

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Configurações de Equilíbrio de Spins num Cilindro
com Defeitos Topológicos

Leandro Aparecido Nogueira de Paula

Itajubá, Agosto de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Configurações de Equilíbrio de Spins num Cilindro
com Defeitos Topológicos

Leandro Aparecido Nogueira de Paula

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Renato Klippert Barcellos

Agosto de 2008
Itajubá - MG

“A verificação de erros no original impresso após todas as revisões é a prova definitiva da existência do demônio”

Goethe.

*Aos meus pais,
João Cardoso de Paula e
Maria Lúcia Nogueira de Paula*

Agradecimentos

- A Deus, por todas as coisas.
- Aos meus pais, João Cardoso e Lúcia, pelo apoio e incentivo incondicionais.
- Aos meus irmãos, Jaqueline, Alex e Gislaine, pelo aprendizado em comum.
- A todos os amigos, pelo apoio em momentos diversos.
- Ao Prof. Renato Klippert, pela excelente orientação.
- Ao Prof. Vitorio De Lorenci, pela importante colaboração neste trabalho.
- Aos Profs. Vladimir Pershin e Winder A. Moura-Melo, pelas críticas e sugestões.
- A todos os professores, que contribuíram para a minha formação.
- À UNIFEI, pela oportunidade.
- À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

Índice

1	Introdução e Motivação	1
1.1	Método de expansão em funções-f	2
1.2	Geometria e configurações de spins	4
2	Equações do Modelo de Heisenberg	6
2.1	Modelo de Heisenberg	6
2.2	A geometria da rede	7
2.3	O espaço interno de spins	9
2.4	Campo magnético externo	9
2.5	As equações do modelo	10
3	Soluções das Equações	12
3.1	Transformação da tangente	12
3.2	Transformação do cosseno	15
3.3	Transformação da tangente em segunda ordem	16
4	Análise das Soluções	18
4.1	Análise de uma solução arctan	18
4.1.1	Restrição de parâmetros	18
4.1.2	Condições de contorno	20
4.2	Análise de uma solução arccos	24
4.2.1	Condições de contorno	25
4.3	Energias associadas às soluções	29
5	Conclusão	33
A	Modelo de Heisenberg e modelo sigma não-linear	34
B	Cilindro com conicidade e deslocamento	37
C	Equações com simetria helicoidal	38
D	Soluções da simple sine-Gordon e triple sine-Gordon	41
D.1	Soluções da simple sine-Gordon (SSG)	41
D.1.1	Transformação do seno	41
D.1.2	Transformação do cosseno	42
D.2	Soluções da triple sine-Gordon (TSG)	44
	Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de como obter um efeito de conicidade e deslocamento longitudinal em um cilindro simples.	8
4.1	Comportamento qualitativo da função $F(m)$, adotando $\alpha = 1, \beta = 1$	20
4.2	Comportamento qualitativo da função $\Omega(m)$ no intervalo $0 < m \leq 1$	21
4.3	Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) e $\Omega(m)$ (curva verde); a intersecção das duas curvas é sempre garantida se a relação (4.4) for satisfeita; foram escolhidos os valores ilustrativos $\alpha = 0.01, \beta = 0.01$	22
4.4	Comportamento qualitativo da função Θ_2 para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 , adotando $\alpha = 0.01, \frac{\beta}{n^2} = 0.01$, no intervalo $-5 \leq z + k\varphi \leq 20$	23
4.5	Mesmo caso da função Θ_2 , no intervalo $10000 \leq z + k\varphi \leq 10020$	24
4.6	Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) de $-\Theta_4$ e $\Omega(m)$ (curva verde) para $c = 1, \rho_o = 0.9, k = 1, n = 1$	26
4.7	Comportamento qualitativo da função $-\Theta_4$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, adotando $\frac{\beta}{n^2} = 1, k = 1$, no intervalo $-5 \leq z + k\varphi \leq 20$	26
4.8	Mesmo caso da função $-\Theta_4$, no intervalo $10000 \leq z + k\varphi \leq 10020$	27
4.9	Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) de $+\Theta_4$ e $\Omega(m)$ (curva verde), adotando $c = 12$ (conicidade), $\rho = 1, k = 1, n = 1$	28
4.10	Níveis de energia associados à solução Θ_2 para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, adotando $\alpha = 0.01, \frac{\beta}{n^2} = 0.01$. A unidade usual para a medida de energia é a própria energia J de acoplamento entre os spins. Aqui fizemos $J = 1$	31
A.1	Representação de uma rede planar de sítios de átomos ou partículas com spin, com destaque para o i -ésimo sítio.	34
D.1	Valores explícitos de p, q e r de funções que satisfazem a equação elíptica.	47

Resumo

O contexto do trabalho é o domínio da teoria de campos em variedades, no qual se estuda o limite ao contínuo de configurações de equilíbrio de spins interagentes (com interação descrita pelo modelo sigma não-linear de Heisenberg) numa superfície ideal infinita. Em uma série de trabalhos anteriores, tais configurações de equilíbrio de spins em redes bidimensionais foram discutidas no modelo sigma não-linear aplicado ao caso de um cilindro simples. O presente trabalho visa estender tal estudo para o caso de um cilindro com defeitos topológicos do tipo deslocamento longitudinal e corte angular. Utilizando o método de expansão em funções- f , que emprega as funções elípticas de Jacobi ou suas formas degeneradas, obtemos soluções exatas para as equações diferenciais do modelo. Ao inspecionar essas soluções, notamos que o parâmetro c de corte angular desempenha nelas papel de menor relevância, enquanto que temos mudanças significativas na qualidade das soluções devido à presença do parâmetro k de deslocamento. Em particular, o comportamento das soluções do tipo sóliton, característico de um cilindro sem deslocamento, não ocorre no modelo aqui proposto. Pode-se, assim, estudar como ficam alteradas, relativamente ao problema similar na ausência dos defeitos topológicos do modelo aqui proposto, as propriedades qualitativas das configurações de equilíbrio dos spins.

Abstract

The context of this work is the domain of the field theory on manifolds, in which it is studied the limit to the continuous distribution of interacting spins in equilibrium configurations (with interaction described by Heisenberg's non-linear sigma model) on an infinite ideal surface. In previous works, such equilibrium configurations of spins on 2-dimensional lattice were discussed for the non-linear sigma model applied to the case of a simple cylinder. The present work aims to extend such a study for the case of a cylinder with topological defects such as screw dislocation and angular deficit. By making use of the elliptic-f expansion method, which uses Jacobi elliptic functions or their degenerated forms, we obtain exact solutions to the differential equations of the model. By inspection of these solutions, we note that the parameter c of angular deficit plays in them a role of smaller relevance, while we have significant changes in the quality of the solutions due to the presence of the parameter k of screw dislocation. In particular, the behavior of soliton-like solutions, characteristic of a cylinder without dislocation, does not occur in the model here proposed. We discuss the qualitative relevance of the solutions by comparison with those of the similar problem in the absence of the topological defects proposed, presenting their distinct behavior.

Capítulo 1

Introdução e Motivação

O modelo sigma não-linear de Heisenberg tem ganhado interesse recentemente, pois permite o estudo das configurações de equilíbrio de spins em geometrias não-triviais, tais como cilindros, torus, elipsóides, superfícies com curvatura negativa, etc. Basicamente, o modelo é construído levando em conta somente a interação de spins entre os primeiros vizinhos dos sítios de uma rede de átomos. Ao considerar o limite contínuo da rede (ou o espaçamento entre os sítios tendendo a zero) e ao tomar spins com um número muito grande de auto-valores, obtemos o modelo sigma não-linear da Teoria de Campos. Podemos, assim, estudar as configurações de spins como sendo campos definidos sobre a geometria não-trivial da rede. É claro que esses campos precisam especificar a orientação polar e azimutal do spin no espaço, podendo definir o que denominamos espaço interno de spins, que pode ser estudado apenas topologicamente. Conexões com as áreas fundamentais e aplicações tecnológicas importantes podem ser feitas: como a “semelhança” entre o modelo sigma não-linear em 2D e Yang-Mills em (3+1)D [1]; vórtices “out-of-planes” (cujos caroços parecem com a região mais central de sólitons de spins) são importantes em diversos mecanismos (ainda protótipos) de gravação magnética, lógica magnética (MRAM), sensores magnéticos ultra-precisos, etc...[2, 3]

Neste trabalho, nos limitamos a estudar este modelo de Heisenberg num cilindro com defeitos topológicos do tipo deslocamento longitudinal e corte angular. A escolha deste tipo de geometria é feita porque na literatura temos encontrado o estudo para o caso de cilindros sem estes defeitos. Então, queremos estudar como ficam alteradas, relativamente ao problema similar para o caso de um cilindro simples, as propriedades qualitativas das configurações de equilíbrio de spins. Basicamente, o que tem sido estudado na literatura são a relação entre a geometria e a estabilidade das configurações, e o efeito de frustração geométrica que ocorre quando várias escalas de comprimentos, além da escala geométrica, estão presentes nestas configurações.

Esta dissertação está organizada como segue. Na introdução, fazemos uma breve revisão bibliográfica sobre as geometrias não-triviais e suas influências sobre as configurações de spins, que tivemos a oportunidade de ler nestes últimos meses. Introduzimos também o método de expansão em funções-f, onde estas funções-f são funções elípticas de Jacobi ou suas funções degeneradas, tão importante para a resolução exata de equações diferenciais parciais não-lineares. Também, esta é uma novidade que introduzimos. Pois sistematizamos uma maneira de se trabalhar com as equações de movimentos provenientes do modelo de Heisenberg, as quais são derivadas no Capítulo 2 para o problema aqui proposto. No Capítulo 3, obtemos várias soluções para as equações de movimento utilizando este método. A análise de tais soluções é sistematizada no Capítulo 4. Informações complementares poderão ser encontradas nos apêndices A, B, C e D que seguem até o final do texto. Se o leitor deseja informações adicionais pode consultar as Referências Bibliográficas disponibilizadas nas últimas páginas.

1.1 Método de expansão em funções-f

É de grande interesse encontrar soluções exatas de equações diferenciais não-lineares nos problemas físicos não-lineares. Um número de métodos tem sido propostos, tais como o método do balanço homogêneo [4, 5, 6], o método de expansão em função tangente hiperbólica [7, 8, 9, 10, 11], o método de expansão em função secante hiperbólica [12, 13], o método da função teste [14, 15], o método de transformação não-linear [16, 17] e o método seno-cosseno [18]. Contudo, estes métodos podem somente obter as soluções de onda solitária e ondas de choque e não podem obter as soluções periódicas das equações não-lineares. Embora Porubov *et al.* [19, 20, 21] tenham obtido algumas soluções periódicas exatas para algumas equações diferenciais não-lineares, eles usaram funções elípticas de Weierstrass e envolveram deduções complicadas. Recentemente, o método de expansão em funções elípticas de Jacobi, que é mais geral que o método de expansão em função tangente hiperbólica, tem sido proposto e aplicado para resolver algumas equações não-lineares. As soluções periódicas obtidas por esse método incluem algumas soluções de onda solitária e de onda de choque [22, 23, 24].

No estudo de equações modelando fenômenos ondulatórios, um dos objetos fundamentais de estudo é a solução de onda propagante, ou seja, uma solução de forma constante movendo com uma velocidade fixa [25]. De interesse particular, há três tipos de ondas propagantes: as ondas solitárias, que são ondas propagantes localizadas, assintoticamente nulas a grandes distâncias; as ondas periódicas e as ondas de choque, que passam de um estado assintótico a outro. Muito recentemente, um método unificado, denominado método de expansão em funções-f, tem sido proposto para obter soluções de onda exatas para uma grande variedade de equações diferenciais parciais não-lineares [26]. Por meio desse método, as soluções de onda solitária, de ondas periódicas e de ondas de choque podem, se elas existem, ser obtidas simultaneamente para a equação em questão. Portanto, muitos dos cálculos tediosos e repetitivos podem ser evitados. A idéia básica é a seguinte. Para uma dada equação diferencial parcial não-linear, por exemplo, em duas variáveis independentes: uma variável temporal t e outra variável espacial x ,

$$N(u, u_t, u_x, \dots) = 0 \quad (1.1)$$

nós procuramos soluções de onda da forma

$$u = u(\xi), \quad \xi = kx - \omega t \quad (1.2)$$

Substituindo a Eq. (1.2) na Eq. (1.1), teremos uma equação diferencial não-linear ordinária para $u(\xi)$. Então, expandimos $u(\xi)$ num polinômio em $f(\xi)$

$$u = u(\xi) = \sum_{j=0}^n A_j f^j \quad (1.3)$$

onde A_j são constantes a serem determinadas e n é fixado ao balancear os termos de maior grau da equação, enquanto f satisfaz a equação elíptica de primeira espécie

$$f'' = pf + qf^3, \quad \text{ou} \quad f'^2 = pf^2 + \frac{1}{2}qf^4 + r \quad (1.4)$$

onde o apóstrofo significa derivada com relação a ξ .

Após as Eqs. (1.3) e (1.4) serem substituídas na equação diferencial ordinária, os coeficientes A_j , k , ω , p , q e r podem ser determinados. Se qualquer um deles é não fixado, será notado como arbitrário na solução da Eq. (1.1). A Eq. (1.3) estabelece uma relação de mapeamento algébrico entre a solução da Eq. (1.1) e a solução da Eq. (1.4). Na Eq. (1.3), se nós assumimos $f = \tanh \xi$, temos o método da função-tanh; se $f = \operatorname{sech} \xi$, temos o método da função-sech; se $f = \operatorname{sn} \xi$, $\operatorname{cn} \xi$, $\operatorname{dn} \xi$, $\operatorname{cs} \xi$, etc., temos o método da função elíptica de Jacobi. Escolhemos a Eq. (1.4) porque a onda solitária $f = \operatorname{sech} \xi$, a onda de choque $f = \tanh \xi$ e as ondas periódicas em termos das

funções elípticas de Jacobi $f = \text{sn}\xi, \text{cn}\xi, \text{dn}\xi, \text{cs}\xi$, etc. são todas soluções dela para valores apropriados dos parâmetros p, q e r .

As funções elípticas de Jacobi $\text{sn}\xi = \text{sn}(\xi, m)$, $\text{cn}\xi = \text{cn}(\xi, m)$ e $\text{dn}\xi = \text{dn}(\xi, m)$, onde m ($0 \leq m \leq 1$) é chamado módulo da função elíptica, são periódicas e possuem propriedades de funções triangulares, a saber

$$\begin{aligned} \text{sn}^2\xi + \text{cn}^2\xi &= 1, & \text{dn}^2\xi + m^2\text{sn}^2\xi &= 1, & (\text{sn}\xi)' &= \text{cn}\xi\text{dn}\xi, \\ (\text{cn}\xi)' &= -\text{sn}\xi\text{dn}\xi, & (\text{dn}\xi)' &= -m^2\text{cn}\xi\text{sn}\xi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Quando $m \rightarrow 0$, as funções elípticas de Jacobi degeneram para funções triangulares

$$\text{sn}\xi \rightarrow \sin \xi, \quad \text{cn}\xi \rightarrow \cos \xi, \quad \text{dn}\xi \rightarrow 1. \quad (1.6)$$

E quando $m \rightarrow 1$, as funções elípticas de Jacobi degeneram para funções hiperbólicas

$$\text{sn}\xi \rightarrow \tanh \xi, \quad \text{cn}\xi \rightarrow \text{sech}\xi, \quad \text{dn}\xi \rightarrow \text{sech}\xi. \quad (1.7)$$

Explicações detalhadas sobre as funções elípticas de Jacobi podem ser encontradas nas Refs. [29, 30]. Note que é ainda possível definir mais nove funções elípticas de Jacobi em termos de $\text{sn}\xi$, $\text{cn}\xi$ e $\text{dn}\xi$. Algumas dessas funções seriam

$$\text{cs}\xi = \frac{\text{cn}\xi}{\text{sn}\xi}, \quad \text{sc}\xi = \frac{\text{sn}\xi}{\text{cn}\xi}, \quad \text{dc}\xi = \frac{\text{dn}\xi}{\text{cn}\xi}, \quad \text{ns}\xi = \frac{1}{\text{sn}\xi} \quad \text{etc.} \quad (1.8)$$

Uma fórmula mnemônica seria observar que o nome da nova função é composto pela primeira letra do nome da função no numerador seguida pela primeira letra do nome da função no denominador. Quando a função no numerador é a unidade, então as duas letras que compõem a nova função são obtidas permutando as letras da função no denominador.

O balanceamento é feito notando que o maior grau da expansão em (1.3) é

$$O(u(\xi)) = n \quad (1.9)$$

Note que, devido as propriedades em (1.5), toda vez que derivamos (1.3) o grau da derivada fica aumentado de uma unidade. Assim

$$O\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = n + p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

E de (1.9) e (1.10) segue que

$$O\left(u^q \frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = (q + 1)n + p, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1.11)$$

Portanto, nós podemos selecionar n em (1.3) ao igualar os graus de pelo menos dois termos na equação ordinária de (1.1).

