

Universidade Federal de Itajubá  
Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada.

## Curvas Integrais de Campos de Direções sobre Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Sebastião Alves de Souza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Itajubá para a obtenção do título de mestre em Física e Matemática Aplicada. Elaborada sob a orientação de Luis Fernando Mello.

Itajubá – MG  
Julho de 2008

*Durante a realização deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPEMIG.*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1	Elipse de Curvatura . . . . .	7
2.2	Campos de linhas sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$ . . . . .	10
2.2.1	Linhas de curvatura axial . . . . .	11
2.2.2	Linhas de curvatura direcional média . . . . .	13
2.2.3	Linhas assintóticas . . . . .	14
2.2.4	Linhas de curvatura $\nu$ -principais . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Alguns resultados sobre direções assintóticas</b>	<b>17</b>
3.1	Singularidades . . . . .	17
3.2	Alguns Exemplos . . . . .	18
3.2.1	Imersões contidas em hiperplanos . . . . .	18
3.2.2	A projeção estereográfica . . . . .	18
3.2.3	Superfícies produto de duas curvas . . . . .	27
3.3	Ortogonalidade de linhas assintóticas . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Hiperesfericidade de superfícies em <math>\mathbb{R}^4</math></b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>44</b>

# Lista de Figuras

2.1	A elipse de curvatura. . . . .	10
2.2	Campos de cruces de curvatura axial. . . . .	11
2.3	Configuração axial local do ponto axiumbílico $E_3$ . . . . .	12
2.4	Campos de direções de curvatura direcional média. . . . .	13
2.5	Campos de direções assintóticas. . . . .	14
2.6	O cone em $p$ . . . . .	15
3.1	A elipse de curvatura de $\varepsilon_{\bar{\alpha}}(p)$ . . . . .	25
3.2	Linhas de curvatura principal próximas a uma curva de pontos umbílicos: caso transversal, esquerda, e caso tangencial, centro e direita. . . . .	27

## Agradecimentos

Ao finalizar este trabalho, cumpre-me expressar meu agradecimento a todos que me auxiliaram na realização dessa árdua tarefa. São muitas as pessoas a quem devo agradecer.

Ao professor Luis Fernando Mello, pela orientação deste trabalho, pela confiança em mim depositada e pela disponibilidade, mesmo no momento em que estive afastado para o pós-doutoramento.

Ao amigo e colega Sinval, companheiro desde o primeiro instante na Unifei, e aos colegas Élcio, Míriam e Ana Paula, com quem dividi momentos de angústias e alegrias.

Aos professores do DCEX – Unimontes, que possibilitaram meu afastamento; em especial à Rosivaldo, atual chefe de departamento, pela grande ajuda para o entendimento, a elaboração e a formatação deste material; à Ronaldo e Heloiza, pela amizade e pela adequação dos meus horários de trabalho, para facilitar minhas viagens após o vencimento do prazo do meu afastamento, para conclusão desta dissertação.

À minha primeira professora, Maria Floralice do Araújo Santos, que me ensinou as primeiras letras, despertando em mim o desejo de ser professor de Matemática.

À meus pais, Jorge e Flora: estudaram tão pouco, mas não pouparam esforços para que todos os seus dez filhos estudassem.

À minha esposa Vânia e minha filha Joyce Karolinne, de quem fiquei distante durante o período de cumprimento dos créditos, pela compreensão e apoio.

A todas as pessoas que estiveram ao meu lado durante essa etapa. Sem vocês, eu não teria chegado até aqui.

Sebastião Alves de Souza

## Resumo

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada. Suponhamos que  $p$  (a origem de  $N_p M^2$ ) esteja fora da elipse de curvatura, para todo  $p \in M^2$ . Os dois pontos sobre a elipse de curvatura para os quais as retas através dos vetores curvatura normal são tangentes à elipse induzem um par de direções em  $T_p M^2$ . Assim, temos dois campos de direções tangentes em  $M^2$ , denominados campos de *direções assintóticas*. As singularidades desses campos são os pontos onde a elipse se degenera em um segmento de reta radial, isto é, os *pontos de inflexão*. As curvas integrais dos campos de direções assintóticas são as *linhas assintóticas*. As linhas assintóticas não estão necessariamente globalmente definidas e, em geral, não são ortogonais. Estudamos aqui algumas propriedades de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  cujas linhas assintóticas são ortogonais. Também analisamos o comportamento das linhas assintóticas próximas a uma linha de pontos de inflexão e condições necessárias e suficientes para a hiperesfericidade de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ .

## Abstract

Let  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  be an immersion of a smooth oriented surface. Suppose that  $p$  (the origin of  $N_p M^2$ ) lies outside the ellipse of curvature, for all  $p \in M^2$ . The two points on the ellipse of curvature where the lines through the normal curvature vectors are tangent to ellipse induce a pair of directions on  $T_p M^2$ . Thus we have two direction fields  $M^2$ , called *asymptotic direction fields*. The singularities of these fields are the points where the ellipse of curvature becomes a radial line segment, i. e., the *inflection points*. The integral curves of the asymptotic direction fields are the *asymptotic lines*. The asymptotic lines do not need to be globally defined on the surfaces and in general are not orthogonal. We study here some properties of surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$  whose asymptotic lines are orthogonal. We also study the behavior of the asymptotic lines near a curve of inflection points and analyze necessary and sufficient conditions for the hypersphericity of surfaces in  $\mathbb{R}^4$ .

# Capítulo 1

## Introdução

As *linhas de curvatura principal* de uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$  são curvas sobre a superfície tais que ao longo de suas direções tangentes, denominadas *direções principais*, estas se curvam extremalmente [C]. Tais curvaturas extremas denominam-se curvaturas principais e seus valores são obtidos através da curvatura normal avaliada nas direções principais. As direções principais são, em geral, determinadas por duas retas ortogonais. Os pontos da superfície em que todas as direções tangentes são direções principais são chamados *pontos umbílicos*. Fora dos pontos umbílicos, as direções principais determinam dois campos de direções tangentes à superfície, denominados campos de direções principais. Os pontos umbílicos são considerados singularidades destes campos. A rede formada pelas curvas integrais dos campos de direções principais juntamente com os pontos umbílicos define o que chamamos *configuração principal* da superfície; ela constitui um análogo natural ao retrato de fase para campos de vetores em superfícies.

Em 1760, Euler [E] funda a teoria da curvatura de superfícies, inserindo os métodos do Cálculo Infinitesimal em Geometria. Ele é o responsável pelas definições básicas acerca das curvaturas principais.

Monge [Mo], em 1796, foi o primeiro matemático a destacar a importância da configuração principal de uma superfície. Ele encontrou a família de curvas integrais dos campos de direções principais para o caso do elipsóide de três eixos distintos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

Por integração direta das equações diferenciais das linhas de curvatura principais, Monge foi levado ao primeiro exemplo de uma folheação com singularidades em uma superfície, chamada configuração principal de uma superfície orientada. O elipsóide, com sua configuração principal, é conhecido como Elipsóide de Monge. Neste estudo do elipsóide comparecem algumas

das características da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, como pontos singulares e separatrizes, ciclos principais, estabilidade estrutural e bifurcações. Veja [GS6] para maiores detalhes.

A continuação dos trabalhos de Monge deveu-se a seu discípulo Dupin. Ele ampliou o número de superfícies cujas configurações principais podem ser obtidas por integração, considerando famílias triplamente ortogonais de superfícies. Um caso particular são as famílias de quádricas homofocais, onde se encaixa o elipsóide de Monge.

A conjugação da análise de Monge e a extensão de Dupin nos fornece a primeira teoria global de configurações principais integráveis, que para superfícies quadráticas nos dá àquelas que são também principalmente estruturalmente estáveis sob pequenas perturbações dos coeficientes de suas equações, conforme [GS6].

Em 1896, Darboux [D] publicou resultados que descreveram completamente as possíveis configurações locais de uma superfície nas proximidades de pontos umbílicos genéricos, caracterizando-os em termos de condições algébricas nas derivadas de ordem três da parametrização da superfície. Em sua homenagem, tais pontos são chamados Darbouxianos.

Com Poincaré e Liapunov nasce e é sistematizada a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, aprimorada nos trabalhos de Andronov, Pontrjagin e Peixoto, a qual, no entanto, não se alastrou no ramo da Geometria Diferencial Clássica.

Somente em 1982, com os trabalhos de Gutierrez e Sotomayor, coletados em [GuS1], é que o estudo das configurações principais voltou ao cenário matemático e se fortaleceu, amoldando-se às modernas técnicas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos, sendo introduzidos novos conceitos como Estabilidade Estrutural e Genericidade. Mello e Sotomayor denominam esta sua nova face de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais da Geometria.

Em [GuS1] Gutierrez e Sotomayor definem a classe  $GS$  das imersões de classe  $C^r$  de superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$  que satisfazem as seguintes condições, reminiscentes das de Peixoto para Equações Diferenciais Ordinárias [P]:

1. Todos os pontos umbílicos são Darbouxianos;
2. Todos os ciclos principais são hiperbólicos;
3. Não existe conexão ou autoconexão de separatrizes umbílicas;
4. O conjunto limite de cada linha de curvatura principal está contido no conjunto dos pontos umbílicos e dos ciclos principais.

Gutierrez e Sotomayor demonstraram que toda imersão pertencente ao conjunto  $GS$  é estruturalmente estável e que esta classe é aberta e densa no conjunto de todas as imersões de superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$ , com topologias adequadas.

Ainda para superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ , posteriormente outros campos de direções com suas curvas integrais e suas singularidades foram estudados dentro do enfoque da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais da Geometria. Por exemplo, Garcia, Gutierrez e Sotomayor estudaram em [GGuS] as linhas assintóticas, ao longo das quais a curvatura normal se anula; Garcia e Sotomayor estudaram em [GS3] as linhas de curvatura média, ao longo das quais a curvatura normal é igual à curvatura média  $H$ ; Garcia e Sotomayor estudaram em [GS4] as linhas de curvatura média geométrica, ao longo das quais a curvatura normal é igual à média geométrica das curvaturas principais; Garcia e Sotomayor estudaram em [GS5] as linhas de curvatura média harmônica, ao longo das quais a curvatura normal é igual à média harmônica das curvaturas principais. Mais tarde, Garcia e Sotomayor unificaram todas essas noções de linhas de curvatura média em [GS1].

Em 1989, Garcia [G1] estendeu parcialmente os resultados de Gutierrez e Sotomayor para as hipersuperfícies compactas imersas em  $\mathbb{R}^4$ .

Para o estudo geral das superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$  podemos citar os marcos de referência Forsyth [F], Wong [W] e Little [L]. Little apresentou em seu trabalho alguns exemplos de campos de direções, com suas construções baseadas na elipse de curvatura e suas singularidades, relacionou aspectos locais, como por exemplo, o índice de campos de direções em singularidades isoladas, com aspectos globais, utilizando para isto hipóteses adicionais, como a compacidade da superfície. Vale resaltar que nestas referências não se encontra nada nos moldes da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais da Geometria.

Apenas recentemente foi dada ênfase ao estudo global mais detalhado dos campos de direções e suas singularidades sobre superfícies em  $\mathbb{R}^4$ . Podemos citar o trabalho [GGST] de Gutierrez, Guadalupe, Sotomayor e Tribuzy, de 1987, onde foram estudadas as linhas de curvatura em superfícies mínimas imersas em  $\mathbb{R}^4$ , e o trabalho de Gutierrez, Guadalupe, Tribuzy e Guíñez [GGTG1], de 1997, onde há um estudo detalhado das singularidades genéricas dos campos de direções cujas curvas integrais chamaram de linhas de curvatura.

Deve-se a Garcia e Sotomayor em [GS2] o estudo mais abrangente dos campos de direções acima e suas singularidades. Estes autores adotaram o nome de linhas de curvatura axial para as curvas integrais destes campos de direções, bem como denominaram suas singularidades de pontos axiumbólicos, pela analogia com o caso em  $\mathbb{R}^3$ . Este trabalho ainda trata dos ciclos e da estabilidade estrutural, nos moldes das imersões de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

Na mesma linha desses trabalhos, Garcia, Mochida, Romero-Fuster e Ruas [GMRR] estudam as singularidades genéricas dos campos de direções assintóticas, denominadas pontos de inflexão. É provado que, genericamente, o índice das singularidades destes campos é  $\pm 1/2$  e, como estes campos estão globalmente definidos sobre as superfícies localmente convexas,

demonstra-se o seguinte teorema: qualquer esfera, genericamente mergulhada como uma superfície localmente convexa em  $\mathbb{R}^4$ , possui pelo menos quatro pontos de inflexão.

No estudo [GS2] de Garcia e Sotomayor mencionado acima, aparece, de forma natural, uma equação diferencial quártica, a saber, a equação diferencial das linhas de curvatura axial. Quando a imersão da superfície em  $\mathbb{R}^4$  está, em particular, contida em um hiperplano, esta equação fatora-se num produto de duas equações diferenciais quadráticas, sendo uma delas a equação diferencial das linhas de curvatura principal e a outra a equação diferencial das linhas de curvatura média.

Consideremos agora a imersão de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e façamos sua composição com a aplicação (inversa da) projeção estereográfica de  $\mathbb{R}^3$  em  $S^3$  e depois a inclusão em  $\mathbb{R}^4$ . Em [L], Little mostrou que, com esta construção, as linhas de curvatura principal da imersão em  $\mathbb{R}^3$  são levadas nas linhas assintóticas da imersão em  $\mathbb{R}^4$ , bem como os pontos umbílicos da imersão em  $\mathbb{R}^3$  são levados nos pontos de inflexão da imersão em  $\mathbb{R}^4$ .

Neste contexto, Mello mostrou em [M1] que as linhas de curvatura média da imersão em  $\mathbb{R}^3$  são levadas nas linhas de curvatura direcional média da imersão em  $\mathbb{R}^4$ . Neste trabalho, Mello estuda as singularidades genéricas dos campos de direções de curvatura direcional média e em [M3] estuda a estabilidade estrutural para estes campos.

No artigo [GS7] Garcia e Sotomayor apresentam a carta

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) = & c(u) + v(N \wedge T)(u) + \\ & + [\frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots]N(u), \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde  $c : [0, l] \rightarrow S$  é uma parametrização regular pelo comprimento de arco de uma curva de pontos umbílicos, tal que  $\{T, N \wedge T, N\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ ,  $k(u) = k_n(c(u), T) = k_n(c(u), N \wedge T)$  é a curvatura normal de  $S$  nas direções  $T$  e  $N \wedge T$ . Neste artigo, eles provaram que esta parametrização define uma carta local  $C^\infty$  em uma pequena vizinhança tubular de  $c$ . Também determinam os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na carta  $\alpha$ . Além disso, estudam as configurações principais próximas à curva de pontos umbílicos.

