

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**Estudo da Estabilidade e das Bifurcações de
Hopf em um Sistema Tipo Lorenz**

Sinval Ferreira Coelho

Orientador: Dr. Luis Fernando Mello

ITAJUBÁ, AGOSTO DE 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Estudo da Estabilidade e das Bifurcações de Hopf em um Sistema Tipo Lorenz

Sinval Ferreira Coelho

Orientador: Dr. Luis Fernando Mello

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática
Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em
Física e Matemática Aplicada

ITAJUBÁ – MG
AGOSTO DE 2008

Para a Dairan e o Julio.

Agradecimentos

Ao finalizar esta tarefa, é fácil reconhecer a colaboração que sempre recebi, durante todo o tempo que me dediquei na elaboração deste trabalho.

Inicialmente agradeço a Deus por ter me feito um ser saudável. Agradeço ao professor Luis Fernando Mello, pela orientação, pela paciência, pelas correções. Ao Sebastião, colega desde os primeiros instantes de UNIFEI. Ao Elcio, pelas contribuições decisivas nos últimos meses. À Miriam, por diversas colaborações e a Ana Paula pelas inúmeras conversas. Ao Dante, pelos esclarecimentos oportunos, precisos. Ao Adhimar, pelas dicas importantes, pelas conversas minutos antes da apresentação deste trabalho. Ao Carlos Rodrigues e ao Cailey, fiéis escudeiros e os primeiros incentivadores desta jornada, além do Marco Donizete. Agradeço também ao Keyne, ao Baltazar, ao Miralvo, ao Guilherme e aos demais colegas de curso. Ao Denis Braga, pelos seminários, pela disposição e pela boa vontade em sanar minhas dúvidas. Agradeço também à Sandra, minha querida irmã, pelos incentivos constantes e ao Geraldo seu esposo, além dos pequenos Gabriel e Eduardo, seus filhos, por sentirem saudades. À Cinthia, que mesmo sem vínculos, sua falta ainda me perturba. Isto me faz um pouco mais forte.

À Seduc–MT e a Semed–Barra do Garças pelo apoio financeiro.

Finalmente agradeço à Dairan e ao Julio, meus amados pais, por suportarem minha longa ausência em prol de um amor sincero, fiel, generoso, eterno e recíproco.

Resumo

Esta dissertação de Mestrado trata do estudo da estabilidade e das bifurcações de Hopf genéricas e degeneradas que ocorrem em um sistema tipo Lorenz. Damos uma detalhada descrição analítica das regiões no espaço de parâmetros para a qual múltiplas soluções periódicas de pequenas amplitudes bifurcam dos equilíbrios do sistema.

Palavras-chave

Bifurcações de Hopf, Sistema tipo Lorenz, Ciclos Limite, Estabilidade

Abstract

In this work we study the stability and local codimension one and two Hopf bifurcations which occur in a Lorenz-like system. A detailed analytical description of the regions in the parameters space for which multiple small periodic solutions bifurcate from the equilibria of the system is obtained.

Keywords

Hopf Bifurcation, Lorenz-like system, Limit Cycle, Stability

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Considerações iniciais	5
2.2 Bifurcações de Hopf no plano	9
2.3 Método da projeção	30
3 Análise do sistema tipo Lorenz (1.2)	46
3.1 Pontos de equilíbrio e estabilidade	46
3.2 Bifurcações de Hopf no sistema (1.2)	50
3.2.1 Bifurcação de Hopf de codimensão 1 em $O(0,0,0)$	50
3.2.2 Os autovetores e as funções multilineares simétricas	51
3.2.3 Bifurcação de Hopf de codimensão 2 em $O(0,0,0)$	57
3.3 Bifurcações de Hopf no sistema de Lü	62
3.3.1 Estabilidade dos equilíbrios Q_{\pm} para o sistema de Lü	62
3.3.2 Bifurcações de Hopf de codimensão 1 em Q_{\pm} para o sistema de Lü	64
3.3.3 Bifurcações de Hopf de codimensão 2 em Q_{\pm} para o sistema de Lü	69
3.4 Bifurcações de Hopf no sistema de Lorenz (1.1)	75

4 Simulações numéricas	78
4.1 O equilíbrio $O(0, 0, 0)$	78
4.2 Os equilíbrios Q_{\pm}	80
4.2.1 A região \mathcal{S}_1	80
4.2.2 A região \mathcal{S}_2	81
4.2.3 A região \mathcal{S}_3	83
4.2.4 A região \mathcal{S}_4	84
4.2.5 A região \mathcal{S}_5	86
4.2.6 A região \mathcal{S}_6	87
Conclusões	89
Bibliografia	90
Anexo A	92
Anexo B	105
Anexo C	117
Anexo D	128
Anexo E	129

Lista de Figuras

1.1	Atrator estranho do sistema de Liü.	2
1.2	Atrator estranho do sistema de Chen.	3
1.3	Atrator estranho do sistema de Rössler.	3
2.1	Retrato de fase do sistema (2.5) ilustrando uma bifurcação de Hopf.	8
2.2	Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.	10
2.3	Ponto fixo da transformação de retorno.	11
2.4	Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.	13
2.5	Variedade central como um gráfico de $\mathbf{y} = V(z, \bar{z})$	35
3.1	Regiões $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 6$	72
3.2	Diagrama de bifurcação próximo à superfície \mathcal{S} em P_1	72
3.3	Diagrama de bifurcação próximo à superfície \mathcal{S} em P_3	73
3.4	Retrato de fase do sistema (3.15) próximo do ponto Q_+	75
4.1	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo da origem que é um atrator.	79
4.2	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo da origem que é um atrator fraco.	79
4.3	Órbita periódica atratora em torno da origem do sistema (3.1).	80
4.4	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.	81
4.5	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.	81
4.6	Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio Q_+	81
4.7	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.	82

4.8	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.	82
4.9	Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio repulsor Q_+	83
4.10	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.	83
4.11	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.	84
4.12	Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio repulsor Q_+	84
4.13	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.	85
4.14	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.	85
4.15	Órbita periódica repulsora próxima ao equilíbrio atrator em Q_+	85
4.16	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.	86
4.17	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.	86
4.18	Órbita periódica repulsora próxima do equilíbrio atrator em Q_+	87
4.19	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.	87
4.20	Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.	88
4.21	Órbita periódica repulsora próxima ao equilíbrio atrator em Q_+	88

Capítulo 1

Introdução

Em 1963, E.N. Lorenz [6] trabalhava com um conjunto de equações diferenciais que explicavam, de maneira aproximada, o comportamento do tempo do ponto de vista meteorológico, proposto anteriormente por B. Saltzman, entre outros. Lorenz percebeu que no conjunto de dados que dispunha, apenas três variáveis influenciavam o comportamento do sistema. Decidiu, então, abandonar as demais variáveis e construiu o seguinte sistema, que hoje é conhecido como *sistema de Lorenz*,

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e os parâmetros σ, r, b são parâmetros reais positivos.

Existe uma literatura enorme sobre as equações acima, como por exemplo o livro de C. Sparrow [14] que traz um panorama sobre o estado da arte até o ano de 1982. Particularmente interessante é o estudo das bifurcações nestas equações, dentre elas o estudo das bifurcações de Hopf. Neste sentido, vale observar que essa tarefa está longe de ser trivial, como destacado por Sparrow em [14], p. 11:

“Em $r = r_H = 24.74\dots$, quando os autovalores complexos conjugados cruzam o eixo imaginário, existe uma bifurcação de Hopf [8] na qual os pontos de equilíbrio fora da origem perdem suas estabilidades. A teoria das bifurcações de Hopf está agora bem adiantada, e sabemos que existem dois tipos. A bifurcação é ‘super-crítica’ se cada ponto de equilíbrio perde sua estabilidade expelindo uma órbita periódica estável. Ela é ‘sub-crítica’ se eles perdem suas estabilidades absorvendo uma órbita periódica não estável. No nosso caso,

podemos mostrar que a bifurcação de Hopf é subcrítica. Parece que a bifurcação de Hopf é subcrítica para todo σ e b para os quais a bifurcação ocorre quando $r > 0$. Marsden relata que ele e MacCracken cometeram erros numéricos em seus cálculos os quais indicam bifurcações supercríticas para alguns valores de σ e b ".

Depois do sistema de Lorenz, vários outros sistemas em \mathbb{R}^3 e em dimensões mais altas foram propostos apresentando comportamento caótico, como por exemplo, o sistema de Liü [10], o sistema de Chen [1], o sistema de Rössler [12] e o sistema de Chua [2].

Como ilustração do comportamento caótico dos sistemas acima, colocamos um esboço de cada um dos atratores caóticos que aparecem nos sistemas de Liü [10], Chen [1] e no de Rössler [12], conforme figuras 1.1, 1.2 e 1.3, respectivamente.

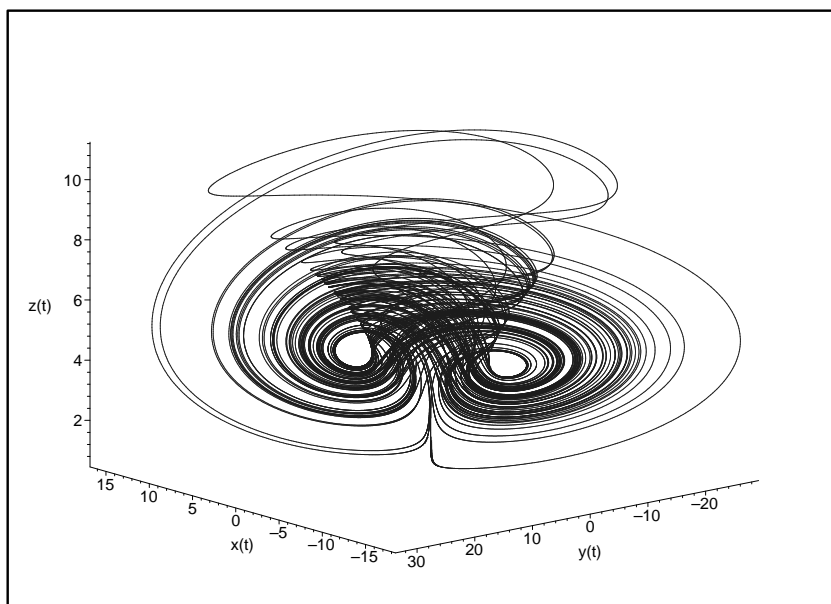


Figura 1.1: Atrator estranho do sistema de Liü.

Dentre esses vários sistemas, destacamos o que nesta dissertação chamaremos de *sistemas tipo Lorenz*: sistemas quadráticos em \mathbb{R}^3 dependendo de parâmetros que apresentam comportamento caótico.

Recentemente, Liao et al. [5] propuseram o seguinte sistema tipo Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = dx + cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ são parâmetros reais.

Quando $(a, b, c, d) = (a, b, -1, d)$, ou seja, $c = -1$, o sistema (1.2) corresponde exatamente ao sistema (1.1); quando $(a, b, c, d) = (a, b, c, c - a)$, ou seja, $d = c - a$, o sistema

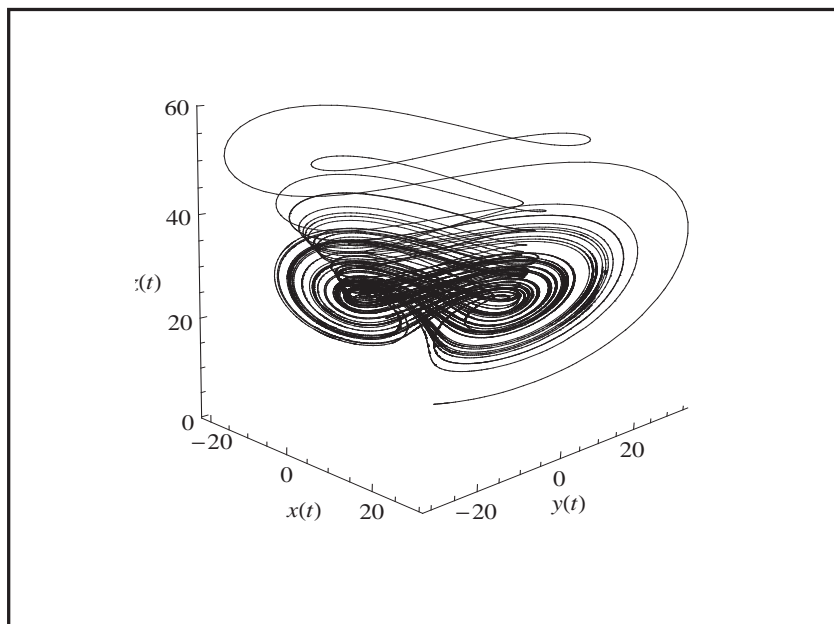


Figura 1.2: Atrator estranho do sistema de Chen.

(1.2) corresponde ao sistema de Chen; quando $(a, b, c, d) = (a, b, c, 0)$, ou seja, $d = 0$, o sistema (1.2) corresponde ao sistema de Lü [7]. Neste sentido, dizemos que o sistema (1.2) é um *desdobramento* dos sistema de Lorenz, de Chen e de Lü.

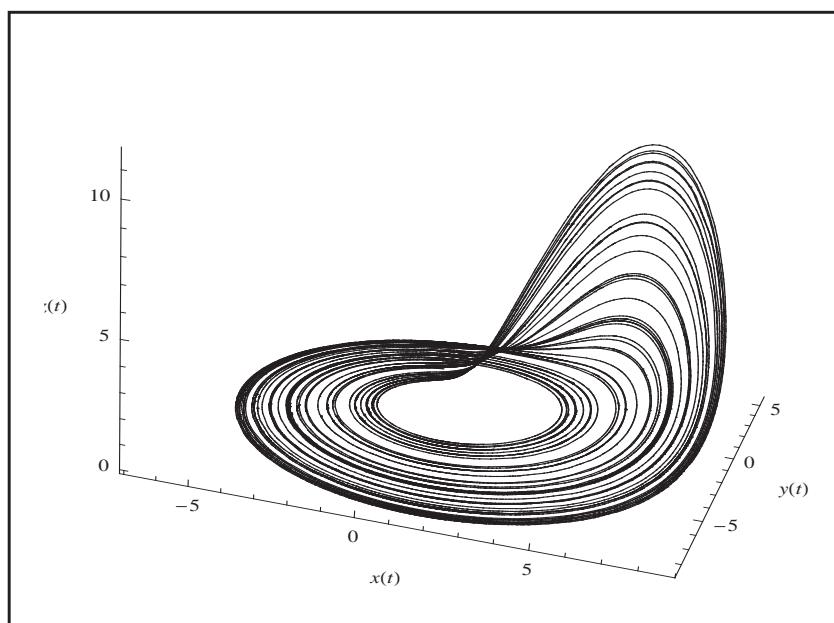


Figura 1.3: Atrator estranho do sistema de Rössler.

Embora o estudo do comportamento caótico dos sistemas mencionados acima seja um assunto atual e fascinante, nesta dissertação iremos realizar apenas o estudo da estabilidade dos equilíbrios e o estudo das bifurcações de Hopf, genéricas e degeneradas. Mais

precisamente, iremos estudar esses aspectos no sistema tipo Lorenz (1.2).

Para isso, esta dissertação está desenvolvida como segue: no Capítulo 2 serão apresentados as principais definições e resultados preliminares que serão utilizados nos capítulos seguintes, destacando aqui o estudo das bifurcações de Hopf genéricas e degeneradas. No Capítulo 3 estudamos os equilíbrios do sistema (1.2) e suas bifurcações de Hopf, com destaque para o caso em que $d = 0$, ou seja, para o sistema de Lü. Vale observar que não encontramos na literatura um estudo tão profundo, do ponto de vista analítico, para as bifurcações de Hopf deste sistema. Apresentamos ainda um esboço da análise do sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov e simulações numéricas para o caso em que $c = -1$, ou seja, para o sistema de Lorenz (1.1). No Capítulo 4 apresentamos algumas considerações numéricas, bem como alguns retratos de fase que ilustram os resultados obtidos no capítulo anterior. Nos Apêndices são apresentados todos os resultados obtidos através da implementação computacional de algoritmos aqui utilizados.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Considerações iniciais

Neste capítulo temos por objetivo estudar as bifurcações de Hopf. Inicialmente trataremos de sistemas bidimensionais onde o conceito de bifurcação de Hopf é bastante conhecido para posteriormente estudá-lo em um contexto mais amplo, para sistemas n -dimensionais. As definições e o método de projeção que apresentaremos no corrente capítulo foram baseados no livro de Kuznetsov [4] e em [13]. Além do estudo das bifurcações de Hopf, apresentaremos ainda as principais definições que serão utilizadas no decorrer do texto.

Utilizaremos a terminologia *suave* para nos referirmos às funções onde a classe de diferenciabilidade é suficientemente grande, *f suave se e somente se* $f \in \mathcal{C}^n$, com n suficientemente grande. Quando acharmos necessário explicitar a classe de diferenciabilidade faremos menção a respeito.

A notação $f(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^n)$ representará uma função suave cuja expansão de Taylor em \mathbf{x} inicia-se com os termos de ordem n (ou superiores).

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi), \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, vetores representados pelas variáveis e parâmetros. Assuma que f seja de classe \mathcal{C}^∞ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Suponha que (2.1) tenha um ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = e_0$ quando $\xi = \xi_0$ e, denotando a variável $\mathbf{x} - e_0$ também por \mathbf{x} , escrevemos

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \xi_0).$$

Seguem algumas definições que utilizaremos no decorrer deste e dos próximos capítulos.

Definição 2.1.1 Um ponto de equilíbrio e_0 do sistema (2.1) é chamado **hiperbólico** se todos os autovalores de $J(e_0)$ têm partes reais diferentes de zero, onde $J(e_0) = DF(e_0)$ representa a matriz Jacobiana de $F(\mathbf{x})$ no ponto e_0 . Se a parte real de algum autovalor for nula o equilíbrio será dito **não-hiperbólico** ou **degenerado**.

Definição 2.1.2 Um ponto de equilíbrio hiperbólico e_0 do sistema (2.1) é chamado **atrator** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais negativas, e um **repulsor** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais positivas.

Definição 2.1.3 Um ponto de equilíbrio hiperbólico e_0 do sistema (2.1) é chamado **sela** se todos os autovalores de $J(e_0)$ forem reais e pelo menos dois deles possuírem sinais opostos. Utilizaremos, então, a notação **sela $\mathbf{n-p}$** , para indicar uma sela com \mathbf{n} autovalores negativos e \mathbf{p} autovalores positivos.

Definição 2.1.4 Por abuso de linguagem, um ponto de equilíbrio hiperbólico e_0 do sistema (2.1) ainda será chamado **sela** se todos os autovalores de $J(e_0)$ tiverem partes reais diferentes de zero e pelo menos dois deles possuírem partes reais com sinais opostos. Utilizaremos, então, a notação **sela $\mathbf{n-p}$** , para indicar uma sela com \mathbf{n} autovalores com partes reais negativas e \mathbf{p} autovalores com partes reais positivas.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais no plano dependendo do parâmetro ξ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \pm (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é equilíbrio desse sistema com a matriz Jacobiana dada por

$$A = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix},$$

que possui autovalores $\lambda_1 = \xi + i$ e $\lambda_2 = \xi - i$. Introduzindo a variável complexa $z = x_1 + ix_2$, como

$$\dot{x}_1 = \xi x_1 - x_2 \pm x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

e

$$\dot{x}_2 = x_1 + \xi x_2 \pm x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

temos

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \xi(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) \pm (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

podemos então reescrever (2.2) na sua forma complexa

$$\dot{z} = (\xi + i)z \pm z|z|^2. \quad (2.3)$$

Usando agora a representação $z = \rho e^{i\theta}$, obtemos

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta}$$

e, portanto,

$$\dot{\rho}e^{i\theta} + \rho i\dot{\theta}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}(\xi + i \pm \rho^2).$$

Assim, podemos escrever a equação (2.3) em sua forma polar

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\xi \pm \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Da primeira equação de (2.4), podemos perceber que $\rho = 0$ é um ponto de equilíbrio para qualquer valor de ξ (obviamente só consideraremos $\rho \geq 0$). Outro ponto de equilíbrio surgirá para determinados valores de ξ , dependendo do sinal do termo cúbico em (2.4). Suponha, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(\xi - \rho^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Então, para $\xi > 0$, $\rho(\xi) = \sqrt{\xi}$ é um ponto de equilíbrio que descreve uma órbita periódica circular com velocidade constante. Este sistema sempre tem um equilíbrio na origem que é um foco atrator se $\xi < 0$, um foco repulsor para $\xi > 0$ ou um foco atrator “fraco” (um

equilíbrio não linear e topologicamente equivalente ao foco atrator), para o valor crítico $\xi = 0$. Para $\xi > 0$, a origem fica isolada por uma órbita fechada (ciclo limite) que é única e atratora. Este ciclo é uma circunferência de raio $\rho(\xi) = \sqrt{\xi}$. Todas as órbitas externas ou internas a este ciclo, com exceção da origem, tendem ao ciclo limite quando $t \rightarrow +\infty$, veja Figura 2.1. Este fenômeno de geração de uma órbita periódica e a mudança de

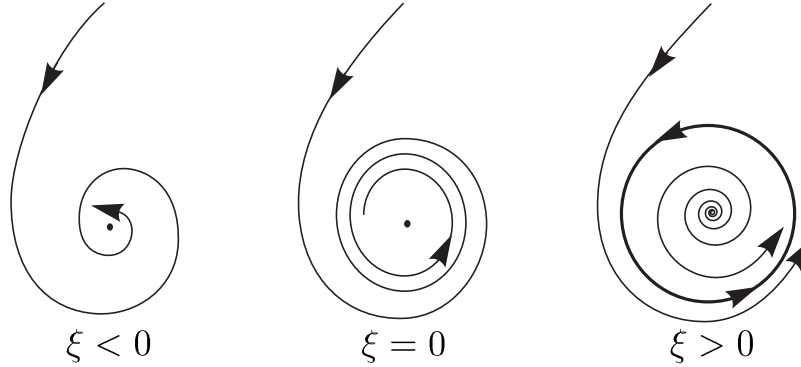


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2.5) ilustrando uma bifurcação de Hopf.

estabilidade do foco a partir de uma perturbação no parâmetro ξ será chamado **Bifurcação de Andronov–Hopf** ou, simplesmente, **Bifurcação de Hopf**.

O outro sistema de (2.5),

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\xi + \rho^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

pode ser analisado da mesma maneira. Teremos a bifurcação de Andronov–Hopf para $\xi = 0$ mas, ao contrário de (2.5), o ciclo limite, que surgirá para $\xi < 0$, é repulsor. Para valores de $\xi > 0$ a origem é um foco repulsor e não possui ciclo limite, quando $\xi = 0$ será um foco repulsor “fraco” (não linear) e para $\xi < 0$ um foco atrator. Neste último caso teremos então o ciclo limite repulsor dado por uma órbita fechada cujo desenho será dado por uma circunferência centrada na origem de raio $\rho(\xi) = \sqrt{-\xi}$. Todas as órbitas iniciando externa ou internamente ao ciclo, com exceção da origem, tendem a este ciclo quando $t \rightarrow -\infty$.

Definição 2.1.5 *Os sistemas (2.2), ou equivalentemente, (2.3) e (2.4), serão denominados formas normais das bifurcações de Hopf.*

A seguinte definição será usada na próxima seção, onde estudaremos a bifurcação de Hopf genérica.

Definição 2.1.6 *Dois sistemas*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y}, \zeta), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \zeta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.8)$$

são ditos **localmente topologicamente equivalentes** em torno da origem se existir uma aplicação $(\mathbf{x}, \xi) \mapsto (h_\xi(\mathbf{x}), k(\xi))$, definida em uma vizinhança $V = U_0 \times V_0$ de $(\mathbf{x}, \xi) = (0, 0)$, contida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, satisfazendo:

- (i) $k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo definido em V_0 ;
- (ii) $h_\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo para cada ξ , definido na vizinhança U_0 de $\mathbf{x} = 0$, $h_0(0) = 0$, levando órbitas de (2.7) contidas em U_0 em órbitas de (2.8) em $h_\xi(U_0)$, preservando a direção do tempo.

2.2 Bifurcações de Hopf no plano

Nesta seção encontraremos condições para que um sistema seja localmente topologicamente equivalente à forma normal, que acabamos de definir, para a bifurcação de Hopf. Este resultado será obtido no Teorema 2.2.1.

Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

que como definido no início do capítulo, representa a forma normal da bifurcação de Hopf cujo sinal dos termos cúbicos é negativo e, conseqüentemente, apresenta uma órbita periódica atratora.

Lema 2.2.1 *O sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4), \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $\xi \in \mathbb{R}^1$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4)$ representa os termos de ordem 4 e superiores, que depende suavemente de ξ , é localmente topologicamente equivalente em torno da origem ao sistema (2.9).

Demonstração 2.2.1

Parte I (Existência e unicidade do ciclo).

Escrevendo (2.10) nas coordenadas polares (ρ, θ) , obtemos

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\xi - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \Psi(\rho, \theta), \end{cases} \quad (2.11)$$

onde $\Phi = \mathcal{O}(|\rho|^4)$, $\Psi = \mathcal{O}(|\rho|^3)$, e não indicaremos a dependência em ξ dessas funções para não complicarmos a notação. Uma órbita de (2.11) partindo de $(\rho, \theta) = (\rho_0, 0)$ tem

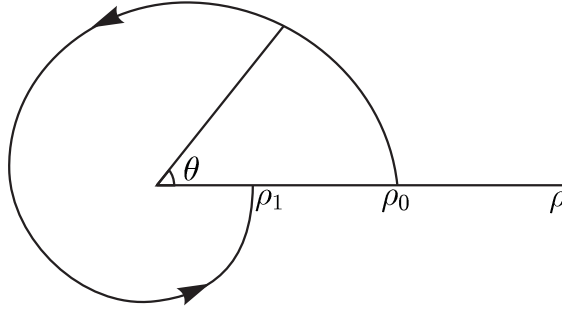


Figura 2.2: Transformação de Poincaré para a bifurcação de Hopf.

a seguinte representação, veja Figura 2.2: $\rho = \rho(\theta; \rho_0)$, $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$ com ρ satisfazendo a equação

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho(\xi - \rho^2) + \Phi(\rho, \theta)}{1 + \Psi(\rho, \theta)} = \rho(\xi - \rho^2) + R(\rho, \theta), \quad (2.12)$$

onde $R = \mathcal{O}(|\rho|^4)$. Note que a transformação de (2.11) para (2.12) é equivalente a uma reparametrização do tempo com $\dot{\theta} = 1$, implicando que o tempo de retorno para o semi-eixo $\theta = 0$ é o mesmo para todas as órbitas que partem desse eixo com $\rho_0 > 0$. Como $\rho(\theta; 0) \equiv 0$, podemos escrever a expansão de Taylor para $\rho(\theta; \rho_0)$,

$$\rho = u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \mathcal{O}(|\rho_0|^4). \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}(u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots) = \\ & = (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots) [\xi - (u_1(\theta)\rho_0 + u_2(\theta)\rho_0^2 + u_3(\theta)\rho_0^3 + \dots)^2] + R(\rho, \theta) \\ & = u_1(\theta)\rho_0\xi + u_2(\theta)\rho_0^2\xi + u_3(\theta)\rho_0^3\xi - u_1^3(\theta)\rho_0^3 + \dots + R(\rho, \theta), \end{aligned}$$

de onde vem as seguintes equações diferenciais lineares resultantes das correspondentes potências de ρ_0

$$\frac{du_1}{d\theta} = u_1\xi, \quad \frac{du_2}{d\theta} = u_2\xi, \quad \frac{du_3}{d\theta} = u_3\xi - u_1^3.$$

Como queremos, para $\theta = 0$, $\rho = \rho_0$, estabelecemos as condições iniciais $u_1(0) = 1$,

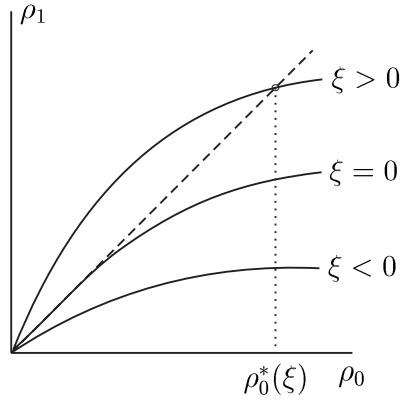


Figura 2.3: Ponto fixo da transformação de retorno.

$u_2(0) = u_3(0) = 0$, obtendo assim

$$u_1(\theta) = e^{\xi\theta}, \quad u_2(\theta) \equiv 0, \quad u_3(\theta) = e^{\xi\theta} \frac{1 - e^{2\xi\theta}}{2\xi}.$$

Note que essas expressões são independentes de $R(\rho, \theta)$. Como na expressão de $u_3(2\pi)$ vale a igualdade

$$e^{2\pi\xi} \frac{1 - e^{2(2\pi)\xi}}{2\xi} = \frac{e^{2\pi\xi}}{2\xi} \left[1 - (1 + 2(2\pi)\xi + \frac{(2(2\pi))^2 \xi^2}{2!} + \dots) \right] = -e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)],$$

podemos concluir que a transformação de retorno $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$ tem a forma

$$\rho_1 = e^{2\pi\xi} \rho_0 - e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4), \quad (2.14)$$

para todo $R = \mathcal{O}(\rho^4)$. A função (2.14) pode ser facilmente analisada para ρ_0 e $|\xi|$ suficientemente pequenos. Existe uma vizinhança da origem onde essa função tem somente o ponto fixo trivial para pequenos valores de $\xi < 0$ e um ponto fixo extra, $\rho_0^* = \sqrt{\xi} + \dots$, para pequenos valores de $\xi > 0$, veja Figura 2.3. Para verificar essa última afirmação, consideremos a função (2.14) escrita na forma

$$\rho_1 = \rho_0 \tilde{S}(\xi, \rho_0), \quad (2.15)$$

onde

$$\tilde{S}(\xi, \rho_0) = e^{2\pi\xi} (1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3).$$

Teremos, então, a equação dos pontos fixos, para $\rho_0 > 0$, dada por

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\xi, \rho_0) &= 1 \\ \Leftrightarrow e^{2\pi\xi} (1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2) + \mathcal{O}(\rho_0^3) &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) &= e^{-2\pi\xi} \\ \Leftrightarrow 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Seja

$$S(\xi, \rho_0) = 1 - [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] \rho_0^2 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) - e^{-2\pi\xi}.$$

Aplicando o Teorema da Função Implícita na função $S(\xi, \rho_0)$, para $(\xi, \rho_0) = (0, 0)$, comprovamos a afirmação. De fato, $S(0, 0) = 0$ e $S_\xi(0, 0) = 2\pi \neq 0$, o que nos permite escrever ξ como função de ρ_0 numa vizinhança de $\rho_0 = 0$ e calcular

$$\xi'(\rho_0) = -\frac{S_{\rho_0}(\rho_0, \xi(\rho_0))}{S_\xi(\rho_0, \xi(\rho_0))} = \frac{2(2\pi + \mathcal{O}(\xi))\rho_0 + e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^2)}{(\dots)\rho_0^2 - 2\pi e^{-2\pi\xi} \mathcal{O}(\rho_0^3) + 2\pi e^{-2\pi\xi}}.$$

Portanto, temos que

$$\xi'(0) = 0, \quad \xi''(0) = 2,$$

implicando, pela expansão de Taylor em torno de $\rho_0 = 0$, $\xi(0) = 0$, que

$$\xi(\rho_0) = \rho_0^2 + \dots,$$

que é uma função injetora no domínio $\rho_0 \geq 0$.

A estabilidade dos pontos fixos também é obtida de (2.14). Derivando (2.15) com relação a ρ_0 , obtemos

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_0} = \tilde{S}(\xi, \rho_0) + \rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0).$$

Para provarmos a estabilidade de ρ_0^* basta mostrarmos que

$$\frac{d\rho_1}{d\rho_0}(\rho_0^*) < 1.$$

De fato, como $\tilde{S}(\xi, \rho_0) = 1$ para $\rho_0 = \rho_0^*$, $\xi = \xi(\rho_0^*)$, resta vermos que $\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi(\rho_0^*), \rho_0^*)$ é negativo. Calculando

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0) = \rho_0 \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \rho_0}(\xi, \rho_0),$$

obtemos

$$\rho_0 \tilde{S}_{\rho_0}(\xi, \rho_0) = \rho_0^2 [-2e^{2\pi\xi} [2\pi + \mathcal{O}(\xi)] + \mathcal{O}(\rho_0)],$$

que, para pequenos valores de $\rho_0^* > 0$, $\xi(\rho_0^*) > 0$, satisfaz o esperado.

Levando em conta que o ponto fixo positivo da função corresponde a um ciclo limite do sistema, podemos concluir que o sistema (2.11), ou (2.10), com quaisquer termos $\mathcal{O}(|\rho|^4)$,

tem um único (e estável) ciclo limite bifurcando da origem quando $\xi > 0$ como no sistema (2.9). Portanto, em outras palavras, os termos de ordem superior não afetam o surgimento do ciclo limite numa vizinhança de $(x_1, x_2) = (0, 0)$ com $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Parte II (Construção do homeomorfismo)

Estabelecida a existência e unicidade do ciclo limite, indicaremos agora como proceder para se obter os homeomorfismos necessários e concluir a equivalência topológica dos retratos de fase.

Fixemos ξ pequeno, mas positivo. Ambos os sistemas (2.9) e (2.10) têm um ciclo limite em alguma vizinhança da origem. Assuma que já tenha sido realizada no sistema (2.10) a reparametrização do tempo, resultando num tempo de retorno constante 2π (veja Parte I). Além disso, aplicamos um escalonamento linear nas coordenadas do sistema (2.10) de modo que o ponto de intersecção do ciclo e o semi-eixo horizontal seja $x_1 = \sqrt{\xi}$.

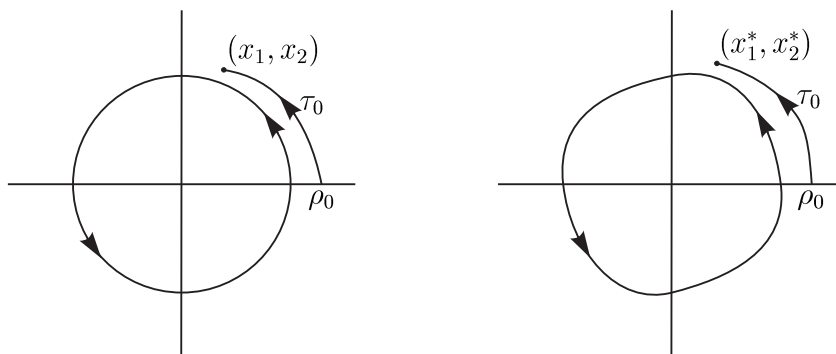


Figura 2.4: Construção do homeomorfismo próximo à bifurcação de Hopf.

Defina a função $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^*$ do seguinte modo: Pegue o ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e encontre valores (ρ_0, τ_0) , onde τ_0 é o tempo mínimo que uma órbita do sistema (2.9) leva para alcançar o ponto \mathbf{x} partindo do semi-eixo horizontal com $\rho = \rho_0$. Agora, pegue o ponto deste eixo com $\rho = \rho_0$ e construa uma órbita do sistema (2.10) no intervalo $[0; \tau_0]$ partindo desse ponto. Denote o ponto resultante por $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$, veja Figura 2.4. Assuma que $\mathbf{x}^* = 0$ para $\mathbf{x} = 0$.

A função construída é um homeomorfismo que, para $\xi > 0$, leva órbitas do sistema (2.9), em alguma vizinhança da origem, em órbitas de (2.10), preservando a direção do

tempo. O caso $\xi < 0$ pode ser considerado da mesma forma com uma nova mudança de coordenadas. ■

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

com f suave, tendo para $\xi = 0$ o equilíbrio $e = 0$ com autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, como $\lambda = 0$ não é um autovalor da matriz Jacobiana, o sistema tem um único equilíbrio $e_0(\xi)$ em alguma vizinhança da origem para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno. Podemos, então, através de uma mudança de coordenadas, levar este equilíbrio para a origem. Portanto vamos assumir sem perda de generalidade que $e = 0$ é ponto de equilíbrio do sistema para $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Então o sistema pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \xi), \tag{2.16}$$

onde F é uma função suave com componentes $F_{1,2}$, tendo expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos de primeira ordem, $F = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|)$. A matriz Jacobiana $A(\xi) = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ possui dois autovalores

$$\lambda_1(\xi) = \lambda(\xi), \quad \lambda_2(\xi) = \bar{\lambda}(\xi),$$

onde

$$\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi),$$

e a condição para a bifurcação de Hopf é

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Seja $q(\xi) \in \mathbb{C}^2$ autovetor complexo correspondente ao autovalor $\lambda(\xi)$, e dado por

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi),$$

e seja $p(\xi) \in \mathbb{C}^2$ autovetor da matriz transposta $A^\top(\xi)$ correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}(\xi)$,

$$A^\top(\xi)p(\xi) = \bar{\lambda}(\xi)p(\xi).$$

É sempre possível normalizar p com respeito a q , tal que

$$\langle p(\xi), q(\xi) \rangle = 1,$$

onde $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$ é o produto escalar em \mathbb{C}^2 . Qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado unicamente para todo ξ pequeno como

$$\mathbf{x} = zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi),$$

para algum complexo z . Temos então a seguinte fórmula explícita para se determinar z

$$z = \langle p(\xi), \mathbf{x} \rangle. \quad (2.17)$$

Para verificar esta fórmula notemos que

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{x} \rangle &= \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle p, \mathbf{x} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$, basta vermos que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{q} \rangle &= \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda} \right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \bar{\lambda}$, pois para $|\xi|$ suficientemente pequeno temos $\omega(\xi) > 0$, concluímos que

$$\langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Lema 2.2.2 *O sistema (2.16) pode ser escrito, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na forma*

$$\dot{z} = \lambda(\xi)z + g(z, \bar{z}, \xi), \quad (2.18)$$

onde $g = \mathcal{O}(|z|^2)$ é uma função suave de (z, \bar{z}, ξ) , dada por

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \langle p(\xi), F^*(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle.$$

Demonstração 2.2.2 Em (2.16) temos $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \xi)$, de onde podemos fazer

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2).$$

sendo $A = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ e $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$ representando a expansão de Taylor em \mathbf{x} iniciando com os termos quadráticos (no mínimo). Temos assim que $F(\mathbf{x}) - A\mathbf{x} = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$, porém, para simplificar a notação tomemos $F^*(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2)$. Assim, de (2.17) temos que a variável complexa z satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \langle p(\xi), \dot{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \langle p, A\mathbf{x} + F^*(\mathbf{x}) \rangle \\
&= \langle p, A\mathbf{x} \rangle + \langle p, F^*(\mathbf{x}) \rangle \\
&= \langle p, A(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \langle p, A(zq) \rangle + \langle p, A(\bar{z}\bar{q}) \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \lambda z \langle p, q \rangle + \bar{\lambda} \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle + \langle p, F^*(zq + \bar{z}\bar{q}) \rangle \\
&= \lambda(\xi)z + \langle p(\xi), F^*(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle,
\end{aligned}$$

obtendo então a forma (2.18), como queríamos. ■

Escrevendo g em série de Taylor nas duas variáveis complexas (z e \bar{z}) temos

$$g(z, \bar{z}, \xi) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\xi) z^k \bar{z}^l,$$

onde

$$g_{kl}(\xi) = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\xi), F(zq(\xi) + \bar{z}\bar{q}(\xi), \xi) \rangle \right|_{z=0},$$

para $k + l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$.

