

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS DE
MODELAGEM EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Itajubá, Outubro de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS DE
MODELAGEM EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto, Materiais e Processos

**Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como
parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia
Mecânica.**

Itajubá, Outubro de 2018

M.G. – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS DE
MODELAGEM EM MODELOS ESTRUTURAIS
DINÂMICOS**

Autora: Luciana Bernardo Justino

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira - EMBRAER

Prof. Dr. Antonio Wagner Forti - FEG/UNESP

Prof. Dr. Jesús Antonio García Sánchez – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. André Garcia Chiarello – IEM/UNIFEI

Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, Presidente - IEM/UNIFEI

Dedicatória

*Aos meus pais Aparecida e Geraldo, aos meus irmãos Lucimary e José e às minhas
afilhadas Beatriz e Patrícia.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me conduzido sempre às escolhas certas e por me permitir realizar mais esta conquista.

Ao meu Orientador, Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, pela competência e dedicação.

À UNIFEI pela oportunidade e ao Instituto de Engenharia Mecânica, representado pelos seus dedicados Professores e Servidores Técnicos Administrativos em Educação, pelo grande apoio e convívio profissional.

À CAPES pelo apoio financeiro por meio do Programa de bolsas de estudos.

A minha família pelo apoio e incentivo na minha formação profissional.

À Comunidade Sol de Deus pelo permanente incentivo, amizade e principalmente pelas orações. Vocês foram fundamentais para que eu pudesse estar agora concluindo este trabalho.

Enfim, a todos os meus verdadeiros amigos e irmãos em Cristo, que de alguma forma contribuíram para que mais esta conquista fosse possível em minha vida.

“Inspirai Senhor as nossas ações e ajudai-nos a realiza-las para que em Vós comece e para Vós termine tudo aquilo que fizemos, por Cristo Senhor nosso. Amém.”

Liturgia das Horas

Resumo

JUSTINO, L. B. (2018), *Quantificação de Incertezas de Modelagem em Modelos Estruturais Dinâmicos*, Tese de Doutorado (Doutorado em Projeto, Materiais e Processos), Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá - MG, 215 p.

Atualmente vários estudos têm sido realizados a respeito da abordagem não-paramétrica. Ela possibilita a quantificação de incertezas que ocorrem devido à falta de conhecimento do sistema, tornando assim o modelo numérico possível de ser utilizado em substituição a modelos experimentais em testes e avaliações computacionais, ao invés de fabricar protótipos de estruturas complexas e caras que podem tornar o processo inviável. Assim sendo, esta tese apresenta o desenvolvimento matemático para a aplicação da abordagem não-paramétrica de forma que englobe todo o conteúdo teórico e exemplos práticos para quantificação de incertezas de modelagem em modelos estruturais dinâmicos lineares com n graus de liberdade, passando por três fases distintas. A primeira é a Modelagem estocástica em que se obtém a função densidade de probabilidade das matrizes aleatórias e seus parâmetros. Posteriormente, vem a propagação da incerteza na matriz massa do sistema dinâmico pela simulação de Monte Carlo e a obtenção das respostas. Por último, chega-se à análise de resultados. Os estudos são conduzidos de forma que seja possível também a verificação da influência do parâmetro de dispersão na quantificação e a importância em determiná-lo corretamente. Nos dois estudos de caso apresentados pôde-se visualizar, pelos resultados gráficos, a existência da incerteza de modelagem. Pôde-se constatar a necessidade da quantificação da incerteza, já que o modelo numérico não tem confiabilidade suficiente para representar o modelo experimental inclusive quando se procede a simulações convencionais sem a utilização da correta função densidade de probabilidade. Além disso, ainda foi possível quantificar a incerteza de modelo de forma a aumentar no modelo numérico a sua capacidade de previsão do modelo experimental, o que possibilita ao analista tomar decisões com níveis de confiança conhecidos.

Palavras-chave

Abordagem não-Paramétrica, Incertezas Epistêmicas, Incertezas de Modelo, Modelos Dinâmicos, Quantificação de Incertezas, Vibrações Mecânicas.

Abstract

JUSTINO, L. B. (2018), *Quantification of Modeling Uncertainties in Dynamic Structural Models*, PhD. (These), Institute of Mechanical Engineering, Federal University of Itajubá, Itajubá – MG, 215 p.

Currently, several studies have been carried out on the non-parametric approach. It enables the quantification of uncertainties that occur due to the lack of knowledge of the system, thus making the numerical model possible to be used in place of experimental models in computational tests and evaluations, instead of making prototypes of complex and expensive structures that can make the process impracticable. Thus, this thesis presents the mathematical development for the application of the non-parametric approach in a way that encompasses all theoretical content and practical examples for quantification of modeling uncertainties in linear dynamic structural models with n degrees of freedom, passing through three distinct phases. The first is Stochastic Modeling in which we obtain the probability density function of the random matrices and their parameters. Then, the uncertainty propagation in the mass matrix of the dynamical system comes from the Monte Carlo simulation and the answers are obtained. Finally, we come to the analysis of results. The studies are conducted in a such way that it is also possible to verify the influence of the dispersion parameter on the quantification and the importance in determining it correctly. In the two study cases presented, it was possible to visualize, by the graphical results, the existence of the modeling uncertainty. It is possible to verify the necessity of uncertainty quantification, since the numerical model does not have enough reliability to represent the experimental model even when performing conventional simulations without using the correct probability density function. In addition, it was still possible to quantify the uncertainty of the model in order to increase in its numerical model its predictive capacity of the experimental model, which allows the analyst to make decisions with known levels of confidence.

Keywords

Non-Parametric Approach, Epistemic Uncertainties, Model Uncertainty, Dynamic Models, Uncertainty Quantification, Mechanical Vibrations.

Sumário

DEDICATÓRIA	IV
AGRADECIMENTOS	V
RESUMO	VII
ABSTRACT	VIII
SUMÁRIO	I
LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE TABELAS	XI
SIMBOLOGIA	XII
LETRAS LATINAS	XII
LETRAS GREGAS	XIV
SOBRESCRITOS	XIV
SUBSCRITOS	XV
ABREVIATURAS	XV
OPERADORES	XV
SIGLAS	XVI
CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo da Pesquisa -----	3
1.2 Motivação -----	4
1.3 Contribuição -----	5
1.4 Conteúdo -----	5
CAPÍTULO 2	7
REVISÃO DA LITERATURA	7
CAPÍTULO 3	21
A ABORDAGEM NÃO-PARAMÉTRICA E SUAS FASES DE APLICAÇÃO	21
3.1 FASE 1: Modelagem Estocástica-----	23

3.2 FASE 2: Propagação da Incerteza e Obtenção das Respostas	24
3.3 FASE 3: Análise de Resultados	28
CAPÍTULO 4	32
FUNDAMENTOS DA ABORDAGEM NÃO-PARAMÉTRICA	32
4.1 Conceito de Erro e Incerteza	32
4.2 Incertezas em Sistemas Dinâmicos	36
4.3 As Fontes da Incerteza de Modelo	37
4.4 Abordagens de Quantificação de Incertezas de Modelo	38
4.5 A Incerteza de Modelo e o Parâmetro de Dispersão	42
4.6 Modelo Projetado	43
4.7 Modelo Médio	44
4.8 Modelo Experimental	46
4.9 Banda de Frequência e Regiões de Frequência de Vibração	46
4.10 Resposta do Sistema estrutural Dinâmico	48
4.11 Previsibilidade do Modelo	48
CAPÍTULO 5	50
PRINCÍPIOS PARA A QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DE MODELO: SHANNON E JAYNES	50
5.1 Contextualização Histórica	50
5.2 Representação da Incerteza: a Entropia de Shannon	51
5.2.1 Shannon e a medida do grau de ignorância humana	51
5.2.2 Definição da entropia de Shannon para o caso contínuo	53
5.2.3 O Sinal negativo da entropia de Shannon	54
5.2.4 A constante k da entropia de Shannon	55
5.2.5 A entropia de Shannon S em função da FDP pxii	57
5.2.6 A integral na entropia de Shannon Spxii	57
5.2.7 Propriedades da medida de Shannon	58
5.3 Jaynes e o Princípio da Máxima Entropia	59
5.3.1 O Raciocínio correto do Princípio da Máxima Entropia PME	60
5.3.2 As Informações prévias do PME	62
5.3.3 O formalismo do PME	66
CAPÍTULO 6	70

CONJUNTO POSITIVO-DEFINIDO (CPD) E SUAS PROPRIEDADES	70
6.1 Conjunto de Matrizes Quadradas Reais: $Mn\mathbb{R}$	73
6.1.1 Determinante das matrizes aleatórias	73
6.1.2 Traço das matrizes aleatórias	74
6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $MnS\mathbb{R}$	74
6.2.1 Matrizes similares	75
6.2.2 Diagonalização de matrizes	76
6.2.3 Matrizes ortogonais	76
6.3 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas e Positivas-Definidas: $Mn + \mathbb{R}$	77
6.3.1 Matrizes inversas	78
CAPÍTULO 7	79
RESTRIÇÕES E PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO A SER RESOLVIDO	79
7.1 A Restrição Natural	79
7.2 A Restrição do Modelo Médio	80
7.3 A Restrição Referente à Existência do Momento Inverso da Matriz de Rigidez Dinâmica	81
7.3.1 Diagonalização de \mathbf{G}	82
7.3.2 Traço de \mathbf{G}	84
7.3.3 Potência de \mathbf{G}	84
7.3.4 Norma de \mathbf{G}	85
7.3.5 Momento ν de $\mathbf{G} - \mathbf{1}$	86
7.3.6 Primeiro momento de $\mathbf{G} - \mathbf{1}$	87
7.4 Restrição de Não-Negatividade	88
7.5 Problema de Otimização a ser Resolvido	89
CAPÍTULO 8	91
SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	91
8.1 O Lagrangeano e a Função Densidade de Probabilidade $p_{\mathbf{G}\mathbf{G}}$	93
8.2 Multiplicador Escalar de Lagrange	96
8.3 Multiplicador Matricial de Lagrange	97
8.4 Obtenção da \mathbf{FDP} Final	100
8.5 Parâmetros Ótimos da Distribuição <i>Wishart</i>	104
CAPÍTULO 9	107

ESTUDOS DE CASO	107
9.1 Estudo de Caso I: Viga Fixa-Fixa	112
9.1.1 Configuração experimental da viga fixa-fixa	113
9.1.2 Cuidados na realização do ensaio da viga fixa-fixa	115
9.1.3 Obtenção das respostas do ensaio da viga fixa-fixa	116
9.1.4 Visualização da existência da incerteza no modelo médio	116
9.1.5 Visualização da existência da incerteza de modelagem	118
9.1.6 Visualização da necessidade da quantificação da incerteza de modelagem	121
9.1.7 Simulação numérica convencional do modelo médio	123
9.1.8 Quantificação da incerteza de modelo	125
9.1.8.1 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,01$	126
9.1.8.2 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,05$	128
9.1.8.3 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,1$	131
9.1.8.4 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,2$	134
9.1.8.5 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,5$	137
9.2 Estudo de Caso II: Viga Fixa-Livre	140
9.2.1 Configuração experimental da viga fixa-livre	141
9.2.2 Cuidados na realização do ensaio da viga fixa- livre	144
9.2.3 Obtenção das respostas do ensaio da viga fixa-livre	145
9.2.4 Visualização da existência da incerteza no modelo médio	145
9.2.5 Visualização da existência da incerteza de modelagem	147
9.2.6 Visualização da necessidade da quantificação da incerteza de modelagem	150
9.2.7 Simulação numérica convencional do modelo médio	152
9.2.8 Quantificação da incerteza de modelo	155
9.2.8.1 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,01$	155
9.2.8.2 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,05$	159
9.2.8.3 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,1$	163
9.2.8.4 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,2$	167
9.2.8.5 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,5$	171
CAPÍTULO 10	177
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	177
10.1 Conclusões	177
10.2 Perspectivas Futuras	181

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____ **182**

Lista de Figuras

Figura 1: Representação do modelo projetado, modelo médio e modelo experimental. Fonte: autor. -----	2
Figura 2: Gráfico representativo do aumento da confiabilidade do modelo médio. Fonte: autor. -----	3
Figura 3: Fases da abordagem não-paramétrica. Fonte: autor. -----	22
Figura 4: Fases da modelagem estocástica. Fonte: autor. -----	24
Figura 5: Fluxograma referente à entrada de dados no programa construído na plataforma do software MATLAB®. Fonte: autor.-----	25
Figura 6: Fluxograma da análise de resultados. Fonte: autor -----	29
Figura 7: Fluxograma da análise de resultados. Fonte: autor -----	30
Figura 8 – Conceitos de exatidão e precisão. Fonte: Batista (2011). -----	33
Figura 9 – Casos de precisão/imprecisão e exatidão/inexatidão. Fonte: Cabral (2004).-----	34
Figura 10 – FDPs correspondentes a cada caso da Figura 9. Fonte: Cabral (2004). -----	34
Figura 11 – Representação da incerteza em diferentes distribuições contínuas de probabilidade. Fonte: Mattos e Veiga (2002). -----	35
Figura 12: Nomenclatura para os tipos de incertezas. Fonte: autor. -----	37
Figura 13: Tipos de incertezas em modelos estruturais dinâmicos e suas correspondentes abordagens de cálculo. Fonte: autor. -----	41
Figura 14: Desenho representativo da construção do modelo médio. Fonte: autor.-----	45
Figura 15: Desenho representativo do experimento. Fonte: autor.-----	46
Figura 16: Valor da entropia de uma variável aleatória contínua em função da sua distribuição de probabilidade para valores diferentes de k . (a) $k = 1$. (b) $k = 1/\ln 2$. Fonte: autor.-----	56
Figura 17: O CPD e suas principais propriedades. Fonte: autor. -----	73
Figura 18: Modelos a serem considerados nas análises. Fonte: autor. -----	108
Figura 19: Etapas para a avaliação da confiabilidade de um modelo numérico. Fonte: autor. -----	110
Figura 20: Visão geral do sistema de viga fixa-fixa. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).-----	113

Figura 21: Variação na localização das 12 massas. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).-----	114
Figura 22: Massas posicionadas em localizações aleatórias da viga. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).-----	114
Figura 23: Utilização do shaker que age como um martelo de impacto. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).-----	115
Figura 24: FRF do modelo médio e modelo base para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.-----	117
Figura 25: FRF do modelo médio e modelo base para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.-----	117
Figura 26: FRF do modelo médio e modelo base para a faixa de média frequência. Fonte: autor.-----	118
Figura 27: FRF do modelo médio e modelo base para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.-----	118
Figura 28: FRF do modelo base e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.-----	119
Figura 29: FRF do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.-----	120
Figura 30: FRF do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.-----	120
Figura 31: FRF do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.-----	121
Figura 32: FRF do modelo médio e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.-----	122
Figura 33: FRF do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.-----	122
Figura 34: FRF do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.-----	123
Figura 35: FRF do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.-----	123
Figura 36: FRF do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.-----	124

Figura 37: FRF do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.	124
Figura 38: FRF do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.	125
Figura 39: FRF do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.	125
Figura 40: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,01$. Fonte: autor.	126
Figura 41: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. ---	127
Figura 42: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. --	127
Figura 43: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. -	128
Figura 44: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. ----	128
Figura 45: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,05$. Fonte: autor.	129
Figura 46: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. ---	129
Figura 47: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. --	130
Figura 48: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. -	130
Figura 49: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. ----	131
Figura 50: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,1$. Fonte: autor.	132
Figura 51: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ----	132
Figura 52: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ----	133
Figura 53: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ---	133
Figura 54: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. -----	134
Figura 55: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,2$. Fonte: autor.	135
Figura 56: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. ----	135
Figura 57: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. ----	136
Figura 58: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. ---	136
Figura 59: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. -----	137
Figura 60: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,5$. Fonte: autor.	138
Figura 61: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. ----	138
Figura 62: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. ----	139
Figura 63: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. ---	139
Figura 64: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. -----	140
Figura 65: Visão geral do sistema de viga fixa-livre. Fonte: autor.	142
Figura 66: Visão geral do sistema de viga fixa-livre. Fonte: autor.	142

Figura 67: Variação na localização das 12 massas. Fonte: autor. -----	143
Figura 68: Massas posicionadas em localizações aleatórias da viga. Fonte: autor. -----	143
Figura 69: Marca feita na viga para excitação com o martelo de impacto. Fonte: autor. -----	144
Figura 70: Simulação numérica da amplitude para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.	146
Figura 71: Simulação numérica da amplitude para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor. -----	146
Figura 72: Simulação numérica da amplitude para a faixa de média frequência. Fonte: autor. -----	147
Figura 73: Simulação numérica da amplitude para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.	147
Figura 74: Simulação numérica da amplitude para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.	148
Figura 75: Simulação numérica da amplitude para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor. -----	149
Figura 76: Simulação numérica da amplitude para a faixa de média frequência. Fonte: autor. -----	149
Figura 77: Simulação numérica da amplitude para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.	150
Figura 78: Resultados do modelo médio e do conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor. -----	151
Figura 79: Resultados simulados e experimentais para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor. -----	151
Figura 80: Resultados simulados e experimentais para a faixa de média frequência. Fonte: autor. -----	152
Figura 81: Resultados simulados e experimentais para a faixa de alta frequência. Fonte: autor. -----	152
Figura 82: Resultados simulados e experimentais para toda a faixa de frequência. Fonte: autor. -----	153
Figura 83: Resultados simulados e experimentais para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor. -----	154
Figura 84: Resultados simulados e experimentais para a faixa de média frequência. Fonte: autor. -----	154
Figura 85: Resultados simulados e experimentais para a faixa de alta frequência. Fonte: autor. -----	155
Figura 86: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,01$. Fonte: autor. -----	156
Figura 87: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. ---	156

Figura 88: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. --	157
Figura 89: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. -	158
Figura 90: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor. ----	159
Figura 91: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,05$. Fonte: autor. -----	160
Figura 92: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. ---	160
Figura 93: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. --	161
Figura 94: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. -	162
Figura 95: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor. ----	163
Figura 96: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,1$. Fonte: autor. -----	164
Figura 97: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ----	164
Figura 98: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ----	165
Figura 99: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ---	166
Figura 100: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor. ----	167
Figura 101: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,2$. Fonte: autor. -----	168
Figura 102: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. ----	168
Figura 103: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. --	169
Figura 104: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. -	170
Figura 105: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor. ----	171
Figura 106: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,5$. Fonte: autor. -----	172
Figura 107: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. ----	172
Figura 108: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. --	173
Figura 109: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. -	174
Figura 110: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor. ----	175

Lista de Tabelas

Tabela 1: Propriedades materiais e geométricas da viga fixa-fixa. -----	112
Tabela 2: Propriedades materiais e geométricas da viga fixa-livre. -----	141
Tabela 3: Frequências referentes à Figura 88. -----	157
Tabela 4: Frequências referentes à Figura 89. -----	158
Tabela 5: Frequências referentes à Figura 90. -----	159
Tabela 6: Frequências referentes à Figura 93. -----	161
Tabela 7: Frequências referentes à Figura 94. -----	162
Tabela 8: Frequências referentes à Figura 95. -----	163
Tabela 9: Frequências referentes à Figura 98. -----	165
Tabela 10: Frequências referentes à Figura 99. -----	166
Tabela 11: Frequências referentes à Figura 100. -----	167
Tabela 12: Frequências referentes à Figura 103. -----	169
Tabela 13: Frequências referentes à Figura 104. -----	170
Tabela 14: Frequências referentes à Figura 105. -----	171
Tabela 15: Frequências referentes à Figura 108. -----	173
Tabela 16: Frequências referentes à Figura 109. -----	174
Tabela 17: Frequências referentes à Figura 110. -----	175

Simbologia

Letras Latinas

\mathbf{C}	matriz aleatória de amortecimento	
$\bar{\mathbf{C}}$	matriz média de amortecimento	
$D(\omega)$	matriz de rigidez dinâmica	
$E[\cdot]$	valor esperado de $[\cdot]$	
$\bar{f}(\bullet)$	força média de (\bullet)	N
\mathbf{G}_i	Símbolo para o sistema de matrizes aleatórias: $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$	
$\bar{\mathbf{G}}$	Símbolo para o sistema de matrizes médias: $\bar{\mathbf{G}} \equiv \{\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{K}}\}$	
H	Medida da entropia de Shannon	
$\mathbf{H}(\omega)$	Função Resposta em Frequência (<i>FRF</i>)	
i	contador	
I	matriz identidade	
k	constante positiva	
\mathbf{K}	matriz aleatória de rigidez	
$\bar{\mathbf{K}}$	matriz média de rigidez	
$\ln(\bullet)$	logaritmo natural de (\bullet)	

\mathbf{M}	matriz aleatória de massa	
$\bar{\mathbf{M}}$	matriz média de massa	
$M_n^+(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas, reais, simétricas e positiva-definidas	
$M_{n,n}(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais $n \times n$	
$M_n(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas	
$M_n^S(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais quadradas simétricas	
$M_n^{+0}(\mathbb{R})$	conjunto de matrizes reais simétricas semi-positiva-definidas	
n	dimensão da matriz ou número de graus de liberdade do sistema	
nep	número de eventos possíveis	
\mathbf{P}	matriz ortogonal que contém os autovetores de \mathbf{G}	
$[\mathbf{p}_{(\mathbf{G})}(\bullet)]_i$	vetor aleatório das <i>FDPs</i> de $(\bullet)_i$	
$S(\bullet)$	entropia de Shannon	
$tr(\bullet)$	traço de (\bullet)	
$\mathbf{u}(\bullet)$	vetor de deslocamento em função de (\bullet)	m
$\dot{\mathbf{u}}(\bullet)$	vetor de velocidade em função de (\bullet)	m/s
$\ddot{\mathbf{u}}(\bullet)$	vetor de aceleração em função de (\bullet)	m/s^2
x_i	variável aleatório	
z	número imaginário	

Letras Gregas

λ_n	autovalores de \mathbf{G}	
$\nu_{\mathbf{G}}$	ordem do momento inverso de \mathbf{G}	
ω_{min}	frequência natural angular mínima	<i>rad/s</i>
ω_{max}	frequência natural angular máxima	<i>rad/s</i>
$\delta_{(\bullet)}$	desvio padrão normalizado medido de (\bullet)	
\mathbf{v}_n	autovetor de \mathbf{G}	

Sobrescritos

-1	inversa de uma matriz
me	modelo experimental
mm	modelo médio
t	transposto de uma matriz

Subscritos

\min mínimo

\max máximo

Abreviaturas

$\det[\bullet]$ determinante de $[\bullet]$

$\ln[\bullet]$ logaritmo natural de $[\bullet]$

$\log[\bullet]$ logaritmo decimal de $[\bullet]$

$\text{tr}(\bullet)$ traço da matriz (\bullet)

Operadores

$\|\bullet\|$ norma de uma matriz (\bullet)

$\|\bullet\|_F$ norma de Frobenius de uma matriz (\bullet)

$|\bullet|$ Determinante de (\bullet)

Siglas

<i>CPD</i>	conjunto positivo definido
<i>EF</i>	elementos finitos
<i>FDP</i>	função densidade de probabilidade
<i>FRF</i>	função resposta em frequência
<i>gdl</i>	graus de liberdade
<i>GOE</i>	conjunto ortogonal gaussiano
<i>IC</i>	intervalo de confiança
<i>IEM</i>	Instituto de Engenharia Mecânica
<i>MEF</i>	método dos elementos finitos
<i>MEFE</i>	método dos elementos finitos estocásticos
<i>MME</i>	método da máxima entropia
<i>PME</i>	princípio da máxima entropia
<i>SMC</i>	simulações de Monte Carlo
<i>TMA</i>	teoria da matriz aleatória
<i>UQ</i>	uncertainty quantification

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A quantificação de incertezas tem sido alvo de constantes pesquisas devido a sua importância em diversas áreas na engenharia, principalmente ao se tratar de projetos de sistemas complexos como no caso de aeronaves, automóveis, navios, dentre outros. Este interesse decorre do fato de que incertezas são inevitáveis em projetos de engenharia e o que se procura é quantificá-las para que seja possível tomar melhores decisões com níveis conhecidos de confiança e, para este fim, métodos de quantificação são estudados.

