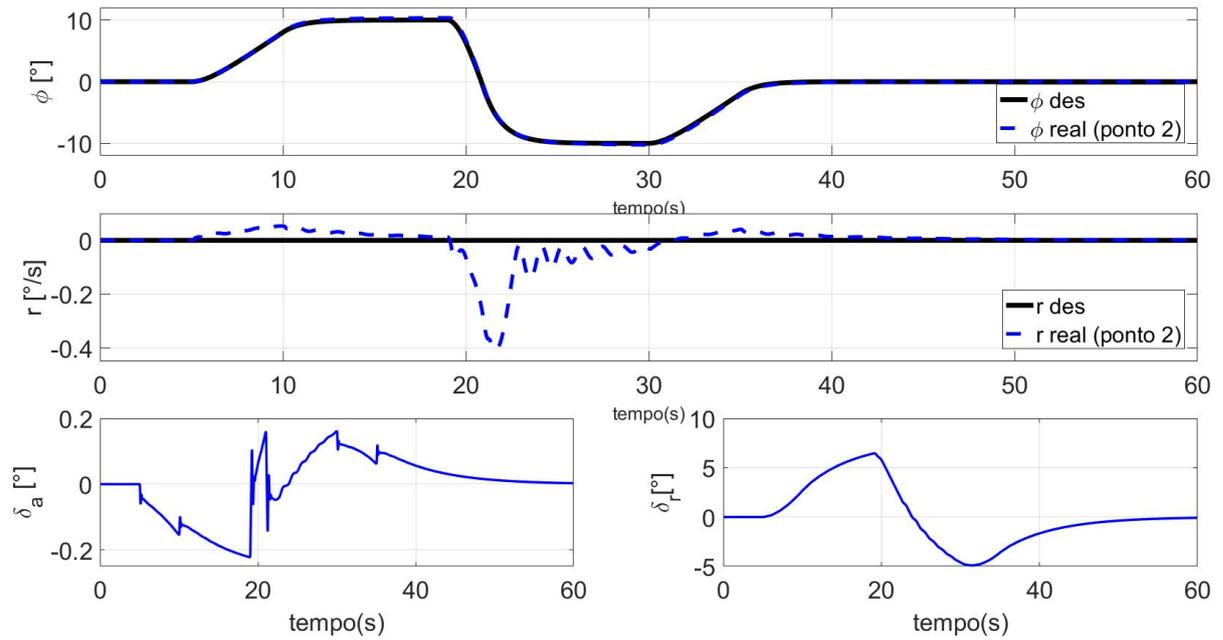


Figura 5.10: *doublet* de ângulo de rolagem, ponto 2 NDI.

No ponto 3, representado da Figura 5.11, percebe-se que a demanda tanto de aileron quanto de leme diminui pelo fato da velocidade de equilíbrio ser maior.

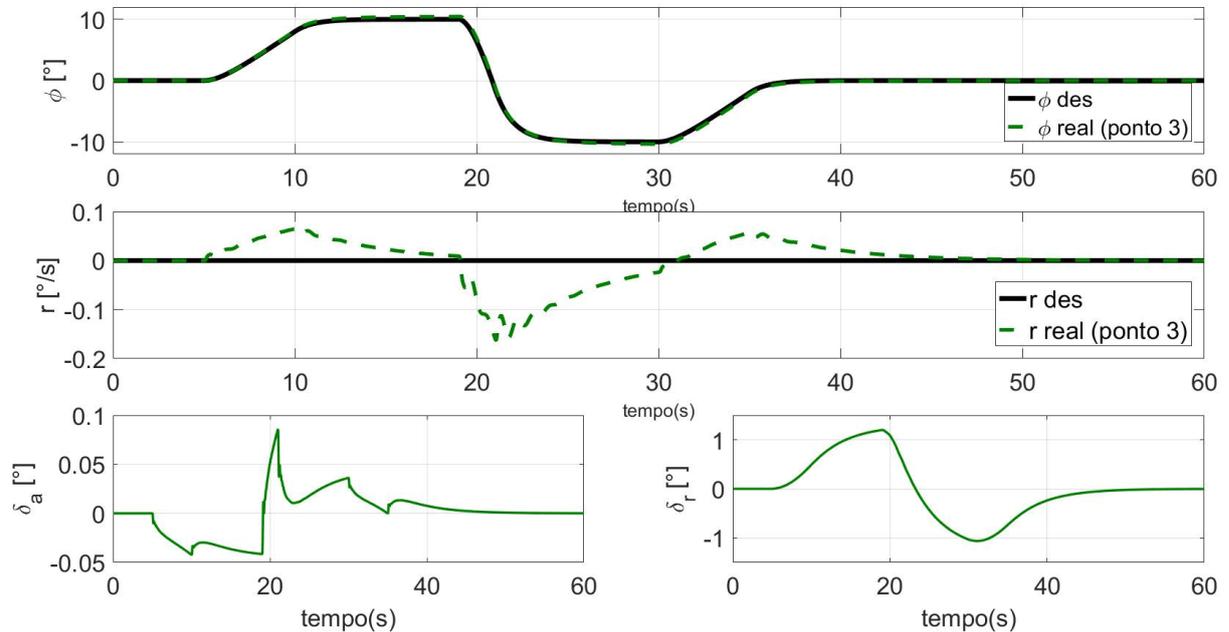


Figura 5.11: *doublet* de ângulo de rolagem, ponto 3 NDI.

Nos pontos 4 e 5, representados nas Figuras 5.12 e 5.13 respectivamente, observa-se um fenômeno similar aos pontos 3 e 4 enquanto à exigência dos controles pelo efeito da velocidade. No entanto, o mesmo controlador com os mesmos ganhos continuam garantindo a estabilidade do erro de rastreamento em qualquer ponto do envelope de voo, demonstrando dessa forma a

independência de técnicas de controle não lineares com respeito ao escalonamento de ganhos. No ponto 4 do envelope percebe-se a aparição de *chattering*, este fenômeno pode estar associado à baixa pressão dinâmica devido à grande altitude e baixa velocidade de equilíbrio neste ponto.

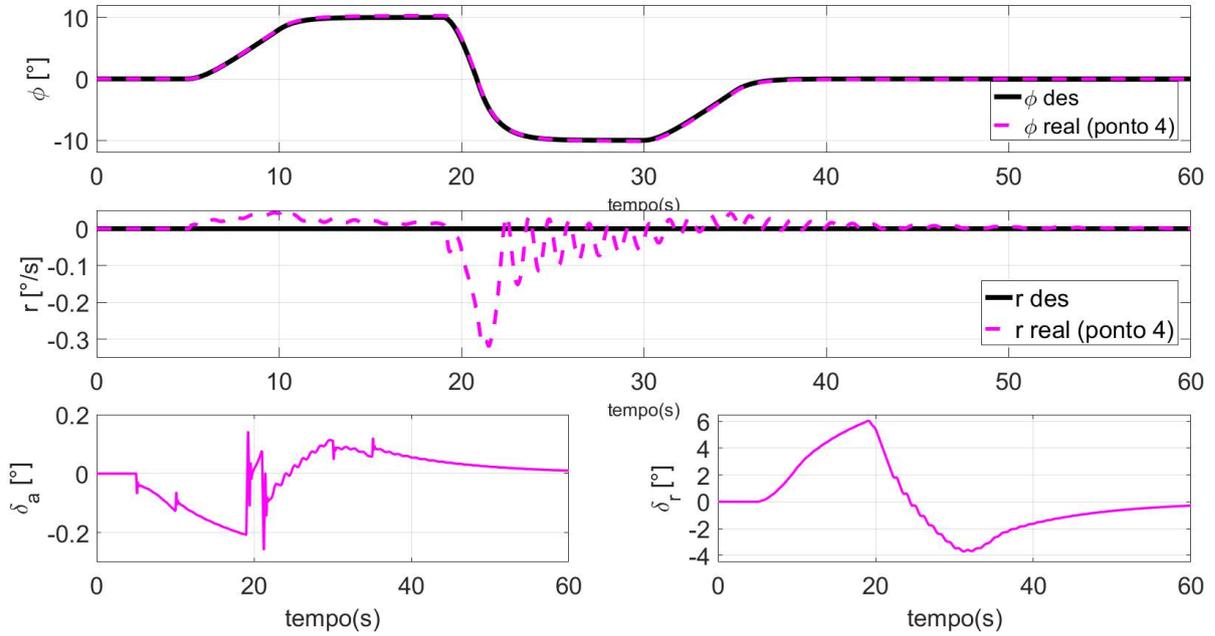


Figura 5.12: *doublet* de ângulo de rolagem, ponto 4 NDI.

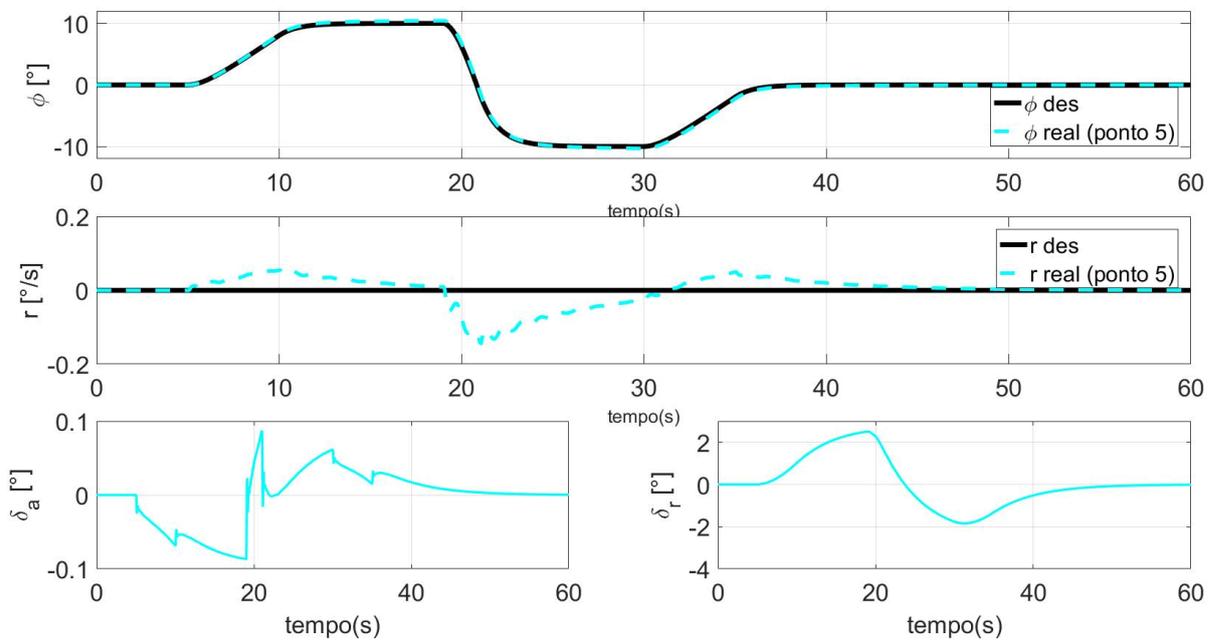


Figura 5.13: *doublet* de ângulo de rolagem, ponto 5 NDI.

Controle do ângulo de derrapagem com NDI

Para finalizar com as simulações numéricas correspondentes ao desempenho da técnica NDI, testa-se a capacidade do controlador em fazer o ângulo de derrapagem rastrear um *doublet* filtrado similar ao do ângulo de rolagem, porém com amplitude máxima de 2° . Este sinal de referência foi selecionado com o intuito de demonstrar a capacidade de rastreamento da lei de controle obtida, no entanto, o caso clássico consiste em fazer com que o ângulo de derrapagem permaneça nulo. Como pode ser visto na Equação 5.18 o grau relativo é um ($\rho = 1$). A Figura 5.14 representa a resposta do sistema em todos os pontos testados do envelope de voo.

$$\delta_l^\beta = [L_g L_f^0 h_\beta]^{-1} (\dot{y}_{\beta_{des}} - 1.5e_\beta - L_f^1 h_\beta) \quad (5.18)$$

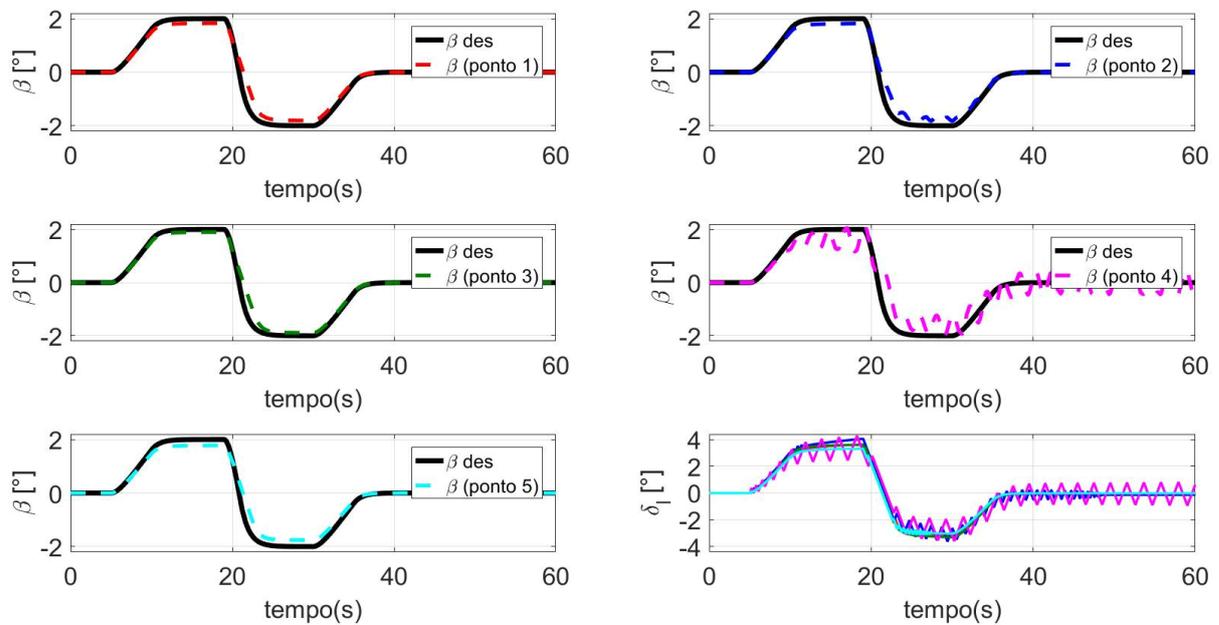


Figura 5.14: *doublet* de ângulo de derrapagem NDI.

Na Figura 5.14 pode-se observar que o rastreamento do ângulo de derrapagem não foi totalmente satisfatório, porém, sem muita precisão, o estado controlado tende a se adaptar ao sinal de referência a exceção do ponto 4 onde evidencia-se a presença de oscilações na resposta e *chattering* no controle. Cabe salientar que o controlador da Equação 5.18 mostrou-se incapaz de rastrear sinais de referência maiores aos 2° simulados.

Cabe salientar que as expressões resultantes das derivadas de Lie dentro das Equações dos controladores NDI desde a Equação 5.11 até a Equação 5.18 encontram-se listadas no Apêndice C desta tese.

5.3 Controladores Obtidos com RIU e simulações

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos com o controlador RIU aplicado à aeronave Mirage III. Os ganhos dos controladores e a seleção da camada limite destes foi feita por um processo de tentativa e erro, a Subseção 5.6.2 é reservada para o cálculo analítico dos ganhos e justificativas para a escolha da camada limite. Cabe salientar (baseado na experiência obtida e na própria teoria do controlador RIU) que, diminuições excessivas na camada limite causam *chattering* nas entradas de controle. As condições iniciais e sinais de referência utilizados são idênticos aos usados com NDI.

5.3.1 Rastreamento na Dinâmica Longitudinal

Rastreamento de *doublet* de taxa de arfagem

Basicamente o sinal de referência comandado trata-se de um *doublet* simétrico com uma taxa máxima de 15 °/s, o sinal de comando passa por um filtro de primeira ordem com constante de tempo τ unitária para facilitar o rastreamento e evitar singularidades provenientes de valores infinitamente altos das derivadas do erro. O controlador por RIU projetado é definido como na Equação 5.19.

$$\delta_p^q = 1 \cdot \text{sat} \left(\frac{5\sigma_q + 1e_q}{0.3} \right) \quad (5.19)$$

Aplicando o processo numérico para determinação do grau relativo, foi possível determinar que a relação entre a taxa de arfagem e a deflexão do profundor é de primeiro grau ($\rho = 1$). O controlador da Equação 5.19 fez a taxa de arfagem rastrear perfeitamente o sinal de referência (vide Figura 5.15). Demonstra-se também através da simulação que com um único conjunto de ganhos consegue-se rastrear um sinal de referência ao longo de todo o envelope de voo com um erro quase nulo. Percebe-se que o rastreamento no ponto de equilíbrio número 2, a partir do segundo 25 ocorre uma leve divergência entre a taxa de arfagem desejada e a real, cabe salientar que tal erro não é produto de falta de robustez da técnica de controle, devido à mesma ter provocado um ótimo rastreamento do sinal de referência para todos os pontos ao longo dos 60 segundos da simulação.

A Figura 5.16 mostra que, exatamente nesse intervalo de tempo houve uma diminuição excessiva da velocidade total da aeronave atingindo quase 23,85 m/s (86 km/h), velocidade excessivamente baixa que faz perder a eficiência do profundor. De novo na Figura 5.15, é fácil notar que a condição de voo que teve maior demanda de controle foi o ponto 2 (ponto de menor velocidade), isto, pelo fato da pressão dinâmica ser menor neste ponto requerendo uma maior

deflexão, caso contrario ocorre com o ponto 3 onde velocidade é maior e a altitude a menor de todos os pontos (maior pressão dinâmica).

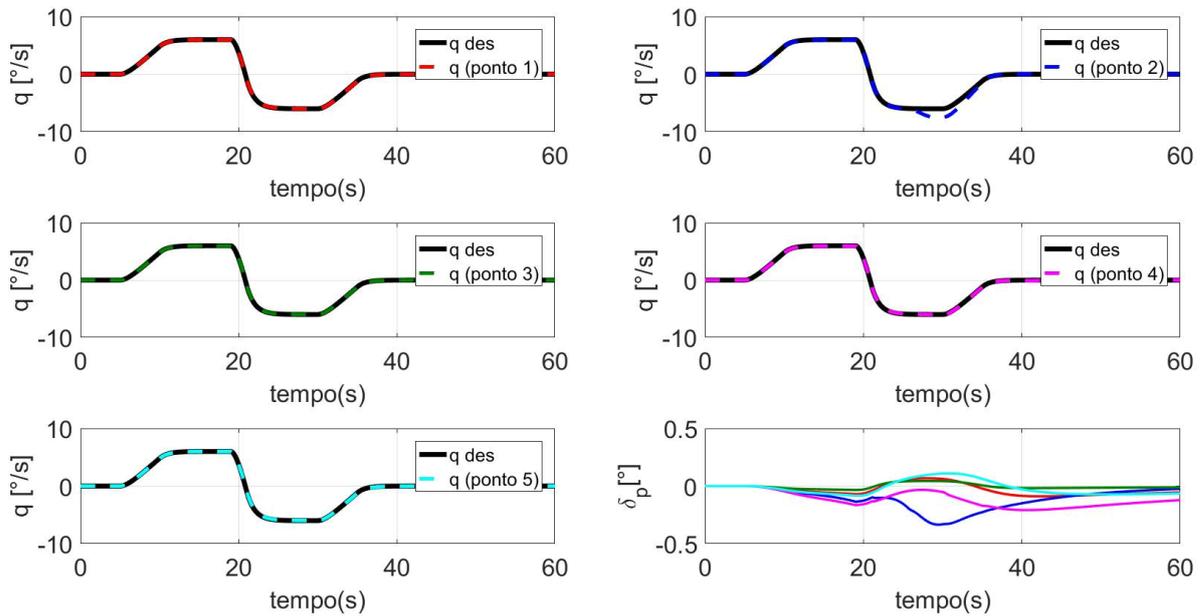


Figura 5.15: *doublet* de taxa de arfagem RIU.

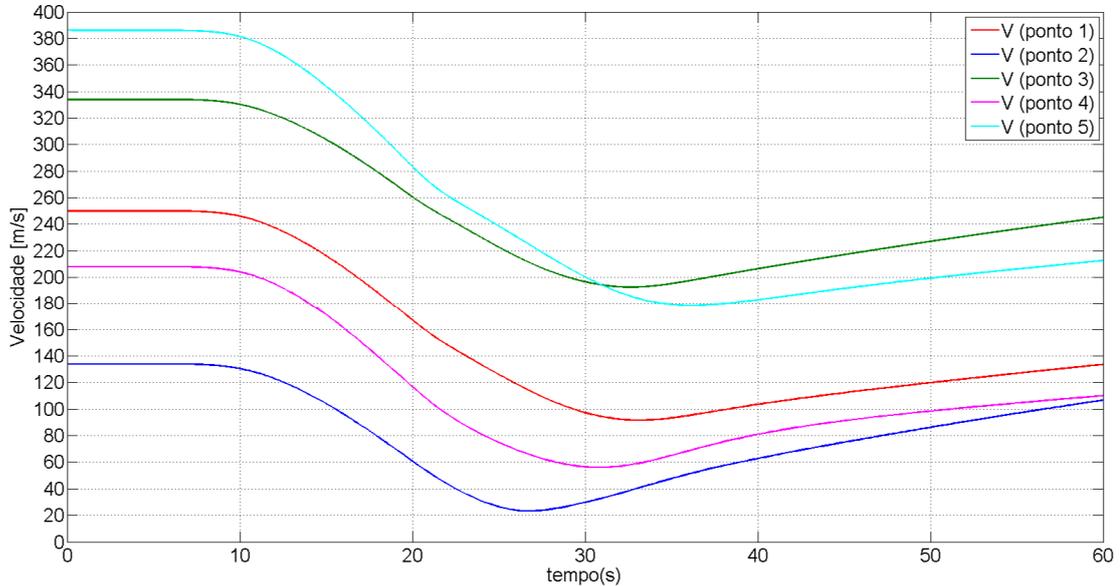


Figura 5.16: Velocidade durante *doublet* de taxa de arfagem RIU.

Rastreamento de *doublet* do ângulo de atitude

Para este controlador, o grau relativo obtido foi dois ($\rho = 2$), portanto, a estrutura do controlador de ângulo de atitude com profundor é como definida na Equação 5.20. A resposta

resultante do rastreamento ilustra-se na Figura 5.17.

$$\delta_p^\theta = 0.3 \cdot \text{sat} \left(\frac{2\sigma_\theta + 1e_\theta + 1\dot{e}_\theta}{0.3} \right) \quad (5.20)$$

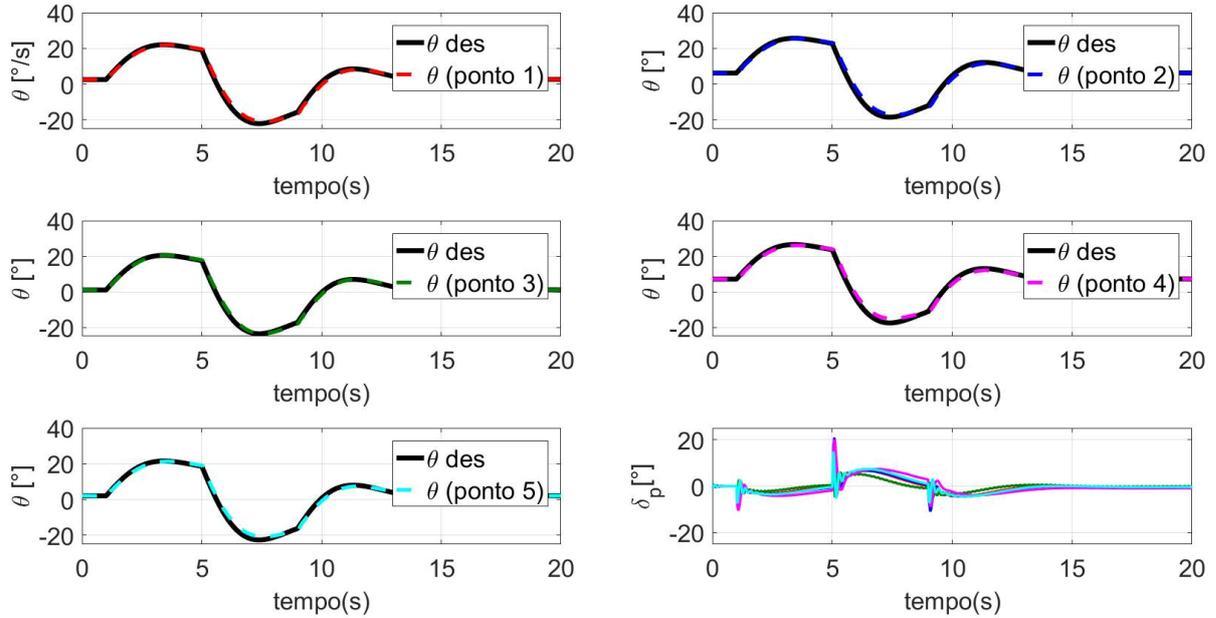


Figura 5.17: *Doublet* de ângulo de atitude RIU.

O rastreamento do *doublet* comandado foi satisfatório, tal como se observa na Figura 5.17. Análogo ao controlador por Inversão Dinâmica Não Linear (NDI) é fácil perceber que as maiores exigências de controle ocorrem nos pontos 2 e 4 correspondentes aos pontos com menor velocidade total de equilíbrio.

Rastreamento de *doublet* do ângulo de ataque

O controle selecionado para rastrear o *doublet* de ângulo de ataque mais uma vez foi a deflexão do profundor, o grau relativo determinado foi dois ($\rho = 2$). Após o processo de tentativa e erro para determinação dos ganhos, o controlador por RIU resultante é como na Equação 5.21.

$$\delta_p^\alpha = 0.5 \cdot \text{sat} \left(\frac{5\sigma_\alpha + 1e_\alpha + 1\dot{e}_\alpha}{0.1} \right) \quad (5.21)$$

A Figura 5.18 mostra que o erro de rastreamento permaneceu praticamente nulo durante o tempo de simulação em todos os pontos do envelope de voo onde foi testado, a demanda de

controle permaneceu dentro dos limites sem saturar o atuador.

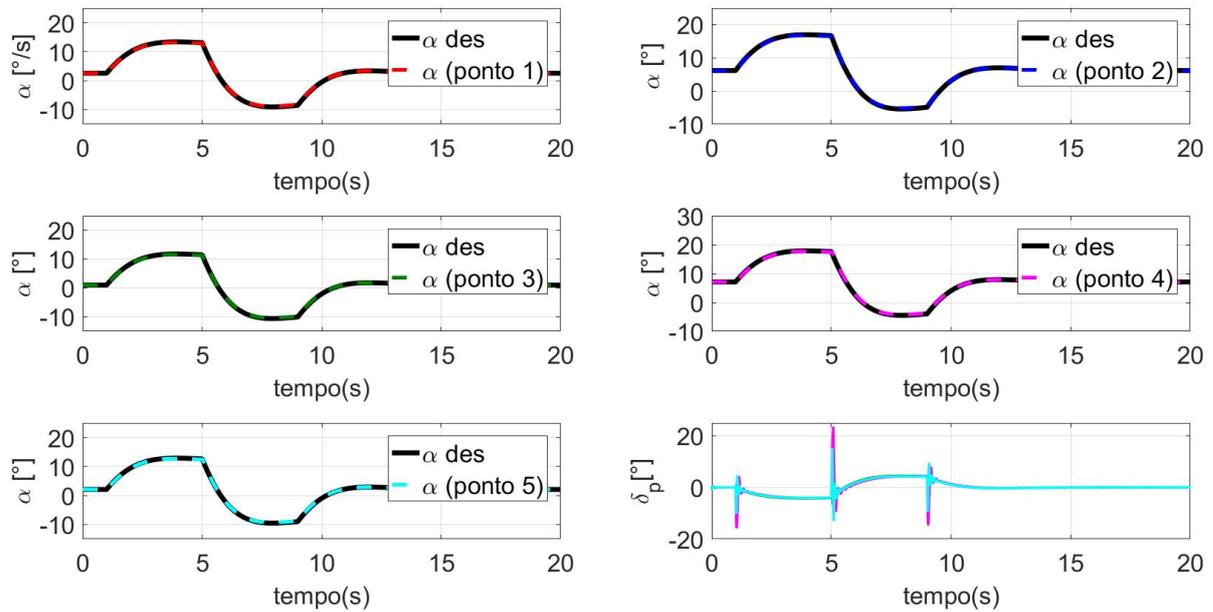


Figura 5.18: Doublet de ângulo de ataque RIU.

Controle da velocidade total com RIU

Como foi mencionado com o controlador por NDI, o problema de rastreamento de velocidade consiste em incrementar a velocidade da aeronave em um 4% da velocidade inicial durante 20 segundos (entre os segundos 10 e 30). O grau relativo da velocidade total usando como entrada de controle o profundor foi três ($\rho = 3$), tal como mencionado em de Sousa *et al.* (2013). Para o controle da velocidade são necessárias a primeira e segunda derivada do erro de rastreamento, como pode ser visto na Equação 5.22. Optou-se nesta abordagem, pelo fato das dinâmicas do erro não serem estados observáveis do sistema, estimar estas derivadas tal como em Sousa (2013) e como descrito em Seshagiri e Khalil (2005), esta estimativa consiste em utilizar observadores de alto ganho, o observador utilizado neste trabalho é definido pela Equação 5.23.

$$\delta_p^V = -0.002 \cdot \text{sat} \left(\frac{9\sigma_V + 1e_V + 2\dot{e}_V + 1\ddot{e}_V}{2} \right) \quad (5.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{e}}_{1V} \\ \dot{\hat{e}}_{2V} \\ \dot{\hat{e}}_{3V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{0.05} & 1 & 0 \\ -\frac{6}{0.05^2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{0.05^3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_{1V} \\ \hat{e}_{2V} \\ \hat{e}_{3V} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0.05} \\ \frac{6}{0.05^2} \\ \frac{1}{0.05^3} \end{bmatrix} e_{1V} \quad (5.23)$$

O observador da Equação 5.23 é implementado como um sistema linear de primeira ordem onde a totalidade dos estados $\{\hat{e}_{1V}, \hat{e}_{2V}, \hat{e}_{3V}\}$ são considerados como saídas do sistema e representam respectivamente os valores estimados do erro da velocidade (\hat{e}_{1V}), da primeira derivada do erro estimado (\hat{e}_{2V}) e da segunda derivada do erro estimado (\hat{e}_{3V}), e cuja entrada é definida pelo erro de rastreamento da velocidade (e_{1V}). A resposta da velocidade ao rastreamento do sinal de referência é mostrada na Figura 5.19.

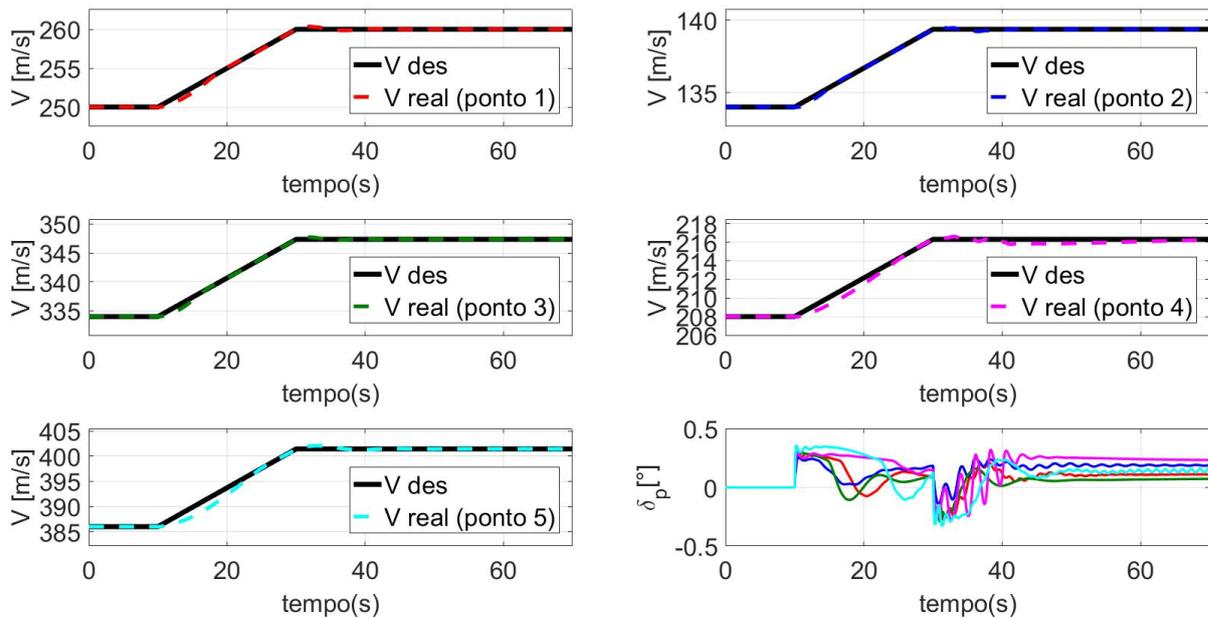


Figura 5.19: Incremento de 4% da velocidade total RIU.

O rastreamento apresentou pequenos erros de rastreamento, estes serão determinados quantitativamente na Seção 5.6. Percebe-se que os pontos onde a altitude de equilíbrio é maior precisaram de maior deflexão de profundor para a velocidade acompanhar à referência, isto pelo fato da densidade e conseqüentemente a pressão dinâmica serem menores.

Controle de altitude com RIU

Para o rastreamento da altitude usando a manete assumiu-se que o controlador de velocidade total apresentado na subseção anterior e definido pela Equação 5.22 encontra-se ativo o qual é utilizado para manter a velocidade da aeronave constante no seu valor de equilíbrio. Projetou-se o controlador de altitude por meio do conhecimento do grau relativo, sendo este $\rho = 3$ e descrito pela Equação 5.24. A referência a ser rastreada como mencionado na introdução do capítulo é do tipo rampa de tal forma que a altitude da aeronave aumente em 1% a

altitude inicial em 20 segundos.

$$\delta_{\pi}^H = -0.6 \cdot \text{sat} \left(\frac{0.08\sigma_H + 1e_H + 4\dot{e}_H + 1\ddot{e}_H}{40} \right) \quad (5.24)$$

Pelas mesmas razões especificadas no controlador de velocidade total, faz-se necessário o uso de um observador de estados que permita estimar as derivadas primeira e segunda do erro de rastreamento da altitude sendo este idêntico ao observador da velocidade (Equação 5.23). A resposta da altitude no ponto 1 do envelope de voo é ilustrada na Figura 5.20, percebe-se que a percentagem máxima de manete de combustível necessária para fazer o rastreamento não é maior do que 15%, da mesma forma a deflexão do profundor máxima demandada para manter a velocidade total constante não é maior do que 0.22° . Embora o rastreamento tenha sido satisfatório a entrada de controle experimenta *chattering* o qual pode ocasionar a excitação de dinâmicas de alta frequência não modeladas (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Uma possível causa do fenômeno oscilatório apresentado no sinal de controle é a interferência e acoplamento entre ambos os controles (manete e profundor)

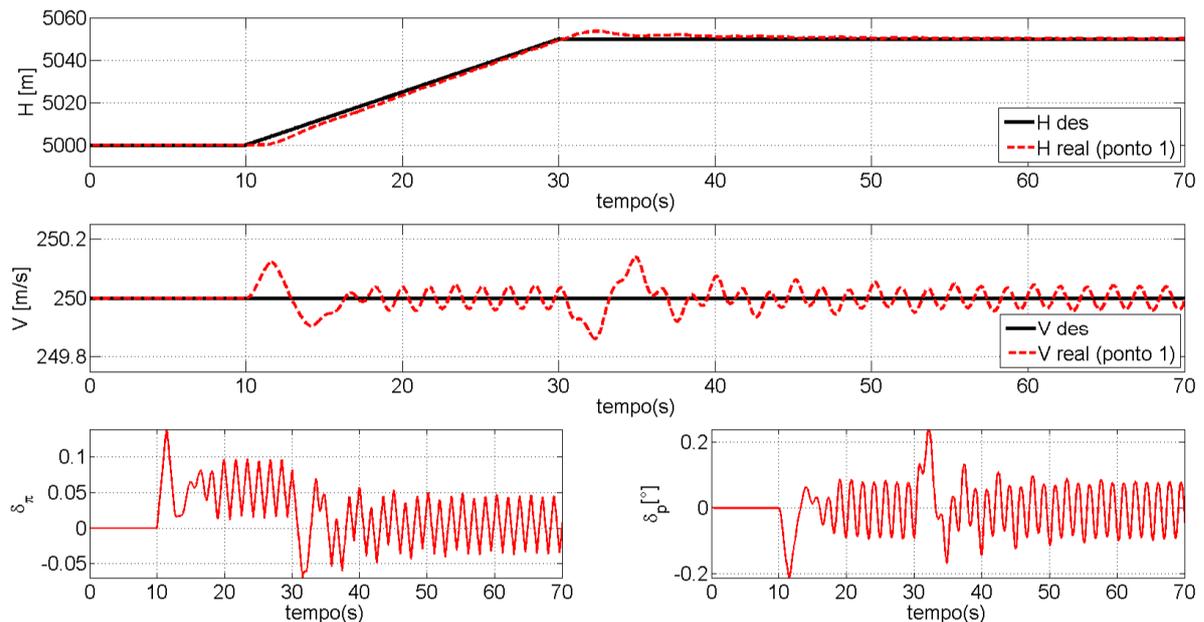


Figura 5.20: Incremento de 1% da altitude, ponto 1 RIU.

Simulações foram feitas nos quatro pontos restantes do envelope de voo conseguindo rastreamentos satisfatórios nos pontos 2, 4 e 5, Figuras 5.21, 5.23 e 5.24 respectivamente. Já no ponto 3 (Figura 5.22) o conjunto de parâmetros do RIU "sintonizados" mostraram-se incapazes de reduzir o erro de rastreamento até zero, no entanto, mostrou a tendência de se estabelecer próximo ao sinal de referência.

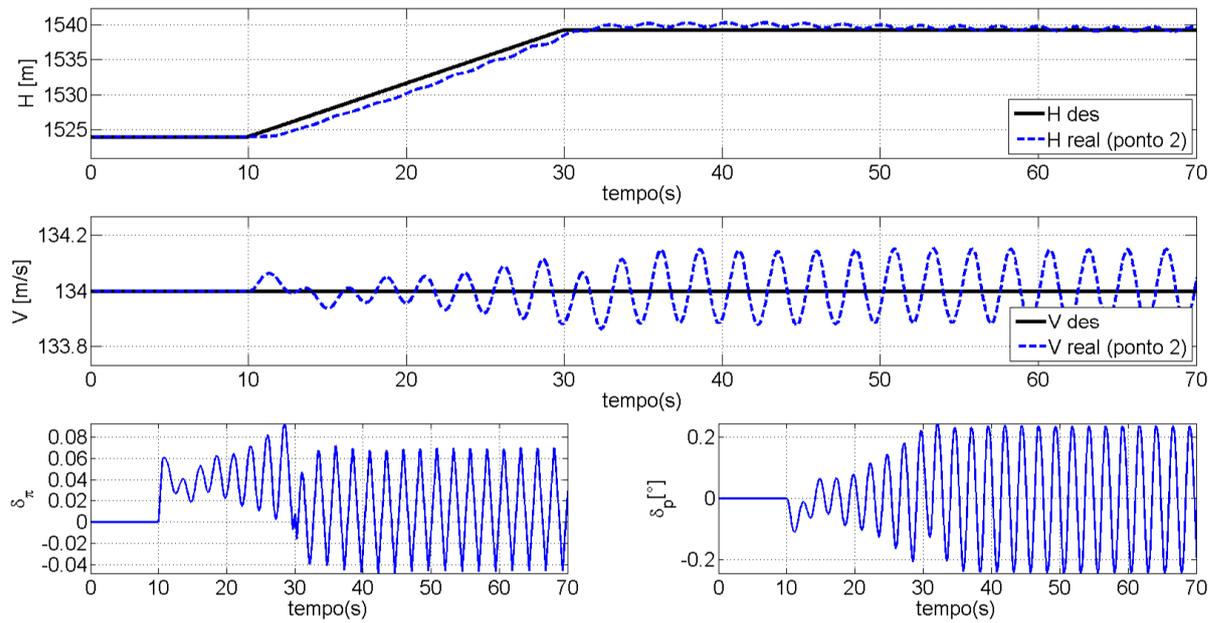


Figura 5.21: Incremento de 1% da altitude, ponto 2 RIU.

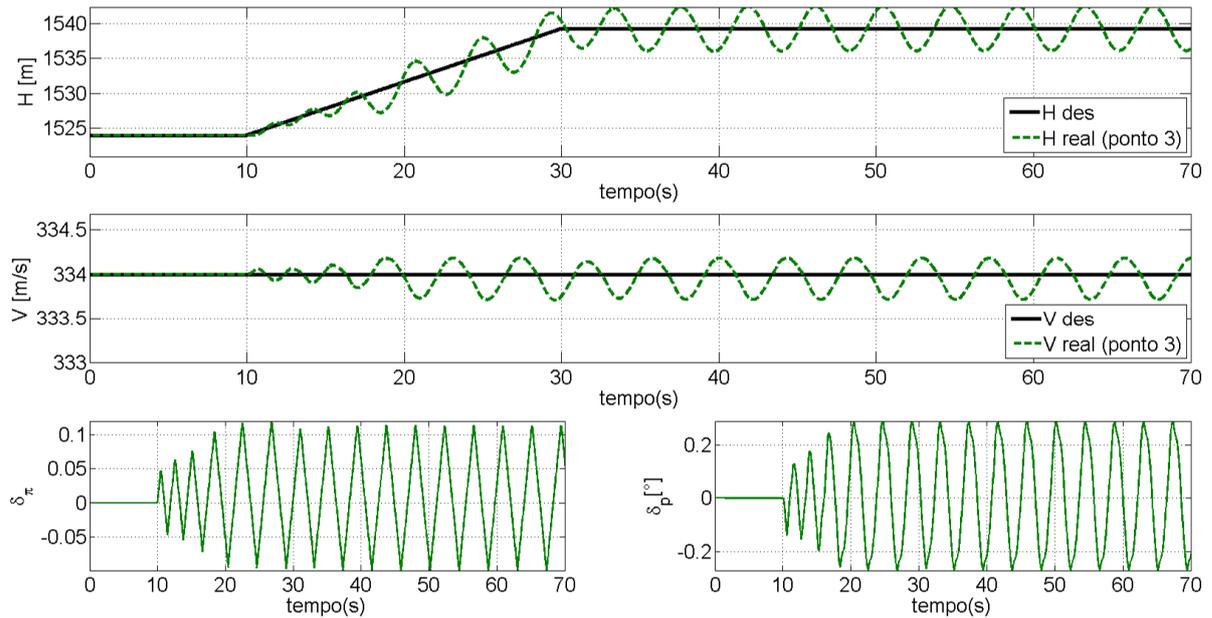


Figura 5.22: Incremento de 1% da altitude, ponto 3 RIU.

As Figuras 5.23 e 5.24 demonstram que quanto maior a altitude de equilíbrio maior também é a percentagem de manete de combustível para realizar a manobra do rastreamento, isto deve-se à diminuição da densidade do ar que conduz à redução da tração máxima do motor.

O fenômeno de *chattering* nos controles δ_π e δ_p visualizado nas Figuras 5.20 até 5.24 é resultado da oscilação do controle δ_π necessária para o rastreamento da altitude e do constante esforço de δ_p para contornar essas oscilações. Percebe-se que tal interferência entre δ_π e δ_p não

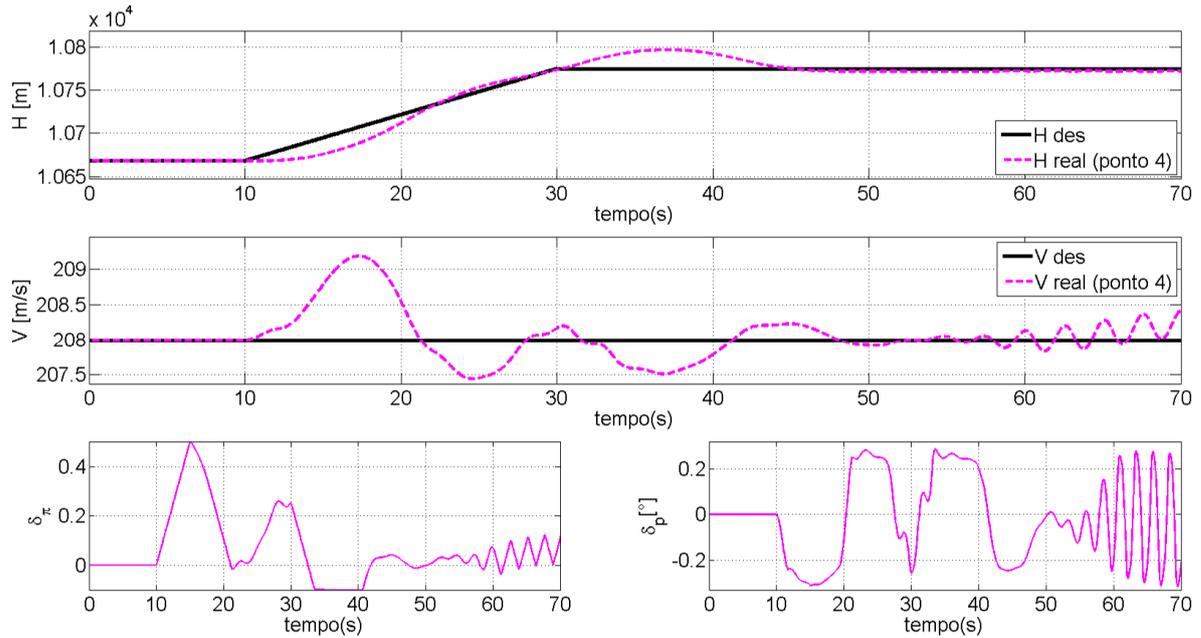


Figura 5.23: Incremento de 1% da altitude, ponto 4 RIU.

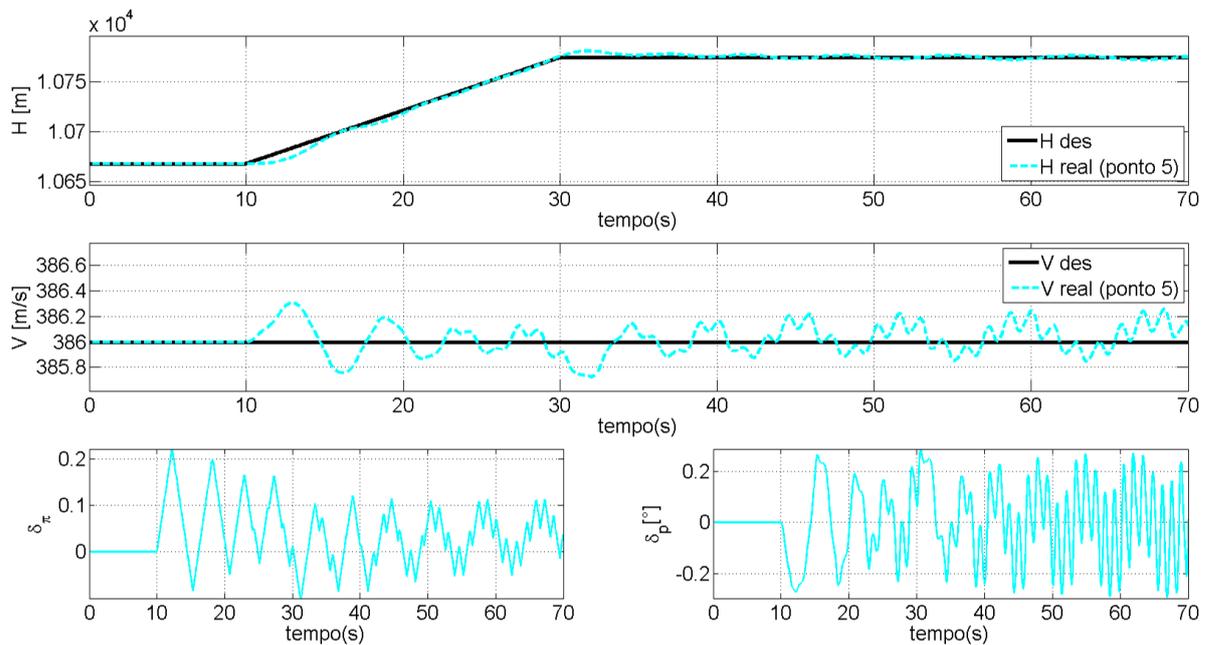


Figura 5.24: Incremento de 1% da altitude, ponto 5 RIU.

se manifesta no controlador de altitude com profundor simulado na subseção anterior.

A fim de comparar as técnicas de controle não linear com as técnicas clássicas lineares, ajustaram-se os parâmetros do RIU para controlar a altitude da aeronave com profundor. A efeitos de não sobrecarregar o texto, o resultado mostrado a seguir será só para o ponto intermediário do envelope de voo (ponto 1). Determinou-se através da lógica computacional apresentada na subseção de resultados do controlador NDI o grau relativo sendo este dois ($\rho = 2$). Decidiu-se

modificar a referência tipo rampa, de tal forma que o acréscimo na altitude fosse de 2% da inicial em 20 segundos, o dobro das simulações anteriores, isto com o intuito de demonstrar a robustez e relativamente grande região de atração que a técnica de controle fornece. O controle por RIU obtido é descrito pela Equação 5.25, e a resposta da aeronave sob a ação de este é ilustrada na Figura 5.25.

$$\delta_p^H = 0.0008 \cdot \text{sat} \left(\frac{1\sigma_H + 2e_H + 8\dot{e}_H}{3.5} \right) \quad (5.25)$$

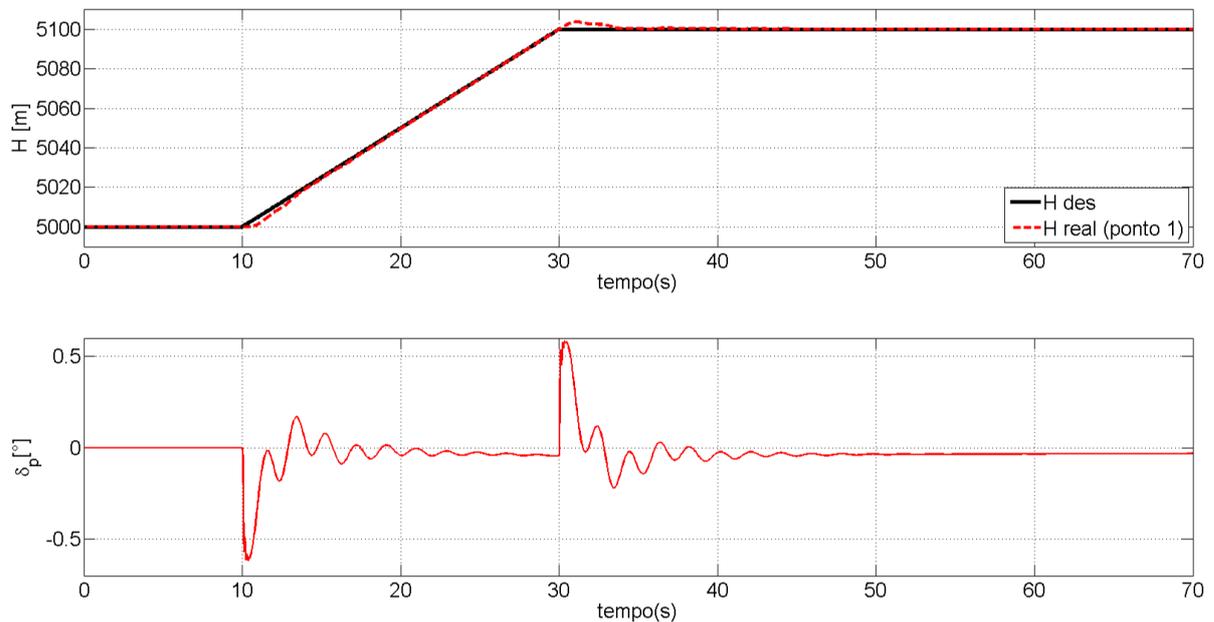


Figura 5.25: Incremento de 2% da altitude com profundor, ponto 1 RIU.

A eficácia da lei de controle no rastreamento da altitude foi verificada, nota-se um overshoot de 4 metros no segundo 31, apenas de 4% em comparação com os 100 metros comandados, o sistema consegue estabilizar em menos de 5 segundos. Enquanto à atividade de controle, o máximo valor demandado de profundor foi de 0.6° .

5.3.2 Rastreamento na Dinâmica Latero-Direcional

Rastreamento de *doublet* de taxa de rolagem

Este primeiro item analisado da dinâmica latero-direcional é a taxa de rolamento. Testou-se a capacidade de execução de um *doublet* com módulo máximo de $8^\circ/s$ passando através de um filtro de primeira ordem com constante de tempo unitária. O valor do grau relativo obtido,

como era de se esperar é de um ($\rho = 1$) e o controlador projetado é apresentado na Equação 5.26. A Figura 5.26 apresenta o resultado da simulação.

$$\delta_a^p = 1 \cdot \text{sat} \left(\frac{0.5\sigma_p + 1e_p}{2} \right) \quad (5.26)$$

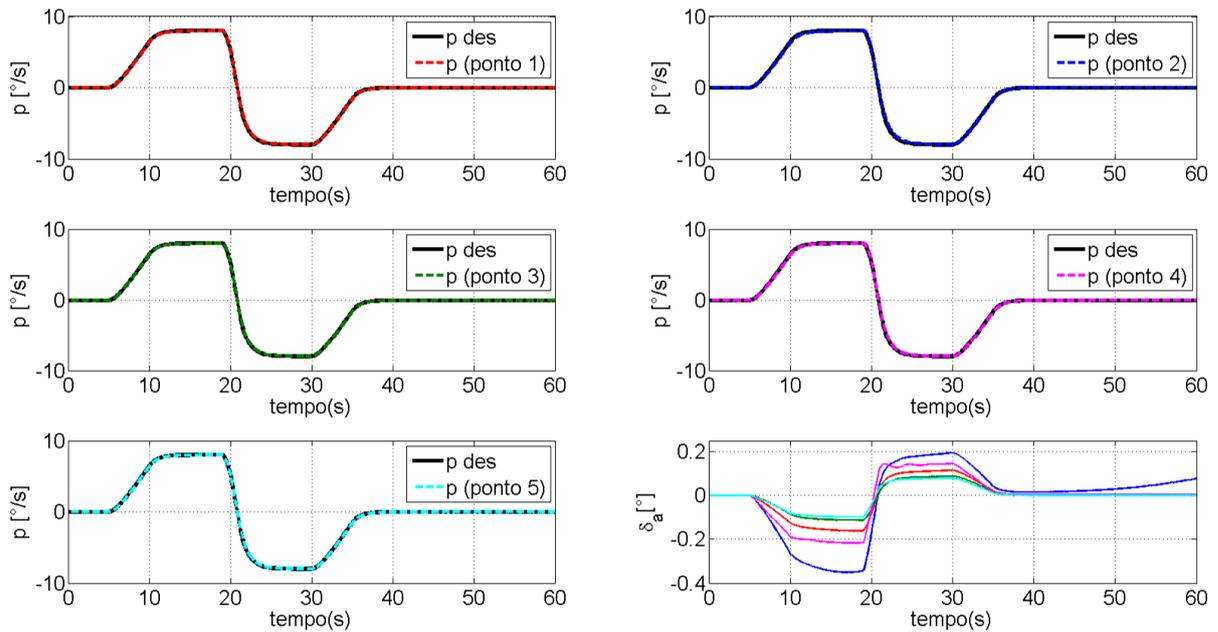


Figura 5.26: *Doublet* de taxa de rolagem RIU.

Similar ao controle de taxa de rolamento com NDI, obteve-se um rastreamento quase perfeito em todos os 5 pontos do envelope de voo, é fácil perceber que a deflexão do profundor máxima para acompanhar o sinal de referência é inversamente proporcional à velocidade de equilíbrio da simulação, sendo os casos com menor velocidade (pontos 2 e 4) os que demandam maior atividade de controle.