Neste trabalho, nós usaremos este interessante método de expansão em funções-f para obter soluções exatas para as equações diferenciais parciais não-lineares que obtivemos ao tratar o modelo de Heisenberg para spins numa superfície cilíndrica com defeitos topológicos.

Porém, vale ressaltar que um método ainda mais geral que o método de expansão em funções-f tem recebido o nome de método de expansão em funções-f estendido. Recentemente, este método tem sido proposto para obter não somente as soluções em funções elípticas de Jacobi não-degeneradas simples, mas também as soluções em funções elípticas de Jacobi não-degeneradas combinadas. Isto equivale a dizer que duas funções elípticas de Jacobi diferentes são combinadas na mesma solução [31].

1.2 Geometria e configurações de spins

A configuração de spins devido aos aspectos geométricos do sistema tem sido alvo de estudos recentes. O controle dessas configurações estáveis de spin permitem aplicações tecnológicas importantes. Simulações computacionais em sistemas magnéticos ‘*Soft-Hard*’ (ou ‘*magnetização variável - magnetização constante*’) mostram que uma nanopartícula, inserida neste sistema, pode ter a sua posição no espaço controlada por um campo magnético externo. Geometricamente este sistema consiste de três discos magnéticos com magnetização constante (*Hard*) dispostos nos vértices de um triângulo equilátero imaginário. Uma camada fina de um material magnético com magnetização variável (*Soft*) é colocada sobre estes discos ‘*Hard*’. Uma nanopartícula sobre esta camada ‘*Soft*’ possui um mínimo de energia que a confina em algum ponto neste sistema. A variação de um campo magnético externo desloca este ponto de mínima energia, deslocando junto a uma pequena partícula. Em nanotecnologia, isso permite uma maior manipulação de tais objetos [32].

Para um gás de elétrons com spins polarizados sobre um cilindro elástico, imerso em um campo magnético externo e em um campo elétrico axial, a equação de Euler-Lagrange correspondente é a equação Double Sine-Gordon (DSG), podendo ter uma solução exata do tipo sóliton. O sóliton da DSG é estabilizado somente pela curvatura do cilindro deformado elasticamente, sem a necessidade de repulsão da força elétrica. Ele adota um comprimento característico que é menor que o raio do cilindro. Para um cilindro elástico a mistura dessas escalas de comprimento, que denomina-se frustração geométrica, causam uma deformação do cilindro na região do sóliton [33].

Também uma solução solitônica metaestável sobre um plano pode ser estabilizada ao remover um disco de raio ρ_o centrado na origem. É claro que isso torna o plano não-simplesmente conexo, mas introduz um comprimento característico para estabilizar o sóliton. Porém, esta mesma estabilidade também é conseguida para um sóliton sobre um cone, se este cone for truncado a uma distância de ρ_o logo acima do vértice. Há uma conexão entre estas geometrias diferentes, pois o plano não-simplesmente conexo é um caso limite do cone truncado quando o ângulo de abertura do cone tende a $\frac{\pi}{2}$ [34].

Para spins de Heisenberg clássicos no limite contínuo sobre um cilindro elástico em um campo magnético axial são encontradas soluções solitônicas e multisolitônicas (periódicas). As soluções solitônicas adotam um comprimento característico menor que o raio do cilindro. Essa mistura de escalas de comprimento causam frustração geométrica na região central do sóliton. Esta frustração proporciona uma deformação localizada do cilindro elástico, enquanto as soluções multisolitônicas causam uma deformação periódica [35].

A frustração geométrica também pode ocorrer em uma variedade elástica com no mínimo uma curvatura principal não-constante. Esta curvatura principal não-constante induz frustração geométrica na região do sóliton, que proporciona uma deformação da variedade nesta região. Um cilindro elíptico poderia ser uma superfície onde este efeito seria verificado por ter uma de suas curvaturas principais não-constante. Mas também outras fontes desta realização seriam elipsóides, variedades ovaladas, torus elípticos e parabolóides elípticos [36].

Também há estudos em superfícies magnéticas curvas no contexto da matéria condensada ‘*Soft*’. Mais especificamente, são estudados os spins de Heisenberg semi-clássicos sobre geometrias curvas elasticamente deformáveis tais como cilindro circular, cilindro elíptico, torus [37]. O aparecimento de outras escalas de comprimento além das escalas geométricas faz com que ocorra uma ‘mistura’ dessas escalas denominada frustração geométrica. Esta frustração leva a uma deformação da superfície magnética na região do sóliton [38, 39, 40]. Superfícies onde este efeito poderia ser realizado são microtúbulos e vesículas (esferoidais ou toroidais) constituídas de materiais orgânicos magnéticos tais como polímeros magnéticos [41].

Spins de Heisenberg que se encontram na pseudo-esfera (um espaço infinito 2-dimensional com curvatura gaussiana constante e negativa) não podem gerar soluções solitônicas estáveis. Apenas soluções fracionárias podem ser estabilizadas nesta superfície desde que um furo seja

feito. Dirigindo-se também à introdução de vórtices “no plano” no regime XY, interessante-mente, a energia de um único vórtice não diverge quando o sistema tende ao infinito. Isso leva a um potencial não-confinante entre um vórtice e um anti-vórtice a grandes distâncias, de modo que o par possa dissociar-se a uma baixa e arbitrária temperatura [42].

Notamos que, basicamente, o que tem sido estudado na literatura são a estabilidade das configurações de spins e a frustração geométrica em diferentes tipos de geometria.

Capítulo 2

Equações do Modelo de Heisenberg

2.1 Modelo de Heisenberg

O modelo de Heisenberg é empregado para descrever a configuração de spins em uma rede. Alguns conceitos da Mecânica Quântica são usados em sua derivação. O princípio de exclusão de Pauli, principalmente, é usado para se obter aproximadamente a energia de troca J . Ela descreve a energia necessária para que o sistema de spins interagentes passe de um estado singleto para um estado tripleto. O estado singleto corresponde aos spins interagentes paralelos entre si (caso ferromagnético) e o estado tripleto corresponde aos spins antiparalelos (antiferromagnetismo). A energia de troca é dada por

$$J \approx E_S - E_T \quad (2.1)$$

A proposta de Heisenberg foi apresentar a energia de interação entre spins vizinhos de dois sítios como

$$H_o = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (2.2)$$

onde \vec{S}_1 e \vec{S}_2 são os operadores de spin, fornecendo os estados de spin nos sítios 1 e 2, respectivamente. Para uma rede quadrada de sítios no plano, esta energia é dada pela hamiltoniana

$$H_o = -\frac{J}{2} \sum_i \left(\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-1} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+N} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-N} \right) \quad (2.3)$$

onde o fator meio foi inserido porque cada termo na somatória em (2.3) é contado duas vezes; o índice i representa o i -ésimo sítio da rede e os índices $i+1$, $i-1$, $i+N$ e $i-N$ são os primeiros vizinhos do i -ésimo sítio. De uma forma mais compacta escrevemos simplesmente

$$H_o = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (2.4)$$

Se \vec{S} é um operador quântico, então temos o modelo quântico na rede. Por outro lado, se \vec{S} é um vetor, obtemos o modelo clássico na rede.

Como as componentes do vetor de spin \vec{S}_i são (S_i^1, S_i^2, S_i^3) , podemos reescrever (2.4) como

$$H_o = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2 + S_i^3 S_j^3) \quad (2.5)$$

Se a rede possui anisotropia (de eixo ou de plano fácil), então podemos representar esta anisotropia por um fator λ na hamiltoniana e escrever

$$H_o = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2 + (1 + \lambda) S_i^3 S_j^3) \quad (2.6)$$

Considerando o espaçamento a entre os sítios da rede pequeno o suficiente para se fazer o truncamento na segunda ordem da expansão em Taylor de \vec{S}_i no i -ésimo sítio, podemos passar (2.6) para o limite contínuo (*Apêndice A*) - modelo sigma não-linear. Neste caso, a hamiltoniana para uma rede isotrópica $\lambda = 0$ é dada por

$$H_o = \frac{J}{2} \iint_D dx^1 dx^2 \sum_{a=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial S^a}{\partial x^\alpha} \right)^2 \quad (2.7)$$

onde a integração se estende por toda a superfície D da rede no plano $x^1 x^2$.

Esta é a hamiltoniana para $J > 0$, ou seja, o caso ferromagnético. Para o caso antiferromagnético ($J < 0$), o vetor de spin \vec{S} deve ser substituído pelo vetor de Néel $\vec{\eta} = \frac{1}{2}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)$, onde os índices referem-se a subredes distintas.

Podemos ainda generalizar a hamiltoniana (2.7) ao considerar uma rede de spins sobre uma superfície arbitrária S . Esta generalização pode ser feita ao colocar esta hamiltoniana na forma covariante

$$H_o = \frac{J}{2} \iint_S \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \sum_{a,b=1}^3 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 h_{ab} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S^a}{\partial x^\beta} \quad (2.8)$$

onde h_{ab} é a métrica do espaço interno de spins que, no caso isotrópico, é dada por $h_{11} = h_{22} = h_{33} = 1$ e $h_{ab} = 0$ para todo $a \neq b$; $g_{\alpha\beta}$ é a métrica da superfície em questão, e $g^{\alpha\beta}$ é sua inversa; $\sqrt{|g|} dx^1 dx^2$ é o elemento infinitesimal e invariante de superfície; x^1 e x^2 são as coordenadas usadas para se descrever a superfície e $g = \det[g_{\alpha\beta}]$.

2.2 A geometria da rede

A geometria do espaço que estamos estudando, constituída pela rede de sítios onde os spins assumem seus valores, é um cilindro cônico de raio ρ_o com deslocamento. Este espaço é caracterizado pelo elemento de linha escrito em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = (c^2 \rho_o^2 + k^2) d\varphi^2 + 2kd\varphi dz + dz^2 \quad (2.9)$$

onde c e k são os parâmetros correspondentes a um corte angular (conicidade) e um deslocamento longitudinal, respectivamente (*Apêndice B*). O caso para o qual $c = 1$ e $k = 0$ claramente corresponde a um cilindro simples de raio ρ_o . A Figura 2.1 ilustra como obter esta geometria a partir de uma superfície plana. Para obter esta geometria, é necessário fazer um corte na superfície sem defeitos com métrica

$$ds^2 = \rho_o^2 d\theta^2 + dZ^2$$

e, em seguida, efetuar a identificação dos pontos das bordas cortadas

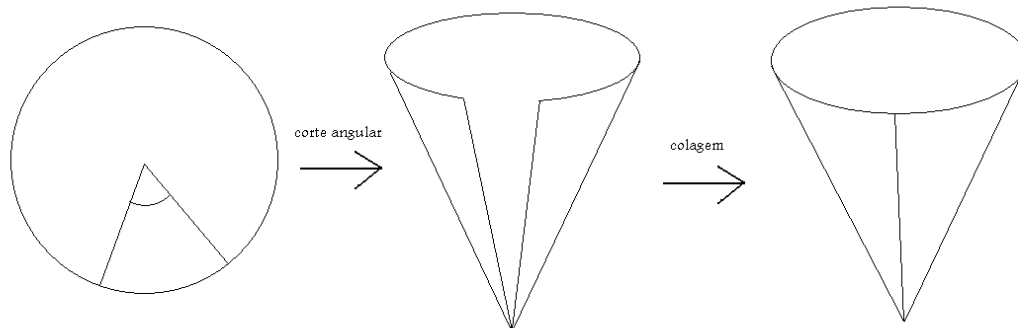
$$(\rho_o, \theta, Z) \leftrightarrow (\rho_o, \theta + 2\pi c, Z + 2\pi k).$$

Ao definir um novo espaço de coordenadas

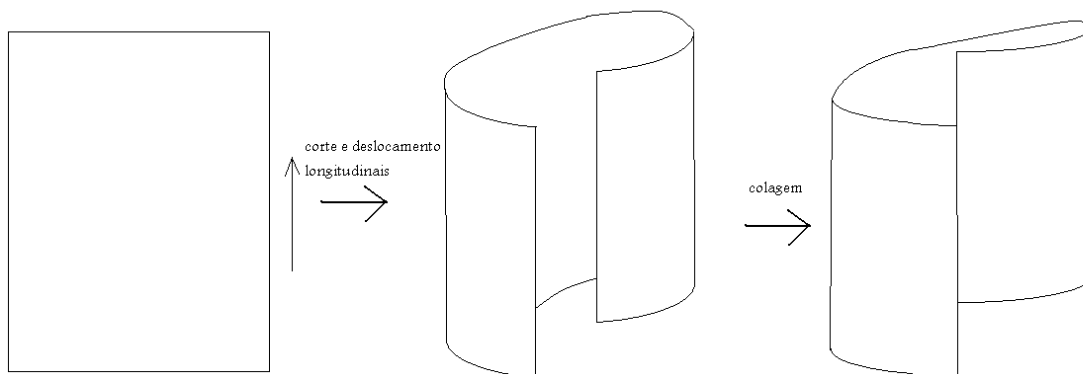
$$\varphi \equiv \theta/c \quad \text{e} \quad z \equiv Z - (k/c)\theta$$

o elemento de linha torna-se idêntico a (2.9) e a identificação usual

$$(\rho_o, \varphi, z) \leftrightarrow (\rho_o, \varphi + 2\pi, z)$$



A conicidade é obtida ao retirar uma fatia da circunferência do cilindro. Em seguida, é feita uma identificação dos pontos das duas bordas resultantes deste corte angular. Podemos pensar como se estivéssemos colando as bordas uma na outra.



O deslocamento longitudinal é conseguido ao fazer um corte longitudinal e, em seguida, efetuar um cisalhamento nas bordas resultantes. Também deve ser feita uma colagem ao identificar os pontos das bordas.

Figura 2.1: Ilustração de como obter um efeito de conicidade e deslocamento longitudinal em um cilindro simples.

precisa ser observada. O corte e a identificação convenientes introduzem defeitos como conicidade e deslocamento num cilindro simples, por exemplo.

Dessa forma podemos explicitar os objetos de (2.8) a partir do elemento de linha (2.9). Na forma matricial teremos

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} (c^2\rho_o^2 + k^2) & k \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2\rho_o^2} & -\frac{k}{c^2\rho_o^2} \\ -\frac{k}{c^2\rho_o^2} & \frac{c^2\rho_o^2 + k^2}{c^2\rho_o^2} \end{pmatrix},$$

$$g = \det[g_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} (c^2\rho_o^2 + k^2) & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = c^2\rho_o^2, \quad \text{e} \quad (x^1, x^2) \equiv (\varphi, z)$$

2.3 O espaço interno de spins

Como o vetor de spin \vec{S} possui módulo constante, podemos colocar este módulo igual a unidade, ou mais especificamente, podemos estabelecer o vínculo $\vec{S}^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = cte$. Sem nenhum prejuízo, vamos fazer esta constante igual a unidade. Assim, podemos escrever $S^2 = 1$. Dessa forma, o espaço interno é uma esfera de raio unitário. Podemos localizar qualquer ponto dessa esfera usando as coordenadas esféricas. Por isso, essas coordenadas podem parametrizar o vetor de spin na forma

$$\vec{S} \equiv (S^1, S^2, S^3) \equiv (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

onde, obviamente, teremos $\Theta \equiv \Theta(\varphi, z)$ e $\Phi \equiv \Phi(\varphi, z)$. Essas parametrizações são suficientes para especificar o vetor de spin \vec{S} , dado em coordenadas polares (Θ, Φ) , em cada ponto da rede de spins, dado em coordenadas cilíndricas (φ, z) .

2.4 Campo magnético externo

Além da hamiltoniana de auto-interação (2.8), que é responsável por descrever a energia total de interação entre spins vizinhos, vamos introduzir um outro termo. Se introduzimos um campo magnético externo \vec{B} homogêneo na direção do eixo do cilindro, então podemos definir a energia de interação deste campo com um vetor de spin \vec{S} por

$$h_B = -\frac{g\mu}{2} \vec{B} \cdot \vec{S}$$

onde g é o fator g dos elétrons no material magnético e μ é o momento magnético de spin no material magnético. Desta equação, vemos que a energia de interação é máxima quando o vetor de spin está orientado paralelamente no sentido contrário ao campo \vec{B} . A energia máxima será, neste caso, $h_B = g\mu B$. Se o vetor de spin estiver orientado paralelamente no mesmo sentido do campo magnético, então a energia será mínima e dada por $h_B = -g\mu B$. Dessa forma, a energia de interação está compreendida entre estes dois valores, ou seja, $-g\mu B \leq h_B \leq g\mu B$. A energia total de interação com o campo de spins precisa ser a soma das energias individuais h_B com cada vetor de spin. Como estamos considerando que a rede é um contínuo de spins sobre uma superfície arbitrária S , então esta energia total deve ser dada por uma integração sobre esta superfície na forma

$$H_B = -\frac{g\mu}{2} \iint_S \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \vec{B} \cdot \vec{S} = -\frac{g\mu B}{2} \iint_S \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \cos \Theta \quad (2.10)$$

onde a direção de \vec{B} determina o eixo interno número 3 (eixo polar).

