

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Heitor da Silva

Termodinâmica do Efeito Casimir a Baixas Temperaturas

Itajubá

2018

Heitor da Silva

Termodinâmica do Efeito Casimir a Baixas Temperaturas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Itajubá, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Data de defesa: 01 de novembro de 2018

Comissão Julgadora:

**Prof. Dr. Edisom de Souza Moreira
Junior**
Orientador

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Convidado 1

Prof. Dr. Gabriel Flores Hidalgo
Convidado 2

**Itajubá
2018**

*Este trabalho é dedicado a todas as pessoas que assim como eu
tem pensamentos fortes, não perdem a razão e sabem que o impossível
é só questão de opinião.*

*Mantenha a cabeça sempre levantada e o coração forte. Ao caminhar, não se concentre
muito no resultado final, pois dessa forma você não desfrutará dos passos
que lhe farão chegar até lá. São necessários infinitos passos para completar uma jornada.
Faça cada um valer a pena.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer a Deus. Se estou aqui hoje finalizando mais esta etapa é por sua graça. Houve momentos difíceis onde pensei que não fosse capaz de chegar aonde me encontro hoje. Naqueles momentos, Você sempre me amparou e me ajudou a seguir em frente. Também não posso deixar de Lhe agradecer pelas oportunidades que tem me brindado nessa vida. Todas são resultados dos meus sonhos, pelos quais busco trabalhar duro. Obrigado Deus por estar sempre ao meu lado.

Também gostaria de agradecer à minha família. Aos meus pais e meus irmãos pelo amor e apoio incondicional durante todas os momentos. Tivemos que aprender a lidar com a distância, mas vocês sempre foram compreensivos e buscaram me ajudar com sábias palavras, principalmente nos momentos onde me deparei com os momentos de frustração e forte autocrítica. Vocês sempre me ajudaram a me manter firme, com meus sonhos vivos e a vontade de vencer intacta.

Aos meus companheiros da República TatuRodando. Muito obrigado galera pelos momentos de alegria e descontração que me ajudaram a se manter sano durante esses anos de uma árdua caminhada, os momentos de brigas e discussões que mais nos uniram, do que nos afastaram. Vocês foram a minha segunda família durante todos esses anos. Se cheguei longe, isso também foi graças a vocês. Torço muito pelo sucesso de cada um e sei que seguiremos fortalecendo nossa amizade.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor Edison de Souza Moreira Junior. Lá se vão três anos e meio que estou sob sua orientação. Durante este período pude aprender muitas coisas com você. Foi um período muito gratificante para mim. Em especial, gostaria de lhe agradecer pelo apoio e motivação nos momentos onde desfrutei de outras oportunidades, e pela orientação exemplar durante a graduação e o mestrado.

Por fim, agradeço a todo o corpo docente da Universidade Federal de Itajubá pela formação que recebi em todos estes anos e à CAPES por fomentar a minha bolsa de mestrado, uma etapa essencial e de extrema importância em minha formação como pessoa e como futuro físico.

*“What’s a journey without a challenge?
Be thankful for the mountains.
Though the climb is tough, the view is worth it.
Be brave, Be a hero.”
Unknown*

RESUMO

SILVA, H. **Termodinâmica do Efeito Casimir a Baixas Temperaturas**. 2018. 129p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - PGF, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018.

Neste trabalho realizamos um estudo sistemático da termodinâmica do efeito Casimir baseado em sua configuração mais simples: duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras. A ênfase recai sobre o regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas. Primeiramente, com o intuito de ilustrar alguns métodos, trabalhamos com o campo escalar sem massa e com este tratamos o problema da construção do propagador de Feynman sujeito a condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para duas placas paralelas. Usando as expressões já renormalizadas obtidas para estes propagadores, calculamos as flutuações quânticas no estado de vácuo para os dois tipos de condição de contorno mencionadas, ilustrando como a obtenção de observáveis físicos pode ser feita via propagador. Continuamos com o campo eletromagnético onde encontramos as componentes do propagador para a configuração de Casimir à temperatura nula e finita. Com estas expressões, calculamos as componentes do tensor energia-momentum, que por sua vez, nos possibilitam encontrar a energia livre de Helmholtz do sistema para baixas e altas temperaturas, e conseqüentemente, derivar as grandezas termodinâmicas relevantes do sistema para ambos os regimes. Nesse estágio, fazemos um estudo detalhado dos aspectos termodinâmicos do sistema que consiste na análise de processos isotérmicos, isentrópicos e livres. Também estudamos a viabilidade de idealizar ciclos de Carnot, além de verificar que o teorema de Carnot é satisfeito. Por fim, fazemos uma investigação minuciosa da estabilidade termodinâmica do sistema. Derivamos as condições de equilíbrio que devem ser satisfeitas pela entropia e a energia interna, e com estas, juntamente com as expressões obtidas para estas grandezas no regime de baixas temperaturas, encontramos que o sistema é instável. Motivados por este resultado e pela existente conexão entre os regimes de baixas e altas temperaturas, que está codificada na simetria de inversão de temperatura, executamos a mesma análise para o regime de altas temperaturas. Quando não levamos em consideração as flutuações quânticas do vácuo para esse regime, temos que a radiação de corpo negro é um sistema estável. Contudo, quando a interação de Casimir é considerada, o sistema a altas temperaturas também viola as condições de estabilidade termodinâmica.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos. Termodinâmica. Estabilidade.

ABSTRACT

SILVA, H. **Thermodynamics of the Casimir Effect at Low Temperatures**. 2018. 129p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - PGF, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018.

In this work we carry out a systematic study of the thermodynamics of the Casimir effect based on its simplest configuration: two perfectly conducting and neutral parallel plates. The emphasis is on the regime of low temperatures and/or small plate separation. Firstly, in order to illustrate some methods, we work with the massless scalar field which allows us to treat the problem of the construction of the Feynman propagator subject to Dirichlet and Neumann boundary conditions for two parallel plates. Using the already renormalized expressions obtained for these propagators, we calculate the quantum vacuum fluctuations for these two types of boundary conditions and show how physical observables can be obtained through the propagator. We continue with the electromagnetic field where we find the components of the propagator for the Casimir configuration at zero and finite temperature. With these expressions, we compute the components of the energy-momentum tensor, which in turn enable us to find the system's Helmholtz free energy and consequently to derive the relevant thermodynamic quantities of the system for both regimes. At this stage, we make a detailed study of the thermodynamic aspects of the system where we analyze isothermal, isentropic and free processes. We also study the feasibility of performing Carnot cycles, as well as verifying that Carnot's theorem still holds. Finally, we do a thorough investigation of the thermodynamic stability of the system. We derive the equilibrium conditions to be satisfied by the entropy and the internal energy, and with these, together with the expressions obtained for these quantities in the low temperature regime, we find that the system is unstable. Motivated by this result and by the existence of the connection between the low and high temperature regimes, which is encoded in the temperature inversion symmetry, we perform the same analysis for the high temperature limit. When we do not take into account the quantum vacuum fluctuations for this regime, we find the blackbody radiation to be a stable system. However, when Casimir interaction is turned on, the system at high temperatures does also violate thermodynamic stability conditions.

Keywords: Quantum Field Theory. Thermodynamics. Stability.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de duas placas paralelas separadas por uma distância d .	26
Figura 2 – Comportamento de $\langle 0_d \tilde{\phi}^2(x) 0_d \rangle_D$ para $d = 1$.	40
Figura 3 – Comportamento de $\langle 0_d \tilde{\phi}^2(x) 0_d \rangle_N$ para $d = 1$.	40
Figura 4 – Expansão livre para radiação de corpo negro.	90
Figura 5 – Representação esquemática do ciclo de Carnot simples em $\xi \rightarrow 0$.	92
Figura 6 – Representação esquemática do ciclo de Carnot modificado no regime $\xi \rightarrow 0$.	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grandezas termodinâmicas para os diferentes regimes.	82
Tabela 2 – Relações adiabáticas para diferentes sistemas.	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PREÂMBULO: O CÁLCULO DAS FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO VÁCUO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS.	25
2.1	Propagador para o campo escalar sem massa - “Placas de Dirichlet”	26
2.2	Propagador para o campo escalar sem massa - “Placas de Neumann”	34
2.3	Flutuações quânticas do operador de campo no estado de vácuo . .	36
3	O PROPAGADOR DE FEYNMAN PARA O CAMPO ELETRO-MAGNÉTICO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS, NEUTRAS E PERFEITAMENTE CONDUTORAS	41
3.1	$D_{F\mu\nu}(x, x')$ à temperatura nula	43
3.2	$D_{F\mu\nu}(x, x')$ à temperatura finita	46
4	TENSOR ENERGIA-MOMENTUM ELETROMAGNÉTICO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS, NEUTRAS E PERFEITAMENTE CONDUTORAS	51
4.1	As componentes do termo de Casimir : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(0)}$	52
4.2	As componentes do termo de Radiação de Corpo Negro : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}$.	53
4.3	As componentes do termo misto : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$	54
4.3.1	$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ para $\xi \rightarrow 0$	55
4.3.2	$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ para $\xi \rightarrow \infty$	60
4.4	$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ completo	62
4.4.1	$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para $\xi \rightarrow 0$	62
4.4.2	$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para $\xi \rightarrow \infty$	63
5	A TERMODINÂMICA DO EFEITO CASIMIR	65
5.1	Regime $\xi \rightarrow \infty$ ($kTd/\hbar c \gg 1$)	65
5.1.1	A relação de Euler para $\xi \rightarrow \infty$	72
5.2	Regime $\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$)	74
5.2.1	A relação de Euler para $\xi \rightarrow 0$	80
5.3	Outros aspectos termodinâmicos do regime $\xi \rightarrow 0$	81
5.3.1	Processos Isotérmicos	82
5.3.2	Processos adiabáticos no regime $\xi \rightarrow 0$	84
5.3.3	Processos Isentrópicos	88
5.3.4	Expansão e Compressão livre	89
5.4	Ciclos de Carnot	91

5.5	Estabilidade termodinâmica	96
5.5.1	Condições intrínsecas de estabilidade para sistemas termodinâmicos	96
5.5.2	Análise da estabilidade termodinâmica da radiação de corpo negro	99
5.5.3	Análise da estabilidade termodinâmica para o regime $\xi \rightarrow 0$	101
5.5.4	Análise da estabilidade termodinâmica para o regime $\xi \rightarrow \infty$	103
6	CONCLUSÃO	105
	 APÊNDICES	 109
	APÊNDICE A – A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI	111
	APÊNDICE B – FUNÇÕES DE GREEN EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	115
	APÊNDICE C – ASPECTOS DA QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	117
	APÊNDICE D – $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO	121
	 REFERÊNCIAS	 125
	 ÍNDICE	 129

1 INTRODUÇÃO

O vácuo é um conceito que ainda hoje suscita uma grande curiosidade graças ao interesse de cientistas e filósofos em compreendê-lo. Popularmente, ele tem sua noção conectada à ideia de vazio. Por vazio, somos remetidos à ideia de nada, que fisicamente pode ser interpretada como a plena ausência de matéria. Este misterioso elemento da natureza pode dar origem aos mais diversos questionamentos, culminando em vários cenários. É em um destes cenários que reside o tema deste trabalho de mestrado. Neste trabalho abordamos o vácuo quântico e suas manifestações.

Na Física, o vácuo quântico é aquele que permeia regiões do espaço-tempo onde os campos são quânticos. Os avanços alcançados na pesquisa - teórica e experimental - neste tema durante o último século, conduziram a um cenário que nos dias de hoje nos permitem ter um conhecimento apurado acerca do papel que este vácuo desempenha em fenômenos físicos, seja no domínio microscópico ou macroscópico. Há muitos fenômenos onde o vácuo quântico possui papel de destaque, a saber, o desvio de Lamb, a emissão espontânea, as forças dispersivas de Van der Waals, entre outros. Não obstante, o efeito mais notável advindo das flutuações do vácuo quântico é certamente o *Efeito Casimir*, e será sobre este que versará essa dissertação.

Mas em que consiste o efeito Casimir?

Considere duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, que estão separadas por uma distância d no vácuo, à temperatura nula. É conhecido da eletrodinâmica clássica, que devido ao fato das placas serem neutras, não deve existir força elétrica entre elas. Eventualmente, poder-se-ia questionar a presença de uma força gravitacional entre as placas, mas estamos considerando suas massas desprezíveis. Dessa forma, ao se medir a força entre elas, presumimos que esta seja nula. Classicamente, é exatamente isso o que ocorre. Entretanto, ao se medir tal força, descobrimos que para separações muito pequenas entre as placas, esta existe e não é nula! Ainda mais espantoso é que as placas não se repelem, elas se atraem!

Este curioso fenômeno é conhecido como Efeito Casimir, e foi previsto teoricamente em 1948 por Hendrik Brugt Gerhard Casimir [1]. Casimir, aconselhado por Niels Bohr, decidiu levar em consideração a chamada energia de ponto-zero do vácuo do campo eletromagnético. O resultado encontrado por ele foi:

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4}, \quad (1.1)$$

onde vemos o caráter atrativo dessa força revelado pelo seu sinal negativo. Além disso, ela aumenta em módulo à medida que a distância entre as placas diminui. Julian Schwinger [2], laureado com o prêmio Nobel em Física de 1965, por suas singulares contribuições à

compreensão da eletrodinâmica quântica, fez o seguinte comentário anos depois sobre este resultado:

“One of the least intuitive consequences of quantum electrodynamics.”¹

Atribuir a existência do efeito Casimir às flutuações quânticas do vácuo é somente uma das várias interpretações existentes na literatura, que, de fato, são muitas. Independente da natureza e conteúdo de cada uma delas, o efeito por si só já é contra-intuitivo. Wolfgang Pauli [3], que recebeu o prêmio Nobel de Física de 1945 por seu *Princípio de Exclusão*, fez o seguinte comentário a respeito da energia de ponto-zero durante sua *Nobel Lecture* em 1946:

“It is clear that this physical zero-point energy has no physical reality.”²

Bryce DeWitt [4], que foi aluno de Schwinger, um dos principais opositores à essa ideia, também mostrou seu espanto com o resultado obtido por Casimir:

“What startled me, in addition to the crazy idea that a pair of electrically neutral conductors should attract one another, was the way in which Casimir said the forces could be computed, namely, by examining the effect on the zero-point energy of the electromagnetic vacuum caused by the mere presence of the plates. I had always been taught that the zero-point energy of a quantized field was unphysical.”³

Neste trabalho, nos abstermos de discutir os detalhes de tais interpretações sobre a natureza do efeito Casimir, embora citamos algumas fontes para que o leitor interessado no tema possa consultar à sua conveniência. As diferentes interpretações existentes na literatura podem ser agrupadas em três grupos:

- Energia de ponto-zero: Essa linha assume a existência de um campo eletromagnético que possui flutuações no seu estado fundamental, o estado de vácuo, que contém uma energia disponível para a realização de trabalho. (Exemplos desse método incluem Casimir [1], Mostepanenko [5]; Sahni & Starobinski [6]). A energia do campo é modificada pela imposição de restrições topológicas trazidas pela presença e tipo de material. No caso das duas placas paralelas, essa energia do vácuo é reduzida

¹ “Uma das consequências menos intuitivas da eletrodinâmica quântica.”

² “É claro que esta energia física de ponto-zero não possui realidade física.”

³ “O que me assustou, além da idéia maluca de que um par de condutores eletricamente neutros deveria atrair um ao outro, foi a maneira como Casimir disse que as forças poderiam ser calculadas, a saber, examinando o efeito sobre a energia de ponto-zero do vácuo eletromagnético causado pela mera presença das placas. Eu tinha sempre sido instruído que a energia de ponto zero de um campo quantizado não era física.”

(torna-se mais negativa) através do movimento de uma placa em direção à outra. A força de Casimir atrativa é uma consequência da “energia de ponto-zero” do vácuo.

- Força de Van de Waals devida ao conteúdo material: Essa segunda linha defende que não é necessário invocar as flutuações quânticas do vácuo eletromagnético para explicar o efeito Casimir, que é essencialmente reinterpretado como uma gigante força de Van der Waals (para exemplos desse método, veja os trabalhos de Schwinger, DeRaad & Milton [2] e Jaffe [7]). O material que constitui as placas é sujeito a flutuações quânticas. Essas perturbações espontâneas produzem correntes que geram campos dentro das placas, que por sua vez, interagem com o campo eletromagnético retardado que elas criam, resultando numa força sobre as placas.
- Aspecto quântico dual: Nessa interpretação, a força de Casimir é fundamentalmente uma propriedade do sistema acoplado campo-matéria, no qual a interação entre as placas é mediada por campos de ponto-zero [8, 9].

Adotaremos a interpretação de Casimir, onde é assumido que o efeito é decorrente das flutuações quânticas do vácuo do campo eletromagnético entre as placas. Apesar de Casimir ter realizado os seus cálculos para o campo eletromagnético, é importante salientar que o efeito existe para todos os campos quânticos relativísticos. Além disso, a natureza atrativa da força de Casimir não é universal. Ela pode depender do campo, do número de dimensões e da geometria [10, 11]. Um exemplo é o efeito Casimir para uma casca esférica. Casimir chegou a estudá-lo inclusive afirmando que a força seria atrativa. Anos mais tarde, coube a Timothy Boyer [12] em sua tese de doutorado mostrar que tal força era repulsiva. Ambjorn & Wolfram apresentam um estudo relativamente completo do cálculo da energia de Casimir para diferentes geometrias e campos [13]. Conhecida a energia, a força pode ser obtida sem muitos esforços.

A primeira tentativa de medição da força de Casimir foi feita por Sparnaay em 1958 [14]. Porém, os resultados obtidos apresentaram grandes barras de erro. Steven Weinberg no review sobre *O Problema da Constante Cosmológica* escrito há algumas décadas depois, apontou esse experimento como a primeira evidência da existência do efeito Casimir [15]. Na época, Sparnaay foi cauteloso e se restringiu a dizer que seus resultados não eram inconsistentes com a predição de Casimir. A verificação experimental do efeito foi feita em um experimento conduzido por Steve Lamoreaux [16] em 1997, quase cinquenta anos depois de sua descoberta. Outros experimentos independentes foram executados, dentre os quais destacam-se os de Mohideen & Roy [17] e Capasso, Munday, Iannuzzi & Chan [18]. Devemos enfatizar que embora esses experimentos tenham comprovado o efeito, nenhum deles foi feito com a configuração original de duas placas paralelas. Logo, nenhum deles mediu o resultado (1.1) encontrado por Casimir, mas sim resultados já derivados na época para outras geometrias. Um dos poucos experimentos que utilizou o setup original foi o

executado por Bressi et al [19], que apresentou erros na casa de 15%. Experimentalmente, o setup das duas placas paralelas representa uma tarefa muito complexa para ser idealizada, pois é muito difícil manter a sua estabilidade.

A motivação na realização dos experimentos vai muito além do interesse em comprovar os resultados teóricos que foram obtidos ao longo dos anos para configurações diversas. Há também um grande interesse tecnológico. O avanço alcançado no entendimento da mecânica quântica nos últimos anos propiciou uma maior compreensão das propriedades dos materiais a nível microscópico, impulsionando os investimentos em tecnologias que estão intimamente relacionadas a fenômenos sensíveis nas micro e nanoescalas, que podem afetar positivamente ou negativamente o funcionamento de dispositivos. Um desses fenômenos é o efeito Casimir, que possui uma estreita relação com efeitos dissipativos. O efeito Casimir também pode aparecer no contexto de átomos ultrafrios, uma área que cresceu vertiginosamente nos últimos vinte anos. Átomos ultrafrios oferecem um cenário único para a simulação de sistemas de muitos corpos. O alto grau de controle dos parâmetros físicos que pode ser alcançado nesse tipo de sistema, proporciona configurações atraentes quando comparados com os sistemas naturais da matéria condensada, indo na direção da visão de Feynman para a construção de simuladores quânticos [20]. Como o próprio nome já indica, esses átomos ultrafrios são mantidos a temperaturas baixíssimas, muito próximas ao zero absoluto. Nessa faixa de temperatura, propriedades quânticas se tornam extremamente importantes, sendo justamente aí onde entram em cena as forças de Casimir. Um exemplo muito interessante envolve os chamados *Quantum Droplets*. Recentemente, pesquisadores do grupo de Átomos Ultrafrios do Instituto de Ciências Fotônicas (ICFO) em Barcelona [21], em experimentos com misturas de condensados de Bose-Einstein, criaram gotículas que são muito menos densas que qualquer líquido existente em circunstâncias normais. As partículas que formam essas gotículas, que foram batizadas como Quantum Droplets, possuem uma tendência maior de atração do que de repulsão entre si mesmas. Esse aspecto contribui para a formação e manutenção da estabilidade desse líquido, o que está diretamente associado com as flutuações quânticas do vácuo, logo, às forças de Casimir.

Voltando ao desenvolvimento teórico acerca do efeito, Lifshitz [22] generalizou os resultados encontrados por Casimir para placas metálicas mais realísticas e também dielétricos. Para o leitor interessado em obter uma visão mais robusta dos avanços alcançados, há vários reviews, dentre os quais destaca-se o de Steve Lamoreaux [23], publicado em 2005 onde é apresentada uma revisão da teoria da força de Casimir e suas correções para materiais reais e para temperatura finita, além de abordar a parte experimental e aplicações.

O estudo apresentado nessa dissertação versa sobre a termodinâmica do efeito Casimir, com ênfase no regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre

as placas. No regime oposto, veremos que nossas expressões se resumem à radiação de corpo negro acompanhadas de correções devidas à inclusão da energia de ponto-zero. Quando a distância entre as placas ou a temperatura tende ao infinito, os termos de corpo negro prevalecem e então ficamos com a termodinâmica do gás de fótons, que é bem compreendida. Sem dúvidas, a principal motivação para o desenvolvimento desse trabalho é a escassez de estudos sobre a termodinâmica do efeito Casimir. Brown & Maclay foram os primeiros a tratar aspectos termodinâmicos do efeito Casimir [24], mas de forma bem discreta. Estes foram seguidos por Ambjorn & Wolfram [13] e Balian & Duplantier [25]. Já no ano 1998, Sassaroli et al. [26] apontaram que a energia entre as duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, isto é, a energia de Casimir, viola a condição de estabilidade normalmente associada com a 2ª Lei da Termodinâmica. No ano de 2000, Mitter & Robaschik exploraram alguns processos termodinâmicos desse sistema [27]. Um estudo mais completo se mostra fundamental, não somente para o desenvolvimento teórico e experimental da área, mas também tendo impactos no desenvolvimento de tecnologias que estejam estreitamente ligadas ao efeito. E este é o objetivo desse trabalho.

Esta dissertação está organizada como segue:

- No capítulo 2 apresentamos a construção do propagador de Feynman sujeito às condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Com estas expressões, mostramos como o propagador pode ser usado para obter observáveis físicos. Em especial, calculamos a flutuação quântica no vácuo para o campo escalar entre duas placas, isto é, $\langle 0|\phi^2(x)|0\rangle$, para os dois tipos de condição de contorno mencionadas.
- No capítulo 3 discorremos sobre o propagador de Feynman para o campo eletromagnético sujeito a condições de contorno para o condutor perfeito. Calculamos as componentes de $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras à temperatura nula e à temperatura finita.
- Já no capítulo 4 utilizamos as expressões encontradas para o propagador de Feynman eletromagnético sujeito às condições de contorno do condutor perfeito para encontrar as componentes do tensor energia-momentum.
- Finalmente, no capítulo 5, obtemos a energia livre de Helmholtz para os regimes de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas ($Td \rightarrow 0$) e altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas ($Td \rightarrow \infty$). Com a energia livre conhecida, derivamos as demais quantidades termodinâmicas do sistema. Analisamos alguns processos termodinâmicos para o regime $Td \rightarrow 0$ e finalizamos com um estudo da estabilidade do sistema. Buscaremos sempre comparar os resultados obtidos para o regime $Td \rightarrow 0$ com aqueles já conhecidos para a radiação de corpo negro usual, com o intuito de facilitar a interpretação da nova física trazida pela introdução da energia de ponto-zero.

Utilizaremos a métrica de Minkowski com assinatura $(+ - - -)$. Com respeito a unidades, empregamos o sistema natural, ou seja, $\hbar = c = k = 1$. Estas serão restabelecidas no final do capítulo 4.

2 PREÂMBULO: O CÁLCULO DAS FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO VÁCUO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS.

Este capítulo possui dois objetivos: o primeiro, é exemplificar o cálculo do propagador de Feynman sujeito a condições de contorno. O segundo é ilustrar como este mesmo propagador pode ser empregado na obtenção de observáveis físicos. Para isto, calcularemos o valor esperado do campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ ao quadrado entre duas placas paralelas no estado de vácuo, isto é, estamos interessados em obter $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle$ (ou simplesmente, $\langle \phi^2 \rangle$) que é um observável. Esse exemplo visa familiarizar o leitor com o procedimento que será utilizado posteriormente para a construção do propagador para o campo eletromagnético também entre duas placas paralelas, porém estas serão neutras e perfeitamente condutoras. Ademais, introduziremos um processo de renormalização, que têm como efeito suprimir os infinitos, resultando em valores finitos para as quantidades físicas de interesse.

Para o campo escalar, o propagador de Feynman é definido como sendo:

$$iG_{\mathbf{F}}(x, x') = \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \quad (2.1)$$

onde \mathcal{T} representa o *Operador de Ordenamento Temporal*⁴. A equação de movimento obedecida por este propagador é dada pela equação (B.10) do Apêndice B para $m = 0$, o que resulta em:

$$\square_x G_{\mathbf{F}}(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = -\delta^4(x - x'), \quad (2.2)$$

onde

$$\square_x = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2, \quad (2.3)$$

e

$$\delta^4(x - x') = \delta(t - t')\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.4)$$

Mais detalhes acerca das funções de Green para o campo escalar, podem ser consultados no Apêndice B.

O propagador de Feynman será obtido para dois tipos de condições de contorno. Na seção 2.1 trataremos o caso da condição de contorno de Dirichlet, onde denotaremos por $\psi_{\omega, \vec{k}}(x)$ as autofunções do operador \square_x sujeitas a este tipo de condição de contorno. Já na seção 2.2 será abordada a condição de contorno de Neumann, cujas autofunções do operador \square_x serão representadas por $\Upsilon_{\omega, \vec{k}}(x)$. Por último, na seção 2.3, calcularemos as flutuações quânticas do operador de campo escalar no estado de vácuo para os dois casos e faremos uma análise dos resultados obtidos.

⁴ Na literatura, a convenção é utilizar a letra T para denotar este operador. Porém, como mais adiante lidaremos com a temperatura, preservaremos a letra T para se referir a esta grandeza escalar.

2.1 Propagador para o campo escalar sem massa - “Placas de Dirichlet”

A figura 1 mostra a configuração de duas placas paralelas que será utilizada nesse capítulo para calcular as flutuações do quadrado do operador de campo escalar para condição de contorno de Dirichlet e Neumann, e posteriormente, nos demais capítulos onde tais placas serão feitas de um material condutor perfeito. Cada um destas placas possui uma área A e estas estão separadas por uma distância d , que assumimos ser muito menor comparada às dimensões longitudinais às superfícies destas.

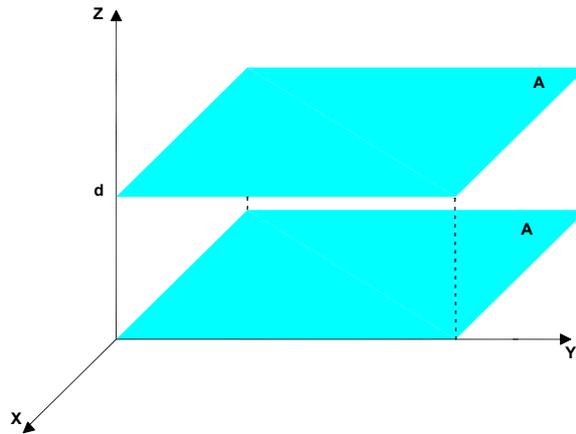


Figura 1: Representação de duas placas paralelas separadas por uma distância d .

Começamos com a situação de duas placas de Dirichlet. Nesse caso, as autofunções do operador \square_x dadas por $\psi_{\omega, \vec{k}}(x)$ são soluções da seguinte equação:

$$\square_x \psi_{\omega, \vec{k}}(x) = E_{\omega, \vec{k}} \psi_{\omega, \vec{k}}(x) \quad (2.5)$$

sendo $E_{\omega, \vec{k}}$ os autovalores do operador \square_x . A condição de contorno de Dirichlet assume que a autofunção se anula na superfície das placas. As placas estão localizadas em $z = 0$ e $z = d$. Logo, $\psi_{\omega, \vec{k}}$ deve obedecer às seguintes condições de contorno:

$$\psi_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, 0) = 0 \quad , \quad \psi_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, d) = 0. \quad (2.6)$$

O próximo passo consiste na construção das autofunções que satisfazem (2.5) sujeito à condição de contorno de Dirichlet, que é expressa pelas relações dadas em (2.6). Para isto, vamos utilizar o seguinte *ansatz*:

$$\psi_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, z) = \lambda \exp [i(k_x x + k_y y - \omega t)] \sin(k_z z) \quad (2.7)$$

Da equação (2.5), segue que

$$\square_x \psi_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, z) = (\vec{k}^2 - \omega^2) \psi_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, z)$$

ou seja,

$$E_{\omega, \vec{k}} = \vec{k}^2 - \omega^2 \quad (2.8)$$

são os autovalores do operador \square_x .

Retornando à condição de contorno de Dirichlet na Eq. (2.6), obtemos a seguinte restrição para os valores de k_z :

$$k_z d = n\pi \Rightarrow k_z = \frac{n\pi}{d}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Dessa forma, as autofunções serão dadas por:

$$\psi_{\omega, k_x, k_y, n}(t, x, y, z) = \lambda \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right), \quad (2.10)$$

com autovalores

$$E_{\omega, k_x, k_y, n} = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - \omega^2. \quad (2.11)$$

Essas autofunções devem ser ortonormalizadas. Tal exigência é representada pela relação de completeza [28]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\omega, k_x, k_y, n}^*(x') = \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (2.12)$$

que possibilita determinar o valor da constante de normalização λ .

Substituindo $\psi_{\omega, k_x, k_y, n}(t, x, y, z)$ dada em (2.10) em (2.12), para o lado esquerdo, teremos:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\omega, k_x, k_y, n}^*(x') \\ &= |\lambda|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k_x (x - x')} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k_y (y - y')} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \omega (t - t')} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

E invocando as seguintes representações para a distribuição *Delta de Dirac*⁵:

$$\begin{aligned} \delta(t - t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k_x (x-x')} dk_x \\ \delta(y - y') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k_y (y-y')} dk_y \\ \delta(z - z') &= \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

⁵ Todas estas representações podem ser encontradas na Ref. [29]. Em especial, a representação da Delta de Dirac para a variável z é discutida no exercício 14.4.6 (a) da página 781.

permite colocar a equação (2.13) na forma

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\omega, k_x, k_y, n}^*(x') \\ & = |\lambda|^2 d \frac{(2\pi)^3}{2} \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z'). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente, comparando (2.15) com (2.12), leva a:

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 d \frac{(2\pi)^3}{2} \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') & = \delta(t-t') \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \\ \Rightarrow \frac{(2\pi)^3}{2} d |\lambda|^2 = 1 & \Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{2}{(2\pi)^3 d} \quad \therefore \lambda = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3 d}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Portanto, as autofunções que obedecem à condição de contorno de Dirichlet são dadas por:

$$\psi_{\omega, k_x, k_y, n}(t, x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3 d}} \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right). \quad (2.17)$$

Vamos denotar o propagador de Feynman sob condições de Dirichlet por $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$. Para construí-lo, utilizaremos uma representação chamada de *Representação de Tempo Próprio* [28]. Vamos considerar o kernel $K(x, x', \eta)$ que satisfaz uma equação de movimento dada por:

$$i \frac{\partial}{\partial \eta} K(x, x', \eta) = \square_x K(x, x', \eta). \quad (2.18)$$

O parâmetro η é um número real que tem como papel representar o tempo, neste caso, o que chamaremos de *tempo próprio*. Assumindo que para $\eta = 0$ e $\eta = \pm\infty$, este kernel satisfaça as seguintes condições de contorno:

$$K(x, x', 0) = \delta(x - x') \quad , \quad K(x, x', \pm\infty) = 0 \quad (2.19)$$

o propagador de Feynman pode ser então dado pela relação:

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = -i \int_0^{\infty} K(x, x', \eta) d\eta. \quad (2.20)$$

Para nos certificarmos que este *ansatz* realmente funciona, aplicamos o operador \square_x a esta fórmula. Ao fazer isto, teremos:

$$\begin{aligned} \square_x G_{\mathbf{F}}^D(x, x') & = -i \square_x \int_0^{\infty} K(x, x', \eta) d\eta \\ & = -i \int_0^{\infty} [\square_x K(x, x', \eta)] d\eta, \end{aligned}$$

e recorrendo às equações (2.18) e (2.19), encontramos:

$$\begin{aligned} \square_x G_{\mathbf{F}}^D(x, x') & = -i \int_0^{\infty} [\square_x K(x, x', \eta)] d\eta \\ & = -i(i) \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} K(x, x', \eta) d\eta \\ & = K(x, x', \eta) \Big|_0^{\infty} \\ \therefore \square_x G_{\mathbf{F}}^D(x, x') & = -\delta(x - x'), \end{aligned}$$

confirmando a equação (2.2).