Suponha que, para $\xi = 0$, a função $F(\mathbf{x}, \xi)$ de (2.16) seja representada na forma

$$F(\mathbf{x}, 0) = A\mathbf{x} + \frac{1}{2}B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}C(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{24}D(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{120}E(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^6), \quad (2.19)$$

onde $A = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ e $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ e $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ são funções multilineares simétricas de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Em coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
B_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j,k=1}^2 \left. \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \right|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k, \\
C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{j,k,l=1}^2 \left. \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \right|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l, \\
D_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) &= \sum_{j,k,l,r=1}^2 \left. \frac{\partial^4 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r} \right|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l \mathbf{u}_r, \\
E_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{j,k,l,r,s=1}^2 \left. \frac{\partial^5 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_r \partial \eta_s} \right|_{\eta=0} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_k \mathbf{z}_l \mathbf{u}_r \mathbf{v}_s,
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Então,

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

onde $q = q(0)$, $p = p(0)$, e os coeficientes de Taylor g_{kl} , $k + l = 2$, dos termos quadráticos em $g(z, \bar{z}, 0)$ podem ser expressos, agora, pelas fórmulas

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

Cálculos similares com C , D e E nos dão

$$g_{30} = \langle p, C(q, q, q) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{12} = \langle p, C(q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{03} = \langle p, C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{40} = \langle p, D(q, q, q, q) \rangle, \quad g_{31} = \langle p, D(q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{22} = \langle p, D(q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{13} = \langle p, D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{04} = \langle p, D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{50} = \langle p, E(q, q, q, q, q) \rangle, \quad g_{41} = \langle p, E(q, q, q, q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{32} = \langle p, E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

$$g_{23} = \langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{14} = \langle p, E(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{05} = \langle p, E(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) \rangle.$$

Lema 2.2.3 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \quad (2.20)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos quadráticos

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^3).$$

Demonstração 2.2.3 A mudança de variável inversa é dada pela expressão

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - h_{20}z\dot{z} - h_{11}(\bar{z}\dot{z} + z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^3).
\end{aligned}$$

Escolhendo, então

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos os termos quadráticos de (2.20). Essas substituições são sempre possíveis, pois, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega_0$ com $\omega_0 > 0$. ■

Lema 2.2.4 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (2.21)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $c_1 = c_1(\xi)$.

Demonstração 2.2.4 A transformação inversa é

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Temos então,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\bar{z}^2\dot{z} + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2}\right)z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda}h_{21}}{2}\right)z^2\bar{z} + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda}h_{12}\right)z\bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda}h_{03}}{2}\right)\bar{z}^3 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})w^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})w^2\bar{w} + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})w\bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03})\bar{w}^3 + \mathcal{O}(|w|^4).
\end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

eliminamos todos os termos cúbicos com exceção do termo $w^2\bar{w}$, que será tratado separadamente. As substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^2\bar{w}$ seria escolher

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}.$$

Isso é possível para $\xi \neq 0$ pequeno, mas quando $\xi = 0$ o denominador se anula, pois $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Para obtermos então uma transformação que dependa suavemente de ξ , escolhemos $h_{21} = 0$, no que resulta

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}.$$

■

O termo $w^2\bar{w}$ é chamado de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo cúbico $z^2\bar{z}$ na equação (2.21).

Lema 2.2.5 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{40}}{24}z^4 + \frac{g_{31}}{6}z^3\bar{z} + \frac{g_{22}}{4}z^2\bar{z}^2 + \frac{g_{13}}{6}z\bar{z}^3 + \frac{g_{04}}{24}\bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5), \quad (2.22)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{40}}{24}w^4 + \frac{h_{31}}{6}w^3\bar{w} + \frac{h_{22}}{4}w^2\bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6}w\bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24}\bar{w}^4,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação sem termos de quarta ordem

$$\dot{w} = \lambda w + \mathcal{O}(|w|^5).$$

Demonstração 2.2.5 A transformação inversa é

$$w = z - \frac{h_{40}}{24}z^4 - \frac{h_{31}}{6}z^3\bar{z} - \frac{h_{22}}{4}z^2\bar{z}^2 - \frac{h_{13}}{6}z\bar{z}^3 - \frac{h_{04}}{24}\bar{z}^4 + \mathcal{O}(|z|^5).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{40}}{6} z^3 \dot{z} - \frac{h_{31}}{6} (3z^2 \bar{z} \dot{z} + z^3 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{22}}{4} (2z \bar{z}^2 \dot{z} + 2z^2 \bar{z} \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{13}}{6} (\bar{z}^3 \dot{z} + 3z \bar{z}^2 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{04}}{6} \bar{z}^3 \dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{40}}{24} - \frac{h_{40}}{6} \lambda \right) z^4 + \left(\frac{g_{31}}{6} - \frac{h_{31}}{2} \lambda - \frac{h_{31}}{6} \bar{\lambda} \right) z^3 \bar{z} + \left(\frac{g_{22}}{4} - \frac{h_{22}}{2} \lambda - \frac{h_{22}}{2} \bar{\lambda} \right) z^2 \bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{13}}{6} - \frac{h_{13}}{6} \lambda - \frac{h_{13}}{6} \bar{\lambda} \right) z \bar{z}^3 + \left(\frac{g_{04}}{24} - \frac{h_{04}}{6} \bar{\lambda} \right) \bar{z}^4 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{24} (g_{40} - 3\lambda h_{40}) w^4 + \frac{1}{6} (g_{31} - (2\lambda + \bar{\lambda}) h_{31}) w^3 \bar{w} + \frac{1}{4} (g_{22} - (\lambda + 2\bar{\lambda}) h_{22}) w^2 \bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_{13} - 3\bar{\lambda} h_{13}) w \bar{w}^3 + \frac{1}{24} (g_{04} - (4\bar{\lambda} - \lambda) h_{04}) \bar{w}^4 + \mathcal{O}(|w|^5).
\end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$\begin{aligned}
h_{40} &= \frac{g_{40}}{3\lambda}, \quad h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda + \bar{\lambda}}, \quad h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\bar{\lambda}}, \\
h_{13} &= \frac{g_{13}}{3\bar{\lambda}}, \quad h_{04} = \frac{g_{04}}{4\bar{\lambda} - \lambda},
\end{aligned}$$

eliminamos assim, todos os termos de ordem quatro. Temos que estas substituições são sempre possíveis uma vez que, para $|\xi|$ suficientemente pequeno, os denominadores nunca se anulam, afinal $\lambda(0) = i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. ■

Lema 2.2.6 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{50}}{120} z^5 + \frac{g_{41}}{24} z^4 \bar{z} + \frac{g_{32}}{12} z^3 \bar{z}^2 + \frac{g_{23}}{12} z^2 \bar{z}^3 + \frac{g_{14}}{24} z \bar{z}^4 + \frac{g_{05}}{120} \bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6), \quad (2.23)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenada complexa

$$z = w + \frac{h_{50}}{120} w^5 + \frac{h_{41}}{24} w^4 \bar{w} + \frac{h_{32}}{12} w^3 \bar{w}^2 + \frac{h_{23}}{12} w^2 \bar{w}^3 + \frac{h_{14}}{24} w \bar{w}^4 + \frac{h_{05}}{120} \bar{w}^5,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo de quinta ordem

$$\dot{w} = \lambda w + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $c_2 = c_2(\xi)$.

Demonstração 2.2.6 A transformação inversa é dada por

$$w = z - \frac{h_{50}}{120} z^5 - \frac{h_{41}}{24} z^4 \bar{z} - \frac{h_{32}}{12} z^3 \bar{z}^2 - \frac{h_{23}}{12} z^2 \bar{z}^3 - \frac{h_{14}}{24} z \bar{z}^4 - \frac{h_{05}}{120} \bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6).$$

De onde temos que

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{50}}{24} z^4 \dot{z} - \frac{h_{41}}{24} (4z^3 \bar{z} \dot{z} + z^4 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{32}}{12} (3z^2 \bar{z}^2 \dot{z} + 2z^3 \bar{z} \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{23}}{12} (2z \bar{z}^3 \dot{z} + 3z^2 \bar{z}^2 \dot{\bar{z}}) \\
&\quad - \frac{h_{14}}{24} (\bar{z}^4 \dot{z} + 4z \bar{z}^3 \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{05}}{24} \bar{z}^4 \dot{\bar{z}} + \mathcal{O}(|z|^6) \\
&= \lambda z + \left(\frac{g_{50}}{120} - \frac{h_{50}}{24} \lambda \right) z^5 + \left(\frac{g_{41}}{24} - \frac{h_{41}}{6} - \frac{h_{41}}{24} \bar{\lambda} \right) z^4 \bar{z} + \left(\frac{g_{32}}{12} - \frac{h_{32}}{4} \lambda - \frac{h_{32}}{6} \bar{\lambda} \right) z^3 \bar{z}^2 \\
&\quad + \left(\frac{g_{23}}{12} - \frac{h_{23}}{6} \lambda - \frac{h_{23}}{4} \bar{\lambda} \right) z^2 \bar{z}^3 + \left(\frac{g_{14}}{24} - \frac{h_{14}}{24} \lambda - \frac{h_{14}}{6} \bar{\lambda} \right) z \bar{z}^4 + \left(\frac{g_{05}}{120} - \frac{h_{05}}{24} \bar{\lambda} \right) \bar{z}^5 + \mathcal{O}(|z|^6) \\
&= \lambda w + \frac{1}{120} (g_{50} - 4\lambda h_{50}) w^5 + \frac{1}{24} (g_{41} - (3\lambda + \bar{\lambda}) h_{41}) w^4 \bar{w} + \frac{1}{12} (g_{32} - 2(\lambda + \bar{\lambda}) h_{32}) w^3 \bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{12} (g_{23} - (\lambda + 3\bar{\lambda}) h_{23}) w^2 \bar{w}^3 + \frac{1}{24} (g_{14} - 4\bar{\lambda} h_{14}) w \bar{w}^4 + \frac{1}{120} (g_{05} - (5\bar{\lambda} - \lambda) h_{05}) \bar{w}^5 + \mathcal{O}(|w|^6).
\end{aligned}$$

Fazendo, portanto,

$$\begin{aligned}
h_{50} &= \frac{g_{50}}{4\lambda}, \quad h_{41} = \frac{g_{41}}{3\lambda + \bar{\lambda}}, \quad h_{23} = \frac{g_{23}}{\lambda + 3\bar{\lambda}}, \\
h_{14} &= \frac{g_{14}}{4\bar{\lambda}}, \quad h_{05} = \frac{g_{05}}{5\bar{\lambda} - \lambda},
\end{aligned}$$

eliminamos assim, todos os termos de ordem 5, exceto $w^3 \bar{w}^2$, que trataremos separadamente. Temos que estas substituições são válidas, pois, os denominadores envolvidos são diferentes de zero para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno.

Uma tentativa de eliminar o termo $w^3 \bar{w}^2$ seria escolher

$$h_{32} = \frac{g_{32}}{2(\lambda + \bar{\lambda})}.$$

Isto é possível para $\xi \neq 0$ pequeno, mas o denominador se anula quando $\xi = 0$, vejamos $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 - i\omega_0 = 0$. Para obter uma transformação que dependa suavemente de ξ , escolhemos $h_{32} = 0$, o que resulta em

$$c_2 = \frac{g_{32}}{12}.$$

■

O termo $w^3 \bar{w}^2$ também é chamado de *termo ressonante*. Note que o seu coeficiente é o mesmo coeficiente do termo de quinta ordem $z^3 \bar{z}^2$ na equação (2.23).

Lema 2.2.7 *A equação*

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 5} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^6), \quad (2.24)$$

onde $\lambda = \lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e $g_{ij} = g_{ij}(\xi)$, pode ser transformada, pela mudança de coordenadas complexa

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3 + \frac{h_{40}}{24}w^4 + \frac{h_{31}}{6}w^3\bar{w} \\ + \frac{h_{22}}{4}w^2\bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6}w\bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24}\bar{w}^4 + \frac{h_{50}}{120}w^5 + \frac{h_{41}}{24}w^4\bar{w} + \frac{h_{23}}{12}w^2\bar{w}^3 + \frac{h_{14}}{24}w\bar{w}^4 + \frac{h_{05}}{120}\bar{w}^5,$$

para $|\xi|$ suficientemente pequeno, na equação com apenas um termo cúbico e um termo de ordem 5

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + c_2 w^3 \bar{w}^2 + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.25)$$

com $c_1 = c_1(\xi)$ e $c_2 = c_2(\xi)$.

Demonstração 2.2.7 Obviamente a suposição das transformações definidas nos lemas anteriores, nos levam a este resultado. As transformações

$$z = w + \frac{h_{20}}{2}w^2 + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2}\bar{w}^2, \\ z = w + \frac{h_{40}}{24}w^4 + \frac{h_{31}}{6}w^3\bar{w} + \frac{h_{22}}{4}w^2\bar{w}^2 + \frac{h_{13}}{6}w\bar{w}^3 + \frac{h_{04}}{24}\bar{w}^4, \quad (2.26)$$

com

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}, \\ h_{40} = \frac{g_{40}}{3\lambda}, \quad h_{31} = \frac{g_{31}}{2\lambda + \lambda}, \quad h_{22} = \frac{g_{22}}{\lambda + 2\lambda}, \quad h_{13} = \frac{g_{13}}{3\lambda}, \quad h_{04} = \frac{g_{04}}{4\lambda - \lambda},$$

definidas nos Lemas 2.2.3 e 2.2.5, anulam os respectivos termos, mas também alteram outros termos. Os coeficientes $g_{21}/2$ e $g_{32}/12$ dos termos $z^2\bar{z}$ e $z^3\bar{z}^2$ respectivamente na equação (2.24) foram modificados pelas transformações de (2.26). Os termos de ordem 6 ou maiores, afetam somente $\mathcal{O}(|w|^6)$ e podem ser truncados. ■

Necessitamos, agora, calcular os coeficientes c_1 e c_2 em termos da equação (2.24). O valor de c_1 e c_2 serão dados pelos novos coeficientes $g_{21}^*/2$ e $g_{32}^*/12$ dos termos $w^2\bar{w}$ e $w^3\bar{w}^2$ após as transformações de (2.26). Seguem então os lemas.

Lema 2.2.8 O coeficiente $c_1(\xi)$ da equação (2.25), para $\xi = 0$, é dado por

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (2.27)$$

Demonstração 2.2.8 Diferenciando a primeira expressão de (2.26), obtemos

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20}w\dot{w} + h_{11}(w\dot{\bar{w}} + \bar{w}\dot{w}) + h_{02}\bar{w}\dot{\bar{w}}.$$

Substituindo \dot{w} e seu complexo conjugado $\dot{\bar{w}}$, usando (2.25), obtemos

$$\dot{z} = \lambda w + \lambda h_{20}w^2 + (\lambda + \bar{\lambda})h_{11}w\bar{w} + \bar{\lambda}h_{02}\bar{w}^2 + c_1w^2\bar{w} + \dots .$$

Por outro lado, na equação (2.24),

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{30}z^3 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2}g_{12}z\bar{z}^2 + \frac{1}{6}g_{03}\bar{z}^3 + \dots ,$$

se substituirmos z e \bar{z} , dados pela primeira expressão de (2.26), escrevemos apenas os termos que nos interessam, temos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \lambda w + \frac{1}{2}(\lambda h_{20} + g_{20})w^2 + (\lambda h_{11} + g_{11})w\bar{w} + \frac{1}{2}(\lambda h_{02} + g_{02})\bar{w}^2 + \\ &\quad \left(g_{20}h_{11} + g_{11} \left(\frac{h_{20}}{2} + \bar{h}_{11} \right) + \frac{g_{02}\bar{h}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} \right) w^2\bar{w} + \dots . \end{aligned}$$

Comparando, então os coeficientes do termo $w^2\bar{w}$ nas duas equações obtidas, utilizando os valores encontrados para h_{20} , h_{11} e h_{02} ,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda},$$

temos

$$\begin{aligned} c_1 &= g_{20}\frac{g_{11}}{\lambda} + g_{11} \left(\frac{g_{20}}{2\lambda} + \frac{\bar{g}_{11}}{\lambda} \right) + \frac{g_{02}\bar{g}_{02}}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \end{aligned}$$

Essa fórmula nos dá a dependência de c_1 em relação a ξ , lembrando que λ e g_{ij} são funções suaves do parâmetro. No valor de bifurcação $\xi = 0$, a última equação se reduz a

$$c_1(0) = \frac{g_{20}g_{11}(2i\omega_0 - i\omega_0)}{2\omega_0^2} + \frac{|g_{11}|^2}{i\omega_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2i\omega_0 - i\omega_0)} + \frac{g_{21}}{2},$$

concluindo, finalmente o resultado

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

■

Lema 2.2.9 *A parte real do coeficiente $c_2(\xi)$ da equação (2.25), para $\xi = 0$, é dado por*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_2(0) = & \frac{1}{12} \left\{ \operatorname{Re} g_{32} + \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} \left[g_{20} \bar{g}_{31} - g_{11} (4g_{31} + 3\bar{g}_{22}) - \frac{1}{3} g_{02} (g_{40} + \bar{g}_{13}) - g_{30} g_{12} \right] \right. \\ & + \frac{1}{\omega_0^2} \left[\operatorname{Re} \left(g_{20} \left(\bar{g}_{11} (3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02} \left(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3} g_{30} \right) + \frac{1}{3} \bar{g}_{02} g_{03} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + g_{11} \left(\bar{g}_{02} \left(\frac{5}{3} \bar{g}_{30} + 3g_{12} \right) + \frac{1}{3} g_{02} \bar{g}_{03} - 4g_{11} g_{30} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. \left. + 3 \operatorname{Im} (g_{20} g_{11}) \operatorname{Im} g_{21} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_0^3} \left[\operatorname{Im} (g_{11} \bar{g}_{02} (\bar{g}_{20}^2 - 3\bar{g}_{20} g_{11} - 4g_{11}^2)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \operatorname{Im} (g_{20} g_{11}) (3 \operatorname{Re} (g_{20} g_{11}) - 2|g_{02}|^2) \right] \right\}, \end{aligned}$$

Demonstração 2.3.2 A demonstração é análoga à demonstração do Lema 2.2.8, porém agora trabalharemos com os termos de até ordem 5 e em seguida tomaremos sua parte real. ■

Lema 2.2.10 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\xi) + i\omega(\xi))w + c_1(\xi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$. Então a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \quad (2.28)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro e $s = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_1(0) = \pm 1$.

Demonstração 2.2.10 Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\xi)t$, que preserva a direção, pois, $\omega(\xi) > 0$, para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{\gamma(\xi) + i\omega(\xi)}{\omega(\xi)} w + \frac{c_1(\xi)}{\omega(\xi)} w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4) \\ \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4), \end{aligned}$$

onde

$$\chi = \chi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\omega(\xi)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro, pois

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de ξ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau,$$

com $e_1(\chi) = \text{Im } d_1(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \mathcal{O}(|w|^4),$$

onde $l_1(\chi) = \text{Re } d_1(\chi) - \chi e_1(\chi)$ é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (2.29)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2)d\tau} = (\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots \\ \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2)[(\chi + i)w + l_1(\chi)w|w|^2 + \dots] \\ &= (\chi + i)w + [l_1(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 + \dots \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re } d_1 - \chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + \dots \\ &= (\chi + i)w + [\text{Re } d_1 + i \text{Im } d_1]w|w|^2 + \dots \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + \dots \end{aligned}$$

Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\chi)|}},$$

que é possível, pois $\text{Re } c_1(0) \neq 0$ e, portanto, $l_1(0) \neq 0$. A equação toma, então, a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|l_1|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} + l_1 \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1|}} \right|^2 + \dots \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{l_1(\chi)}{|l_1(\chi)|} u|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4) = (\chi + i)u + s|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \end{aligned}$$

com $s = \text{sign } l_1(0) = \text{sign } \text{Re } c_1(0)$. ■

Lema 2.2.11 *Considere a equação*

$$\frac{dw}{dt} = (\gamma(\xi) + i\omega(\xi))w + c_1(\xi)w|w|^2 + c_2(\xi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $\gamma(0) = 0$ e $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suponha $\gamma'(0) \neq 0$ e $\operatorname{Re} c_1(0) = 0$ e $\operatorname{Re} c_2(0) \neq 0$. Então a equação acima poderá ser transformada, por mudanças de coordenadas, na equação

$$\frac{du}{d\theta} = (\chi + i)u + \zeta u|u|^2 + s u|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6), \quad (2.30)$$

onde u é a nova coordenada complexa, θ e χ são, respectivamente, os novos tempo e parâmetro,

$$\zeta = \frac{d_1(0)}{\sqrt{|\operatorname{Re} c_2(0)|}}$$

e $s = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_2(0) = \pm 1$.

Demonstração 2.2.11 Introduzindo o novo tempo $\tau = \omega(\xi)t$, que preserva a direção, pois, $\omega(\xi) > 0$ para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{\gamma(\xi) + i\omega(\xi)}{\omega(\xi)}w + \frac{c_1(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^2 + \frac{c_2(\xi)}{\omega(\xi)}w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \\ \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \end{aligned}$$

onde

$$\chi = \chi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\omega(\xi)}, \quad d_1 = \frac{c_1(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}, \quad d_2 = \frac{c_2(\xi(\chi))}{\omega(\xi(\chi))}.$$

Podemos considerar χ como um novo parâmetro, pois

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = \frac{\gamma'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

e, portanto, o Teorema da Função Inversa nos garante a existência local e suave de ξ como função de χ .

Vamos agora reparametrizar o tempo ao longo das órbitas com a nova mudança de tempo $\theta = \theta(\tau, \chi)$, onde

$$d\theta = (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4)d\tau$$

com $e_1(\chi) = \operatorname{Im} d_1(\chi)$ e $e_2(\chi) = \operatorname{Im} d_2(\chi)$. Essa mudança é próxima da identidade numa pequena vizinhança da origem. Usando esse valor de tempo definido, obtemos

$$\frac{dw}{d\theta} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6),$$

onde $\eta(\chi) = -\chi e_1(\chi)$, $l_2(\chi) = \text{Re } d_2(\chi) + \chi (e_1(\chi)^2 - e_2(\chi))$, é real e

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{\omega(0)} = 0, \quad l_2(0) = \frac{\text{Re } c_2(0)}{\omega(0)}. \quad (2.31)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= \frac{dw}{(1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4)d\tau} = (\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 + \dots, \\ \Leftrightarrow \frac{dw}{d\tau} &= (1 + e_1(\chi)|w|^2 + e_2(\chi)|w|^4) [(\chi + i)w + \eta(\chi)w|w|^2 + l_2(\chi)w|w|^4 \dots] \\ &= (\chi + i)w + [\eta(\chi) + e_1(\chi)(\chi + i)]w|w|^2 + [l_2(\chi) + e_1(\chi)\eta + e_2(\chi)(\chi + i)]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + [-\chi e_1 + \chi e_1 + i e_1]w|w|^2 + [\text{Re } d_2 + \chi e_1^2 - \chi e_2 - \chi e_1^2 + \chi e_2 + i e_2]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + i \text{Im } d_1 w|w|^2 + [\text{Re } d_2 + i \text{Im } d_2]w|w|^4 \dots \\ &= (\chi + i)w + d_1(\chi)w|w|^2 + d_2(\chi)w|w|^4 + \dots \end{aligned}$$

já que neste caso $\text{Re } d_1 = 0$ e sendo assim $i \text{Im } d_1$ é o próprio d_1 . Finalmente, introduzindo a nova variável complexa u

$$w = \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2(\chi)|}},$$

que é possível, pois $\text{Re } c_2(0) \neq 0$ e, portanto, $l_2(0) \neq 0$. A equação toma então a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{|l_2|}} \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i) \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} + d_1 \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \left| \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \right|^2 + l_2 \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \left| \frac{u}{\sqrt[4]{|l_2|}} \right|^4 \dots, \\ \Rightarrow \frac{du}{d\theta} &= (\chi + i)u + \frac{d_1(\chi)}{\sqrt{|l_2(\chi)|}} u|u|^2 + \frac{l_2(\chi)}{|l_2(\chi)|} u|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6) \\ &= (\chi + i)u + \zeta u|u|^2 + s u|u|^4 + \mathcal{O}(|u|^6), \end{aligned}$$

com $s = \text{sinal } l_2(0) = \text{sinal } \text{Re } c_2(0)$. ■

Definição 2.2.1 *As funções $l_1(\chi)$ e $l_2(\chi)$ são chamadas de primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov, respectivamente.*

O que (2.29) e (2.31) nos diz é que o primeiro e o segundo coeficientes de Lyapunov, para $\chi = 0$, podem ser calculados pelas fórmulas

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}) \quad (2.32)$$

e

$$\begin{aligned}
l_2(0) = & \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} g_{32} \right. \\
& + \frac{1}{\omega_0^2} \operatorname{Im} \left[g_{20} \bar{g}_{31} - g_{11} (4g_{31} + 3\bar{g}_{22}) - \frac{1}{3} g_{02} (g_{40} + \bar{g}_{13}) - g_{30} g_{12} \right] \\
& + \frac{1}{\omega_0^3} \left[\operatorname{Re} \left(g_{20} \left(\bar{g}_{11} (3g_{12} - \bar{g}_{30}) + g_{02} \left(\bar{g}_{12} - \frac{1}{3} g_{30} \right) + \frac{1}{3} \bar{g}_{02} g_{03} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + g_{11} \left(\bar{g}_{02} \left(\frac{5}{3} \bar{g}_{30} + 3g_{12} \right) + \frac{1}{3} g_{02} \bar{g}_{03} - 4g_{11} g_{30} \right) \right) \right] \\
& \quad \left. + 3 \operatorname{Im} (g_{20} g_{11}) \operatorname{Im} g_{21} \right] \\
& + \frac{1}{\omega_0^4} \left[\operatorname{Im} (g_{11} \bar{g}_{02} (\bar{g}_{20}^2 - 3\bar{g}_{20} g_{11} - 4g_{11}^2)) \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{Im} (g_{20} g_{11}) (3 \operatorname{Re} (g_{20} g_{11}) - 2|g_{02}|^2) \right] \left. \right\}, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

respectivamente. Isto significa que necessitamos somente das segunda, terceira, quarta e quinta derivadas parciais no ponto de bifurcação para calcularmos $l_1(0)$ e $l_2(0)$.

Observação 2.2.1 *Os valores de $l_1(0)$ e $l_2(0)$ dependerão da normalização dos autovetores q e p , enquanto que seu sinal é invariante pela escolha de q , p , obviamente considerando a normalização $\langle p, q \rangle = 1$.*

Note que se as equações (2.28) e (2.30) com sinal $s = -1$ forem escritas em suas formas reais, elas coincidirão com o sistema (2.10). Podemos agora resumir os resultados obtidos nos seguintes teoremas:

Teorema 2.2.1 (Teorema da bifurcação de Hopf genérica) *Qualquer sistema dinâmico da forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi), \tag{2.34}$$

onde f é suave, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{R}$, tendo para todo $|\xi|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $e = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, satisfazendo:

(1) $l_1(0) \neq 0$ (condição de não degenerescência);

(2) $\gamma'(0) \neq 0$ (condição de transversalidade),

é localmente topologicamente equivalente, em torno da origem, a uma das seguintes formas normais

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & -1 \\ 1 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Demonstração 2.2.1 Utilizando os Lemas 2.2.3, 2.2.4, 2.2.7, 2.2.8 e 2.2.10, transformamos o sistema (2.34) na equação (2.28), e então pelo Lema 2.2.1, concluímos o resultado. ■

Portanto, o Teorema 2.2.1 nos garante que um sistema em duas dimensões que possui autovalores imaginários puros e satisfaz as condições (1) e (2) desse mesmo teorema, possui uma bifurcação de Hopf.

Teorema 2.2.2 (Teorema da bifurcação de Hopf degenerada) *Considere o sistema planar*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \xi),$$

onde f é suave, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{R}^2$, tendo o equilíbrio $e_0 = 0$ com autovalores

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi),$$

para todo $\|\xi\|$ suficientemente pequeno, onde $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Para $\xi = 0$, sejam as condições para a bifurcação de Hopf degenerada

$$\gamma(0) = 0, \quad l_1(0) = 0,$$

onde $l_1(\xi)$ é o primeiro coeficiente de Lyapunov. Assuma que as seguintes condições genéricas sejam satisfeitas:

(1) $l_2(0) \neq 0$, onde $l_2(0)$ é o segundo coeficiente de Lyapunov dado por (2.33);

(2) a função $\xi \mapsto (\gamma(\xi), l_1(\xi))^T$ é regular em $\xi = 0$.

Então, pela introdução de uma variável complexa e aplicando uma transformação de coordenadas que dependa suavemente da escolha do parâmetro e do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa

$$\dot{z} = (\chi + i)z + \zeta z|z|^2 + sz|z|^4 + \mathcal{O}(|z|^6), \quad (2.35)$$

onde $s = \text{sin} l_2(0) = \pm 1$. ■

Veja [4] p. 311.

Para analisar esta bifurcação, podemos estudar a aproximação da forma normal da expressão (2.35) pela exclusão dos termos $\mathcal{O}(|z|^6)$. Vemos assim que esta aproxima-se da forma normal para a bifurcação de Hopf degenerada.

O Teorema 2.2.2 garante-nos que um sistema em duas dimensões, possuindo autovalores imaginários puros, tal que as condições (1) e (2) desse mesmo teorema sejam satisfeitas, possui uma bifurcação de Hopf degenerada.

2.3 Método da projeção

Estudada a bifurcação de Hopf em sistemas de duas dimensões, nosso objetivo agora é obter um método para estudá-la em sistemas de n -dimensões. Tal método baseia-se em transformar o sistema, escrevendo-o em uma base formada pelos seus autovetores. Porém, somente autovetores correspondentes aos valores críticos (responsáveis pela bifurcação) são usados para se projetar o sistema e restringi-lo ao caso bidimensional.

Inicialmente faremos um breve resumo de alguns resultados de Álgebra Linear que serão necessários para a seção.

Seja A uma matriz quadrada e λ um autovalor de A com multiplicidade algébrica m , com v_1, v_2, \dots, v_l , $1 \leq l \leq m$, autovetores linearmente independentes correspondentes a λ . Para cada autovetor v_j , existe uma escolha maximal de vetores $w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_k^{(j)}$, onde $k = k(j) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} Aw_1 &= \lambda w_1, \\ Aw_2 &= \lambda w_2 + w_1, \\ &\dots \\ Aw_k &= \lambda w_k + w_{k-1}. \end{aligned}$$

Note que podemos escolher o vetor $w_1 = w_1^{(j)}$ como sendo o próprio autovetor v_j .

Definição 2.3.1 Os vetores $w_i^{(j)}$, com $i \geq 2$, são chamados **autovetores generalizados** de A correspondentes ao autovalor λ .

Os autovetores generalizados $w_1^{(j)}$, $w_2^{(j)}$, ..., $w_k^{(j)}$, relativos a um autovalor λ são sempre linearmente independentes e o subespaço

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{x} = \alpha_1 w_1^{(j)} + \alpha_2 w_2^{(j)} + \dots + \alpha_k w_k^{(j)}, \alpha_i \in \mathbb{C}\}$$

é A -invariante.

O estudo das formas normais de Jordan nos garante que o espaço \mathbb{C}^n pode ser decomposto em subespaços A -invariantes correspondentes aos autovalores de A e gerados pelos respectivos autovetores e autovetores generalizados. Esses subespaços são chamados de **autoespaços generalizados** de A . Se a matriz A é real, esses subespaços A -invariantes do \mathbb{R}^n serão gerados pelos autovetores e autovetores generalizados de A , correspondentes aos autovalores reais e às partes real e imaginária dos autovalores complexos com, por exemplo, parte imaginária positiva. Ver Kuznetsov [4] e Pontryagin [11].

Seja e_0 um ponto de equilíbrio não-hiperbólico de

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.36)$$

onde $F(\mathbf{x}, 0)$, dada por (2.19) é uma função suave, $A = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ corresponde à parte linear do sistema e possui um par de autovalores imaginários puros $\lambda = i\omega_0$ e $\bar{\lambda} = -i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ e não admite outro autovalor com parte real nula.

Seja $q \in \mathbb{C}^n$ o autovetor correspondente à λ . Então

$$A(\xi_0)q(\xi_0) = i\omega_0 q(\xi_0), \quad A(\xi_0)\bar{q}(\xi_0) = -i\omega_0 \bar{q}(\xi_0).$$

Introduza agora o autovetor adjunto $p \in \mathbb{C}^n$ com a propriedade

$$A^\top(\xi_0)p(\xi_0) = -i\omega_0 p(\xi_0), \quad A^\top(\xi_0)\bar{p}(\xi_0) = i\omega_0 \bar{p}(\xi_0),$$

e satisfazendo à normalização

$$\langle p(\xi_0), q(\xi_0) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(\xi_0) q_i(\xi_0) = 1,$$

onde $A^\top(\xi_0)$ é a matriz transposta de $A(\xi_0)$ e $\langle p(\xi_0), q(\xi_0) \rangle$ é o produto escalar padrão em \mathbb{C}^n . Considere o autoespaço real T^c , correspondente a λ e $\bar{\lambda}$. T^c tem dimensão dois e é gerado por $\{Re\ q, Im\ q\}$. O autoespaço real generalizado T^{su} , corresponde a todos os outros autovalores de A , tem dimensão $(n - 2)$.

Sempre podemos decompor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em

$$\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y}_{su},$$

onde $z \in \mathbb{C}$, $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ e $\mathbf{y}_{su} \in T^{su}$, uma vez que $T^{su} \oplus T^c = \mathbb{R}^n$.

Lema 2.3.1 *Seja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{y} \in T^{su}$ se, e somente se, $\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$.*

Demonstração 2.3.1

Parte I ($\mathbf{y} \in T^{su} \Rightarrow \langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$).

Sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ os autovalores reais de A e $\eta_1, \bar{\eta}_1; \eta_2, \bar{\eta}_2; \dots; \eta_k, \bar{\eta}_k$, os autovalores complexos (não reais) de A , diferentes de λ e $\bar{\lambda}$.

Seja T_{μ_i} o autoespaço generalizado correspondente ao autovalor μ_i e $T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ o autoespaço real generalizado correspondente aos autovalores $\eta_j, \bar{\eta}_j$.

Temos, então, que

$$T^{su} = T_{\mu_1} \oplus T_{\mu_2} \oplus \dots \oplus T_{\mu_l} \oplus T_{\eta_1, \bar{\eta}_1} \oplus T_{\eta_2, \bar{\eta}_2} \oplus \dots \oplus T_{\eta_k, \bar{\eta}_k}.$$

Como T_{μ_i} são espaços generalizados, é fato que para cada i existe um $N_{\mu_i} \in \mathbb{N}$, tal que, se $\mathbf{y} \in T_{\mu_i}$, então $(A - \mu_i I_n)^{N_{\mu_i}} \mathbf{y} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, (A - \mu_i I_n)^{N_{\mu_i}} \mathbf{y} \rangle = \langle (A^\top - \bar{\mu}_i I_n)^{N_{\mu_i}} p, \mathbf{y} \rangle = \langle (\bar{\lambda} - \bar{\mu}_i)^{N_{\mu_i}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= (\lambda - \mu_i)^{N_{\mu_i}} \langle p, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

e, como $\lambda \neq \mu_i$, temos que

$$\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Do mesmo modo, como $T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ são espaços generalizados, para cada j existe um $N_{\eta_j} \in \mathbb{N}$, tal que, se $\mathbf{y} \in T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$, então $(A - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, (A - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (A^\top - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} p, (A - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (A^\top - \eta_j I_n)^{N_{\eta_j}} (A^\top - \bar{\eta}_j I_n)^{N_{\eta_j}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle (\bar{\lambda} - \eta_j)^{N_{\eta_j}} (\bar{\lambda} - \eta_j)^{N_{\eta_j}} p, \mathbf{y} \rangle \\ &= (\lambda - \bar{\eta}_j)^{N_{\eta_j}} (\lambda - \eta_j)^{N_{\eta_j}} \langle p, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

e como $\lambda \neq \eta_j$ e $\lambda \neq \bar{\eta}_j$, temos que

$$\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Portanto, para qualquer $\mathbf{y} \in T^{su}$, como podemos escrever

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^l \mathbf{y}_{\mu_i} + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}_{\eta_j},$$

com $\mathbf{y}_{\mu_i} \in T_{\mu_i}$ para $i = 1, \dots, l$ e $\mathbf{y}_{\eta_j} \in T_{\eta_j, \bar{\eta}_j}$ para $j = 1, \dots, k$, podemos concluir então que

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{y} \rangle &= \langle p, \mathbf{y}_{\mu_1} + \dots + \mathbf{y}_{\mu_l} + \mathbf{y}_{\eta_1} + \dots + \mathbf{y}_{\eta_k} \rangle \\ &= \langle p, \mathbf{y}_{\mu_1} \rangle + \dots + \langle p, \mathbf{y}_{\mu_l} \rangle + \langle p, \mathbf{y}_{\eta_1} \rangle + \dots + \langle p, \mathbf{y}_{\eta_k} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Parte II ($\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{y} \in T^{su}$).

Seja \mathbf{y} qualquer, tal que $\mathbf{y} \in T^{su} \oplus T^c \subset \mathbb{R}^n$. Portanto podemos escrever

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{su} + \mathbf{y}_c,$$

com $\mathbf{y}_{su} \in T^{su}$ e $\mathbf{y}_c \in T^c$. Como T^c é gerado por q, \bar{q} , mas $\mathbf{y}_c \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{y}_c = \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q},$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$, concluimos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{su} + \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q}. \quad (2.37)$$

Queremos mostrar aqui que $\mathbf{y}_c = 0$, o que será feito mostrando que $\alpha = 0$.