2.5 As equações do modelo

A energia total do sistema é dada pela energia de auto-interação entre os vetores de spin H_o (2.8) adicionada à energia de interação entre o campo magnético externo e os vetores de spin H_B (2.10). Assim, a energia total $H = H_o + H_B$ pode ser escrita na forma

$$H = 2J \iint_S \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 \left[\frac{1}{4} \sum_{a,b=1}^3 \sum_{\alpha,\beta=1}^2 h_{ab} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S^a(\Theta, \Phi)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S^b(\Theta, \Phi)}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2\rho_B^2} \cos \Theta \right] \quad (2.11)$$

onde fizemos $\rho_B^2 = \frac{2J}{g\mu_B}$. Desenvolvendo os cálculos, para uma interação isotrópica $h_{ab} = \text{diag}(1, 1, 1)$, sobre a superfície cilíndrica (2.9) com conicidade e deslocamento, a hamiltoniana pode ser expressa em termos dos parâmetros Θ e Φ do espaço interno como

$$H = -2Jc\rho_o \iint_S d\varphi dz \left\{ -\frac{1}{4c^2\rho_o^2} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 + c^2 \rho_o^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. -\frac{\sin^2 \Theta}{4c^2\rho_o^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + c^2 \rho_o^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2\rho_B^2} \cos \Theta \right\} \quad (2.12)$$

Podemos determinar as equações do modelo a partir da hamiltoniana (2.12). Para isso, usamos o conhecido princípio da mínima ação para obter as equações de movimento (2.13) para os campos Θ e Φ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \Phi^A} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \Phi^A}{\partial x^\alpha} \right)} = 0, \quad A = 1, 2 \quad \text{e} \quad \Phi^A \equiv (\Phi^1, \Phi^2) = (\Theta, \Phi) \quad (2.13)$$

onde Λ é a densidade hamiltoniana de H sobre a superfície cilíndrica. Como $H = H_o + H_B$, então (2.13) também pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \Lambda_o}{\partial \Phi^A} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda_o}{\partial \left(\frac{\partial \Phi^A}{\partial x^\alpha} \right)} + \frac{\partial \Lambda_B}{\partial \Phi^A} = 0, \quad (2.14)$$

uma vez que H_B não depende das derivadas dos campos de spin (em relação a x^1 e x^2 , que são as coordenadas da superfície da rede). Dessa forma, teremos duas equações de movimento:

$$\frac{1}{4c^2\rho_o^2} \left\{ -\sin 2\Theta \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + c^2 \rho_o^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} - k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi \partial z} \right) - 2k \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi \partial z} - k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + 2c^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{2\rho_B^2} \sin \Theta = 0 \quad (2.15)$$

$$\sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \sin^2 \Theta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} \right) + \\ - \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} \left[k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - c^2 \rho_o^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] - \sin^2 \Theta \left[k \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial z} - k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - c^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (2.16)$$

Como pode ser visto, é complicado determinar as soluções exatas destas duas equações. Pois, são longas equações diferenciais parciais não-lineares acopladas e, em geral, são de difícil solução. Devemos procurar por soluções particulares. Uma possibilidade seria buscar por soluções com

simetria helicoidal nos campos Θ e Φ (*Apêndice C*). Porém, busquemos soluções para o campo Θ tais que uma solução para o campo Φ possua simetria cilíndrica na forma

$$\Phi(\varphi, z) = n\varphi + \varphi_o \quad (2.17)$$

onde n e φ_o (n e $\varphi \in \mathbb{R}$) são constantes. Deve ser notado que o significado deste parâmetro n é diferente daquele da equação (1.3). Em (2.17), este parâmetro está associado ao número de vezes que o campo Φ percorre o intervalo $[0, 2\pi]$ enquanto é realizada uma volta completa ao redor do cilindro. Em (1.3), ele apenas fixa o grau máximo da expansão. O motivo desta escolha de solução para o campo Φ é porque conseguimos reduzir as equações (2.15) e (2.16) em uma equação conhecida como equação Double Sine-Gordon (DSG). Se substituirmos o ansatz (2.17) nas equações (2.15) e (2.16) obteremos, respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4c^2\rho_o^2} \left\{ -n^2 \sin 2\Theta + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} - k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi \partial z} \right) - 2k \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi \partial z} - k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + 2c^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right\} - \frac{1}{2\rho_B^2} \sin \Theta = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$n \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - kn \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

Para $n \neq 0$, a equação (2.19) toma a forma

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - k \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

que é uma equação helicoidal. Introduzindo (2.20) na equação (2.18) e assumindo $k \neq 0$, obtemos a Double Sine-Gordon (DSG)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \alpha \sin \Theta + \beta \sin 2\Theta \quad (2.21)$$

onde fizemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho_B^2} \\ \beta &= \frac{n^2}{2c^2\rho_o^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Embora soluções exatas da equação DSG sejam conhecidas na literatura, não encontramos soluções que se adaptam ao modelo proposto e às nossas condições de contorno [27, 28, 35]. No próximo capítulo, usaremos o método de expansão em funções-f para determinar mais soluções exatas para a equação (2.21).

Capítulo 3

Soluções das Equações

Muitos métodos tem sido propostos para a resolução de equações diferenciais não-lineares. Alguns deles, tais como, o método da tangente hiperbólica, o método do \sinh , do \cosh , e outros produzem apenas soluções solitônicas simples. Métodos mais gerais foram desenvolvidos como, por exemplo, o método de expansão em funções elípticas de Jacobi e o método de expansão em funções-f. Estes métodos além de produzir sólitons simples também geram multisólitons. Recentemente, tem se resolvido algumas equações não-lineares com o método de expansão em funções-f estendido, que é uma generalização de muitos métodos anteriores.

Contudo, apenas o método de expansão em funções-f bastará para resolver nossa equação de movimento (2.21) e gerar soluções interessantes para a análise. Mais especificamente, determinaremos multisólitons (soluções periódicas) para a equação double sine-Gordon. Uma vez que a DSG não se apresenta na forma (1.1) para a aplicação do método, devemos realizar algumas transformações para que ela tome a forma adequada. Duas transformações possíveis na DSG para a aplicação do método são a transformação da tangente e a transformação do cosseno.

3.1 Transformação da tangente

Nossa DSG tem a forma

$$\Theta_{zz} = \alpha \sin \Theta + \beta \sin 2\Theta \quad (3.1)$$

Façamos a transformação

$$u = \tan \frac{\Theta}{2} \quad (3.2)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \sin 2\Theta &= \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \\ \Theta_{zz} &= \frac{2(1+u^2)u_{zz} - 4uu_z^2}{(1+u^2)^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo as equações (3.3) na equação (3.1), teremos

$$(1+u^2)u_{zz} - 2uu_z^2 - au - bu^3 = 0 \quad (3.4)$$

onde fizemos $a = \alpha + 2\beta$ e $b = \alpha - 2\beta$. Agora, temos a forma (1.1) adequada para a aplicação do método.

Façamos uma outra transformação $\xi = s(z + k\varphi)$, onde s é um parâmetro a ser determinado. Na verdade, inicialmente propomos a transformação (1.2), para o sistema de ondas propagantes, para que obtivéssemos uma equação ordinária. Porém, o nosso problema em curso é estático (independente do tempo). Por isso, fizemos uma adaptação para o nosso caso a fim de obtermos também uma equação ordinária. Essa transformação é justificável pela equação helicoidal $\Theta_\varphi = k\Theta_z$, que foi obtida no problema juntamente com a DSG. O ângulo polar de spin Θ , além de satisfazer a DSG, deve também satisfazer essa equação helicoidal: $\Theta(\varphi, z) = 2 \arctan u(\xi(\varphi, z))$

Assim, a equação (3.4) toma a forma

$$s^2(1 + u^2)u'' - 2s^2u(u')^2 - au - bu^3 = 0 \quad (3.5)$$

onde o apóstrofo significa derivada com relação ξ . Dessa equação, notamos que os dois termos com graus maiores possuem graus

$$O(u^2u'') = 3n + 2 \quad \text{e} \quad O(u(u')^2) = 3n + 2 \quad (3.6)$$

Ao balancear estes dois termos, igualando-os, notamos que n resulta arbitrário e podemos, assim, fazer $n = 1$ na expansão

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j f^j(\xi) \quad (3.7)$$

onde a função- f deve satisfazer a equação elíptica

$$(f')^2 = pf^2 + \frac{q}{2}f^4 + r \quad \text{ou} \quad f'' = pf + qf^3 \quad (3.8)$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 f \\ (u')^2 &= a_1^2 p f^2 + \frac{a_1^2 q}{2} f^4 + a_1^2 r \\ u'' &= a_1 p f + a_1 q f^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.9) na equação (3.5), reagrupando os termos de mesmo grau em potências de f e igualando estes termos a zero, obtemos o seguinte sistema de equações algébricas não-lineares

$$\begin{aligned} a_0[-2s^2 a_1^2 r - a - b a_0^2] &= 0 \\ a_1[ps^2(1 + a_0^2) - 2s^2 a_1^2 r - a - 3b a_0^2] &= 0 \\ -3b a_0 a_1^2 &= 0 \\ a_1[-ps^2 a_1^2 + qs^2(1 + a_0^2) - b a_1^2] &= 0 \\ qs^2 a_0 a_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como este sistema é não-linear, não temos o conhecimento prévio do número de soluções possíveis. Exploraremos alguns casos mais evidentes.

Da terceira das equações (3.10), precisamos fazer $a_1 = 0$ ($a_0 \neq 0$) ou $a_0 = 0$ ($a_1 \neq 0$) para um domínio mais geral dos parâmetros α e β ($b \neq 0$).

Caso 1: $a_1 = 0$ ($a_0 \neq 0$)

Neste caso, apenas o lado esquerdo da primeira equação não se anula identicamente. Para que isso aconteça, precisamos fazer

$$a_{0\pm} = \pm \sqrt{\frac{2\beta + \alpha}{2\beta - \alpha}}$$

Assim, obteremos as soluções constantes triviais

$$\Theta_{1\pm}(\varphi, z) = 2 \arctan \left[\pm \sqrt{\frac{2\beta + \alpha}{2\beta - \alpha}} \right] \quad (3.11)$$

Caso 2: $a_0 = 0$ ($a_1 \neq 0$)

Neste caso, as únicas equações cujos lados esquerdos não se anulam são a segunda e a quarta equação. Elas se reduzem a

$$\begin{aligned} ps^2 - 2s^2ra_1^2 - a &= 0 \\ qs^2 - ps^2a_1^2 - ba_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Podemos resolver este sistema (3.12) de duas maneiras distintas:

Caso 2.a: ($r \neq 0$)

Isolando a_1 na primeira equação em (3.12) obtemos

$$a_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{ps^2 - (\alpha + 2\beta)}{2rs^2}}$$

Substituindo este resultado na segunda equação, e isolando s obtemos

$$\pm s^\pm = \pm \sqrt{\frac{-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha^2 - 4\beta^2)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}} \quad (3.13)$$

Portanto, soluções exatas não triviais são obtidas

$$\begin{aligned} \pm \Theta_{2\pm}^\pm(\varphi, z) = & \quad (3.14) \\ & 2 \arctan \left\{ \pm \sqrt{\frac{\frac{p}{2r} - \frac{(\alpha + 2\beta)(2qr - p^2)}{2r(-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha^2 - 4\beta^2)(2qr - p^2)}}}{\left[\pm \sqrt{\frac{-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha^2 - 4\beta^2)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}}(z + k\varphi) \right]}} \right\} \end{aligned}$$

onde convencionamos que os sinais \pm subscritos esquerdos em $\pm \Theta_{2\pm}^\pm(\varphi, z)$ correspondem aos sinais \pm adjacentes às raízes internas do lado direito da igualdade. Os demais sinais são de livre convenção.

Caso 2.b: ($r = 0$)

Isolando s na primeira equação em (3.12) vem

$$s^\pm = \pm \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{p}}$$

Substituindo este resultado na segunda equação, temos

$$a_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{q(\alpha + 2\beta)}{2p\alpha}}$$

Assim, obtemos novas soluções na forma

$$\Theta_{3\pm}^{\pm}(\varphi, z) = 2 \arctan \left\{ \pm \sqrt{\frac{q(\alpha + 2\beta)}{2p\alpha}} f \left[\pm \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{p}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (3.15)$$

onde os sinais \pm em $\Theta_{3\pm}^{\pm}(\varphi, z)$ são de livre convenção.

3.2 Transformação do cosseno

Façamos agora uma outra transformação

$$u = \cos \Theta \quad (3.16)$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \pm \sqrt{1 - u^2} \\ \sin 2\Theta &= \pm 2u \sqrt{1 - u^2} \\ \Theta_{zz} &= \pm \left\{ - \left[\frac{(1 - u^2)u_{zz} + uu_z^2}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.17) na equação (3.1) obtemos

$$(1 - u^2)u_{zz} + uu_z^2 + \alpha(1 - u^2)^2 + 2\beta u(1 - u^2)^2 = 0 \quad (3.18)$$

Ao fazer o balanceamento notamos que a única possibilidade é fazer $n = 1$. Fazendo a transformação $\xi = s(z + k\varphi)$ na equação (3.18), substituindo as equações (3.9) na equação resultante, reagrupando os termos de mesmo grau e igualando a zero os coeficientes reagrupados no mesmo grau da função-f, obtemos um sistema de equações algébricas não-lineares na forma

$$\begin{aligned} a_0 s^2 a_1^2 r + (\alpha + 2\beta a_0)(1 - a_0^2)^2 &= 0 \\ s^2 p(1 - a_0^2) + s^2 a_1^2 r - 4\alpha a_0(1 - a_0^2) - 8a_0^2 \beta(1 - a_0^2) + 2\beta(1 - a_0^2)^2 &= 0 \\ -a_0 s^2 p - 2\alpha(1 - a_0^2) + 4\alpha a_0^2 + 8a_0^3 \beta - 12a_0 \beta(1 - a_0^2) &= 0 \\ s^2 q(1 - a_0^2) + 4\alpha a_0 a_1^2 + 16a_0^2 a_1^2 \beta - 4a_1^2 \beta(1 - a_0^2) &= 0 \\ -3a_0 s^2 q + 2\alpha a_1^2 + 20a_0 a_1^2 \beta &= 0 \\ -s^2 q + 4a_1^2 \beta &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

com as seguintes possibilidades de soluções

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\alpha}{4\beta} \\ a_{1\pm} &= \pm \sqrt{-\frac{q}{p} \left(\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{16\beta^2} \right)} \\ s^{\pm} &= \pm \sqrt{-\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{4\beta p}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

com p , q e r vinculados pela equação

$$\frac{2qr}{p^2} = \left(\frac{16\beta^2 - \alpha^2}{16\beta^2 + \alpha^2} \right)^2 \quad (3.21)$$

Dessa forma, teremos soluções para a equação (3.1) na forma

$$\Theta_{4\pm}^{\pm}(\varphi, z) = \arccos \left\{ -\frac{\alpha}{4\beta} \pm \sqrt{-\frac{q}{p} \left(\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{16\beta^2} \right) f \left[\pm \sqrt{-\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{4\beta p}} (z + k\varphi) \right]} \right\} \quad (3.22)$$

onde convencionamos que os sinais \pm subscritos em $\Theta_{4\pm}^{\pm}(\varphi, z)$ correspondem aos sinais \pm do argumento da função-f. Note que, a partir da equação (3.18), podemos obter, ainda, algumas soluções triviais constantes $a_1 = 0$ ($a_0 \neq 0$). Pois, neste caso, a equação se torna

$$\alpha(1 - a_0^2)^2 + 2\beta a_0(1 - a_0^2)^2 = 0$$

com soluções $a_{0\pm} = \pm 1$ e $a_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}$. Assim, obteremos mais soluções triviais da equação (3.1)

$$\begin{aligned} \Theta_5^{\pm l}(\varphi, z) &= \pm l\pi \\ \Theta_6(\varphi, z) &= \arccos \left(-\frac{\alpha}{2\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

3.3 Transformação da tangente em segunda ordem

Por outro lado, também podemos obter mais soluções para a equação (3.5) ao fazer $n = 2$ na expansão (3.7). Isso é permitido, pois ao fazer o balanceamento da equação (3.5) notamos que n é arbitrário. Vale lembrar que esta equação foi obtida com a transformação (3.2). Assim, teremos

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 f + a_2 f^2 \\ (u')^2 &= a_1^2 r + 4a_1 a_2 r f + (a_1^2 p + 4a_2^2 r) f^2 + 4a_1 a_2 p f^3 + \\ &\quad \left(a_1^2 \frac{q}{2} + 4a_2^2 p \right) f^4 + 2a_1 a_2 q f^5 + 2a_2^2 q f^6 \\ u'' &= 2a_2 r + a_1 p f + 4a_2 p f^2 + a_1 q f^3 + 3a_2 q f^4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo as equações (3.24) na equação (3.5), obtemos um sistema de nove equações. Fazendo de antemão $q = 0$ e $a_1 = 0$, simplificamos este sistema para um subsistema de quatro equações na forma

$$\begin{aligned} 2s^2 a_2 r (1 + a_0^2) - (\alpha + 2\beta) a_0 - (\alpha - 2\beta) a_0^3 &= 0 \\ 4s^2 p (1 + a_0^2) - 4a_0 s^2 a_2 r - (\alpha + 2\beta) - 3(\alpha - 2\beta) a_0^2 &= 0 \\ 6s^2 a_2 r + 3(\alpha - 2\beta) a_0 &= 0 \\ 4s^2 p + (\alpha - 2\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

com as seguintes possibilidades de solução

$$\begin{aligned}
a_{0\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta - \alpha}} \\
a_{2\pm} &= \frac{2p}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta - \alpha}} \\
s_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{2\beta - \alpha}{4p}}
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos mais soluções não-trivias para a DSG

$${}_{\pm}\Theta_{7\pm}^{\pm} = 2 \arctan \left\{ \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta - \alpha}} \pm \frac{2p}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta - \alpha}} f^2 \left[\pm \sqrt{\frac{2\beta - \alpha}{4p}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (3.26)$$

onde os sinais \pm são de livre convenção.