Denotando por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a projeção estereográfica de  $M^2$  em  $S^3$  e por  $\bar{\alpha} = i \circ \bar{\alpha}$  a imersão de  $M^2$  em  $\mathbb{R}^4$ , de acordo com o visto acima, a linha de pontos umbílicos de  $\alpha$  é aplicada, via (inversa da) projeção estereográfica, em uma linha de pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$  e as linhas de curvatura principal de  $\alpha$  são aplicadas, via (inversa da) projeção estereográfica, nas linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ .

De acordo com [RS], quaisquer resultados a respeito de linhas assintóticas e pontos de inflexão de superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$  representam uma generalização de problemas referentes

às linhas de curvatura e pontos umbílicos de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Neste sentido, o comportamento das linhas assintóticas próximas à curva de pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$  deve ser análogo ao comportamento das linhas de curvatura principais próximas à curva de pontos umbílicos de  $\alpha$ .

Esta dissertação se desenvolve como a seguir.

No capítulo 2 fazemos uma revisão dos principais conceitos referentes a uma imersão de uma superfície em  $\mathbb{R}^4$ , como a primeira e segunda formas fundamentais, a elipse de curvatura e as funções associadas a ela, como o vetor curvatura normal, o vetor curvatura média e a curvatura normal. Definimos alguns pontos especiais, como ponto mínimo, ponto de inflexão e ponto axiumbílico. Fazemos a construção dos campos de cruces de curvatura axial, cujas curvas integrais são as linhas de curvatura axial, do campo de direções de curvatura direcional média, cujas curvas integrais são as linhas de curvatura direcional média e dos campos de direções assintóticas, cujas curvas integrais são as linhas assintóticas. Também apresentamos as equações diferenciais destas curvas integrais.

No capítulo 3 destacamos alguns resultados sobre direções assintóticas presentes na literatura. Este capítulo é composto por três seções. Na primeira seção, estudamos as singularidades dos campos de direções assintóticas, mostrando que elas ocorrem nos pontos de inflexão. Na segunda seção mostramos exemplos de superfícies onde a curvatura normal é nula em todo ponto, ou seja, com a elipse de curvatura degenerada em um segmento de reta, apresentados em três subseções: Imersões contidas em hiperplanos, A projeção estereográfica e Superfícies produto de duas curvas. Na primeira subseção mostramos que todo ponto de uma imersão contida em um hiperplano é um ponto de inflexão. Na segunda subseção, fazemos a composição de uma imersão  $\alpha$  de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  com a inversa da projeção estereográfica, obtendo uma imersão  $\bar{\alpha}$  de uma superfície em  $\mathbb{R}^4$ . Determinamos os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais de  $\bar{\alpha}$  e concluímos que um ponto  $(u, v)$  é uma  $\bar{H}$ -singularidade de  $\bar{\alpha}$  se, e somente se, for um ponto umbílico de  $\alpha$ . Fazemos, então, a composição da carta (1.1) com a inversa da projeção estereográfica e obtemos uma imersão de uma superfície em  $\mathbb{R}^4$ , com uma linha de pontos de inflexão, mostrando o comportamento das linhas assintóticas próximas a esta linha de pontos de inflexão. As duas primeiras subseções tratam de imersões de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ , onde pode ser feita uma redução da codimensão da imersão, visto que a imagem da superfície está contida em hiperesferas ou hiperplanos. A terceira subseção mostra que a condição  $K_N \equiv 0$  não é suficiente para garantir a redução da codimensão da imersão. Por fim, na terceira subseção, mostramos resultados sobre a ortogonalidade de linhas assintóticas, bem como condições necessárias e suficientes para a ocorrência de campos de direções assintóticas globalmente definidos. As referências básicas para este capítulo são

os artigos de Little [L], de Garcia e Sotomayor [GS7], de Mello [M2] e de Romero–Fuster e Sanchez–Bringas [RS].

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos resultados globais sobre direções assintóticas e hiperesfericidade de superfícies em  $\mathbb{R}^4$ . A referência básica para este capítulo é o artigo de Mello [M2].

# Capítulo 2

## Preliminares

Todas as imersões que consideraremos serão  $C^\infty$ , a menos que se diga o contrário.

### 2.1 Elipse de Curvatura

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada em  $\mathbb{R}^4$ , o qual está orientado e munido do produto interno Euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Denotemos por  $TM$  e  $NM$  os fibrados tangente e normal de  $\alpha$ , respectivamente, e por  $T_pM$  e  $N_pM$  as respectivas fibras, isto é, os planos tangente e normal em  $p \in M^2$ . Vamos assumir que  $(u, v)$  seja uma carta positiva de  $M^2$  e que  $\{\alpha_u, \alpha_v, N_1, N_2\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , com  $\{N_1, N_2\}$  um referencial positivo de  $N_pM$ .

Em tal carta, a primeira forma fundamental de  $\alpha$ ,  $I_\alpha$ , é dada por

$$I = I_\alpha = \langle d\alpha, d\alpha \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

onde  $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$ ,  $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$  e  $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$ .

A segunda forma fundamental de  $\alpha$ ,  $II_\alpha$ , é definida em termos da forma quadrática com valores em  $NM$

$$II = II_\alpha = \langle d^2\alpha, N_1 \rangle N_1 + \langle d^2\alpha, N_2 \rangle N_2 = II_{1,\alpha}N_1 + II_{2,\alpha}N_2,$$

onde

$$II_i = e_i du^2 + 2f_i dudv + g_i dv^2,$$

com  $e_i = \langle \alpha_{uu}, N_i \rangle$ ,  $f_i = \langle \alpha_{uv}, N_i \rangle$  e  $g_i = \langle \alpha_{vv}, N_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$ .

As seguintes funções estão associadas à imersão  $\alpha$  [L]:

1. O vetor curvatura média de  $\alpha$

$$H = H_\alpha = H_1N_1 + H_2N_2,$$

onde

$$H_i = H_{i\alpha} = \frac{Eg_i - 2Ff_i + Ge_i}{2(EG - F^2)},$$

para  $i = 1, 2$ ;

2. A curvatura normal de  $\alpha$

$$K_N = K_{N,\alpha} = \frac{E(f_1g_2 - f_2g_1) - F(e_1g_2 - e_2g_1) + G(e_1f_2 - e_2f_1)}{2(EG - F^2)};$$

3. A resultante  $\Delta$  de  $II_{1,\alpha}$  e  $II_{2,\alpha}$

$$\Delta = \Delta_\alpha = \frac{1}{4(EG - F^2)} \det \begin{pmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{pmatrix};$$

4. A curvatura Gaussiana de  $\alpha$

$$K = K_\alpha = \frac{e_1g_1 - (f_1)^2 + e_2g_2 - (f_2)^2}{EG - F^2};$$

5. O vetor curvatura normal de  $\alpha$

$$\eta(p, w) = \frac{II(p, w)}{I(p, w)}.$$

Podemos olhar o vetor curvatura normal da seguinte maneira: para cada vetor unitário  $w \in T_pM$ , seja  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$ . Deste modo  $\eta(p)(w) = \eta(p, w)$  é a projeção de  $\gamma''(0)$  sobre o plano normal  $N_pM$ .

Para simplificar os cálculos, adotaremos uma carta  $(u, v)$  de modo que, nesta carta, a primeira forma fundamental esteja diagonalizada, com  $E = G = 1$  e  $F = 0$ . Deste modo,  $\{\alpha_u, \alpha_v\}$  é um referencial ortonormal de  $T_pM$  e todo vetor unitário  $w \in T_pM$  pode ser escrito como

$$w = \phi(t) = \cos t \alpha_u + \sin t \alpha_v.$$

Com essas considerações, temos

$$\eta(p)(w) = \eta(p)(\phi(t)) = \begin{pmatrix} e_1 \cos^2 t + 2f_1 \cos t \sin t + g_1 \sin^2 t \\ e_2 \cos^2 t + 2f_2 \cos t \sin t + g_2 \sin^2 t \end{pmatrix}$$

e

$$H(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_1 + g_1) \\ \frac{1}{2}(e_2 + g_2) \end{pmatrix},$$

onde, nas expressões acima aparecem as componentes com relação ao referencial ortonormal  $\{N_1, N_2\}$  de  $N_pM$ . Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$$

podemos reescrever  $\eta(p)(w)$  da forma

$$\eta(p)(w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_1 - g_1) & f_1 \\ \frac{1}{2}(e_2 - g_2) & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_1 + g_1) \\ \frac{1}{2}(e_2 + g_2) \end{pmatrix},$$

de onde

$$\eta(p)(w) - H(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_1 - g_1) & f_1 \\ \frac{1}{2}(e_2 - g_2) & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}.$$

Podemos destacar os seguintes resultados (veja figura 2.1):

- i) Como  $\eta(p) : T_pM \rightarrow N_pM$  é uma transformação afim, a imagem da circunferência unitária  $S^1$  é uma elipse em  $N_pM$ , chamada *elipse de curvatura* de  $\alpha$  no ponto  $p$  e denotada por  $\varepsilon_\alpha(p)$ ;
- ii) Esta elipse pode se degenerar em um segmento de reta, um círculo ou um ponto;
- iii) O centro de  $\varepsilon_\alpha(p)$  é o vetor curvatura média  $H(p)$ ;
- iv) A área de  $\varepsilon_\alpha(p)$  é calculada através da área de  $S^1$  multiplicada pelo valor absoluto do determinante da transformação, ou seja,
$$\pi \left| \frac{1}{2}(e_1 - g_1)f_2 + \frac{1}{2}(g_2 - e_2)f_1 \right| = \frac{\pi}{2} |K_N(p)|;$$
- v) A aplicação  $\eta(p)$  restrita a  $S^1$ , sendo quadrática, é um duplo recobrimento da elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$ . Assim, todo ponto da elipse de curvatura corresponde a dois pontos diametralmente opostos da circunferência  $S^1$ ;
- vi) Como rotações no plano tangente levam o círculo unitário sobre si mesmo, a elipse de curvatura, como conjunto de pontos no plano normal, é invariante por rotações no plano tangente. Além disso, qualquer quantidade invariante da elipse de curvatura, invariante sob rotações do plano normal sobre a origem, é invariante sob rotações nos espaços tangente e normal.

A resultante  $\Delta$  é uma quantidade que expressa como a elipse de curvatura está posicionada com respeito à origem do plano normal. Se a resultante  $\Delta$  for positiva (respectivamente,

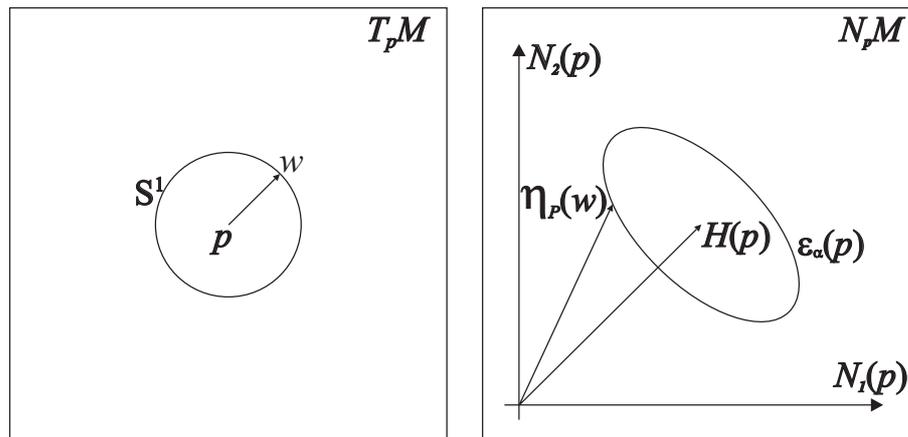


Figura 2.1: A elipse de curvatura.

negativa) então a origem do plano normal está (respectivamente, não está) contida na região limitada pela elipse de curvatura. Se  $\Delta = 0$ , mas a curvatura normal for diferente de zero, então a elipse de curvatura passa pela origem do plano normal.

Um ponto  $p \in M$  é chamado de ponto *mínimo* de  $\alpha$  se  $H(p) = 0$  e é chamado de *ponto de inflexão* de  $\alpha$  se  $\Delta(p) = K_N(p) = 0$ . Segue que  $p$  é um ponto de inflexão se, e somente se,

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = e_1 g_2 - e_2 g_1 = f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0$$

ou, por (iv), se, e somente se, a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  for um segmento de reta radial.

## 2.2 Campos de linhas sobre superfícies em $\mathbb{R}^4$

Existem dois modos diferentes de se construir campos de linhas em superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$ . O primeiro consiste em se considerar a elipse de curvatura no fibrado normal da superfície e tomar as pré-imagens dos pontos nesta elipse para definir campos de direções tangentes [M2],[M4].

Se as construções acima falham para pontos especiais de  $M^2$ , dizemos que eles são pontos singulares desses campos.

Da observação (v) da seção 2.1 concluímos que, a partir de uma escolha bem definida de pontos sobre a elipse de curvatura, campos de direções tangentes podem ser construídos sobre  $M^2$ . Também, a partir de uma escolha bem definida de pontos diametralmente opostos sobre a elipse de curvatura, campos de cruze ortogonais podem ser construídos sobre  $M^2$ .

Exemplos deste método são dados por: *linhas de curvatura axial*, ao longo das quais a segunda forma fundamental aponta na direção dos eixos maior e menor da elipse de curvatura; *linhas direcionalmente médias*, ao longo das quais a segunda forma fundamental aponta na

direção do vetor curvatura média; e as *linhas assintóticas*, ao longo das quais a segunda forma fundamental aponta na direção das retas tangentes à elipse de curvatura.

O outro modo consiste em definir as *linhas de curvatura  $\nu$ -principais* ou  *$\nu$ -linhas de curvaturas principais*, ao longo das quais a superfície dobra-se extremalmente na direção do vetor normal  $\nu$ . Para este fim, precisamos tomar um campo de vetores normal unitário  $\nu$  e seguir o procedimento clássico para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.2.1 Linhas de curvatura axial

Os quatro vértices da elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  determinam oito pontos na circunferência tangente unitária que definem duas cruzes no plano tangente. Assim, temos dois campos de cruzes em  $M^2$  chamados *campos de cruzes de curvatura axial* (veja figura 2.2).

Essa construção falha nos *pontos axiumbólicos*, onde a elipse de curvatura se torna uma circunferência ou um ponto. Genericamente, o índice de um ponto axiumbólico é  $\pm 1/4$ , veja [GS2], [GGST], [GGTG2]. As curvas integrais dos campos de cruzes de curvatura axial são as *linhas de curvatura axial*.