Rastreamento de *doublet* do ângulo de rolagem com amortecedor de guinada

O sinal de referência a ser rastreado pelo ângulo de rolagem e o amortecedor de guinada utilizados aqui são idênticos aos implementados com NDI (máximo módulo do *doublet* de 10°). O grau relativo para ângulo de rolagem com aileron é dois ($\rho = 2$), e para taxa de guinada com leme é um ($\rho = 1$) tal como mostrado na Equação 5.27. O comportamento dos estados

controlados para cada ponto do envelope de voo pode ser visto na Figuras 5.27 até 5.31.

$$\begin{aligned}\delta_a^\phi &= 1 \cdot \text{sat} \left(\frac{2\sigma_\phi + 1e_\phi + 1\dot{e}_\phi}{15} \right) \\ \delta_l^r &= 0.5 \cdot \text{sat} \left(\frac{1\sigma_r + 1e_r}{0.05} \right)\end{aligned}\quad (5.27)$$

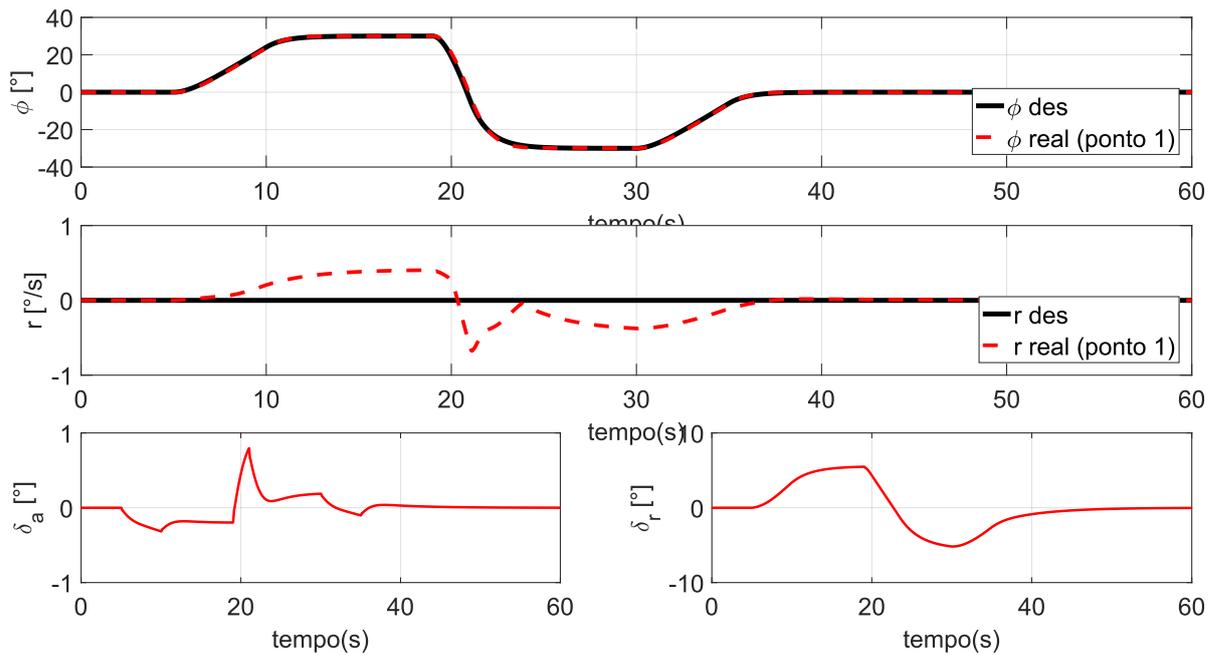


Figura 5.27: *Doublet* de ângulo de rolagem, ponto 1 RIU.

Verifica-se mais uma vez não só a robustez da técnica de controle pelo fato de conseguir com os mesmos parâmetros do controlador um rastreamento satisfatório em todos os pontos do envelope de voo, se não a grande influência que a pressão dinâmica tem na amplitude das deflexões do aileron e do leme.

Continuando com a idéia do parágrafo anterior verifica-se nas Figuras 5.10 e 5.30, correspondentes aos pontos de menor velocidade que as deflexões máximas do aileron e do leme são de aproximadamente 2° e 4.5° respectivamente. Nas Figuras 5.29 e 5.31 a atividade de controle se reduz a menos da metade desse valor.

Rastreamento de *doublet* do ângulo de derrapagem

Para o problema de rastreamento do ângulo de derrapagem da aeronave com leme o grau relativo obtido foi um (1), os parâmetros do controlador RIU podem ser vistos na Equação 5.28. Como referência para o rastreamento do ângulo de derrapagem utilizou-se um valor máximo de *doublet* de 15° . O controlador mostrou-se capaz de rastrear a referência desejada ao longo dos

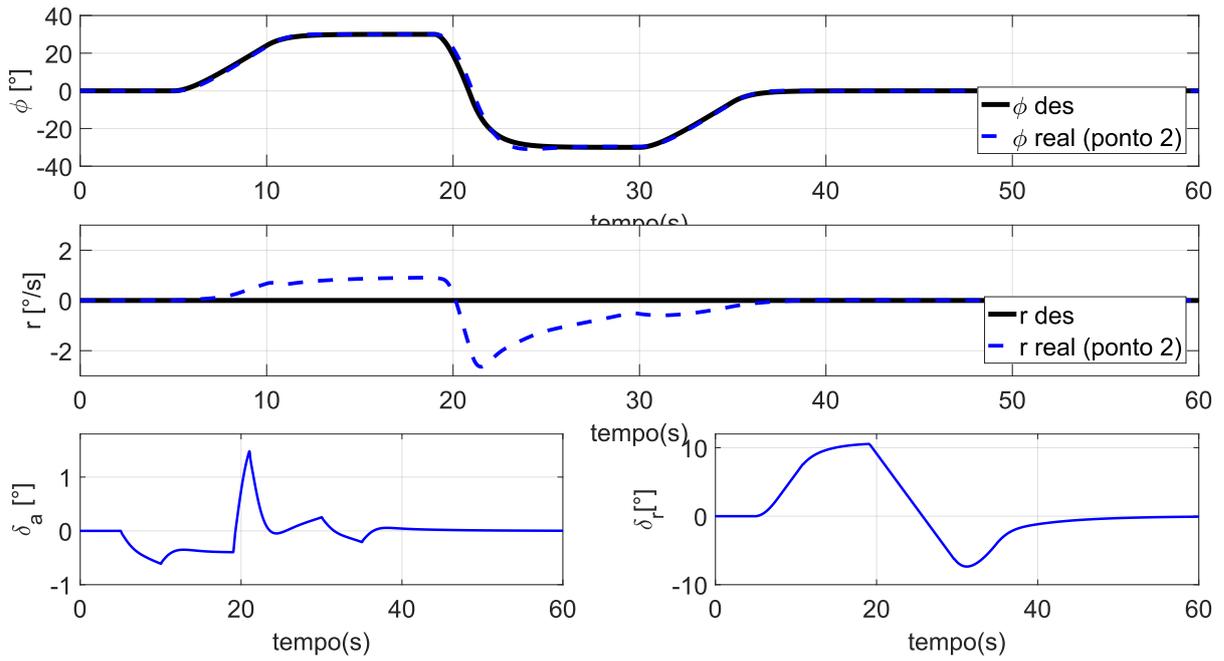


Figura 5.28: Doublet de ângulo de rolagem, ponto 2 RIU.

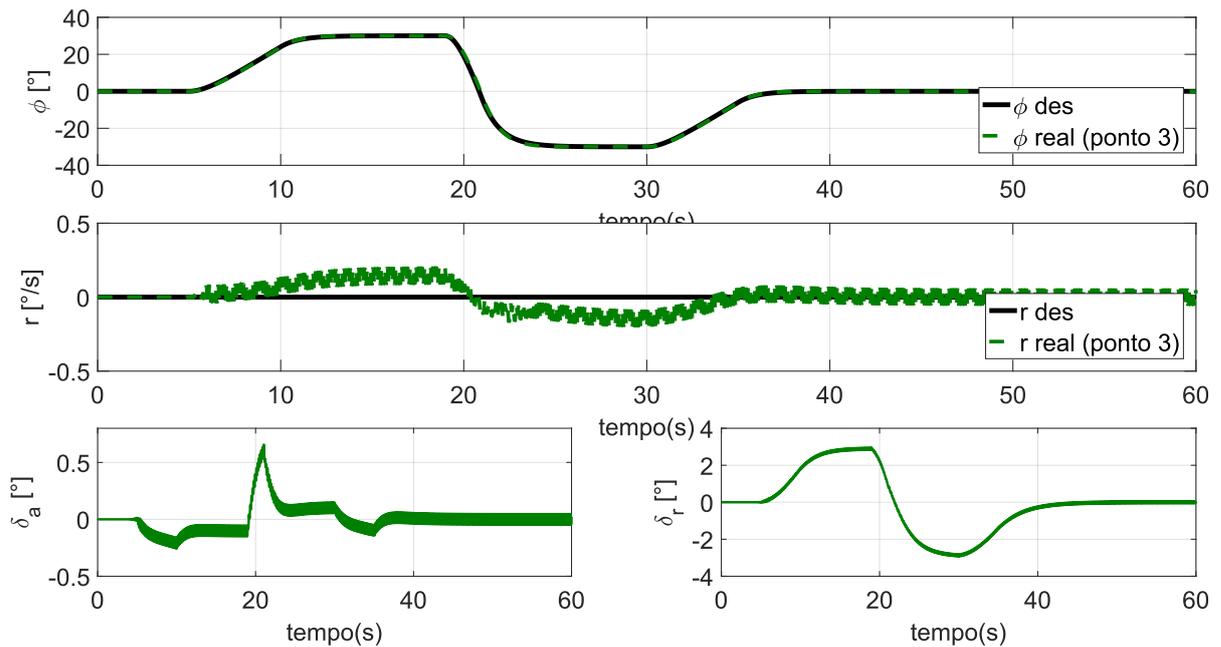


Figura 5.29: Doublet de ângulo de rolagem, ponto 3 RIU.

5 pontos do envelope de voo (Vide Figura 5.32). Note-se que o controlador NDI foi incapaz de rastrear ângulos de derrapagem maiores de 2° enquanto o RIU mostrou-se preciso mesmo com

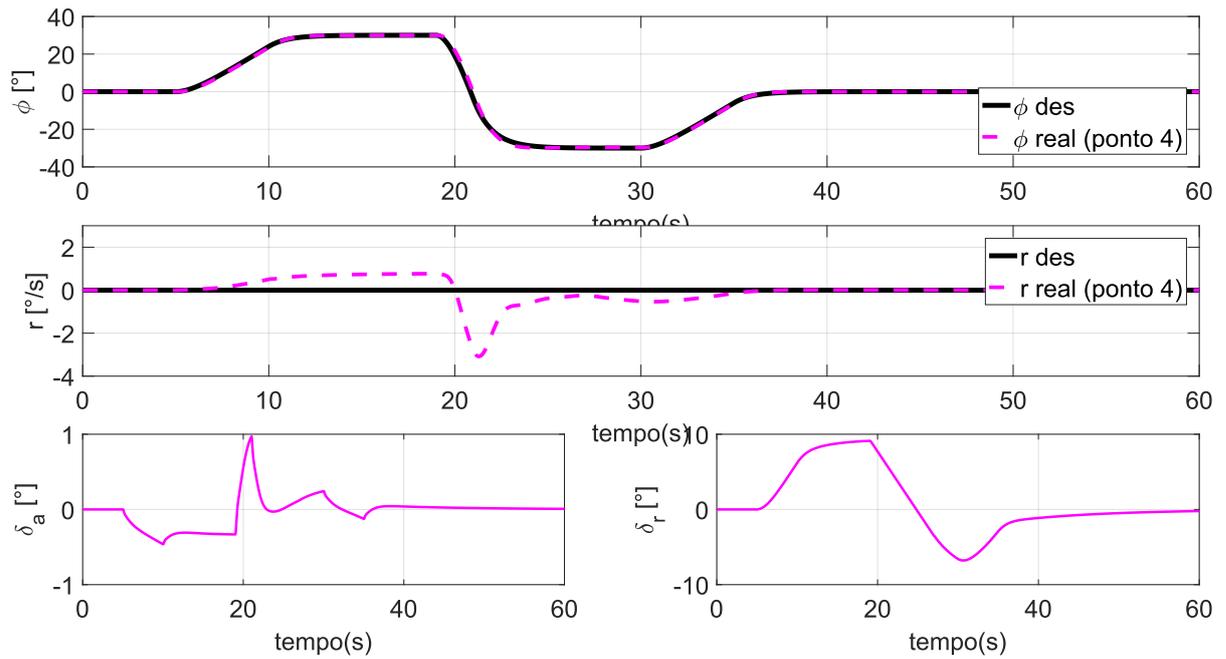


Figura 5.30: Doublet de ângulo de rolagem, ponto 4 RIU.

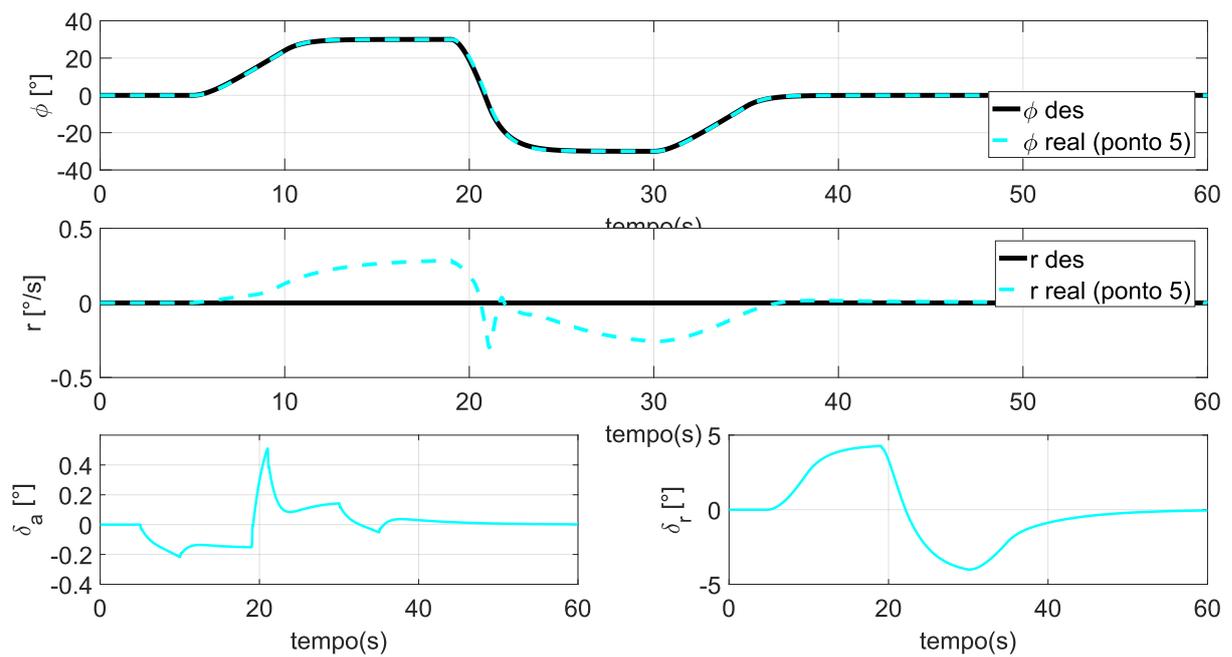


Figura 5.31: Doublet de ângulo de rolagem, ponto 5 RIU.

15°.

$$\delta_t^\beta = -6 \cdot \text{sat} \left(\frac{1\sigma_\beta + 1e_\beta}{1.5} \right) \quad (5.28)$$

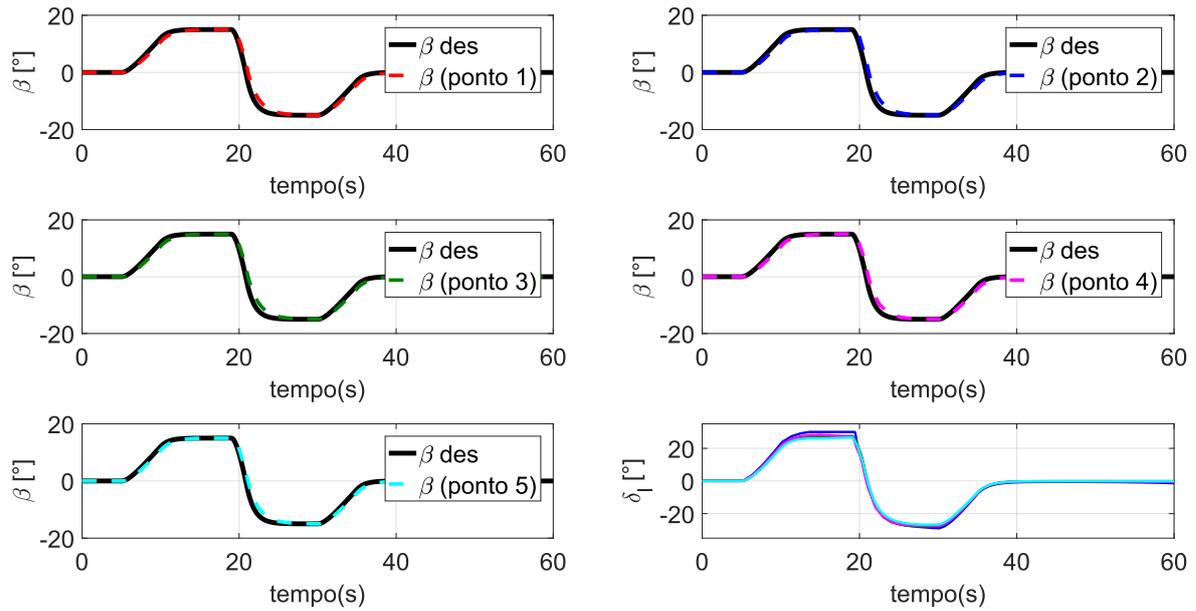


Figura 5.32: Doublet de ângulo de derrapagem RIU.

5.4 Aplicação de Controle Linear

Baseado no processo de linearização numérica apresentado no Capítulo 2, procede-se a linearizar a dinâmica do Mirage III. Usando a teoria de pequenas perturbações com $\delta X = \delta U = 1 \times 10^{-6}$ foi possível determinar as matrizes A e B do sistema linearizado para cada ponto do envelope de voo da Tabela 5.1, isto, com o intuito de fazer a comparação com as técnicas de controle não lineares RIU e NDI. Serão apresentados unicamente os resultados para o ponto 1, ou seja, com a aeronave em equilíbrio (voo reto e com as asas niveladas) a uma velocidade $V = 250m/s$ e uma altitude $H = 5000m$. As matrizes A_{p1} e B_{p1} são mostradas nas Equações 5.29 e 5.30.

$$A_{p1} = \begin{bmatrix} V & \alpha & \beta & \Phi & \Theta & p & q & r & H \\ -0,016 & -7,41 & 0 & 0 & -9,8 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 \\ -0,00 & -0,9951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,27 & 0,03 & 0 & 0,04 & 0 & -0,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -119,37 & 0 & 0 & -2,53 & 0 & 0,39 & 0 \\ 0 & -13,69 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,29 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & -1,05 & 0 \\ 0 & -250 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Tabela 5.2: Pontos de equilíbrio para as simulações.

autovalor número	valor
1	$-0,8361 \pm 3,6965i$
2	$-0,0062 \pm 0,0062i$
3	$-0,0032 \pm 0i$
4	$-0,7990 \pm 3,4105i$
5	$-2,0813 \pm 0i$
6	$-0,1872 \pm 0i$

$$B_{p1} = \begin{bmatrix} \delta_p & \delta_\pi & \delta_a & \delta_r \\ -5,4375 & 2,0163 & 0 & 0 \\ -0,3135 & -0,0004 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0045 & 0,0336 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -145,869 & 7,512 \\ -36,248 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,3761 & -5,9369 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Neste ponto é importante salientar que a aplicação do Regulador Integrativo Universal (RIU) está condicionada a sistemas de fase mínima (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Nesta parte, demonstrar-se-á que a dinâmica linearizada da aeronave (representada pelas matrizes A_{p1} e B_{p1}) para a condição de equilíbrio $V = 250m/s$ e $H = 5000m$ atende esta condição, para isto, a análise será baseada no Teorema 3.1 de Slotine *et al.* (1991). Este indica que, se os autovalores da matriz A_{p1} possuem parte real estritamente negativa, o sistema não linear correspondente será de fase mínima. Na Tabela 5.2 verifica-se que para o ponto de equilíbrio 1 esta condição é atendida. Na seção 5.6.2, através de uma análise de estabilidade não linear da dinâmica interna, será confirmado que o sistema de fato é de fase mínima.

5.4.1 Rastreamento da velocidade total usando LQR

Com o intuito de implementar o controlador LQR ao problema de rastreamento da velocidade total é preciso redefinir os estados e a saída do sistema. A arquitetura da malha de controle adotada nesta tese é similar à apresentada em Stevens e Lewis (2003). Define-se a dinâmica aumentada do sistema (aeronave+compensador), a qual é escrita como na Equação 5.31. A interação deste sistema com a arquitetura de retroação adotada pode ser vista na Figura

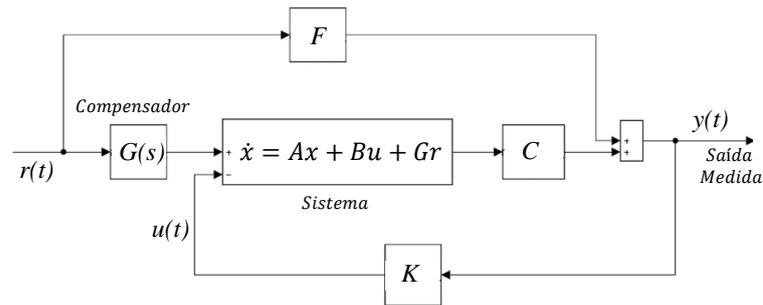


Figura 5.33: Arquitetura da malha de retroação do problema de controle. Adaptado de Stevens e Lewis (2003)

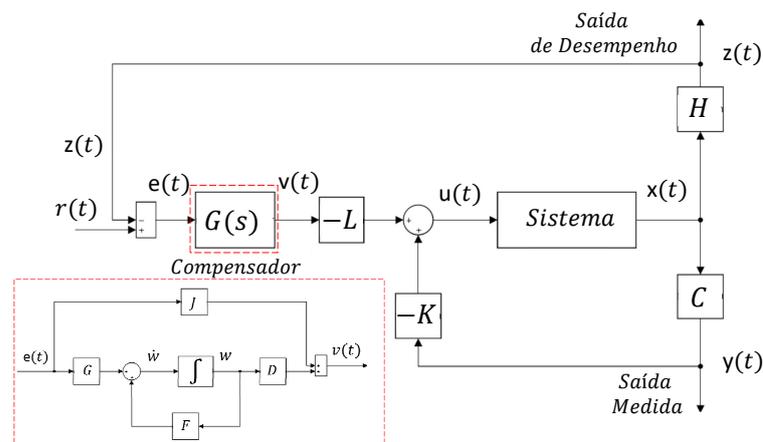


Figura 5.34: Estrutura do compensador. Adaptado de Stevens e Lewis (2003)

5.33.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gr \\ y = Cx + Fr \\ z = Hx \end{cases} \quad (5.31)$$

A estrutura geral do compensador $G(s)$ e sua interação com a malha de controle é mostrada na Figura 5.34. Percebe-se que a entrada do compensador $G(s)$ não é diretamente a referência e sim o erro entre a saída de desempenho $z(t)$ (diferente da saída medida $y(t)$) e $r(t)$ a qual é a referência a ser rastreada pela saída. F , G , D e J são matrizes escolhidas para introduzir a estrutura desejada do compensador dinâmico \dot{w} , o qual é definido pela Equação 5.32.

$$\begin{cases} \dot{w} = Fw + Ge \\ v = Dw + Je \end{cases} \quad (5.32)$$

Cuja entrada é o erro de rastreamento $e = r(t) - z(t)$ e $v(t)$ é a saída do compensador. A dinâmica do compensador pode ser reescrita em função da dinâmica própria do sistema da Equação 5.31, conduzindo à Equação 5.33 a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -GH & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} r \\ \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ -JH & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix} r \\ z &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Sendo A e B matrizes aumentadas compostas pelas matrizes A_{p1} e B_{p1} (resultantes da linearização do modelo da aeronave usando a teoria de pequenas perturbações) e pela dinâmica do atuador (a ser especificada em breve).

Para resolver o problema de rastreamento da velocidade total usando como entrada a deflexão do profundor, define-se o vetor de estados e de saída como sendo $x = [V, \alpha, \Theta, q, \delta_p, \epsilon]^T$ e $y = [V, \epsilon]^T$ respectivamente. Percebe-se que aos estados da dinâmica longitudinal adicionaram-se o atuador do profundor e a variável ϵ a qual representa a saída de um integrador, o qual representa a estrutura do compensador e usa-se para garantir que o erro estacionário seja nulo. Este tipo de compensador adotou-se da malha de controle de taxa de arfagem apresentada em Stevens e Lewis (2003) a qual foi adaptada nesta tese para o problema de rastreamento da velocidade total V da aeronave. Para o compensador se transformar num integrador do erro de rastreamento é necessário que as matrizes F e J sejam nulas e D unitária. Neste caso particular tipo SISO, a matriz L é análoga ao ganho integral de controladores PID, isto é, $L = K_\epsilon$.

O modelo do atuador de profundor utilizado é idêntico ao implementado no controle por RIU e NDI de tal forma que a comparação entre as leis de controle lineares e não lineares possa ser equivalente. O modelo do atuador no espaço dos estados é escrito como na Equação 5.34

$$\dot{\delta}_p = -20, 2\delta_p + 20, 2u_a \quad (5.34)$$

A entrada do atuador u_a pode ser traduzida como a voltagem aplicada ao atuador eletro-hidráulico e δ_p como a deflexão do profundor resultante. As matrizes A_{p1} e B_{p1} originais são reduzidas de tal forma que unicamente a dinâmica longitudinal (velocidade total, ângulo de ataque, ângulo de atitude e taxa de arfagem) seja considerada. Logo, concatenando as dinâmicas do sistema a controlar incluindo compensador e atuador, obtêm-se as matrizes da malha de controle (Equações 5.33) para o problema de rastreamento em questão, apresentadas nas Equações

5.37 e 5.36.

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & -7.41 & -9.8 & 0 & -5.43 & 0 \\ -0.00 & -0.99 & 0 & 1 & -0.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13.69 & 0 & -0.67 & -36.24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20.2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 20.2 & 0 \end{bmatrix}^T; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

A matriz C representa as saídas medidas (velocidade V e integral do erro de rastreamento ϵ), H a matriz de saída de desempenho e G a matriz de estados do compensador. Finalmente, a entrada de controle u pode ser escrita como:

$$u = - \begin{bmatrix} K_V & K_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \epsilon \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Sendo K_V o ganho de retroação da velocidade (K na Figura 5.34) e K_ϵ o ganho integral do erro de rastreamento (L na Figura 5.34). A Figura 5.35 ilustra a malha de controle para o problema de rastreamento atual.

Define-se $K = [K_V \quad K_\epsilon]$ como a matriz de ganhos. Para o problema de rastreamento com o controlador LQR, a matriz K é determinada por meio do processo de otimização (minimização do índice de desempenho J) descrito no Capítulo 2. Para isto ser feito é necessário redefinir as matrizes A_c e B_c da equação de Lyapunov (vide Equação 2.21) e define-se o índice de desempenho J , o qual é descrito pela Equação 5.38.

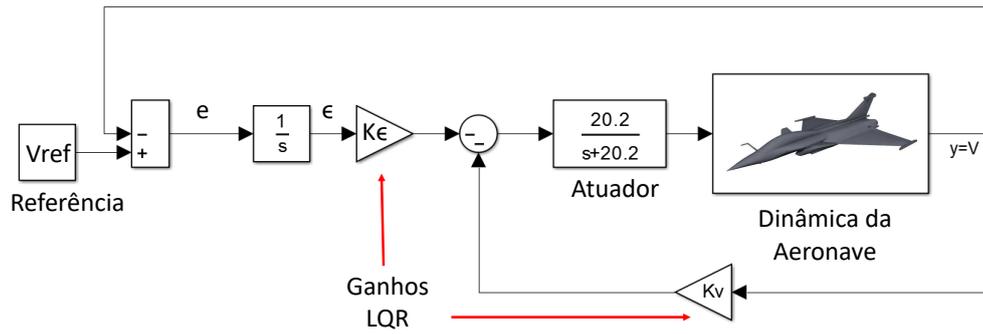


Figura 5.35: Malha de controle de velocidade total - LQR.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5.38)$$

As matrizes Q e R são escolhidas usando a regra de Bryson mencionada no Capítulo 2. Os limites impostos ao estado a controlar, ou seja, à velocidade total foi $x_1^{max} = 12m/s$ com respeito à velocidade de equilíbrio e à deflexão do profundor $u_1^{max} = [30^\circ - (-30^\circ)] = 60^\circ$, isto é, 30° em cada direção, logo Q e R serão:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 12^2 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ (60/57, 29)^2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Uma vez escrito o sistema aumentado e definidas as matrizes de desempenho Q e R procede-se a determinar uma matriz de ganhos inicial K_s conhecida como estabilizante, seus elementos são os ganhos K_V e K_ϵ iniciais de tal forma que a matriz A_c da Equação 2.14 possua autovalores com parte real estritamente negativos, esta parte do processo é importante pelo fato que nem todas as matrizes satisfazem esta condição (OGATA E YANG, 2002). Finalmente, os ganhos K_s são usados como condição inicial para minimizar o índice de desempenho J da Equação 5.38, para isto, determina-se a matriz equivalente P através da solução da Equação de Lyapunov mostrada no Capítulo 2 (see Equation 2.21). As rotinas de otimização *fmincon* do MATLAB foram utilizadas para obter tanto os ganhos K_s quanto os ganhos da matriz K tal como em Vargas e Paglione (2015). Após a realização deste processo numérico obteve-se a matriz de ganhos K (Para o ponto 1 do envelope de voo) sendo esta:

$$K = \begin{bmatrix} K_V & K_\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0272 & -0,0269 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Como foi mencionado antes neste capítulo, o intuito de projetar este controlador é compara-

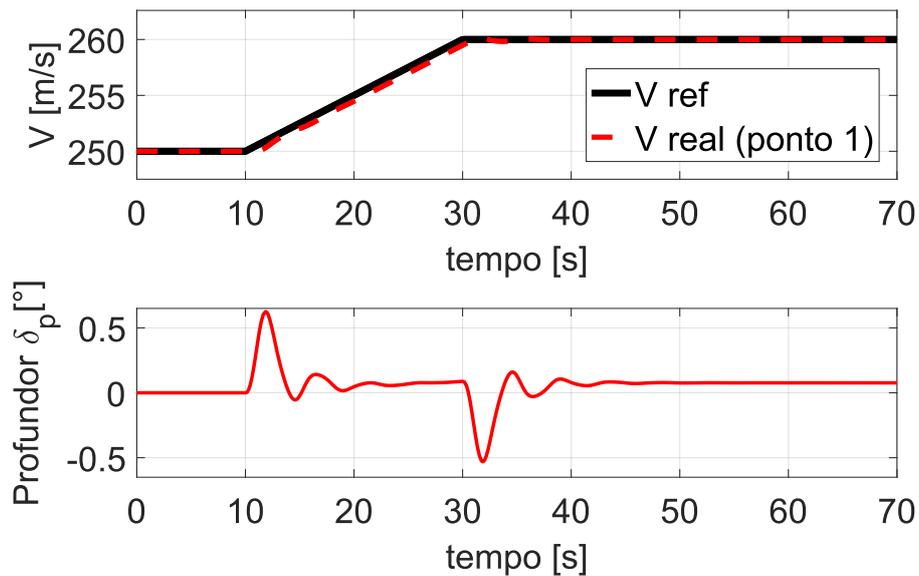


Figura 5.36: Incremento de 4% da velocidade total (ponto 1) - LQR.

Tabela 5.3: Ganhos escalonados usando LQR.

Ponto	Ganho K_V	Ganho K_ϵ
1	0,0272	-0,0269
2	0,0209	-0,0134
3	0,0450	-0,0310
4	0,0126	-0,0152
5	0,0229	-0,0360

lo com as técnicas não lineares RIU e NDI, dessa maneira, o sinal de referência a ser rastreado é idêntico ao utilizado naqueles controladores, ou seja, partir de uma velocidade inicial e fazer a transição através de um sinal tipo rampa até outra velocidade de equilíbrio. O resultado para LQR no ponto 1 é mostrado na Figura 5.36.

Percebe-se que a velocidade consegue acompanhar o sinal de referência com um pequeno erro estacionário durante a subida, no entanto, este erro permanece nulo quando não há variação na velocidade desejada (velocidade inicial e final). O procedimento de otimização de J é repetido para cada ponto do envelope de voo, os ganhos obtidos para cada um deles são apresentados na Tabela 5.3, e as respostas ao rastreamento da referência de velocidade total para os pontos 2 até 5 do envelope de voo são ilustradas na Figura 5.37.

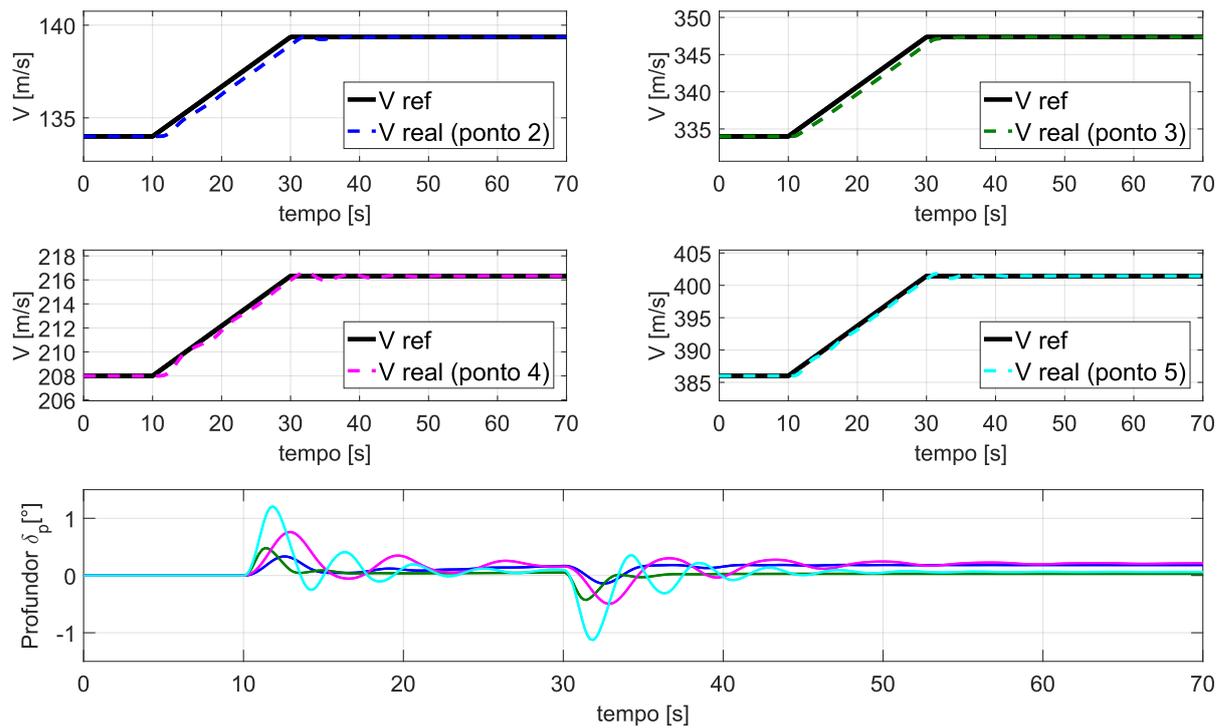


Figura 5.37: Incremento de 4% da velocidade total (pontos 2-5) - LQR.

Percebe-se na Figura 5.37 que o rastreamento foi satisfatório. Já com respeito ao controle δ_p , cabe salientar que as deflexões são relativas, tendo como referência sua respectiva deflexão de equilíbrio para o ponto no qual foi linearizado o sistema.

5.4.2 Rastreamento da altitude usando controle clássico

O problema de controle a ser resolvido nesta seção trata-se do rastreamento de altitude da aeronave Mirage III, a dinâmica linearizada do mesmo foi obtida no início desta seção, pretende-se formular o problema de rastreamento tal como proposto por Stevens e Lewis (2003) descrito brevemente no Capítulo 2, o qual requer a transformação da dinâmica da aeronave escrita no espaço dos estados em funções de transferência com o intuito de compensar a resposta do sistema usando ferramentas de análise no domínio da frequência e o auxílio da técnica lugar das raízes.

Tal como descrito no Capítulo 2, procede-se a ajustar os ganhos de retroação da taxa de arfagem e ângulo de atitude a fim de que o amortecimento do modo curto período seja o melhor possível (alto amortecimento sem exagerar na frequência). A dinâmica longitudinal linearizada da aeronave em questão para o ponto 1 do envelope de voo é dada pelas matrizes da Equação

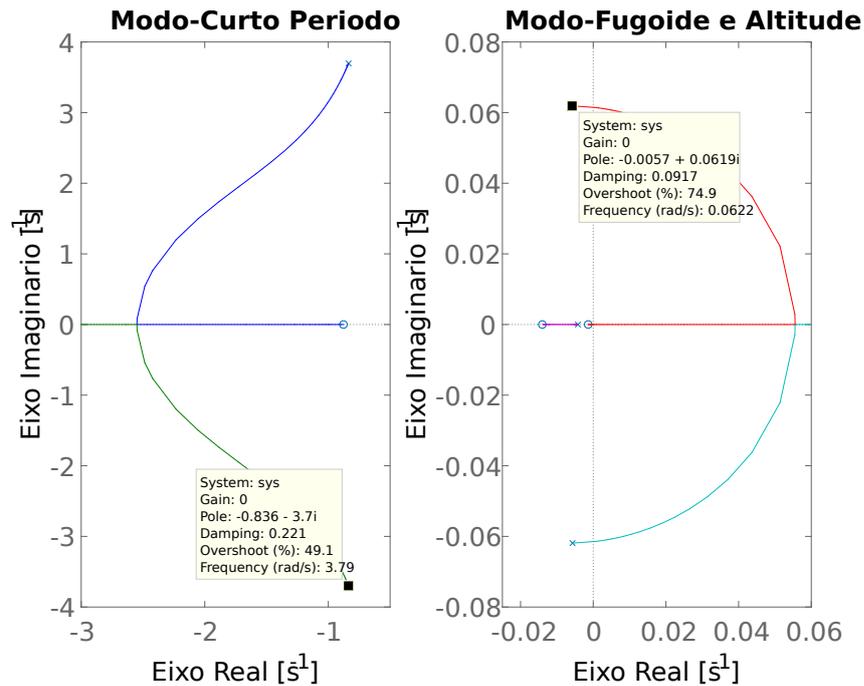


Figura 5.38: Lugar das raízes em malha aberta, Mirage III - ponto 1.

5.41.

$$A = \begin{bmatrix} V & \alpha & \theta & q & H \\ -0,0161 & -7,4105 & -9,8 & 0 & 0,0001 \\ -0,0003 & -0,9951 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13,6939 & 0 & -0,6766 & 0 \\ 0 & -250 & 250 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$B = \begin{bmatrix} -5,4375 & -0,3135 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste **primeiro passo** determinar-se-ão os ganhos de retroação da taxa de arfagem q (*loop* interno) e o ganho do compensador proporcional do ângulo de atitude θ (*loop* externo), vide Figura 5.41, devido a isto, consideram-se unicamente estas duas saídas na matriz C da Equação 5.41. A função de transferência em malha aberta para o ângulo de atitude sem considerar o atuador é dada pela Equação 5.42 e o lugar das raízes correspondente é ilustrado na Figura 5.38.

$$\frac{\theta}{\delta_p} = \frac{-36.2486(s + 0.8774)(s + 0.0140)(s + 0.00139)}{(s + 0.8361 \pm 3.6965i)(s + 0.00570 \pm 0.0619i)(s + 0.00421)} \quad (5.42)$$

Percebe-se que todos os modos são estáveis em malha aberta, no entanto, os amortecimentos do curto período é fugoide $\zeta_{cp} = 0,221$ e $\zeta_F = 0,0917$ respectivamente, apresentam valores muito baixos. Caso seja necessário aplicar somente um compensador proporcional para o controle do ângulo de atitude θ , valores mínimos do ganho deslocariam os polos do modo fugoide ao plano real positivo tornando o sistema instável, já os polos do curto período permanecerão estáveis para qualquer ganho e o polo da altitude desaparecerá com seu respectivo zero.

O modelo de atuador de profundor definido na Equação 5.34 pode ser escrito no espaço dos estados como na Equação 5.43. O efeito do atuador na malha aberta do sistema pode ser visto na Figura 5.39.

$$A_a = [-20.2]; B_a = [20.2]; C_a = [-1]; D_a = [0] \quad (5.43)$$

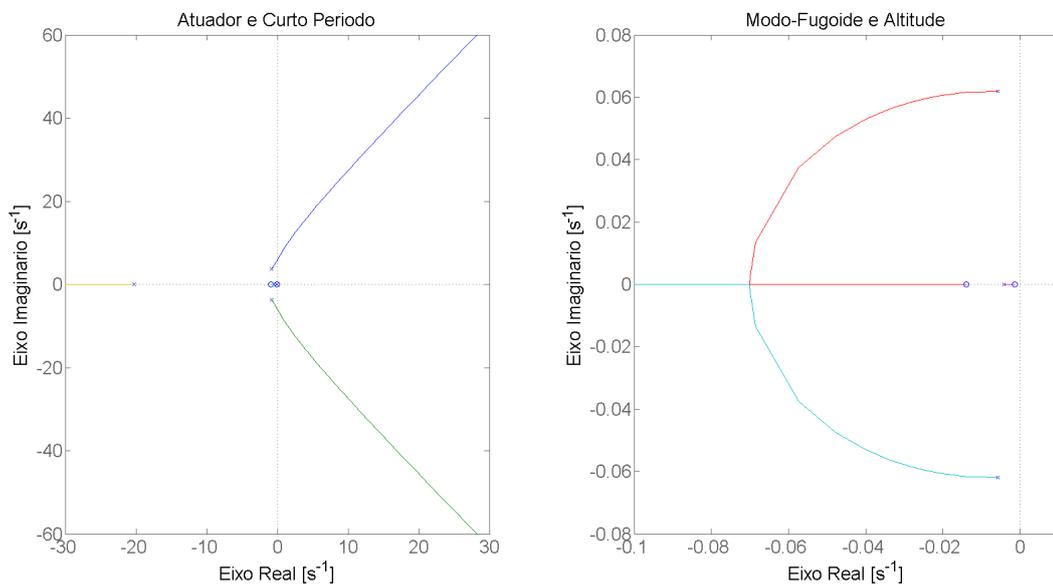


Figura 5.39: Lugar das raízes em malha aberta, com atuador, ponto 1.

Nota-se que o atuador consegue estabilizar o modo fugoide mas desestabiliza o curto período, percebe-se que seus polos se deslocam até atingir assintotas de aproximadamente 45° que os conduz à parte real positiva do plano complexo, tornando-os instáveis. Já os polos do modo fugoide se aproximam ao eixo real e o amortecimento cresce assim que o ganho é aumentado, finalmente o polo da altitude decresce até atingir seu próprio zero, mas sem ficar

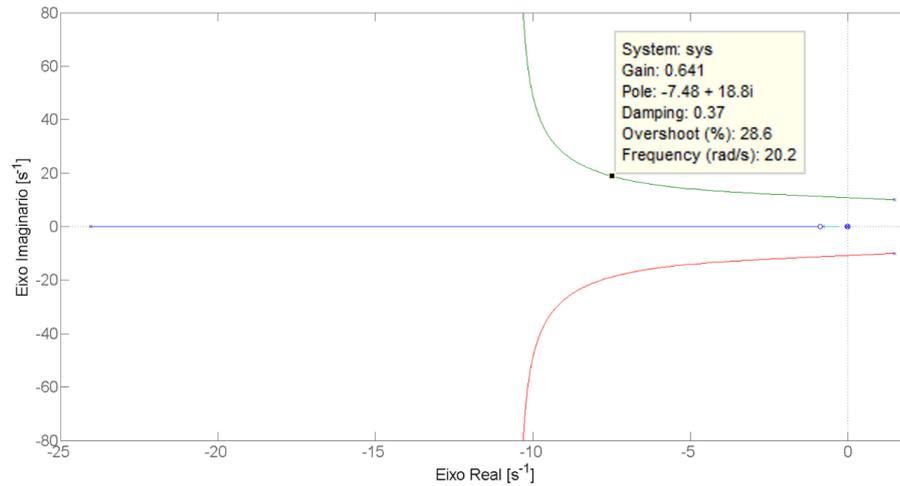


Figura 5.40: Lugar das raízes em malha fechada com atuador, ponto 1.

instável.

Prosseguindo com o passo 1 proposto no Capítulo 2, procede-se a fechar a malha de controle através da realimentação da taxa de arfagem q e do ângulo de atitude θ , fixa-se o ganho, neste caso foi selecionado $K_\theta = 3$ e escolhe-se o melhor ganho K_q possível, ao entendimento do autor desta tese o melhor ganho possível refere-se a um ganho que forneça o maior amortecimento possível sem aumentar excessivamente a frequência. Para auxiliar nesta escolha utilizar-se-á o gráfico do lugar das raízes do sistema em malha fechada representado pela Figura 5.40. O ganho selecionado foi $K_q = 0,641$, o qual permite aumentar o amortecimento de curto período para $\zeta_{cp} = 0,37$, desta forma a malha interna de controle está totalmente definida.

Continuando com o **segundo passo**, faz-se necessário modificar a matriz C , adicionando a saída de altitude da aeronave. Uma vez feita a realimentação da altitude, encontra-se a função de transferência entre a altitude H (estado a controlar) e θ_c (ângulo de atitude, variável intermediária de controle) como mostrado na Equação 5.44, de tal forma que baseado na posição dos polos e zeros possam ser projetados o compensador de avanço de fase e o respectivo ganho da malha de controle K_c (Vide Figura 5.41).

$$\frac{H}{\theta_c} = \frac{-4.7495(s + 10.4122)(s + 0.0108)(s - 9.7363)}{(s + 7.4823 \pm 18.7999i)(s + 6.1413)(s + 0.7659)(s + 0.0145)(s + 0.0015)} \quad (5.44)$$

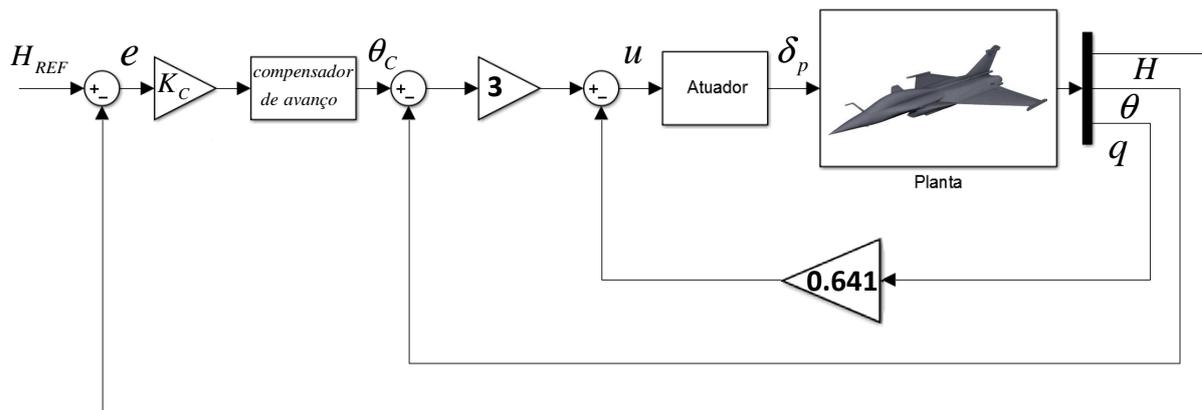


Figura 5.41: Malha de controle de altitude.

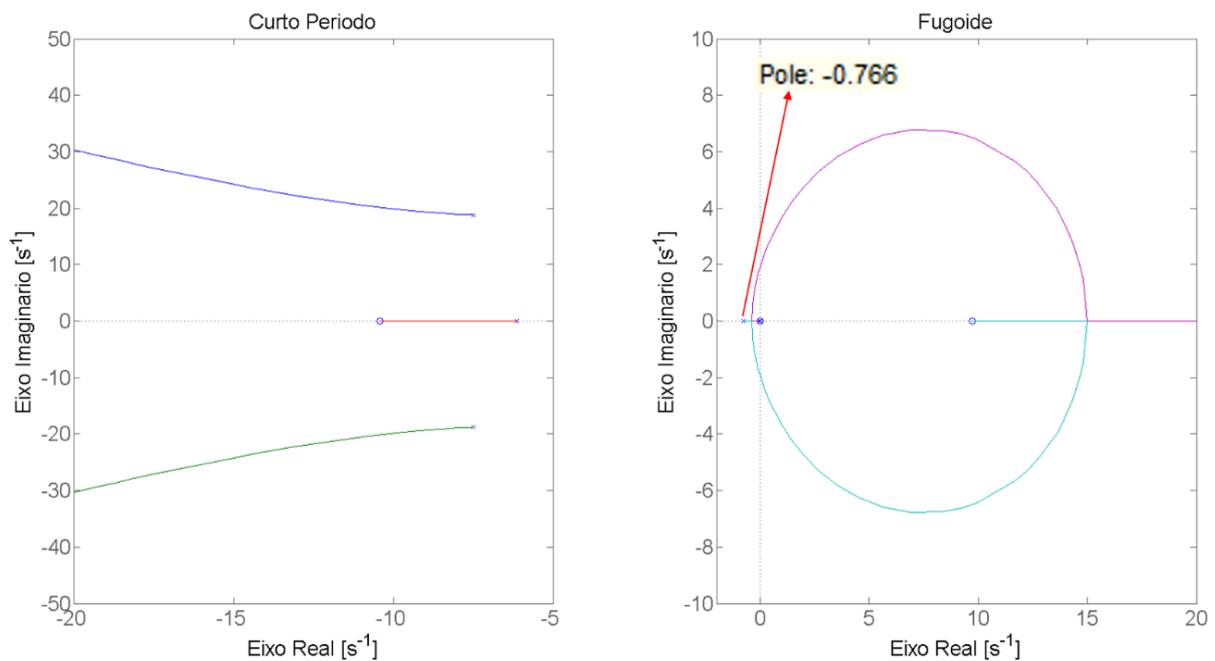


Figura 5.42: Polo de referência para compensador avanço-atraso de fase

Percebe-se no gráfico do lugar das raízes desta função de transferência (Figura 5.42), que os polos do curto período permanecem estáveis para qualquer ganho, já os polos do modo fugoide apesar de estarem localizados no semiplano esquerdo, mostram uma tendência a se desestabilizar passando facilmente ao semiplano direito.

Se examinarmos a resposta da malha de controle no diagrama de bode da Figura 5.43 é possível concluir que o sistema é instável devido à Margem de Fase (MF) e Margem de Ganho (MG) serem negativas. A solução proposta por Stevens e Lewis (2003) é posicionar o zero do compensador de avanço de fase próximo do polo do modo fugoide localizado mais à esquerda do plano complexo, sendo este $s = -0,766 \approx -0,77$ (vide Figura 5.42). A relação

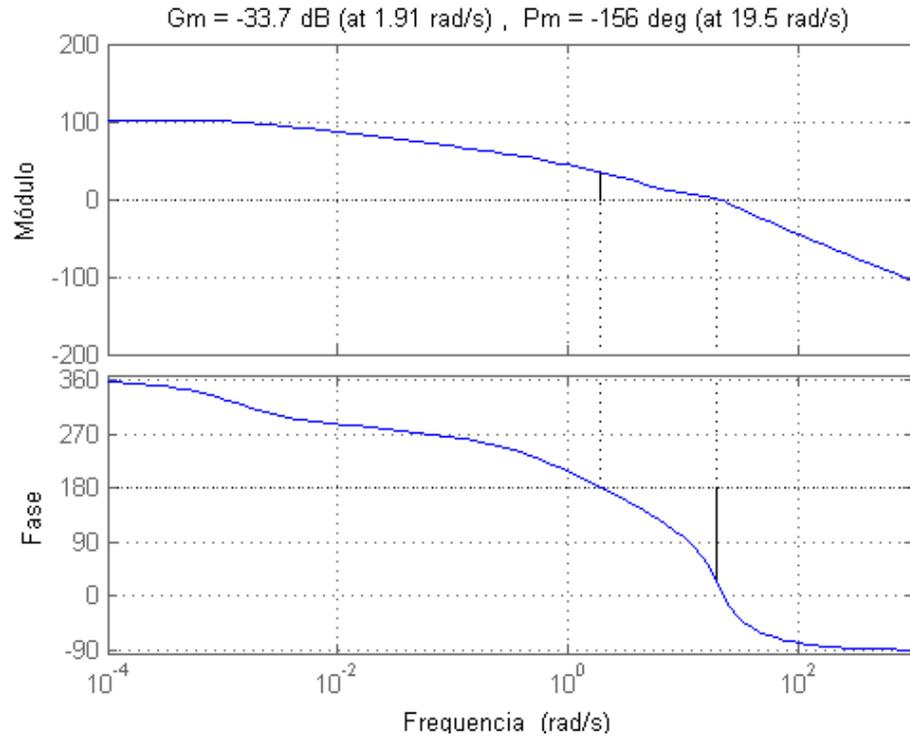


Figura 5.43: Diagrama de Bode, sem compensador

polo/zero adotada neste trabalho é de 8 (recomendada também em Stevens e Lewis (2003)), logo, o compensador de avanço de fase é definido como na Equação 5.45.

$$G_{comp} = \frac{s + 0.77}{s + 6.16} \quad (5.45)$$

Uma vez implementado o compensador de avanço de fase, ajustou-se o ganho do compensador por um processo de tentativa e erro de tal forma que tanto a MF quanto a MG fossem positivas, desta forma, garante-se a estabilidade da malha de controle. Usando o ganho $K_c = 0,15$ conseguiu-se obter uma $MF = 15,2^\circ$ e $MG = 2,59$, como pode ser visto na Figura 5.44.

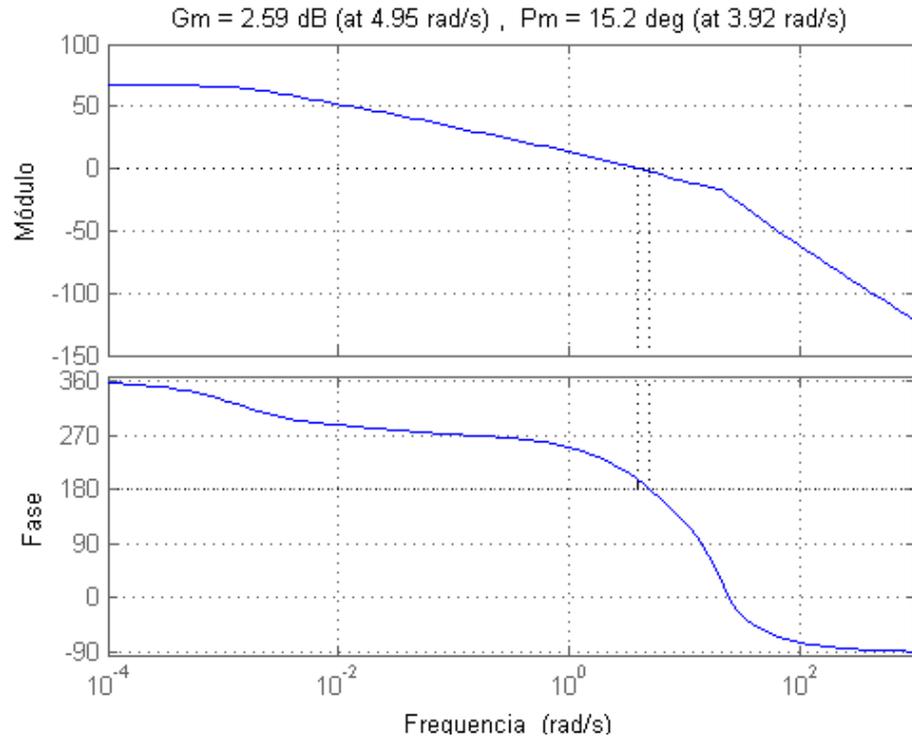


Figura 5.44: Diagrama de Bode, com compensador de avanço.