Da hipótese, temos

$$0 = \langle p, \mathbf{y} \rangle = \langle p, \mathbf{y}_{su} + \mathbf{y}_c \rangle = \langle p, \mathbf{y}_{su} \rangle + \langle p, \mathbf{y}_c \rangle.$$

Do início deste lema (Parte I), temos que $\langle p, \mathbf{y}_{su} \rangle = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle p, \mathbf{y}_c \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle p, \alpha q + \bar{\alpha} \bar{q} \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \langle p, q \rangle + \bar{\alpha} \langle p, \bar{q} \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &= 0, \end{aligned}$$

pois $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{q} \rangle &= \left\langle p, \frac{1}{\bar{\lambda}} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\bar{\lambda}} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \langle p, \bar{q} \rangle, \\ \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como λ não é real, temos $\lambda \neq \bar{\lambda}$ e, portanto $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. ■

Utilizando o lema anterior, podemos agora explicitar z e \mathbf{y} com relação a \mathbf{x} . Sendo $\mathbf{x} = zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, com $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ e $\mathbf{y} \in T^{su}$, vale que

$$\langle p, \mathbf{x} \rangle = \langle p, zq + \bar{z}\bar{q} + \mathbf{y} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle + \langle p, \mathbf{y} \rangle.$$

Como $\langle p, \mathbf{y} \rangle = 0$, pois $\mathbf{y} \in T^{su}$ (lema 2.3.1),

$$\langle p, \mathbf{x} \rangle = \langle p, zq \rangle + \langle p, \bar{z}\bar{q} \rangle = z \langle p, q \rangle + \bar{z} \langle p, \bar{q} \rangle,$$

e lembrando que $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$, como visto na demonstração do lema anterior (Parte II), concluímos que

$$\begin{cases} z &= \langle p, \mathbf{x} \rangle, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} - \langle p, \mathbf{x} \rangle q - \langle \bar{p}, \mathbf{x} \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Teorema 2.3.1 (Teorema da Variedade Central) *Localmente, existe um conjunto invariante $W^c(0)$ de (2.36) que é tangente a T^c em $e_0 = 0$. Tal conjunto é o gráfico de uma aplicação suave, cujas derivadas parciais de todas as ordens são unicamente determinadas.*

Se ψ^t denota o fluxo associado a (2.36), então existe uma vizinhança U de $e_0 = 0$, tal que se $\psi^t \mathbf{x} \in U$ para todo $t \geq 0$ ($t \leq 0$), então $\psi^t \mathbf{x} \rightarrow W^c(0)$ para $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

Dem. Ver Kuznetsov [4]. ■

Definição 2.3.2 W^c é chamado de **variedade central**.

Considere uma variedade central W^c que tenha a mesma classe de diferenciabilidade (finita) que f (se $f \in C^k$ para algum k finito, W^c é também uma variedade de classe C^k) em alguma vizinhança U de e_0 . Contudo, quando $k \rightarrow \infty$, a vizinhança U pode

diminuir, podendo resultar na não-existência de uma variedade W^c de classe C^∞ , para algum sistema C^∞ .

Assim, o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{z} = Bz + g(z, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} = C\mathbf{y} + h(z, \mathbf{y}), \end{cases} \quad (2.39)$$

onde $z \in T^c$, $\mathbf{y} \in T^{su}$, B é uma matriz 2×2 formada pelos autovalores com partes reais nulas, e C é uma matriz $(n-2) \times (n-2)$ formada pelos autovalores com partes reais não nulas. As funções g e h têm a expansão de Taylor começando com os termos quadráticos. A variedade central W^c do sistema (2.39) pode ser localmente representada como um gráfico de uma função suave

$$W^c = \{(z, \bar{z}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = V(z, \bar{z})\}.$$

Veja Figura 2.5. Aqui, $V : T^c \rightarrow T^{su}$, e devido à propriedade de tangência de W^c , $V(z, \bar{z}) = \mathcal{O}(|z|^2)$.

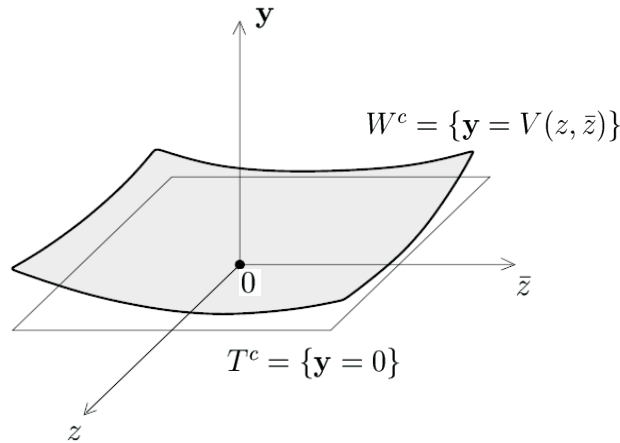


Figura 2.5: Variedade central como um gráfico de $\mathbf{y} = V(z, \bar{z})$.

Qualquer vetor $\mathbf{z} \in T^c$ pode ser representado como $\mathbf{z} = wq + \bar{w}\bar{q}$, onde $w = \langle p, \mathbf{z} \rangle \in \mathbb{C}$. A variedade central bidimensional pode ser parametrizada por w, \bar{w} por meio de uma imersão da forma $\mathbf{x} = H(w, \bar{w})$, onde $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem sua expansão de Taylor da forma

$$H(w, \bar{w}) = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{2 \leq j+k \leq 5} \frac{1}{j!k!} h_{jk} w^j \bar{w}^k + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.40)$$

com $h_{jk} \in \mathbb{C}^n$ e $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$. Substituindo (2.40) em (2.36), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' = F(H(w, \bar{w})), \quad (2.41)$$

onde F é dada pela expansão (2.19). De acordo com a fórmula (2.25), temos que o campo restrito à variedade central pode ser escrito na forma

$$w' = i\omega_0 w + \frac{1}{2} g_{21} w |w|^2 + \frac{1}{12} g_{32} w |w|^4 + \mathcal{O}(|w|^6), \quad (2.42)$$

com $g_{jk} \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, o que estamos fazendo é projetar o campo de vetores sobre a variedade central. Assim, sobre a variedade central, a equação diferencial se comporta como no plano.

Observação 2.3.1 *Temos que a equação (2.42) é exatamente igual à equação (2.25).*

Vejam, $w^2 \bar{w} = w |w|^2$, $w^3 \bar{w}^2 = w |w|^4$ e tomando

$$c_1 = \frac{1}{2} g_{21} \text{ e } c_2 = \frac{1}{12} g_{32}$$

chegamos à equação (2.42).

Temos

$$\begin{aligned} H_w &= q + h_{20} w + h_{11} \bar{w} + \frac{1}{2} h_{30} w^2 + h_{21} w \bar{w} + \frac{1}{2} h_{12} \bar{w}^2 + \frac{1}{6} h_{40} w^3 + \frac{1}{2} \bar{h}_{31} w^2 \bar{w} + \frac{1}{2} h_{22} w \bar{w}^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} h_{13} \bar{w}^3 + \frac{1}{4} h_{32} w^2 \bar{w}^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\bar{w}} &= \bar{q} + h_{11} w + h_{02} \bar{w} + h_{12} w \bar{w} + \frac{1}{2} h_{21} w^2 + \frac{1}{2} h_{03} \bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{13} w \bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{22} w^2 \bar{w} + \frac{1}{6} h_{31} w^3 \\ &\quad + \frac{1}{6} h_{04} \bar{w}^3 + \frac{1}{6} h_{32} w^3 \bar{w} + \dots. \end{aligned}$$

Aplicando H_w , $H_{\bar{w}}$, w' , \bar{w}' em (2.41), temos

$$\begin{aligned} H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}' &= q i\omega_0 w - \bar{q} i\omega_0 \bar{w} + h_{20} i\omega_0 w^2 - h_{02} i\omega_0 \bar{w}^2 + \frac{1}{2} h_{30} i\omega_0 w^3 \\ &+ \left(\frac{1}{2} q g_{21} + \frac{1}{2} h_{21} i\omega_0 \right) w^2 \bar{w} + \left(\frac{1}{2} \bar{q} \bar{g}_{21} - \frac{1}{2} h_{12} i\omega_0 \right) w \bar{w}^2 - \frac{1}{2} h_{03} i\omega_0 \bar{w}^3 + \frac{1}{6} h_{40} i\omega_0 w^4 \\ &+ \left(\frac{1}{2} g_{21} h_{20} + \frac{1}{3} h_{31} i\omega_0 \right) w^3 \bar{w} + \left(\frac{1}{2} g_{21} h_{11} + \frac{1}{2} \bar{g}_{21} h_{11} \right) w^2 \bar{w}^2 + \left(\frac{1}{2} h_{02} \bar{g}_{21} - \frac{1}{3} h_{13} i\omega_0 \right) w \bar{w}^3 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{6} h_{04} i \omega_0 \bar{w}^4 + \left(\frac{1}{12} q g_{32} + \frac{1}{2} g_{21} h_{21} + \frac{1}{12} h_{32} i \omega_0 + \frac{1}{4} h_{21} \bar{g}_{21} \right) w^3 \bar{w}^2 + \dots .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(H(w, \bar{w})) = & A(q)w + A(\bar{q})\bar{w} + w^2 \left(\frac{1}{2} B(q, q) + \frac{1}{2} A(h_{20}) \right) + \bar{w}^2 \left(\frac{1}{2} B(\bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} A(h_{02}) \right) + \\ & w\bar{w} \left(B(q, \bar{q}) + A(h_{11}) \right) + w^3 \left(\frac{1}{6} C(q, q, q) + \frac{1}{2} B(h_{20}, q) + \frac{1}{6} A(h_{30}) \right) + w^2 \bar{w} \left(\frac{1}{2} C(\bar{q}, q, q) + \right. \\ & \left. B(h_{11}, q) + \frac{1}{2} B(\bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{2} A(h_{21}) \right) + w\bar{w}^2 \left(\frac{1}{2} C(q, \bar{q}, \bar{q}) + B(h_{11}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(q, h_{02}) + \frac{1}{2} A(h_{12}) \right) + \\ & \bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{6} A(h_{03}) \right) + w^4 \left(\frac{1}{24} D(q, q, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{20}, q, q) + \frac{1}{6} B(h_{30}, q) + \right. \\ & \left. \frac{1}{8} B(h_{20}, q, q) + \frac{1}{24} A(h_{40}) \right) + w^3 \bar{w} \left(\frac{1}{6} D(\bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{2} C(h_{11}, q, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} B(h_{21}, q) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{6} A(h_{31}) \right) + w^2 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, q, q) + C(\bar{q}, h_{11}, q) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} B(h_{12}, q) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{11}) + \frac{1}{4} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + \frac{1}{4} B(h_{02}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(\bar{q}, h_{21}) + \frac{1}{4} A(h_{22}) \right) + \\ & \bar{w}^4 \left(\frac{1}{24} D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{4} C(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(h_{03}, \bar{q}) + \frac{1}{8} B(h_{02}, h_{02}) + \frac{1}{24} A(h_{04}) \right) + w\bar{w}^3 \left(\frac{1}{6} D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} C(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + \frac{1}{2} C(q, h_{02}, \bar{q}) + \frac{1}{2} B(h_{12}, \bar{q}) + \frac{1}{6} B(q, h_{03}) + \frac{1}{2} B(h_{02}, h_{11}) + \frac{1}{6} A(h_{13}) \right) + \\ & w^3 \bar{w}^2 \left(\frac{1}{12} E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + \frac{1}{12} D(h_{02}, q, q, q) + \frac{1}{2} D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + \frac{1}{4} D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + \frac{1}{4} C(h_{12}, q, q) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} C(h_{11}, h_{11}, q) + \frac{1}{4} C(h_{02}, h_{20}, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{21}, q) + \frac{1}{2} C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + \frac{1}{12} C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + \frac{1}{4} B(h_{22}, q) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} B(h_{12}, h_{20}) + \frac{1}{2} B(h_{11}, h_{21}) + \frac{1}{12} B(h_{02}, h_{30}) + \frac{1}{6} B(\bar{q}, h_{31}) + \frac{1}{12} A(h_{32}) \right). \end{aligned}$$

Aplicando $(H_w w' + H_{\bar{w}} \bar{w}')$ e $F(H(w, \bar{w}))$ em (2.41), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} q i \omega_0 = A(q), \\ \bar{q} i \omega_0 = -A(\bar{q}), \\ h_{20} = (2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(q, q), \\ h_{11} = -A^{-1}(B(q, \bar{q})), \\ h_{02} = (-2i\omega_0 I_n - A)^{-1} B(\bar{q}, \bar{q}), \\ h_{30} = (3i\omega_0 I_n - A)^{-1} (C(q, q, q) + 3B(h_{20}, q)), \\ h_{03} = (-3i\omega_0 I_n - A)^{-1} (C(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 3B(h_{02}, \bar{q})), \end{array} \right. \quad (2.43)$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Obtemos um sistema singular para o termo h_{21}

$$(i\omega_0 I_n - A)h_{21} = C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}), \quad (2.44)$$

que possui solução se, e somente se,

$$\langle p, C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = 0.$$

Sendo assim,

$$g_{21} = \langle p, C(\bar{q}, q, q) + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \rangle,$$

onde h_{11} e h_{20} são dados por (2.43).

O primeiro coeficiente de Lyapunov, conforme equação (2.31), é dado por

$$l_1 = \frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} g_{21},$$

ou seja,

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} [\langle p, C(\bar{q}, q, q) \rangle + 2 \langle p, B(h_{11}, q) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle]. \quad (2.45)$$

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} [\langle p, C(\bar{q}, q, q) \rangle + 2 \langle p, B(h_{11}, q) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle]. \quad (2.46)$$

Podemos encontrar o valor de h_{21} resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 I_n - A & q \\ \bar{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{21} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\bar{q}, q, q) - g_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

tal que $\langle p, h_{21} \rangle = 0$.

Lema 2.3.2 *O sistema (2.47) é não singular, e se (ϑ, r) é solução, tal que $\langle p, \vartheta \rangle = 0$, ϑ é solução de (2.44).*

Demonstração 2.3.2 Escrevamos $\mathbb{R}^n = T^c \oplus T^{su}$, onde T^c e T^{su} são, respectivamente, autoespaço generalizado de A correspondente aos autovalores com parte real nula e autovalores com parte real não nula, ambos invariantes por A . Pelo Lema 2.3.1, temos que $\vartheta \in T^{su}$ se, e somente se, $\langle p, \vartheta \rangle = 0$.

Defina

$$v = C(\bar{q}, q, q) - G_{21}q + 2B(h_{11}, q) + B(\bar{q}, h_{20}).$$

Seja (ϑ, r) a solução da equação obtida a partir de (2.47). Equivalentemente,

$$\begin{aligned} (i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q &= 0, \\ \langle p, \vartheta \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Da segunda equação de (2.48) segue que $\vartheta \in T^{su}$, e conseqüentemente, $(i\omega_0 I_n - A)\vartheta \in T^{su}$.

Portanto $\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0$.

Agora, do produto interno de p com o primeiro termo de (2.48), vem

$$\begin{aligned} \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle + r \langle p, q \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como $\langle p, q \rangle = 1$ e $\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0$, temos

$$r \langle p, q \rangle = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Substituindo $r = 0$, na primeira equação de (2.48), temos que

$$\begin{aligned} (i\omega_0 I_n - A)\vartheta &= 0 \\ \Rightarrow \vartheta &= \alpha q, \end{aligned} \tag{2.49}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$. No entanto,

$$0 = \langle p, \vartheta \rangle = \langle p, \alpha q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle = \alpha,$$

que em (2.49), nos fornece $\vartheta = 0$. Portanto, $(\vartheta, r) = (0, 0)$. Logo, o sistema (2.47) é não singular.

Seja agora (ϑ, r) solução de (2.47). Então, temos

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta + r q = v, \quad \langle p, \vartheta \rangle = 0. \tag{2.50}$$

Da segunda equação de (2.50), segue que $v \in T^{su}$, e que

$$\begin{aligned} (i\omega_0 I_n - A)\vartheta &\in T^{su} \\ \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno de p com a primeira equação de (2.50) temos que

$$\begin{aligned} \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta + rq \rangle &= \langle p, v \rangle \\ \Rightarrow \langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle + r \langle p, q \rangle &= \langle p, v \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle p, v \rangle = 0$, $\langle p, q \rangle = 1$, $\langle p, (i\omega_0 I_n - A)\vartheta \rangle = 0$, segue que $r = 0$. Substituindo $r = 0$ na primeira equação de (2.50) obtemos

$$(i\omega_0 I_n - A)\vartheta = v.$$

Logo, ϑ é solução de (2.44). ■

Observação 2.3.2 *De forma análoga, obteremos h_{32} .*

Os termos seguintes, serão necessários para calcularmos o segundo coeficiente de Lyapunov.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{40} = (4i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(q, q, q, q) + 6C(h_{20}, q, q) + 4B(h_{30}, q) + 3B(h_{20}, h_{20})), \\ h_{31} = (2i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(\bar{q}, q, q, q) + 3C(h_{11}, q, q) + 3C(\bar{q}, h_{20}, q) + 3B(h_{21}, q) \\ \quad - 3g_{21}h_{20} + 3B(h_{11}, h_{20}) + B(\bar{q}, h_{30})), \\ h_{22} = -A^{-1}(D(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + C(h_{02}, q, q) + 4C(\bar{q}, h_{11}, q) + 2B(h_{12}, q) + 2B(h_{11}, h_{11})) \\ \quad + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + B(h_{02}, h_{20}) + 2B(\bar{q}, h_{21}) - 2h_{11}(g_{21} + \bar{g}_{21})), \\ h_{13} = (-2i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(q, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 3C(h_{11}, \bar{q}, \bar{q}) + 3C(q, h_{02}, \bar{q}) + 3B(h_{12}, \bar{q}) \\ \quad + B(q, h_{03}) + 3B(h_{02}, h_{11}) - 3h_{02}g_{21}), \\ h_{04} = (-4i\omega_0 I_n - A)^{-1}(D(\bar{q}, \bar{q}, \bar{q}, \bar{q}) + 6C(h_{02}, \bar{q}, \bar{q}) + 4B(h_{03}\bar{q}) + 3B(h_{02}, h_{02})). \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Para $l_1 = 0$, devemos ter $g_{21} + \bar{g}_{21} = 0$, de onde o último termo de h_{22} se torna nulo.

O termo singular associado a h_{32} , é dado por

$$\begin{aligned} (i\omega_0 I_n - A)h_{32} &= E(\bar{q}, \bar{q}, q, q, q) + D(h_{02}, q, q, q) + 6D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + 3C(h_{12}, q, q) \\ &\quad + 6C(h_{11}, h_{11}, q) + 3D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + 3C(h_{02}, h_{20}, q) + 6C(\bar{q}, h_{21}, q) \\ &\quad + 3B(h_{22}, q) + 6C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + 3B(h_{12}, h_{20}) - 6g_{21}h_{21} + 6B(h_{11}, h_{21}) \\ &\quad + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + B(h_{02}, h_{30}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) - 3h_{21}\bar{g}_{21} - g_{32}q. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
H_{32} = & E(\bar{q}, \bar{q}, q, q) + D(h_{02}, q, q, q) + 6D(\bar{q}, h_{11}, q, q) + 3C(h_{12}, q, q) \\
& + 6C(h_{11}, h_{11}, q) + 3D(\bar{q}, \bar{q}, h_{20}, q) + 3C(h_{02}, h_{20}, q) + 6C(\bar{q}, h_{21}, q) \\
& + 3B(h_{22}, q) + 6C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + 3B(h_{12}, h_{20}) - 6g_{21}h_{21} + 6B(h_{11}, h_{21}) \\
& + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + B(h_{02}, h_{30}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) - 3h_{21}\bar{g}_{21},
\end{aligned}$$

podemos reescrever

$$(i\omega_0 I_n - A) h_{32} = H_{32} - g_{32}q,$$

que possui solução se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\langle p, H_{32} - g_{32}q \rangle &= 0 \\
g_{32} &= \langle p, H_{32} \rangle,
\end{aligned}$$

sendo que os termos $-6g_{21}h_{21}$ e $-3h_{21}\bar{g}_{21}$ não entram na última equação pois, $\langle p, h_{21} \rangle = 0$.

O segundo coeficiente de Lyapunov [13], conforme equação (2.31), é definido por

$$l_2 = \frac{\text{Re } c_2(0)}{\omega_0} = \frac{1}{12\omega_0} \text{Re } g_{32},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
l_2 = & \frac{1}{12\omega_0} \text{Re} \left[\langle p, E(q, q, \bar{q}, \bar{q}) + D(q, q, q, \bar{h}_{20}) + 3D(q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + 6D(q, q, \bar{q}, h_{11}) \right. \\
& + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + 3C(q, q, \bar{h}_{21}) + 6C(q, \bar{q}, h_{21}) + 3C(q, \bar{h}_{20}, h_{20}) \\
& + 6C(q, h_{11}, h_{11}) + 6C(\bar{q}, h_{20}, h_{11}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) + 3B(q, h_{22}) \\
& \left. + B(\bar{h}_{20}, h_{30}) + 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) + 6B(h_{11}, h_{21}) \rangle \right]. \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Consideremos novamente a equação diferencial (2.1) tal que as condições definidas na p. 5 sejam satisfeitas. Temos que $F(\mathbf{x})$ é uma função de \mathbf{x} suave com respeito a ξ , com sua expansão de Taylor dada por (2.19) e $A(\xi) = f_{\mathbf{x}}(0, \xi_0)$ corresponde à parte linear do sistema com um par de autovalores complexos

$$\lambda_1(\xi) = \lambda(\xi), \quad \lambda_2(\xi) = \bar{\lambda}(\xi),$$

onde

$$\lambda(\xi) = \gamma(\xi) + i\omega(\xi),$$

satisfazendo a condição de Hopf para $\xi = 0$

$$\gamma(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Um ponto de Hopf e_0 é um ponto de equilíbrio de (2.1) onde a matriz Jacobiana $A = f_x(e_0, \xi_0)$ tem um par de autovalores imaginários puros $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, e não admite nenhum outro autovalor com parte real nula. No ponto de Hopf, uma variedade central de dimensão dois está bem definida e é invariante pelo fluxo de (2.1) podendo ser continuada com uma classe de diferenciabilidade suficientemente grande para valores dos parâmetros tomados suficientemente próximos. De fato, é conveniente definir uma série de Taylor infinita da variedade central, bem como de sua continuação, com duas destas variedades tendo contato com uma arbitrária e suficientemente grande classe de diferenciabilidade.

Um ponto de Hopf é chamado transversal se os autovalores complexos que dependem do parâmetro interceptam o eixo imaginário com derivadas não nulas. Em uma vizinhança de um ponto de Hopf transversal - ponto H1 - com $l_1 \neq 0$ a dinâmica do sistema (2.1), reduzido a uma família parâmetro dependente de variedades centrais, é orbitalmente topologicamente equivalente à seguinte forma normal complexa

$$w' = (\gamma + i\omega)w + l_1 w |w|^2,$$

$w \in \mathbb{C}$, γ , ω e l_1 são funções a valores reais possuindo derivadas de ordens arbitrariamente grandes, as quais são continuações de 0 , ω_0 e o primeiro coeficiente de Lyapunov no ponto H1. Veja [4]. Quando $l_1 < 0$ ($l_1 > 0$) uma família de órbitas periódicas estáveis (instáveis) podem ser encontradas nesta família de variedades, reduzindo a um ponto de equilíbrio em H1.

Um ponto de Hopf de codimensão 2 é um ponto de Hopf onde l_1 se anula. Este é chamado transversal se $\gamma = 0$ e $l_1 = 0$ têm intersecção transversal, onde $\gamma = \gamma(\xi)$ é a parte real do autovalor crítico. Em uma vizinhança de um ponto de Hopf transversal de codimensão 2 - ponto H2 - com $l_2 \neq 0$ a dinâmica do sistema (2.1), reduz-se a uma família parâmetro dependente de variedades centrais e é orbitalmente topologicamente equivalente a

$$w' = (\gamma + i\omega)w + \eta w |w|^2 + l_2 w |w|^4,$$

onde γ e η podem ser entendidos como parâmetros. Veja [4]. O diagrama de bifurcação para $l_2 \neq 0$ pode ser encontrado em [4], p. 313, e em [15].

Os próximos teoremas nos mostram como verificar a condição de transversalidade para a bifurcação de Hopf genérica e a bifurcação de Hopf degenerada.

Teorema 2.3.2 (Condição de transversalidade para a bif. de Hopf genérica)

Considere o sistema (2.1), cuja matriz Jacobiana $A(\xi)$ possui um par de autovalores puramente imaginários para $\xi = 0$, $\lambda_{1,2} = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Então,

$$\gamma'(0) = \text{Re} \langle p, A'(0)q \rangle,$$

onde $p, q \in \mathbb{C}^n$ satisfazem

$$A(0)q = i\omega_0 q, \quad A^\top(0)p = -i\omega_0 p, \quad \langle p, q \rangle = 1.$$

Além disso,

$$\frac{dA}{d\xi} = A'(\xi).$$

Demonstração 2.3.2 Derivando ambos os membros da equação

$$A(\xi)q(\xi) = \lambda(\xi)q(\xi)$$

com relação a ξ , obtemos

$$A'(\xi)q(\xi) + A(\xi)q'(\xi) = \lambda'(\xi)q(\xi) + \lambda(\xi)q'(\xi).$$

Aplicando, agora, o produto escalar por p em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned} \langle p, A'q + Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q + \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle p, Aq' \rangle &= \langle p, \lambda'q \rangle + \langle p, \lambda q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'q \rangle + \langle A^\top p, q' \rangle &= \lambda' \langle p, q \rangle + \lambda \langle p, q' \rangle. \end{aligned}$$

Para $\xi = 0$, $A^\top p = -i\omega_0 p$, portanto

$$\begin{aligned} \langle p, A'(0)q \rangle + i\omega_0 \langle p, q' \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle + i\omega_0 \langle p, q' \rangle \\ \Rightarrow \langle p, A'(0)q \rangle &= (\gamma'(0) + i\omega'(0)) \langle p, q \rangle \end{aligned}$$

e, finalmente, como $\langle p, q \rangle = 1$,

$$\langle p, A'(0)q \rangle = \gamma'(0) + i\omega'(0).$$

■

Teorema 2.3.3 (Condição de transversalidade para a bif. de Hopf degenerada)

Considere o sistema (2.1), tal que as condições para a bifurcação de Hopf degenerada, descritas no Teorema 2.2.2, sejam satisfeitas. Assim, temos que a aplicação $\xi \mapsto (\gamma(\xi), l_1(\xi))$ é regular ao longo de $l_1 = 0$ se, e somente se, $\nabla\gamma$ e ∇l_1 são linearmente independentes ao longo desta mesma curva, ou seja, as superfícies $\gamma = 0$ e $l_1 = 0$ se interceptam transversalmente. ■

Teorema 2.3.4 (Bifurcação Hopf de codimensão 1) Qualquer sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.53)$$

com f suave, tendo para todo $\|\xi\|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $x = 0$ com autovalores críticos

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi)$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e os demais autovalores com partes reais diferentes de zero, satisfazendo as seguintes condições

- (1) $l_1(0) \neq 0$ (condição de não degenerescência),
- (2) $\gamma'(0) \neq 0$ (condição de transversalidade),

por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros e do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa sobre a continuação da variedade central

$$\dot{z} = (\chi + i)z + sz|z|^2 + O(|z|^4),$$

com $s = \text{sinal } l_1(0) = \text{sinal } \text{Re } c_1(0)$.

Sob as hipóteses do teorema acima, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 1.

Teorema 2.3.5 (Bifurcação Hopf de codimensão 2) Suponha o sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad (2.54)$$

com f suave, tendo para todo $\|\xi\|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio $x = 0$ com autovalores críticos

$$\lambda_{1,2}(\xi) = \gamma(\xi) \pm i\omega(\xi),$$

onde $\gamma(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, e os demais autovalores com partes reais diferentes de zero, satisfazendo as seguintes condições

(1) $l_1(0) = 0$, onde $l_1(\xi)$ é o primeiro coeficiente de Lyapunov;

(2) $l_2(0) \neq 0$, onde $l_2(\xi)$ é o segundo coeficiente de Lyapunov;

(3) a função $\xi \rightarrow (\gamma(\xi), l_1(\xi))^T$ é regular em $\xi = 0$.

Então, por introdução de uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente dos parâmetros, e realizando uma mudança suave dos parâmetros e do tempo, o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa sobre a continuação da variedade central

$$\dot{z} = (\chi + i)z + \zeta z|z|^2 + sz|z|^4 + O(|z|^6),$$

com $s = \text{sinal } l_2(0) = \text{sinal } \text{Re } c_2(0)$.

Sob as hipóteses do teorema acima, o sistema possui uma bifurcação de Hopf de codimensão 2.

Capítulo 3

Análise do sistema tipo Lorenz (1.2)

Neste capítulo, o objetivo é estudar a estabilidade dos equilíbrios e as condições para as quais o sistema tipo Lorenz (1.2) apresenta bifurcações de Hopf.

O sistema de interesse é aquele apresentado na Introdução, o qual tem a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = dx + cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ são parâmetros reais. Alternativamente, podemos escrever o sistema acima na forma vetorial $\dot{X} = F(X, \xi)$, onde $F(X, \xi) = (a(y - x), dx + cy - xz, -bz + xy)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\xi = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

3.1 Pontos de equilíbrio e estabilidade

Claramente um ponto de equilíbrio do sistema (3.1) é a origem, para todos os valores dos parâmetros, além de

$$Q_{\pm}(\pm\sqrt{b(c+d)}, \pm\sqrt{b(c+d)}, c+d).$$

Estes dois últimos equilíbrios só existem quando $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $b(c+d) > 0$. Note que se $d = -c$, a origem é o único ponto de equilíbrio.

Da linearização do sistema (3.1) em $O(0, 0, 0)$, temos

$$A = DF(O) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

cujos polinômios característicos são dados por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow \\ p(\lambda) &= (-a - \lambda)(-b - \lambda)(c - \lambda) - (-b - \lambda)ad \Leftrightarrow \\ p(\lambda) &= [(\lambda^2 + (a - c)\lambda - a(c + d))(-b - \lambda)], \end{aligned}$$

onde I representa a matriz identidade 3×3 . Os autovalores da matriz Jacobiana acima são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[-(a - c) + \sqrt{(a - c)^2 + 4a(c + d)} \right] \end{aligned}$$

e

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[-(a - c) - \sqrt{(a - c)^2 + 4a(c + d)} \right].$$

Quanto à estabilidade da origem $O(0, 0, 0)$, temos os casos a seguir. Consideremos $\Delta = (a - c)^2 + 4a(c + d)$. Notamos em todos os casos, que se $b < 0$ temos o autovalor real $\lambda_1 > 0$, e se $b > 0$ temos o autovalor real $\lambda_1 < 0$.

I – Consideremos $a > 0$ e $a \neq c$.

- a) Para $c + d > 0$ temos os autovalores reais $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 1 – 2 e quando $\lambda_1 < 0$ o equilíbrio é uma sela 2 – 1.
- b) Para $c + d < 0$, $a < c$ e $\Delta > 0$ temos dois autovalores reais positivos $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é um repulsor e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 1 – 2.
- c) Para $c + d < 0$, $a > c$ e $\Delta > 0$ temos dois autovalores reais negativos $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 2 – 1 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é um atrator.
- d) Para $c + d < 0$, $a > c$ e $\Delta < 0$ temos dois autovalores complexos conjugados com partes reais negativas, ou seja, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_0$ e $\lambda_3 = \alpha - i\omega_0$, com $\alpha < 0$ e $\omega_0 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 2 – 1 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é um atrator.
- e) Para $c + d < 0$, $a < c$ e $\Delta < 0$ temos dois autovalores complexos conjugados com partes reais positivas, ou seja, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_0$ e $\lambda_3 = \alpha - i\omega_0$, com $\alpha > 0$ e $\omega_0 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é um repulsor e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 1 – 2.

II – Consideremos $a > 0$ e $a = c$.

- a) Para $c + d > 0$, temos $\Delta > 0$ e dois autovalores reais $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 1 – 2 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 2 – 1.

- b) Para $c + d < 0$, temos $\Delta < 0$ e dois autovalores complexos conjugados com partes reais nulas, ou seja, $\lambda_2 = i\omega_0$ e $\lambda_3 = -i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. Este caso será estudado com maiores detalhes a seguir, uma vez que teremos os pontos de Hopf.
- c) Para $d = 0$, temos dois autovalores reais das formas $\lambda_2 = 2a$ e $\lambda_3 = -2a$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 1 – 2 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 2 – 1.

III – Consideremos $a < 0$ e $a \neq c$.

- a) Para $c + d > 0$, $a > c$ e $\Delta > 0$ temos dois autovalores reais negativos $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 2 – 1 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é um atrator.
- b) Para $c + d > 0$, $a > c$ e $\Delta < 0$ temos dois autovalores complexos conjugados com partes reais não nulas, ou seja, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_0$ e $\lambda_3 = \alpha - i\omega_0$, com $\alpha < 0$ e $\omega_0 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 2 – 1 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é um atrator.
- c) Para $c + d > 0$, $a < c$ e $\Delta > 0$ temos dois autovalores reais positivos $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é um repulsor e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 1 – 2.
- d) Para $c + d < 0$, $a < c$ e $\Delta > 0$ temos dois autovalores reais $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 1 – 2 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 2 – 1.
- e) Para $c + d > 0$, $a < c$ e $\Delta < 0$ temos dois autovalores complexos conjugados com partes reais não nulas, ou seja, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_0$ e $\lambda_3 = \alpha - i\omega_0$, com $\alpha > 0$ e $\omega_0 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é um repulsor e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 1 – 2.
- f) Para $c + d > 0$, $a > c$ e $\Delta < 0$ temos dois autovalores complexos conjugados com partes reais não nulas, ou seja, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_0$ e $\lambda_3 = \alpha - i\omega_0$, com $\alpha < 0$ e $\omega_0 > 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 2 – 1 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é um atrator.

IV – Consideremos $a < 0$ e $a = c$.

- a) Para $c + d > 0$ temos $\Delta < 0$ e dois autovalores complexos conjugados com partes reais nulas, ou seja, $\lambda_2 = i\omega_0$ e $\lambda_3 = -i\omega_0$, com $\omega_0 > 0$. Este caso também será estudado com maiores detalhes a seguir, uma vez que teremos os pontos de Hopf.
- b) Para $c + d < 0$ temos $\Delta > 0$ e dois autovalores reais, ou seja, $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Quando $\lambda_1 > 0$, a origem é uma sela 1 – 2 e quando $\lambda_1 < 0$, a origem é uma sela 2 – 1.

Para o estudo da estabilidade dos pontos Q_{\pm} faremos uso do seguinte resultado, conhecido como critério de Routh–Hurwitz. Uma prova desse resultado pode ser encontrada em Pontryagin [11], p. 58.

Lema 3.1.1 (*Routh–Hurwitz*) *Seja $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. As raízes de $p(\lambda)$ têm partes reais negativas se, e somente se, $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ e $a_2a_1 > a_0$.*

Observação 3.1.1 *Vale observar que o sistema (3.1) é simétrico com relação ao eixo z e, portanto, para estudarmos a estabilidade de Q_- basta estudarmos a estabilidade de Q_+ . De fato, definamos a seguinte função, que nada mais é do que uma reflexão em torno do eixo z em \mathbb{R}^3 ,*

$$R(x, y, z) = (-x, -y, z).$$

Agora, observemos que

$$F(R(x, y, z)) = (-a(y - x), -(dx + cy - xz), -bz + xy) = R(F(x, y, z)),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e para todo $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Da linearização do sistema (3.1) em

$$Q_+(\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, c+d)$$

temos

$$A = DF(Q_+) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{b(d+c)} \\ \sqrt{b(d+c)} & \sqrt{b(d+c)} & -b \end{pmatrix},$$

de polinômio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-a - \lambda)(-b - \lambda)(c - \lambda) - ab(d + c) + b(d + c)(-a - \lambda) + ac(-b - \lambda) \\ &= (-ac - c\lambda + a\lambda + \lambda^2)(-b - \lambda) + ac(-b - \lambda + b(c + d))(-2a - \lambda) \\ &= (-ac - c\lambda + a\lambda + \lambda^2)(-b - \lambda) + (-3abc - ac\lambda - bd\lambda - bc\lambda - 2abd) \\ &= -\lambda^3 - (a + b - c)\lambda^2 - b(a + d)\lambda - 2ab(c + d). \end{aligned}$$

Do Lema 3.1.1 e sendo $a_2 = a + b - c > 0$, $a_1 = ab + bd > 0$ e $a_0 = 2ab(c + d) > 0$, e exigindo que $c + d > 0$, temos

$$\begin{aligned} (a + b - c)(ab + bd) > 2ab(c + d) &\Leftrightarrow a^2 + ad + ab + bd - ac - cd > 2ac + 2ad \\ &\Leftrightarrow ad + bd - cd - 2ad > 2ac - a^2 - ab + ac \\ &\Leftrightarrow d(-a + b - c) > a(-a - b + 3c) \\ &\Leftrightarrow d(a - b + c) < a(a + b - 3c), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d < \frac{a(a+b-3c)}{a-b+c}.$$

Disto e de $c+d > 0$, podemos escrever

$$-c < d < \frac{a(a+b-3c)}{a-b+c}.$$

Sendo assim, na situação acima, os equilíbrios Q_{\pm} são localmente assintoticamente estáveis.

Quando

$$d > \frac{a(a+b-3c)}{a-b+c}$$

os equilíbrios Q_{\pm} são instáveis. Quando

$$d = \frac{a(a+b-3c)}{a-b+c},$$

a análise linear nada pode dizer. De fato, o sistema (3.1) pode possuir bifurcações de Hopf em tais equilíbrios.

3.2 Bifurcações de Hopf no sistema (1.2)

3.2.1 Bifurcação de Hopf de codimensão 1 em $O(0,0,0)$

O polinômio característico da matriz Jacobiana do sistema (3.1) no equilíbrio $O(0,0,0)$, como vimos, pode ser escrito sob a forma

$$p(\lambda) = [(\lambda^2 + (a-c)\lambda - a(c+d))(-b-\lambda)], \quad (3.3)$$

cujas raízes, também chamadas autovalores da matriz dada em (3.2), são

$$\lambda_1 = -b \quad (3.4)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left[-(a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4a(c+d)} \right]. \quad (3.5)$$

Para a condição de bifurcação de Hopf, os autovalores $\lambda_{2,3}$ deverão ser complexos conjugados com partes reais nulas. Façamos, portanto, $c = a$ e $0 < a < -d$ ou $-d < a < 0$.

Logo, o conjunto de bifurcação será determinado por $S = S_1 \cup S_2$, onde

$$S_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c, 0 < a < -d, d < 0, b \neq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c, -d < a < 0, d > 0, b \neq 0\}.$$

Definindo

$$D_1 = \{(a, b, d) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < -d, d < 0, b \neq 0\}$$

e

$$D_2 = \{(a, b, d) \in \mathbb{R}^3 : -d < a < 0, d > 0, b \neq 0\},$$

podemos agora observar que o nosso conjunto de bifurcação de Hopf tem a forma $a = c$ com $(a, b, d) \in D_1 \cup D_2$.

Para valores de parâmetros que não estão em S os autovalores têm partes reais não nulas e isso nos permite determinar o comportamento do ponto de equilíbrio $O(0, 0, 0)$, uma vez que, nestes casos, tal equilíbrio é hiperbólico.

Precisamente nessas regiões, tanto para $a < c$, $a = c$ e $a > c$, o sinal de λ_1 depende do sinal do parâmetro b , $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Então, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 *Para valores dos parâmetros que não estão em S , os autovalores λ_2 e λ_3 têm partes reais não nulas, então o equilíbrio $O(0, 0, 0)$ é hiperbólico.*

Para estudar o comportamento do equilíbrio na região de bifurcação S , precisamos determinar o primeiro e o segundo coeficientes de Lyapunov. É o que passaremos a fazer.