Sendo assim, o modelo concebido por engenheiros projetistas, descrito como modelo projetado na Figura 1, ao ser construído (tornando-se assim o modelo experimental), deve corresponder às expectativas do engenheiro em termos de funcionalidade e performance para o qual foi desenvolvido. Entretanto, a presença de incertezas não permite que tal propósito seja alcançado satisfatoriamente, já que o processo de se construir um sistema tendo por base um projeto desenvolvido leva consigo incertezas que têm suas fontes, por exemplo, em parâmetros geométricos, nas propriedades dos materiais, nos modelos considerados (barras, vigas, placas, cascas, com e sem amortecimento, vinculações, carregamentos, não-linearidades e outros), enfim, são sobretudo incertezas que resultam da falta de conhecimento sobre o sistema em estudo.

Neste contexto, vê-se a necessidade de aumentar o conhecimento sobre o sistema e, para isso, testes experimentais devem ser realizados na tentativa de se conseguir informações sobre ele. No entanto, sistemas reais, sobretudo os mais complexos, são difíceis e caros de serem ensaiados.

Segundo Soize (2005b), “para sistemas reais complexos, apenas um sistema manufaturado pode ser considerado como disponível para se realizar experimentos de modo a reduzir o nível de incertezas”. Além disso, mesmo que tais experimentos sejam possíveis de serem realizados, apenas algumas informações ou conclusões podem ser deles deduzidas. Diante disso, a solução portanto, é fazer-se uso de modelos numéricos (também chamados de modelos computacionais ou modelos médios) construídos a partir dos dados do modelo projetado. Com isso, os testes que antes seriam realizados em laboratório passam agora a serem realizados computacionalmente.

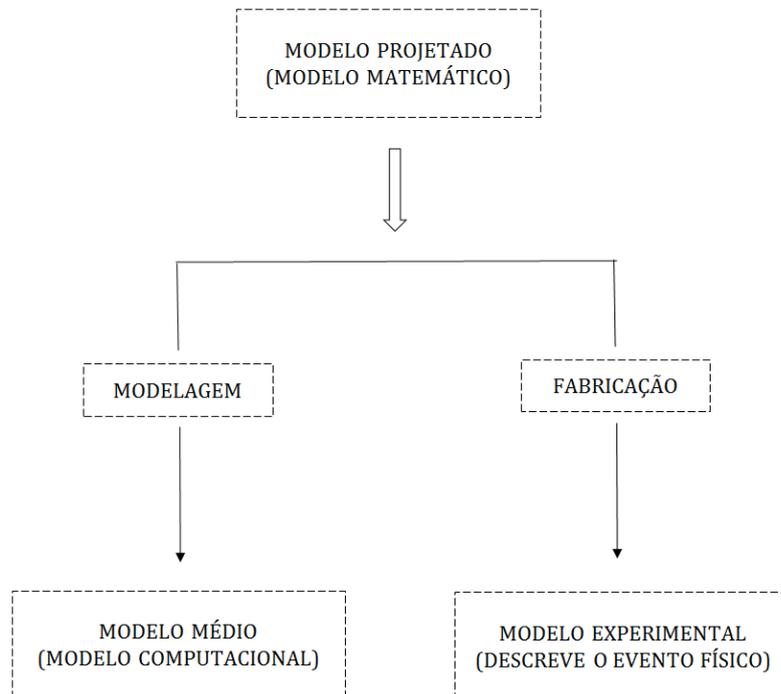


Figura 1: Representação do modelo projetado, modelo médio e modelo experimental. Fonte: autor.

Em suma, modelos matemáticos computacionais (construído pelo *MEF*) são construídos para que seja possível simular situações reais em softwares adequados considerando que tal simulação possa substituir experimentos reais que seriam realizados por modelos experimentais. Para que isto seja possível, é preciso que o modelo médio possa representar com fidelidade máxima o modelo real de forma que conduza a análises e proporcione conclusões confiáveis. No entanto, esta transição entre o modelo projetado reproduzido num modelo de *EF* também carrega incertezas. Então, devido à presença dessas incertezas, o modelo médio, em geral, apresenta divergências quando comparado ao modelo experimental, não podendo, portanto, substituí-lo em estudos computacionais.

Sendo assim, o que se faz para corrigi-lo e deixá-lo uma representação fiel do modelo experimental, é quantificar suas incertezas. Tal processo pode ser visualizado de forma esquemática

na Figura 2 e ocorre portanto, na tentativa de se aumentar a confiabilidade do modelo médio com relação ao modelo experimental.

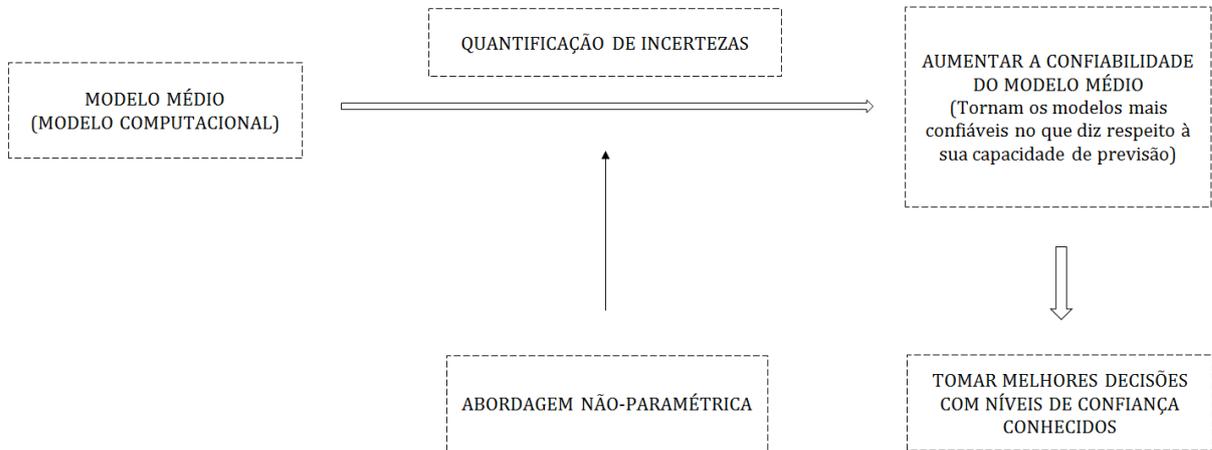


Figura 2: Gráfico representativo do aumento da confiabilidade do modelo médio. Fonte: autor.

Assim sendo, em especial no caso de projetos complexos, como por exemplo, aeronaves, espaçonaves, automóveis dentre outros, que necessitam de vários testes e avaliações antes de serem finalizados e aprovados pelo projetista, é possível utilizar o modelo médio para tais testes e avaliações computacionais ao invés de fabricar protótipos de estruturas complexas e caras e que, por vezes, tornam o processo inviável.

É por este motivo que, na tentativa de validar o modelo médio para tais estudos, a quantificação de incertezas é indispensável. Para isto faz-se uso da Abordagem não-paramétrica, que será apresentada em detalhes nesta tese.

1.1 OBJETIVO DA PESQUISA

O objetivo principal desta tese consiste em detalhar o arcabolo teórico da abordagem não-paramétrica, aplicando-a em exemplos experimentais de quantificação de incertezas em modelos estruturais dinâmicos lineares com n graus de liberdade.

Além disso, um segundo objetivo será o desenvolvimento matemático detalhado para a obtenção da função densidade de probabilidade (*FDP*) apropriada para a propagação da incerteza de modelo nas matrizes aleatórias consideradas. Tal desenvolvimento corresponde à fase de modelagem estocástica da abordagem não-paramétrica aplicada para a quantificação de incertezas.

Por último, um estudo a respeito da importância de calcular o parâmetro de dispersão será realizado. Tal parâmetro é a variável que carrega a informação da incerteza no modelo. Alguns autores propõem que ele possa ser adotado segundo a experiência do analista, entretanto será possível verificar nas análises propostas que este parâmetro deve ser calculado corretamente. Isto é necessário para que sejam obtidas respostas de quantificação adequadas à realidade do sistema estudado e para que ele seja um fator que contribuía para o aumento da confiabilidade do modelo médio ao invés de tornar as análises tendenciosas.

1.2 MOTIVAÇÃO

As incertezas são inevitáveis na modelagem de sistemas dinâmicos, principalmente os mais complexos. Estes, em especial com relação à incerteza que vem devido à falta de conhecimento do sistema, deve ser testado para que detalhes de complexidade possam ser revelados e analisados e se adquira o conhecimento sobre o sistema tornando-o confiável em termos técnicos e de segurança. Para o cumprimento de tal propósito, faz-se necessária a construção de protótipos para ensaios experimentais. No entanto, testes em laboratório são muitas vezes proibitivos já que protótipos são demasiados caros, principalmente ao se tratar de estruturas complexas. Sendo assim, a princípio se tem uma única amostra. Disso resulta duas consequências principais. A primeira é que com um único protótipo é possível se obter poucas informações a respeito do sistema. Já a segunda consequência se refere ao número de amostras suficientes para que os resultados dos ensaios sejam confiáveis, o que certamente não ocorrerá ao se fazer uso de uma única amostra. Juntamente a isto, a quantidade de amostras suficientes a serem construídas e testadas tornaria os estudos inviáveis.

Sendo assim, a solução para o problema portanto, é a substituição dos testes experimentais pelos testes computacionais, em que o modelo experimental em estudo é substituído por um modelo numérico (também chamado de modelo computacional ou modelo médio) de alta confiabilidade. Nesse contexto, a quantificação da incerteza é indispensável pois, desempenha um papel chave no estabelecimento de uma maior confiabilidade do modelo médio. Neste ponto está a motivação para este trabalho que tem o objetivo principal de mostrar o detalhamento de um método de quantificação de incertezas de modelo que ao ser aplicado corretamente tem grandes chances de viabilizar projetos complexos a serem modelados, testados e analisados computacionalmente ao invés de se proceder a testes experimentais por vezes dispendiosos ou até mesmo inviáveis.

1.3 CONTRIBUIÇÃO

A contribuição desta tese está em apresentar o arcabouço teórico detalhado da abordagem não-paramétrica, método essencial para quantificação das incertezas, em especial incertezas de modelagem, em modelos estruturais dinâmicos lineares com n *gdl*. Tal estudo inclui explicações sobre os fundamentos, princípios e limitações do método, além de um maior detalhamento na obtenção das equações (detalhamento este não encontrado na literatura) sobretudo da fase correspondente à Modelagem Estocástica, que corresponde à principal etapa da aplicação da abordagem não-paramétrica em que se obtém a *FDP* (Função Densidade de Probabilidade) adequada para as variáveis aleatórias consideradas. Além do mais, exemplos reais são apresentados de forma a se ter um passo-a-passo na aplicação do método.

Somando-se a isto, é também uma importante contribuição o desenvolvimento de um programa computacional que quantifica a incerteza de modelagem de sistemas dinâmicos ao se propagar a incerteza na matriz aleatória de massa do sistema.

1.4 CONTEÚDO

Este trabalho está estruturado em dez capítulos elaborados e organizados de maneira a formar uma sequência lógica que proporcione um claro entendimento e aprofundamento do processo de concepção, desenvolvimento e conclusão da abordagem não-paramétrica tendo por base sobretudo os estudos de Shannon (1948), Jaynes (1957a até 1995), Soize (1998 até 2005) e Adhikari (2006 até 2010).

O Capítulo 1 introduz o assunto desta tese de forma global além de incluir também os objetivos, a motivação e a contribuição deste trabalho.

No Capítulo 2 é realizada uma revisão da literatura referente à quantificação de incertezas em modelos dinâmicos por meio da abordagem não-paramétrica.

Já no Capítulo 3 são apresentadas as fases da abordagem não-paramétrica. A partir disso é estabelecida uma linha de estudos lógica com cálculos consecutivos que contribuem para o bom entendimento e aplicação da abordagem.

No Capítulo 4 os fundamentos da abordagem não-paramétrica são colocados. Algumas definições e conceitos importantes são apresentados e explicados para melhor compreensão e aplicação da abordagem, em especial no que diz respeito aos tipos de modelagem (do modelo projetado, do modelo médio e do modelo experimental) que se tem, como eles se relacionam e como são incorporados na abordagem não-paramétrica.

O Capítulo 5 refere-se aos princípios para a quantificação da incerteza de modelo propostos por Shannon e Jaynes desde demonstrações sobre como Shannon chegou à fórmula matemática da entropia até como representar da melhor maneira as informações disponíveis para a solução do problema proposto por Jaynes.

O Capítulo 6 define o Conjunto Positivo-Definido (*CPD*) e mostra suas propriedades. Foi preparado a fim de apresentar as limitações da abordagem não-paramétrica. As matrizes aleatórias do sistema dinâmico devem pertencer a este conjunto para que seja possível a aplicação do método.

No Capítulo 7 as restrições do problema de otimização obtidas por meio de informações prévias tomam suas formas definitivas e o problema de otimização final, juntamente com suas restrições.

O Capítulo 8 resolve o problema de otimização obtido no Capítulo 7 pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

No Capítulo 9, dois estudos de caso são apresentados e um passo-a-passo dos cálculos é mostrado desde a visualização da existência da incerteza de modelagem e a necessidade em quantificá-la até sua quantificação pela aplicação da abordagem não-paramétrica por meio de um programa elaborado na plataforma MATLAB®.

Por fim, o Capítulo 10 trata das conclusões referentes a este trabalho juntamente com as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

REVISÃO DA LITERATURA

A necessidade de métodos de quantificação de incertezas de modelagem com o objetivo de se proporcionar a alta confiabilidade de modelos de sistemas dinâmicos estruturais fez surgirem vários estudos a respeito da abordagem paramétrica. Sendo assim, hoje em dia, tal abordagem já está consolidada para a quantificação de incertezas nos dados do modelo.

Porém, a falta de informações a priori sobre o sistema em estudo e a necessidade de quantificação de incertezas no modelo construído pelo *MEF* possibilitou o desenvolvimento da abordagem não-paramétrica proposta inicialmente por Cristian Soize (2000).

Soize (2000), (2001) e (2003a) trabalhou inicialmente com a apresentação dessa nova abordagem para a construção de um método que quantifica incertezas nas matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez globais para faixas de baixa frequência de vibração que varia entre 0 a 120 Hz. Esse método é utilizado para construir um modelo probabilístico para matrizes aleatórias reais, simétricas e positivas-definidas por meio do princípio da otimização da entropia. É apresentado um modelo adequado de matriz reduzida para as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, nas quais também se propagam as incertezas de modelo. Além disso, as propriedades fundamentais relacionadas à convergência da solução estocástica em relação à dimensão do modelo de matriz reduzida aleatória foram analisadas. Isso comprova a consistência do método e permite que os parâmetros da distribuição encontrada sejam

claramente definidos. Ademais, valores limites (mínimo e máximo) para os parâmetros de dispersão foram determinados, dessa maneira foi possível deixá-lo fixo e independente da ordem das matrizes. Fez-se ainda uma comparação entre o conjunto positivo-definido (*CPD*), constituído por matrizes aleatórias reais, simétricas e positiva-definidas e o conjunto ortogonal gaussiano, chamado pelo autor de *GOE*, em que se têm matrizes aleatórias reais e simétricas. Neste caso, somente a matriz de rigidez é considerada aleatória, já que o *GOE* não permite a modelagem de sistemas dinâmicos amortecidos como no caso do *CPD*. O que se pode dizer com relação aos resultados é que o modelo probabilístico obtido está muito bem adaptado com os cálculos algébricos e com as *SMC* na obtenção de respostas de sistemas dinâmicos lineares. Acrescenta-se também que a abordagem não-paramétrica é útil quando o número de parâmetros incertos é alto ou quando é difícil construir o modelo probabilístico para o conjunto de parâmetros considerados. Além disso, tais resultados possibilitam e facilitam bastante a quantificação e propagação das incertezas em softwares adequados, pois já se tem a correta *FDP* para as simulações, a qual necessita, como informações disponíveis, apenas da matriz reduzida média, que pode ser obtida deterministicamente, e do parâmetro de dispersão relacionado à matriz aleatória cujo valor no intervalo entre zero e um pode ser fixo pelo analista. O autor ainda chama a atenção para o fato de que este parâmetro de dispersão é um parâmetro global que resulta da experiência do analista. Por fim, na análise correspondente ao *CPD* e ao *GOE*, os resultados mostraram que o primeiro é mais adequado para o modelo não-paramétrico de incertezas aleatórias em análise de vibração de baixas frequências, principalmente no que se refere a valores mais elevados do parâmetro de dispersão.

Em outro artigo, Soize (2003b), agora com estudos para faixas de média frequência de vibração, considerou a abordagem não-paramétrica proposta em Soize (2000) e Soize (2001) – os quais consideram regiões de baixa frequência – combinada com o modelo de matriz reduzida para faixas de média frequência (que varia, neste artigo, de 1.600 a 1.800 *Hz*), desenvolvido em Soize (1998). O modelo de sistema dinâmico não-homogêneo estudado pelo autor constitui uma placa retangular fina homogênea e isotrópica com duas massas e duas molas anexadas em sua superfície. Os resultados mostram que, para a faixa de média frequência, os efeitos da incerteza no amortecimento são menores do que os efeitos das incertezas nas massas e rigidezes. Mostram também que os efeitos das incertezas nas rigidezes são equivalentes aos efeitos das incertezas nas massas. E como resultado final, pode-se concluir que a nova abordagem não-paramétrica com a nova matriz reduzida proposta para quantificação de incertezas em faixas de média frequência de vibração constitui um modelo adequado para este tipo de cálculo.