Desta forma, define-se totalmente o controlador de altitude com compensação por técnicas de controle clássicas (compensador de avanço de fase e retroação de estados). Usa-se como sinal de referência uma entrada tipo rampa para incrementar em 2% a altitude inicial e realizou-se a simulação numérica do rastreamento. É possível observar na Figura 5.45 que o rastreamento do sinal de referência foi satisfatório, conseguindo fazer um ascenso de $100m$ em $20s$ com um erro de rastreamento quase nulo e com amplitude de controle baixa (ao redor de $\pm 4^\circ$) quando comparado com a deflexão máxima do profundor (30°).

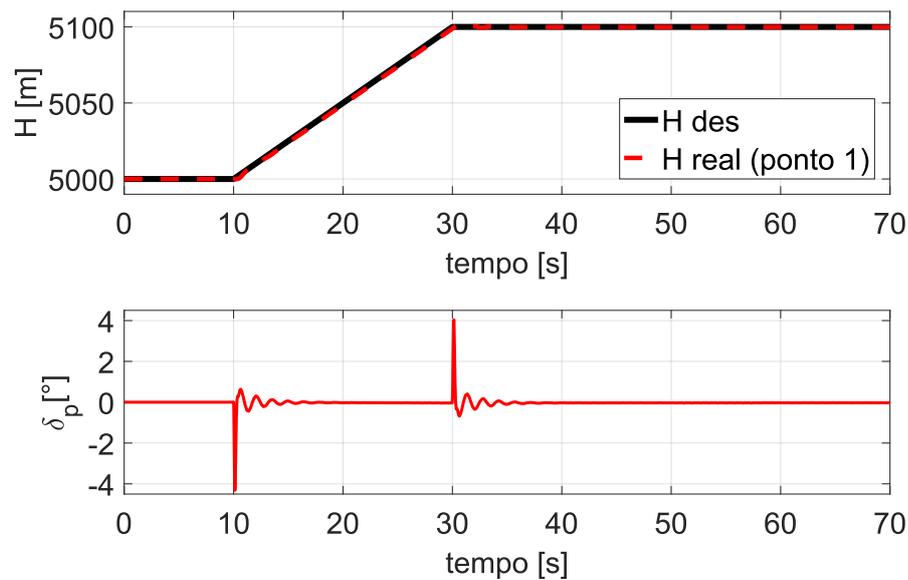


Figura 5.45: Incremento de 2% da altitude, ponto 1, Controle Clássico.

Apesar dos excelentes resultados (locais, ponto 1), a grande desvantagem desta técnica de controle é a dependência de ferramentas auxiliares como lugar das raízes e diagrama de bode para a definição dos parâmetros do controlador (ganhos), como consequência, carece de um processo sistemático como o oferecido pela técnica de controle LQR.

5.5 Comparação entre as técnicas RIU e NDI

Procede-se nesta seção a comparar as técnicas de controle não linear NDI e RIU. A resposta de cada controlador foi simulada sob as mesmas condições voo a fim de que a comparação seja válida, no entanto, pelo fato dos ganhos de ambos os controladores terem sido obtidos através de um processo de tentativa e erro, a comparação não é totalmente equivalente (parâmetros diferentes gerariam respostas distintas). Com o intuito de não ocupar mais espaço do que o necessário nesta seção, a comparação das respostas de rastreamento serão unicamente para o primeiro ponto do envelope de voo (ponto 1). Tal como comentado na Seção 5.1, os índices de desempenho EA e AC foram propostos para comparação das técnicas. A função do MATLAB `trapz()` foi utilizada para computar o valor do erro absoluto acumulado ao longo do tempo de simulação para cada caso, este erro permitirá fazer uma análise quantitativa do desempenho de cada uma das técnicas. Analogamente, calcula-se a área debaixo da curva de deflexão relativa da superfície de controle (com referência à deflexão de equilíbrio para o ponto no envelope de voo correspondente), este valor permitirá estimar a demanda de controle.

5.5.1 Rastreamento da taxa de arfagem

A comparação é mostrada na Figura 5.46, na parte superior esquerda desta figura percebe-se que o rastreamento do sinal de referência foi satisfatório mostrando suficiente precisão, um *zoom* feito entre os 20 e 25 segundos de simulação (parte superior direita) mostra uma precisão maior no rastreamento feito com o controlador RIU. Na Figura 5.47 é possível confirmar esta afirmação, o erro acumulado do RIU foi menor nos pontos 1,3,4 e 5, a razão pela qual o controlador RIU não foi tão eficiente no ponto 2 pode ser vista na Figura 5.15, nesta figura é possível ver a tendência da taxa de arfagem real se afastar da referência aos 30 segundos aproximadamente, fato atribuível à baixa eficiência da superfície de controle pela baixa velocidade atingida nesse intervalo de tempo (Vide Figura 5.16). O RIU mostrou-se superior à NDI enquanto ao erro de rastreamento embora a demanda de controle tenha sido levemente maior nos pontos 1,3,4 e 5, isto pode ser verificado na Figura 5.47.

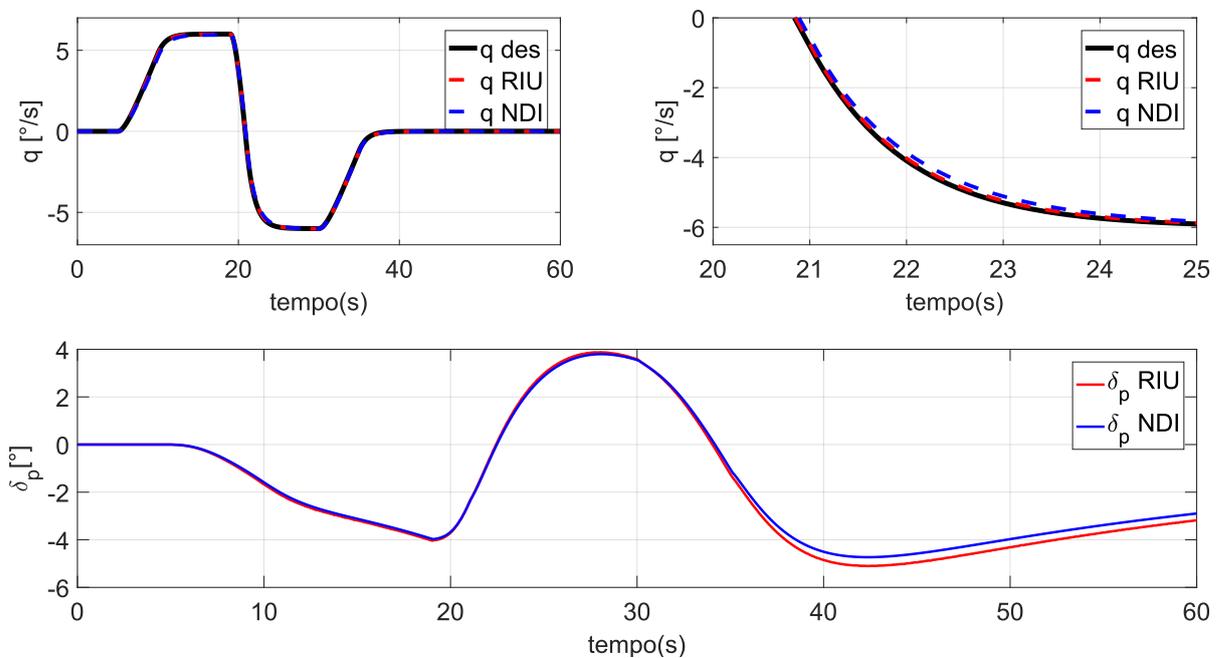


Figura 5.46: Rastreamento de *doublet* de taxa de arfagem, ponto 1, RIU e NDI.

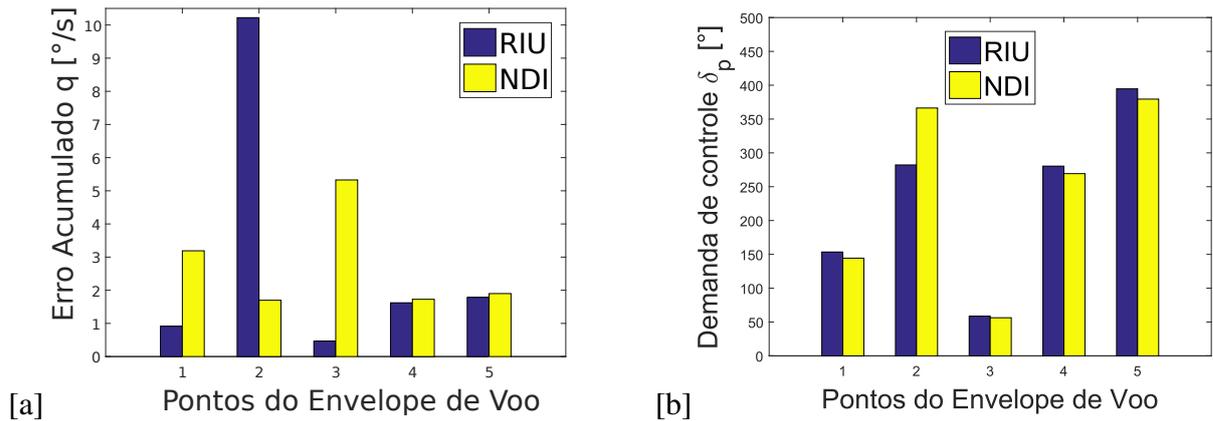


Figura 5.47: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. taxa de arfagem, RIU e NDI.

5.5.2 Rastreamento do ângulo de atitude

Com respeito ao rastreamento do ângulo de atitude percebe-se na Figura 5.48 que o controlador NDI foi mais preciso com uma diferença pequena, na Figura 5.49 evidencia-se a superioridade do controlador NDI em todos os pontos do envelope de voo (menor erro acumulado). A atividade de controle para o RIU tornou-se mais oscilatoria, suspeita-se que a camada limite seja menor do que a adequada (possível *chattering*), percebe-se que a demanda de controle também foi similar exceto no ponto 5 onde o controlador NDI demandou maior atividade de controle.

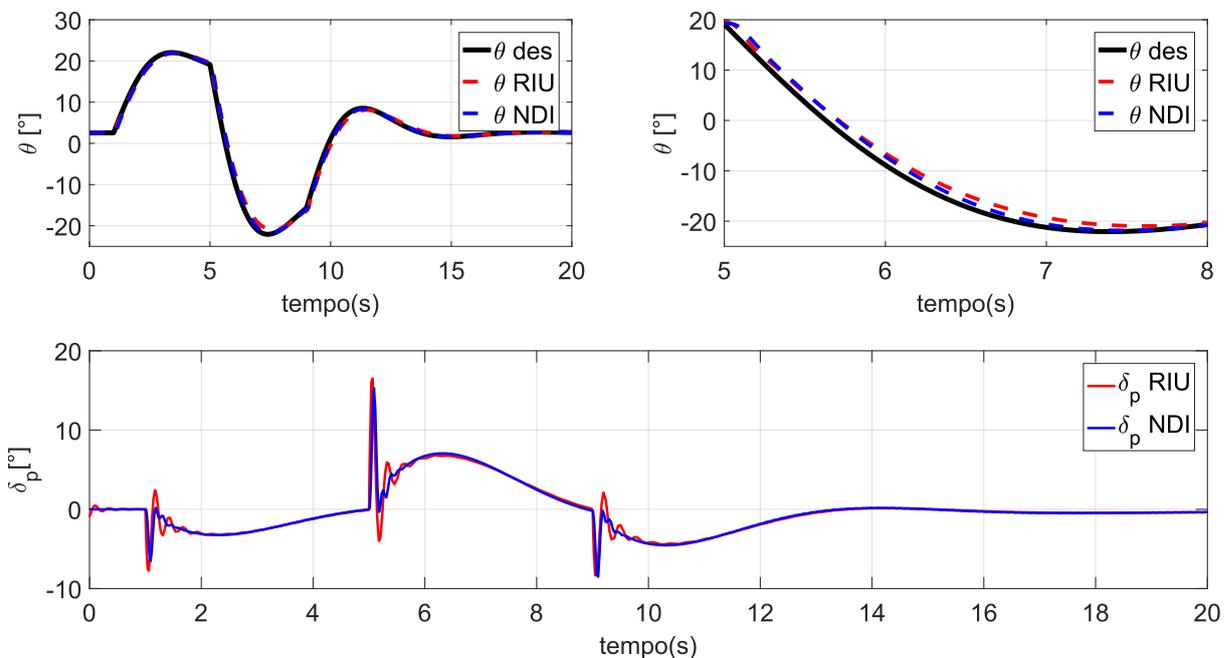


Figura 5.48: Rastreamento de *doublet* de ângulo de atitude, ponto 1, RIU e NDI.

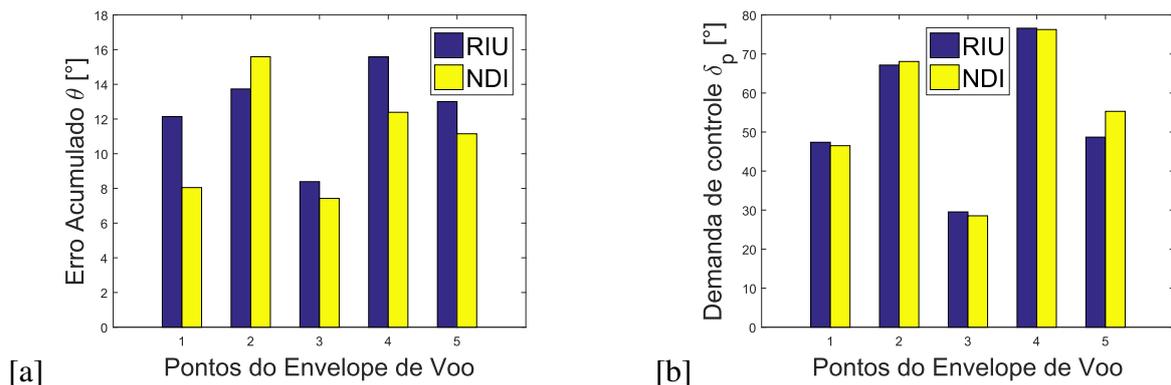


Figura 5.49: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de atitude, RIU e NDI.

5.5.3 Rastreamento de ângulo de ataque

A comparação das duas técnicas de controle para o caso do ângulo de ataque é feita na Figura 5.50. O rastreamento por parte das duas técnicas de controle foi satisfatório enquanto ao desempenho. No intervalo de *zoom* (de 5 a 10 segundos) pode ser vista uma pequena diferença entre os rastreamentos sendo o RIU relativamente superior pelo fato de acompanhar o sinal de referência com maior precisão, fato confirmado ao observar a Figura 5.51, o erro acumulado foi menor para o RIU demonstrando maior precisão no rastreamento do sinal. Do mesmo jeito que no caso do ângulo de atitude, percebe-se uma ligeira oscilação produto de *chattering* que coloca em desvantagem ao RIU, obviamente um correto projeto analítico do RIU (com ganhos "otimizados") melhorará o desempenho da técnica. De acordo com a demanda de controle pode ser visto na Figura 5.51 que tanto RIU quanto NDI apresentaram atividade de controle similar ao longo do envelope de voo.

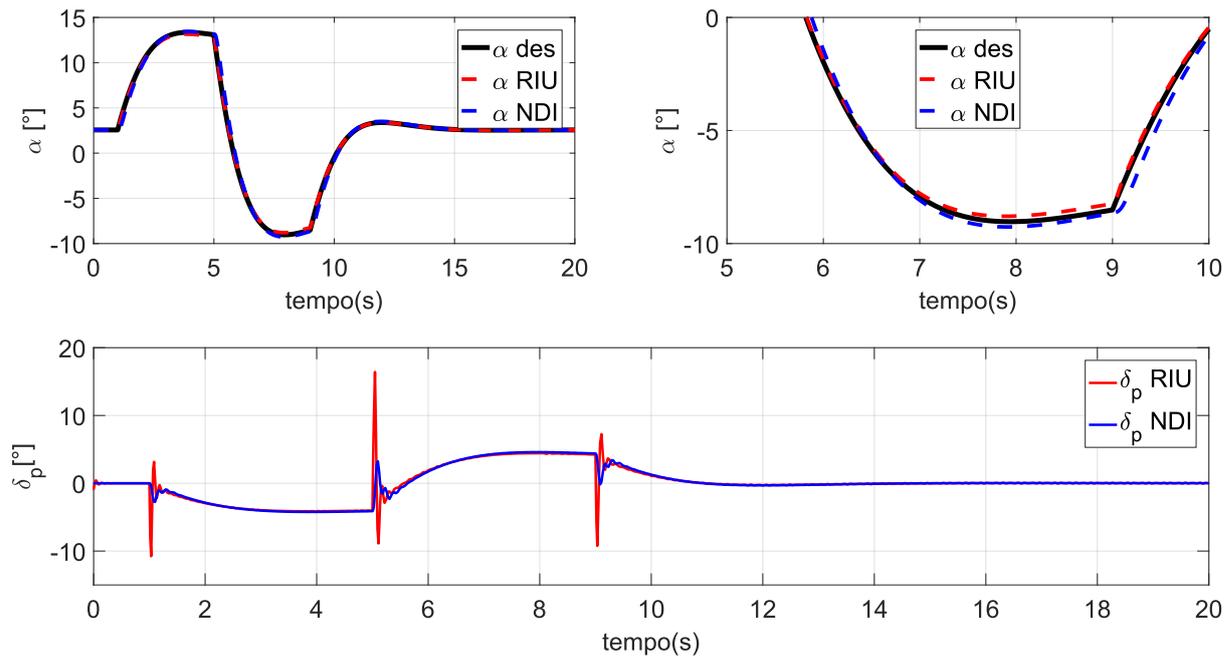


Figura 5.50: Rastreamento de *doublet* de ângulo de ataque, ponto 1, RIU e NDI.

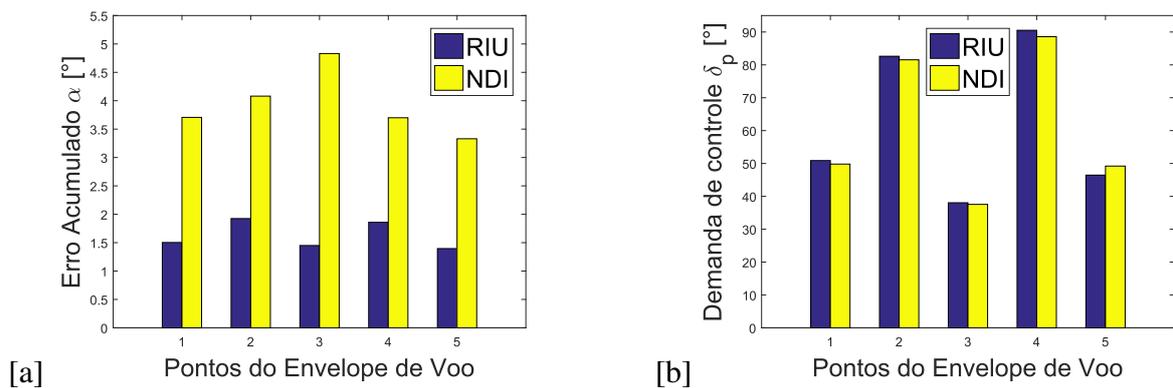


Figura 5.51: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de ataque, RIU e NDI.

5.5.4 Rastreamento de velocidade total

A comparação entre o desempenho das técnicas não lineares aplicadas neste trabalho (RIU e NDI) para o caso da velocidade total é feita nesta seção de maneira ilustrativa para manter a sequência dos itens, porém a comparação não é totalmente equivalente devido às razões que serão mencionadas a seguir. A inversão dinâmica foi aplicada usando três controles independentes para controlar cada uma das componentes da velocidade total, portanto, está em desvantagem quando comparado com o RIU pelo fato deste último ocupar unicamente a deflexão do profundor (δ_p).

A resposta da velocidade para ambos casos é ilustrada na Figura 5.52, o rastreamento foi satisfatório, o controlador por RIU tem um tempo de convergência um pouco maior porém,

menos oscilatório, caso contrário ocorre com o controlador baseado em NDI. Era de se esperar uma demanda de controle maior no RIU mas mesmo assim é pequena, da ordem de 0.3° de amplitude máxima. Na Figura 5.53 observa-se que o erro acumulado do RIU foi menor, demonstrando ser mais preciso do que o controlador por NDI.

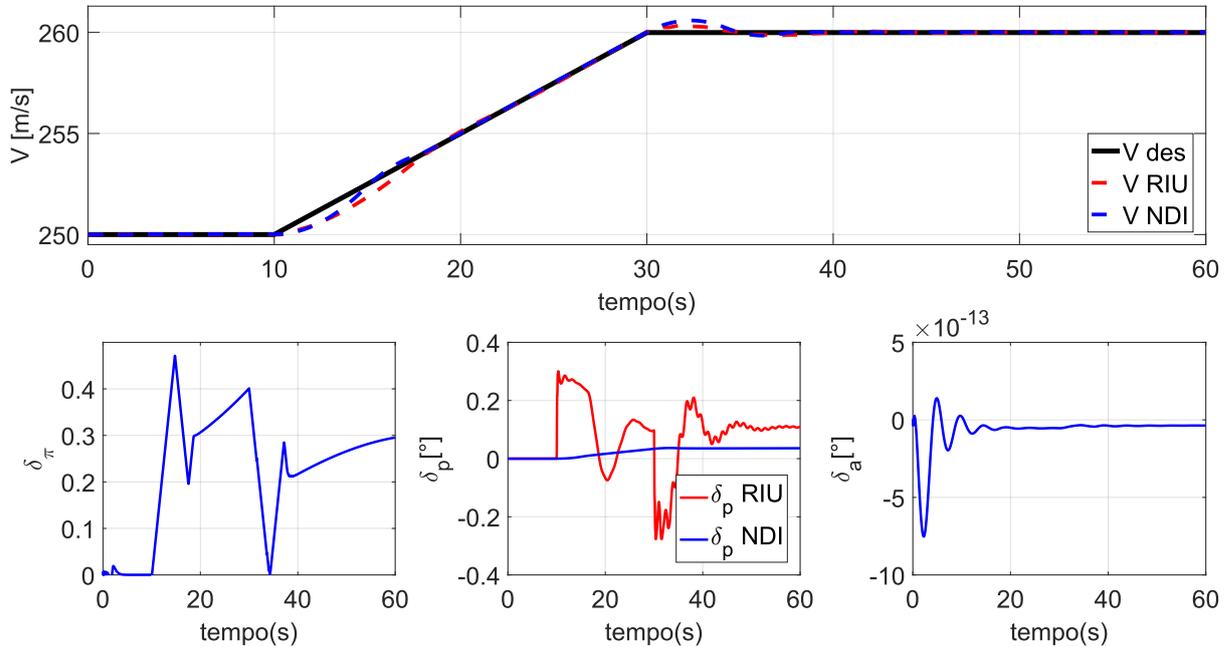


Figura 5.52: Rastreamento de velocidade total, ponto 1, RIU e NDI.

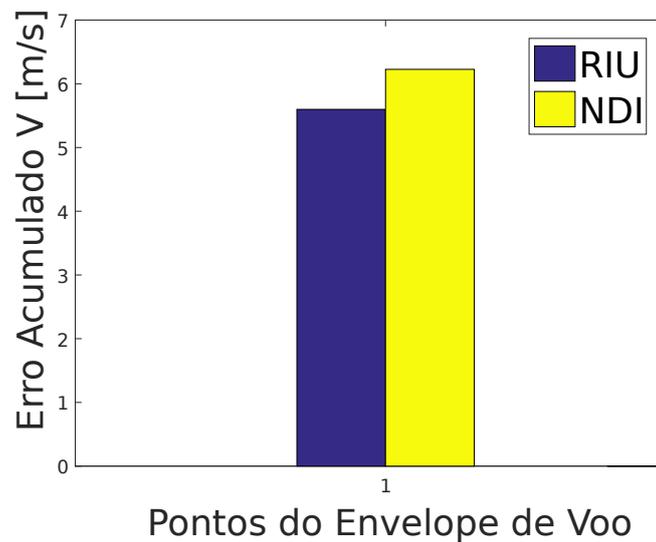


Figura 5.53: Erro de rastreamento acumulado, velocidade total, RIU e NDI.

5.5.5 Rastreamento de altitude

Com respeito a altitude, pode ser visto na Figura 5.54 que a aeronave consegue rastrear a referência desejada com ambos controladores, fazendo um *zoom* entre os segundos 25 e 55 (parte superior direita da figura), percebe-se que os tempos de acomodação tanto para o RIU quanto para a NDI forma similares, da ordem de 15 segundos, porém, a resposta com NDI foi mais oscilatória. Sob a suspeita do ganho proporcional neste controlador ter causado esta oscilação, reduziu-se porém o desempenho do rastreamento é deteriorado, decidiu-se deixar este ganho com valor unitário. Esta oscilação no NDI manifesta-se também no controle, provocando deflexões de profundor maiores e mais bruscas, o que torna superior o RIU nesta manobra. Confirma-se esta última afirmação na Figura 5.55 mostrando o RIU uma ligeira vantagem enquanto ao erro acumulado, porém, demandando pouco menos do dobro da atividade de controle.

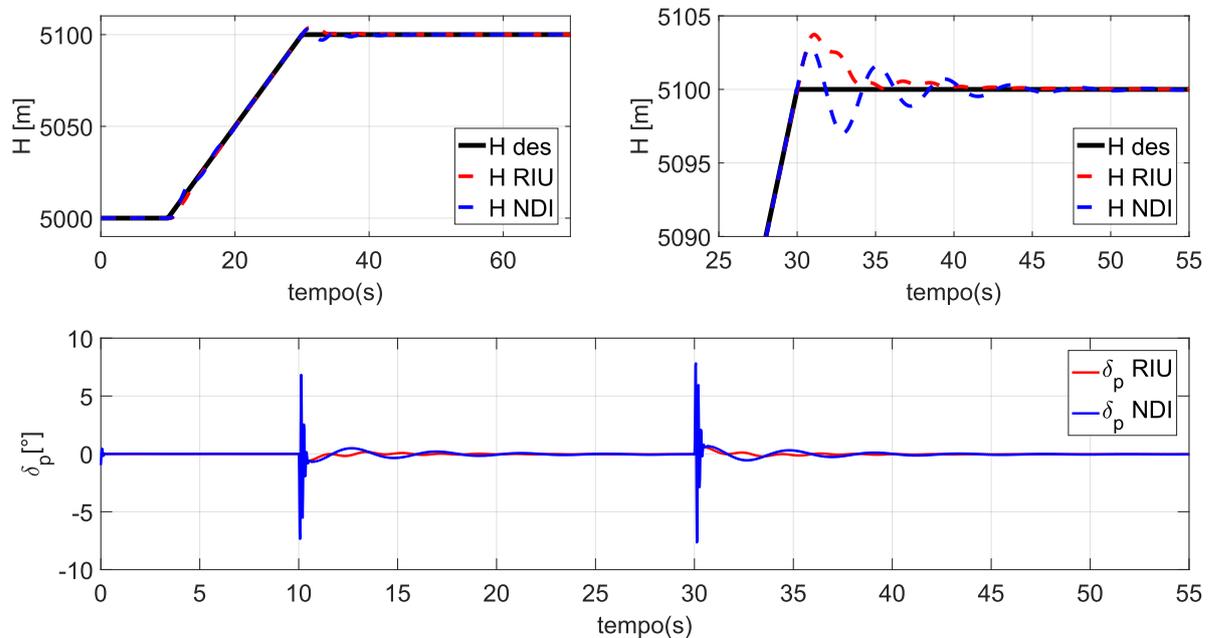


Figura 5.54: Rastreamento de altitude, ponto 1, RIU e NDI.

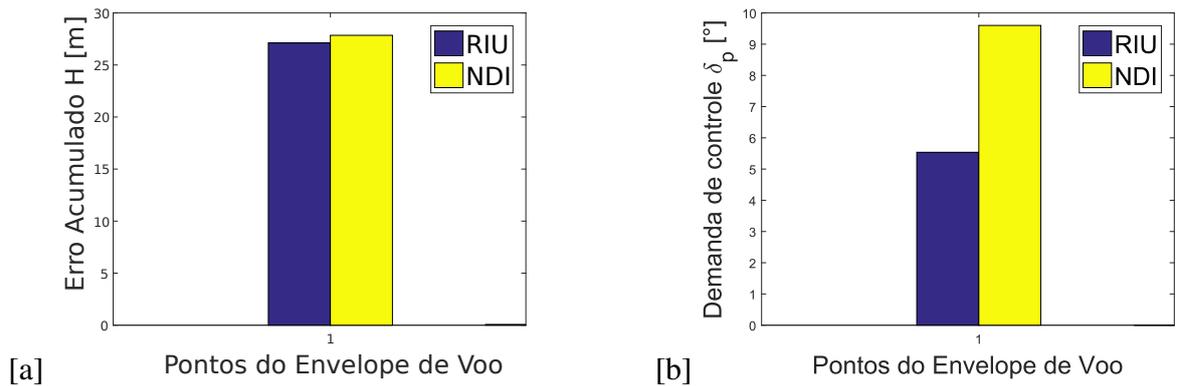


Figura 5.55: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. altitude, RIU e NDI.

5.5.6 Rastreamento da taxa de rolagem

Percebe-se na Figura 5.56 que o controlador RIU rastreia o sinal de referência com um menor erro estacionário, mesmo quando a diferença seja mínima quando comparado com NDI, a atividade de controle é praticamente idêntica para ambos os casos. Na Figura 5.57 percebe-se que o RIU acumulou um menor erro de rastreamento ao longo da simulação nos pontos 1,3 e 5. Já o controlador NDI mostrou-se ligeiramente mais preciso nos pontos 2 e 4. Na mesma figura, percebe-se que a atividade de controle tanto para RIU quanto para NDI foi similar nos pontos 1,2,3 e 4, já no ponto 5 a técnica NDI demandou maior atividade de controle.

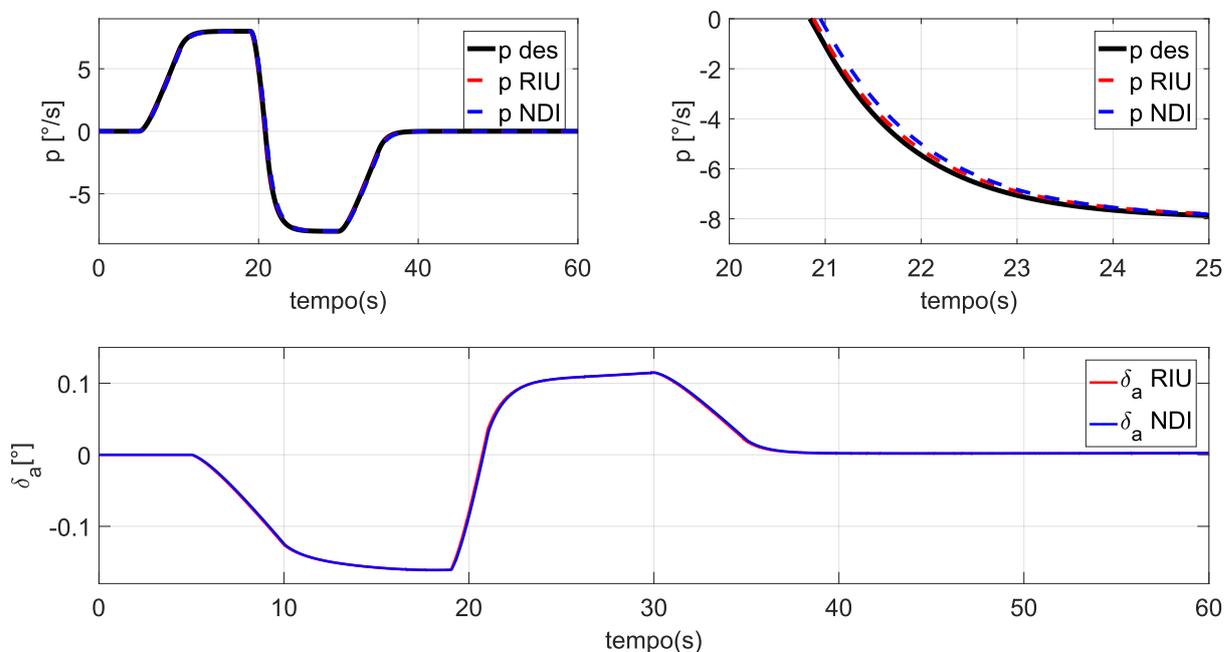


Figura 5.56: Rastreamento de *doublet* de taxa de rolagem, ponto 1, RIU e NDI.

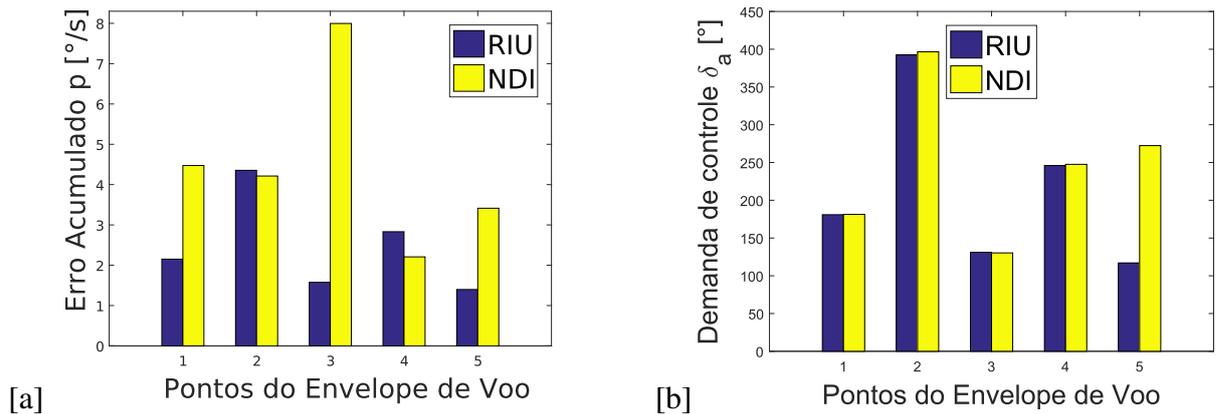


Figura 5.57: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. taxa de rolagem, RIU e NDI.

5.5.7 Rastreamento de ângulo de rolamento com amortecedor de guinada

É possível perceber na Figura 5.58 que as deflexões de aileron e leme deslocam-se de maneira coordenada para realizar a manobra solicitada, a demanda de controle pode ser considerada equivalente, no entanto, a precisão do RIU mostrou ser superior segundo o comportamento observado entre os segundos 35 e 40 (parte superior direita da figura), este fato é confirmado ao olharmos a Figura 5.59 onde confirma-se a maior precisão do RIU com uma menor atividade de controle (diferença pequena).

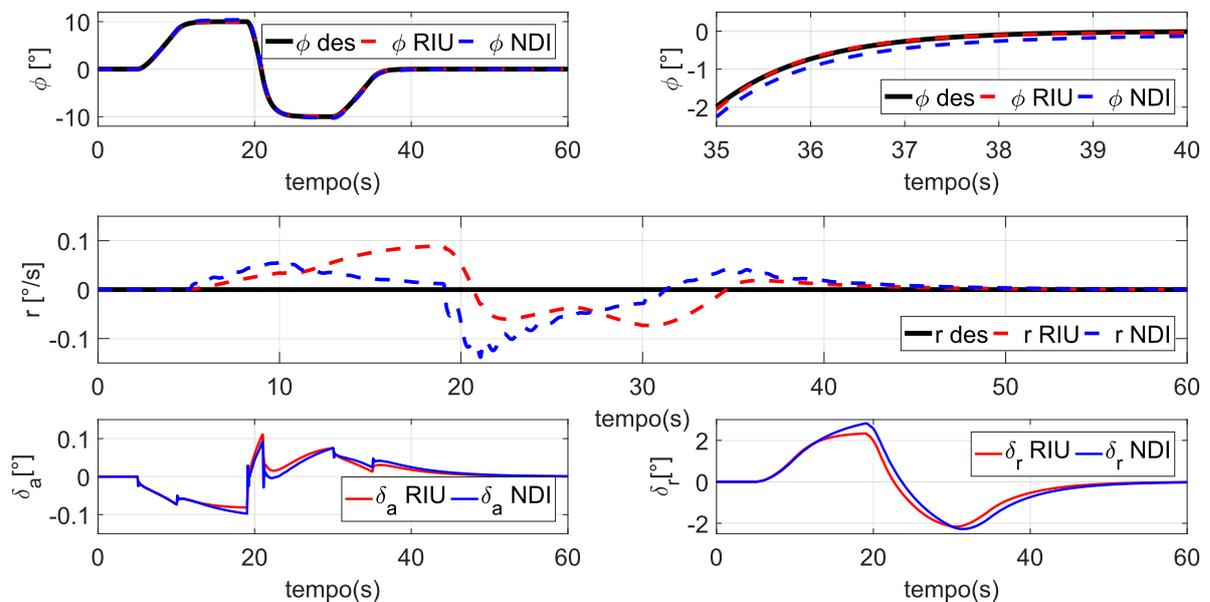


Figura 5.58: Rastreamento de *doublet* de ângulo de rolamento com amortecedor de guinada, ponto 1, RIU e NDI.

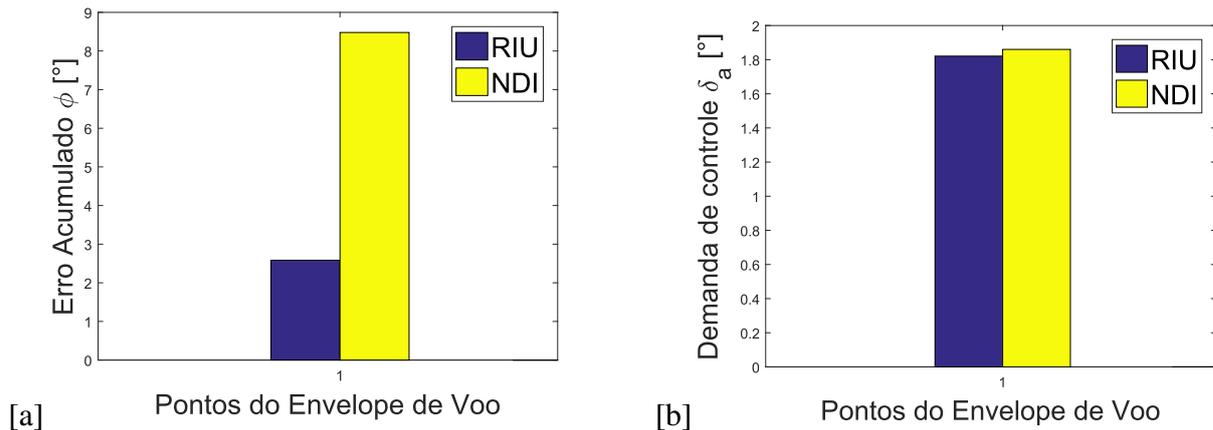


Figura 5.59: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de rolagem, RIU e NDI.

5.5.8 Rastreamento de ângulo de derrapagem

Para finalizar a comparação entre estas duas técnicas não lineares apresenta-se na Figura 5.60 o rastreamento de *doublet* do ângulo de derrapagem. Percebe-se claramente a relação linear entre o estado controlado e o controle respetivo pelo fato do comportamento entre eles (ângulo e controle) não possuir defasagem alguma. Mais uma vez o controlador RIU mostrou-se mais preciso no rastreamento do sinal de referência (vide Figura 5.61). O controlador NDI apresentou um desempenho inferior no ponto 4 do envelope de voo tal como mostrado nas Figuras 5.61 e 5.18. Cabe salientar que a comparação foi feita para um ângulo de referência pequeno (2°), isto porque a técnica NDI mostrou-se incapaz manter o erro de rastreamento num valor razoável para maiores ângulos. Já o RIU teve um ótimo desempenho até com 30° , veja Figura 5.32. A demanda de controle (deflexão de aileron no tempo) foi maior no RIU (vide Figura 5.61).

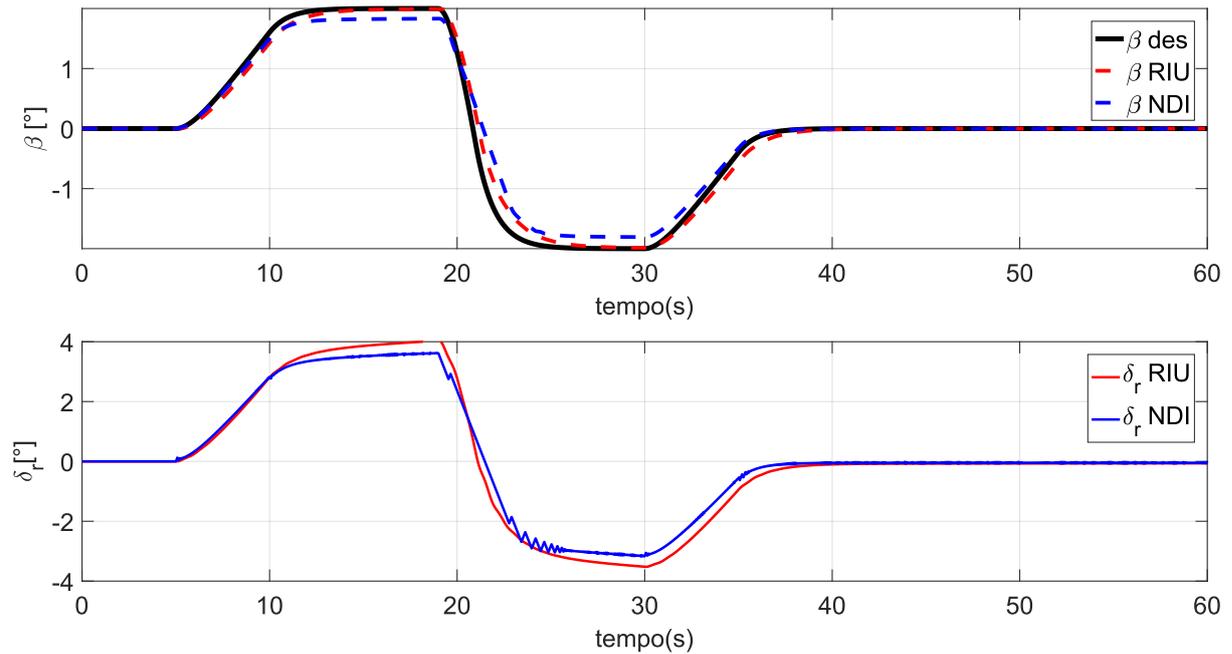


Figura 5.60: Rastreamento de *doublet* de ângulo de derrapagem, ponto 1, RIU e NDI.

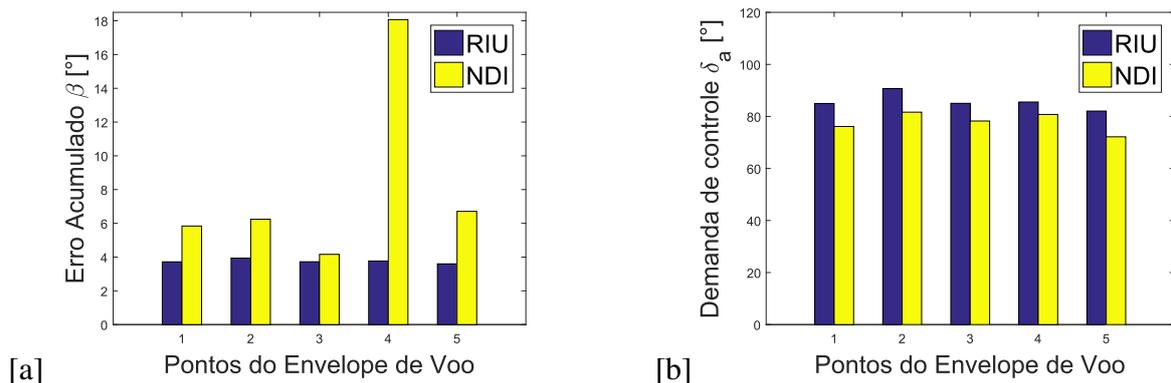


Figura 5.61: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. ângulo de derrapagem, RIU e NDI.

Apresenta-se na Tabela 5.4 um resumo sobre a comparação do desempenho entre as técnicas não lineares RIU e NDI. As simulações numéricas mostraram um rastreamento satisfatório para ambas técnicas do ponto de vista qualitativo, contudo, índices de desempenho relacionados ao erro de rastreamento acumulado e à atividade de controle foram propostos e calculados, baseado neles pode-se dizer que: enquanto à precisão (menor erro de rastreamento acumulado) em 7 dos 8 estados controlados o RIU apresentou um desempenho "Alto", sendo inferior ao NDI apenas no controle do ângulo de atitude. Enquanto à atividade de controle, no controle de α ambos apresentaram um desempenho similar ("igual"), no controle de θ , p e ϕ o RIU foi superior e no controle de q , H e β o NDI foi superior. Cabe salientar que superior indica que teve menor demanda de controle, mas mesmo nos casos onde o RIU não foi inferior, o controle se manteve dentro dos limites operativos (pelo próprio uso do atuador). Em estudos posteriores ao

invés de utilizar a escala $[-3 \ 3]$ (baixo, igual, alto), poderia ser proposta uma escala $[-5 \ 5]$ para aumentar a granularidade visando melhorar a comparação.

Tabela 5.4: Comparação de desempenho com NDI.

		RIU-NDI							
		q	θ	α	V	H	p	ϕ	β
Erro	RIU	Alto	Baixo	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
	NDI	Baixo	Alto	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo
Controle	RIU	Baixo	Alto	Igual	-	Baixo	Alto	Alto	Baixo
	NDI	Alto	Baixo	Igual	-	Alto	Baixo	Baixo	Alto

5.6 Comparação Entre o RIU e as Técnicas Lineares

Nesta seção apresentam-se os gráficos comparativos entre o Regulador Integrativo Universal e as técnicas lineares apresentadas nas seções 5.3 e 5.4, cabe salientar que o regulador integrativo universal foi escolhido previamente a todas as simulações feitas nesta seção como a técnica predileta desta tese, dentre outras coisas, pela simplicidade e capacidade de considerar incertezas no modelo, portanto, a comparação com outras técnicas (sejam lineares ou não) servirá para verificar se de fato a escolha feita oferece alguma vantagem. É importante ressaltar que a comparação não é totalmente equivalente (parâmetros diferentes gerariam respostas distintas) pelo fato dos ganhos do RIU foram obtidos através de um processo de tentativa e erro, e porque mudanças nas matrizes de ponderação Q e R conduzem a desempenhos diferentes do controlador LQR.

5.6.1 Rastreamento da velocidade total com RIU e LQR

O controlador RIU mostrou-se superior ao controlador linear LQR, devido ao erro de rastreamento ser menor ao longo dos 60 segundos de simulação no ponto 1 do envelope de voo, tal como pode ser visto na Figura 5.62. Na Figura 5.63 percebe-se que o erro de rastreamento foi menor para o RIU nos primeiros três pontos do envelope de voo, já nos dois últimos o controlador LQR teve um erro acumulado menor. Enquanto à demanda de controle, o RIU mostrou maior atividade do que NDI. Lembre-se que a demanda de controle estimada trata-se da área total abaixo/acima da curva de deflexão da superfície de controle com respeito à sua deflexão de equilíbrio, isto indica que o profundo foi "acionado" por mais tempo no RIU, embora a deflexão máxima demandada tenha sido menor.

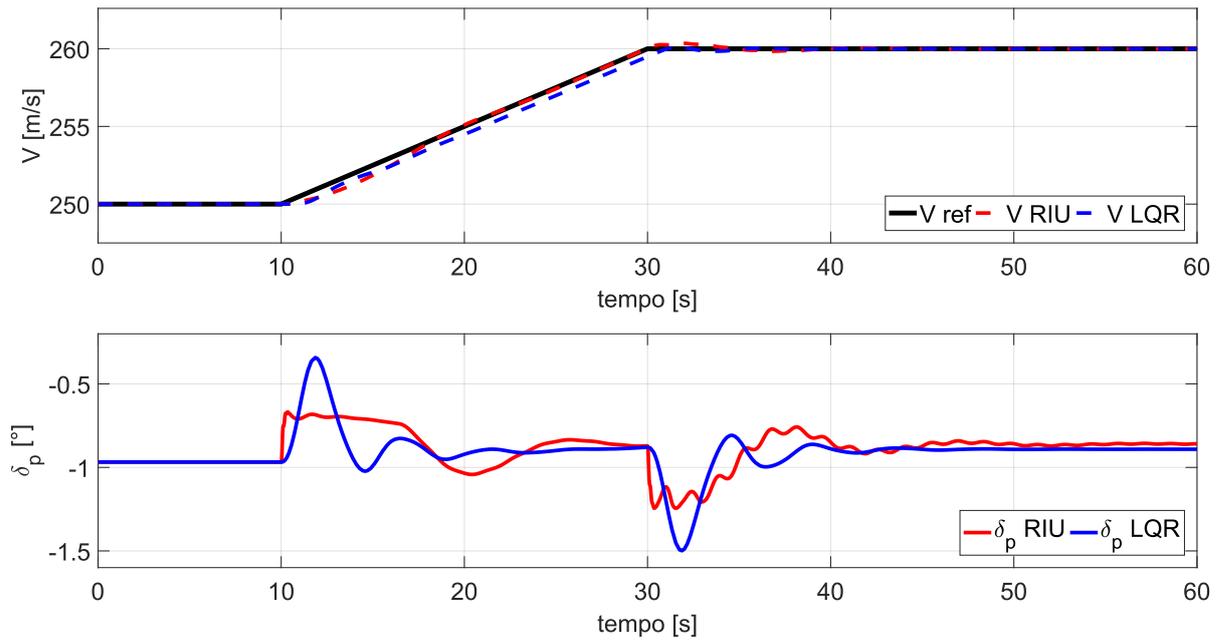


Figura 5.62: Rastreamento da velocidade total, ponto 1, RIU e LQR.

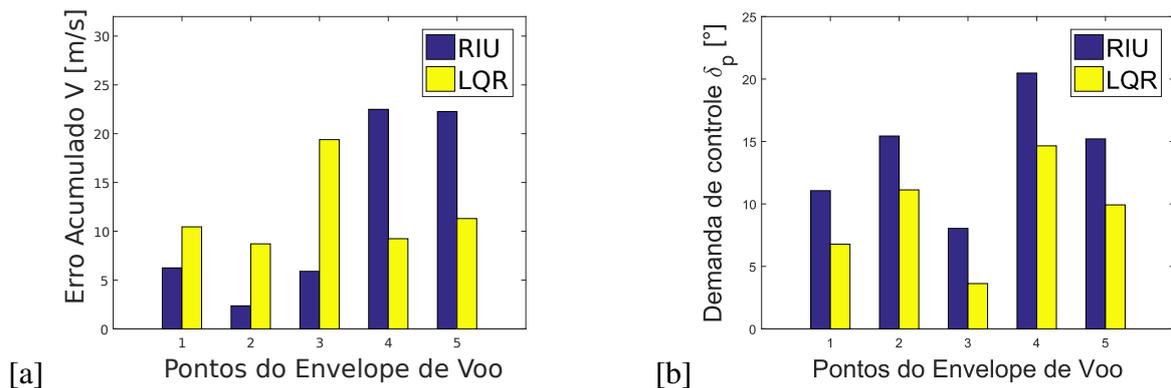


Figura 5.63: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. velocidade total, RIU e LQR.

Para reforçar os resultados mostrados na Figura 5.63, ilustra-se nas Figuras 5.64 e 5.65 a evolução do erro de rastreamento para cada ponto do envelope de voo. Percebe-se que o controlador LQR tem dificuldade em rastrear a velocidade de referência durante a transição (subida), especialmente nos pontos 1 e 2. Cabe salientar que a resposta de LQR ao rastreamento pode melhorar se matrizes de ponderação Q e R com valores mais restritivos dos valores máximos admissíveis para o estado a controlar (V) e o controle (δ_p).

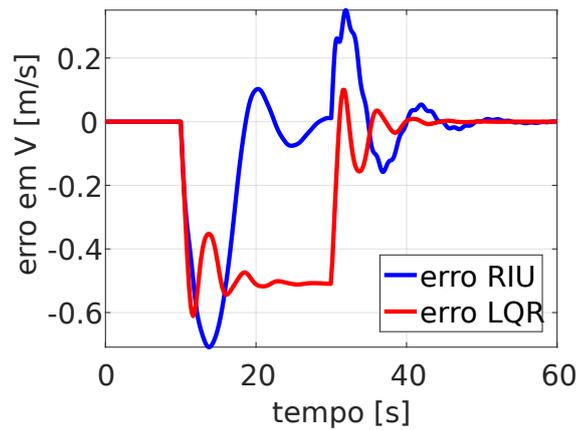


Figura 5.64: Evolução do erro de rastreamento, ponto 1, RIU e LQR.

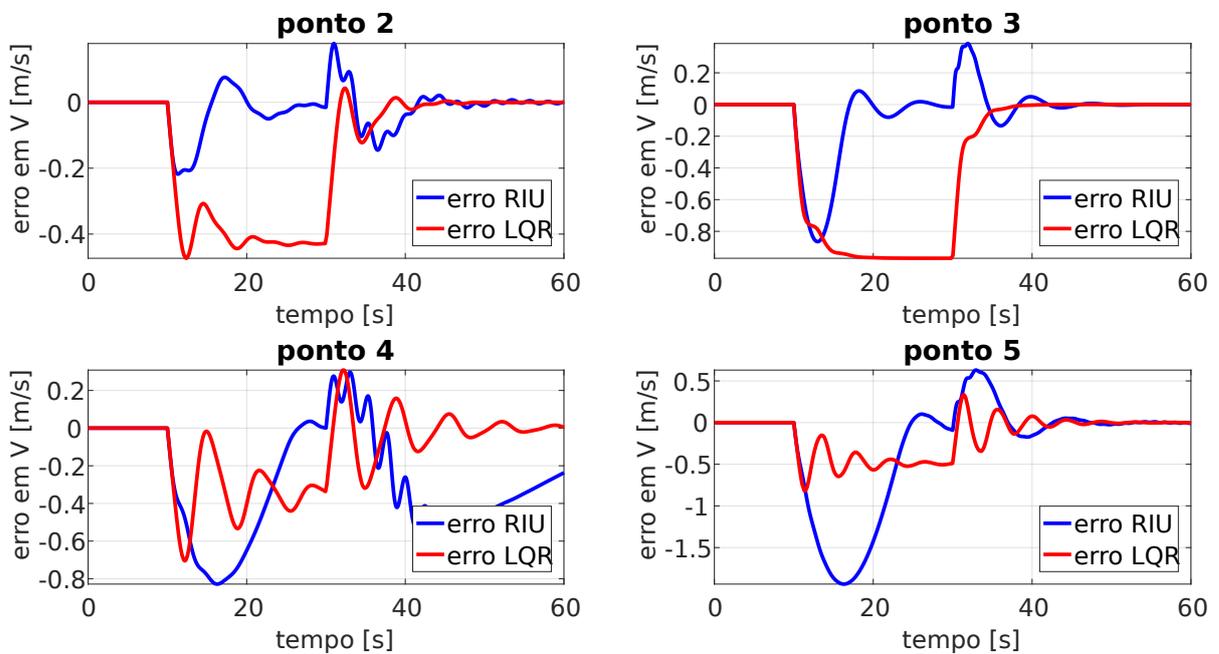


Figura 5.65: Evolução do erro de rastreamento, ponto 2 até 5, RIU e LQR.

5.6.2 Rastreamento de altitude usando RIU e controle clássico

Com respeito ao rastreamento da altitude, a qualidade do rastreamento tanto com técnica clássica (compensador de avanço de fase) quanto o RIU mostraram-se efetivas, porém o controlador RIU demandou menor amplitude de profundor (vide Figura 5.66). Na Figura 5.67 é possível verificar a efetividade similar entre ambos controladores com respeito ao erro de rastreamento acumulado e uma demanda de controle ligeiramente maior para o RIU.