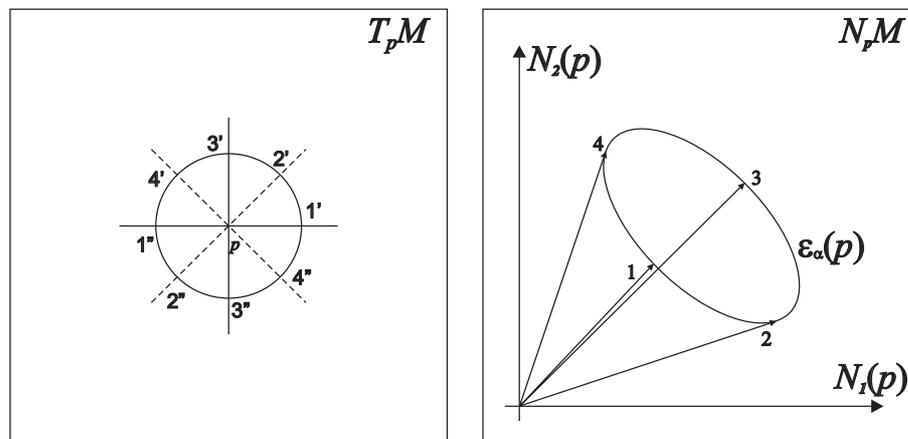


Figura 2.2: Campos de cruzes de curvatura axial.

Genericamente, não existe uma boa maneira de distinguir um vértice do eixo maior (ou menor) de  $\varepsilon_\alpha(p)$  e portanto escolher uma direção específica do campo de cruzes. Assim, uma linha de curvatura axial não é necessariamente uma curva regular simples; ela pode estar imersa com interseções transversais. A figura 2.3 mostra uma possível configuração local das linhas de curvatura axial. Este modelo é típico do ponto axiumbólico  $E_3$  [GS2].

Considere as cruzes  $A$ ,  $B$  e  $C$  da figura 2.3. Coloque rótulos 1 e 2 em  $A$ . As linhas de curvatura axial induzem rótulos 1 e 2 em  $B$ . Os rótulos 1 e 2 em  $C$  são induzidos pelas linhas de curvatura axial a partir de  $B$ . Se retornarmos a  $A$  a partir de  $C$ , os rótulos 1 e 2 em  $A$  estarão trocados.

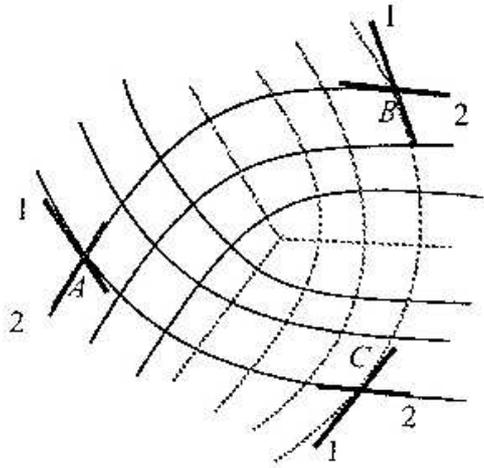


Figura 2.3: Configuração axial local do ponto axiumbílico  $E_3$ .

A equação diferencial das linhas de curvatura axial é uma equação diferencial quártica da forma

$$Jac(\|\eta - H\|^2, I) = 0, \quad (2.1)$$

onde

$$Jac(\cdot, \cdot) = \frac{\partial(\cdot, \cdot)}{\partial(du, dv)},$$

a qual pode ser escrita como [GS2]

$$A_0 du^4 + A_1 du^3 dv + A_2 du^2 dv^2 + A_3 dudv^3 + A_4 dv^4 = 0, \quad (2.2)$$

onde

$$A_0 = a_0 E^3,$$

$$A_1 = a_1 E^3,$$

$$A_2 = -6a_0 G E^2 + 3a_1 F E^2,$$

$$A_3 = -8a_0 E F G + a_1 E (4F^2 - EG),$$

$$A_4 = a_0 G (EG - 4F^2) + a_1 F (2F^2 - EG),$$

$$a_0 = 4[F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) - E a_6 a_2 - E^2 F(a_3 + a_5) + E^3 a_4],$$

$$a_1 = 4[G a_6 (e_1^2 + e_2^2) + 8E F G a_2 + E^3 (g_1^2 + g_2^2) - 2E^2 G (a_3 + a_5)],$$

$$a_2 = e_1 f_1 + e_2 f_2,$$

$$a_3 = e_1 g_1 + e_2 g_2,$$

$$a_4 = f_1g_1 + f_2g_2,$$

$$a_5 = 2(f_1^2 + f_2^2),$$

$$a_6 = EG - 4F^2.$$

### 2.2.2 Linhas de curvatura direcional média

A reta através do vetor curvatura média  $H(p)$  encontra a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  em dois pontos diametralmente opostos. Esta construção induz dois campos de direções ortogonais no plano tangente  $T_pM$ . Procedendo assim, podemos construir dois campos de direções ortogonais sobre  $M^2$ , chamados  $H$ -campos de direções (veja figura 2.4).

As singularidades desses campos, chamadas  $H$ -singularidades, são os pontos onde  $H = 0$  (pontos mínimos) ou aqueles nos quais a elipse de curvatura se torna um segmento de reta radial (pontos de inflexão). As curvas integrais dos  $H$ -campos de direções são as *linhas de curvatura direcional média*.

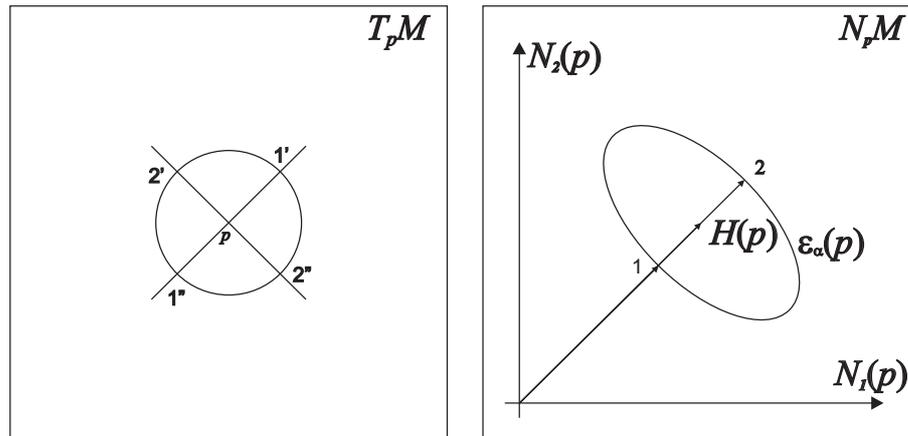


Figura 2.4: Campos de direções de curvatura direcional média.

A equação diferencial das linhas de curvatura direcional média é uma equação diferencial quadrática da forma [M3]

$$Jac\{Jac(II_1, II_2), I\} = 0, \quad (2.3)$$

a qual pode ser escrita como

$$B_1(u, v)du^2 + 2B_2(u, v)dudv + B_3(u, v)dv^2 = 0, \quad (2.4)$$

onde

$$B_1 = (e_1g_2 - e_2g_1)E + 2(e_2f_1 - e_1f_2)F,$$

$$B_2 = (f_1g_2 - f_2g_1)E + (e_2f_1 - e_1f_2)G,$$

$$B_3 = 2(f_1g_2 - f_2g_1)F + (e_2g_1 - e_1g_2)G.$$

### 2.2.3 Linhas assintóticas

Suponha que a origem de  $N_pM$  esteja fora da região limitada pela elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$ , para todo  $p \in M^2$ . Os dois pontos sobre  $\varepsilon_\alpha(p)$  para os quais as retas através dos vetores curvatura normal são tangentes a  $\varepsilon_\alpha(p)$  induzem um par de direções em  $T_pM$ , as quais, em geral, não são ortogonais, uma vez que os dois pontos sobre  $\varepsilon_\alpha(p)$  determinados não são simétricos em relação à origem da elipse. Temos, assim, construídos dois campos de direções tangentes sobre  $M^2$ , chamados *campos de direções assintóticas* (veja figura 2.5).

As singularidades desses campos são os pontos onde a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta radial, isto é, os *pontos de inflexão*. Genericamente, o índice de um ponto de inflexão isolado é  $\pm 1/2$  [GMRR]. As curvas integrais dos campos de direções assintóticas são as *linhas assintóticas*.

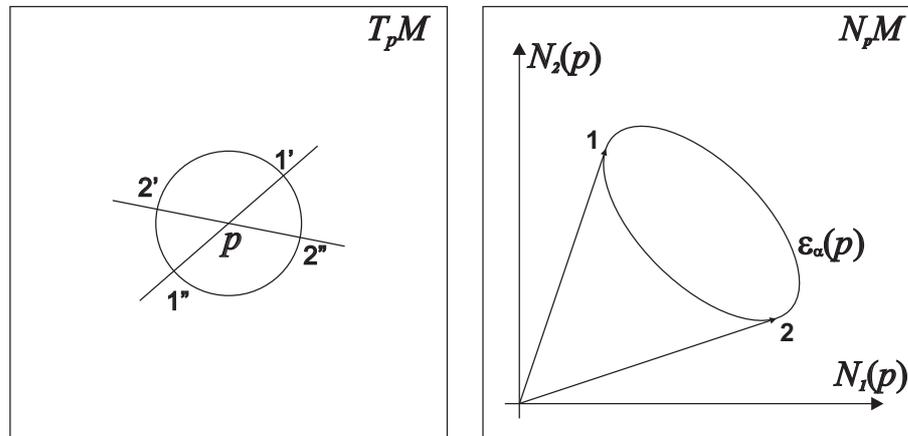


Figura 2.5: Campos de direções assintóticas.

A equação diferencial das linhas assintóticas é uma equação diferencial quadrática da forma

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \beta\eta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo que o vetor tangente unitário faz com uma direção fixa do plano tangente.

Eliminando  $\beta$  nesta equação, podemos reescrevê-la como [M3]

$$Jac(II_1, II_2) = 0, \tag{2.5}$$

a qual pode ser escrita como

$$T_1(u, v)du^2 + T_2(u, v)dudv + T_3(u, v)dv^2 = 0, \tag{2.6}$$

onde

$$T_1 = e_1 f_2 - e_2 f_1,$$

$$T_2 = e_1 g_2 - e_2 g_1,$$

$$T_3 = f_1 g_2 - f_2 g_1.$$

Suponhamos que as linhas assintóticas estejam globalmente definidas sobre  $M^2$ . Sob as hipóteses de orientabilidade é possível globalizar a todo  $M^2$  a escolha de uma ordenação para as direções assintóticas. Para cada  $p \in M^2$  fora dos pontos de inflexão, a Equação 2.6 define um campo de cones tangentes. Tomemos a base  $\{+e_1(p), +e_2(p)\}$  de  $T_p M^2$  consistindo de vetores assintóticos unitários ordenados compativelmente com  $M^2$  e com o cone tangente em  $p$ .

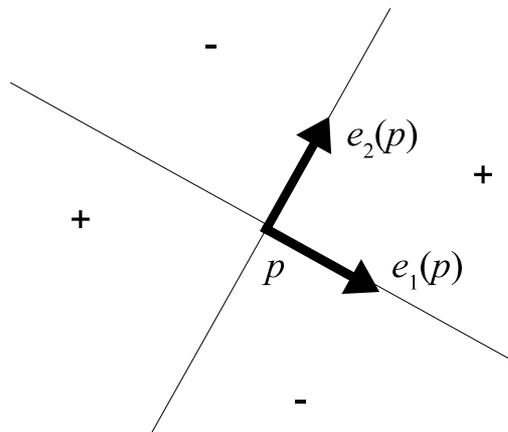


Figura 2.6: O cone em  $p$ .

Existe apenas uma outra escolha diferente  $\{-e_1(p), -e_2(p)\}$  para esta base, mas ambas as escolhas definem as mesmas direções assintóticas geradas por  $\pm e_1$  e  $\pm e_2$ . Desta forma, podemos concluir que é possível separar as linhas assintóticas em dois campos de linhas. Veja figura 2.6.

## 2.2.4 Linhas de curvatura $\nu$ -principais

A projeção da pré-imagem,  $\alpha^*(\mathbb{R}^4)$ , do fibrado tangente de  $\mathbb{R}^4$  sobre o fibrado tangente de uma imersão  $\alpha$  será denotado por  $\Pi_{\alpha, T}$ . Este fibrado está munido com a métrica padrão induzida pela métrica Euclidiana em  $\mathbb{R}^4$ .

Denotemos por  $\nu = \nu_\alpha$  o campo de vetores normal unitário de  $\alpha$ . Os autovalores  $k_1 = k_{1,\alpha} \leq k_{2,\alpha} = k_2$  do operador Weingarten  $W_\alpha = -\Pi_{\alpha, T} D\nu_\alpha$  de  $TM$  são chamados as *curvaturas  $\nu$ -principais* de  $\alpha$ . Os pontos onde  $k = k_1 = k_2$  são chamados *pontos  $\nu$ -umbílicos* de  $\alpha$  e

definem o conjunto  $S_u = S_{u,\alpha}$ . Dizemos que  $\alpha$  é  $\nu$ -umbílica se todos os pontos da imersão são  $\nu$ -umbílicos. Fora de  $S_u$  estão definidos os campos de linhas  $\nu$ -principais minimal,  $L_{m,\alpha}$ , e o maximal,  $L_{M,\alpha}$ , que são os autoespaços de  $W_\alpha$  associados respectivamente a  $k_1$  e a  $k_2$ . Genericamente, o índice de um ponto  $\nu$ -umbílico isolado é  $\pm 1/2$ . As curvas integrais dos campos de linhas  $\nu$ -principais são as *linhas de curvatura  $\nu$ -principais*.

Em uma carta local  $(u, v)$ , as linhas de curvatura  $\nu$ -principais são caracterizadas como as soluções da equação diferencial quadrática

$$(Fg_\nu - f_\nu G)dv^2 + (Eg_\nu - e_\nu G)dudv + (Ef_\nu - Fe_\nu)du^2 = 0, \quad (2.7)$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental e  $e_\nu = \langle \alpha_{uu}, \nu \rangle$ ,  $f_\nu = \langle \alpha_{uv}, \nu \rangle$  e  $g_\nu = \langle \alpha_{vv}, \nu \rangle$  são os coeficientes da segunda forma fundamental relativa a  $\nu$ , denotada por  $II_\nu = II_{\nu,\alpha}$ . A Equação 2.7 pode ser escrita como

$$Jac(II_\nu, I) = 0. \quad (2.8)$$

# Capítulo 3

## Alguns resultados sobre direções assintóticas

Como vimos no capítulo anterior, linhas assintóticas não estão necessariamente globalmente definidas em superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$  e, em geral, não são ortogonais. Neste capítulo discutiremos condições necessárias e suficientes para que uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^4$  tenha linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas. Além disso, discutiremos as singularidades das linhas assintóticas e daremos alguns exemplos. As referências básicas para este capítulo são os artigos de Mello [M2] e de Romero–Fuster e Sanchez–Bringas [RS].