Numa tentativa de realizar uma validação experimental para a abordagem não-paramétrica já proposta, Chebli & Soize (2004) desenvolvem um estudo que leva em conta incertezas aleatórias não-homogêneas, já que é o que se tem em sistemas dinâmicos complexos reais. O sistema estudado é constituído por duas placas retangulares conectadas por uma ligação complexa (2 placas com 40 parafusos), totalizando-se três subestruturas (ou subdomínios). O que caracteriza a incerteza não-homogênea é que o nível de incerteza é diferente de uma subestrutura para outra. Pode-se dizer que, no caso da ligação complexa, tem-se uma incerteza epistêmica alta, portanto, é importante calculá-la, e no caso das duas placas simples, a incerteza é menor. No modelo numérico médio construído por modelagem em *EF*, a incerteza de modelagem é induzida no modelo ao se considerar uma placa contínua ortotrópica simples com espessura constante em substituição da conexão complexa. Numa comparação do modelo médio com o experimental considerando-se uma faixa de frequência de 20 a 2.000 Hz pode-se notar que a teoria proposta é eficiente e prevê uma região de confiança a qual cresce com o aumento da frequência. Houve ainda a constatação de que em extensas faixas de baixa frequência, a utilização do modelo probabilístico não-paramétrico permite a previsão de respostas dinâmicas de estruturas, incluindo conexões complexas, por meio da utilização de modelos mecânicos médios usuais de conexão.

Soize (2005a) trata da aplicação da abordagem não-paramétrica para quantificação de incerteza de dados e epistêmica em sistemas dinâmicos lineares e não-lineares. O sistema dinâmico estocástico linear é representado por duas placas com extremidades livres, isotrópicas e homogêneas unidas por uma articulação complexa (duas placas e 20 parafusos). A incerteza aqui é caracterizada por ser não-homogênea, caso este similar ao estudado em Chebli & Soize (2004). Já o sistema não-linear é constituído por uma placa fina com três lados simplesmente apoiados com acréscimo de algumas não linearidades, no caso, uma massa e uma mola posicionados em sua superfície. Dos estudos realizados chegou-se a algumas conclusões principias. A primeira é que a abordagem paramétrica é útil quando o número de parâmetros incertos não é muito grande e quando o modelo probabilístico pode ser construído para o conjunto de parâmetros considerados. Já a abordagem não-paramétrica é adequada quando o número de parâmetros incertos é alto e/ou quando o modelo probabilístico é difícil de construir com o conjunto de parâmetros considerados. Outro fato é que a modelagem paramétrica não permite levar em conta as incertezas epistêmicas, porque esta abordagem está associada com um modelo fixo que exhibe alguns parâmetros, já a não-paramétrica sim. Além disso, sabe-se que na abordagem não-paramétrica a distribuição de probabilidade de cada matriz aleatória

global depende apenas da disponibilidade de dois dados: a matriz média global associada com o modelo de elementos finitos médio, e o parâmetro escalar de dispersão que carrega as informações sobre a incerteza no sistema dinâmico estudado. Este é um parâmetro global e resulta da experiência do analista ou deve ser identificado por ele. Seu valor deve ser fixo dentro do intervalo $[0,1]$ para que se possa dar um nível de dispersão à matriz aleatória global. Estudos relacionados à metodologia para identificação experimental do parâmetro de dispersão também foram realizados. A identificação usa, além dos dados experimentais, dois estimadores. O primeiro é chamado estimador natural, que vem da própria abordagem não-paramétrica, e que é mais fácil de se aplicar. O segundo é construído por meio do método da máxima verossimilhança e é o mais eficiente.

Soize (2005b) tenta mostrar uma visão geral da abordagem não-paramétrica desenvolvida pelo autor. Conceitos fundamentais, como modelos reais, projetados e médios, são introduzidos com uma linguagem mais simples e de fácil entendimento, passando pela estimação dos parâmetros de dispersão, critérios de convergência e um simples exemplo numérico. São realizadas simulações para um modelo de viga de *Euler-Bernoulli* e experimentos para a faixa de frequência de 0 a 1.000 Hz. Com os resultados obtidos mais uma vez a teoria é validada para a aplicação da abordagem não-paramétrica na quantificação de incertezas em modelos estruturais dinâmicos.

Foram realizados também estudos na área aeroespacial envolvendo quantificação de incertezas, tanto paramétricas quanto não-paramétricas, numa faixa de frequência de 0 a 100 Hz. Um deles foi feito por Capiez-Lernout, *et al.* (2006), no qual o objetivo é analisar o papel desempenhado pelas incertezas de dados e epistêmicas na resposta dinâmica de sistemas mecânicos complexos considerando faixas de baixa frequência de vibração. Dois sistemas foram analisados. O primeiro é composto por um satélite livre e o segundo corresponde ao satélite acoplado em seu lançador. O mesmo nível de dispersão foi introduzido nas duas abordagens. Foram obtidos resultados relativos ao modelo médio de *EF*, ao conjunto médio da resposta do modelo estocástico e ao *IC* de 96%. Chegou-se à conclusão geral de que as abordagens paramétrica e não-paramétrica são complementares. A paramétrica estima a robustez com relação às incertezas de dados, já no que diz respeito à incerteza de modelo, as duas abordagens são necessárias para estimar a robustez do sistema estudado.

Adhikari (2006), ao invés de estudos em faixas separadas de frequência de vibração, propõe o desenvolvimento de uma ferramenta geral de quantificação de incerteza não-paramétrica para sistemas dinâmicos estruturais baseada no *PME* e na *TMA* que possa ser utilizada para análise em toda a faixa de frequência de vibração que, neste estudo, variou de 0 a 1.200 *Hz*. Tal estudo é importante porque na maioria das vezes não se tem nenhuma informação disponível sobre o sistema, o que torna a abordagem não-paramétrica possível de ser aplicada. Além do mais, a única informação que deve ser calculada previamente é a matriz média do sistema. Esta matriz média, juntamente com o seu parâmetro de dispersão, definem a sua aleatoriedade. Uma placa de aço em balanço é carregada com trinta pequenas massas em posições aleatórias, que correspondem a um total de 0,15% da massa da placa, isso caracteriza a incerteza na matriz massa do sistema. A *FRF* do modelo médio, que corresponde ao resultado determinístico, foi obtida pelo *MEF*. O parâmetro de dispersão da matriz massa é de 2,0449. É oportuno lembrar neste momento que este parâmetro é a única informação que se tem sobre a incerteza epistêmica no sistema. As *SMC* foram realizadas para 500 amostras, das quais obteve-se a *FRF* do conjunto médio e também as *FRFs* do *IC* de 95% (curvas de 5 e 95%). O principal resultado desse estudo é que se a única informação que se tem para proceder à análise for o valor médio do sistema de matrizes, então as matrizes seguem a distribuição *Wishart* com parâmetros apropriados. No entanto, vale ressaltar que, segundo o autor, não é muito óbvio que a *TMA* deva ser formulada com relação à \mathbf{G} ou \mathbf{G}^{-1} ou qualquer outra distribuição de \mathbf{G} , porém, dependendo da escolha entre elas (informação disponível), as distribuições resultantes podem se diferenciar drasticamente uma da outra. Logo, foi necessária a obtenção de parâmetros ótimos para a distribuição *Wishart* de forma que $E[\mathbf{G}] \sim \bar{\mathbf{G}}$ e $E[\mathbf{G}^{-1}] \sim (\bar{\mathbf{G}})^{-1}$, ou seja, a média da matriz e sua inversa devem produzir desvios mínimos com relação aos seus valores determinísticos. Dessa maneira evita-se escolhas tendenciosas na obtenção da *FDP* apropriada. Ademais, o autor menciona que o estudo sobre a *Wishart* é importante no âmbito da quantificação de incertezas já que a análise se torna simples com esta distribuição. Além disso, a ferramenta da quantificação e propagação desenvolvida nesse artigo não requer informações explícitas a respeito da natureza da incerteza no sistema.

Por outro lado, Sampaio, Ritto & Cataldo (2007) escreveram um artigo com o objetivo de comparar as duas estratégias de modelagem de incertezas, paramétrica e não-paramétrica, por meio do estudo de um sistema dinâmico massa-mola de 2 *gdl*. A faixa de frequência trabalhada foi de 0 a 7 *Hz*. As incertezas foram consideradas somente na rigidez da mola, sendo

que na primeira abordagem foram inseridas em cada rigidez de mola, caracterizando a variável aleatória escalar. O modelo probabilístico neste caso é construído para cada variável aleatória associada com cada rigidez de mola. Já para a segunda abordagem as incertezas são consideradas de uma forma global, isto é, o modelo probabilístico é construído para a matriz rigidez e então se tem uma variável aleatória matricial. Neste caso a matriz de rigidez é globalmente considerada como incerta. Com o uso somente de informações disponíveis, a *FDP* é deduzida do *PME* para as duas abordagens. A análise dos resultados mostra que o método paramétrico é bom para modelar incertezas de dados e o não-paramétrico é capaz de considerar incertezas de modelo. Além disso, o espaço de eventos resultante da abordagem paramétrica é menor que o espaço de eventos resultante da abordagem não-paramétrica, o que significa que a última abrange mais casos de incertezas. Por fim, nota-se que a escolha do mesmo parâmetro de dispersão para as duas abordagens não mostrou resultados imediatos na comparação entre elas. Não se tem uma clareza de que a abordagem não-paramétrica englobe a paramétrica quando se considera um único parâmetro de dispersão em ambas as abordagens.

Entretanto, Adhikari (2007b) propôs investigar a possibilidade de se trabalhar com a *TMA* como uma ferramenta de modelagem unificada de incertezas, que leve em conta tanto as paramétricas quanto às não-paramétricas e que seja válida para quantificação em problemas de vibração em toda a faixa de frequência, neste artigo considerada de 0 a 8.000 *Hz*. Tal estudo considerou a distribuição *Wishart* com parâmetros ótimos apropriados obtidos anteriormente em Adhikari (2006). As simulações realizadas contaram com um sistema de placa de aço em balanço com ranhura e modelada com 702 *gdl*. Para o cálculo paramétrico foram obtidos resultados pelo *MEFE*. Já para o cálculo não-paramétrico usou-se a distribuição obtida pela aplicação da *TMA*. 500 simulações foram realizadas na tentativa de se comparar resultados das duas modelagem (*MEFE* e *TMA*). Percebe-se que a diferença entre os dois métodos está no montante de informações que se tem sobre a incerteza e não em como a incerteza é propagada usando a mesma informação. A matriz aleatória para o método proposto não requer informações explícitas referentes a descrições detalhadas das incertezas do sistema. Contudo, conclui-se que a matriz *Wishart* pode ser usada como uma ferramenta consistente e unificada de quantificação de incerteza válida para regiões de média e alta frequências.

Contudo, para novos avanços, se fez necessário obter maior conhecimento sobre a natureza das incertezas em toda a banda de frequência, que nesse artigo corresponde à faixa de 0 a 4.200 *Hz*. Por isso, Adhikari, Friswell, & Lonkar (2007a) realizaram dois experimentos. No

primeiro, o sistema dinâmico é representado por uma viga *Euler-Bernoulli* fixa-fixa de aço (régua) cuja incerteza epistêmica na matriz massa resulta devido à presença de 12 massas (ímãs) posicionadas aleatoriamente sobre a viga. Uma distribuição uniforme com 100 amostras gerou a localização das massas na régua. O outro ensaio tem por sistema dinâmico uma placa de aço em balanço com 10 osciladores massa-mola posicionados aleatoriamente. Isto permite a simulação de incertezas dinâmicas não modeladas. A incerteza neste caso é propagada nas matrizes de massa e rigidez. Um fato muito importante aqui é que os experimentos são realizados de forma que seja possível se conhecer a fonte da incerteza, que no caso é o posicionamento aleatório dos ímãs no caso da viga e dos osciladores no caso da placa. Para isso alguns cuidados são tomados. Primeiramente, a viga é uma régua, dessa forma se garante que os ímãs possam ser facilmente posicionados em localizações pré-determinadas, isso evita erros de posicionamento (medidas de posicionamento) e garante que as incertezas sejam geradas unicamente devido à localização aleatória dos ímãs e dos osciladores. Em segundo lugar, é utilizado um *shaker* para excitação da estrutura ao invés de um martelo de impacto. Isso se justifica pelo fato de que no caso do martelo é difícil garantir que o impacto ocorra exatamente na mesma localização com a mesma força em cada uma das amostras, dessa forma, a utilização do *shaker* elimina as incertezas que surgem das forças de entrada. Uma terceira medida de controle se faz com a utilização de ímãs facilitando assim o posicionamento das massas na viga e a fixação dos osciladores na placa. Tanto ao se considerar a viga quanto a placa fizeram-se 100 experimentos. As respostas são obtidas por meio da instalação de três acelerômetros no caso da viga e seis no caso da placa. Para os dois experimentos foram obtidas graficamente as *FRF's* do sistema base (composto pelo sistema dinâmico sem o acréscimo dos ímãs), de cada uma das 100 amostras do espaço amostral (com os ímãs posicionados aleatoriamente), do conjunto médio (correspondente à média dos 100 sistemas do espaço amostral) e do *IC* de 95% (curvas de 5 e 95%). Os resultados obtidos mostram uma maior variabilidade na *FRF* da viga na faixa de alta frequência (que nesse artigo varia de 2.600 a 4.200 *Hz*) comparada com a região de baixa frequência de vibração. Já no caso do ensaio da placa observa-se o comportamento contrário ao da viga, a variabilidade é maior na região de baixa frequência (0 a 1.000 *Hz* nesse artigo) quando comparada à de alta frequência.

Em Adhikari, Friswell & Lonkar (2007b) e Adhikari, *et. al.* (2007), os autores dão sequência aos estudos realizados em Adhikari, Friswell, & Lonkar (2007a), considerando uma faixa de frequência que varia de 0 a 4.500 *Hz* e utilizando-se das *FRF's* já obtidas nos experimentos realizados. Aqui também foi encontrada uma maior variabilidade da *FRF* da viga

na faixa de alta frequência, enquanto que para a placa obteve-se maior variabilidade da *FRF* na faixa de baixa frequência. Além disso, nos dois estudos ocorreram discrepâncias entre as duas abordagens ao se comparar resultados obtidos pela *SMC* e experimento que podem ser atribuídas ao valor incorreto do fator de amortecimento usado no modelo numérico. Isto sugere que valores corretos de amortecimento são cruciais para a previsão da variância da resposta de sistemas dinâmicos estocásticos.

Já Ritto, Sampaio & Cataldo (2008) discutem sobre incertezas presentes na condição de contorno de um sistema dinâmico representado por um modelo de viga de Timoshenko. A viga está livre em uma extremidade e, na outra, é fixa. O que se pretende nesse artigo é fazer uma comparação entre as duas abordagens, paramétrica e não-paramétrica, e discutir a respeito da sua capacidade em melhorar a previsibilidade da resposta do sistema. Na primeira abordagem considera-se que a rigidez da mola é incerta, com isso, ela é modelada por uma variável aleatória (abordagem paramétrica). Já no caso do modelo probabilístico da matriz rigidez, a própria matriz como um todo é considerada como incerta (abordagem não-paramétrica). O *MEF* é usado para discretização do sistema e o *MME* é utilizado para construção das funções densidade de probabilidade nos dois modelos estudados. As simulações foram realizadas para a faixa de frequência de 0 a 1.000 *Hz* considerando-se o mesmo parâmetro de dispersão para ambas as abordagens. As análises mostram que é possível levar em conta incertezas de modelo com a modelagem não-paramétrica, o que não ocorre com a abordagem paramétrica. Os possíveis resultados da abordagem não-paramétrica encontram-se em um espaço amostral maior do que os possíveis resultados da abordagem paramétrica. Pode-se dizer também que, para o estudo realizado, a abordagem não-paramétrica inclui a paramétrica. Com relação ao parâmetro de dispersão, os autores concluíram que ele deve ser determinado experimentalmente, senão, caso seja ajustado para incluir alguma resposta, provocaria a diminuição da previsibilidade do modelo. Além disso, para as duas abordagens, é verificado que à medida que a frequência de vibração aumenta, a região de confiança vai se tornando cada vez mais larga, o que mostra o aumento da influência da incerteza em faixas de altas frequências de vibração e uma diminuição na previsibilidade do modelo, por isso, deve-se tomar muito cuidado ao se analisar problemas em regiões de alta frequência de vibração.

Tendo em vista que a obtenção da *FDP Wishart* por meio do uso do *PME* (em que o processo de otimização é caracterizado pela maximização da entropia e suas restrições) é o único que fornece os parâmetros apropriados dessa distribuição, Adhikari (2008b), trabalhando

em uma faixa de frequência de 0 a 4.000 Hz e já sabendo que tais parâmetros podem produzir discrepâncias entre a expectativa matemática da inversa da matriz aleatória e a inversa da matriz média, testa quatro critérios de seleção de parâmetros para que se possa definir a melhor opção a ser utilizada no processo de análise estocástica. É conhecido também que os parâmetros da FDP não são fixos, eles dependem de quais restrições são usadas no processo de otimização, por isso se considera que os dados disponíveis sobre o sistema sejam a média e desvio padrão das matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez. O critério 1 foi definido por Soize (2000) e (2001) e diz que a expectativa matemática da matriz aleatória deve ser igual à sua matriz média. O segundo vem de Adhikari (2006) e (2007b), onde a expectativa matemática da matriz aleatória deve ser próxima a sua matriz média e a expectativa matemática da inversa da matriz aleatória deve ser próxima à inversa da mesma matriz aleatória. O terceiro critério é proposto nesse artigo, Adhikari (2008b), e requer que a expectativa matemática da inversa da matriz aleatória deve ser próxima à inversa da sua matriz média. Nesses três critérios apresentados, é preciso considerar também que o desvio padrão normalizado calculado e medido da matriz aleatória devem ser iguais. Por fim, o quarto critério é também proposto por Adhikari (2008b) e exige que a expectativa matemática da inversa da matriz aleatória de massa deve ser igual à inversa da matriz média de massa, a expectativa matemática da inversa da matriz aleatória de rigidez deve ser igual à inversa da matriz média de rigidez, o desvio padrão normalizado calculado e medido da matriz aleatória de massa devem ser iguais e o desvio padrão normalizado calculado e medido da matriz aleatória de rigidez devem ser iguais. As abordagens paramétrica e não-paramétrica foram incluídas na análise do sistema constituído por uma placa de aço com 1.200 *gdl*. Na paramétrica utilizou-se do *MEFE* para propagação da incerteza nos parâmetros (propriedades materiais) da placa. Já no método não-paramétrico, a placa é “perturbada” por osciladores massa-mola colocados sobre ela em posições aleatórias. Neste caso, as incertezas são propagadas nas matrizes aleatórias de massa e rigidez por meio da *TMA* (distribuição *Wishart*). O objetivo do estudo é identificar qual dos quatro critérios de ajuste da matriz *Wishart* propostos vai produzir resultados altamente fiéis aos resultados obtidos pelo *MEFE*. A análise mostrou que a diferença entre as *FRF*'s dos quatro critérios é maior na faixa de baixa frequência e menor na região de alta frequência de vibração. Além disso, o critério número três mostrou melhor concordância nos resultados. E mais uma vez pode ser concluído que a matriz *Wishart* com parâmetros mostrados pelo terceiro critério de seleção pode ser usada como uma ferramenta de quantificação de incerteza consistente e unificada para problemas de vibração nas regiões de média e alta frequência.

Ainda com a intenção de se obter maiores conhecimentos sobre a natureza da incerteza, Adhikari, *et. al.* (2009) utilizam os mesmos ensaios de viga e placa de aço descritos respectivamente nos artigos Adhikari, Friswell & Lonkar (2007b) e Adhikari *et. al.* (2007) para novas análises. Os resultados experimentais são diretamente comparados com os resultados numéricos obtidos pela *SMC*. A principal conclusão foi a mesma obtida nos artigos citados: que as discrepâncias entre as duas respostas (*SMC* e experimento) podem ser atribuídas ao valor incorreto do fator de amortecimento usado no modelo numérico, o que sugere que valores corretos de amortecimento são cruciais para a previsão da variância da resposta de sistemas dinâmicos estocásticos.

Mais uma vez, maiores informações são necessárias a respeito das abordagens paramétricas e não-paramétricas. Então, Sampaio & Cataldo (2010) consideraram os resultados obtidos em Sampaio, Ritto, & Cataldo (2007), que trabalharam em uma faixa de frequência de 0 a 7 Hz, para uma nova comparação das duas estratégias de modelagem. A análise mostra, além das conclusões já tomadas em Sampaio, Ritto, & Cataldo (2007), que a comparação entre as duas estratégias não é óbvia e, de fato, pode acontecer que elas não sejam comparáveis. O principal ponto que deve ser enfatizado nesse estudo é o fato de que o espaço amostral dos dois métodos não é o mesmo e nem sequer têm a mesma dimensão. Dependendo do nível de incertezas e do número de resultados considerados, o conjunto dos resultados da estratégia paramétrica, cujo espaço de amostra tem a menor dimensão, não pode ser completamente incluída no conjunto de resultados da estratégia não-paramétrica. Além disso, o uso das estratégias está diretamente relacionado com o nível de incertezas consideradas. Também é observado que, em casos práticos, embora amplos valores de parâmetros de dispersão possam prever diversos resultados, não é evidente que todos eles sejam fisicamente possíveis ou mesmo relevantes. E se tal parâmetro não é suficientemente bom, alguns resultados importantes não podem ser previstos. Em geral, este problema é pior na abordagem não-paramétrica.