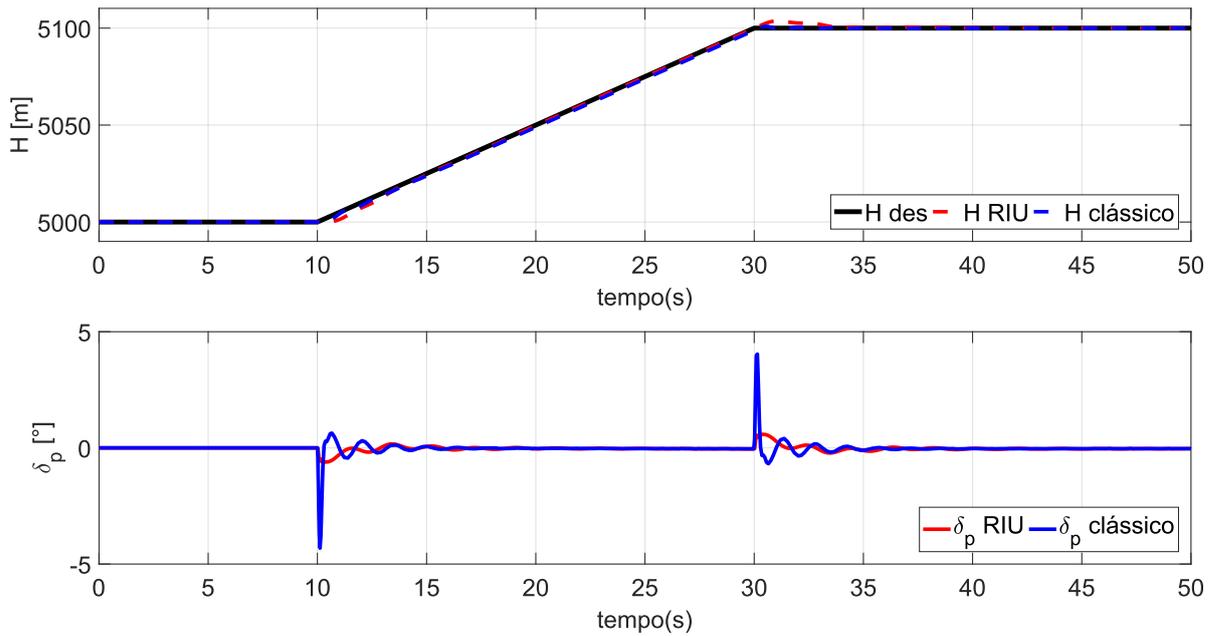


Figura 5.66: Rastreamento de altitude, ponto 1, RIU e Controle Clássico.

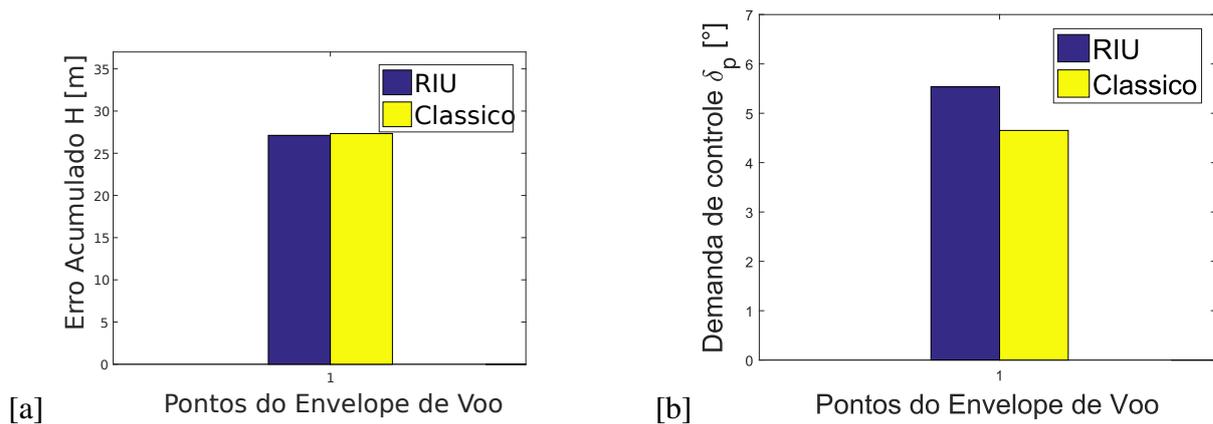


Figura 5.67: [a] Erro de rastreamento acumulado [b] Demanda de controle. altitude, RIU e Controle Clássico.

Para finalizar com a comparação de desempenho do RIU com as técnicas lineares pode-se dizer que enquanto ao erro de rastreamento acumulado, o RIU apresentou um desempenho "Alto" em comparação com controle ótimo (LQR) e controle Clássico como pode ser visto na Tabela 5.5, sendo muito similar a este último. No quesito "atividade de controle", o RIU mostrou-se inferior pelo simples fato de demandar maior atividade de controle, o que não quer dizer necessariamente que requereu maiores deflexões das superfícies (vide Figuras 5.63 e 5.67). Sabe-se que a técnica LQR é amplamente utilizada na indústria aeronáutica na atualidade, percebeu-se nos resultados, que mesmo com um RIU simplificado e com ganhos obtidos por tentativa e erro, o desempenho enquanto a erro de rastreamento foi superior ao LQR. Mas como foi mencionado anteriormente, escolhas diferentes das matrizes de ponderação Q e R podem vir a melhorar o desempenho do controlador LQR.

Tabela 5.5: Comparação de desempenho com técnicas lineares.

		RIU-LQR		RIU-Clássico	
		V		H	
Erro	RIU	Alto	RIU	Alto	
	NDI	Baixo	LQR	Baixo	
Controle	RIU	Baixo	RIU	Baixo	
	NDI	Alto	LQR	Alto	

5.7 Projeto Analítico do RIU Aplicado à Aeronave Mirage III

Tal como foi mencionado em capítulos anteriores, um dos objetivos deste trabalho é a demonstração analítica de estabilidade de uma aeronave rígida. Nesta seção desenvolver-se-á o procedimento de construção da lei de controle RIU aplicado à dinâmica da aeronave Mirage III, a ideia geral é mostrar a aplicação do projeto RIU em sistemas SISO e MIMO e sistemas com e sem dinâmica interna para tentar preencher os vazios remanescentes em publicações anteriores de aplicação do RIU em controle de voo. O procedimento começa com a definição do problema a ser resolvido afim de adaptá-lo à forma apropriada para a correta aplicação da lei de controle (tal como descrito na Seção 3.2.2). Optou-se por desacoplar a dinâmica longitudinal da dinâmica latero-direcional com o intuito de reduzir a ordem do problema e consequentemente simplificar a demonstração de estabilidade. A aplicação e estudo de controle separando as dinâmicas longitudinal e latero-direcional não é uma abordagem nova, em Xu *et al.* (2004), Vo e Seshagiri (2008), Wang e Stengel (2000), Promptun e Seshagiri (2009) e MacKunis *et al.* (2008) estas têm sido tratadas independentemente. Nesta tese, o projeto de controlador por RIU para cada dinâmica também será tratado separadamente.

Cabe destacar que a aplicação do projeto analítico do RIU é possível sob três condições gerais: *i*) o sistema deve estar escrito na forma *affine in the input* (SESHAGIRI E KHALIL, 2001), *ii*) o sistema deve ser transformável à forma normal (KHALIL, 2000), e *iii*) o sistema em malha aberta deve ser de fase mínima (SESHAGIRI E KHALIL, 2005), (SESHAGIRI E PROMTUN, 2008), ou seja, com os polos e zeros do sistema com parte real negativa (no semiplano esquerdo, para sistemas lineares), tal como demonstrado nos resultados de aplicação de controle linear. Em Seshagiri e Promptun (2008) ressaltam que é viável transformar as equações da dinâmica da aeronave, embora no trabalho deles não o tenham feito, pois utilizaram linearização numérica. Nesta tese foi possível fazer a extensão das equações da dinâmica da aeronave e foi possível escreve-las na forma *affine in the input* (vide Apêndice A) sendo esta uma das contribuições do presente trabalho.

Cabe salientar que previamente neste capítulo, na Seção 5.4, demonstrou-se que de fato o sistema é estável em malha aberta. Os resultados da Tabela 5.2 mostram que os autovalores

da matriz A , do sistema em malha aberta e linearizado possui unicamente raízes com parte real negativa (na condição de voo adotada para o projeto analítico). O teorema 3.1 em Slotine *et al.* (1991) denominado *Lyapunov's Linearization Method* reforça esta última afirmação, o teorema garante que se a matriz A do sistema linearizado é *Hurwitz* o ponto de equilíbrio do correspondente sistema não linear é assintoticamente estável. Segundo Seshagiri e Khalil (2005) no caso atual, ou seja, em sistemas não lineares, um sistema não linear de fase mínima é aquele que possui dinâmica interna estável, na aplicação do projeto analítico RIU à dinâmica longitudinal SISO demonstrar-se á que a dinâmica interna do sistema a ser controlado é estável.

5.7.1 Dinâmica Longitudinal SISO

O objetivo de controle proposto para o projeto analítico do RIU foi realizar o rastreamento de um *doublet* de ângulo de atitude (Θ) usando paralelamente um controlador PI para manter a velocidade total da aeronave constante durante a manobra, este problema não tem sido abordado anteriormente na literatura (RIU analítico+controle de voo). Esta abordagem para a velocidade total foi usada em Promtun e Seshagiri (2009) e adotada nesta tese por duas razões: *i*) Durante certas manobras, a velocidade total da aeronave é significativamente alterada afetando a eficiência do controle (profundor, por exemplo) e, *ii*) Percebe-se na Equação 5.46 que a dinâmica do ângulo de ataque e taxa de arfagem dependem da velocidade no denominador da maioria dos elementos que a compõem, portanto, se esta for constante (a velocidade), simplificariam-se os cálculos do projeto analítico do controlador RIU.

A dinâmica longitudinal considerada para o projeto analítico é a descrita pela Equação 5.46. Esta dinâmica provem da expansão das equações da dinâmica feita no Apêndice A. Procede-se a formular o problema de controle:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= q + \frac{g}{V} \cos(\alpha - \Theta) - \frac{T}{mV} \sin \alpha + \frac{\bar{q}S}{mV} C_L(\alpha, q) - \left(\frac{T}{mV} \sin \alpha \right) \delta_\pi \\ \dot{q} &= \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q \right] + \left(\frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}} C_{m_{\delta_p}} \right) \delta_p \\ \dot{\Theta} &= q\end{aligned}\tag{5.46}$$

Considere-se o sistema SISO da Equação 5.46. Define-se o vetor de estados $x \in R^3$ como $x = \{\alpha, q, \Theta\}^T$, o vetor de controles $u \in R^1$ como $u = \{\delta_p\}$, e o vetor de saída $y \in R^1$ como $y = h(x) = \{\Theta\}$. O sistema pode ser reescrito da forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ sendo

$f(x) = [f_1, f_2, f_3]^T$ e $g(x) = [g_1, g_2, g_3]^T$:

$$f(x) = \begin{bmatrix} q + \frac{g}{V} \cos(\alpha - \Theta) - \frac{T}{mV} \sin \alpha + \frac{\bar{q}S}{mV} C_L(\alpha, q) \left(\frac{T}{mV} \sin \alpha \right) \delta_\pi \\ \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}} [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q] \\ q \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}} C_{m_{\delta_p}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo q a taxa de arfagem, α o ângulo de ataque, Θ o ângulo de atitude, V a velocidade total da aeronave, g a aceleração da gravidade, m a massa da aeronave, T a tração de equilíbrio, \bar{q} a pressão dinâmica, S a superfície da asa, δ_π a deflexão da manete de combustível, I_{yy} o momento de inércia ao redor do eixo lateral e \bar{c} a corda média aerodinâmica. Cabe salientar que na Equação 5.47 tem-se que C_{L_α} não depende do profundor, isto é pelo fato de ter sido desconsiderada a contribuição das superfícies de controle nas forças aerodinâmicas (vide Apêndice A).

Cálculo do grau relativo

O grau relativo é determinado usando a Equação 5.48

$$L_g L_f^k h(x) \neq 0, \quad 0 \leq k \leq \rho - 1 \quad (5.48)$$

Para $k = 0$ tem-se $L_g h(x) = g_3 = 0$ o qual não atende a condição 5.48, já para $k = 1$, $L_g L_f h(x) = g_2 = A(x)$, portanto, o grau relativo será $\rho = k + 1 = 2$.

Determinação das novas variáveis

Com o intuito de transformar o sistema à forma normal, utilizam-se as equações 5.49 e 5.50 para determinar respectivamente as variáveis externas e internas.

$$\xi_j^i = L_f^{j-1} h_i \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq \rho \\ 1 \leq i \leq m \end{cases} \quad (5.49)$$

$$L_g \eta = 0 \quad (5.50)$$

É fácil perceber que para a dinâmica interna, a simples escolha $\eta = \alpha$ satisfaz a condição 5.50, isto pelo fato de $g_1 = g_3 = 0$ e à escolha de η não depender de q , logo:

$$L_g \eta = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} g_1 + \frac{\partial \eta}{\partial q} g_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \Theta} g_3 = 0 \quad (5.51)$$

De acordo com a Equação 5.49 as novas variáveis externas são:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= L_f^0 h(x) = h(x) = \Theta \\ \xi_2 &= L_f h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \Theta}{\partial q} & \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = q \end{aligned} \quad (5.52)$$

Nova dinâmica

De acordo com a Equação 3.31 a nova dinâmica externa será:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \end{aligned} \quad (5.53)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= L_f^2 h(x) = f_2 = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \eta + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) \xi_2 \right] \\ a(\xi, \eta) &= L_g L_f h(x) = A(x) = g_2 = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} C_{m_{\delta_p}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

A dinâmica interna é calculada como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} & \frac{\partial \alpha}{\partial q} & \frac{\partial \alpha}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = f_1 \\ &= \xi_2 + \frac{g}{V} \cos(\eta - \xi_1) - \frac{T}{mV} \sin \eta - \frac{\bar{q}S}{mV} C_L(\eta, \xi_2) - \left(\frac{T}{mV} \sin \alpha \right) \delta_\pi \end{aligned} \quad (5.55)$$

Problema de rastreabilidade

Define-se o erro da dinâmica interna como $z = \eta - \bar{\eta}$ com $\bar{\eta} = \alpha_{eq}$ e o erro da dinâmica externa como $e_i = \xi_i - \bar{\xi}_i - v_1$ sendo $\bar{\xi}_1 = [r_{1ss}, 0] = [\Theta_{eq}, 0]$ e $v_1 = [r_1 - r_{1ss}, r_1^1] = [\Theta_{ref} - \Theta_{eq}, \Theta'_{ref}]$. Θ'_{ref} define-se como a derivada temporal de Θ_{ref} . O ângulo de atitude de referência Θ_{ref} não se refere necessariamente a um sinal constante, nesta tese, definiu-se como um *doublet*, o qual atende os requisitos mencionados no Capítulo 3. Finalmente o erro da nova dinâmica externa é definido na Equação 5.56 a seguir.

$$e = [e_1, e_2] = [\xi_1 - \Theta_{ref}, \xi_2 - \Theta'_{ref}] \quad (5.56)$$

Sendo Θ'_{ref} a derivada temporal do sinal de referência. Colocando a nova dinâmica externa da Equação 5.53 em função do erro e de forma matricial obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_1^\Theta \\ \dot{e}_2^\Theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1^\Theta \\ e_2^\Theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{b(e, \eta) + a(e, \eta)u\} \quad (5.57)$$

Demonstração de estabilidade da dinâmica interna

A dinâmica interna em função do erro pode ser reescrita como na Equação 5.58. Sendo ϕ a função que define a dinâmica interna, dependente do erro da dinâmica interna $z = \eta - \bar{\eta}$, do erro da dinâmica externa e , de vetor v que contém as derivadas da referência e do vetor d que contém as referências e seus respectivos valores estacionários.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \phi(z, e + v, d) \\ &= e_2 + \Theta'_{ref} + \frac{g}{V} \cos(z + \alpha_{eq} - e_1 - \Theta_{ref}) - \frac{T}{mV} \text{sen}(z + \alpha_{eq}) \\ &\quad - \frac{\bar{q}S}{mV} C_L(\eta, \xi_2) - \frac{T}{mV} \text{sen}(z + \alpha_{eq}) \delta_\pi \end{aligned} \quad (5.58)$$

Por conveniência, definem-se as constantes \bar{c}_1 , \bar{c}_2 e \bar{c}_3 e as variáveis intermediárias \bar{a} e \bar{b} como na Equação 5.59.

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= \frac{g}{V} & \bar{c}_2 &= \frac{T}{mV}(1 + \delta_\pi) & \bar{c}_3 &= \frac{\bar{q}S}{mV}C_L(\eta, \xi_2) \\ \bar{a} &= (z + \alpha_{eq} - e_1 - \Theta_{ref}) & \bar{b} &= (z + \alpha_{eq})\end{aligned}\quad (5.59)$$

Logo, a dinâmica interna será da forma:

$$\dot{z} = \phi(z, e + v, d) = e_2 + \bar{c}_1 \cos \bar{a} - \bar{c}_2 \sin \bar{b} - \bar{c}_3 + \Theta'_{ref} \quad (5.60)$$

Procede-se a demonstrar que o ponto de equilíbrio $z = 0$ da dinâmica interna, ou dinâmica não observável ("dinâmica zero" com $e = 0$ e $v = 0$) $\dot{z} = \phi(z, 0, d)$ (vide Equação 5.61), é exponencialmente estável. Deve-se lembrar que o objetivo da demonstração é verificar que a dinâmica interna não irá afetar o controle assim que o erro externo tender para zero e o que conseqüentemente conduz a um vetor de referências $v_1 = [\Theta_{ref} - \Theta_{eq}, \Theta'_{ref}]$ nulo. Para esta demonstração ser feita, as condições descritas na Equação 3.34 devem ser atendidas. A dinâmica zero do sistema será como na Equação 5.61.

$$\dot{z} = \phi(z, 0, d) = \bar{c}_1 \cos(z + \alpha_{eq}) - \bar{c}_2 \sin(z + \alpha_{eq}) - \bar{c}_3(z + \alpha_{eq}) \quad (5.61)$$

Define-se a candidata a função de Lyapunov (CFL) $V_z = \frac{1}{2}z^T z$ e propõem-se também duas funções classe Kappa $\lambda_1 = \frac{\pi}{10}|z|^2$ e $\lambda_2 = \frac{\pi}{4}|z|^2$ de tal forma que $\lambda_1 \leq V_z \leq \lambda_2$ tal como ilustrado na Figura 5.68

Derivando a CFL obtém-se a expressão da Equação 5.62.

$$\begin{aligned}\dot{V}_z &= z\dot{z} = z[\bar{c}_1 \cos(z + \alpha_{eq}) - \bar{c}_2 \sin(z + \alpha_{eq}) - \bar{c}_3(z + \alpha_{eq})] \\ &= z\bar{c}_1 \cos(z + \alpha_{eq}) - z\bar{c}_2 \sin(z + \alpha_{eq}) - \bar{c}_3 z^2 - z\alpha_{eq}\bar{c}_3 \\ &= |z|[\bar{c}_1 \cos(z + \alpha_{eq})] - |z|(|\bar{c}_2 \sin(z + \alpha_{eq})| + \alpha_{eq}|\bar{c}_3|) - |\bar{c}_3||z|^2\end{aligned}\quad (5.62)$$

Através do método direto de Lyapunov (Incluso na condição da Equação 3.34) será verificado que a derivada da CFL seja negativa definida. Percebe-se que o caso crítico para esta verificação (parcela positiva \gg parcela negativa) ocorre quando $\cos(z + \alpha_{eq}) \gg \sin(z + \alpha_{eq})$, isto é, com $z = -\alpha_{eq}$, neste caso $\cos(z + \alpha_{eq}) = 1$ e $\sin(z + \alpha_{eq}) = 0$. Devido a $\alpha_{eq} > 0$

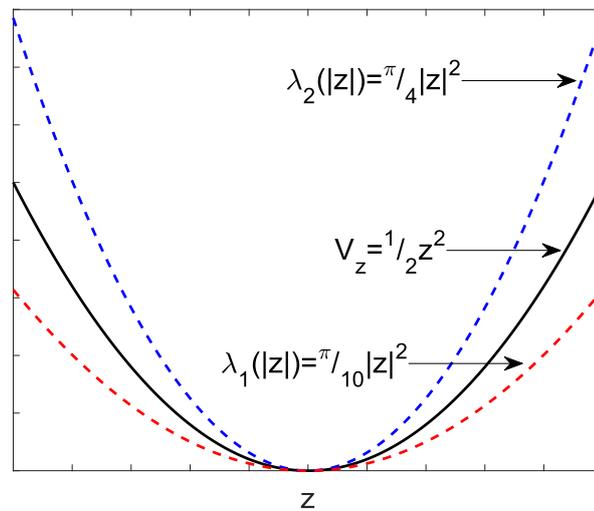


Figura 5.68: CFL V_z e funções Kappa λ_1 e λ_2 .

($C_{L_0} = 0$ vide Tabela 4.2) tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= z\dot{z} = z\bar{c}_1 - z\alpha_{eq}\bar{c}_3 - \bar{c}_3 z^2 \\ \dot{V}_z &\leq -\alpha_{eq}|\bar{c}_1| + \alpha_{eq}^2|\bar{c}_3| - \alpha_{eq}^2|\bar{c}_3| \\ \dot{V}_z &\leq -\alpha_{eq}|\bar{c}_1| = -\lambda_3 \end{aligned} \quad (5.63)$$

Devido ao fato de $\alpha_{eq} > 0$ e $|\bar{c}_1| = g/V > 0 \quad \forall V > 0$, a derivada de CFL \dot{V}_z é negativa definida e a dinâmica interna é exponencialmente estável, isto quer dizer que, na medida que os erros externos $e_1, e_2 \rightarrow 0$, o erro interno $z \rightarrow 0$.

Fazendo uma análise mais aprofundada é fácil perceber que, para $z > 0$ tem-se que:

1) Pelo fato de z ser o erro de rastreamento interno $z = \eta - \bar{\eta}$, sendo $\eta = \alpha$ e $\bar{\eta} = \alpha_{eq}$, ter-se-á que: $\alpha > \alpha_{eq}$

2) Devido à limitação imposta ao ângulo de ataque ($-\pi/18 < \alpha < \pi/4$), é possível perceber que sob a hipótese anterior, a faixa de operação deste ângulo será: $\alpha = [\alpha_{eq} \quad \pi/4]$, como consequência, o $\cos(z + \alpha_{eq}) > \sin(z\alpha_{eq})$.

3) Logo, utiliza-se a diferença máxima a qual ocorre no limite inferior da faixa de operação mencionada no item anterior (plotar as funções $\sin(z\alpha_{eq})$ e $\cos(z + \alpha_{eq})$ nessa faixa para conferir), ou seja, em $\alpha \approx \alpha_{eq}$. Isto conduz a $\cos(\alpha_{eq}) \approx 1$ e $\sin(\alpha_{eq}) \approx \alpha_{eq}$.

Finalmente, chega-se na Inequação 5.64. Percebe-se que na primeira linha desta inequação foram expressados os valores máximos de cada termo da derivada da CFL, logo, na segunda linha, agruparam-se os termos multiplicado por $|z|$ e verificou-se através dos dados na Equação

5.59 e ao valor de $\alpha_{eq} = -0.0447rad$ da condição de voo respectiva que: $\alpha_{eq}(|\bar{c}_2| + |\bar{c}_3|) > |\bar{c}_1|$, portanto a derivada da CFL será, no mínimo $\dot{V}_z \leq -\lambda_3|z|^2$ com $\lambda_3 = c_3 > 0$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= |z||\bar{c}_1 \cos(\alpha_{eq})| - |z|(|\bar{c}_2 \sin(\alpha_{eq})| + \alpha_{eq}|\bar{c}_3|) - |\bar{c}_3||z|^2 \\ &\leq |z||\bar{c}_1| - |z|\alpha_{eq}(|\bar{c}_2| + |\bar{c}_3|) - |\bar{c}_3||z|^2 \quad \text{com } \alpha_{eq}(|\bar{c}_2| + |\bar{c}_3|) > |\bar{c}_1| \\ &\leq -\lambda_3|z|^2 \quad \text{sendo } \lambda_3 = |\bar{c}_3| \end{aligned} \quad (5.64)$$

Das Equações 5.63 e 5.64, pode-se concluir que independente do valor do erro interno z , a dinâmica interna será exponencialmente estável, isto é, a dinâmica interna não irá interferir no desempenho do controlador RIU e o problema de rastreamento formulado é de fase mínima, requisito para aplicação deste controlador, logo, é possível aplicar o projeto do controlador RIU passo a passo como especificado na Seção 3.2.2.

Definição do controlador

Caso 1: Abordagem sem considerar parâmetros desconhecidos e $\hat{F}_\Theta(\cdot) = 0$

Inicialmente assumir-se-á que encontra-se disponível a primeira derivada do erro, o qual, dispensa-se a inclusão de observadores de alto ganho para estimar as derivadas do erro. A superfície deslizante contendo o integrador condicional é construída a partir da Equação 5.65 com $\rho = 2$ (tal como calculado previamente), obtendo-se a expressão 5.66.

$$s_\Theta = k_0^\Theta \sigma_\Theta + \sum_{j=1}^{\rho-1} k_j^\Theta e_j^\Theta + e_\rho^\Theta \quad 1 \leq j \leq \rho - 1 \quad (5.65)$$

$$s_\Theta = k_0^\Theta \sigma_\Theta + k_1^\Theta e_1^\Theta + e_2^\Theta \quad (5.66)$$

Sendo $e_2^\Theta = \dot{e}_1^\Theta$. Escolhe-se $k_1^\Theta > 0$ de tal forma que o polinómio $k_1^\Theta + \lambda_1^\Theta$ possua raízes com parte real negativa. Logo, derivando a superfície deslizante obtém-se:

$$\dot{s}_\Theta = k_0^\Theta \dot{\sigma}_\Theta + k_1^\Theta \dot{e}_2^\Theta + \dot{e}_2^\Theta \quad (5.67)$$

Sabendo que a dinâmica do integrador condicional é: $\dot{\sigma}_\Theta = -k_0^\Theta \sigma_\Theta + \mu_\Theta \text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta)$ e

pela própria dinâmica de e_2^Θ descrita na Equação 5.57, chega-se na Equação 5.68.

$$\dot{s}_\Theta = k_0^\Theta \{-k_0^\Theta \sigma_\Theta + \mu_\Theta \text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta)\} + k_1^\Theta e_2^\Theta + b(e, \eta) + a(e, \eta)u_\Theta \quad (5.68)$$

Assumindo-se que $a(e, \eta) = A(x) = g_2$ é totalmente conhecida, pelo fato de nenhum dos termos que a compõem ser considerado na definição do vetor de parâmetros constantes desconhecidos $\{\theta\}$, define-se o controlador RIU como na Equação 5.69.

$$\begin{cases} u_\Theta = g_2^{-1} [-\hat{F}(\cdot) + v_\Theta] \\ v_\Theta = -K_\Theta \text{sat}\left(\frac{s_\Theta}{\mu_\Theta}\right) \end{cases} \quad (5.69)$$

Devido à flexibilidade de escolher $\hat{F}(\cdot) = 0$ para sistemas SISO, o controlador finalmente ficará da forma:

$$u_\Theta = -g_2^{-1} K_\Theta \text{sat}\left(\frac{s_\Theta}{\mu_\Theta}\right) \quad \left\{ K_\Theta = \nu_\Theta(\cdot) + q_\Theta; \quad q_\Theta > 0 \right. \quad (5.70)$$

Substituindo u_Θ em \dot{s}_Θ da Equação 5.68, fazendo-se a análise fora da camada limite ($|s_\Theta| > \mu_\Theta$), definindo $F_\Theta(\cdot) = k_1^\Theta e_2^\Theta + b(e, \eta)$ e sabendo que nesta região o $\text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta) = s_\Theta/|s_\Theta|$, é possível chegar em:

$$\dot{s}_\Theta = \Delta_\Theta(\cdot) - K_\Theta(s_\Theta/|s_\Theta|) \quad (5.71)$$

Sendo $\Delta_\Theta(\cdot) = k_0^\Theta \{-k_0^\Theta \sigma_\Theta + \mu_\Theta \text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta)\} + F_\Theta(\cdot)$. Será visto posteriormente na demonstração de estabilidade para s_Θ que, deve-se garantir que a expressão $s_\Theta \dot{s}_\Theta < 0$, devido a isto, define-se $\nu_\Theta(\cdot)$ como definido na Equação 5.72.

$$\nu_\Theta(\cdot) \geq \max \left| \Delta_\Theta(\cdot) \frac{|s_\Theta|}{s_\Theta} \right| \quad (5.72)$$

Maximiza-se $\Delta_{\Theta}(\cdot)$ como a seguir.

$$\begin{aligned}\Delta_{\Theta}(\cdot)\frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}} &= \frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}}k_0^{\Theta} \left\{ -k_0^{\Theta}\sigma_{\Theta} + \mu_{\Theta}\frac{s_{\Theta}}{|s_{\Theta}|} \right\} + \frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}}F_{\Theta}(\cdot) \\ &= -(k_0^{\Theta})^2\sigma_{\Theta}\frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}} + k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} + \frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}}F_{\Theta}(\cdot) \quad \text{com } (|\sigma_{\Theta}| \leq \mu_{\Theta}/k_0^{\Theta}) \quad (5.73) \\ \left| \Delta_{\Theta}(\cdot)\frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}} \right| &\leq k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} - \text{sign}(s_{\Theta})k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} + \frac{|s_{\Theta}|}{s_{\Theta}}F_{\Theta}(\cdot) \\ &\leq 2k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} + |F_{\Theta}(\cdot)|\end{aligned}$$

Finalmente escolhe-se $q_{\Theta} = 2.1k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} > 2k_0^{\Theta}\mu_{\Theta} > 0$ e será feita a escolha $\nu_{\Theta}(\cdot) \geq |F_{\Theta}(\cdot)| = k_1^{\Theta}|e_2^{\Theta}| + |b(e, \eta)|$. Está última garantirá que o ganho mínimo K_{Θ} seja suficiente para estabilizar a superfície deslizante e assegurar o correto funcionamento do controlador RIU, e a escolha de q_{Θ} representará uma margem extra para manter esta garantia.

Caso 2: Abordagem considerando parâmetros desconhecidos e $\hat{F}_{\Theta}(\cdot) \neq 0$

Define-se o vetor de parâmetros constantes desconhecidos $\theta \in [\theta_i^m, \theta_i^M]$ com $i = 1$ sendo $\theta_1 = Cm_{\delta p}$. Como consequência $a(\cdot) = g_2 = k_a\theta_1$ e $k_a = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}}$.

Sob a Definição 3.7, assume-se que $a(\cdot)$ não se conhece com precisão, portanto, existe um valor nominal $\hat{a}(\cdot)$ que satisfaz a equação $a(\cdot) = \Gamma(\cdot)\hat{a}(\cdot)$ e logicamente teremos que $\Gamma(\cdot) = \frac{a(\cdot)}{\hat{a}(\cdot)} = \frac{\theta_1}{\hat{\theta}_1}$. Devido a $F_{\Theta}(\cdot)$ e $b(e, \eta)$ não dependerem de θ , ter-se-á que: $\hat{F}_{\Theta}(\cdot) = F_{\Theta}(\cdot)$ e $\hat{b}(e, \eta) = b(e, \eta)$ sendo:

$$\begin{aligned}F_{\Theta}(\cdot) &= k_1^{\Theta}e_2^{\Theta} + b(e, \eta) \\ b(e, \eta) &= k_a \left[C_{m_0} + C_{m_{\alpha}}\eta + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) (e_2^{\Theta} + \Theta'_{ref}) \right] \quad (5.74)\end{aligned}$$

Após estas considerações, o controlador descrito na Equação 5.69 será da forma:

$$u_{\Theta} = \frac{-\hat{F}_{\Theta}(\cdot) - K_{\Theta}\text{sat}(s_{\Theta}/\mu_{\Theta})}{\hat{a}(\cdot)} \quad (5.75)$$

Substituindo na primeira derivada da superfície deslizante tal como definida na teoria do projeto analítico (Equação 3.41) com $\Delta_i(\cdot) = F(\cdot) - \Gamma(\cdot)\hat{F}(\cdot) + \{k_0^i[-k_0^i\sigma_i + \mu_i\text{sat}(s_i/\mu_i)]\}$,

chega-se na Equação 5.76.

$$\dot{s}_\Theta = k_0^\Theta \{-k_0^\Theta \sigma_\Theta + \mu_\Theta \text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta)\} + F_\Theta(\cdot) - \Gamma(\cdot)\hat{F}_\Theta(\cdot) - K_\Theta \text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta) \quad (5.76)$$

Logo, fora da camada limite ($|s_\Theta| \geq \mu_\Theta$) tem-se que $\text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta) = s_\Theta/|s_\Theta|$ e a derivada da superfície deslizante será da forma:

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Theta &= k_0^\Theta \{-k_0^\Theta \sigma_\Theta + \mu_\Theta s_\Theta/|s_\Theta|\} + F_\Theta(\cdot)[1 - \Gamma(\cdot)] - K_\Theta s_\Theta/|s_\Theta| \\ &= \left[-(k_0^\Theta)^2 \sigma_\Theta \frac{|s_\Theta|}{s_\Theta} + k_0^\Theta \mu_\Theta \right] \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} + \frac{F_\Theta(\cdot) \frac{|s_\Theta|}{s_\Theta} [1 - \Gamma(\cdot)] \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} - K_\Theta}{\hat{\Delta}_\Theta(\cdot)} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Finalmente, para garantir que a primeira derivada da CFL $\dot{V}_s = s_\Theta \dot{s}_\Theta < 0$, e aproveitando os resultados prévios na Equação 5.73 determina-se o ganho do controlador K_Θ como sendo:

$$\begin{aligned} K_\Theta &= \hat{\nu}_\Theta(\cdot) + \hat{q}_\Theta \\ &= \max \left| \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \hat{\Delta}_\Theta(\cdot) \right| + \frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \hat{q}_\Theta \\ &= \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} - 1 \right) (k_1^\Theta |e_2^\Theta| + |b(e, \eta)|) + 2k_0^\Theta \mu_\Theta \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \right) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Utilizando este ganho no controlador, garante-se que o sistema é estável, ou seja, a superfície deslizante converge assintoticamente em $s = 0$ e pelo próprio cálculo do ganho K_Θ , assegura-se também o sinal de rastreamento do sinal de referência.

Simulação numérica casos 1 e 2

Como foi mencionado anteriormente, o objetivo de controle consiste em rastrear um *doublet* de ângulo de atitude com amplitude máxima de 20° , o sinal de referência é suavizado através de uma função de transferência de primeira ordem com constante de tempo τ unitária, $G = 1/(\tau s + 1)$. Os valores numéricos dos parâmetros utilizados nas simulações para os casos 1 e 2 foram: $|\alpha| \leq 45^\circ$, $|q| \leq 90^\circ/s$, $\theta_1 = Cm_{\delta_p} = -0,45$, $\hat{\theta}_1 = -0,5$, $\theta_1^M = -0,3$, $\theta_1^m = -0,7$, os parâmetros do controlador: $\mu_\Theta = \pi/4$, $k_0^\Theta = k_1^\Theta = 1$, para o caso 1, o ganho do controlador (Equação 5.70) foi $K_\Theta = 13,425$ e para o caso 2 (Equação 5.75) $K_\Theta = 3,166$ (em breve serão justificados estes valores).

Os parâmetros do controlador PI utilizado para manter constante a velocidade total por meio da manete foram: $K_p = 3$ e $K_I = 0,08$ obtidos por tentativa e erro. Na Figura 5.69 mostra-se o desempenho do controlador PI no rastreamento da velocidade total. Pode-se concluir que o controlador PI mostrou-se efetivo no rastreamento de uma manobra de velocidade total por meio da manete, portanto, seu desempenho para manter $V = 0$ deve ser similar ou melhor.

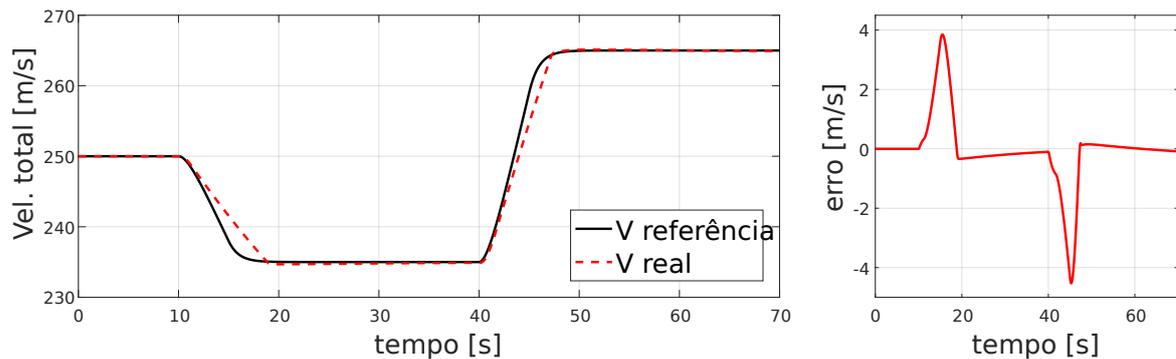


Figura 5.69: Rastreamento de velocidade total com PI.

Segundo Seshagiri e Khalil (2005) o valor da camada limite deve ser o suficientemente pequena de tal forma que o desempenho da aproximação continua dos modos deslizantes se aproxime dos modos deslizantes ideal. Com este propósito, justifica-se o valor escolhido $\mu_\Theta = \pi/4$ através de simulações. Propõem-se diferentes valores para μ_Θ e determina-se o valor do ganho K_θ correspondente a cada um deles usando a Equação 5.70 (Vide Tabela 5.6). Com estes parâmetros calculou-se o erro de rastreamento do ângulo de atitude e observou-se o sinal de saída de controle δ_p , tal como mostrado na Figura 5.7.1.

Tabela 5.6: Pares de μ e ganho K_Θ .

	μ_Θ	K_Θ
$(1/4)\mu$	$\pi/16$	12,325
$(1/2)\mu$	$\pi/8$	12,688
μ	$\pi/4$	13,425
2μ	$\pi/2$	15,225
4μ	π	18,488

É fácil perceber que quanto menor o valor da camada limite menor também é o valor do erro de rastreamento, isto, pelo fato dos modos deslizantes puros dominarem a dinâmica do controlador, porém, para valores $(1/4)\mu$ e $(1/2)\mu$ o sinal de controle começa apresentar *chattering* e altos picos, o qual indica que a camada limite é tão pequena que $sat(\cdot) \approx sign(\cdot)$. Com o intuito evitar este fenômeno oscilatório indesejável no controle e manter um erro de rastreamento ainda pequeno, a escolha $\mu_\Theta = \mu = \pi/4$ é razoável. É importante destacar que esta análise para

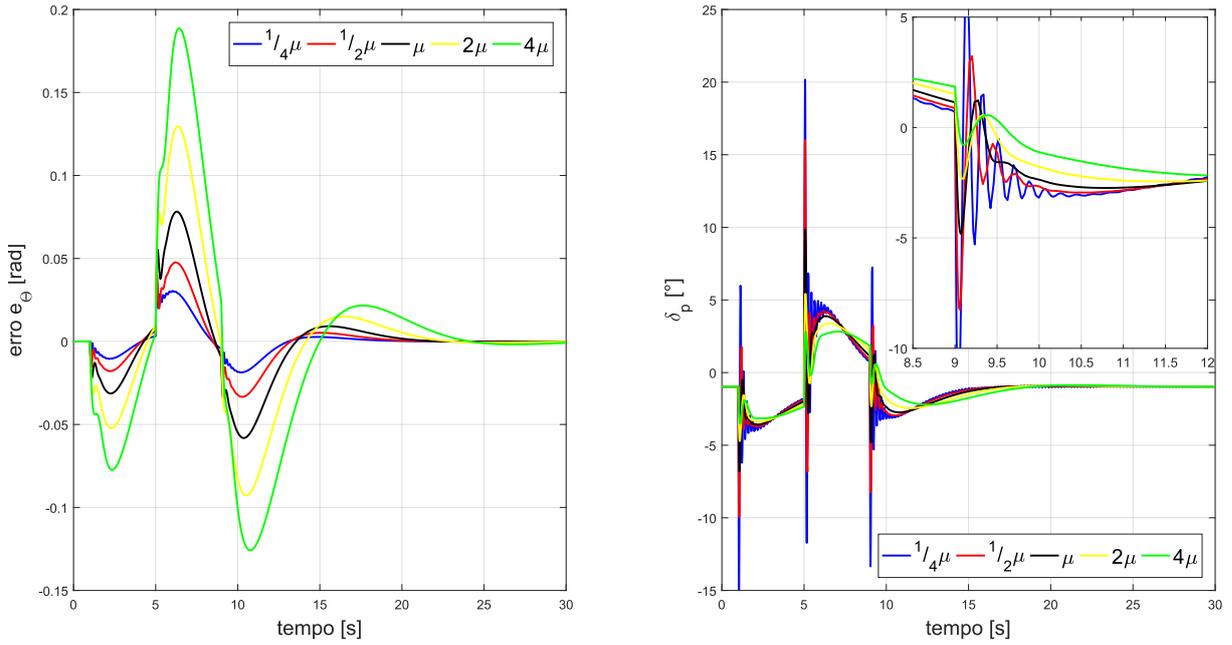


Figura 5.70: Comparação erro e sinal de controle para vários μ_Θ

a escolha da camada limite é uma inovação desta tese. Em Seshagiri e Khalil (2005) menciona-se que μ deve ser o suficientemente pequeno de tal forma que o desempenho do SMC ideal seja atingido mas, não especifica como atender este critério. Nenhuma das referências onde o RIU têm sido aplicado menciona como este parâmetro é escolhido.

Prosseguindo com o cálculo dos parâmetros do controlador, o valor de K_Θ para o caso 1 foi determinado através da expressão 5.73 sendo $K_\Theta = \nu_\Theta(\cdot) + q_\Theta$, sendo $q_\Theta = 2, 1k_0^\Theta \mu_\Theta$, com o valor de $\mu_\Theta = \pi/4$ e $k_0^\Theta = 1$ (o qual atende a condição $k_0^i > 0$) obtém-se $q_\Theta = 1, 649$. Sabe-se que $\nu_\Theta(\cdot) \geq |F_\Theta(\cdot)| = k_1^\Theta |e_2^\Theta| + |b(e, \eta)|$, assumindo o erro $|e_2^\Theta| \approx 0$ (o que é esperado), conduz a $\nu_\Theta(\cdot) \geq |b(e, \eta)|$, isto é:

$$\nu_\Theta(\cdot) \geq A \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \eta + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) \xi_2 \right] \quad (5.79)$$

Sendo $A = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_{yy}}$. Logo, utilizando os valores das derivativas de estabilidade da Tabela 4.2, dimensões e massas da Tabela 4.1 e com os limites $|\eta| = |\alpha| \leq \pi/4$ rad e $|\xi_2| = |q| \leq \pi/2$ rad/s é possível chegar em $\nu_\Theta(\cdot) = 11, 776$ e posteriormente em $K_\Theta = 13, 425$. Para completar o controlador RIU (caso 1) é preciso determinar o valor de g_2 da Equação 5.47 sendo: $g_2 = AC_{m_{\delta_p}}$, com $C_{m_{\delta_p}} = -0, 45$ chega-se em $g_2 = -36, 25$. Finalmente o controlador descrito na

Equação 5.70 será da forma:

$$u_{\Theta} = -g_2^{-1} K_{\Theta} \text{sat} \left(\frac{s_{\Theta}}{\mu_{\Theta}} \right) = 0,38 \cdot \text{sat} \left(\frac{1\sigma_{\Theta} + 1e_1^{\Theta} + e_2^{\Theta}}{\pi/4} \right) \quad (5.80)$$

Já para o caso 2, o valor de K_{Θ} é calculado a partir da Equação 5.78. Considerando novamente $|e_2^{\Theta}| \approx 0$, lembrando que $|\theta_1| = |Cm_{\delta_p}| = 0,45$, $\hat{\theta}_1 = 0,5$ e reaproveitando os valores de $|b(e, \eta)|$ e q_{Θ} previamente determinados no caso 1, chega-se em:

$$\begin{aligned} K_{\Theta} &= \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} - 1 \right) |b(e, \eta)| + q_{\Theta} \left(\frac{\hat{\theta}_1}{\theta_1} \right) \\ &= 0,11 \cdot 11,776 + 1,649 \cdot 1,11 \\ K_{\Theta} &= 3,166 \end{aligned} \quad (5.81)$$

Sabendo que $\hat{a}(\cdot) = g_2 = -k_a \hat{\theta}_1$ e lembrando que $\hat{F}_{\Theta}(\cdot) = F_{\Theta}(\cdot)$ chega-se finalmente ao controlador RIU para o caso 2 que será da forma:

$$\begin{aligned} u_{\Theta} &= \frac{-\hat{F}_{\Theta}(\cdot) - K_{\Theta} \cdot \text{sat}(s_{\Theta}/\mu_{\Theta})}{\hat{a}(\cdot)} \\ &= \frac{-k_1^{\Theta} e_2^{\Theta} - b(e, \eta) - K_{\Theta} \cdot \text{sat}(s_{\Theta}/\mu_{\Theta})}{g_2} \\ u_{\Theta} &= \frac{-k_1^{\Theta} e_2^{\Theta} + k_a [C_{m_0} + C_{m_{\alpha}} \eta + C_{m_q} \left(\frac{\bar{v}}{V} \right) (e_2^{\Theta} + \Theta'_{ref})] - 3,166 \cdot \text{sat} \left(\frac{1\sigma_{\Theta} + 1e_1^{\Theta} + e_2^{\Theta}}{\pi/4} \right)}{-k_a \hat{\theta}_1} \end{aligned} \quad (5.82)$$

A fim de tornar as simulações mais realistas, o atuador do profundor foi modelado como a equação diferencial de primeira ordem $\dot{\delta}_p = -20, 2\delta_p + 20, 2u_{\Theta}$ (Exatamente igual ao usado em LQR, NDI e controle clássico) com saturação na deflexão $|\delta_p| \leq 30^{\circ}$ e na taxa $|\dot{\delta}_p| \leq 720^{\circ}/s$. Os resultados da simulação apresentam-se na Figura 5.71.

Percebe-se na Figura 5.71 que ambos os controladores mostraram-se satisfatórios com erro de rastreamento menor do que 0.1 radianos, sendo o controlador RIU do caso 2 quem demonstrou um menor erro de rastreamento, como era de se esperar pelo fato de considerar incertezas no modelo, inclusive demandando menor atividade de controle.

É possível confirmar na Figura 5.72 que o erro de rastreamento acumulado foi maior para a primeira abordagem (caso 1), considerando conhecimento exato dos parâmetros do modelo, percebe-se também que os valores máximos atingidos pelo controle foram maiores para este

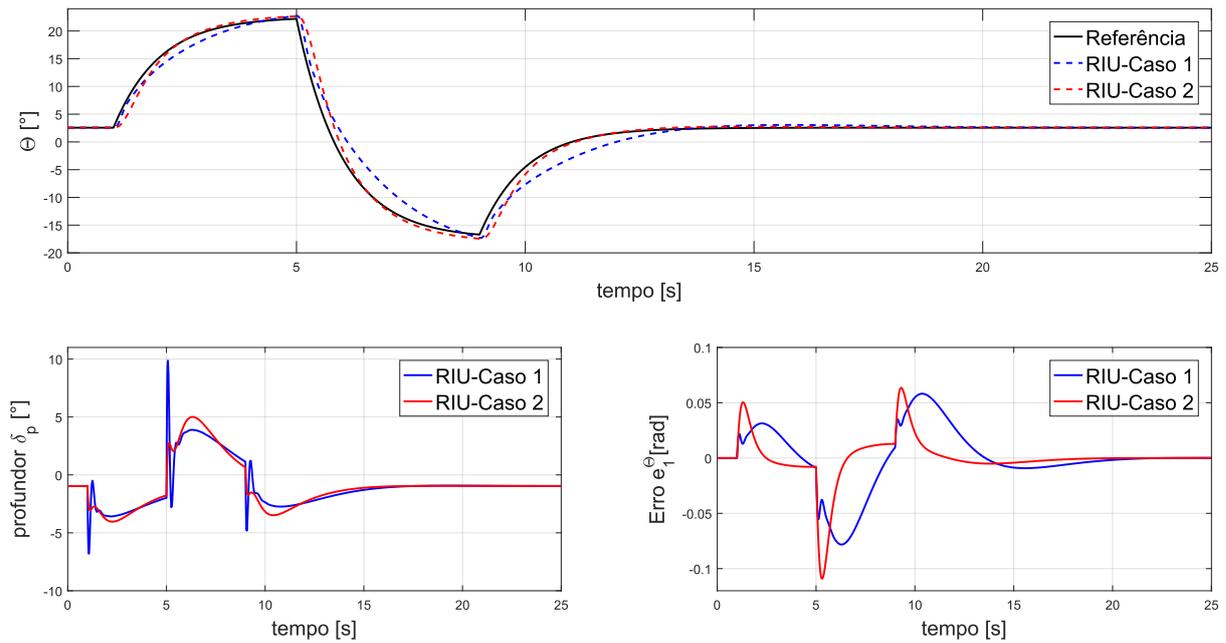


Figura 5.71: Rastreamento de *doublet* ângulo de atitude com RIU, casos 1 e 2.

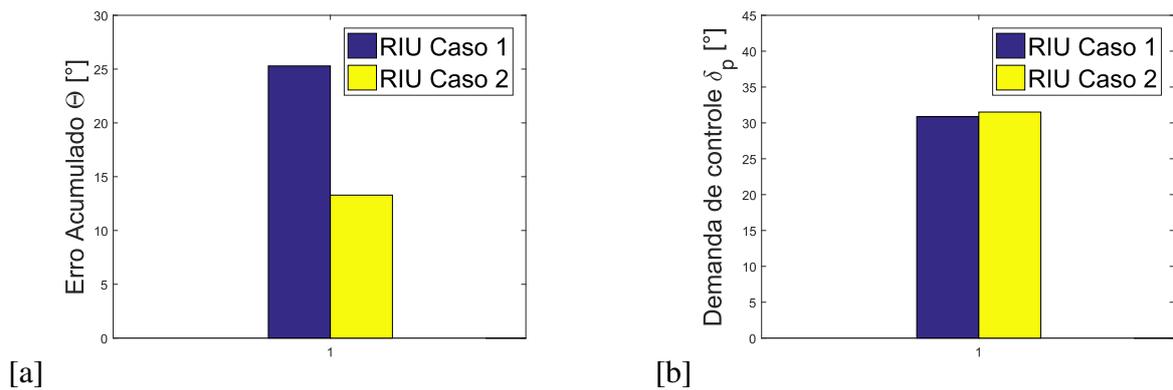


Figura 5.72: [a] Erro de rastreamento acumulado, casos 1 e 2, RIU [b] Demanda de profundor, casos 1 e 2, RIU

caso. Já para o caso 2, assumindo incerteza em um dos parâmetros, o erro acumulado foi menor, demonstrando que este controlador é mais robusto. No caso da demanda de controle, percebe-se que a pesar do controlador para o caso 2 demandar maior atividade de controle, a diferença com o caso 1 é mínima.

Cabe salientar que os ganhos K_Θ calculados são os mínimos para garantir o correto funcionamento do controlador. Com o intuito de ilustrar a possível degradação e/ou melhora do erro de rastreamento com outros ganhos, simulou-se a resposta do rastreamento do RIU simplificado (caso 1) com ganhos $\frac{1}{4}K_\Theta$ e $4K_\Theta$, a Figura 5.73 confirma a eficiência do ganho K_Θ calculado analiticamente quando comparado com $\frac{1}{4}K_\Theta$ e evidencia uma redução significativa do erro de rastreamento com $4K_\Theta$.

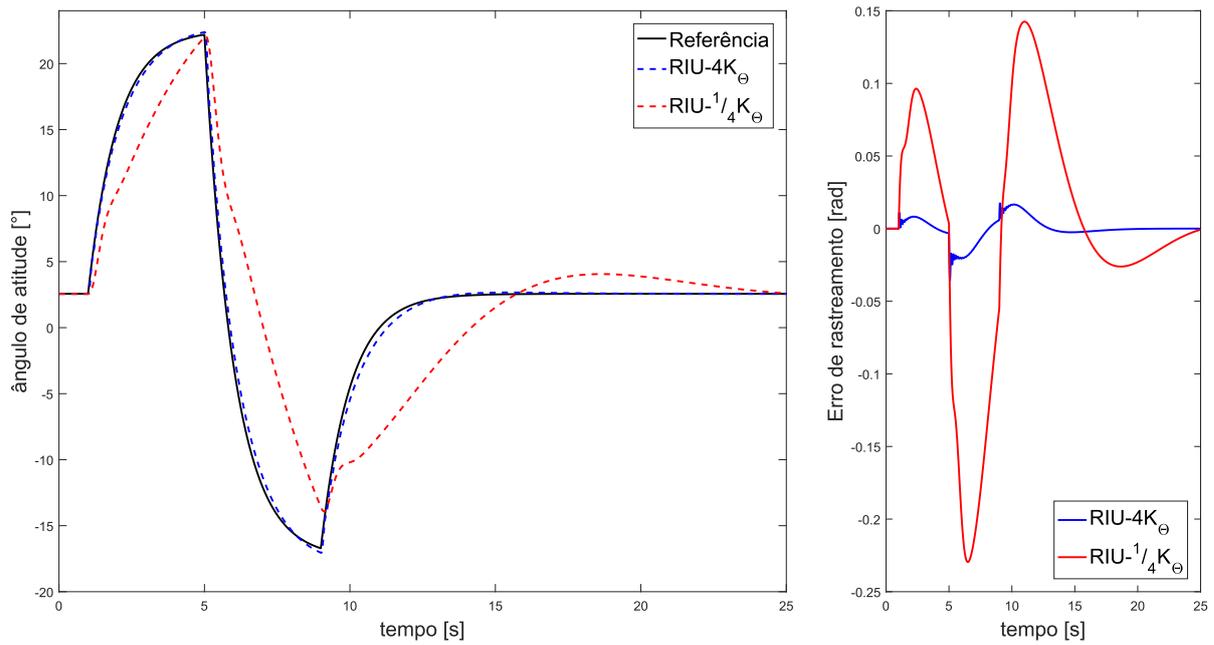


Figura 5.73: Rastreamento de *doublet* ângulo de atitude com RIU, $\frac{1}{4}K_{\Theta}$ e $4K_{\Theta}$.

Com o intuito de verificar a robustez do controlador RIU para ambos os casos (1 e 2), procedeu-se a incrementar gradativamente o valor máximo do ângulo de atitude de referência até 80. Os resultados mostram-se respetivamente nas Figuras 5.74 e 5.75. O controlador mostrou-se eficiente no rastreamento do sinal de referência.

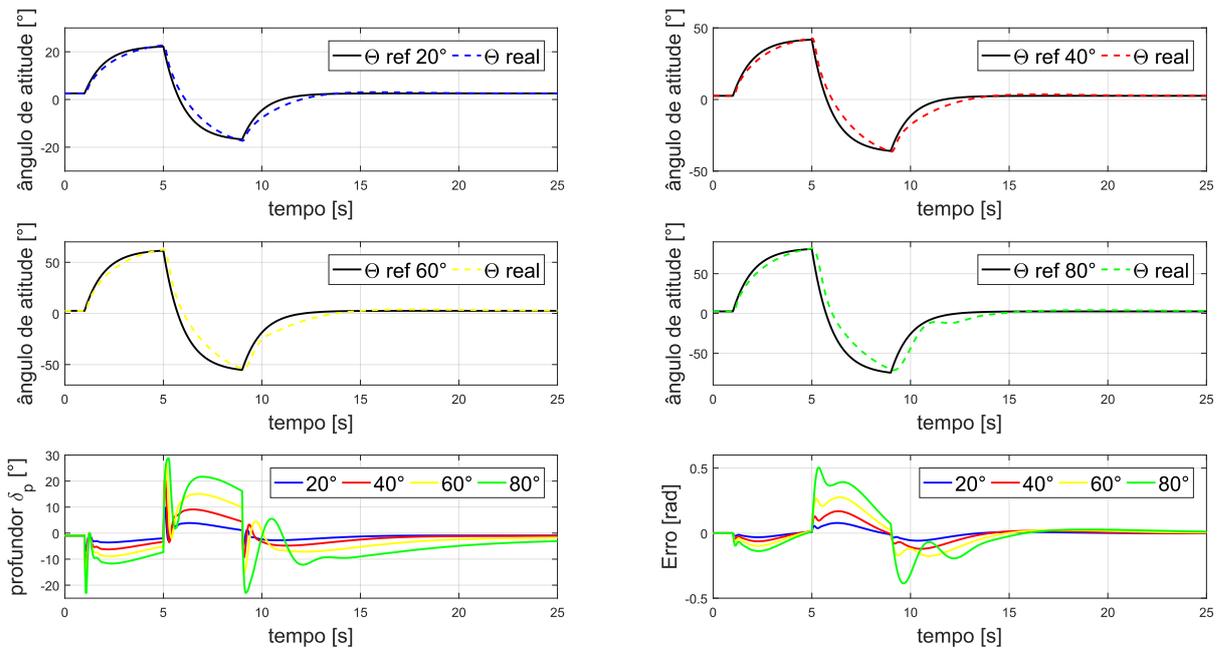


Figura 5.74: controlador RIU-caso 1 para várias amplitudes da referência.