### 3.1 Singularidades

Em [L], Little descreve a resultante  $\Delta$  em termos de configuração. Segundo [L],  $\Delta$  é a resultante de dois polinômios  $ax^2 + 2bxy + cz^2$  e  $ex^2 + 2fxy + gy^2$ , sendo  $(x, y)$  coordenadas homogêneas de um ponto. Assim, se a elipse passa através da origem,  $\eta(\theta) = 0$ , para algum  $\theta$ , então os dois polinômios têm uma raiz comum, a saber,  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , para  $\Delta = 0$ . Neste caso, a raiz comum é real. Como raízes de uma equação quadrática são ambas reais ou ambas imaginárias, elas têm uma raiz real comum se, e somente se, todas as quatro raízes são reais. A condição para isto é que  $b^2 - ac \geq 0$  e  $f^2 - eg \geq 0$ . Assim,  $K \leq 0$  para a elipse passar pela origem. A razão acima pode ser revertida para mostrar que isto é suficiente.

A condição  $\Delta = 0$  significa que as equações quadráticas têm uma raiz comum e a condição  $K < 0$  significa que pelo menos uma raiz é imaginária. Como raízes imaginárias ocorrem em pares conjugados, uma equação deve ser múltipla da outra e então a elipse é um segmento de reta radial, isto é, o ponto é um ponto de inflexão. Como também, em um ponto de inflexão,  $\Delta = 0$ , vemos que  $\Delta = 0$  em um ponto se, e somente se, o ponto é um ponto de inflexão ou

um ponto onde  $\eta(\theta) = 0$  para algum  $\theta$ .

Ainda em [L], Little mostra que as singularidades dos campos de direções assintóticas (que ele denomina de direções conjugas), são os pontos de inflexão e que os índices destes pontos é  $\pm 1/2$ .

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^4$ . Um ponto  $p$  de  $M$  é dito ser hiperbólico, parabólico ou elíptico se  $\alpha(p)$  está fora, sobre ou na região delimitada pela elipse de curvatura. Quando a elipse de curvatura em  $p$  se degenera em um segmento de reta, o ponto  $p$  é dito ser um semiumbólico central de  $\alpha$ . Um ponto de inflexão é um semiumbólico central parabólico (isto é, um ponto tal que a correspondente elipse de curvatura é um segmento e está na reta determinada por este segmento). Pontos de inflexão podem ser imaginários, reais ou planares, conforme eles estejam fora, dentro ou em um dos extremos do segmento [MRR].

Uma direção  $\theta$  em  $T_p M$  é chamada assintótica se  $\eta(\theta)$  é paralelo a  $\partial\eta(\theta)/\partial\theta$ . Existem exatamente 2, 0 ou 1 direções assintóticas, respectivamente, em um ponto hiperbólico, elíptico ou parabólico de  $\alpha$ , e somente excessões nos pontos de inflexão, para os quais todas as direções são assintóticas [MRR].

## 3.2 Alguns Exemplos

### 3.2.1 Imersões contidas em hiperplanos

Suponhamos que a imersão  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  esteja contida em um hiperplano, que denotaremos por  $\mathbb{R}^3$ . Neste caso, podemos escolher  $N_1(p)$  tangente a este hiperplano e  $N_2(p)$  normal unitário ao hiperplano, para todo  $p \in M^2$ . Deste modo,  $e_2 = f_2 = g_2 = 0$ , em todo ponto.

É imediato que

$$K_N \equiv 0$$

e

$$\Delta \equiv 0.$$

Assim, todo ponto da imersão é um ponto de inflexão, de onde a elipse de curvatura é um segmento de reta radial em todo ponto.

### 3.2.2 A projeção estereográfica

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow S^3$  uma imersão de uma superfície regular e orientada em  $S^3$ . Consideremos a inclusão natural  $i : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  e a composição  $\alpha = i \circ \alpha$  ainda denotada por  $\alpha$ . Assumamos que

$(u, v)$  seja uma carta positiva de  $M$  e que  $\{\alpha_u, \alpha_v, N_1, N_2\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , sendo  $\{N_1, N_2\}$  um referencial ortonormal de campos de vetores para  $\alpha$ , onde  $N_1(p) \in T_p S^3$  e  $N_2(p)$  é a normal interior a  $S^3$ , para todo  $p \in M$ . Assim,  $N_2 \equiv -\alpha$ .

Em tal carta  $(u, v)$  temos que  $e_2 = E$ ,  $f_2 = F$  e  $g_2 = G$ , onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$ . Segue que  $II_2 = I$ . Então,

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_1}{I} N_1 + \frac{II_2}{I} N_2 = \frac{II_1}{I} N_1 + N_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta sobre  $N_2 = 1$ , para todo  $p \in M$ . Estes pontos são denominados semiumbólicos. Estes resultados foram obtidos em [RS]. Temos

$$H_2 = \frac{Eg_2 - 2Ff_2 + Ge_2}{2(EG - F^2)} = 1,$$

para todo  $p \in M$ . Segue que  $H_p \neq 0$ , para todo  $p \in M$ .

Como um exemplo, consideremos a aplicação (inversa da) projeção estereográfica  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$ , dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{1+w}(x, y, z, w),$$

onde

$$w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Temos que  $\phi$  é um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  em  $S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\}$  e é uma aplicação conforme.

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície regular e orientada  $M^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . Suponhamos que  $(u, v)$  seja uma carta positiva de  $M^2$  e que

$$\{\alpha_u, \alpha_v, N\}$$

seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^3$ , onde

$$N = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|}$$

é um campo normal na orientação de  $\alpha$ . Denotemos por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a projeção estereográfica de  $M^2$  em  $S^3$  e por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a imersão de  $M^2$  em  $\mathbb{R}^4$ , onde

$$\{\bar{\alpha}(u), \bar{\alpha}(v), N_1, N_2\}$$

é um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , sendo

$$N_1 = \frac{d\phi(N)}{\|d\phi(N)\|}$$

e  $N_2$  a normal unitária interior a  $S^3$ , ou seja,  $N_2 \equiv -\bar{\alpha}$ .

Temos que

$$\bar{\alpha}(u, v) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \alpha^2 - 1)}(u, v, \alpha(u, v), \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + (\alpha(u, v))^2 - 1)).$$

Multiplicando numerador e denominador por 2, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u, v) &= \\ &= \frac{1}{2 + u^2 + v^2 + \alpha^2 - 1}(2u, 2v, 2\alpha, u^2 + v^2 + \langle \alpha, \alpha \rangle - 1) = \\ &= \frac{1}{1 + \langle \alpha, \alpha \rangle}(2u, 2v, 2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1). \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{\alpha}$  apresenta a seguinte escrita

$$\bar{\alpha}(u, v) = \frac{1}{1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle}(2\alpha(u, v), \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle - 1). \quad (3.1)$$

Vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  para fazermos um estudo comparativo das duas imersões.

Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$  são

$$E(u, v) = \langle \alpha_u(u, v), \alpha_u(u, v) \rangle, \quad F(u, v) = \langle \alpha_u(u, v), \alpha_v(u, v) \rangle$$

e

$$G(u, v) = \langle \alpha_v(u, v), \alpha_v(u, v) \rangle.$$

Derivando (3.1) com relação a  $u$  e com relação a  $v$ , obtemos

$$\bar{\alpha}_u(u, v) = \frac{1}{1 + \langle \alpha, \alpha \rangle}(2\alpha_u, 2\langle \alpha_u, \alpha \rangle - \frac{2\langle \alpha_u, \alpha \rangle}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^2}(2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1)) \quad (3.2)$$

e

$$\bar{\alpha}_v(u, v) = \frac{1}{1 + \langle \alpha, \alpha \rangle}(2\alpha_v, 2\langle \alpha_v, \alpha \rangle - \frac{2\langle \alpha_v, \alpha \rangle}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^2}(2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1)) \quad (3.3)$$

Podemos então calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\bar{\alpha}$ , obtendo

$$\bar{E}(u, v) = \langle \bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_u \rangle = \frac{4}{(1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle)^2} \langle \alpha_u(u, v), \alpha_u(u, v) \rangle, \quad (3.4)$$

$$\bar{F}(u, v) = \langle \bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v \rangle = \frac{4}{(1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle)^2} \langle \alpha_u(u, v), \alpha_v(u, v) \rangle, \quad (3.5)$$

e

$$\bar{G}(u, v) = \langle \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}_v \rangle = \frac{4}{(1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle)^2} \langle \alpha_v(u, v), \alpha_v(u, v) \rangle, \quad (3.6)$$

Como  $1 + w = 1 + (x^2 + y^2 + z^2 - 1)/2 = 1 + (\langle \alpha, \alpha \rangle - 1)/2 = (1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)/2$ , temos que  $(1 + w)^2 = (1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^2/4$  e então

$$\frac{4}{(1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle)^2} = \frac{1}{(1 + w)^2}.$$

Logo, podemos escrever (3.4), (3.5) e (3.6) como

$$\bar{E}(u, v) = \frac{1}{(1 + w)^2} E(u, v), \quad (3.7)$$

$$\bar{F}(u, v) = \frac{1}{(1 + w)^2} F(u, v), \quad (3.8)$$

e

$$\bar{G}(u, v) = \frac{1}{(1 + w)^2} G(u, v). \quad (3.9)$$

De posse dos coeficientes da primeira forma fundamental, podemos calcular a norma do vetor normal  $d\phi(N)$ . Assim

$$\|d\phi(N)\| = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1 + w)^2} (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1 + w)^2} \|N\|. \quad (3.10)$$

Para o cálculo dos coeficientes da segunda forma fundamental de  $\bar{\alpha}$ , faremos a seguinte convenção

$$\bar{e}_1(u, v) = \langle \bar{\alpha}_{uu}, N_1 \rangle = \left\langle \bar{\alpha}_{uu}, \frac{d\phi(N)}{\|d\phi(N)\|} \right\rangle = \frac{(1 + w)^2}{\|N\|} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{uu}] \quad (3.11)$$

e, de modo análogo,

$$\bar{f}_1(u, v) = \langle \bar{\alpha}_{uv}, N_1 \rangle = \frac{(1 + w)^2}{\|N\|} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{uv}] \quad (3.12)$$

e

$$\bar{g}_1(u, v) = \langle \bar{\alpha}_{vv}, N_1 \rangle = \frac{(1 + w)^2}{\|N\|} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{vv}]. \quad (3.13)$$

Para os cálculos dos determinantes acima, definamos

$$A = \frac{1}{1 + \langle \alpha, \alpha \rangle}, \quad (3.14)$$

$$B = \frac{2\langle \alpha_u, \alpha \rangle}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^2}, \quad (3.15)$$

$$C = \frac{2\langle \alpha_v, \alpha \rangle}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^2}, \quad (3.16)$$

$$D_1 = \frac{2(\langle \alpha_{uu}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle)(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle) - 8\langle \alpha_u, \alpha \rangle^2}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^3}, \quad (3.17)$$

$$D_2 = \frac{2(\langle \alpha_{uv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle)(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle) - 8\langle \alpha_u, \alpha \rangle \langle \alpha_v, \alpha \rangle}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^3}, \quad (3.18)$$

$$D_3 = \frac{2(\langle \alpha_{vv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle)(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle) - 8\langle \alpha_v, \alpha \rangle^2}{(1 + \langle \alpha, \alpha \rangle)^3}. \quad (3.19)$$

Derivando as expressões (3.2) e (3.3) com relação a  $u$  e a  $v$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{uu} &= 2A(\alpha_{uu}, \langle \alpha_{uu}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle) - \\ &\quad - 4B(\alpha_u, \langle \alpha_u, \alpha \rangle) - D_1(2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{uv} &= 2A(\alpha_{uv}, \langle \alpha_{uv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle) - \\ &\quad - 2C(\alpha_u, \langle \alpha_u, \alpha \rangle) - 2B_1(\alpha_v, \langle \alpha_v, \alpha \rangle) - D_2(2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1), \end{aligned} \quad (3.21)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{vv} &= 2A(\alpha_{vv}, \langle \alpha_{vv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle) - \\ &\quad - 4C(\alpha_v, \langle \alpha_v, \alpha \rangle) - D_3(2\alpha, \langle \alpha, \alpha \rangle - 1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Utilizando as expressões (3.14) a (3.22) e propriedades do determinante, encontramos

$$\begin{aligned} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{uu}] &= 8A^4\{2(\langle \alpha_{uu}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle) \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_v] + \\ &\quad + 2\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{uu}] - 2\langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{uu}] - \\ &\quad - (\langle \alpha, \alpha \rangle - 1) \det[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{uu}]\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{uv}] &= 8A^4\{2(\langle \alpha_{uv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle) \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_v] + \\ &\quad + 2\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{uv}] - 2\langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{uv}] - \\ &\quad - (\langle \alpha, \alpha \rangle - 1) \det[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{uv}]\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$\begin{aligned} \det[\bar{\alpha}_u, \bar{\alpha}_v, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{vv}] &= 8A^4\{2(\langle \alpha_{vv}, \alpha \rangle + \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle) \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_v] + \\ &\quad + 2\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{vv}] - 2\langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{vv}] - \\ &\quad - (\langle \alpha, \alpha \rangle - 1) \det[\alpha_u, \alpha_v, \alpha_{vv}]\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Consideremos as seguintes funções

$$h_1(u, v) = \frac{\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{uu}] - \langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{uu}]}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.26)$$

$$h_2(u, v) = \frac{\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{uv}] - \langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{uv}]}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.27)$$

$$h_3(u, v) = \frac{\langle \alpha_u, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_v, \alpha_{vv}] - \langle \alpha_v, \alpha \rangle \det[\alpha, \alpha_u, \alpha_{vv}]}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.28)$$

bem como a *função suporte* de  $\alpha$ , dada por

$$t(u, v) = \langle \alpha(u, v), N(u, v) \rangle. \quad (3.29)$$

De (3.11) e de (3.23), utilizando (3.26) e (3.29), podemos escrever

$$\bar{e}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(\langle \alpha_{uu}, \alpha \rangle + E)t + h_1 - we(u, v)]. \quad (3.30)$$