Podemos verificar facilmente que $K(x, x', \eta)$ é dado por:

$$K(x, x', \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\eta E_{\omega, k_x, k_y, n}} \psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\omega, k_x, k_y, n}^*(x') \quad (2.21)$$

e substituindo-o na equação (2.20), encontramos que $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$ vem dado pela relação:

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = -i \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\eta E_{\omega, k_x, k_y, n}} \psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\omega, k_x, k_y, n}^*(x'). \quad (2.22)$$

Antes de prosseguir com o cálculo do propagador, devemos verificar que (2.22) é realmente solução da equação (2.2). Para isto, precisaremos das relações (2.5) e (2.12). Segue que

$$\begin{aligned} \square_x G_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= -i \square_x \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\eta E} \psi_{\omega, \vec{k}}(x) \psi_{\omega, \vec{k}}^*(x') \\ &= -i \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\eta E} \square_x \left[\psi_{\omega, \vec{k}}(x) \psi_{\omega, \vec{k}}^*(x') \right] \\ &= -i \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\eta E} \psi_{\omega, \vec{k}}^*(x') \left[\square_x \psi_{\omega, \vec{k}}(x) \right] \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{\omega, \vec{k}}(x) \psi_{\omega, \vec{k}}^*(x') \int_0^{\infty} d\eta e^{-i\eta E} E \\ &= -i \delta(t - t') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \int_0^{\infty} d\eta e^{-i\eta E} E \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para a integral em η , consultando a Ref. [30], encontramos:

$$\int_0^{\infty} e^{-iax} a dx = -i ; \quad \text{Im}(a) < 0. \quad (2.24)$$

Como em (2.23), $\text{Im}(E) = 0$, será necessário escrever E como sendo igual ao limite:

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (E - i\alpha). \quad (2.25)$$

Com isso, teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-i\eta E} E d\eta &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-i(E-i\alpha)\eta} (E - i\alpha) d\eta = i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{(-iE-\alpha)\eta} (-iE - \alpha) d\eta \\ &= i \lim_{\alpha \rightarrow 0} (-iE - \alpha) \int_0^{\infty} e^{(-iE-\alpha)\eta} d\eta = i \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{(-iE-\alpha)\eta} \Big|_0^{\infty} \\ &= -i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dessa forma, a equação (2.23) se torna

$$\square_x G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = -\delta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

confirmando a equação (2.2).

Retomando o cálculo de $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$, a substituição das expressões de $E_{\omega, k_x, k_y, n}$ e $\psi_{\omega, k_x, k_y, n}(x)$ dadas em (2.11) e (2.17) em (2.22), implica em:

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = -\frac{2i}{(2\pi)^3 d} \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty e^{i\eta\omega^2 - i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta k_x^2 + ik_x(x-x')} dk_x \\ \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta k_y^2 + ik_y(y-y')} dk_y \sum_{n=1}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right)$$

Como o termo da soma em n é uma função par, podemos reescrevê-lo na forma

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right)$$

observando que o termo correspondente a $n = 0$ é identicamente nulo. Com essa alteração, $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$ se torna

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = -\frac{i}{(2\pi)^3 d} \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty e^{i\eta\omega^2 - i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta k_x^2 + ik_x(x-x')} dk_x \\ \int_{-\infty}^\infty e^{-i\eta k_y^2 + ik_y(y-y')} dk_y \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) \quad (2.27)$$

Antes de realizar as integrais, é necessário manipular um pouco a expressão que envolve o somatório. Utilizando a notação de Euler para escrever a função seno, segue que:

$$\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) \\ = -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \left(e^{i\frac{n\pi z}{d}} - e^{-i\frac{n\pi z}{d}} \right) \left(e^{i\frac{n\pi z'}{d}} - e^{-i\frac{n\pi z'}{d}} \right) \\ = -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \left(e^{i\frac{n\pi(z+z')}{d}} - e^{i\frac{n\pi(z-z')}{d}} \right) - \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \left(e^{-i\frac{n\pi(z+z')}{d}} - e^{-i\frac{n\pi(z-z')}{d}} \right)$$

Trocando n por $-n$ na segunda soma, esta se torna idêntica à primeira. Logo, encontramos:

$$\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \left(e^{i\frac{n\pi(z+z')}{d}} - e^{i\frac{n\pi(z-z')}{d}} \right),$$

ou ainda,

$$\sum_{n=-\infty}^\infty e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2}} \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{d}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^\infty \left(e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2} + i\frac{n\pi(z+z')}{d}} - e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2} + i\frac{n\pi(z-z')}{d}} \right). \quad (2.28)$$

Essas somas podem ser manipuladas um pouco mais, a fim de obter formas mais convenientes e simples. Para isto, usaremos a representação integral da Delta de Dirac e a *Fórmula de Poisson*⁶ [29], que são dadas pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(\chi - 2\pi n) d\chi = 1, \quad (2.29)$$

⁶ Veja o exercício 14.3.12 na página 776 da Ref. [29].

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\chi - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\chi n}. \quad (2.30)$$

O uso destas expressões na soma (2.28), conduz a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2} + i \frac{n\pi(z+z')}{d}} - e^{-i\eta \frac{n^2 \pi^2}{d^2} + i \frac{n\pi(z-z')}{d}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\chi - 2\pi n) d\chi \left(e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z+z')}{2d}} - e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z-z')}{2d}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\chi - 2\pi n) d\chi \left(e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z+z')}{2d}} - e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z-z')}{2d}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\chi n} d\chi \left(e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z+z')}{2d}} - e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z-z')}{2d}} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z+z'-2dn)}{2d}} - e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z-z'-2dn)}{2d}} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A implementação da alteração dada em (2.31) na expressão parcial para $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$ em (2.27), resulta em:

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= \frac{i}{2(2\pi)^4 d} \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\omega^2 - i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta k_x^2 + ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta k_y^2 + ik_y(y-y')} dk_y \\ & \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \left(e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z+z'-2dn)}{2d}} - e^{-i\eta \frac{\chi^2}{4d^2} + i \frac{\chi(z-z'-2dn)}{2d}} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nesse ponto, podemos iniciar o cálculo das integrais. A integral em η será a última a ser realizada. Todas as demais possuem o integrando da forma $e^{-a^2 k^2 \pm bk}$ e seus limites de integração vão de $-\infty$ a ∞ . Para calcular esse tipo de integral vamos usar a equação (3.323.2) da Ref. [30],

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 k^2 \pm bk} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(\frac{b^2}{4a^2}\right); \quad Re(a^2) > 0. \quad (2.33)$$

Iniciamos com a integração em k_x . Porém, devemos estar atentos à restrição de convergência que acompanha (2.33), isto é, que $Re(a^2) > 0$. De (2.32), comparando a integral em k_x com (2.33), podemos fazer as seguintes identificações:

$$a^2 = i\eta, \quad b = i(x - x') \quad (2.34)$$

Como $Re(a^2) = 0$, a condição de convergência não é satisfeita. Para contornar esse problema devemos tratar $a^2 = i\eta$ como sendo igual ao limite:

$$a^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} i(\eta - i\epsilon) \quad (2.35)$$

Com a introdução desse fator ϵ podemos calcular a integral e garantir a convergência da mesma. Ao fazer isso, encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta k_x^2 + ik_x(x-x')} dk_x &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\eta - i\epsilon)k_x^2 + ik_x(x-x')} dk_x \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{i(\eta - i\epsilon)}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4i(\eta - i\epsilon)}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{i\eta}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4i\eta}\right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Podemos fazer o mesmo para a integral no momento k_y com a introdução de um fator infinitesimal γ , o que leva a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta k_y^2 + ik_y(y-y')} dk_y &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\eta - i\gamma)k_y^2 + ik_y(y-y')} dk_y \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{i(\eta - i\gamma)}} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4i(\eta - i\gamma)}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{i\eta}} \exp\left[-\frac{(y-y')^2}{4i\eta}\right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Prosseguindo com a integral em ω , analogamente ao que foi feito acima para as integrais nos momentos k_x e k_y , introduzimos um fator infinitesimal σ , de tal forma que:

$$a^2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} -i(\eta + i\sigma) \quad (2.38)$$

e de (2.33), implica:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\omega^2 - i\omega(t-t')} d\omega &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[-i(\eta + i\sigma)]\omega^2 - i\omega(t-t')} d\omega \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{-i(\eta + i\sigma)}} \exp\left[\frac{(t-t')^2}{4i(\eta + i\sigma)}\right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{-i\eta}} \exp\left[\frac{(t-t')^2}{4i\eta}\right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A integral em χ é calculada similarmente, já que esta possui a mesma forma de (2.33). Porém, é conveniente fazer a seguinte mudança de variável:

$$w = \frac{\chi}{2d} \rightarrow dw = \frac{d\chi}{2d} \quad (2.40)$$

Dessa forma, o cálculo da integral resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\eta}{4d^2}\chi^2 + i\chi\frac{(z \pm z' - 2dn)}{2d}} d\chi &= 2d \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta w^2 + iw(z \pm z' - 2dn)} dw \\ &= 2d \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\eta - i\tau)w^2 + iw(z \pm z' - 2dn)} dw \\ &= 2d \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{i(\eta - i\tau)}} \exp\left[-\frac{(z \pm z' - 2dn)^2}{4i(\eta - i\tau)}\right] \\ &= 2d \sqrt{\frac{\pi}{i\eta}} \exp\left[-\frac{(z \pm z' - 2dn)^2}{4i\eta}\right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

A substituição de (2.36),(2.37),(2.39) e (2.41) em (2.32), culmina na seguinte expressão para $G_{\mathbf{F}}^D(x, x')$:

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x') = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\eta \left\{ \frac{\exp \left[-i \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z'-2dn)^2}{4\eta} \right]}{\eta^2} - \frac{\exp \left[-i \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z'-2dn)^2}{4\eta} \right]}{\eta^2} \right\} \quad (2.42)$$

Por último, calculamos a integral em η . Para isto, usaremos o resultado (3.471.1) da Ref. [30]

$$\int_0^u \frac{\exp\left(\frac{-b}{x}\right)}{x^2} dx = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{b}{u}\right) \quad (2.43)$$

onde tomando $b = \frac{ia^2}{4}$ e notando que $u \rightarrow \infty$, encontramos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-ia^2}{4x}\right)}{x^2} dx = -\frac{4i}{a^2}; \quad \text{Im}(a^2) < 0. \quad (2.44)$$

Finalmente, encontramos:

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\eta \left\{ \frac{\exp \left[-i \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z'-2dn)^2}{4\eta} \right]}{\eta^2} - \frac{\exp \left[-i \frac{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z'-2dn)^2}{4\eta} \right]}{\eta^2} \right\} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-4i) \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z'-2dn)^2} - \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z'-2dn)^2} \right] \\ \therefore G_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z'-2dn)^2} - \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z'-2dn)^2} \right] \quad (2.45) \end{aligned}$$

é o propagador de Feynman entre duas placas com condições de contorno de Dirichlet.

Fazendo $n = 0$ em (2.45), teremos:

$$G_{\mathbf{F}}^D(x, x')_{n=0} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2} - \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z')^2} \right] \quad (2.46)$$

O primeiro termo dessa expressão é exatamente o propagador de Feynman na ausência das placas [31], que denotaremos por $G_{\mathbf{F}}^{D(0)}(x, x')$, ou seja:

$$G_{\mathbf{F}}^{D(0)}(x, x') = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2} \quad (2.47)$$

Notamos que no limite $x_\mu \rightarrow x'_\mu$, $G_{\mathbf{F}}^{D(0)}(x, x')$ diverge. Introduzimos aqui um processo de renormalização com o objetivo de suprimir essa divergência. Essa renormalização é bem simples: ela consiste na redefinição do propagador de Feynman como segue:

$$\tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') = G_{\mathbf{F}}^D(x, x') - G_{\mathbf{F}}^{D(0)}(x, x'). \quad (2.48)$$

Portanto, $\tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x')$ será dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') = & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \right] \\ & - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.2 Propagador para o campo escalar sem massa - “Placas de Neumann”

Agora faremos o mesmo para a condição de contorno de Neumann. Essa condição assume que a derivada da autofunção se anula na superfície das placas. Lembrando que as placas estão localizadas ao longo do eixo z , em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, $\Upsilon_{\omega, \vec{k}}$ deve obedecer às seguintes condições:

$$\left. \frac{d\Upsilon_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, z)}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{d\Upsilon_{\omega, \vec{k}}(t, x, y, z)}{dz} \right|_{z=d} = 0. \quad (2.50)$$

O próximo passo consiste na construção das autofunções que satisfazem (2.2) sujeito à condição de contorno de Neumann, que é expressa pelas relações em (2.50). Para isto, vamos utilizar o *ansatz*:

$$\Upsilon_{\omega, \vec{k}}(x) = \varsigma \exp [i(k_x x + k_y y - \omega t)] \cos(k_z z) \quad (2.51)$$

Os valores de k_z continuarão sendo dados por (2.9) e os autovalores do operador \square_x por (2.11). Novamente, as autofunções devem satisfazer a condição de completude (2.12). Aplicando-a ao *ansatz* (2.51) e seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente para a construção dos modos que satisfazem (2.2) sujeitos à condição de contorno de Dirichlet, encontramos o seguinte valor para a constante de normalização ς em (2.51):

$$\varsigma = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3 d}}. \quad (2.52)$$

É importante mencionar que os cálculos envolvendo as integrais nos momentos k_j e na frequência ω são os mesmos feitos para o caso anterior. A única diferença está na função

dependente de z . Para a condição de contorno de Dirichlet, $\psi_{\omega, k_x, k_y, n}$ é proporcional à função seno, enquanto que $\Upsilon_{\omega, k_x, k_y, n}$ é proporcional à função cosseno. Assim, no cálculo de ζ utilizamos a seguinte representação para a Delta de Dirac em z ao invés daquela apresentada em (2.14):

$$\delta(z - z') = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \cos\left(\frac{n\pi z'}{d}\right). \quad (2.53)$$

Portanto, as autofunções são dadas por:

$$\Upsilon_{\omega, k_x, k_y, n}(x) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3 d}} \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right). \quad (2.54)$$

A construção do propagador de Feynman também é semelhante com as autofunções dadas por (2.54). Novamente haverá uma sutil diferença devido à presença da função cosseno, que se refletirá num sinal positivo para o segundo termo de (2.46) ao invés do sinal negativo.

Portanto, o propagador de Feynman que satisfaz a condição de contorno de Neumann será dado por:

$$G_{\mathbf{F}}^N(x, x') = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} + \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right], \quad (2.55)$$

confirmando a expressão encontrada na Ref. [32]. Sua expressão renormalizada, obtida com a remoção de (2.47), é dada por:

$$\tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x') = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \right] + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right]. \quad (2.56)$$

Resumindo, temos

$$\tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \right] - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right], \quad (2.57)$$

$$\tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x') = \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \right] + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right]. \quad (2.58)$$

2.3 Flutuações quânticas do operador de campo no estado de vácuo

Utilizando as expressões (2.57) e (2.58) podemos calcular $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle$ para os dois tipos de condição de contorno analisados e então compará-los. A expressão que nos permite obter esse resultado está presente na Ref. [28] e vem dada por:

$$\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle = \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x') \quad (2.59)$$

De fato, da definição de $G^{(1)}(x, x')$ na equação (B.2) do Apêndice B, teremos:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x') &= \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\phi(x)\phi(x') + \phi(x')\phi(x)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

que no limite $x'_\mu \rightarrow x_\mu$, leva a:

$$\lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} G^{(1)}(x, x') = 2 \langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle,$$

Assim, ficamos com:

$$\lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle \equiv \langle \phi^2(x) \rangle.$$

Ainda, usando a definição do propagador de Feynman em termos da *Função de Green média*, $\overline{G}(x, x')$ e da *Função Elementar de Hadamard*, $G^{(1)}(x, x')$ na equação (B.7) do Apêndice B, podemos escrever $\langle \phi^2(x) \rangle$ na forma:

$$\begin{aligned} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x') &= \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \frac{1}{2} [2iG_{\mathbf{F}}(x, x') + 2i\overline{G}(x, x')] \\ &= i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} G_{\mathbf{F}}(x, x') + i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \overline{G}(x, x') \end{aligned}$$

e como $\lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \overline{G}(x, x') = 0$ [28], encontramos, finalmente, que:

$$\langle \phi^2(x) \rangle = i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} G_{\mathbf{F}}(x, x'). \quad (2.60)$$

Em todas estas expressões, $|0\rangle$ representa o vácuo de Minkowski. Porém, o cálculo do valor esperado de $\phi^2(x)$ será feito entre duas placas paralelas. Neste caso, o vácuo de Minkowski, $|0\rangle$, não é o estado de vácuo para os modos $\psi_{\omega, k_x, k_y, n}$ e $\Upsilon_{\omega, k_x, k_y, n}$. Logo, devemos definir um novo estado de vácuo para cada uma das situações, isto é, um estado referente ao problema de Dirichlet e outro para o problema de Neumann. Denotaremos estes estados por $|0_d\rangle$ e $|0_n\rangle$, respectivamente, que estarão associados com os modos dados em (2.17) e (2.54). Podemos pensar em $|0_d\rangle$, $|0_n\rangle$ e $|0\rangle$ como estados diferentes do mesmo sistema físico, uma vez que as duas placas estão naturalmente inseridas em \mathbb{R}^3 [33].

Assim, utilizando o propagador de Feynman, $\langle 0_d | \tilde{\phi}^2(x) | 0_d \rangle$ e $\langle 0_n | \tilde{\phi}^2(x) | 0_n \rangle$ serão calculados das expressões:

$$\langle 0_d | \tilde{\phi}^2(x) | 0_d \rangle = \langle 0_d | \phi^2(x) | 0_d \rangle - \langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle_{livre} = i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') \quad (2.61)$$

$$\langle 0_n | \tilde{\phi}^2(x) | 0_n \rangle = \langle 0_n | \phi^2(x) | 0_n \rangle - \langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle_{livre} = i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x') \quad (2.62)$$

onde $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle_{livre}$ representa as flutuações quânticas do estado de vácuo na ausência das placas.

Começamos com o caso de Dirichlet, onde denotaremos o observável por $\langle 0_d | \tilde{\phi}^2(x) | 0_d \rangle_D$, ou simplesmente, $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$. No limite $x'_\mu \rightarrow x_\mu$, das Eqs. (2.57) e (2.61), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{4d^2 n^2} + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2z - 2dn)^2} \\ &= -\frac{i}{16\pi^2 d^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] + \frac{i}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} \end{aligned}$$

e notando que para a primeira soma no colchetes, a função somada é par, obtemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} \stackrel{n \rightarrow -n}{=} \sum_{n=\infty}^1 \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= -\frac{i}{16\pi^2 d^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] + \frac{i}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} \\ &= -\frac{i}{16\pi^2 d^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] + \frac{i}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} \\ &= -\frac{i}{8\pi^2 d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{i}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

A primeira soma pode ser representada em termos da *Função Zeta de Riemann* [29], que possui a seguinte definição:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}; \quad Re(z) > 1. \quad (2.64)$$

Logo, comparando-a com a primeira soma em (2.63), vemos que $z = 2$. Ou seja, a primeira soma é igual à $\zeta(2)$, que tem como valor [29]:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.65)$$

Já para a segunda soma, podemos colocá-la na forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} = \frac{1}{d^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{z}{d} - n\right)^2},$$

e usando a equação (1.422.4) da Ref. [30],

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n)^2} = \pi^2 \csc^2(\pi x), \quad (2.66)$$

para $x = \frac{z}{d}$, encontramos o seguinte resultado

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} = \frac{1}{d^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{z}{d} - n\right)^2} = \frac{\pi^2 \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)}{d^2}. \quad (2.67)$$

Substituindo as equações (2.65) e (2.67) em (2.63), resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= -\frac{i}{8\pi^2 d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{i}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - dn)^2} \\ &= -\frac{i}{8\pi^2 d^2} \zeta(2) + \frac{i}{16\pi^2 d^2} \pi^2 \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) \\ &= -\frac{i}{8\pi^2 d^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{i}{16d^2} \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) \\ \therefore \lim_{x' \rightarrow x} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x') &= -\frac{i}{48d^2} + \frac{i}{16d^2} \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Retornando à Eq. (2.61) com o auxílio da Eq. (2.68), leva a:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D &= i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} G_{\mathbf{F}}^D(x, x') \\ &= i \left[-\frac{i}{48d^2} + \frac{i}{16d^2} \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) \right], \end{aligned}$$

e portanto, o valor de $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$ será dado por:

$$\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D = \frac{1}{48 d^2} \left[1 - 3 \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) \right]. \quad (2.69)$$

Para a condição de contorno de Neumann, os cálculos são feitos utilizando as Eqs. (2.58) e (2.62). O limite $\lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} G_{\mathbf{F}}^N(x, x')$ leva à seguinte expressão:

$$\lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x') = -\frac{i}{48d^2} - \frac{i}{16d^2} \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right), \quad (2.70)$$

e portanto, $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N$ será dado por:

$$\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N = \frac{1}{48 d^2} \left[1 + 3 \csc^2\left(\frac{\pi z}{d}\right) \right]. \quad (2.71)$$

Os gráficos de $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$ e $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N$ são mostrados nas figuras 2 e 3. Do gráfico de $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$ vemos que seu valor é negativo embora tenhamos calculado o valor esperado do quadrado de um campo que é real. É comum a perda de certas “propriedades formais” para tais quantidades quando sujeitas à renormalização [33]. Para $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N$ o resultado é positivo e coerente com nossa intuição física. Para obter mais conhecimento acerca destas quantidades, vamos explorar alguns de seus comportamentos. Na proximidade das placas, ou seja, $z \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow d$, utilizando uma expansão em séries de Laurent, teremos:

$$\csc^2(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}(y^2), \quad (2.72)$$

e então para $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D &\approx \frac{1}{48d^2} \left[1 - 3 \left(\frac{d^2}{\pi^2 z^2} + \frac{1}{3} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{48d^2} \left(1 - \frac{3d^2}{\pi^2 z^2} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 z^2}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Já para $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N &\approx \frac{1}{48d^2} \left[1 + 3 \left(\frac{d^2}{\pi^2 z^2} + \frac{1}{3} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{48d^2} \left(1 + \frac{3d^2}{\pi^2 z^2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{24d^2} + \frac{1}{16\pi^2 z^2}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Uma primeira diferença que notamos entre estas duas expressões é o sinal do termo dependente de z , que apesar de ser igual em módulo, é negativo para o caso de Dirichlet e positivo para o de Neumann. Uma segunda diferença está no termo adicional para $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N$, que é constante e é o termo dominante. Para $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D$, o termo dominante é aquele que depende somente de z . Para $d \rightarrow \infty$, a expansão (2.72) pode ser utilizada. Neste caso, o problema é fisicamente equivalente àquele de uma placa satisfazendo condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, isto é, $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$, culminando nos mesmos resultados obtidos em (2.73) e (2.74). Por outro lado, notamos que no ponto médio, $z = d/2$, temos $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_D = -(24d^2)^{-1}$ e $\langle \tilde{\phi}^2(x) \rangle_N = (12d^2)^{-1}$. Contudo, devemos salientar que a flutuação quântica no estado de vácuo para duas placas não é igual à soma das contribuições de duas placas de Dirichlet ou de Neumann separadamente. Como fora mencionado acima, as expressões (2.73) e (2.74) são equivalentes ao problema de uma placa. Podemos usá-las para calcular o efeito que cada placa possui no ponto médio e então multiplicar por dois para obter o efeito das duas placas. Fazendo isso para os dois casos, os efeitos considerando duas placas de Dirichlet ou de Neumann, separadamente, serão aproximadamente iguais a $-(20d^2)^{-1}$ e $2(15d^2)^{-1}$, respectivamente. Estes resultados revelam que as flutuações possuem, em módulo, valores maiores para a situação onde somamos as contribuições individuais das duas placas do que para o problema combinado destas. A explicação para essa diferença reside no fato que, para o problema de uma placa, contribuições como as provenientes do efeito Casimir não estão presentes, diferentemente da situação de duas placas. Logo, os resultados realmente não devem ser os mesmos.

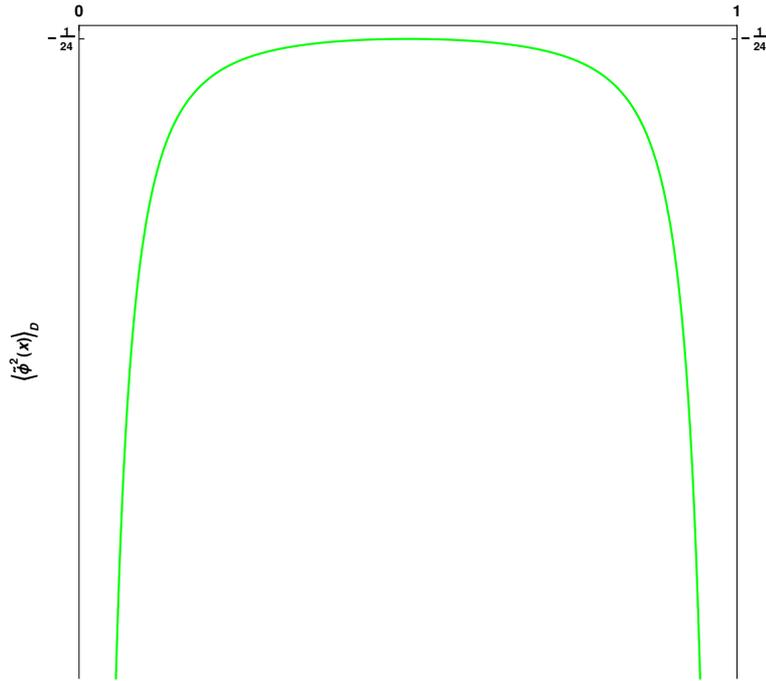


Figura 2: Comportamento de $\langle 0_d | \tilde{\phi}^2(x) | 0_d \rangle_D$ para $d = 1$.

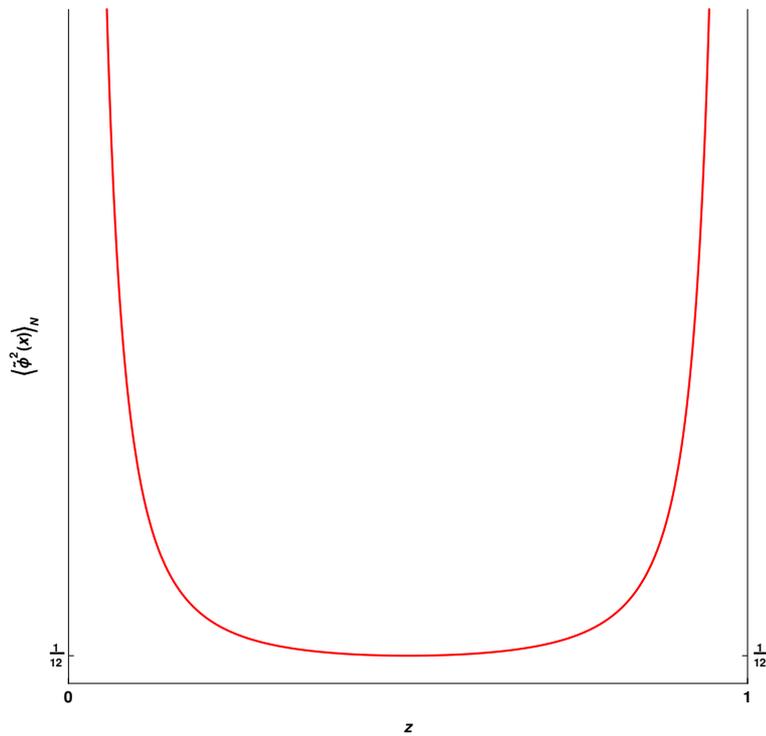


Figura 3: Comportamento de $\langle 0_d | \tilde{\phi}^2(x) | 0_d \rangle_N$ para $d = 1$.

No Capítulo 3 construiremos o propagador de Feynman para a situação de interesse desse trabalho: duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, sendo este objeto essencial para o cálculo das componentes do tensor energia-momentum, que será abordado no Capítulo 4.

3 O PROPAGADOR DE FEYNMAN PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS, NEUTRAS E PERFEITAMENTE CONDUTORAS

O objetivo desse capítulo é o de apresentar as componentes do propagador de Feynman para o campo eletromagnético sujeito às condições de contorno para um condutor perfeito. No Apêndice C são apresentados detalhes acerca da quantização do campo eletromagnético e da construção do propagador no calibre de Lorenz, com a escolha do parâmetro de fixação de calibre χ como sendo igual a 1. Neste calibre, a equação de movimento para $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ em (C.19) assume uma forma bem simples. Essa relação é dada por:

$$\square_x D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') = \eta_{\mu\nu} \delta^4(x - x'). \quad (3.1)$$

Além disso, temos de (C.20) a conveniente relação no caso livre, $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') = -\eta_{\mu\nu} D_{\mathbf{F}}(x, x')$, onde $D_{\mathbf{F}}(x, x')$ é o propagador de Feynman para o campo escalar sem massa [31].

Para construir as componentes de $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ precisamos analisar as condições de contorno que devem ser satisfeitas. Nossa configuração consiste, assim como antes, em duas placas paralelas. Contudo, adicionalmente, essas placas são neutras e o mais importante, são feitas de um material condutor perfeito. Essa última característica, que é uma idealização, é responsável por induzir a restrições sobre os campos elétrico e magnético.

As condições que devem ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético são aquelas entre dois meios, onde um deles é o vácuo e o outro é o condutor perfeito [34]. Para a nossa configuração, essas condições de contorno são expressas pelas relações

$$\hat{z} \cdot \vec{B} \Big|_{z=0}^{z=d} = 0, \quad \hat{z} \times \vec{E} \Big|_{z=0}^{z=d} = 0 \quad (3.2)$$

sendo \hat{z} o vetor unitário normal à superfície das placas.

Fisicamente, essas condições nos informam que o campo elétrico deve ser perpendicular à superfície das placas, enquanto que o campo magnético só pode ter componentes tangenciais à superfície das mesmas. Ambjorn & Wolfram calcularam as energias de Casimir para campos quânticos e cavidades com geometrias variadas [13]. Para o campo eletromagnético, eles utilizaram o *Calibre de Radiação*, que não é explicitamente covariante sob transformações de Lorentz. Contudo, mesmo com a escolha de calibre sendo distinta, usaremos como *ansatz* os modos que eles apresentam para as componentes do potencial

A_μ . Estes são dados por:

$$\begin{aligned}\phi &= i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ A_x &= i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ A_y &= i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ A_z &= \cos(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Vemos que em $z = 0$ e $z = d$, esses modos satisfazem as seguintes relações:

$$\phi = A_x = A_y = 0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0,\tag{3.4}$$

o que também implica na restrição dos valores de k_z , ainda dados por (2.9). De (3.3), vemos que ϕ , A_x e A_y satisfazem a condição de contorno de Dirichlet, enquanto que A_z deve obedecer a condição de contorno de Neumann. Ademais, a condição que expressa o *Calibre de Lorenz* também deve ser satisfeita, isto é, $\partial_\mu A^\mu = 0$. A verificação desta condição com os modos dados em (3.3), leva à seguinte relação:

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^\mu &= \partial_t \phi + \nabla \cdot \vec{A} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}] + \frac{\partial}{\partial x} [i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} [i \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}] + \frac{\partial}{\partial z} [\cos(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}] \\ &= \omega \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} - k_x \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ &\quad - k_y \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} - k_z \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \\ &= -i(\omega \phi - k_x A_x - k_y A_y - k_z A_z) = 0\end{aligned}\tag{3.5}$$

Portanto, teremos:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \iff \omega \phi - k_x A_x - k_y A_y - k_z A_z = 0,\tag{3.6}$$

é a relação decorrente do *Calibre de Lorenz* que deve ser obedecida.

O próximo passo é confirmar que os campos \vec{B} e \vec{E} , construídos com os modos apresentados na equação (3.3), satisfazem as condições de contorno colocadas em (3.2) para nosso condutor perfeito, isto é, as duas placas condutoras. Os campos \vec{B} e \vec{E} são definidos como sendo [34]:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\tag{3.7}$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\tag{3.8}$$

Usando (3.3) em (3.7) e (3.8), obtemos:

$$\vec{B} = -i \left\{ [(k_y + k_z) \hat{x} - (k_x - k_z) \hat{y}] \cos(k_z z) + i(k_x + k_y) \sin(k_z z) \hat{z} \right\} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\tag{3.9}$$

$$\vec{E} = \left\{ [(k_x + \omega)\hat{x} + (k_y + \omega)\hat{y}] \sin(k_z z) - i(k_z + \omega) \cos(k_z z)\hat{z} \right\} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (3.10)$$

Começamos a verificação das exigências estabelecidas por (3.2) com o campo magnético \vec{B} . Na superfície das placas, (3.9) é igual a:

$$\hat{z} \cdot \vec{B} \Big|_{z=0}^{z=d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (k_x + k_y) \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \Big|_{z=0} = 0, \\ (k_x + k_y) \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \Big|_{z=d} = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Já para o campo elétrico \vec{E} , dado por (3.10), teremos:

$$\hat{z} \times \vec{E} \Big|_{z=0}^{z=d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} [-(k_x + \omega)\vec{x} + (k_x + \omega)\vec{y}] \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \Big|_{z=0} = 0, \\ [-(k_x + \omega)\vec{x} + (k_x + \omega)\vec{y}] \sin(k_z z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \Big|_{z=d} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

De fato, os campos elétrico e magnético dados nas Eqs. (3.9) e (3.10) obedecem as condições de contorno (3.2) para quaisquer valores de k_z . Isso atesta que os modos (3.3) são corretos.