Além das soluções da DSG, também investigamos as soluções da Simple Sine-Gordon (SSG) e da Triple Sine-Gordon (TSG) (*Apêndice D*). O conjunto das soluções destas três equações SSG, DSG e TSG, obtido com o método de expansão em funções-f, seria uma generalização dos trabalhos indicados [27, 28], pois inclui soluções que não temos encontrado na literatura. Um conjunto maior de soluções poderia ainda ser obtido. Pois o método de expansão em funções-f estendido poderia ser aplicado para tentar encontrar mais soluções exatas destas três importantes equações.

Capítulo 4

Análise das Soluções

O método de expansão em funções- f produz, em uma única vez, um número muito grande de soluções. Basta que a função f satisfaça a equação elíptica (1.4) para termos uma solução explícita. No *Apêndice D* são mostradas em uma tabela algumas funções com seus correspondentes valores de p , q e r explicitados. Por esse motivo, faremos agora a análise de duas soluções, apenas.

4.1 Análise de uma solução \arctan

Das soluções (3.14) escolhamos a solução $-\Theta_{2+}^+(\varphi, z)$. Devemos escolher, também, uma função f na tabela do *Apêndice D*. Tomemos $f = \text{cs} = \text{cn}/\text{sn}$ e seus valores $p = 2 - m^2$, $q = 2$ e $r = 1 - m^2$. Então, a solução pode ser escrita na forma

$$\Theta_2(\varphi, z) = \tag{4.1} 2 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{\frac{2 - m^2}{2(1 - m^2)} - \frac{(\alpha + 2\beta)m^4}{2(1 - m^2) \left(2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4} \right)}}}{\text{cs} \left[\sqrt{\frac{2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4}}{m^4}} (z + k\varphi) \right]} \right\}$$

Para que esta seja uma solução física, é necessário que $\Theta_2(\varphi, z)$ seja sempre real. Devemos analisar para que valores de α e β as expressões no interior das raízes são maiores ou iguais a zero. Em seguida, devemos aplicar as condições de contorno exigidas pelo problema físico.

4.1.1 Restrição de parâmetros

Para que o argumento da função cs seja real, é suficiente que

$$4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)(m^4) \geq 0$$

Rearranjando os termos, teremos

$$16\beta^2(1 - m^2) + \alpha^2 m^4 \geq 0$$

Como $0 < m \leq 1$, esta condição é satisfeita para todo α e β . Portanto, o argumento da função cs é um número real, qualquer que seja o valor destes parâmetros. Para que a raiz que multiplica a função cs seja um número real, é necessário que o radicando seja maior ou igual a zero. Rearranjando os termos, essa condição pode ser expressa na forma

$$\frac{(2 - m^2)}{(\alpha + 2\beta)} \left\{ \frac{2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)(m^4)}}{m^4} \right\} \geq 1$$

Para analisar com quais valores de α e β esta condição é satisfeita, definimos uma função $F(m)$ a partir do primeiro membro da desigualdade anterior:

$$F(m) = \frac{(2 - m^2)}{(\alpha + 2\beta)} \left\{ \frac{2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)(m^4)}}{m^4} \right\} \quad (4.2)$$

Devemos analisar a função $F(m)$ versus o parâmetro m no intervalo $0 < m \leq 1$. Para tanto, observa-se que $F(m)$ é contínua nesse intervalo.

I- Pontos de fronteira: Claramente, vemos que

$$\lim_{m \rightarrow 0} F(m) = \infty$$

E também, calculando o valor de $F(m)$ em $m = 1$, temos que

$$F(1) = 1$$

II- Pontos extremos: Para calcular estes pontos, é necessário derivar a expressão para $F(m)$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} F'(m) = & \quad (4.3) \\ & - \left\{ \frac{2m}{\alpha + 2\beta} \left[\frac{2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4}}{m^4} \right] + \right. \\ & \frac{2 - m^2}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{4\beta m + \frac{1}{2} [4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4]^{-\frac{1}{2}} [16\beta^2 m^5(2 - m^2) - 4(\alpha^2 - 4\beta^2)m^7]}{m^8} \right. \\ & \left. \left. + 4m^3 \left[\frac{2\beta(2 - m^2) + \sqrt{4\beta^2(2 - m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4}}{m^8} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

Se essa derivada não se anula para nenhum m no intervalo $0 < m \leq 1$, então ela deverá ser sempre negativa neste intervalo. Neste caso, temos que $F(m) \geq 1$ para todo m neste intervalo é exigir que $F(m)$ seja limitada inferiormente pelo seu valor $F(1) = 1$ em $m = 1$ (ponto de mínimo).

Pela forma de $F'(m)$ em (4.3), vemos que todos os fatores são claramente não-negativos (a menos do sinal negativo global), exceto o fator $[16\beta^2 m^5(2 - m^2) - 4(\alpha^2 - 4\beta^2)m^7]$. Porém, para que este fator seja sempre não-negativo, basta estabelecermos a condição

$$\alpha \leq 2\beta \quad (4.4)$$

E teremos, com essa condição, que todos os fatores serão não-negativos. Dessa forma, a derivada $F'(m)$ será sempre negativa. Pois, pontos de fronteira da função $F(m)$ são $F(m)_{m \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ e $F(1) = 1$. Graficamente, podemos representar a função $F(m)$ pela figura 4.1.

Dessa análise, fica claro que (4.4) é condição suficiente para que a solução (4.1) seja uma solução física real.

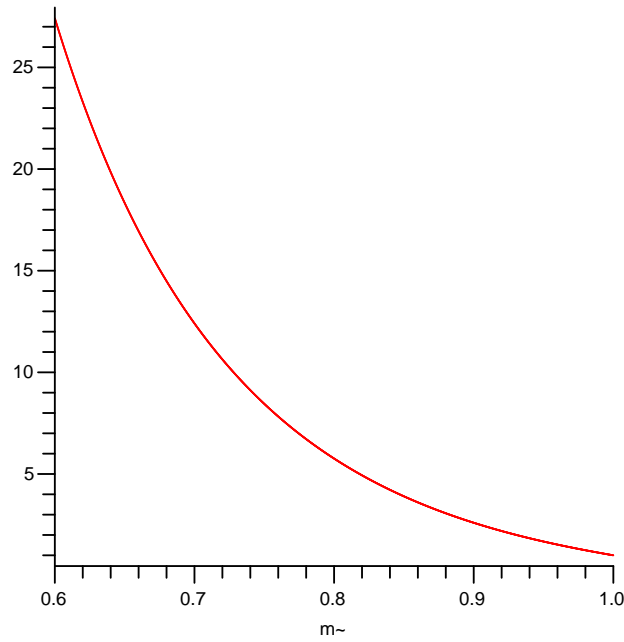


Figura 4.1: Comportamento qualitativo da função $F(m)$, adotando $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

4.1.2 Condições de contorno

Agora, devemos aplicar as condições de contorno em (4.1). Elas também devem ser aplicadas à solução para o campo $\Phi(\varphi, z)$ em (2.17). Sejam estas condições dadas por

$$\begin{aligned}\Theta(\varphi, z) &\equiv \Theta(\varphi + 2\pi, z) \\ \Phi(\varphi, z) &\equiv \Phi(\varphi + 2\pi, z)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Esta exigência é obrigatória, uma vez que a geometria da rede de spins é um cilindro com aqueles defeitos. A partir de um ponto qualquer da rede, após um número inteiro de voltas completas em torno do eixo do cilindro, os valores Θ e Φ do vetor de spin precisam coincidir com seus valores iniciais. Caso contrário, teríamos dois vetores de spin com valores diferentes em um mesmo ponto, que é inadmissível.

Para o campo Θ_2 de (4.1), a condição (4.5) é o mesmo que exigir da função cs que

$$cs[s(z + k\varphi)] = cs[s(z + k\varphi) + 2\pi ks]$$

onde fizemos $s = \sqrt{\frac{2\beta(2-m^2) + \sqrt{4\beta^2(2-m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)(m^4)}}{m^4}}$. Isto impõe que a função cs tenha periodicidade T dada por

$$T = 2\pi ks\tag{4.6}$$

Como a função cs é dada por $cs = cn/sn$ e $cn^2 = 1 - sn^2$, então a função cs também se repete com a mesma periodicidade da função sn . A periodicidade desta última é dada por

$$\Omega(m) = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}\tag{4.7}$$

A periodicidade $\Omega(m)$ é uma função do parâmetro contínuo m ($0 \leq m \leq 1$).

Para $m = 0$, sabemos que as funções elípticas degeneram para as funções circulares. Devemos esperar que $\Omega(0) = 2\pi$. Para $m = 1$, temos a degenerescência para as funções hiperbólicas. Assim, devemos ter $\Omega(1) \rightarrow \infty$. Vejamos

I- $m = 0$:

$$\Omega(0) = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 4 \arcsin t \Big|_0^1 = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi$$

II- $m = 1$:

$$\Omega(1) = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = 2 \ln \left[\frac{1+t}{1-t} \right] \Big|_0^1 \rightarrow \infty$$

III- Vejamos se há pontos extremos de $\Omega(m)$ no intervalo $0 < m < 1$:

$$\frac{d\Omega}{dm} = 4 \int_0^1 \frac{mt^2 dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como o integrando é uma função não-negativa no intervalo $(0 \leq t < 1)$, temos que

$$\frac{d\Omega}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{mt^2}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2t^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Portanto $m = 0$ é um ponto de mínimo. Como $\frac{d\Omega}{dm} \geq 0$ e $\Omega(1) \rightarrow \infty$, graficamente teremos a curva de $\Omega(m)$ explicitada na figura (4.2).

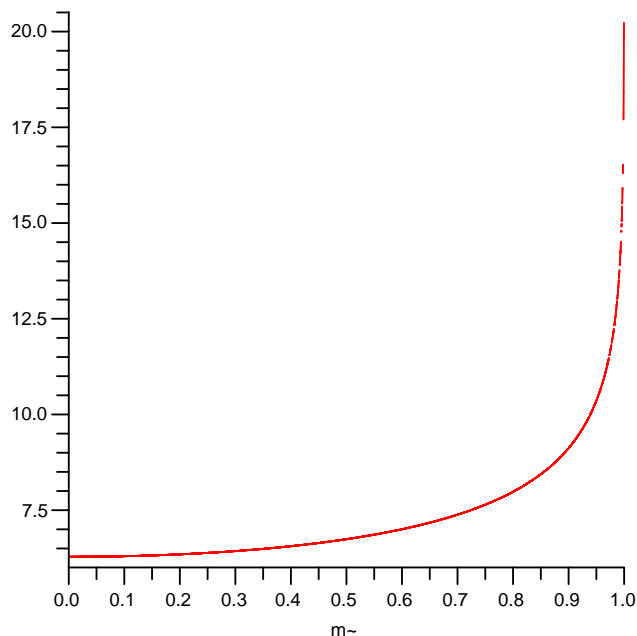


Figura 4.2: Comportamento qualitativo da função $\Omega(m)$ no intervalo $0 < m \leq 1$.

Por outro lado, também podemos expressar a relação (4.6) como uma função de m . Explícitando s nesta expressão teremos

$$T(m) = 2\pi k \left\{ \sqrt{\frac{2\beta(2-m^2) + \sqrt{4\beta^2(2-m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)(m^4)}}{m^4}} \right\} \quad (4.8)$$

Vejam os como é o comportamento dessa função.

I- Pontos de fronteira:

Para $m = 0$, claramente $T \rightarrow \infty$.

Para $m = 1$, $T(1) = 2\pi k \sqrt{\alpha + 2\beta}$.

II- Pontos extremos:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dm} = & \quad (4.9) \\ & 2\pi k \left\{ \frac{4\beta m + \frac{1}{2} [4\beta^2(2-m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4]^{-\frac{1}{2}} [16\beta^2 m^5(2-m^2) - 4(\alpha^2 - 4\beta^2)m^7]}{m^8} \right. \\ & \left. + 4m^3 \left[\frac{2\beta(2-m^2) + \sqrt{4\beta^2(2-m^2)^2 + (\alpha^2 - 4\beta^2)m^4}}{m^8} \right] \right\} \end{aligned}$$

Devido à condição (4.4), esta derivada será sempre não-negativa, $\frac{dT}{dm} \geq 0$. O gráfico das funções $\Omega(m)$ e $T(m)$ são mostrados na figura (4.3).

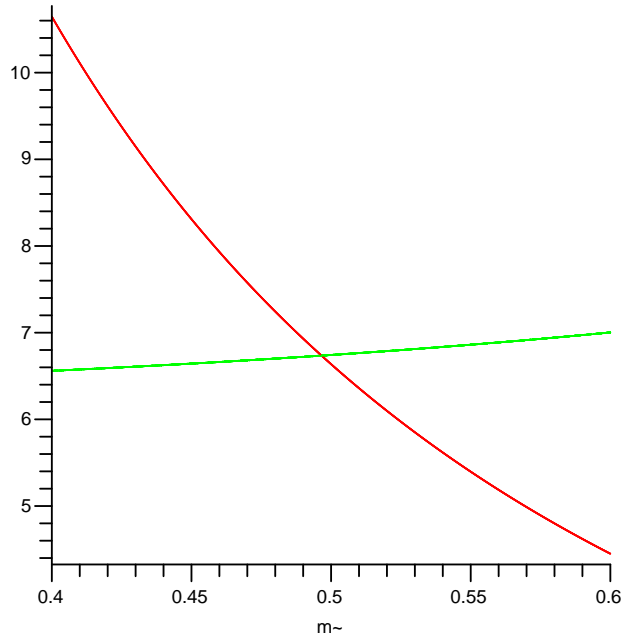


Figura 4.3: Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) e $\Omega(m)$ (curva verde); a intersecção das duas curvas é sempre garantida se a relação (4.4) for satisfeita; foram escolhidos os valores ilustrativos $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.01$.

Como vimos, a condição de contorno para Θ_2 em (4.5), equivale a exigir que esta função tenha periodicidade $T(m)$. Por outro lado, vimos também que a periodicidade de Θ_2 é igual a $\Omega(m)$. Dessa forma, igualando (4.7) a (4.8), o parâmetro m pode ser determinado pela intersecção dessas duas curvas. A existência dessa intersecção é garantida se $\alpha \leq 2\beta$ e sua determinação equivale a satisfazer a condição de contorno para Θ_2 .

Em síntese, a solução Θ_2 em (4.1) é uma solução física se $\alpha \leq 2\beta$. Ao requerer a condição de contorno (4.5), fixamos o parâmetro m . Ou seja, dados k , α e β o valor de m é encontrado ao determinar a intersecção de $T(m)$ e $\Omega(m)$.