De (3.12) e de (3.24), utilizando (3.27) e (3.29), podemos escrever

$$\bar{f}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(\langle \alpha_{uv}, \alpha \rangle + F)t + h_2 - wf(u, v)]. \quad (3.31)$$

De (3.13) e de (3.25), utilizando (3.28) e (3.29), podemos escrever

$$\bar{g}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(\langle \alpha_{vv}, \alpha \rangle + G)t + h_3 - wg(u, v)]. \quad (3.32)$$

Agora, cálculos diretos permite-nos escrever

$$\langle \alpha_{uu}(u, v), \alpha(u, v) \rangle t(u, v) + h_1(u, v) = \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle e(u, v) = (2w + 1)e(u, v),$$

$$\langle \alpha_{uv}(u, v), \alpha(u, v) \rangle t(u, v) + h_2(u, v) = \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle f(u, v) = (2w + 1)f(u, v),$$

e

$$\langle \alpha_{vv}(u, v), \alpha(u, v) \rangle t(u, v) + h_3(u, v) = \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle g(u, v) = (2w + 1)g(u, v),$$

os quais substituídos nas expressões (3.30), (3.31) e (3.32), respectivamente, fornecem-nos

$$\bar{e}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(1 + w)e(u, v) + E(u, v)t(u, v)], \quad (3.33)$$

$$\bar{f}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(1 + w)f(u, v) + F(u, v)t(u, v)], \quad (3.34)$$

e

$$\bar{g}_1(u, v) = (1 + w)^{-2}[(1 + w)g(u, v) + G(u, v)t(u, v)], \quad (3.35)$$

Falta-nos calcular o segundo conjunto de coeficientes da segunda forma fundamental. Temos

$$\bar{e}_2(u, v) = \langle \bar{\alpha}_{uu}, N_2(u, v) \rangle = -\langle \bar{\alpha}_{uu}(u, v), \bar{\alpha}(u, v) \rangle, \quad (3.36)$$

$$\overline{f_2}(u, v) = \langle \overline{\alpha_{uv}}, N_2(u, v) \rangle = -\langle \overline{\alpha_{uv}}(u, v), \overline{\alpha}(u, v) \rangle, \quad (3.37)$$

e

$$\overline{g_2}(u, v) = \langle \overline{\alpha_{vv}}, N_2(u, v) \rangle = -\langle \overline{\alpha_{vv}}(u, v), \overline{\alpha}(u, v) \rangle, \quad (3.38)$$

Utilizando as expressões (3.1), (3.20) e (3.36), podemos calcular

$$\overline{e_2}(u, v) = (1 + w)^{-2} E(u, v) = \overline{E}(u, v). \quad (3.39)$$

Utilizando as expressões (3.11), (3.21) e (3.37), podemos calcular

$$\overline{f_2}(u, v) = (1 + w)^{-2} F(u, v) = \overline{F}(u, v). \quad (3.40)$$

Utilizando as expressões (3.1), (3.22) e (3.38), podemos calcular

$$\overline{g_2}(u, v) = (1 + w)^{-2} G(u, v) = \overline{G}(u, v). \quad (3.41)$$

Podemos agora calcular o vetor curvatura média  $\overline{H}$ , o qual tem suas componentes dadas por

$$\begin{aligned} \overline{H}_1(u, v) &= \frac{\overline{e_1} \overline{G} - 2 \overline{f_1} \overline{F} + \overline{g_1} \overline{E}}{2(\overline{EG} - \overline{F}^2)} = \\ &= (1 + w) \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} + t \frac{2(EG - F^2)}{2(EG - F^2)} = \\ &= (1 + w)H(u, v) + t(u, v) \end{aligned} \quad (3.42)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{H}_2(u, v) &= \frac{\overline{e_2} \overline{G} - 2 \overline{f_2} \overline{F} + \overline{g_2} \overline{E}}{2(\overline{EG} - \overline{F}^2)} = \frac{\overline{EG} - 2 \overline{FF} + \overline{GE}}{2(\overline{EG} - \overline{F}^2)} = \\ &= \frac{2(\overline{EG} - \overline{F}^2)}{2(\overline{EG} - \overline{F}^2)} = 1, \forall (u, v). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Como  $\overline{H} = \overline{H}_1 N_1 + \overline{H}_2 N_2$ , vem que, por (3.43),  $\overline{H}_1 N_1 + N_2$  e a elipse de curvatura  $\varepsilon_{\overline{\alpha}}(p)$  está degenerada em um segmento de reta sobre a reta suporte  $N_2 = 1$ , para todo  $p \in M$ . Veja figura 3.1. E ainda, como  $\overline{H}(p) \neq 0, \forall p \in M$ , as possíveis  $\overline{H}$ -singularidades só poderão ocorrer em pontos de inflexão, onde a elipse de curvatura se torna um segmento de reta radial, ou seja, a elipse de curvatura se torna um ponto, neste caso.

Para simplificar os cálculos, tomemos uma carta  $(u, v)$  na qual a primeira forma fundamental de  $\alpha$  está diagonalizada, com  $E = G = 1$  e  $F = 0$ . Nesta carta, os coeficientes da primeira e

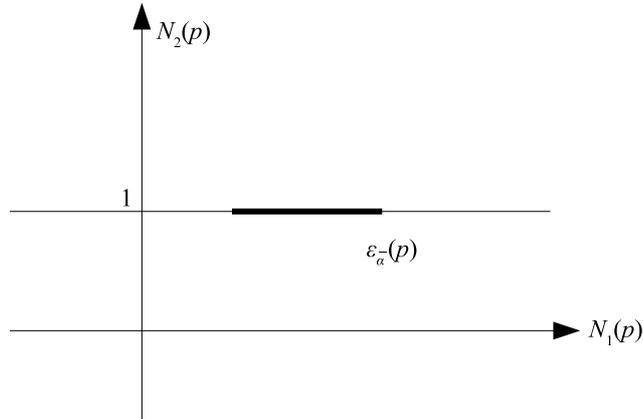


Figura 3.1: A elipse de curvatura de  $\varepsilon_{\bar{\alpha}}(p)$ .

da segunda formas fundamentais de  $\bar{\alpha}$  são

$$\begin{aligned}
 \bar{E}(u, v) &= \bar{G}(u, v) = \bar{e}_2(u, v) = \bar{g}_2(u, v) = (1 + w)^{-2}, \\
 \bar{F} &= \bar{f}_2(u, v) = 0, \\
 \bar{e}_1(u, v) &= (1 + w)^{-2}[(1 + w)e(u, v) + t(u, v)], \\
 \bar{f}_1(u, v) &= (1 + w)^{-1}f(u, v), \\
 \bar{g}_1(u, v) &= (1 + w)^{-2}[(1 + w)g(u, v) + t(u, v)],
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde os símbolos sem barra se referem à imersão  $\alpha$ . Calculando a curvatura normal de  $\bar{\alpha}$ , temos

$$K_N = \frac{E(f_1g_2 - f_2g_1) - F(e_1g_2 - e_2g_1) + G(e_1f_2 - e_2f_1)}{2(EG - F^2)} = 0, \quad \forall p \in M,$$

como era esperado, uma vez que ela está associada à área da elipse de curvatura, que neste caso é nula em todos os pontos. A resultante  $\Delta$  é dada por

$$\Delta(u, v) = -(1 + w)^{-6} \left[ (f(u, v))^2 + \left( \frac{e(u, v) - g(u, v)}{2} \right)^2 \right]. \tag{3.45}$$

Deste modo, a resultante  $\Delta$  anula-se nos pontos  $(u, v)$  onde  $f(u, v) = 0$  e  $e(u, v) - g(u, v) = 0$ , isto é, nos pontos umbílicos de  $\alpha$ . Temos demonstrado o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.1** *Com as construções acima, um ponto  $(u, v)$  é uma  $\bar{H}$ -singularidade de  $\bar{\alpha}$  se, e somente se, for um ponto umbílico de  $\alpha$ .*

No artigo [GS7], Garcia e Sotomayor provam a seguinte proposição: Seja  $c : [0, l] \rightarrow M$  uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva regular de pontos umbílicos, tal que  $\{T, N \wedge T, N\}$  é um referencial positivo de  $\mathbb{R}^3$ . Então a expressão

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[ \frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots \right] N(u),$$

onde  $k(u) = k_n(c(u), T) = k_n(c(u), N \wedge T)$  é a curvatura normal de  $M$  nas direções  $T$  e  $N \wedge T$ ,  $k_g$  é a curvatura geodésica e  $\tau_g$  é a torção geodésica da curva  $c$ , define uma carta local  $C^\infty$  em uma pequena vizinhança tubular de  $c$ . Além disso,  $\tau_g(u) = 0$ .

Além disso, determinam os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais na carta  $\alpha$ , encontrando

$$E(u, v) = 1 - 2k_g v + (k_g^2 - k^2)v^2 + \frac{1}{6}(6k_g k^2 - 2ka(u)v^3 + O(v^4)),$$

$$F(u, v) = \frac{1}{2}k'kv^3 + O(v^4),$$

$$G(u, v) = 1 + k^2v^2 + ka(u)v^3 + O(v^4),$$

$$\begin{aligned} e(u, v) = k - 2k_g kv + \frac{1}{2}(2kk_g^2 - k_g a(u) - 2k^3 + k'')v^2 + \\ + \frac{1}{6}[a'' + k_g(9k^3 - b(u)) + (3k_g^2 - k^2)a(u) + \\ + 3k'(K'_g + k^2)]v^3 + O(v^4), \end{aligned}$$

$$f(u, v) = k'v + \frac{1}{2}(k_g k' + a')v^2 + \frac{1}{6}(k_g a' + 3k'k_g^2 + b')v^3 + O(v^4),$$

$$g(u, v) = k + a(u)v + \frac{1}{2}(b(u) - k^3)v^2 - \frac{1}{2}k^2(a(u) - k')v^3 + O(v^4).$$

Também encontram as curvaturas média e Gaussiana na carta  $\alpha$ , dadas por

$$H = k + \frac{1}{2}a(u)v + \frac{1}{4}(b(u) + k'' - 3k^3 - k_g a(u)v^2 + O(v^3)),$$

$$K = k^2 + ka(u)v + \frac{1}{2}(b(u) - k^3)v^2 - \frac{1}{2}(-k_g ka(u) - 3k^4 + kk'' + kb(u) - 2k'')v^2 + O(v^3).$$

A equação diferencial das linhas de curvatura na carta  $\alpha$  é dada por

$$(Fg - Gf)dv^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)du^2 = Ldv^2 + Mdvdu + Ndu^2 = 0,$$

onde

$$L = - \left[ k'v + \frac{1}{2}(k_g k' + a')v^2 + \frac{1}{6}(k_g a' + 3k'k_g^2 + b' + 3k^2 k')v^3 + O(v^4) \right],$$

$$\begin{aligned} M = a(u)v + \frac{1}{2}[b(u) - 3k^3 - k'' - 3k_g a(u)]v^2 + \\ + \frac{1}{6}[15k^3 k_g - 3k'_g k' + (3k_g^2 - 16k^2)a(u) - a'' - 5k_g b(u)]v^3 + O(v^4), \end{aligned}$$

$$N = k'v + \frac{1}{2}(a' - 3k_g k')v^2 + \frac{1}{6}(3k'k_g^2 - 9k^2 k' - 5k_g a' + b')v^3 + O(v^4).$$

Tendo obtido essas expressões, provaram a seguinte proposição: Suponha que  $\nabla H(u, 0) = (k', a(u)/2)$  não seja zero em um ponto  $u_0$ . Então as folheações principais próximas ao ponto  $c(u_0)$  da curva são como a seguir:

- i) Se  $k'(u_0) \neq 0$ , então ambas as folheações principais são transversais à curva de pontos umbílicos. Veja figura 3.2, esquerda.
- ii) Se  $k'(u_0) = 0$ ,  $k''(u_0) \neq 0$  e  $a(u_0) \neq 0$ , então uma folheação principal tem contato quadrático com a curva  $c$  no ponto  $c(u_0)$ . Veja figura 3.2, centro e direita.

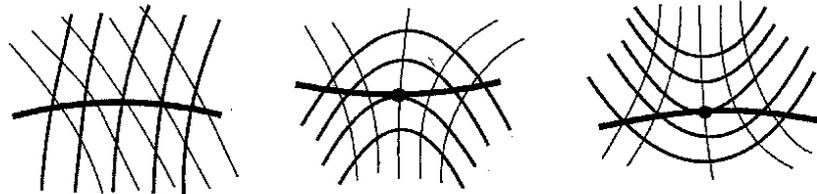


Figura 3.2: Linhas de curvatura principal próximas a uma curva de pontos umbílicos: caso transversal, esquerda, e caso tangencial, centro e direita.

Em [M1], Mello mostrou que as linhas de curvatura principal de  $\alpha$  são aplicadas, via (inversa da) projeção estereográfica, nas linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ , as quais neste caso são ortogonais e que os pontos umbílicos (singularidades das linhas de curvatura principais de  $\alpha$ ) são aplicados nos pontos de inflexão (singularidades das linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ ). Veja também Little [L].

Em [RS], Romero–Fuster e Sanchez–Bringas salientaram que a projeção estereográfica proporciona uma ponte entre o estudo das propriedades das linhas assintóticas e pontos de inflexão de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e as linhas de curvatura principal e pontos umbílicos das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , pois quaisquer resultados a respeito dos primeiros representam uma generalização de problemas similares relativos aos últimos.

Assim, o comportamento das linhas de curvatura principal próximas à curva de pontos umbílicos da carta  $\alpha$  apresentada por Garcia e Sotomayor em [GS7] é análogo ao comportamento das linhas assintóticas próximas à curva de pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$  obtida pela aplicação da (inversa da) projeção estereográfica de  $\alpha$  em  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Veja figura 3.2.

### 3.2.3 Superfícies produto de duas curvas

Os dois exemplos anteriores tratam de imersões de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  com  $K_N \equiv 0$ , ou seja, com a elipse de curvatura degenerada em um segmento de reta. Nestes exemplos pode ser feita uma redução da codimensão da imersão, visto que a imagem da superfície pela imersão está contida em hipersferas ou hiperplanos.

Uma pergunta natural a ser feita é a seguinte: a condição  $K_N \equiv 0$  é suficiente para a garantia da redução da codimensão da imersão? A resposta a esta questão é não, conforme o exemplo a seguir.