Com isso, estamos prontos para calcular as componentes do propagador de Feynman para nossa configuração, o que será feito na próxima seção.

3.1 $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ à temperatura nula

Iniciamos com as componentes para temperatura nula. Para $D_{\mathbf{F}00}(x, x')$, vemos da equação (C.18) do Apêndice C que precisaremos do modo A_0 , ou melhor, $\phi(x)$. De (3.1) extraímos sua equação de movimento, que vem dada por:

$$\square_x D_{\mathbf{F}00}(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (3.13)$$

Como já havíamos feito na seção 2, recorremos a [28] para obter uma expressão para o propagador. Isso, aliado com a relação (C.20), nos permite escrever:

$$D_{\mathbf{F}00}(x, x') = i \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty dk_x \int_{-\infty}^\infty dk_y \sum_{n=1}^\infty e^{-iT E_{\omega, k_x, k_y, n}} \psi_{\mathbf{0}\omega, k_x, k_y, n}(x) \psi_{\mathbf{0}\omega, k_x, k_y, n}^*(x') \quad (3.14)$$

onde a autofunção $\psi_{\mathbf{0}\omega, k_x, k_y, n}(x)$ é assim denotada, pois é construída para o modo temporal de A_μ , ou seja, A_0 dado em (3.3) e $E_{\omega, k_x, k_y, n}$ são os autovalores do operador \square_x , que são dados por:

$$E_{\omega, k_x, k_y, n} = k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - \omega^2, \quad (3.15)$$

atentando-se à restrição $k_z = \frac{n\pi}{d}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, proveniente das condições de contorno para o condutor perfeito postas pela presença das placas que são feitas deste material. Como podemos ver de (3.4), que esse resultado coincide com aquele proveniente da quantização do campo escalar com condições de contorno de Dirichlet e também de Neumann. Dessa forma, as componentes $D_{\mathbf{F}11}(x, x')$, $D_{\mathbf{F}22}(x, x')$ e $D_{\mathbf{F}33}(x, x')$ também serão construídas utilizando esses autovalores. Considerações similares serão feitas para as autofunções correspondentes às outras componentes do propagador. Precisamos resolver a equação (3.13) sujeita às condições de contorno (3.2). A aplicação do operador \square_x na equação (3.14), leva a:

$$\begin{aligned}
\square_x D_{\mathbf{F}00}(x, x') &= -i|\lambda|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_x^2 \right) \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\times \sum_{n=1}^\infty e^{-iT \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right]} \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right) \\
&= -i|\lambda|^2 \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\times \sum_{n=1}^\infty e^{-iT \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right]} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right) \\
&= -i|\lambda|^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\times \sum_{n=1}^\infty \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right) \int_0^\infty e^{-iT \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right]} dT.
\end{aligned}$$

Agora, usando o resultado

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-iaz} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-i(a-i\epsilon)z} dz \\
&= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{i(a-i\epsilon)} e^{-i(a-i\epsilon)z} \right]_0^\infty \\
&= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-iaz} e^{-\epsilon z}}{a-i\epsilon} \right]_0^\infty \\
&= -\frac{i}{a},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\square_x D_{\mathbf{F}00}(x, x') &= -i|\lambda|^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\times \sum_{n=1}^\infty \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right) \int_0^\infty e^{-iT \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right]} dT \\
&= -i(-i)|\lambda|^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\times \sum_{n=1}^\infty \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right] \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right) \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - \omega^2 \right]^{-1} \\
&= -|\lambda|^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t-t')} d\omega \int_{-\infty}^\infty e^{ik_x(x-x')} dk_x \int_{-\infty}^\infty e^{ik_y(y-y')} dk_y \\
&\quad \times \sum_{n=1}^\infty \sin \left(\frac{n\pi z}{d} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{d} \right),
\end{aligned}$$

E relembando as representações da *Delta de Dirac* dadas em (2.14), ficamos com:

$$\square_x D_{\mathbf{F}00}(x, x') = -\frac{(2\pi)^3 d}{2} |\lambda|^2 \delta^4(x - x').$$

Mas da equação (3.13), segue que:

$$\square_x D_{\mathbf{F}00}(x, x') = \delta^4(x - x') \Rightarrow -\frac{(2\pi)^3 d}{2} |\lambda|^2 = 1 \therefore |\lambda|^2 = -\frac{2}{(2\pi)^3 d} \quad (3.17)$$

Conhecido o valor de $|\lambda|^2$, voltamos a (3.14) e encontramos $D_{\mathbf{F}00}(x, x')$. Examinando (3.14) com essa escolha de λ , vemos que:

$$\tilde{D}_{\mathbf{F}00}(x, x') = -\tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x'), \quad (3.18)$$

onde $\tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x')$ é o propagador de Feynman renormalizado para o campo escalar sem massa sujeito à condição de contorno de Dirichlet que foi encontrado no capítulo anterior (veja a Eq. (2.49)). Assim, $\tilde{D}_{\mathbf{F}00}(x, x')$ também já está renormalizado.

Portanto, usando (2.49), temos

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}00}(x, x') = & -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

No caso de $\tilde{D}_{\mathbf{F}11}(x, x')$ e $\tilde{D}_{\mathbf{F}22}(x, x')$, também teremos uma correspondência entre o propagador de Feynman para o campo eletromagnético e o campo escalar. Para construir essas componentes, precisaremos dos modos A_x e A_y dados em (3.3), que como já observamos, também satisfazem a condição de contorno de Dirichlet.

Dessa forma, analogamente ao que ocorre para $\tilde{D}_{\mathbf{F}00}(x, x')$, teremos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}11}(x, x') &= \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x'), \\ \tilde{D}_{\mathbf{F}22}(x, x') &= \tilde{G}_{\mathbf{F}}^D(x, x'), \end{aligned} \quad (3.20)$$

e novamente, recorrendo à equação (2.49), encontramos:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}11}(x, x') = \tilde{D}_{\mathbf{F}22}(x, x') = & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \\ & - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Finalmente, para $\tilde{D}_{\mathbf{F}33}(x, x')$, dos modos dados em (3.3), observamos que A_z obedece a condição de contorno de Neumann. Seguindo o que fizemos acima para $\tilde{D}_{\mathbf{F}00}(x, x')$, mas agora usando A_z , podemos obter a seguinte relação:

$$\tilde{D}_{\mathbf{F}33}(x, x') = \tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x'), \quad (3.22)$$

e da expressão calculada no capítulo anterior para $\tilde{G}_{\mathbf{F}}^N(x, x')$, dada pela equação (2.56), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}33}(x, x') = & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z' - 2dn)^2} \right] \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z' - 2dn)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dessa forma, calculamos as componentes do propagador de Feynman para o campo eletromagnético entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras à temperatura nula. A seguir, faremos o mesmo para temperatura finita.

3.2 $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ à temperatura finita

Para obter o propagador de Feynman à temperatura finita devemos modificar o estado no qual os valores esperados do produto de operadores são calculados. Na seção 3.1, para calcular $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ utilizamos o estado de vácuo $|0\rangle$, que é um exemplo de estado puro. Contudo, à temperatura finita, $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ deverá ser calculado através da média no ensemble, isto é, uma média sobre um conjunto de estados do espaço de Hilbert em questão. Para sistemas com $T \neq 0$, será mais conveniente usar o formalismo do ensemble Grão-canônico, onde é permitido que o número de partículas varie [35]. Neste ensemble, a função partição vem dada por:

$$Z = \sum_j e^{-\beta(E_j - \mu n_j)} = e^{-\beta\Omega} \quad (3.24)$$

sendo Ω o *Potencial Termodinâmico* [31] e β dado por:

$$\beta = \frac{1}{T}. \quad (3.25)$$

Seja $|\psi_i\rangle$ um estado puro do espaço de Hilbert em consideração. Para um operador A , sabemos que a média no ensemble à temperatura $T = 1/\beta$ é obtida da relação:

$$\langle A \rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle, \quad (3.26)$$

onde ρ_i é o autovalor do operador matriz densidade ρ , cuja definição é:

$$\rho = \exp[\beta(\Omega + \mu N - H)] \quad (3.27)$$

Sendo $|\psi_i\rangle$ autoestado dos operadores N e H ⁷, com autovalores iguais a n_i e E_i , através de (3.24) e (3.27), encontramos:

$$\rho_i = \frac{e^{-\beta(E_i - \mu n_i)}}{Z}. \quad (3.28)$$

⁷ N e H denotam o operador Número e o operador Hamiltoniano, respectivamente. Para mais detalhes, consulte a Ref. [31].

Como a soma de todas as probabilidades deve ser igual a unidade, ou equivalentemente, $Tr \rho = 1$, podemos verificar que o valor esperado (3.26) do operador A no ensemble se reduz a:

$$\langle A \rangle_\beta = Tr \rho A. \quad (3.29)$$

Com esta expressão podemos partir para o cálculo das funções de Green à temperatura finita. Iniciamos com as funções de Wightman (ver Apêndice B). A média no ensemble $\langle \cdot \rangle_\beta$ será denotada por:

$$\begin{aligned} G_\beta^+(x, x') &= \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_\beta \\ G_\beta^-(x, x') &= \langle \phi(x')\phi(x) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Considerando o potencial químico nulo, introduzimos o quadro de Heisenberg para $\phi(\vec{x}, t)$ [31]:

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{iHt} \phi(0, \vec{x}) e^{-iHt} \quad (3.31)$$

Se t for interpretado como uma variável complexa, então esta pode ser continuada analiticamente para um valor imaginário puro $t = -i\tau$. Voltando às funções de Wightman térmicas em (3.30) e calculando $G_\beta^+(x, x')$ com o auxílio de (3.31), encontramos:

$$\begin{aligned} G_\beta^+(t, \vec{x}; t', \vec{x}') &= \frac{Tr \left[e^{-\beta H} \phi(t, \vec{x}) \phi(t', \vec{x}') \right]}{Tr e^{-\beta H}} = \frac{Tr \left[e^{-\beta H} \phi(t, \vec{x}) e^{\beta H} e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \right]}{Tr e^{-\beta H}} \\ &= \frac{Tr \left[e^{-\beta H} e^{iHt} \phi(0, \vec{x}) e^{-iHt} e^{\beta H} e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \right]}{Tr e^{-\beta H}} \\ &= \frac{Tr \left[e^{iH(t+i\beta)} \phi(0, \vec{x}) e^{-iH(t+i\beta)} e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \right]}{Tr e^{-\beta H}} \\ &= \frac{Tr \left[\phi(t+i\beta, \vec{x}) e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \right]}{Tr e^{-\beta H}} = \frac{Tr \left[e^{-\beta H} \phi(t', \vec{x}') \phi(t+i\beta, \vec{x}) \right]}{Tr e^{-\beta H}} \\ &= G_\beta^-(t+i\beta, \vec{x}; t', \vec{x}') \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde usamos a propriedade $Tr AB = Tr BA$. Para $G_\beta^-(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$, o cálculo é análogo.

O propagador de Feynman térmico é definido pela expressão [36]:

$$\begin{aligned} iG_{\mathbf{F}}^\beta(x, x') &= Tr [\rho \mathcal{T}(\phi(x)\phi(x'))] \\ &= Tr \left[e^{-\beta H} \mathcal{T}(\phi(x)\phi(x')) \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde \mathcal{T} é o *Operador de Ordenamento Temporal*.

Para obter uma forma semelhante a que obtemos em (3.32) para $G_\beta^-(t, \vec{x}; t', \vec{x}')$ vamos considerar a continuação analítica de t , que como já mencionamos anteriormente, consiste em ter $t = -i\tau$. Vamos considerar a situação onde $\tau' - \beta < \tau < \tau'$, sendo $\tau' = it'$. Seja $\bar{\tau}$ a coordenada temporal imaginária de \bar{x}_μ , que por sua vez, é dado simplesmente por $\bar{x}_\mu := (\bar{\tau}, \vec{x})$. Esta coordenada temporal $\bar{\tau}$ denota o tempo imaginário resultado da

translação de τ por β , ou seja, \bar{x}_μ possui as mesmas coordenadas espaciais de x_μ mas coordenada temporal imaginária $\tau + \beta$. Logo, teremos:

$$\begin{aligned} iG_{\mathbf{F}}^\beta(\bar{\tau}, \bar{x}; \tau', \bar{x}') &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \mathcal{T}(\phi(\bar{\tau}, \bar{x})\phi(\tau', \bar{x}')) \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\bar{\tau}, \bar{x})\phi(\tau', \bar{x}') \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \\ &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \{e^{\beta H} \phi(\tau, \bar{x})e^{-\beta H}\} \phi(\tau', \bar{x}') \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{\text{Tr} \left[\phi(\tau, \bar{x})e^{-\beta H} \phi(\tau', \bar{x}') \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \\ &= \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\tau', \bar{x}')\phi(\tau, \bar{x}) \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \mathcal{T}(\phi(\tau, \bar{x})\phi(\tau', \bar{x}')) \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \\ &= iG_{\mathbf{F}}^\beta(\tau, \bar{x}; \tau', \bar{x}'), \end{aligned}$$

e assim, vemos que:

$$G_{\mathbf{F}}^\beta(\tau + \beta, \bar{x}; \tau', \bar{x}') = G_{\mathbf{F}}^\beta(\tau, \bar{x}; \tau', \bar{x}'). \quad (3.34)$$

Portanto, se $G_{\mathbf{F}}^\beta(\tau, \bar{x}; \tau', \bar{x}')$ é tal que $|\tau - \tau'| < \beta$, este será periódico em cada variável temporal com período igual a β . Esta periodicidade representa uma condição de contorno adicional que deve ser levada em consideração na construção do propagador de Feynman térmico. A relação dada pela equação (3.34) é conhecida na literatura como Condição KMS devido a Ryogo Kubo, Paul Cecil Martin e Julian Schwinger [37].

Equivalentemente, se as autofunções do operador \square_x são denotadas por $\Psi(\tau, \bar{x})$, estas deverão satisfazer à seguinte condição de contorno adicional decorrente da condição KMS:

$$\Psi(\tau + \beta, x, y, z) = \Psi(\tau, x, y, z). \quad (3.35)$$

Na seção anterior apresentamos os modos que satisfazem as condições de contorno para o condutor perfeito, que no nosso problema é representado pelas duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras. Estes modos são dados na equação (3.3) e utilizando qualquer um destes, podemos constatar facilmente que a condição de contorno de periodicidade no tempo imaginário dada pela equação (3.35) leva a:

$$e^{i\omega\beta} = 1,$$

de onde vemos, que diferentemente do caso de temperatura nula onde a frequência ω é contínua, à temperatura finita, ω assumirá valores discretos dados por:

$$\omega = \frac{2\pi m}{\beta}, m \in \mathbb{Z} \quad (3.36)$$

Estas frequências são conhecidas na literatura como *Frequências de Matsubara*. A integração em ω presente no propagador de Feynman na representação de “tempo próprio” para temperatura nula dado na equação (3.14) será agora substituída por uma soma no índice m de $-\infty$ até ∞ com os valores de ω dados pela equação (3.36). Ao calcular o propagador à temperatura finita com estas alterações, podemos constatar que haverá uma mudança na coordenada temporal, dada por:

$$t \rightarrow t - i\beta. \quad (3.37)$$

A implementação dessa mudança na coordenada temporal faz com que a diferença $(t - t')$ se torne $(t - t' - im\beta)$. Reforçamos que a equação (3.1) deve ser resolvida novamente com a condição de contorno adicional da periodicidade do propagador expressa pela equação (3.34), o que basicamente, consiste em implementar a modificação dada pela equação (3.37). Embora tenhamos derivado as funções de Green térmicas para o campo escalar, a generalização para o campo eletromagnético é direta: ao invés de usar o operador de campo $\phi(\vec{x}, t)$, teremos $A_\mu(\vec{x}, t)$. Como as expressões para o propagador à temperatura nula foram calculadas em (3.19), (3.21) e (3.23), podemos utilizá-las para implementar a mudança na coordenada temporal descrita em (3.37). Ao fazermos isso, encontramos que as expressões para $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ à temperatura finita serão:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}00}^\beta(x, x') = & \\ & - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z' - 2dn)^2} \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z + z' - 2dn)^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}11}^\beta(x, x') = \tilde{D}_{\mathbf{F}22}^\beta(x, x') = & \\ & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z' - 2dn)^2} \\ & - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z + z' - 2dn)^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}33}^\beta(x, x') = & \\ & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z' - 2dn)^2} \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - t' - im\beta)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z + z' - 2dn)^2}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

É importante frisar que em todas estas componentes de $D_{\mathbf{F}\mu\nu}^\beta(x, x')$, na primeira das somas duplas, ou seja, aquela que carrega a diferença $(z - z' - 2nd)$ no denominador, o termo $n = m = 0$ deve ser removido, já que este corresponde à contribuição de Minkowski, que como sabemos, é divergente no limite $x'_\mu \rightarrow x_\mu$.

Portanto, temos calculado as componentes do propagador de Feynman renormalizado para o campo eletromagnético entre as duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras à temperatura nula e à temperatura finita. No Capítulo 4, com o auxílio dos resultados aqui obtidos, calcularemos as componentes do tensor energia-momentum eletromagnético para o nosso sistema.

4 TENSOR ENERGIA-MOMENTUM ELETROMAGNÉTICO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS, NEUTRAS E PERFEITAMENTE CONDUTORAS

Neste capítulo apresentamos os cálculos para obtenção das componentes do tensor energia-momentum eletromagnético entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras. O conteúdo desse capítulo será de extrema importância, uma vez que as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ representam a densidade de energia eletromagnética, as pressões de radiação e os fluxos de energia.

O valor esperado do tensor energia-momentum eletromagnético pode ser calculado através do propagador de Feynman. De Deustch & Candelas [38], segue que tanto para $T = 0$ ou à temperatura finita, teremos:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = -i \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \left\{ \partial_\alpha^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu} - \partial_\mu^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha\nu} - \partial_{\alpha\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(\partial_\alpha^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}^{\beta} - \partial_\alpha^{\beta'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}^{\alpha} \right) \right\} \quad (4.1)$$

lembrando que $\tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') = D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') - D^{(0)}_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ é o propagador de Feynman renormalizado. O processo de obtenção da fórmula (4.1) pode ser encontrado com mais detalhes no Apêndice D.

Veremos que um aspecto fundamental de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ é que todas suas componentes fora da diagonal principal são nulas. Calculando as componentes não nulas através de (4.1), encontramos as seguintes expressões:

$$\langle T_{00}(x) \rangle = \frac{i}{2} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \left\{ \partial_{00'} \tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \partial_{00'} \tilde{D}_{\mathbf{F}22} + \partial_{00'} \tilde{D}_{\mathbf{F}33} + \partial_{11'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}22} + \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) + \partial_{22'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) + \partial_{33'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \tilde{D}_{\mathbf{F}22} \right) + \partial_{11'} \tilde{D}_{\mathbf{F}00} + \partial_{22'} \tilde{D}_{\mathbf{F}00} + \partial_{33'} \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\langle T_{11}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \left\{ (\partial_{00'} - \partial_{22'} - \partial_{33'}) \tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \partial_{11'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}00} - \tilde{D}_{\mathbf{F}22} - \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) - \partial_{00'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}22} + \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) + \partial_{22'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}33} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) + \partial_{33'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}22} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) \right\}, \quad (4.3)$$

$$\langle T_{22}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \left\{ (\partial_{00'} - \partial_{22'} - \partial_{33'}) \tilde{D}_{\mathbf{F}22} + \partial_{22'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}00} - \tilde{D}_{\mathbf{F}11} - \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) - \partial_{00'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \tilde{D}_{\mathbf{F}33} \right) + \partial_{11'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}33} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) + \partial_{33'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

$$\langle T_{33}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x'_\mu \rightarrow x_\mu} \left\{ (\partial_{00'} - \partial_{11'} - \partial_{22'}) \tilde{D}_{\mathbf{F}33} + \partial_{33'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}00} - \tilde{D}_{\mathbf{F}11} - \tilde{D}_{\mathbf{F}22} \right) - \partial_{00'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} + \tilde{D}_{\mathbf{F}22} \right) + \partial_{11'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}22} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) + \partial_{22'} \left(\tilde{D}_{\mathbf{F}11} - \tilde{D}_{\mathbf{F}00} \right) \right\}. \quad (4.5)$$

É interessante observar que como $\tilde{D}_{\mathbf{F}11}(x, x')$ e $\tilde{D}_{\mathbf{F}22}(x, x')$ são iguais, então $\langle T_{11}(x) \rangle$ e $\langle T_{22}(x) \rangle$ também serão. Essas componentes, sejam para o propagador de Feynman sejam para o tensor energia-momentum, são iguais porque se referem a quantidades ao longo da direção paralela à placa. Essa simetria é revelada através das condições de contorno para o condutor perfeito. De lá vem os modos nas direções paralelas, x e y, que devem ser iguais. Os modos ao longo da direção z são diferentes, pois é ao longo dessa direção que estão localizadas as placas, o que leva à quebra de isotropia espacial.

O tensor energia-momentum em (4.1) é convenientemente decomposto em três termos [24], podendo ser colocado na seguinte forma:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)} = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{(0)} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}, \quad (4.6)$$

onde $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(0)}$ é o termo correspondente à temperatura nula, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ é o termo misto, isto é, à temperatura finita e dependente da distância entre as placas, e finalmente, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}$ que representa o termo da radiação de corpo negro, que consiste na situação onde T e d tendem ao infinito.

A partir de agora, as componentes destes termos serão calculadas. Adotaremos a seguinte denominação:

- Componentes de Casimir, que correspondem a $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ em $T = 0$: $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(0)}$;
- Componentes da radiação de corpo negro, isto é, $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ em $T \rightarrow \infty$: $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}$;
- Componentes mistas, ou seja, $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$;
- $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para ambos os regimes, ou seja, obter as componentes através de (4.6).

4.1 As componentes do termo de Casimir : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(0)}$

No capítulo anterior calculamos as componentes do propagador de Feynman renormalizado para o campo eletromagnético entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras à temperatura nula. Estas componentes são dadas no texto pelas equações (3.19), (3.21) e (3.23). Junto com as expressões gerais para as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ dadas em (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), podemos calcular as componentes do termo de Casimir do tensor energia-momentum, o que resulta em:

$$\langle T_{00} \rangle_{(0)} = -\frac{\pi^2}{720 d^4}, \quad (4.7)$$

$$\langle T_{11} \rangle_{(0)} = \langle T_{22} \rangle_{(0)} = \frac{\pi^2}{720 d^4}, \quad (4.8)$$

$$\langle T_{33} \rangle_{(0)} = -\frac{\pi^2}{240 d^4}. \quad (4.9)$$

A expressão de $\langle T_{00} \rangle_{(0)}$ encontrada é denominada *Densidade de Energia de Casimir*. Para as pressões de radiação, vemos que $\langle T_{11} \rangle_{(0)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(0)}$ que são iguais pela simetria do problema, são positivas, ao contrário da *Pressão de Casimir*, dada por $\langle T_{33} \rangle_{(0)}$, que tende a $-\infty$ à medida que a distância de separação entre as placas tende a zero. Mais comentários sobre estas expressões serão feitos no Capítulo 5 .

4.2 As componentes do termo de Radiação de Corpo Negro : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}$

Como mencionado anteriormente, as componentes de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(\infty)}$ correspondem àquelas da *Radiação de Corpo Negro*. Para calculá-las, devemos colocar $n = 0$ em todas as componentes do propagador à temperatura finita e desconsiderar todas as somas neste índice, visto que não estamos interessados nas contribuições advindas do vácuo. Recordamos que tais expressões são dadas pelas equações (3.38 - 3.40).

Dessa forma, desconsiderando as somas em n , ficamos com as seguintes expressões para $\tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu}^\beta(x, x')_{n=0}$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}00}^\beta(x, x')_{n=0} = & -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2} \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z')^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}11}^\beta(x, x')_{n=0} = \tilde{D}_{\mathbf{F}22}^\beta(x, x')_{n=0} = & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2} \\ & - \frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z')^2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{F}33}^\beta(x, x')_{n=0} = & \frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2} \\ & + \frac{i}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-t'-im\beta)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z+z')^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Iniciamos com $\langle T_{00} \rangle_{(\infty)}$. Utilizando a expressão (4.2) junto com (4.10 - 4.12), e depois calculando as derivadas e o limite $x \rightarrow x'$, leva a:

$$\langle T_{00} \rangle_{(\infty)} = \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \right],$$

e atentando-se ao fato que o termo na soma, isto é, $\frac{1}{m^4}$ é par, então podemos fazer $m \rightarrow -m$ na primeira soma. Isto implica em:

$$\langle T_{00} \rangle_{(\infty)} = \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \right] = \frac{3}{\pi^2 \beta^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \right] = \frac{6}{\pi^2 \beta^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}$$

e sendo esta soma igual a [29]

$$\zeta(4) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad (4.13)$$

obtemos finalmente que:

$$\langle T_{00} \rangle_{(\infty)} = \frac{\pi^2 T^4}{15}. \quad (4.14)$$

Para $\langle T_{11} \rangle_{(\infty)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(\infty)}$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle T_{11} \rangle_{(\infty)} = \langle T_{22} \rangle_{(\infty)} &= \frac{1}{\pi^2 \beta^4} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{1}{\pi^2 \beta^4} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2 \beta^4} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \right] = \frac{2}{\pi^2 \beta^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \end{aligned}$$

e de (4.13), resulta:

$$\langle T_{11} \rangle_{(\infty)} = \langle T_{22} \rangle_{(\infty)} = \frac{\pi^2 T^4}{45}. \quad (4.15)$$

Por fim, para $\langle T_{33} \rangle_{(\infty)}$ encontramos o mesmo valor de $\langle T_{11} \rangle_{(\infty)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(\infty)}$, ou seja :

$$\langle T_{33} \rangle_{(\infty)} = \frac{\pi^2 T^4}{45}. \quad (4.16)$$

o que é esperado, pois sabemos que a pressão para a radiação de corpo negro é homogênea.

Os resultados obtidos em (4.14 - 4.16), podem ser concatenados em uma única expressão como segue [24]:

$$\langle T_{ij} \rangle_{(\infty)} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle T_{00} \rangle_{(\infty)}. \quad (4.17)$$

Calculados os termos de Casimir e da radiação de corpo negro, na seção 4.3 determinaremos o termo misto de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

4.3 As componentes do termo misto : $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$

Nessa seção calculamos o termo misto de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$. Estas componentes desaparecem para $T = 0$ e para $d \rightarrow \infty$. Para obtê-las precisaremos das expressões do propagador de Feynman à temperatura finita. Estas foram encontradas na última seção do capítulo anterior, e são dadas pelas equações (3.38 - 3.40), enfatizando a necessidade em se remover o termo $n = m = 0$ correspondente à contribuição de Minkowski, que é divergente no limite $x'_\mu \rightarrow x_\mu$. Na subseção 4.3.1, discutimos o regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas. O regime de altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas é tratado na subseção 4.3.2.

4.3.1 $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ para $\xi \rightarrow 0$

Começando com $\langle T_{00} \rangle_{(T,d)}$, calculando todas as derivadas em (4.2) e tomando o limite $x \rightarrow x'$, obtemos:

$$\langle T_{00} \rangle_{(T,d)} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3},$$

onde já vemos a independência na coordenada z , o que reflete a homogeneidade do problema. Podemos reescrever as somas, dividindo-as em duas partes, a saber, de m e n indo de $-\infty$ a -1 e de 1 a ∞ . Agora observamos que a função de m e n é par com respeito a ambas variáveis. Dessa forma, as somas de $-\infty$ a -1 e de 1 a ∞ são iguais. Mais detalhadamente, temos:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{4d^2n^2 - 3m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{8d^2n^2 - 6m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8d^2n^2 - 6m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16d^2n^2 - 12m^2\beta^2}{(m^2\beta^2 + 4d^2n^2)^3}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora faremos uso de um resultado presente na Ref. [24]. Brown & Maclay trabalharam no mesmo problema de encontrar as componentes de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, mas utilizando um método diferente do nosso. Contudo, ao calcular as componentes do tensor energia-momentum, em certo ponto intermediário dos cálculos, somos levados à mesma expressão. Definimos como eles, uma função arbitrária f de uma variável ξ , tal que:

$$f(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\xi)^4}{[m^2 + (2\xi)^2 n^2]^2} \tag{4.19}$$

onde

$$\xi = \frac{d}{\beta}. \tag{4.20}$$

As componentes do termo misto do tensor energia-momentum serão dadas em termos dessa função $f(\xi)$ [24]. Para $\langle T_{00} \rangle_{(T,d)}$, teremos:

$$\langle T_{00} \rangle_{(T,d)} = \frac{u(\xi)}{d^4} = \frac{f(\xi)}{d^4} - \frac{\xi}{d^4} \frac{df(\xi)}{d\xi}, \tag{4.21}$$

onde

$$u(\xi) = f(\xi) + \xi s(\xi) \quad (4.22)$$

com $s(\xi)$ sendo igual a:

$$s(\xi) = -\frac{df(\xi)}{d\xi}. \quad (4.23)$$

Usando (4.19) e (4.21) é fácil verificar que somos levados à nossa expressão (4.18). Para $\langle T_{11} \rangle_{(T,d)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(T,d)}$, utilizando (4.3) e (4.4) juntamente com as componentes do propagador à temperatura finita (3.38 - 3.40), encontramos:

$$\langle T_{11} \rangle_{(T,d)} = \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 \beta^2 + 4 d^2 n^2)^2}. \quad (4.24)$$

Novamente, consultando [24], para $\langle T_{11} \rangle_{(T,d)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(T,d)}$

$$\langle T_{11} \rangle_{(T,d)} = \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{f(\xi)}{d^4} \quad (4.25)$$

e vemos que de (4.19) somos levados à (4.24).