Dessa forma, temos determinado completamente uma solução para o campo Θ_2 . Porém, a especificação completa do vetor de spin \vec{S} requer, ainda, a análise do campo Φ . Como vimos, ele é dado por (2.17), ou seja, $\Phi = n\varphi + \varphi_o$, onde n e φ_o são constantes. Para o campo Φ , requerer a condição de contorno (4.5) é o mesmo que requerer que n seja igual a um número inteiro. Pois¹

$$\Phi(\varphi + 2\pi, z) = (n\varphi + \varphi_o) + 2\pi n \equiv (n\varphi + \varphi_o) = \Phi(\varphi, z)$$

Por fim, devemos salientar que a restrição de parâmetros derivada em (4.4) não é tão restritiva assim. Explicitando os valores de α e β definidos em (2.22), a condição de restrição toma a forma

$$\frac{2c^2\rho_o^2}{\rho_B^2} \leq n^2.$$

Vemos que, como n é um inteiro e o único parâmetro livre na solução, para qualquer valor dos parâmetros c (conicidade), ρ_o (raio do cilindro) e ρ_B (comprimento magnético) será sempre possível escolher um valor de n para o qual a desigualdade acima (ou (4.4)) seja satisfeita.

Discutamos o comportamento qualitativo da solução Θ_2 dada por (4.1).

Como n é um parâmetro arbitrário na solução Θ_2 , ao escolher um determinado valor inteiro fixamos o parâmetro m . Este parâmetro pode ser encontrado algebricamente ou graficamente pela intersecção das duas funções $T(m)$ e $\Omega(m)$, conforme discutido acima. As figuras (4.4) e (4.5), ilustram o comportamento da função Θ_2 para alguns valores do parâmetro n .

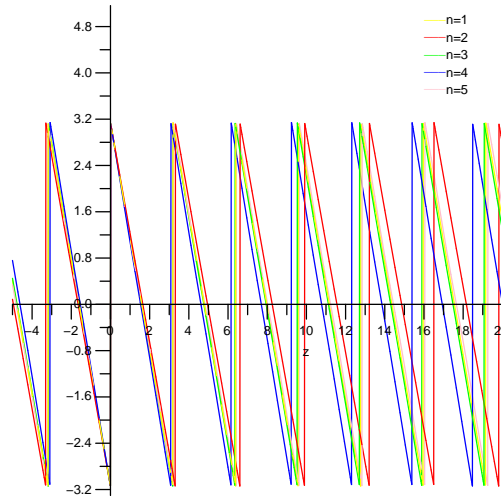
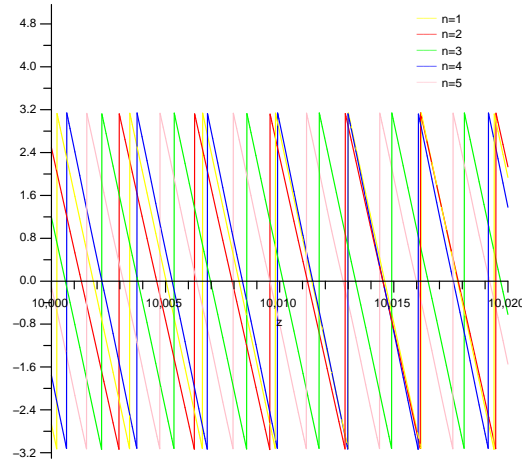


Figura 4.4: Comportamento qualitativo da função Θ_2 para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 , adotando $\alpha = 0.01$, $\frac{\beta}{n^2} = 0.01$, no intervalo $-5 \leq z + k\varphi \leq 20$.

¹Vale lembrar que o sinal \equiv indica equivalência.


 Figura 4.5: Mesmo caso da função Θ_2 , no intervalo $10000 \leq z + k\varphi \leq 10020$

4.2 Análise de uma solução arccos

Passemos, agora, à análise das soluções (3.22) obtidas com a transformação do cosseno. Vamos reescrevê-las de uma forma mais conveniente para os nossos propósitos. Os valores encontrados para a_0 , a_1 e s foram

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{\alpha}{4\beta} & (4.10) \\
 a_{1\pm} &= \pm \sqrt{-\frac{q}{p} \left(\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{16\beta^2} \right)} \\
 s^\pm &= \pm \sqrt{-\frac{\alpha^2 + 16\beta^2}{4\beta p}}
 \end{aligned}$$

com p , q e r vinculados pela equação

$$\frac{\sqrt{2qr}}{p} = \pm \frac{16\beta^2 - \alpha^2}{16\beta^2 + \alpha^2} \quad (4.11)$$

Caso 1: Tomando o sinal (+) em (4.11), podemos isolar α^2 como

$$\alpha^2 = \left(\frac{p - \sqrt{2qr}}{p + \sqrt{2qr}} \right) 16\beta^2 \quad (4.12)$$

Substituindo este resultado nas expressões (4.10), podemos escolher a solução Θ_{4+}^- em (3.22) e reescrevê-la na forma

$${}_+\Theta_{4+}^-(\varphi, z) = \arccos \left\{ \sqrt{\frac{p - \sqrt{2qr}}{p + \sqrt{2qr}}} + \sqrt{\frac{-2q}{p + \sqrt{2qr}}} f \left[\sqrt{\frac{-8\beta}{p + \sqrt{2qr}}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (4.13)$$

Caso 2: Tomando o sinal (-) em (4.11), isolamos α^2 na forma

$$\alpha^2 = \left(\frac{p + \sqrt{2qr}}{p - \sqrt{2qr}} \right) 16\beta^2 \quad (4.14)$$

Substituindo este resultado nas expressões (4.10), podemos obter

$$-\Theta_{4+}^-(\varphi, z) = \arccos \left\{ \sqrt{\frac{p + \sqrt{2qr}}{p - \sqrt{2qr}}} + \sqrt{\frac{-2q}{p - \sqrt{2qr}}} f \left[\sqrt{\frac{-8\beta}{p - \sqrt{2qr}}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (4.15)$$

Devemos escolher, agora, uma das funções-f da tabela (*Apêndice D*) para explicitar as soluções em (4.13) e (4.15). Tomemos $f \equiv \text{sn}$ e seus valores de $p = -(1 + m^2)$, $q = 2m^2$ e $r = 1$. Assim, teremos as soluções

$$\begin{aligned} +\Theta_4(\varphi, z) &= \arccos \left\{ \frac{1 + m}{1 - m} + \frac{2m}{1 - m} \text{sn} \left[\frac{\sqrt{8\beta}}{1 - m} (z + k\varphi) \right] \right\} \\ -\Theta_4(\varphi, z) &= \arccos \left\{ \frac{1 - m}{1 + m} + \frac{2m}{1 + m} \text{sn} \left[\frac{\sqrt{8\beta}}{1 + m} (z + k\varphi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Interessantemente, esta é uma solução que não depende explicitamente do campo magnético externo aplicado; e, aparentemente, não há restrição de parâmetros para evitar valores complexos. Contudo, ainda precisamos aplicar as condições de contorno (4.5) para termos uma solução física e real.

4.2.1 Condições de contorno

Da solução $-\Theta_4$, notamos que

$$s = \frac{\sqrt{8\beta}}{1 + m} = \frac{2n}{c\rho_o(1 + m)}. \quad (4.17)$$

Ao requerer que esta solução também satisfaça a condição de contorno (4.5), sua periodicidade precisa ser então

$$T(m) = \frac{4\pi kn}{c\rho_o(1 + m)} \quad (4.18)$$

Vemos claramente que esta é uma função decrescente do parâmetro m . Como $\Omega(m)$ é uma função crescente, para que a intersecção das duas funções ocorra é necessário que $T(0) \geq \Omega(0)$. Ou seja,

$$\frac{4\pi kn}{c\rho_o} \geq 2\pi \Rightarrow \frac{c\rho_o}{2k} \leq n \quad (4.19)$$

Veja um exemplo dessa intersecção na figura (4.6).

Mostramos o comportamento qualitativo de $-\Theta_4$ para alguns valores de n , em dois intervalos do domínio da função, nas figuras (4.7) e (4.8).

Com relação a função $+\Theta_4$, exigir a condição de contorno (4.5) é o mesmo que exigir que sua periodicidade seja

$$T(m) = \frac{4\pi kn}{c\rho_o(1 - m)} \quad (4.20)$$

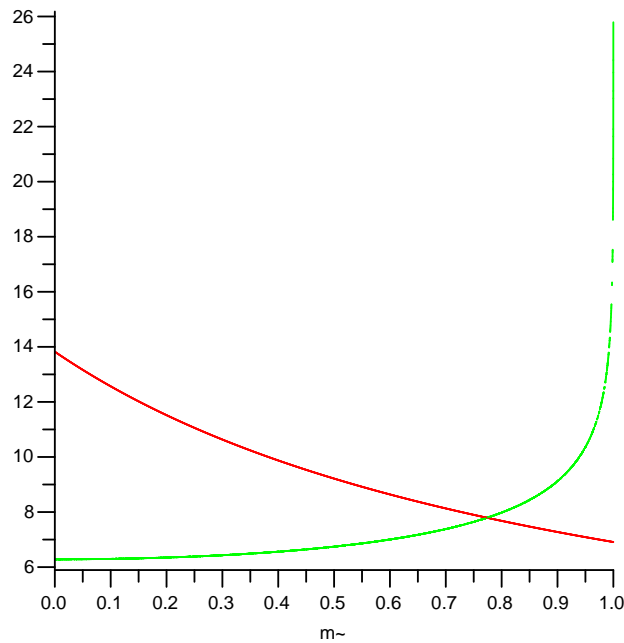


Figura 4.6: Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) de $_{-}\Theta_4$ e $\Omega(m)$ (curva verde) para $c = 1$, $\rho_o = 0.9$, $k = 1$, $n = 1$.

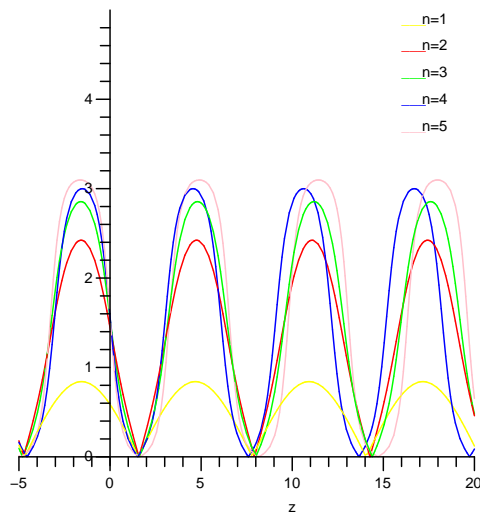


Figura 4.7: Comportamento qualitativo da função $_{-}\Theta_4$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, adotando $\frac{\beta}{n^2} = 1$, $k = 1$, no intervalo $-5 \leq z + k\varphi \leq 20$

Vemos claramente que esta é uma função crescente em relação ao parâmetro m . Dessa forma, a intersecção com a outra função crescente $\Omega(m)$ será garantida observando a taxa de crescimento de cada uma dessas funções. Como tanto $T(m)$ quanto $\Omega(m)$ divergem quando o parâmetro m tende a 1, então se $T(0) < \Omega(0)$, o cruzamento será garantido se $T(m)$ crescer mais rapidamente que $\Omega(m)$ quando $m \rightarrow 1$. Se este for o caso, então a razão $\Omega(m)/T(m)$ é uma função sempre decrescente a partir de algum ponto \bar{m} , e a derivada dessa razão deve ser negativa para $m > \bar{m}$.

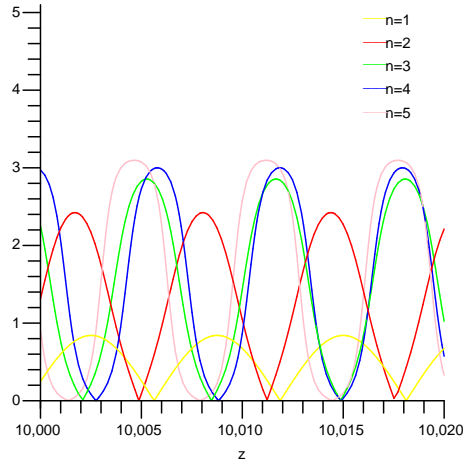


Figura 4.8: Mesmo caso da função $-\Theta_4$, no intervalo $10000 \leq z + k\varphi \leq 10020$

Vejamos:

$$\frac{d}{dm} \left(\frac{\Omega(m)}{T(m)} \right) = -\frac{c\rho_o}{\pi kn} \int_0^1 dt \frac{m(1-t^2) + m^2 t^2(1-m)}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.21)$$

Como $0 \leq m \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$, segue que esta derivada é sempre negativa, se os parâmetros k e n são de mesmo sinal (c e ρ_o são sempre positivos). Portanto, uma vez que as duas funções divergem quando $m \rightarrow 1$, notamos que $T(m)$ é uma função que cresce mais rapidamente que $\Omega(m)$ a partir de algum ponto \tilde{m} . A intersecção só estará garantida se $T(m)$ ‘começa’ antes de $\Omega(m)$, ou seja, $T(0) < \Omega(0)$; ou, mais explicitamente,

$$\frac{4\pi kn}{c\rho_o} < 2\pi \Rightarrow \frac{c\rho_o}{2k} > n \quad (4.22)$$

A desigualdade (4.22) é uma condição de garantia. Se esta desigualdade não for respeitada, ainda assim, pode haver intersecção entre as duas funções. Pois $T(m)$ pode interceptar $\Omega(m)$ antes de começar a crescer mais rapidamente.

Graficamente, observe a Fig. (4.9).

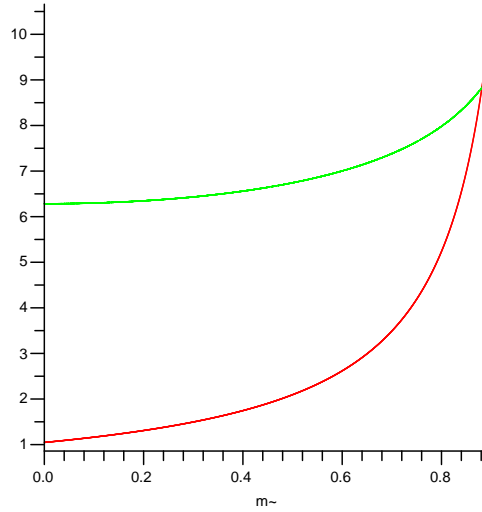


Figura 4.9: Comportamento qualitativo das funções $T(m)$ (curva vermelha) de $+\Theta_4$ e $\Omega(m)$ (curva verde), adotando $c = 12$ (conicidade), $\rho = 1$, $k = 1$, $n = 1$.

Não graficamos a função $+\Theta_4$ para os primeiros cinco números quânticos, pois a intersecção das funções $T(m)$ e $\Omega(m)$ ocorre na região muito próxima de $m = 1$. É de difícil manipulação determinar estes pontos no software Maple 10, que usamos para fazer os gráficos [44]. Por esse motivo, não mostramos a comparação gráfica entre estes níveis quânticos para a solução $+\Theta_4$.

O fato do campo magnético não ter sido explicitado nas soluções (4.16) é porque inserimos nelas as relações (4.12) e (4.14). Nestas últimas, o campo magnético ficou expresso em termos dos parâmetros m (p, q, r) e β , uma vez que $\alpha = \frac{1}{\rho_B}$. Dessa forma, concluímos que o campo magnético ainda está presente nas soluções (4.16), mas implicitamente por

$$m = \frac{|c^2 \rho^2 - 2n^2 \rho_B^2|}{c^2 \rho^2 + 2n^2 \rho_B^2} \quad (4.23)$$

ou

$$\left(\frac{n \rho_B}{c \rho_o} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 \mp m}{1 \pm m} \right) \quad (4.24)$$

Desta Eq. (4.24), observa-se que $-\Theta_4$ e $+\Theta_4$ não podem ser ambas realizadas: se $-\Theta_4$ for solução, então $+\Theta_4$ não o será.

Podemos fazer uma comparação qualitativa entre estas soluções arccos e a solução arctan e observar a influência do campo magnético externo em cada um dos tipos de solução. Na solução arctan o campo magnético não exerce influência determinística. Qualquer que seja seu valor na solução o parâmetro n ainda permanece um parâmetro arbitrário. Podemos dizer, assim, que a configuração do sistema é dada pela família de soluções $\{\Theta_{2(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Diferentemente, nas soluções arccos o parâmetro n é fixado pelo campo magnético externo, uma vez que a relação de vínculo (4.24) precisa ser observada. O campo magnético externo exerce um papel determinístico nas soluções do tipo arccos. Assim, a configuração do sistema é completamente determinada por apenas uma única solução.

Podemos notar, também, que a variação do parâmetro n acarreta uma variação da amplitude das soluções do tipo arccos. O único caso em que a solução parece atingir o valor de π é para o caso onde temos $n = 5$. Assim, a medida que percorremos a variedade, variando o parâmetro

$z + k\varphi$, o vetor de spin toma valores de zero até π e, em seguida, de π até zero, caracterizando um estado de half-sóliton. Por outro lado, as soluções do tipo arctan caracterizam um estado solitônico para qualquer valor de n . Pois, a medida que percorremos $z + k\varphi$, sempre observamos o vetor de spin mapear todo o círculo unitário para qualquer valor de n . A variação do parâmetro n parece, apenas, deslocar as soluções arctan ao longo de $z + k\varphi$.