Adhikari (2010b), depois de progressos no estudo de quantificação de incertezas de modelagem, trabalha com a possibilidade de que outros modelos da matriz aleatória *Wishart* sejam utilizados na quantificação de incertezas em sistemas dinâmicos estruturais complexos. O objetivo é explorar ainda mais a ideia de seleção adequada de parâmetros das matrizes *Wishart*. De forma específica, deve-se investigar qual é o modelo de matriz aleatória *Wishart* mais simples possível, que pode ser usada sem comprometer a precisão dos resultados. Isto inclui melhorar as previsões estatísticas, simplificar as formulações analíticas e melhorar a

eficiência computacional. Sendo assim, além da *Wishart*, chamada neste trabalho de *Wishart* generalizada ou central, estudada em artigos anteriores, dois novos modelos são propostos: as chamadas matriz *Wishart* escalar e matriz *Wishart* diagonal. O sistema dinâmico em estudo foi o mesmo proposto por Adhikari, *et. al.* (2009). Dois casos de incertezas são considerados na análise. O primeiro corresponde à incerteza paramétrica em que é assumido que a placa tem propriedades materiais não-homogêneas. Já o segundo caso diz respeito à consideração de perturbação da placa por osciladores massa-mola fixados em posições aleatórias, o que caracteriza a abordagem não-paramétrica. Da comparação de resultados conclui-se que a distribuição *Wishart* escalar generalizada se mostra mais simples, porém imprecisa em regiões de baixa frequência, já a distribuição *Wishart* diagonal generalizada é mais precisa na faixa de frequência estudada, que no caso é de 4.000 Hz e, além disso, ela ainda apresenta as melhores concordâncias da resposta estatística calculada com a simulação numérica e os resultados experimentais. Verifica-se também que a diferença entre as três abordagens aparece mais em regiões de baixa frequência e é menor em altas frequências de vibração. Conclui-se que a distribuição *Wishart* diagonal generalizada com parâmetros sugeridos pode ser usada como uma ferramenta consistente e unificada de quantificação de incerteza.

Em outro artigo, Adhikari & Chowdhury (2010), investigam a possibilidade de se ter um método de simulação eficiente para obtenção das *FRF's* com a utilização da matriz *Wishart*. Para isto é proposta uma matriz *Wishart* reduzida para faixas de frequência de 0 a 4.000 Hz. Isto se justifica, pois segundo os autores, modelos de sistemas dinâmicos de alta resolução com milhões de *gdl* podem ter suas respostas dinâmicas calculadas dentro da faixa de frequência considerada por apenas algumas centenas ou milhares de modos. A transformação e redução do sistema estocástico ocorre no domínio modal e deve ser considerada apenas para sistemas dinâmicos com amortecimento proporcional. O sistema em estudo corresponde a uma placa de aço com propriedades materiais não-homogêneas para aplicação da abordagem paramétrica e com osciladores massa-mola com frequências naturais aleatórias e também posicionados aleatoriamente na placa para aplicação da abordagem não-paramétrica. Três métodos foram aplicados. No primeiro, as matrizes de massa e rigidez são matrizes *Wishart* inteiramente correlacionadas (este caso tem o maior custo computacional). No segundo têm-se as matrizes *Wishart* generalizadas (médio custo computacional) e no último faz-se uso de matrizes *Wishart* diagonais reduzidas (tem o menor custo computacional das três abordagens). A análise dos resultados mostra que é possível prever a variação da resposta dinâmica usando a nova abordagem de matriz reduzida com uma precisão aceitável, porém a viabilidade de se adotar

um modelo simples de matriz aleatória *Wishart* reduzida na quantificação de incertezas em sistemas dinâmicos estruturais ainda deve ser investigada fazendo-se uso de resultados experimentais. Por fim, e de forma geral, a nova abordagem de matriz reduzida proposta abre uma possibilidade de realizar a quantificação de incertezas em sistemas dinâmicos estruturais reais com muitos *gdl* de uma maneira mais eficiente computacionalmente.

Em uma nova tentativa de obter uma abordagem que possa ser utilizada para quantificar simultaneamente incertezas paramétricas e não-paramétricas em um método unificado, Adhikari (2010a) realiza estudos sobre a distribuição *Wishart* não-central, da qual resulta a distribuição *Wishart* estudada até aqui nesta tese (também chamada de *Wishart* central) considerando-se frequências de vibração de 0 a 600 *Hz*. A *Wishart* não-central tem uma maior quantidade de parâmetros que a *Wishart* central. Por esse motivo, além da quantificação da incerteza epistêmica, tal distribuição, segundo o próprio autor, tem maior capacidade para “captura” da natureza paramétrica da incerteza do que a *Wishart* central, mantendo o cálculo não-paramétrico inalterado. Este fato, então, traduz a ideia central do artigo que tenta explorar esses *gdl* estatísticos adicionais oferecidos pela distribuição não-central. Na modelagem faz-se uso da fatoração da matriz aleatória. Já no cálculo dos parâmetros utilizou-se o método dos mínimos quadrados baseado nas matrizes de média e covariância do sistema de matrizes. A implementação numérica e experimental é realizada considerando-se o sistema dinâmico de 1.440 *gdl* constituído por uma placa de aço em balanço com propriedades não-homogêneas. Resultados foram obtidos para a abordagem paramétrica e não-paramétrica. A análise mostra que esta abordagem é particularmente adequada quando se conhece com precisão todos os elementos da matriz de covariância do sistema de matrizes. Por outro lado, quando nenhuma informação sobre a matriz de covariância está disponível, a abordagem se reduz ao caso da distribuição *Wishart* central. Observou-se também que os resultados mostram uma desvantagem na utilização da distribuição *Wishart* não-central com relação a *Wishart* central pelo fato de que a determinação dos parâmetros da primeira precisa de tempo e armazenamento computacional maiores. Entretanto, considerando as comparações de resultados, chega-se à conclusão de que a matriz *Wishart* não-central pode ser utilizada como uma ferramenta de quantificação de incerteza consistente e unificada, e que é válida para todo o espectro de frequência de problemas de vibrações lineares.

O trabalho de Justino (2012), que considera frequências de 0 a 1.200 *Hz*, tem como principais objetivos descrever o procedimento para quantificação de incertezas epistêmicas em

modelos estruturais dinâmicos lineares com n graus de liberdade utilizando-se a abordagem não-paramétrica proposta por Soize (1998 a 2005) e estudada mais intensamente por Adhikari (2006 a 2010), fazer um estudo a respeito do parâmetro de dispersão no sistema dinâmico e sua importância no processo de quantificação de incertezas e analisar o comportamento da resposta quando se aumenta a massa no sistema considerado – neste caso representado por ímãs adicionados à viga. O sistema dinâmico amortecido é constituído por uma viga de aço com condições de contorno fixa – livre. Inicialmente, a modelagem estocástica que envolve a obtenção da *FDP Wishart* por meio da aplicação da *TMA* e do *MME* é descrita. Um programa para propagação da incerteza epistêmica na matriz aleatória de massa é construído no software MATLAB®, do qual se obtém as *FRF's* juntamente com suas respectivas curvas de convergência. A fase experimental contou com três configurações distintas: viga sem o acréscimo dos ímãs, viga com acréscimo de 2 ímãs e viga com acréscimo de 4 ímãs. *FRF's* foram obtidas para o modelo médio, gerado por elementos finitos, para o resultado experimental realizado em uma faixa de frequência de 0 a 1.200 Hz, e para o IC 95%. Este trabalho teve duas conclusões principais. A primeira, para a faixa de frequência de 1 a 800 Hz é que os resultados experimentais e teóricos não concordaram muito bem, porém não se espera que a abordagem não-paramétrica estudada dê bons resultados nesta faixa de baixa frequência. Já para a faixa de 800 a 1200 Hz e sem acréscimo de massa, os resultados foram satisfatórios até a frequência de 980 Hz. Foi concluído também que o parâmetro de dispersão deve ser calculado corretamente para que sejam obtidas respostas de quantificação adequadas e que correspondam à realidade do sistema estudado. Por fim, verifica-se que a incerteza epistêmica aumenta quando também se aumenta a massa no sistema, o que provoca alterações na resposta do sistema original considerado.

Fontanela & Lenzi (2014), já sabendo que durante a modelagem incertezas são geradas devido à variabilidade do produto, oriunda do processo de manufatura, e também devido à impossibilidade ou inviabilidade de representar processos físicos de maneira exata, trabalham com o objetivo principal de analisar a resposta dinâmica de um duto de descarga, sujeito a diferentes níveis de incertezas paramétricas e não-paramétricas. O modelo numérico é construído e os valores para o parâmetro de dispersão são escolhidos de forma arbitrária. O que se concluiu é que as incertezas na resposta do modelo aumentam com a frequência assim, é possível afirmar que em altas frequências as estruturas são mais sensíveis a pequenas variações em suas configurações originais. Já com relação ao parâmetro de dispersão, o estudo concluiu para a estrutura e níveis de incerteza analisados, que em baixas frequências (≈ 1.200 Hz) a

estrutura não altera, de maneira apreciável, a sua resposta dinâmica, tornando-se mais sensível em frequências mais altas. Porém, a afirmação anterior não é capaz de garantir que o sistema real apresente tais características, uma vez que os valores dos parâmetros de dispersão não são conhecidos, necessitando-se da determinação desses parâmetros através de resultados experimentais.

Capítulo 3

A ABORDAGEM NÃO-PARAMÉTRICA E SUAS FASES DE APLICAÇÃO

A abordagem não-paramétrica é um método que engloba técnicas para quantificação de incertezas em modelos de sistemas dinâmicos complexos.

Este método está inserido no contexto da abordagem estocástica que estuda funções temporais que variam aleatoriamente. Para que o processo seja estocástico, é preciso que ele tenha origem em eventos aleatórios. Pode-se dizer também que a variável relacionada ao processo deve ser uma variável temporal, neste caso, o processo aleatório designa-se como processo estocástico. E aí tais variáveis aleatórias representam a evolução de um sistema com o tempo. No caso de problemas determinísticos, já se conhece como será sua evolução. Eles têm um único modo de evoluir para a resposta final. Já em um processo estocástico há uma indeterminação, mesmo que se conheça a condição inicial do problema, existem várias, por vezes infinitas, direções nas quais o processo pode evoluir. Sendo assim, faz-se necessária a utilização de uma abordagem estocástica em estudos sobre a quantificação de incertezas em modelos de sistemas dinâmicos já que suas variáveis, além de aleatórias, ainda dependem do tempo.

Isto posto, é válido salientar que a aplicação da abordagem não-paramétrica obriga ao analista a passar por três fases consecutivas representadas na Figura 3. Sendo assim, segue uma breve explicação sobre cada uma delas.

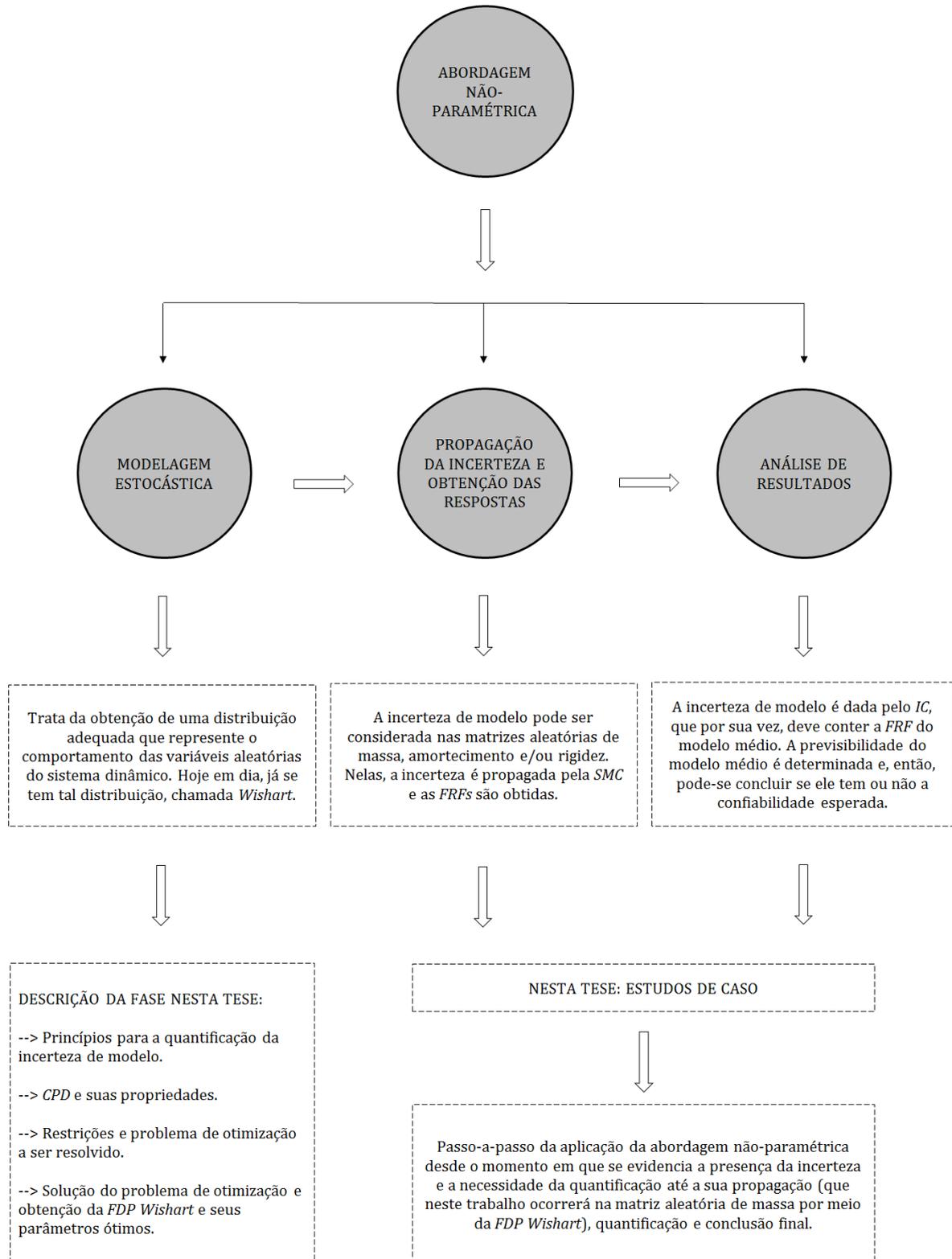


Figura 3: Fases da abordagem não-paramétrica. Fonte: autor.

3.1 FASE 1: MODELAGEM ESTOCÁSTICA

Esta primeira fase é aquela em que se estuda e se valida a correta *FDP* das matrizes aleatórias do sistema dinâmico.

Tendo em vista os estudos apresentados no Capítulo 2 sobre a revisão da literatura da abordagem não-paramétrica, conclui-se que a distribuição *Wishart* é aquela que apresenta melhores resultados para a quantificação da incerteza tanto paramétricas quanto não-paramétricas em modelos de sistemas dinâmicos analisados nas faixas de média e alta frequência de vibração. É preciso, além disso, complementar que as distribuições validadas por Adhikari (2010b), referente à distribuição *Wishart* diagonal generalizada, e por Adhikari (2010a), que se refere à distribuição *Wishart* não-central, também podem ser utilizadas como método unificado de quantificação porém, é preciso que se realizem mais estudos sobre elas. Sendo assim, nesta tese, tal distribuição, já validada em pesquisas, chamada *FDP Wishart*, será considerada daqui em diante.

Isto posto, é preciso esclarecer que a fase da Modelagem Estocástica, de maneira geral, também pode ser dividida em fases que seguem uma trajetória linear até a obtenção da distribuição *Wishart* e que são apresentadas na Figura 4. Elas serão detalhadas no Capítulo 5 (Princípios para a quantificação da incerteza de modelo: Shannon e Jaynes), Capítulo 6 (Conjunto positivo-definido (*CPD*) e suas propriedades), Capítulo 7 (Restrições e problema de otimização a ser resolvido) e Capítulo 8 (Solução do problema de otimização) seguindo a descrição mostrada na Figura 3.

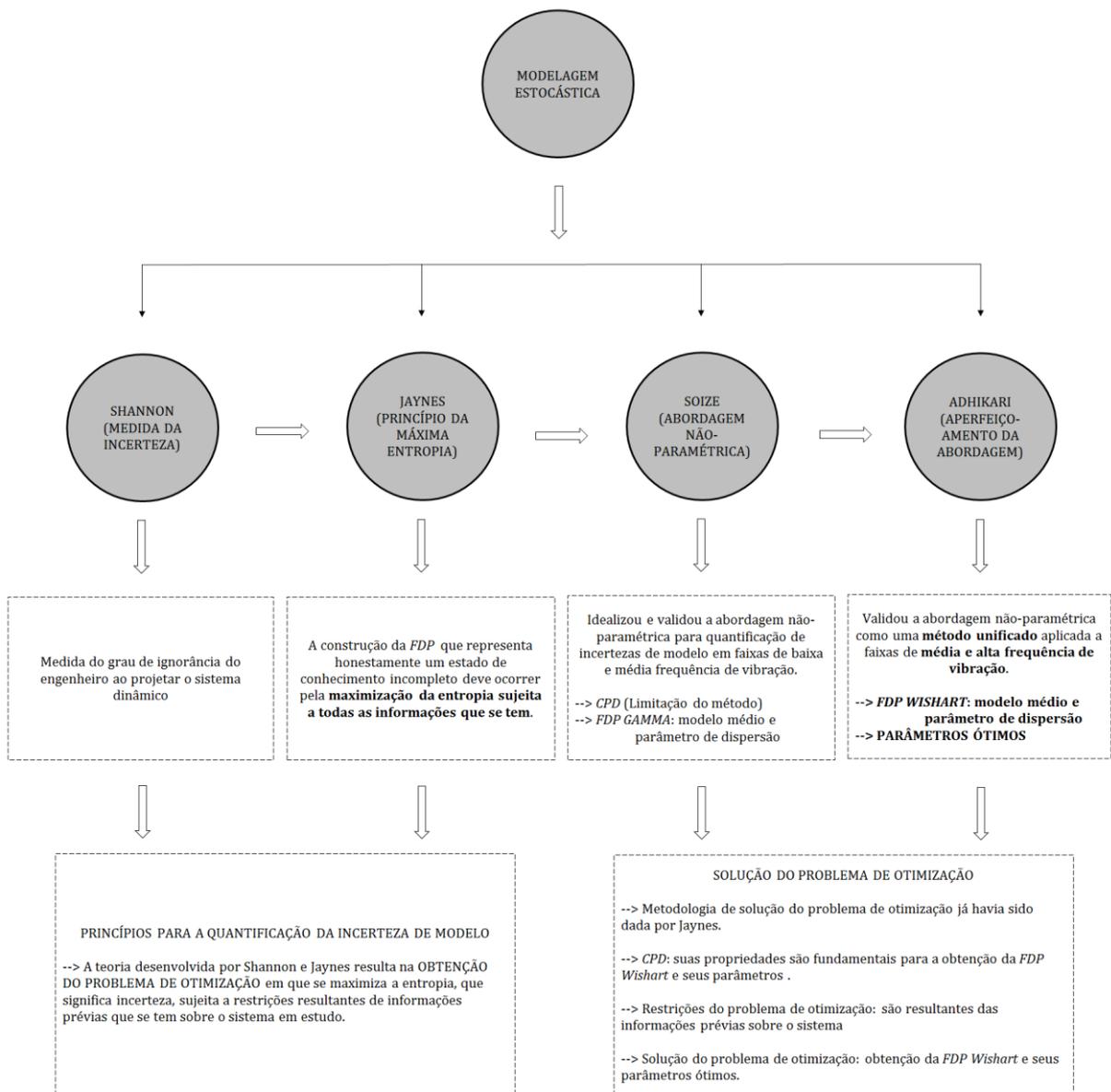


Figura 4: Fases da modelagem estocástica. Fonte: autor.

3.2 FASE 2: PROPAGAÇÃO DA INCERTEZA E OBTENÇÃO DAS RESPOSTAS

Esta segunda fase apontada na Figura 3 será realizada no programa desenvolvido na plataforma MATLAB®, detalhado na Figura 5, que mostra um fluxograma do programa e apresenta suas sub-rotinas.