Já para $\langle T_{33} \rangle_{(T,d)}$, utilizando (4.5) e as expressões (3.38 - 3.40) para as componentes do propagador térmico, encontramos:

$$\langle T_{33} \rangle_{(T,d)} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \beta^2 - 12 d^2 n^2}{(m^2 \beta^2 + 4 d^2 n^2)^3} \quad (4.26)$$

que pode ser colocado equivalentemente em termos de $f(\xi)$ [24]:

$$\langle T_{33} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{f(\xi)}{d^3} \right]. \quad (4.27)$$

Resumindo, temos que os termos mistos de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ em termos de $f(\xi)$ são:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= \frac{u(\xi)}{d^4} = \frac{f(\xi)}{d^4} - \frac{\xi}{d^4} \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T,d)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{f(\xi)}{d^4} \\ \langle T_{33} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{f(\xi)}{d^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Devemos agora estudar o comportamento assintótico da função $f(\xi)$ para os regimes onde $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$. A expressão que define $f(\xi)$ em (4.19) pode ser colocada na seguinte forma:

$$f(\xi) = -\frac{(2\xi)^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m^2 + (2\xi)^2 n^2]^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n^2 + (\frac{m}{2\xi})^2]^2}. \quad (4.29)$$

Para o somatório em n , o uso da equação (5.125) da Ref. [39], resulta em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + b^2)^2} = \frac{1}{2b^4} + \frac{\pi}{4b^3} \coth(\pi b) + \frac{\pi^2}{4b^2} \operatorname{csch}^2(\pi b). \quad (4.30)$$

Logo, aplicando-a à equação (4.29), encontramos:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\left(\frac{m}{2\xi}\right)^4} + \frac{\pi}{4\left(\frac{m}{2\xi}\right)^3} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) + \frac{\pi^2}{4\left(\frac{m}{2\xi}\right)^2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{8\xi^4}{m^4} + \frac{2\pi\xi^3}{m^3} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) + \frac{\pi^2\xi^2}{m^2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nesse momento, iniciamos a investigação dos comportamentos assintóticos de $f(\xi)$. Para tanto, faremos uma análise termo a termo na equação (4.31). Começamos pelo regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas, isto é, $\xi \rightarrow 0$. Para a função cotangente hiperbólica, temos:

$$\begin{aligned} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) &= \frac{\cosh(m\pi/2\xi)}{\sinh(m\pi/2\xi)} = \frac{e^{m\pi/2\xi} + e^{-m\pi/2\xi}}{e^{m\pi/2\xi} - e^{-m\pi/2\xi}} \\ &= \frac{1 + e^{-m\pi/\xi}}{1 - e^{-m\pi/\xi}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

e no limite $\xi \rightarrow 0$,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{m\pi/2\xi} + e^{-m\pi/2\xi}}{e^{m\pi/2\xi} - e^{-m\pi/2\xi}} = 1. \quad (4.33)$$

Portanto, em *leading order*, $\coth(m\pi/2\xi)$ tende à unidade. Como o termo $e^{-m\pi/\xi}$ é exponencialmente pequeno para $\xi \rightarrow 0$, podemos invocar a aproximação binomial e então escrever

$$\frac{1}{1 - e^{-m\pi/\xi}} \approx 1 + e^{-m\pi/\xi}. \quad (4.34)$$

Dessa forma, segue que:

$$\begin{aligned} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) &= \frac{1 + e^{-m\pi/\xi}}{1 - e^{-m\pi/\xi}} \approx (1 + e^{-m\pi/\xi})(1 + e^{-m\pi/\xi}) \\ &= 1 + 2e^{-m\pi/\xi} + e^{-2m\pi/\xi}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para a função cossecante hiperbólico ao quadrado em (4.31), teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) &= \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right)} = \left(\frac{2}{e^{m\pi/2\xi} - e^{-m\pi/2\xi}}\right)^2 \\ &= \frac{4}{(e^{m\pi/2\xi} - e^{-m\pi/2\xi})^2} = \frac{4}{[e^{m\pi/2\xi}(1 - e^{-m\pi/\xi})]^2} \\ &= \frac{4e^{-m\pi/\xi}}{(1 - e^{-m\pi/\xi})^2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e tomando-se o limite $\xi \rightarrow 0$, implica em:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) = 4 \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{(1 - e^{-m\pi/\xi})^2} = 0. \quad (4.37)$$

Portanto, em *leading order*, $\operatorname{csch}^2(m\pi/2\xi)$ tende a zero. Novamente, recorrendo à aproximação binomial para $e^{-m\pi/\xi}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) &= \frac{4e^{-m\pi/\xi}}{(1-e^{-m\pi/\xi})^2} \approx 4e^{-m\pi/\xi} (1+2e^{-m\pi/\xi}) \\ &= 4e^{-m\pi/\xi} + 8e^{-2m\pi/\xi}.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Dessa forma, podemos escrever a expressão assintótica para $f(\xi)$ que expressa seu comportamento para $\xi \rightarrow 0$. Retornando à equação (4.31) com (4.35) e (4.38), encontramos:

$$\begin{aligned}f(\xi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{8\xi^4}{m^4} + \frac{2\pi\xi^3}{m^3} \coth\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) + \frac{\pi^2\xi^2}{m^2} \operatorname{csch}^2\left(\frac{m\pi}{2\xi}\right) \right] \\ &\approx -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{8\xi^4}{m^4} + \frac{2\pi\xi^3}{m^3} (1+2e^{-m\pi/\xi} + e^{-2m\pi/\xi}) + \frac{\pi^2\xi^2}{m^2} (4e^{-m\pi/\xi} + 8e^{-2m\pi/\xi}) \right] \\ &= \frac{2\xi^4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} - \frac{\xi^3}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} - \frac{\xi^3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^3} \\ &\quad - \frac{\xi^3}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^3} - \xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2} - 2\xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^2},\end{aligned}$$

e usando a representação da *Função Zeta de Riemann* (2.64), vemos que:

$$\zeta(3) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}, \quad \zeta(4) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}, \quad (4.39)$$

onde $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ [29]. Assim, a equação $f(\xi)$ no limite $\xi \rightarrow 0$ se torna:

$$\begin{aligned}f(\xi) &= \frac{2\xi^4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} - \frac{\xi^3}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} - \frac{\xi^3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^3} \\ &\quad - \frac{\xi^3}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^3} - \xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2} - 2\xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^2} \\ &= \frac{\xi^4\pi^2}{45} - \frac{\xi^3\zeta(3)}{2\pi} - \frac{\xi^3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^3} - \frac{\xi^3}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^3} - \xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2} - 2\xi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2m\pi/\xi}}{m^2}.\end{aligned}$$

Podemos simplificar essa expressão um pouco mais. Para os termos envolvendo $e^{-m\pi/\xi}$, notamos que:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m\pi/\xi} &= e^{-\pi/\xi} + e^{-2\pi/\xi} + e^{-3\pi/\xi} + \dots \\ &= e^{-\pi/\xi} (1 + e^{-\pi/\xi} + e^{-2\pi/\xi} + \dots)\end{aligned}$$

e observamos que em *leading order*, essa soma tende a $e^{-\pi/\xi}$, uma vez que as exponenciais no último parênteses são extremamente pequenas no limite $\xi \rightarrow 0$. Considerando termos da forma $\frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2}$, vemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2} &= e^{-\pi/\xi} + \frac{e^{-2\pi/\xi}}{4} + \frac{e^{-3\pi/\xi}}{9} + \dots \\ &= e^{-\pi/\xi} \left(1 + \frac{e^{-\pi/\xi}}{4} + \frac{e^{-2\pi/\xi}}{9} + \dots \right),\end{aligned}$$

onde outra vez, o termo dominante dessa soma tende a $e^{-\pi/\xi}$. Entretanto, os termos exponenciais são agora ainda menores, já que cada um é dividido pelo quadrado de m . Dessa forma, concluímos que nesse limite

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^2} \approx e^{-\pi/\xi}. \quad (4.40)$$

Analogamente, para a soma em m de $\frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^3}$, implica:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi/\xi}}{m^3} \approx e^{-\pi/\xi}. \quad (4.41)$$

Como já estamos desprezando termos exponenciais da forma $e^{-\pi/\xi}$, então não iremos considerar termos da forma $e^{-2\pi/\xi}$, em razão destes serem ainda menores.

Por fim, somos levados à seguinte expressão para $f(\xi)$ no limite $\xi \rightarrow 0$

$$f(\xi) = \frac{\xi^4 \pi^2}{45} - \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi} - \left[\frac{\xi^3}{\pi} + \xi^2 \right] e^{-\pi/\xi} + \mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi}). \quad (4.42)$$

Isso já é suficiente para prosseguirmos com o cálculo das componentes do termo misto do tensor energia-momentum. O comportamento assintótico para o regime $\xi \rightarrow \infty$ será obtido na subseção 4.3.2.

Voltando às expressões para as componentes em (4.28) juntamente com a expressão (4.42), para $\langle T_{00} \rangle_{(T,d)}$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= \frac{u(\xi)}{d^4} = \frac{f(\xi)}{d^4} - \frac{\xi}{d^4} \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ &= \frac{\xi^4 \pi^2}{45 d^4} - \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi d^4} - \left(\frac{\xi^3}{\pi d^4} + \frac{\xi^2}{d^4} \right) e^{-\pi/\xi} + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi})}{d^4} \\ &\quad - \frac{\xi}{d^4} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\xi^4 \pi^2}{45} - \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi} - \left(\frac{\xi^3}{\pi} + \xi^2 \right) e^{-\pi/\xi} + \mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi}) \right] \\ &= \frac{\xi^4 \pi^2}{45 d^4} (1 - 4) + \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi d^4} (3 - 1) + \frac{e^{-\pi/\xi}}{d^4} \left(\frac{2\xi^3}{\pi} + \xi^2 \right) + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi})}{d^4} \left(1 - \frac{2\pi}{\xi} \right) \\ &= -\frac{\xi^4 \pi^2}{15 d^4} + \frac{\xi^3 \zeta(3)}{\pi d^4} + \frac{e^{-\pi/\xi}}{d^4} \left(\frac{2\xi^3}{\pi} + \xi^2 \right) + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi})}{d^4} \left(1 - \frac{2\pi}{\xi} \right), \end{aligned}$$

Negligenciando os termos exponencialmente pequenos e usando (3.25) para escrever o resultado em termos da temperatura T , encontramos:

$$\langle T_{00} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\pi^2 T^4}{15} + \frac{\zeta(3) T^3}{\pi d}. \quad (4.43)$$

Para $\langle T_{11} \rangle_{(T,d)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(T,d)}$, de (4.28), teremos:

$$\begin{aligned} \langle T_{11} \rangle_{(T,d)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{f(\xi)}{d^4} \\ &= -\frac{\xi^4 \pi^2}{45 d^4} + \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi d^4} + \left(\frac{\xi^3}{\pi d^4} + \frac{\xi^2}{d^4} \right) e^{-\pi/\xi} - \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi})}{d^4}, \end{aligned}$$

onde desprezando os termos exponencialmente pequenos, implica em:

$$\langle T_{11} \rangle_{(T,d)} = \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{\zeta(3) T^3}{2\pi d}. \quad (4.44)$$

Por último, para $\langle T_{33} \rangle_{(T,d)}$, de (4.28), segue que

$$\begin{aligned} \langle T_{33} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{f(\xi)}{d^3} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\xi^4 \pi^2}{45 d^3} - \frac{\xi^3 \zeta(3)}{2\pi d^3} - \left(\frac{\xi^3}{\pi d^3} + \frac{\xi^2}{d^3} \right) e^{-\pi/\xi} + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/\xi})}{d^3} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\pi^2 T^4 d}{45} - \frac{\zeta(3) T^3}{2\pi} - \left(\frac{T^3}{\pi} + \frac{T^2}{d} \right) e^{-\pi/Td} + \frac{\mathcal{O}(e^{-2\pi/Td})}{d^3} \right] \\ &= -\frac{\pi^2 T^4}{45} + \left(\frac{\pi T}{d^3} - \frac{T^2}{d^2} \right) e^{-\pi/Td} + \mathcal{O}(e^{-2\pi/Td}) \left(\frac{3}{d^4} - \frac{2\pi}{T d^3} \right), \end{aligned}$$

onde mais uma vez, preterindo termos exponencialmente pequenos, encontramos:

$$\langle T_{33} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\pi^2 T^4}{45}. \quad (4.45)$$

Em resumo, os termos mistos do tensor energia-momentum no limite $\xi \rightarrow 0$ serão:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\pi^2 T^4}{15} + \frac{\zeta(3) T^3}{\pi d}, \\ \langle T_{11} \rangle_{(T,d)} = \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{\zeta(3) T^3}{2\pi d}, \\ \langle T_{33} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\pi^2 T^4}{45}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

4.3.2 $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T,d)}$ para $\xi \rightarrow \infty$

Para encontrar as componentes do termo misto do tensor energia-momentum no limite $\xi \rightarrow \infty$ podemos seguir um caminho semelhante ao que foi feito na subseção anterior. Não obstante, isso seria mais laborioso. Graças à uma simetria envolvendo $f(\xi)$, que conecta os regimes $\xi \rightarrow \infty$ e $\xi \rightarrow 0$, somos capazes de obter facilmente a forma assintótica de $f(\xi)$ para o limite desejado.

A simetria de *Inversão de Temperatura* foi observada pela primeira vez por Brown & Maclay [24]. Anos depois alguns trabalhos foram publicados com o propósito de compreendê-la em mais detalhes. Dentre estes trabalhos destaca-se o de Ravndal & Tollefsen [40] que mostram que essa simetria é satisfeita também para campos fermiônicos.

Essa simetria é expressada matematicamente pela equação

$$f(\xi) = (2\xi)^4 f\left(\frac{1}{4\xi}\right). \quad (4.47)$$

Para $\xi \rightarrow \infty$, $f\left(\frac{1}{4\xi}\right)$ assume o comportamento de argumento pequeno, ou melhor, $\frac{1}{4\xi} \rightarrow 0$. Dessa forma, regressando à equação (4.42), obtemos:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= (2\xi)^4 f\left(\frac{1}{4\xi}\right) \\ &= 16 \xi^4 \left[\frac{\pi^2}{45} \frac{1}{256\xi^4} - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{1}{64\xi^3} - \left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{64\xi^3} + \frac{1}{16\xi^2} \right) e^{-4\pi\xi} + \mathcal{O}(e^{-8\pi\xi}) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{45} \frac{1}{16} - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{\xi}{4} - \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\xi}{\pi} + \xi^2 \right) e^{-4\pi\xi} + \mathcal{O}(e^{-8\pi\xi}) \end{aligned}$$

e portanto, o comportamento assintótico de $f(\xi)$ para $\xi \rightarrow \infty$ é dado por:

$$f(\xi) = \frac{\pi^2}{720} - \frac{\zeta(3)\xi}{8\pi} - \left(\frac{\xi}{4\pi} + \xi^2 \right) e^{-4\pi\xi} + \mathcal{O}(e^{-8\pi\xi}). \quad (4.48)$$

Imediatamente, podemos retornar à (4.28) com esta expressão e encontrar os termos mistos do tensor energia-momentum no limite $\xi \rightarrow \infty$. Para $\langle T_{00} \rangle_{(T,d)}$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= \frac{u(\xi)}{d^4} = \frac{f(\xi)}{d^4} - \frac{\xi}{d^4} \frac{df(\xi)}{d\xi} \\ &= \frac{\pi^2}{720} - \frac{\zeta(3)\xi}{8\pi} - \left(\frac{\xi}{4\pi} + \xi^2 \right) e^{-4\pi\xi} + \mathcal{O}(e^{-8\pi\xi}) \\ &\quad - \frac{\xi}{d^4} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\pi^2}{720} - \frac{\zeta(3)\xi}{8\pi} - \left(\frac{\xi}{4\pi} + \xi^2 \right) e^{-4\pi\xi} + \mathcal{O}(e^{-8\pi\xi}) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\xi^2}{d^4} e^{-4\pi\xi} + \frac{\mathcal{O}(e^{-8\pi\xi})}{d^4} (1 + 8\pi\xi), \end{aligned}$$

Negligenciando os termos exponencialmente pequenos e usando (3.25) para escrever o resultado em termos da temperatura T , encontramos:

$$\langle T_{00} \rangle_{(T,d)} = \frac{\pi^2}{720 d^4}. \quad (4.49)$$

Para $\langle T_{11} \rangle_{(T,d)}$ e $\langle T_{22} \rangle_{(T,d)}$, de (4.28), teremos:

$$\begin{aligned} \langle T_{11} \rangle_{(T,d)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{f(\xi)}{d^4} \\ &= -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\zeta(3)\xi}{8\pi d^4} + \left(\frac{\xi}{4\pi d^4} + \frac{\xi^2}{d^4} \right) e^{-4\pi\xi} - \frac{\mathcal{O}(e^{-8\pi\xi})}{d^4}, \end{aligned}$$

onde desprezando os termos exponencialmente pequenos, resulta:

$$\langle T_{11} \rangle_{(T,d)} = \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\zeta(3)T}{8\pi d^3}. \quad (4.50)$$

Por último, para $\langle T_{33} \rangle_{(T,d)}$, de (4.28), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{33} \rangle_{(T,d)} &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{f(\xi)}{d^3} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial d} \left[\frac{\pi^2}{720 d^3} - \frac{\zeta(3)T}{8\pi d^2} - \left(\frac{T}{4\pi d^2} + \frac{T^2}{d} \right) e^{-4\pi d T} + \mathcal{O}(e^{-8\pi d T}) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{240 d^4} - \frac{\zeta(3)T}{4\pi d^3} - \left(\frac{T}{2\pi d^3} + \frac{T^2}{d^2} \right) e^{-4\pi d T} + \mathcal{O}(e^{-8\pi d T}) \left(-\frac{3}{d^4} - 8\pi T \right), \end{aligned}$$

onde, desprezando os termos exponencialmente pequenos, encontramos:

$$\langle T_{33} \rangle_{(T,d)} = \frac{\pi^2}{240 d^4} - \frac{\zeta(3)T}{4\pi d^3}. \quad (4.51)$$

Resumindo, os termos mistos do tensor energia-momentum no limite $\xi \rightarrow \infty$ são:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T,d)} &= \frac{\pi^2}{720 d^4}, \\ \langle T_{11} \rangle_{(T,d)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T,d)} = -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\zeta(3)\xi}{8\pi d^4}, \\ \langle T_{33} \rangle_{(T,d)} &= \frac{\pi^2}{240 d^4} - \frac{\zeta(3)T}{4\pi d^3}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Na próxima seção, computamos a forma completa de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para os dois regimes.

4.4 $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ completo

Para encontrar a forma de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ em (4.6) devemos alimentar esta equação com as expressões calculadas nas seções precedentes deste capítulo. Adotamos a mesma ordem seguida até o momento, isto é : primeiro, computamos as componentes para o regime $\xi \rightarrow 0$ e depois fazemos o mesmo para o regime $\xi \rightarrow \infty$.

4.4.1 $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para $\xi \rightarrow 0$

Para $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$, devemos substituir as equações (4.7 - 4.9), (4.14 - 4.16) e (4.46) em (4.6). Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{15} - \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{15} + \frac{\zeta(3) T^3}{\pi d} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T)} = \frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{45} - \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{45} + \frac{\zeta(3) T^3}{2\pi d} \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{240 d^4} + \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{45} - \frac{\pi^2 \cancel{\mathcal{P}^4}}{45} \end{aligned}$$

e portanto, as componentes de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ no regime $\xi \rightarrow 0$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \langle T_{00} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) T^3}{\pi d} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} &= \langle T_{22} \rangle_{(T)} = \frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) T^3}{2\pi d} \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{240 d^4}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.4.2 $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ para $\xi \rightarrow \infty$

Analogamente, para $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$, substituindo (4.7 - 4.9), (4.14 - 4.16) e (4.52) em (4.6), resulta em:

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} = \langle T_{22} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2}{720 d^4} - \frac{\pi^2}{720 d^4} + \frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{\zeta(3) T}{8 \pi d^3} \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2}{240 d^4} + \frac{\pi^2}{240 d^4} - \frac{\zeta(3) T}{4 \pi d^3} + \frac{\pi^2 T^4}{45}\end{aligned}$$

e portanto, as componentes de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ no regime $\xi \rightarrow \infty$ são

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 T^4}{15} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} = \langle T_{22} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 T^4}{45} + \frac{\zeta(3) T}{8 \pi d^3} \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 T^4}{45} - \frac{\zeta(3) T}{4 \pi d^3},\end{aligned}$$

Antes de partimos para o Capítulo 5, onde estudaremos a termodinâmica deste sistema, é necessário restabelecer as unidades, com o intuito de tornar nossos resultados mais claros. Tudo o que precisamos fazer é inserir as potências corretas de $\hbar c$ e de k , onde \hbar é a *Constante Reduzida de Planck*, c é a *Velocidade da Luz* e k é a *Constante de Boltzmann*. É essencial ter em mente que $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ deve ter dimensão de energia por volume.

O passo inicial é observar as potências na temperatura T . Usando unidades usuais, β definido em (3.25) vem agora dado por:

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (4.54)$$

Logo, cada termo T^n se transformará como $(kT)^n$. Para os termos independentes da temperatura, o restabelecimento das dimensões corretas será feito em potências de $\hbar c$. Por fim, podemos ter termos mistos, isto é, que envolvam produtos kT e $\hbar c$. Independente disso, o critério é sempre observar que o resultado final tenha dimensão de energia por volume.

Procedendo da maneira descrita, é fácil verificar que as componentes de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{(T)}$ são dadas por:

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi d (\hbar c)^2} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} = \langle T_{22} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi d (\hbar c)^2} \quad ; \quad \xi \rightarrow 0 \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}\end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}\langle T_{00} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} \\ \langle T_{11} \rangle_{(T)} = \langle T_{22} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} + \frac{\zeta(3) kT}{8 \pi d^3} \quad ; \quad \xi \rightarrow \infty \\ \langle T_{33} \rangle_{(T)} &= \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3) kT}{4 \pi d^3}\end{aligned}\tag{4.56}$$

enfatizando, que ξ é adimensional, e vem redefinida como:

$$\xi = \frac{kTd}{\hbar c} .\tag{4.57}$$

Rumamos agora para o Capítulo 5, onde faremos o estudo da termodinâmica deste sistema.

5 A TERMODINÂMICA DO EFEITO CASIMIR

Neste capítulo apresentamos o estudo da termodinâmica do efeito Casimir. Este estudo é de grande interesse teórico e experimental, pois através dele podemos obter um entendimento de como o efeito Casimir influencia na termodinâmica do sistema, em especial, vinculando-o com a radiação de corpo negro e investigando de forma apropriada a estabilidade termodinâmica do sistema. Tal estudo será dividido em duas partes: regime de altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas, isto é, quando $\xi \rightarrow \infty$ ($kTd/\hbar c \gg 1$), e o regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas, caracterizado por $\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$).

O caminho a ser seguido para ambos os regimes será o mesmo: a largada será dada com a *Energia Livre de Helmholtz* que será encontrada através das componentes de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ que correspondem à densidade de energia $\langle T_{00}(x) \rangle_{(T)}$ e às pressões de radiação do sistema, ou seja, $\langle T_{11}(x) \rangle_{(T)}$, $\langle T_{22}(x) \rangle_{(T)}$ e $\langle T_{33}(x) \rangle_{(T)}$. Com a energia livre de Helmholtz seremos capazes de derivar as demais quantidades termodinâmicas, tais como a entropia, entalpia, energia livre de Gibbs, entre outras.

Após obter as quantidades termodinâmicas relevantes do sistema, serão analisados alguns processos termodinâmicos para o regime $\xi \rightarrow 0$, a saber, expansões e compressões livres, expansões e compressões isotérmicas, entre outros. Também discutiremos ciclos de Carnot que podem ser idealizados tendo como substância de trabalho esse gás modificado pela presença das flutuações do vácuo quântico do campo eletromagnético.

Finalmente, encerramos com um estudo sistemático da estabilidade termodinâmica deste sistema. Durante todo esse capítulo é buscado sempre o estabelecimento de uma conexão com a já elucidada termodinâmica da radiação de corpo negro, a fim de facilitar a interpretação física de alguns resultados, algo que não é tão simples devido à nova e curiosa física trazida pela força de Casimir, uma força atrativa entre as placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras, aspecto proveniente das flutuações do vácuo quântico, que num primeiro momento, se mostra totalmente contra nossa intuição física.

5.1 Regime $\xi \rightarrow \infty$ ($kTd/\hbar c \gg 1$)

Começamos com o regime $kTd/\hbar c \gg 1$ que é caracterizado por altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas. As expressões que serão aqui obtidas terão como termos dominantes aqueles da radiação de corpo negro, mas agora estes terão a companhia das correções devidas às flutuações quânticas do vácuo. Mesmo que tais contribuições se tornem desprezíveis no limite onde $Td \rightarrow \infty$, elas ainda podem influenciar, mesmo que de forma ínfima, em alterações da termodinâmica da radiação de corpo negro. Em

especial, veremos na seção 5.5, que elas desempenham um papel interessante na estabilidade termodinâmica do sistema nesse regime.

Recordamos que a pressão de radiação perpendicular às placas é dada pela componente $\langle T_{33} \rangle_{(T)}$ e a pressão paralela dada pela componente $\langle T_{11} \rangle_{(T)}$ ou $\langle T_{22} \rangle_{(T)}$, que são iguais devido à simetria da configuração. Denotaremos as expressões para a pressão perpendicular $\langle T_{33} \rangle_{(T)}$ e para a pressão paralela $\langle T_{11} \rangle_{(T)}$ ou $\langle T_{22} \rangle_{(T)}$, por P_{\perp} e P_{\parallel} , respectivamente.

Então, das expressões dadas em (4.56), teremos:

$$P_{\perp} = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^3} \quad (5.1)$$

$$P_{\parallel} = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} + \frac{\zeta(3)kT}{8\pi d^3} \quad (5.2)$$

Notamos que no limite onde $d \rightarrow \infty$ ou $T \rightarrow \infty$, tanto P_{\perp} como P_{\parallel} tendem à conhecida pressão de radiação do corpo negro. A radiação de corpo negro é comumente apresentada numa situação ideal, onde o meio é isotrópico e homogêneo, isto é, a pressão de radiação é a mesma em todas as direções com o mesmo valor nas paredes da cavidade independente da sua forma. A inserção da energia de Casimir, que é sensível à forma da cavidade, leva à quebra dessa isotropia. A correção em P_{\parallel} é positiva enquanto que para P_{\perp} é negativa, o que está de acordo com o esperado para a atuação do efeito Casimir entre duas placas perfeitamente condutoras, neutras e paralelas: o aparecimento de uma força atrativa entre as placas. Outrossim, como a correção devida à energia de ponto zero é positiva em P_{\parallel} e negativa em P_{\perp} , haverá uma força maior sobre as paredes da cavidade nas direções paralelas às placas em comparação com a direção perpendicular. A contribuição à P_{\perp} é comumente designada *Pressão de Casimir térmica*. Finalmente, vemos que todos os termos, sejam estes dominantes ou de correção, dependem da temperatura. De outra forma, não há contribuições atribuídas exclusivamente às flutuações quânticas do vácuo.

Neste momento, nosso propósito reside na obtenção da energia livre de Helmholtz, pois será através desta quantidade que derivaremos as demais grandezas termodinâmicas de interesse do sistema. É conhecido da termodinâmica que a energia livre de Helmholtz, denotada por F , está associada à pressão através da seguinte relação [41]:

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (5.3)$$

O potencial termodinâmico F que buscamos deve ser tal que P_{\perp} e P_{\parallel} sejam reproduzidas utilizando-se a relação de Maxwell acima. O volume em nosso sistema é igual ao produto Ad , onde A é a área das placas e d é a distância entre estas. Para P_{\perp} quem varia é d com

A permanecendo constante. Isto nos leva a uma primeira relação

$$\begin{aligned} P_{\perp} &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial F}{\partial (Ad)} \right)_T \\ &= - \frac{1}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial d} \right)_T. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.1) na (5.4), implica:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial d} \right)_T = - \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} A + \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^3} A. \quad (5.5)$$

Analogamente, para P_{\parallel} quem varia é A, e agora d fica inalterada. Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} P_{\parallel} &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial F}{\partial (Ad)} \right)_T \\ &= - \frac{1}{d} \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_T. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Substituindo a equação (5.2) na equação (5.6), encontramos:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_T = - \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} d - \frac{\zeta(3)kT}{8\pi d^2} \quad (5.7)$$

Integrando a equação (5.5) com respeito a d, mantendo A constante, leva a:

$$F(A, d, T) = - \frac{\pi^2 (kT)^4 Ad}{45 (\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2} + B(A), \quad (5.8)$$

onde $B(A)$ é uma função a ser determinada. A seguir, integramos a equação (5.7) com respeito a A, mantendo d constante. Fazendo isso, obtemos:

$$F(A, d, T) = - \frac{\pi^2 (kT)^4 Ad}{45 (\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2} + C(d), \quad (5.9)$$

com $C(d)$ sendo outra função a ser encontrada.

Para determinar as funções $B(A)$ e $C(d)$ devemos comparar as expressões para a energia livre de Helmholtz obtidas em (5.8) e (5.9). Desse processo, resulta:

$$\begin{aligned} B(A) &= 0 \\ C(d) &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Portanto, a energia livre de Helmholtz para o regime $\xi \rightarrow \infty$ é dada pela expressão:

$$F(A, d, T) = - \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2}. \quad (5.11)$$

o que está de acordo com o resultado encontrado por Balian & Duplantier [25], que utilizaram um método alternativo para obtê-la. Estes autores também apontaram a

manutenção da simetria de *Inversão de Temperatura* globalmente. Em outras palavras, já somos capazes de obter a expressão de F para o regime $\xi \rightarrow 0$, invocando essa simetria, que foi apresentada na seção 4.3.2 e é expressa pela equação (4.47). Contudo, adiaremos isso para a seção 5.2.

Uma vez que a energia livre de Helmholtz é conhecida, podemos partir para a obtenção das demais grandezas termodinâmicas do sistema. A primeira delas, é a entropia S , que está relacionada com F através da equação:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{A,d} \quad (5.12)$$

Calculando S , encontramos a seguinte expressão:

$$S = \frac{4\pi^2 (kT)^3}{45 (\hbar c)^3} kAd + \frac{\zeta(3)}{8\pi d^2} kA. \quad (5.13)$$

Notamos que a expressão acima é formada pela entropia da radiação de corpo negro acompanhada de uma correção proveniente do vácuo. Na literatura essa correção é usualmente chamada de *Entropia de Casimir*. Como também estamos considerando a entropia da radiação de corpo negro, que representa em (5.13) o termo dominante, a denominação para o segundo termo atribuída a Casimir fica um pouco fora de contexto, já que esta trata-se somente de uma correção. Em outras abordagens, como a que é feita por Balian & Duplantier [25], a energia livre de Helmholtz é regularizada e o termo devido à radiação de corpo negro é subtraído. Neste caso, o termo remanescente é a *Energia Livre de Casimir* que quando diferenciada com respeito à temperatura, nos leva à expressão para a *Entropia de Casimir*. Um outro fato importante que deve ser mencionado à respeito deste termo de correção é que, equivocadamente, este é visto como “clássico” pelo simples fato de não conter \hbar , o que lhe atribuiria um caráter quântico. Porém, esse equívoco é desfeito quando tomamos o limite $\hbar \rightarrow 0$: o primeiro termo devido à radiação de corpo negro é muito maior que o termo de correção, que assim se torna desprezível. Agora, talvez o aspecto mais importante da expressão (5.13) está na aplicação da Terceira Lei da Termodinâmica. Novamente ela pode nos induzir a tirar conclusões equivocadas. Quando a temperatura vai a zero, vemos claramente que a expressão (5.13) não vai a zero, o que violaria a Terceira Lei ! No entanto, não faz sentido avaliar a Terceira Lei para essa expressão porque ela é definida somente para altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas. Esse último detalhe já elimina a confusão que eventualmente pode ser causada. Uma última observação, não menos importante, que devemos fazer com respeito à expressão para S é o fato de sua expressão também nos induzir a pensar que esta perde seu caráter extensivo. Relembrando que o volume V é igual ao produto da área A pela distância d entre as placas; sabemos que na equação (5.13), o primeiro termo correspondente à radiação de corpo negro é extensivo, mas o termo de correção não. Assim, vemos que este último termo tem natureza não-extensiva. Contudo, ao tomarmos o limite $d \rightarrow \infty$ o termo de correção tende

a zero, tornando-se desprezível novamente e eliminando qualquer equívoco a respeito da extensividade da entropia.

Conhecidas a energia livre de Helmholtz e a entropia, podemos calcular a *Energia Interna*. Sua definição em [41],

$$F := U - TS,$$

leva a:

$$U = F + TS. \quad (5.14)$$

Usando as equações (5.11) e (5.13), obtemos a seguinte expressão:

$$U = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} Ad, \quad (5.15)$$

que é exatamente a expressão para o corpo negro, isto é, sem correções devidas ao vácuo.

Ulteriormente, a *Entalpia* é definida na termodinâmica pela equação

$$H = U + PV. \quad (5.16)$$

Devido à anisotropia instaurada pelas flutuações do vácuo quântico em nosso sistema, - que como salientamos, implica em duas pressões distintas - teremos duas expressões diferentes para H : uma correspondente à pressão perpendicular e outra correspondente à pressão paralela às placas. Posteriormente, ao calcular a *Energia Livre de Gibbs*, nos depararemos com a mesma situação. Com o auxílio da equação (5.2), a expressão para a entalpia correspondente à pressão paralela é dada por:

$$H_{\parallel} = \frac{4\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad + \frac{\zeta(3)kT}{8\pi d^2} A. \quad (5.17)$$

Utilizando-se a expressão (5.1), a entalpia correspondente à pressão perpendicular será:

$$H_{\perp} = \frac{4\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^2} A. \quad (5.18)$$

A comparação das expressões (5.17) e (5.18) nos permite fazer uma conexão com a interpretação que fizemos no começo desta seção para as expressões obtidas para P_{\perp} e P_{\parallel} . Vemos que as expressões para H_{\perp} e H_{\parallel} obviamente carregam os mesmos tipos de correções, o que é esperado devido à definição formal de entalpia. Ao se tomar o limite de $d \rightarrow \infty$, ambas reproduzem o conhecido resultado para a entalpia da radiação de corpo negro, já que os termos de correção tornam-se desprezíveis quando o volume é muito grande. O mesmo acontece se analisamos o comportamento das duas expressões quando T é muito grande. Ambas as correções que advêm da introdução da energia do vácuo, que variam linearmente com a temperatura, serão muito menores do que as contribuições de corpo negro que crescem com T^4 .

O próximo potencial termodinâmico a ser calculado é a *Energia Livre de Gibbs*. Esta é definida pela expressão:

$$G := H - TS \quad (5.19)$$

Das expressões para H_{\parallel} e H_{\perp} obtemos G_{\parallel} e G_{\perp} , respectivamente, dadas pelas expressões a seguir:

$$G_{\parallel} = 0 \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} G_{\perp} &= \frac{4\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^2} A - T \left[\frac{4\pi^2 (kT)^3}{45 (\hbar c)^3} kAd + \frac{\zeta(3)}{8\pi d^2} kA \right] \\ &= -\frac{3\zeta(3)kT}{8\pi d^2} A. \end{aligned} \quad (5.21)$$

A última expressão nos apresenta algo muito interessante. Quando negligenciamos a presença da energia do vácuo, ao calcularmos a energia livre de Gibbs, encontramos que ela é igual a zero (um resultado conhecido da termodinâmica da radiação de corpo negro). Da termodinâmica, sabemos que [42]:

$$G = \mu N. \quad (5.22)$$

Se $G = 0$, isto nos leva a ter $\mu = 0$, visto que N é o número de fótons na cavidade de volume V , que para a radiação de corpo negro é igual a $N = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 Ad$ [41]. Entretanto, algumas inconsistências surgem de termos $G = 0$. A principal delas resulta na derivação da entropia e do volume a partir de G . Para um sistema isotrópico [42], S e V são dados por:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P, \quad (5.23)$$

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T. \quad (5.24)$$

Porém, como nossa configuração é anisotrópica, estas relações devem ser ligeiramente modificadas. Segundo as definições dadas nas equações (5.23) e (5.24), temos que para a radiação de corpo negro, a entropia e o volume seriam indeterminados. Para se convencer disso, basta lembrar que neste caso, temos $P = P(T)$. Dessa forma, se a pressão é mantida constante, a temperatura também será e vice-versa. Isto faz com que os denominadores nestas definições sejam iguais a zero, e portanto, teremos indeterminações.

Levando em consideração a anisotropia da nossa configuração, podemos derivar as seguintes relações para S e V :

$$S = - \left(\frac{\partial G_{\perp}}{\partial T} \right)_{P_{\perp}, A}, \quad (5.25)$$

$$V = \left(\frac{\partial G_{\perp}}{\partial P_{\perp}} \right)_{A, T}. \quad (5.26)$$

Escrevendo (5.21) em termos da pressão P_{\perp} dada pela equação (5.1), obtemos a seguinte expressão:

$$G_{\perp}(P_{\perp}, T, A) = -\frac{3\zeta(3)}{8\pi}kTA \left\{ \frac{4\pi}{\zeta(3)kT} \left[\frac{\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3} - P_{\perp} \right] \right\}^{2/3}. \quad (5.27)$$

Se usarmos a equação (5.27) em (5.25) e (5.26) encontraremos as mesmas expressões para a entropia (5.13) e também para o volume. Portanto, a expressão encontrada em (5.21) resolve a inconsistência que temos na teoria da radiação de corpo negro. Verifica-se assim que a variável d que determina a distância entre as placas atua como um regulador para os cálculos em (5.25) e (5.26).