Imersões com curvatura normal  $K_N \equiv 0$  que não estejam em hiperesferas nem em hiperplanos podem ser obtidas pela seguinte construção. Escolha

$$\beta(u) = (\beta_1(u), \beta_2(u))$$

e

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v))$$

duas curvas simples, regulares e fechadas no plano, parametrizadas pelo comprimento de arco. Consideremos a imersão

$$\alpha(u, v) = (\beta \times \gamma)(u, v) = (\beta_1(u), \beta_2(u), \gamma_1(v), \gamma_2(v)).$$

Temos que

$$\alpha_u(u, v) = (\beta'_1(u), \beta'_2(u), 0, 0),$$

$$\alpha_v(u, v) = (0, 0, \gamma'_1(v), \gamma'_2(v)),$$

$$\alpha_{uu} = (\beta''_1(u), \beta''_2(u), 0, 0),$$

$$\alpha_{uv} = (0, 0, 0, 0),$$

e

$$\alpha_{vv} = (0, 0, \gamma''_1(v), \gamma''_2(v)).$$

Escolhamos  $N_1$  e  $N_2$  de modo que  $\{\alpha_u, \alpha_v, N_1/\|N_1\|, N_2/\|N_2\|\}$  seja um referencial ortonormal positivo de  $\mathbb{R}^4$ . Primeiro verifiquemos que  $N_1 = (-\beta'_2(u), \beta'_1(u), \gamma'_2(v), -\gamma'_1(v))$  é ortogonal a  $\alpha_u$  e a  $\alpha_v$ . De fato,

$$\langle \alpha_u, N_1 \rangle = -\beta'_1\beta'_2 + \beta'_1\beta'_2 = 0,$$

$$\langle \alpha_v, N_1 \rangle = -\gamma'_1\gamma'_2 + \gamma'_1\gamma'_2 = 0.$$

Devemos escolher  $N_2$  de modo que  $N_2$  seja ortogonal a  $\alpha_u$ ,  $\alpha_v$  e a  $N_1$ . Assim, devemos ter

$$\langle \alpha_u, N_2 \rangle = \beta'_1 N_2^1 + \beta'_2 N_2^2 = 0, \quad (3.46)$$

$$\langle \alpha_v, N_2 \rangle = \gamma'_1 N_2^3 + \gamma'_2 N_2^4 = 0, \quad (3.47)$$

$$\langle N_1, N_2 \rangle = -\beta'_2 N_2^1 + \beta'_1 N_2^2 + \gamma'_2 N_2^3 - \gamma'_1 N_2^4 = 0. \quad (3.48)$$

Da Equação (3.46) temos que

$$N_2^2 = -\frac{\beta'_1}{\beta'_2} N_2^1. \quad (3.49)$$

Da Equação (3.47) temos que

$$N_2^3 = -\frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} N_2^4. \quad (3.50)$$

Substituindo as Equações (3.49) e (3.50) em (3.48), obtemos

$$-\beta'_2 N_2 + \beta'_1 \left( -\frac{\beta'_1}{\beta'_2} N_2^1 \right) + \gamma'_2 \left( -\frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} N_2^4 \right) - \gamma'_1 N_2^4 = 0$$

a qual é equivalente a

$$\left( \frac{-(\beta'_2)^2 - (\beta'_1)^2}{\beta'_2} \right) N_2^1 + \left( \frac{-(\gamma'_1)^2 - (\gamma'_2)^2}{\gamma'_1} \right) N_2^4 = 0$$

que por sua vez é equivalente a

$$N_2^1 = -\frac{\frac{(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2}{\gamma'_1}}{\frac{(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2}{\beta'_2}} N_2^4 \quad (3.51)$$

Tomando  $N_2^4 = 1$ , temos

$$\begin{aligned} N_2^1 &= -\frac{\beta'_2((\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2)}{\gamma'_1((\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2)} = -\frac{\beta'_2}{\gamma'_1}, \\ N_2^2 &= \frac{\beta'_1((\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2)}{\gamma'_1((\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2)} = \frac{\beta'_1}{\gamma'_1}, \\ N_2^3 &= -\frac{\gamma'_2}{\gamma'_1}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando  $N_2^1$ ,  $N_2^2$ ,  $N_2^3$  e  $N_2^4$  por  $\gamma'_1$ , obtemos

$$N_2 = (-\beta'_2, \beta'_1, -\gamma'_2, \gamma'_1).$$

Podemos então, calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $\alpha$ . Assim,

$$E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle = (\beta'_1(u))^2 + (\beta'_2(u))^2 = 1, \quad (3.52)$$

$$F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle = 0, \quad (3.53)$$

$$G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle = (\gamma'_1(v))^2 + (\gamma'_2(v))^2 = 1. \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left\langle \alpha_{uu}, \frac{N_1}{\|N_1\|} \right\rangle = \langle (\beta_1'', \beta_2'', 0, 0), (-\beta_2', \beta_1', \gamma_2', -\gamma_1') \rangle \frac{1}{\|N_1\|} = \\
&= (\beta_1''\beta_2' + \beta_1'\beta_2'') \frac{1}{\|N_1\|} = \frac{k_\beta}{\|N_1\|},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$f_1 = \left\langle \alpha_{uv}, \frac{N_1}{\|N_1\|} \right\rangle = 0, \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left\langle \alpha_{vv}, \frac{N_1}{\|N_1\|} \right\rangle = \langle (0, 0, \gamma_1'', \gamma_2''), (-\beta_2', \beta_1', \gamma_2', -\gamma_1') \rangle \frac{1}{\|N_1\|} = \\
&= (\gamma_1''\gamma_2' - \gamma_1'\gamma_2'') \frac{1}{\|N_1\|} = -\frac{k_\gamma}{\|N_1\|},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \left\langle \alpha_{uu}, \frac{N_2}{\|N_2\|} \right\rangle = \langle (\beta_1'', \beta_2'', 0, 0), (-\beta_2', \beta_1', \gamma_2', \gamma_1') \rangle \frac{1}{\|N_2\|} = \\
&= \frac{-\beta_1''\beta_2' + \beta_1'\beta_2''}{\|N_2\|} = \frac{k_\beta}{\|N_2\|},
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$f_2 = \left\langle \alpha_{uv}, \frac{N_2}{\|N_2\|} \right\rangle = \langle (0, 0, 0, 0), (-\beta_2', \beta_1', \gamma_2', \gamma_1') \rangle = 0, \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= \left\langle \alpha_{vv}, \frac{N_2}{\|N_2\|} \right\rangle = \left\langle (0, 0, \gamma_1'', \gamma_2''), (-\beta_2', \beta_1', \gamma_2', \gamma_1') \frac{1}{\|N_2\|} \right\rangle = \\
&= \frac{\gamma_1''\gamma_2' + \gamma_1'\gamma_2''}{\|N_2\|} = \frac{k_\gamma}{\|N_2\|}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Assim,  $\alpha(u, v)$  é uma imersão com curvatura normal nula em todo ponto, uma vez que  $F \equiv 0$ ,  $f_1 \equiv 0$  e  $f_2 \equiv 0$ .

### 3.3 Ortogonalidade de linhas assintóticas

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada em  $\mathbb{R}^4$ . A equação diferencial quártica (2.1) pode ser escrita como o produto de duas equações diferenciais quadráticas se a imagem da superfície  $M$  por  $\alpha$  está contida em  $\mathbb{R}^3$ .

Temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.1** [M3] *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow S^3(r)$  uma imersão de uma superfície regular e orientada em uma esfera de dimensão 3 e de raio  $r > 0$ . Consideremos a inclusão natural*

$i : S^3(r) \rightarrow \mathbb{R}^4$  e a composição  $i \circ \alpha$  ainda denotada por  $\alpha$ . Então a equação diferencial quártica das linhas de curvatura axial (2.1) pode ser escrita como

$$\text{Jac}\{\text{Jac}(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}), I\} \cdot \text{Jac}(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}) = 0, \quad (3.61)$$

onde  $\text{Jac}\{\text{Jac}(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}), I\} = 0$  é a equação diferencial quártica das linhas de curvatura direcional média (2.3) e  $\text{Jac}(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}) = 0$  é a equação diferencial quártica das linhas assintóticas (2.5).

**Demonstração.** Tomemos uma carta positiva  $(u, v)$  de  $M^2$  de tal modo que  $\{\alpha_u, \alpha_v, \nu_1, \nu_2\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\{\nu_1, \nu_2\}$  sendo um referencial de campos de vetores ortonormais a  $\alpha$ , com  $\nu_1(p) \in T_p S^3(r)$  e  $\nu_2(p)$  sendo a normal interior de  $S^3(r)$ , para todo  $p \in M^2$ . Deste modo

$$\nu_2 \equiv -\frac{1}{r}\alpha.$$

Em tal carta  $(u, v)$  vale  $e_2 = 1/rE$ ,  $f_2 = 1/rF$  e  $g_2 = 1/rG$ , onde  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$ . Portanto, temos

$$II_2 = \frac{1}{r}I.$$

Agora

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_1}{I}\nu_1 + \frac{II_2}{I}\nu_2 = \frac{II_1}{I}\nu_1 + \frac{1}{r}\nu_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura está degenerada em um segmento de reta sobre a reta  $\nu_2 = 1/r$ , para todo  $p \in M^2$ . A partir dos coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais obtidos em (3.44), escrevemos o produto  $\text{Jac}\{\text{Jac}(II_1, I), I\} \cdot \text{Jac}(II_1, I)$  e comparamos o resultado com a equação diferencial das linhas de curvatura axial (2.2).

Para a determinação da equação diferencial das linhas de curvatura axial, temos

$$a_6 = (1+w)^{-4}, \quad a_5 = 2(1+w)^{-2}f^2, \quad a_3 = (1+w)^{-3}f[(1+w)g+t],$$

$$a_3 = (1+w)^{-4}[(1+w)e+t][(1+w)g+t] + (1+w)^{-4}, \quad a_2 = (1+w)^{-3}f[(1+w)e+t],$$

$$a_1 = 4(1+w)^{-8}[(e-g)^2 - 4f^2], \quad a_0 = -4(1+w)^{-8}f(e-g).$$

E assim,

$$A_0 = -4(1+w)^{-14}f(e-g), \quad A_1 = 4(1+w)^{-14}[(e-g)^2 - 4f^2],$$

$$A_2 = 24(1+w)^{-14}f(e-g), \quad A_3 = -4(1+w)^{-14}[(e-g)^2 - 4f^2],$$

$$A_4 = -4(1+w)^{-14}f(e-g).$$

Portanto, a equação diferencial das linhas de curvatura axial é dada por

$$\begin{aligned} f(e-g)du^4 - [(e-g)^2 - 4f^2]du^3dv - 6f(e-g)du^2dv^2 \\ + [(e-g)^2 - 4f^2]dudv^3 + f(e-g)dv^4 = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Para o desenvolvimento da equação (3.61), temos

$$II_1 = (1+w)^{-2}[(1+w)e+t]du^2 + 2(1+w)^{-1}fdudv + (1+w)[(1+w)g+t]dv^2,$$

$$II_2 = I = (1+w)^{-2}du^2 + (1+w)^{-2}dv^2.$$

Donde

$$Jac(II_1, I) = 4(1+w)^{-3}fdv^2 + 4(1+w)^{-3}(e-g)dudv - 4(1+w)^{-3}du^2$$

e

$$Jac\{Jac(II_1), I\} = 8(1+w)^{-5}(e-g)dv^2 - 32(1+w)^{-5}dudv - 8(1+w)^{-5}(e-g)du^2.$$

Portanto, a Equação (3.61) é dada por

$$\begin{aligned} 32(1+w)^{-8}f(e-g)dv^4 + 32(1+w)^{-8}(e-g)^2dudv^3 - 32(1+w)^{-8}f(e-g)du^2dv^2 - \\ - 128(1+w)^{-8}f^2dudv^3 - 128(1+w)^{-8}f(e-g)du^2dv^2 \\ + 128(1+w)^{-8}f^2du^3dv - 32(1+w)^{-8}f(e-g)du^2dv^2 - 32(1+w)^{-8}(e-g)^2du^3dv \\ + 32(1+w)^{-8}f(e-g)du^4 = 0, \end{aligned}$$

que, simplificando, produz

$$\begin{aligned} f(e-g)du^4 - [(e-g)^2 - 4f^2]du^3dv - 6f(e-g)du^2dv^2 \\ + [(e-g)^2 - 4f^2]dudv^3 + f(e-g)dv^4 = 0, \end{aligned}$$

que é justamente a equação diferencial das linhas de curvatura axial (3.62). ■

Podemos observar do teorema anterior que as linhas assintóticas são ortogonais e que a curvatura normal de  $\alpha$  é nula em todo ponto. Este é um caso particular do seguinte teorema, provado em [M4], que também foi obtido em [RS] usando um procedimento diferente.

**Teorema 3.3.2** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular, compacta e orientada, com pontos de inflexão isolados. A imersão  $\alpha$  tem linhas assintóticas ortogonais se, e somente se, a curvatura normal de  $\alpha$  é nula em todo ponto.*

**Demonstração.** As linhas assintóticas são ortogonais se, e somente se,

$$T_1 \equiv -T_3$$

para alguma carta, onde  $T_1$  e  $T_3$  são os coeficientes da equação diferencial das linhas assintóticas (2.6). Mas,  $T_1 \equiv -T_3$  é equivalente a

$$f_2(e_1 - g_1) + f_1(g_2 - e_2) \equiv 0,$$

o qual é equivalente a

$$K_N \equiv 0$$

em coordenadas isotérmicas, onde os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = G \neq 0$  e  $F = 0$ . ■

Vimos, na seção anterior que, para uma superfície produto de duas curvas, a curvatura normal é nula em todo ponto. Portanto, como consequência do Teorema (3.3.2), a imersão tem linhas assintóticas ortogonais.