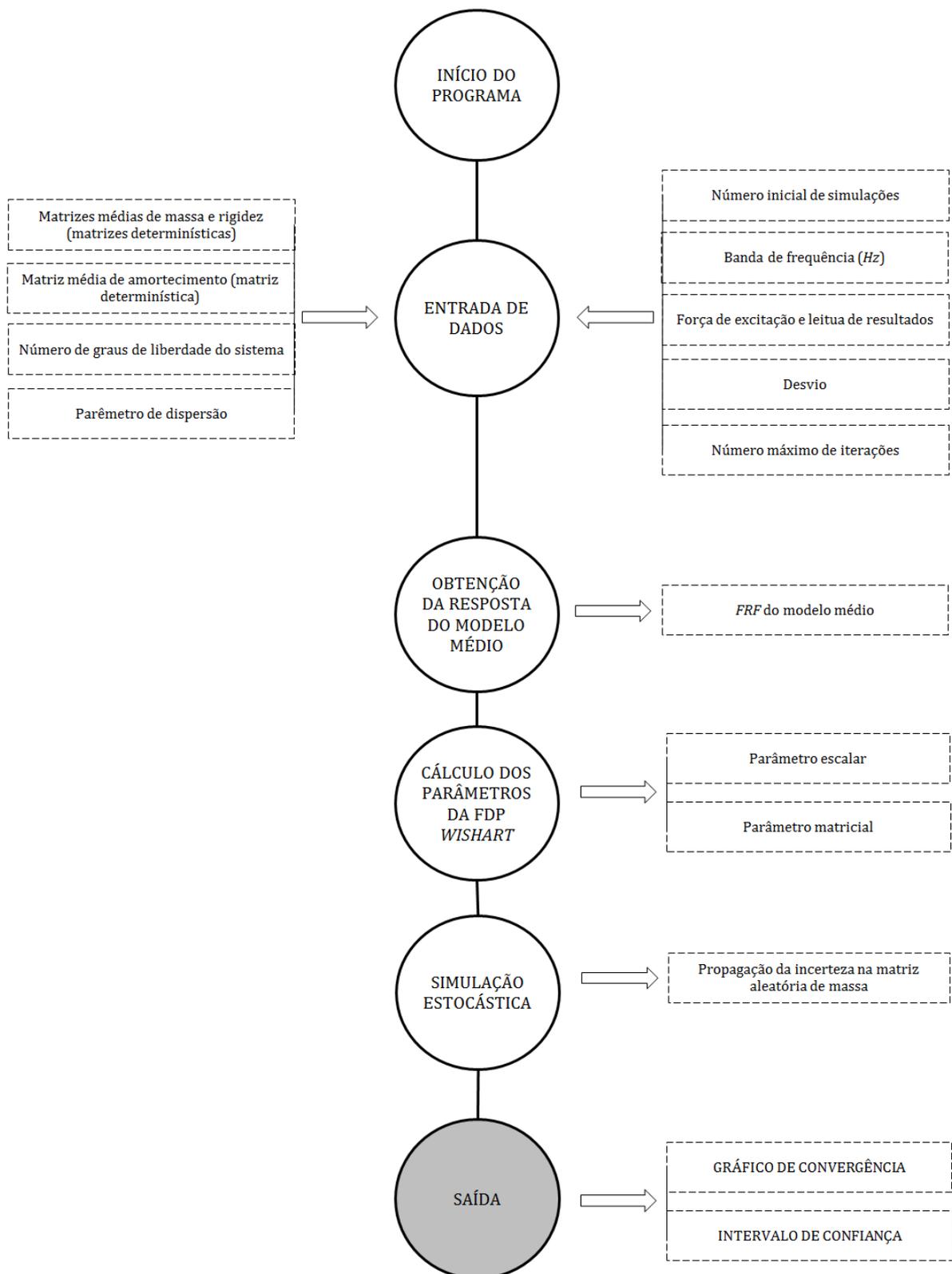


Figura 5: Fluxograma referente à entrada de dados no programa construído na plataforma do software MATLAB®. Fonte: autor.

Entrada de dados: esta sub-rotina é necessária para que sejam introduzidos ao programa as seguintes informações:

1. Matrizes médias de massa e rigidez \bar{M} e \bar{K} : obtidas do modelo em EF e segundo as informações do sistema a ser considerado.
2. Matriz média de amortecimento \bar{C} : pode ou não ser assumida como sendo uma matriz de amortecimento proporcional da matriz média de massa e rigidez.
3. Número de gdl do sistema: determinado segundo a dimensão n das matrizes médias do sistema.
4. Parâmetro de dispersão δ : é apresentado no subitem 4.5 A Incerteza de Modelo e o Parâmetro de Dispersão, e corresponde ao parâmetro que carrega a informação sobre a incerteza. Serão considerados para os dois estudos de casos a serem realizados os valores de 0,01 / 0,05 / 0,1 / 0,2 / 0,5.
5. Número inicial de simulações nsi : é determinado de forma que possam ser obtidas convergências e, conseqüentemente, respostas satisfatórias para o problema em estudo. Sampaio & Ritto (2008) propõe $nsi = 200$. Este número significa que ocorrerão inicialmente 200 iterações e no final delas o desvio é calculado. A partir daí, ocorrerão sempre acréscimos de 200 iterações em cada simulação realizada. O valor do desvio é calculado sempre ao término de cada uma dessas simulações até que ocorra a verificação da convergência do método segundo um desvio mínimo assumido pelo analista.
6. Banda de frequência considerada na simulação: definida para cada estudo de caso separadamente.
7. Força de excitação e leitura de resultados: ponto em que é aplicada a força e ponto onde se faz a leitura de resultados. São diferentes para cada estudo de caso.
8. Desvio utilizado para a convergência da resposta: analista define segundo critérios de projeto.

9. Número máximo de iterações *niter*: este número funciona como um limite do número de simulações permitidas para a convergência.

Construção da resposta do modelo médio: A *FRF* do modelo médio é construída levando-se em conta as matrizes \bar{M} , \bar{C} e \bar{K} .

Cálculo dos parâmetros da distribuição *Wishart*: tais parâmetros, denominados p e Σ são calculados conforme mostrado na Equação (181).

Simulação estocástica: caracterizada pela *SMC* em que se pode propagar a incerteza na matriz massa do sistema e construir as respostas gráficas para análise.

É necessário gerar um número suficiente de amostras de modo que se possa fazer estatísticas da resposta, ou a determinação de uma série de momentos (média e de dispersão). O principal problema neste momento é determinar quantas simulações são necessárias para construir uma aproximação da resposta para um erro pré-definido. Para isso, é utilizado o método de convergência quadrática. (Justino, 2012)

Segundo Soize (2005b), a convergência, de acordo com a dimensão das matrizes aleatórias e o número de realizações necessárias na *SMC*, é dada por:

$$conv(n_s, n) = \left\{ \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \int_{\omega \in B} \|Q^n(\omega; \theta_k)\|^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

(1)

em que: n é a ordem das matrizes aleatórias; n_s corresponde ao número de *SMC* utilizado para se construir as estatísticas da resposta; ω é a frequência na banda B ; $Q^n(\omega; \theta_k)$ corresponde à resposta do sistema estocástico calculada para cada simulação k com resultado correspondente θ_k . Para se verificar a convergência média quadrática determina-se um erro aceitável para que o número de simulações seja verificado e, dependendo deste erro, o resultado de $conv(n_s, n)$ se modifica.

3.3 FASE 3: ANÁLISE DE RESULTADOS

Mais uma vez convém fazer uso de um fluxograma para apresentar esta fase de forma mais clara, o que pode ser visto na Figura 6 e na Figura 7.

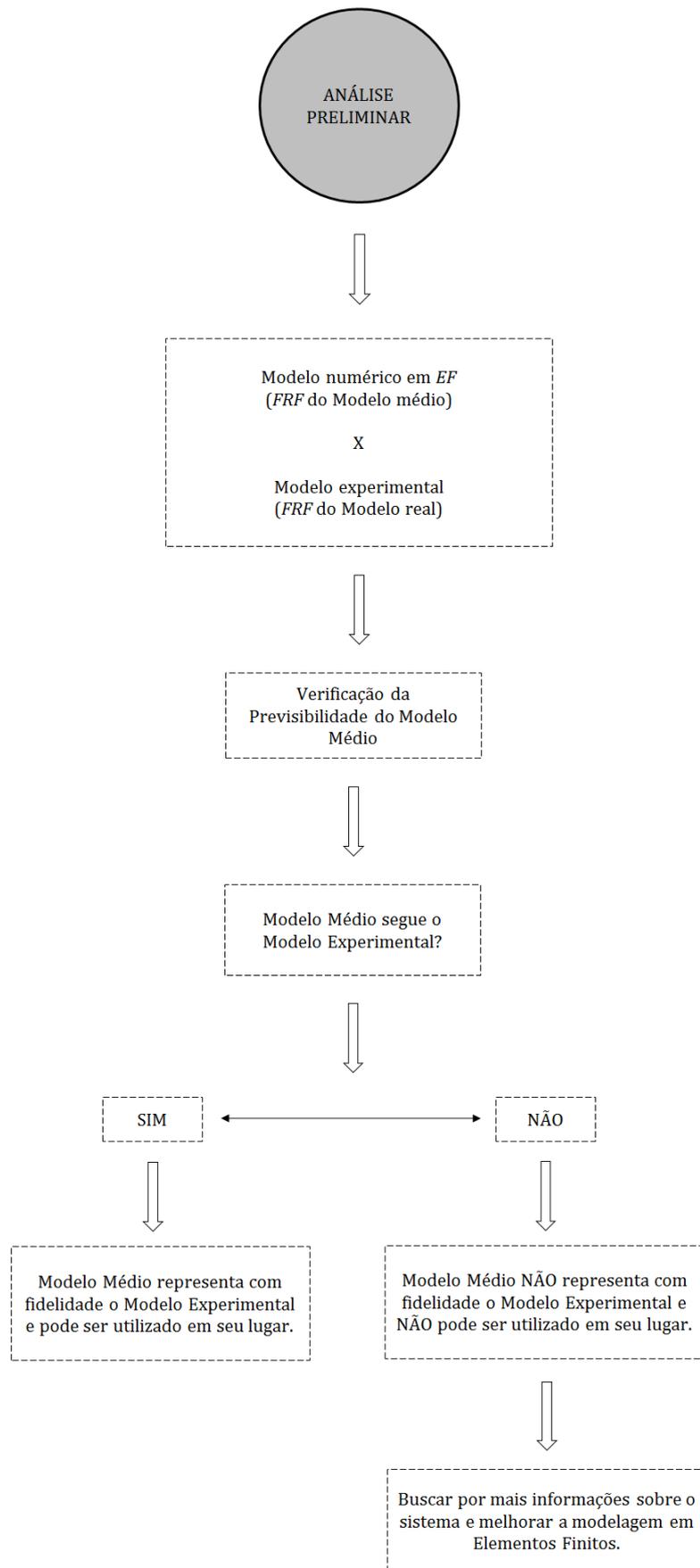


Figura 6: Fluxograma da análise de resultados. Fonte: autor

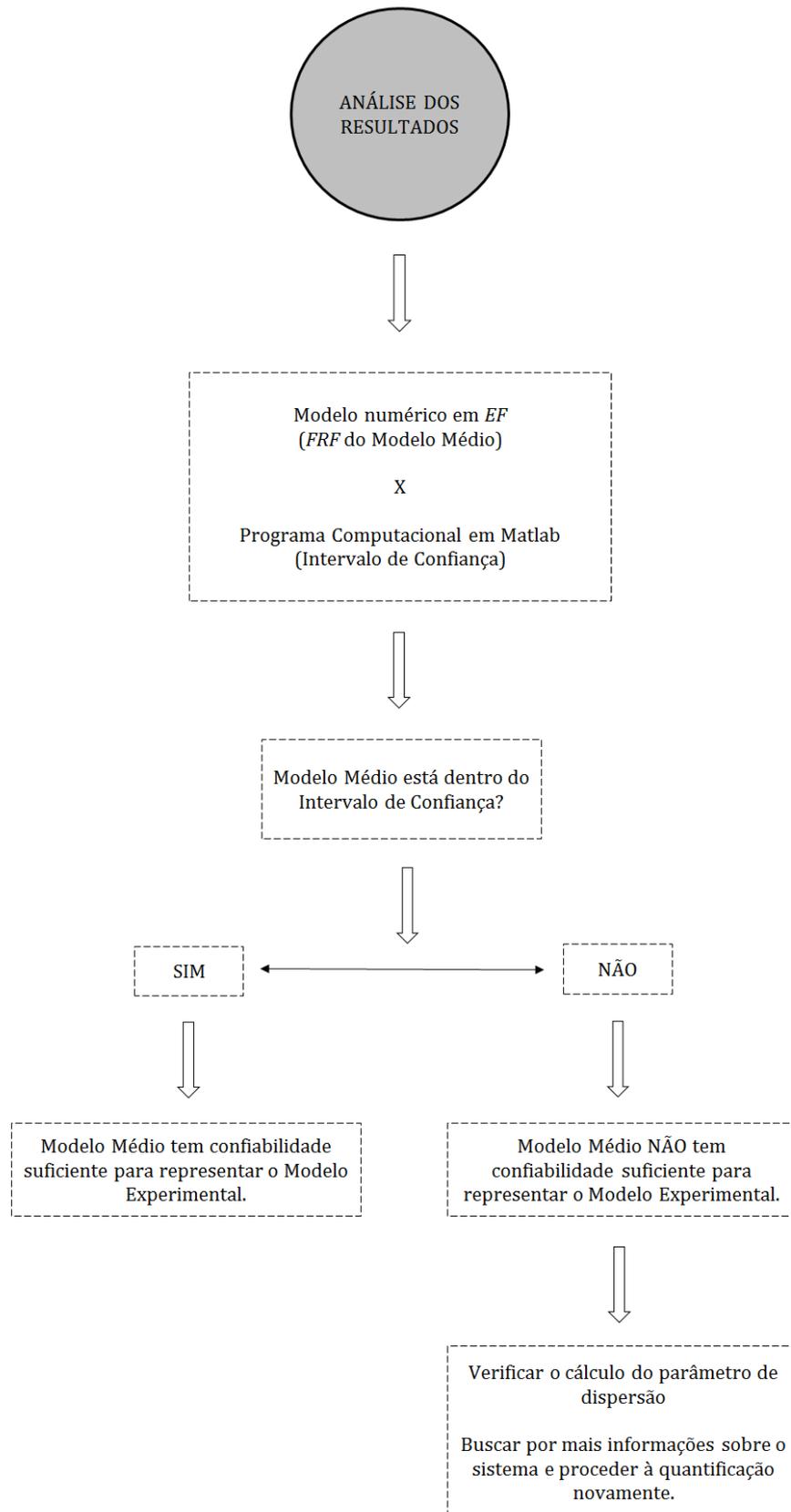


Figura 7: Fluxograma da análise de resultados. Fonte: autor

Todas as fases da abordagem mostradas serão detalhadas no decorrer dos capítulos desta tese porém, antes disso, faz-se necessária uma contextualização e apresentação de conceitos fundamentais para uma melhor compreensão e aplicação do que virá a seguir, o que será concretizado no Capítulo 4 sobre os fundamentos da abordagem não-paramétrica.

Capítulo 4

FUNDAMENTOS DA ABORDAGEM NÃO-PARAMÉTRICA

4.1 CONCEITO DE ERRO E INCERTEZA

O estudo das incertezas tem sido alvo de constantes pesquisas devido à sua importância na modelagem de sistemas dinâmicos amortecidos lineares. No entanto, o termo incerteza é frequentemente utilizado como sinônimo de erro, o que não condiz com a realidade. Estes dois termos têm definições e características bem diferentes e para que não haja qualquer dúvida, cabe neste ponto esclarecer tais definições.

Segundo Vandepitte & Moens (2011), ‘erro’ é definido como uma deficiência que pode ser reconhecida e/ou identificada e que não ocorre devido à falta de conhecimento. É a diferença entre o valor obtido no processo de medição, experimento ou teoricamente e o valor verdadeiro da grandeza medida. Já a incerteza, o mesmo autor define que se trata de uma deficiência que ocorre devido à falta de conhecimento do sistema.

Por outro lado, pode-se dizer que a incerteza está relacionada com o conceito de precisão já que se associa à repetibilidade da análise ou do experimento, ou seja, relaciona-se com a dispersão dos valores resultantes da repetição das mesmas análises ou medições em experimentos e é um indicativo da qualidade e refinamento dos resultados; no caso do erro, este

se relaciona com o conceito de exatidão que, por sua vez, indica a conformidade com o valor verdadeiro.

Uma maneira de visualização gráfica desses conceitos seria por meio da *FDP*, como mostrado na Figura 8.

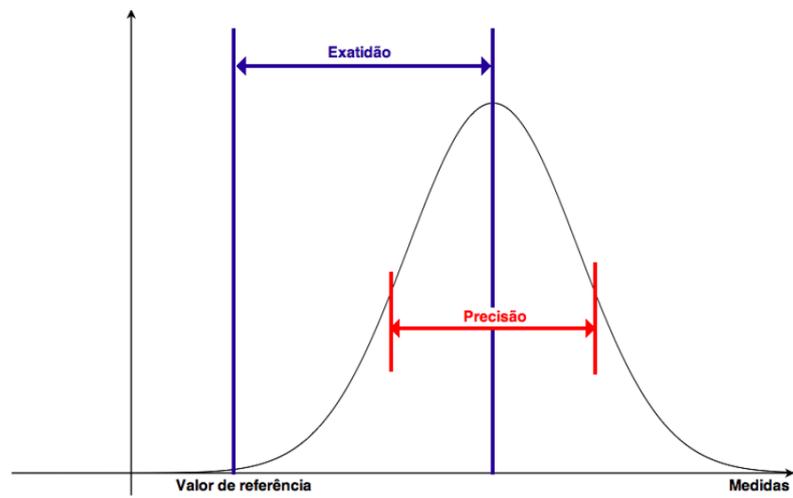


Figura 8 – Conceitos de exatidão e precisão. Fonte: Batista (2011).

Cabral (2004) faz uma analogia desses conceitos com resultados obtidos por disparos de um projétil contra um alvo, apresentado na Figura 9 para que se possa relacionar os conceitos de erro e incerteza com as definições de exatidão e precisão. A exatidão corresponde ao fato de acertar o alvo ou acertar um ponto próximo a ele, já o caso de precisão ocorre quando os disparos acertam pontos bem próximos entre si.

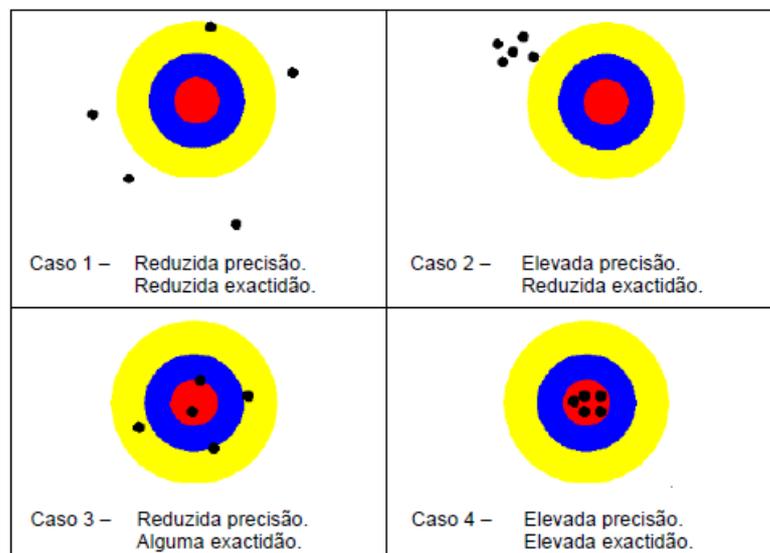


Figura 9 – Casos de precisão/imprecisão e exatidão/inexatidão. Fonte: Cabral (2004).

Com base nos resultados obtidos pelos atiradores que realizaram os disparos, pode-se fazer agora uma relação entre os conceitos de precisão, exatidão e a *FDP* dos dados considerados. Isto quer dizer que a partir da Figura 9 obtém-se as respectivas *FDPs* que, por sua vez, são representadas na Figura 10.

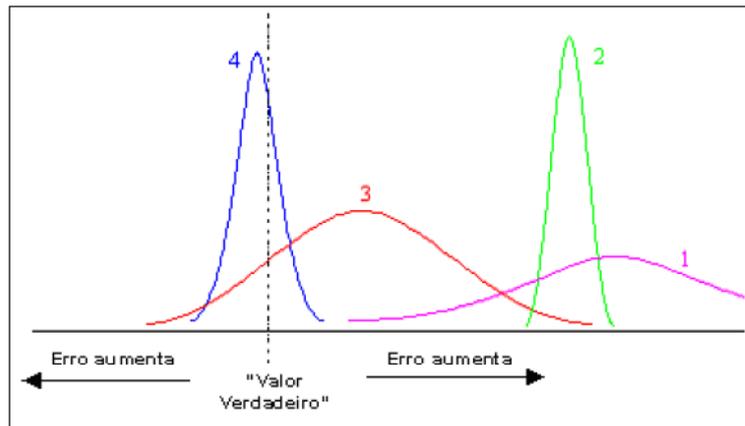


Figura 10 – *FDPs* correspondentes a cada caso da Figura 9. Fonte: Cabral (2004).

Nestas curvas a distância de cada pico ao valor verdadeiro representa o erro médio, enquanto a largura de cada curva, que caracteriza a dispersão dos dados, representa a incerteza. Pode-se dizer que as áreas sob as curvas devem ser iguais, já que se considera que os atiradores fazem o mesmo número de disparos. E observando que existem diferenças nas amplitudes de pico, conclui-se que quanto menor for a dispersão dos dados maior será a amplitude do pico da curva (Cabral, 2004).