Por fim, vamos calcular as capacidades térmicas para o sistema. A capacidade térmica a volume constante pode ser encontrada através da relação:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{A,d}. \quad (5.28)$$

Utilizando a equação (5.15), a expressão para C_V será dada por:

$$C_V = \frac{4\pi^2}{15} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd, \quad (5.29)$$

que é exatamente a expressão para o corpo negro [41]. Apesar de C_V permanecer a mesma expressão que temos para o corpo negro sem levar em conta a contribuição da energia do vácuo, a relação $C_V = 3S_0$ (onde S_0 é a entropia do corpo negro) não é mais válida. Isto porque agora a entropia é igual à soma da entropia de corpo negro mais uma contribuição proveniente da energia do vácuo. De fato, teremos agora:

$$C_V = 3S - \frac{3\zeta(3)kA}{8\pi d^2}, \quad (5.30)$$

sendo S dada por (5.13).

Para calcular C_P , utilizamos sua definição:

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P. \quad (5.31)$$

O diferencial dQ pode ser reescrito utilizando a Primeira Lei. Após manipular um pouco a expressão, encontramos que (5.31) é equivalente a:

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P. \quad (5.32)$$

No nosso caso, como há duas pressões diferentes também teremos duas entalpias e consequentemente, duas expressões diferentes para a capacidade térmica à pressão constante que denotaremos por $C_{P_{\parallel},d}$ e $C_{P_{\perp},A}$. Para derivar essas expressões, procedemos de forma análoga ao que fazemos para derivar a expressão (5.32). Então, encontramos:

$$C_{P_{\parallel},d} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{P_{\parallel},d} = \left(\frac{\partial H_{\parallel}}{\partial T} \right)_{P_{\parallel},d}, \quad C_{P_{\perp},A} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{P_{\perp},A} = \left(\frac{\partial H_{\perp}}{\partial T} \right)_{P_{\perp},A}. \quad (5.33)$$

Dessas expressões, vemos que H_{\parallel} e H_{\perp} devem ser escritas como $H_{\parallel}(P_{\parallel}, T, d)$ e $H_{\perp}(P_{\perp}, T, A)$. Para a entalpia paralela, não podemos eliminar a variável A já que P_{\parallel} depende somente de T e d . Adicionalmente, sendo $P_{\parallel} = P_{\parallel}(T, d)$, as exigências de que P_{\parallel} e d sejam constantes, requerem que T também seja constante (vide Eq. (5.2)). Logo, observamos que na fórmula de $C_{P_{\parallel},d}$ em (5.33), teremos a razão de uma quantidade finita por uma quantidade nula ($dT = 0$). Portanto, $C_{P_{\parallel},d}$ é infinita, da mesma forma que temos para a radiação de corpo negro [41]. Com relação a $C_{P_{\perp},A}$, não discutiremos seu valor para o regime $\xi \rightarrow \infty$ pois este carece de uma análise mais detalhada. Num primeiro momento, o que esperamos é para $T \rightarrow \infty$ ou $d \rightarrow \infty$, seu valor também seja infinito, visto que o sistema seria isotrópico.

5.1.1 A relação de Euler para $\xi \rightarrow \infty$

Vamos discutir agora uma importante propriedade que envolve a entropia do sistema no regime $\xi \rightarrow \infty$. Como vimos, S é dada pela expressão (5.13), que pode ser escrita em termos da energia interna (5.15), da área e da distância entre as placas na seguinte forma:

$$S(U, A, d) = \frac{4}{3} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3} \right]^{\frac{1}{4}} (U^3 A d)^{\frac{1}{4}} + \frac{\zeta(3)kA}{8\pi d^2} \quad (5.34)$$

Podemos verificar facilmente que a entropia escrita nessa forma é uma função homogênea de primeira ordem nas variáveis U e A , mas não na variável d . Matematicamente, isto é equivalente a dizer que S obedece a seguinte relação:

$$S(\lambda U, \lambda A, d) = \lambda S(U, A, d). \quad (5.35)$$

Diferentemente da entropia da radiação de corpo negro, que é proporcional ao volume da cavidade, a entropia que leva em conta as flutuações do vácuo quântico não é extensiva com respeito à distância entre as placas. Contudo, vemos de (5.13), que ela é extensiva com respeito à área: dobrando-se S e U , temos que S também dobra.

A relação de Euler para um sistema isotrópico onde o número de moléculas não é constante [42] é dada pela expressão:

$$S = \frac{U}{T} + \frac{P}{T}V. \quad (5.36)$$

Como as flutuações do vácuo quebram a isotropia do nosso sistema (lembre-se que P_{\perp} e P_{\parallel} são diferentes), devemos obter a relação de Euler apropriada que nos leve à entropia correta (5.13) obtida através da energia livre de Helmholtz (5.11). Para tanto, partimos da equação (5.35). Diferenciando-a com respeito a λ , encontramos:

$$\frac{\partial S}{\partial(\lambda U)} \frac{\partial(\lambda U)}{\partial \lambda} + \frac{\partial S}{\partial(\lambda A)} \frac{\partial(\lambda A)}{\partial \lambda} = S(U, A, d) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial(\lambda U)} U + \frac{\partial S}{\partial(\lambda A)} A = S(U, A, d)$$

Como a equação (5.35) é válida para qualquer valor de λ , em particular, para $\lambda = 1$, teremos:

$$S(U, A, d) = \frac{\partial S}{\partial U} U + \frac{\partial S}{\partial A} A$$

Da conhecida relação da termodinâmica [41]

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \quad (5.37)$$

para $S = S(U, V)$, teríamos:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V, \quad P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U.$$

Contudo, nossa configuração é anisotrópica. Portanto, como já visto anteriormente, para as pressões, teremos:

$$P_{\perp} = \frac{T}{A} \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_{U,A}, \quad P_{\parallel} = \frac{T}{d} \left(\frac{\partial S}{\partial A} \right)_{U,d}. \quad (5.38)$$

Portanto, a *Relação de Euler* modificada para nosso sistema assume a seguinte forma:

$$S(T, A, d) = \frac{U}{T} + \frac{P_{\parallel}}{T}Ad. \quad (5.39)$$

Ao substituir as expressões da energia interna (5.15) e da pressão paralela (5.2) em (5.39), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} + \frac{P_{\parallel}}{T}Ad &= \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 kAd + \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 kAd + \frac{\zeta(3)kA}{8\pi d^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{45} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 kAd + \frac{\zeta(3)kA}{8\pi d^2} \\ &\equiv S(T, A, d). \end{aligned}$$

concordando com a expressão encontrada anteriormente em (5.13). Caso tivéssemos utilizado P_{\perp} ao invés de P_{\parallel} , teríamos encontrado uma expressão que não é igual a (5.13). O fato de S não ser uma função homogênea de primeira ordem na variável d explica esse resultado. A anisotropia revelada pelos diferentes valores da pressão resulta na existência de uma energia livre de Gibbs perpendicular, G_{\perp} , como vimos em (5.21).

A expressão (5.39) apresentada para a relação de Euler modificada já antecipa o que ocorre para o caso onde a energia livre de Gibbs do sistema é nula. A forma completa para essa relação é dada por [42]:

$$S = \frac{U}{T} + \frac{P}{T}V - \mu N \quad (5.40)$$

onde μ é o potencial químico do sistema e N o número total de partículas. Ainda dessa relação, somos levados a (5.22). Se a entropia não for uma função homogênea de primeira ordem nas variáveis U, V e N, a relação (5.22) que define a energia livre de Gibbs, deve ser diferente de zero. Para nossa configuração, encontramos que $G_{\parallel} = 0$ e $G_{\perp} \neq 0$. Será que isso concorda com a equação (5.22)?

Para P_{\parallel} , teremos:

$$\begin{aligned} G_{\parallel} &= F + P_{\parallel} Ad \\ &= -\frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2} + \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3} Ad + \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

o que corrobora o resultado encontrado anteriormente (5.20).

E G_{\perp} ?

Substituindo P_{\perp} no lugar de P_{\parallel} em (5.40), leva a:

$$\begin{aligned} G_{\perp} &= F + P_{\perp} Ad \\ &= -\frac{\cancel{\pi^2 (kT)^4}}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2} + \frac{\cancel{\pi^2 (kT)^4}}{45 (\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kTA}{4\pi d^2} \\ &= -\frac{3\zeta(3)kTA}{8\pi d^2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

confirmando o valor obtido anteriormente em (5.21). Portanto, o fato de G_{\perp} ser diferente de zero, está diretamente relacionado à quebra de homogeneidade da entropia que é causada pela variável d , ou seja, a distância entre as placas.

5.2 Regime $\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$)

Seguimos com a obtenção das grandezas termodinâmicas e aplicações para o regime $\xi \rightarrow 0$, que é caracterizado por baixas temperaturas ou pequena separação entre as placas. Identicamente ao que foi feito para o regime $\xi \rightarrow \infty$, temos a pressão de radiação perpendicular às paredes das placas sendo dada pela componente $\langle T_{33} \rangle_{(T)}$ do tensor energia-momentum, e a pressão paralela dada pela componente $\langle T_{11} \rangle_{(T)}$ ou $\langle T_{22} \rangle_{(T)}$, que possuem o mesmo valor.

Segue das expressões em (4.55),

$$P_{\perp} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \quad (5.43)$$

e

$$P_{\parallel} = \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi d (\hbar c)^2}. \quad (5.44)$$

Se olharmos para a expressão de P_{\perp} , vemos que ela dá origem a uma força atrativa, que cresce em módulo à medida que a distância entre as placas decresce. Esta expressão é muito importante e foi a mesma encontrada por Casimir em 1948. Comparando as duas expressões, vemos que P_{\parallel} possui uma parte térmica diferentemente da *Pressão de Casimir* (vide 5.43). Para qualquer valor da temperatura T , a Pressão de Casimir mantém seu valor constante. No caso especial de $T = 0$, o termo térmico de P_{\parallel} desaparece, sobrando somente

o termo dependente da distância d entre as duas placas. Para esta situação, comparando a Pressão de Casimir com a expressão remanescente de P_{\parallel} - esta última, que dá origem a uma força repulsiva - vemos que à medida que a distância entre as placas diminui, a primeira será maior em módulo do que a segunda. Um outro aspecto importante destas duas expressões, que inclusive é comentado por Brown & Maclay [24], é que ambas as expressões dependem da distância entre as placas, diferentemente daquelas para o regime $\xi \rightarrow \infty$, onde todos os termos P_{\perp} e P_{\parallel} dependem da temperatura.

Novamente, o ponto de partida rumo à obtenção das grandezas termodinâmicas é cálculo da energia livre de Helmholtz do sistema. Seguindo o protocolo utilizado na seção anterior para o regime $\xi \rightarrow \infty$, as expressões para as derivadas parciais de F com respeito a d e A serão dadas por:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_T = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} A \quad (5.45)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_T = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} - \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} \quad (5.46)$$

Integrando a equação (5.45) com respeito a d , mantendo A constante, teremos:

$$F(A, d, T) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + B(A) \quad (5.47)$$

onde $B(A)$ é uma função a ser determinada. Fazendo o mesmo para a equação (5.46) com respeito a A , mantendo d constante, resulta:

$$F(A, d, T) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A - \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A + C(d) \quad (5.48)$$

onde $C(d)$ também é uma função que deve ser determinada. Comparando as expressões para a energia livre de Helmholtz obtidas em (5.47) e (5.48), concluímos que:

$$B(A) = -\frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A, \quad (5.49)$$

$$C(d) = 0.$$

Dessa forma, a energia livre de Helmholtz para o regime $\xi \rightarrow 0$ vem dada pela expressão:

$$F(A, d, T) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A - \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A, \quad (5.50)$$

de acordo com a Ref. [25], onde outros métodos foram usados.

Uma vez que F é conhecida, podemos prosseguir com a obtenção das demais grandezas termodinâmicas do sistema. Para calcular a entropia, usamos sua definição em (5.12) junto com a expressão de F em (5.50), resultando em:

$$S = \frac{3\zeta(3) (kT)^2}{2\pi (\hbar c)^2} kA. \quad (5.51)$$

Esta expressão é a mesma que encontraríamos caso tivéssemos calculado a entropia de um corpo negro escalar em um espaço-tempo 2 + 1 dimensional. É interessante notar que a expressão acima não depende da distância de separação entre as placas, mas somente da área destas e da temperatura. Para T e d fixos, a única forma de alterar a entropia é através da variação da área das placas. Conseqüentemente, neste cenário, um processo isotérmico que envolva ganho ou perda de calor, só será possível, se houver o aumento ou a diminuição de A . Se além de isotérmico, um dado processo termodinâmico for tal que a área também seja constante, então teremos $AT^2 = cte$, e este processo isotérmico, também será adiabático. Em outras palavras, $AT^2 = cte$ implica em $dQ = 0$. Há outros aspectos muito interessantes que devemos salientar sobre esta expressão. Porém, antes de abordá-los, vamos avançar um pouco mais e obter a energia interna.

Substituindo (5.50) e (5.51) na definição de U em (5.14), encontramos:

$$U = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} A, \quad (5.52)$$

Vemos que a correção à energia de Casimir é caracterizada por um termo térmico que varia com o cubo da temperatura.

Conhecida U retornamos à nossa discussão sobre a entropia. Entre os aspectos importantes de sua expressão, é que através dela podemos obter a pressão de Casimir (5.43) que depende somente da distância de separação entre as placas. Este resultado pode parecer curioso, pois como essa pressão é independente da temperatura, isso pode conduzir equivocadamente à conclusão de que essa pressão não pode ser obtida da termodinâmica. Para mostrar que isso é de fato um equívoco, recorreremos à Primeira Lei da termodinâmica. Denotaremos, momentaneamente, a distância entre as placas por “ a ” ao invés de d , pois vamos trabalhar com diferenciais nas próximas equações. Como o volume V é igual ao produto Aa , teremos:

$$dU = dQ - PdV = dQ - Pd(Aa) \Rightarrow dU = dQ - AP_{\perp} da - aP_{\parallel} dA,$$

e sendo $dQ = TdS$, segue que:

$$dU = TdS - AP_{\perp} da - aP_{\parallel} dA \Rightarrow dS = \frac{1}{T} dU + \frac{AP_{\perp}}{T} da + \frac{aP_{\parallel}}{T} dA. \quad (5.53)$$

Se $S = S(U, A, a)$, podemos colocar o diferencial dS na forma:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{A,a} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)_{U,A} da + \left(\frac{\partial S}{\partial A} \right)_{U,a} dA. \quad (5.54)$$

Comparando as equações (5.53) e (5.54), e desfazendo a mudança $a \rightarrow d$, encontramos:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{A,d} \quad (5.55)$$

$$P_{\parallel} = \frac{T}{d} \left(\frac{\partial S}{\partial A} \right)_{U,d} \quad (5.56)$$

$$P_{\perp} = \frac{T}{A} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right)_{U,A} \quad (5.57)$$

Para verificar se estas relações reproduzem os resultados já encontrados, devemos escrever a entropia como função da energia interna, da área e da distância de separação entre as placas. Para isto, recorreremos à expressão de U em (5.52) para obter uma relação para T em termos de U , A e d . A relação encontrada é então substituída em (5.51), o que leva à seguinte expressão:

$$S(U, A, d) = \frac{3\zeta(3)k^3 A}{2\pi(\hbar c)^2} \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (5.58)$$

Agora, podemos trabalhar com as relações (5.55 - 5.57) recém obtidas. Para o inverso da temperatura, teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{A,d} &= \frac{3\zeta(3)k^3 A}{2\pi(\hbar c)^2} \frac{\partial}{\partial U} \left\{ \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}_{A,d} \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3 A}{2\pi(\hbar c)^2} \frac{2\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3 A} \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{-\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

e substituindo a expressão de U dada em (5.52), implica em :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{A,d} &= \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \left(-\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3 A} \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A \right]^{-\frac{1}{3}} \\ &= (T^3)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{T}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

confirmando (5.55).

Agora, usando (5.56), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{d} \left(\frac{\partial S}{\partial A} \right)_{U,d} &= \frac{3\zeta(3)k^3T}{2\pi d(\hbar c)^2} \frac{\partial}{\partial A} \left\{ A \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}_{U,d} \\
&= \frac{3\zeta(3)k^3T}{2\pi d(\hbar c)^2} \frac{\partial}{\partial A} \left\{ A \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} U + \frac{\pi^3 (\hbar c)^3}{720\zeta(3)k^3 d^3} \right]^{\frac{2}{3}} \right\}_{U,d} \\
&= \frac{3\zeta(3)k^3T}{2\pi d(\hbar c)^2} \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A \right]^{-\frac{1}{3}} \left\{ \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A \right] - \frac{2\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3A} U \right\} \\
&= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi d(\hbar c)^2} \left[T^3 - \frac{2\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3A} U \right] \\
&= -\frac{U}{d} + \frac{3\zeta(3)(kT)^3}{2\pi d(\hbar c)^2} = \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} - \frac{\zeta(3)}{\pi d} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} + \frac{3\zeta(3)(kT)^3}{2\pi d(\hbar c)^2} \\
&= \frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} + \frac{\zeta(3)}{2\pi d} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} \\
&= P_{\parallel}(T, A, d),
\end{aligned}$$

concordando com (5.44).

Finalmente, chegou o momento de mostrar que podemos obter a *Pressão de Casimir* dada por P_{\perp} , usando a relação (5.57). Fazendo isso, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{A} \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_{U,A} &= \frac{3\zeta(3)k^3T}{2\pi(\hbar c)^2} \frac{\partial}{\partial d} \left\{ \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \right\}_{U,A} \\
&= \frac{3\zeta(3)k^3A}{2\pi(\hbar c)^2} \frac{2\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3A} \frac{2\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3A} (-3) \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^4} \left[\frac{\pi(\hbar c)^2}{\zeta(3)k^3A} \left(U + \frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \\
&= -T \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \\
&= -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \\
&= P_{\perp}(d),
\end{aligned}$$

corroborando o resultado dado em (5.43). Portanto, temos mostrado que P_{\perp} pode ser obtida através da termodinâmica.

Um último comentário sobre essa entropia, é o de esta depender da área e não do volume, o que é interessante, visto que há poucos sistemas físicos onde isso acontece. Um exemplo notável, é a entropia de Bekenstein-Hawking para um buraco negro, que depende da área de seu horizonte de eventos [43].

De volta à tarefa de obter as grandezas termodinâmicas do sistema, seguimos com a entalpia. Novamente, enfatizamos a existência de duas expressões para esta grandeza devido ao fato de termos duas pressões, a perpendicular e a paralela às placas. Usando a definição de H em (5.16) juntamente com as expressões de P_{\perp} , P_{\parallel} e U dadas em (5.43),

(5.44) e (5.52), obtemos para H_{\parallel} e H_{\perp} :

$$\begin{aligned} H_{\parallel} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} A + \left[\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^4} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi d (\hbar c)^2} \right] Ad \\ &= \frac{3\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A. \end{aligned} \quad (5.60)$$

e

$$\begin{aligned} H_{\perp} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} A + \left(-\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \right) Ad \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{180 d^3} A + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} A. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Conhecida a entalpia e a entropia podemos calcular a energia livre de Gibbs. Da relação (5.19) e das expressões obtidas recém calculadas para H_{\parallel} e H_{\perp} em (5.60) e (5.61), encontramos para G_{\parallel} e G_{\perp} os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} G_{\parallel} &= \frac{3\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A - T \left[\frac{3\zeta(3) (kT)^2}{2\pi (\hbar c)^2} kA \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

e

$$\begin{aligned} G_{\perp} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{180 d^3} A + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} A - T \left[3 \frac{\zeta(3) (kT)^2}{2\pi (\hbar c)^2} kA \right] \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{180 d^3} A - \frac{\zeta(3) (kT)^3}{2\pi (\hbar c)^2} A. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Novamente, como ocorre no regime $\xi \rightarrow \infty$, a energia livre de Gibbs que corresponde a P_{\parallel} é nula e a relativa a P_{\perp} diferente de zero. G_{\parallel} ser identicamente nula indica a presença de um gás de bósons escalares num espaço-tempo 2 + 1 dimensional.

Se analisarmos a forma funcional da entropia (5.51) e fizermos uma analogia com o fato conhecido da radiação de corpo negro, onde S e N são proporcionais, esperamos que o número N de partículas para o regime $\xi \rightarrow 0$ seja algo proporcional a AT^2 . Podemos calcular este N para nossa configuração. Consultando a Ref. [44], encontramos o seguinte valor para o número de bósons escalares em um espaço-tempo 2 + 1 dimensional:

$$N = \frac{\zeta(2)}{2\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^2 A. \quad (5.64)$$

Por fim, vamos calcular as capacidades térmicas para o sistema. Para volume constante, das equações (5.28) e (5.52), teremos que C_V será dada por:

$$C_V = \frac{3\zeta(3) (kT)^2}{\pi (\hbar c)^2} kA. \quad (5.65)$$

Se buscamos uma relação entre C_V e a entropia dada em (5.51), como é feito no regime $\xi \rightarrow \infty$, obteremos:

$$C_V = 2S. \quad (5.66)$$

Assim, vemos que para o regime $\xi \rightarrow 0$ a capacidade térmica e a entropia são proporcionais, o que é esperado. Se estudarmos a radiação de corpo negro para um campo escalar em um espaço-tempo $2 + 1$ dimensional [44], concluiremos que as expressões para as grandezas termodinâmicas, tais como a energia livre de Helmholtz, a energia interna e entropia são iguais aos termos de correção encontrados para nossas expressões no regime $\xi \rightarrow 0$. Isto sugere, que nesse regime, devem haver bósons escalares que possuem momento somente nas direções paralelas às placas, isto é, x e y . É como se o momento perpendicular, k_z , estivesse “congelado”.

Por fim, calculamos a capacidade térmica à pressão constante. Lembramos que teremos duas expressões para C_P : $C_{P_{\parallel},d}$ e $C_{P_{\perp},A}$ cujas definições foram dadas em (5.33). Para $C_{P_{\parallel},d}$, H_{\parallel} deve ser escrita em termos de P_{\parallel} , T e d . Porém, não é possível eliminar a variável A da expressão de P_{\parallel} . Assim como acontece no regime $\xi \rightarrow \infty$, $C_{P_{\parallel},d}$ será infinita para $\xi \rightarrow 0$, visto que a exigência de P_{\parallel} e d serem constantes, faz com que a temperatura também o seja (vide Eq. (5.44)). Logo, temos $dT = 0$, o que acarreta em um valor infinito para $C_{P_{\parallel},d}$ de sua definição em (5.33). Já para $C_{P_{\perp},A}$, escrevemos H_{\perp} como função de P_{\perp} , T e A . Como H_{\perp} varia com a distância d entre as placas, podemos eliminar essa variável usando a expressão para P_{\perp} dada na equação (5.43), resultando em:

$$\frac{1}{d} = \left(\frac{-240P_{\perp}}{\pi^2 \hbar c} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.67)$$

Substituindo (5.67) em (5.61), teremos:

$$H_{\perp}(P_{\perp}, T, A) = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{180} \left(\frac{-240P_{\perp}}{\pi^2 \hbar c} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A. \quad (5.68)$$

Voltando à expressão (5.33) e calculando $C_{P_{\perp},A}$, encontramos:

$$C_{P_{\perp},A} = \left(\frac{\partial H_{\perp}}{\partial T} \right)_{P_{\perp}} = \frac{3\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^2}{(\hbar c)^2} kA. \quad (5.69)$$

Portanto, vemos que a razão entre $C_{P_{\perp},A}$ e C_V é igual a unidade.

5.2.1 A relação de Euler para $\xi \rightarrow 0$

Análogo ao que foi feito na subseção 5.1.1, analisamos na presente subseção a relação de Euler para o regime $\xi \rightarrow 0$. Nesse regime, a representação da entropia S em termos das variáveis U , A e d é dada pela equação (5.58). Novamente, pode ser verificado que S escrita nessa forma, é uma função homogênea de primeira ordem nas variáveis U e A , mas não na variável d . Ou seja, S satisfaz a relação (5.35).

A relação de Euler modificada neste regime é a mesma obtida para $\xi \rightarrow \infty$, que é dada pela equação (5.39). Substituindo as expressões da energia interna (5.52) e da pressão paralela (5.44) em (5.39), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{U}{T} + \frac{P_{\parallel}}{T}Ad &= -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3 T} A + \frac{\zeta(3)}{\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^2 kA + \frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3 T} A + \frac{\zeta(3)}{2\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^2 kA \\ &= \frac{3\zeta(3)}{2\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^2 kA \\ &\equiv S(T, A, d). \end{aligned}$$

concordando com a expressão encontrada anteriormente em (5.51). A anisotropia também se apresenta aqui, dando origem a uma energia livre de Gibbs perpendicular, G_{\perp} , como vimos em (5.63).

Substituindo (5.44) para P_{\parallel} e (5.50) para F em (5.40), encontramos:

$$\begin{aligned} G_{\parallel} &= F + P_{\parallel}Ad \\ &= -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3} A - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A + \frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^4} + \frac{\zeta(3)}{2\pi d} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.70}$$

ratificando o resultado encontrado anteriormente (5.62).

Já para G_{\perp} , substituindo P_{\perp} dada por (5.43) no lugar de P_{\parallel} em (5.40), nos leva a:

$$\begin{aligned} G_{\perp} &= F + P_{\perp}Ad \\ &= -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3} A - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A - \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^3} A \\ &= -\frac{\pi^2}{180} \frac{\hbar c}{d^3} A - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A. \end{aligned} \tag{5.71}$$

confirmando o valor obtido anteriormente em (5.63). Aqui também, a entropia não é uma função homogênea de d , o que acarreta num valor não nulo para G_{\perp} .

Finalizado o processo de obtenção das grandezas termodinâmicas, apresentamos na tabela 1 um resumo das expressões obtidas para os regimes $\xi \rightarrow \infty$ ($kTd/\hbar c \gg 1$) e $\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$), e também aquelas da radiação de corpo negro .

5.3 Outros aspectos termodinâmicos do regime $\xi \rightarrow 0$

O objetivo desta seção é o de estudar alguns processos termodinâmicos para o sistema no regime $\xi \rightarrow 0$, que possam revelar mais detalhes acerca das características deste sistema. Analisamos como o sistema se comporta em processos isotérmicos e adiabáticos. Também investigamos processos de expansão e compressão livre. Todos os resultados

Tabela 1: Grandezas termodinâmicas para os diferentes regimes.

	Corpo negro	$\xi \rightarrow \infty$ ($kTd/\hbar c \gg 1$)	$\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$)
P_{\perp}	$\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$	$\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^3}$	$-\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4}$
P_{\parallel}	$\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$	$\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} + \frac{\zeta(3)kT}{8\pi d^3}$	$\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^4} + \frac{\zeta(3)}{2\pi d} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2}$
F	$-\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4 Ad}{(\hbar c)^3}$	$-\frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4 Ad}{(\hbar c)^3} - \frac{\zeta(3)kTA}{8\pi d^2}$	$-\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c A}{d^3} - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3 A}{(\hbar c)^2}$
S	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd$	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd + \frac{\zeta(3)}{8\pi d^2} kA$	$\frac{3\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^2}{(\hbar c)^2} kA$
U	$\frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad$	$\frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad$	$-\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3} A + \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A$
H_{\perp}	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad$	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad - \frac{\zeta(3)kT}{4\pi d^2} A$	$-\frac{\pi^2}{180} \frac{\hbar c}{d^3} A + \frac{\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A$
H_{\parallel}	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad$	$\frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} Ad + \frac{\zeta(3)kT}{8\pi d^2} A$	$\frac{3\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A$
G_{\perp}	0	$-\frac{3\zeta(3)kT}{8\pi d^2} A$	$-\frac{\pi^2}{180} \frac{\hbar c}{d^3} A - \frac{\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^2} A$
G_{\parallel}	0	0	0
N	$\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 Ad$	$\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 Ad$	$\frac{\zeta(2)}{2\pi} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^2 A$
C_V	$\frac{4\pi^2}{15} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd$	$\frac{4\pi^2}{15} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd$	$\frac{3\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^2}{(\hbar c)^2} kA$
$C_{P_{\parallel},d}$	∞	∞	∞
$C_{P_{\perp},A}$	∞	Indefinido	$\frac{3\zeta(3)}{\pi} \frac{(kT)^2}{(\hbar c)^2} kA$

obtidos são comparados com aqueles já conhecidos para a radiação de corpo negro, com o intuito de facilitar nossa compreensão acerca da termodinâmica do regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas.

5.3.1 Processos Isotérmicos

Vamos supor que o sistema sofra uma expansão (ou compressão) isotérmica, isto é, à temperatura constante, e que tal processo seja reversível. A quantidade de calor absorvida de uma fonte externa (o que possibilita a manutenção do valor da temperatura)

pode ser facilmente encontrada da relação:

$$Q = \int T dS. \quad (5.72)$$

Começamos este estudo com a radiação eletromagnética de corpo negro. Neste caso, a entropia vem dada pelo primeiro termo da expressão (5.13), que é o termo dominante a altas temperaturas. Substituindo-o na equação (5.72), encontramos:

$$Q = \int T dS = \frac{4\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3} \int dV \therefore Q = \frac{4\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3} \Delta V, \quad (5.73)$$

onde poderíamos igualmente ter considerado o volume V variando somente com a área das placas ou a distância de separação entre estas. Nesse caso, teríamos d ou A fixo, respectivamente. O sistema absorve calor para uma variação positiva do volume e perde calor para uma variação negativa.

Em seguida, calculamos a variação de energia interna nesse processo. Da equação (5.15) para U , como T é constante, então o volume V tem que variar para que ΔU seja diferente de zero. Logo, obtemos:

$$\Delta U = \int dU = \frac{\pi^2(kT)^4}{15(\hbar c)^3} \int dV \therefore \Delta U = \frac{\pi^2(kT)^4}{15(\hbar c)^3} \Delta V. \quad (5.74)$$

Conhecidos Q e ΔU podemos calcular o trabalho isotérmico realizado pelo sistema. Fazendo isto, encontramos:

$$W = Q - \Delta U \therefore W = \frac{\pi^2(kT)^4}{45(\hbar c)^3} \Delta V. \quad (5.75)$$

Analisando as expressões obtidas para Q e W , podemos inferir que a quantidade de calor absorvida pelo sistema será positiva, se $\Delta V > 0$ ou negativa, para $\Delta V < 0$. Recordamos que a pressão é isotrópica - vem dada pelo primeiro termo em (5.1) ou (5.2) - e depende somente da temperatura. Além disso, o calor isotérmico deve ser igual à variação de entalpia no processo [45]. Do trabalho computado, concluímos que o sistema realizará trabalho e sofrerá uma expansão isotérmica caso $\Delta V > 0$. A energia interna também aumentará. Mas se $\Delta V < 0$, então será realizado trabalho sobre o sistema e este sofrerá uma compressão isotérmica, além de levar a um decréscimo na energia interna.

Após essa revisão feita para a radiação de corpo negro, vamos investigar o que ocorre para o nosso sistema no regime $\xi \rightarrow 0$. Da expressão (5.51) para a entropia, encontramos que a quantidade de calor absorvida pelo sistema é dada por:

$$Q = \int T dS = \frac{3\zeta(3)(kT)^3}{2\pi(\hbar c)^2} \int dA \therefore Q = \frac{3\zeta(3)(kT)^3}{2\pi(\hbar c)^2} \Delta A. \quad (5.76)$$

Para o sistema absorver calor, devemos agora ter $\Delta A > 0$. Ressaltamos que para um processo isotérmico e com d mantido fixo, essa é a única maneira do sistema no regime $\xi \rightarrow 0$ receber calor de uma fonte externa. Como mencionado acima, no caso da radiação

de corpo negro, temos $Q = \Delta H$. Será que o mesmo ocorre aqui? Devemos estar atentos ao fato que há duas expressões para a entalpia no regime de $\xi \rightarrow 0$: H_{\parallel} e H_{\perp} . Somente olhando as expressões de H_{\parallel} e H_{\perp} dadas pelas equações (5.60) e (5.61), respectivamente, podemos concluir que $Q = \Delta H_{\parallel}$. Este resultado é esperado, pois como já mencionamos, este sistema se comporta como a radiação escalar de corpo negro em um espaço-tempo $2 + 1$ dimensional.

Movendo agora para a energia interna e sua variação, devemos nos atentar ao fato que, à temperatura constante, U pode variar devido a mudanças em A , d ou ambas. Por simplicidade, consideraremos apenas variações em A , isto é, d é mantida constante. Assim, de (5.52), segue que a variação U será:

$$\Delta U_A = \left[-\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} \right] \Delta A. \quad (5.77)$$

Nessa expressão temos que levar em consideração que o termo térmico é somente uma correção ao de Casimir. Ou seja, devemos estar atentos ao fato que:

$$\Delta U_A = \left[-\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} \right] \Delta A = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \left[1 - \frac{720\zeta(3)}{\pi^3} \left(\frac{kTd}{\hbar c} \right)^3 \right],$$

e como $\xi \rightarrow 0$, implica em:

$$\Delta U_A = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \left[1 - \frac{720\zeta(3)}{\pi^3} \left(\frac{kTd}{\hbar c} \right)^3 \right] \Delta A \approx -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \Delta A.$$

Portanto, concluímos que $\Delta U_A < 0$ para uma expansão isotérmica do sistema. Em outras palavras, o sistema fornece energia para equilibrar o trabalho realizado por P_{\parallel} . A função de Q dado por (5.76) é de somente manter a temperatura T constante.