Usando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais obtidos nas expressões (3.52) a (3.60) temos, para a equação diferencial das linhas de curvatura axial, (2.2),

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, \quad a_6 = 1,$$

e

$$a_1 = 4 \left( \frac{1}{\|N_1\|^2} + \frac{1}{\|N_2\|^2} \right) (k_\beta^2 + k_\gamma^2) + 8 \left( \frac{1}{\|N_1\|^2} - \frac{1}{\|N_2\|^2} \right) k_\beta k_\gamma = \left( \frac{8}{\|N_1\|^2} \right) (k_\beta^2 + k_\gamma^2).$$

Assim, a equação das linhas de curvatura axial é dada por

$$a_1 du^3 dv - a_1 dudv^3 = 0,$$

ou seja,

$$(k_\beta^2 + k_\gamma^2) du^3 dv - (k_\beta^2 + k_\gamma^2) dudv^3 = 0. \quad (3.63)$$

Para a equação diferencial das linhas de curvatura direcional média, (2.4), temos

$$B_1 = 2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2}$$

E, então, a equação das linhas de curvatura média é

$$2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2} du^2 - 2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2} dv^2 = 0,$$

ou seja,

$$k_\beta k_\gamma du^2 - k_\beta k_\gamma dv^2 = 0. \quad (3.64)$$

Para a equação diferencial das linhas assintóticas, (2.6), temos

$$T_1 = T_3 = 0, \quad T_2 = 2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2}.$$

Portanto, a equação diferencial das linhas assintóticas será

$$2 \frac{k_\beta k_\gamma}{\|N_1\|^2} dudv = 0,$$

ou seja,

$$k_\beta k_\gamma dudv = 0. \quad (3.65)$$

Podemos, então, demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.3** *Considere uma superfície em  $\mathbb{R}^4$ , produto de duas curvas, conforme construção da subseção 3.2.3. A equação diferencial das linhas de curvatura axial é o produto das equações diferenciais das linhas de curvatura direcional média e das linhas assintóticas se, e somente se, os pontos de inflexão são isolados.*

**Demonstração.** O produto da equação diferencial das linhas de curvatura direcional média, (3.64) pela equação diferencial das linhas assintóticas, (3.65), é dado por

$$k_\beta^2 k_\gamma^2 du^3 dv - k_\beta^2 k_\gamma^2 dudv^3 = 0. \quad (3.66)$$

Se, em um ponto da superfície, temos  $k_\beta = 0$  e  $k_\gamma \neq 0$ , então a superfície terá uma linha de pontos de inflexão. O mesmo ocorre se  $k_\beta \neq 0$  e  $k_\gamma = 0$ . Se ambas as curvaturas são não nulas, a superfície tem zero pontos de inflexão, ou seja, um número finito de pontos de inflexão (observe que esta é a única maneira de termos um número finito de pontos de inflexão pois, se uma das curvas tiver um ponto onde a curvatura se anula, teremos na superfície uma linha de pontos de inflexão).

Suponhamos que a equação diferencial das linhas de curvatura axial seja o produto da equação diferencial das linhas de curvatura direcional média e da equação diferencial das linhas assintóticas. Então, temos de (3.63) e de (3.66) que

$$k_\beta^2 + k_\gamma^2 = k_\beta^2 k_\gamma^2.$$

Se uma das curvaturas é nula, temos que a outra também o é. Portanto, devemos ter  $k_\beta$  e  $k_\gamma$  ambas não nulas e, de acordo com o visto acima, teremos zero pontos de inflexão, ou seja, os pontos de inflexão são isolados.

Reciprocamente, se os pontos de inflexão são isolados, ambas as curvaturas são não nulas e, então, a equação (3.65) das linhas assintóticas, se reduz a

$$dudv = 0;$$

a equação (3.64) das linhas de curvatura direcional média, se reduz a

$$du^2 - dv^2 = 0;$$

e a equação (3.63) das linhas de curvatura axial, se reduz a

$$du^3dv - dudv^3 = dudv(du^2 - dv^2) = 0.$$

Assim, claramente vemos que a equação diferencial das linhas de curvatura axial é o produto da equação diferencial das linhas de curvatura direcional média e da equação diferencial das linhas assintóticas. ■

Em [M4], Mello prova o seguinte teorema.

**Teorema 3.3.4** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular, compacta e orientada, com pontos de inflexão isolados. A equação diferencial quártica das linhas de curvatura axial (2.1) pode ser escrita como*

$$Jac\{Jac(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}), I\} \cdot Jac(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}) = 0, \quad (3.67)$$

onde a igualdade envolvendo a primeira expressão em (3.53) é a equação diferencial quadrática das linhas de curvatura direcional média (2.3) e a segunda é a equação diferencial quadrática das linhas assintóticas (2.5), se e somente se, a curvatura normal é nula em todo ponto.

**Demonstração.** Suponha que  $K_N \equiv 0$ . Neste caso, as linhas assintóticas e as linhas de curvatura direcional média estão globalmente definidas sobre  $M^2$ . A elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta para todo  $p \in M^2$ , exceto nos pontos de inflexão, que são isolados. Através de uma rotação apropriada no plano normal é possível tomar  $\nu_1(p)$  paralelo à elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$ . Isto implica que

$$e_2 = g_2 \neq 0$$

e

$$f_2 = 0.$$

Destas considerações, podemos escrever a equação diferencial das linhas de curvatura direcional média como

$$Ee_2[(e_1 - g_1)du^2 + 4f_1dudv - (e_1 - g_1)dv^2] = 0; \quad (3.68)$$

a equação diferencial das linhas assintóticas toma a forma

$$e_2[-f_1 du^2 + (e_1 - g_1)dudv + f_1 dv^2] = 0; \quad (3.69)$$

e a equação diferencial das linhas de curvatura axial assume a forma

$$4E^3\{f_1 b_0(du^4 - 6du^2 dv^2 + dv^4) + [b_0^2 - 4f_1^2](du^2 - dv^2)dudv\} = 0; \quad (3.70)$$

com  $b_0 = g_1 - e_1$ , em coordenadas isotérmicas, respectivamente. Agora é simples verificar que a equação diferencial (3.12) é o produto das equações (3.10) e (3.11).

Reciprocamente, se a equação diferencial das linhas de curvatura axial é o produto das equações diferenciais das linhas de curvatura direcional média e das linhas assintóticas, então, em particular, as linhas assintóticas são ortogonais e, pelo teorema (3.0.2), podemos concluir que a curvatura normal de  $\alpha$  é nula em todo ponto. O teorema está provado. ■

Podemos concluir, dos teoremas acima, que se a curvatura normal da imersão é nula em todo ponto, então não é possível que as linhas de curvatura axial tenham interseções transversais.

Podemos provar o seguinte corolário.

**Corolário 3.3.5** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular, compacta e orientada em  $\mathbb{R}^4$ , com pontos de inflexão isolados. Se a imersão  $\alpha$  tem linhas assintóticas ortogonais, então os pontos de inflexão são obtidos onde a elipse de curvatura se torna um ponto.*

**Demonstração.** De fato, da equação (3.8), temos

$$Jac(\|\eta - H\|^2, I) = Jac\{Jac(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}), I\} \cdot Jac(II_{\nu_1}, II_{\nu_2}) = 0. \quad (3.71)$$

Como os pontos de inflexão são singularidades das linhas assintóticas, então, por (3.13), eles são singularidades das linhas de curvatura axial. Mas as singularidades das linhas de curvatura axial são os pontos onde a elipse de curvatura se torna um círculo ou um ponto. Assim, a única possibilidade é que a elipse de curvatura seja um ponto. ■

## Capítulo 4

# Hiperesfericidade de superfícies em $\mathbb{R}^4$

Dizemos que uma imersão  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é hiperesférica se sua imagem está contida em uma hiperesfera. Se existe um campo de vetores normal unitário  $\nu$  e  $r > 0$  tal que a distância de projeção de  $\varepsilon(p)$  sobre o eixo  $\nu$  até  $p$  é  $r$  para todo  $p \in M^2$  dizemos que  $\alpha$  tem projeção constante, onde  $r$  é chamada distância de projeção. Neste capítulo apresentamos condições necessárias e suficientes para a hiperesfericidade de uma superfície. A referência básica para este capítulo é o artigo de Mello [M2].

**Teorema 4.0.6** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow S^3(r)$  uma imersão de uma superfície regular e orientada em uma esfera de dimensão 3 de raio  $r > 0$ . Considere a inclusão natural  $i : S^3(r) \rightarrow \mathbb{R}^4$  e a composição  $i \circ \alpha$  ainda denotada por  $\alpha$ . Então existe um campo de vetores normal e unitário  $\nu$  e  $\lambda > 0$  tal que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta sobre a reta  $\nu = \lambda$ , para todo  $p \in M^2$ .*

**Demonstração.** Seja  $\{\nu_1, \nu_2\}$  um referencial de campos de vetores ortonormais a  $\alpha$ , onde  $\nu_1(p) \in T_p S^3(r)$  e  $\nu_2(p)$  é a normal interior à esfera  $S^3(r)$ , para todo  $p \in M^2$ . Assim,

$$\nu_2 \equiv -\frac{1}{r}\alpha, \quad e_2 = \frac{1}{r}E, \quad f_2 = \frac{1}{r}F, \quad g_2 = \frac{1}{r}G,$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$ . Segue que

$$H_2 = \frac{1}{r}I.$$

Agora

$$\eta = \frac{H}{I} = \frac{H_1}{I}\nu_1 + \frac{H_2}{I}\nu_2 = \frac{H_1}{I}\nu_1 + \frac{1}{r}\nu_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta sobre  $\nu = \frac{1}{r}$ , para todo  $p \in M^2$ . Defina  $\nu = \nu_2$  e  $\lambda = -1/r$ . ■

**Teorema 4.0.7** [M2] *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão hipersférica de uma superfície regular e orientada. Então existe um campo de vetores normal unitário  $\nu$  e  $\lambda > 0$  tais que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta com a seguinte propriedade: a distância de projeção de  $\varepsilon_\alpha(p)$  sobre o eixo  $\nu$  até  $p$  é  $\lambda$ , para todo  $p \in M^2$ .*

**Demonstração.** Seja  $\alpha(M^2) \subset S^3(r)$ ,  $r > 0$ . Seja  $\{\nu_1, \nu_2\}$  uma base de campos de vetores ortonormais a  $\alpha$ , onde  $\nu_1(p) \in T_p S^3(r)$  e  $\nu_2(p)$  é a normal interior à esfera  $S^3(r)$ , para todo  $p \in M^2$ . Assim,

$$\nu_2 = -\frac{1}{r}\alpha,$$

$$e_2 = \frac{1}{r}E,$$

$$f_2 = \frac{1}{r}F$$

e

$$g_2 = \frac{1}{r}G,$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$ . Segue que

$$II_{\nu_2} = \frac{1}{r}I.$$

Agora

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_{\nu_1}}{I}\nu_1 + \frac{II_{\nu_2}}{I}\nu_2 = \frac{II_{\nu_1}}{I}\nu_1 + \frac{1}{r}\nu_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta ortogonal a  $\nu_2$ , para todo  $p \in M^2$ . Defina  $\nu = \nu_2$  e  $\lambda = 1/r$ . ■

O teorema (4.0.6) mostra que, se  $\alpha$  é hipersférica, então  $\alpha$  tem projeção constante cuja distância de projeção é  $1/r$ , onde  $r$  é o raio da hipersfera.

**Teorema 4.0.8** [M2] *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada com linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas. Suponhamos que  $\alpha$  tenha projeção constante, com distância de projeção  $r > 0$  e curvatura Gaussiana  $K \neq r^2$ . Então  $\alpha$  é hipersférica.*

**Demonstração.** Como todas as noções deste capítulo não dependem da carta, é suficiente provar este teorema para uma carta ortogonal. Por hipótese, existe um campo de vetores normal unitário  $\nu$  ortogonal a  $\varepsilon_\alpha(p)$ , para todo  $p \in M^2$ . Podemos tomar  $\{\nu_1 = \nu^\perp, \nu_2 = \nu\}$  um referencial de campos de vetores ortonormais a  $\alpha$ , onde  $\nu^\perp$  é paralelo a  $\varepsilon_\alpha(p)$ , tal que  $\{\alpha_u, \alpha_v, \nu^\perp, \nu\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , para uma carta ortogonal positiva  $(u, v)$  de

$M^2$ . Como no início do teorema (4.0.6), a carta tem  $e_2 = rE, f_2 = 0, g_2 = rG$ . A equação  $\alpha$  satisfaz as equações de Codazzi

$$(e_1)_v - (f_1)_u = \Gamma_{12}^1 e_1 + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f_1 - \Gamma_{11}^2 g_1 - a_{12}^3 e_2 + a_{11}^3 f_2, \quad (4.1)$$

$$(e_2)_v - (f_2)_u = \Gamma_{12}^1 e_2 + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f_2 - \Gamma_{11}^2 g_2 - a_{12}^3 e_1 + a_{11}^3 f_1, \quad (4.2)$$

$$(f_1)_v - (g_1)_u = \Gamma_{22}^1 e_1 + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) f_1 - \Gamma_{12}^2 g_1 + a_{12}^3 f_2 - a_{11}^3 g_2, \quad (4.3)$$

$$(f_2)_v - (g_2)_u = \Gamma_{22}^1 e_2 + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) f_2 - \Gamma_{12}^2 g_2 - a_{12}^3 f_1 + a_{11}^3 g_1, \quad (4.4)$$

e as seguintes equações de estrutura

$$(\nu^\perp)_u = a_{11}^1 \alpha_u + a_{11}^2 \alpha_v + a_{11}^3 \nu, \quad (4.5)$$

$$(\nu^\perp)_v = a_{12}^1 \alpha_u + a_{12}^2 \alpha_v + a_{12}^3 \nu, \quad (4.6)$$

$$\nu_u = a_{21}^1 \alpha_u + a_{21}^2 \alpha_v - a_{11}^3 \nu^\perp, \quad (4.7)$$

$$\nu_v = a_{22}^1 \alpha_u + a_{22}^2 \alpha_v - a_{12}^3 \nu^\perp, \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11}^1 &= \frac{f_1 F - e_1 G}{EG - F^2}, & a_{11}^2 &= \frac{e_1 F - f_1 E}{EG - F^2}, \\ a_{12}^1 &= \frac{g_1 F - f_1 G}{EG - F^2}, & a_{12}^2 &= \frac{f_1 F - g_1 E}{EG - F^2}, \\ a_{21}^1 &= \frac{f_2 F - e_2 G}{EG - F^2}, & a_{21}^2 &= \frac{e_2 F - f_2 E}{EG - F^2}, \\ a_{22}^1 &= \frac{g_2 F - f_2 G}{EG - F^2}, & a_{22}^2 &= \frac{f_2 F - g_2 G}{EG - F^2} \end{aligned}$$

e  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel de  $\alpha$  ( $i, j, k = 1, 2$ ), que, neste caso, são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

As equações (4.1)–(4.8), bem como os símbolos de Christoffel podem ser encontrados em [F]. Substituindo os símbolos de Christoffel acima nas equações de Codazzi (4.2) e (4.4) temos, respectivamente,

$$rE_v = \frac{E_v}{2E}rE + \frac{E_v}{2G}rG - a_{12}^3e_1 + a_{11}^3f_1 \quad (4.9)$$

e

$$-rG_u = -\frac{G_u}{2E}rE - \frac{G_u}{2G}rG - a_{12}^3f_1 + a_{11}^3g_1. \quad (4.10)$$

Mas as equações (4.9) e 4.10) são equivalentes a

$$-a_{12}^3e_1 + a_{11}^3f_1 = 0 \quad (4.11)$$

e

$$-a_{12}^3f_1 + a_{11}^3g_1 = 0, \quad (4.12)$$

respectivamente. Agora, a curvatura Gaussiana é

$$K = \frac{e_1g_1 - (f_1)^2}{EG} + \frac{e_2g_2}{EG} = \frac{e_1g_1 - (f_1)^2}{EG} + r^2.$$

Por hipótese,  $K \neq r^2$ , e assim

$$e_1g_1 - (f_1)^2 \neq 0. \quad (4.13)$$

Das equações (4.11), (4.12) e (4.13), temos que

$$a_{11}^3 = a_{12}^3 = 0. \quad (4.14)$$

Substituindo a equação (4.14) em (4.7) e (4.8) resulta em

$$\nu_u = -r\alpha_u$$

e

$$\nu_v = -r\alpha_v.$$

Assim,

$$\nu = -r\alpha + \gamma,$$

onde  $\gamma$  é um vetor constante. Portanto,

$$\alpha = \frac{\gamma}{r} - \frac{1}{r}\nu.$$

Isto significa que  $\alpha(M^2)$  pertence a uma hiperesfera com centro  $\gamma/r$  e raio  $1/r$ .