Uma abordagem importante é realizada por Mattos e Veiga (2002) ao se estudar a otimização da entropia de Shannon que é dada como sinônimo de incerteza associada a uma distribuição de probabilidade. Segundo os autores, “*cada distribuição reflete um grau de incerteza e diferentes graus de incerteza estão associados a diferentes distribuições (embora diferentes distribuições possam refletir o mesmo grau de incerteza)*”. De uma maneira geral pode-se dizer que quanto mais “espalhada”, ou seja, quanto maior a dispersão da curva, maior é a incerteza que ela reflete. Um valor mais baixo de dispersão, ou variância, indica que a distribuição está concentrada perto do valor médio. Já um valor de dispersão mais alto, indica que a *FDP* está distribuída por um intervalo mais amplo de valores possíveis. Isto pode ser visto na Figura 11.

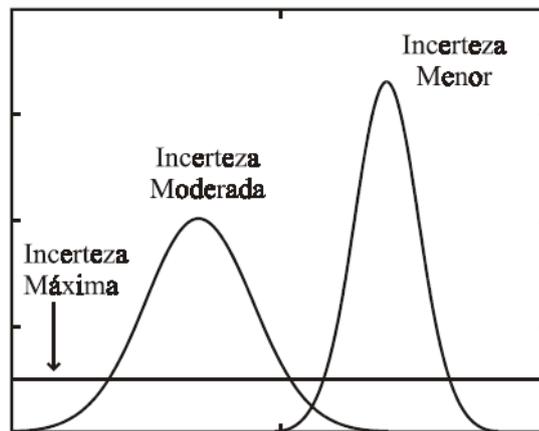


Figura 11 – Representação da incerteza em diferentes distribuições contínuas de probabilidade. Fonte: Mattos e Veiga (2002).

Na Figura 11 pode ser verificado que a distribuição que tem maior incerteza é a Uniforme, em que se atribui probabilidades iguais aos resultados possíveis de um experimento sobre o qual não se tem nenhuma informação à priori. Esta atitude reflete o Princípio da Razão Insuficiente de Laplace, em que se atribuem chances iguais aos eventos que são possíveis de ocorrer, tendo em vista que esta é a maneira mais razoável de alguém refletir sua ignorância, ou sua incerteza, quanto às chances de ocorrência de cada evento.

Entretanto, no momento em que se conseguem obter informações a respeito do experimento, dos eventos possíveis de se ocorrer, a probabilidade sobre cada evento vai mudando, e já não se pode falar em probabilidades iguais para resultados possíveis. Neste caso, o analista assume outra distribuição que possa expressar corretamente sua incerteza sobre a ocorrência de cada evento.

Pode-se dizer ainda sobre a incerteza que, como ela é uma estatística que expressa quantitativamente a qualidade da modelagem, ela é, obviamente, uma estatística não-negativa. Ademais, quanto maior for a dispersão que a incerteza representa, menos confiável será o resultado da modelagem. Além disso, a incerteza do modelo é o intervalo de confiança ao redor de um valor médio tal que, se o experimento for repetido nas mesmas condições, uma determinada fração dos resultados estará neste intervalo.

4.2 INCERTEZAS EM SISTEMAS DINÂMICOS

De uma forma bem abrangente, as incertezas em sistemas lineares dinâmicos podem ser divididas em dois grandes grupos.

O primeiro tipo, identificado na primeira coluna da Figura 13, é chamado de incerteza aleatória, incerteza irreduzível ou incerteza inerente e *“surge devido à variação natural e imprevisível no desempenho do sistema em estudo”* (Lin, 2012). Ela descreve uma variação *“causada, normalmente, pela natureza aleatória dos dados associados ao problema”* (Barrico, 2007). É necessário caracterizar, com amostras suficientes, a sua variabilidade por métodos estatísticos bem estabelecidos e representá-la por meio de uma distribuição de probabilidade adequada que descreva o comportamento dos parâmetros em estudo. *“Esse tipo de incerteza não pode ser reduzido pela realização de medições exaustivas ou pela definição de um modelo melhor”* (Lin, 2012).

Já o segundo tipo de incerteza, identificado na segunda coluna da Figura 13, que pode ser encontrada em modelos de sistemas dinâmicos é a chamada incerteza de modelagem, também designada por incerteza redutível, incerteza subjetiva ou incerteza do modelo. Ela *“está associada a um certo nível de ignorância, ou informação incompleta do sistema ou do ambiente que o rodeia”* (Barrico, 2007). De outra maneira, pode-se dizer que a ocorrência desta incerteza se deve à falta de conhecimento sobre o comportamento do sistema. A princípio, ela pode ser reduzida à medida que se obtém mais informações sobre o sistema.

Contudo, as incertezas de modelagem também podem ser classificadas em dois outros grandes grupos. O primeiro é o que comporta a incerteza paramétrica (ou incerteza de dados) e se relaciona com os parâmetros do sistema. Já o segundo grupo compreende as incertezas não-paramétricas (ou incertezas epistêmicas) e são decorrentes, principalmente, devido à falta de conhecimento do sistema e não dependem dos seus parâmetros. Como exemplos podem ser citados os erros associados à equação de movimento, que pode ser linear ou não linear, ao modelo de amortecimento que pode ser considerado viscoso ou não viscoso, condições de contorno, condições iniciais, dentre outros.

Vale mencionar que dentre alguns autores não se encontra um padrão de nomenclatura para os grupos de incertezas mencionados anteriormente, portanto, para que se tenha bastante clareza no que diz respeito a esta tese, será adotada a seguinte nomenclatura mostrada na Figura

12:

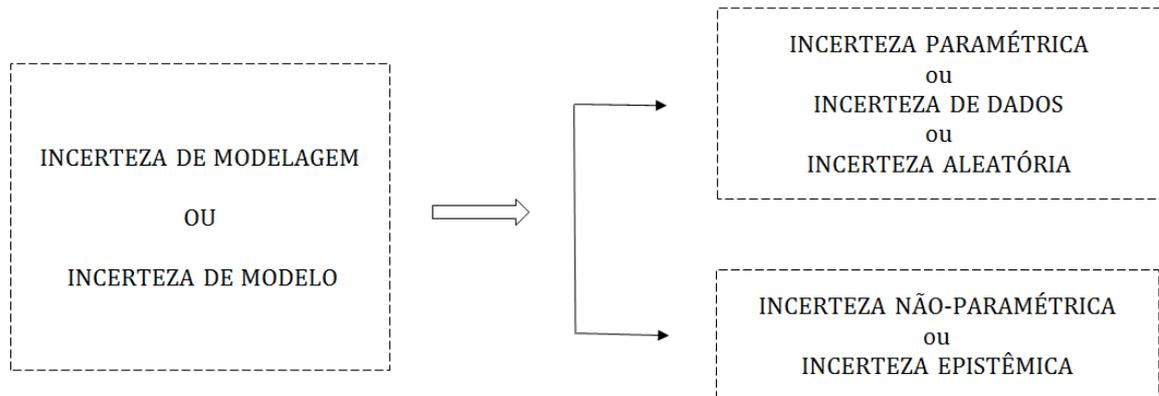


Figura 12: Nomenclatura para os tipos de incertezas. Fonte: autor.

4.3 AS FONTES DA INCERTEZA DE MODELO

As fontes de incertezas são diversas. No caso da paramétrica, podem resultar de imprecisões (informações pouco claras ou definidas de forma imprecisa) nas propriedades constitutivas (módulo de elasticidade, massa específica, coeficiente de Poisson, coeficiente de amortecimento, dentre outros) e propriedades geométricas.

Em particular, com relação à incerteza epistêmica, ela pode ser causada, por exemplo, quando se tem informações incompletas resultantes de imprecisões (da mesma forma que para a incerteza paramétrica) e também por falta de especificações, que é quando se têm disponível diferentes modelos que descrevem o mesmo fenômeno. Pode-se dizer ainda que decorrem da utilização de modelos matemáticos simplificados ou que, por algum motivo, divergem dos que deveriam realmente serem aplicados em projetos de sistemas reais. Podem resultar de limitações no conhecimento e/ou na compreensão do fenômeno pelo analista devido, por exemplo, à complexidade dos sistemas e fenômenos em estudo ou então quando tais sistemas e fenômenos são novos e ainda não se sabe representá-los adequadamente. Podem surgir também devido a simplificações deliberadas acrescentadas pelo analista.

Portanto, de maneira generalizada, diz-se que a incerteza de modelo pode ser entendida como sendo o desvio existente entre o modelo real considerado e a sua representação simplificada, principalmente quando se trata de sistemas complexos, em que a tradução para

modelos com hipóteses teóricas nunca está em perfeita concordância com o modelo real a ser construído.

4.4 ABORDAGENS DE QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS DE MODELO

É essencial esclarecer de imediato que o objetivo da análise da incerteza quantitativa é usar as informações que se têm disponíveis para quantificar o grau de confiança nos dados e modelos existentes e não reduzir tal incerteza. Mesmo porque, a redução da incerteza de modelo, como já dito anteriormente, só pode acontecer por meio da obtenção de informações adicionais sobre o sistema em estudo.

O que se faz é construir modelos que incorporem a incerteza e, posteriormente, abordagens para determinar as soluções destes modelos. Isto se consegue porque as incertezas de modelo podem ser introduzidas na modelagem do sistema mecânico-matemático do sistema projetado, ou seja, elas podem ser introduzidas no modelo médio.

Primariamente, incertezas de dados e epistêmicas são quantificadas separadamente segundo abordagens adequadas, denominadas paramétrica e não-paramétrica, respectivamente. Porém, atualmente admite-se também a possibilidade de estudos sobre uma abordagem unificada, que quantificaria simultaneamente os dois tipos de incertezas citados.

A abordagem paramétrica é capaz de quantificar as incertezas relacionadas aos parâmetros do sistema. Para possibilitar tal quantificação, é preciso ter em mãos todas as informações sobre os parâmetros incertos e suas variações para que sejam utilizadas na análise. Quando se têm informações estatísticas substanciais disponíveis, a dispersão nos parâmetros do modelo pode ser representada usando métodos probabilísticos adequados. Pode-se ajustar uma *FDP* que corresponda aos dados disponíveis e, conseqüentemente, os parâmetros do modelo podem ser expressos como variáveis aleatórias. Desta forma, tem-se um processo aleatório e o problema resultante pode ser solucionado usando o *MEFE* (Método Estocástico de Elementos Finitos).

Entretanto, tal abordagem pode não ser adequada quando os parâmetros que contribuem

para os erros de modelagem não são conhecidos a priori e também quando um número extremamente alto de variáveis ou processos aleatórios são necessários para se resolver o problema de quantificação. Como resultado, a representação e a quantificação desse tipo de incerteza de modelagem, mesmo quando se trata de incertezas paramétricas, tem dificuldades conceituais e computacionais.

Problemas semelhantes ocorrem quanto à quantificação de incertezas epistêmicas. Nestes casos, a falta de conhecimento sobre o sistema não permite ao analista a posse de informações a priori para a quantificação destas incertezas. Isto sugere que não se têm, pelo menos de imediato, informações disponíveis em mãos; e quando elas existem, estas informações podem não ser suficientes ou até mesmo podem não ser muito confiáveis para se obter a solução da quantificação.

A dificuldade é que na maioria dos problemas práticos, não é possível se obter informações completas e suficientes com relação às incertezas, mesmo as relativas a dados, pois geralmente elas não estão disponíveis e na prática pode ser extremamente difícil identificar os parâmetros incertos e quantificar os graus de incertezas de cada um deles. Isto torna necessária a realização de experimentos em busca de informações para aplicação das duas abordagens.

Tendo em vista que a quantificação de incertezas de modelagem é aplicada especialmente em sistemas complexos e que muitas vezes a construção de protótipos para ensaios experimentais é proibitivo, a princípio se tem uma única amostra. Sendo assim, um experimento deste sistema não traz informações suficientes para a construção da sua *FDP* para que através dela possa se propagar as incertezas do modelo. E esta é uma questão importantíssima, pois deve-se ficar atento com o tamanho da amostra considerada (Adhikari, 2008a). Pode-se dizer então que o volume de dados de entrada, por sua vez, pode não ser realista para que sejam obtidos resultados de análise probabilística confiáveis. Neste contexto, portanto, não importa se o objetivo é estudar a incerteza paramétrica ou não-paramétrica, pois independentemente do tipo de incerteza que existe em um sistema estrutural mecânico, não se tem como obter a amostragem suficiente do sistema para ensaios experimentais.

Fica claro, portanto, que a abordagem paramétrica não é capaz de quantificar incertezas epistêmicas e, por vezes, nem as incertezas de dados, já que nem sempre é possível obter todas as informações que se precisa para a análise. Isto tornou necessário o desenvolvimento de uma método que fosse mais adequado para a quantificação. Tal método é denominado abordagem

não-paramétrica.

Com isso, convencionou-se que a abordagem paramétrica é aplicada para a quantificação de incertezas de dados, enquanto que a não-paramétrica quantifica incertezas epistêmicas.

Contudo, um outro problema decisivo no que diz respeito à utilização destas abordagens se refere ao fato de que apesar de se fazer diferença entre um tipo e outro de incerteza (paramétrica e não-paramétrica), na prática, é muito difícil, senão impossível, separá-las. Portanto, levando-se em conta tal dificuldade, além de todas as outras citadas anteriormente, alguns autores apostam no desenvolvimento de abordagens unificadas de quantificação, ou seja, que quantificam incertezas paramétricas e não-paramétricas simultaneamente. Esta seria a forma de se obter modelos numéricos confiáveis de sistemas dinâmicos complexos. E neste caso, a abordagem não-paramétrica deve ser melhor estudada para este fim já que ela “*é capaz de levar em consideração incertezas no modelo*” (Sampaio & Ritto, 2008). Isto porque em tal abordagem “*algumas realizações das matrizes aleatórias acoplam os modos do sistema*” (Sampaio & Ritto, 2008), o que não ocorre com a abordagem paramétrica.

A Figura 13 deixa mais clara a diferença entre as incertezas na modelagem de sistemas estruturais dinâmicos amortecidos e seus métodos de quantificação.

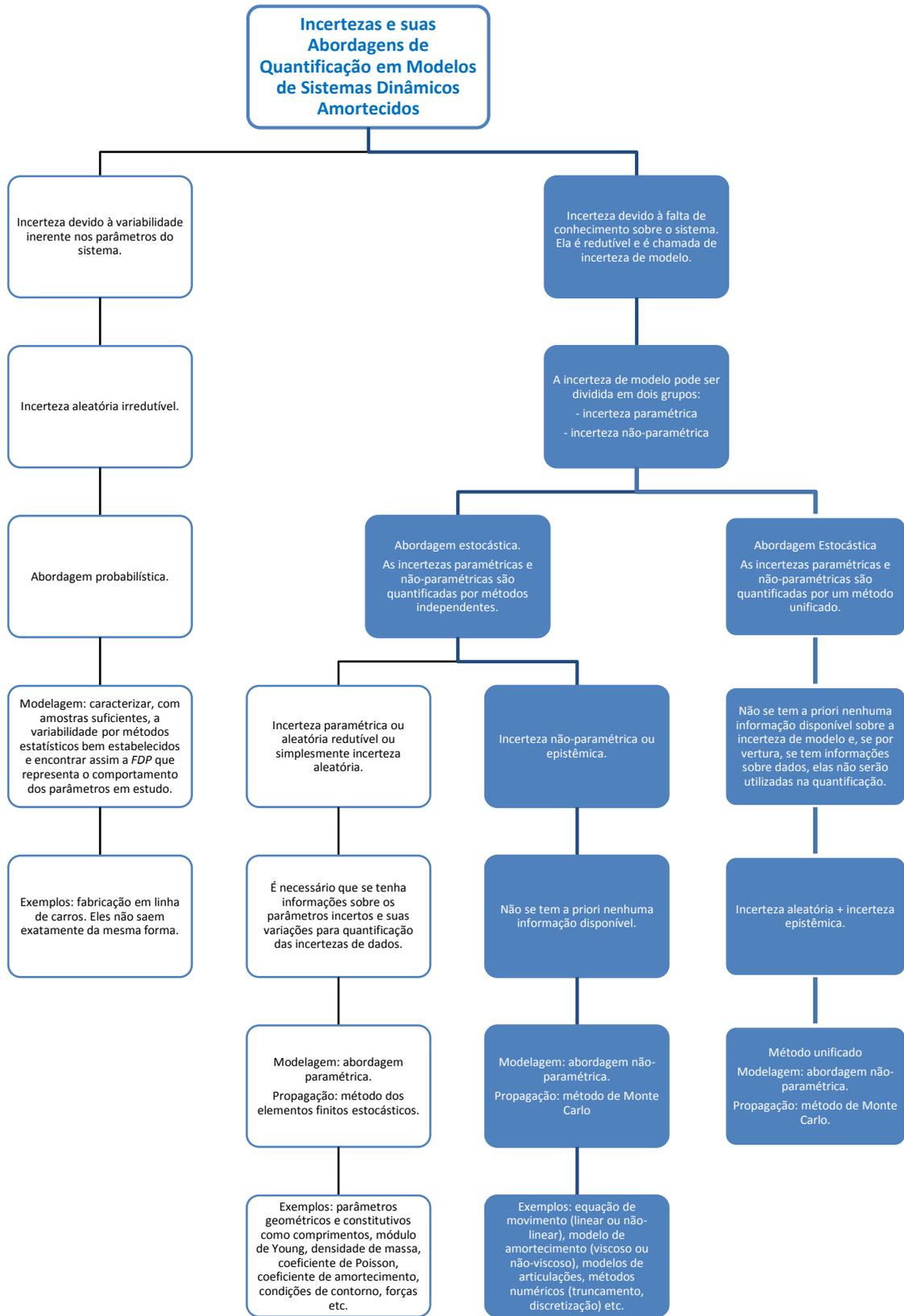


Figura 13: Tipos de incertezas em modelos estruturais dinâmicos e suas correspondentes abordagens de cálculo. Fonte: autor.

4.5 A INCERTEZA DE MODELO E O PARÂMETRO DE DISPERSÃO

O parâmetro de dispersão δ é fundamental na aplicação da abordagem de quantificação da incerteza tendo em vista que é ele que permite a propagação da incerteza de modelagem no sistema por meio das matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez.

Uma vez determinado o parâmetro de dispersão, que, segundo Adhikari (2007b), o deve ser obtido a partir de experimento físico ou computadorizado, é possível proceder à aplicação da abordagem não-paramétrica. Não é possível quantificar a incerteza de modelagem sem a determinação prévia de tal parâmetro.

Soize (2005b) cita que a determinação do parâmetro de dispersão pode resultar da experiência do analista ou pode ser calculado por ele. Sendo assim, segundo consta em Soize (2000), o cálculo do parâmetro de dispersão é dado por:

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{G}-\bar{\mathbf{G}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{G}}\|_F^2} \right\}^{1/2}$$

(2)

que depois de alguns cálculos resulta em:

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{1}{n+1+2\nu_{\mathbf{G}}} \left(1 + \frac{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)}{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \right\}^{1/2}$$

(3)

onde $\delta_{\mathbf{G}}$ é o parâmetro de dispersão ou desvio padrão normalizado para $\mathbf{G} \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$. Logo, tendo por base as Equações (2) e (3) para as matrizes aleatórias de massa, amortecimento e rigidez separadamente, obtém-se:

$$\delta_{\mathbf{M}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{M}-\bar{\mathbf{M}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{M}}\|_F^2} \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{C}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{C}-\bar{\mathbf{C}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{C}}\|_F^2} \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{K}} = \left\{ \frac{E\{\|\mathbf{K}-\bar{\mathbf{K}}\|_F^2\}}{\|\bar{\mathbf{K}}\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad (4)$$

ou:

$$\delta_{\mathbf{M}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{M}}} \left(1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{M}})^2}{tr(\bar{\mathbf{M}}^2)} \right) \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{C}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{C}}} \left(1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{C}})^2}{tr(\bar{\mathbf{C}}^2)} \right) \right\}^{1/2}, \quad \delta_{\mathbf{K}} = \left\{ \frac{1}{n-1+2\nu_{\mathbf{K}}} \left(1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{K}})^2}{tr(\bar{\mathbf{K}}^2)} \right) \right\}^{1/2} \quad (5)$$

em que $\delta_{\mathbf{M}}$, $\delta_{\mathbf{C}}$ e $\delta_{\mathbf{K}}$ são respectivamente os parâmetros de dispersão das matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} .

É possível observar que à medida que se aumenta o valor de $\nu_{\mathbf{G}}$, o parâmetro de dispersão diminui, portanto a incerteza no sistema de matrizes diminui. Isto faz com que seja possível um controle da incerteza escolhendo-se valores de $\nu_{\mathbf{G}}$ diferentes. Se os parâmetros $\nu_{\mathbf{M}}, \nu_{\mathbf{C}}, \nu_{\mathbf{K}} \rightarrow +\infty$, então, $\delta_{\mathbf{M}}, \delta_{\mathbf{C}}, \delta_{\mathbf{K}} \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\mathbf{M} \rightarrow \bar{\mathbf{M}}, \mathbf{C} \rightarrow \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{K} \rightarrow \bar{\mathbf{K}}$ em probabilidade. O que se conclui disso é que os parâmetros $\nu_{\mathbf{M}}, \nu_{\mathbf{C}}, \nu_{\mathbf{K}}$ permitem que a dispersão do modelo probabilístico seja controlada.