Uma questão que surge é se as soluções arccos são válidas apenas para alguns valores de campo magnético devido a relação de vínculo (4.24). O valor de m no intervalo $[0,1]$ é definido da intersecção de $\Omega(m)$ e $T(m)$, enquanto ρ_o é definido a priori. Se n obtido do vínculo (4.24) resultar não inteiro para algum valor de ρ_B , então as propostas (4.16) não serão solução do problema para essa escolha do campo magnético B .

4.3 Energias associadas às soluções

A energia do sistema é dada pela hamiltoniana (2.12) deste sistema. Os estados do sistema são as soluções das equações de movimento derivadas desta hamiltoniana. Três possíveis soluções-estados foram explicitadas em (4.1) e (4.16). Para a especificação completa do vetor de spin, temos, em conjunto com as soluções para os campos Θ_2 , $+\Theta_4$ e $-\Theta_4$, a solução para o campo Φ dada por $\Phi(\varphi, z) = n\varphi + \varphi_o$. Quando fizemos o requerimento para Φ possuir esta forma, obtivemos que o campo Θ devia satisfazer a equação helicoidal e a double sine-Gordon. Para calcular a energia correspondente às soluções estados, devemos introduzir estas soluções na hamiltoniana (2.12). Fazendo uso da solução para o campo Φ e a equação helicoidal, podemos reduzir esta hamiltonina à forma

$$H = Jc\rho_o \iint_S d\varphi dz \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{n^2}{2c^2\rho_o^2} \sin^2 \Theta - \frac{1}{\rho_B^2} \cos \Theta \right] \quad (4.25)$$

Por outro lado, se integramos a double sine-Gordon em relação à variável z , obtemos a equação

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} \right)^2 = \frac{n^2}{2c^2\rho_o^2} \sin^2 \Theta - \frac{1}{\rho_B^2} \cos \Theta - \frac{1}{\rho^2}. \quad (4.26)$$

onde simplesmente escrevemos a constante de integração como $\frac{1}{\rho^2}$. Na verdade, a integração da double sine-Gordon em relação à variável z introduz uma função dependente apenas da variável φ e não um termo constante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} \right)^2 = \frac{n^2}{2c^2\rho_o^2} \sin^2 \Theta - \frac{1}{\rho_B^2} \cos \Theta + f(\varphi) \quad (4.27)$$

Porém, quando utilizamos o fato que o campo Θ também satisfaz a equação helicoidal, podemos corretamente fazer a substituição $\frac{\partial\Theta}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{k} \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}$ na DSG. Integrando a equação resultante, obtemos

$$\frac{1}{2k^2} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} \right)^2 = \frac{n^2}{2c^2\rho_o^2} \sin^2 \Theta - \frac{1}{\rho_B^2} \cos \Theta + g(z) \quad (4.28)$$

Podemos igualar estas duas últimas equações, uma vez que Θ satisfaz a equação helicoidal, para verificar que $f(\varphi) = g(z)$. Portanto, vemos claramente que $f(\varphi)$ é uma constante, que pode ser escrita como $-1/\rho^2$ por conveniência. Assim, introduzindo a expressão (4.26) em (4.25), obtemos

$$H = Jc\rho_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz (\Theta_z)^2 + \frac{Jc\rho_o}{\rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz$$

Os limites de integração são devidos à superfície S na qual estamos integrando ser a superfície de um cilindro com comprimento infinito ao longo do eixo z . Podemos omitir o segundo termo

por renormalização da hamiltoniana, o que equivale a redefinir a energia do estado fundamental. Assim, temos a expressão da energia para as soluções-estado Θ_2 , $+\Theta_4$ e $-\Theta_4$ em (4.1) e (4.16)

$$H = Jc\rho_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi dz (\Theta_z)^2$$

Podemos reescrever a integral acima na forma

$$H = Jc\rho_o \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi ks_j}^{2\pi ks(j+1)} \int_0^{2\pi} d\varphi dz (\Theta_z)^2 \quad (4.29)$$

onde $2\pi ks$ é a periodicidade do integrando. Na verdade, $2\pi ks$ é a periodicidade de Θ quando exigimos que $\Theta(\varphi+2\pi, z) = \Theta(\varphi, z)$. E exigir esta condição de contorno para o campo Θ implica exigir a mesma condição para as suas derivadas parciais. Portanto, elas terão que ter a mesma periodicidade do campo Θ . Sendo assim, como o integrando se repete a cada período $2\pi ks$, suas integrais também se repetem nesse intervalo de integração e podemos escrever (4.29) na forma

$$H = Jc\rho_o \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| \right) \int_0^{2\pi ks} \int_0^{2\pi} d\varphi dz (\Theta_z)^2 \quad (4.30)$$

Agora, fica claro que esta hamiltonina diverge. Isso é porque estamos calculando a energia de uma solução-estado periódica na superfície infinita. Porém ao fazer a substituição $\varphi \rightarrow \frac{x}{ks}$ podemos definir

$$E = \frac{H}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |j|} = \frac{Jc\rho_o}{ks} \int_0^{2\pi ks} \int_0^{2\pi ks} dx dz (\Theta_z)^2$$

como a energia por periodicidade. Ou mais especificamente, a energia de um sólton na superfície da rede. Multiplicando esta equação pela unidade, escrita na forma

$$\frac{(2\pi ks)^2}{\int_0^{2\pi ks} \int_0^{2\pi ks} dx dz}$$

teremos

$$E = 4\pi^2 Jc\rho_o ks \frac{\int_0^{2\pi ks} \int_0^{2\pi ks} dx dz (\Theta_z)^2}{\int_0^{2\pi ks} \int_0^{2\pi ks} dx dz} \quad (4.31)$$

Logo

$$E = 4\pi^2 Jc\rho_o ks (\Theta_z)_{rms}^2 \quad (4.32)$$

onde $(\Theta_z)_{rms}$ é a raiz da média do quadrado de Θ_z no intervalo de periodicidade $2\pi ks$.

Como $\vec{S} = (\Theta, \Phi)$, ao fazer o produto escalar em coordenadas polares, teremos que

$$\vec{S}_z = (\Theta_z, 0) \Rightarrow \vec{S}_z \cdot \vec{S}_z = S_z^2 = \Theta_z^2$$

Assim, podemos reescrever (4.32) na forma

$$E = 4\pi^2 Jc\rho_o ks (\vec{S}_z)_{rms}^2 \quad (4.33)$$

onde $(\vec{S}_z)_{rms}$ é a raiz média quadrática da ‘velocidade’ do vetor de spin na direção z . Ou mais especificamente, podemos interpretá-la como a ‘velocidade’ do sólton nesta direção. Assim,

podemos definir $\mu = 8\pi^2 J c \rho_0 k s$ como a ‘massa’ do sóliton na direção z para expressar (4.33) na forma

$$E = \frac{\mu}{2} (\vec{S}_z)_{rms}^2 \quad (4.34)$$

Da relação (4.34), tanto a ‘massa’ μ quanto a ‘velocidade’ $(\vec{S}_z)_{rms}$ do sóliton dependem direta ou indiretamente do parâmetro n . Isso é suficiente para concluir que a energia do sistema se apresenta na forma discretizada, de modo que os níveis de energia podem ser caracterizados pelo parâmetro n . Então podemos reescrever (4.34) na forma

$$E_n = \frac{\mu(n)}{2} \left((\vec{S}_z)_{rms}(n) \right)^2 \quad (4.35)$$

Na figura (4.10), calculamos as energias associadas às soluções Θ_2 correspondentes aos níveis $n = 1, 2, 3, 4, 5$, apresentadas nas figuras (4.4) e (4.5). Fizemos estes cálculos apenas para confirmar que o espectro de energia das soluções é, de fato, discretizado. Embora não calculamos os espectros de energia para as soluções $-\Theta_4$ e $+\Theta_4$, é claro que eles também deverão ser discretos. Pois, como estas soluções são discretizadas, assim como Θ_2 , ao inseri-las na expressão para o cálculo da energia (4.35), esta também será, evidentemente, discretizada.

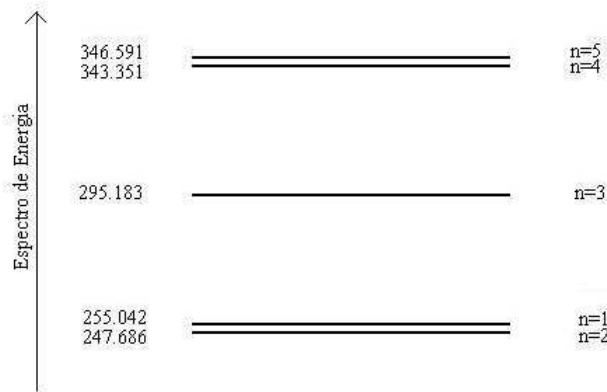


Figura 4.10: Níveis de energia associados à solução Θ_2 para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, adotando $\alpha = 0.01$, $\frac{\beta}{n^2} = 0.01$. A unidade usual para a medida de energia é a própria energia J de acoplamento entre os spins. Aqui fizemos $J = 1$.

Observe que o segundo nível de energia é menor que o primeiro nível. Ainda assim, parece haver uma tendência de crescimento de energia à medida que o parâmetro n aumenta. Isso se deve ao fato de que a periodicidade das soluções aumenta à medida que o número n também aumenta. Observe as figuras (4.4), (4.5), (4.7) e (4.8). Sendo assim, a integração da energia sobre um período da solução, expressa pela Eq. (4.31), são representadas por “áreas” cada vez maiores à medida que o número n aumenta. É de se esperar da mesma forma que o espectro de energia para a solução $-\Theta_4$ também tenha uma tendência de aumentar com o número n .

Vale notar que todas as soluções tem uma tendência natural de aumentar sua periodicidade, degenerando para funções hiperbólicas. Ou seja, enquanto n aumenta, o módulo das funções elípticas vai para a unidade ($m \rightarrow 1$). Porém, nunca poderemos ter soluções com módulo $m = 1$. Pois neste caso, nossas funções se transformam em funções hiperbólicas e não poderemos mais satisfazer a condição de contorno periódica (4.5). Interessantemente, estes estados localizados (estados de um único sóliton), segundo a análise de energia acima, corresponderiam aos estados de maior energia por periodicidade. Disso, vemos também a dificuldade de ocorrer este estado

de maior energia, uma vez que todo sistema tem uma tendência natural de permanecer no estado fundamental.

Se o parâmetro k de deslocamento for nulo, então nossas soluções para $\Theta(\varphi, z)$ não mais dependerão da variável φ . As condições de contorno periódicas seriam naturalmente satisfeitas neste caso, mesmo se a função não for periódica. Neste caso, as soluções localizadas tipo-sóliton podem naturalmente ocorrer. Vemos claramente o papel significativo em deslocar longitudinalmente o cilindro ($k \neq 0$), que é eliminar do sistema o estado solitônico localizado, permitindo apenas estados periódicos.

Por outro lado, também podemos notar a importância do fator c de corte angular ou conicidade. Como este parâmetro ocorre sempre multiplicando o raio do cilindro nas soluções, vemos claramente que ele apenas reescala o raio do cilindro. Assim, os efeitos produzidos por um cilindro de raio ρ_o sem conicidade ($c = 1$) seriam os mesmos que aqueles produzidos por um cilindro de raio $\frac{\rho_o}{2}$ com conicidade $c = 2$, por exemplo.

Capítulo 5

Conclusão

Os principais efeitos produzidos devidos ao deslocamento longitudinal e o corte angular realizado em um cilindro simples, puderam ser esclarecidos. Vimos que o deslocamento longitudinal elimina o estado de um único sóliton do sistema, permitindo apenas estados periódicos. O corte angular (ou conicidade) introduz uma possibilidade de reescala no raio do cilindro, de forma que um cilindro simples e um cilindro cônico podem ter as mesmas propriedades magnéticas devido às configurações de equilíbrio de spins.

Notamos que este trabalho pode ser de especial interesse em nanotecnologia, pois muito recentemente iniciou-se a sintetização de nanotubos nesta área. Nossas configurações de equilíbrio de spins poderiam cumprir com um papel importante em aplicações tecnológicas, tais como a construção de dispositivos spintrônicos. Mas também, podem ser úteis para compreender fenômenos nas áreas biológicas, se na natureza podem ser encontrados microtúbulos orgânicos com algum tipo de magnetização ferromagnética.

Na busca experimental por nossas soluções, deve-se primordialmente medir o espectro discretizado de energia do sistema e comparar com valores preditos teoricamente. Dessa forma, o espectro de energia torna-se a marca da solução-estado do sistema.

Por fim, entendemos que o trabalho delineado aqui pode ser muito útil para a busca de soluções ao trabalhar com outros tipos de geometrias. Pois aplicamos um método de resolução de equações diferenciais não-lineares em nosso problema e conseguimos extrair um número grande de soluções. Discutimos apenas algumas soluções, devido ao interesse de sistematizar a análise. Extraímos, também, algumas novas soluções para três tipos de equações do tipo sine-Gordon.

Apêndice A

Modelo de Heisenberg e modelo sigma não-linear

No modelo de Heisenberg, a hamiltoniana que descreve a energia de interação entre spins vizinhos de uma rede quadrada bidimensional planar com anisotropia é dada por

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_{\lambda i} \cdot \vec{S}_{\lambda j} \quad (\text{A.1})$$

onde definimos $\vec{S}_{\lambda i} = \vec{S}_{\lambda}(x_i^1, x_i^2) = (S_i^1, S_i^2, \sqrt{1 + \lambda} S_i^3)$. Note que o campo vetorial $\vec{S}_{\lambda i}$ é igual ao campo vetorial de spin $\vec{S}_i = (S_i^1, S_i^2, S_i^3)$ no i -ésimo sítio da rede, se o fator de anisotropia λ for nulo. A definição deste campo é útil para facilitar os cálculos que seguem.

Podemos escrever a hamiltoniana (A.1) de uma forma mais conveniente

$$H = -\frac{J}{2} \sum_i \left[\vec{S}_{\lambda i} \cdot \vec{S}_{\lambda i-1} + \vec{S}_{\lambda i} \cdot \vec{S}_{\lambda i+1} + \vec{S}_{\lambda i} \cdot \vec{S}_{\lambda i+N} + \vec{S}_{\lambda i} \cdot \vec{S}_{\lambda i-N} \right] \quad (\text{A.2})$$

onde os subíndices representam as posições dos vizinhos mais próximos do i -ésimo sítio da rede, conforme ilustra a figura (A.1)

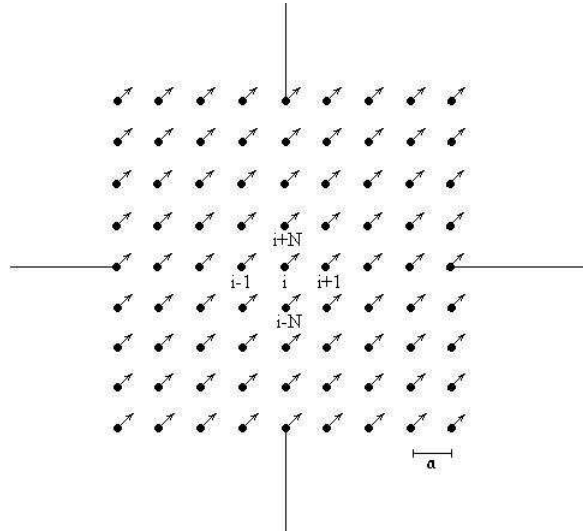


Figura A.1: Representação de uma rede planar de sítios de átomos ou partículas com spin, com destaque para o i -ésimo sítio.