Considerando apenas a região S_1 , pois S_2 é sua simétrica, e fazendo $d = -ma$, com $m > 1$, a matriz Jacobiana do sistema (3.1) em $O(0, 0, 0)$, fica dada por

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -am & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

que tem autovalores complexos conjugados $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$, onde $\omega_0 = a\sqrt{m-1}$, além do autovalor real $\lambda_1 = -b$. A inversa da matriz acima tem a forma

$$A^{-1} = \frac{1}{ba(m-1)} \begin{pmatrix} b & -b & 0 \\ bm & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a(m-1) \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Os autovetores e as funções multilineares simétricas

O autovetor complexo $q = (q_1, q_2, q_3)$ da matriz Jacobiana A associado ao autovalor complexo $\lambda_2 = i\omega_0$ é dado por

$$q = \frac{1}{am}(a - i\omega_0, am, 0).$$

De fato, considere a matriz Jacobiana dada em (3.6) e a equação $Aq = \lambda_2 q$. Escrevendo

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -am & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = i\omega_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} -aq_1 + aq_2 = i\omega_0 q_1 \\ -amq_1 + aq_2 = i\omega_0 q_2 \\ -bq_3 = i\omega_0 q_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

das quais resulta o autovetor $q = (q_1, q_2, q_3)$ acima. Seu complexo conjugado tem a forma

$$\bar{q} = \frac{1}{am}(a + i\omega_0, am, 0).$$

Considere agora o autovalor $\lambda_3 = -i\omega_0$ e A^\top a matriz transposta de A , satisfazendo a equação $A^\top p = -i\omega_0 p$. Por um processo semelhante ao anterior, obtemos o autovetor complexo

$$p = \frac{1}{a}(-i\omega_0 - a, a, 0)$$

e seu conjugado

$$\bar{p} = \frac{1}{a}(i\omega_0 - a, a, 0).$$

A normalização do autovetor p com respeito ao autovetor q , é feita utilizando-se a equação $pN = up$, onde pN é o vetor p normalizado e u é o fator de normalização, dado por

$$u = \frac{1}{\langle pN, q \rangle} = -\frac{iam}{-2ima + 2ia + 2\omega_0},$$

resultando em

$$pN = \left(-\frac{m(a + i\omega_0)}{2a(m-1) + 2i\omega_0}, \frac{am}{2a(m-1) + 2i\omega_0}, 0 \right),$$

e o seu complexo conjugado

$$\bar{p}N = \left(-\frac{m(a - i\omega_0)}{2a(m-1) + 2i\omega_0}, \frac{am}{2a(m-1) + 2i\omega_0}, 0 \right)$$

que verifica o produto interno $\langle pN, q \rangle = 1$. Por comodidade, voltaremos a utilizar o símbolo p , mas agora para representar o autovetor normalizado pN .

Consideremos, novamente, o sistema

$$\begin{cases} x' = a(y - x), \\ y' = dx + cy - xz, \\ z' = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.9)$$

o qual escrito da forma $X' = AX + F(X)$, com $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, resulta em

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

é a matriz relativa a parte linear e

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$$

a função relativa a parte não linear de (3.10).

Lema 3.2.1 *As funções multilineares $B(x, y)$, $C(x, y, z)$, $D(x, y, z, u)$ e $E(x, y, z, u, v)$, onde $x, y, z, u, e v \in \mathbb{R}^3$ para o sistema dado em (3.9) são da forma*

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1y_3 \\ 2x_1y_2 \end{pmatrix},$$

$$C(x, y, z) \equiv 0,$$

$$D(x, y, z, u) \equiv 0,$$

$$E(x, y, z, u, v) \equiv 0.$$

Demonstração 3.2.1 Temos

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \Big|_{\eta=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$D_i(x, y, z, u) = \sum_{j,k,l,m=1}^3 \frac{\partial^4 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_m} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_m, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$E_i(x, y, z, u, v) = \sum_{j,k,l,m,p=1}^3 \frac{\partial^5 F_i(\eta, 0)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_m \partial \eta_p} \Big|_{\eta=0} x_j y_k z_l u_m v_p, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para o cálculo de $B_2(x, y)$, consideramos $F_2(X) = -xz$ e calculamos

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -x,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} = -1, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B_2(x, y) &= 0x_1y_1 + 0x_1y_2 - x_1y_3 + 0x_2y_1 + 0x_2y_2 + 0x_2y_3 - x_3y_1 + 0x_3y_2 + 0x_3y_3 \\ &= -x_1y_3 - x_3y_1. \end{aligned}$$

Para o cálculo de $B_1(x, y)$, consideramos $F_1(X) = 0$. Temos, então que

$$B_1(x, y) = 0.$$

Para o cálculo de $B_3(x, y)$, consideramos $F_3(X) = xy$ e procedendo analogamente como em B_2 , obtemos

$$\begin{aligned} B_3(x, y) &= 0x_1y_1 + x_1y_2 + 0x_1y_3 + x_2y_1 + 0x_2y_2 + 0x_2y_3 + 0x_3y_1 + 0x_3y_2 + 0x_3y_3 \\ &= x_1y_2 + x_2y_1. \end{aligned}$$

Agora escrevemos

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} = x_1 y_3 = x_3 y_1$$

e

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} = x_1 y_2 = x_2 y_1,$$

temos,

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1 y_3 \\ 2x_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que o sistema dado em (3.9) não possui termos de terceira, quarta e quinta ordens.

Desta forma,

$$C(x, y, z) \equiv 0,$$

$$D(x, y, z, u) \equiv 0,$$

$$E(x, y, z, u, v) \equiv 0$$

e isto conclui o resultado. ■

Dos resultados do último lema, podemos escrever

$$B(x, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1 x_3 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

$$C(x, x, x) \equiv 0,$$

$$D(x, x, x, x) \equiv 0,$$

$$E(x, x, x, x, x) \equiv 0.$$

Portanto,

$$F(X) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \frac{1}{24}D(x, x, x, x) + \frac{1}{120}E(x, x, x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^6).$$

Da função $B(x, x)$, de $q = \frac{1}{am}(a - i\omega_0, am, 0)$ e de $\bar{q} = \frac{1}{m}(a + i\omega_0, am, 0)$, obtemos

$$B(q, q) = \frac{1}{am} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a - 2i\omega_0 \end{pmatrix}$$

e

$$B(q, \bar{q}) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como $h_{11} = A^{-1}B(q, \bar{q})$ e $h_{20} = (2i\omega_0 I - A)^{-1}B(q, q)$, obtemos

$$h_{11} = \left(0, 0, -\frac{2}{bm}\right), h_{20} = \left(0, 0, \frac{2a - 2i\omega_0}{abm + 2ia\omega_0 m}\right), \bar{h}_{20} = \left(0, 0, \frac{2ia - 2\omega_0}{iabm + 2a\omega_0 m}\right).$$

Portanto,

$$\langle p, B(q, h_{11}) \rangle = \frac{a - i\omega_0}{bm(a(m-1) + i\omega_0)} \quad (3.11)$$

e

$$\langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = -\frac{a^2 + \omega_0^2}{am(a(m-1) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)}. \quad (3.12)$$

Finalmente podemos calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov em $O(0, 0, 0)$, cuja expressão é

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re}[g_{21}],$$

onde g_{21} é dado em (2.46).

Notemos que a função $C(q, q, \bar{q})$ é nula para qualquer autovetor q , uma vez que o sistema em estudo, não possui termos de terceira ordem ou superiores. Portanto, temos

$$l_1 = \frac{2(4a + b)\omega_0^4 - a(8(m-1)a^2 - 2ba + b^2(m-3))\omega_0^2 - 3a^3b^2(m-1)}{abm(a^2(m-1)^2 + \omega_0^2)(b^2 + 4\omega_0^2)}.$$

Como $\omega_0 = a\sqrt{m-1}$, o primeiro coeficiente de Lyapunov adquire a forma

$$l_1(a, b, m) = \frac{2a - b}{(4(m-1)a^2 + b^2)m}. \quad (3.13)$$

Se $2a < b$, temos $l_1(a, b, m) < 0$, e se $2a > b$, temos $l_1(a, b, m) > 0$. Em ambos os casos, a condição de não-degenerescência é satisfeita, ou seja, $l_1 \neq 0$.

Para verificarmos a condição de transversalidade, observamos que a parte real dos autovalores críticos é dada por

$$\gamma(a, b, c, d) = \frac{c - a}{2},$$

conforme (3.4). Portanto,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial c} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Concluimos que para os pontos de codimensão 1, as condições de não-degenerescência e transversalidade são satisfeitas.

Teorema 3.2.2 *Considere o sistema dado em (3.1) e seja $S = S_1 \cup S_2$, onde*

$$S_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c, 0 < a < -d, d < 0, b \neq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c, -d < a < 0, d > 0, b \neq 0\}.$$

O ponto de equilíbrio $O(0, 0, 0)$ restrito a S é um atrator fraco se $2a < b$, pois $l_1 < 0$ e um repulsor fraco se $2a > b$, pois $l_1 > 0$. Além disso, se $c < a$, com $a < 0$, suficientemente próximo de a surge uma órbita periódica repulsora. Se $c > a$, com $a > 0$, suficientemente próximo de a , surge uma órbita periódica atratora em torno de O .

Para afirmações sobre o comportamento do sistema, quando $b = 2a$, devemos encontrar o segundo coeficiente de Lyapunov.

3.2.3 Bifurcação de Hopf de codimensão 2 em $O(0, 0, 0)$

O primeiro coeficiente de Lyapunov relativo ao equilíbrio $O(0, 0, 0)$ se anula quando $b = 2a$. Para estudar a estabilidade da origem quando os parâmetros estão sobre esse plano, determinaremos o segundo coeficiente de Lyapunov. Da definição de l_2 dada (2.52) e observando que o sistema em estudo, dado em (3.1), só possui termos até segunda ordem, as funções C, D e E são nulas. Então, precisamos obter somente a função B , que é dada por

$$B(x, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix},$$

como vimos anteriormente.

O vetor complexo h_{21} pode ser determinado resolvendo o sistema não singular dado em (2.47), onde

$$B(\bar{q}, h_{20}) = \frac{1}{a^2m^2(b + 2i\omega_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ -2(a^2 + \omega_0^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B(q, h_{11}) = \frac{1}{abm^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4a - 4i\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$g_{21}q = \left(-\frac{i(a - i\omega_0)^2(-3iab + \omega_0b + 4a\omega_0)}{a^2bm^2(a(m-1) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)}, \frac{i(a - i\omega_0)(-3iab + \omega_0b + 4a\omega_0)}{abm(a(m-1) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)}, 0 \right),$$

então temos

$$h_{21} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3),$$

onde

$$\phi_1 = \frac{2(a - i\omega_0)^2(a(b + 4i\omega_0) - ib\omega_0)}{abm^2(b + 2i\omega_0)((m-1)a^3 - 3i(m-1)\omega_0a^2 + 3\omega_0^2a - i\omega_0^3)},$$

$$\phi_2 = \frac{2(a - i\omega_0)^3(a(b + 4i\omega_0) - ib\omega_0)}{a^2bm^2(b + 2i\omega_0)((m-1)a^3 - 3i(m-1)\omega_0a^2 + 3\omega_0^2a - i\omega_0^3)}$$

e a terceira componente ϕ_3 é nula, e o seu complexo conjugado

$$\bar{h}_{21} = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$$

onde

$$\bar{\phi}_1 = \frac{2(a + i\omega_0)^2(a(b - 4i\omega_0) + ib\omega_0)}{abm^2(b - 2i\omega_0)((m-1)a^3 + 3i(m-1)\omega_0a^2 + 3\omega_0^2a + i\omega_0^3)},$$

$$\bar{\phi}_2 = \frac{2(a + i\omega_0)^3(a(b - 4i\omega_0) + ib\omega_0)}{a^2bm^2(b - 2i\omega_0)((m-1)a^3 + 3i(m-1)\omega_0a^2 + 3\omega_0^2a + i\omega_0^3)},$$

e $\bar{\phi}_3$, evidentemente, nula.

Necessitamos também dos vetores complexos

$$h_{30} = \left(\frac{6i(a - i\omega_0)^2}{am^2(2\omega_0 - ib)(a^2(m-1) - 9\omega_0^2)}, \frac{6i(a - i\omega_0)^2(a + 3i\omega_0)}{a^2m^2(2\omega_0 - ib)(a^2(m-1) - 9\omega_0^2)}, 0 \right),$$

$h_{31} = (\phi_4, \phi_5, \phi_6)$, onde as duas primeiras coordenadas ϕ_4, ϕ_5 são nulas e

$$\phi_6 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2},$$

sendo que

$$\kappa_1 = 6(a - i\omega_0)(\kappa_{11} + \kappa_{12} + \kappa_{13} + \kappa_{14}),$$

onde

$$\kappa_{11} = \frac{m(a - i\omega_0)(b + 2i\omega_0)a^2}{9\omega_0^2 - a^2(m-1)},$$

$$\kappa_{12} = \frac{m(b + 2i\omega_0)(ia + \omega_0)(-iab - \omega_0b + 4a\omega_0)a^2}{b((m-1)a^3 - 3i(m-1)\omega_0a^2 + 3\omega_0^2a - i\omega_0^3)},$$

$$\kappa_{13} = \frac{m(ia + \omega_0)(-3iab + \omega_0 b + 4a\omega_0)a}{ab(m-1) + ib\omega_0},$$

$$\kappa_{14} = -\frac{i(a + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)(a + 3i\omega_0)(ia + \omega_0)}{9\omega_0^2 - a^2(m-1)}$$

e

$$\kappa_2 = a^3 m^3 (b + 2i\omega_0)^3.$$

O vetor complexo $h_{22} = (\phi_7, \phi_8, \phi_9)$, onde as duas primeiras coordenadas ϕ_7, ϕ_8 são nulas e

$$\phi_9 = \frac{\kappa_3}{\kappa_4},$$

sendo que

$$\kappa_3 = 4(\kappa_{31} + \kappa_{32} + \kappa_{33} + \kappa_{34} + \kappa_{35}),$$

onde

$$\kappa_{31} = \frac{b(a + i\omega_0)(a(b + 4i\omega_0) - ib\omega_0)(a - i\omega_0)^3}{(b + 2i\omega_0)((m-1)a^3 - 3i(m-1)\omega_0 a^2 + 3\omega_0^2 a - i\omega_0^3)},$$

$$\kappa_{32} = \frac{a^2 b m (a(b + 4i\omega_0) - ib\omega_0)(a - i\omega_0)^2}{(b + 2i\omega_0)((m-1)a^3 - 3i(m-1)\omega_0 a^2 + 3\omega_0^2 a - i\omega_0^3)},$$

$$\kappa_{33} = \frac{b(a + i\omega_0)^3 (a(b - 4i\omega_0) + ib\omega_0)(a - i\omega_0)}{(b - 2i\omega_0)((m-1)a^3 + 3i(m-1)\omega_0 a^2 + 3\omega_0^2 a + i\omega_0^3)},$$

$$\kappa_{34} = \frac{2a^2 m (2(4a + b)\omega_0^4 - a(8(m-1)a^2 - 2ba + b^2(m-3))\omega_0^2 - 3a^3 b^2(m-1))}{(a^2(m-1)^2 + \omega_0^2)(b^2 + 4\omega_0^2)},$$

$$\kappa_{35} = \frac{a^2 b m (a + i\omega_0)^2 (a(b - 4i\omega_0) + ib\omega_0)}{(b - 2i\omega_0)((m-1)a^3 + 3i(m-1)\omega_0 a^2 + 3\omega_0^2 a + i\omega_0^3)}$$

e

$$\kappa_4 = a^3 b^3 m^3.$$

Para determinarmos o número real $\langle p, H_{32} \rangle$, fazemos o produto interno do autovetor normalizado p com cada uma das componentes de H_{32} , somando apenas as partes reais desses resultados. Observe que desta forma, $\langle p, H_{32} \rangle$ é um número real. Sendo assim, temos

$$\langle p, 6B(h_{11}, h_{21}) \rangle = \frac{\beta_1}{\beta_2},$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_1 = & 12(2b\omega_0^8 + 2a^2b(5m-1)\omega_0^6 + a(-(m-1)b^2 - 8\omega_0^2)\omega_0^6 - \\ & 2a^4b(2m^2 - 10m + 5)\omega_0^4 - a^3((3m^2 + 8m - 3)b^2 + 8(4m + 1)\omega_0^2)\omega_0^4 - \\ & 2a^6b(2m^2 - 5m + 3)\omega_0^2 + a^5(m-1)((6m-3)b^2 + 8(5m-1)\omega_0^2)\omega_0^2 + \\ & a^7(m-1)^2(b^2 + 8\omega_0^2) \end{aligned}$$

e

$$\beta_2 = b^2 m^2 (b^2 + 4\omega_0^2) ((m-1)^4 a^8 + (3m^2 - 5m + 2)^2 \omega_0^2 a^6 + 6(m^3 - 2m + 1) \omega_0^4 a^4 + (m+2)^2 \omega_0^6 a^2 + \omega_0^8),$$

$$\langle p, 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) \rangle = \frac{\beta_3}{\beta_4},$$

onde

$$\beta_3 = -6(a^2 + \omega_0^2)(b(m-1)^2 a^6 - 4(2m^2 - 3m + 1)\omega_0^2 a^5 + b(5m^2 - 8m + 3)\omega_0^2 a^4 - 4(m+2)\omega_0^4 a^3 + b(2m+3)\omega_0^4 a^2 - 4\omega_0^6 a + b\omega_0^6)$$

e

$$\beta_4 = abm^2(b^2 + 4\omega_0^2)((m-1)^4 a^8 + (3m^2 - 5m + 2)^2 \omega_0^2 a^6 + 6(m^3 - 2m + 1)\omega_0^4 a^4 + (m+2)^2 \omega_0^6 a^2 + \omega_0^8),$$

$$\langle p, 3B(\bar{h}_{20}, h_{30}) \rangle = \frac{\beta_5}{\beta_6},$$

onde

$$\beta_5 = 6(a^2(m-1) - \omega_0^2)(a^2 + \omega_0^2),$$

e

$$\beta_6 = am^2(b^2 + 4\omega_0^2)((m-1)^3 a^4 + (-9m^2 + 19m - 10)\omega_0^2 a^2 - 9\omega_0^4),$$

$$\langle p, 3B(q, h_{22}) \rangle = \frac{\beta_7}{\beta_8},$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_7 = & 12(a^2(m-1) - \omega_0^2)((m-1)^3 m(3b^2 + 8\omega_0^2)a^{11} - \\ & b(m-1)^2((m^2 - 1)b^2 + 2(4m^2 + m - 4)\omega_0^2)a^{10} + \\ & 4(m-1)^2 \omega_0^2((8m^2 - 3m - 1)b^2 + 2m(9m - 4)\omega_0^2)a^9 - \\ & b(m-1)\omega_0^2((6m^3 - 2m^2 - 7m + 5)b^2 + 4(10m^3 + 3m^2 - 14m + 8)\omega_0^2)a^8 + \\ & (m-1)\omega_0^4(b^2(13m^3 - 16m^2 + 10m + 16) - 24(m-2)m\omega_0^2)a^7 + \\ & b\omega_0^4((3m^4 - 6m^3 + 3m^2 - 16m + 10)b^2 + 2(-25m^3 + 30m^2 - 62m + 24)\omega_0^2)a^6 - \\ & 2\omega_0^6((-3m^3 + 10m^2 - 6m + 12)b^2 + 4m(5m + 4)\omega_0^2)a^5 + \\ & b\omega_0^6(b^2(4m^3 - m^2 - 4m + 10) - 4(m^2 + 14m - 8)\omega_0^2)a^4 - \\ & \omega_0^8((3m^2 - 5m + 16)b^2 + 8m\omega_0^2)a^3 + b\omega_0^8(b^2(m^2 + 2m + 5) - 2(m-4)\omega_0^2)a^2 - \\ & 4b^2\omega_0^{10}a + b^3\omega_0^{10}) \end{aligned}$$

e

$$\beta_8 = a^3 b^3 m^3 (a^2 (m-1)^2 + \omega_0^2)^2 (b^2 + 4\omega_0^2) ((m-1)^2 a^6 + 3(3m^2 - 4m + 1)\omega_0^2 a^4 + 3(2m+1)\omega_0^4 a^2 + \omega_0^6),$$

$$\langle p, 2B(\bar{q}, h_{31}) \rangle = \frac{\beta_9}{\beta_{10}},$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_9 = & 6(a^2 + \omega_0^2)(-m-1)^5 m(3b^4 - 12\omega_0^2 b^2 - 32\omega_0^4) a^{13} - \\ & 4b(m-1)^4 \omega_0^2 ((2m^2 - 5m - 4)b^2 + 4(2m^2 - m - 4)\omega_0^2) a^{12} - \\ & (m-1)^3 \omega_0^2 ((28m^3 - 81m^2 + 70m - 20)b^4 - 4(22m^3 - \\ & 37m^2 - 4m + 16)\omega_0^2 b^2 - 32(5m^3 - 13m^2 + 9m - 2)\omega_0^4) a^{11} + \\ & 2b(m-1)^3 \omega_0^2 ((2m^3 + 3m^2 + m - 6)b^4 + 2(6m^3 + 40m^2 - 25m - \\ & 52)\omega_0^2 b^2 + 8(2m^3 - 6m^2 + 25m - 40)\omega_0^4) a^{10} - (m-1)^2 \omega_0^4 ((33m^4 - \\ & 431m^3 + 772m^2 - 489m + 132)b^4 - 4(3m^4 - 51m^3 - 240m^2 + 377m - \\ & 80)\omega_0^2 b^2 + 32(31m^3 - 10m^2 - 2m - 26)\omega_0^4) a^9 + 2b(m-1)^2 \omega_0^4 ((33m^3 + \\ & 10m^2 - 60m + 30)b^4 - 2(7m^3 + 192m^2 + 238m - 168)\omega_0^2 b^2 + \\ & 8(-109m^3 + 172m^2 - 286m + 108)\omega_0^4) a^8 + (m-1)\omega_0^6 ((43m^4 - \\ & 748m^3 + 1414m^2 - 1220m + 328)b^4 - 4(257m^4 + 558m^3 - \\ & 1878m^2 + 1184m - 160)\omega_0^2 b^2 - 32(141m^3 - 260m^2 + 14m + 84)\omega_0^4) a^7 - \\ & 4b(m-1)\omega_0^6 ((27m^3 - 21m^2 - 61m + 30)b^4 + (399m^3 + 76m^2 - \\ & 558m + 232)\omega_0^2 b^2 + 4(-9m^3 + 368m^2 - 546m + 112)\omega_0^4) a^6 + \\ & \omega_0^8 ((189m^4 - 286m^3 - 1207m^2 + 1381m - 392)b^4 - 4(23m^4 - 552m^3 + \\ & 1789m^2 - 1375m + 160)\omega_0^2 b^2 + 32(131m^3 - 229m^2 - 45m + 116)\omega_0^4) a^5 + \\ & 2b\omega_0^8 ((13m^3 - 56m^2 - 80m + 60)b^4 + 2(-213m^3 + 194m^2 - 327m + \\ & 148)\omega_0^2 b^2 - 8(27m^3 - 242m^2 + 315m - 28)\omega_0^4) a^4 + \omega_0^{10} ((57m^3 - \\ & 119m^2 + 498m - 228)b^4 + 4(21m^3 + 237m^2 + 588m - 80)\omega_0^2 b^2 + \\ & 32(36m^2 - 11m + 74)\omega_0^4) a^3 + 2b\omega_0^{10} ((6m^2 + m + \\ & 30)b^4 + 18(-3m^2 + m + 4)\omega_0^2 b^2 - 8(3m^2 + 29m + 24)\omega_0^4) a^2 + \\ & \omega_0^{12} (13(3m-4)b^4 + 4(75m-16)\omega_0^2 b^2 + 576\omega_0^4) a + 12b\omega_0^{12} (b^4 - 16\omega_0^4) \end{aligned}$$

e

$$\beta_{10} = a^3 b m^3 (a^2 (m-1)^2 + \omega_0^2)^2 (b^2 + 4\omega_0^2)^3 ((m-1)^3 a^8 + 3(m-1)^2 (3m-4)\omega_0^2 a^6 - 15(5m^2 - 7m + 2)\omega_0^4 a^4 - (53m + 28)\omega_0^6 a^2 - 9\omega_0^8).$$

Portanto, neste caso, escrevemos

$$\langle p, H_{32} \rangle = \langle p, 6B(h_{11}, h_{21}) \rangle + \langle p, 3B(\bar{h}_{21}, h_{20}) \rangle + \langle p, B(\bar{h}_{20}, h_{30}) \rangle + \langle p, 3B(q, h_{22}) \rangle.$$

Como $g_{32} = \langle p, H_{32} \rangle$, $l_2 = \frac{1}{12\omega_0} \text{Re}[g_{32}]$, $\omega_0 = a\sqrt{m-1}$ e $b = 2a$, sendo a real não nulo e m real maior que 1, temos que

$$l_2 = \frac{1}{4a^3(m-1)m^3}. \quad (3.14)$$

Para os pontos de codimensão 2, temos que l_2 em (3.14) é não nulo, o que garante a não-degenerescência. Como o denominador de l_1 dado em (3.13) é positivo, consideremos apenas seu numerador e escrevemos, $l_1 = l_1(a, b, c, d) = 2a - b$, cujo gradiente é $\nabla l_1 = (-2, 1, 0, 0)$. Além disso, $\nabla H(a, b, c, d) = (1, 0, -1, 0)$. Claramente ∇l_1 e ∇H são linearmente independentes, satisfazendo a condição de transversalidade.

Teorema 3.2.3 *Sejam $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$ e l_2 restrito ao plano $2a = b$. Se $a > 0$, onde $a \in \mathbb{R}$, temos $l_2 > 0$ e o equilíbrio $O(0, 0, 0)$ é um repulsor. Se $a < 0$, temos $l_2 < 0$, e o equilíbrio $O(0, 0, 0)$ é um atrator.*

3.3 Bifurcações de Hopf no sistema de Lü

Nesta seção estudaremos as bifurcações de Hopf de codimensão 1 e de codimensão 2 nos equilíbrios Q_{\pm} para o sistema de Lü, ou seja, tomando o parâmetro $d = 0$ no sistema (1.2). Assim, nosso sistema de interesse é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ são parâmetros reais.

3.3.1 Estabilidade dos equilíbrios Q_{\pm} para o sistema de Lü

Para o estudo da bifurcação de Hopf em Q_{\pm} , basta realizar a análise para um ou outro equilíbrio, uma vez que eles são simétricos em relação ao eixo z . Analisemos, portanto, para o equilíbrio Q_+ . Fazendo a translação para a origem, segundo a transformação

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0, \end{cases}$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)$, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Sendo assim, temos

$$\begin{cases} x = x_1 + \sqrt{bc}, \\ y = y_1 + \sqrt{bc}, \\ z = z_1 + c. \end{cases}$$

Destes dois últimos sistemas, derivamos o primeiro e o sistema dado em (3.1), para $d = 0$, escrito da forma

$$\begin{cases} x' = a(y - x), \\ y' = cy - xz, \\ z' = -bz + xy, \end{cases}$$

e após as devidas substituições, podemos escrever este, em novas coordenadas, como segue

$$\begin{cases} x'_1 = a(y_1 - x_1), \\ y'_1 = c(y_1 + \sqrt{bc}) - (x_1 + \sqrt{bc})(z_1 + c), \\ z'_1 = -b(z_1 + c) + (x_1 + \sqrt{bc})(y_1 + \sqrt{bc}). \end{cases} \quad (3.16)$$

A linearização de (3.16) em Q_+ que agora está na origem, nos dá a seguinte matriz Jacobiana

$$A = DF(Q_+) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

cujos polinômio característico pode ser escrito como

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + ab\lambda + 2abc.$$

Pelo critério de *Routh–Hurwitz*, de acordo com o Lema 3.1.1, segue a seguinte proposição.

Proposição 3.3.1 *Defina*

$$c_c = \frac{a + b}{3}. \quad (3.18)$$

a) *Se $a = 0$, então Q_+ é equilíbrio bastante degenerado, pois a matriz Jacobiana (3.17) possuirá pelo menos 2 raízes nulas. Para tanto, consideremos abaixo os casos em que $a \neq 0$;*

b) *Considere $b > 0$ e $c > 0$. Temos as seguintes situações:*

b.1) *Se $a < 0$, então o equilíbrio Q_+ é instável;*

b.2) Se $a > 0$ e $0 < c < c_c$, então Q_+ é assintoticamente estável. Se $a > 0$ e $c > c_c$ então Q_+ é instável;

c) Considere $b < 0$ e $c < 0$. Neste caso, Q_+ é sempre instável, para $a \neq 0$.

3.3.2 Bifurcações de Hopf de codimensão 1 em Q_{\pm} para o sistema de Lü

Definamos a superfície de Hopf

$$\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab > 0, c = c_c = (a + b)/3\} \quad (3.19)$$

Podemos reescrever a matriz Jacobiana acima da seguinte maneira

$$A = \begin{pmatrix} b - 3c & 3c - b & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

de polinômio característico

$$p(\lambda) = (2c + \lambda)(b^2 - 3cb - \lambda^2), \quad (3.21)$$

de raízes $\lambda_1 = -2c$ e $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{b(-b + 3c)}$, onde $\omega_0 = \sqrt{b(-b + 3c)}$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$, $\omega_0 > 0$.

A inversa da matriz (3.20) tem a forma

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2\sqrt{bc}} \\ \frac{1}{3c - b} & -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2\sqrt{bc}} \\ -\frac{c}{(b - 3c)\sqrt{bc}} & -\frac{1}{\sqrt{bc}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Considere o autovetor complexo

$$q = (q_1, q_2, q_3) \quad (3.23)$$

e o autovalor $\lambda_2 = i\omega_0$. De

$$Aq = \lambda_2 q$$

escrevemos

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = i\omega_0 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Assim

$$q = \left(\frac{(b-c)\omega_0 - ib(b-3c)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, \frac{c(2ib - \omega_0)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, 1 \right)$$

e seu complexo conjugado

$$\bar{q} = \left(\frac{(b-c)\omega_0 + ib(b-3c)}{\sqrt{bc}(-2ic + \omega_0)}, \frac{c(-2ib - \omega_0)}{\sqrt{bc}(-2ic + \omega_0)}, 1 \right).$$

Tomemos agora A^\top a matriz transposta de A . O autovetor complexo $p = (p_1, p_2, p_3)$ e o autovalor $\lambda_3 = -i\omega_0$, satisfazendo

$$A^\top p = \lambda_3 p$$

pode ser encontrado um processo semelhante ao usado em (3.24). Assim,

$$p = \left(\frac{b^2 - 3cb - i\omega_0 b + ic\omega_0}{(b-3c)\sqrt{bc}}, -\frac{b - i\omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right)$$

e o seu complexo conjugado tem a forma

$$\bar{p} = \left(\frac{b^2 - 3cb + i\omega_0 b - ic\omega_0}{(b-3c)\sqrt{bc}}, -\frac{b + i\omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right).$$

Neste caso, o fator de normalização de p com respeito a q , é dado por

$$u = \frac{1}{\langle p, q \rangle} = \frac{c(2ic + \omega_0)}{2(b+c)(-ib + 2ic + \omega_0)},$$

que utilizando a equação $pN = up$, obtemos

$$pN = (pN_1, pN_2, pN_3) \tag{3.25}$$

onde

$$\begin{aligned} pN_1 &= \frac{c(2c - i\omega_0)(i(b-c)\omega_0 - b(b-3c))}{2(b-3c)\sqrt{bc}(b+c)(b-2c+i\omega_0)}, \\ pN_2 &= -\frac{c(ib + \omega_0)(2ic + \omega_0)}{2\sqrt{bc}(b+c)(b-2c+i\omega_0)}, \\ pN_3 &= \frac{c(i\omega_0 - 2c)}{2(b+c)(b-2c+i\omega_0)}. \end{aligned}$$

Assim, pN é o vetor normalizado com respeito ao vetor q , os quais verificam o produto interno $\langle pN, q \rangle = 1$. Novamente aqui, voltaremos a utilizar p para representar o vetor pN .

Lembrando que

$$B(x, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

e C, D e E são nulas, determinamos

$$B(q, q) = \left(0, -\frac{2((b-c)\omega_0 - ib(b-3c))}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, \frac{2(2ib - \omega_0)((b-c)\omega_0 - ib(b-3c))}{b(2ic + \omega_0)^2} \right)$$

e

$$B(q, \bar{q}) = \left(0, \frac{4b(b-3c)c - 2(b-c)\omega_0^2}{\sqrt{bc}(4c^2 + \omega_0^2)}, \frac{-4(b-3c)b^2 - 2(b-c)\omega_0^2}{b(4c^2 + \omega_0^2)} \right).$$

Sendo $h_{11} = A^{-1}B(q, \bar{q})$, calculamos

$$h_{11} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

onde

$$\xi_1 = \frac{(b-c)^2\omega_0^2 - 4b^2(b-3c)c}{(bc)^{3/2}(4c^2 + \omega_0^2)}, \quad \xi_2 = \frac{(b-c)^2\omega_0^2 - 4b^2(b-3c)c}{(bc)^{3/2}(4c^2 + \omega_0^2)}$$

e

$$\xi_3 = \frac{2(b-c)\omega_0^2 - 4b(b-3c)c}{bc(4c^2 + \omega_0^2)}.$$

Agora

$$B(q, h_{11}) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3),$$

onde $\rho_1 = 0$ e

$$\rho_2 = \frac{4(b-3c)cb^2 - (b-c)^2\omega_0^2(2ic + \omega_0) - ((b-c)\omega_0 - ib(b-3c))(2(b-c)\omega_0^2 - 4b(b-3c)c)}{(bc)^{3/2}(2ic + \omega_0)(4c^2 + \omega_0^2)}$$

$$\rho_3 = \frac{((b-2c)\omega_0 - ib(b-5c))((b-c)^2\omega_0^2 - 4b^2(b-3c)c)}{b^2c^2(2ic + \omega_0)(4c^2 + \omega_0^2)}.$$

O produto interno tem a forma

$$\langle -2p, B(q, h_{11}) \rangle = \theta_1/\theta_2, \tag{3.26}$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 3(b-c)^2\omega_0^4 - 2i(b-2c)(b-c)(3b-c)\omega_0^3 - b(b+c)(3b^2 - 12cb + 5c^2)\omega_0^2 + \\ &16ib^2(b-3c)(b-2c)c\omega_0 + 8b^3(b-5c)(b-3c)c \end{aligned}$$

e

$$\theta_2 = b^2c(b+c)(2c - i\omega_0)(b - 2c + i\omega_0)(2c + i\omega_0).$$

Calculando o vetor $h_{20} = (2i\omega_0 I - A)^{-1} B(q, q)$, sendo I a matriz identidade 3×3 , temos

$$h_{20} = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix},$$

onde

$$\xi_4 = \frac{(b-3c)(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0)(2\omega_0^2 - i(b-5c)\omega_0 + 4bc)}{\sqrt{bc}(2c - i\omega_0)^2(c + i\omega_0)(b^2 - 3cb + 4\omega_0^2)},$$

$$\xi_5 = \frac{(b-3c-2i\omega_0)(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0)(2\omega_0^2 - i(b-5c)\omega_0 + 4bc)}{\sqrt{bc}(2c - i\omega_0)^2(c + i\omega_0)(b^2 - 3cb + 4\omega_0^2)},$$

e

$$\xi_6 = \frac{2(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0)(-2i\omega_0^3 - 2(2b+c)\omega_0^2 - ib(3b-5c)\omega_0 + 2b(b-3c)c)}{b(2c - i\omega_0)^2(c + i\omega_0)(b^2 - 3cb + 4\omega_0^2)}.$$

O produto interno tem a forma

$$\langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle = \theta_3 / \theta_4, \quad (3.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta_3 = & (b(b-3c) + i(b-c)\omega_0) (-4i(b-c)\omega_0^5 - 2(5b-2c)(b+c)\omega_0^4 - ib(17b^2 - 64cb + 7c^2)\omega_0^3 \\ & - 2b(b-2c)(5b^2 + 3c^2)\omega_0^2 - ib^2(b-3c)(7b^2 - 6cb + 43c^2)\omega_0 + 8b^3(b-5c)(b-3c)c \end{aligned}$$

e

$$\theta_4 = 2b^2(b+c)(b-2c+i\omega_0)(b^2-3cb+4\omega_0^2)(4c^3+4i\omega_0c^2+\omega_0^2c+i\omega_0^3).$$

Como

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, h_{11}) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, h_{20}) \rangle$$

e

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \text{Re}[g_{21}],$$

segue de (3.26) e (3.27) e do fato de C ser identicamente nula, para $\omega_0 = \sqrt{-b(b-3c)}$, que

$$l_1 = \frac{3b(b-3c)^2(b-2c)(2b-c)}{(b-4c)^2c(b+c)(b^2-3cb-c^2)}. \quad (3.28)$$

No entanto, no nosso caso em estudo $a = 3c - b$, ou seja, $c = (a + b)/3$. Portanto, de (3.28), temos

$$l_1(a, b, c_c) = \frac{243a^2(a - 5b)(2a - b)b}{(4a + b)^2(a^4 + 16ba^3 + 60b^2a^2 + 49b^3a + 4b^4)}. \quad (3.29)$$

Definamos as seguintes regiões

$$\mathcal{S}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b/2 < a < 5b, b > 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a < 5b, b < 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{S}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b/2 < a < 0, b < 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{S}_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5b < a, b > 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{S}_5 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < b/2, b > 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{S}_6 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 5b < a < b/2, b < 0, c = (a + b)/3\},$$

Teorema 3.3.1 *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.15), ou seja o sistema de Lü. O primeiro coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ é dado por*

$$l_1(a, b, c_c) = \frac{243a^2(a - 5b)(2a - b)b}{(4a + b)^2(a^4 + 16ba^3 + 60b^2a^2 + 49b^3a + 4b^4)}. \quad (3.30)$$

Se $a \neq 5b$ e $2a \neq b$, então o sistema (3.15) tem um ponto de Hopf transversal em Q_+ para $(a, b, c) \in \mathcal{S}$.

Mais precisamente, se $(a, b, c) \in \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_6$, então o sistema (3.15) tem um ponto de Hopf de codimensão 1 em Q_+ . Se $(a, b, c) \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, $l_1 < 0$, então Q_+ é um foco atrator fraco (sobre a superfície central) e para cada $c > c_c$, mas próximo de c_c , existe um ciclo limite estável próximo do ponto de equilíbrio instável (sobre a superfície central) Q_+ . Se $(a, b, c) \in \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_6$, $l_2 < 0$, então Q_+ é um foco repulsor fraco (sobre a superfície central) e para cada $0 < c < c_c$, mas próximo de c_c , existe um ciclo limite instável próximo do ponto de equilíbrio estável (sobre a superfície central) Q_+ .

Prova. Basta-nos calcular a condição de transversalidade, pois os cálculos de l_1 foram exibidos acima. Observe que $c = b/2$ e $c = 2b$ em (3.28), equivalem a $a = b/2$ e a $a = 5b$,

respectivamente, na expressão dada em (3.30) e o termo quadrático da primeira expressão não aparece explícito na segunda. Por último, veja que se $a \neq 5b$ e $2a \neq b$, a condição de não-degenerescência é satisfeita, ou seja, $l_1 \neq 0$.