Na Figura 5.76, comparam-se o erro acumulado e a demanda de controle para cada caso.

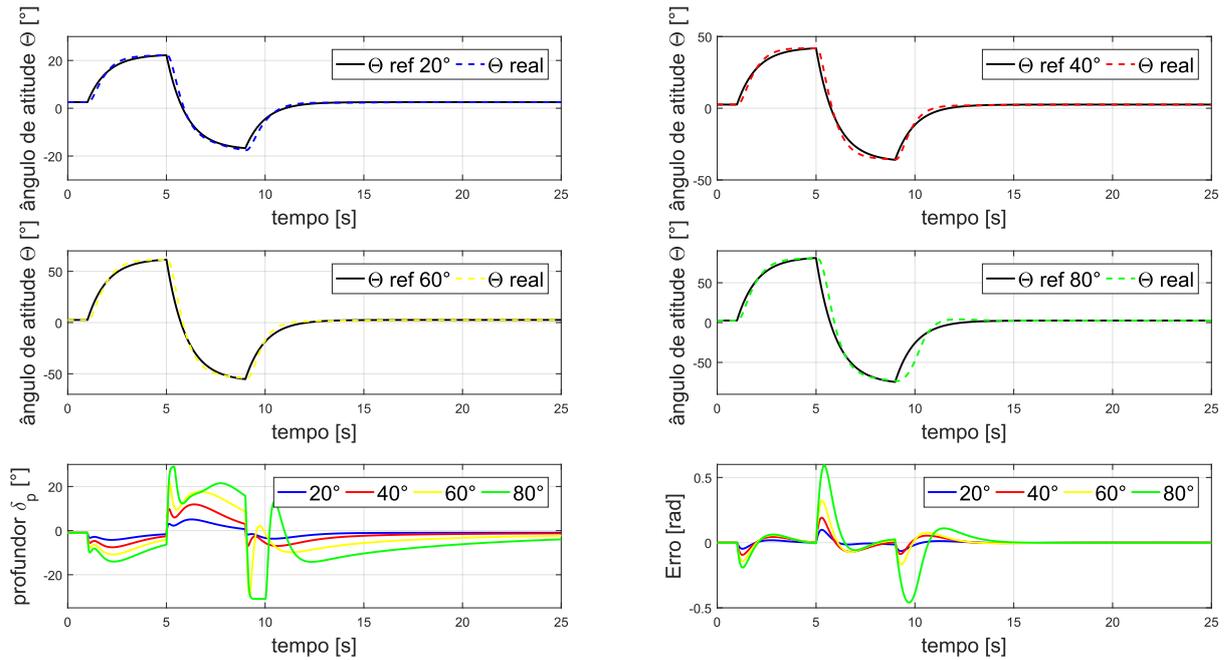


Figura 5.75: controlador RIU-caso 2 para várias amplitudes da referência.

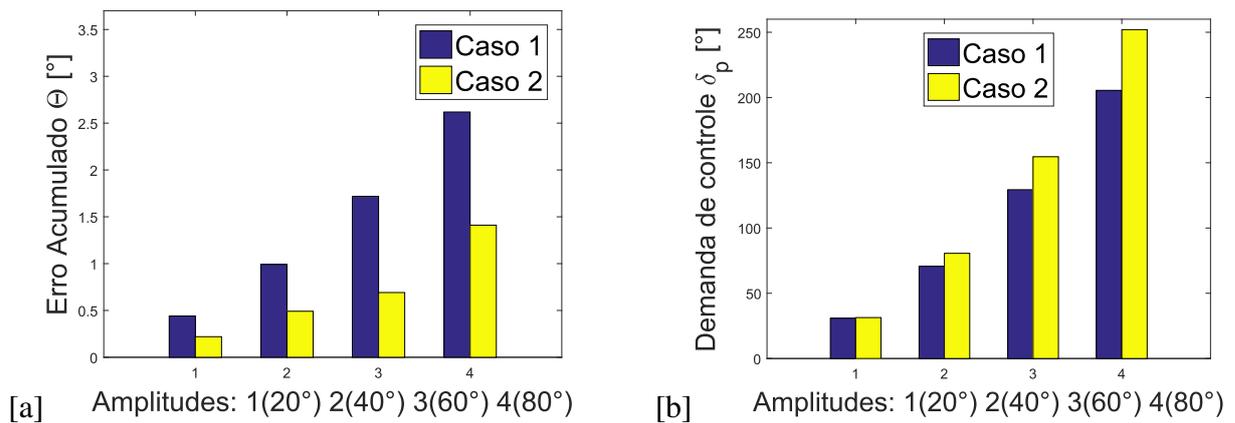


Figura 5.76: [a] Erro de rastreamento acumulado, casos 1 e 2, RIU [b] Demanda de profundor, casos 1 e 2, várias amplitudes da referência

Percebe-se que o erro de rastreamento acumulado para o caso 2, no qual consideraram-se incertezas no modelo, foi menor do que o caso 1, demonstrando maior precisão e robustez. A atividade de controle demandada foi muito similar para a amplitude (da referência) para a qual foram projetados os controladores, porém, para amplitudes maiores, a demanda de controle foi maior para o caso 2.

Demonstração de Estabilidade

Previamente na Subseção 5.7.1, demonstrou-se que o erro da dinâmica interna converge exponencialmente para zero assim que o erro da dinâmica externa se tornar nulo. Nesta subse-

ção demonstrar-se-á que todas as dinâmicas envolvidas no problema de rastreamento atual, são estáveis, isto é, que o controlador é capaz de levar o erro da dinâmica interna para zero. Estas dinâmicas são: a dinâmica da superfície deslizando, a dinâmica do integrador condicional e a dinâmica do erro.

Inicialmente coloca-se o sistema em malha fechada através do erro usando $\zeta \in R^{\rho-1}$ sendo $\zeta = \{e_i\}; (1 \leq i \leq \rho - 1)$ (KHALIL, 2002B). Portanto, $\zeta_\Theta = e_1^\Theta$, logo, sabendo que $s_\Theta = k_0^\Theta \sigma_\Theta + k_1^\Theta e_1^\Theta + e_2^\Theta$ e $e_2^\Theta = \dot{e}_2^\Theta$ temos que:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_\Theta &= -k_1^\Theta \zeta_\Theta + (s_\Theta - k_0^\Theta \sigma_\Theta) \\ &= M_\Theta \zeta_\Theta + C_\Theta (s_\Theta - k_0^\Theta \sigma_\Theta)\end{aligned}\quad (5.83)$$

Para demonstrar a estabilidade das dinâmicas definem-se as candidatas a funções de Lyapunov (CFL) da Equação 5.84 a seguir.

$$V_s = \frac{1}{2} s_\Theta^2; \quad V_\sigma = \frac{1}{2} \sigma_\Theta^2; \quad V_\zeta = \zeta_\Theta^T Q \zeta_\Theta \quad (5.84)$$

Sendo respetivamente as CFL da superfície deslizando, integrador condicional e o erro. Nesta última, a matriz Q deve ser determinada de tal forma que $Q = Q^T > 0$ satisfaça a equação de Lyapunov $Q M_\Theta + M_\Theta^T Q = -I$ sendo $M_\Theta = -k_1^\Theta$ tal como mostrado na Equação 5.83.

No caso da **superfície deslizando**, demonstrar-se-á que o conjunto compacto $V_s \leq \frac{1}{2} c_\Theta^2$ com $c_\Theta > \mu_\Theta$ é invariante positivo. Ao entendimento do autor, este conjunto genérico proposto em Seshagiri e Khalil (2005) representa o domínio de atração da superfície s , isto é, quão grande pode ser s (cujo limite deve ser c_Θ) de tal forma que partindo de fora da camada limite μ_Θ esta seja ainda capaz de convergir em $s = 0$. Logo, sabendo que fora da camada limite $|s_\Theta| \geq \mu_\Theta$ e que $sat(s_\Theta/\mu_\Theta) = s_\Theta/|s_\Theta|$ tem-se que (vide Equação 5.71 para definição de \dot{s}_Θ).

$$\begin{aligned}\dot{V}_s &= s_\Theta \dot{s}_\Theta = s_\Theta \left(\Delta_\Theta(\cdot) - K_\Theta \frac{s_\Theta}{|s_\Theta|} \right) \quad \text{devido a } K_\Theta > |\Delta_\Theta(\cdot)| + q_\Theta \\ &\leq |s_\Theta| |\Delta_\Theta(\cdot)| - |s_\Theta| (|\Delta_\Theta(\cdot)| + q_\Theta) \frac{s_\Theta}{|s_\Theta|} \\ &\leq |s_\Theta| |\Delta_\Theta(\cdot)| - |s_\Theta| |\Delta_\Theta(\cdot)| - q_\Theta |s_\Theta| \quad \text{com } q_\Theta > 0 \\ &\leq -q_\Theta |s_\Theta| < 0\end{aligned}\quad (5.85)$$

Logo, pela escolha de q_Θ , $\dot{V}_s \leq 2.1 k_0^\Theta \mu_\Theta |s_\Theta|$ e devido a $k_0^\Theta = 1 > 0$ e $\mu_\Theta = \pi/4 > 0$, $\dot{V}_s < 0$ e conseqüentemente o conjunto $V_s \leq \frac{1}{2} c_\Theta^2$ é invariante positivo para qualquer valor

de c_Θ , ou seja, uma vez que as trajetórias convergem neste conjunto, permanecem nele para qualquer tempo $t > 0$.

Análogo à superfície deslizante, para o **integrador condicional**, propõe-se o conjunto compacto $V_\Theta \leq \frac{1}{2}(\mu_\Theta/k_0^\Theta)^2$ devido ao fato do valor máximo do estado do integrador (σ_Θ) ser $|\sigma_\Theta| \leq (\mu_\Theta/k_0^\Theta)$ (Resolvendo analiticamente a equação diferencial do integrador condicional é possível verificar este valor). Como o integrador condicional age unicamente dentro da camada limite, $|s_\Theta| \leq \mu_\Theta$ logo, $\text{sat}(s_\Theta/\mu_\Theta) = s_\Theta/\mu_\Theta$, derivando a CFL correspondente tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= \sigma_\Theta \dot{\sigma}_\Theta = \sigma_\Theta (-k_0^\Theta \sigma_\Theta + s_\Theta) \\ &= -k_0^\Theta \sigma_\Theta^2 + \sigma_\Theta s_\Theta \\ &\leq -k_0^\Theta |\sigma_\Theta|^2 + |s_\Theta| |\sigma_\Theta| \quad \text{com} \quad |s_\Theta| \leq \mu_\Theta \\ &\leq -k_0^\Theta |\sigma_\Theta|^2 + \mu_\Theta |\sigma_\Theta| \end{aligned} \quad (5.86)$$

Se desenharmos as parcelas positiva e negativa da inequação final de \dot{V}_σ em 5.86 ter-se-á a Figura 5.77. Percebe-se que o módulo da parcela positiva $\mu_\Theta |\sigma_\Theta|$ é sempre maior para $\sigma_\Theta \leq (\mu_\Theta/k_0^\Theta)$ mas para $\sigma_\Theta > (\mu_\Theta/k_0^\Theta)$ garante-se que $\dot{V}_\sigma < 0$, ou seja, \dot{V}_σ é negativa definida, isto quer dizer que, para qualquer trajetória de σ_Θ partindo de fora do conjunto $V_\Theta \leq \frac{1}{2}(\mu_\Theta/k_0^\Theta)^2$ permanecerá dentro de este. Segundo a seção 4.8 de Khalil (2002a), as soluções são *Uniformly Ultimately Bounded* e tal conjunto é invariante positivo, ou seja, uma vez dentro dele, não podem deixá-lo. Deve-se lembrar neste ponto, que um conjunto invariante é equivalente ao domínio de atração do sistema.

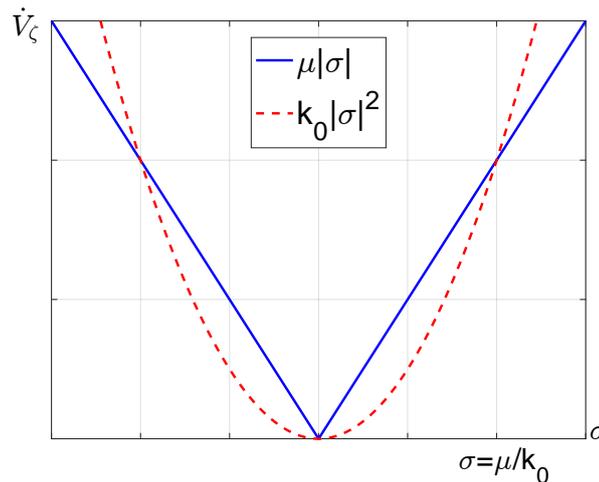


Figura 5.77: Demonstração de estabilidade de σ_Θ .

No caso da demonstração de estabilidade da dinâmica do **erro** ζ_Θ , determina-se inicialmente o valor de Q na CFL V_ζ da Equação 5.84 resolvendo a equação de Lyapunov $QM_\Theta +$

$M_{\Theta}^T Q = -I$ com $M_{\Theta} = -k_1^{\Theta}$ e $C_{\Theta} = 1$, obtém-se: $Q = \frac{1}{2k_1^{\Theta}}$. Logo, derivando a CFL tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\zeta} &= \dot{\zeta}_{\Theta}^T Q \zeta_{\Theta} + \zeta_{\Theta}^T Q \dot{\zeta}_{\Theta} \\
&= [M_{\Theta}^T \dot{\zeta}_{\Theta}^T + C_{\Theta}^T (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta})^T] Q \zeta_{\Theta} + \zeta_{\Theta}^T Q [M_{\Theta} \zeta_{\Theta} + C_{\Theta} (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta})] \\
&= \underline{\zeta_{\Theta}^T M_{\Theta}^T Q \dot{\zeta}_{\Theta}} + Q C_{\Theta}^T (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta})^T \zeta_{\Theta} + \underline{\zeta_{\Theta}^T Q M_{\Theta} \zeta_{\Theta}} + \zeta_{\Theta}^T Q C_{\Theta} (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta}) \\
&= \underline{\zeta_{\Theta}^T [Q M_{\Theta} + M_{\Theta}^T Q] \zeta_{\Theta}} + 2 Q C_{\Theta} (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta}) \zeta_{\Theta} \tag{5.87}
\end{aligned}$$

equacao Lyapunov

$$\begin{aligned}
&= -\zeta_{\Theta}^T I \zeta_{\Theta} + 2 Q C_{\Theta} (s_{\Theta} - k_0^{\Theta} \sigma_{\Theta}) \zeta_{\Theta} \\
&\leq -|\zeta_{\Theta}|^2 + 2 |Q C_{\Theta}| (|s_{\Theta}| + k_0^{\Theta} |\sigma_{\Theta}|) |\zeta_{\Theta}|
\end{aligned}$$

Para o lado direito da última inequação em 5.87 ser nulo (ou seja garantir $\dot{V}_{\zeta} \leq 0$), é necessário que $\zeta_{\Theta} = 2 |Q C_{\Theta}| (|s_{\Theta}| + k_0^{\Theta} |\sigma_{\Theta}|) = \delta$, sabendo que $|s_{\Theta}| \leq c_{\Theta}$ e $|\sigma_{\Theta}| \leq (\mu_{\Theta}/k_0^{\Theta})$ logo, $\delta = 2 |Q C_{\Theta}| (c_{\Theta} + \mu_{\Theta})$. Finalmente o conjunto $V_{\zeta}(\delta) \leq \lambda_{max}(Q) \delta^2 = 4 |Q C_{\Theta}|^2 (c_{\Theta} + \mu_{\Theta})^2 \lambda_{max}(Q)$ é invariante positivo $\forall |\zeta_{\Theta}| \geq \delta$ devido às trajetórias do erro uma vez nele não conseguirem deixá-lo (de maneira análoga ao *Uniformly Ultimately Bounded* do integrador condicional). Cabe salientar que $\lambda_{max}(Q)$ é o máximo autovalor da matriz Q que no caso em questão é um valor constante (matriz 1×1).

Pode-se concluir que, pelo fato das primeiras derivadas das CFL nas Equações 5.85, 5.86 e 5.87 serem negativas definidas ou *Uniformly Ultimately Bounded*, a dinâmica externa do sistema é estável e seus respectivos conjuntos compactos são invariantes positivos, isto é, podem ser usados como estimativas do domínio de atração do sistema, portanto, as trajetórias do sistema não sairão destes conjuntos. Percebe-se que a escolha de $\mu_{\Theta} > 0$, $k_0^{\Theta} > 0$, k_1^{Θ} e $q_{\Theta} > 0$ são essenciais para garantir a estabilidade do sistema.

5.7.2 Dinâmica Latero-Direcional MIMO

Nesta seção aplica-se o projeto analítico do controlador RIU à dinâmica latero-direcional da aeronave Mirage III. O objetivo de controle é realizar o rastreamento de um *doublet* de ângulo de rolamento (Φ) através do comando do aileron, mantendo o ângulo de derrapagem (β) nulo por meio do comando de leme (amortecedor de guinada), portanto, trata-se de um sistema MIMO. Este problema foi abordado previamente em Vo e Seshagiri (2008) porém, o ganho do controlador não foi determinado analiticamente. Devido à alta dependência das Equações da dinâmica com a velocidade total da aeronave, e com o intuito de simplificar os cálculos, implementou-se um controlador PI para manter esta última constante durante as manobras por meio da manete de combustível. A dinâmica latero-direcional considerada é a descrita pela

Equação 5.88, para detalhes de como foram obtidas vide Apêndice A.

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= \frac{\bar{q}S}{mV} [(C_{y\beta} - C_d) \beta + C_{y\delta_l} \delta_l + C_{y\delta_a} \delta_a] + \frac{g}{V} \cos \Theta_0 \sin \Phi + p \sin \alpha_0 - r \cos \alpha_0 \\
\dot{\Phi} &= p + r \tan \Theta_0 \cos \Phi \\
\dot{p} &= c_3 \bar{q} S l \left[C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \left(\frac{l}{V} \right) p + C_{l_r} \left(\frac{l}{V} \right) r + C_{l_{\delta_a}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_a + C_{l_{\delta_l}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_l \right] \\
&+ c_4 \bar{q} S l \left[C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \left(\frac{l}{V} \right) p + C_{n_r} \left(\frac{l}{V} \right) r + C_{n_{\delta_a}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_a + C_{n_{\delta_l}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_l \right] \\
\dot{r} &= c_4 \bar{q} S l \left[C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \left(\frac{l}{V} \right) p + C_{l_r} \left(\frac{l}{V} \right) r + C_{l_{\delta_a}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_a + C_{l_{\delta_l}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_l \right] \\
&+ c_9 \bar{q} S l \left[C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \left(\frac{l}{V} \right) p + C_{n_r} \left(\frac{l}{V} \right) r + C_{n_{\delta_a}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_a + C_{n_{\delta_l}} \left(\frac{l}{V} \right) \delta_l \right]
\end{aligned} \tag{5.88}$$

O sistema tem 4 estados representados pelo vetor de estados $x \in R^n$ com $n = 4$ sendo $x = \{\beta, \Phi, p, r\}^T$ os quais são respectivamente o ângulo de derrapagem, ângulo de rolamento, taxa de rolagem e taxa de guinada. O vetor de entradas de controle do sistema é $u \in R^m$, com $m = 2$ sendo $u = \{\delta_a, \delta_l\}$ cujos elementos representam as deflexões do aileron e do leme, o vetor de saída do sistema de controle será $y \in R^m$, $y = h(x) = \{\beta, \Phi\}$, sendo estes os estados a controlar.

É de extrema importância ressaltar neste ponto do trabalho que foi desconsiderada a contribuição da deflexão das superfícies aerodinâmicas de controle nas forças aerodinâmicas propriamente ditas, isto é, a deflexão do profundor, dos ailerons e do leme geram uma força de arrasto o suficientemente pequena quando comparada com o momento produzido. Desprezar a contribuição dos controles nas forças aerodinâmicas não é uma estratégia nova neste trabalho, em Nguyen e Damm (2015) e Zou e Pagilla (2006) também é desprezado o efeito da deflexão das superfícies de controle nas forças aerodinâmicas. Sob esta hipótese, assume-se que na dinâmica do ângulo de derrapagem, a contribuição dos controles (δ_a e δ_l) na forças aerodinâmica F_y por meio da parcela $C_{y\delta_l} \delta_l + C_{y\delta_a} \delta_a$ é mínima podendo ser considerada unicamente a contribuição através dos momentos (L e N) refletidas nas dinâmicas de p e r (maiores detalhes encontram-se no Apêndice A. Logo, a dinâmica do ângulo de derrapagem será da forma:

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q}S}{mV} (C_{y\beta} - C_d) \beta + \frac{g}{V} \cos \Theta_0 \sin \Phi + p \sin \alpha_0 - r \cos \alpha_0 \tag{5.89}$$

Convenientemente, reescreve-se a dinâmica latero-direcional da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = f_{i \times 1}^1(\beta, \Phi) + f_{i \times 2}^2(\beta, \Phi) \begin{Bmatrix} p \\ r \end{Bmatrix} + g_{i \times 2}(\beta, \Phi) \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_l \end{Bmatrix} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (5.90)$$

Sendo:

$$f_{i \times 1}^1 = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \beta + \bar{c}_2 \text{sen} \Phi \\ 0 \\ \bar{c}_3 \beta \\ \bar{c}_4 \beta \end{bmatrix}, f_{i \times 2}^2 = \begin{bmatrix} \text{sen} \alpha_0 & -\cos \alpha_0 \\ 1 & \tan \Theta_0 \cos \Phi \\ k \bar{c}_5 & k \bar{c}_6 \\ k \bar{c}_7 & k \bar{c}_8 \end{bmatrix}, g_{i \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Alguns dos elementos destas matrizes definidos pelo autor com o intuito de simplificar a notação são apresentados na Tabela 5.7 a seguir.

Tabela 5.7: Componentes da dinâmica latero-direcional.

$k = \bar{q} S l \left(\frac{l}{V} \right)$	$\bar{c}_1 = \frac{\bar{q} S}{m V} (C_{y\beta} - C_d)$	$\bar{c}_2 = \frac{g}{V} \cos \Theta_0$
$\bar{c}_3 = \bar{q} S l (c_3 C_{l_\beta} + c_4 C_{n_\beta})$	$\bar{c}_4 = \bar{q} S l (c_4 C_{l_\beta} + c_9 C_{n_\beta})$	$\bar{c}_5 = \bar{q} S l (c_3 C_{l_p} + c_4 C_{n_p})$
$\bar{c}_6 = \bar{q} S l (c_3 C_{l_r} + c_4 C_{n_r})$	$\bar{c}_7 = \bar{q} S l (c_4 C_{l_p} + c_9 C_{n_p})$	$\bar{c}_8 = \bar{q} S l (c_4 C_{l_r} + c_9 C_{n_r})$
$g_{31} = k (c_3 C_{l_{\delta_a}} + c_4 C_{n_{\delta_a}})$	$g_{32} = k (c_3 C_{l_{\delta_l}} + c_4 C_{n_{\delta_l}})$	$g_{41} = k (c_4 C_{l_{\delta_a}} + c_9 C_{n_{\delta_a}})$
$g_{42} = k (c_4 C_{l_{\delta_l}} + c_9 C_{n_{\delta_l}})$	-	-

Cálculo do grau relativo

O grau relativo é determinado usando a Equação 5.92. Os casos são apresentados na forma $Estado(h(x)) \rightarrow Controle(u)$, ou seja, calculam-se as derivadas necessárias (grau relativo), para que haja relação direta entre a saída $h(x)$ e o controle u correspondente a cada caso.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) \neq 0 \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq \rho_i - 1 \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (5.92)$$

Para o caso $\beta \rightarrow \delta_a$ ($i = 1, j = 1$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_1} h_1 = g_{11} = 0$ o qual não atende a condição 5.92, já para $k = 1$, $L_{g_1} L_f h_1 = g_{31} \text{sen} \alpha_0 - g_{41} \cos \alpha_0 = a_{11}$, logo, o grau relativo será $\rho_{11} = k + 1 = 2$.

Para o caso $\beta \rightarrow \delta_l$ ($i = 1, j = 2$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_2}h_1 = g_{12} = 0$ o qual não atende a condição 5.92, já para $k = 1$, $L_{g_2}L_f h_1 = g_{32}\text{sen}\alpha_0 - g_{42}\text{cos}\alpha_0 = a_{12}$, logo, o grau relativo será $\rho_{12} = k + 1 = 2$.

Para o caso $\Phi \rightarrow \delta_a$ ($i = 2, j = 1$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_1}h_2 = g_{21} = 0$ o qual não atende a condição 5.92, já para $k = 1$, $L_{g_1}L_f h_2 = g_{31} + g_{41} \tan \Theta_0 \cos \Phi = a_{21}$, logo, o grau relativo será $\rho_{21} = k + 1 = 2$.

Finalmente, para o caso $\Phi \rightarrow \delta_l$ ($i = 2, j = 2$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_2}h_2 = g_{22} = 0$ o qual não atende a condição 5.92, já para $k = 1$, $L_{g_2}L_f h_2 = g_{32} + g_{42} \tan \Theta_0 \cos \Phi = a_{22}$, logo, o grau relativo será $\rho_{22} = k + 1 = 2$.

Para o problema de controle formulado, o vetor de graus relativos correspondente é $\rho = \{\rho_{12}, \rho_{21}\}$ (controle de Φ com δ_a e β com δ_l), o que conduz a um grau relativo total $\rho = 2 + 2 = 4 = n$, ou seja, **não existe dinâmica interna** e a transformação à forma normal será total.

Analisando-se a matriz $A(x) = a_{ij}$ da Equação 5.93, procede-se a calcular o determinante $\text{Det}[A(x)]$ tal como na Equação 5.94

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f h_1(x) & L_{g_2}L_f h_1(x) \\ L_{g_1}L_f h_2(x) & L_{g_2}L_f h_2(x) \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} g_{31}\text{sen}\alpha_0 - g_{41}\text{cos}\alpha_0 & g_{32}\text{sen}\alpha_0 - g_{42}\text{cos}\alpha_0 \\ g_{31} + g_{41} \tan \Theta_0 \cos \Phi & g_{32} + g_{42} \tan \Theta_0 \cos \Phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \text{Det}[A(x)] &= k [g_{31}g_{42}(\text{sen}\alpha_0 \tan \Theta_0 \cos \Phi + \cos \alpha_0) - g_{32}g_{41}(\text{sen}\alpha_0 \tan \Theta_0 \cos \Phi + \cos \alpha_0)] \\ &= k(\text{sen}\alpha_0 \tan \Theta_0 \cos \Phi + \cos \alpha_0)(g_{31}g_{42} - g_{32}g_{41}) \end{aligned} \quad (5.94)$$

Deve-se garantir que o $\text{Det}[A(x)] \neq 0$ para o sistema ser controlável. Como a velocidade total de cruzeiro da aeronave é $V \neq 0$ conseqüentemente a constante $k \neq 0$ (Referir-se à Tabela 5.7). Tal como comentado em capítulos anteriores, ao entendimento do autor desta tese, o atendimento da condição $\text{Det}[A(x)] \neq 0$ além de permitir demonstrar que o sistema é controlável, permite limitar os valores máximos de alguns estados (análogo ao domínio de atração), obviamente para que tal condição seja atendida. Por causa disto, limita-se $|\Phi| <$

$(\pi/2)$, logo, $(\text{sen}\alpha_0 \tan \Theta_0 \cos \Phi + \cos \alpha_0) \neq 0$ e finalmente:

$$\begin{aligned}
 (g_{31}g_{42} - g_{32}g_{41}) &= (c_3C_{l_{\delta a}} + c_4C_{n_{\delta a}})(c_4C_{l_{\delta l}} + c_9C_{n_{\delta l}}) - (c_3C_{l_{\delta l}} + c_4C_{n_{\delta l}})(c_4C_{l_{\delta a}} + c_9C_{n_{\delta a}}) \\
 &= c_3c_4C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta l}} + c_4^2(C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta l}} - C_{n_{\delta l}}C_{l_{\delta a}}) - c_3c_9C_{l_{\delta l}}C_{n_{\delta a}} \\
 &= [C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta l}}(c_3c_4 - c_4^2) + C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta l}}(c_4^2 - c_3c_9)]
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Devido a $c_4^2 \neq c_3c_9 \neq c_3c_4$ (vide Equações 4.10) a matriz $A(x)$ é não singular ($\text{Det}[A(x)] \neq 0$) e pelo fato da matriz $g_{i \times 2}(\beta, \Phi)$ ser involutiva (possuir unicamente elementos constantes) conclui-se que **o sistema é controlável**.

Determinação da nova dinâmica (externa)

Por meio de $\xi_j^i = L_f^{j-1}h_i$ ($1 \leq j \leq \rho_i, 1 \leq i \leq m$) com $\rho_1 = \rho_2 = 2$ e $m = 2$ tem-se que as novas variáveis da dinâmica externa são:

$$\begin{aligned}
 (i = 1, j = 1) : \quad \xi_1^1 &= h_1 = \beta \\
 (i = 1, j = 2) : \quad \xi_2^1 &= L_f h_1 = \bar{c}_1\beta + \bar{c}_2\text{sen}\Phi + p\text{sen}\alpha_0 - r\text{cos}\alpha_0 \\
 (i = 2, j = 1) : \quad \xi_1^2 &= h_2 = \Phi \\
 (i = 2, j = 2) : \quad \xi_2^2 &= L_f h_2 = p + r \tan \Theta_0 \cos \Phi
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

Para determinar a nova dinâmica utiliza-se a Equação 3.31. Por simplicidade na nomenclatura, fez-se a mudança de variáveis $\{\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ e foi feita a transformação de variáveis $T : x \rightarrow \xi$ (construiu-se um difeomorfismo local). A nova dinâmica resultante é definida pela Equação 5.97

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= b_1(\xi) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\
 \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\
 \dot{\xi}_4 &= b_2(\xi) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 b_1(\xi) &= \bar{c}_1 \xi_2 + \bar{c}_2 \xi_4 \cos \xi_3 + \text{sen} \alpha_0 (\bar{c}_3 \xi_1 + \bar{c}_5 p(\xi) + \bar{c}_6 r(\xi)) \\
 &\quad - \cos \alpha_0 (\bar{c}_4 \xi_1 + \bar{c}_7 p(\xi) + \bar{c}_8 r(\xi)) \\
 b_2(\xi) &= -r(\xi) \tan \Theta_0 \text{sen} \xi_3 (p(\xi) + r \tan \Theta_0 \cos \xi_3) + \bar{c}_3 \xi_1 + \bar{c}_5 p(\xi) \\
 &\quad + \bar{c}_6 r(\xi) + \tan \Theta_0 \cos \xi_3 (\bar{c}_4 \xi_1 + \bar{c}_7 p(\xi) + \bar{c}_8 r(\xi))
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

Com :

$$r(\xi) = \frac{-\xi_2 + \xi_4 \text{sen} \alpha_0 + \bar{c}_1 \xi_1 + \bar{c}_2 \text{sen} \xi_3}{\cos \alpha_0 + \text{sen} \alpha_0 \tan \Theta_0 \cos \xi_3}, p(\xi) = \xi_4 - r(\xi) \tan \Theta_0 \cos \xi_3$$

Problema de rastreabilidade

O erro do sistema é determinado por meio de $e_i = \xi_i - \bar{\xi}_i - v_i$ com $\bar{\xi} = [r_{1ss}, 0, r_{2ss}, 0]$ e $v_i = [(r_1 - r_{1ss}), r_1^{(1)}, (r_2 - r_{2ss}), r_2^{(1)}]$ sendo, para o problema de rastreamento atual $r_1 = \beta_{ref} = 0$, $r_2 = \Phi_{ref}$, $r_{1ss} = \dot{\beta}_{ref} = 0$ e $r_{2ss} = \dot{\Phi}_{ref}$. Finalmente o erro será: $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \Phi_{ref}, \xi_4 - \dot{\Phi}_{ref}\}$.

Com o erro como a nova variável do sistema é feita a transformação $T : \xi \rightarrow e$ e a dinâmica do erro pode ser expressada de forma matricial como na Equação 5.99.

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} b_1(e) \\ b_2(e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right\} \tag{5.99}$$

Usando a Definição 3.5, define-se o conjunto compacto para o erro $e \in E = \{|e| < l_1\}$, logo, para o problema de rastreamento atual definem-se os limites: $|\beta| < \pi/6$ e $|\Phi| < \pi/2$.

Projeto do controlador

Tal como mencionado anteriormente, o controlador objeto de estudo desta tese é o regulador integrativo universal (RIU), o qual consiste de um controlador por modos/superfícies deslizantes (Equação 5.100) com integrador condicional (Equação 5.101).

$$s_i = k_0^i \sigma_i + \sum_{j=1}^{\rho_i-1} k_j^i e_j^i + e_{\rho_i}^i \quad i = \beta, \Phi \tag{5.100}$$

$$\dot{\sigma}_i = -k_0^i \sigma_i + \mu_i \text{sat} \left(\frac{s_i}{\mu_i} \right), \quad k_0^i > 0 \quad (5.101)$$

Aproveitar-se-á a flexibilidade de escolher $\hat{F}(\cdot) = 0$ (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). Logo, $\hat{F}_\Phi(\cdot) = 0$ e $\hat{F}_\beta(\cdot) = 0$, assume-se também que encontra-se disponível a primeira derivada do erro. Logo, a superfície deslizante e integrador condicional serão da forma:

$$\begin{Bmatrix} s_\beta \\ s_\Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_0^\beta \sigma_\beta + k_1^\beta e_1^\beta + e_2^\beta \\ k_0^\Phi \sigma_\Phi + k_1^\Phi e_1^\Phi + e_2^\Phi \end{Bmatrix} \quad (5.102)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_\beta \\ \dot{\sigma}_\Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \\ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \end{Bmatrix} \quad (5.103)$$

Sendo $e_1^\beta = e_1$, $e_2^\beta = \dot{e}_1^\beta = e_2$, $e_1^\Phi = e_3$ e $e_2^\Phi = \dot{e}_1^\Phi = e_4$. Derivando a superfície s_i :

$$\begin{aligned} \dot{s}_\beta &= k_0^\beta \dot{\sigma}_\beta + k_1^\beta \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \\ &= k_0^\beta \left\{ -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \right\} + \underbrace{k_1^\beta e_2 + b_1(e)}_{F_\beta(\cdot)} + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \dot{s}_\Phi &= k_0^\Phi \dot{\sigma}_\Phi + k_1^\Phi \dot{e}_3 + \dot{e}_4 \\ &= k_0^\Phi \left\{ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \right\} + \underbrace{k_1^\Phi e_4 + b_2(e)}_{F_\Phi(\cdot)} + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned}$$

Reserva-se esta última Equação e procede-se com a definição do controlador a partir do controlador RIU original proposto em Seshagiri e Khalil (2005) (Equação 5.105), o qual será implementado no sistema atual. Este sistema MIMO possui uma particularidade, os controles u_1 e u_2 estão mutuamente acoplados (vide Equação 5.104), portanto, não é possível assumir que existe um *loop* independente para o controle de cada saída. Além disto, devido ao fato do controlador RIU ser formulado a partir do controle equivalente de SMC, e por causa da matriz A (análoga a \hat{A} da Equação 5.105) não ser uma matriz diagonal, o controlador RIU para o sistema MIMO mutuamente acoplado em questão será o vetor $\{u\}$ resultante da Equação 5.106

representado pela Equação 5.107 (Lembrar hipótese $\hat{F}(\cdot) = 0$).

$$\begin{aligned} u &= \hat{A}^{-1}(e, v)[- \hat{F}(e, v, \bar{w}) + v] \\ v_i &= -\beta_i(e, v, \bar{w}) \text{sat}(s_i/\mu_i) \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -\hat{F}_\beta + v_\beta \\ -\hat{F}_\Phi + v_\Phi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ v_\beta &= -K_\beta(\cdot) \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \\ v_\Phi &= -K_\Phi(\cdot) \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_{22}v_\beta - a_{12}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \\ \frac{a_{21}v_\beta - a_{11}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \end{Bmatrix} \quad (5.107)$$

Sendo a_{ij} os elementos da matriz $A(x)$ da Equação 5.93 e os ganhos K_β e K_Φ determinados a partir da Equação 5.108. Deve-se lembrar que a escolha de $\nu(\cdot)$ é feita a partir da maximização da Equação 3.42 da Definição 3.8. Esta escolha permitirá que a dinâmica da superfície deslizante seja estável garantindo que $\dot{V}_s = s\dot{s} < 0$ (derivada da CFL para s) sempre que $q_\beta > 0$ e $q_\Phi > 0$.

$$\begin{aligned} K_\beta &= \nu_\beta(\cdot) + q_\beta; \quad q_\beta > 0 \\ K_\Phi &= \nu_\Phi(\cdot) + q_\Phi; \quad q_\Phi > 0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

Para confirmar que de fato os ganhos podem ser calculados através da Equação 5.108, procede-se a substituir os controles u_1 e u_2 da Equação 5.107 na derivada da superfície deslizante que foi reservada na Equação 5.104 a analisa-se o sistema fora da camada limite ($\text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) =$

$s_\beta/|s_\beta|$ e $\text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) = s_\Phi/|s_\Phi|$). Obtendo-se as Equações 5.109 e 5.110.

$$\begin{aligned}
\dot{s}_\beta &= k_0^\beta \left\{ -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \right\} + F_\beta(\cdot) \\
&+ a_{11} \left[-\frac{a_{22}v_\beta - a_{12}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \right] + a_{12} \left[\frac{a_{21}v_\beta - a_{11}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \right] \\
&= k_0^\beta \left\{ -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \right\} + F_\beta(\cdot) + v_\beta \\
&= k_0^\beta \left\{ -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \right\} + F_\beta(\cdot) - K_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta) \\
&= k_0^\beta \left\{ -k_0^\beta \sigma_\beta + \mu_\beta \frac{s_\beta}{|s_\beta|} \right\} + F_\beta(\cdot) - K_\beta \frac{s_\beta}{|s_\beta|}
\end{aligned} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_\Phi &= k_0^\Phi \left\{ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \right\} + F_\Phi(\cdot) \\
&+ a_{21} \left[-\frac{a_{22}v_\beta - a_{12}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \right] + a_{22} \left[\frac{a_{21}v_\beta - a_{11}v_\Phi}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \right] \\
&= k_0^\Phi \left\{ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \right\} + F_\Phi(\cdot) + v_\Phi \\
&= k_0^\Phi \left\{ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \right\} + F_\Phi(\cdot) - K_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi) \\
&= k_0^\Phi \left\{ -k_0^\Phi \sigma_\Phi + \mu_\Phi \frac{s_\Phi}{|s_\Phi|} \right\} + F_\Phi(\cdot) - K_\Phi \frac{s_\Phi}{|s_\Phi|}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Percebe-se nestas equações que para garantir $\dot{s} < 0$ é necessário que as parcelas v_β , v_Φ , q_β e q_Φ da expressão dos ganhos K_β e K_Φ na Equação 5.108 sejam como definidos na Equação 5.111. Para maiores detalhes referir-se ao procedimento de maximização análogo desenvolvido na Equação 5.73 para a dinâmica longitudinal.

$$\begin{aligned}
v_\beta(\cdot) &\geq |F_\beta(\cdot)| = k_1^\beta |e_2^\beta| + |b_1(e)| \\
v_\Phi(\cdot) &\geq |F_\Phi(\cdot)| = k_1^\Phi |e_2^\Phi| + |b_2(e)| \\
q_\beta &= 2.1k_0^\beta \mu_\beta > 2k_0^\beta \mu_\beta > 0 \\
q_\Phi &= 2.1k_0^\Phi \mu_\Phi > 2k_0^\Phi \mu_\Phi > 0
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Resumindo, o controlador RIU final será como definido na Equação 5.107, com v_β e v_Φ como na Equação 5.106 composta pelos ganhos K_β e K_Φ da Equação 5.108 os quais são calculados por meio das expressões apresentadas na Equação 5.111.

Simulações Numéricas

Tal como mencionado no início da seção, o objetivo de controle consiste em rastrear um *doublet* de ângulo de rolagem com amplitude máxima de 45° . O sinal de referência é suavizado através de uma função de transferência de primeira ordem com constante de tempo τ unitária, $G = 1/(\tau s + 1)$. Os parâmetros do controlador PI utilizado para manter constante a velocidade total por meio da manete foram: $K_p = 3$ e $K_I = 0,08$ obtidos por tentativa e erro (idêntico ao usado na dinâmica longitudinal).

Os valores numéricos dos parâmetros do controlador utilizados nas simulações foram os seguintes: $k_0^\beta = k_0^\Phi = 1$ atendendo a condição geral $k_0 > 0$ e $k_1^\beta = k_1^\Phi = 1$ os quais fazem os polinômios $\lambda^\beta + k_1^\beta = 0$ e $\lambda^\Phi + k_1^\Phi = 0$ terem raízes com parte real negativa (SESHAGIRI E KHALIL, 2005). O método para escolha da camada limite μ_β e μ_Φ é análogo ao utilizado na dinâmica longitudinal, isto é, reduz-se o valor da mesma até atingir o desempenho do SMC ideal, isto pode ser notado pela aparição de *chattering*. O procedimento do método para a escolha de μ_Φ consiste em propor diferentes valores para μ_Φ , determina-se o valor do ganho K_Φ correspondente a cada um deles usando as Equações 5.108 e 5.111 (Vide Tabela 5.8). Com estes parâmetros plotaram-se o erro de rastreamento do ângulo de rolagem e observou-se o sinal de saída de controle δ_a , tal como mostrado na Figura 5.78. Estes parâmetros servem de critérios para a escolha de μ_Φ , análogo ao feito na dinâmica longitudinal. Percebe-se que para os valores de μ_Φ testados, a demanda de controle é similar, fazendo um *zoom* percebe-se que $\mu_\Phi = 5$ apresentou maior oscilação no controle indicando a possível aparição de *chattering*, finalmente escolheu-se $\mu_\Phi = 10$ por não apresentar oscilação exagerada e manter o erro entre $\approx \pm 2^\circ$ (valor razoável para um *doublet* de 45° rastreado).

Tabela 5.8: Pares de μ_Φ e ganho K_Φ .

μ_Φ	K_Φ
5	24,5
10	34,5
15	44,5

Cabe salientar que pela extensão e complexidade da expressão para o cálculo do ganho K_Φ , especialmente pelo termo $b_2(e)$ (vide Equações 5.111 e 5.98), adotou-se uma estratégia gráfica para a maximização de $\nu_\Phi(\cdot)$. Inicialmente fez-se uma análise de sensibilidade para determinar qual dos parâmetros Φ , β , p e r tinha maior influencia no valor máximo do ganho K_Φ , para isto, criaram-se os vetores: $\text{vet}\beta = \{-\beta^{\min}, \dots, \beta^{\max}\}$, $\text{vet}\Phi = \{-\Phi^{\min}, \dots, \Phi^{\max}\}$, $\text{vet}p = \{-p^{\min}, \dots, p^{\max}\}$ e $\text{vet}r = \{-r^{\min}, \dots, r^{\max}\}$ com $-\beta^{\min} = \beta^{\max} = 2^\circ$ (máximo erro de β permissível para a simulação), $-\Phi^{\min} = \Phi^{\max} = \pi/4$ (máximo Φ a ser rastreado), $-p^{\min} = p^{\max} = 70^\circ/s$ (escolhido pelo projetista) e $-r^{\min} = r^{\max} = 10^\circ/s$ (escolhido pelo projetista). Posteriormente foram avaliados os 4 parâmetros combinando-os de 2 em 2 ($4C2 = 6$) na expressão de K_Φ e determinou-se o valor máximo. Os resultados são mostrados

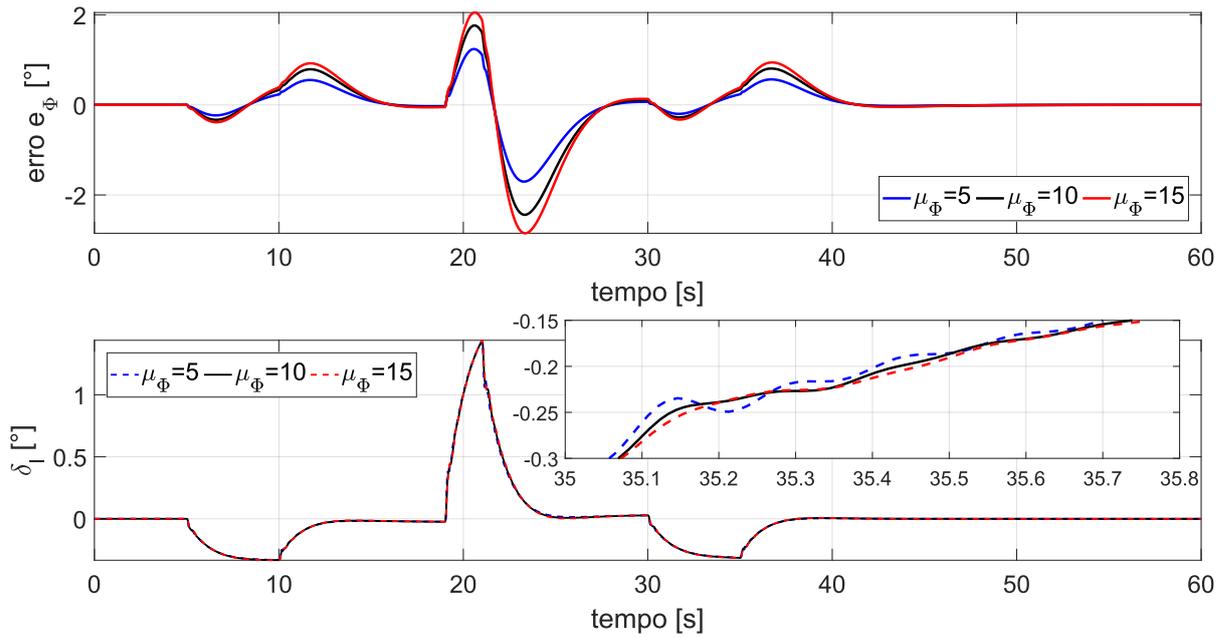


Figura 5.78: Erro e controle para escolha da camada limite μ_Φ .

na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Sensibilidade dos parâmetros que compõem K_Φ .

Parâmetros	K_Φ
Φ e β	8,95
Φ e p	32,23
Φ e r	7,43
β e p	34,5
β e r	8,94
p e r	32,21

Percebe-se que o conjunto de parâmetros que mais influenciam no valor máximo de K_Φ são β e p , portanto, o valor de K_Φ (dependente de μ_Φ) da Tabela 5.8 foi determinado lendo o valor máximo do mesmo na superfície gerada a partir dos valores dos vetores de β e p . A Figura 5.79 mostra os valores máximos para os casos da Tabela 5.8.

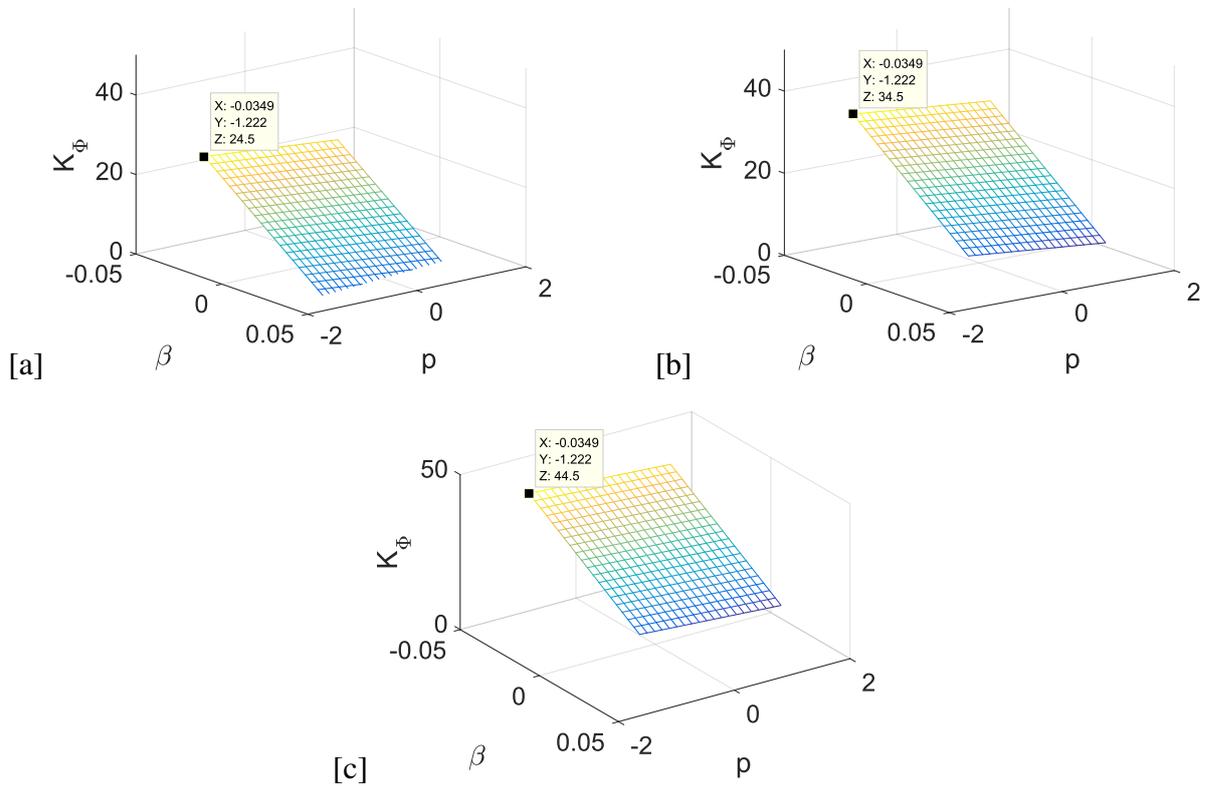


Figura 5.79: Máximo da K_Φ , [a] para $\mu_\Phi = 5$ [b] para $\mu_\Phi = 10$ [c] para $\mu_\Phi = 15$

De maneira análoga foi feito para a escolha de μ_β e K_β . O controlador final obtido é mostrado na Equação 5.112 e a resposta da dinâmica latero-direcional sob o efeito deste controlador é mostrada na Figura 5.80.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{a_{22} [-K_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta)] - a_{12} [-K_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi)]}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \\
 &= -\frac{a_{22} \left[-0.2 \cdot \text{sat}\left(\frac{1\sigma_\beta + 1e_1^\beta + e_2^\beta}{1}\right) \right] - a_{12} \left[-34.5 \cdot \text{sat}\left(\frac{1\sigma_\Phi + 1e_1^\Phi + e_2^\Phi}{10}\right) \right]}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \\
 u_2 &= \frac{a_{21} [-K_\beta \text{sat}(s_\beta/\mu_\beta)] - a_{11} [-K_\Phi \text{sat}(s_\Phi/\mu_\Phi)]}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})} \\
 &= \frac{a_{21} \left[-0.2 \cdot \text{sat}\left(\frac{1\sigma_\beta + 1e_1^\beta + e_2^\beta}{1}\right) \right] - a_{11} \left[-34.5 \cdot \text{sat}\left(\frac{1\sigma_\Phi + 1e_1^\Phi + e_2^\Phi}{10}\right) \right]}{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})}
 \end{aligned} \tag{5.112}$$

Percebe-se na Figura 5.80 que o rastreamento do sinal de referência para o ângulo de rolagem foi feito satisfatoriamente com um erro máximo de aproximadamente 2° tal como pode ser verificado na Figura 5.78 para $\mu_\Phi = 10$. O máximo erro para a estabilização do ângulo de derrapagem permaneceu menor a 1° ao longo dos 60s de simulação com demanda de controle

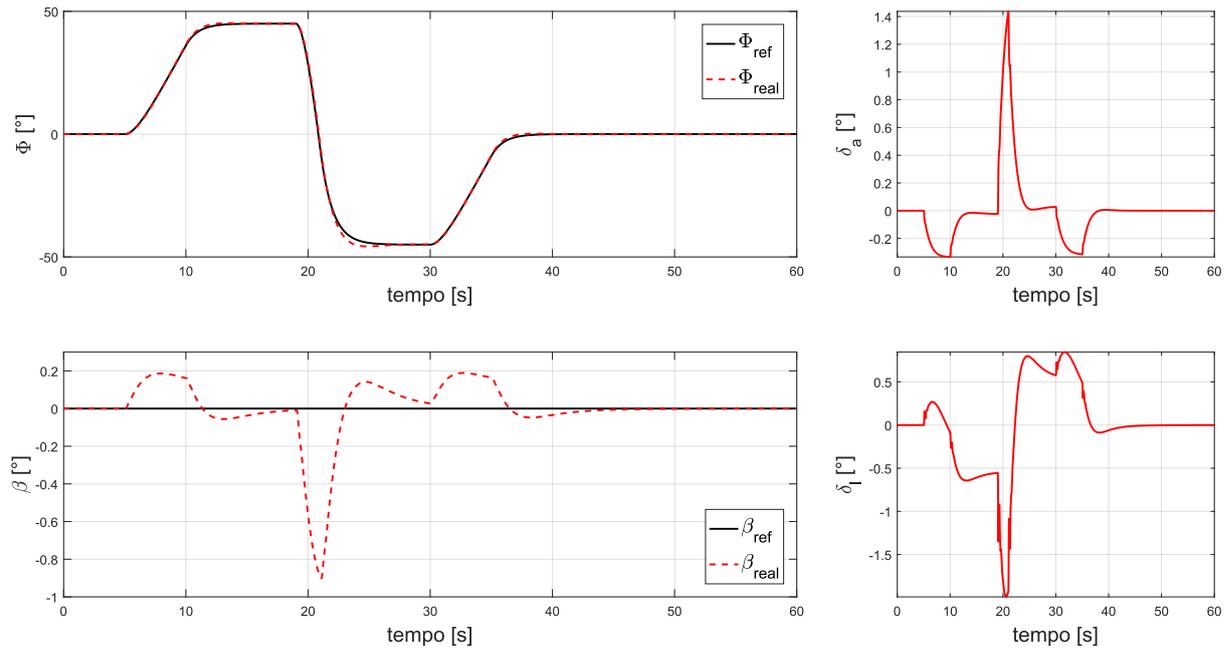


Figura 5.80: Rastreamento de *doublet* de ângulo de rolagem com amortecedor de derrapagem.

máxima δ_l na ordem de 2° .

5.8 Observações sobre o Capítulo

No início deste capítulo foram comparadas as técnicas de controle linear LQR e o denominado "controle clássico" e a técnica não linear NDI com o RIU. Apesar das comparações não serem totalmente válidas pela falta de critérios em comum no projeto de cada uma das técnicas, as simulações mostraram uma maior precisão de rastreamento para o RIU com uma ligeira desvantagem enquanto à demanda de controle quando comparada com as outras técnicas. O projeto analítico RIU aplicado à dinâmica longitudinal permitiu detalhar o processo de obtenção dos parâmetros do controlador, especificamente o cálculo do ganho mínimo, foi proposta uma estratégia baseada em simulações para justificar o valor da camada limite μ e foi possível demonstrar a estabilidade. Finalmente, a aplicação do projeto analítico RIU à dinâmica latero-direcional permitiu a obtenção de uma nova estrutura do controlador RIU, representando a principal contribuição da tese e foi proposto um método gráfico baseado numa análise de sensibilidade para a obtenção do ganho do controlador. Exaustivas simulações numéricas validaram os cálculos teóricos feitos.

Capítulo 6

Aplicação do RIU no Quadrirotor

O presente capítulo tem como objetivo aplicar a técnica de controle RIU no problema de rastreamento de um quadrirotor. Durante o exame de qualificação desta tese foi proposta a possibilidade de implementação do RIU numa plataforma real, logo, através do Prof Dr. Alexandre Ramos foi disponibilizado um VANT, tipo quadrirotor, pertencente aos projetos de pesquisa desenvolvidos pelo grupo que ele lidera, a fim de contribuir com esta tese. Apesar da implementação do controlador RIU não ter sido embarcada com sucesso no VANT, a caracterização dos seus parâmetros reais foi feita e usaram-se estes dados no projeto analítico e numérico deste controlador. Neste capítulo apresentam-se as atividades experimentais realizadas e os resultados obtidos.