Podemos aproximar as componentes $S^a(x_i^1, x_i^2)$, $a = 1, 2, 3$, do campo vetorial de spin $\vec{S}(x_j^1, x_j^2) = (S_j^1, S_j^2, S_j^3)$ no ponto (x_j^1, x_j^2) pelo seu valor $\vec{S}(x_i^1, x_i^2)$ no ponto (x_i^1, x_i^2) adicionados dos incrementos da expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned}
 S^a(x_{i+1}^1, x_i^2) &= S^a(x_i^1, x_i^2) + (x_{i+1}^1 - x_i^1) \frac{\partial S^a}{\partial x^1} \Big|_{x^1=x_i^1} + \frac{(x_{i+1}^1 - x_i^1)^2}{2} \frac{\partial^2 S^a}{(\partial x^1)^2} \Big|_{x^1=x_i^1} + \\
 &\quad + O((x_{i+1}^1 - x_i^1)^3) \\
 S^a(x_{i-1}^1, x_i^2) &= S^a(x_i^1, x_i^2) + (x_{i-1}^1 - x_i^1) \frac{\partial S^a}{\partial x^1} \Big|_{x^1=x_i^1} + \frac{(x_{i-1}^1 - x_i^1)^2}{2} \frac{\partial^2 S^a}{(\partial x^1)^2} \Big|_{x^1=x_i^1} + \\
 &\quad + O((x_{i-1}^1 - x_i^1)^3) \\
 S^a(x_i^1, x_{i+N}^2) &= S^a(x_i^1, x_i^2) + (x_{i+N}^2 - x_i^2) \frac{\partial S^a}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_i^2} + \frac{(x_{i+N}^2 - x_i^2)^2}{2} \frac{\partial^2 S^a}{(\partial x^2)^2} \Big|_{x^2=x_i^2} + \\
 &\quad + O((x_{i+N}^2 - x_i^2)^3) \\
 S^a(x_i^1, x_{i-N}^2) &= S^a(x_i^1, x_i^2) + (x_{i-N}^2 - x_i^2) \frac{\partial S^a}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_i^2} + \frac{(x_{i-N}^2 - x_i^2)^2}{2} \frac{\partial^2 S^a}{(\partial x^2)^2} \Big|_{x^2=x_i^2} + \\
 &\quad + O((x_{i-N}^2 - x_i^2)^3)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Considerando o espaçamento da rede $a = |x_j^1 - x_i^1| = |x_j^2 - x_i^2|$ pequeno o suficiente de modo que possamos desprezar os termos em $O((x_j^1 - x_i^1)^3)$ e $O((x_i^1 - x_j^1)^3)$, escrevemos as equações acima de uma forma mais compacta utilizando o vetor $\vec{S}_{\lambda i}$

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_{\lambda i+1} &= \vec{S}_{\lambda i} + a \frac{\partial \vec{S}_{\lambda i}}{\partial x^1} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda i}}{(\partial x^1)^2} \\
 \vec{S}_{\lambda i-1} &= \vec{S}_{\lambda i} - a \frac{\partial \vec{S}_{\lambda i}}{\partial x^1} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda i}}{(\partial x^1)^2} \\
 \vec{S}_{\lambda i+N} &= \vec{S}_{\lambda i} + a \frac{\partial \vec{S}_{\lambda i}}{\partial x^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda i}}{(\partial x^2)^2} \\
 \vec{S}_{\lambda i-N} &= \vec{S}_{\lambda i} - a \frac{\partial \vec{S}_{\lambda i}}{\partial x^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda i}}{(\partial x^2)^2}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Estamos considerando o espaçamento da rede a pequeno o suficiente como mencionado acima. Podemos fazer com que cada i -ésimo sítio da rede corresponda a um ponto do plano $x^1 x^2$, de modo que a rede seja vista como uma rede contínua de sítios. Dessa forma, podemos substituir uma somatória sobre os sítios por uma integral dupla no plano

$$\sum_i \rightarrow \iint_D \frac{dx^1 dx^2}{a^2}$$

onde podemos notar a inserção do parâmetro de espaçamento da rede a como um procedimento para manter a dimensionalidade. Substituindo as expressões (A.4) na hamiltoniana (A.2) obtemos então

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{J}{2} \iint_D \frac{dx^1 dx^2}{a^2} 4\vec{S}_{\lambda}^2 - \frac{J}{4} \iint_D dx^1 dx^2 \left[\frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda}^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \vec{S}_{\lambda}^2}{(\partial x^2)^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{J}{2} \iint_D dx^1 dx^2 \left[\left(\frac{\partial \vec{S}_{\lambda}}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{S}_{\lambda}}{\partial x^2} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde \vec{S}_λ é a forma contínua de $\vec{S}_{\lambda i}$.

Podemos estabelecer o vínculo $S_\lambda^2 = 1$ no vetor de spin com anisotropia. Portanto, o primeiro termo de (A.5) pode ser retirado por renormalização da hamiltoniana. Pois, para uma rede infinita, este termo é uma constante divergente, e podemos tomá-lo como a energia do estado fundamental. As derivadas $\frac{\partial \vec{S}_\lambda^2}{\partial x^1}$ e $\frac{\partial \vec{S}_\lambda^2}{\partial x^2}$ se anulam devido à condição de preservação do vínculo. Assim, o segundo termo de (A.5) é nulo. Dessa forma, a hamiltoniana fica sendo

$$H = \frac{J}{2} \iint_D dx^1 dx^2 \left[\sum_{a=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 h_a \left(\frac{\partial S^a}{\partial x^\alpha} \right)^2 \right] \quad (\text{A.6})$$

onde a integração se estende por toda a rede no plano infinito $x^1 x^2$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$ e $h_3 = 1 + \lambda$.

Se $\lambda = 0$, então temos a hamiltoniana para uma rede isotrópica

$$H = \frac{J}{2} \iint_D dx^1 dx^2 \sum_{a=1}^3 \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial S^a}{\partial x^\alpha} \right)^2 \quad (\text{A.7})$$

Se $\lambda = -1$, então a componente S^3 do vetor de spin \vec{S} pode ser incluída em dois casos. No primeiro caso, digamos para $S^3 = 0$, temos o modelo de rotor planar. Porém, se $S^3 \neq 0$, então temos o modelo XY. No modelo de rotor planar todos os vetores de spin estariam orientados no mesmo plano. Em qualquer um dos casos não há a contribuição da componente S^3 para a energia de interação. Isso pode ser observado em (A.1) ao fazer $\lambda = -1$, de modo que teremos

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_{-1i} \cdot \vec{S}_{-1j} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} [S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2] \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Cilindro com conicidade e deslocamento

A geometria do espaço-tempo de um cilindro com conicidade e deslocamento é caracterizada pelo elemento de linha de Minkowski escrito em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + dZ^2 - dt^2$$

e pela identificação

$$(t, \rho, \varphi, Z) \leftrightarrow (t, \rho, \varphi + 2\pi c, Z + 2\pi k)$$

onde c e k são os parâmetros correspondendo à conicidade e ao deslocamento, respectivamente [43]. Ao definir um novo espaço de coordenadas

$$\theta \equiv \varphi/c \quad \text{e} \quad z \equiv Z - (k/c)\varphi$$

o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = c^2 \rho^2 d\theta^2 + (dz + kd\theta)^2 - dt^2$$

e a identificação usual

$$(t, \rho, \theta, z) \leftrightarrow (t, \rho, \theta + 2\pi, z)$$

precisa ser observada.

Portanto, os subespaços correspondentes a $t = \text{const.}$ são caracterizados pela métrica independente do tempo

$$ds^2 = c^2 \rho^2 d\theta^2 + (dz + kd\theta)^2$$

que é a métrica que caracteriza a geometria de um cilindro com conicidade c e deslocamento k .

Apêndice C

Equações com simetria helicoidal

No Capítulo 3, mostramos como derivar as equações (2.15) e (2.16). Estas equações podem ser escritas de uma maneira mais compacta, se introduzimos a notação

$$\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - k \frac{\partial}{\partial z}$$

Este é um operador diferencial conhecido como vetor de Killing. Rearranjando os termos das equações (2.15) e (2.16), podemos escrevê-las da seguinte forma:

$$\frac{1}{4\alpha^2 \rho_o^2} \left\{ \left(2\mathbf{K}^2 \Theta + 2c^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) - \sin 2\Theta \left[(\mathbf{K}\Phi)^2 + c^2 \rho_o^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} - \frac{1}{2\rho_B^2} \sin \Theta = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\sin 2\Theta \left[(\mathbf{K}\Theta) (\mathbf{K}\Phi) + c^2 \rho_o^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] + \sin^2 \Theta \left(\mathbf{K}^2 \Phi + c^2 \rho_o^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{C.2})$$

O requerimento para que os campos Θ e Φ apresentem simetria helicoidal é expresso, matematicamente, pela condição $\mathbf{K}\Theta = \mathbf{O} = \mathbf{K}\Phi$, onde \mathbf{O} é o operador nulo. Assim, as equações (C.1) e (C.2) tomam a forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\sin 2\Theta}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{\rho_B^2} \sin \Theta \quad (\text{C.3})$$

$$2 \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \sin \Theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Dividindo esta última equação por $\sin \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ e integrando convenientemente a equação resultante com respeito a z , teremos

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = \frac{f(\varphi)}{\sin^4 \Theta} \quad (\text{C.5})$$

Para determinar a função $f(\varphi)$, escrevemos a equação (C.4) na forma

$$2 \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \sin \Theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{C.6})$$

onde, simplesmente, substituímos $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Esta substituição é possível uma vez que estamos impondo simetria helicoidal às variáveis Θ e Φ . Dessa forma, podemos dividir (C.6) por $\sin \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ e integrar para obter

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{g(z)}{\sin^4 \Theta}$$

Podemos utilizar novamente a substituição $\frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow k \frac{\partial}{\partial z}$ para obter

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = \frac{g(z)}{k^2 \sin^4 \Theta} \quad (\text{C.7})$$

Igualando (C.5) e (C.7), obtemos $g(z) = k^2 f(\varphi)$. Portanto, $f(\varphi)$ é uma constante e podemos colocá-la na forma $f(\varphi) = \frac{1}{\rho^2}$. A constante ρ tem dimensão de comprimento. Desse modo, temos

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2 \sin^4 \Theta} \quad (\text{C.8})$$

Podemos introduzir (C.8) em (C.3) para obter uma única equação

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\cos \Theta}{\rho^2 \sin^3 \Theta} + \frac{1}{\rho_B^2} \sin \Theta \quad (\text{C.9})$$

Esta equação pode ser resolvida usando o Método de Expansão em Funções Elípticas de Jacobi (MEFEJ).

Multiplicando (C.9) por $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ e integrando a equação resultante, obtemos

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 = \frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \Theta} - \frac{2 \cos \Theta}{\rho_B^2}$$

Fazendo a transformação $u = \cos \Theta$, esta equação toma a forma

$$\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = u^3 + \beta u^2 - u + \gamma$$

onde fizemos $\alpha = \frac{\rho_B^2}{2}$, $\beta = -\frac{\rho_B^2}{\rho^2}$ e $\gamma = \frac{\rho_B^2}{\rho^2} - \frac{\rho_B^2}{\rho^2}$

Fazendo a transformação de variáveis $\xi = s(z + k\varphi)$, uma vez que estamos impondo a simetria helicoidal, e derivando a equação resultante em relação a ξ obtemos

$$2\alpha s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3u^2 - 2\beta u + 1 = 0 \quad (\text{C.10})$$

Suponhamos uma expansão de u em função seno-elíptico de Jacobi $u = \sum_{j=0}^n a_j \text{sn}^j \xi$, com n finito. Fazendo o balanceamento da equação (C.10), conforme esclarecido no Capítulo 4, vemos que $n = 2$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 \text{sn} \xi + a_2 \text{sn}^2 \xi \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= 2a_2 - a_1(1 + m^2) \text{sn} \xi - 4a_2(1 + m^2) \text{sn}^2 \xi + 2a_1 m^2 \text{sn}^3 \xi + 6a_2 m^2 \text{sn}^4 \xi \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

onde m é o módulo das funções elípticas de Jacobi, tal que $0 \leq m \leq 1$. Substituindo (C.11) em (C.10), determinamos a_0 , a_1 , a_2 e p na forma

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\alpha s^2(1 + m^2) - \beta}{3} \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 4\alpha s^2 m^2 \\ s^4 &= \frac{\beta^2 + 3}{16\alpha^2(m^4 - m^2 + 1)} \end{aligned}$$

Portanto, obtemos soluções para o campo Θ na forma

$$\Theta(\varphi, z) = \arccos [a_0 + a_2 \text{sn}^2 s(z + k\varphi)] \quad (\text{C.12})$$

Obtemos, também, soluções para o campo Φ , se substituimos (C.12) na equação (C.8). Integrando a equação resultante, obtemos

$$\Phi(\varphi, z)_{\pm} = \pm \frac{1}{\rho} \int dz \left\{ 1 - [a_0 + a_2 \text{sn}^2 s(z + k\varphi)]^2 \right\}^{-1} + \text{const.} \quad (\text{C.13})$$

Estas são soluções para os campos Θ e Φ com simetria helicoidal. Observa-se que o parâmetro m é um parâmetro livre e deve ser fixado pelas condições de contorno do problema.

Note que estas soluções não nos fornecem um número inteiro n , que foi conseguido para as soluções Θ_2 , $\pm\Theta_4$ e $\Phi(\varphi, z) = n\varphi + \varphi_o$.

Apêndice D

Soluções da simple sine-Gordon e triple sine-Gordon

Vamos aplicar o Método de Expansão em Funções-f (MEFF) para determinar soluções das equações Simple Sine-Gordon (SSG) e Triple Sine-Gordon (TSG). Este método já foi proposto no Capítulo 4 para a resolução da Double Sine-Gordon (DSG). Embora uma das equações obtida no nosso problema tenha sido a DSG, julgamos relevante a investigação de soluções de equações similares.

D.1 Soluções da simple sine-Gordon (SSG)

A importância da SSG consiste no fato de que ela é o limite da DSG para um campo externo nulo. Faremos apenas duas transformações: a transformação do seno e a transformação do cosseno.

D.1.1 Transformação do seno

Queremos resolver

$$\Theta_{zz} = \alpha \sin \Theta \quad (\text{D.1})$$

Através da transformação

$$u = \sin \frac{\Theta}{2} \quad (\text{D.2})$$

Vale notificar que com esta transformação aplicada a DSG, não foi possível encontrar soluções usando este método. Pois haverá apenas um termo com grau máximo na equação. Assim, teremos

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \pm 2u\sqrt{1-u^2} \\ \Theta_{zz} &= \pm 2 \left[\frac{(1-u^2)u_{zz} + uu_z^2}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde os sinais (\pm) nas equações (D.3) são correspondentes. Tomando um sinal em uma das equações, o mesmo sinal deve ser tomado na outra equação.

Substituindo as equações (D.3) na equação (D.1) e fazendo uma outra transformação $\xi = s(z + k\varphi)$, conforme esclarecido no Capítulo 4, obtemos a seguinte equação

$$s^2(1-u^2)u'' + s^2u(u')^2 - \alpha u(1-u^2)^2 = 0 \quad (\text{D.4})$$

Ao fazer o balanceamento dos termos na equação, notamos que suas soluções exatas obtidas com MEFF podem somente ser expandidas até a primeira ordem ($n = 1$) na expansão

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j f^j(\xi) \quad (\text{D.5})$$

onde a função- f deve satisfazer a equação elíptica

$$(f')^2 = pf^2 + \frac{q}{2}f^4 + r \quad \text{ou} \quad f'' = pf + qf^3 \quad (\text{D.6})$$

Desse modo

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 f \\ (u')^2 &= a_1^2 p f^2 + \frac{a_1^2 q}{2} f^4 + a_1^2 r \\ u'' &= a_1 p f + a_1 q f^3 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Substituindo as equações (D.7) na equação (D.4), reagrupando os termos de mesmo grau em potências de f , igualando estes termos a zero, podemos explicitar duas classes de solução. Para $a_1 = 0$, a equação (D.4) toma a forma $a_0(1 - a_0^2)^2 = 0$, que origina as soluções constantes $a_0 = 0$ (trivial) e $a_{0\pm} = \pm 1$. Para ($a_1 \neq 0$) com $a_0 = 0$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} a_1[s^2(p + a_1^2 r) - \alpha] &= 0 \\ a_1[s^2(q + a_1^2 p) + 2\alpha a_1^2] &= 0 \\ a_1^3 \left(s^2 \frac{q}{2} + \alpha a_1^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Analisando este sistema podemos extrair alguns casos para compor as soluções não triviais. Porém é preciso explicitar os valores de p , q e r nas equações (D.8). A transformação (D.1) e a busca por soluções até a ordem $n = 2$ na transformação do cosseno não podem ser realizadas na DSG para obter soluções com MEFF. Isso justifica a investigação de soluções em equações similares.