Sejam agora, a matriz Jacobiana dada em (3.17) e os autovetores q e pN dados em (3.23) e (3.25), respectivamente. Temos que

$$\mathcal{D} = \frac{\partial A}{\partial c} \Big|_{c=(a+b)/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{b(a+b)}} \\ \frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{b(a+b)}} & \frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{b(a+b)}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

e o produto interno

$$\langle pN, \mathcal{D}q \rangle = \frac{9ab}{2(4a^2 + 5ab + b^2)} \quad (3.32)$$

que é não nulo, pois $ab > 0$, satisfazendo a condição de transversalidade. ■

3.3.3 Bifurcações de Hopf de codimensão 2 em Q_{\pm} para o sistema de Lü

Faremos agora o estudo do segundo coeficiente de Lyapunov, onde o primeiro coeficiente se anula. Para isto definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 5b, b \neq 0, c = (a + b)/3\}.$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b/2, b \neq 0, c = (a + b)/3\}.$$

Primeiramente, determinaremos l_2 sobre o conjunto \mathcal{C}_1 . Temos os vetores

$$B(q, h_{20}) = \left(0, -\frac{65 + 37i\sqrt{5}}{7\sqrt{2}(13 + 2i\sqrt{5})b}, \frac{30i - 3\sqrt{5}}{7\sqrt{5}b + 28ib} \right),$$

$$2B(q, h_{11}) = \left(0, -\frac{5(22i + \sqrt{5})}{7\sqrt{2}(4i + \sqrt{5})b}, -\frac{45(-3i + \sqrt{5})}{14(4i + \sqrt{5})b}i + \sqrt{5} \right) \quad (3.33)$$

e

$$g_{21}q = \left(\frac{30\sqrt{2}(8i + 5\sqrt{5})}{49(7i + \sqrt{5})b}, \frac{6\sqrt{2}(5i + 11\sqrt{5})}{49(i + \sqrt{5})b}, \frac{30i + 66\sqrt{5}}{77ib - 7\sqrt{5}b} \right),$$

que permitem calcular

$$h_{21} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

onde

$$\varphi_1 = -\frac{5(1361632313i + 293270129\sqrt{5})}{2058\sqrt{2}(-286805i + 3034729\sqrt{5})b^2},$$

$$\varphi_2 = -\frac{20202089i + 19955162\sqrt{5}}{1029\sqrt{2}(25679i + 30869\sqrt{5})b^2}$$

e

$$\varphi_3 = \frac{3150872645i - 7926917893\sqrt{5}}{4116(-7730225i + 1373962\sqrt{5})b^2}$$

e o seu complexo conjugado

$$\bar{h}_{21} = \left(\frac{-440 + 457i\sqrt{5}}{2058\sqrt{2}b^2}, \frac{-1327 + 41i\sqrt{5}}{2058\sqrt{2}b^2}, \frac{-1139 + 823i\sqrt{5}}{4116b^2} \right).$$

Necessitamos também dos vetores complexos

$$h_{30} = \left(\frac{3(1235i + 647\sqrt{5})}{4\sqrt{2}(-2122i + 341\sqrt{5})b^2}, \frac{3(-1588i + 47\sqrt{5})}{2\sqrt{2}(2122i - 341\sqrt{5})b^2}, \frac{3(376i + 937\sqrt{5})}{4(-2122i + 341\sqrt{5})b^2} \right),$$

$$h_{31} = (\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6),$$

onde

$$\varphi_4 = \frac{\sqrt{-\frac{1402565213095}{2} + 114869268760i\sqrt{5}}}{376614b^3},$$

$$\varphi_5 = -\frac{\sqrt{-\frac{1545136746211}{2} - 318134547146i\sqrt{5}}}{376614b^3}$$

e

$$\varphi_6 = \frac{868127 + 233237i\sqrt{5}}{376614b^3},$$

além de

$$\bar{h}_{20} = \left(\frac{5\sqrt{b^2} - 17i\sqrt{5}b}{49\sqrt{2}b^2}, -\frac{19i\sqrt{5}b + 29\sqrt{b^2}}{49\sqrt{2}b^2}, \frac{2(13b - 5i\sqrt{5}\sqrt{b^2})}{49b^2} \right),$$

$$h_{22} = \left(-\frac{3695}{9604\sqrt{2}b^3}, -\frac{3695}{9604\sqrt{2}b^3}, -\frac{1865}{7203b^3} \right),$$

e do número complexo

$$\bar{g}_{21} = \frac{6i\sqrt{5}\sqrt{b^2}}{7b^2}.$$

Ainda sob as condições dadas no início desta seção, temos também

$$H_{32} = (\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9)$$

onde

$$\varphi_7 = \frac{15\sqrt{\frac{170129}{2} - 40216i\sqrt{5}}}{2401b^3},$$

$$\varphi_8 = -\frac{\sqrt{-\frac{5886752011330795}{2} + 1371626430945250i\sqrt{5}}}{36908172b^3}$$

e

$$\varphi_9 = \frac{60023855 - 7835509i\sqrt{5}}{10545192b^3},$$

além do número complexo

$$g_{32} = \langle p, H_{32} \rangle = \frac{26069440 + 2907937i\sqrt{5}}{12302724b^3}.$$

Finalmente, temos

$$l_2 \Big|_{\mathcal{C}_1} = \frac{1}{12\omega_0} \operatorname{Re}[g_{32}] = \frac{1629340}{9227043b^3}.$$

Para enunciarmos o teorema a respeito do segundo coeficiente de Lyapunov, necessitamos definir os seguintes conjuntos

$$\mathcal{C}_{11} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 5b, b > 0, c = (a + b)/3\},$$

$$\mathcal{C}_{12} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 5b, b < 0, c = (a + b)/3\}.$$

Observemos que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{11} \cup \mathcal{C}_{12}$.

Teorema 3.3.2 *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.15), ou seja, o sistema de Lü. O segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ ao longo de \mathcal{C}_1 é dado por*

$$l_2 \Big|_{\mathcal{C}_1} = \frac{1629340}{9227043b^3} \tag{3.34}$$

Se $(a, b, c) \in \mathcal{C}_1$, então o sistema (3.15) tem um ponto de Hopf transversal de codimensão 2 em Q_+ . Mais precisamente, o segundo coeficiente de Lyapunov é positivo sobre \mathcal{C}_{11} e negativo sobre \mathcal{C}_{12} .

Prova. Para os pontos de Hopf de codimensão 2, a condição de não-degenerescência é satisfeita, pois l_2 restrito a reta \mathcal{C}_1 é não nulo, como visto acima. Para a condição de transversalidade, conforme o Teorema 2.3.2, o produto interno dado em (3.32) é igual a

5/28. Isto satisfaz a condição de transversalidade, uma vez que tal produto interno não se anula.

■

Na figura 3.1 esboçamos as regiões $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 6$.

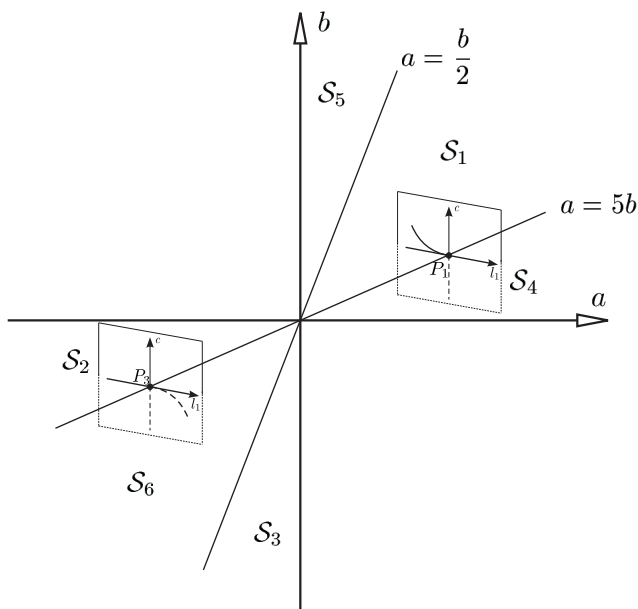


Figura 3.1: Regiões $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 6$.

A partir do Teorema 3.3.2 construímos os diagramas de bifurcação para o sistema (3.15), onde P_1 e P_3 são dois pontos típicos sobre a reta \mathcal{C}_1 , como na Figura 3.1. Veja Figuras 3.2 e 3.3.

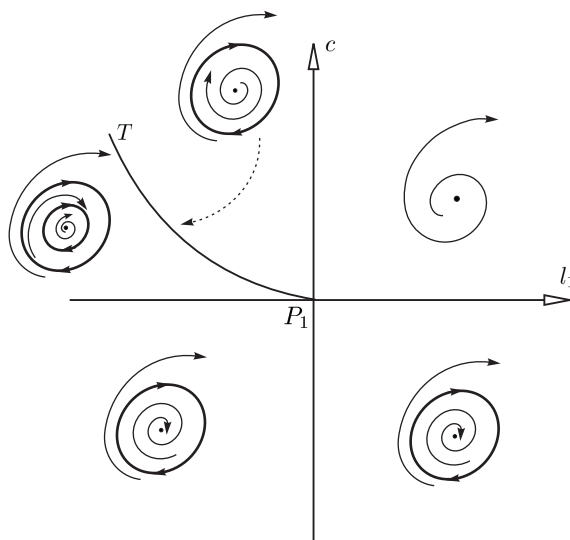


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação próximo à superfície \mathcal{S} em P_1 .

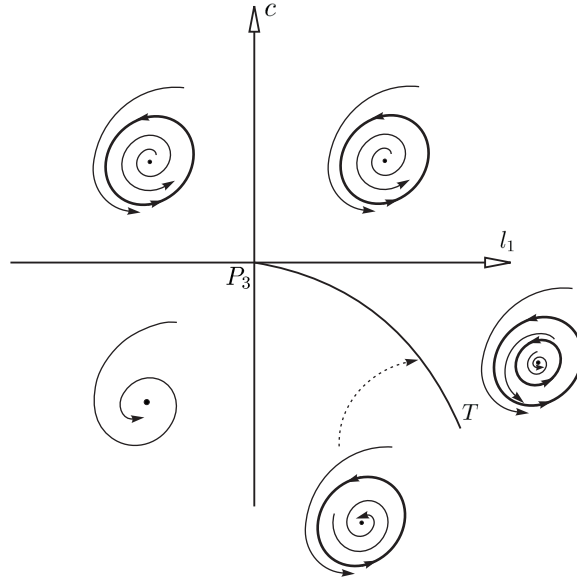


Figura 3.3: Diagrama de bifurcação próximo à superfície \mathcal{S} em P_3 .

Teorema 3.3.3 *Considere a família a três parâmetros de equações diferenciais (3.15), ou seja, o sistema de Lü. O segundo coeficiente de Lyapunov associado ao equilíbrio Q_+ ao longo de \mathcal{C}_2 é nulo, ou seja,*

$$l_2|_{\mathcal{C}_2} = 0. \quad (3.35)$$

Prova. Para a prova, temos os vetores

$$B(q, h_{20}) = \left(0, \frac{-3 + 6i\sqrt{2}}{(-4i + \sqrt{2})b}, \frac{3i}{\sqrt{2}b + 2ib} \right),$$

$$2B(q, h_{11}) = \left(0, -\frac{5\sqrt{2}}{b}, \frac{18i}{\sqrt{2}b + 2ib} \right),$$

e

$$g_{21}q = \left(-\frac{3i}{b}, \frac{12 + 3i\sqrt{2}}{\sqrt{2}b + 2ib}, -\frac{3i\sqrt{2}}{b} \right),$$

que permitem calcular

$$h_{21} = \left(\frac{-4537 + 2036i\sqrt{2}}{6(-146i + 95\sqrt{2})b^2}, -\frac{2183 + 1016i\sqrt{2}}{6(112i + 17\sqrt{2})b^2}, \frac{-3154i + 1513\sqrt{2}}{6(44i + 241\sqrt{2})b^2} \right),$$

e o seu complexo conjugado

$$\bar{h}_{21} = \left(\frac{14i - 37\sqrt{2}}{12b^2}, -\frac{32i + 23\sqrt{2}}{12b^2}, \frac{5 + 7i\sqrt{2}}{6b^2} \right).$$

Necessitamos também dos vetores complexos

$$h_{30} = \left(\frac{3(13i + 8\sqrt{2})}{2(16 + 13i\sqrt{2})b^2}, \frac{3(61 + 31i\sqrt{2})}{2(-16i + 13\sqrt{2})b^2}, \frac{9}{2b^2} \right),$$

$$h_{31} = \left(\frac{\sqrt{17647 - 940i\sqrt{2}}}{6b^3}, \frac{\sqrt{-47537 + 54704i\sqrt{2}}}{6b^3}, \frac{118 + 11i\sqrt{2}}{3b^3} \right),$$

além de

$$\bar{h}_{20} = \left(\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{2}b^2}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{b^2} - 4ib}{2b^2}, \frac{2}{b} \right),$$

$$h_{22} = \left(-\frac{216727i + 3378596\sqrt{2}}{(6757192 + 216727i\sqrt{2})b^3}, -\frac{216727i + 3378596\sqrt{2}}{(6757192 + 216727i\sqrt{2})b^3}, -\frac{20}{3b^3} \right),$$

e do número complexo

$$\bar{g}_{21} = \frac{3i\sqrt{2}\sqrt{b^2}}{b^2}.$$

Ainda sob as condições dadas no início desta seção, temos também

$$H_{32} = \left(\frac{3\sqrt{-1271 - 518i\sqrt{2}}}{2b^3}, -\frac{\sqrt{\frac{53663}{2} + 11327i\sqrt{2}}}{3b^3}, \frac{-169 + 67i\sqrt{2}}{6b^3} \right)$$

e

$$g_{32} = \langle p, H_{32} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}b^3}$$

Finalmente, temos

$$l_2 \Big|_{\mathcal{C}_2} = \frac{1}{12\omega_0} \text{Re}[g_{32}] = 0.$$

Isto conclui a prova. ■

Observação 3.3.1 *Pelos Teoremas 3.3.1 e 3.3.3 sabemos que ao longo do conjunto \mathcal{C}_2 o primeiro e segundo coeficientes de Lyapunov se anulam, ou seja,*

$$l_1 \Big|_{\mathcal{C}_2} = l_2 \Big|_{\mathcal{C}_2} = 0.$$

Embora não seja objetivo desta dissertação, podemos informar que ocorre ainda o seguinte

$$l_3 \Big|_{\mathcal{C}_2} = 0.$$

Destas informações, podemos concluir que, para valores de parâmetros sobre \mathcal{C}_2 , os equilíbrios Q_{\pm} correspondentes serão centros não lineares, conforme ilustra a Figura 3.4.

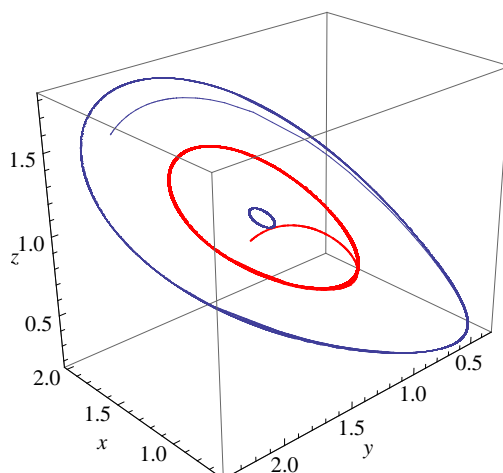


Figura 3.4: Retrato de fase do sistema (3.15) próximo do ponto Q_+ .

3.4 Bifurcações de Hopf no sistema de Lorenz (1.1)

Nesta seção estudaremos as bifurcações de Hopf que surgem no sistema clássico de Lorenz (1.1), obtido de (1.2) fazendo $c = -1$. Para fins de manutenção da simbologia clássica do sistema de Lorenz, faremos $\sigma = a$ e $r = d$ e $c = -1$ no sistema (1.2), obtendo assim o sistema de Lorenz (1.1), onde os parâmetros σ, r, b são números reais positivos.

Além do equilíbrio na origem, para todos os valores dos parâmetros, temos os equilíbrios $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, que só existem para $r > 1$. Pode-se mostrar que quando

$$1 < r < \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$$

os equilíbrios Q_{\pm} são localmente assintoticamente estáveis e que quando

$$r > \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$$

os equilíbrios Q_{\pm} são instáveis. Esta mudança na estabilidade local dos equilíbrios Q_{\pm} é uma pista para a existência de oscilações no sistema. De fato, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.4.1 *Em*

$$r = r_c = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right), \quad (3.36)$$

onde $\sigma > b + 1$ e $b > 0$, o sistema de Lorenz (1.1) apresenta bifurcações de Hopf de codimensão 1 relativa aos equilíbrios Q_{\pm} .

Mais precisamente, o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov, restrito à superfície de Hopf $r = r_c$ é positivo, para todos os valores $\sigma > b + 1$ e $b > 0$. Portanto, para valores de parâmetros sobre a superfície de Hopf os equilíbrios Q_{\pm} são repulsores fracos (para a restrição do sistema (1.1) à variedade central) e para $1 < r < r_c$, mas suficientemente próximo de r_c , existem órbitas periódicas repulsoras próximas dos equilíbrios atratores Q_{\pm} .

Prova. Aqui daremos somente os passos principais para a prova do teorema. Para maiores detalhes, ver Anexo E. Abaixo listamos ω_0 e os autovetores q e pN

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2b\sigma(\sigma+1)}}{\sqrt{-b+\sigma-1}},$$

$$q = \left(\sigma, \sigma + i\omega_0, \frac{\omega_0(\omega_0 - i(\sigma+1))}{\sqrt{b(r_c-1)}} \right),$$

$$pNb = (pNb_1, pNb_2, pNb_3),$$

onde

$$pNb_1 = \frac{\beta(r_c-2) - i\omega_0}{\omega_0(-2i\sigma^2 + 4\omega_0\sigma - 2i\sigma + 2i\omega_0^2 + \omega_0) + \beta(-\sigma^2 + (r_c - 2i\omega_0 - 2)\sigma + \omega_0^2)},$$

$$pNb_2 = \frac{(\omega_0 - i\beta)(\omega_0 - i\sigma)}{\omega_0(-2i\sigma^2 + 4\omega_0\sigma - 2i\sigma + 2i\omega_0^2 + \omega_0) + \beta(-\sigma^2 + (r_c - 2i\omega_0 - 2)\sigma + \omega_0^2)},$$

$$pNb_3 = \frac{\sqrt{\beta(r_c-1)}(\sigma + i\omega_0)}{\omega_0(-2i\sigma^2 + 4\omega_0\sigma - 2i\sigma + 2i\omega_0^2 + \omega_0) + \beta(-\sigma^2 + (r_c - 2i\omega_0 - 2)\sigma + \omega_0^2)}.$$

De posse dos autovetores q e pN e das funções multilineares simétricas, como nos casos anteriores, podemos calcular os vetores complexos h_{ij} e destes calcular o primeiro coeficiente de Lyapunov, o qual resulta em

$$l_1(b, \sigma, r_c) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \quad (3.37)$$

onde

$$\vartheta_1(b, \sigma, r_c) = \beta(\beta - \sigma + 1)\sigma^2 \left(-9\sigma^4 + 2(9\beta - 10)\sigma^3 - 2(10\beta^2 + \beta + 5)\sigma^2 \right. \\ \left. + 2(\beta + 1)((\beta - 7)\beta + 2)\sigma + (\beta + 1)^3(\beta + 3) \right)$$

e

$$\vartheta_2(b, \sigma, r_c) = (\beta + \sigma + 1) \left((\beta + 1)^3 - \sigma^3 - (3\beta + 1)\sigma^2 + (\beta^2 + 1)\sigma \right) \left((\beta + 1)^3 \right. \\ \left. - \sigma^3 - (9\beta + 1)\sigma^2 + ((\beta - 6)\beta + 1)\sigma \right).$$

σ	β	r_c	l_1	σ	β	r_c	l_1
3	1	21	0.01375	8	6	136	0.00046
4	2	36	0.00454	9	7	171	0.00032
5	3	55	0.00208	10	8	210	0.00023
6	4	78	0.00114	11	9	253	0.00017
7	5	105	0.00070	12	10	300	0.00013

Tabela 3.1: Sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov para o sistema de Lorenz.

O primeiro coeficiente de Lyapunov l_1 tem sinal fixo e positivo na região $\sigma > b + 1$ e $b > 0$, como queríamos provar. A Tabela (3.1) acima, tem o objetivo de confirmar, numericamente, o sinal fixo positivo do primeiro coeficiente de Lyapunov l_1 para o sistema clássico de Lorenz (1.1).

■

Capítulo 4

Simulações numéricas

Neste capítulo, faremos diversas simulações numéricas em torno dos equilíbrios $O(0, 0, 0)$ e $Q_{\pm}(\pm\sqrt{b(c+d)}, \pm\sqrt{b(c+d)}, c+d)$, do sistema apresentado em (3.1). Essas simulações têm como objetivo destacar a estabilidade dos equilíbrios e apresentar as órbitas periódicas bifurcantes, confirmando assim, a ocorrência das bifurcações de Hopf para um dado conjunto de parâmetros, combinado com uma determinada escolha de condições iniciais. As simulações que seguem foram feitas utilizando o software MATHEMATICA 6 [17].

4.1 O equilíbrio $O(0, 0, 0)$

O sistema em estudo tem motivação no sistema proposto por E.N. Lorenz, em 1963. O acréscimo de um parâmetro neste sistema, nos dá o objeto do nosso trabalho, que é um sistema tipo Lorenz, conforme discutido na Introdução.

O Teorema 3.2.2 combinado com o Teorema 3.2.3, nos garante que o sistema (3.1), sofre bifurcações de Hopf, cujo hiperplano de bifurcação é dado por $c = a$, com a formação de órbitas periódicas atratoras em torno do equilíbrio $O(0, 0, 0)$ quando $2a < b$ e $a < c$, com $a > 0$. Para ilustrar estas órbitas, tomamos fixos os parâmetros $a = 2$, $b = 5$ e $d = -2.1$ e variamos o parâmetro c com relação ao parâmetro a . Tomando a condição inicial igual a $(x, y, z) = (7.2, -0.5, 14)$ e o tempo de integração $[0, 165]$, com o parâmetro $c = 1.9$, o equilíbrio $O(0, 0, 0)$ é atrator e, quando $c = 2$, o equilíbrio é um atrator fraco, que estão ilustrados no plano xy pelas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente.

Com os mesmos valores para os parâmetros a , b e d para a órbita externa ao ciclo limite, e o tempo de integração de $[0, 100]$, mas com condição inicial $(0.3, 0.9, 1)$ para a órbita interna ao ciclo limite e $c = 2.1$, o equilíbrio passa a ser um repulsor e podemos

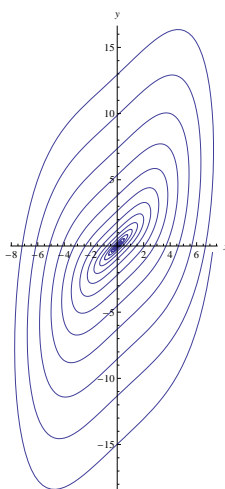


Figura 4.1: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo da origem que é um atrator.

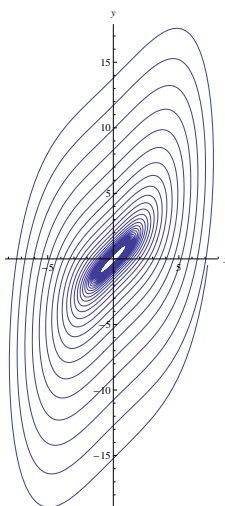


Figura 4.2: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo da origem que é um atrator fraco.

contemplar, em torno do equilíbrio, a formação da órbita periódica atratora, ilustrada pela Figura 4.3 (a) e (b).

Ressaltamos que na região onde $2a < b$ e $a > c$, com a positivo, existe uma órbita periódica repulsora em torno desse equilíbrio. Casos semelhantes ocorrem quando a é negativo, cabendo observar que as órbitas periódicas atratora e repulsora se formarão em lados opostos daquelas descritas anteriormente e, não serão ilustradas aqui.

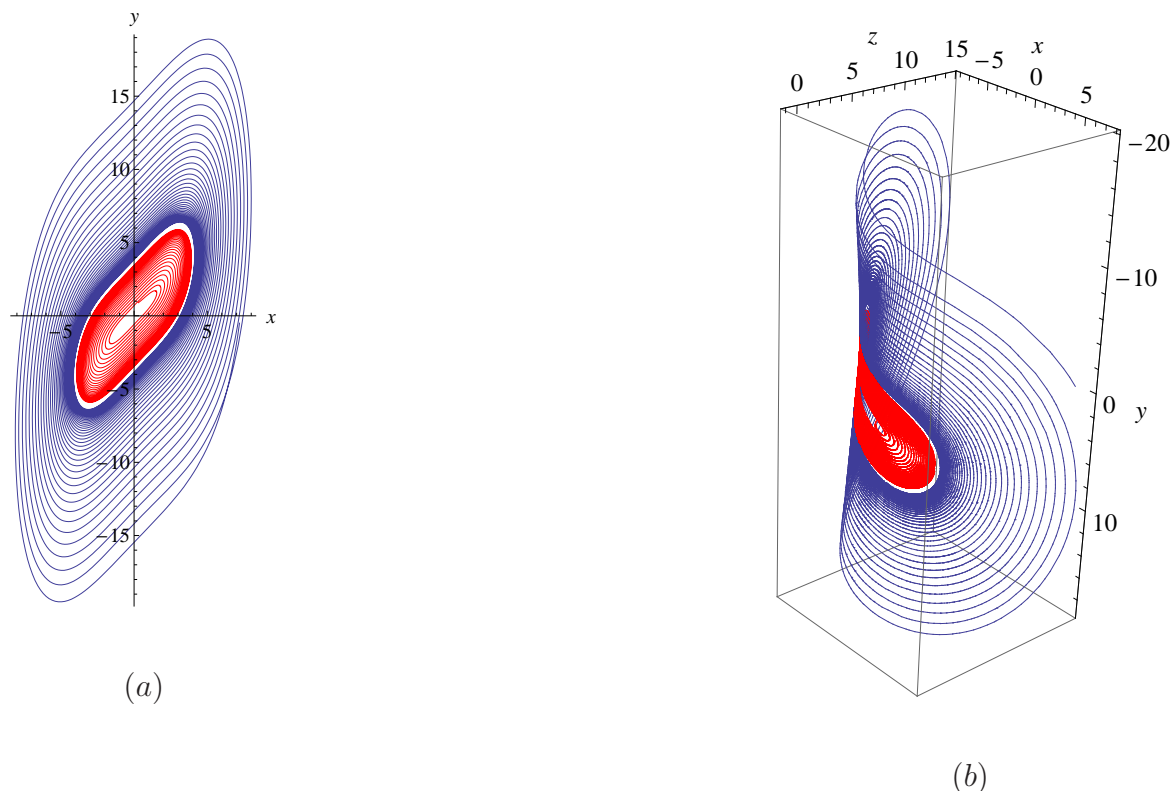


Figura 4.3: Órbita periódica atratora em torno da origem do sistema (3.1).

4.2 Os equilíbrios Q_{\pm}

No estudo de Q_{\pm} , temos que a superfície de bifurcação é \mathcal{S} , com $c = (a + b)/3$ e $d = 0$, conforme (3.19) e que, as bifurcações de Hopf de codimensão 1 ocorrem apenas nas sub-regiões $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 6$. Esses equilíbrios são simétricos com relação ao eixo z , conforme (3.1.1) e assim, basta trabalhar apenas com Q_+ . O que faremos agora é apresentar algumas simulações, com o objetivo de ilustrar as bifurcações que estamos interessados.

4.2.1 A região \mathcal{S}_1

Para uma simulação numérica nesta região, fixamos $a = 1.5$, $b = 1.5$ e variamos o parâmetro c . Consideremos $c = 0.99$, a condição inicial $(x, y, z) = (0.3, 0.9, 4)$ e o tempo de integração $[0, 300]$. Sob estas condições, o equilíbrio Q_+ é um atrator, ilustrado na Figura 4.4. Mantendo os parâmetros a, b , a condição inicial e o tempo de integração e tomando $c = 1$, o equilíbrio é um atrator fraco, ilustrado na Figura 4.5.

Considerando, ainda, os mesmos parâmetros a e b , a mesma condição inicial, o tempo de integração $[0, 150]$ e $c = 1.01$, o equilíbrio torna-se um repulsor com a formação de uma órbita periódica atratora acima da região \mathcal{S}_1 , ilustrada na Figura 4.6.

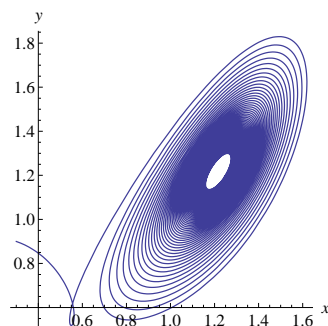


Figura 4.4: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.

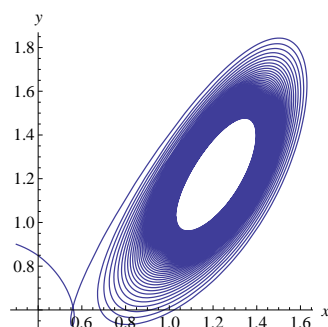


Figura 4.5: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.

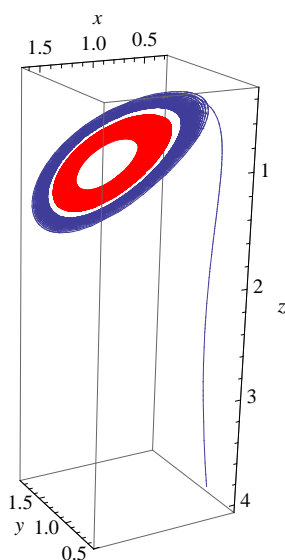


Figura 4.6: Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio Q_+ .

4.2.2 A região \mathcal{S}_2

Nesta região, fixamos $a = -20$, $b = -4$ e variamos o parâmetro c . Primeiramente fazemos $c = -8.1$, a condição inicial $(x, y, z) = (7.5, -8.7, -8.5)$ e o tempo de integração negativo [-

40,-3]. Sob estas condições, o equilíbrio Q_+ é um atrator (sobre a continuação da superfície central), ilustrado na Figura 4.7.

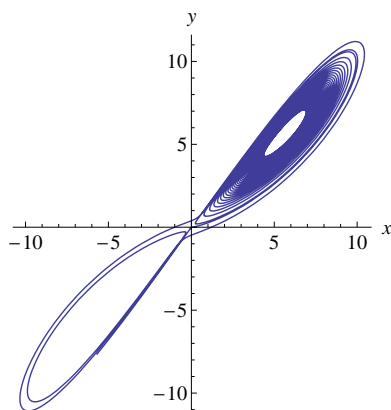


Figura 4.7: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.

Mantendo os parâmetros a e b , fazendo $c = -8$, a condição inicial $(x, y, z) = (6.1, -5.8, 6)$ e o tempo de integração negativo de $[-39, -2]$, o equilíbrio passa a ser um atrator fraco (sobre a superfície central), como mostra a Figura 4.8.

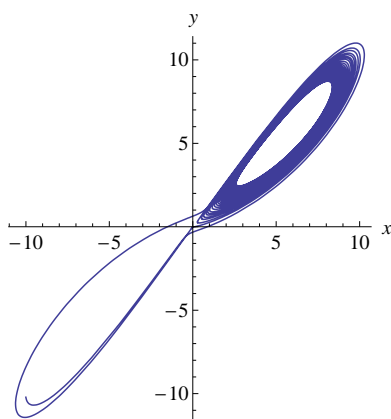


Figura 4.8: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.

Considerando, ainda, os mesmos parâmetros a e b , com $c = -7.9$, a condição inicial $(x, y, z) = (2, 1.56, -3.5)$ e o tempo de integração $[-12, 0]$ para a órbita externa e $(x, y, z) = (9.3, 9.3, -10.5)$ com o tempo de integração para a órbita externa ao ciclo limite, o equilíbrio é um repulsor (sobre a continuação da superfície central) surgindo uma órbita periódica atratora acima da região \mathcal{S}_2 , como mostra a Figura 4.9.

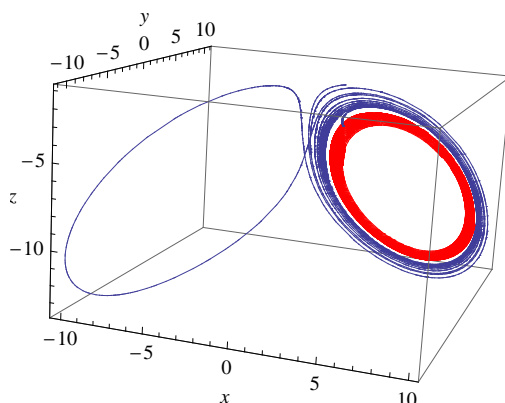


Figura 4.9: Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio repulsor Q_+ .

4.2.3 A região \mathcal{S}_3

Para esta região, fixamos $a = -2$, $b = -4.6$ e continuamos variando o parâmetro c . Tomamos, então, $c = -2.22$, a condição inicial igual a $(x, y, z) = (2, 2, -2)$ e o tempo de integração negativo $[-40.5, 0.]$. Desta forma, o equilíbrio é um atrator (sobre a continuação da superfície central), como mostra a Figura 4.10. Tomando $c = -2.2$, $(x, y, z) = (2, 2, -2)$ e o tempo de integração $[-83, 0.]$, o equilíbrio passa a ser um atrator fraco (sobre a superfície central), ilustrado pela Figura 4.11.

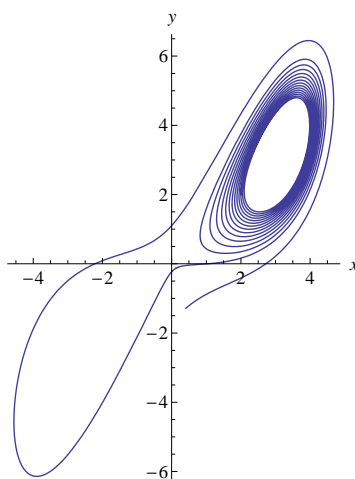


Figura 4.10: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator.

Agora fazendo $c = -2.19$, a condição inicial $(x, y, z) = (2.11, 2.11, -2)$ e o tempo de integração $[-200, 0.]$, o equilíbrio passa a ser um repulsor e, portanto, há a formação da

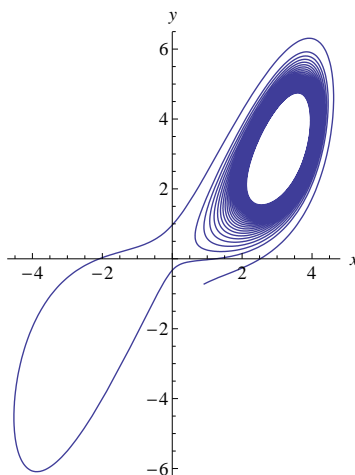


Figura 4.11: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um atrator fraco.

órbita periódica atratora, acima da região \mathcal{S}_3 , que pode ser vista na Figura 4.12.

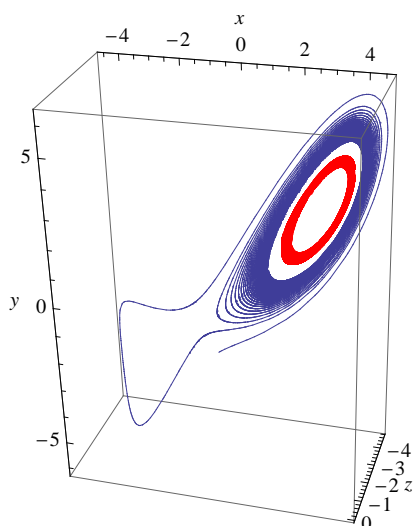


Figura 4.12: Órbita periódica atratora próxima do equilíbrio repulsor Q_+ .

4.2.4 A região \mathcal{S}_4

Nesta região, fixamos novamente $a = 25$, $b = 3.2$ e variamos c . Tomemos, primeiramente, $c = 9.41$, condição inicial $(x, y, z) = (5, 5, 8)$ e o tempo de integração $[0, 98]$. Isto confirma que o equilíbrio é um repulsor, ilustrado na Figura 4.13. Nestas mesmas condições, mas com $c = 9.4$, o equilíbrio passa a ser repulsor fraco. Veja a Figura 4.14.

Para este caso, a órbita periódica é repulsora e surge abaixo de \mathcal{S}_4 . Para verificar isso, tomamos $a = 20$, $b = 0.45$ e $c = 6.69$, a condição inicial $(x, y, z) = (5, 5, 8)$ e o tempo

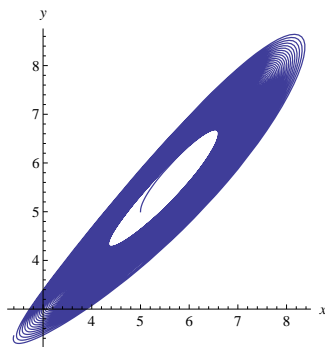


Figura 4.13: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.

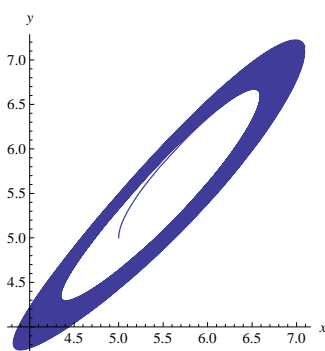


Figura 4.14: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.

de integração [50,178], para a órbita interna e $(x, y, z) = (6.57, 4.1, 5.2)$ e [10,110] para a órbita externa ao ciclo limite. Essa órbita pode ser vista na Figura 4.15.

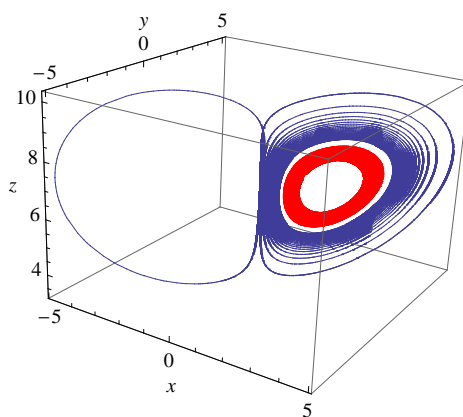


Figura 4.15: Órbita periódica repulsora próxima ao equilíbrio atrator em Q_+ .

4.2.5 A região \mathcal{S}_5

Consideremos $a = 3$, $b = 6.3$ inicialmente fixos e $c = 3.13$. Tomando a condição inicial $(x, y, z) = (5, 2, -3.5)$ e o tempo de integração $[0, 68]$, o equilíbrio é repulsor. Considerando agora, $c = 3.1$ para os mesmos valores dos parâmetros e a mesma condição inicial, mas com o tempo de integração $[1, 146]$, o equilíbrio é um repulsor fraco. Essas situações podem ser contempladas nas figuras 4.16 e 4.17, respectivamente.