■

Temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.0.9** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada. Suponha que  $\nu$  seja um campo de vetores normal e unitário de modo que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta sobre  $\nu = r$ , para todo  $p \in M^2$ , e que a curvatura Gaussiana  $K \neq r^2$ . Então  $M^2$  está contida em uma hiperesfera.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $r > 0$ . Como a elipse de curvatura é um segmento de reta, podemos escolher  $\{\nu_1, \nu_2 = \nu\}$  um referencial de campos de vetores ortonormais a  $\alpha$ , onde  $\nu_1(p)$  é paralelo a  $\varepsilon_\alpha(p)$ , de modo que  $\{\alpha_u, \alpha_v, \nu_1, \nu_2\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , para uma carta positiva  $(u, v)$  de  $M^2$ . Isto implica que  $f_2 = 0$ .

Podemos ainda assumir que  $F = 0$ . Deste modo os símbolos de Christoffel [L] são

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{g_v}{2G}.$$

Como  $e_2 = rE$  e  $g_2 = rG$ , as equações de Codazzi [L] são

$$rE_v = \frac{E_v}{2E}rE + \frac{E_v}{2G}rG - a_{12}^3e_1 + a_{11}^3f_1$$

e

$$-rG_u = -\frac{G_u}{2E}rE - \frac{G_u}{2G}rG - a_{12}^3f_1 + a_{11}^3g_1,$$

as quais têm a forma

$$-a_{12}^3e_1 + a_{11}^3f_1 = 0$$

e

$$-a_{12}^3f_1 + a_{11}^3g_1 = 0,$$

respectivamente. Como

$$K = \frac{e_1g_1 - (f_1)^2}{EG} + \frac{e_2g_2}{EG} = \frac{e_1g_1 - (f_1)^2}{EG} + r^2 \neq r^2,$$

temos  $e_1g_1 - (f_1)^2 \neq 0$  e isto implica que  $a_{11}^3 = a_{12}^3 = 0$ . Assim

$$(\nu_2)_u = -r\alpha_u$$

e

$$(\nu_2)_v = -r\alpha_v.$$

Portanto,

$$\nu_2 = -r\alpha + b$$

e

$$\alpha = \frac{b}{r} - \frac{1}{r}\nu_2,$$

onde  $b$  é um vetor constante. Isto significa que  $\alpha(M^2)$  pertence a uma hipersfera com centro em  $b/r$  e raio  $1/r$ . ■

A prova do seguinte teorema é imediata do Teorema 4.0.6.

**Teorema 4.0.10** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada. Então existe um campo de vetores normais unitários  $\nu$  e  $\lambda > 0$  tal que  $II_\nu = \langle d^2\alpha, \nu \rangle = \lambda I$ .*

A recíproca do Teorema 4.0.9 é dada pelo seguinte teorema [M2].

**Teorema 4.0.11** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada. Suponhamos que  $\nu$  é um campo de vetores normais unitários tal que  $II_\nu = \langle d^2\alpha, \nu \rangle = \lambda I$ , onde  $\lambda$  é uma constante não nula e a curvatura Gaussiana  $K \neq \lambda^2$ . Então  $\alpha$  é hipersférica.*

**Demonstração.** Tomemos o referencial positivo  $\{\alpha_u, \alpha_v, \nu^\perp, \nu\}$ . Como  $II_\nu = \langle d^2\alpha, \nu \rangle = \lambda I$ , temos

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_\nu^\perp}{I}\nu^\perp + \frac{II_\nu}{I}\nu = \frac{II_\nu^\perp}{I}\nu^\perp + \lambda\nu.$$

Isto significa que a elipse de curvatura  $\varepsilon_\alpha(p)$  é um segmento de reta cuja distância de sua projeção sobre o eixo  $\nu$  até  $p$  é constante e igual a  $\lambda$ , para todo  $p \in M^2$ . Portanto,  $\alpha$  tem projeção constante com distância de projeção  $\lambda > 0$ . Como  $K \neq \lambda^2$ , o teorema segue do Teorema 4.0.7. ■

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada, com linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas. Então a curvatura normal de  $\alpha$  se anula em todo ponto. Então, existem campos de vetores normais  $\nu$  e  $\nu^\perp$  tais que

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_\nu^\perp}{I}\nu^\perp + \frac{II_\nu}{I}\nu = \frac{II_\nu^\perp}{I}\nu^\perp + \frac{II_\nu}{I} = \frac{II_\nu^\perp}{I}\nu^\perp + \lambda\nu.$$

Assim,  $II_\nu = \lambda I$ , onde  $\lambda$  é uma função escalar positiva em  $M^2$ . Isto implica que  $\alpha$  é  $\nu$ -umbílica. A equação diferencial das linhas assintóticas (2.5) é dada por

$$0 = \text{Jac}(II_{\nu^\perp}, II_\nu) = \text{Jac}(II_{\nu^\perp}, \lambda I),$$

que é equivalente a

$$\text{Jac}(II_{\nu^\perp}, I) = 0.$$

Mas, esta é a equação das linhas de curvatura  $\nu^\perp$ -principais (2.8).

O Teorema 3.4 de [RS], o Lema 2.1 e o Teorema 2.1 de [M4] e os resultados obtidos acima são reunidos no próximo teorema [M2].

**Teorema 4.0.12** *Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma imersão de uma superfície regular e orientada. As seguintes condições são equivalentes em  $\alpha$ :*

- a) *A imersão  $\alpha$  tem linhas assintóticas globalmente definidas;*
- b) *O vetor curvatura normal de  $\alpha$  se anula em todo ponto;*
- c) *A imersão  $\alpha$  é  $\nu$ -umbílica para algum campo de vetores normais unitários  $\nu$ ;*
- d) *Todos os pontos de  $\alpha$  são semiumbólicos;*
- e) *Existe uma função escalar positiva  $\lambda$  e um campo de vetores normais unitários  $\nu$  tal que a segunda forma fundamental relativa a  $\nu$  é dada por  $II_\nu = \lambda I$ ;*
- f) *As linhas assintóticas coincidem com as linhas de curvatura axial definidas pelo eixo maior da elipse de curvatura;*
- g) *As linhas assintóticas coincidem com as linhas de curvatura  $\nu^\perp$ -principais, para algum campo de vetores normais unitários;*
- h) *A equação diferencial quártica das linhas de curvatura axial é o produto da equação diferencial quadrática das linhas direcionalmente médias e das linhas assintóticas*

*Além disso, se a função  $\lambda$  acima é uma constante não nula e a curvatura Gaussiana  $K \neq \lambda^2$ , então  $\alpha$  é hiperesférica.*

# Capítulo 5

## Conclusões

Existem três campos de linhas naturalmente definidos sobre uma superfície  $M$  em  $\mathbb{R}^4$ : as linhas de curvatura axial, as linhas de curvatura direcionalmente médias e as linhas assintóticas.

As linhas de curvatura axial estão globalmente definidas sobre superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e suas singularidades são os *pontos axiumbólicos*, onde a elipse de curvatura se torna um círculo ou um ponto. Uma linha de curvatura axial não é, necessariamente, uma curva regular simples; ela pode estar imersa com interseções transversais. A equação diferencial das linhas de curvatura axial é uma equação diferencial quártica.

As linhas de curvatura direcional média estão globalmente definidas em superfícies em  $\mathbb{R}^4$ , são ortogonais e suas singularidades são os pontos de inflexão, onde a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta radial, ou os pontos mínimos, onde o vetor curvatura média se anula. A equação diferencial das linhas de curvatura média é uma equação diferencial quadrática.

As linhas assintóticas não estão, necessariamente, definidas sobre as superfícies e, em geral, não são ortogonais. Suas singularidades são os pontos de inflexão, onde a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta radial. A equação diferencial das linhas assintóticas é também uma equação diferencial quadrática.

Foi provado que se uma imersão de uma superfície regular e orientada tem pontos de inflexão isolados, então a equação quártica das linhas de curvatura axial pode ser escrita como o produto das equações diferenciais quadráticas das linhas de curvatura direcional média e das linhas assintóticas se, e somente se, a curvatura normal da imersão é nula em todo ponto.

Uma maneira de construir exemplos de superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$  é compondo uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$  com a inversa da projeção estereográfica  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . A imersão  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  tem linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas e os pontos umbílicos de  $\alpha$

são levados nos pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$  [L].

Imersões como na construção acima têm curvatura normal nula em todo ponto. Outros exemplos podem ser dados por superfícies contidas em hiperplanos e superfícies produto de duas curvas.

Uma direção de pesquisa e que constitui um interessante material para estudo futuro refere-se à obtenção de um exemplo de uma imersão não hiperesférica  $\alpha$  de uma superfície regular e orientada em  $\mathbb{R}^4$ , com linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas, tendo um ponto de inflexão isolado. Todos os exemplos que aparecem na literatura são de imersões hiperesféricas.

# Referências Bibliográficas

- [C] M. P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [D] G. DARBOUX, *Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic*, Note 07, Leçons sur la Théorie de Surfaces, vol IV, Gauthier Villars, Paris 1896.
- [E] L. EULER, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie de Berlin 16, (1760).
- [F] A. R. FORSYTH, *Geometry of four dimensions*, vol I, II, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1930.
- [G1] R. GARCIA, *Linhas de curvatura de hipersuperfícies imersas no espaço  $\mathbb{R}^4$* , Tese de doutoramento, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- [GMRR] R. GARCIA, D. MOCHIDA, M.ROMERO-FUSTER AND M. S. RUAS, *Inflection points and topology of surfaces in 4-space*, Trans. Am. Math. Soc., 352(7) (2000), 3029–3043.
- [GGST] C. GUTIERREZ, I. GUADALUPE, J. SOTOMAYOR AND R. TRIBUZY, *Lines of curvature on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$* , Bull. Braz. Math. Soc., (N.S.) 28(2) (1997), 233–251.
- [GGTG1] C. GUTIERREZ, I. GUADALUPE, R. TRIBUZY AND V. GUIÑEZ, *Principal lines on surfaces minimally immersed in constantly curved 4-spaces*, Dynamical Systems and Bifurcations Theory, 168 (1987), 91–120.
- [GGTG2] C. GUTIERREZ, I. GUADALUPE, R. TRIBUZY AND V. GUIÑEZ, *A differential equation for lines of curvature on surfaces minimally immersed in  $\mathbb{R}^4$* , Qual. Theory Dynam. Syst., 2 (2001), 207–220.
- [Gi] C. G. GIBSON, *Singular Points of Smooth Mappings*, Pitman, (1979).

- [GGuS] R. GARCIA, C. GUTIERREZ AND J. SOTOMAYOR, *Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Bull. Sci. Math., 123 (1999), 599–622.
- [GS1] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Lines of mean curvature on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Qualitative Theory of Dynamical Systems, Lérida, Espanha, 5 (2) (2004), 137–183.
- [GS2] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Lines of axial curvature on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$* , Diff. Geom. Appl., 12 (2000), 253–269.
- [GS3] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Structurally stable of lines of mean curvature and umbilic points on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Pub. Mat., 45 (2001), 431–466.
- [GS4] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Geometric mean curvature lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Ann. Faculte des Sciences de Toulouse. 11 (3)(2002), 377–401.
- [GS5] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Harmonic mean curvature lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^3$* , Bull. Braz. Math. Soc. 34 (2)(2003), 303–331.
- [GS6] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *Lines of curvature on surfaces, Historical Comments and Recent Developments*, Resenhas do IME-USP, 1 (2008), 01–40.
- [GS7] R. GARCIA AND J. SOTOMAYOR, *On the Patterns of Principal Curvature Lines around a Curve of Umbilic Points*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences, 77(1) (2005), 13–24.
- [GuS1] C. GUTIERREZ AND J. SOTOMAYOR, *Lines of curvature and umbilical points on surfaces*, 18° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro 1991.
- [L] J. A. LITTLE, *On singularities of submanifolds of a higher dimensional Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. 83 (1969), 261–335.
- [M1] L. F. MELLO, *Linhas de curvatura direcional média em superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$* , Tese de Doutorado, USP (2001).
- [M2] L. F. MELLO, *Orthogonal Asymptotic Lines on Surfaces Immersed in  $\mathbb{R}^4$* , a aparecer em Rocky Mountain Journal of Mathematics, (2007).
- [M3] L. F. MELLO, *Mean directionally curved lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$* , Publications Mathematiques, 47 (2003), 415–440.

- [M4] L. F. MELLO, *Lines fields on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$* , Equadiff 2003, International Conference on Differential Equations, edited by F. Dumortier, H. Broer, J. Mawhin, A. Vanderbauwhede and S. Verduyn Lunel, World Scientific (2005), 951–956.
- [Mo] G. MONGE, *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde*, Journ. de l'École Polytech., II cah. (1796).
- [MRR] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, *Some Global Properties of Surfaces in 4-Space*, Proceedings of the 1ST International Meeting on Geometry and Topology, Braga (Portugal), 1997.
- [P] M. PEIXOTO, *Structurally stable vector fields on two-dimensional manifolds*, Topology, 1 (1962), 101-120.
- [RS] M. C. ROMERO-FUSTER AND F. SANCHEZ-BRINGAS, *Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in  $\mathbb{R}^4$* , Differential Geometry and its Applications, 16 (2002), 213–224.
- [W] W.C. WONG, *A new curvature theory for surfaces in euclidean 4-spaces*, Comm. Math. Hel., 26 (1952), 152–170.