D.1.2 Transformação do cosseno

Façamos a transformação

$$u = \cos \Theta \quad (\text{D.9})$$

Esta corresponde exatamente à transformação (3.16) que fizemos para a DSG. Dessa forma, seguimos analogamente até a equação (3.18). Ao fazer $\beta = 0$ nesta equação, obteremos a equação correspondente para a SSG

$$(1 - u^2)u_{zz} + uu_z^2 + \alpha(1 - u^2)^2 = 0 \quad (\text{D.10})$$

Ao balancearmos os graus dos termos de (D.10), notamos que podemos fazer $n = 2$ na expansão (D.5). Dessa forma

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 f + a_2 f^2 \\ (u')^2 &= a_1^2 r + 4a_1 a_2 r f + (a_1^2 p + 4a_2^2 r) f^2 + 4a_1 a_2 p f^3 + \\ &\quad + \left(\frac{q}{2} a_1^2 + 4a_2^2 p \right) f^4 + 2a_1 a_2 q f^5 + 2a_2^2 q f^6 \\ u'' &= 2a_2 r + a_1 p f + 4a_2 p f^2 + a_1 q f^3 + 3a_2 q f^4 \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Introduzindo as equações (D.11) na equação (D.10), reagrupando os termos de mesmo grau e igualando-os a zero obtemos um sistema de equações não lineares. Ao fazer $a_1 = 0$ este sistema pode ser simplificado nas seguintes equações

$$\begin{aligned}
 (1 - a_0^2)[2s^2 a_2 r + \alpha(1 - a_0^2)] &= 0 & (D.12) \\
 4a_2(1 - a_0^2)(s^2 p - \alpha a_0) &= 0 \\
 a_2[-4a_0 a_2 p s^2 + 2s^2 a_2^2 r + 3s^2(1 - a_0^2)q + 4a_0^2 a_2 \alpha - 2\alpha(1 - a_0^2)a_2] &= 0 \\
 -4a_0 a_2^2(s^2 q - \alpha a_2) &= 0 \\
 -a_2^3(s^2 q - \alpha a_2) &= 0
 \end{aligned}$$

Deste sistema (D.12), podemos extrair algumas soluções:

Caso 1.a: ($r \neq 0$ e $q \neq 0$) Isolando s na última equação, As duas últimas equações são equivalentes e nos fornecem

$$s^\pm = \pm \sqrt{\frac{\alpha a_2}{q}}$$

Fazendo $a_{0\pm} = \pm 1$ nas outras três equações, as duas primeiras se anulam e obteremos com a terceira das equações

$$-2(a_{0\pm})(a_{2\pm})p + (a_{2\pm})^2 r + 2q = 0 \quad (D.13)$$

$$\pm a_{2\pm} = \frac{\pm p \pm \sqrt{p^2 - 2qr}}{r}$$

Dessa forma, obtemos as soluções para a SSG

$$\begin{aligned}
 \pm \Theta_{2S^\pm}^\pm(\varphi, z) &= & (D.14) \\
 \arccos \left\{ \pm 1 + \frac{\pm p \pm \sqrt{p^2 - 2qr}}{r} f^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\pm p \alpha \pm \alpha \sqrt{p^2 - 2qr}}{qr}} (z + k\varphi) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

onde convencionamos que os sinais \pm subscritos à esquerda em $\pm \Theta_{2S^\pm}^\pm(\varphi, z)$ são correspondentes aos sinais \pm do número 1 e da letra p no lado direito da equação. Assim, os sinais \pm superescritos à direita em $\pm \Theta_{2S^\pm}^\pm(\varphi, z)$ são correspondentes aos sinais \pm de $\sqrt{p^2 - 2qr}$.

Caso 1.b: $r = 0$

Neste caso prosseguimos analogamente ao caso anterior. Contudo, na equação (D.13) devemos tomar $r = 0$ para obter

$$a_{2\pm} = \pm \frac{q}{p}$$

E, portanto, obteremos ainda mais soluções

$$\pm \Theta_{3S^\pm}^\pm(\varphi, z) = \arccos \left\{ \pm 1 + \frac{q}{\pm p} f^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\alpha}{\pm p}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (D.15)$$

onde convencionamos que os sinais \pm subscritos à esquerda em $\pm \Theta_{3S^\pm}^\pm(\varphi, z)$ são correspondentes aos sinais \pm do número 1 e da letra p no lado direito da equação.

Caso 2: Isolando s na segunda equação

Neste caso, ao isolar s na segunda das equações e substituindo nas equações restantes teremos

$$\begin{aligned} a_{0\pm} &= \pm \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2qr}} \\ a_{2\pm} &= \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 - 2qr}} \\ \pm s_{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\pm \sqrt{p^2 - 2qr}}} \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Dessa forma, teremos mais soluções

$$\pm \Theta_{4S\pm}(\varphi, z) = \arccos \left\{ \pm \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2qr}} \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 - 2qr}} f^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\alpha}{\pm \sqrt{p^2 - 2qr}}} (z + k\varphi) \right] \right\} \quad (\text{D.17})$$

onde convencionamos que os sinais \pm subscrito à esquerda em $\pm \Theta_{4S\pm}(\varphi, z)$ correspondem aos sinais \pm da raiz externa do argumento da função f^2 . Os demais sinais são de livre convenção. Também é interessante notar da equação (D.17) que ao fazer $r = 0$ contemplamos as soluções para o **Caso 1.b**.

Por fim, vale ressaltar que se fizermos $\beta = 0$ nas soluções da DSG derivadas no Capítulo 4, também obteremos ainda mais soluções para a SSG.

D.2 Soluções da triple sine-Gordon (TSG)

Queremos resolver

$$\Theta_{zz} = \alpha \sin \Theta + \beta \sin 2\Theta + \gamma \sin 3\Theta \quad (\text{D.18})$$

Através da transformação

$$u = \tan \frac{\Theta}{2} \quad (\text{D.19})$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \frac{2u}{1 + u^2} \\ \sin 2\Theta &= \frac{4u(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \\ \sin 3\Theta &= \frac{4u(1 - u^2)^2 + 2u(1 - 6u^2 + u^4)}{(1 + u^2)^3} \\ \Theta_{zz} &= \frac{2(1 + u^2)u_{zz} - 4uu_z^2}{(1 + u^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Substituindo as equações (D.20) na equação (D.18), vem que

$$(1 + u^2)^2 u_{zz} - 2u(1 + u^2)u_z^2 - au - 2bu^3 - cu^5 = 0 \quad (\text{D.21})$$

onde $a = \alpha + 2\beta + 3\gamma$, $b = \alpha - 5\gamma$ e $c = \alpha - 2\beta + 3\gamma$. Ao fazer o balanceamento dessa equação, notamos que podemos fazer $n = 1$ na expansão (D.5). Assim, fazemos a transformação $\xi = s(z + k\varphi)$ na equação (D.21) e, em seguida, substituímos as equações (D.7) nesta equação. Reagrupando os termos de mesmo grau em f , igualando a zero os coeficientes reagrupados no mesmo grau e fazendo de antemão $a_0 = 0$ ($a_1 \neq 0$), obtemos um sistema de três equações

$$\begin{aligned} a_1(s^2p - 2s^2ra_1^2 - a) &= 0 \\ a_1(s^2q - 2s^2a_1^4r - 2ba_1^2) &= 0 \\ a_1^3(s^2q - s^2a_1^2p - ca_1^2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Desta equação, podemos explorar algumas possibilidades de solução. Uma dessas possibilidades seria isolar a_1 na primeira equação como

$$a_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{s^2p - a}{2s^2r}} \quad (\text{D.23})$$

Substituindo (D.23) nas outras duas equações restantes, obtemos

$$\begin{aligned} (2qr - p^2)s^4 + 2(a - b)ps^2 + (2ab - a^2) &= 0 \\ (2qr - p^2)s^4 + (a - c)ps^2 + ac &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Como sabemos os valores de p , q e r são dados em função do módulo m das funções f . Dessa forma o sistema de equações acima é um sistema de duas equações a duas incógnitas s e m . Assim, teremos duas possibilidades ao menos:

Caso 1.a: Isolando s na primeira equação

Como a primeira equação é uma equação biquadrada, pode ser resolvida trivialmente, resultando nas soluções

$$\pm s^\pm = \pm \sqrt{\frac{-2(\beta + 4\gamma)p \pm \sqrt{4(\beta + 4\gamma)^2p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta - 13\gamma)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}} \quad (\text{D.25})$$

Este resultado deve ser inserido na segunda equação para encontrar o valor de m . Substituindo os resultados das expressões (D.23) e (D.25) na transformação (D.19), obtemos as soluções não triviais para a TSG na forma

$$\begin{aligned} \pm \Theta_{1T\pm}^\pm(\varphi, z) &= \\ 2 \arctan \left\{ \pm \sqrt{\frac{(-2(\beta + 4\gamma)p \pm \sqrt{4(\beta + 4\gamma)^2p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta - 13\gamma)(2qr - p^2)})p - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)}{(-4(\beta + 4\gamma)p \pm 2\sqrt{4(\beta + 4\gamma)^2p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta - 13\gamma)(2qr - p^2)})r}} \right. & \times \\ \left. f \left[\pm \sqrt{\frac{-2(\beta + 4\gamma)p \pm \sqrt{4(\beta + 4\gamma)^2p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta - 13\gamma)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}}(z + k\varphi) \right] \right\} & \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Caso 1.b: Isolando s na segunda equação

$$\pm s^\pm = \pm \sqrt{\frac{-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}} \quad (\text{D.27})$$

Este resultado deve ser inserido na primeira equação para encontrar o valor de m . Substituindo os resultados das expressões (D.23) e (D.27) na transformação (D.19), obtemos mais soluções não-triviais para a TSG

$$\begin{aligned} \pm \Theta_{2T\pm}^{\pm}(\varphi, z) = & \hspace{15em} \text{(D.28)} \\ & 2 \arctan \left\{ \pm \sqrt{\frac{(-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)})p - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)}{(-4\beta p \pm 2\sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)})r}} \right\} \times \\ & f \left[\pm \sqrt{\frac{-2\beta p \pm \sqrt{4\beta^2 p^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta + 3\gamma)(2qr - p^2)}}{2qr - p^2}}(z + k\varphi) \right] \end{aligned}$$

onde convençamos que os sinais \pm subscritos à esquerda em $\pm \Theta_{1T\pm}^{\pm}(\varphi, z)$ e $\pm \Theta_{2T\pm}^{\pm}(\varphi, z)$ correspondem aos sinais \pm adjacentes às raízes internas do lado direito da igualdade. Os demais sinais são de livre convenção.

O caso trivial $a_1 = 0$ ($a_0 \neq 0$) pode ser obtido diretamente da equação (D.21). Fazendo $u = a_0$ nesta equação obtemos a equação simplificada

$$a_0(a + 2ba_0^2 + ca_0^4) = 0$$

Devemos, portanto, obter as soluções não nulas das raízes desta equação. Estas raízes são dadas por

$$a_{0\pm}^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}}$$

Dessa forma, obtemos as seguintes soluções triviais para a TSG:

$$\Theta_{3T\pm}^{\pm}(\varphi, z) = 2 \arctan \left[\pm \sqrt{\frac{-\alpha + 5\gamma \pm \sqrt{(\alpha - 5\gamma)^2 - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha - 2\beta + 3\gamma)}}{\alpha - 2\beta + 3\gamma}} \right] \quad \text{(D.29)}$$

Outras possibilidades de solução, também, poderiam ser extraídas das equações (D.22).

Valores explícitos de p , q e r de funções que satisfazem a equação elíptica			
Funções elípticas, circulares, hiperbólicas...	p	q	r
sn	$-(1 + m^2)$	$2m^2$	1
sin	-1	0	1
tanh	-2	2	1
cn	$2m^2 - 1$	$-2m^2$	$1 - m^2$
cos	-1	0	1
sech	1	-2	0
dn	$2 - m^2$	-2	$-(1 - m^2)$
1	2	-2	-1
sech	1	-2	0
ns = 1/sn	$-(1 + m^2)$	2	m^2
cossec	-1	2	0
cotanh	-2	2	1
nc = 1/cn	$2m^2 - 1$	$2(1 - m^2)$	$-m^2$
sec	-1	2	0
cosh	0	0	-1
nd = 1/dn	$2 - m^2$	$-2(1 - m^2)$	-1
1	2	-2	-1
cosh	1	0	-1
sc = sn/cn	$2 - m^2$	$2(1 - m^2)$	1
tan	2	2	1
sinh	1	0	1
cs = cn/sn	$2 - m^2$	2	$1 - m^2$
cotan	2	2	1
cossech	1	2	0
sd = sn/dn	$2m^2 - 1$	$-2m^2(1 - m^2)$	1
sin	-1	0	1
sinh	1	0	1
ds = dn/sn	$2m^2 - 1$	2	$-m^2(1 - m^2)$
cossec	-1	2	0
cossech	1	2	0
cd = cn/dn	$-(1 + m^2)$	$2m^2$	1
cos	-1	0	1
1	-2	2	1
dc = dn/cn	$-(1 + m^2)$	2	m^2
sec	-1	2	0
1	-2	2	1
exp	1	0	0

 Figura D.1: Valores explícitos de p , q e r de funções que satisfazem a equação elíptica.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGRAW-HILL International Book Company, ed. 1, (1980).
- [2] T. Uhlig, M. Rahm, C. Dietrich, R. Hollinger, M. Heumann, D. Wiess and J. Zweck, *Phys. Rev. Lett.* , 237205 (2005).
- [3] M. Rahm, J. Stahl, W. Wegscheider and D. Wiess, *Appl. Phys. Lett.* 85, 1553 (2004).
- [4] M.L. Wang, *Phys. Lett A* 199, 169 (1995).
- [5] M.L. Wang, Y.B. Zhou and Z.B. Li, *Phys. Lett A* 216, 67 (1996).
- [6] L. Yang, Z. Zhu and Y. Wang, *Phys. Lett. A* 260, 55 (1999).
- [7] L. Yang, J. Liu and K. Yang, *Phys. Lett. A* 278, 267 (2001).
- [8] E.J. Parkes and B.R. Duffy, *Phys. Lett. A* 229, 217 (1997).
- [9] E. Fan, *Phys. Lett. A* 277, 212 (2000).
- [10] W. Malfliet, *Am. J. Phys.* 60, 650 (1992).
- [11] E.J. Parkes, *J. Phys. A* 27, L497 (1994).
- [12] B.R. Duffy, *Phys. Lett. A* 214, 271 (1996).
- [13] E.J. Parkes, Z. Zhu, B.R. Duffy and H.C. Huang, *Phys. Lett. A* 248, 219 (1998).
- [14] R. Hirota, *J. Math. Phys.* 14, 810 (1973).
- [15] N.A. Kudryashov, *Phys. Lett. A* 147, 287 (1990).
- [16] M. Otwinowski, R. Paul and W.G. Laidlaw, *Phys. Lett. A* 128, 483 (1988).
- [17] S.K. Liu, Z.T. Fu, S.D. Liu and Q. Zhao, *Appl. Math. Mech.* 22, 326 (2001).
- [18] C. Yan, *Phys. Lett. A* 224, 77 (1996).
- [19] A.V. Porubov, *Phys. Lett. A* 221, 391 (1996).
- [20] A.V. Porubov and M.G. Velarde, *J. Math. Phys.* 40, 884 (1999).
- [21] A.V. Porubov and D.F. Parker, *Wave Motion* 29, 97 (1999).
- [22] S.K. Liu, Z.T. Fu, S.D. Liu and Q. Zhao, *Phys. Lett. A* 289, 69 (2001).
- [23] Z.T. Fu, S.K. Liu, S.D. Liu and Q. Zhao, *Phys. Lett. A* 290, 72 (2001).
- [24] E.J. Parkes and B.R. Duffy, P.C. Abbott. *Phys. Lett. A* 295, 280 (2002).

- [25] Y.Z. Peng, Chin. J. Phys. 41, 103 (2003).
- [26] Y.Z. Peng, Phys. Lett. A 314, 401 (2003).
- [27] S.K. Liu, Z.T. Fu and S.D. Liu, Phys. Lett. A 351, 59 (2006).
- [28] Y.Z. Peng, Phys. Lett. A 314, 401 (2003).
- [29] E. Bowman, *Introduction to Elliptic Functions with Applications*, Universities London, (1959).
- [30] V. Prasolov, Y. Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*, American Mathematical Society, Providence, (1997).
- [31] E. Yomba, Phys. Lett. A 340, 149 (2005).
- [32] Hemachander Subramanian and J. E. Han, arxiv: 0705.4490v1, (2007).
- [33] R. Dandoloff and A. Saxena, Eur. Phys. J. B 29, 265-267 (2002).
- [34] A. Saxena and R. Dandoloff, Phys. Rev. B 66, 104414 (2002).
- [35] A. Saxena and R. Dandoloff, Phys. Rev. B 58, 563 (1997).
- [36] A. Saxena and R. Dandoloff, Phys. Rev. B 55, 11049 (1997).
- [37] V. L. Carvalho-Santos, A. R. Moura, W. A. Moura-Melo and A. R. Pereira, Phys. Rev. B 77, 134450 (2008).
- [38] S. Villain-Guillot and R. Dandoloff, Phys. Rev. B 52, 6712 (1995).
- [39] E. A. Silva and A. R. Pereira, Phys. Stat. Sol. (B) 213, 481 (1999).
- [40] E. A. Silva and A. R. Pereira, Sol. Stat. Communications 113, 669 (2000).
- [41] A. Saxena, R. Dandoloff and T. Lookman, Physica A 261, 13 (1998).
- [42] L. R. A. Belo, N. M. Oliveira-Neto, W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira and E. Ercolessi, Phys. Lett. A 365, 463 (2007).
- [43] V. A. De Lorenci and E. S. Moreira, Jr., Phys. Rev. D 67, 124002 (2003).
- [44] <http://www.maplesoft.com> Software Maple© Versão 10.