Da Primeira Lei, o trabalho isotérmico envolvido na expansão reversível da área das placas será dado por:

$$\begin{aligned} W_A = Q - \Delta U_A &= \left[\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} + \frac{\zeta(3) (kT)^3}{\pi (\hbar c)^2} \right] \Delta A = \frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \left[1 + \frac{720\zeta(3)}{\pi^3} \left(\frac{kTd}{\hbar c} \right)^3 \right] \Delta A \\ &\approx \frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \Delta A. \end{aligned} \quad (5.78)$$

o que comprova que o calor absorvido pelo sistema é desprezível comparado a mudança na energia interna do sistema. As expressões obtidas nessa análise serão úteis no estudo do ciclo de Carnot na seção 5.4.

5.3.2 Processos adiabáticos no regime $\xi \rightarrow 0$

Começamos este estudo apresentando resultados já conhecidos para a radiação de corpo negro e para o gás ideal com o objetivo de simplificar a interpretação dos resultados

para o regime $\xi \rightarrow 0$. Para um processo adiabático, temos que não há troca de calor entre o sistema e o ambiente externo. Assumimos que o processo é executado reversivelmente. Dessa forma, sendo $dQ = TdS = 0$, a entropia deve ser conservada.

Para a radiação de corpo negro, como sua entropia é dada pelo primeiro termo em (5.13), ou seja:

$$S = \frac{4\pi^2 (kT)^3}{45 (\hbar c)^3} kV, \quad (5.79)$$

a exigência que esta seja conservada, leva a:

$$VT^3 = cte. \quad (5.80)$$

onde $V = Ad$. Podemos inverter a equação (5.79) e escrever T em função de S e V, o que conduz à equação:

$$T = \left[\frac{45(\hbar c)^3}{4\pi^2 k^4} \right]^{-\frac{1}{3}} V^{-\frac{1}{3}} \quad (5.81)$$

Como a pressão é dada pelo termo dominante em (5.1) ou (5.2), a substituição de T dado em (5.81) em P, culmina na seguinte relação:

$$PV^{\frac{4}{3}} = cte. \quad (5.82)$$

Para o gás ideal, a relação equivalente é dada por [42]:

$$PV^\gamma = cte. \quad (5.83)$$

onde $\gamma := \frac{C_P}{C_V}$ é denominado *Índice Adiabático*. Portanto, através da comparação de (5.82) e (5.83), concluímos que $\gamma = \frac{4}{3}$ para a radiação de corpo negro. Entretanto, esse valor não pode ser calculado utilizando-se a razão entre C_P e C_V , uma vez que a primeira é infinita para a radiação de corpo negro [41].

Recapitulado casos mais simples, como a radiação de corpo negro e o gás ideal, rumamos agora para o nosso sistema no regime $\xi \rightarrow 0$. Da Primeira Lei, segue que:

$$dS = 0 \Rightarrow dU + PdV = 0 \Rightarrow dU + aP_{\parallel}dA + AP_{\perp}da = 0$$

onde estamos usando temporariamente “a” no lugar de d para a variável que representa a distância de separação entre as placas, dado que estamos lidando com diferenciais.

Para a constante, teremos:

$$dU + aP_{\parallel}dA = 0 \quad (5.84)$$

Agora, podemos escrever U como função de P_{\parallel} e A. Isto é feito eliminando a variável d em (5.44) e substituindo a relação obtida em (5.52). Ao fazer isso, encontramos:

$$U(P_{\parallel}, A) = 2aAP_{\parallel} - \frac{\pi^2 \hbar c A}{240a^3}. \quad (5.85)$$

Com essa expressão podemos escrever dU , o que implica em:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P_{\parallel}} \right)_A dP_{\parallel} + \left(\frac{\partial U}{\partial A} \right)_{P_{\parallel}} dA = 2aA dP_{\parallel} + \left(2aP_{\parallel} - \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} \right) dA, \quad (5.86)$$

e a substituição desse resultado em (5.84), leva a:

$$\begin{aligned} & 2aA dP_{\parallel} + \left(2aP_{\parallel} - \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} + aP_{\parallel} \right) dA = 0 \\ \Rightarrow & 2aA dP_{\parallel} + \left(-\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} + 3aP_{\parallel} \right) dA = 0 \Rightarrow \frac{2a dP_{\parallel}}{\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel}} = \frac{dA}{A} \\ \Rightarrow & 2a \int \frac{dP_{\parallel}}{\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel}} = \int \frac{dA}{A} \Rightarrow \ln A + cte = 2a \int \frac{dP_{\parallel}}{\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Para calcular a integral em P_{\parallel} fazemos a seguinte mudança de variável:

$$u = \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \Rightarrow dP_{\parallel} = -\frac{du}{3a}.$$

Logo, temos que:

$$\int \frac{dP_{\parallel}}{\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel}} = -\frac{1}{3a} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3a} \ln u = -\frac{1}{3a} \ln \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \right).$$

Retornando a (5.87),

$$\begin{aligned} \ln A + cte &= -\frac{2}{3a} \ln \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \right) \Rightarrow \ln A + \ln \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \right)^{\frac{2}{3}} = cte \\ \Rightarrow \ln \left[A \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \right)^{\frac{2}{3}} \right] &= cte \Rightarrow A \left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^3} - 3aP_{\parallel} \right)^{\frac{2}{3}} = cte \\ \Rightarrow A \left(aP_{\parallel} - \frac{\pi^2 \hbar c}{720a^3} \right)^{\frac{2}{3}} &= cte, \end{aligned}$$

ou ainda, desfazendo a troca $a \rightarrow d$, na forma

$$A^{\frac{3}{2}} d \left(P_{\parallel} + \frac{P_{\perp}}{3} \right) = cte. \quad (5.88)$$

Portanto, o análogo da relação adiabática entre a pressão e o volume da radiação de corpo negro para o regime $\xi \rightarrow 0$ vem dado pela relação (5.88). Notamos que se a configuração fosse isotrópica, ou seja, $A = d^2$ e $P_{\parallel} = P_{\perp} = P$, teríamos:

$$A^{\frac{3}{2}} d \left(P_{\parallel} + \frac{P_{\perp}}{3} \right) = (d^2)^{\frac{3}{2}} d \left(P + \frac{P}{3} \right) = \frac{4}{3} P d^4 = cte$$

e se $V = d^3$, então $d = V^{\frac{1}{3}}$. Logo $d^4 = V^{\frac{4}{3}}$, e assim, obtemos:

$$\frac{4}{3} P d^4 = cte \Rightarrow P d^4 = cte \Rightarrow P V^{\frac{4}{3}} = cte,$$

consistente com a relação obtida em (5.82).

Uma outra relação adiabática que é válida nesse regime é obtida pela simples análise da entropia. Como S deve ser constante, segue de sua expressão (5.51), que:

$$AT^2 = cte \quad \text{ou} \quad TA^{\frac{1}{2}} = cte. \quad (5.89)$$

Como já foi previamente mencionado na seção 5.1, essa relação nos informa que para um processo adiabático onde a área das placas é mantida constante, a temperatura permanecerá constante. Em outras palavras, um processo isentrópico (aquele que é reversível e adiabático) é equivalente a um processo isotérmico para A constante. Veremos na seção 5.4, que quando a área das placas for constante, então não será possível obter um ciclo de Carnot no regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas, uma vez que não haverá uma forma para que o calor seja absorvido ou removido do sistema durante as fases de expansão e compressão.

Com as relações obtidas, podemos usá-las para calcular o trabalho feito pelo sistema numa expansão ou compressão adiabática. Para tanto, consideraremos d constante, isto é, a expansão ou compressão do sistema será devida somente à variação da área das placas. Logo, o trabalho adiabático vem dado por:

$$W = \int PdV = d \int P_{\parallel} dA \quad (5.90)$$

Podemos utilizar a equação (5.88) para obter uma relação entre dois pontos numa curva adiabática, o que resulta em:

$$A_i^{\frac{3}{2}} \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) = A^{\frac{3}{2}} \left(P_{\parallel} + \frac{P_{\perp}}{3} \right) \Rightarrow P_{\parallel} = \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) \frac{A_i^{\frac{3}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}} - \frac{P_{\perp}}{3},$$

onde A_i e P_{\parallel}^i denotam os valores iniciais da área das placas e da pressão paralela. Substituindo esta relação em (5.90), conduz a:

$$\begin{aligned} W &= \int PdV = d \int P_{\parallel} dA = d \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i^{\frac{3}{2}} \int A^{-\frac{3}{2}} dA - d \frac{P_{\perp}}{3} \int dA \\ &= 2d \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i - 2d \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i^{\frac{3}{2}} A_f^{-\frac{1}{2}} - d \frac{P_{\perp}}{3} (A_f - A_i) \\ &= 2d \left[\left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i - \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i^{\frac{3}{2}} A_f^{-\frac{1}{2}} \right] - d \frac{P_{\perp}}{3} (A_f - A_i), \end{aligned}$$

e usando

$$A_i^{\frac{3}{2}} \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) = A_f^{\frac{3}{2}} \left(P_{\parallel}^f + \frac{P_{\perp}}{3} \right)$$

somos levados a

$$\begin{aligned} W &= 2d \left[\left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i - \left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i^{\frac{3}{2}} A_f^{-\frac{1}{2}} \right] - d \frac{P_{\perp}}{3} (A_f - A_i) \\ &= 2d \left[\left(P_{\parallel}^i + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_i - \left(P_{\parallel}^f + \frac{P_{\perp}}{3} \right) A_f \right] - d \frac{P_{\perp}}{3} (A_f - A_i) \\ &= 2d(P_{\parallel}^i A_i - P_{\parallel}^f A_f) + d P_{\perp} (A_i - A_f). \end{aligned} \quad (5.91)$$

onde temos usado o fato de que d é mantida constante, e como $P_{\perp} = P_{\perp}(d)$, isto nos permite escrever que $P_{\perp} = P_{\perp}^i = P_{\perp}^f$. Podemos usar (5.43) e (5.85) para colocar a energia interna na forma:

$$U(P_{\parallel}, A, d) = 2dP_{\parallel}A + dP_{\perp}A. \quad (5.92)$$

Usando a Primeira Lei, o trabalho feito pelo sistema é dado por:

$$W = -\Delta U = U_i - U_f$$

e da equação (5.92), resulta:

$$W = 2d(P_{\parallel}^i A_i - P_{\parallel}^f A_f) + dP_{\perp}(A_i - A_f) \quad (5.93)$$

concordando com o que havíamos obtido em (5.91).

Para finalizar essa subseção, reunimos na tabela 2, as condições adiabáticas para o gás ideal, a radiação de corpo negro e para o sistema no regime $\xi \rightarrow 0$, reforçando que estas foram derivadas para o caso onde d é mantido constante.

Tabela 2: Relações adiabáticas para diferentes sistemas.

Gás ideal	Corpo negro	$\xi \rightarrow 0$ ($kTd/\hbar c \ll 1$)
$PV^{\gamma} = cte$	$PV^{\frac{4}{3}} = cte$	$A^{\frac{3}{2}}d \left(P_{\parallel} + \frac{P_{\perp}}{3} \right) = cte$
$T^{\frac{1}{\gamma-1}} = cte$	$VT^3 = cte$	$T^2 A = cte$
$TV^{\gamma-1} = cte$	$TV^{\frac{1}{3}} = cte$	$TA^{\frac{1}{2}} = cte$

5.3.3 Processos Isentrópicos

Nesta subseção exploramos um pouco mais a discussão iniciada por Mitter & Robaschik [27] sobre as características de um processo isentrópico ($dS = 0$) para a radiação de corpo negro e sua comparação com o regime $\xi \rightarrow 0$.

De (5.13), o valor constante da entropia para $\xi \rightarrow \infty$ implica em:

$$S = cte = \frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kAd + \frac{\zeta(3)}{8\pi d^2} kA, \quad (5.94)$$

que tende assintoticamente à entropia da radiação de corpo negro nos limites onde $T \rightarrow \infty$ ou $d \rightarrow \infty$. Trabalhando somente com a expressão nesse limite assintótico, ou seja, o primeiro termo em (5.94), vemos que a constância de S implica em $AdT^3 = cte$.

Considerando a área das placas constante, então para $d \rightarrow 0$, temos que a temperatura deve tender ao infinito para que a entropia fique constante. Porém, em algum momento, à medida que d fique cada vez menor, o regime $\xi \rightarrow \infty$ deixa de ser válido. Então devemos migrar para o outro extremo, isto é, para o limite $\xi \rightarrow 0$ [27].

Será que a temperatura continua a crescer no regime $\xi \rightarrow 0$?

Da expressão da entropia nesse regime (5.51), para $S = \text{cte}$, teremos:

$$S = \text{cte} = \frac{3\zeta(3)}{2\pi} \frac{(kT)^2}{(\hbar c)^2} kA. \quad (5.95)$$

Para que S permaneça inmutável, com A também constante, vemos que a temperatura também deve manter seu valor. Inclusive, podemos determiná-lo através da equação acima. Resolvendo (5.95) para T , encontramos:

$$T = \left[\frac{2\pi S}{3\zeta(3)k^3 A} \right]^{\frac{1}{2}} \hbar c, \quad (5.96)$$

contrariando o que temos para a radiação de corpo negro. A explicação para este resultado pode residir no fato de ocorrer uma redução dos graus de liberdade na transição entre os regime $\xi \rightarrow \infty$ e $\xi \rightarrow 0$. Reiteramos que para baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas, os termos de correção àqueles de Casimir (vide tabela 1), indicam a presença de um gás de bósons escalares em um espaço-tempo $2 + 1$ dimensional na região entre as placas, enquanto que para altas temperaturas e/ou grande separação entre as placas temos a radiação eletromagnética para um espaço-tempo $3 + 1$ dimensional. Eventualmente, essa transição pode ser um elemento que esteja codificado (entre outros) na função $f(\xi)$, que como vimos anteriormente, envolve a simetria de inversão de temperatura, conectando os regimes de altas e baixas temperaturas.

5.3.4 Expansão e Compressão livre

Nesta subseção investigamos a ocorrência de processos livres, que são aqueles onde a energia interna é mantida constante. A Segunda Lei da termodinâmica será muito útil na análise dos resultados que obteremos. Esta lei nos diz que a entropia de um sistema isolado nunca decresce.

Além dela, há um teorema envolvendo a energia livre de Helmholtz que enuncia que para um sistema mantido à temperatura constante, F nunca aumenta. Da termodinâmica, recordamos que a relação entre P e F é dada pela equação (5.3), de onde florescem dois cenários:

1. Se F cresce com o volume, então a pressão do sistema é negativa;
2. Se F decresce com o volume, então a pressão do sistema é positiva.

Devemos analisar as equações de estado do sistema sob a ótica da Segunda Lei, pois ela nos ajudará a concluir se o sistema expande ou comprime livremente.

Começamos tratando a expansão livre no contexto da radiação de corpo negro. Para idealizar um experimento de expansão ou compressão livre para um gás de fótons, devemos assumir que a cavidade no qual este se encontra está termicamente isolada com paredes rígidas e perfeitamente refletoras. Também devemos assumir que a cavidade está dividida por uma partição opaca e isolada. Este experimento é esquematizado na Figura 4.

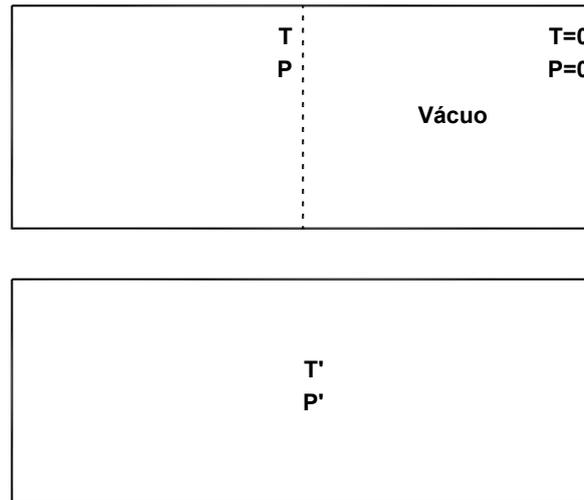


Figura 4: Expansão livre para radiação de corpo negro.

Suponhamos que um lado da partição esteja à uma temperatura $T = 0$, e portanto, como na radiação de corpo negro temos $P = P(T)$, segue que $P = 0$. Uma expansão livre ocorre quando tal partição é removida. Devido à natureza das paredes, não há transferência de calor do ambiente externo para dentro da cavidade e também não há a realização de trabalho. Portanto, segue da Primeira Lei que a energia interna do sistema deve ser mantida constante. Uma vez que U é dada por:

$$U = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} V. \quad (5.97)$$

então o produto VT^4 deve ser constante. É sabido que esse processo livre aplicado ao gás de fótons culmina numa expansão livre. Reforçando que livre significa $U = cte$, segue que de (5.97), que à medida que V cresce, a temperatura deve decrescer para U permanecer inalterada. Mas por que uma expansão ao invés de uma compressão livre? Para responder a esta pergunta, recorreremos à Segunda Lei. Da equação (5.79) e do enunciado da Segunda Lei, S deve aumentar. Como $S \propto VT^3$, a taxa de crescimento de V deve ser maior que a de decréscimo de T . Portanto, a justificativa para o gás expandir e não comprimir, reside na análise de sua entropia sob a ótica da Segunda Lei.

Este comportamento da radiação de corpo negro é diferente daquele de um gás ideal. Numa expansão livre, a temperatura do gás ideal antes e depois da expansão é a

mesma. A explicação para estes comportamentos distintos se baseia no fato da energia interna da radiação de corpo negro ser dependente do volume, enquanto que para o gás ideal, ela é independente de V , visto que o número de moléculas é mantido fixo, como é usualmente assumido.

Portanto, como na expansão livre do gás de fótons a temperatura diminui, o mesmo ocorrerá para sua pressão, que é dada por:

$$P = \frac{\pi^2 (kT)^4}{45 (\hbar c)^3}.$$

Já a sua entropia aumenta, o que pode ser concluído ao se escrever S como função de U , resultando em:

$$S = \frac{4U}{3T}.$$

Investigamos agora o que ocorre para o sistema no regime $\xi \rightarrow 0$. Neste regime a energia interna é dada pela expressão (5.52), composta pelo termo de Casimir, que é dominante, e o termo térmico de correção. Reforçamos que a energia interna deve ser mantida constante. Logo, (5.52) indica que deve haver um balanço entre os dois termos para que $U = \text{cte}$. Neste regime, a entropia é dada pela equação (5.51), que quando escrita na forma $S(U, A, d)$ resulta na expressão dada em (5.58). Vamos supor que A também seja constante. Olhando (5.58), qual é a única maneira de S aumentar? Concluímos desta equação que d deve diminuir para que ocorra um aumento da entropia do sistema, para satisfazer a Segunda Lei. Portanto, as placas se atraem e toma lugar uma compressão livre! Além disso, devido ao decréscimo de d , o termo de Casimir na energia interna torna-se mais e mais negativo. Para compensar isso, o termo térmico deve crescer. De outra forma, a temperatura tem que crescer para que U fique constante, o que revela um comportamento diferente do que encontramos para a radiação de corpo negro. Este processo, contudo, é válido desde que a condição $Td \ll 1$ seja obedecida.

5.4 Ciclos de Carnot

Considere um típico ciclo de Carnot que consiste de uma expansão isotérmica do ponto 1 até o ponto 2, de uma expansão adiabática de 2 a 3, de uma compressão isotérmica de 3 a 4, e finalmente, de uma compressão adiabática de 4 a 1, estando todos os pontos representados no diagrama $P_{\parallel} - A - d$ da Figura 5. Por simplicidade, vamos considerar que a distância entre as placas seja constante. Usaremos os resultados encontrados nas seções 5.3.1 e 5.3.2 para calcular as quantidades de calor e os trabalhos envolvidos em cada etapa do ciclo.

As pressões, áreas e temperaturas nos pontos 1, 2, 3 e 4 serão denotadas por $P_{1\parallel}, A_1, T_H$; $P_{2\parallel}, A_2, T_H$; $P_{3\parallel}, A_3, T_C$ e $P_{4\parallel}, A_4, T_C$, respectivamente. Como P_{\parallel} é dado por (5.44), observamos que $P_{1\parallel} = P_{2\parallel}$ e $P_{3\parallel} = P_{4\parallel}$, já que d é mantida constante. Além disso, temos $T_H > T_C$.

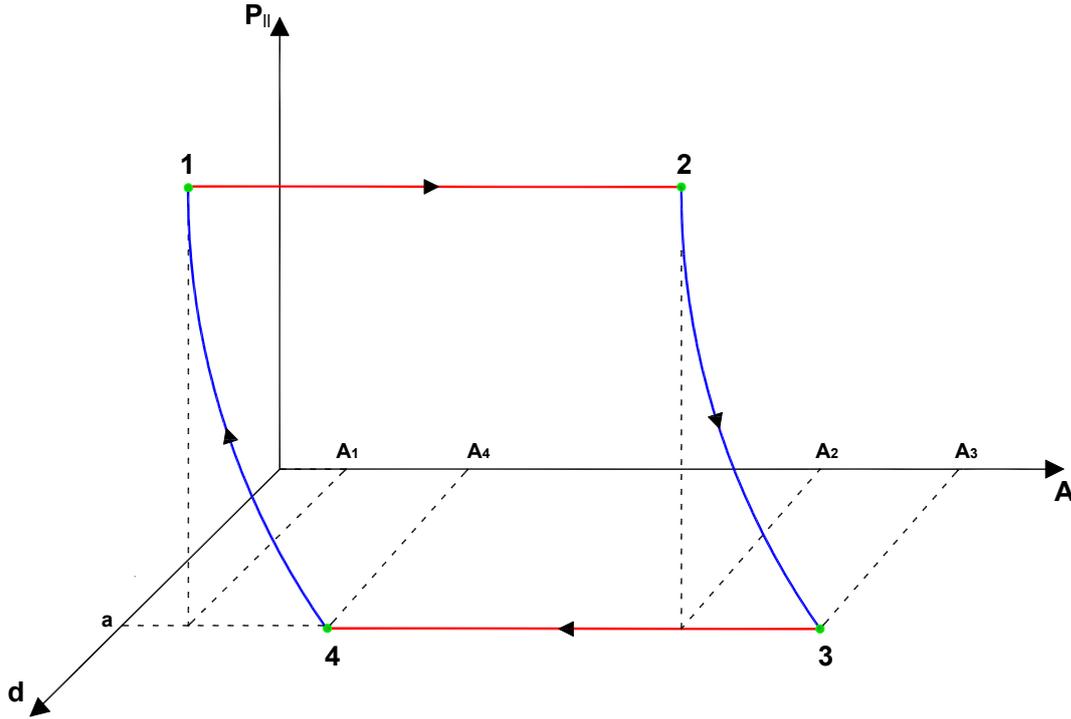


Figura 5: Representação esquemática do ciclo de Carnot simples em $\xi \rightarrow 0$.

Começamos com o segmento 1-2. Nas isotermas, a pressão é independente de A . Logo, as isotermas devem ser horizontais. Ao longo da isoterma 1-2, da equação (5.76), teremos:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_H = \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1). \quad (5.98)$$

De forma similar, para o segmento 3-4, encontramos:

$$Q_{3 \rightarrow 4} = Q_H = \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_C^3 (A_4 - A_3). \quad (5.99)$$

Para uma curva adiabática, vimos que a relação (5.88) ou a relação (5.89), que são equivalentes, devem ser satisfeitas. Devemos salientar que $P_{\perp} = cte$, uma vez que ela depende somente da distância de separação entre as placas, que como já mencionado, é mantida constante. Iniciando do ponto 2, que é caracterizado pelo par pressão-área $(P_{2\parallel}, A_2)$, para uma expansão adiabática até o ponto 3, caracterizado pelo par $(P_{3\parallel}, A_3)$, nos permite escrever

$$A_2 T_H^2 = A_3 T_C^2. \quad (5.100)$$

De forma análoga, para o trecho $4 \rightarrow 1$, teremos:

$$A_4 T_C^2 = A_1 T_H^2. \quad (5.101)$$

A união dessas duas expressões, leva a:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A_1}{A_4} = \left(\frac{T_C}{T_H}\right)^2. \quad (5.102)$$

Como a variação da energia interna é nula no ciclo completo, da Primeira Lei, segue que o trabalho W realizado no ciclo deve ser igual à soma do calor recebido pelo sistema no trecho 1 – 2 à temperatura T_H com o calor rejeitado pelo mesmo no trecho 3 – 4 à temperatura T_C . Somando as equações (5.98) e (5.99), encontramos:

$$\begin{aligned} W &= Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{3 \rightarrow 4} \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} \left[T_H^3(A_2 - A_1) + T_C^3(A_4 - A_3) \right] \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} \left[T_H^3 A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) + T_C^3 A_4 \left(1 - \frac{A_3}{A_4} \right) \right] \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} \left[T_H^3 A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) + T_C T_C^2 A_4 \left(1 - \frac{A_3}{A_4} \right) \right], \end{aligned}$$

mas de (5.102), teremos:

$$A_4 T_C^2 = A_1 T_H^2, \quad \frac{A_3}{A_4} = \frac{A_2}{A_1}$$

e assim podemos escrever,

$$\begin{aligned} W &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} \left[T_H^3 A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) + T_C T_C^2 A_4 \left(1 - \frac{A_3}{A_4} \right) \right] \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 A_1 \left[\left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) + \frac{T_C}{T_H} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \right] \\ &= \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right). \end{aligned} \quad (5.103)$$

A eficiência η de uma máquina térmica é definida como sendo a razão do trabalho realizado no ciclo completo pela quantidade de calor absorvida pelo sistema [41]:

$$\eta := \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{Q_{1 \rightarrow 2}} \quad (5.104)$$

Segue de (5.98) e (5.103), que a eficiência (5.104) desta máquina será igual a:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right)}{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1)} \\ &= \frac{A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_C}{T_H} \right)}{(A_2 - A_1)} \\ &= 1 - \frac{T_C}{T_H}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

que é o resultado familiar para a eficiência de um ciclo de Carnot.

Das expressões encontradas nas seções 5.3.1 e 5.3.2, calculamos as quantidades de calor e trabalho, seja este isotérmico ou adiabático, em cada etapa do ciclo, resultando em:

- 1 → 2

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_H = \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1)$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \left[\frac{\pi^2 \hbar c}{720b^3} + \frac{\zeta(3)k^3 T_H^3}{2\pi(\hbar c)^2} \right] (A_2 - A_1) = b P_{1\parallel} (A_2 - A_1) \quad (5.106)$$

- 2 → 3

$$Q_{2 \rightarrow 3} = 0$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = 2b(P_{2\parallel} A_2 - P_{3\parallel} A_3) + bP_{\perp} (A_2 - A_3) \quad (5.107)$$

- 3 → 4

$$Q_{3 \rightarrow 4} = 0$$

$$W_{3 \rightarrow 4} = \frac{\pi^2 \hbar c A_3}{720} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) \quad (5.108)$$

- 4 → 5

$$Q_{4 \rightarrow 5} = Q_C = \frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_C^3 (A_4 - A_3)$$

$$W_{4 \rightarrow 5} = \left[\frac{\pi^2 \hbar c}{720a^3} + \frac{\zeta(3)k^3 T_H^3}{2\pi(\hbar c)^2} \right] (A_4 - A_3) = a P_{4\parallel} (A_4 - A_3) \quad (5.109)$$

- 5 → 6

$$Q_{5 \rightarrow 6} = 0$$

$$W_{5 \rightarrow 6} = \frac{\pi^2 \hbar c A_4}{720} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) \quad (5.110)$$

- 6 → 1

$$Q_{6 \rightarrow 1} = 0$$

$$W_{6 \rightarrow 1} = 2b(P_{6\parallel} A_4 - P_{1\parallel} A_1) + bP_{\perp} (A_4 - A_1) \quad (5.111)$$

Com todas as expressões para as quantidades de calor e trabalhos realizados no ciclo, podemos encontrar a eficiência deste ciclo. Fazendo isso, segue que:

$$\eta = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi^2 \hbar c}{720b^3} (A_2 - A_1) + \frac{\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1) + 2b(P_{2\parallel} A_2 - P_{3\parallel} A_3) \\ + bP_{\perp} (A_2 - A_3) + \frac{\pi^2 \hbar c A_3}{720} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \frac{\pi^2 \hbar c}{720a^3} (A_4 - A_3) \\ + \frac{\zeta(3)k^3 T_H^3}{2\pi(\hbar c)^2} (A_4 - A_3) + \frac{\pi^2 \hbar c A_4}{720} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) + 2b(P_{6\parallel} A_4 - P_{1\parallel} A_1) + bP_{\perp} (A_4 - A_1) \end{array} \right\}}{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1)}$$

onde as pressões são dadas por

$$\begin{aligned} P_{1\parallel} = P_{2\parallel} &= \frac{\pi^2 \hbar c}{720 b^4} + \frac{\zeta(3) (kT_H)^3}{2\pi b (\hbar c)^2} \\ P_{3\parallel} = P_{6\parallel} &= \frac{\pi^2 \hbar c}{720 b^4} + \frac{\zeta(3) (kT_C)^3}{2\pi b (\hbar c)^2} \\ P_{4\parallel} = P_{5\parallel} &= \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^4} + \frac{\zeta(3) (kT_C)^3}{2\pi a (\hbar c)^2} \\ P_{\perp} &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 b^4}. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões no cálculo parcial da eficiência, encontramos

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\frac{\pi^2 \hbar c}{720 b^3} \left[\begin{array}{c} A_2 - A_1 - A_3 + A_4 + 2A_2 - 2A_1 \\ -2A_3 + 2A_4 - 3A_4 + 3A_1 - 3A_2 + 3A_3 \end{array} \right]}{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1)} \\ &+ \frac{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} \left[(A_2 - A_1)T_H^3 + (A_4 - A_3)T_C^3 \right]}{\frac{3\zeta(3)k^3}{2\pi(\hbar c)^2} T_H^3 (A_2 - A_1)} \\ &= \frac{T_H^3 (A_2 - A_1) + T_C^3 (A_4 - A_3)}{T_H^3 (A_2 - A_1)} \\ &= 1 + \frac{T_C^3 (A_4 - A_3)}{T_H^3 (A_2 - A_1)} \end{aligned}$$

e usando as relações adiabáticas (5.102), obtemos finalmente:

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}. \quad (5.112)$$

Portanto, a eficiência do Ciclo de Carnot é a mesma, independente se a pressão de Casimir é levada ou não em consideração, como deveria ser.

5.5 Estabilidade termodinâmica

O objetivo desta seção é o de apresentar um inédito estudo da estabilidade termodinâmica deste sistema. Começaremos recapitulando brevemente as condições que devem ser satisfeitas por um dado sistema termodinâmico para que este seja estável. Depois, aplicaremos as condições de estabilidade ao nosso sistema, o que nos permite tirar importantes conclusões sobre a estabilidade a baixas e altas temperaturas.

5.5.1 Condições intrínsecas de estabilidade para sistemas termodinâmicos

O princípio de extremização básico da termodinâmica enuncia que $dS = 0$ e que $d^2S < 0$. Em palavras, a primeira condição nos diz que a entropia S é um extremo. Para definir se este extremo é um máximo ou um mínimo, recorreremos à segunda derivada. A segunda condição revela isso: a entropia do sistema é um extremo, e em particular, este

extremo deve ser um máximo. Logo, a entropia deve ser uma função côncava das variáveis do sistema. Podemos também investigar a estabilidade do sistema através do estudo de sua energia interna. Ao contrário de S , U deve ser tal que $d^2U > 0$, ou seja, a energia interna deve ser uma função convexa. Dito isto, vamos explorar quais são as condições que devem ser satisfeitas para que um dado sistema termodinâmico seja estável.