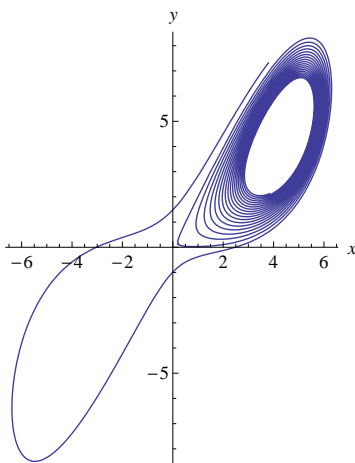


Figura 4.16: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.

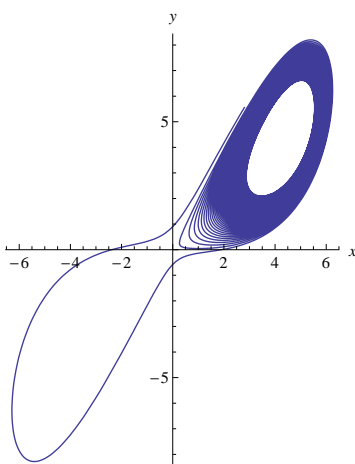


Figura 4.17: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.

Aqui, a órbita periódica é repulsora e surge abaixo da superfície \mathcal{S}_5 . Para observar essa órbita, fizemos $a = 3$, $b = 6.96$, $c = 3.29$, a condição inicial $(x, y, z) = (7.4, 4.6, 2.7)$ e o tempo $[1, 98]$, para a órbita interna ao ciclo limite. Para a órbita externa a esse ciclo,

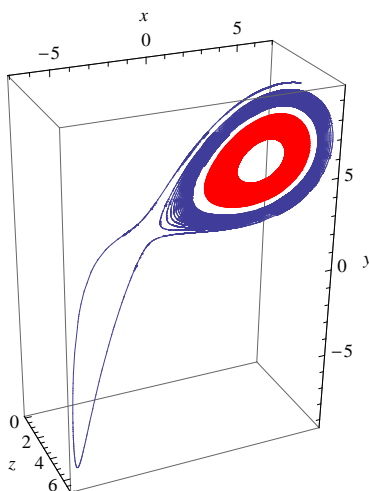


Figura 4.18: Órbita periódica repulsora próxima do equilíbrio atrator em Q_+

fizemos $(x, y, z) = (7.2, 3, 2.6)$ e o tempo $[1, 51.5]$. Sob estas condições, temos a órbita periódica ilustrada na Figura 4.18.

4.2.6 A região \mathcal{S}_6

Nesta região, usamos os mesmos argumentos anteriores. Sejam, então $a = -1.5$, $b = -1.5$ e primeiramente fazemos $c = -0.99$, a condição inicial $(x, y, z) = (-1, 0.4, 1.5)$ e o tempo negativo $[-150, 0.]$. Para essas condições, o equilíbrio é um repulsor. Se $c = -1$, o equilíbrio passa a ser um repulsor fraco. Podemos ver tudo isso, nas figuras 4.19 e 4.20, respectivamente.

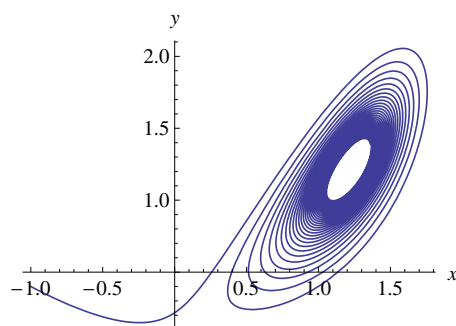


Figura 4.19: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor.

Aqui também a órbita periódica é repulsora e surge abaixo da superfície \mathcal{S}_6 . Para observar essa órbita, fizemos a e b como acima, $c = -1.01$, a condição inicial $(x, y, z) = (1.425, 1.425, -2.42)$ e o tempo $[-150, -1]$, para a órbita externa ao ciclo limite. Para a

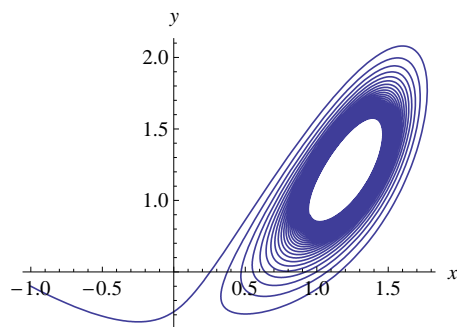


Figura 4.20: Projeção no plano xy do retrato de fase do sistema (3.1) próximo de Q_+ que é um repulsor fraco.

órbita interna a esse ciclo, fizemos $(x, y, z) = (1.35, 1.35, -1.1)$ e um tempo $[-500, 0]$. Sob estas condições, temos a órbita periódica ilustrada na Figura 4.21.

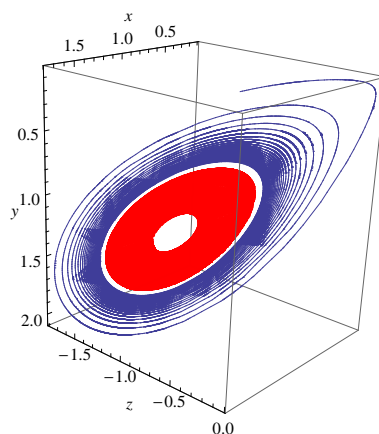


Figura 4.21: Órbita periódica repulsora próxima ao equilíbrio atrator em Q_+ .

Conclusões

Neste trabalho estudamos analítica e numericamente o comportamento dinâmico do sistema tipo Lorenz (1.2), no espaço de parâmetros reais $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, utilizando o primeiro e o segundo coeficientes de Lyapunov (l_1 e l_2).

Como foi mostrado, o sistema possui o equilíbrio O , para todos os valores dos parâmetros, e, possivelmente, os equilíbrios Q_{\pm} , dependendo dos valores dos parâmetros.

Quando estudamos a estabilidade do primeiro equilíbrio, constatamos a existência do plano $2a = b$, que intercepta o conjunto de Hopf $S = S_1 \cup S_2$, onde S é como no Teorema (3.2.2), para o qual o primeiro coeficiente de Lyapunov se torna nulo e, ocorre bifurcação de Hopf quando variamos o parâmetro c .

Quando l_1 não se anula, significa que podemos determinar o comportamento equilíbrio na *origem* em todo o conjunto S , exceto ao longo daquele plano. Sobre este plano, necessitamos determinar o segundo coeficiente de Lyapunov, como foi feito.

No estudo dos equilíbrios Q_{\pm} relativos ao sistema de Lü (3.15), constatamos também que, ao longo da superfície de Hopf \mathcal{S} , existem duas retas $a = 5b$ e $a = b/2$, sobre as quais o primeiro coeficiente de Lyapunov se anula. Além disso, ocorre bifurcação de Hopf de codimensão 1 apenas nas sub-regiões $\mathcal{S}_i, i = 1, \dots, 6$. Também neste caso, precisamos determinar o segundo coeficiente de Lyapunov, restrito a cada uma daquelas retas, o que também foi feito, objetivando conhecer o comportamento dos equilíbrios Q_{\pm} , quando tomamos parâmetros sobre as tais retas. Vale lembrar que, l_2 não se anula ao longo da reta $a = 5b$, mas é nulo ao longo da reta $a = b/2$.

Como proposta para trabalhos futuros podemos citar: estudar a estabilidade e as bifurcações dos equilíbrios Q_{\pm} não apenas para o sistema de Lü (3.15), mas para o sistema tipo Lorenz (1.2); estudar as outras possíveis bifurcações locais no sistema de Lü (3.15).

Bibliografia

- [1] G. Chen e T. Ueta, *Yet another chaotic attractor*, Int. J. Bifurcat. Chaos, **9** (1999), 1465–1466.
- [2] L.O. Chua, *Chua's circuit. An overview ten years later*, J. Circuits Syst. Comput., **4** (1994), 117–159.
- [3] M. Hirsch, S. Smale e R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, second edition, Academic Press, San Diego, 2004.
- [4] Y.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer–Verlag, New York, 2004.
- [5] H. Liao, T. Zhou e Y. Tang, *The chaotic region of Lorenz-type systems in the parametric space*, Chaos, Solitons and Fractals, **21** (2004), 185–192.
- [6] E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., **20** (1963), 130–?.
- [7] J. Lü e G. Chen, *A new chaotic attractor coined*, Int. J. Bifurc. Chaos, **12** (2002), 659–661.
- [8] J. Marsden e M. MacCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Applied Mathematical Sciences, **19**, Springer–Verlag, New York, 1976.
- [9] Z. LÜ AND L. DUAN, *Codimension–2 Bautin bifurcation in the Lü system*, Physics Letters A **366** (2007), 442–446.
- [10] L.F. Mello, M. Messias e D.C. Braga, *Bifurcation analysis of a new Lorenz-like chaotic system*, Chaos, Solitons and Fractals, **37** (2008), 1244–1255.
- [11] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Addison–Wesley Publishing Company Inc., 1962.

- [12] E. Rössler, *Continuous chaos—four prototype equations* in Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines, Annal New York Academic Science, vol. 316, New York, 376–392.
- [13] J. Sotomayor, L. F. Mello e D. C. Braga, *Bifurcation analysis of the Watt governor system*, Computational and Applied Mathematics, **26** (2007), 19–44.
- [14] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*, Springer–Verlag, New York, 1982.
- [15] F. Takens, *Unfoldings of certain singularities of vectorfields: Generalized Hopf bifurcations*, J. Diff. Equations, **14** (1973), 476–493.
- [16] D.B. Santos, *Bifurcação de Hopf num modelo de controle biológico (Hopf Bifurcation in a biological control model)*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2004, http://www.ime.usp.br/dbraun/dissertacao_danilo.pdf
- [17] Software MATHEMATICA 6: <http://www.wolfram.com/>

Anexo A

■ Sistema de interesse - campo vetorial

Sistema tipo Lorenz

$$\begin{aligned} f_1[x_, y_, z_] &:= a * (y - x) \\ f_2[x_, y_, z_] &:= d * x + c * y - x * z \\ f_3[x_, y_, z_] &:= -b * z + x * y \end{aligned}$$

■ Equilíbrios

$$\begin{aligned} e &= \text{Simplify}[\text{Solve}[\{f_1[x, y, z] == 0, f_2[x, y, z] == 0, f_3[x, y, z] == 0\}, \{x, y, z\}]] \\ &= \left\{ \{z \rightarrow 0, y \rightarrow 0, x \rightarrow 0\}, \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow -\sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow -\sqrt{b(c+d)} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow \sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow \sqrt{b(c+d)} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Equilíbrio origem (e_0)

$$\begin{aligned} e_0 &= \{x, y, z\} /. e[[1]] \\ &= \{0, 0, 0\} \end{aligned}$$

Equilíbrio Q_-

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x, y, z\} /. e[[2]] \\ &= \{-\sqrt{b(c+d)}, -\sqrt{b(c+d)}, c+d\} \end{aligned}$$

Equilíbrio Q_+

$$\begin{aligned} e_2 &= \{x, y, z\} /. e[[3]] \\ &= \{\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, c+d\} \end{aligned}$$

■ Parte linear do campo - matriz Jacobiana A

$$\begin{aligned} \text{Df}[\{x_, y_, z_}] &:= \{ \\ &\quad \{\text{Derivative}[1, 0, 0][f_1][x, y, z], \\ &\quad \text{Derivative}[0, 1, 0][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_1][x, y, z]\}, \\ &\quad \{\text{Derivative}[1, 0, 0][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_2][x, y, z], \\ &\quad \text{Derivative}[0, 0, 1][f_2][x, y, z]\}, \{\text{Derivative}[1, 0, 0][f_3][x, y, z], \\ &\quad \text{Derivative}[0, 1, 0][f_3][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_3][x, y, z]\} \\ \text{A}[\{x_, y_, z_}] &:= \text{Df}[\{x, y, z\}] \end{aligned}$$

Matriz Jacobiana A

$$\begin{aligned} \text{A}[\{x, y, z\}] &= \\ &= \{-a, a, 0\}, \{d - z, c, -x\}, \{y, x, -b\} \end{aligned}$$

`MatrixForm[A[{x, y, z}]]`

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d - z & c & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

■ Matriz Jacobiana aplicada na origem (e_0)

`A = A[e0]`

`{{-a, a, 0}, {d, c, 0}, {0, 0, -b}}`

`MatrixForm[A]`

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

■ Polinômio característico calculado na origem e_0

`p[λ_] := Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]`

`Simplify[p[λ]]`

`-(b + λ) (-a (c + d - λ) + λ (-c + λ))`

Polinômio

`-(b + λ) (-a (c + d - λ) + λ (-c + λ))`

■ Autovalores seguidos respectivos autovetores

`Simplify[Eigensystem[A]]`

`{{{-b, $\frac{1}{2} (-a + c - \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 4ad})$, $\frac{1}{2} (-a + c + \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 4ad})$ }}`,

`{{{0, 0, 1}, {- $\frac{a + c + \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 4ad}}{2d}$, 1, 0}, {- $\frac{a + c - \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + 4ad}}{2d}$, 1, 0}}}}`

■ Superfície de bifurcação

Superfície de bifurcação

`c = a`

`a`

Parâmetro d, sendo m real e maior que 1

`d = -m * a`

`-a m`

`A`

`{{{-a, a, 0}, {-a m, a, 0}, {0, 0, -b}}`

`MatrixForm[A]`

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -a m & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

■ Autovetores da matriz A - autovalores e respectivos autovetores

`AV = Simplify[Eigensystem[A], a > 0 && m > 1]`

$$\left\{ \left\{ -b, -i a \sqrt{-1+m}, a \sqrt{1-m} \right\}, \left\{ \{0, 0, 1\}, \left\{ \frac{1+\sqrt{1-m}}{m}, 1, 0 \right\}, \left\{ \frac{1-i\sqrt{-1+m}}{m}, 1, 0 \right\} \right\} \right\}$$

■ Matriz transposta de A (AT)

`AT = Transpose[A]`

$$\left\{ \{-a, -a m, 0\}, \{a, a, 0\}, \{0, 0, -b\} \right\}$$

`MatrixForm[AT]`

$$\begin{pmatrix} -a & -a m & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

■ Autovalores de AT - autovalores e respectivos autovetores

`Simplify[Eigensystem[AT], a > 0 && m > 1]`

$$\left\{ \left\{ -b, -i a \sqrt{-1+m}, a \sqrt{1-m} \right\}, \left\{ \{0, 0, 1\}, \left\{ -1-i\sqrt{-1+m}, 1, 0 \right\}, \left\{ -1+\sqrt{1-m}, 1, 0 \right\} \right\} \right\}$$

■ Autovetor complexo q, satisfazendo $Aq = i\omega_0 q$

$$\omega_0 = a * \sqrt{-1+m};$$

`Clear[\omega_0]`

$$q = \left\{ \frac{a - i \omega_0}{a + m}, 1, 0 \right\}$$

$$\left\{ \frac{a - i \omega_0}{a m}, 1, 0 \right\}$$

■ O conjugado do vetor q (qb)

`qb = ComplexExpand[Conjugate[q]]`

$$\left\{ \frac{1}{m} + \frac{i \omega_0}{a m}, 1, 0 \right\}$$

■ Autovetor adjunto p, satisfazendo $ATp = -i\omega_0 p$

$$p = \left\{ -1 - \frac{i \omega_0}{a}, 1, 0 \right\}$$

$$\left\{ -1 - \frac{i \omega_0}{a}, 1, 0 \right\}$$

O conjugado do vetor p (pb)

```
pb = ComplexExpand[Conjugate[p]]
```

$$\left\{-1 + \frac{i \omega 0}{a}, 1, 0\right\}$$

■ Confirmando os vetores q e p

```
 $\omega 0 = a * \sqrt{-1 + m}$  ;  
Simplify[A.q - i  $\omega 0$  q]  
Clear[ $\omega 0$ ]
```

$$\{0, 0, 0\}$$

```
 $\omega 0 = a * \sqrt{-1 + m}$  ;  
Simplify[AT.pb - i  $\omega 0$  pb]  
Clear[ $\omega 0$ ]
```

$$\{0, 0, 0\}$$

■ Normalização de p com respeito a q

Fator de normalização u

```
 $\omega 0 = a * \sqrt{-1 + m}$  ;  
u = Simplify[1 / (pb.q)]  
Clear[ $\omega 0$ ]
```

$$\frac{i m}{2 i + 2 \sqrt{-1 + m} - 2 i m}$$

Reescrevendo u em termos de $\omega 0$

$$u = \frac{-i a m}{(2 a i + 2 \omega 0 - 2 a m i)}$$

$$\frac{i a m}{2 i a - 2 i a m + 2 \omega 0}$$

Normalizando p (pN)

```
pN = FullSimplify[ComplexExpand[u * p]]
```

$$\left\{-\frac{m (a + i \omega 0)}{2 a (-1 + m) + 2 i \omega 0}, \frac{a m}{2 a (-1 + m) + 2 i \omega 0}, 0\right\}$$

Conjugado de pN (pNb)

```
pNb = FullSimplify[ComplexExpand[u * pb], m ∈ Reals && m > 1 &&  $\omega 0$  ∈ Reals &&  $\omega 0$  > 0]
```

$$\left\{-\frac{m (a - i \omega 0)}{2 a (-1 + m) + 2 i \omega 0}, \frac{a m}{2 a (-1 + m) + 2 i \omega 0}, 0\right\}$$

Confirmando a normalização

```

ω0 = a * √(-1 + m) ;
Simplify[pNb.ϕ]
Clear[ω0]

1

```

■ Matriz inversa de A (AI)

```
AI = Simplify[Inverse[A]]
```

```
{ { 1 / (a (-1 + m)), 1 / (a - a m), 0 }, { m / (a (-1 + m)), 1 / (a - a m), 0 }, { 0, 0, -1/b } }
```

```
MatrixForm[AI]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a(-1+m)} & \frac{1}{a-am} & 0 \\ \frac{m}{a(-1+m)} & \frac{1}{a-am} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

■ As funções multilineares B,C,D e E

Definição da função B(x1,x2,x3)

```
Bi [{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}] := {0, -x1 y3 - x3 y1, x1 y2 + x2 y1}
```

```
MatrixForm[Bi [{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

Definição da função C(x1,x2,x3)

```
Ci [{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}, {z1_, z2_, z3_}] := {0, 0, 0}
```

```
MatrixForm[Ci [{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função D(x1,x2,x3)

```
Di [{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}, {z1_, z2_, z3_}, {u1_, u2_, u3_}] := {0, 0, 0}
```

```
MatrixForm[Di [{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função E(x1,x2,x3)

```
Ei [{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}, {z1_, z2_, z3_}, {u1_, u2_, u3_}, {v1_, v2_, v3_}] := {0, 0, 0}
```

MatrixForm[Ei[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}, {v1, v2, v3}]]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ Determinando o número complexo G21

Os vetores complexos h11, h20 e seu complexo conjugado h20b

h11 = FullSimplify[AI.Bi[q, qb]]

$$\left\{0, 0, -\frac{2}{bm}\right\}$$

h20 = Simplify[Inverse[2 i ω0 IdentityMatrix[3] - A].Bi[q, q]]

$$\left\{0, 0, \frac{2a - 2i\omega_0}{abm + 2iam\omega_0}\right\}$$

h20b = Simplify[ComplexExpand[Conjugate[h20], m ∈ Reals && m > 1 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]

$$\left\{0, 0, \frac{2ia - 2\omega_0}{ia bm + 2am\omega_0}\right\}$$

■ Componentes de G21

C1 = Simplify[pNb.Ci[q, q, qb]]

0

P1 = FullSimplify[pNb.Bi[qb, h20]]

$$\frac{a^2 + \omega_0^2}{am(a - am - i\omega_0)(b + 2i\omega_0)}$$

P2 = Simplify[-2 pNb.Bi[q, h11]]

$$\frac{-2a + 2i\omega_0}{bm(a(-1+m) + i\omega_0)}$$

■ G21

G21 = FullSimplify[P1 + P2 + C1]

$$\frac{i(a - i\omega_0)(-3iab + 4a\omega_0 + b\omega_0)}{abm(a(-1+m) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)}$$

■ O vetor complexo G21*q (usado para determinar o vetor h21)

G21q = G21 * q

$$\left\{-\left(i(a - i\omega_0)^2(-3iab + 4a\omega_0 + b\omega_0)\right) / \left(a^2bm^2(a(-1+m) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)\right), \right. \\ \left.-\left(i(a - i\omega_0)(-3iab + 4a\omega_0 + b\omega_0)\right) / \left(abm(a(-1+m) + i\omega_0)(b + 2i\omega_0)\right), 0\right\}$$

■ O primeiro coeficiente de Lyapunov (L1)

`L1 = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Re[G21]], m ∈ Reals && m > 1 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]`

$$\frac{2 a^2 b \omega_0^2 + 2 b \omega_0^4 - a^3 (-1 + m) (3 b^2 + 8 \omega_0^2) + a \omega_0^2 (-b^2 (-3 + m) + 8 \omega_0^2)}{a b m (a^2 (-1 + m)^2 + \omega_0^2) (b^2 + 4 \omega_0^2)}$$

■ Substituindo ω_0 na expressão de L1 acima

`ω0 = a * √(-1 + m) ;`

`Simplify[L1]`

`Clear[ω0];`

$$\frac{2 a - b}{(b^2 + 4 a^2 (-1 + m)) m}$$

■ Expressão final para L1

$$\frac{2 a - b}{(b^2 + 4 a^2 (-1 + m)) m}$$

■ O segundo coeficiente de Lyapunov (L2)

O vetor complexo h_{21} e o seu complexo conjugado h_{21b}

`k1 = Ci[q, q, qb]`

`{0, 0, 0}`

`k2 = FullSimplify[Bi[qb, h20]]`

$$\left\{ 0, -\frac{2 (a^2 + \omega_0^2)}{a^2 m^2 (b + 2 i \omega_0)}, 0 \right\}$$

`k3 = FullSimplify[2 * Bi[q, h11]]`

$$\left\{ 0, \frac{4 (a - i \omega_0)}{a b m^2}, 0 \right\}$$

$h21 = \{x, y, z\} / .$

$$\text{Simplify}[\text{Solve}[\{\{(\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[1]][[1]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[1]][[2]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[1]][[3]], \mathbf{q}[[1]]\}, \{(\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[2]][[1]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[2]][[2]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[2]][[3]], \mathbf{q}[[2]]\}, \{(\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[3]][[1]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[3]][[2]], (\text{i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A})[[3]][[3]], \mathbf{q}[[3]]\}, \{\text{pNb}[[1]], \text{pNb}[[2]], \text{pNb}[[3]], 0\}\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{s}\} = \{\text{Simplify}[(\mathbf{k}1 + \mathbf{k}2 + \mathbf{k}3 - \mathbf{G}21 \mathbf{q})[[1]], \text{Simplify}[(\mathbf{k}1 + \mathbf{k}2 + \mathbf{k}3 - \mathbf{G}21 \mathbf{q})[[2]], \text{Simplify}[(\mathbf{k}1 + \mathbf{k}2 + \mathbf{k}3 - \mathbf{G}21 \mathbf{q})[[3]], 0], \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{s}\}]]][[1]]$$

$$\left\{ \frac{2(a - i\omega 0)^2 (a(b + 4i\omega 0) - ib\omega 0)}{abm^2(b + 2i\omega 0)(a^3(-1 + m) - 3ia^2(-1 + m)\omega 0 + 3a\omega 0^2 - i\omega 0^3)}, \frac{2(a - i\omega 0)^3 (a(b + 4i\omega 0) - ib\omega 0)}{a^2bm^2(b + 2i\omega 0)(a^3(-1 + m) - 3ia^2(-1 + m)\omega 0 + 3a\omega 0^2 - i\omega 0^3)}, 0 \right\}$$

$h21b = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[h21]]]$

$$\left\{ \frac{2(a + i\omega 0)^2 (a(b - 4i\omega 0) + ib\omega 0)}{abm^2(b - 2i\omega 0)(a^3(-1 + m) + 3ia^2(-1 + m)\omega 0 + 3a\omega 0^2 + i\omega 0^3)}, \frac{2(a + i\omega 0)^3 (a(b - 4i\omega 0) + ib\omega 0)}{a^2bm^2(b - 2i\omega 0)(a^3(-1 + m) + 3ia^2(-1 + m)\omega 0 + 3a\omega 0^2 + i\omega 0^3)}, 0 \right\}$$

O vetor complexo h30

$h30 = \text{FullSimplify}[\text{Inverse}[3i\omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A}] \cdot (3 * \mathbf{B}_i[\mathbf{q}, h20] + \mathbf{C}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}])]$

$$\left\{ -\frac{6(a - i\omega 0)^2}{am^2(b + 2i\omega 0)(a^2(-1 + m) - 9\omega 0^2)}, -\frac{6(a - i\omega 0)^2(a + 3i\omega 0)}{a^2m^2(b + 2i\omega 0)(a^2(-1 + m) - 9\omega 0^2)}, 0 \right\}$$

O vetor complexo h31

$h31 = \text{FullSimplify}[$

$(\text{Inverse}[2i\omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - \mathbf{A}]) \cdot (3 * \mathbf{B}_i[\mathbf{q}, h21] + \mathbf{B}_i[\mathbf{q}b, h30] + 3 * \mathbf{B}_i[h20, h11] + 3 * \mathbf{C}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}b, h20] + 3 * \mathbf{C}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}, h11] + \mathbf{D}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}b] - 3 * \mathbf{G}21 * h20)]$

$\{0, 0,$

$$\frac{1}{3a^3m^3(b + 2i\omega 0)^2} (a - i\omega 0) \left(24i\omega 0 + a \left(-16 - \frac{9(4a + b)m}{b} - \frac{18a^2(b(-4 + m) + 4a(-1 + m))m^2}{b(b - 2a(-1 + m))(a(-1 + m) + i\omega 0)} - \frac{9(4a^2 - b^2)m}{(b - 2a(-1 + m))(b + 2i\omega 0)} - \frac{72i\omega 0}{b} - \frac{4a(a(4 + 5m) - 3i(-4 + m)\omega 0)}{a^2(-1 + m) - 9\omega 0^2} + \frac{36am(a - 2i\omega 0)(a(b + 4i\omega 0) - ib\omega 0)}{b(a^3(-1 + m) - 3ia^2(-1 + m)\omega 0 + 3a\omega 0^2 - i\omega 0^3)} \right) \right) \}$$

O vetor complexo h22

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{h22} = \mathbf{FullSimplify}[\\
 & \quad (-\mathbf{Inverse}[\mathbf{A}]) \cdot (\mathbf{D}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{qb}, \mathbf{qb}] + 4 * \mathbf{C}_i[\mathbf{q}, \mathbf{qb}, \mathbf{h11}] + \mathbf{C}_i[\mathbf{qb}, \mathbf{qb}, \mathbf{h20}] + \mathbf{C}_i[\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{h20b}] + \\
 & \quad 2 * \mathbf{B}_i[\mathbf{h11}, \mathbf{h11}] + 2 * \mathbf{B}_i[\mathbf{q}, \mathbf{h21b}] + 2 * \mathbf{B}_i[\mathbf{qb}, \mathbf{h21}] + \mathbf{B}_i[\mathbf{h20b}, \mathbf{h20}] - 4 * \mathbf{h11} * \mathbf{L1}] \\
 & \{0, 0, \frac{1}{\mathbf{a}^3 \mathbf{b}^3 \mathbf{m}^3} 4 \left((\mathbf{a}^2 \mathbf{b} \mathbf{m} (\mathbf{a} + \mathbf{i} \omega 0)^2 (-\mathbf{i} \mathbf{a} \mathbf{b} - 4 \mathbf{a} \omega 0 + \mathbf{b} \omega 0) \right) / \\
 & \quad \left((\mathbf{b} - 2 \mathbf{i} \omega 0) (-\mathbf{i} \mathbf{a}^3 (-1 + \mathbf{m}) + 3 \mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m}) \omega 0 - 3 \mathbf{i} \mathbf{a} \omega 0^2 + \omega 0^3) \right) + \\
 & \quad \left(\mathbf{b} (\mathbf{a} - \mathbf{i} \omega 0) (\mathbf{a} + \mathbf{i} \omega 0)^3 (-\mathbf{i} \mathbf{a} \mathbf{b} - 4 \mathbf{a} \omega 0 + \mathbf{b} \omega 0) \right) / \\
 & \quad \left((\mathbf{b} - 2 \mathbf{i} \omega 0) (-\mathbf{i} \mathbf{a}^3 (-1 + \mathbf{m}) + 3 \mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m}) \omega 0 - 3 \mathbf{i} \mathbf{a} \omega 0^2 + \omega 0^3) \right) + \\
 & \quad \left(\mathbf{a}^2 \mathbf{b} \mathbf{m} (\mathbf{a} - \mathbf{i} \omega 0)^2 (\mathbf{i} \mathbf{a} \mathbf{b} - 4 \mathbf{a} \omega 0 + \mathbf{b} \omega 0) \right) / \\
 & \quad \left((\mathbf{b} + 2 \mathbf{i} \omega 0) (\mathbf{i} \mathbf{a}^3 (-1 + \mathbf{m}) + 3 \mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m}) \omega 0 + 3 \mathbf{i} \mathbf{a} \omega 0^2 + \omega 0^3) \right) + \\
 & \quad \left(\mathbf{b} (\mathbf{a} - \mathbf{i} \omega 0)^3 (\mathbf{a} + \mathbf{i} \omega 0) (\mathbf{i} \mathbf{a} \mathbf{b} - 4 \mathbf{a} \omega 0 + \mathbf{b} \omega 0) \right) / \\
 & \quad \left((\mathbf{b} + 2 \mathbf{i} \omega 0) (\mathbf{i} \mathbf{a}^3 (-1 + \mathbf{m}) + 3 \mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m}) \omega 0 + 3 \mathbf{i} \mathbf{a} \omega 0^2 + \omega 0^3) \right) + \\
 & \quad \left(2 \mathbf{a}^2 \mathbf{m} (2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} \omega 0^2 + 2 \mathbf{b} \omega 0^4 - \mathbf{a}^3 (-1 + \mathbf{m}) (3 \mathbf{b}^2 + 8 \omega 0^2) + \mathbf{a} \omega 0^2 (-\mathbf{b}^2 (-3 + \mathbf{m}) + 8 \omega 0^2)) \right) / \\
 & \quad \left. \left((\mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m})^2 + \omega 0^2) (\mathbf{b}^2 + 4 \omega 0^2) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

■ Cálculo do segundo coeficiente de Lyapunov (L2)

Produto interno entre pNb e a parte real de cada componente de H32 ($T_i, i = 1, 2, \dots, 15$)

$$\mathbf{T1} = \mathbf{Simplify}[\mathbf{ComplexExpand}[\mathbf{Re}[\mathbf{FullSimplify}[\mathbf{pNb} \cdot (6 (\mathbf{B}_i[\mathbf{h11}, \mathbf{h21}]))]]]]$$

$$\begin{aligned}
 & \left(12 (-2 \mathbf{a}^6 \mathbf{b} (3 - 5 \mathbf{m} + 2 \mathbf{m}^2) \omega 0^2 - 2 \mathbf{a}^4 \mathbf{b} (5 - 10 \mathbf{m} + 2 \mathbf{m}^2) \omega 0^4 + \right. \\
 & \quad 2 \mathbf{a}^2 \mathbf{b} (-1 + 5 \mathbf{m}) \omega 0^6 + 2 \mathbf{b} \omega 0^8 + \mathbf{a} \omega 0^6 (-\mathbf{b}^2 (-1 + \mathbf{m}) - 8 \omega 0^2) + \mathbf{a}^7 (-1 + \mathbf{m})^2 (\mathbf{b}^2 + 8 \omega 0^2) - \\
 & \quad \left. \mathbf{a}^3 \omega 0^4 (\mathbf{b}^2 (-3 + 8 \mathbf{m} + 3 \mathbf{m}^2) + 8 (1 + 4 \mathbf{m}) \omega 0^2) + \mathbf{a}^5 (-1 + \mathbf{m}) \omega 0^2 (\mathbf{b}^2 (-3 + 6 \mathbf{m}) + 8 (-1 + 5 \mathbf{m}) \omega 0^2) \right) / \\
 & \left(\mathbf{b}^2 \mathbf{m}^2 (\mathbf{b}^2 + 4 \omega 0^2) (\mathbf{a}^8 (-1 + \mathbf{m})^4 + \mathbf{a}^6 (2 - 5 \mathbf{m} + 3 \mathbf{m}^2)^2 \omega 0^2 + 6 \mathbf{a}^4 (1 - 2 \mathbf{m} + \mathbf{m}^3) \omega 0^4 + \mathbf{a}^2 (2 + \mathbf{m})^2 \omega 0^6 + \omega 0^8) \right)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T2} = \mathbf{Simplify}[\mathbf{ComplexExpand}[\mathbf{Re}[\mathbf{FullSimplify}[\mathbf{pNb} \cdot (3 (\mathbf{B}_i[\mathbf{h21b}, \mathbf{h20}]))]]]]$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(6 (\mathbf{a}^2 + \omega 0^2) (\mathbf{a}^6 \mathbf{b} (-1 + \mathbf{m})^2 - 4 \mathbf{a}^5 (1 - 3 \mathbf{m} + 2 \mathbf{m}^2) \omega 0^2 + \right. \\
 & \quad \left. \mathbf{a}^4 \mathbf{b} (3 - 8 \mathbf{m} + 5 \mathbf{m}^2) \omega 0^2 - 4 \mathbf{a}^3 (2 + \mathbf{m}) \omega 0^4 + \mathbf{a}^2 \mathbf{b} (3 + 2 \mathbf{m}) \omega 0^4 - 4 \mathbf{a} \omega 0^6 + \mathbf{b} \omega 0^6) \right) / \\
 & \left(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{m}^2 (\mathbf{b}^2 + 4 \omega 0^2) (\mathbf{a}^8 (-1 + \mathbf{m})^4 + \mathbf{a}^6 (2 - 5 \mathbf{m} + 3 \mathbf{m}^2)^2 \omega 0^2 + 6 \mathbf{a}^4 (1 - 2 \mathbf{m} + \mathbf{m}^3) \omega 0^4 + \mathbf{a}^2 (2 + \mathbf{m})^2 \omega 0^6 + \omega 0^8) \right)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T3} = \mathbf{Simplify}[\mathbf{ComplexExpand}[\mathbf{Re}[\mathbf{FullSimplify}[\mathbf{pNb} \cdot (\mathbf{B}_i[\mathbf{h20b}, \mathbf{h30}]))]]]]$$

$$\frac{6 (\mathbf{a}^2 (-1 + \mathbf{m}) - \omega 0^2) (\mathbf{a}^2 + \omega 0^2)}{\mathbf{a} \mathbf{m}^2 (\mathbf{b}^2 + 4 \omega 0^2) (\mathbf{a}^4 (-1 + \mathbf{m})^3 + \mathbf{a}^2 (-10 + 19 \mathbf{m} - 9 \mathbf{m}^2) \omega 0^2 - 9 \omega 0^4)}$$

T4 = Simplify[ComplexExpand[Re[FullSimplify[pNb.(3 (Bi[q, h22]))]]]]

$$\begin{aligned} & (12 (a^2 (-1+m) - \omega 0^2) (-4 a b^2 \omega 0^{10} + b^3 \omega 0^{10} + a^{11} (-1+m)^3 m (3 b^2 + 8 \omega 0^2) + \\ & a^2 b \omega 0^8 (b^2 (5 + 2 m + m^2) - 2 (-4 + m) \omega 0^2) - a^3 \omega 0^8 (b^2 (16 - 5 m + 3 m^2) + 8 m \omega 0^2) + \\ & a^7 (-1+m) \omega 0^4 (b^2 (16 + 10 m - 16 m^2 + 13 m^3) - 24 (-2+m) m \omega 0^2) - \\ & 2 a^5 \omega 0^6 (b^2 (12 - 6 m + 10 m^2 - 3 m^3) + 4 m (4 + 5 m) \omega 0^2) + 4 a^9 (-1+m)^2 \omega 0^2 \\ & (b^2 (-1 - 3 m + 8 m^2) + 2 m (-4 + 9 m) \omega 0^2) + a^4 b \omega 0^6 (b^2 (10 - 4 m - m^2 + 4 m^3) - 4 (-8 + 14 m + m^2) \omega 0^2) - \\ & a^{10} b (-1+m)^2 (b^2 (-1 + m^2) + 2 (-4 + m + 4 m^2) \omega 0^2) + \\ & a^6 b \omega 0^4 (b^2 (10 - 16 m + 3 m^2 - 6 m^3 + 3 m^4) + 2 (24 - 62 m + 30 m^2 - 25 m^3) \omega 0^2) - \\ & a^8 b (-1+m) \omega 0^2 (b^2 (5 - 7 m - 2 m^2 + 6 m^3) + 4 (8 - 14 m + 3 m^2 + 10 m^3) \omega 0^2)) / \\ & (a^3 b^3 m^3 (a^2 (-1+m)^2 + \omega 0^2)^2 (b^2 + 4 \omega 0^2) \\ & (a^6 (-1+m)^2 + 3 a^4 (1 - 4 m + 3 m^2) \omega 0^2 + 3 a^2 (1 + 2 m) \omega 0^4 + \omega 0^6)) \end{aligned}$$