Fazendo-se $\theta = 2\nu_{\mathbf{G}}$ na Equação (3), vem:

$$\delta_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{1}{n+1+2\nu_{\mathbf{G}}} \left(1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{G}})^2}{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \right\}^{1/2} \Rightarrow \delta_{\mathbf{G}}^2 = \frac{1}{n+1+\theta} \left(1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{G}})^2}{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right) \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{1}{\delta_{\mathbf{G}}^2} \left\{ 1 + \frac{(tr\bar{\mathbf{G}})^2}{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right\} - (n+1)$$

(6)

4.6 MODELO PROJETADO

O modelo projetado é concebido diretamente pelo projetista. Ele é construído segundo parâmetros geométricos, propriedades constitutivas e modelos matemático-mecânico pré-definidos. Este modelo dá origem a dois outros denominados modelos médio e experimental como já mostrado Figura 1.

Nesta tese, o modelo projetado é dado por um sistema estrutural dinâmico linear amortecido com n graus de liberdade. Tal sistema é representado pela seguinte equação de movimento no domínio do tempo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7)$$

Aplicando a transformada de *Fourier* na Equação (7) com condições iniciais nulas, obtém-se a equação de movimento do sistema no domínio da frequência:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{u}}(z\omega) + z\omega \mathbf{C} \hat{\mathbf{u}}(z\omega) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}(z\omega) = \hat{\mathbf{f}}(z\omega) \quad (8)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + z\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{u}}(z\omega) = \hat{\mathbf{f}}(z\omega) \quad (9)$$

em que os vetores $\mathbf{u}(\bullet)$, $\dot{\mathbf{u}}(\bullet)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(\bullet)$ representam respectivamente os vetores aleatórios de deslocamento, velocidade e aceleração; $\hat{\mathbf{u}}(z\omega)$ é a transformada de *Fourier* do vetor aleatório $\mathbf{u}(t)$; $\mathbf{f}(\bullet)$ representa o vetor determinístico da força externa aplicada ao sistema; $\hat{\mathbf{f}}$ é a transformada de *Fourier* do vetor determinístico \mathbf{f} ; $z = \sqrt{-1}$ é denominado número imaginário; \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são respectivamente as matrizes aleatórias $n \times n$ de massa, amortecimento e rigidez. Tais matrizes são reais, simétricas e positivas-definidas e pertencem ao conjunto *CPD* a ser apresentado no Capítulo 6.

As matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , por simplicidade, são representadas por uma matriz aleatória geral denominada \mathbf{G} , em que $\mathbf{G} \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$. Esta representação é possível porque estas matrizes têm características probabilísticas similares.

4.7 MODELO MÉDIO

O modelo médio pode também ser chamado de modelo determinístico, modelo preditivo, modelo numérico, modelo computacional ou modelo matemático. Eles são idealizações que descrevem a realidade dentro de um determinado grau de aproximação, o qual não se conhece totalmente. Um modelo implica em uma representação simplificada do sistema estrutural que torne possível a obtenção de expressões matemáticas capazes de descrever o comportamento do sistema com suficiente precisão.

O modelo médio é um modelo de previsão do modelo real (ou experimental). Ao observar a Figura 14, pode-se dizer então que seu objetivo é prever a saída de um sistema real para uma

dada entrada. Isto quer dizer que os parâmetros de entrada do sistema médio preveem os parâmetros de entrada do sistema real e a *FRF* do sistema médio prevê a *FRF* do sistema real.

O modelo médio ainda exige parâmetros de entrada de dados que são levados em conta na construção do modelo matemático-mecânico.

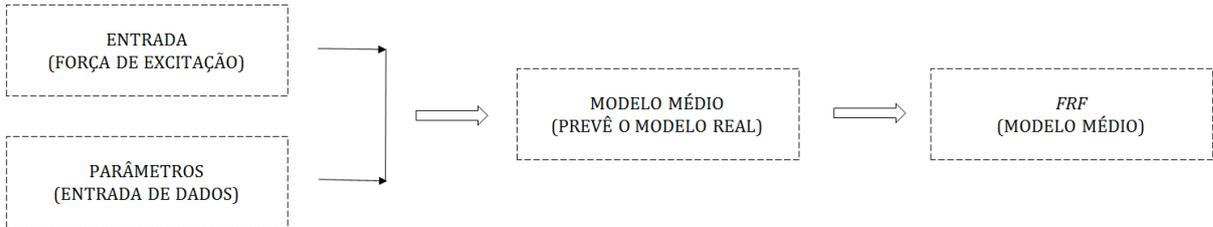


Figura 14: Desenho representativo da construção do modelo médio. Fonte: autor.

O modelo médio é representado pela seguinte equação no domínio do tempo:

$$\bar{M} \ddot{\bar{u}}(t) + \bar{C} \dot{\bar{u}}(t) + \bar{K} \bar{u}(t) = \bar{f}(t) \quad (10)$$

Aplicando a transformada de *Fourier* na Equação (10) com condições iniciais nulas, obtém-se a equação de movimento do sistema no domínio da frequência:

$$-\omega^2 \bar{M} \hat{\bar{u}}(z\omega) + z\omega \bar{C} \hat{\bar{u}}(z\omega) + \bar{K} \hat{\bar{u}}(z\omega) = \hat{\bar{f}}(z\omega) \quad (11)$$

$$(-\omega^2 \bar{M} + z\omega \bar{C} + \bar{K}) \hat{\bar{u}}(z\omega) = \hat{\bar{f}}(z\omega) \quad (12)$$

em que os vetores $\bar{u}(\bullet)$, $\dot{\bar{u}}(\bullet)$ e $\ddot{\bar{u}}(\bullet)$ representam respectivamente os vetores determinísticos (também chamados de vetores médios) de deslocamento, velocidade e aceleração; $\hat{\bar{u}}(\omega)$ é a transformada de *Fourier* do vetor determinístico $\bar{u}(t)$; $\bar{f}(\bullet)$ representa o vetor determinístico (ou vetor médio) da força externa aplicada ao sistema; $\hat{\bar{f}}(\omega)$ é a transformada de *Fourier* do vetor determinístico $\bar{f}(t)$; $z = \sqrt{-1}$ é denominado número imaginário; \bar{M} , \bar{C} e \bar{K} são as matrizes determinísticas (ou matrizes médias) $n \times n$ de massa, amortecimento e rigidez respectivamente. Tais matrizes são reais, simétricas e positivas-definidas e pertencem ao conjunto *CPD* apresentado no Capítulo 6.

De forma semelhante às matrizes aleatórias, as matrizes determinísticas \bar{M} , \bar{C} e \bar{K} , por simplicidade, serão representadas por uma matriz determinística geral denominada \bar{G} , em que $\bar{G} \equiv \{\bar{M}, \bar{C}, \bar{K}\}$.

4.8 MODELO EXPERIMENTAL

O modelo experimental, também chamado de modelo real é o modelo produzido, manufaturado, tendo por base o modelo projetado. Ele é um sistema físico construído por mãos humanas, e por isso, nunca é exatamente conhecido. A Figura 15 mostra um desenho que representa o processo do experimento.

As diferenças que ocorrem nos resultados do modelo médio e do modelo projetado é que caracterizam e explicitam a incerteza de modelo. Isto porque ao se construir o modelo médio, considerações matemáticas-mecânicas são admitidas e isto faz com que seus resultados contenham diferenças por vezes significativas com relação às do modelo projetado. E por outro lado, o modelo experimental também não é idêntico ao modelo projetado no que diz respeito à sua construção e funcionamento. Dessa forma, tanto do modelo médio quanto do modelo real se obtém *FRFs* diferentes com relação ao resultado do modelo projetado e também entre eles. Pode-se dizer então que o modelo médio é considerado um “modelo” incerto com relação ao modelo real.

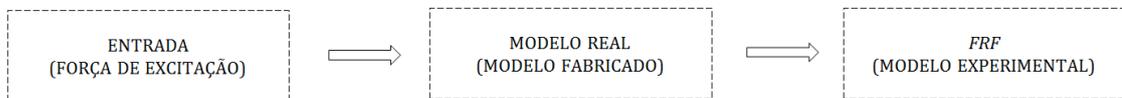


Figura 15: Desenho representativo do experimento. Fonte: autor.

Contudo, ao se propagar as incertezas no modelo médio, seus resultados são comparados com os resultados do modelo experimental. Na distinção entre os dois se torna evidente a presença da incerteza de modelo. E é neste momento que o analista avalia a confiabilidade do modelo médio.

4.9 BANDA DE FREQUÊNCIA E REGIÕES DE FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO

Um passo também importante na aplicação da abordagem não-paramétrica é definir a banda de frequência \mathbb{B} para um sistema dinâmico linear amortecido que é dada por

$$\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}], \quad 0 < \omega_{min} < \omega_{max} \quad (13)$$

onde ω_{min} é a frequência mínima e ω_{max} corresponde à frequência máxima considerada na análise.

Esta definição indica a faixa de frequência na qual se vai trabalhar e que, por sua vez, é um fator importante que também deve ser levado em conta na escolha da metodologia adotada para a quantificação. Tem-se então, segundo Adhikari (2007b), a seguinte divisão:

1. Faixas de baixa frequência de vibração: os comprimentos de onda dos modos de vibração podem se tornar maiores então, o resultado é que a resposta de vibração não é muito sensível aos detalhes do sistema, logo, as incertezas paramétricas podem ser mais facilmente quantificadas nesta faixa de frequência por meio da aplicação da abordagem paramétrica, pois este método considera as incertezas de dados em detalhe.
2. Faixas de média frequência de vibração: deve-se considerar ambos os métodos, pois incertezas paramétricas e não-paramétricas devem ser quantificadas.
3. Faixas de alta frequência de vibração: os comprimentos de onda dos modos de vibração podem se tornar muito pequenos e o resultado é que a resposta de vibração pode ser muito sensível a pequenos detalhes do sistema. Então, incertezas não-paramétricas são melhores quantificadas nesta faixa por meio da utilização da abordagem não-paramétrica.

É claro que não se tem nenhum limite fixo para a definição das faixas de frequência estudadas em regiões de baixa, média e alta frequência de vibração. É necessário que o analista defina a faixa de frequência que deseja trabalhar e avalie se o resultado da quantificação é, de certa forma, aceitável.

Considerando, em última análise, e ao se observar os principais autores citados no Capítulo 2, é possível observar que eles trabalham em faixas bem diferenciadas de frequência.

Em seus artigos, inclusive no último sobre a abordagem não-paramétrica, Soize (2005b) trabalha com faixas de frequência até 1.900 Hz. Portanto, o método é aprovado pelo autor até esta faixa de frequência.

Já em (Sampaio, Ritto, & Cataldo, 2007) e (Sampaio & Cataldo, 2010), a faixa de frequência trabalhada vai de 0 a 7 Hz. Já em (Ritto, Sampaio, & Cataldo, 2008) as análises são

realizadas para frequências de 0 a 1.000 *Hz*. No âmbito das análises realizadas, resultados promissores foram encontrados somente para este último artigo citado. Foi concluído para o estudo realizado que a abordagem não-paramétrica inclui a paramétrica.

Tal conclusão é um ponto de partida para que se estudem os artigos de Sondipon Adhikari que tenta validar a abordagem não-paramétrica para quantificar não só incertezas de modelo mais também as de dados. Além disso, este autor, em suas pesquisas de (Adhikari, 2006) até (Adhikari S. , 2010b) avalia a possibilidade de se aplicar o método não-paramétrico de quantificação de incertezas em toda a faixa de frequência de vibração, que em seus artigos varia de 0 a 8.000 *Hz*, tendo em vista facilitar o cálculo e a análise do profissional. Entretanto, a validação da abordagem ocorre somente para faixas de média e alta frequência de vibração.

4.10 RESPOSTA DO SISTEMA ESTRUTURAL DINÂMICO

A saída ou resposta *FRF* do sistema estocástico, considerando-se a Equação (9), é dada por:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}(z\omega)}{\hat{\mathbf{f}}(z\omega)} = \underbrace{(-\omega^2\mathbf{M} + z\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}}_{\mathbf{D}(z\omega)} = \mathbf{D}^{-1}(z\omega) = \mathbf{H}(z\omega)$$

(14)

$$\mathbf{H}(z\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} + z\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \quad (15)$$

em que $\mathbf{D}(z\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica, $\mathbf{H}(z\omega)$ é uma matriz $n \times n$ complexa e aleatória que corresponde à *FRF* e é obtida para uma banda de frequência definida como na Equação (13).

4.11 PREVISIBILIDADE DO MODELO

Em geral, a partir do modelo projetado se constrói um modelo em Elementos Finitos e também um modelo experimental. Ao se obter as curvas *FRFs* desses dois últimos, verifica-se

que devido às incertezas de modelo presentes, tanto de dados quanto epistêmicas, que não foram quantificadas, o erro, ou desvio, entre o modelo médio e o modelo experimental geralmente não é pequeno o suficiente e deve ser reduzido para que o modelo médio seja uma previsão confiável do modelo experimental. Se este valor fosse zero, os modelos experimental e médio seriam iguais e não haveria incerteza de modelagem, o que não corresponde à realidade portanto, não é possível de acontecer. Neste ponto, então, é que se percebe a importância da quantificação da incerteza.

Em uma nova tentativa de construir um modelo confiável, o analista, após a construção do modelo médio, quantifica as incertezas, obtém as respostas dos sistemas, calcula o desvio entre os modelos e avalia os resultados obtidos. Se o valor deste desvio for suficientemente pequeno, significa que o modelo médio pode ser considerado um modelo que prevê o modelo real. Porém, se o erro não for suficientemente pequeno para as considerações de projeto pré-determinadas, o analista deve obter mais informações sobre o sistema de forma a reduzir as incertezas. Tendo tais informações em mãos, os cálculos anteriores são refeitos e seus resultados novamente avaliados. E o ciclo se repete até que seja suficientemente melhorada a previsibilidade do modelo médio com relação ao modelo real.

Por fim, a modelagem de incertezas de dados e epistêmicas darão subsídio para que o analista tenha a possibilidade de obter um modelo verdadeiramente representativo do modelo real, tornando-o viável.

Capítulo 5

PRINCÍPIOS PARA A QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DE MODELO: SHANNON E JAYNES

5.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

De acordo com Jaynes (1978), a forma de representação da incerteza foi obtida no contexto do Princípio da Máxima Entropia (*PME*), que por sua vez se desenvolveu como uma extensão natural e unificada de duas linhas diferentes de estudos relacionados à Teoria da Probabilidade (*TP*).

Na primeira, pesquisadores como Jakob Bernoulli (1654 – 1705), Thomas Bayes (1701 – 1761), Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), Harold Jeffreys (1891 – 1989), Richard Threlkeld Cox (1898 – 1991), dentre outros, sabiam “*que não se pode fugir do primeiro passo da aplicação da teoria da probabilidade que consiste na atribuição de um valor numérico de probabilidade decorrente de um julgamento inicial para que seja possível o início dos cálculos*” (Justino, 2012) e procuravam encontrar maneiras que fossem adequadas para este fim. Alguns ainda acrescentavam que fossem também diferentes do *Princípio da Razão Insuficiente de Laplace*, que, ainda segundo Jaynes (1978), foi rejeitado terminantemente pelos pesquisadores do século XVIII. Contudo, foi Abraham Wald (1902 – 1950) quem apresentou em 1950 “*regras gerais de conduta pra tomar decisões diante da incerteza*”. Porém, vários pesquisadores

rapidamente perceberam, trabalhando independentemente uns dos outros, que as etapas matemáticas utilizadas na resolução de problemas específicos “*eram idênticas às regras dadas por Laplace no século XVIII, que gerações de estatísticos haviam rejeitado como absurdo metafísico!*”. E a partir desta linha de pesquisa se obteve toda a filosofia para o *PME*.

Na segunda linha de estudos, destacaram-se James Clerk Maxwell (1831 – 1879), Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903), John von Neumann (1903 – 1957), dentre outros, que foram os precursores para que Claude Elwood Shannon (1916 – 2001) desenvolvesse seus estudos na área da Teoria da Informação e que contribuíssem de maneira fundamental para o desenvolvimento do *PME*. A partir desses estudos, a sua base matemática pôde ser desenvolvida. Baseando-se nos estudos de Shannon (1948), Edwin Thompson Jaynes (1922 – 1998) estabeleceu critérios construtivos para que fossem encontradas distribuições de probabilidade tendo por base um conhecimento parcial e que levam a um tipo de inferência estatística chamada de estimativa de máxima entropia. Segundo Jaynes, esta é a estimativa menos tendenciosa possível sobre as informações dadas. Jaynes (1978).

Mais adiante, alguns detalhes sobre os estudos de Shannon e Jaynes serão mostrados de forma a contextualizá-los com o tema desta tese, porém, maiores informações sob a perspectiva histórica da medida da incerteza caracterizada pela entropia de Shannon e do *PME* desenvolvido por Jaynes podem ser encontrados em Jaynes (1958), Jaynes (1963), Jaynes (1967), Jaynes (1978), Jaynes (1979), Jaynes (1981), Jaynes (1984), Jaynes (1986), Jaynes (1988), Jaynes (1991), Uffink (1997), Kyriazis (1998), Pineda (2006), Tavares (s.a.) e Justino (2012).

5.2 REPRESENTAÇÃO DA INCERTEZA: A ENTROPIA DE SHANNON

5.2.1 Shannon e a medida do grau de ignorância humana

Shannon, reconhecido hoje como o pai da teoria da informação, ofereceu as bases para a solução do problema de representação do conhecimento. Ele foi o primeiro a considerar a

comunicação como um problema matemático rigorosamente embasado na estatística. Em seu artigo *A Mathematical Theory of Communication* de 1948 ele cita que o problema fundamental da comunicação é se reproduzir em um ponto a mensagem selecionada em outro ponto de maneira exata ou aproximada.

A mensagem real é aquela que é selecionada a partir de um conjunto de mensagens possíveis. O sistema deve ser projetado para operar para cada seleção possível, não apenas para aquela que efetivamente será escolhida mesmo porque esta é desconhecida no momento do projeto. Se o número de mensagens no conjunto for finito então este número ou qualquer função monótona dele pode ser considerada como uma medida da informação produzida quando uma mensagem é escolhida a partir do conjunto, sendo todas as escolhas igualmente possíveis. (Shannon, 1948).

Shannon atribuiu, no âmbito do processo de comunicação, uma probabilidade p_i para a mensagem transmitida mt_i , e a entropia S para a medida da informação. Porém, tendo em vista que Shannon não disse explicitamente qual o estado de conhecimento que considerou em seu artigo (Shannon, 1948), Jaynes, depois de o estudar, concluiu que:

As diferentes mensagens consideradas devem ser o conjunto de todas aquelas que serão ou deveram ser enviadas através do canal durante sua vida útil; e, portanto, o S de Shannon mede o grau de ignorância do engenheiro de comunicação quando ele projeta o equipamento técnico do canal. (Jaynes E. T., 1978)

No entanto, a primeira reação de Jaynes ao estudar a teoria de Shannon sobre a quantificação da incerteza como sendo a quantificação da entropia, foi perguntar a si mesmo de qual informação tratava Shannon. Tal reação também era compartilhada por outros autores, já que a entropia é uma quantidade física que pode ser medida em laboratório e cada pessoa tem um nível, ou uma quantidade de ignorância, diferente uma da outra. Contudo, Jaynes responde tal questionamento levando em conta variáveis discretas, mas que certamente é válido também para variáveis contínuas, da seguinte forma:

Certamente, pessoas diferentes têm diferentes quantidades de ignorância. O envolvimento de um sistema termodinâmico é uma medida do grau de ignorância de uma pessoa cujo único conhecimento sobre seu microestado consiste nos valores das grandezas macroscópicas X_i que definem seu estado termodinâmico. É uma quantidade completamente "objetiva", no sentido de que é apenas uma função de X_i , e não depende da personalidade de ninguém. Não há, então,

nenhuma razão pela qual não possa ser medida em laboratório. (Jaynes E. T., 1978)

Já as probabilidades p_i “[...] atribuídas a mensagens individuais não são medidas de frequência; elas são apenas meios para se descrever o estado de conhecimento” (Jaynes E. T., 1978).

Shannon apresentou sua teoria para sistemas discretos em que “tanto a mensagem quanto o sinal são uma sequência de símbolos discretos”, para sistemas contínuos “em que a mensagem e o sinal são ambos tratados como funções contínuas” e para sistemas mistos que são aqueles “em que ambas as variáveis discretas e contínuas aparecem”. (Shannon, 1948)

5.2.2 Definição da entropia de Shannon para o caso contínuo

Segundo Shannon (1948), se for considerado que com as informações disponíveis se possa ter um conjunto nep de eventos possíveis cujas probabilidades de ocorrência para a variável x_i , em que $1 \leq i \leq nep$, dadas por $(px_1)_1, (px_2)_2, \dots, (px_{nep})_{nep}$ são conhecidas, pode-se encontrar uma função capaz de medir a incerteza existente neste conjunto. No caso, se tal medida existe e é chamada de $H((px_1)_1, (px_2)_2, \dots, (px_{nep})_{nep})$, é razoável, então, que se exija dela as seguintes propriedades:

(1) ela deve ser contínua em $(px_1)_1, (px_2)_2, \dots, (px_{nep})_{nep}$.