A derivação das condições de estabilidade para a entropia e energia interna, assim como as referentes aos demais potenciais termodinâmicos podem ser facilmente obtidas. Entretanto, derivaremos somente àquelas relacionadas a S [46]. Para U o processo é análogo ao que apresentaremos aqui para S , mas levando em consideração que a energia interna deve ser uma função convexa. Mais detalhes sobre as condições de estabilidade que devem ser satisfeitas por outros potenciais podem ser encontrados na Ref. [42]. A ideia básica é considerar dois subsistemas idênticos, cada um com uma entropia $S(U, A, d)$. A estabilidade termodinâmica é garantida pelo princípio de extremização mencionado no primeiro parágrafo dessa subseção. Vamos supor que A e d sejam mantidos constante enquanto que uma quantidade ΔU de energia seja removida de um dos subsistemas e direcionada ao outro. A entropia total dos dois sistemas passa de um valor inicial $2S(U, A, d)$ para um valor final igual a $S(U + \Delta U, A, d) + S(U - \Delta U, A, d)$. Se a entropia inicial $S(U, A, d)$ é um máximo, então a soma das entropias iniciais deve ser maior ou igual à soma das entropias finais, ou seja:

$$S(U + \Delta U, A, d) + S(U - \Delta U, A, d) \leq 2S(U, A, d). \quad (5.113)$$

Expandindo o lado esquerdo em uma série de Taylor até segunda ordem em ΔU , leva a:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right)_{A,d} \leq 0 \quad (5.114)$$

no limite onde $\Delta U \rightarrow 0$. Podemos fazer o mesmo para as variáveis A e d sempre variando uma destas enquanto a outra é mantida constante juntamente com U . Ao fazer isso, encontramos nos limites $\Delta A \rightarrow 0$ e $\Delta d \rightarrow 0$, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2} \right)_{U,d} \leq 0 \quad (5.115)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2} \right)_{U,A} \leq 0 \quad (5.116)$$

Podemos também manter somente uma das variáveis fixa, por exemplo, d . Novamente, a soma das entropias finais deve ser menor ou igual à soma inicial para mudanças simultâneas na energia interna e na área. De forma equivalente, devemos ter:

$$S(U + \Delta U, A + \Delta A, d) + S(U - \Delta U, A - \Delta A, d) \leq 2S(U, A, d). \quad (5.117)$$

Esta desigualdade é satisfeita pelas equações (5.114) e (5.115). Porém, ela leva a outra exigência. Expandindo o lado esquerdo até segunda ordem em ΔU e ΔA , obtemos:

$$S_{UU}(\Delta U)^2 + 2S_{UA}\Delta U\Delta A + S_{AA}(\Delta A)^2 \leq 0. \quad (5.118)$$

onde $S_{ij} = \partial^2 S / \partial x_i \partial x_j$. Multiplicando (5.118) por S_{UU} , somando e subtraindo S_{UA}^2 no lado esquerdo, permite que a última desigualdade seja posta na forma:

$$(S_{UU}\Delta U + S_{UA}\Delta A)^2 + (S_{UU}S_{AA} - S_{UA}^2)(\Delta A)^2 \geq 0. \quad (5.119)$$

Como o primeiro termo no lado esquerdo de (5.119) é sempre positivo, então é suficiente que tenhamos:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right)^2 \geq 0 \quad (5.120)$$

Para derivar as demais desigualdades, seguimos o mesmo itinerário mas agora fixando variando os pares (A,d) e (U,d), um de cada vez. Para o primeiro caso, isto é, U fixo, teremos:

$$S_{AA}(\Delta A)^2 + 2S_{Ad}\Delta A\Delta d + S_{dd}(\Delta d)^2 \leq 0, \quad (5.121)$$

que é satisfeita por:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A \partial d}\right)^2 \geq 0 \quad (5.122)$$

E então, para A fixo, encontramos:

$$S_{UU}(\Delta U)^2 + 2S_{Ud}\Delta U\Delta d + S_{dd}(\Delta d)^2 \leq 0, \quad (5.123)$$

que é satisfeita por:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right)^2 \geq 0 \quad (5.124)$$

Finalmente, podemos considerar mudanças simultâneas nas três variáveis do sistema, o que implica em:

$$S(U + \Delta U, A + \Delta A, d + \Delta d) + S(U - \Delta U, A - \Delta A, d - \Delta d) \leq 2S(U, A, d). \quad (5.125)$$

Agora devemos expandir o lado esquerdo de (5.125) até segunda ordem em ΔU , ΔA e Δd , o que acarreta em:

$$S_{UU}(\Delta U)^2 + S_{AA}(\Delta A)^2 + S_{dd}(\Delta d)^2 + 2S_{UA}\Delta U\Delta A + 2S_{Ud}\Delta U\Delta d + 2S_{Ad}\Delta A\Delta d \leq 0. \quad (5.126)$$

Multiplicando (5.126) por S_{UU} , observamos que:

$$\begin{aligned} (S_{UU}\Delta U + S_{UA}\Delta A + S_{Ud}\Delta d)^2 &= S_{UU}^2(\Delta U)^2 + S_{UA}^2(\Delta A)^2 + S_{Ud}^2(\Delta d)^2 \\ &\quad + 2S_{UU}S_{UA}\Delta U\Delta A + 2S_{UU}S_{Ud}\Delta U\Delta d + 2S_{UA}S_{Ud}\Delta A\Delta d, \end{aligned} \quad (5.127)$$

e substituindo esta equação em (5.126), leva a:

$$\begin{aligned} (S_{UU}\Delta U + S_{UA}\Delta A + S_{Ud}\Delta d)^2 &+ (S_{UU}S_{AA} - S_{UA}^2)(\Delta A)^2 \\ &+ (S_{UU}S_{dd} - S_{Ud}^2)(\Delta d)^2 + 2(S_{UU}S_{Ad} - S_{UA}S_{Ud})\Delta A\Delta d \geq 0. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Usando os resultados (5.120) e (5.124) e notando que o primeiro termo na desigualdade (5.128) é sempre positivo, obteremos a seguinte condição:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d \partial A}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right) \geq 0 \quad (5.129)$$

O processo de obtenção para as condições de estabilidade que devem ser satisfeitas pela energia interna do sistema é similar. A única diferença está no fato já mencionado de que U tem que ser uma função convexa das variáveis do sistema. Ao seguir itinerário semelhante que fizemos para S , encontramos as condições de estabilidade que devem ser satisfeitas por U e que são dadas a seguir:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_{A,d} \geq 0 \quad (5.130)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right)_{S,d} \geq 0 \quad (5.131)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right)_{S,A} \geq 0 \quad (5.132)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial A}\right)^2 \geq 0 \quad (5.133)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial d}\right)^2 \geq 0 \quad (5.134)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial A \partial d}\right)^2 \geq 0 \quad (5.135)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d \partial A}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial A}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial d}\right) \geq 0 \quad (5.136)$$

Antes de verificar se as grandezas termodinâmicas do nosso sistema satisfazem estas condições, investigaremos a estabilidade da radiação de corpo negro com o objetivo de obter conclusões que possam servir de parâmetro de comparação para os nossos resultados.

5.5.2 Análise da estabilidade termodinâmica da radiação de corpo negro

A radiação de corpo negro é um sistema termodinâmico que possui uma equação fundamental para a entropia do tipo $S = S(U, V)$. Sabemos que a entropia expressa em termos de V e T , é dada pelo termo dominante de (5.13), ou seja:

$$S = \frac{4\pi^2}{45} \frac{(kT)^3}{(\hbar c)^3} kV, \quad (5.137)$$

enquanto que a energia interna, é simplesmente igual à (5.15):

$$U = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} V. \quad (5.138)$$

Escrevendo S como função de U e V , encontramos:

$$S(U, V) = \frac{4}{3} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15 (\hbar c)^3} \right]^{\frac{1}{4}} (U^3 V)^{\frac{1}{4}} \quad (5.139)$$

ao passo que U como função de S e V é igual a

$$U(S, V) = \frac{\pi^2 k^4}{15 (\hbar c)^3} \left[\frac{45 (\hbar c)^3}{4 \pi^2 k^4} \right]^{\frac{4}{3}} \left(\frac{S^4}{V} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.140)$$

Para um sistema termodinâmico com duas variáveis independentes, o número de condições de estabilidade é reduzido [42]. Para a presente análise, as condições que devem ser obedecidas pela entropia e a energia interna, são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right)_V &\leq 0 \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right)_U &\leq 0 \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} \right)^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.141)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right)_V &\geq 0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right)_S &\geq 0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \right)^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.142)$$

Começamos a verificar essas condições na ordem como são apresentadas. Para a entropia, usando (5.139) junto com as condições de estabilidade em (5.141), obtemos:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right)_V = -\frac{15 (\hbar c)^3}{4 \pi^2 k^4 V T^5} \leq 0 \quad (5.143)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right)_U = -\frac{\pi^2 k^4 T^3}{60 (\hbar c)^3 V} \leq 0 \quad (5.144)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial V} \right)^2 = 0 \quad (5.145)$$

Verificando as condições relacionadas à energia interna, da equação (5.140) junto com as condições de estabilidade em (5.140), encontramos:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_V = \frac{15(\hbar c)^3}{4\pi^2 k^4 V T^2} \geq 0 \quad (5.146)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_S = \frac{4\pi^2 k^4 T}{145(\hbar c)^3 V} \geq 0 \quad (5.147)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\right)^2 = 0 \quad (5.148)$$

Estes resultados nos informam que a radiação de corpo negro é um sistema estável. Entretanto, chama a atenção as relações de “fluting”, que são aquelas que envolvem derivadas mistas. A curiosidade reside no fato de estas serem identicamente nulas, o que indica que a estabilidade do gás de fótons na cavidade está na fronteira entre um sistema estável e um instável. Retornaremos a essa discussão na seção 5.5.4, onde analisamos este sistema levando em consideração as contribuições trazidas pelas flutuações quânticas do vácuo.

5.5.3 Análise da estabilidade termodinâmica para o regime $\xi \rightarrow 0$

Finalmente, começaremos a análise da estabilidade termodinâmica do sistema levando em consideração as flutuações do vácuo quântico do campo eletromagnético. Iniciamos com o regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas.

Primeiro, estudamos a estabilidade verificando as condições (5.114 - 5.116), (5.120), (5.122), (5.124) e (5.129) para a entropia. Vimos na seção 5.2 que a entropia no regime $\xi \rightarrow 0$ escrita como função de U , A e d resulta na equação (5.58).

Verificando as condições de estabilidade, encontramos:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_{A,d} = -\frac{\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3 A T^4} \leq 0 \quad (5.149)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right)_{U,d} &= -\frac{\pi(\hbar c)^2 U^2}{3\zeta(3)k^3 A^3 T^4} \\ &= -\frac{\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3 A^3 T^4} \left[-\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A + \frac{\zeta(3)(kT)^3}{\pi(\hbar c)^2} A \right]^2 \\ &= -\frac{\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3 A^3 T^4} \left\{ -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A \left[1 - \frac{720\zeta(3)}{\pi^3} \left(\frac{kTd}{\hbar c} \right)^3 \right] \right\}^2 \\ &\approx -\frac{\pi(\hbar c)^2}{3\zeta(3)k^3 A^3 T^4} \left[-\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3} A \right]^2 \\ &= -\frac{\pi^5 (\hbar c)^4 A^2}{3\zeta(3)(720)^2 k^3 A^3 d^6 T^4} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.150)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right)_{U,A} &= \frac{\pi^2 \hbar c A}{60 T d^5} \left[1 - \frac{\pi^3}{720 \times 240 \zeta(3)} \left(\frac{\hbar c}{k T d}\right)^3 \right] \\ &\approx -\frac{\pi^5 (\hbar c)^4}{720 \times 240 \times 60 \zeta(3) T^4 d^8} \\ &= -\frac{\pi^5 k}{20 (720)^2 \zeta(3) d^4} \left(\frac{\hbar c}{k T d}\right)^4 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.151)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right)^2 = 0 \quad (5.152)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right)^2 = -\frac{\pi^3}{180 \zeta(3) d^2 T^2} \left(\frac{\hbar c}{K T d}\right)^3 \leq 0 \quad (5.153)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A \partial d}\right)^2 = -\frac{5 \pi^7 k^2}{32 (180)^3 \zeta(3)} \left(\frac{\hbar c}{k T d}\right)^5 \leq 0 \quad (5.154)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d \partial A}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right) = \frac{\pi^3}{720 \zeta(3) A d T^2} \left(\frac{\hbar c}{K T d}\right)^3 \geq 0 \quad (5.155)$$

Para testar as condições de estabilidade para a energia interna (5.130 - 5.136), devemos escrever U em (5.52) como função de S, A e d. Para fazer isso, eliminamos a temperatura em (5.51) e substituímos em (5.52). Por fim, obtemos a seguinte expressão:

$$U(S, A, d) = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3} + \left(\frac{8 \pi}{27 \zeta(3) k^3}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar c \left(\frac{S^3}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.156)$$

Verificando as condições de estabilidade (5.130 - 5.136) para a energia interna, encontramos:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_{A,d} = \frac{\pi (\hbar c)^2}{3 \zeta(3) k^3 T A} \geq 0 \quad (5.157)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right)_{S,d} = \frac{3 \zeta(3) (k T)^3}{4 \pi (\hbar c)^2 A} \geq 0 \quad (5.158)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right)_{S,A} = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{60 d^5} \leq 0 \quad (5.159)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial A}\right)^2 = 0 \quad (5.160)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial d}\right)^2 = -\frac{\pi^3 (\hbar c)^3}{180 \zeta(3) k^3 T d^5} \leq 0 \quad (5.161)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial A \partial d}\right)^2 = -\frac{\pi \zeta(3) (k T)^3}{80 \hbar c d^5} - \frac{\pi^4 (\hbar c)^2}{240^2 d^8} \leq 0 \quad (5.162)$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial d \partial A}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial A}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial d}\right) = \frac{\pi^3 (\hbar c)^3}{720 \zeta(3) k^3 T A d^4} \geq 0 \quad (5.163)$$

Assim, vemos que para a entropia, as Eqs. (5.153) e (5.154) em comparação com as Eqs. (5.122) e (5.124), violam as condições de estabilidade. Para a energia interna, as Eqs. (5.159), (5.161) e (5.162) em comparação com (5.132), (5.134) e (5.135) são as que apresentam violações. Este cenário de instabilidade é devido à *Pressão de Casimir*. Vamos imaginar que a placa em $z = d$ possa se mover. Além disso, vamos assumir que uma força externa esteja balanceando a *Força de Casimir* de tal forma que o sistema se encontre numa configuração estável. Agora, suponhamos que ocorra uma flutuação positiva do volume devido a um ligeiro aumento da distância de separação entre as placas. Da expressão de P_{\perp} em (5.43), vemos que se a distância entre as placas cresce, então P_{\perp} decresce em módulo, mas cresce em valor relativo. Logo, vemos que a pressão aumenta quando o volume também aumenta. Dessa forma, a força externa responsável por balancear a *Força de Casimir* não será mais suficiente e a placa móvel será empurrada para longe da outra placa devido a esta *Força de Casimir*. Agora, se ocorrer uma flutuação de volume negativa, então o decréscimo de d implica no crescimento em módulo de P_{\perp} mas numa diminuição de seu valor relativo. Assim, se inicialmente, o sistema está estável, com uma flutuação negativa do volume, a *Força de Casimir* se tornará ainda mais negativa e a placa móvel em $z = d$ será atraída em direção à outra. Em ambas as situações, vemos que o sistema, é de fato, instável.

5.5.4 Análise da estabilidade termodinâmica para o regime $\xi \rightarrow \infty$

Por último, analisamos a estabilidade termodinâmica do sistema no regime $\xi \rightarrow \infty$. Usamos a equação (5.15) para expressar T em termos de U , A e d . Substituindo a expressão obtida em (5.13), encontramos que $S(U, A, d)$ é dada por:

$$S(U, A, d) = \frac{4}{3} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15 (\hbar c)^3} \right]^{\frac{1}{4}} (U^3 A d)^{\frac{1}{4}} + \frac{\zeta(3) k A}{8 \pi d^2}. \quad (5.164)$$

Verificando as condições de estabilidade para a entropia (5.114 - 5.129), resulta em:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right)_{A,d} = -\frac{15 (\hbar c)^3}{4 \pi^2 k^4} \frac{1}{A d T^5} \leq 0 \quad (5.165)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right)_{U,d} = -\frac{\pi^2 k}{60 A d^2} \left(\frac{k T d}{\hbar c}\right)^3 \leq 0 \quad (5.166)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right)_{U,A} = -\frac{\pi^2 k A}{60 d^2} \left(\frac{k T d}{\hbar c}\right)^3 \leq 0 \quad (5.167)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right)^2 = 0 \quad (5.168)$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right)^2 = -\frac{45\zeta(3)}{16\pi^3 T^2 d^2} \left(\frac{\hbar c}{KTd}\right)^3 \leq 0 \quad (5.169)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial A \partial d}\right)^2 &= -\frac{T^3}{d^3} \left\{ \frac{7\pi\zeta(3)k^5}{720(\hbar c)^3} + \frac{[\zeta(3)]^3 k^2}{16\pi^2(Td)^3} - \frac{1}{18} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3} \right]^2 (Td)^3 \right\} \\ &\approx \frac{T^3}{d^3} \frac{1}{18} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3} \right]^2 (Td)^3 \\ &= \frac{1}{18} \left[\frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3} \right]^2 T^6 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.170)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial d \partial A}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial A}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U \partial d}\right) &= -\frac{1}{T^2 Ad} \left[\frac{1}{12} - \frac{15}{16\pi^3 \left(\frac{\hbar c}{KTd}\right)^3} \right] \\ &\approx -\frac{1}{12T^2 Ad} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.171)$$

Logo, vemos que para a entropia, as Eqs. (5.169) e (5.171) em comparação com as Eqs. (5.124) e (5.129), violam as condições de estabilidade. A comparação dos resultados obtidos nesta subseção com aqueles de 5.5.2 mostra que as correções provenientes do vácuo possuem papel decisivo na estabilidade do sistema. Anteriormente, os resultados obtidos para a radiação de corpo negro revelaram que aquele sistema reside na fronteira que separa uma configuração estável de uma que é instável. Ao se considerar as flutuações quânticas do vácuo, vemos que o sistema migra para uma configuração termodinâmica instável. Para entender como isto ocorre, vamos imaginar que exista radiação eletromagnética na região externa às placas à uma temperatura T . Na região entre as placas, sabemos da Eq. (5.1) que além da mesma pressão que temos na região externa, que varia com a quarta potência de T , também temos uma pressão negativa decorrente das flutuações quânticas do vácuo. Fazendo o mesmo exercício que fizemos para explicar a instabilidade no regime $\xi \rightarrow 0$, podemos concluir que flutuações positivas ou negativas de volume, levarão a placa móvel, que está inicialmente localizada em $z = d$, a ser empurrada para longe ou a ser atraída na direção da outra placa. Seja para $\xi \rightarrow 0$ ou $\xi \rightarrow \infty$, a pressão de Casimir cresce quando V também cresce, o que leva o sistema a entrar numa configuração mecânica instável em ambos os regimes.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho examinamos a termodinâmica para a configuração original do efeito Casimir, isto é, duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras. Para obter as quantidades termodinâmicas relevantes do sistema, o caminho trilhado foi iniciado com a obtenção do propagador de Feynman para o campo eletromagnético sujeito às condições de contorno para um condutor perfeito. Contudo, antes de construir este propagador, tivemos que lidar com alguns aspectos peculiares relacionados com a quantização do campo eletromagnético, uma vez que a teoria eletromagnética clássica não pode ser diretamente quantizada [47]. Um processo de fixação de calibre foi introduzido através da adição de um termo à Lagrangeana de Maxwell, termo este que traz o parâmetro de fixação de calibre χ . Encontramos o propagador de Feynman dependente deste parâmetro e então fixamos o calibre. Nossa escolha foi pelo valor $\chi = 1$ que é comumente conhecido com Calibre de Feynman. Além disso, vimos que é necessário a imposição de uma condição adicional que nos leva de volta à teoria de Maxwell. Essa condição é dada pelo calibre de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$. Implementado esse esquema de quantização, encontramos uma expressão muito conveniente para o propagador de Feynman $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ que pôde ser escrita em termos do propagador para o campo escalar.

Primeiramente, foram encontradas as componentes para $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ à temperatura nula. Depois, encontramos as componentes à temperatura finita. Em ambos os casos usamos modos que respeitam as condições de contorno para um condutor perfeito [13]. Recordamos a necessidade em se aplicar um processo de renormalização simples, que consiste em remover a contribuição de Minkowski que assume um valor divergente no limite $x_\mu \rightarrow x'_\mu$. Com o propagador renormalizado, $\tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$, avançamos para a etapa seguinte, que consistia em encontrar as componentes do tensor energia-momentum para a configuração do sistema. Para isto, fizemos uso da expressão de $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ em termos de derivadas do propagador [38]. A escolha conveniente de calibre que realizamos, possibilitou a obtenção de um $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ cujas componentes fora da diagonal e traço são iguais a zero [24].

Com o tensor energia-momentum já temos imediatamente algumas quantidades termodinâmicas do sistema, como sua densidade de energia interna e as pressões de radiação. Para ter acesso às demais grandezas termodinâmicas de importância, foi calculada a energia livre de Helmholtz para os dois regimes: $\xi \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow \infty$. Como foi mencionado ao longo deste trabalho, o nosso interesse se concentrou no regime de baixas temperaturas e/ou pequena separação entre as placas. A razão é que a termodinâmica para o outro extremo já é bem conhecida, pois esta se resume na radiação de corpo negro acompanhada das contribuições de vácuo que se tornam desprezíveis para $Td \rightarrow \infty$. Embora este regime de

altas temperaturas não tenha sido o foco principal desse trabalho, este nos ajudou a entender os resultados obtidos para o outro regime ($Td \rightarrow 0$), e especialmente na interpretação das informações geradas durante a investigação da estabilidade termodinâmica do sistema.

Ainda com respeito às grandezas termodinâmicas do sistema, tivemos uma atenção especial com a entropia. Examinamos a Relação de Euler para o sistema em ambos os regimes. Pela anisotropia do nosso problema, observamos que uma nova relação de Euler deveria ser obtida, o que culminou na expressão dada em (5.39). Para derivá-la, tivemos que escrever S como função de U , A e d . Verificamos que tanto para $\xi \rightarrow \infty$ quanto para $\xi \rightarrow 0$, $S(U, A, d)$ não é uma função homogênea de primeiro grau na variável d . Por último, mencionamos um aspecto muito importante e interessante envolvendo a entropia no regime de baixas temperaturas. Sua expressão possui uma dependência linear com a área das placas e quadrática com respeito à temperatura. Essa lei de área é algo que realmente nos chama atenção, visto que não são conhecidos muitos sistemas físicos com tal característica. Como mencionamos no texto, talvez o mais famoso seja a Entropia de Bekenstein - Hawking para um buraco negro cuja expressão varia com a área de seu horizonte de eventos [43]. Finalmente, devemos salientar que essa entropia nos fornece a pressão de Casimir que é dada por P_{\perp} . A expressão de P_{\perp} pode dar origem a certo ceticismo a respeito de sua origem termodinâmica, em virtude desta não depender da temperatura. Entretanto, para eliminar quaisquer dúvidas a respeito de sua obtenção via termodinâmica, mostramos explicitamente que S escrita como $S(U, A, d)$ (vide Eq. (5.58)) reproduz com sucesso P_{\parallel} , P_{\perp} e também o inverso da temperatura. Uma analogia pode ser estabelecida com o gás de Fermi a baixas temperaturas, onde o termo dominante da pressão também é independente de T , embora possua um caráter repulsivo (pressão positiva).

Foram investigados alguns processos termodinâmicos e também analisamos a viabilidade da idealização de ciclos de Carnot para o regime de baixas temperaturas, com o objetivo de atribuir um papel às flutuações do vácuo durante o funcionamento da máquina térmica. Vimos que os termos de Casimir não influenciam no resultado final da eficiência do ciclo, que para este tipo de máquina deve obedecer ao *Teorema de Carnot*. Para situações onde se deseja realizar expansões e compressões na direção perpendicular às placas, é necessário utilizar P_{\perp} , e a nossa proposta é um toy model que ilustra bem como isso pode ser alcançado. Também analisamos um ciclo onde não levamos em consideração a atuação da componente perpendicular da pressão, verificando que este caso corresponde à um ciclo de Carnot comum que tem como substância de trabalho um gás de bósons escalares em um espaço-tempo $2 + 1$ dimensional.

Por fim, fizemos um estudo detalhado da estabilidade termodinâmica do sistema. Primeiramente, derivamos as condições de estabilidade que devem ser obedecidas pela entropia e a energia interna. Lembramos que a entropia deve ser uma função côncava, ao

passo que a energia interna uma função convexa das variáveis independentes. Testamos essas condições para a radiação de corpo negro e verificamos que uma destas condições resulta ser nula tanto para S (5.145) como para U (5.148). A estabilidade para a radiação de corpo negro não é violada, mas este resultado indica que o gás de fótons preso na cavidade se encontra na fronteira entre um sistema estável e um sistema instável. Motivados por esta análise, investigamos o comportamento deste mesmo sistema com a entropia adicionada da correção devida às flutuações quânticas do vácuo utilizando a expressão (5.164). Encontramos que as condições dadas pelas Eqs. (5.124) e (5.129) não são obedecidas. Posteriormente, estudamos a estabilidade para o regime $\xi \rightarrow 0$, onde constatamos que as condições de estabilidade dadas pelas Eqs. (5.122) e (5.124) são infringidas. Notamos que há algo em comum com as condições de estabilidade que são violadas: todas envolvem variações com respeito à distância de separação entre as placas. Concluímos que a causa desta instabilidade é a *Pressão de Casimir*, que cresce com o volume tanto para $\xi \rightarrow \infty$ (5.1) (neste caso, o termo de Casimir é a correção térmica à pressão do gás de fótons) quanto para $\xi \rightarrow 0$ (5.43). Quaisquer flutuações no valor da distância entre as placas, e consequentemente, do volume, farão com que o sistema mude para uma outra configuração e não retorne à situação inicial.

Finalmente, podemos levantar algumas propostas de estudo e investigações futuras decorrentes dos resultados deste trabalho. Imaginar as placas como sendo feitas de um material condutor perfeito é uma idealização. A ampliação do estudo feito aqui levando-se em consideração a estrutura do material se mostra essencial. Os modelos mais utilizados são o modelo de *Drude* e o de *Plasma*. Ultimamente, as discussões têm aumentado, pois não há um consenso de qual destes modelos representa mais fielmente os resultados obtidos no campo experimental. Um estudo termodinâmico como o nosso, poderia elucidar muitas das questões presentes nos dias de hoje. Certamente alguns dos aspectos estudados neste trabalho nos possibilitaram enxergar uma estreita relação entre os comportamentos termodinâmicos apresentados pelos dois regimes. No que tange a isto, devemos enfatizar o papel fundamental envolvendo a simetria de inversão de temperatura que vem trazida pela função $f(\xi)$, função esta que conecta os dois regimes. Quiça um estudo baseado em simulações computacionais envolvendo a função $f(\xi)$, atentando-se aos possíveis fenômenos envolvidos na inversão dos regimes, em especial à instabilidade termodinâmica do sistema, possa ser um caminho interessante para abordar esse problema.

Apêndices

APÊNDICE A – A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Neste apêndice discorreremos brevemente sobre o campo escalar e sua quantização. Para tal, adotaremos como background o espaço-tempo de Minkowski em $3 + 1$ dimensões. Neste caso, para um campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ de massa m definido em todos os pontos (\vec{x}, t) do background mencionado, este campo deve satisfazer a seguinte equação de movimento:

$$\left(\square + m^2\right)\phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $\square \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ é o operador diferencial d'Alembertiano e $\eta^{\mu\nu}$ representa o tensor métrico de Minkowski. Esta equação é conhecida como *Equação de Klein-Gordon*. Para obtê-la, escrevemos a ação da teoria livre, cuja densidade de Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 \right) \quad (\text{A.2})$$

Como a ação da teoria livre é a integral de $\mathcal{L}(x)$ dada em (A.2) no espaço quadridimensional, a imposição da condição $\delta S = 0$, leva à equação (A.1).

Ao resolver a equação de Klein-Gordon, devemos estar atentos às condições de contorno que devem ser satisfeitas por $\phi(\vec{x}, t)$. No caso livre, a expansão em ondas planas representa um conjunto de soluções possível. Isto é, o campo $\phi(\vec{x}, t)$ é escrito como uma combinação linear de modos $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ dados por:

$$u_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \quad (\text{A.3})$$

sendo $b_{\vec{k}}$ uma constante de normalização e $\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$. A substituição de (A.3) em (A.1) implica em:

$$\begin{aligned} \left(\square + m^2\right)u_{\vec{k}} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ &= (-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2)a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\ &= (-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2)u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e como $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ é diferente da solução trivial, então:

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde as componentes de \vec{k} podem assumir valores no intervalo $-\infty < k_i < \infty$ para $i = 1, 2, 3$.

É interessante obter os modos $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ normalizados. Para isto, sendo o produto escalar de Klein-Gordon

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = -i \int \left\{ u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) [\partial_t u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t)] - [\partial_t u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)] u_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) \right\} d^3x \quad (\text{A.5})$$

a substituição de (A.3) em (A.5), juntamente com a escolha

$$u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \quad (\text{A.6})$$

culmina em

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (\text{A.7})$$

Agora, abordamos a quantização do campo escalar. Analogamente ao que é feito na mecânica quântica, empregamos o esquema de quantização canônica. O campo $\phi(\vec{x}, t)$ é elevado à classe de operador e deve satisfazer as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{x}')] &= 0, \\ [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $\pi(\vec{x}, t)$ é o momentum canonicamente conjugado, cuja definição é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi. \quad (\text{A.9})$$

As soluções dadas pelos modos $u_{\vec{k}}(\vec{x}, t)$ em (A.6) e seus respectivos complexos conjugados formam uma base ortonormal que pode ser utilizada para escrever o agora, operador de campo $\phi(\vec{x}, t)$, na forma:

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Nesta expressão, $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$ são operadores denominados de operador de *criação* e *aniquilação*, respectivamente. Com a equação (A.10), podemos obter $\pi(\vec{x}, t)$ através de sua definição em (A.9). O conhecimento das expressões de $\phi(\vec{x}, t)$ e $\pi(\vec{x}, t)$ permite expressar $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$ em termos destes operadores. Ao fazermos isso e substituirmos as expressões obtidas em (A.8), somos conduzidos a

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= 0, \\ [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= 0, \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

que são as relações de comutação obedecidas por $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$.

Antes de seguir com a quantização do campo escalar, é interessante fazermos uma pequena revisão de alguns conceitos importantes da mecânica quântica que usaremos mais adiante. Um estado físico é representado pelo *vetor de estado*, que é definido num espaço vetorial complexo, sendo este conhecido como *Espaço de Hilbert*. Dirac cunhou o termo *ket* para se referir a um vetor de estado e denotou-o por $|\alpha\rangle$. Este ket contém toda informação física a respeito do estado. Um outro conceito de vital importância é o de *observável*. Este vem representado por um operador, digamos A , definido no espaço de Hilbert em questão. Grandezas físicas são descritas por observáveis representados por operadores chamados de *Hermitianos*. Um operador A é dito Hermitiano, se $A = A^\dagger$ [48].

Com essas considerações feitas, podemos falar um pouco sobre processos de medição. Antes de medir uma propriedade física do sistema, este deve estar numa configuração dada pela combinação linear dos vetores de estado que formam o Espaço de Hilbert em questão. Definimos o *Valor Esperado* do observável A tomado com respeito ao estado $|\alpha\rangle$ como sendo:

$$\langle A \rangle \equiv \langle \alpha | A | \alpha \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Voltando à quantização do campo escalar, escolhemos uma base conveniente no espaço de Hilbert denominada de *Representação de Fock*. Um vetor de estado de extrema importância é dado pelo ket $|0\rangle$, conhecido como *estado de vácuo*. A atuação dos operadores $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$ sobre o estado de vácuo, fornece:

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \forall \vec{k}, \quad (\text{A.13})$$

$$a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle = |1_{\vec{k}}\rangle. \quad (\text{A.14})$$

Estes resultados mostram que o estado de vácuo é aniquilado por $a_{\vec{k}}$, enquanto que a atuação de $a_{\vec{k}}^\dagger$ sobre $|0\rangle$ resulta em um novo estado, o estado de uma partícula com momento \vec{k} . Generalizações podem ser concebidas para a criação de estados de muitas partículas com momentos distintos, ou estados de várias partículas com mesmo momento [31]. Em especial, mencionamos as seguintes relações:

$$a_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = n^{\frac{1}{2}} |(n-1)_{\vec{k}}\rangle. \quad (\text{A.15})$$

$$a_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} |(n+1)_{\vec{k}}\rangle, \quad (\text{A.16})$$

onde o ket $|n_{\vec{k}}\rangle$ é o vetor de estado que contém n partículas com momento \vec{k} . Podemos ver que para $n = 0$, essas relações nos levam àquelas em (A.13) e (A.14), respectivamente.

Para finalizar este apêndice, comentamos sobre o conteúdo de energia e momentum associado ao campo escalar. Para isto, analisamos o *Tensor Energia-Momentum*, denotado

por $T_{\mu\nu}$. Sua obtenção formal é através da variação da ação com relação à métrica do background em questão.

Para o campo escalar, este tensor vem dado por [31]:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\delta} \phi_{,\lambda} \phi_{,\delta} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

Como estamos interessados no conteúdo de energia e de momentum, não é necessário calcular todas as componentes de $T_{\mu\nu}$. A componente T_{00} corresponde à densidade de energia, enquanto que T_{0i} são as componentes que fornecem a densidade de momentum.

De (A.17), teremos:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \phi)^2 + \sum_{i=1}^3 (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (\text{A.18})$$

$$T_{0i} = \partial_0 \phi \partial_i \phi, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (\text{A.19})$$

A substituição de (A.10) em (A.18) e (A.19) seguida da integração em todo o espaço, leva a:

$$H \equiv \int T_{00} d^3x = \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (\text{A.20})$$

$$P_i \equiv \int T_{0i} d^3x = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} k_i \quad (\text{A.21})$$

Devemos enfatizar que H e P_i são observáveis. Logo, podemos calcular seus valores esperados como definido em (A.12) para o operador A . De fato, fazemos isso com relação ao estado de vácuo, $|0\rangle$. Das relações de comutação para $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $a_{\vec{k}}$ em (A.11), teremos:

$$\langle 0| P |0\rangle = 0 \quad (\text{A.22})$$

e

$$\langle 0| H |0\rangle = \langle 0|0\rangle \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega \quad (\text{A.23})$$

sendo $\langle 0|0\rangle = 1$. Estes resultados revelam que o valor esperado do momentum no estado de vácuo é nulo. Em contrapartida, a expressão (A.23) mostra que o valor esperado para a energia no mesmo estado é igual a uma soma, que resulta ser infinita! Para mais detalhes, consultar a Ref. [31].