Nos últimos anos, veículos aéreos não tripulados (VANTs) atraíram uma atenção particular no campo da robótica sendo o quadrirotor um dos mais estudados. Isto, deve-se à capacidade de decolar e pousar verticalmente o que permite utilizá-lo em aplicações diversas como monitoramento em áreas de difícil acesso, vigilância, inspeção, busca e resgate. Devido à grande quantidade de meios de propulsão, estes oferecem uma excelente capacidade de carga e são relativamente simples de construir devido ao ângulo de passo das pás não ser variável, o controle de empuxo é feito através da velocidade angular dos motores (FANG *et al.*, 2008). Segundo Khan e Kadri (2014), as equações que governam a dinâmica destes dispositivos são não lineares e a dinâmica do veículo é instável em malha aberta o que requer de um projeto de controle eficiente para voar apropriadamente.

Na aplicação de controle nestes dispositivos é comum encontrar trabalhos onde a dinâmica do modelo é linearizada ao redor de um ponto de operação tal como em Bouabdallah *et al.* (2004) e Argentim *et al.* (2013) e técnicas lineares como PID (BOUABDALLAH *et al.*, 2004), (BRESCIANI, 2008) e LQR (ARGENTIM *et al.*, 2013) foram satisfatoriamente implementadas. Porém, a dinâmica destes veículos é altamente não linear, de acordo com Bouadi *et al.* (2011a), este tipo de sistemas apresentam incertezas paramétricas constantes, inclusive, em situações reais, estão sujeitos a grandes perturbações. Como consequência, técnicas de

controle não linear robustas deveriam ser utilizadas no controle destes veículos aéreos e têm sido amplamente estudadas na literatura devido à melhora no desempenho dos controladores de voo que estas oferecem (MU *et al.*, 2017). Dentre elas têm-se: inversão dinâmica não linear (BECERRA-VARGAS E BELO, 2012), (LIN *et al.*, 2013), backstepping (MADANI E BENALLEGUE, 2006), controle por modos deslizantes (GONZÁLEZ-HERNÁNDEZ *et al.*, 2017), (HERRERA *et al.*, 2015), (BOUADI *et al.*, 2011A) e combinação destas (ANSARI E BAJODAH, 2015). Um compêndio das diferentes técnicas de controle aplicadas em quadrirotores pode ser encontrado em Zulu e John (2016).

Ao entendimento do autor desta tese, a técnica Regulador Integrativo Universal (RIU) não tem sido aplicada ao controle de quadrirotores, sendo esta, uma importante contribuição da tese. Nesta seção, será implementado o RIU no controle de altitude e estabilização de um quadrirotor com um modelo cujos parâmetros constitutivos (momentos de inércia, constantes dos motores, dimensões, etc) correspondem com dados reais obtidos experimentalmente a partir de um quadrirotor facilitado pela equipe Black Bee Drones da UNIFEI, a qual vem se destacando em campeonatos nacionais e mundiais de inteligência artificial embarcada em drones, tendo ganho vários prêmios.

O modelo matemático (Equações diferenciais de movimento) do quadrirotor em configuração X utilizado nesta tese é baseado nos modelos desenvolvidos em Fum (2015) e Bouabdallah (2007). As equações da cinemática e dinâmica do veículo são apresentadas na Equação 6.1. As variáveis de estado consideradas são os ângulos de rolagem (ϕ), arfagem (θ) e guinada (ψ), mostrados na Figura 6.1, as taxas de rolagem (p), arfagem (q) e guinada (r), as velocidades lineares em relação à terra u , v e w e finalmente a altitude do quadrirotor (h).

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \operatorname{cos} \phi \tan \theta \\
 \dot{\theta} &= q \operatorname{cos} \phi - r \operatorname{sen} \phi \\
 \dot{\psi} &= q \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \theta + r \operatorname{cos} \phi \operatorname{sec} \theta \\
 \dot{p} &= c_1 q r + c_4 \tau_\phi \\
 \dot{q} &= c_2 p r + c_5 \tau_\theta \\
 \dot{r} &= c_3 p q + c_6 \tau_\psi \\
 \dot{u} &= r v - q w - g \operatorname{sen} \theta \\
 \dot{v} &= p w - r u + g \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi \\
 \dot{w} &= q u - p v - (F/m) + g \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \\
 \dot{h} &= -u \operatorname{sen} \theta + v \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta + w \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

As constantes c_i , $i = 1, \dots, 6$ dependem dos momentos de inercia do quadrirotor e são definidas na Tabela 6.1. Cada conjunto moto-propulsor produz uma força F_i e um torque τ_i

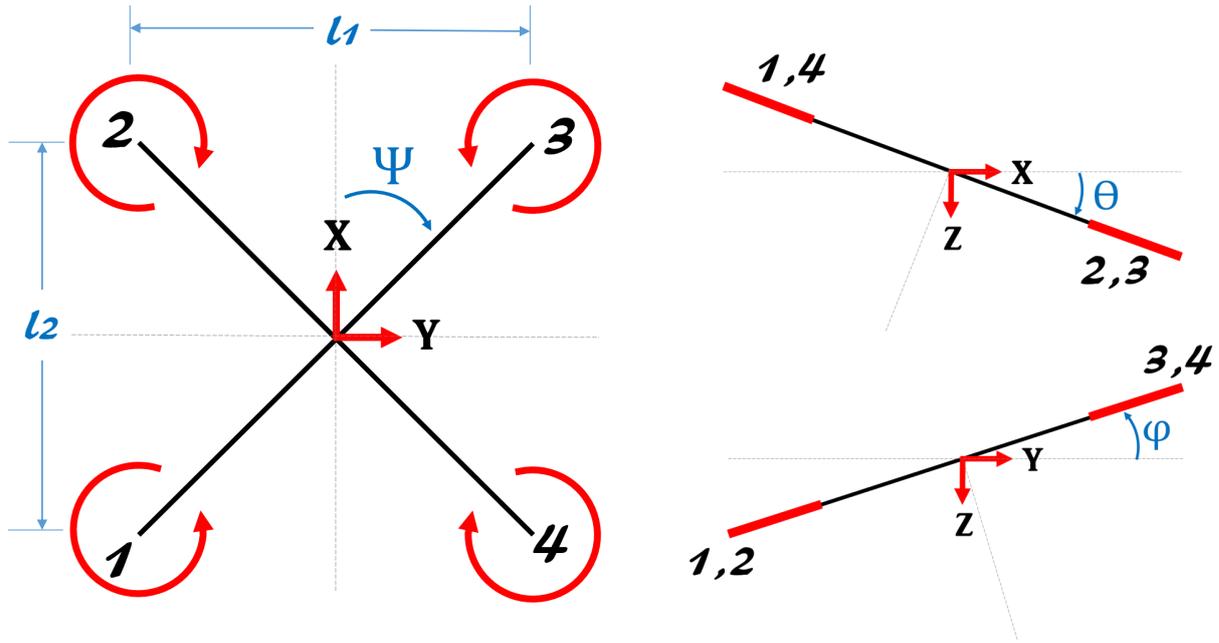


Figura 6.1: Configuração "X" do quadricóptero.

com $i = 1, \dots, 4$. Segundo Alves *et al.* (2012) assume-se que a velocidade angular dos motores é diretamente proporcional ao comando de largura de modulação de pulso (PWM) enviado ao motor ($\delta \propto \omega_i^2$), portanto, a força e o torque de cada motor podem ser expressos como $F_i = k_1 \delta_i$ e $\tau_i = k_2 \delta_i$, sendo k_1 e k_2 as constantes de empuxo e de torque determinadas através de ensaios experimentais. As forças e momentos F , τ_ϕ , τ_θ e τ_ψ do veículo são descritos pela expressão 6.2, a Matriz M é conhecida como *Mixer Matrix* a qual permite transformar forças e momentos em comandos de largura de modulação de pulso (PWM) ou ser rotação requerida de cada motor do quadricóptero.

Na abordagem analítica de controle apresentada nesta tese, as entradas de controle serão a força e os momentos, tal como mencionado no parágrafo anterior, em aplicações práticas a inversa de M é usada para determinar os sinais PWM a partir das entradas de controle fornecidas pelo controlador.

Tabela 6.1: Constantes c_i do modelo do quadricóptero.

$c_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$	$c_2 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$	$c_3 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$
$c_4 = \frac{1}{I_{xx}}$	$c_5 = \frac{1}{I_{yy}}$	$c_6 = \frac{1}{I_{zz}}$

$$\begin{Bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ -\frac{k_1 l_1}{2} & -\frac{k_1 l_1}{2} & \frac{k_1 l_1}{2} & \frac{k_1 l_1}{2} \\ \frac{k_1 l_2}{2} & -\frac{k_1 l_2}{2} & -\frac{k_1 l_2}{2} & \frac{k_1 l_2}{2} \\ k_2 & -k_2 & k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = M \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

6.1 Caracterização dos parâmetros do Quadrirotor

O primeiro ensaio consistiu em determinar os momentos de inércia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} . Uma primeira estimativa teórica foi feita usando uma distribuição aproximada do corpo e motores do quadrirotor como sendo cilindros sólidos e os braços como sendo hastes sólidas, tal como mostrado na Figura 6.2. A contribuição de cada componente no momento de inércia ao redor de cada eixo é dado pelas Equações 6.3, usando os dados medidos no quadrirotor da Tabela 6.2. Finalmente, determinaram-se os momentos de inércia teóricos cujo resultado é apresentado na Equação 6.4.

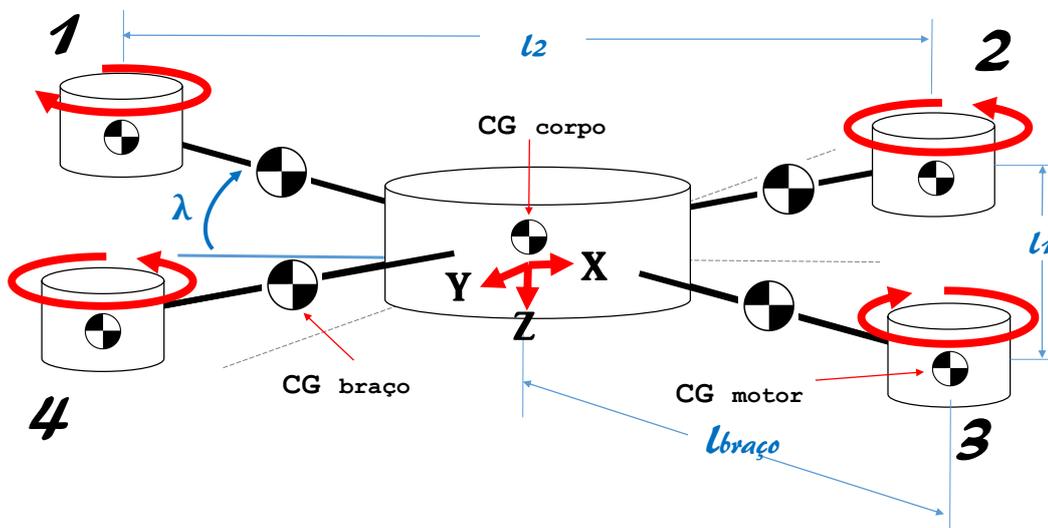


Figura 6.2: Distribuição de massas aproximada para cálculo de inércia.

$$\begin{aligned}
 I_{xx}^{motor} &= I_{yy}^{motor} = 4 \left\{ m_{motor} [l_{motor} \cos \lambda]^2 + \frac{m_{corpo}}{12} (3r_{corpo}^2 + h_{corpo}) \right\} \\
 I_{xx}^{corpo} &= I_{yy}^{corpo} = \frac{m_{corpo}}{12} (3r_{corpo}^2 + h_{corpo}) \\
 I_{xx}^{braco} &= I_{yy}^{braco} = 4 \left\{ m_{braco} \left[\frac{l_{braco} \cos \lambda}{2} \right]^2 + \frac{1}{3} m_{braco} l_{braco}^2 \right\} \\
 I_{zz}^{motor} &= 4 \left[\frac{1}{2} m_{motor} r_{motor}^2 + m_{motor} l_{motor}^2 \right] \\
 I_{zz}^{corpo} &= \frac{1}{2} m_{corpo} r_{corpo}^2 \\
 I_{zz}^{braco} &= 4 \left[\frac{1}{12} m_{braco} l_{braco}^2 + m_{braco} l_{braco}^2 \right]
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tabela 6.2: Dados do quadrirotor para inércia teórica.

$m = 0,620kg$	$m_{motor} = 0,035kg$	$m_{braco} = 0,040kg$
$m_{corpo} = 0,32kg$	$h_{corpo} = 0,10m$	$h_{motor} = 0,0322m$
$r_{corpo} = 0,07m$	$r_{motor} = 0,014m$	$l_{braco} = 0,127m$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= I_{xx}^{motor} + I_{xx}^{corpo} + I_{xx}^{braco} = 0,0029 \quad kg \cdot m^2 \\
I_{yy} &= I_{yy}^{motor} + I_{yy}^{corpo} + I_{yy}^{braco} = 0,0029 \quad kg \cdot m^2 \\
I_{zz} &= I_{zz}^{motor} + I_{zz}^{corpo} + I_{zz}^{braco} = 0,0038 \quad kg \cdot m^2
\end{aligned} \tag{6.4}$$

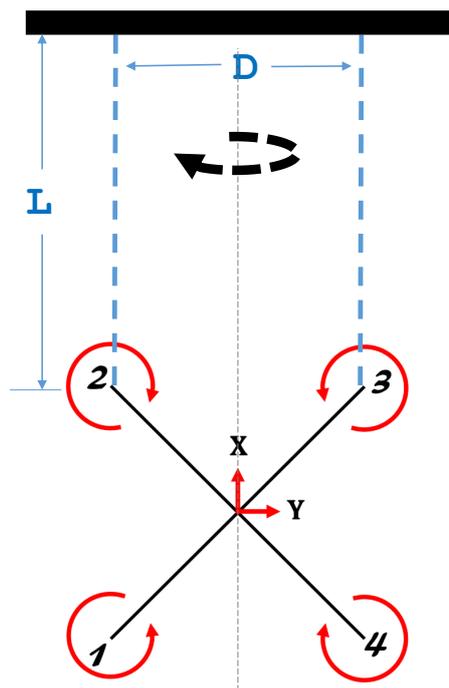
Para o cálculo dos momentos de inércia experimentais, inicialmente foi realizado o ensaio do pêndulo bifilar. Este experimento consiste em suspender o quadrirotor por duas cordas equidistantes ao eixo de rotação ao redor do qual deseja-se obter o momento de inércia, posteriormente, aplica-se um leve torque fazendo o conjunto rotacionar e mede-se o período de oscilação (T) o qual foi medido usando o acelerometro embarcado (MPU6000). Através da Equação 6.5, utilizada no trabalho de Matthey (1974), determinaram-se os momentos de inércia I_{xx} e I_{yy} . Por outro lado, de acordo com Fum (2015) através da Equação 6.6 e um ensaio de pêndulo trifilar (análogo ao bifilar) determina-se o momento de inércia I_{zz} . A Figura 6.3 mostra a montagem dos experimentos e a Tabela 6.3 apresenta os dados e resultados do ensaio.

$$I_{xx,yy} = \frac{mgD^2T^2}{16\pi^2L} \tag{6.5}$$

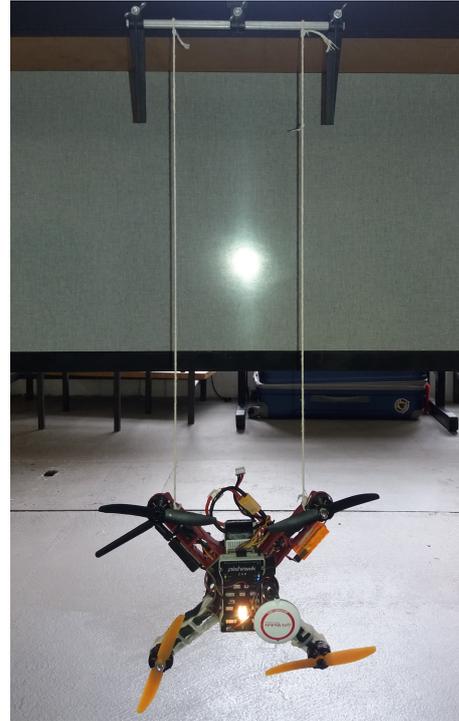
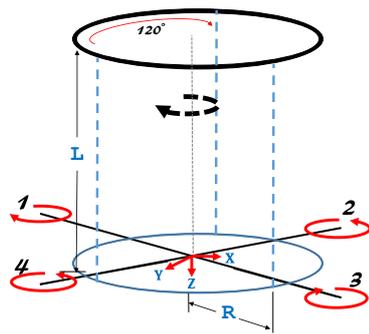
$$I_{zz} = \frac{mgR^2T^2}{4\pi^2L} \tag{6.6}$$

Tabela 6.3: Dados do quadrirotor e resultados para cálculo de inércia experimental.

	para I_{xx}	para I_{yy}	para I_{zz}
$D(ouR)$ [m]	0,0145	0,015	0,07
L [m]	0,525	0,395	0,58
T (médio) [s]	1,4	1,15	1,6
Momento [kg·m]	$I_{xx}=0,0030$	$I_{yy}=0,0029$	$I_{zz}=0,0033$



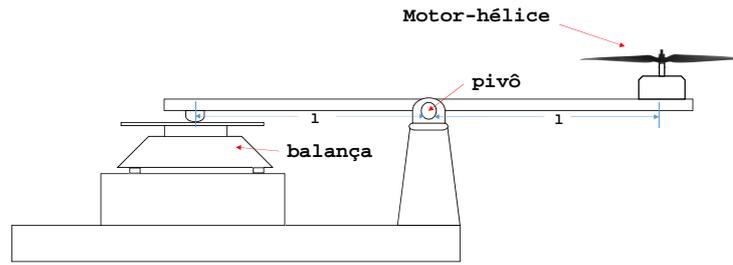
(a) Esquemático ensaio bifilar.

(b) Ensaio bifilar I_{xx} .

(c) Esquemático ensaio trifilar.

(d) Ensaio trifilar I_{zz} .**Figura 6.3:** Configuração dos ensaios para cálculo de momentos de inércia.

Ensaio experimental foram realizados para determinar o valor da constante k_1 do motor, este procedimento é feito sob a hipótese de que o empuxo do conjunto moto-propulsor é proporcional ao quadrado da velocidade angular $F_i = k_1 \omega^2$ (PARTOVI *et al.*, 2012). Na Figura 6.4 mostra-se a montagem do ensaio. Os dados foram obtidos utilizando uma balança para medir o empuxo em gramas e um tacômetro laser para medir a velocidade angular em rpm.



(a)



(b)

Figura 6.4: (a) Esquemático do ensaio para determinação de constante de empuxo do motor. (b) montagem real.

Com o intuito de validar o resultado medido experimentalmente, fez-se uma estimativa teórica através de um programa online que permite inserir os dados do motor, das condições atmosféricas e da hélice, fornecendo o empuxo do motor para uma faixa de rpm predefinida, o site denomina-se RCplanes. Determinou-se o empuxo da hélice (GemFam 5×3) do quadrirotor utilizando a mesma faixa de revoluções e sob as mesmas condições atmosféricas (altitude e temperatura). Na Figura 6.5 comparam-se os dois demonstrando uma tendência similar. Nesta figura também apresenta-se o gráfico de Empuxo- ω^2 plotado a partir dos dados experimentais coletados, através de uma regressão linear destes pontos, foi possível determinar a constante $k_1 = 7.653 \times 10^{-7}$. A regressão linear feita para estimar k_1 é definida pela equação $F(N) = k_1 \delta (\text{rad}^2/\text{s}^2) + b$ sendo $\delta = \omega^2$ e $b = -0.3268$. Cabe salientar que não foi possível o cálculo experimental da constante k_2 do motor, devido a não possuímos um dinamômetro o suficientemente sensível para medir os pequenos torques de reação produzidos pelo motor.

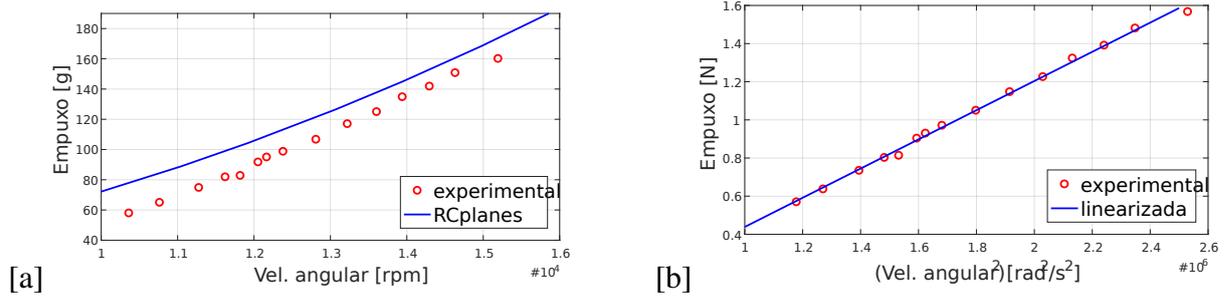


Figura 6.5: [a] comparação entre empuxo experimental e RCplanes. [b] Regressão para determinar k_1

6.2 Projeto analítico do RIU no quadrirotor

A partir do modelo matemático do quadrirotor definido pelas Equações 6.1, define-se o vetor de estados $x \in R^n$ com $n = 10$ sendo $x = [\phi, \theta, \psi, p, q, r, u, v, w, h]^T$ e o vetor de entradas de controle $u \in R^m$ com $m = 4$ sendo $u = [F, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$ e o vetor de saídas $y \in R^p$ com $p = m$ sendo $y = h(x) = [h, \phi, \theta, \psi]^T$. O objetivo de controle será levar o quadrirotor até uma altitude específica e mantê-la constante enquanto o ângulo de rolagem e arfagem rastreiam um *doublet* com formato triangular, isto, em conjunto com um controlador de guinada mantendo o ângulo ψ nulo.

A escolha de um *doublet* com formato triangular é feita sob a hipótese de que uma vez obtido o controlador RIU, o rastreamento será o mais preciso possível (acompanhamento satisfatório do sinal de referência triangular), esta estratégia permitiu (será visto nos resultados) estimar os valores máximos de $\dot{\phi} \approx p$ e $\dot{\theta} \approx q$ necessários para a própria determinação do ganho do controlador RIU (dependente destes valores). O sistema da Equação 6.1 pode ser reescrito da forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ sendo $f(x)$ e $g(x)$ como na Equação 6.7 com as constantes c_1, \dots, c_6 tal como definidas na Tabela 6.1.

$$f(x) = \begin{bmatrix} p + q \operatorname{sen} \phi \tan \theta + r \operatorname{cos} \phi \tan \theta \\ q \operatorname{cos} \phi - r \operatorname{sen} \phi \\ q \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \theta + r \operatorname{cos} \phi \operatorname{sec} \theta \\ c_1 q r \\ c_2 p r \\ c_3 p q \\ r v - q w - g \operatorname{sen} \theta \\ p w - r u + g \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi \\ q u - p v + g \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \\ -u \operatorname{sen} \theta + v \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \theta + w \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

6.2.1 Determinação dos graus relativos e a matriz $A(x)$

Deve-se lembrar que o grau relativo representa o número de derivadas da saída $y = h(x) = [h, \phi, \theta, \psi]^T$ necessárias para encontrar relação direta com os controles $u = [F, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$. A estratégia adotada neste trabalho foi projetar 4 controladores SISO usando exclusivamente um controle específico para cada saída a ser controlada (por exemplo: $h \rightarrow F$, $\phi \rightarrow \tau_\phi$, etc), o controlador final será uma combinação linear destes. O grau relativo é determinado usando a condição definida na Equação 6.8.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) \neq 0 \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq \rho_i - 1 \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (6.8)$$

Para o caso $h \rightarrow F$ ($i = 1, j = 1$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_1} h_1 = g_{10 \times 1} = 0$ o qual não atende a condição 6.8, já para $k = 1$, $L_{g_1} L_f h_1 = -(1/m) \cos \theta \cos \phi = a_{11}$, logo, o grau relativo será $\rho_{11} = k + 1 = 2$.

Para o caso $\phi \rightarrow \tau_\phi$ ($i = 2, j = 2$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_2} h_2 = 0$ o qual não atende a condição 6.8, já para $k = 1$, $L_{g_2} L_f h_2 = c_4 = a_{22}$, portanto, o grau relativo será $\rho_{22} = k + 1 = 2$. Cabe salientar que existe influência dos controles τ_θ e τ_ψ em ϕ também, logo: $L_{g_3} L_f h_2 = c_5 \sin \phi \tan \theta = a_{23}$ e $L_{g_4} L_f h_2 = c_6 \cos \phi \tan \theta = a_{24}$.

Para o caso $\theta \rightarrow \tau_\theta$ ($i = 3, j = 3$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_3} h_3 = 0$ o qual não atende a condição 6.8, já para $k = 1$, $L_{g_3} L_f h_3 = c_5 \cos \phi = a_{33}$, logo, o grau relativo será $\rho_{33} = k + 1 = 2$. Cabe salientar que existe influência do controle τ_ψ em θ também, logo: $L_{g_4} L_f h_3 = -c_6 \sin \phi = a_{34}$.

Para o caso $\psi \rightarrow \tau_\psi$ ($i = 4, j = 4$), iniciando com $k = 0$ tem-se que $L_{g_4} h_4 = 0$ o qual não atende a condição 6.8, já para $k = 1$, $L_{g_4} L_f h_4 = c_6 \cos \phi \sec \theta = a_{44}$, logo, o grau relativo será $\rho_{44} = k + 1 = 2$. Cabe salientar que existe influência do controle τ_θ em ψ também, logo: $L_{g_3} L_f h_4 = c_5 \sin \phi \sec \theta = a_{43}$.

Para o problema de controle formulado, o vetor de graus relativos correspondente é $\rho = \{\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}, \rho_{44}\}$, o que conduz a um grau relativo total $\rho = 8 < n$, portanto, existe dinâmica interna de ordem 2 e a transformação à forma normal será parcial.

Analisando a matriz $A(x) = a_{ij}$ da Equação 6.9, procede-se a calcular o determinante $\text{Det}[A(x)]$ tal como na Equação 6.10, pode-se concluir que $\text{det}[A(x)] \neq 0 \quad \forall |\phi| < \pi/2$, portanto, estabelece-se este limite para ϕ , caso contrário, ao atingir este valor o quadricóptero não

será mais controlável.

$$A(x) = \begin{bmatrix} -(1/m)\cos\theta\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & c_5\sin\phi\tan\theta & c_6\cos\phi\tan\theta \\ 0 & 0 & c_5\cos\phi & -c_6\sin\phi \\ 0 & 0 & c_5\sin\phi\sec\theta & c_6\cos\phi\sec\theta \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\det[A(x)] = -\frac{\cos\phi}{m}c_4c_5c_6(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = -\frac{\cos\phi}{m}c_4c_5c_6 \quad (6.10)$$

6.2.2 Transformação à forma normal

Através da expressão $\xi_j^i = L_f^{j-1}h_i$ ($1 \leq j \leq \rho_i, 1 \leq i \leq m$) com $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 2$ e $m = 4$ tem-se que as novas variáveis da dinâmica externa são:

$$\begin{aligned} (i=1, j=1) : \quad & \xi_1^1 = h_1 = h \\ (i=1, j=2) : \quad & \xi_2^1 = L_f h_1 = f_{10} = -u\sin\theta + v\sin\phi\cos\theta + w\cos\theta\cos\phi \\ (i=2, j=1) : \quad & \xi_1^2 = h_2 = \phi \\ (i=2, j=2) : \quad & \xi_2^2 = L_f h_2 = f_1 = p + r \tan\theta \cos\phi \\ (i=3, j=1) : \quad & \xi_1^3 = h_3 = \theta \\ (i=3, j=2) : \quad & \xi_2^3 = L_f h_3 = f_2 = q \cos\phi - r\sin\phi \\ (i=4, j=1) : \quad & \xi_1^4 = h_4 = \psi \\ (i=4, j=2) : \quad & \xi_2^4 = L_f h_4 = f_3 = q\sin\phi\sec\theta + r\cos\phi\sec\theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para determinar a nova dinâmica utiliza-se a Equação 3.31, por simplicidade na nomenclatura fez-se a mudança de variáveis $\{\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \xi_1^3, \xi_2^3, \xi_1^4, \xi_2^4\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\}$.

A nova dinâmica é definida pela Equação 6.12

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= b_1(x) + a_{11}u_1 \\
\dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\
\dot{\xi}_4 &= b_2(x) + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 \\
\dot{\xi}_5 &= \xi_6 \\
\dot{\xi}_6 &= b_3(x) + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 \\
\dot{\xi}_7 &= \xi_8 \\
\dot{\xi}_8 &= b_4(x) + a_{43}u_3 + a_{44}u_4
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Sendo as funções $b_i(x)$ como as mostradas na Equação 6.13 e as funções f_i as componentes da matriz $f(x)$ na Equação 6.7.

$$\begin{aligned}
b_1(x) &= L_f^2 h_1 = (v \cos \phi \cos \theta - w \sin \phi \cos \theta) f_1 - (u \cos \theta + v \sin \phi \sin \theta + w \sin \theta \cos \phi) f_2 \\
&\quad - \sin \theta f_7 + \sin \phi \cos \theta f_8 + \cos \theta \cos \phi f_9 \\
b_2(x) &= L_f^2 h_2 = (q \tan \theta \cos \phi - r \tan \theta \sin \phi) f_1 + \sec^2 \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) f_2 + f_4 \\
&\quad + \sin \phi \tan \theta f_5 + \cos \phi \tan \theta f_6 \\
b_3(x) &= L_f^2 h_3 = -(q \sin \phi + r \cos \phi) f_1 + \cos \phi f_5 - \sin \phi f_6 \\
b_4(x) &= L_f^2 h_4 = \sec \theta (q \cos \phi - r \sin \phi) f_1 + \sec \theta \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) f_2 \\
&\quad + \sin \phi \sec \theta f_5 + \cos \phi \sec \theta f_6
\end{aligned} \tag{6.13}$$

As novas variáveis da dinâmica interna do sistema são determinadas através da Expressão 6.14, com $n = 10$, $\rho = 8$ e $m = 4$.

$$L_{g_j} \eta_i = 0 \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq (n - \rho) \end{array} \tag{6.14}$$

Logo, para a primeira variável tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \text{para } (i = 1, j = 1) : & \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_9} \frac{1}{m} = 0 \\
 \text{para } (i = 1, j = 2) : & \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_4} c_4 = 0 \\
 \text{para } (i = 1, j = 3) : & \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_5} c_5 = 0 \\
 \text{para } (i = 1, j = 4) : & \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x_6} c_6 = 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Para η_1 atender simultaneamente as expressões na Equação 6.15 é preciso escolher η_1 "não dependente" de x_4, x_5, x_6 e x_9 , portanto, a escolha $\eta_1 = x_7 = u$ satisfaz as condições. Analogamente para η_2 , a escolha $\eta_2 = v$ é a indicada. Conseqüentemente, a dinâmica interna do sistema será como a mostrada na Equação 6.16.

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 = L_f \eta_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix} = f_7 \\
 \dot{\eta}_2 = L_f \eta_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \eta_2}{\partial x_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{10} \end{bmatrix} = f_8
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Sendo f_7 e f_8 componentes da função $f(x)$ na Equação 6.7. Para o problema de rastreamento do quadrirotor, assume-se que esta dinâmica é estável, ou que, caso não seja, existe um controlador paralelo capaz de estabilizá-la. Na subseção de resultados e simulações será demonstrado que esta não interfere no funcionamento do controlador RIU projetado para controlar a dinâmica externa.

6.2.3 Problema de rastreabilidade

O erro do sistema é determinado por meio de $e_i = \xi_i - \bar{\xi}_i - v_i$ com $\bar{\xi} = [r_{1ss}, 0, r_{2ss}, 0, r_{3ss}, 0, r_{4ss}, 0]$ e $v_i = [(r_1 - r_{1ss}), r_1^{(1)}, (r_2 - r_{2ss}), r_2^{(1)}, (r_3 - r_{3ss}), r_3^{(1)}, (r_4 - r_{4ss}), r_4^{(1)}]$ sendo, para o problema de rastreamento atual $r_1 = h_{ref}, r_2 = \phi_{ref}, r_3 = \theta_{ref}, r_4 = \psi_{ref} = 0, r_{1ss} = \dot{h}_{ref} = 0, r_{2ss} = \dot{\phi}_{ref}, r_{3ss} = \dot{\theta}_{ref}$ e $r_{4ss} = \dot{\psi}_{ref} = 0$. Finalmente o erro será: $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} = \{\xi_1 - h_{ref}, \xi_2 - \dot{h}_{ref}, \xi_3 - \phi_{ref}, \xi_4 - \dot{\phi}_{ref}, \xi_5 - \theta_{ref}, \xi_6 - \dot{\theta}_{ref}, \xi_7, \xi_8\}$, com o erro como a nova variável do sistema é feita a transformação $T : \xi \rightarrow e$ e a dinâmica do erro pode ser expressada

de forma matricial como na Equação 6.17

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \\ \dot{e}_7 \\ \dot{e}_8 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} b_1(e) \\ b_2(e) \\ b_3(e) \\ b_4(e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

6.2.4 Projeto do controlador

A abordagem do controlador RIU será feita sem considerar parâmetros constantes desconhecidos (incertezas no modelo). Proceder-se a construir o controlador RIU para cada uma das saídas a serem controladas:

A superfície deslizante para o **controlador de altitude** é dada pela Equação 6.18 e o integrador condicional é representado pela Equação 6.19. Propõe-se o controlador RIU da Equação 6.20 e aproveitar-se á a flexibilidade de escolher $\hat{F}_h = 0$ (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$s_h = k_0^h \sigma_h + k_1^h e_1^h + e_2^h \tag{6.18}$$

$$\dot{\sigma}_h = -k_0^h \sigma_h + \mu_h \text{sat} \left(\frac{s_h}{\mu_h} \right) \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}^{-1}[-\hat{F}_h + v_h] \\ v_h &= -K_h \text{sat}\left(\frac{s_h}{\mu_h}\right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Derivando a superfície deslizante, definindo $F_h(\cdot) = k_1^h e_2^h + b_1(x)$ e considerando ação do controlador fora da camada limite $|s_h| > \mu_h$ obtém-se a expressão 6.21.

$$\begin{aligned} \dot{s}_h &= k_0^h \dot{\sigma}_h + k_1^h \dot{e}_1^h + \dot{e}_2^h \\ &= k_0^h \{-k_0^h \sigma_h + \mu_h \text{sat}(s_h/\mu_h)\} + k_1^h e_2^h + b_1(x) + a_{11} u_1 \\ &= k_0^h \{-k_0^h \sigma_h + \mu_h \text{sat}(s_h/\mu_h)\} + k_1^h e_2^h + b_1(x) - a_{11} a_{11}^{-1} K_h \text{sat}(s_h/\mu_h) \\ &= k_0^h \left\{ -k_0^h \sigma_h + \mu_h \frac{s_h}{|s_h|} \right\} + F_h(\cdot) - K_h \frac{s_h}{|s_h|} \\ &\leq -(k_0^h)^2 |\sigma_h| \frac{|s_h|}{s_h} + k_0^h \mu_h + |F_h(\cdot)| - K_h \quad \text{devido a } (|\sigma_h| \leq \mu_h/k_0^h) \\ &\leq 2k_0^h \mu_h + |F_h(\cdot)| - K_h \end{aligned} \quad (6.21)$$

Lembrando que pela própria definição do controlador RIU, $K_h = \nu_h(\cdot) + q_h$ com $q_h > 0$, isto com o objetivo de garantir que $s_h \dot{s}_h < 0$. De acordo com a derivada da superfície deslizante da Equação 6.21 percebe-se que para manter $\dot{s}_h < 0$, é necessário que $K_h \geq 2k_0^h \mu_h + |F_h(\cdot)|$. Será escolhido $q_h \geq 2, 1k_0^h \mu_h$ para cancelar o termo $2k_0^h \mu_h$ (acréscimo de 5%) e $\nu_h(\cdot) \geq |F_h(\cdot)|$.

Assumindo que o máximo valor de $e_2^h \approx 0$, e sabendo que $|F_h(\cdot)| = k_1^h e_2^h + \max(b_1(x))$ conduz ao máximo valor de $|F_h(\cdot)|$ como $|F_h(\cdot)| = \max(b_1(x))$. Com o intuito de determinar o máximo valor de $b_1(x)$ (vide Equação 6.13) é preciso definir os valores limites das suas componentes. Sabe-se que f_1, f_2 e f_3 são respectivamente $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$, portanto, sob a hipótese de correto funcionamento do controlador e pelo próprio formato do sinal de referência (sinal triangular), o máximo valor de $|f_1| = |f_2| = |f_3| = |f_{\text{rates}}| \leq \pi/40$ rad/s. De maneira análoga f_7, f_8 e f_9 são respectivamente as acelerações ao longo das direções x, y e z , ou seja, \dot{u}, \dot{v} e \dot{w} . Neste trabalho assumir-se-ão como valores máximos das acelerações, os limites do acelerômetro embarcado (MPU6000), de acordo com o *Datasheet MPU6000* $|f_7| = |f_8| = |f_9| = |f_{\text{acel}}| \leq \pm 2g \approx 19,62m/s^2$. Os valores máximos do giroscópio ($\pm 250/s$) poderiam ter sido adotados, porém, não foi necessário devido à manobra (sob a hipótese de correto funcionamento do controlador) ser controlada e permitir o prognóstico dos valores máximos atingidos pelos ângulos ϕ e θ ($\pi/4$ rad) e as taxas ($\pi/40$ rad/s).

Para estimar o máximo valor das velocidades $u_{\text{max}} = v_{\text{max}} = w_{\text{max}} = \bar{V}_{\text{max}}$ é feita a seguinte aproximação da física básica $\bar{V}_{\text{max}} = V_0 + a_{\text{max}} t_m$ com $V_0 = 0, a_{\text{max}} = 2g$ e $t_m = 5s$ (tempo médio da manobra sem mudar o sentido), logo, $\bar{V}_{\text{max}} = 98,1m/s$. Finalmente

o máximo valor de $b_1(x)$ pode ser estimado através da maximização feita na Equação 6.22, o máximo valor ocorre em $\theta = \phi = 0$ resultando em $\max(b_1(x)) = 5,75$.

$$\begin{aligned}
 b_1(x) &= (v \cos \phi \cos \theta - w \sin \phi \cos \theta) f_1 - (u \cos \theta + v \sin \phi \sin \theta + w \sin \theta \cos \phi) f_2 \\
 &\quad - \sin \theta f_7 + \sin \phi \cos \theta f_8 + \cos \theta \cos \phi f_9 \\
 &\leq |f_{rates}| \bar{V}_{max} (\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \theta) - |f_{rates}| \bar{V}_{max} (\cos \theta + \sin \phi \sin \theta \\
 &\quad + \sin \theta \cos \phi) + |f_{accel}| (-\sin \theta + \sin \phi \cos \theta + \cos \theta \cos \phi) \\
 &\leq |f_{rates}| \bar{V}_{max} [(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \theta) - (\cos \theta + \sin \phi \sin \theta + \sin \theta \cos \phi)] \\
 &\quad - |f_{accel}| (-\sin \theta + \sin \phi \cos \theta + \cos \theta \cos \phi) \quad \text{maximo} \quad (\theta = \phi = 0) \\
 b_1(x) &\leq |f_{accel}| \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

A escolha de μ_h é feita sob a recomendação fornecida em Seshagiri e Khalil (2005) onde o valor da camada limite deve ser o suficientemente pequeno a fim de recuperar o desempenho do SMC ideal. Na Figura 6.6 ilustra-se o efeito da camada limite no erro de rastreamento e no sinal de controle, percebe-se que quanto menor a camada limite menor também é o erro, porém, se reduzido em excesso conduz à ocorrência de *chattering*. O valor escolhido é $\mu_h = 0.1$, consequentemente usando $k_0^h = 1$ e substituindo em $q_h = 2,1k_0^h\mu_h$ e $K_h = \max(b_1(x)) + q_h$ obtém-se $K_h = 5,96$. Sendo o controlador da Equação 6.20 como o apresentado na Equação 6.23 com $a_{11} = -1,61$.

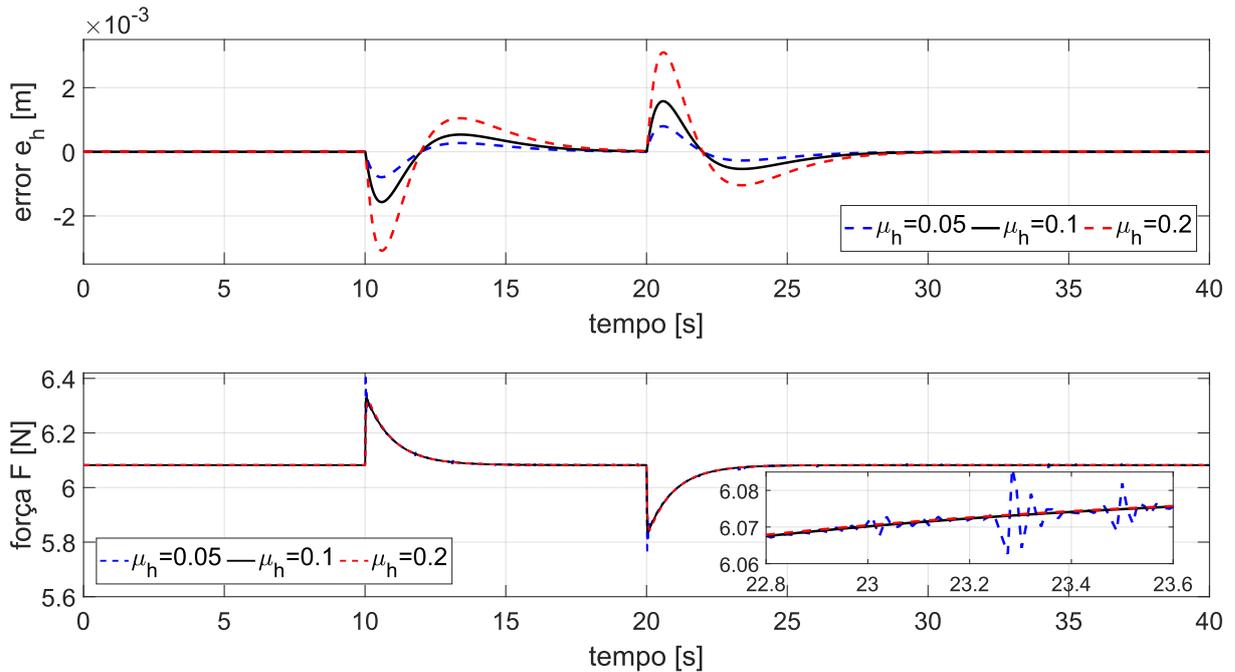


Figura 6.6: Efeito de μ_h no rastreamento e saída de controle.

$$u_1 = -3,69 \cdot \text{sat} \left(\frac{1 \cdot \sigma_h + 1e_1^h + e_2^h}{0,1} \right) \quad (6.23)$$

Prosseguindo agora com o **controlador de ângulo de rolagem**, a superfície deslizando é dada pela Equação 6.24 e o integrador condicional pela Equação 6.25. Propõe-se o controlador RIU da Equação 6.26 e aproveitar-se á a flexibilidade de escolher $\hat{F}_h = 0$ (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$s_\phi = k_0^\phi \sigma_\phi + k_1^\phi e_1^\phi + e_2^\phi \quad (6.24)$$

$$\dot{\sigma}_\phi = -k_0^\phi \sigma_\phi + \mu_\phi \text{sat} \left(\frac{s_\phi}{\mu_\phi} \right) \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= a_{22}^{-1} [-\hat{F}_\phi + v_\phi] \\ v_\phi &= -K_\phi \text{sat} \left(\frac{s_\phi}{\mu_\phi} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Derivando a superfície deslizando, sendo $e_1^\phi = e_3$, $e_2^\phi = e_4$, definindo $F_\phi(\cdot) = k_1^\phi e_2^\phi + b_2(x) + a_{23}u_3 + a_{24}u_4$ e considerando ação do controlador fora da camada limite $|s_\phi| > \mu_\phi$ obtém-se a expressão 6.27.

$$\begin{aligned} \dot{s}_\phi &= k_0^\phi \dot{\sigma}_\phi + k_1^\phi \dot{e}_1^\phi + \dot{e}_2^\phi \\ &= k_0^\phi \{-k_0^\phi \sigma_\phi + \mu_\phi \text{sat}(s_\phi/\mu_\phi)\} + k_1^\phi e_2^\phi + b_2(x) + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 \\ &= k_0^\phi \{-k_0^\phi \sigma_\phi + \mu_\phi \text{sat}(s_\phi/\mu_\phi)\} + k_1^\phi e_2^\phi + b_2(x) + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 \\ &\quad - a_{22}a_{22}^{-1} K_\phi \text{sat}(s_\phi/\mu_\phi) \\ &= k_0^\phi \left\{ -k_0^\phi \sigma_\phi + \mu_\phi \frac{s_\phi}{|s_\phi|} \right\} + F_\phi(\cdot) - K_\phi \frac{s_\phi}{|s_\phi|} \\ &\leq -(k_0^\phi)^2 |\sigma_\phi| \frac{|s_\phi|}{s_\phi} + k_0^\phi \mu_\phi + |F_\phi(\cdot)| - K_\phi \quad \text{devido a } (|\sigma_\phi| \leq \mu_\phi/k_0^\phi) \\ &\leq 2k_0^\phi \mu_\phi + |F_\phi(\cdot)| - K_\phi \end{aligned} \quad (6.27)$$

O ganho do controlador será $K_\phi = \nu_\phi(\cdot) + q_\phi$ com $q_\phi > 0$, isto com o objetivo de garantir que $s_\phi \dot{s}_\phi < 0$. Escolhe-se $q_\phi = 2, 1k_0^\phi \mu_\phi$ e analogamente ao caso da altitude $\nu_\phi(\cdot) \geq |F_\phi(\cdot)|$,

sendo que $|F_\phi(\cdot)| = \max[b_2(x) + a_{23}u_3 + a_{24}u_4]$ sob a hipótese de $e_2^\phi \approx 0$. Proceder-se a maximizar a função $F_\phi(\cdot)$. A fim de determinar o máximo valor de $b_2(x)$ (vide Equação 6.13) é preciso definir os valores limites das suas componentes. O máximo valor de f_1 , f_2 e f_3 já foi justificado na maximização de $b_1(x)$ sendo $|f_1| = |f_2| = |f_3| = |f_{rates}| \leq \pi/40$ rad/s. De acordo com o *Datasheet MPU6000* estimam-se as taxas máximas p , q e r como os valores máximos medidos pelo giroscópio embarcado (*MPU6000*) sendo $|p| = |q| = |r| = |f_{pqr}| \leq \pm 250^\circ/s$, conseqüentemente, os máximos valores das funções $f_4 = c_1qr$, $f_5 = c_2pr$ e $f_6 = c_3pq$ dependerão deste valor e das constantes c_i ($i = 1, 2, 3$) dependentes dos momentos de inércia do quadricóptero e apresentados na Tabela 6.1. O máximo valor da função $b_2(x)$ será:

$$\begin{aligned} b_2(x) &= (q \tan \theta \cos \phi - r \tan \theta \sin \phi) f_1 + \sec^2 \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) f_2 + f_4 \\ &\quad + \sin \phi \tan \theta f_5 + \cos \phi \tan \theta f_6 \\ &\leq |f_{rates}| |f_{pqr}| (\tan \theta \cos \phi + \sec^2 \theta \sin \phi + \sec^2 \theta \cos \phi) - |f_{rates}| |f_{pqr}| \tan \theta \sin \phi \\ &\quad + f_4 + \sin \phi \tan \theta f_5 + \cos \phi \tan \theta f_6 \end{aligned} \quad (6.28)$$

As parcelas da inequação em 6.28 cujas funções trigonométricas dependem de θ e ϕ são máximas em $|\theta| = |\phi| \leq \pi/4$, logo:

$$b_2(x) \leq 2\sqrt{2} |f_{rates}| |f_{pqr}| + f_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} (f_5 + f_6) \quad (6.29)$$

Resultando em $b_2(x) = 5,29$. Para a maximização da parcela $a_{23}u_3 + a_{24}u_4$ com $u_3 = \tau_\theta$ e $u_4 = \tau_\phi$ assume-se, pelo fato de $k_1 \gg k_2$ que $u_3 \gg u_4$ considerando u_4 desprezível. Logo, o máximo valor de τ_θ (analogamente τ_ϕ) é estimado como o máximo momento produzido pela força adicional de dois motores (1 e 4 por exemplo, ver figura 6.1) rotando a $\Delta\omega$ sendo $\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min}$, com $\omega_{max} = 2014,86 \text{ rad/s}$ (EMAX) e $\omega_{min} = 1553 \text{ rad/s}$ (velocidade necessária para equilibrar um 1/4 do peso do quadricóptero). O máximo momento será: $\tau_\theta^{max} = I_2 k_1 (\Delta\omega)^2$. Finalmente, usando $k_1 = 7,653 \times 10^{-7} \text{ N/(rad}^2/\text{s}^2)$, $\tau_\theta^{max} = 0,04 \text{ N.m}$.

Para justificar o valor da camada limite, testaram-se diferentes valores de μ_ϕ (com seu correspondente K_ϕ) de tal forma que o desempenho do controlador SMC ideal seja atingido, a ocorrência de *chattering* é um indicador desta condição. Na Figura 6.7 percebe-se que para $\mu_\phi = 0,05$ este fenômeno aparece, além disso, o sinal de controle τ_ϕ satura. O valor escolhido é $\mu_\phi = 0,8$ o qual, apesar de produzir um erro de rastreamento maior (mesmo assim pequeno da ordem de 10^{-3} não gera sinais de controle tão íngremes quanto $\mu_\phi = 0,2$).

Definidos estes parâmetros é fácil determinar o ganho $K_\phi = \max[b_2(x) + a_{23}\tau_\theta^{max}] + q_\phi$ com $a_{23} = c_5 \sin \phi \tan \theta$ ($\phi = \theta = \pi/4$), $q_\phi = 2,1 k_0^\phi \mu_\phi$, $k_0^\phi = 1$ resultando em $K_\phi = 16,71$ e o controlador RIU da Equação 6.26 será como mostrado na Equação 6.30 com $a_{22} = c_4$.

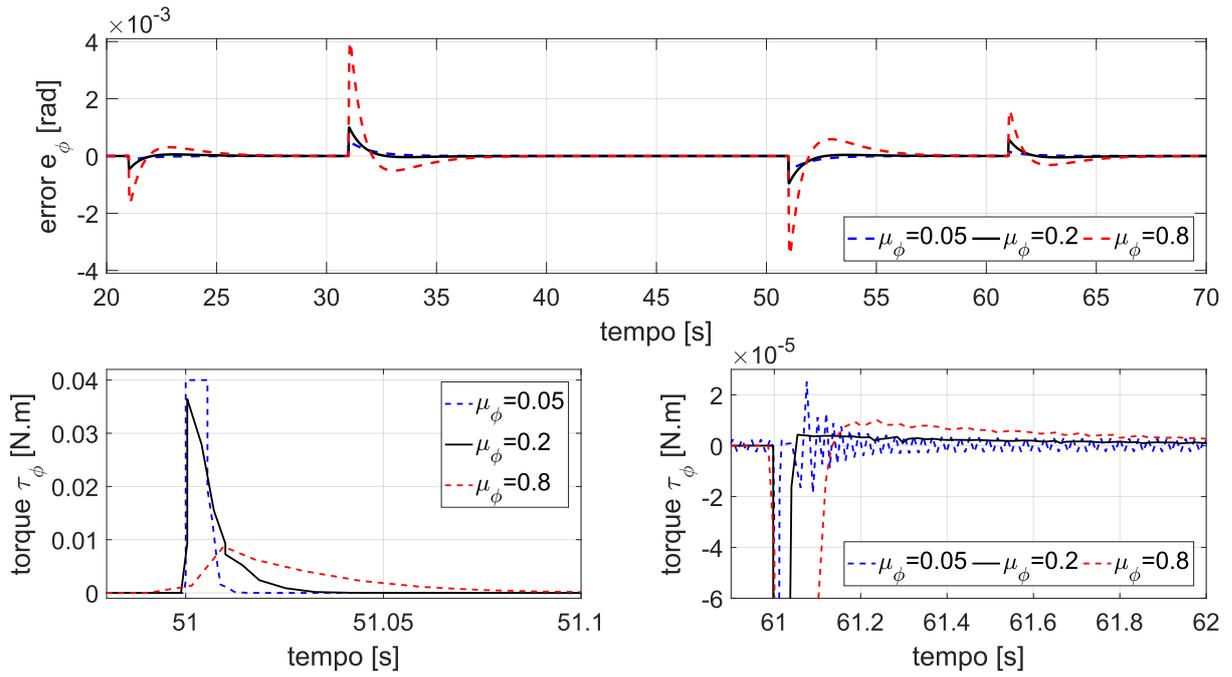


Figura 6.7: Efeito de μ_ϕ no erro de rastreamento e saída de controle.

$$u_2 = -0,05sat \left(\frac{1 \cdot \sigma_\phi + 1e_1^\phi + e_2^\phi}{0,8} \right) \quad (6.30)$$

O cálculo do ganho para o **controlador de ângulo de atitude** é feito de maneira análoga aos controladores de altitude e ângulo de rolagem. Define-se a superfície deslizante dada pela Equação 6.31 e o integrador condicional pela Equação 6.32. Propõe-se o controlador RIU da Equação 6.33 e aproveitar-se á a flexibilidade de escolher $\hat{F}_h = 0$ (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$s_\theta = k_0^\theta \sigma_\theta + k_1^\theta e_1^\theta + e_2^\theta \quad (6.31)$$

$$\dot{\sigma}_\theta = -k_0^\theta \sigma_\theta + \mu_\theta sat \left(\frac{s_\theta}{\mu_\theta} \right) \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= a_{33}^{-1} [-\hat{F}_\theta + v_\theta] \\ v_\theta &= -K_\theta sat \left(\frac{s_\theta}{\mu_\theta} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Derivando a superfície deslizante, sendo $e_1^\theta = e_5$, $e_2^\theta = e_6$, definindo $F_\theta(\cdot) = k_1^\theta e_2^\theta + b_3(x) + a_{34}u_4$ e considerando ação do controlador fora da camada limite $|s_\theta| > \mu_\theta$ obtém-se a expressão 6.34.

$$\begin{aligned}
\dot{s}_\theta &= k_0^\theta \dot{\sigma}_\theta + k_1^\theta \dot{e}_1^\theta + \dot{e}_2^\theta \\
&= k_0^\theta \{-k_0^\theta \sigma_\theta + \mu_\theta \text{sat}(s_\theta/\mu_\theta)\} + k_1^\theta e_2^\theta + b_3(x) + a_{33}u_3 + a_{34}u_4 \\
&= k_0^\theta \{-k_0^\theta \sigma_\theta + \mu_\theta \text{sat}(s_\theta/\mu_\theta)\} + k_1^\theta e_2^\theta + b_3(x) + a_{34}u_4 \\
&\quad - a_{33}a_{33}^{-1}K_\theta \text{sat}(s_\theta/\mu_\theta) \\
&= k_0^\theta \left\{ -k_0^\theta \sigma_\theta + \mu_\theta \frac{s_\theta}{|s_\theta|} \right\} + F_\theta(\cdot) - K_\theta \frac{s_\theta}{|s_\theta|} \\
&\leq -(k_0^\theta)^2 |\sigma_\theta| \frac{|s_\theta|}{s_\theta} + k_0^\theta \mu_\theta + |F_\theta(\cdot)| - K_\theta \quad \text{devido a } (|\sigma_\theta| \leq \mu_\theta/k_0^\theta) \\
&\leq 2k_0^\theta \mu_\theta + |F_\theta(\cdot)| - K_\theta
\end{aligned} \tag{6.34}$$

O ganho do controlador será $K_\theta = \nu_\theta(\cdot) + q_\theta$ com $q_\theta > 0$, isto com o objetivo de garantir que $s_\theta \dot{s}_\theta < 0$. Escolhe-se $q_\theta = 2, 1k_0^\theta \mu_\theta$ e análogo ao caso anterior $\nu_\theta(\cdot) \geq |F_\theta(\cdot)|$, sendo que $|F_\theta(\cdot)| = \max[b_3(x) + a_{34}u_4]$ sob a hipótese de $e_2^\theta \approx 0$. Proceder-se a maximizar a função $F_\theta(\cdot)$ a fim de determinar o máximo valor de $b_3(x)$ (vide Equação 6.13).