T5 = Simplify[ComplexExpand[Re[Simplify[pNb.(2 (Bi[qb, h31]))]]]]

$$\begin{aligned} & (6 (a^2 + \omega 0^2) (-4 a^{12} b (-1+m)^4 \omega 0^2 (b^2 (-4 - 5 m + 2 m^2) + 4 (-4 - m + 2 m^2) \omega 0^2) - \\ & a^{13} (-1+m)^5 m (3 b^4 - 12 b^2 \omega 0^2 - 32 \omega 0^4) + 12 b \omega 0^{12} (b^4 - 16 \omega 0^4) + \\ & a \omega 0^{12} (13 b^4 (-4 + 3 m) + 4 b^2 (-16 + 75 m) \omega 0^2 + 576 \omega 0^4) + \\ & 2 a^2 b \omega 0^{10} (b^4 (30 + m + 6 m^2) + 18 b^2 (4 + m - 3 m^2) \omega 0^2 - 8 (24 + 29 m + 3 m^2) \omega 0^4) + \\ & a^3 \omega 0^{10} (b^4 (-228 + 498 m - 119 m^2 + 57 m^3) + 4 b^2 (-80 + 588 m + 237 m^2 + 21 m^3) \omega 0^2 + \\ & 32 (74 - 11 m + 36 m^2) \omega 0^4) + 2 a^8 b (-1+m)^2 \omega 0^4 (b^4 (30 - 60 m + 10 m^2 + 33 m^3) - \\ & 2 b^2 (-168 + 238 m + 192 m^2 + 7 m^3) \omega 0^2 + 8 (108 - 286 m + 172 m^2 - 109 m^3) \omega 0^4) - \\ & 4 a^6 b (-1+m) \omega 0^6 (b^4 (30 - 61 m - 21 m^2 + 27 m^3) + b^2 (232 - 558 m + 76 m^2 + 399 m^3) \omega 0^2 + \\ & 4 (112 - 546 m + 368 m^2 - 9 m^3) \omega 0^4) + 2 a^{10} b (-1+m)^3 \omega 0^2 \\ & (b^4 (-6 + m + 3 m^2 + 2 m^3) + 2 b^2 (-52 - 25 m + 40 m^2 + 6 m^3) \omega 0^2 + 8 (-40 + 25 m - 6 m^2 + 2 m^3) \omega 0^4) - \\ & a^{11} (-1+m)^3 \omega 0^2 (b^4 (-20 + 70 m - 81 m^2 + 28 m^3) - 4 b^2 (16 - 4 m - 37 m^2 + 22 m^3) \omega 0^2 - \\ & 32 (-2 + 9 m - 13 m^2 + 5 m^3) \omega 0^4) + 2 a^4 b \omega 0^8 (b^4 (60 - 80 m - 56 m^2 + 13 m^3) + \\ & 2 b^2 (148 - 327 m + 194 m^2 - 213 m^3) \omega 0^2 - 8 (-28 + 315 m - 242 m^2 + 27 m^3) \omega 0^4) - a^9 (-1+m)^2 \omega 0^4 \\ & (b^4 (132 - 489 m + 772 m^2 - 431 m^3 + 33 m^4) - 4 b^2 (-80 + 377 m - 240 m^2 - 51 m^3 + 3 m^4) \omega 0^2 + \\ & 32 (-26 - 2 m - 10 m^2 + 31 m^3) \omega 0^4) + a^5 \omega 0^8 (b^4 (-392 + 1381 m - 1207 m^2 - 286 m^3 + 189 m^4) - \\ & 4 b^2 (160 - 1375 m + 1789 m^2 - 552 m^3 + 23 m^4) \omega 0^2 + 32 (116 - 45 m - 229 m^2 + 131 m^3) \omega 0^4) + \\ & a^7 (-1+m) \omega 0^6 (b^4 (328 - 1220 m + 1414 m^2 - 748 m^3 + 43 m^4) - \\ & 4 b^2 (-160 + 1184 m - 1878 m^2 + 558 m^3 + 257 m^4) \omega 0^2 - 32 (84 + 14 m - 260 m^2 + 141 m^3) \omega 0^4)) / \\ & (a^3 b m^3 (a^2 (-1+m)^2 + \omega 0^2)^2 (b^2 + 4 \omega 0^2)^3 (a^8 (-1+m)^3 + 3 a^6 (-1+m)^2 (-4 + 3 m) \omega 0^2 - \\ & 15 a^4 (2 - 7 m + 5 m^2) \omega 0^4 - a^2 (28 + 53 m) \omega 0^6 - 9 \omega 0^8)) \end{aligned}$$

T6 = Simplify[ComplexExpand[Re[Simplify[pNb.(6 (Ci[qb, h20, h11]))]]]]

0

T7 = Simplify[ComplexExpand[Re[pNb.(6 (Ci[q, h11, h11]))]]]

0

T8 = Simplify[ComplexExpand[Re[FullSimplify[pNb.(3 (Ci[q, h20b, h20]))]]]]

0

T9 = Simplify[ComplexExpand[Re[FullSimplify[pNb.(6 (Ci[q, qb, h21]))]]]]

0

```
T10 = Simplify[ComplexExpand[Re[Simplify[pNb.(3 (Ci[q, q, h21b]))]]]]
```

```
0
```

```
T11 = Simplify[ComplexExpand[Re[FullSimplify[pNb.(Ci[qb, qb, h30])]]]]
```

```
0
```

```
T12 = Re[pNb.(6 (Di[q, q, qb, h11]))]
```

```
0
```

```
T13 = Re[pNb.(3 (Di[q, qb, qb, h20]))]
```

```
0
```

```
T14 = Re[pNb.(Di[q, q, q, h20b])]
```

```
0
```

```
T15 = Re[pNb.(Ei[q, q, q, qb, qb])]
```

```
0
```

■ O segundo coeficiente de Lyapunov (L2)

$$L2 = \text{Simplify}[(1/12) (T1 + T2 + T3 + T4 + T5 + T6 + T7 + T8 + T9 + T10 + T11 + T12 + T13 + T14 + T15)]$$

$$\frac{1}{2 m^3 (b^2 + 4 \omega 0^2)^3} \left(\frac{m (a^2 (-1 + m) - \omega 0^2) (a^2 + \omega 0^2) (b^2 + 4 \omega 0^2)^2}{a^5 (-1 + m)^3 + a^3 (-10 + 19 m - 9 m^2) \omega 0^2 - 9 a \omega 0^4} - \right. \\ \left. \left(m (a^2 + \omega 0^2) (b^2 + 4 \omega 0^2)^2 (a^6 b (-1 + m)^2 - 4 a^5 (1 - 3 m + 2 m^2) \omega 0^2 + \right. \right. \\ \left. \left. a^4 b (3 - 8 m + 5 m^2) \omega 0^2 - 4 a^3 (2 + m) \omega 0^4 + a^2 b (3 + 2 m) \omega 0^4 - 4 a \omega 0^6 + b \omega 0^6 \right) \right) / \\ \left(a b (a^8 (-1 + m)^4 + a^6 (2 - 5 m + 3 m^2)^2 \omega 0^2 + 6 a^4 (1 - 2 m + m^3) \omega 0^4 + a^2 (2 + m)^2 \omega 0^6 + \omega 0^8) \right) - \\ \left(2 m (b^2 + 4 \omega 0^2)^2 (2 a^6 b (3 - 5 m + 2 m^2) \omega 0^2 + 2 a^4 b (5 - 10 m + 2 m^2) \omega 0^4 + \right. \\ \left. 2 a^2 b (1 - 5 m) \omega 0^6 - 2 b \omega 0^8 - a^7 (-1 + m)^2 (b^2 + 8 \omega 0^2) + a \omega 0^6 (b^2 (-1 + m) + 8 \omega 0^2) + \right. \\ \left. a^3 \omega 0^4 (b^2 (-3 + 8 m + 3 m^2) + 8 (1 + 4 m) \omega 0^2) - a^5 (-1 + m) \omega 0^2 (b^2 (-3 + 6 m) + 8 (-1 + 5 m) \omega 0^2) \right) \right) / \\ \left(b^2 (a^8 (-1 + m)^4 + a^6 (2 - 5 m + 3 m^2)^2 \omega 0^2 + 6 a^4 (1 - 2 m + m^3) \omega 0^4 + a^2 (2 + m)^2 \omega 0^6 + \omega 0^8) \right) + \\ \left(2 (a^2 (-1 + m) - \omega 0^2) (b^2 + 4 \omega 0^2)^2 (-4 a b^2 \omega 0^{10} + b^3 \omega 0^{10} + a^{11} (-1 + m)^3 m (3 b^2 + 8 \omega 0^2) + \right. \\ \left. a^2 b \omega 0^8 (b^2 (5 + 2 m + m^2) - 2 (-4 + m) \omega 0^2) - a^3 \omega 0^8 (b^2 (16 - 5 m + 3 m^2) + 8 m \omega 0^2) + \right. \\ \left. a^7 (-1 + m) \omega 0^4 (b^2 (16 + 10 m - 16 m^2 + 13 m^3) - 24 (-2 + m) m \omega 0^2) - \right. \\ \left. 2 a^5 \omega 0^6 (b^2 (12 - 6 m + 10 m^2 - 3 m^3) + 4 m (4 + 5 m) \omega 0^2) + \right. \\ \left. 4 a^9 (-1 + m)^2 \omega 0^2 (b^2 (-1 - 3 m + 8 m^2) + 2 m (-4 + 9 m) \omega 0^2) + a^4 b \omega 0^6 (b^2 (10 - 4 m - m^2 + 4 m^3) - \right. \\ \left. 4 (-8 + 14 m + m^2) \omega 0^2) - a^{10} b (-1 + m)^2 (b^2 (-1 + m^2) + 2 (-4 + m + 4 m^2) \omega 0^2) + \right. \\ \left. a^6 b \omega 0^4 (b^2 (10 - 16 m + 3 m^2 - 6 m^3 + 3 m^4) + 2 (24 - 62 m + 30 m^2 - 25 m^3) \omega 0^2) - \right. \\ \left. a^8 b (-1 + m) \omega 0^2 (b^2 (5 - 7 m - 2 m^2 + 6 m^3) + 4 (8 - 14 m + 3 m^2 + 10 m^3) \omega 0^2) \right) \right) / \\ \left(a^3 b^3 (a^2 (-1 + m)^2 + \omega 0^2)^2 (a^6 (-1 + m)^2 + 3 a^4 (1 - 4 m + 3 m^2) \omega 0^2 + 3 a^2 (1 + 2 m) \omega 0^4 + \omega 0^6) \right) + \\ \left((a^2 + \omega 0^2) (-4 a^{12} b (-1 + m)^4 \omega 0^2 (b^2 (-4 - 5 m + 2 m^2) + 4 (-4 - m + 2 m^2) \omega 0^2) - \right. \\ \left. a^{13} (-1 + m)^5 m (3 b^4 - 12 b^2 \omega 0^2 - 32 \omega 0^4) + 12 b \omega 0^{12} (b^4 - 16 \omega 0^4) + \right. \\ \left. a \omega 0^{12} (13 b^4 (-4 + 3 m) + 4 b^2 (-16 + 75 m) \omega 0^2 + 576 \omega 0^4) + \right. \\ \left. 2 a^2 b \omega 0^{10} (b^4 (30 + m + 6 m^2) + 18 b^2 (4 + m - 3 m^2) \omega 0^2 - 8 (24 + 29 m + 3 m^2) \omega 0^4) + \right. \\ \left. a^3 \omega 0^{10} (b^4 (-228 + 498 m - 119 m^2 + 57 m^3) + 4 b^2 (-80 + 588 m + 237 m^2 + 21 m^3) \omega 0^2 + \right. \\ \left. 32 (74 - 11 m + 36 m^2) \omega 0^4) + 2 a^8 b (-1 + m)^2 \omega 0^4 (b^4 (30 - 60 m + 10 m^2 + 33 m^3) - \right. \\ \left. 2 b^2 (-168 + 238 m + 192 m^2 + 7 m^3) \omega 0^2 + 8 (108 - 286 m + 172 m^2 - 109 m^3) \omega 0^4) - \right. \\ \left. 4 a^6 b (-1 + m) \omega 0^6 (b^4 (30 - 61 m - 21 m^2 + 27 m^3) + b^2 (232 - 558 m + 76 m^2 + 399 m^3) \omega 0^2 + \right. \\ \left. 4 (112 - 546 m + 368 m^2 - 9 m^3) \omega 0^4) + 2 a^{10} b (-1 + m)^3 \omega 0^2 \right. \\ \left. (b^4 (-6 + m + 3 m^2 + 2 m^3) + 2 b^2 (-52 - 25 m + 40 m^2 + 6 m^3) \omega 0^2 + 8 (-40 + 25 m - 6 m^2 + 2 m^3) \omega 0^4) - \right. \\ \left. a^{11} (-1 + m)^3 \omega 0^2 (b^4 (-20 + 70 m - 81 m^2 + 28 m^3) - 4 b^2 (16 - 4 m - 37 m^2 + 22 m^3) \omega 0^2 - \right. \\ \left. 32 (-2 + 9 m - 13 m^2 + 5 m^3) \omega 0^4) + 2 a^4 b \omega 0^8 (b^4 (60 - 80 m - 56 m^2 + 13 m^3) + \right. \\ \left. 2 b^2 (148 - 327 m + 194 m^2 - 213 m^3) \omega 0^2 - 8 (-28 + 315 m - 242 m^2 + 27 m^3) \omega 0^4) - a^9 (-1 + m)^2 \omega 0^4 \right. \\ \left. (b^4 (132 - 489 m + 772 m^2 - 431 m^3 + 33 m^4) - 4 b^2 (-80 + 377 m - 240 m^2 - 51 m^3 + 3 m^4) \omega 0^2 + \right. \\ \left. 32 (-26 - 2 m - 10 m^2 + 31 m^3) \omega 0^4) + a^5 \omega 0^8 (b^4 (-392 + 1381 m - 1207 m^2 - 286 m^3 + 189 m^4) - \right. \\ \left. 4 b^2 (160 - 1375 m + 1789 m^2 - 552 m^3 + 23 m^4) \omega 0^2 + 32 (116 - 45 m - 229 m^2 + 131 m^3) \omega 0^4) + \right. \\ \left. a^7 (-1 + m) \omega 0^6 (b^4 (328 - 1220 m + 1414 m^2 - 748 m^3 + 43 m^4) - \right. \\ \left. 4 b^2 (-160 + 1184 m - 1878 m^2 + 558 m^3 + 257 m^4) \omega 0^2 - 32 (84 + 14 m - 260 m^2 + 141 m^3) \omega 0^4) \right) \right) / \\ \left(a^3 b (a^2 (-1 + m)^2 + \omega 0^2)^2 (a^8 (-1 + m)^3 + 3 a^6 (-1 + m)^2 (-4 + 3 m) \omega 0^2 - \right. \\ \left. 15 a^4 (2 - 7 m + 5 m^2) \omega 0^4 - a^2 (28 + 53 m) \omega 0^6 - 9 \omega 0^8) \right) \right)$$

Superfície (plano) onde L1 se anula

$$b = 2 a$$

$$2 a$$

■ ω_0

$$\omega_0 = a * \sqrt{-1 + m}$$

$$a \sqrt{-1 + m}$$

■ Expressão final para L2

$$L2 = \text{Simplify}[L2]$$

$$\frac{1}{4 a^3 (-1 + m) m^3}$$

Anexo B

Determinando L2 com L1 se anulando em $c=2b$

■ Sistema de interesse - campo vetorial

Sistema tipo Lorenz

$$f_1[x_, y_, z_] := a * (y - x)$$

$$f_2[x_, y_, z_] := d * x + c * y - x * z$$

$$f_3[x_, y_, z_] := -b * z + x * y$$

■ Equilíbrios

$$e = \text{Simplify}[\text{Solve}[\{f_1[x, y, z] == 0, f_2[x, y, z] == 0, f_3[x, y, z] == 0\}, \{x, y, z\}]]$$

$$\left\{ \left\{ z \rightarrow 0, y \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \right\}, \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow -\sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow -\sqrt{b(c+d)} \right\}, \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow \sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow \sqrt{b(c+d)} \right\} \right\}$$

Equilíbrio origem (e_0)

$$e_0 = \{x, y, z\} /. e[[1]]$$

$$\{0, 0, 0\}$$

Equilíbrio Q_-

$$e_1 = \{x, y, z\} /. e[[2]]$$

$$\{-\sqrt{b(c+d)}, -\sqrt{b(c+d)}, c+d\}$$

Equilíbrio Q_+

$$e_2 = \{x, y, z\} /. e[[3]]$$

$$\{\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, c+d\}$$

■ Parte linear do campo - matriz Jacobiana A

$$\text{Df}[\{x_, y_, z_\}] := \{ \text{Derivative}[1, 0, 0][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[1, 0, 0][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[1, 0, 0][f_3][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_3][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_3][x, y, z] \}$$

Matriz Jacobiana A

$$A[\{x_, y_, z_\}] := \text{Df}[\{x, y, z\}]$$

$$A[\{x, y, z\}]$$

$$\{-a, a, 0\}, \{d - z, c, -x\}, \{y, x, -b\}$$

`MatrixForm[A[{x, y, z}]]`

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d - z & c & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

■ Matriz Jacobiana aplicada na origem (e_2)

`A = A[e2]`

$$\{-a, a, 0\}, \{-c, c, -\sqrt{b(c+d)}\}, \{\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, -b\}$$

`MatrixForm[A]`

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{b(c+d)} \\ \sqrt{b(c+d)} & \sqrt{b(c+d)} & -b \end{pmatrix}$$

■ Polinômio característico calculado em e_2

`p[λ_] := Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]`

`Simplify[p[λ]]`

$$-\lambda (\lambda (-c + \lambda) + b (d + \lambda)) - a (\lambda^2 + b (2c + 2d + \lambda))$$

Polinômio

$$-\lambda (\lambda (-c + \lambda) + b (d + \lambda)) - a (\lambda^2 + b (2c + 2d + \lambda))$$

$$-\lambda (\lambda (-c + \lambda) + b (d + \lambda)) - a (\lambda^2 + b (2c + 2d + \lambda))$$

Reescrevendo o polinômio

$$p\lambda = \lambda^3 + (a + b - c) \lambda^2 + (a * b + b * d) \lambda + 2 * a * b (c + d)$$

$$2 a b (c + d) + (a b + b d) \lambda + (a + b - c) \lambda^2 + \lambda^3$$

Hipótese

$$d = 0$$

$$0$$

■ Superfície de bifurcação

Superfície de bifurcação

$$a = 3c - b$$

$$-b + 3c$$

Reescrevendo a matriz Jacobiana

`A = FullSimplify[A]`

$$\{b - 3c, -b + 3c, 0\}, \{-c, c, -\sqrt{bc}\}, \{\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, -b\}$$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} b-3c & -b+3c & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}$$

Reescrevendo o polinômio característico

p1[λ_] := Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]

Simplify[p1[λ]]

$$(2c + \lambda) (b^2 - 3bc - \lambda^2)$$

Autovetores da matriz A - autovalores e respectivos autovetores

AQ = FullSimplify[

Refine[Eigensystem[A], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && 3c ∈ Reals && 3c > b]]

$$\left\{ \left\{ -2c, -i\sqrt{-b(b-3c)}, i\sqrt{-b(b-3c)} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{b-3c}{2\sqrt{bc}}, \frac{b-c}{2\sqrt{bc}}, 1 \right\}, \right. \right. \\ \left. \left\{ -\frac{b^2 - ib\sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i\sqrt{-b(b-3c)}c}{\sqrt{bc}(i\sqrt{-b(b-3c)} + 2c)}, \frac{3\sqrt{bc}}{b + 2i\sqrt{-b(b-3c)}}, 1 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\} \right\}$$

$$\lambda_2 = i\sqrt{-b(b-3c)}$$

$$i\sqrt{-b(b-3c)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{-b(b-3c)};$$

Clear[ω0]

Autovetor complexo q, satisfazendo Aq = iω0q

$$q = \left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

Reescrevendo o autovetor complexo q

$$q = \left\{ \frac{-ib^2 + b(\omega_0 + 3ic) - \omega_0c}{(\omega_0 + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \omega_0)c}{(\omega_0 + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{-ib^2 - c\omega_0 + b(3ic + \omega_0)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, \frac{c(2ib - \omega_0)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, 1 \right\}$$

```
q1 = FullSimplify[q]
{

$$\frac{-i b (b - 3 c) + (b - c) \omega 0}{\sqrt{b c} (2 i c + \omega 0)}, \frac{c (2 i b - \omega 0)}{\sqrt{b c} (2 i c + \omega 0)}, 1$$

}
```

■ O conjugado do vetor q (qb)

```
qb =
FullSimplify[Refine[Conjugate[q1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
{

$$\frac{i b (b - 3 c) + (b - c) \omega 0}{\sqrt{b c} (-2 i c + \omega 0)}, \frac{c (2 b - i \omega 0)}{\sqrt{b c} (2 c + i \omega 0)}, 1$$

}
```

■ Confirmando o vetor q

```
ω0 =  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ ;
FullSimplify[A.q - i ω0 q]
Clear[ω0]
{0, 0, 0}
```

■ Matriz transposta de A (AT)

```
AT = Transpose[A]
{{b - 3 c, -c,  $\sqrt{b c}$ }, {-b + 3 c, c,  $\sqrt{b c}$ }, {0,  $-\sqrt{b c}$ , -b}}
```

```
MatrixForm[AT]

$$\begin{pmatrix} b - 3 c & -c & \sqrt{b c} \\ -b + 3 c & c & \sqrt{b c} \\ 0 & -\sqrt{b c} & -b \end{pmatrix}$$

```

■ Autovalores de AT - autovalores e respectivos autovetores

```
AP = FullSimplify[
Refine[Eigensystem[AT], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && 3 c ∈ Reals && 3 c > b]]
{{-2 c, -i  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ , i  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ },
{{- $\frac{2 c}{\sqrt{b c}}$ ,  $\frac{-b + 2 c}{\sqrt{b c}}$ , 1}, { $\frac{b^2 - i b \sqrt{-b (b - 3 c)} - 3 b c + i \sqrt{-b (b - 3 c)} c}{(b - 3 c) \sqrt{b c}}$ ,  $-\frac{b - i \sqrt{-b (b - 3 c)}}{\sqrt{b c}}$ , 1},
{ $\frac{b^2 + i b \sqrt{-b (b - 3 c)} - 3 b c - i \sqrt{-b (b - 3 c)} c}{(b - 3 c) \sqrt{b c}}$ ,  $-\frac{b + i \sqrt{-b (b - 3 c)}}{\sqrt{b c}}$ , 1}}}
```

■ Autovetor adjunto p, satisfazendo ATp = -iω0 p

```
ω0 =  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ ;
Clear[ω0]
```

$$p = \left\{ \frac{b^2 - i b \sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i \sqrt{-b(b-3c)} c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \sqrt{-b(b-3c)}}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{b^2 - i b \sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i \sqrt{-b(b-3c)} c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \sqrt{-b(b-3c)}}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ Reescrevendo o autovetor adjunto complexo p

$$p = \left\{ \frac{b^2 - i b \omega_0 - 3bc + i \omega_0 c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{b^2 - 3bc - i b \omega_0 + i c \omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

`p1 = FullSimplify[p]`

$$\left\{ \frac{b(b-3c) - i(b-c)\omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, \frac{-b + i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ O conjugado do vetor p (pb)

`pb = FullSimplify[Conjugate[p1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]`

$$\left\{ \frac{b(b-3c) + i(b-c)\omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b + i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ Confirmando o vetor p

`ω0 = √(-b(b-3c));`
`Simplify[AT.pb - i ω0 pb]`
`Clear[ω0]`
`{0, 0, 0}`

■ Normalização de p com respeito a q

Fator de normalização u

`ω0 = √(-b(b-3c));`
`u = FullSimplify[1 / (pb.q1)]`
`Clear[ω0]`

$$\frac{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)c}{2(-ib + \sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)(b+c)}$$

Reescrevendo u em termos de ω_0

$$u_1 = \frac{(\omega_0 + 2i c) c}{2(-ib + \omega_0 + 2i c)(b + c)}$$

$$\frac{c(2ic + \omega_0)}{2(b + c)(-ib + 2ic + \omega_0)}$$

Normalizando p (pN)

```
pN = FullSimplify[
  Refine[ComplexExpand[u1 * p1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
```

$$\left\{ \frac{c(2c - i\omega_0)(-b(b - 3c) + i(b - c)\omega_0)}{2(b - 3c)\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, -\frac{c(ib + \omega_0)(2ic + \omega_0)}{2\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-2c + i\omega_0)}{2(b + c)(b - 2c + i\omega_0)} \right\}$$

Conjugado de pN (pNb)

```
pNb = FullSimplify[
  Refine[ComplexExpand[u1 * pb], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
```

$$\left\{ \frac{c(2ic + \omega_0)(ib(b - 3c) + (-b + c)\omega_0)}{2(b - 3c)\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-ib + \omega_0)(2ic + \omega_0)}{2\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-2c + i\omega_0)}{2(b + c)(b - 2c + i\omega_0)} \right\}$$

Confirmando a normalização ($\langle p, q \rangle = 1$)

```
ω0 = Sqrt[-b(b - 3c)];
FullSimplify[Refine[pNb.q1]]
Clear[ω0]
1
```

■ Matriz inversa de A (AI)

```
AI = Simplify[Inverse[A]]
```

$$\left\{ \left\{ 0, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2\sqrt{bc}} \right\}, \left\{ \frac{1}{-b + 3c}, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2\sqrt{bc}} \right\}, \left\{ -\frac{c}{(b - 3c)\sqrt{bc}}, -\frac{1}{\sqrt{bc}}, 0 \right\} \right\}$$

```
Simplify[A.AI]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

■ As funções multilineares B, C, D e E

Definição da função B(x1, x2, x3)

```
Bi[{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}] := {0, -x1 y3 - x3 y1, x1 y2 + x2 y1}
MatrixForm[Bi[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Definição da função C(x1,x2,x3)

$C_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \}, \{z1_, z2_, z3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[C_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função D(x1,x2,x3)

$D_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \}, \{z1_, z2_, z3_ \}, \{u1_, u2_, u3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[D_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função E(x1,x2,x3)

$E_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \},$
 $\{z1_, z2_, z3_ \}, \{u1_, u2_, u3_ \}, \{v1_, v2_, v3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[E_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}, {v1, v2, v3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ Determinando o número complexo G21

Os vetores complexos h11 e h20

`h11 = FullSimplify[AI . B_i[q1, qb]]`

$$\left\{ \frac{-4 b^2 (b-3 c) c + (b-c)^2 \omega^2}{(b c)^{3/2} (4 c^2 + \omega^2)}, \frac{-4 b^2 (b-3 c) c + (b-c)^2 \omega^2}{(b c)^{3/2} (4 c^2 + \omega^2)}, \frac{-4 b (b-3 c) c + 2 (b-c) \omega^2}{b c (4 c^2 + \omega^2)} \right\}$$

`h20 = FullSimplify[Inverse[2 i \omega IdentityMatrix[3] - A] . B_i[q1, q1]]`

$$\left\{ \frac{(b-3 c) (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (4 b c - i (b-5 c) \omega + 2 \omega^2)}{\sqrt{b c} (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)}, \right.$$

$$\frac{(b-3 c - 2 i \omega) (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (4 b c - i (b-5 c) \omega + 2 \omega^2)}{\sqrt{b c} (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)},$$

$$\left. \frac{2 (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (2 b (b-3 c) c - i b (3 b-5 c) \omega - 2 (2 b+c) \omega^2 - 2 i \omega^3)}{b (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)} \right\}$$

■ Componentes de G21

`C1 = Simplify[pNb.C_i[q, q, qb]]`

0

P1 = FullSimplify[pNb.Bi[qb, h20]]

$$\frac{(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0) (8b^3(b-5c)(b-3c)c - ib^2(b-3c)(7b^2 - 6bc + 43c^2)\omega_0 - 2b(b-2c)(5b^2 + 3c^2)\omega_0^2 - ib(17b^2 - 64bc + 7c^2)\omega_0^3 - 2(5b-2c)(b+c)\omega_0^4 - 4i(b-c)\omega_0^5)}{(2b^2(b+c)(b-2c+i\omega_0)(b^2-3bc+4\omega_0^2)(4c^3+4ic^2\omega_0+c\omega_0^2+i\omega_0^3))}$$

P2 = FullSimplify[-2 pNb.Bi[q1, h11]]

$$\frac{(8b^3(b-5c)(b-3c)c + 16ib^2(b-3c)(b-2c)c\omega_0 - b(b+c)(3b^2 - 12bc + 5c^2)\omega_0^2 - 2i(b-2c)(b-c)(3b-c)\omega_0^3 + 3(b-c)^2\omega_0^4)}{(b^2c(b+c)(b-2c+i\omega_0)(4c^2+\omega_0^2))}$$

■ G21

G21 = FullSimplify[P1 + P2 + C1]

$$\frac{1}{2b^2(b+c)(b-2c+i\omega_0)} \left(\frac{1}{c(4c^2+\omega_0^2)} 2(8b^3(b-5c)(b-3c)c + 16ib^2(b-3c)(b-2c)c\omega_0 - b(b+c)(3b^2 - 12bc + 5c^2)\omega_0^2 - 2i(b-2c)(b-c)(3b-c)\omega_0^3 + 3(b-c)^2\omega_0^4) + \frac{(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0)(8b^3(b-5c)(b-3c)c - ib^2(b-3c)(7b^2 - 6bc + 43c^2)\omega_0 - 2b(b-2c)(5b^2 + 3c^2)\omega_0^2 - ib(17b^2 - 64bc + 7c^2)\omega_0^3 - 2(5b-2c)(b+c)\omega_0^4 - 4i(b-c)\omega_0^5)}{(b^2-3bc+4\omega_0^2)(4c^3+4ic^2\omega_0+c\omega_0^2+i\omega_0^3)} \right)$$

■ O primeiro coeficiente de Lyapunov (L1)

L1 = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Re[G21]]]]

$$(24b^4(b-5c)(b-3c)^2(b-2c)c^3 + b^2(b-3c)c(9b^5 - 135b^4c + 555b^3c^2 - 923b^2c^3 + 508bc^4 + 82c^5)\omega_0^2 + b(-6b^6 + 120b^5c - 875b^4c^2 + 2503b^3c^3 - 2513b^2c^4 + 221bc^5 + 142c^6)\omega_0^4 - (b-4c)(30b^4 - 141b^3c + 147b^2c^2 + 25bc^3 - 5c^4)\omega_0^6 - 4(b-c)(6b^2 - 9bc - 5c^2)\omega_0^8) / (2b^2c(b+c)((b-2c)^2 + \omega_0^2)(b^2 - 3bc + 4\omega_0^2)(4c^4 + 5c^2\omega_0^2 + \omega_0^4))$$

$$\omega_0 = \sqrt{-b(b-3c)}$$

$$\sqrt{-b(b-3c)}$$

■ Substituindo ω_0 na expressão de L1 acima

Expressão para L1*

L1 = FullSimplify[L1]

$$\frac{3b(b-3c)^2(b-2c)(2b-c)}{(b-4c)^2c(b+c)(b^2-3bc-c^2)}$$

//Uma outra escrita da expressão de L1 logo acima, que foi usada ao longo do trabalho, pode ser vista no Anexo D//

■ O segundo coeficiente de Lyapunov (L2) em $c=2b$

Anulando L1

$$c = 2 * b$$

$$2 b$$

$$L1$$

$$0$$

■ Cálculo do vetor complexo h21

$$G21q = \text{Simplify}[G21 * q, b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ \frac{30 \sqrt{2} (8 i + 5 \sqrt{5})}{49 (7 i + \sqrt{5}) b}, \frac{6 \sqrt{2} (5 i + 11 \sqrt{5})}{49 (i + \sqrt{5}) b}, \frac{30 i + 66 \sqrt{5}}{77 i b - 7 \sqrt{5} b} \right\}$$

$$k1 = C_i[q, q, qb]$$

$$\{0, 0, 0\}$$

$$k2 = \text{Simplify}[B_i[qb, h20], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ 0, -\frac{65 + 37 i \sqrt{5}}{7 \sqrt{2} (13 + 2 i \sqrt{5}) b}, \frac{30 i - 3 \sqrt{5}}{28 i b + 7 \sqrt{5} b} \right\}$$

$$k3 = \text{Simplify}[2 * B_i[q, h11], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ 0, -\frac{5 (22 i + \sqrt{5})}{7 \sqrt{2} (4 i + \sqrt{5}) b}, -\frac{45 (-3 i + \sqrt{5})}{14 (4 i + \sqrt{5}) b} \right\}$$

$h_{21} = \{x, y, z\} / .$

```
Simplify[Solve[{{(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[3]], q[[1]]},
  {(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[3]], q[[2]]},
  {(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[3]], q[[3]]}, {pNb[[1]], pNb[[2]], pNb[[3]], 0}].
{x, y, z, s} = {Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[1]], Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[2]], Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[3]], 0}, {x, y, z, s}]]][[1]]
```

$$\left\{ -\frac{5 \left((-1012326379 i + 731353607 \sqrt{5}) b + (3735591005 i - 144813349 \sqrt{5}) \sqrt{b^2} \right)}{4116 \sqrt{2} \left(7 \left(243815 i + 398702 \sqrt{5} \right) b^3 + 5 \left(-398702 i + 48763 \sqrt{5} \right) (b^2)^{3/2} \right)}, \right.$$

$$\frac{(21129575 - 27594416 i \sqrt{5}) b + (19274603 - 12315908 i \sqrt{5}) \sqrt{b^2}}{294 \sqrt{2} b^2 \left((94337 + 27409 i \sqrt{5}) b + 2 \left(-137045 + 94337 i \sqrt{5} \right) \sqrt{b^2} \right)},$$

$$\left. \frac{5 \left(1179968435 + 637339657 i \sqrt{5} \right) b + \left(-12201587465 - 19040534071 i \sqrt{5} \right) \sqrt{b^2}}{8232 \left(20 \left(398702 + 48763 i \sqrt{5} \right) b^3 + \left(-243815 + 398702 i \sqrt{5} \right) (b^2)^{3/2} \right)} \right\}$$

$h_{21} = \text{Simplify}[h_{21}, b \in \text{Reals} \ \&\& \ b > 0]$

$$\left\{ -\frac{5 \left(1361632313 i + 293270129 \sqrt{5} \right)}{2058 \sqrt{2} \left(-286805 i + 3034729 \sqrt{5} \right) b^2}, \right.$$

$$\left. -\frac{20202089 i + 19955162 \sqrt{5}}{1029 \sqrt{2} \left(25679 i + 30869 \sqrt{5} \right) b^2}, \frac{3150872645 i - 7926917893 \sqrt{5}}{4116 \left(-7730225 i + 1373962 \sqrt{5} \right) b^2} \right\}$$

O vetor complexo h_{21b} (conjugado de h_{21})

$h_{21b} = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[h_{21}]]]$

$$\left\{ \frac{-440 + 457 i \sqrt{5}}{2058 \sqrt{2} b^2}, \frac{-1327 + 41 i \sqrt{5}}{2058 \sqrt{2} b^2}, \frac{-1139 + 823 i \sqrt{5}}{4116 b^2} \right\}$$

■ O vetor complexo h_{30}

$h_{30} =$

$\text{Simplify}[\text{Inverse}[3 i \omega_0 \text{IdentityMatrix}[3] - A] \cdot (C_i[q, q, q] + 3 * B_i[q, h_{20}]), b \in \text{Reals} \ \&\& \ b > 0]$

$$\left\{ \frac{3 \left(1235 i + 647 \sqrt{5} \right)}{4 \sqrt{2} \left(-2122 i + 341 \sqrt{5} \right) b^2}, \frac{3 \left(-1588 i + 47 \sqrt{5} \right)}{2 \sqrt{2} \left(2122 i - 341 \sqrt{5} \right) b^2}, \frac{3 \left(376 i + 937 \sqrt{5} \right)}{4 \left(-2122 i + 341 \sqrt{5} \right) b^2} \right\}$$

■ O vetor complexo h31

$$h31 = \text{FullSimplify}[\text{Inverse}[2 \text{ i } \omega 0 \text{ IdentityMatrix}[3] - A] \cdot (D_i[q, q, q, qb] + 3 * C_i[q, q, h11] + 3 * C_i[q, qb, h20] + 3 * B_i[h20, h11] + B_i[qb, h30] + 3 * B_i[q, h21] - 3 G21 h20), b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{-\frac{1402565213095}{2} + 114869268760 \text{ i } \sqrt{5}}}{376614 b^3}, \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{-\frac{1545136746211}{2} - 318134547146 \text{ i } \sqrt{5}}}{376614 b^3}, \frac{868127 + 233237 \text{ i } \sqrt{5}}{376614 b^3} \right\}$$

■ O vetor complexo h20b (complexo conjugado de h20)

$$h20b = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[h20], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]]$$

$$\left\{ \frac{-17 \text{ i } \sqrt{5} b + 5 \sqrt{b^2}}{49 \sqrt{2} b^2}, -\frac{19 \text{ i } \sqrt{5} b + 29 \sqrt{b^2}}{49 \sqrt{2} b^2}, \frac{2 (13 b - 5 \text{ i } \sqrt{5} \sqrt{b^2})}{49 b^2} \right\}$$

■ O vetor complexo h22

$$h22 = \text{Simplify}[(-\text{Inverse}[A]) \cdot$$

$$(D_i[q, q, qb, qb] + 4 * C_i[q, qb, h11] + C_i[qb, qb, h20] + C_i[q, q, h20b] + 2 * B_i[h11, h11] + 2 * B_i[q, h21b] + 2 * B_i[qb, h21] + B_i[h20b, h20] - 4 h11 L1), b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ -\frac{3695}{9604 \sqrt{2} b^3}, -\frac{3695}{9604 \sqrt{2} b^3}, -\frac{1865}{7203 b^3} \right\}$$

■ O número complexo H32

$$G21b = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[G21], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]]$$

$$\frac{6 \text{ i } \sqrt{5} \sqrt{b^2}}{7 b^2}$$

$$H32 = \text{FullSimplify}[(6 * B_i[h11, h21] + B_i[h20b, h30] + 3 * B_i[h21b, h20] + 3 * B_i[q, h22] + 2 * B_i[qb, h31] + 6 * C_i[q, h11, h11] + 3 * C_i[q, h20b, h20] + 3 * C_i[q, q, h21b] + 6 * C_i[q, qb, h21] + 6 * C_i[qb, h20, h11] + C_i[qb, qb, h30] + D_i[q, q, q, h20b] + 6 * D_i[q, q, qb, h11] + 3 * D_i[q, qb, qb, h20] + E_i[q, q, q, qb, qb] - 6 * G21 * h21 - 3 * G21b * h21), b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ \frac{15 \sqrt{\frac{170129}{2} - 40216 \text{ i } \sqrt{5}}}{2401 b^3}, \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{-\frac{5886752011330795}{2} + 1371626430945250 \text{ i } \sqrt{5}}}{36908172 b^3}, \frac{60023855 - 7835509 \text{ i } \sqrt{5}}{10545192 b^3} \right\}$$

O número complexo G32

`G32 = FullSimplify[Refine[pNb.H32], b ∈ Reals && b > 0]`

$$\frac{26\,069\,440 + 2\,907\,937 i \sqrt{5}}{12\,302\,724 b^3}$$

■ Expressão fonal para o segundo coeficiente de Lyapunov (L2)

`L2 = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Re[(1/12) G32], b ∈ Reals && b > 0]]]`

$$\frac{1\,629\,340}{9\,227\,043 b^3}$$

Anexo C

Determinando L2 com L1 se anulando em $c=b/2$

■ Sistema de interesse - campo vetorial

Sistema tipo Lorenz

$$\begin{aligned} f_1[x_, y_, z_] &:= a * (y - x) \\ f_2[x_, y_, z_] &:= d * x + c * y - x * z \\ f_3[x_, y_, z_] &:= -b * z + x * y \end{aligned}$$

■ Equilíbrios

$$e = \text{Simplify}[\text{Solve}[\{f_1[x, y, z] == 0, f_2[x, y, z] == 0, f_3[x, y, z] == 0\}, \{x, y, z\}]]$$

$$\left\{ \left\{ z \rightarrow 0, y \rightarrow 0, x \rightarrow 0 \right\}, \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow -\sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow -\sqrt{b(c+d)} \right\}, \left\{ z \rightarrow c + d, y \rightarrow \sqrt{b(c+d)}, x \rightarrow \sqrt{b(c+d)} \right\} \right\}$$

Equilíbrio origem (e_0)

$$\begin{aligned} e_0 &= \{x, y, z\} /. e[[1]] \\ &\{0, 0, 0\} \end{aligned}$$

Equilíbrio Q_-

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x, y, z\} /. e[[2]] \\ &\{-\sqrt{b(c+d)}, -\sqrt{b(c+d)}, c+d\} \end{aligned}$$

Equilíbrio Q_+

$$\begin{aligned} e_2 &= \{x, y, z\} /. e[[3]] \\ &\{\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, c+d\} \end{aligned}$$

■ Parte linear do campo - matriz Jacobiana A

$$\text{Df}[\{x_, y_, z_}] := \{ \text{Derivative}[1, 0, 0][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_1][x, y, z], \text{Derivative}[1, 0, 0][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_2][x, y, z], \text{Derivative}[1, 0, 0][f_3][x, y, z], \text{Derivative}[0, 1, 0][f_3][x, y, z], \text{Derivative}[0, 0, 1][f_3][x, y, z] \}$$