APÊNDICE B – FUNÇÕES DE GREEN EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Neste apêndice apresentamos as *Funções de Green*, que são objetos de extrema importância em Teoria Quântica de Campos. Estas estão relacionadas aos valores esperados do produto de campos quânticos. Aqui restringiremos nossa exposição ao campo escalar.

Começamos com as chamadas *Função de Schwinger* ou *Função de Pauli-Jordan* e *Função Elementar de Hadamard*, cujas definições são, respectivamente:

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle, \quad (\text{B.1})$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0 \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Uma função de Green muito importante é *Propagador de Feynman*. Este é definido como

$$\begin{aligned} iG_{\mathbf{F}}(x, x') &= \langle 0 | \mathcal{T}(\phi(x)\phi(x')) | 0 \rangle \\ &= \theta(t - t')G^+(x, x') + \theta(t' - t)G^-(x, x') \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

sendo \mathcal{T} o *Operador de Ordenamento Temporal* e $G^\pm(x, x')$ as *Funções de Wightman*, que por sua vez, são dadas por

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle, \\ G^-(x, x') &= \langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Outras funções de Green de interesse são $G_{Ret}(x, x')$ e $G_{Adv}(x, x')$, as funções de Green *retardada* e *avançada*, respectivamente. Estas são dadas por

$$\begin{aligned} G_{Ret}(x, x') &= -\theta(t - t')G(x, x') \\ G_{Adv}(x, x') &= \theta(t' - t)G(x, x') \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e a média destas, denotada por $\overline{G}(x, x')$, é simplesmente

$$\overline{G}(x, x') = \frac{1}{2} [G_{Ret}(x, x') + G_{Adv}(x, x')] . \quad (\text{B.6})$$

Notamos que o propagador de Feynman pode ser expresso em termos de $\overline{G}(x, x')$ e $G^{(1)}(x, x')$ na forma

$$G_{\mathbf{F}}(x, x') = -\overline{G}(x, x') - \frac{i}{2}G^{(1)}(x, x'). \quad (\text{B.7})$$

Por fim, apresentamos as equações de movimento que devem ser obedecidas por estas funções de Green. Usando a Equação de Klein-Gordon dada em (A.1), vemos facilmente que G , $G^{(1)}$ e G^\pm satisfazem a equação homogênea

$$(\square_x + m^2)\mathcal{G}(x, x') = 0. \quad (\text{B.8})$$

Já para as funções de Green retardada e avançada e o propagador de Feynman, as equações de movimento podem ser obtidas utilizando-se a relação $\partial_t \theta(t - t') = \delta(t - t')$ juntamente com as relações de comutação dadas na equação (A.8). Estas equações de movimento são dadas por:

$$(\square_x + m^2)G_{Ret,Adv}(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (\text{B.9})$$

$$(\square_x + m^2)G_{\mathbf{F}}(x, x') = -\delta^4(x - x') \quad (\text{B.10})$$

APÊNDICE C – ASPECTOS DA QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Este apêndice tem como objetivo apresentar alguns aspectos da quantização do campo eletromagnético e uma discussão da construção de seu propagador de Feynman. Diferentemente de outras teorias, a eletromagnética clássica representa um limite que nos orienta durante seu processo de quantização, uma vez que observamos campos elétrico e magnético classicamente.

Contudo, ao quantizar a teoria, não podemos utilizar \vec{B} e \vec{E} como variáveis dinâmicas pois essa escolha não garante que o caráter local da teoria seja preservado [47]. Então recorreremos ao potencial eletromagnético. Não obstante, este também traz consigo um problema: seu número de componentes, quatro, é maior do que o número de graus de liberdade. Sabemos que há dois tipos de fótons, que diferem com respeito à polarização. Logo, duas das componentes do potencial devem ser não-dinâmicas. Portanto, estas não devem ser quantizadas. A existência destas variáveis sem papel decisivo na dinâmica é devida à existência de uma simetria interna local: a simetria de calibre, ou também conhecida como simetria de calibre. Como consequência desta simetria, o processo de quantização canônico do eletromagnetismo deve ser modificado. De forma breve, discorreremos sobre isso nos próximos parágrafos.

Definimos o *Tensor Eletromagnético* como sendo:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (\text{C.1})$$

onde $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ sendo $\phi(x)$ o potencial escalar e \vec{A} o potencial vetor. Este tensor possui um dual, $*F^{\mu\nu}$, dado por:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (\text{C.2})$$

Com estes dois objetos, as equações de Maxwell homogêneas (aquelas que não carregam termos de fontes e correntes) e não-homogêneas (que contém termos de fontes e correntes) são dadas, respectivamente, pelas expressões:

$$\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (\text{C.4})$$

onde $j^\mu = (\rho, \vec{J})$ é o quadrivetor densidade de corrente, cuja componente temporal é a densidade de cargas e as componentes espaciais formam o vetor densidade de corrente.

Com respeito à simetria de calibre que mencionamos anteriormente, $F^{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de A^μ da forma:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow A^\mu(x) - \partial^\mu\theta(x), \\ F^{\mu\nu} &\rightarrow F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Este tipo de transformação é denominado *Transformação Local de Calibre*. Vemos de (C.5) que A^μ é uma quantidade dependente de calibre, visto que esta é modificada quando submetida a uma transformação desta natureza. Ou seja, para cada escolha de $\theta(x)$ obteremos um A^μ diferente. Dessa forma, esta transformação de calibre nos permite escolher A^μ à nossa conveniência através da imposição de uma condição que deve ser satisfeita pelo mesmo. Esse método recebe o nome de *Fixação de Calibre*. Entre as escolhas usuais de calibre, podemos citar:

- $\phi = 0$, conhecido como *Calibre de Radiação ou Calibre Temporal*;
- $A_3 = 0$ é o *Calibre Axial*;
- $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ é o chamado *Calibre de Coulomb*;
- $\partial_\mu A^\mu = 0$ é denominado *Calibre de Lorenz*.

Podemos escolher uma dessas opções para proceder com o processo de quantização. Porém, nenhuma delas resolve de forma definitiva o problema que mencionamos acerca da redundância de A^μ . Nossas variáveis dinâmicas devem ser independentes da escolha que fazemos da função arbitrária $\theta(x)$, caso contrário, nossas quantidades serão dependentes do calibre, e conseqüentemente, não possuirão significado físico. Para garantir que os resultados físicos não sejam afetados pela manifestação de variáveis não dinâmicas, isto é, variáveis sensíveis à escolha do calibre, vê-se necessário implementar uma modificação no processo canônico de quantização. Dentre as escolhas mais plausíveis, estão o calibre de Coulomb e o de Lorenz. Contra o primeiro pesa o fato de este ser não-covariante. Para assegurar a covariância de Lorentz, podemos trabalhar com a segunda escolha, e será esta que abordaremos a seguir. Para mais detalhes sobre a quantização no calibre de Coulomb, recomenda-se a consulta da Ref. [47].

Antes de quantizar a teoria no calibre de Lorenz, discutiremos brevemente o processo de quantização canônico diretamente aplicado à teoria eletromagnética. A Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \tag{C.6}$$

de onde podemos calcular o momentum canonicamente conjugado à A^μ , o que leva a:

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0 \\ \pi_i(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^i)} = -E_i \end{aligned} \tag{C.7}$$

O Hamiltoniano pode então ser escrito, resultando em:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E} \cdot \nabla A^0 \right] \quad (\text{C.8})$$

O passo seguinte é estabelecer as condições de comutação. Porém, o fato de termos $\pi_0 = 0$ traz algumas complicações. Se não levarmos em consideração o comutador entre $A^0 = \phi$ e π_0 , as relações de comutação serão:

$$\begin{aligned} [A_i(\vec{x}, t), E_j(\vec{x}', t)] &= -i\delta_{ij}(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [E_i(\vec{x}, t), E_j(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [E_i(\vec{x}, t), A_0(\vec{x}', t)] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Como $\pi_0 = 0$, então ϕ comuta com tudo e não é uma variável dinâmica. Desprezar o comutador de ϕ com π_0 , ameniza o problema de termos π_0 nulo, mas o preço a se pagar é a perda da covariância de Lorentz. Felizmente, isto pode ser contornado com a imposição do Calibre de Lorenz.

Começamos impondo a relação de comutação covariante entre A_μ e π_μ na forma:

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{x}', t)] = i\eta_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{C.10})$$

onde estamos assumindo um espaço-tempo plano, isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A covariância é garantida com a presença de todas as componentes de A_μ no comutador. Deste processo surgem quatro fótons: dois fótons transversais que são físicos e dois fótons não físicos, um longitudinal e o outro temporal. É necessário lidar com este caráter não-físico relacionado a estes dois fótons para evitar que as quantidades físicas mensuráveis não sejam afetadas por eles. Embora tenhamos $\pi_0 = 0$, a relação de comutação dada em (C.10) informa que $\pi_0 \neq 0$. Para contornar esta inconsistência, devemos modificar a Lagrangeana (C.6), escrevendo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}(\partial \cdot A)^2 \quad (\text{C.11})$$

que agora leva ao seguinte momentum canonicamente conjugado

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} - \chi\eta^{\mu 0}(\partial \cdot A) \quad (\text{C.12})$$

Agora, segue que $\pi^0 = \chi(\partial \cdot A) \neq 0$. Também da Lagrangeana modificada (C.11), as equações de movimento tomam a forma:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - (1 - \chi)\partial_\nu(\partial \cdot A) = 0 \quad (\text{C.13})$$

O parâmetro χ pode ser levado até o final dos cálculos, uma vez que nenhum resultado físico deve depender do seu valor. Porém, vamos neste momento fixá-lo, escolhendo $\chi = 1$.

A equação de movimento (C.13) não corresponde às Equações de Maxwell da teoria clássica. Mas com a imposição $\partial_\mu A^\mu = 0$, que é o Calibre de Lorentz, somos remetidos novamente à teoria clássica. Ainda, devemos estar atentos à maneira com a qual esta exigência é implementada. A forma correta é expressar $\partial_\mu A^\mu = 0$ como um valor esperado, ou seja:

$$\langle \psi | \partial \cdot A | \psi \rangle = 0 \quad (\text{C.14})$$

onde $|\psi\rangle$ são estados do espaço de Fock. Portanto, as equações de Maxwell da teoria clássica são recuperadas como valores esperados na Teoria Quântica de Campos. A escolha $\chi = 1$ é comumente conhecida como *Calibre de Feynman*. Para esta escolha, A^μ satisfaz uma equação de onda similar à do campo escalar sem massa e pode então ser expandido em termos de ondas planas,

$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a_{\vec{k},\lambda} \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right] \quad (\text{C.15})$$

sendo $\varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ o vetor de polarização, que em geral satisfaz a relação

$$\varepsilon(\vec{k}, \lambda) \cdot \varepsilon(\vec{k}', \lambda') = \eta^{\lambda\lambda'}. \quad (\text{C.16})$$

Com a expansão (C.15) podemos expressar os operadores $a_{\vec{k},\lambda}$ e $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ em termos de A_μ e π_μ para encontrar as relações de comutação entre os operadores de aniquilação e criação, o que leva a:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] &= -(2\pi)^3 \eta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}] &= [a_{\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Para finalizar este apêndice, vamos falar sobre o Propagador de Feynman para o campo eletromagnético no Calibre de Lorentz. Este propagador é definido pela seguinte expressão [31]:

$$i D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') = \langle 0 | \mathcal{T}(A_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle \quad (\text{C.18})$$

e possui como equação de movimento:

$$\left[\eta_{\mu\lambda} \square_x - (1 - \chi^{-1}) \partial_\mu^x \partial_\lambda^x \right] D_{\mathbf{F}}^{\lambda\nu}(x, x') = \delta_\mu^\nu \delta^4(x - x'). \quad (\text{C.19})$$

Substituindo a expansão para A_μ no calibre de Lorentz dada em (C.15) em (C.18), $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$ será dado por:

$$D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x') = -\eta_{\mu\nu} D_{\mathbf{F}}(x, x') \quad (\text{C.20})$$

onde $D_{\mathbf{F}}(x, x')$ é o propagador para o campo escalar sem massa [31]. Essa fórmula simples é obtida graças à covariância que caracteriza o calibre de Lorentz.

APÊNDICE D – $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste apêndice, obtemos a expressão de $T_{\mu\nu}(x)$ em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, e posteriormente, o seu valor esperado no estado de vácuo, isto é, $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$.

A ação do campo eletromagnético é dada por :

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (\text{D.1})$$

onde $F_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha A_\beta(x) - \partial_\beta A_\alpha(x)$. Lembramos que o tensor eletromagnético é anti-simétrico, ou seja, $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. O tensor energia-momentum é obtido formalmente através da variação da ação com respeito à métrica [31]:

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{[-g(x)]}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)}. \quad (\text{D.2})$$

Calculando δS , segue que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left(-\frac{1}{4} \int d^4 x \sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{4} \delta \left(\int d^4 x \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4 x \left[(\delta\sqrt{-g}) F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} + \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} \delta(g_{\alpha\rho}) g_{\beta\sigma} + \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} \delta(g_{\beta\sigma}) \right] \end{aligned}$$

e o uso das relações

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad , \quad \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}$$

leva a:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4} \int d^4 x \left[(\delta\sqrt{-g}) F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} + \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} \delta(g_{\alpha\rho}) g_{\beta\sigma} + \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} \delta(g_{\beta\sigma}) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4 x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\rho\theta} \delta g^{\gamma\theta} g_{\beta\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma} g_{\sigma\theta} \delta g^{\gamma\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Para os dois últimos termos dentro dos colchetes, notamos que:

$$\begin{aligned} &\int d^4 x \sqrt{-g} \left(F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\rho\theta} \delta g^{\gamma\theta} g_{\beta\sigma} + F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma} g_{\sigma\theta} \delta g^{\gamma\theta} \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left(F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\rho\theta} g_{\beta\sigma} + F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma} g_{\sigma\theta} \right) \delta g^{\gamma\theta} \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left(F_{\gamma}{}^{\beta} F_{\theta}{}^{\sigma} g_{\beta\sigma} + F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\rho}{}_{\theta} g_{\alpha\rho} \right) \delta g^{\gamma\theta} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

No termo $F^\alpha{}_\gamma F^\rho{}_\theta g_{\alpha\rho}$, trocando α por β e ρ por σ , encontramos $F^\beta{}_\gamma F^\sigma{}_\theta g_{\beta\sigma}$. Ainda, observamos que:

$$\begin{aligned} F^\beta{}_\gamma &= g^{\beta\kappa} F_{\kappa\gamma} = -g^{\beta\kappa} F_{\gamma\kappa} = -F_\gamma{}^\beta \\ F^\sigma{}_\theta &= g^{\sigma\kappa} F_{\kappa\theta} = -g^{\sigma\kappa} F_{\theta\kappa} = -F_\theta{}^\sigma \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Substituindo as expressões de (D.5) em (D.4), leva a:

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \sqrt{-g} \left(F_\gamma{}^\beta F_\theta{}^\sigma g_{\beta\sigma} + F^\alpha{}_\gamma F^\rho{}_\theta g_{\alpha\rho} \right) \delta g^{\gamma\theta} \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left[F_\gamma{}^\beta F_\theta{}^\sigma g_{\beta\sigma} + (-F_\gamma{}^\alpha)(-F_\theta{}^\sigma) g_{\beta\sigma} \right] \delta g^{\gamma\theta} \\ &= 2 \int d^4 x \sqrt{-g} F_\gamma{}^\beta F_\theta{}^\sigma g_{\beta\sigma} \delta g^{\gamma\theta} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Retornando à Eq. (D.3), usando o resultado obtido na Eq. (D.6), encontramos:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4} \int d^4 x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\gamma} g_{\rho\theta} \delta g^{\gamma\theta} g_{\beta\sigma} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{-g} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\gamma} g_{\sigma\theta} \delta g^{\gamma\theta} \right] \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_\gamma{}^\beta F_\theta{}^\sigma g_{\beta\sigma} \delta g^{\gamma\theta} \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_\mu{}^\beta F_\nu{}^\sigma g_{\beta\sigma} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^4 x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} F_\mu{}^\beta F_\nu{}^\sigma g_{\beta\sigma} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Utilizando a definição de $T_{\mu\nu}(x)$ dada em (D.2), segue que:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \int d^4 x' \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu}(x') F^{\alpha\beta}(x') F^{\rho\sigma}(x') g_{\alpha\rho}(x') g_{\beta\sigma}(x') + \frac{1}{2} F_\mu{}^\beta(x') F_\nu{}^\sigma(x') g_{\beta\sigma}(x') \right) \frac{\delta g^{\mu\nu}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \end{aligned}$$

Mas recorrendo à relação [49]

$$\frac{\delta J(x')}{\delta J(x)} = \delta^4(x - x'), \quad (\text{D.8})$$

para $J(x') = g^{\mu\nu}(x')$ e $J(x) = g^{\mu\nu}(x)$, teremos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \int d^4 x' \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu}(x') F^{\alpha\beta}(x') F^{\rho\sigma}(x') g_{\alpha\rho}(x') g_{\beta\sigma}(x') + \frac{1}{2} F_\mu{}^\beta(x') F_\nu{}^\sigma(x') g_{\beta\sigma}(x') \right) \frac{\delta g^{\mu\nu}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8} g_{\mu\nu}(x) F^{\alpha\beta}(x) F^{\rho\sigma}(x) g_{\alpha\rho}(x) g_{\beta\sigma}(x) + \frac{1}{2} F_\mu{}^\beta(x) F_\nu{}^\sigma(x) g_{\beta\sigma}(x) \right) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} \end{aligned}$$

e usando a anti-simetria do tensor eletromagnético para escrever $F_{\nu\beta} = -F_{\beta\nu}$, encontramos finalmente,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - F_{\mu}{}^{\sigma}F_{\sigma\nu}. \quad (\text{D.9})$$

corroborando o resultado apresentado em [31].

Agora calcularemos o valor esperado de $T_{\mu\nu}(x)$ no estado de vácuo. Queremos encontrar uma expressão que seja dada em termos do propagador de Feynman para o campo eletromagnético.

Basicamente, estamos interessado em obter a seguinte quantidade:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \left\langle 0 \left| \left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu} \right) \right| 0 \right\rangle \quad (\text{D.10})$$

em termos de $D_{\mathbf{F}\mu\nu}(x, x')$. Vamos considerar o espaço-tempo de Minkowski, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A expressão que desejamos encontrar, já conhecida na literatura [38], é dada por:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = -i \lim_{x'_{\mu} \rightarrow x_{\mu}} \left\{ \partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu} - \partial_{\mu}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha\nu} - \partial_{\alpha\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu}{}^{\alpha} + \partial_{\mu\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha}{}^{\alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left(\partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}{}^{\beta} - \partial_{\alpha}{}^{\beta'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}{}^{\alpha} \right) \right\} \quad (\text{D.11})$$

Ao invés de derivar (D.11), mostraremos que esta se reduz a (D.10). Da definição de $\tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu}$ em (C.18), teremos de (D.11):

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = -i \lim_{x'_{\mu} \rightarrow x_{\mu}} \left\{ \partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu\nu} - \partial_{\mu}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha\nu} - \partial_{\alpha\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\mu}{}^{\alpha} + \partial_{\mu\nu'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\alpha}{}^{\alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left(\partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}{}^{\beta} - \partial_{\alpha}{}^{\beta'} \tilde{D}_{\mathbf{F}\beta}{}^{\alpha} \right) \right\} \\ = -i(i) \lim_{x'_{\mu} \rightarrow x_{\mu}} \left\{ \partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \langle 0 | A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') | 0 \rangle - \partial_{\mu}{}^{\alpha'} \langle 0 | A_{\alpha}(x) A_{\nu}(x') | 0 \rangle - \partial_{\alpha\nu'} \langle 0 | A_{\mu}(x) A^{\alpha}(x') | 0 \rangle \right. \\ \left. + \partial_{\mu\nu'} \langle 0 | A_{\alpha}(x) A^{\alpha}(x') | 0 \rangle - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left[\partial_{\alpha}{}^{\alpha'} \langle 0 | A_{\beta}(x) A^{\beta}(x') | 0 \rangle - \partial_{\alpha}{}^{\beta'} \langle 0 | A_{\beta}(x) A^{\alpha}(x') | 0 \rangle \right] \right\} \\ = \lim_{x'_{\mu} \rightarrow x_{\mu}} \left\langle 0 \left| \left\{ \partial_{\alpha}{}^{\alpha'} [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] - \partial_{\mu}{}^{\alpha'} [A_{\alpha}(x) A_{\nu}(x')] - \partial_{\alpha\nu'} [A_{\mu}(x) A^{\alpha}(x')] \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_{\mu\nu'} [A_{\alpha}(x) A^{\alpha}(x')] - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left[\partial_{\alpha}{}^{\alpha'} [A_{\beta}(x) A^{\beta}(x')] - \partial_{\alpha}{}^{\beta'} [A_{\beta}(x) A^{\alpha}(x')] \right] \right\} \right| 0 \right\rangle \\ = \left\langle 0 \left| \lim_{x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}} \left\{ \partial^{\alpha'} A_{\nu}(x') [\partial_{\alpha} A_{\mu}(x) - \partial_{\mu} A_{\alpha}(x)] + \partial_{\nu'} A^{\alpha}(x') [\partial_{\mu} A_{\alpha}(x) - \partial_{\alpha} A_{\mu}(x)] \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} A_{\beta}(x) [\partial^{\alpha'} A^{\beta}(x') - \partial^{\beta'} A^{\alpha}(x')] \right\} \right| 0 \right\rangle \\ = \left\langle 0 \left| \lim_{x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}} \left[\partial^{\alpha'} A_{\nu}(x') F_{\alpha\mu}(x) + \partial_{\nu'} A^{\alpha}(x') F_{\mu\alpha}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} A_{\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x') \right] \right| 0 \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x_\mu \rightarrow x'_\mu} \left\langle 0 \left| \left[\partial^{\alpha'} A_\nu(x') F_{\alpha\mu}(x) - \partial_{\nu'} A^\alpha(x') F_{\alpha\mu}(x) + \partial_{\nu'} A^\alpha(x') F_{\alpha\mu}(x) + \partial_{\nu'} A^\alpha(x') F_{\mu\alpha}(x) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \partial^{\alpha'} A_\nu(x') F_{\mu\alpha}(x) + \partial^{\alpha'} A_\nu(x') F_{\mu\alpha}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta(x) F^{\alpha\beta}(x') \right] \right| 0 \right\rangle \\
&= \lim_{x_\mu \rightarrow x'_\mu} \left\langle 0 \left| \left[F^{\alpha\nu}(x') F_{\alpha\mu}(x) + F_{\nu'}^\alpha(x') F_{\mu\alpha}(x) + F_{\nu'}^\alpha(x') F_{\alpha\mu}(x) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta(x) F^{\alpha\beta}(x') \right] \right| 0 \right\rangle
\end{aligned} \tag{D.12}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
F_{\nu'}^\alpha(x') F_{\mu\alpha}(x) + F_{\nu'}^\alpha(x') F_{\alpha\mu}(x) &= F_{\nu'}^\alpha(x') (F_{\mu\alpha}(x) + F_{\alpha\mu}(x)) \\
&= F_{\nu'}^\alpha(x') (F_{\mu\alpha}(x) - F_{\mu\alpha}(x)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Já para o segundo termo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta(x) F^{\alpha\beta}(x') &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') - \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') \right] \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \left[2 \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') - 2 \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') \right] \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') + \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') \right. \\
&\quad \left. - \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') - \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') \right] \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \left[\partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') + \partial_\beta A_\alpha(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') \right. \\
&\quad \left. - \partial_\alpha A_\beta(x) \partial^{\beta'} A^\alpha(x') - \partial_\beta A_\alpha(x) \partial^{\alpha'} A^\beta(x') \right] \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta(x) \left[\partial^{\alpha'} A^\beta(x') - \partial^{\beta'} A^\alpha(x') \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\beta A_\alpha(x) \left[\partial^{\beta'} A^\alpha(x') - \partial^{\alpha'} A^\beta(x') \right] \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta(x) F^{\alpha\beta}(x') - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\beta A_\alpha(x) F^{\alpha\beta}(x') \\
&= \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x')
\end{aligned} \tag{D.14}$$

Por fim, substituindo os resultados encontrados em (D.13) e (D.14) em (D.12), resulta em:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \left\langle 0 \left| \left(\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu'}^\alpha F_{\alpha\nu} \right) \right| 0 \right\rangle \tag{D.15}$$

concordando com a expressão dada em (D.10) para o caso $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

REFERÊNCIAS

- 1 CASIMIR, H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates. **Proc. K. Ned. Akad. Wet.**, B51, n. 7, p. 793–795, 1948. Disponível em: <<http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018547.pdf>>.
- 2 SCHWINGER, J. Casimir effect in source theory. **Letters in Mathematical Physics**, v. 1, n. 1, p. 43–47, 1975. ISSN 1573-0530. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00405585>>.
- 3 PAULI, W. Exclusion principle and quantum mechanics. **Nobel Lecture**, 1946. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1945/pauli/lecture/>>.
- 4 DEWITT, B. The Casimir effect in field theory. In: SARLEMIJN, A.; SPARNAAY, M. (Ed.). **Physics in the Making**. Elsevier, 1989, (North-Holland Personal Library). p. 247 – 272. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444880192500155>>.
- 5 MOSTEPANENKO, V. M.; TRUNOV, N. **The Casimir Effect and its Applications**. [S.l.]: Oxford University Press Inc., 1997. ISBN 9780198539988.
- 6 SAHNI, V.; STAROBINSKY, A. A. The case for a positive cosmological Lambda term. **Int. J. Mod. Phys.**, D9, p. 373–444, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218271800000542>>.
- 7 JAFFE, R. L. Casimir effect and the quantum vacuum. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 72, p. 021301, 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.021301>>.
- 8 PHILBIN, T. G. Canonical quantization of macroscopic electromagnetism. **New Journal of Physics**, v. 12, n. 12, p. 123008, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=12/a=123008>>.
- 9 PHILBIN, T. G. Casimir effect from macroscopic quantum electrodynamics. **New Journal of Physics**, v. 13, n. 6, p. 063026, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/13/i=6/a=063026>>.
- 10 BORDAG, M.; KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. **Advances in the Casimir effect**. [S.l.: s.n.], 2009. ISBN 9780199238743.
- 11 MILTON, K. A. **The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy**. New Jersey, USA: World Scientific, 2001. 320 p. ISBN 9789810243975.
- 12 BOYER, T. H. Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the Casimir model for a charged particle. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 174, p. 1764–1776, 1968. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.174.1764>>.
- 13 AMBJORN, J.; WOLFRAM, S. Properties of the vacuum. i. mechanical and thermodynamic. **Annals of Physics**, v. 147, n. 1, p. 1 – 32, 1983. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491683900659>>.

- 14 SPARNAAY, M. Measurements of attractive forces between flat plates. **Physica**, v. 24, n. 6, p. 751 – 764, 1958. ISSN 0031-8914. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891458800907>.
- 15 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, 1989. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>.
- 16 LAMOREAUX, S. K. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ range. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 78, p. 5–8, 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>.
- 17 MOHIDEEN, U.; ROY, A. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to $0.9\mu\text{m}$. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 4549–4552, 1998. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.4549>.
- 18 CAPASSO, F.; MUNDAY, J. N.; IANNUZZI, D.; CHAN, H. B. Casimir forces and quantum electrodynamical torques: physics and nanomechanics. **IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.**, v. 13, p. 400–414, 2007. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/4159963/media>.
- 19 BRESSI, G.; CARUGNO, G.; ONOFRIO, R.; RUOSO, G. Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 88, p. 041804, 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.041804>.
- 20 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 21, p. 467–488, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- 21 CABRERA, C. R.; TANZI, L.; SANZ, J.; NAYLOR, B.; THOMAS, P.; CHEINEY, P.; TARRUELL, L. Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 359, n. 6373, p. 301–304, 2018. ISSN 0036-8075. Disponível em: <http://science.sciencemag.org/content/359/6373/301>.
- 22 DZYALOSHINSKII, I. E.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. General theory of Van der Waals forces. **Soviet Physics Uspekhi**, v. 4, n. 2, p. 153, 1961. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0038-5670/4/i=2/a=R01>.
- 23 LAMOREAUX, S. K. The Casimir force: background, experiments, and applications. **Reports on Progress in Physics**, v. 68, n. 1, p. 201, 2005. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0034-4885/68/i=1/a=R04>.
- 24 BROWN, L. S.; MACLAY, G. J. Vacuum stress between conducting plates: An image solution. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 184, p. 1272–1279, 1969. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.184.1272>.
- 25 BALIAN, R.; DUPLANTIER, B. Geometry of the Casimir Effect. **arXiv:quant-ph/0408124**, 2004.
- 26 WIDOM, A.; SASSAROLI, E.; SRIVASTAVA, Y. N.; SWAIN, J. The Casimir Effect and Thermodynamic Instability. **arXiv:quant-ph/9803013**, 1998.

-
- 27 MITTER, H.; ROBASCHIK, D. Thermodynamics of the Casimir effect. **Eur. Phys. J.**, B13, p. 335–340, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s100510050039>>.
- 28 MOREIRA JUNIOR, E. S. **Aspects of Quantum Theory in Conical Backgrounds**. 1997. Tese (Doutorado em Física) — Department of Physics, Queen Mary and Westfield College, 1997.
- 29 ARFKEN, G.; WEBER, H.; HARRIS, F. **Mathematical Methods for Physicists**. [S.l.]: Elsevier, 2005. ISBN 9780120598762.
- 30 GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. **Table of Integrals, Series, and Products**. 7th. ed. [S.l.]: Academic Press, 2007. ISBN 9780123736376.
- 31 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. **Quantum Fields in Curved Space**. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521278584.
- 32 TADAKI, S.; TAKAGI, S. Casimir effect at finite temperature. **Progress of Theoretical Physics**, v. 75, n. 2, p. 262–271, 1986. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1143/PTP.75.262>>.
- 33 FULLING, S. A. **Aspects of quantum field theory in curved space-time**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. v. 17. ISBN 9781139172073.
- 34 JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd. ed. [S.l.]: Wiley, 1999. ISBN 9780471309321.
- 35 FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. **Quantum Theory of Many-Particle Systems**. Boston, USA: McGraw-Hill Book Company, 1971. ISBN 0486428273.
- 36 WALD, R. **General Relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870335.
- 37 DAS, A. **Finite Temperature Field Theory**. [S.l.]: World Scientific, 1997. ISBN 9789812819864.
- 38 CANDELAS, P.; DEUTSCH, D. On the vacuum stress induced by uniform acceleration or supporting the ether. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 354, n. 1676, p. 79–99, 1977. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/354/1676/79>>.
- 39 PRUDNIKOV A. P., B. Y. A.; MARICHEV, O. I. **Integrals and Series**. [S.l.]: Gordon and Breach, 1986. v. 1. (Elementary Functions, v. 1). ISBN 2881240895.
- 40 RAVNDAL, F.; TOLLEFSEN, D. Temperature inversion symmetry in the Casimir effect. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 40, p. 4191–4192, 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.40.4191>>.
- 41 PATHRIA, R. **Statistical Mechanics**. [S.l.]: Elsevier Science, 1996. ISBN 9780080541716.
- 42 CALLEN, H. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. [S.l.]: Wiley, 1985. ISBN 9780471862567.

- 43 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. **Communications in Mathematical Physics**, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02345020>>.
- 44 RIBEIRO, T. G. **Radiação de Corpo Negro do Campo Escalar**. 2014. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2014.
- 45 KELLY, R. E. Thermodynamics of blackbody radiation. **American Journal of Physics**, v. 49, n. 8, p. 714–719, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.12416>>.
- 46 LEMOS, J. P. S.; QUINTA, G. m. c. M.; ZASLAVSKII, O. B. Entropy of a self-gravitating electrically charged thin shell and the black hole limit. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 91, p. 104027, 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.104027>>.
- 47 HATFIELD, B. **Quantum Field Theory Of Point Particles And Strings**. [S.l.]: Avalon Publishing, 1998. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813346397.
- 48 SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics; rev. ed.** Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1167961>>.
- 49 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. [S.l.]: Westview Press, 1995. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p. ISBN 9780201503975.

ÍNDICE

- átomos ultrafrios, 20
- campo
 - fermiônico, 58
- ciclo de Carnot, 82, 85, 89
- compressão livre, 89
- condição de contorno
 - Dirichlet, 24
 - Neumann, 32
- condições de estabilidade
 - energia interna, 97
 - entropia, 95
- densidade
 - de energia, 112
 - momentum, 112
- desvio de Lamb, 17
- dielétricos, 20
- distribuição
 - delta de Dirac, 25, 33
- eficiência, 91
- emissão espontânea, 17
- energia, 17
 - livre de Helmholtz, 21, 65, 73
 - ponto-zero, 17
- entropia
 - Bekenstein-Hawking, 76
 - Casimir, 66
- expansão livre, 88
- fórmula de Poisson, 28
- força
 - Casimir, 19
 - dispersiva de Van der Waals, 17
- pressão
 - Casimir, 51, 72
- Casimir térmica, 64
- quantum droplet, 20
- radiação de corpo negro, 21
- relação de Euler, 70
- simetria
 - inversão de temperatura, 58
- simuladores quânticos, 20
- sistema
 - estável, 99
 - instável, 102
- tensor
 - tensor métrico de Minkowski, 109
 - energia-momentum, 49
- teorema de Carnot, 104