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= -(q \text{sen} \phi + r \text{cos} \phi) f_1 + \text{cos} \phi f_5 - \text{sen} \phi f_6 \\
&\leq -|f_{rates}| |f_{pqr}| (\text{sen} \phi + \text{cos} \phi) + \text{cos} \phi f_5 - \text{sen} \phi f_6 \\
&\leq \text{cos} \phi f_5 - [|f_{rates}| |f_{pqr}| (\text{sen} \phi + \text{cos} \phi) + \text{sen} \phi f_6] \quad \max(\phi = \theta = 0) \\
&\leq f_5 - |f_{rates}| |f_{pqr}|
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Resultando em $b_3(x) = 1, 62$. Logo $|F_\theta(\cdot)| \leq \max[b_e(x)] + a_{34}u_4$ sendo $a_{34} = -c_6 \text{sen} \phi$ e $u_4 = \tau_\psi^{max}$, sendo $\tau_\psi^{max} = 0, 0049 N \cdot m$. Finalmente, para determinar o valor de $q_\theta = 2, 1k_0^\theta \mu_\theta$ testam-se diferentes valores da camada limite μ_θ (com seu correspondente K_θ) de tal forma que o desempenho do controlador SMC puro seja atingido. Na Figura 6.8 percebe-se a ocorrência de *chattering* para $\mu_\theta = 0, 45$ o que indica que o saturador $\text{sat}(s_\theta/\mu_\theta) \approx \text{sign}(s_\theta/\mu_\theta)$, ou seja, recupera-se o desempenho do controlador SMC. Escolhe-se $\mu_\theta = 3, 5$ o qual, apesar de produzir um erro de rastreamento maior quando comparado com $\mu_\theta = 0, 8$, apresenta um comportamento menos oscilatório no sinal de controle.

O ganho do controlador será $K_\theta = 8, 97$ e o controlador RIU da Equação 6.33 será como mostrado na Equação 6.36 com $a_{33} = c_5 \text{cos} \phi$ ($\phi = 0$).

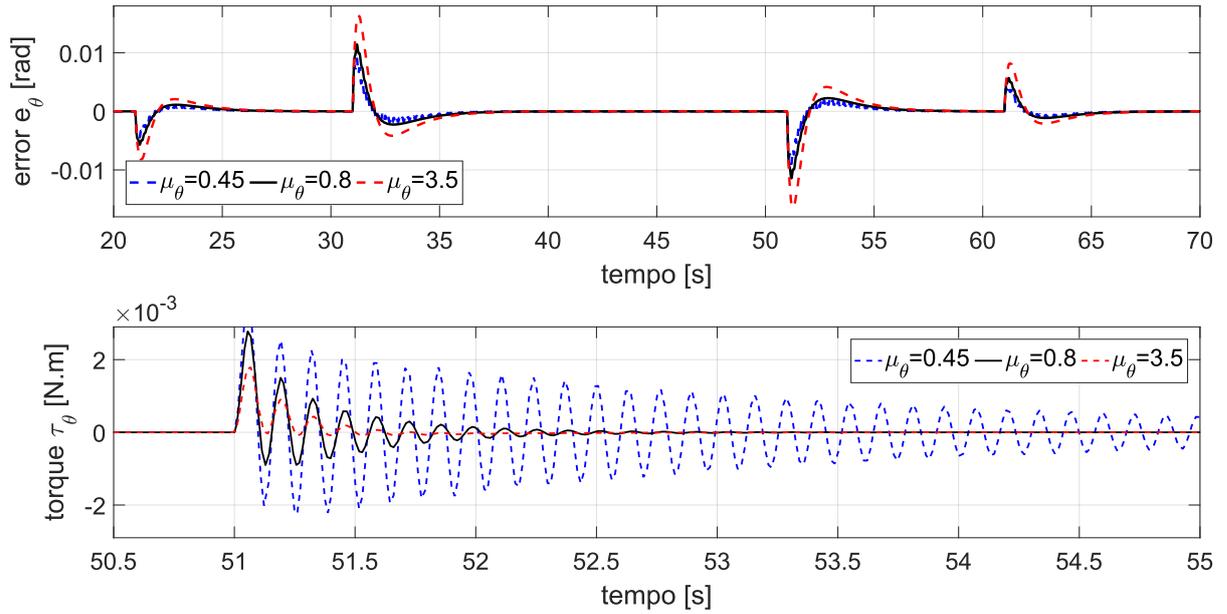


Figura 6.8: Efeito de μ_θ no erro de rastreamento e saída de controle.

$$u_3 = -0,026sat \left(\frac{1 \cdot \sigma_\theta + 1e_1^\theta + e_2^\theta}{3,5} \right) \quad (6.36)$$

Para finalizar, o controlador RIU para **ângulo de guinada** é projetado. Define-se a superfície deslizante dada pela Equação 6.37 e o integrador condicional pela Equação 6.38. Propõe-se o controlador RIU da Equação 6.39 e aproveitar-se á a flexibilidade de escolher $\hat{F}_h = 0$ (SESHAGIRI E KHALIL, 2005).

$$s_\psi = k_0^\psi \sigma_\psi + k_1^\psi e_1^\psi + e_2^\psi \quad (6.37)$$

$$\dot{\sigma}_\psi = -k_0^\psi \sigma_\psi + \mu_\psi sat \left(\frac{s_\psi}{\mu_\psi} \right) \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} u_4 &= a_{44}^{-1} [-\hat{F}_\psi + v_\psi] \\ v_\psi &= -K_\psi sat \left(\frac{s_\psi}{\mu_\psi} \right) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Derivando a superfície deslizante, sendo $e_1^\psi = e_7$, $e_2^\psi = e_8$, definindo $F_\psi(\cdot) = k_1^\psi e_2^\psi +$

$b_4(x) + a_{43}u_3$ e considerando ação do controlador fora da camada limite $|s_\psi| > \mu_\psi$ obtém-se a expressão 6.40.

$$\begin{aligned}
\dot{s}_\psi &= k_0^\psi \dot{\sigma}_\psi + k_1^\psi \dot{e}_1^\psi + \dot{e}_2^\psi \\
&= k_0^\psi \{-k_0^\psi \sigma_\psi + \mu_\psi \text{sat}(s_\psi/\mu_\psi)\} + k_1^\psi e_2^\psi + b_4(x) + a_{43}u_3 \\
&= k_0^\psi \{-k_0^\psi \sigma_\psi + \mu_\psi \text{sat}(s_\psi/\mu_\psi)\} + k_1^\psi e_2^\psi + b_4(x) + a_{43}u_3 - a_{44}a_{44}^{-1}K_\psi \text{sat}(s_\psi/\mu_\psi) \\
&= k_0^\psi \left\{ -k_0^\psi \sigma_\psi + \mu_\psi \frac{s_\psi}{|s_\psi|} \right\} + F_\psi(\cdot) - K_\psi \frac{s_\psi}{|s_\psi|} \\
&\leq -(k_0^\psi)^2 |\sigma_\psi| \frac{|s_\psi|}{s_\psi} + k_0^\psi \mu_\psi + |F_\psi(\cdot)| - K_\psi \quad \text{devido a } (|\sigma_\psi| \leq \mu_\psi/k_0^\psi) \\
&\leq 2k_0^\psi \mu_\psi + |F_\psi(\cdot)| - K_\psi
\end{aligned} \tag{6.40}$$

O ganho do controlador será $K_\psi = \nu_\psi(\cdot) + q_\psi$ com $q_\psi > 0$, isto com o objetivo de garantir que $s_\psi \dot{s}_\psi < 0$. Escolhe-se $q_\psi = 2, 1k_0^\psi \mu_\psi$ e $\nu_\psi(\cdot) \geq |F_\psi(\cdot)|$, sendo que $|F_\psi(\cdot)| = \max[b_4(x) + a_{43}u_3]$ sob a hipótese de $e_2^\psi \approx 0$. Procede-se a maximizar a função $F_\psi(\cdot)$. A fim de determinar o máximo valor de $b_4(x)$ (vide Equação 6.13) é preciso definir os valores limites das suas componentes. Deve-se lembrar que $|f_1| = |f_2| = |f_3| = |f_{rates}| \leq \pi/40$ rad/s e que segundo o consultado em *Datasheet MPU6000* estimam-se as taxas máximas p , q e r como os valores máximos medidos pelo giroscópio embarcado (MPU6000) sendo $|p| = |q| = |r| = |f_{pqr}| \leq \pm 250^\circ/s$, conseqüentemente, os máximos valores das funções $|f_5| \leq c_2 |f_{pqr}|^2$ e $|f_6| \leq c_3 |f_{pqr}|^2$. O máximo valor da função $b_4(x)$ será:

$$\begin{aligned}
b_4(x) &= \sec\theta(q\cos\phi - r\sin\phi)f_1 + \sec\theta\tan\theta(q\sin\phi + r\cos\phi)f_2 \\
&\quad + \sin\phi\sec\theta f_5 + \cos\phi\sec\theta f_6 \\
&\leq \sec\theta |f_{rates}| |f_{pqr}| (\cos\phi - \sin\phi + \tan\theta\sin\phi + \tan\theta\cos\phi) \\
&\quad + |f_{pqr}|^2 (c_2 \sin\phi \sec\theta + c_3 \cos\phi \sec\theta) \\
&\leq -\sec\theta \sin\phi |f_{rates}| |f_{pqr}| + |f_{rates}| |f_{pqr}| (\cos\phi + \tan\theta\sin\phi \\
&\quad + \tan\theta\cos\phi) + |f_{pqr}|^2 (c_2 \sin\phi \sec\theta + c_3 \cos\phi \sec\theta)
\end{aligned} \tag{6.41}$$

As parcelas positivas da última inequação em 6.41 são sempre maiores do que a negativa (em modulo) e a diferença máxima ocorre em $\theta = \phi = \pi/4$, logo:

$$b_4(x) \leq \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \right) |f_{rates}| |f_{pqr}| + |f_{pqr}|^2 (c_2 + c_3) \tag{6.42}$$

Resultando em $b_4(x) = 2, 91$. Para a maximização da parcela $a_{43}u_3$ usou-se $u_3 = \tau_\theta^{max} =$

$0,04N \cdot m$ previamente calculado. Para justificar o valor da camada limite, testaram-se diferentes valores de μ_ψ (com seu correspondente K_ψ) de tal forma que o desempenho do controlador SMC ideal seja atingido, a ocorrência de σ_ψ é um indicador desta condição. Na Figura 6.9 percebe-se que para $\mu_\psi = 4$ este fenômeno aparece. O valor escolhido é $\mu_\psi = 8$ o qual, quando comparado com $\mu_\psi = 12$ apresenta a metade do erro máximo ($e_\psi \approx 0,5^\circ$) e uma atividade de controle similar.

Definidos estes parâmetros determina-se o ganho $K_\phi = \max[b_4(x) + a_{43}\tau_\theta^{max}] + q_\psi$ com $a_{43} = c_5 \sin\phi \tan\theta$ ($\phi = \theta = \pi/4$), $q_\psi = 2,1k_0^\psi \mu_\psi$, $k_0^\psi = 1$ resultando em $K_\psi = 33,47$ e o controlador RIU da Equação 6.39 será como o mostrado na Equação 6.43 com $a_{44} = c_6 \cos\phi \sec\theta$ ($\phi = \theta = \pi/4$).

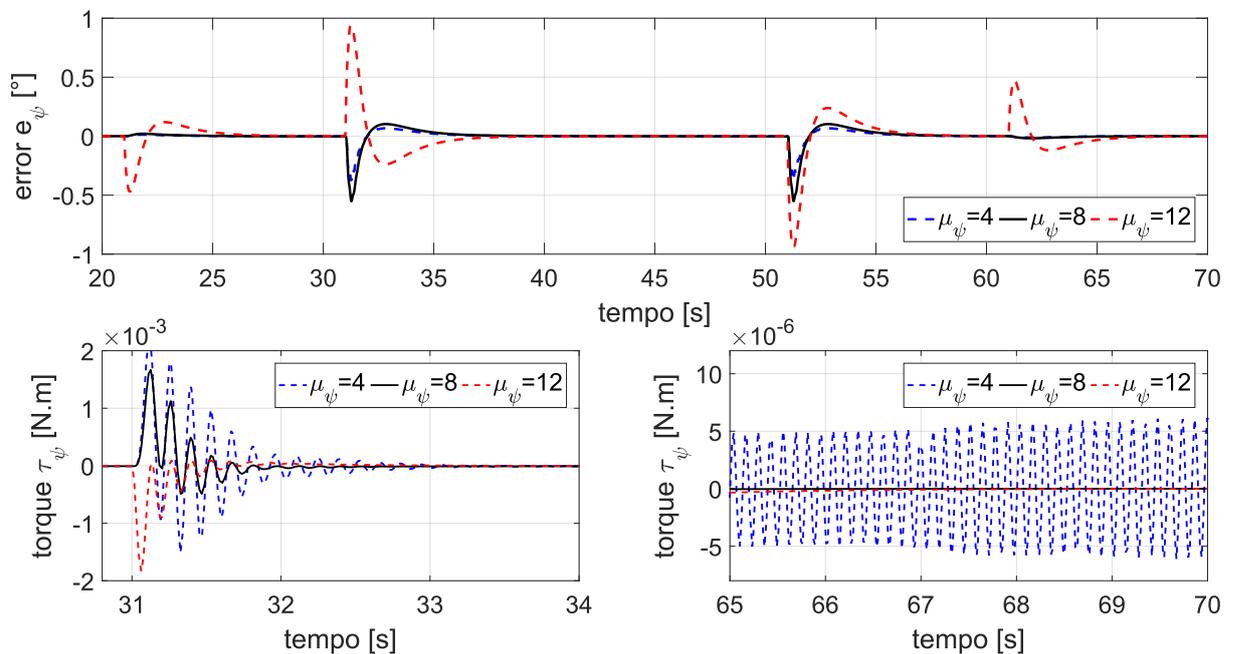


Figura 6.9: Efeito de μ_ψ no erro de rastreamento e saída de controle.

$$u_4 = -0,11sat \left(\frac{1 \cdot \sigma_\psi + 1e_1^\psi + e_2^\psi}{8} \right) \quad (6.43)$$

6.2.5 Simulações numéricas

O objetivo de controle almejado com o controlador RIU é simultaneamente controlar a altitude do quadrirotor e estabiliza-lo através do controle dos ângulos ϕ e θ , um amortecedor de guinada é introduzido com o intuito de controlar o ângulo ψ e evitar que o quadrirotor gire descompensadamente ($\psi_{ref} = 0$). O sinal de referência para a altitude consiste em um aumento gradativo da altitude (de 0 a 4 metros) usando uma função tipo rampa "suavizada" por uma

função de transferência $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ com $\tau = 1$. Para testar o controlador de atitude, os ângulos ϕ e θ devem rastrear um *doublet* com formato triangular com um valor máximo de 45° . Utilizando simultaneamente os controladores obtidos e apresentados nas Equações 6.23, 6.30, 6.36 e 6.43 obtém-se a resposta ilustrada nas Figuras 6.10 (para altitude), 6.11 (para ângulos de atitude e rolagem) e 6.12 (para guinada).

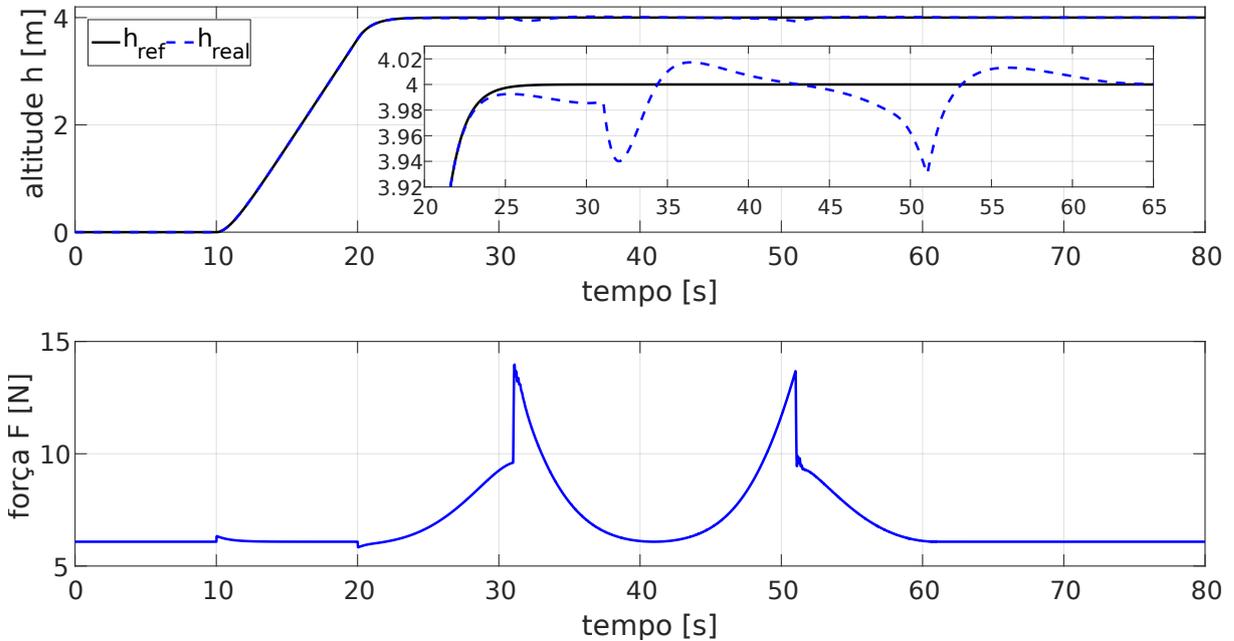


Figura 6.10: Rastreamento e sinal de controle para altitude.

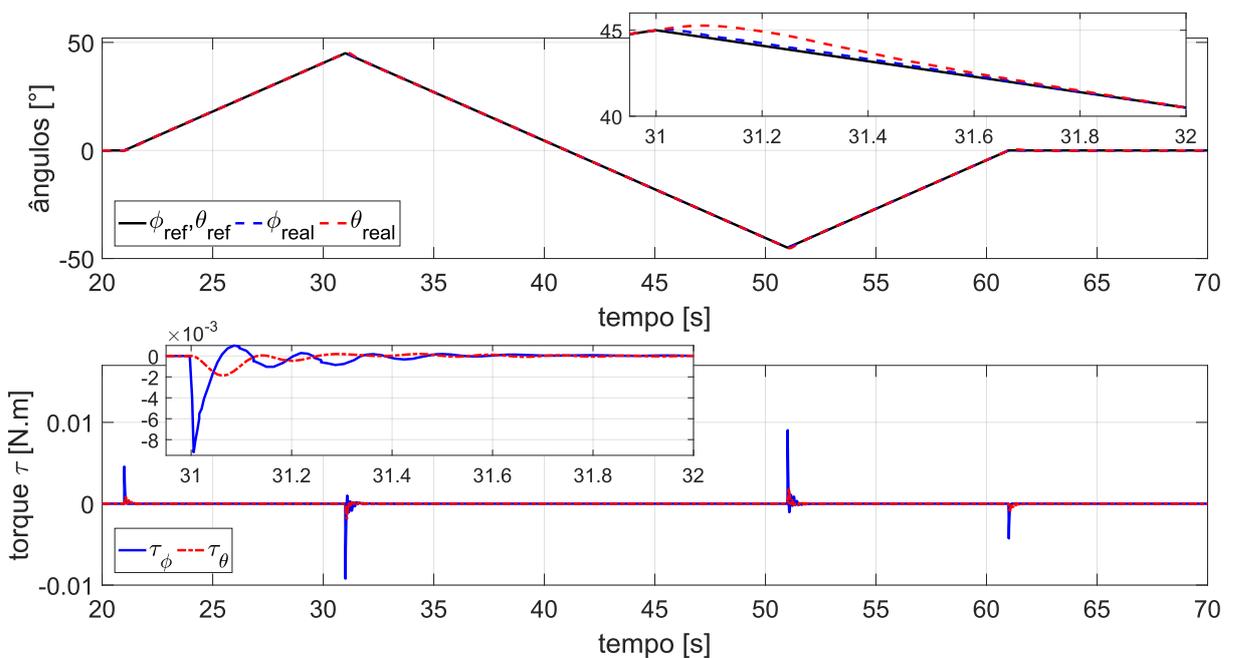


Figura 6.11: Rastreamento e sinal de controle para ϕ e θ .

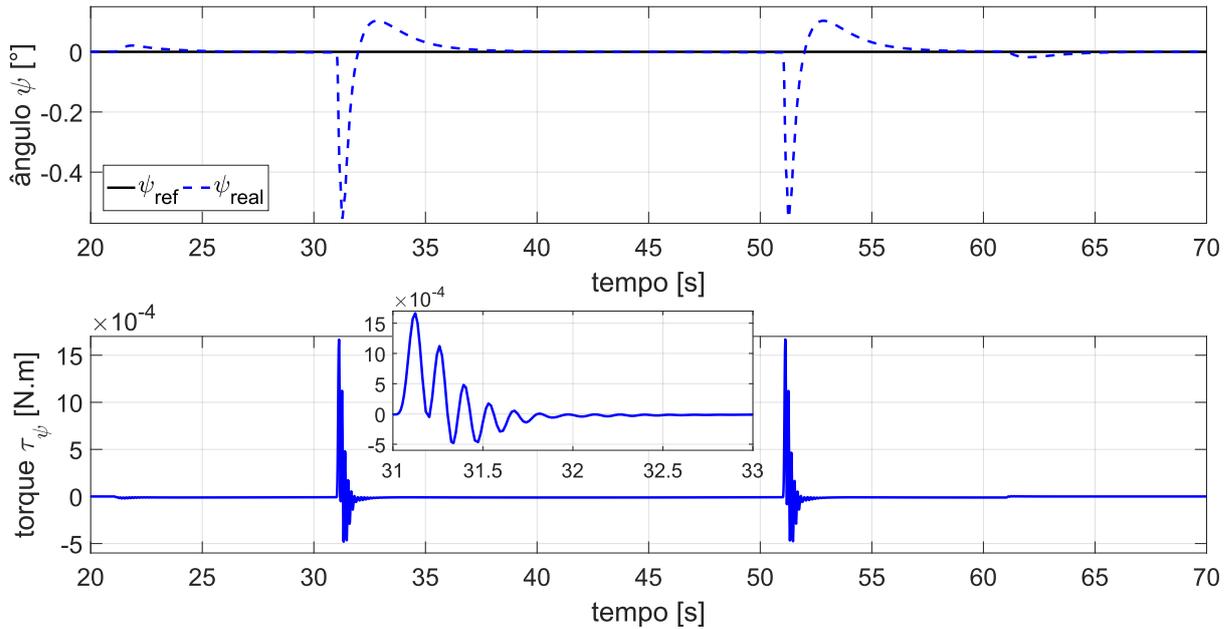


Figura 6.12: Rastreamento e sinal de controle para ψ .

Percebe-se na Figura 6.10 que o controlador de altitude rastreou o sinal de referência com um erro quase nulo durante a subida, mostrando maiores variações (máximo de 7 cm aproximadamente) durante o rastreamento dos *doublets* dos ângulos de atitude e rolamento. O rastreamento dos ângulos ϕ e θ na Figura 6.11 mostrou-se satisfatório com os controladores projetados e o amortecedor de guinada (Figura 6.12) manteve o ângulo de proa em $\pm 0,6^\circ$. Conclui-se que o projeto analítico do RIU implementado mostrou-se capaz de determinar analiticamente os ganhos dos controladores SISO projetados, conduzindo ao rastreamento satisfatório dos sinais de referência preestabelecidos.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

7.1 Conclusões

Nesta tese foi feito um estudo detalhado da técnica de controle não linear Regulador Integrativo Universal (RIU) como uma metodologia eficiente e promissora para a aplicação em controle de voo de aviões e quadrirotors. Devido à complexidade do projeto analítico desta técnica, no decorrer do trabalho, novos problemas de controle como a estabilização do pêndulo invertido não linear e o controle de um quadrirotor foram implementados a fim de facilitar o entendimento da técnica. Inicialmente projetaram-se controladores não lineares como a Inversão Dinâmica Não Linear (NDI) e técnicas lineares como LQR e controle clássico e compararam-se com o RIU quanto ao seu desempenho no rastreamento de sinais de referência em diferentes pontos do envelope de voo. Posteriormente, projetou-se o RIU teórico sendo possível determinar os ganhos teóricos e a demonstração de estabilidade do sistema.

Com base no processo de implementação das técnicas de controle pode-se dizer de maneira geral que a escolha do RIU, para o controle de voo é vantajosa, as principais razões desta afirmação são: *i*) em relação à dificuldade de projeto da técnica, o RIU mostrou-se menos complexo do que a inversão dinâmica não linear. É possível utilizar uma estrutura simplificada do RIU, e mesmo sem o cálculo teórico dos seus parâmetros este demonstrou um desempenho igual ou superior às outras técnicas (detalhes serão dados ainda nesta subseção). Por outro lado, a inversão dinâmica não linear não oferece outro caminho que não seja o tratamento direto e detalhado das equações da dinâmica a ser invertida. *ii*) quando comparado o RIU com as técnicas lineares, o simples fato de prescindir do escalonamento de ganhos faz o RIU mais robusto, permitindo que um mesmo conjunto de ganhos seja válido em diferentes pontos do envelope de voo, sem precisar recalculá-los para cada ponto como no LQR e, *iii*) enquanto à questão da estabilidade, o RIU mostrou-se como uma técnica interessante no campo acadêmico por permitir a demonstração teórica de estabilidade e a obtenção dos seus parâmetros de controle, o que permite atingir publicações com maior profundidade teórica. Além desta justificativa,

algumas observações mais específicas se apresentam a seguir:

- Enquanto à formulação do problema de controle e manuseio das equações: embora em Seshagiri e Promptun (2008) tenha sido mencionada a viabilidade de colocar as Equações da dinâmica de uma aeronave na forma *affine in the input*, na maioria dos trabalhos em controle de voo que aplicam esta técnica, decidiu-se por linearizar a dinâmica e trabalhar com a decomposição modal da aeronave (modos: curto período, fugoide, etc), tal como no próprio trabalho de Seshagiri e Promptun (2008), Ene (2013) e Promptun e Seshagiri (2009). No presente trabalho demonstrou-se que o sistema podia de fato ser escrito em tal forma (*affine in the input*, vide Apêndice A), As equações da dinâmica foram expandidas e foi implementado o projeto analítico do controlador com o uso deste modelo completo. Além disso, a implementação da inversão dinâmica não linear apresentou resultados satisfatórios. Para essa implementação foi criado um código computacional, para o cálculo dos graus relativos e para a inversão das extensas e complexas equações do sistema.
- Determinaram-se analiticamente os valores dos graus relativos dos controladores para todos os estados a serem controlados, permitindo verificar os valores deste importante parâmetro previamente utilizados nos trabalhos de de Sousa *et al.* (2013) e Campos *et al.* (2017), os quais produziram resultados satisfatórios pelo observado nas simulações numéricas.
- Enquanto à inovação de aplicação: a aplicação do RIU tanto no problema de estabilização do pêndulo invertido quanto no quadricóptero, ao entendimento do autor desta tese, é pioneira. Não foram encontrados registros da implementação do RIU nestes campos. O projeto analítico do RIU aplicado no pêndulo invertido no carro mostrou-se capaz de demonstrar a estabilidade do sistema, inclusive, foi possível determinar o ganho mínimo do controlador capaz de garantir a estabilidade do sistema. As simulações permitem verificar esta afirmação (vide Apêndice B). Com respeito ao quadricóptero, o projeto analítico foi satisfatoriamente implementado permitindo determinar os ganhos dos controladores teóricos através de estimativas baseadas em dados reais. Demonstrou-se através de simulações o preciso rastreamento dos sinais de referência, incentivando à implementação experimental do controladores na placa de controle embarcada no quadricóptero.
- Nesta tese ideou-se uma estratégia gráfica para escolher o valor da camada limite do controlador RIU. O criador da técnica Khalil (2000) menciona que o RIU oferece a vantagem de não escolher um valor deste parâmetro exageradamente pequeno e sim, o suficientemente pequeno para atingir o desempenho do SMC ideal. Como mencionado anteriormente, estabeleceu-se um simples método gráfico o qual, em conjunto com o critério de aparição do fenômeno de *chattering* permite estabelecer e justificar o uso do valor da camada limite. Tal como mostrado no projeto analítico RIU na dinâmica longitudinal da aeronave e no quadricóptero.

- É importante ressaltar que em nenhuma das referências desta tese, onde o RIU foi implementado, mostrou-se sequer a definição de funções classe Kappa utilizadas para a demonstração da estabilidade (exponencial) interna dos sistemas nem a demonstração propriamente dita. Neste trabalho, especificamente na aplicação do projeto analítico do RIU à dinâmica longitudinal do Mirage III, demonstrou-se a estabilidade exponencial do sistema apresentando-a passo a passo e com todos os detalhes necessários para o seu entendimento.
- Como respeito à comparação das técnicas não lineares (RIU e NDI), as simulações numéricas mostraram um rastreamento satisfatório para ambas técnicas do ponto de vista qualitativo, portanto, índices de desempenho relacionados ao erro de rastreamento acumulado e à atividade de controle foram propostos e calculados. Na Tabela 7.1 é possível observar de maneira resumida o desempenho de cada controlador para cada estado controlado da aeronave. Conclui-se que enquanto à precisão (menor erro de rastreamento acumulado) em 7 dos 8 estados controlados o RIU apresentou um desempenho "Alto", sendo inferior ao NDI apenas no controle do ângulo de atitude. Enquanto à atividade de controle, no controle de α ambos apresentaram um desempenho similar ("igual"), no controle de θ , p e ϕ o RIU foi superior e no controle de q , H e β o NDI foi superior. Cabe salientar que superior indica que teve menor demanda de controle, mas mesmo nos casos onde o RIU não foi inferior, o controle se manteve dentro dos limites operativos (pelo próprio uso do atuador).
- Com respeito à comparação de desempenho do RIU com as técnicas lineares pode-se dizer que enquanto ao erro de rastreamento acumulado, o RIU apresentou um desempenho "Alto" em comparação com controle ótimo (LQR) e controle Clássico, sendo muito similar a este último. No quesito "atividade de controle", o RIU mostrou-se inferior pelo simples fato de demandar maior atividade de controle, o que não quer dizer necessariamente que requereu maiores deflexões das superfícies (vide Figuras 5.63 e 5.67). Sabe-se que a técnica LQR é amplamente utilizada na indústria aeronáutica na atualidade, percebeu-se nos resultados, que mesmo com um RIU simplificado e com ganhos obtidos por tentativa e erro, o desempenho enquanto a erro de rastreamento foi superior ao LQR. Espera-se que este trabalho sirva de incentivo para futuras aplicações na indústria aeronáutica.
- Com respeito ao projeto analítico do RIU na dinâmica longitudinal, foi possível inserir incertezas no modelo (caso 2), demonstrando maior precisão (menor erro acumulado) com uma demanda de controle ligeiramente maior. Isto demonstra a robustez do controlador RIU em lidar e contornar incertezas no modelo do sistema. Demonstrou-se através de simulação numérica que o ganho do controlador calculado trata-se efetivamente do ganho mínimo (ou próximo dele), quando reduzido em (1/4) mostrou uma pobre capacidade de rastreamento do sinal de referência. Verificou-se também a robustez do controlador pelo

fato de manter o desempenho de rastreamento para diferentes amplitudes do sinal de referência comandado, demonstrando uma ampla região de atração. As observações neste item permitem confirmar as vantagens do uso de técnicas de controle não lineares em contraposição com as lineares, isto é, maior robustez, maior domínio de atração e a não necessidade de escalonamento de ganhos.

- Com respeito ao projeto analítico do RIU na dinâmica latero-direcional, conclui-se que o controlador projetado resolveu o problema de rastreamento eficientemente com erros de rastreamento não maiores a 2° e baixa demanda de controle. Contribuiu-se com a obtenção da arquitetura de um controlador RIU (representado pela Equação 5.107) para sistemas mutuamente acoplados não abordada na literatura até o momento. A estratégia comum para implementação do RIU em sistemas MIMO é a aplicação de um controlador independente para cada *loop* de controle (DE SOUSA *et al.*, 2013), (CAMPOS *et al.*, 2017). Nesta tese, demonstrou-se através do projeto analítico que, quando os sistemas são mutuamente acoplados, ambas entradas de controle contribuem simultaneamente no rastreamento de cada estado a controlar. Outra inovação desta tese foi o procedimento para o cálculo do valor máximo do ganho usando uma simples análise de sensibilidade e a plotagem da superfície do ganho baseada nos parâmetros mais influentes.

Tabela 7.1: Comparação de desempenho com NDI.

		RIU-NDI							
		q	θ	α	V	H	p	ϕ	β
Erro	RIU	Alto	Baixo	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
	NDI	Baixo	Alto	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo	Baixo
Controle	RIU	Baixo	Alto	Igual	-	Baixo	Alto	Alto	Baixo
	NDI	Alto	Baixo	Igual	-	Alto	Baixo	Baixo	Alto

Tabela 7.2: Comparação de desempenho com técnicas lineares.

		RIU-LQR		RIU-Clássico	
			V		H
Erro	RIU		Alto	RIU	Alto
	NDI		Baixo	LQR	Baixo
Controle	RIU		Baixo	RIU	Baixo
	NDI		Alto	LQR	Alto

7.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

Como sugestões para a continuação do desenvolvimento do tema principal desta tese, ou para novos trabalhos na área, destacam-se:

- Por simplicidade, no desenvolvimento teórico do projeto do controlador RIU, foi omitida a presença de perturbações externas (somente incertezas no modelo foram levadas em conta). Espera-se que em futuras implementações estas sejam consideradas.
- Limitações foram encontradas na aplicação do projeto analítico do RIU na dinâmica latero-direcional. O método de mapeamento proposto para a determinação do máximo da expressão do ganho funcionou para o caso atual, porém, para aplicações futuras, é necessário um conhecimento profundo da dinâmica da aeronave, porque não necessariamente a combinação de parâmetros (ângulos, taxas, etc) definida pelos vetores representa o comportamento real da aeronave. Como consequência, podem aparecer valores máximos dos ganhos para uma determinada combinação de parâmetros que não representam as condições reais de operação da aeronave. A falta de conhecimento das taxas máximas (p , q e r) também dificultam a análise, porém, demonstrou-se nesta tese que o controlador conseguiu um rastreamento satisfatório confirmando a robustez da técnica.
- Sabe-se que o ambiente no qual operam os quadrirotos é altamente turbulento, além disso, conhecer com precisão alguns dos seus parâmetros constitutivos não é uma tarefa fácil, portanto, espera-se que em trabalhos futuros, sejam levadas em conta incertezas e perturbações no projeto analítico a fim de tornar o controlador mais robusto.
- Continuando com o quadrirotor, como atividade complementar nesta tese, tentou-se implementar o controlador RIU na placa de controle embarcada de um quadrirotor, porém, não foi possível finalizar. Sugere-se a utilização de um drone com uma plataforma aberta e de fácil acesso à programação da lei de controle para implementar o controlador e verificar os resultados analíticos e numéricos obtidos nesta tese. Espera-se que seja considerada a modelagem de sensores também.
- Aplicar o projeto analítico do RIU a aeronaves flexíveis e muito flexíveis como a do trabalho de Sousa (2013), com o intuito de demonstrar a estabilidade do sistema (aeronave+controlador) e determinar teoricamente os parâmetros do controlador. Por meio de simulações esta técnica de controle já mostrou resultados satisfatórios, porém, existe um desafio para a aplicação analítica do RIU com respeito à estrutura das equações da dinâmica da aeronave, isto, devido ao fato de não ser fácil encontrar uma relação direta entre entradas e saídas (*affine in the input form*).
- Aplicar o projeto analítico do RIU no controle de voo de helicópteros. A primeira razão é pela novidade da abordagem de aplicação do RIU e a segunda pelo fato das dinâmicas longitudinal e latero-direcional não serem facilmente "desacopláveis", para mais informações vide o trabalho de Sousa (2015) e Padfield (2008). O estudo em helicópteros pode ser direcionado à área *gust load alleviation*

Referências Bibliográficas

- Akyazi et al.(2012)** Omur Akyazi, Mehmet Ali Usta, e Adem Sefa Akpınar. A self-tuning fuzzy logic controller for aircraft roll control system. *International Journal of Control Science and Engineering*, 2(6):181–188.
- Alves et al.(2012)** Ana Sophia Cavalcanti Alves et al. Estudo e aplicação de técnicas de controle embarcadas para estabilização de vôo de quadricópteros.
- Ansari e Bajodah(2015)** Uzair Ansari e Abdulrahman H Bajodah. Quadrotor control using generalized dynamic inversion and terminal sliding mode. Em *Control, Engineering & Information Technology (CEIT), 2015 3rd International Conference on*, páginas 1–6. IEEE.
- Argentim et al.(2013)** Lucas M Argentim, Willian C Rezende, Paulo E Santos, e Renato A Aguiar. Pid, lqr and lqr-pid on a quadcopter platform. Em *Informatics, Electronics & Vision (ICIEV), 2013 International Conference on*, páginas 1–6. IEEE.
- Baeza(2013)** João Rostaizer Baeza. *Controle não linear aplicado a malhas de controle com válvulas de alto atrito*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Becerra-Vargas e Belo(2012)** Mauricio Becerra-Vargas e Eduardo Morgado Belo. Inverse dynamics control for a 3dof quadrotor. *Engineering School of Sao Carlos–University of Sao Paulo, 13566–590 Sao Carlos–SP, Brazil*.
- Benamor et al.(2011)** Anouar Benamor, Larbi Chrifi-Alaoui, Hassani Messaoud, e Mohamed Chaabane. Sliding mode control, with integrator, for a class of mimo nonlinear systems. *Engineering*, 3(05):435.
- Bouabdallah(2007)** Samir Bouabdallah. Design and control of quadrotors with application to autonomous flying.
- Bouabdallah et al.(2004)** Samir Bouabdallah, Andre Noth, e Roland Siegwart. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. Em *Intelligent Robots and Systems, 2004.(IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 3, páginas 2451–2456. IEEE.

- Bouadi et al.(2011a)** Hakim Bouadi, S Simoes Cunha, Antoine Drouin, e Felix Mora-Camino. Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking. Em *Computational Intelligence and Informatics (CINTI), 2011 IEEE 12th International Symposium on*, páginas 449–455. IEEE.
- Bouadi et al.(2011b)** Hakim Bouadi, Hondying Wu, e Félix Mora-Camino. Flight path tracking based-on direct adaptive sliding mode control. Em *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2011 IEEE*, páginas 25–30. IEEE.
- Bresciani(2008)** Tammaso Bresciani. Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter. *MSc Theses*.
- Brinker e Wise(1996)** Joseph S Brinker e Kevin A Wise. Stability and flying qualities robustness of a dynamic inversion aircraft control law. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(6):1270–1277.
- Burger(2011)** Mernout Burger. *Disturbance Rejection using Conditional Integrators: Applications to path manoeuvring under environmental disturbances for single vessels and vessel formations*. Tese de Doutorado, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Fakultet for informasjonsteknologi, matematikk og elektroteknikk, Institutt for teknisk kybernetikk.
- Campos et al.(2017)** Rafaella Barrêto Campos, Sebastião Simões da Cunha Júnior, Marcelo Santiago de Sousa, Nycolas de Lima Santos, e Caue da Silva Camilo. Controle de uma aeronave flexível. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia-RIPE*, 2(20):79–88.
- Da Silva(2007)** André Luís Da Silva. Procedimento de projeto de leis de controle de vôo de aeronaves utilizando o controle á estrutura variável. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Dassault Aviation(a)** Dassault Aviation. Mirage iii, a. URL <https://www.dassault-aviation.com/en/passion/aircraft/military-dassault-aircraft/mirage-iii>.
- Dassault Aviation(b)** Dassault Aviation. Mirage iii e-nfm-000-r0, b. URL <https://www.checksix-forums.com>.
- Dassault Aviation(c)** Dassault Aviation. Mirage iii, c. URL <https://www.dassault-aviation.com/en/passion/aircraft/military-dassault-aircraft/mirage-iii/>.
- de Sousa et al.(2013)** Marcelo Santiago de Sousa, Pedro Paglione, Flávio Luiz Cardoso Ribeiro, e Roberto Gil Annes da Silva. Use of universal integral regulator to control the flight dynamics of flexible airplanes. Em *22nd International Congress of Mechanical Engineering. COBEM 2013*.

- Díaz-Méndez et al.(2017)** Yohan Díaz-Méndez, Marcelo Sousa, e Sebastião Cunha. Controle por modos deslizantes com integrador condicional do pêndulo invertido não linear. Em *XIII Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica-CIBEM. Lisboa*, volume 1.
- Emax()** Emax. Mirage iiie. URL <https://www.emaxmodel.com/emax-multicopter-motor-mt2204-kv2300.html>.
- Ene(2013)** Costin Ene. Integral sliding-mode control with applications to aircraft dynamics. Em *Applied Mechanics and Materials*, volume 245, páginas 340–345. Trans Tech Publ.
- Etkin e Reid(1996)** Bernard Etkin e Lloyd Duff Reid. *Dynamics of flight: stability and control*, volume 3. Wiley New York.
- Fang et al.(2008)** Zhou Fang, Zhang Zhi, Liang Jun, e Wang Jian. Feedback linearization and continuous sliding mode control for a quadrotor uav. Em *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese*, páginas 349–353. IEEE.
- Fossen(2011)** Thor I Fossen. Mathematical models for control of aircraft and satellites. *Department of Engineering Cybernetics Norwegian University of Science and Technology*.
- Fum(2015)** Wei Zhong Fum. Implementation of simulink controller design on iris+ quadrotor. Relatório técnico, Naval Postgraduate School Monterey United States.
- Gangsaas et al.(2008)** Dagfinn Gangsaas, John Hodgkinson, Clay Harden, Nomaan Saeed, e Kaiming Chen. Multidisciplinary control law design and flight test demonstration on a business jet. Em *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, página 6489.
- Givisiéz(2009)** Bruno Ribeiro Givisiéz. Inversão dinâmica aplicada ao controle de voo tridimensional de aeronaves comerciais. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- González-Hernández et al.(2017)** Iván González-Hernández, Sergio Salazar, AE Rodríguez-Mata, Filiberto Muñoz-Palacios, Ricardo López, e Rogelio Lozano. Enhanced robust altitude controller via integral sliding modes approach for a quad-rotor aircraft: Simulations and real-time results. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 88(2-4):313–327.
- Herrera et al.(2015)** Marco Herrera, William Chamorro, Alejandro P Gómez, e Oscar Camacho. Sliding mode control: An approach to control a quadrotor. Em *Computer Aided System Engineering (APCASE), 2015 Asia-Pacific Conference on*, páginas 314–319. IEEE.
- Hung et al.(1993)** John Y Hung, Weibing Gao, e James C Hung. Variable structure control: A survey. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1):2–22.

- Jedda et al.(2015)** Olfa Jedda, Jalel Ghabi, e Ali Douik. Second order sliding mode control for inverted pendulum. Em *Systems, Signals & Devices (SSD), 2015 12th International Multi-Conference on*, páginas 1–5. IEEE.
- Kamei(2011)** F Kamei. Controle de inversão dinâmica aplicada em sistema de piloto automático tolerante a falhas. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Khalil(2000)** Hassan K Khalil. Universal integral controllers for minimum-phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 45(3):490–494.
- Khalil(2002a)** Hassan K Khalil. *Nonlinear systems, Third*. Prentice Hall.
- Khalil(2008)** Hassan K Khalil. High-gain observers in nonlinear feedback control. Em *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, páginas xlvi–lvii. IEEE.
- Khalil(2002b)** HK Khalil. Improved performance of universal integral regulators. *Journal of optimization theory and applications*, 115(3):571–586.
- Khan e Kadri(2014)** Hamid Saeed Khan e Muhammad Bilal Kadri. Position control of quadrotor by embedded pid control with hardware in loop simulation. Em *Multi-Topic Conference (INMIC), 2014 IEEE 17th International*, páginas 395–400. IEEE.
- Khatri et al.(2012)** Amit Kumar Khatri, Jatinder Singh, e Nandan Kumar Sinha. Aircraft maneuver design using bifurcation analysis and sliding mode control techniques. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 35(5):1435–1449.
- Lee et al.(2015)** Joonho Lee, Ranjan Mukherjee, e Hassan K Khalil. Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties. *Automatica*, 54: 146–157.
- Lin et al.(2013)** Qing Lin, ZhiHao Cai, YingXun Wang, JinPeng Yang, e LiFang Chen. Adaptive flight control design for quadrotor uav based on dynamic inversion and neural networks. Em *Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC), 2013 Third International Conference on*, páginas 1461–1466. IEEE.
- Liu et al.(2009)** Yuliang Liu, Meili Lu, Xile Wei, Huiyan Li, Jiang Wang, Yanqiu Che, Bin Deng, e Feng Dong. Introducing conditional integrator to sliding mode control of dc/dc buck converter. Em *Control and Automation, 2009. ICCA 2009. IEEE International Conference on*, páginas 891–896. IEEE.
- Lubas(2008)** C Lubas. Aplicação da técnica de inversão dinâmica para projetos de sistemas de controle de voo. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil.

- MacKunis et al.(2008)** W MacKunis, MK Kaiser, PM Patre, e WE Dixon. Asymptotic tracking for aircraft via an uncertain dynamic inversion method. Em *American Control Conference, 2008*, páginas 3482–3487. IEEE.
- Madani e Benallegue(2006)** Tarek Madani e Abdelaziz Benallegue. Backstepping control for a quadrotor helicopter. Em *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, páginas 3255–3260. IEEE.
- Mahmoud e Khalil(1996)** Nazmi A Mahmoud e Hassan K Khalil. Asymptotic regulation of minimum phase nonlinear systems using output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(10):1402–1412.
- Mattey(1974)** Robert A Mattey. Bifilar pendulum technique for determining mass properties of discos packages. Relatório técnico, Johns Hopkins Univ Laurel Md Applied Physics Lab.
- Mu et al.(2017)** Bingxian Mu, Yuanyang Pei, e Yang Shi. Integral sliding mode control for a quadrotor in the presence of model uncertainties and external disturbances. Em *American Control Conference (ACC), 2017*, páginas 5818–5823. IEEE.
- Nair et al.(2012)** Vishnu G Nair, MV Dileep, e VI George. Aircraft yaw control system using lqr and fuzzy logic controller. *International Journal of Computer Applications*, 45(9):25–30.
- Nguyen e Damm(2015)** Van Cuong Nguyen e Gilney Damm. MIMO conditional integrator control for unmanned air launch. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(3):394–417.
- Ogata e Yang(2002)** Katsuhiko Ogata e Yanjuan Yang. *Modern control engineering*, volume 4. Prentice hall India.
- Padfield(2008)** Gareth D Padfield. *Helicopter flight dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modelling*. John Wiley & Sons.
- Pamadi(2004)** Bandu N Pamadi. *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes*. Aiaa.
- Partovi et al.(2012)** Ali Reza Partovi, Ang Zong Yao Kevin, Hai Lin, Ben Chen, e Guowei Cai. Development of a cross style quadrotor. Em *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, página 4780.
- Promptun e Seshagiri(2009)** Ekprasit Promptun e Sridhar Seshagiri. Sliding mode control of pitch-rate of an f-16 aircraft. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 3(9):1108–1114.

- Prusty et al.(2016)** Sankata B Prusty, S Seshagiri, Umesh C Pati, e Kamala K Mahapatra. Sliding mode control of coupled tanks using conditional integrators. Em *Control Conference (ICC), 2016 Indian*, páginas 146–151. IEEE.
- RCplanes()** RCplanes. Estimate propeller static thrust. URL http://https://rcplanes.online/calc_thrust.htm.
- Ren et al.(2017)** Hai-Peng Ren, Jiao Hu, e Jie Li. Conditional integral sliding mode variable structure control for two-tank system. Em *Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2017 12th IEEE Conference on*, páginas 326–331. IEEE.
- Roskam(1998)** Jan Roskam. *Airplane flight dynamics and automatic flight controls*. DARcorporation.
- Seshagiri e Khalil(2001)** Sridhar Seshagiri e Hassan K Khalil. Universal integral controllers with anti-reset windup for minimum phase nonlinear systems. Em *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 5, páginas 4186–4191. IEEE.
- Seshagiri e Khalil(2005)** Sridhar Seshagiri e Hassan K Khalil. Robust output feedback regulation of minimum-phase nonlinear systems using conditional integrators. *Automatica*, 41(1): 43–54.
- Seshagiri e Promtun(2008)** Sridhar Seshagiri e Ekprasit Promtun. Sliding mode control of f-16 longitudinal dynamics. Em *American Control Conference, 2008*, páginas 1770–1775. IEEE.
- Shearer(2006)** Christopher M Shearer. *Coupled nonlinear flight dynamics, aeroelasticity, and control of very flexible aircraft*. Tese de Doutorado.
- Shkolnikov e Shtessel(2001)** Ilya A Shkolnikov e Yuri B Shtessel. Aircraft nonminimum phase control in dynamic sliding manifolds. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(3): 566–572.
- Simoes et al.(2011)** Alberto M Simoes, Pierre Apkarian, Daniel Alazard, e Dominikus Noll. Lateral flight control design for a highly flexible aircraft using nonsmooth optimization. *Aerospace Science and Technology*, 15(4):314–322.
- Singh e Khalil(2005)** Abhyudai Singh e Hassan K Khalil. Regulation of nonlinear systems using conditional integrators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(8): 339–362.
- Slotine et al.(1991)** Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.

- Sousa(2015)** Marcelo S. Sousa. *Relatório de pesquisa: Implementação de um código de simulação numérica de dinâmica de voo de helicópteros*, 2015.
- Sousa(2005)** MS Sousa. Projeto de um sistema de controle de uma aeronave de estabilidade variável usando o método do modelo de referência. Dissertação de Mestrado, Technological Institute of Aeronautics-ITA São José dos Campos.
- Sousa(2013)** MS Sousa. *Modelagem, simulação e controle não linear de aviões muito flexíveis*. Tese de Doutorado, Technological Institute of Aeronautics-ITA São José dos Campos.
- Stevens e Lewis(2003)** Brian L Stevens e Frank L Lewis. *Aircraft Control and Simulation*. Wiley-Interscience.
- Stevens et al.(2016)** Brian L Stevens, Frank L Lewis, e Eric N Johnson. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. Hoboken. NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- Sudha e Deepa(2016)** G Sudha e SN Deepa. Optimization for pid control parameters on pitch control of aircraft dynamics based on tuning methods. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10(1):343.
- Tanaka et al.(2014)** Motoyasu Tanaka, Ken Yamaguchi, Daisuke Ogura, Ying-Jen Chen, e Kazuo Tanaka. Nonlinear control of f16 aircraft via multiple nonlinear model generation for any trimmed equilibriums. *International Journal of Fuzzy Systems*, 16(2).
- Tuzcu(2001)** Ilhan Tuzcu. *Dynamics and Control of Flexible Aircraft*. Tese de Doutorado, Virginia Tech.
- Vargas e Paglione(2015)** Francisco Vargas e Pedro Paglione. *Ferramentas de álgebra computacional: aplicações em modelagem, simulação e controle para engenharia*. LTC, Rio de Janeiro.
- Vepa(2014)** Ranjan Vepa. *Flight Dynamics, Simulation, and Control: For Rigid and Flexible Aircraft*. CRC Press.
- Vo e Seshagiri(2008)** Hoa Vo e Sridhar Seshagiri. Robust control of f-16 lateral dynamics. Em *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*, páginas 343–348. IEEE.
- Wang e Stengel(2000)** Qian Wang e Robert F Stengel. Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(4):577–585.
- Xu et al.(2004)** Haojian Xu, Maj D Mirmirani, e Petros A Ioannou. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 27(5):829–838.

- Young et al.(2006)** Amanda Young, Chengyu Cao, Naira Hovakimyan, e Eugene Lavretsky. An adaptive approach to nonaffine control design for aircraft applications. Em *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, página 6343.
- Zhubing et al.(2012)** Hu Zhubing, Zhou Dezhi, Han Wenlong, *et al.* Robust nonlinear control of a hypersonic aircraft based on sliding mode control. *Procedia Engineering*, 29:837–842.
- Zou e Pagilla(2006)** Yunfei Zou e Prabhakar Pagilla. Aircraft flight control using nonlinear adaptive backstepping. Em *ASME 2006 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, páginas 145–153. American Society of Mechanical Engineers.
- Zulu e John(2016)** Andrew Zulu e Samuel John. A review of control algorithms for autonomous quadrotors. *arXiv preprint arXiv:1602.02622*.

Apêndice A

Desenvolvimento das Equações da Dinâmica do Avião

Este Apêndice apresenta o desenvolvimento das equações da dinâmica longitudinal e latero-direcional do modelo de aeronave Mirage III. A ideia principal consiste em substituir todas as equações dependentes de cada estado até chegar numa relação direta entre esses estados e as entradas de controle respectivas.