Matriz Jacobiana A

A JacobianaMatriz

$$A[\{x_, y_, z_}] := \text{Df}[\{x, y, z\}]$$

$A[\{x, y, z\}]$

$\{-a, a, 0\}, \{d - z, c, -x\}, \{y, x, -b\}$

$\text{MatrixForm}[A[\{x, y, z\}]]$

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ d - z & c & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

■ Matriz Jacobiana aplicada na origem (e_2)

$A = A[e_2]$

$\{-a, a, 0\}, \{-c, c, -\sqrt{b(c+d)}\}, \{\sqrt{b(c+d)}, \sqrt{b(c+d)}, -b\}$

$\text{MatrixForm}[A]$

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{b(c+d)} \\ \sqrt{b(c+d)} & \sqrt{b(c+d)} & -b \end{pmatrix}$$

■ Polinômio característico calculado em e_2

$p[\lambda_] := \text{Det}[A - \lambda * \text{IdentityMatrix}[3]]$

Polinômio

$\text{Simplify}[p[\lambda]]$

$-\lambda (\lambda (-c + \lambda) + b (d + \lambda)) - a (\lambda^2 + b (2c + 2d + \lambda))$

Reescrevendo o polinômio

$p\lambda = \lambda^3 + (a + b - c) \lambda^2 + (a * b + b * d) \lambda + 2 * a * b (c + d)$

$2 a b (c + d) + (a b + b d) \lambda + (a + b - c) \lambda^2 + \lambda^3$

Hipótese

$d = 0$

0

■ Superfície de bifurcação

Superfície de bifurcação

$a = 3c - b$

$-b + 3c$

$A = \text{FullSimplify}[A]$

$\{b - 3c, -b + 3c, 0\}, \{-c, c, -\sqrt{bc}\}, \{\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, -b\}$

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} b-3c & -b+3c & 0 \\ -c & c & -\sqrt{bc} \\ \sqrt{bc} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}$$

Reescrevendo o polinômio característico

p1[λ_] := Det[A - λ * IdentityMatrix[3]]

Simplify[p1[λ]]

$$(2c + \lambda) (b^2 - 3bc - \lambda^2)$$

Autovetores da matriz A - autovalores e respectivos autovetores

AQ = FullSimplify[

Refine[Eigensystem[A], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && 3c ∈ Reals && 3c > b]]

$$\left\{ \left\{ -2c, -i\sqrt{-b(b-3c)}, i\sqrt{-b(b-3c)} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{b-3c}{2\sqrt{bc}}, \frac{b-c}{2\sqrt{bc}}, 1 \right\}, \left\{ -\frac{b^2 - ib\sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i\sqrt{-b(b-3c)}c}{\sqrt{bc}(i\sqrt{-b(b-3c)} + 2c)}, \frac{3\sqrt{bc}}{b + 2i\sqrt{-b(b-3c)}}, 1 \right\}, \left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

$$\lambda_2 = i\sqrt{-b(b-3c)}$$

$$i\sqrt{-b(b-3c)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{-b(b-3c)};$$

Clear[ω0]

Autovetor complexo q, satisfazendo Aq = iω0q

$$q = \left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{-ib^2 + b(\sqrt{-b(b-3c)} + 3ic) - \sqrt{-b(b-3c)}c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \sqrt{-b(b-3c)})c}{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

Reescrevendo o autovetor complexo q

$$q = \left\{ \frac{-ib^2 + b(\omega_0 + 3ic) - \omega_0c}{(\omega_0 + 2ic)\sqrt{bc}}, \frac{(2ib - \omega_0)c}{(\omega_0 + 2ic)\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{-ib^2 - c\omega_0 + b(3ic + \omega_0)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, \frac{c(2ib - \omega_0)}{\sqrt{bc}(2ic + \omega_0)}, 1 \right\}$$

```
q1 = FullSimplify[q]
{ $\frac{-i b (b - 3 c) + (b - c) \omega 0}{\sqrt{b c} (2 i c + \omega 0)}$ ,  $\frac{c (2 i b - \omega 0)}{\sqrt{b c} (2 i c + \omega 0)}$ , 1}
```

■ O conjugado do vetor q (qb)

```
qb =
FullSimplify[Refine[Conjugate[q1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
{ $\frac{i b (b - 3 c) + (b - c) \omega 0}{\sqrt{b c} (-2 i c + \omega 0)}$ ,  $\frac{c (2 b - i \omega 0)}{\sqrt{b c} (2 c + i \omega 0)}$ , 1}
```

■ Confirmando o vetor q

```
ω0 =  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ ;
FullSimplify[A.q - i ω0 q]
Clear[ω0]
{0, 0, 0}
```

■ Matriz transposta de A (AT)

```
AT = Transpose[A]
{{b - 3 c, -c,  $\sqrt{b c}$ }, {-b + 3 c, c,  $\sqrt{b c}$ }, {0,  $-\sqrt{b c}$ , -b}}
```

```
MatrixForm[AT]

$$\begin{pmatrix} b - 3 c & -c & \sqrt{b c} \\ -b + 3 c & c & \sqrt{b c} \\ 0 & -\sqrt{b c} & -b \end{pmatrix}$$

```

■ Autovalores de AT - autovalores e respectivos autovetores

```
AP = FullSimplify[
Refine[Eigensystem[AT], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && 3 c ∈ Reals && 3 c > b]]
{{-2 c,  $-i \sqrt{-b (b - 3 c)}$ ,  $i \sqrt{-b (b - 3 c)}$ },
{{ $-\frac{2 c}{\sqrt{b c}}$ ,  $\frac{-b + 2 c}{\sqrt{b c}}$ , 1}, { $\frac{b^2 - i b \sqrt{-b (b - 3 c)} - 3 b c + i \sqrt{-b (b - 3 c)} c}{(b - 3 c) \sqrt{b c}}$ ,  $-\frac{b - i \sqrt{-b (b - 3 c)}}{\sqrt{b c}}$ , 1}},
{{ $\frac{b^2 + i b \sqrt{-b (b - 3 c)} - 3 b c - i \sqrt{-b (b - 3 c)} c}{(b - 3 c) \sqrt{b c}}$ ,  $-\frac{b + i \sqrt{-b (b - 3 c)}}{\sqrt{b c}}$ , 1}}}
```

■ Autovetor adjunto p, satisfazendo ATp = -iω0 p

```
ω0 =  $\sqrt{-b (b - 3 c)}$ ;
Clear[ω0]
```

$$p = \left\{ \frac{b^2 - i b \sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i \sqrt{-b(b-3c)} c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \sqrt{-b(b-3c)}}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{b^2 - i b \sqrt{-b(b-3c)} - 3bc + i \sqrt{-b(b-3c)} c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \sqrt{-b(b-3c)}}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ Reescrevendo o autovetor adjunto complexo p

$$p = \left\{ \frac{b^2 - i b \omega_0 - 3bc + i \omega_0 c}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

$$\left\{ \frac{b^2 - 3bc - i b \omega_0 + i c \omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b - i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

`p1 = FullSimplify[p]`

$$\left\{ \frac{b(b-3c) - i(b-c)\omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, \frac{-b + i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ O conjugado do vetor p (pb)

`pb = FullSimplify[Conjugate[p1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]`

$$\left\{ \frac{b(b-3c) + i(b-c)\omega_0}{(b-3c) \sqrt{bc}}, -\frac{b + i \omega_0}{\sqrt{bc}}, 1 \right\}$$

■ Confirmando o vetor p

`ω0 = √(-b(b-3c));`
`Simplify[AT.pb - i ω0 pb]`
`Clear[ω0]`
`{0, 0, 0}`

■ Normalização de p com respeito a q

Fator de normalização u

`ω0 = √(-b(b-3c));`
`u = FullSimplify[1 / (pb.q1)]`
`Clear[ω0]`

$$\frac{(\sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)c}{2(-ib + \sqrt{-b(b-3c)} + 2ic)(b+c)}$$

Reescrevendo u em termos de ω_0

$$u_1 = \frac{(\omega_0 + 2i c) c}{2(-ib + \omega_0 + 2i c)(b + c)}$$

$$\frac{c(2ic + \omega_0)}{2(b + c)(-ib + 2ic + \omega_0)}$$

Normalizando p (pN)

```
pN = FullSimplify[
  Refine[ComplexExpand[u1 * p1], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
```

$$\left\{ \frac{c(2c - i\omega_0)(-b(b - 3c) + i(b - c)\omega_0)}{2(b - 3c)\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, -\frac{c(ib + \omega_0)(2ic + \omega_0)}{2\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-2c + i\omega_0)}{2(b + c)(b - 2c + i\omega_0)} \right\}$$

Conjugado de pN (pNb)

```
pNb = FullSimplify[
  Refine[ComplexExpand[u1 * pb], b ∈ Reals && b > 0 && c ∈ Reals && c > 0 && ω0 ∈ Reals && ω0 > 0]]
```

$$\left\{ \frac{c(2ic + \omega_0)(ib(b - 3c) + (-b + c)\omega_0)}{2(b - 3c)\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-ib + \omega_0)(2ic + \omega_0)}{2\sqrt{bc}(b + c)(b - 2c + i\omega_0)}, \frac{c(-2c + i\omega_0)}{2(b + c)(b - 2c + i\omega_0)} \right\}$$

Confirmando a normalização ($\langle p, q \rangle = 1$)

```
ω0 = Sqrt[-b(b - 3c)];
FullSimplify[Refine[pNb.q1]]
Clear[ω0]
1
```

■ Matriz inversa de A (AI)

```
AI = Simplify[Inverse[A]]
```

$$\left\{ \left\{ 0, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2\sqrt{bc}} \right\}, \left\{ \frac{1}{-b + 3c}, -\frac{1}{2c}, \frac{1}{2\sqrt{bc}} \right\}, \left\{ -\frac{c}{(b - 3c)\sqrt{bc}}, -\frac{1}{\sqrt{bc}}, 0 \right\} \right\}$$

```
Simplify[A.AI]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

■ As funções multilineares B, C, D e E

Definição da função B(x1, x2, x3)

```
Bi[{x1_, x2_, x3_}, {y1_, y2_, y3_}] := {0, -x1 y3 - x3 y1, x1 y2 + x2 y1}
MatrixForm[Bi[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Definição da função C(x1,x2,x3)

$C_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \}, \{z1_, z2_, z3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[C_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função D(x1,x2,x3)

$D_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \}, \{z1_, z2_, z3_ \}, \{u1_, u2_, u3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[D_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição da função E(x1,x2,x3)

$E_i[\{x1_, x2_, x3_ \}, \{y1_, y2_, y3_ \},$
 $\{z1_, z2_, z3_ \}, \{u1_, u2_, u3_ \}, \{v1_, v2_, v3_ \}] := \{0, 0, 0\}$

`MatrixForm[E_i[{x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}, {z1, z2, z3}, {u1, u2, u3}, {v1, v2, v3}]]`

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ Determinando o número complexo G21

Os vetores complexos h11 e h20

`h11 = FullSimplify[AI . B_i[q1, qb]]`

$$\left\{ \frac{-4 b^2 (b-3 c) c + (b-c)^2 \omega^2}{(b c)^{3/2} (4 c^2 + \omega^2)}, \frac{-4 b^2 (b-3 c) c + (b-c)^2 \omega^2}{(b c)^{3/2} (4 c^2 + \omega^2)}, \frac{-4 b (b-3 c) c + 2 (b-c) \omega^2}{b c (4 c^2 + \omega^2)} \right\}$$

`h20 = FullSimplify[Inverse[2 i \omega IdentityMatrix[3] - A] . B_i[q1, q1]]`

$$\left\{ \frac{(b-3 c) (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (4 b c - i (b-5 c) \omega + 2 \omega^2)}{\sqrt{b c} (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)}, \right.$$

$$\frac{(b-3 c - 2 i \omega) (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (4 b c - i (b-5 c) \omega + 2 \omega^2)}{\sqrt{b c} (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)},$$

$$\left. \frac{2 (b (b-3 c) + i (b-c) \omega) (2 b (b-3 c) c - i b (3 b-5 c) \omega - 2 (2 b+c) \omega^2 - 2 i \omega^3)}{b (2 c - i \omega)^2 (c + i \omega) (b^2 - 3 b c + 4 \omega^2)} \right\}$$

■ Componentes de G21

`C1 = Simplify[pNb.C_i[q, q, qb]]`

0

P1 = FullSimplify[pNb.Bi[qb, h20]]

$$\frac{(b(b-3c) + i(b-c)\omega_0) (8b^3(b-5c)(b-3c)c - ib^2(b-3c)(7b^2 - 6bc + 43c^2)\omega_0 - 2b(b-2c)(5b^2 + 3c^2)\omega_0^2 - ib(17b^2 - 64bc + 7c^2)\omega_0^3 - 2(5b-2c)(b+c)\omega_0^4 - 4i(b-c)\omega_0^5)}{(2b^2(b+c)(b-2c+i\omega_0)(b^2 - 3bc + 4\omega_0^2)(4c^3 + 4ic^2\omega_0 + c\omega_0^2 + i\omega_0^3))}$$

P2 = FullSimplify[-2 pNb.Bi[q1, h11]]

$$\frac{(8b^3(b-5c)(b-3c)c + 16ib^2(b-3c)(b-2c)c\omega_0 - b(b+c)(3b^2 - 12bc + 5c^2)\omega_0^2 - 2i(b-2c)(b-c)(3b-c)\omega_0^3 + 3(b-c)^2\omega_0^4)}{(b^2c(b+c)(b-2c+i\omega_0)(4c^2 + \omega_0^2))}$$

■ G21

G21 = FullSimplify[P1 + P2 + C1]

$$\frac{1}{2b^2(b+c)(b-2c+i\omega_0)} \left(\frac{1}{c(4c^2 + \omega_0^2)} 2(8b^3(b-5c)(b-3c)c + 16ib^2(b-3c)(b-2c)c\omega_0 - b(b+c)(3b^2 - 12bc + 5c^2)\omega_0^2 - 2i(b-2c)(b-c)(3b-c)\omega_0^3 + 3(b-c)^2\omega_0^4) + \left((b(b-3c) + i(b-c)\omega_0) (8b^3(b-5c)(b-3c)c - ib^2(b-3c)(7b^2 - 6bc + 43c^2)\omega_0 - 2b(b-2c)(5b^2 + 3c^2)\omega_0^2 - ib(17b^2 - 64bc + 7c^2)\omega_0^3 - 2(5b-2c)(b+c)\omega_0^4 - 4i(b-c)\omega_0^5) \right) / \left((b^2 - 3bc + 4\omega_0^2)(4c^3 + 4ic^2\omega_0 + c\omega_0^2 + i\omega_0^3) \right) \right)$$

■ O primeiro coeficiente de Lyapunov (L1)

L1 = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Re[G21]]]]

$$\frac{(24b^4(b-5c)(b-3c)^2(b-2c)c^3 + b^2(b-3c)c(9b^5 - 135b^4c + 555b^3c^2 - 923b^2c^3 + 508bc^4 + 82c^5)\omega_0^2 + b(-6b^6 + 120b^5c - 875b^4c^2 + 2503b^3c^3 - 2513b^2c^4 + 221bc^5 + 142c^6)\omega_0^4 - (b-4c)(30b^4 - 141b^3c + 147b^2c^2 + 25bc^3 - 5c^4)\omega_0^6 - 4(b-c)(6b^2 - 9bc - 5c^2)\omega_0^8)}{(2b^2c(b+c)((b-2c)^2 + \omega_0^2)(b^2 - 3bc + 4\omega_0^2)(4c^4 + 5c^2\omega_0^2 + \omega_0^4))}$$

$$\omega_0 = \sqrt{-b(b-3c)}$$

$$\sqrt{-b(b-3c)}$$

■ Substituindo ω_0 na expressão de L1 acima

Expressão para L1 *

L1 = FullSimplify[L1]

$$\frac{3b(b-3c)^2(b-2c)(2b-c)}{(b-4c)^2c(b+c)(b^2 - 3bc - c^2)}$$

//Uma outra escrita da expressão de L1 logo acima, que foi usada ao longo do trabalho, pode ser vista no Anexo D//

■ O segundo coeficiente de Lyapunov (L2) em $c=b/2$

Anulando L1

$$c = b / 2$$

$$\frac{b}{2}$$

L1

$$0$$

■ Cálculo do vetor complexo h21

$$G21q = \text{Simplify}[G21 * q, b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ -\frac{3i}{b}, \frac{12 + 3i\sqrt{2}}{2ib + \sqrt{2}b}, -\frac{3i\sqrt{2}}{b} \right\}$$

$$k1 = C_i[q, q, qb]$$

$$\{0, 0, 0\}$$

$$k2 = \text{Simplify}[B_i[qb, h20], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ 0, \frac{-3 + 6i\sqrt{2}}{(-4i + \sqrt{2})b}, \frac{3i}{2ib + \sqrt{2}b} \right\}$$

$$k3 = \text{Simplify}[2 * B_i[q, h11], b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$$

$$\left\{ 0, -\frac{5\sqrt{2}}{b}, \frac{18i}{2ib + \sqrt{2}b} \right\}$$

$h_{21} = \{x, y, z\} / .$

```
Simplify[Solve[{{(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[1]][[3]], q[[1]]},
  {(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[2]][[3]], q[[2]]},
  {(i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[1]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[2]], (i ω0 IdentityMatrix[3] - A)[[3]][[3]], q[[3]]}, {pNb[[1]], pNb[[2]], pNb[[3]], 0}].
{x, y, z, s} == {Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[1]], Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[2]], Simplify[(k1 + k2 + k3 - G21q)[[3]], 0}, {x, y, z, s}]]][[1]]
```

$$\left\{ \frac{(-136 + 4655 i \sqrt{2}) b + (-8938 - 583 i \sqrt{2}) \sqrt{b^2}}{12 \left(4 \left(-43 i + 13 \sqrt{2} \right) b^3 + \left(26 i + 43 \sqrt{2} \right) (b^2)^{3/2} \right)}, \right. \\ \frac{(6170 i - 2357 \sqrt{2}) b + (-1804 i + 325 \sqrt{2}) \sqrt{b^2}}{12 \left(\left(26 - 43 i \sqrt{2} \right) b^3 + 2 \left(43 + 13 i \sqrt{2} \right) (b^2)^{3/2} \right)}, \\ \left. \frac{(5389 + 985 i \sqrt{2}) b + (-8543 - 2498 i \sqrt{2}) \sqrt{b^2}}{6 \left(5 \left(26 - 43 i \sqrt{2} \right) b^3 + 2 \left(-43 - 13 i \sqrt{2} \right) (b^2)^{3/2} \right)} \right\}$$

$h_{21} = \text{Simplify}[h_{21}, b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$

$$\left\{ \frac{-4537 + 2036 i \sqrt{2}}{6 \left(-146 i + 95 \sqrt{2} \right) b^2}, -\frac{2183 + 1016 i \sqrt{2}}{6 \left(112 i + 17 \sqrt{2} \right) b^2}, \frac{-3154 i + 1513 \sqrt{2}}{6 \left(44 i + 241 \sqrt{2} \right) b^2} \right\}$$

O vetor complexo h_{21b} (conjugado de h_{21})

$h_{21b} = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Conjugate}[h_{21}]]]$

$$\left\{ \frac{14 i - 37 \sqrt{2}}{12 b^2}, -\frac{32 i + 23 \sqrt{2}}{12 b^2}, \frac{5 + 7 i \sqrt{2}}{6 b^2} \right\}$$

■ O vetor complexo h_{30}

$h_{30} =$

$\text{Simplify}[\text{Inverse}[3 i \omega_0 \text{IdentityMatrix}[3] - A] \cdot (C_i[q, q, q] + 3 * B_i[q, h_{20}]), b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$

$$\left\{ \frac{3 \left(13 i + 8 \sqrt{2} \right)}{2 \left(16 + 13 i \sqrt{2} \right) b^2}, \frac{3 \left(61 + 31 i \sqrt{2} \right)}{2 \left(-16 i + 13 \sqrt{2} \right) b^2}, \frac{9}{2 b^2} \right\}$$

■ O vetor complexo h_{31}

$h_{31} = \text{FullSimplify}[$

$(\text{Inverse}[2 i \omega_0 \text{IdentityMatrix}[3] - A]) \cdot (D_i[q, q, q, qb] + 3 * C_i[q, q, h_{11}] + 3 * C_i[q, qb, h_{20}] + 3 * B_i[h_{20}, h_{11}] + B_i[qb, h_{30}] + 3 * B_i[q, h_{21}] - 3 G_{21} h_{20}), b \in \text{Reals} \&\& b > 0]$

$$\left\{ \frac{\sqrt{17647 - 940 i \sqrt{2}}}{6 b^3}, \frac{\sqrt{-47537 + 54704 i \sqrt{2}}}{6 b^3}, \frac{118 + 11 i \sqrt{2}}{3 b^3} \right\}$$

■ O vetor complexo h20b (complexo conjugado de h20)

`h20b = Simplify[ComplexExpand[Conjugate[h20], b ∈ Reals && b > 0]]`

$$\left\{ \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{2} b^2}, \frac{-4 i b + \sqrt{2} \sqrt{b^2}}{2 b^2}, \frac{2}{b} \right\}$$

■ O vetor complexo h22

`h22 = Simplify[(-Inverse[A]).`

`(Di[q, q, qb, qb] + 4 * Ci[q, qb, h11] + Ci[qb, qb, h20] + Ci[q, q, h20b] + 2 * Bi[h11, h11] + 2 * Bi[q, h21b] + 2 * Bi[qb, h21] + Bi[h20b, h20] - 4 h11 L1), b ∈ Reals && b > 0]`

$$\left\{ -\frac{216727 i + 3378596 \sqrt{2}}{(6757192 + 216727 i \sqrt{2}) b^3}, -\frac{216727 i + 3378596 \sqrt{2}}{(6757192 + 216727 i \sqrt{2}) b^3}, -\frac{20}{3 b^3} \right\}$$

■ O número complexo H32

`G21b = Simplify[ComplexExpand[Conjugate[G21], b ∈ Reals && b > 0]]`

$$\frac{3 i \sqrt{2} \sqrt{b^2}}{b^2}$$

`H32 = FullSimplify[(6 * Bi[h11, h21] + Bi[h20b, h30] + 3 * Bi[h21b, h20] + 3 * Bi[q, h22] + 2 * Bi[qb, h31] + 6 * Ci[q, h11, h11] + 3 * Ci[q, h20b, h20] + 3 * Ci[q, q, h21b] + 6 * Ci[q, qb, h21] + 6 * Ci[qb, h20, h11] + Ci[qb, qb, h30] + Di[q, q, q, h20b] + 6 * Di[q, q, qb, h11] + 3 * Di[q, qb, qb, h20] + Ei[q, q, q, qb, qb] - 6 * G21 * h21 - 3 * G21b * h21), b ∈ Reals && b > 0]`

$$\left\{ \frac{3 \sqrt{-1271 - 518 i \sqrt{2}}}{2 b^3}, -\frac{\sqrt{\frac{53663}{2} + 11327 i \sqrt{2}}}{3 b^3}, \frac{-169 + 67 i \sqrt{2}}{6 b^3} \right\}$$

■ O número complexo G32

`G32 = FullSimplify[Refine[pNb.H32], b ∈ Reals && b > 0]`

$$\frac{i}{\sqrt{2} b^3}$$

■ Expressão fonal para o segundo coeficiente de Lyapunov (L2)

`L2 = FullSimplify[Refine[ComplexExpand[Re[(1/12) G32], b ∈ Reals && b > 0]]]`

0

Anexo D

Reescrevendo a expressão para L1

■ Expressão para L1, como visto antes

$$L1 = - \frac{3 b (b - 3 c)^2 (b - 2 c) (2 b - c)}{(b - 4 c)^2 c (b + c) (b^2 - 3 b c - c^2)}$$

$$- \frac{3 b (b - 3 c)^2 (b - 2 c) (2 b - c)}{(b - 4 c)^2 c (b + c) (b^2 - 3 b c - c^2)}$$

■ Reescrevendo a superfície de bifurcação

$$c = (a + b) / 3$$

$$\frac{a + b}{3}$$

■ Expressão final para L1

$$L1 = \text{Simplify}[L1]$$

$$\frac{243 a^2 (a - 5 b) (2 a - b) b}{(4 a + b)^2 (a^4 + 16 a^3 b + 60 a^2 b^2 + 49 a b^3 + 4 b^4)}$$

Anexo E

■ Sistema de Lorenz

Configurações

```
Off[General::"spell"]
Off[General::"spell1"]
<< Graphics`Colors`
<< Graphics`ImplicitPlot`
Context[$];
```

■ Componentes do campo vetorial

```
f1[x_, y_, z_] :=  $\sigma * (y - x)$ 
f2[x_, y_, z_] :=  $\rho * x - y - x * z$ 
f3[x_, y_, z_] :=  $-\beta * z + x * y$ 
```

■ Ponto de equilíbrio

$$P1 = \left\{ \sqrt{\beta(-1+\rho)}, \sqrt{\beta(-1+\rho)}, -1+\rho \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{\beta(-1+\rho)}, \sqrt{\beta(-1+\rho)}, -1+\rho \right\}$$

■ Parte linear do campo de vetores

```
Df[{x_, y_, z_}] := {{Derivative[1, 0, 0][f1][x, y, z],
  Derivative[0, 1, 0][f1][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f1][x, y, z]},
 {Derivative[1, 0, 0][f2][x, y, z], Derivative[0, 1, 0][f2][x, y, z],
  Derivative[0, 0, 1][f2][x, y, z]}, {Derivative[1, 0, 0][f3][x, y, z],
  Derivative[0, 1, 0][f3][x, y, z], Derivative[0, 0, 1][f3][x, y, z]}}
```

■ Polinômio característico

```
P[ $\lambda$ , {x_, y_, z_}] := Det[Df[{x, y, z}] -  $\lambda$ *IdentityMatrix[3]]
```

■ Coeficientes do polinômio característico

```
cc[i_, {x_, y_, z_}] := -Coefficient[P[ $\lambda$ , {x, y, z}],  $\lambda$ , i]
```

■ Análise do polinômio característico calculado em P1

```
Simplify[cc[0, P1]]
 $2\beta(-1+\rho)\sigma$ 
```

`Simplify[cc[1, P1]]`

$\beta (\rho + \sigma)$

`Simplify[cc[2, P1]]`

$1 + \beta + \sigma$

`Simplify[cc[3, P1]]`

1

■ **Autovetores de Df[P1] para $\rho = \frac{\sigma (3+\beta+\sigma)}{\sigma-\beta-1}$**

$$\rho = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

`Refine[Eigenvalues[Df[P1]], $\sigma > 1 + \beta$]`

$$\left\{ -1 - \beta - \sigma, \frac{i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma + \beta \sigma^2}}{\sqrt{-1 - \beta + \sigma}}, -\frac{i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma + \beta \sigma^2}}{\sqrt{-1 - \beta + \sigma}} \right\}$$

■ **Matriz A**

$$\mathbf{A} = \left\{ \{-\sigma, \sigma, 0\}, \left\{ 1, -1, -\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \right\}, \left\{ \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, -\beta \right\} \right\}$$

$$\left\{ \{-\sigma, \sigma, 0\}, \left\{ 1, -1, -\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \right\}, \left\{ \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, -\beta \right\} \right\}$$

■ **Valor da bifurcação**

$$\rho c = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

`Clear[ρc]`

■ **Valor de ω_0**

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)}}{\sqrt{\sigma - \beta - 1}};$$

`Clear[ω_0]`

■ **Autovetor q**

$$\mathbf{q} = \left\{ \sigma, \sigma + i \omega_0, \frac{\omega_0 (-i (1 + \sigma) + \omega_0)}{\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}} \right\};$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)}}{\sqrt{\sigma - \beta - 1}};$$

$$\rho c = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

```

FullSimplify[A.q - i ω0 q]
Clear[ω0]
Clear[ρc]
{0, 0, 0}

```

■ Autovetor qb

$$qb = \left\{ \sigma, \sigma - i \omega_0, \frac{\omega_0 (i + i \sigma + \omega_0)}{\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}} \right\};$$

■ Autovetor pb

$$pb = \left\{ \frac{(i \beta (-2 + \rho c) + \omega_0) / ((-i \sigma + \omega_0) (\beta \sigma (2 - \rho c + \sigma) + 2 i \sigma (1 + \beta + \sigma) \omega_0 - (3 + \beta + 2 \sigma) \omega_0^2))}{\beta + i \omega_0}, \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}}{\beta \sigma (2 - \rho c + \sigma) + 2 i \sigma (1 + \beta + \sigma) \omega_0 - (3 + \beta + 2 \sigma) \omega_0^2} \right\};$$

```
AT = Transpose[A]
```

$$\left\{ \left\{ -\sigma, 1, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \right\}, \left\{ \sigma, -1, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \right\}, \left\{ 0, -\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, -\beta \right\} \right\}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)}}{\sqrt{\sigma - \beta - 1}};$$

$$\rho c = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

```

FullSimplify[AT.pb - i ω0 pb]
Clear[ω0]
Clear[ρc]
{0, 0, 0}

```

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)}}{\sqrt{\sigma - \beta - 1}};$$

$$\rho c = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

`FullSimplify[pb.q]`

`Clear[\omega_0]`

`Clear[\rho c]`

$$\left(\sqrt{-1 - \beta + \sigma} \right. \\ \left. (-i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} (-1 + \sigma^2) + \beta^2 (i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} + 2 \sqrt{-1 - \beta + \sigma} + 2 \sigma \sqrt{-1 - \beta + \sigma}) + \right. \\ \left. 2 \beta (2 i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} + \sqrt{-1 - \beta + \sigma} + \right. \\ \left. \sigma (i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} + 3 \sqrt{-1 - \beta + \sigma} + 2 \sigma \sqrt{-1 - \beta + \sigma})) \right) / \\ \left((\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} - i \sigma \sqrt{-1 - \beta + \sigma}) (\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} (-1 + \sigma^2) + \right. \\ \left. i \beta^2 (i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} + 2 \sqrt{-1 - \beta + \sigma} + 2 \sigma \sqrt{-1 - \beta + \sigma}) + \right. \\ \left. 2 i \beta (i \sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)} + 2 \sqrt{-1 - \beta + \sigma} + \sigma (3 + \sigma) \sqrt{-1 - \beta + \sigma})) \right)$$

$$u = \text{Simplify}\left[\frac{1}{pb.q}\right];$$

`pb = Simplify[u * pb]`

$$\left\{ (\beta (-2 + \rho c) - i \omega_0) / (\omega_0 (-2 i \sigma - 2 i \sigma^2 + \omega_0 + 4 \sigma \omega_0 + 2 i \omega_0^2) + \beta (-\sigma^2 + \sigma (-2 + \rho c - 2 i \omega_0) + \omega_0^2)), \right. \\ \left. ((-i \beta + \omega_0) (-i \sigma + \omega_0)) / \right. \\ \left. (\omega_0 (-2 i \sigma - 2 i \sigma^2 + \omega_0 + 4 \sigma \omega_0 + 2 i \omega_0^2) + \beta (-\sigma^2 + \sigma (-2 + \rho c - 2 i \omega_0) + \omega_0^2)), \right. \\ \left. (\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} (\sigma + i \omega_0)) / \right. \\ \left. (\omega_0 (-2 i \sigma - 2 i \sigma^2 + \omega_0 + 4 \sigma \omega_0 + 2 i \omega_0^2) + \beta (-\sigma^2 + \sigma (-2 + \rho c - 2 i \omega_0) + \omega_0^2)) \right\}$$

■ Cálculo das condições de transversalidade e não degenerescência

Funções multilineares

Função B

$$b[\{x_1_, x_2_, x_3_}, \{y_1_, y_2_, y_3_}] := \{0, -x_1 * y_3 - x_3 * y_1, x_1 * y_2 + x_2 * y_1\}$$

Função C

$$c[\{x_1_, x_2_, x_3_}, \{y_1_, y_2_, y_3_}, \{z_1_, z_2_, z_3_}] := \{0, 0, 0\}$$

■ Condição de não degenerescência

Matriz inversa da matriz A

$$\mathbf{AI} = \text{Inverse}[\mathbf{A}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{\beta \rho c}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, \frac{\beta \sigma}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, -\frac{\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \sigma}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{2 \beta - \beta \rho c}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, \frac{\beta \sigma}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, -\frac{\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \sigma}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma} \right\}, \left\{ \frac{2 \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, \frac{2 \sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \sigma}{2 \beta \sigma - 2 \beta \rho c \sigma}, 0 \right\} \right\}$$

■ Matriz DA = 2*i*\omega0*I - A

$$\mathbf{DA} = \mathbf{D2} - \mathbf{A}$$

$$\left\{ \{\sigma + 2 i \omega_0, -\sigma, 0\}, \{-1, 1 + 2 i \omega_0, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}\}, \{-\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, -\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, \beta + 2 i \omega_0\} \right\}$$

■ Matriz 2*i*\omega0*I

$$\mathbf{D2} = 2 * i * \omega_0 * \text{IdentityMatrix}[3]$$

$$\left\{ \{2 i \omega_0, 0, 0\}, \{0, 2 i \omega_0, 0\}, \{0, 0, 2 i \omega_0\} \right\}$$

■ Matriz DA = 2*i*\omega0*I - A

$$\mathbf{DA} = \mathbf{D2} - \mathbf{A}$$

$$\left\{ \{\sigma + 2 i \omega_0, -\sigma, 0\}, \{-1, 1 + 2 i \omega_0, \sqrt{\beta (-1 + \rho c)}\}, \{-\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, -\sqrt{\beta (-1 + \rho c)}, \beta + 2 i \omega_0\} \right\}$$

■ Inversa da matriz DA

$$\mathbf{DAI} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[\mathbf{DA}]]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{(\beta (\rho c + 2 i \omega_0) + 2 (i - 2 \omega_0) \omega_0) / (-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0))}{(\sigma (\beta + 2 i \omega_0)) / (-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0))}, \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \sigma \right) / \left(-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right\}, \right. \\ \left\{ \frac{(-\beta (-2 + \rho c) + 2 i \omega_0) / (-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0))}{((\beta + 2 i \omega_0) (\sigma + 2 i \omega_0)) / (-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0))}, \right. \\ \left. - \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} (\sigma + 2 i \omega_0) \right) / \left(-4 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + 2 \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right\}, \\ \left\{ \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} (-i + \omega_0) \right) / \left(2 i (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta ((\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0 + \sigma (i - i \rho c + \omega_0)) \right), \right. \\ \left. \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} (\sigma + i \omega_0) \right) / \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right), \right. \\ \left. \left. \left. (i (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0) / \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right\} \right\}$$

■ Cálculo do vetor complexo h20

$$h20 = \text{Simplify}[\text{DAI.b}[q, q]]$$

$$\left\{ - \left(\sigma^2 \left(2 (1 + \sigma + i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c - i \omega_0) + \omega_0 (-2 i + i \rho c + \omega_0)) \right) \right) / \right. \\ \left. \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right) \right\}, \\ - \left(\sigma (\sigma + 2 i \omega_0) \left(2 (1 + \sigma + i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c - i \omega_0) + \omega_0 (-2 i + i \rho c + \omega_0)) \right) \right) / \\ \left(\sqrt{\beta (-1 + \rho c)} \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right) \right\}, \\ \left(2 i \sigma \omega_0 \left(2 \sigma^2 + \sigma (2 + 5 i \omega_0) + (2 i - 3 \omega_0) \omega_0 \right) \right) / \\ \left. \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right\}$$

■ Cálculo do número complexo G21

$$G21 = \text{Simplify}[\text{pb.}(c[q, q, qb] + 2 * b[q, h11] + b[qb, h20])]$$

$$\left(\left(\sigma (\sigma + i \omega_0) (2 \sigma + i \omega_0) \right. \right. \\ \left. \left(2 \omega_0^2 \left((-1 + \rho c) \sigma^2 + 2 (1 + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \sigma (-1 + \rho c - 3 i \omega_0 + 3 i \rho c \omega_0 + 2 \omega_0^2) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \beta \left((-1 + \rho c) \sigma^2 (-3 + 3 \rho c + i \omega_0) + 2 i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0^3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sigma \omega_0 (2 i + 3 i \rho c^2 + \omega_0 + 2 i \omega_0^2 - \rho c (5 i + \omega_0)) \right) \right) \right) / \\ \left((-1 + \rho c) \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right) + \\ \left. \sigma \omega_0 (-i \beta + \omega_0) (-i \sigma + \omega_0) \left(- \left(2 i \sigma (2 \sigma^2 + \sigma (2 + 5 i \omega_0) + (2 i - 3 \omega_0) \omega_0) \right) / \right. \right. \\ \left. \left. \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \left(- \frac{2 \sigma \omega_0}{\beta - \beta \rho c} + \frac{(-i (1 + \sigma) + \omega_0) \left((-1 + \rho c) \sigma + \omega_0^2\right)}{\beta (-1 + \rho c)^2} \right) \right) \right) / \\ \left. \left(\sigma (i + i \sigma + \omega_0) \left(2 (1 + \sigma + i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c - i \omega_0) + \omega_0 (-2 i + i \rho c + \omega_0)) \right) \right) \right) \right) / \\ \left. \left(\beta (-1 + \rho c) \left(-2 (1 + \sigma + 2 i \omega_0) \omega_0^2 + \beta (\sigma (-1 + \rho c + i \omega_0) + i (\rho c + 2 i \omega_0) \omega_0) \right) \right) \right) \right) / \\ \left(\omega_0 (-2 i \sigma - 2 i \sigma^2 + \omega_0 + 4 \sigma \omega_0 + 2 i \omega_0^2) + \beta (-\sigma^2 + \sigma (-2 + \rho c - 2 i \omega_0) + \omega_0^2) \right)$$

■ Parte real de G21

$$\text{ReG21} = \text{Simplify}[\text{ComplexExpand}[\text{Re}[G21]]];$$

■ Valor de ω_0

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta \sigma (1 + \sigma)}}{\sqrt{\sigma - \beta - 1}};$$

■ Primeiro coeficiente de Lyapunov (L1)

$$l1 = \frac{1}{2} * \text{Simplify}[\text{ReG21}];$$

Valor de bifurcação

$$\rho_c = \frac{\sigma (3 + \beta + \sigma)}{\sigma - \beta - 1};$$

■ Primeiro coeficiente de Lyapunov (L1)

`l1 = FullSimplify[l1]`

$$\frac{\beta (1 + \beta - \sigma) \sigma^2 \left((1 + \beta)^3 (3 + \beta) + 2 (1 + \beta) (2 + (-7 + \beta) \beta) \sigma - 2 (5 + \beta + 10 \beta^2) \sigma^2 + 2 (-10 + 9 \beta) \sigma^3 - 9 \sigma^4 \right)}{(1 + \beta + \sigma) \left((1 + \beta)^3 + (1 + \beta^2) \sigma - (1 + 3 \beta) \sigma^2 - \sigma^3 \right) \left((1 + \beta)^3 + (1 + (-6 + \beta) \beta) \sigma - (1 + 9 \beta) \sigma^2 - \sigma^3 \right)}$$