A.1 Dinâmica Longitudinal da Aeronave

A.1.1 Dinâmica da Velocidade Total

Sabe-se que a dinâmica da velocidade total depende diretamente da dinâmica própria de cada uma das suas componentes, internamente estas velocidades longitudinais, laterais e verticais estão escritas em função das forças aerodinâmicas e devido a estas serem formuladas em base a coeficientes aerodinâmicos, logo, por meio das derivativas de estabilidade é possível encontrar a relação direta entre a deflexão das superfícies de controle e estes coeficientes, procede-se a realizar este processo para a velocidade total:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}}{V} \\ &= \frac{V \cos \alpha \cos \beta}{V} \left[r (V \sin \beta) - q (V \sin \alpha \cos \beta) - g \sin \Theta + \frac{F_x}{m} \right] \\ &+ \frac{V \sin \beta}{V} \left[-r (V \cos \alpha \cos \beta) + p (V \sin \alpha \cos \beta) + g \sin \Phi \cos \Theta + \frac{F_y}{m} \right] \\ &+ \frac{V \sin \alpha \cos \beta}{V} \left[q (V \cos \alpha \cos \beta) - p (V \sin \beta) + g \cos \Phi \cos \Theta + \frac{F_z}{m} \right]\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= rV \cos \alpha \cos \beta \sin \beta - qV \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - g \cos \alpha \cos \beta \sin \Theta \\
&+ \frac{F_x \cos \alpha \cos \beta}{m} - rV \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + pV \sin \alpha \sin \beta \cos \beta + g \sin \beta \sin \Phi \cos \Theta \\
&+ \frac{F_y \sin \beta}{m} + qV \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - pV \sin \alpha \sin \beta \cos \beta + g \sin \alpha \cos \beta \cos \Phi \cos \Theta \\
&+ \frac{F_z \sin \alpha \cos \beta}{m}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -g \cos \alpha \cos \beta \sin \Theta + g \sin \beta \sin \Phi \cos \Theta + g \sin \alpha \cos \beta \cos \Phi \cos \Theta \\
&+ \frac{F_x \cos \alpha \cos \beta}{m} + \frac{F_y \sin \beta}{m} + \frac{F_z \sin \alpha \cos \beta}{m}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Devido à hipótese de motores sem vetorção (α_f), as forças ao longo dos eixos do corpo serão:

$$F_x = F_{et} + \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x, F_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y, F_z = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_z \tag{A.4}$$

Sendo $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$ a pressão dinâmica do ar, substituindo a Equação A.4 na Equação A.3 temos:

$$\dot{V} = g f_{1v} + \frac{1}{m} [\cos \alpha \cos \beta (F_{et} + \bar{q} S C_x) + \sin \beta \bar{q} S C_y + \sin \alpha \cos \beta \bar{q} S C_z] \tag{A.5}$$

Onde:

$$f_{1v} = -\cos \alpha \cos \beta \sin \Theta + \sin \beta \sin \Phi \cos \Theta + \sin \alpha \cos \beta \cos \Phi \cos \Theta \tag{A.6}$$

Os coeficientes aerodinâmicos C_x , C_y e C_z definidos na Equação A.5 são definidos como:

$$\begin{aligned}
C_x &= -C_d \cos \alpha + C_L \sin \alpha \\
C_y &= C_{ya} \\
C_z &= -C_d \sin \alpha - C_L \cos \alpha
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Substituindo estes coeficientes na Equação A.5 chega-se em:

$$\dot{V} = g f_{1v} + \frac{1}{m} \{F_{et} \cos \alpha + \bar{q} S [\cos \alpha (-C_d \cos \alpha + C_L \sin \alpha) + \sin \alpha (-C_d \sin \alpha - C_L \cos \alpha)]\} \tag{A.8}$$

Considerando também para o modelo longitudinal da aeronave, voo com asas niveladas ($\Phi = 0$), a Equação A.6 se transforma em:

$$f_{1v} = -\cos \alpha \sin \Theta + \sin \alpha \cos \Theta = \sin(\alpha - \Theta) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a Equação A.9 em A.8, obtém-se:

$$\dot{V} = g \sin(\alpha - \Theta) + \frac{F_{et}}{m} \cos \alpha + \frac{\bar{q}S}{m} (-C_d \cos^2 \alpha + C_L \sin \alpha \cos \alpha - C_d \sin^2 \alpha - C_L \sin \alpha \cos \alpha) \quad (\text{A.10})$$

A qual finalmente pode ser simplificada como:

$$\dot{V} = g \sin(\alpha - \Theta) + \frac{F_{et}}{m} \cos \alpha - C_d \frac{\bar{q}S}{m} \quad (\text{A.11})$$

Sabendo pela modelagem aerodinâmica do avião que:

$$\begin{aligned} C_d &= C_{d0} + kC_L^2 \\ C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_e}\delta_e + C_{Lq} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A Equação A.12 poderia ser substituída em A.11 e obter a dinâmica do sistema com relação direta com o controle (*affine in the input*), devido à não linearidade entre o controle e o estado correspondente, neste caso a Velocidade total (V) produzida pelo termo C_L^2 é possível linearizar a entrada de controle (δ_e) através de uma expansão por série de Taylor de C_L^2 , este procedimento que foi adotado por Givisiéz (2009). Porém, este método faz aparecer o grau relativo muito "cedo", isto quer dizer que, ao substituir C_d na Equação A.11, está sendo considerada a influência da deflexão da superfície de controle na força aerodinâmica, hipótese descartada nesta tese a efeitos da demonstração de estabilidade com a técnica RIU. Devido à hipótese de considerar a deflexão da superfície de controle unicamente como fonte geradora de momento através das taxas de velocidade angular, na Equação A.12 o termo $C_{L\delta_e}$ é considerado nulo, como consequência, $C_d = f(\alpha, q)$. A Equação A.11 transforma-se em A.13 substituindo $F_{et} = F_e \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 (1 + \delta_\pi) = T(1 + \delta_\pi)$.

$$\dot{V} = g \sin(\alpha - \Theta) + \frac{T}{m} \cos \alpha - \frac{\bar{q}S}{m} C_d(\alpha, q) + \left(\frac{T}{m} \cos \alpha \right) \delta_\pi \quad (\text{A.13})$$

A.1.2 Dinâmica do Ângulo de Ataque

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2 + w^2} = \frac{V \cos \alpha \cos \beta}{V^2} \left[q (V \cos \alpha \cos \beta) - p (V \sin \beta) + g \cos \Phi \cos \Theta + \frac{F_z}{m} \right] \\ - \frac{V \sin \alpha \cos \beta}{V^2} \left[r (V \sin \beta) - q (V \sin \alpha \cos \beta) - g \sin \Theta + \frac{F_x}{m} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = q \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - p \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \frac{g}{V} \cos \alpha \cos \beta \cos \Phi \cos \Theta + \frac{F_z}{mV} \cos \alpha \cos \beta \\ - r \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + q \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \frac{g}{V} \sin \alpha \cos \beta \sin \Theta - \frac{F_x}{mV} \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Sob a hipótese de ângulo de derrapagem nulo e asas niveladas ($\beta = \Phi = 0$), a Equação A.15 transforma-se em A.16.

$$\dot{\alpha} = q \cos^2 \alpha + \frac{g}{V} \cos \alpha \cos \Theta + \frac{F_z}{mV} \cos \alpha + q \sin^2 \alpha + \frac{g}{V} \sin \alpha \sin \Theta - \frac{F_x}{mV} \sin \alpha \quad (\text{A.16})$$

Substituindo as forças aerodinâmicas, chega-se em:

$$\dot{\alpha} = q + \frac{g}{V} \cos (\alpha - \Theta) - \frac{F_{et}}{mV} \sin \alpha + \frac{\bar{q}S}{mV} [C_z \cos \alpha - C_x \sin \alpha] \quad (\text{A.17})$$

Simplifica-se o termo dentro do colchete sendo que $[C_z \cos \alpha - C_x \sin \alpha] = -C_L$, desprezando a contribuição do controle nas forças aerodinâmicas e aplicando um tratamento análogo ao empuxo do motor no caso da velocidade resulta em:

$$\dot{\alpha} = q + \frac{g}{V} \cos (\alpha - \Theta) - \frac{T}{mV} \sin \alpha + \frac{\bar{q}S}{mV} C_L (\alpha, q) - \left(\frac{T}{mV} \sin \alpha \right) \delta_\pi \quad (\text{A.18})$$

A.1.3 Dinâmica do Ângulo de Atitude

$$\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (\text{A.19})$$

Considerando asas niveladas ($\Phi = 0$), chega-se em:

$$\dot{\Theta} = q \quad (\text{A.20})$$

A.1.4 Dinâmica da Taxa de Arfagem

$$\dot{q} = c_5 pr - c_6 (p^2 - r^2) + c_7 M \quad (\text{A.21})$$

Sob a hipótese de: $\beta = \Phi = 0$ e $p = r = 0$

$$\dot{q} = c_7 M = \frac{M}{I_{yy}} = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} C_m = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q + C_{m_{\delta_p}} \delta_p \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\dot{q} = \frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} \left[C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) q \right] + \left(\frac{\bar{q} S \bar{c}}{I_{yy}} C_{m_{\delta_p}} \right) \delta_p \quad (\text{A.23})$$

A.1.5 Dinâmica da Altitude

$$\dot{h} = u \sin \Theta - v \sin \Phi \cos \Theta - w \cos \Phi \cos \Theta \quad (\text{A.24})$$

Considerando asas niveladas ($\Phi = 0$):

$$\dot{h} = u \sin \Theta - w \cos \Theta = V \cos \alpha \cos \beta \sin \Theta - V \sin \alpha \cos \beta \cos \Theta \quad (\text{A.25})$$

A efeitos da demonstração de estabilidade da dinâmica longitudinal, e considerando desacoplamento entre as dinâmicas, assume-se ângulo de derrapagem nulo ($\beta = 0$)

$$\dot{h} = V (\cos \alpha \sin \Theta - \sin \alpha \cos \Theta) = V \sin (\Theta - \alpha) \quad (\text{A.26})$$

O conjunto de Equações A.13, A.18, A.20, A.23 e A.26 compõem a dinâmica longitudinal da aeronave na forma *affine in the input*.

A.2 Dinâmica Latero-Direcional da Aeronave

O desenvolvimento das equações da dinâmica lateral da aeronave é feita sob a hipótese da aeronave se encontrar em equilíbrio longitudinal como condição inicial, isto é, $\gamma_0 \rightarrow \Theta_0 = \alpha_0$, com velocidade e altitude constantes, os ângulos de derrapagem e rolamento β e Φ são considerados o suficientemente pequenos para garantir que as aproximações $\sin x \approx x$ e $\cos x \approx 1$ sejam válidas.

A.2.1 Dinâmica do Ângulo de Derrapagem

Partindo da definição do ângulo de derrapagem em função das velocidades total e lateral (Equação A.27), é feita a substituição da dinâmica destas últimas a fim de achar relação direta com o controle respectivo.

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{\dot{v}V - v\dot{V}}{V^2 \cos \beta} \\ &= \frac{V \left(-ru + pw + g \sin \Phi \cos \Theta + \left(\frac{F_y}{m} \right) \right)}{V^2 \cos \beta} \\ &= \frac{v \left\{ g f_{1v} + \frac{1}{m} [\cos \alpha \cos \beta (F_{et} + \bar{q} S C_x) + \bar{q} S C_y \sin \beta + \bar{q} S C_z \sin \alpha \cos \beta] \right\}}{V^2 \cos \beta}\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

Sendo:

$$f_{1v} = -\cos \alpha \cos \beta \sin \Theta + \sin \beta \sin \Phi \cos \Theta + \sin \alpha \cos \beta \cos \Phi \cos \Theta \quad (\text{A.28})$$

Segundo Khatri *et al.* (2012) o termo da Equação A.28 pode ser reescrito como $f_{1v} = -\sin \gamma$, sob a hipótese de $\gamma_0 = 0$, logo $f_{1v} = 0$. Por outro lado, assumindo que a velocidade longitudinal é muito maior do que a velocidade lateral da aeronave, ou seja, u , o termo $\frac{v}{V^2} \approx 0$, logo, a Equação A.27 é transformada em A.29:

$$\dot{\beta} = \frac{-ru + pw + g \sin \Phi \cos \Theta + \frac{F_y}{m}}{V \cos \beta} \quad (\text{A.29})$$

Assumindo pequeno ângulo de derrapagem (β) e sabendo que $F_y = \bar{q} S C_y$, sendo:

$$\begin{aligned}C_y &= -C_d \sin \beta + C_{y_a} \cos \beta \\ C_{y_a} &= C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta l}} \delta_l + C_{y_{\delta a}} \delta_a\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

Logo a Equação A.29 é transformada em A.31.

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q} S}{mV} [(C_{y_\beta} - C_d) \beta + C_{y_{\delta l}} \delta_l + C_{y_{\delta a}} \delta_a] + \frac{g}{V} \cos \Theta_0 \sin \Phi + \frac{1}{V} (-ru + pw) \quad (\text{A.31})$$

Finalmente, substituindo $u = V \cos \alpha_0 \cos \beta$ e $w = V \sin \alpha_0 \cos \beta$, sendo $\alpha_0 = \Theta_0 = ctte$, obtém-se:

$$\dot{\beta} = \frac{\bar{q} S}{mV} [(C_{y_\beta} - C_d) \beta + C_{y_{\delta l}} \delta_l + C_{y_{\delta a}} \delta_a] + \frac{g}{V} \cos \Theta_0 \sin \Phi + p \sin \alpha_0 - r \cos \alpha_0 \quad (\text{A.32})$$

A.2.2 Dinâmica do Ângulo de Rolagem

De acordo com Young *et al.* (2006), a equação cinemática do ângulo de derrapagem é escrita como na Equação A.33, sendo p , q e r as taxas de rolagem, arfagem e guinada respectivamente, Θ o ângulo de atitude e Φ o ângulo de rolagem.

$$\dot{\Phi} = p + \tan \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \quad (\text{A.33})$$

Sob a hipótese de pequeno, e Equação A.33 pode ser re-escrita da forma:

$$\dot{\Phi} = p + r \tan \Theta_0 \quad (\text{A.34})$$

A Equação anterior pode ser verificada em Young *et al.* (2006). Ao entendimento do autor, o fato de $q \approx 0$ pode ser explicado da seguinte forma, considerando voo em curva coordenada (*turning flight*), a seguinte relação é atendida (Pamadi (2004), Equação 2.210).

$$\omega = \frac{g \tan \Phi}{V} \quad (\text{A.35})$$

Sabendo que $\omega = \dot{\Psi}$ e a taxa de arfagem:

$$q = \dot{\Psi} \cos \Theta_0 \sin \Phi \quad (\text{A.36})$$

Substituindo a Equação A.35 em A.36, e sabendo que Θ_0 é pequeno, tem-se que:

$$q = \frac{g \sin^2 \Phi}{V \cos \Phi} \quad (\text{A.37})$$

Como consequência, se Φ for muito pequeno, logo, $q \approx 0$.

A.2.3 Dinâmica das Taxas de Rolagem e Guinada

Considerando as dinâmicas das taxas de rolagem e guinada da Equação A.38, sendo L e N os momentos de rolagem e arfagem respectivamente e as constantes c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_8 e c_9 dependentes dos momentos de inércia da aeronave.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= q (c_1 r + c_2 p) + c_3 L + c_4 N \\ \dot{r} &= q (c_8 p + c_2 r) + c_4 L + c_9 N \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Sabendo que $L = \bar{q}SlC_l$ e $N = \bar{q}SlC_n$, sendo:

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{l_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{l_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{l_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \\ C_n &= C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{n_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{n_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{n_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Sob a hipótese de $q \approx 0$, a Equação A.38 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= c_3\bar{q}Sl \left[C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{l_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{l_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{l_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \right] \\ &+ c_4\bar{q}Sl \left[C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{n_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{n_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{n_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \right] \\ \dot{r} &= c_4\bar{q}Sl \left[C_{l_\beta}\beta + C_{l_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{l_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{l_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{l_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \right] \\ &+ c_9\bar{q}Sl \left[C_{n_\beta}\beta + C_{n_p}\left(\frac{l}{V}\right)p + C_{n_r}\left(\frac{l}{V}\right)r + C_{n_{\delta_a}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_a + C_{n_{\delta_l}}\left(\frac{l}{V}\right)\delta_l \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

O conjunto de Equações A.32, A.34 e A.40 compõem a dinâmica lateral da aeronave na forma *Affine in the input*.

Apêndice B

Regulador Integrativo Universal Aplicado ao Pêndulo Invertido no Carro

A planta considerada neste caso trata-se do modelo clássico de um pêndulo invertido cujo pivô pode-se deslocar na direção horizontal através de um carro como mostrado na Figura B.1. O atrito entre as partes móveis (pivô e rodas) é desprezado, portanto são consideradas duas dinâmicas, a do pêndulo propriamente dita chamada de externa e a dinâmica interna que será a do carro.

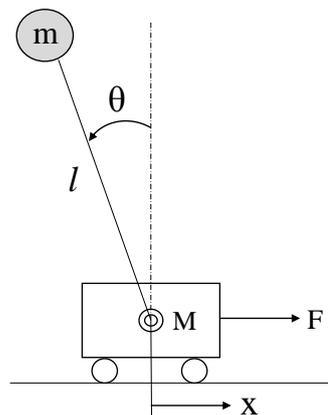


Figura B.1: Pêndulo invertido no carro.

O modelo não linear do sistema é obtido usando a somatória de forças e momentos da mecânica newtoniana e considerando as acelerações relativas entre o pêndulo e o carro, resultando

em:

$$\begin{aligned} F + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= (M + m) \ddot{x} \\ ml^2\ddot{\theta} + m\dot{x}l \cos \theta &= mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Sendo g a aceleração da gravidade, x o deslocamento horizontal do carro, θ o ângulo que o pêndulo faz com a vertical sendo positivo na direção mostrada na Figura B.1, F a força de controle aplicada ao carro, M a massa do carro e m a massa pendurada na extremidade livre da haste de comprimento l , a massa da haste considera-se desprezível. Colocando as equações da dinâmica na forma matricial, têm-se:

$$\begin{bmatrix} (M + m) & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ mgl \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Finalmente, fazendo a mudança de variáveis: $\{x\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}\}$, consegue-se pôr o sistema não linear no espaço dos estados, sendo este definido pela dinâmica do vetor $\{x\}$, reescrito da forma:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u \quad (\text{B.3})$$

Com $F(x) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}^T$, $G(x) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}^T$ e $u = F$. Os elementos dos vetores $F(x)$ e $G(x)$ são descritos como nas Equações B.4 e B.5.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 \\ f_2(x) &= \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - mg \cos x_3 \sin x_3}{(M + m) - m \cos^2 x_3} \\ f_3(x) &= x_4 \\ f_4(x) &= \frac{g}{l} \sin x_3 - \frac{\cos x_3}{l} f_2(x) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_3(x) = 0 \\ g_2(x) &= \frac{1}{(M + m) - m \cos^2 x_3} \\ g_4(x) &= \frac{-\cos x_3}{l[(M + m) - m \cos^2 x_3]} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.1 Cálculo do Grau Relativo e Transformação à Forma Normal

Como já foi mencionado anteriormente, o regulador integrativo universal (RIU) consiste inicialmente da aplicação da técnica de controle modos deslizantes, para isto, analiticamente se faz necessária a transformação do sistema no espaço dos estados à forma normal e como consequência o valor dos graus relativos deve ser determinado. Considere-se o sistema representado na Equação B.3, define-se o vetor de estados do sistema como $x \in R^n$ sendo n a ordem do sistema, $u \in R^m$ sendo m o número de controles e finalmente estabelece-se $y \in R^m$ como sendo a saída do sistema, cabe salientar que segundo Khalil (2000), o número de saídas que podem ser controladas deve ser igual ao número de controles disponíveis. A variável a ser controlada será o ângulo do pêndulo, portanto, $y = x_3 = h(x)$. O grau relativo do sistema será então o mínimo número de derivadas feitas à saída até o controle aparecer. Determina-se o grau relativo através do uso da ferramenta matemática derivada de Lie, usando a equação a seguir:

$$L_g L_f^k h(x) \neq 0, k = \rho - 1 \quad (\text{B.6})$$

Isto quer dizer, que o grau relativo será igual a $(k + 1)$, sendo k o número de vezes que a derivada da Equação B.6 precisa ser feita até seu valor ser "não nulo". Fazendo isto para o problema do pêndulo tem-se que $L_g L_f^0 h(x) = 0$ e $L_g L_f^1 h(x) = g_2(x) = A(x)$, logo, o grau relativo do sistema será $\rho = 2$. A função $A(x)$ é chamada matriz de acoplamento do sistema, neste caso de dimensão unitária, é requerido segundo Khalil (2000) que esta seja não singular e limitada longe de zero para a condição de involutividade do sistema ser atendida (controlabilidade em sistemas lineares). No caso do pêndulo invertido a função $A(x)$ é singular unicamente no domínio $\{x_3 = \pm \frac{\pi}{2}\}$.

O novo sistema de coordenadas $X \rightarrow \xi$ necessário para completar a transformação do sistema para a forma normal é definido como:

$$\phi(x) = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{cases} \xi_i = L_f^{j-1} h_i(x) & 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \rho \\ L_g \eta_i = 0 & 1 \leq i \leq n - \rho \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Ou seja, constrói-se um difeomorfismo local (Slotine *et al.* (1991)) com as novas variáveis sendo ξ a nova variável da dinâmica externa do sistema transformado de dimensão ρ e η a dinâmica interna de dimensão $(n - \rho)$, portanto a dinâmica do sistema transformado será definida

como:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \xi_{i+1} & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho = b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta} = L_f \eta_i \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Sendo:

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= L_f^\rho h_i(x) \\ a(\xi, \eta) &= L_g L_f^{\rho-1} h_i(x) = A(x) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Aplicando a transformação à forma normal definida nas Equações B.7 e B.8 é possível determinar a forma normal do pêndulo invertido no carro. Tanto a dinâmica externa quanto a interna são de ordem 2. É fácil perceber que a escolha $\eta_1 = x_1$, satisfaz a condição $L_g \eta_1 = 0$, já a escolha de η_2 deve ser feita de tal forma que:

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} g_2(x) + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_4} g_4(x) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Fazendo uso de alguns artificios matemáticos, chega-se em:

$$\eta_2 = x_2 - \frac{g_2(x)}{g_4(x)} x_4 \quad (\text{B.11})$$

Finalmente, o sistema é transformado à forma normal e colocando-o em função das novas coordenadas será:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{g}{l} \sin \xi_1 - \frac{\cos \xi_1}{l} \left\{ \frac{ml\xi_2^2 \sin \xi_1 - mg \cos \xi_1 \sin \xi_1}{[(M+m) - m \cos^2 \xi_1]} \right\} - \frac{\cos \xi_1}{l[(M+m) - m \cos^2 \xi_1]} u \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 + \frac{l}{\cos \xi_1} \xi_2 \\ \dot{\eta}_1 &= g \tan \xi_1 + l\xi_2^2 \sec \xi_1 \tan \xi_1 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

B.2 Problema de Rastreabilidade

Rearranjando a dinâmica externa da Equação B.12 é possível colocar o sistema na forma apresentada na Equação B.13 tal como em Seshagiri e Khalil (2005).

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B [b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) u] \\ y &= C\xi\end{aligned}\tag{B.13}$$

Sendo as matrizes A , B e C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]\tag{B.14}$$

E os coeficientes $a(\xi, \eta)$ e $b(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}b(\xi, \eta) &= \frac{g}{l} \sin \xi_1 - \frac{\cos \xi_1}{l} \left\{ \frac{ml\xi_2^2 \sin \xi_1 - mg \cos \xi_1 \sin \xi_1}{[(M+m) - m \cos^2 \xi_1]} \right\} \\ a(\xi, \eta) &= -\frac{\cos \xi_1}{l[(M+m) - m \cos^2 \xi_1]}\end{aligned}\tag{B.15}$$

De acordo com (SESHAGIRI E KHALIL, 2005) o problema de rastreabilidade pode ser resolvido se existir um ponto de equilíbrio no qual $y = r_{ss}$, sendo $r_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$, e $r(t)$ a referência a ser rastreada pela saída do sistema, isto é, o ponto de equilíbrio desejado, no caso particular do pêndulo este será $\theta = 0$, ou seja, na posição vertical ($r(t) = 0$). Com este propósito define-se $e = (\xi - \bar{\xi} - v)$, sendo $\bar{\xi} = v = [0, 0]^T$. Logo a dinâmica do erro será da forma:

$$\dot{e} = Ae + B [b(e + v, \eta) + a(e + v, \eta) u]\tag{B.16}$$

Esta expressão é idêntica à Equação B.13 mas com a mudança de variáveis $\xi \rightarrow e$ devido a $r_{sss} = 0$.

B.3 Definição do Controlador

Com o grau relativo do sistema $\rho = 2$, a superfície deslizante com integrador condicional é definida como:

$$s = k_0\sigma + k_1e_1 + \dot{e}_1 \quad (\text{B.17})$$

De acordo com a Equação B.16 e à natureza das matrizes A e B descritas na Equação B.14 verifica-se que $\dot{e}_1 = e_2$, deve-se lembrar que para as trajetórias do sistemas convergirem em $e = 0$ é necessário que $s=0$, por causa disso a constante k_1 deve satisfazer a condição (*Hurwitz*) $\lambda + k_1 = 0$, de tal forma que o autovalor λ possua parte real negativa, isto é $k_1 < 0$. O integrador condicional é definido como:

$$\dot{\sigma} = -k_0\sigma + \mu \text{sat} \left(\frac{s}{\mu} \right), k_0 > 0 \quad (\text{B.18})$$

O controlador proposto em Seshagiri e Khalil (2005) e implementado no pêndulo invertido tem a forma:

$$u = \beta \text{sat} \left(\frac{s}{\mu} \right) \quad (\text{B.19})$$

Sendo:

$$\text{sat} \left(\frac{s}{\mu} \right) = \begin{cases} \left(\frac{s}{|s|} \right) & \text{se } \rightarrow |s| > \mu \\ \left(\frac{s}{\mu} \right) & \text{se } \rightarrow |s| \leq \mu \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

O valor de β é definido como $\beta = \lambda + q$, com $q > 0$ obrigatoriamente, de tal forma que a estabilidade assintótica do sistema seja garantida, como será mostrado na próxima seção, assim como também o cálculo de λ .

B.4 Demonstração de Estabilidade do Sistema

Com o intuito de demonstrar a estabilidade do sistema faz-se necessário colocar o sistema em malha fechada fazendo a mudança de variáveis $\varsigma_i = \{e_i\}$, com $1 \leq i \leq \rho - 1$, logo usando

a Equação B.17 chega-se em:

$$\dot{\zeta} = M\zeta + \bar{C}(s - k_0\sigma) \quad (\text{B.21})$$

Sendo $M = -k_1$ e $\bar{C} = 1$. Propõem-se as seguintes candidatas a função de Lyapunov (SESHAGIRI E KHALIL, 2005):

$$V_\zeta = \zeta^T Q \zeta, V_\sigma = \frac{1}{2}\sigma^2, V_s = \frac{1}{2}s^2 \quad (\text{B.22})$$

Para que o sistema possa finalmente ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -k_1\zeta + (s - k_0\sigma) \\ \dot{s} &= \Delta - \beta \text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \\ \dot{\sigma} &= -k_0\sigma + \mu \text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Sendo:

$$\Delta = k_0 \left[-k_0\sigma + \mu \text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \right] + k_1 e_2 + b(e + v, \eta) \quad (\text{B.24})$$

Para demonstrar a estabilidade da dinâmica do erro se requer que Q da Equação B.22 satisfaça a equação de Lyapunov: $QM + M^T Q = -I$, logo: $Q = \frac{1}{2k_1}$ e $V_\zeta = \left(\frac{1}{2k_1}\right)\zeta^2$. Em (SESHAGIRI E KHALIL, 2005) propuseram um conjunto compacto que permite estimar a região de atração do sistema o qual é adotado para o problema do pêndulo invertido, este conjunto é definido como na Equação B.25:

$$\Omega_c = \left\{ V_\zeta \leq (c + \mu)^2 \chi, V_s \leq \frac{1}{2}c^2, V_\sigma \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{k_0}\right)^2 \right\} \quad (\text{B.25})$$

Sendo $c > \mu$ e $\chi = 4 |QC|^2 \lambda_{max}$, assumindo $c = 0,201$, $\mu = 0,2$ e $k_1 = 1$ fazem com que $V_\zeta \leq 0,0804$, usando a respectiva candidata a função de Lyapunov determina-se que o domínio de atração é limitado por $|\zeta| \leq 0,401$, ou seja, para ângulos do pêndulo $\theta = \pm 22,9773$ graus.

A derivada da função de Lyapunov para o erro é: $\dot{V}_\zeta \leq -|\zeta|^2 + 2|\zeta||QC|$

($|s| + k_0 |\sigma|$), sabendo que: $|\sigma| \leq \left(\frac{\mu}{k}\right)$ e $|s| \leq c$ fora da camada limite garante-se que $\dot{V}_\zeta \leq 0$. Portanto o subconjunto é invariante positivo.

Com o intuito de verificar que as trajetórias do sistema permanecem dentro da superfície deslizando uma vez atingida, procede-se a demonstrar que $\dot{V}_\zeta \leq 0$. Derivando a Equação B.22 temos que:

$$s\dot{s} = s\Delta - s\beta \text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) \quad (\text{B.26})$$

Fora da camada limite o $\text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) = \text{sign}\left(\frac{s}{\mu}\right)$, logo: $s\dot{s} = s\Delta - s\beta \text{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) = (\Delta - \beta)$, é importante destacar que o valor de β é obtido através de $\beta = \lambda + q$, onde λ é determinado pela maximização da Equação B.27 (KHALIL, 2002A):

$$\lambda \geq \max \left| \frac{\Delta}{a(e + v, \eta)} \right| \quad (\text{B.27})$$

Devido à própria definição de β e ao fato de $q \geq 0$ garante-se que $s\dot{s} = |s|(\Delta - \beta) \leq 0$, finalmente a dinâmica da superfície deslizando é estável dentro do subconjunto definido na Equação B.22. Para o caso da dinâmica do integrador condicional é fácil determinar que a derivada da respectiva função de Lyapunov dentro da camada limite ($|s| < \mu$) que é onde este age:

$$\dot{V}_\sigma = \sigma\dot{\sigma} = -k_0\sigma^2 + \mu\sigma \quad (\text{B.28})$$

Portanto, garante-se que $\dot{V}_\sigma \leq 0$ para o limite superior $|\sigma| \leq \frac{\mu}{k_0}$ sempre que $k_0 \geq 0$. Logo Ω_c é um conjunto invariante positivo.

B.5 Análise de Estabilidade da Dinâmica Interna

Analisar a dinâmica interna de um sistema não linear segundo (SLOTINE *et al.*, 1991), requer da análise da "dinâmica zero", ou seja, permite concluir que uma vez atingido o objetivo do controle ($e = 0$), a dinâmica interna do sistema convergirá à origem. A dinâmica zero do

pêndulo invertido é definida por:

$$\dot{\eta} = f_0(0, \eta) = \begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

O fato de $\eta_1 = x_2 = \eta_2$ e $\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 = 0$ permite concluir que devido à aceleração do carro ser nula, a velocidade deste será constante assim que o pêndulo for estabilizado na posição vertical, portanto, a dinâmica interna não é assintoticamente estável, será verificado na próxima seção que a posição do carro vai para uma condição de equilíbrio diferente da inicial. É indispensável ressaltar neste ponto que o objetivo principal do trabalho é controlar o ângulo do pêndulo a maneira de estabiliza-lo no ponto de equilíbrio $x_3 = x_4 = 0$ o qual é originalmente instável (sem controle). Portanto, a estabilidade do carro propriamente dito foge do escopo deste trabalho.

B.6 Cálculo do Ganho do Controlador

Como foi mencionado anteriormente e demonstrado no início desta seção, o limite inferior do ganho depende diretamente do valor de σ (fora da camada limite $|\sigma| \geq \mu$), sendo este calculado de tal forma que $\dot{\sigma} \leq 0$. A maximização da Equação B.26 usando B.24 resultará em:

$$\lambda \geq \max \left| \frac{-k_0^2 \sigma + k_0 \mu + k_1 e_2 + b(e + v, \eta)}{a(e + v, \eta)} \right| \quad (\text{B.30})$$

Sabendo que $|\sigma| \leq (\mu/k_0)$ assumindo $|e| \leq |c|$, escolhendo $|c| = 0,201$ o qual satisfaz a condição $c > \mu$. Neste conjunto maximiza-se $b(\cdot)$ e minimiza-se $a(\cdot)$ resultando em $\lambda \geq 2,3056$ para finalizar assume-se que $q = 0,0944$ então é possível determinar o ganho do controlador como sendo $\beta = 2,4$.

B.7 Simulações Numéricas

O desempenho da técnica de controle projetada nas seções anteriores é verificado aqui através de simulações. A dinâmica do pêndulo invertido no carro descrita pela Equação B.3 com $M = 1$, $m = 0,1$, $l = 0,5$, $g = 9,81$ e $F = 0$, todos no sistema internacional e usando como condição inicial $X_0 = \{x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0\} = \{0; 0; 22,97; 0\}$ é mostrada na Figura B.2 a seguir:

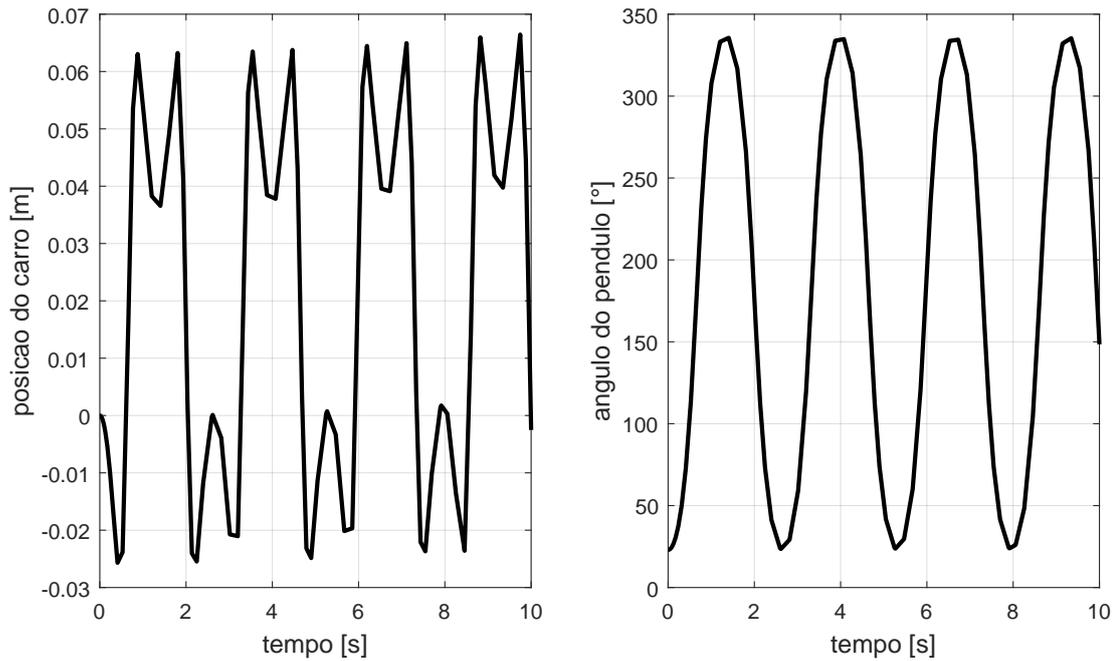


Figura B.2: Dinâmica do pêndulo invertido livre.

Percebe-se que o ângulo máximo do pêndulo não cresce mais do que $(2\pi - \theta_0)$ pela conservação da energia e nem decresce com o tempo pelo fato de não ser considerado atrito no pivô. Deve-se ressaltar que o objetivo principal do controle é estabilizar o ângulo do pêndulo na posição vertical ($\theta = 0$), para isto, utiliza-se o controlador descrito pela Equação B.19 com condições iniciais idênticas às mostrada acima, $\beta = 2, 4$, $\mu = 0, 2$ e $k_0 = k_1 = 1$.

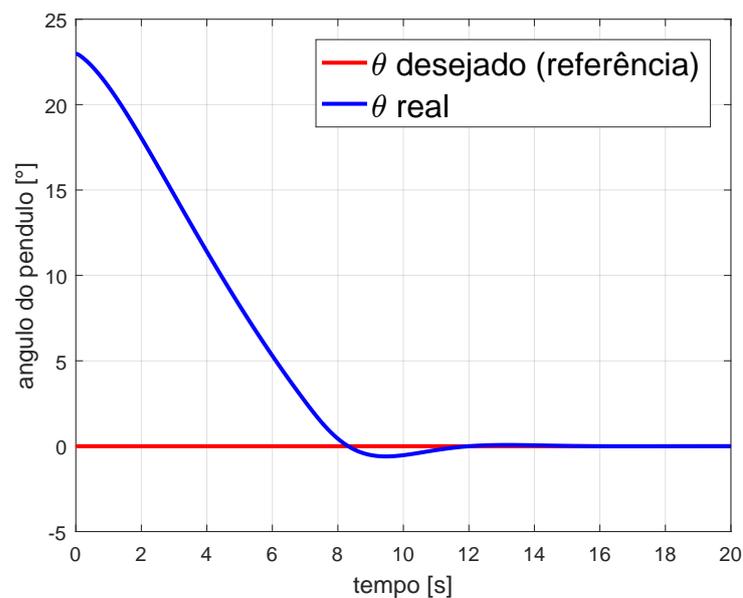


Figura B.3: Estabilização do ângulo do pêndulo.

É possível observar na Figura B.3 que o sistema conseguiu estabilizar em aproximada-

mente 15 segundos. Cabe salientar que o ângulo inicial do pêndulo foi escolhido como sendo o limite da região de atração estimada na subseção B.6. Como era de se esperar a dinâmica interna composta pela posição e velocidade do carro não é assintoticamente estável, tal como se mostra na Figura B.4.

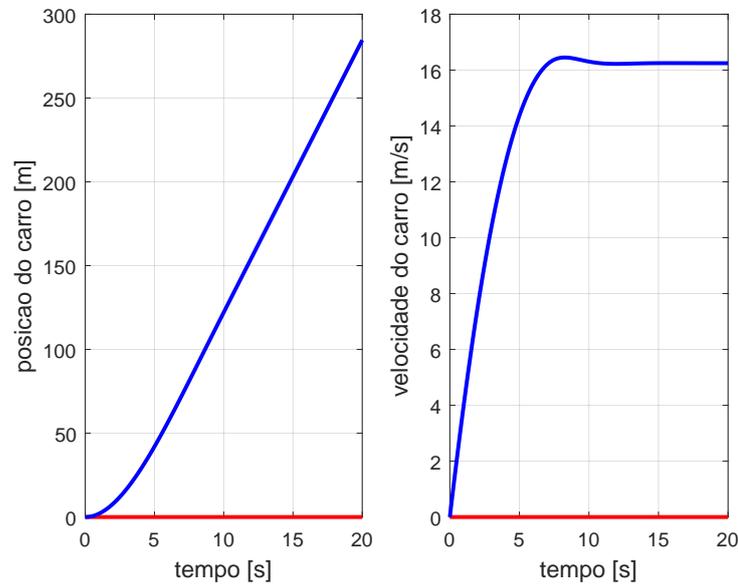


Figura B.4: Dinâmica interna do sistema.

É fácil perceber que a posição do carro não estabilizou, porém, a velocidade atingiu um máximo de 16,25 m/s aproximadamente. Devido à natureza da dinâmica interna do sistema (Equação B.29), e ao conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov apresentado em (SLOTINE *et al.*, 1991), o qual atribui esta estabilidade ao fato das trajetórias do sistema permanecerem arbitrariamente próximas da origem partindo o suficientemente próximo dela, permitem concluir que a dinâmica interna é marginalmente estável, portanto, se a velocidade do carro desejada fosse a inicial (nula), por meio de pequenas perturbações o sistema poderia ser voltado a essa condição. Por meio de simulações numéricas, foi aplicado um *step* de 1,514 Newtons por 4 segundos na força de controle de tal forma a voltar o carro à velocidade neutra, demonstrando-se a estabilidade no sentido de Lyapunov (marginalmente estável) da dinâmica interna do sistema. A Figura B.5 ilustra o desempenho do controlador na tarefa de manter o ângulo do pêndulo na posição vertical mesmo após o controle ser perturbado.

A Figura B.6 permite observar que a velocidade pode ser levada a valores desejados aplicando perturbações. Pretende-se em trabalhos futuros determinar a perturbação necessária para além de zerar a velocidade do carro, a posição possa ser retornada à inicial mantendo ao mesmo tempo o ângulo na posição vertical.

Com o intuito de verificar que o ganho mínimo calculado não está sobre dimensionado, simulou-se a resposta do sistema controlado com a condição inicial $X_0 = \{x_0, \dot{x}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0\} =$

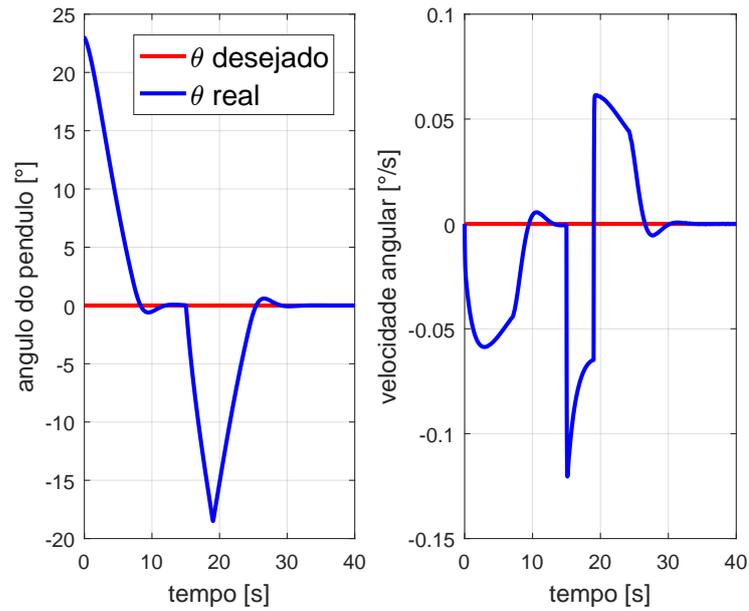


Figura B.5: Estabilização dinâmica externa com perturbação no controle.

$\{0; 0; 1; 0\}$, a resposta obtida é ilustrada na Figura B.7.

Percebe-se que pelo fato da perturbação ser menor o tempo de estabilização se reduziu para 10 segundos. Da mesma forma testou-se o desempenho da técnica de controle com um ganho do controlador menor ao mínimo calculado analiticamente, mostrando-se ineficiente na tarefa de estabilizar o pêndulo na posição vertical superior tal como mostrado na Figura B.8.

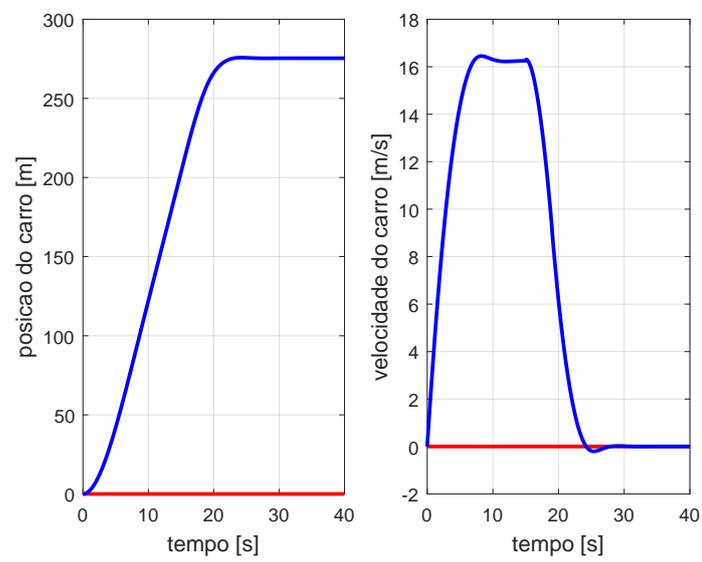


Figura B.6: Estabilização dinâmica interna com perturbação no controle.

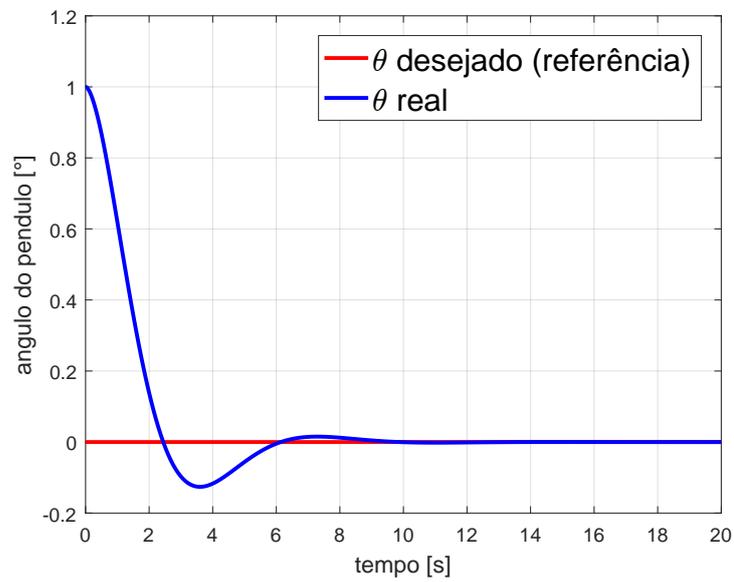


Figura B.7: Estabilização do pêndulo após perturbação de 1 grau.

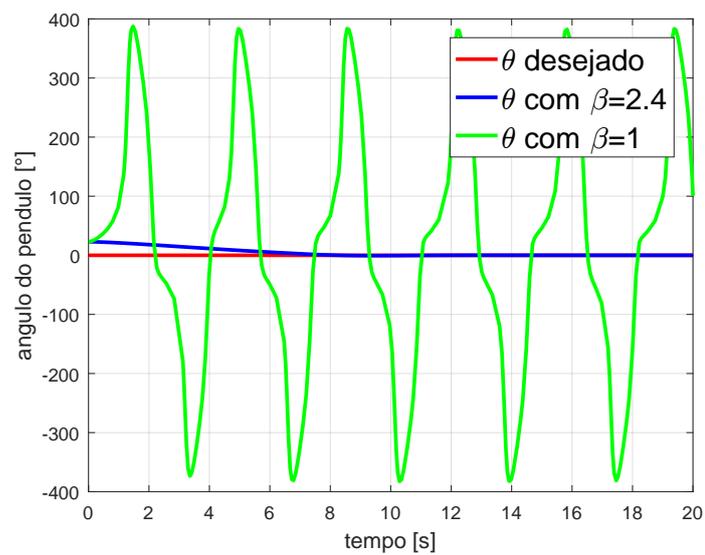


Figura B.8: Resposta do pêndulo com ganhos $\beta = 1$ e $\beta = 2,4$.

Apêndice C

Expressões da Inversão Dinâmica Não Linear

Apresentam-se neste apêndice as expressões das derivadas de Lie que definem os controladores por Inversão Dinâmica Não Linear projetados no Capítulo 5 para cada estado a ser controlado. Resulta pouco prático mostrar algumas expressões "exageradamente extensas", para isto, dispõe-se de um arquivo digital chamado *AnexoC.m* no MATLAB® que contém todas as expressões destas derivadas de Lie, tanto as mostradas quanto as não mostradas neste apêndice.

C.1 Taxa de Arfagem

$$\begin{aligned}L_g h_q &= \bar{q} S c_7 l C_{m_{\delta p}} \\L_f h_q &= c_5 p r - c_6 (p^2 - r^2) + \bar{q} S c_7 l \left[C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \left(\frac{l}{V} \right) q \right]\end{aligned}\tag{C.1}$$

C.2 Ângulo de Atitude

$$L_g L_f h_\theta = -\frac{63V^2 \rho \cos \phi}{80000}\tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 h_\theta = & \sin\phi \left[q \left(\frac{372p}{497} + \frac{25r}{497} \right) + \frac{1.49x10^{16}V^2\rho}{4.72x10^{19}} \left(\frac{3\delta_a}{10} - \frac{9\delta_l}{500} + \frac{\beta}{20} + \frac{21p}{16V} - \frac{63r}{200V} \right) \right. \\
& + \frac{9V^2\rho}{5680} \left(\frac{17\delta_l}{200} - \frac{3\beta}{20} - \frac{231p}{800V} + \frac{147r}{40V} \right) + \cos\phi \left[-\frac{p^2}{30} + \frac{17pr}{18} + \frac{r^2}{30} \right. \\
& \left. \left. - \frac{7V^2\rho}{4000} \left(\frac{17\alpha}{100} + \frac{21q}{10V} \right) - r\cos\phi + q\sin\phi [p + \tan\theta(r\cos\phi + q\sin\phi)] \right] \right. \\
& \left. \right. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

C.3 Ângulo de Ataque

$$\begin{aligned}
L_f^2 h_\alpha = & \frac{17pr}{48} - C_{\alpha 6} \left(\frac{C_{\alpha 13} - pv + 2qu - C_{\alpha 12}}{C_{\alpha 1}} - \frac{2uC_{\alpha 4}}{C_{\alpha 1}^2} \right) \\
& + C_{\alpha 7} \left(\frac{C_{\alpha 9} + C_{\alpha 11} - C_{\alpha 10} + 2qw - rv}{C_{\alpha 1}} - \frac{2wC_{\alpha 4}}{C_{\alpha 1}^2} \right) - \frac{p^2}{30} + \frac{r^2}{30} \\
& + \frac{(49w\cos\theta - 49u\cos\phi\sin\theta)(q\cos\phi - r\sin\phi)}{5C_{\alpha 1}} - \frac{7V^2\rho}{4000} \left(\frac{17\alpha}{100} + \frac{21q}{10V} \right) \\
& - \frac{C_{\alpha 4}}{C_{\alpha 1}^2} \left[\frac{9V^2\rho u \left(\frac{551\cos\alpha}{250} - C_{\alpha 16} + C_{\alpha 15} + C_{\alpha 14} + \frac{5.4x10^{15}\alpha\cos\beta\sin\phi}{1.4x10^{15}} \right)}{3700} \right. \\
& + \frac{9V^2\rho w \left(\frac{551\sin\alpha}{250} + C_{\alpha 17} + C_{\alpha 18} + C_{\alpha 19} + \frac{5.4x10^{15}\alpha\cos\alpha\cos\beta}{1.4x10^{15}} \right)}{3700} \\
& \left. - \frac{C_{\alpha 8}}{C_{\alpha 1}}(pu + rw) + \frac{C_{\alpha 5}}{C_{\alpha 1}V} \left[\frac{9V\rho}{1850} (w(C_{\alpha 15} - C_{\alpha 16} + C_{\alpha 14}) - u(C_{\alpha 17} + C_{\alpha 18} + C_{\alpha 19})) \right] \right. \\
& + \frac{uv}{C_{\alpha 1}} \left[\frac{3V^2\rho C_{\alpha 2}}{284} - q \left(\frac{25p}{497} + \frac{1009r}{1491} \right) + \frac{2.9x10^{15}V^2\rho C_{\alpha 3}}{9.2x10^{18}} \right] \\
& + \frac{vw}{C_{\alpha 1}} \left[\frac{9V^2\rho C_{\alpha 3}}{5680} + q \left(\frac{372p}{497} + \frac{25r}{497} \right) + \frac{2.9x10^{15}V^2\rho C_{\alpha 2}}{9.2x10^{18}} \right] \\
& - \frac{49u\cos\theta\sin\phi [p + \tan\theta(r\cos\phi + q\sin\phi)]}{5u^2 + 5w^2} \\
& - \frac{C_{\alpha 8}V - C_{\alpha 5}(v/V)}{V^2C_{\alpha 1}\cos\beta} \left[\frac{9V^2\rho w}{3700} \left(\frac{3\cos\alpha\sin\beta}{5} + C_{\alpha 21}\cos\alpha\sin\beta - C_{\alpha 20}\cos\alpha\cos\beta \right) \right. \\
& \left. - \frac{9V^2\rho u}{3700} \left(\frac{3\sin\alpha\sin\beta}{5} + C_{\alpha 21}\sin\alpha\sin\beta - C_{\alpha 20}\sin\alpha\cos\beta \right) \right] \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha 1} &= u^2 + w^2 \\
C_{\alpha 2} &= \frac{3\delta_a}{10} - \frac{9\delta_l}{500} + \frac{\beta}{20} + \frac{21p}{16V} - \frac{63r}{200} \\
C_{\alpha 3} &= \frac{17\delta_l}{200} - \frac{3\beta}{20} - \frac{231p}{800V} + \frac{147r}{40V} \\
C_{\alpha 4} &= C_{\alpha 7}u + C_{\alpha 6}w \\
C_{\alpha 5} &= C_{\alpha 7}w - C_{\alpha 6}u + C_{\alpha 8}v \\
C_{\alpha 6} &= C_{\alpha 9} + C_{\alpha 11} - C_{\alpha 10} + qw - rv \\
C_{\alpha 7} &= C_{\alpha 13} - pv + qu - C_{\alpha 12} \\
C_{\alpha 8} &= \frac{49\cos\theta\text{sen}\phi}{5} + pw - ru - \frac{9C_{\alpha 21}V^2\rho(C_{\alpha 21}\text{sen}\beta - C_{\alpha 20}\cos\beta)}{3700} \\
C_{\alpha 9} &= \frac{9V^2\rho(C_{\alpha 14} + C_{\alpha 15} - C_{\alpha 16})}{3700} \\
C_{\alpha 10} &= \frac{\left(\frac{4.1x10^{15}\delta_l}{2.7x10^{11}} + \frac{4.1x10^{14}}{2.7x10^{10}}\right) \left(\frac{9.0x10^{14}\rho}{6.6x10^{14}}\right)^{3/4}}{7400} \\
C_{\alpha 11} &= \frac{49}{5}\text{sen}\theta \\
C_{\alpha 12} &= \frac{9V^2\rho}{3700}(C_{\alpha 17} + C_{\alpha 18} + C_{\alpha 19}) \\
C_{\alpha 13} &= \frac{49}{5}\cos\phi\cos\theta \\
C_{\alpha 14} &= C_{\alpha 20}\cos\alpha\text{sen}\beta \\
C_{\alpha 15} &= C_{\alpha 21}\cos\alpha\cos\beta \\
C_{\alpha 16} &= \frac{551}{250}\alpha\text{sen}\alpha \\
C_{\alpha 17} &= C_{\alpha 20}\text{sen}\alpha\text{sen}\beta \\
C_{\alpha 18} &= C_{\alpha 21}\text{sen}\alpha\cos\beta \\
C_{\alpha 19} &= \frac{551}{250}\alpha\cos\alpha \\
C_{\alpha 20} &= \frac{\delta_a}{100} + \frac{3\delta_l}{40} - \frac{3\beta}{5} \\
C_{\alpha 21} &= \frac{5.4x10^{14}\alpha^2}{2.8x10^{14}} + \frac{3}{200}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

A expressão para $L_g L_f^1 h_\alpha$ é exageradamente extensa e não será apresentada.

C.4 Velocidade Total

$$L_g h_u = \frac{4.1x10^{14} \left(\frac{9.0x10^{14}\rho}{6.6x10^{14}} \right)^{3/4}}{2.0x10^{14}} \quad (C.6)$$

$$\begin{aligned} L_f h_u = & rv - qw - \frac{49\sin\theta}{5} + \frac{4.1x10^{15} \left(\frac{9.0x10^{15}\rho}{6.6x10^{14}} \right)^{3/4}}{2.0x10^{14}} \\ & - \frac{9V^2\rho}{3700} \left[\cos\alpha\cos\beta \left(\frac{5.4x10^{14}\alpha^2}{2.8x10^{14}} + \frac{3857\delta_p\alpha}{3125} + \frac{3}{200} \right) - \sin\alpha \left(\frac{7\delta_p}{10} + \frac{551\alpha}{250} \right) \right. \\ & \left. + \cos\alpha\sin\beta \left(\frac{\delta_a}{100} + \frac{3\delta_l}{40} - \frac{3\beta}{5} \right) \right] \quad (C.7) \end{aligned}$$

As expressões para $L_g L_f^1 h_v$, $L_f^2 h_v$, $L_g L_f^1 h_w$ e $L_f^2 h_w$, são exageradamente extensas e não são apresentadas.

C.5 Altitude

As expressões para $L_g L_f^2 h_H$ e $L_f^3 h_H$, são exageradamente extensas e não são apresentadas.

C.6 Taxa de Rolagem

$$\begin{aligned} L_g h_p = & \bar{q} S c_3 l C_{l_{\delta a}} \\ L_f h_p = & q(c_1 r + c_2 p) + \bar{q} S c_3 l \left[C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) p + C_{l_r} \left(\frac{l}{V} \right) r \right] + \\ & + \bar{q} S c_4 l \left[C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \left(\frac{\bar{c}}{V} \right) p + C_{n_r} \left(\frac{l}{V} \right) r \right] \quad (C.8) \end{aligned}$$

C.7 Ângulo de Rolagem com Amortecedor de Guinada

$$L_g L_f^1 h_\phi = -\frac{9V^2\rho}{2840} - \frac{4.48x10^{16}}{4.72x10^{20}} \rho V^2 \cos\phi \tan\theta \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 h_\phi &= q \left(\frac{25p}{497} - \frac{1009r}{1491} \right) + \frac{3V^2 \rho}{284} \left(\frac{9\delta_l}{500} - \frac{\beta}{20} - \frac{21p}{16V} + \frac{63r}{200V} \right) \\
&- \frac{1.4x10^{17}V^2 \rho}{4.7x10^{20}} \left(\frac{17\delta_l}{200} - \frac{3\beta}{20} - \frac{231p}{800V} + \frac{147r}{40V} \right) + (\tan^2\theta + 1)(r\cos\phi + q\sin\phi)(q\cos\phi - r\sin\phi) \\
&- \cos\phi \tan\theta \left[q \left(\frac{372p}{497} + \frac{25r}{497} \right) - \frac{1.4x10^{17}V^2 \rho}{4.7x10^{20}} \left(\frac{9\delta_l}{500} - \frac{\beta}{20} - \frac{21p}{16V} + \frac{63r}{200V} \right) \right] \\
&+ \frac{9V^2 \rho}{5680} \left(\frac{17\delta_l}{200} - \frac{3\beta}{20} - \frac{231p}{800V} + \frac{147r}{40V} \right) + \tan\theta(q\cos\phi - r\sin\phi) [p + \tan\theta(r\cos\phi + q\sin\phi)] \\
&+ \sin\phi \tan\theta \left[-\frac{p^2}{30} + \frac{17pr}{18} + \frac{r^2}{30} - \frac{7V^2 \rho}{4000} \left(\frac{9\delta_p}{20} + \frac{17\alpha}{100} + \frac{21q}{10V} \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$L_g h_r = -\frac{2.16x10^{20}}{1.67x10^{24}} \rho V^2 \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
L_f h_r &= \frac{9\rho V^2}{5680} \left(\frac{3\beta}{20} + \frac{231p}{800V} - \frac{147r}{40V} \right) - \frac{1.49x10^{16}\rho V^2}{4.72x10^{19}} \left(\frac{3\delta_a}{10} + \frac{\beta}{20} + \frac{21p}{16V} - \frac{63r}{200V} \right) \\
&- q \left(\frac{372p}{497} + \frac{25r}{497} \right)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

C.8 Ângulo de derrapagem

$$L_g h_\beta = \frac{27\rho}{148000} (V\cos\beta - V^2\cos\beta + uv\cos\alpha\sin\beta + vwsin\alpha\sin\beta) \tag{C.13}$$

A expressão para $L_f^1 h_\beta$ é exageradamente extensa e não é apresentada.