(2) Se todas as probabilidades $(px_1)_1, (px_2)_2, \dots, (px_{nep})_{nep}$ são iguais a $(px_i)_i = \frac{1}{nep}$, então deve ser uma função monotonicamente crescente de nep . Neste caso, se o número de eventos possíveis aumenta, a probabilidade de cada evento diminui em casos de eventos igualmente prováveis, então, como esta é a única informação que se tem a respeito do processo, a incerteza sobre o resultado acaba aumentando.

(3) Se uma “escolha” é dividida em duas escolhas sucessivas, a medida original H deve ser a soma ponderada dos valores individuais de H .

Assim, Shannon (1948) afirma que a única medida $H((px_i)_i)$ que satisfaz as premissas acima para o caso contínuo é dada por:

$$S = S(px_i)_i = -k \int_{-\infty}^{+\infty} (px_i)_i \log_2(px_i)_i dx, \quad 1 \leq i \leq nep \quad (16)$$

em que $S(px_i)_i$ é a entropia de um conjunto de probabilidades $(px_i)_i$, $\log_2(px_i)_i$ é o logaritmo de $(px_i)_i$ na base 2 e k é uma constante positiva que representa a escolha de uma unidade de medida.

5.2.3 O Sinal negativo da entropia de Shannon

Sabe-se que na Termodinâmica a entropia corresponde à desordem de um sistema. Assim, pode-se dizer que quanto maior a desordem desse sistema, maior será sua entropia.

Quando um sistema muda de uma situação de maior ordem (menor desordem) para uma situação de menor ordem (maior desordem), diz-se que a entropia aumentou, ou que a variação de entropia foi maior do que zero. Quando um sistema muda de uma situação de menor ordem (maior desordem) para uma situação de maior ordem (menor desordem), dizemos que a entropia diminuiu, ou que a variação de entropia foi negativa.

De forma resumida, estas ideias podem ser expressas da seguinte maneira:

Nota 1. Se a ordem do sistema diminui \Rightarrow a desordem do sistema aumenta \Rightarrow a entropia aumenta $\Rightarrow \Delta S > 0$.

Nota 2. Se a ordem do sistema aumenta \Rightarrow a desordem do sistema diminui \Rightarrow a entropia diminui $\Rightarrow \Delta S < 0$

No que diz respeito à quantificação de incerteza, a maior entropia se encontra na distribuição uniforme onde não se tem informação nenhuma sobre o sistema, pois a desordem, que pode ser traduzida aqui como *falta de conhecimento*, é grande, no caso, é máxima. Contudo, à medida que as informações (como média e variância) sobre o sistema vão sendo obtidas, o conhecimento sobre ele vai aumentando e o valor da entropia quantificada vai diminuindo. Sendo assim, a incerteza, denominada aqui como uma medida da *ignorância humana*, vai diminuindo e a ordem do sistema vai aumentando. Esta é a tendência: aumentar o conhecimento sobre o sistema e diminuir a incerteza. Com isso, e levando-se em conta as notas colocadas acima, pode-se considerar que, neste caso, o sistema segue o comportamento indicado na nota 2. Isto leva a concluir que a entropia do sistema resulta em um valor negativo.

No entanto, considerando que a entropia corresponde à medida da ignorância humana, um valor negativo não faz sentido portanto, tal medida de Shannon deve ser positiva. Isto justifica o porquê da medida de Shannon ter um sinal negativo, como pode ser verificado na Equação (16).

Outro raciocínio que justifica o sinal negativo da equação da entropia de Shannon é que como $(px_i)_i \leq 1$, então, com o acréscimo do sinal negativo e sendo o resultado do logaritmo um valor negativo, a entropia assume um valor positivo. (Dionísio, Menezes, & Mendes, 2003)

5.2.4 A constante k da entropia de Shannon

A constante positiva k “*representa apenas a escolha de uma unidade de medida*” (Shannon, 1948).

No caso da Equação (16), o logaritmo na base 2 é que faz o valor da entropia resultar em uma unidade de medida mais adequada para a teoria da informação que é chamada dígito binário, ou bit. Dessa forma, a medida da incerteza foi definida para esta unidade de medida e neste caso $k = 1$. Mas dependendo do tipo de trabalho que se vai realizar, é possível alterar a base do logaritmo de forma a facilitar os cálculos e, com isso, a constante k deverá ser corrigida e poderá assumir outros valores. Por exemplo, se for feita uma mudança do logaritmo de base 2 para a base 10, a unidade da informação obtida será em decibel ou Hartley. Se for realizada a mudança da base 2 para a base e , a unidade de informação será Napier ou Nats. (Caliman, 2014)

Shannon (1948) diz que em trabalhos analíticos em que estão envolvidas operações de integração e diferenciação, como esta tese, pode ser útil utilizar a base e , cujo resultado da medida da entropia é dado em unidades naturais. Portanto, considerando-se o logaritmo apresentado na Equação (16), pode-se fazer o seguinte cálculo para a mudança da base 2 para base e :

$$\log_2(px_i)_i = \frac{\log_e(px_i)_i}{\log_e 2} = \frac{\ln(px_i)_i}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \times \ln(px_i)_i \quad (17)$$

neste caso portanto,

$$k = \frac{1}{\ln 2} \quad (18)$$

e a Equação (16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S(px_i)_i = -\frac{1}{\ln 2} \int_{-\infty}^{+\infty} (px_i)_i \ln(px_i)_i dx \quad (19)$$

Outro ponto importante é que a escolha da variável k influencia apenas no maior valor obtido pela medida H , não tendo, assim, influência na FDP (ou seja, na forma da curva) considerada na análise e conseqüentemente na FDP a ser obtida pelo MME , como foi mostrado por Belonsi, Lima, & Gonçalves (2014).

Na tentativa de demonstrar esta propriedade para variáveis contínuas, um gráfico apresentado na Figura 16 foi construído a fim de comprovar tal afirmação dada pelos autores citados. Ele foi construído por meio do cálculo da entropia considerando-se uma variável uniforme contínua e também dois valores distintos para k . A entropia, neste caso, é representada por H .

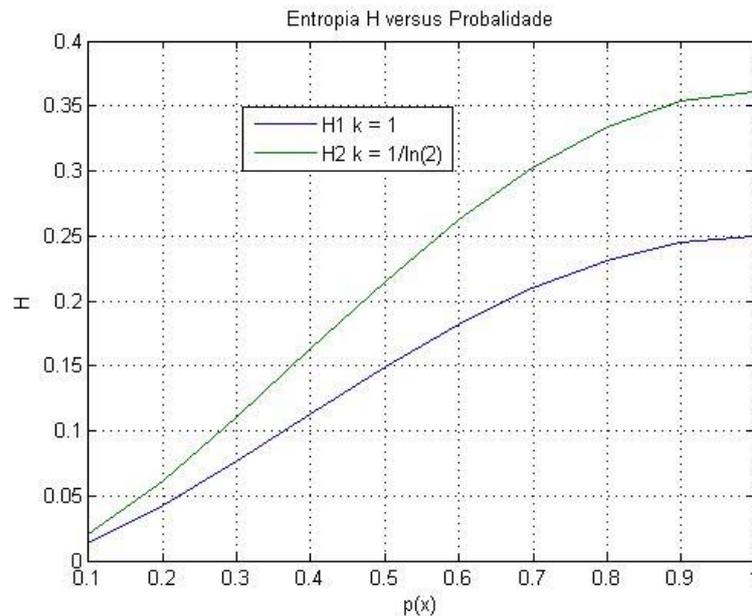


Figura 16: Valor da entropia de uma variável aleatória contínua em função da sua distribuição de probabilidade para valores diferentes de k . (a) $k = 1$. (b) $k = 1/\ln 2$. Fonte: autor.

Contudo, já que a constante k não influencia na obtenção da FDP de máxima entropia, pode-se considerar para efeito desta tese e tendo em vista facilitar a manipulação algébrica que virá mais adiante, $k = \left(\frac{1}{\ln 2}\right) = 0,693147 \cong 0,7 \cong 1$. Sendo assim, da Equação (19) resulta em:

$$S((px_i)_i) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (px_i)_i \ln(px_i)_i dx \quad (20)$$

5.2.5 A entropia de Shannon S em função da FDP $(px_i)_i$

Um ponto que deve ficar muito claro é que a entropia S não é em função da variável x_i apesar de ser escrita muitas vezes por Shannon como $S(x_i)$. Ela é sempre em função da FDP da variável x_i , representada na Equação (20) por $(px_i)_i$ (Dionísio, Menezes, & Mendes, 2003). Pode-se dizer mais concretamente que se x_i é uma variável ou evento possível de ocorrer, então sua FDP pode ser obtida dentre um conjunto de probabilidades $[(px_i)_i]^t = [(px_1)_1, (px_2)_2, \dots, (px_{nep})_{nep}]$ e sua entropia é dada por $S((px_i)_i)$.

No caso desta tese, a variável aleatória x_i é uma matriz aleatória representada por $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$ cujas $FDPs$ são representadas por $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \equiv \{(p_{\mathbf{M}}\mathbf{M}_i)_i, (p_{\mathbf{C}}\mathbf{C}_i)_i, (p_{\mathbf{K}}\mathbf{K}_i)_i\}$. Assim, considerando-se \mathbf{G}_i , pode-se escrever que:

$$[\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i]^t = [(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_1)_1, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_2)_2, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_3)_3, \dots, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_{nep})_{nep}]^t, \quad 1 \leq i \leq nep \quad (21)$$

em que $[\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i]^t$ é o vetor aleatório composto por todas as $FDPs$ das matrizes \mathbf{G} e que tem as incertezas propagadas na matriz aleatória \mathbf{G}_i .

Logo, a Equação (20) resulta em:

$$S(\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i) = - \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \ln(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} \quad (22)$$

em que $S(\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)$ corresponde à entropia ou incerteza associada a uma distribuição de probabilidade. Esta medida assume sempre um valor não-negativo. Além disso, $\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$ pode corresponder a qualquer uma das probabilidades pertencentes ao conjunto mostrado na Equação (21) já que ainda não se sabe qual a FDP de maior entropia.

5.2.6 A integral na entropia de Shannon $S((px_i)_i)$

A entropia é calculada para cada FDP da matriz aleatória \mathbf{G}_i . E como tal matriz deve ser uma matriz real simétrica positiva-definida, a integral deve ser calculada para valores positivos de \mathbf{G}_i . Isto quer dizer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\bullet) dx$ deve ser representada aqui por $\int_{\mathbf{G}_i > 0} (\bullet) d\mathbf{G}$.

Assim, mais uma vez reescreve-se o cálculo da entropia, agora a partir da Equação (17):

$$S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i) = - \int_{G>0} (p_G \mathbf{G}_i)_i \ln(p_G \mathbf{G}_i)_i dG \quad (23)$$

em que $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ na Equação (23) constitui a fórmula final da entropia de Shannon a ser aplicada nesta tese.

5.2.7 Propriedades da medida de Shannon

Como se sabe, a entropia na teoria da informação corresponde à incerteza probabilística associada a uma distribuição de probabilidade, e Shannon derivou a medida da entropia, ou a medida da incerteza, de forma com que ela refletisse certas características desejadas. Algumas delas são citadas a seguir.

Propriedade 1: $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i) = 0$ se, e somente se, todas as probabilidades na Equação (21) são zero, exceto uma delas que deve ter valor unitário. Com isso, pode-se dizer que a medida $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ só desaparece, ou seja, só é nula quando não existe incerteza, quando se está certo quanto à possibilidade de ocorrência de um determinado acontecimento. Neste caso, o nível de entropia é mínimo, porém, o nível de informação é máximo. Isto posto, conclui-se que este é um caso irreal para a modelagem de sistemas dinâmicos em especial os mais complexos.

Propriedade 2: Para uma distribuição contínua, se a matriz aleatória \mathbf{G} é limitada a um certo volume V em seu espaço, então $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ é máxima e igual a $\ln V$ quando $\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i$ é constante e igual a $(1/V)$ no volume. Elas terão o valor $(1/V, 1/V, 1/V, \dots, 1/V)$ que representa à probabilidade correspondente a uma distribuição uniforme. Isto é também intuitivamente a situação mais incerta. Qualquer outra distribuição faz $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ ser menor do que $\ln V$. Esta propriedade segue o princípio da razão insuficiente de Laplace, “*onde atribuir chances iguais aos eventos possíveis é a maneira mais razoável de alguém refletir sua ignorância (e sua incerteza) quanto às chances de ocorrência de cada evento*” (Mattos & Veiga, 2002). Pode-se dizer também a respeito desta propriedade que a medida $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ só é máxima, ou seja, só é unitária, quando existe total incerteza. Aqui também se está certo quanto à possibilidade de ocorrência de um determinado acontecimento. Neste caso, o nível de entropia é máximo, porém, o nível de informação é mínimo.

Propriedade 3: Para duas matrizes aleatórias quaisquer \mathbf{G}_1 e \mathbf{G}_2 , tem-se que $S((p_G \mathbf{G}_1)_1, (p_G \mathbf{G}_2)_2) \leq S((p_G \mathbf{G}_1)_1) + S((p_G \mathbf{G}_2)_2)$. A igualdade só ocorre se, e somente se, \mathbf{G}_1

e \mathbf{G}_2 são independentes. Um exemplo seria para $p(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = p_{\mathbf{G}_1} \times p_{\mathbf{G}_2}$ sem nenhuma possibilidade para um conjunto de pontos com probabilidade zero.

Propriedade 4: $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ é uma função duas vezes diferenciável de $[(p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_1})_1, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_2})_2, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_3})_3, \dots, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_{nep}})_{nep}]$. Esta propriedade é importante porque permite a aplicação de técnicas para maximização de funções diferenciáveis. As derivadas primeira e segunda de $S[\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i]$ existem e são contínuas.

Propriedade 5: $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ é simétrica em relação à permutação de $[(p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_1})_1, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_2})_2, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_3})_3, \dots, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_{nep}})_{nep}]$. A importância desta propriedade está no fato de que as probabilidades $[(p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_1})_1, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_2})_2, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_3})_3, \dots, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_{nep}})_{nep}]$ podem ter sua ordem invertida ao se calcular $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ que seu resultado não se altera.

Propriedade 6: $S(1/V, 1/V, \dots, 1/V)$ é uma função monotonicamente crescente de V . Esta propriedade quer dizer que a entropia da distribuição uniforme (máxima entropia possível) cresce quanto maior for o número de resultados possíveis em nep .

Propriedade 7: $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ é uma função estritamente côncava de $[(p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_1})_1, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_2})_2, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_3})_3, \dots, (p_{\mathbf{G}\mathbf{G}_{nep}})_{nep}]$. Esta propriedade faz o máximo local da função corresponder ao seu máximo global (ou absoluto) e permite que $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$ tenha um único máximo global.

5.3 JAYNES E O PRINCÍPIO DA MÁXIMA ENTROPIA

Segundo Jaynes (1957a), o problema inicial ao se fazer uso da estimativa de máxima entropia está na dificuldade em se obter a *FDP* apropriada quando se tem pouca ou até mesmo nenhuma informação disponível a priori sobre o problema. Além disso, existe também a possibilidade da obtenção de mais de uma *FDP* as quais concordem de igual maneira com as informações disponíveis consideradas e, neste caso, é preciso estabelecer um critério para a escolha de uma *FDP* dentre elas.

Isto posto, Jaynes na tentativa de resolver o problema e tendo em vista as publicações de

Shannon, depois de estudá-los, fez então a seguinte definição relacionada à quantificação da entropia, que quer dizer incerteza:

A única maneira conhecida de se construir a distribuição de probabilidade que representa honestamente um estado de conhecimento incompleto é através da maximização da entropia sujeita a todas as informações que se tem. Qualquer outra distribuição necessariamente assumiria informação que não se tem, ou entraria em contradição com as informações que se têm (Jaynes E. T., 1985).

Isto quer dizer que a distribuição que descreve honestamente o que um indivíduo sabe, que descreve o seu estado de conhecimento sobre o problema em questão, sem que seja assumida qualquer informação a mais, é aquela distribuição que maximiza a entropia de Shannon, aqui denominada conforme Equação (23) como $S(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i)$, sujeita às restrições impostas segundo as informações disponíveis (Jaynes E. T., 1985).

Porém, antes de se proceder ao formalismo do *PME*, é oportuno, para que se entenda a respeito da seu procedimento e aplicação, que se esclareça inicialmente o correto raciocínio que se deve ter a seu respeito.

5.3.1 O Raciocínio correto do Princípio da Máxima Entropia (*PME*)

Nos casos já conhecidos das abordagens ortodoxas, o que se faz é considerar “a classe de todos os conjuntos de dados $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ consistente com a hipótese H_i ”. Já no caso do *PME*, é considerada “a classe de todas as hipóteses $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ consistente com o conjunto de dados D_{obs} que foi realmente observado”. (Jaynes E. T., 1985)

Usando um exemplo do próprio Jaynes, pode-se pensar da seguinte maneira: se uma pessoa vai ao médico e diz a ele todos os seus sintomas, o médico “*não começará a pensar na classe de todos os sintomas que você possa ter, mas que não tenha. Ele pensa sobre a classe de todos os transtornos que podem causar os sintomas que você tem. O primeiro que ele irá procurar é aquele que, nessa classe, parece ser a priori mais provável de sua história médica*” (Jaynes E. T., 1985).

Comparando tal processo realizado pelo médico à aplicação do *PME*, é como se os sintomas apresentados ao médico correspondessem ao conjunto de dados observados pelo

analista, ou seja, ao conjunto de restrições do problema de otimização, são as informações (ou dados) que se têm a priori sobre o problema a ser resolvido. Já os transtornos que podem causar os sintomas do paciente correspondem às hipóteses adotadas no problema, ou seja, dizem respeito às probabilidades de cada uma das possibilidades $[p_G G_i]$ mostradas na Equação (21). Já o diagnóstico do médico, sua palavra final com relação à doença do paciente segundo os sintomas apresentados e o conjunto de hipóteses consideradas, corresponde à *FDP* calculada no processo de maximização da entropia de Shannon sujeita às restrições do problema de otimização.

Se, por ventura, o paciente se lembra de um ou mais sintomas, estes corresponderão a uma ou mais informações conseguidas sobre o problema, que por sua vez se transformam em uma ou mais restrições acrescentadas ao mesmo problema e, com isso, uma nova solução deve ser encontrada. Este é o raciocínio que deve ser realizado na solução de um problema de Máxima Entropia.

A probabilidade não significa representar uma propriedade factual do mundo real, mas sim um estado de conhecimento sobre o mundo. A teoria da probabilidade não é uma ciência empírica e não se deve esperar derivar consequências empíricas do *MME*. A distribuição de probabilidade de entropia máxima representa apenas nossa melhor previsão ou julgamento com base nas informações fornecidas. (Uffink, 1997)

Além do mais, é interessante notar que nos problemas em que o *MME* é apropriado, o que inclui a mecânica estatística,

estamos preocupados, não com frequências em qualquer experimento aleatório, mas com pensamento racional em uma situação em que nossa informação é incompleta. Estamos tentando fazer o melhor raciocínio possível sobre a situação real que existe aqui e agora - e não sobre o longo prazo em algumas outras situações que existem apenas na imaginação de um estatístico. Em tais aplicações, uma distribuição de probabilidade não é uma afirmação sobre frequências, mas apenas um meio de descrever nosso estado de conhecimento. (Jaynes E. T., 1985)

E é este estado de conhecimento que determina a qualidade das decisões que o analista pode tomar em problemas e nas situações que ele encontra no seu dia a dia. É também a estimativa menos tendenciosa possível que se pode obter sobre as informações dadas.

5.3.2 As Informações prévias do *PME*

A princípio, alguns estudiosos tiveram certa dificuldade em aceitar a aplicação do *PME* na quantificação da incerteza. O primeiro motivo que os levou a isso foi por que “*os resultados parecem vir fáceis demais para acreditar*” e o segundo é que “*parece, à primeira vista, que a dinâmica foi ignorada*”. No entanto, a dinâmica não é ignorada já que o que se faz é incluir ao formalismo matemático “*apenas algumas questões extremamente simples, (...) apenas previsões de coisas experimentalmente reproduzíveis; e para estas, todas as circunstâncias que não estão sob o controle do experimentador devem, necessariamente, ser irrelevantes*”. (Jaynes E. T., 1978)

E ainda completa:

Se certas condições macroscopicamente controladas são encontradas, em laboratório, e estas são suficientes para determinar um resultado que possa ser reproduzido, então deve-se considerar que as informações sobre essas condições macroscópicas nos dizem tudo sobre o estado microscópico que é relevante para a previsão teórica desse resultado. Pode parecer, à primeira vista, "incorreto" atribuir probabilidades iguais a priori a todos os outros detalhes, como faz o Princípio da Máxima Entropia; mas, na verdade, estamos atribuindo probabilidades uniformes apenas a detalhes irrelevantes para questões sobre fenômenos reprodutíveis. (Jaynes E. T., 1978)

Acrescentar tais detalhes, ditos irrelevantes, na análise provavelmente não levaria a previsões incorretas, “*isso só nos forçaria a calcular detalhes intrincados que, no final, acabariam com nossas previsões finais. A solução do PME é tão incredivelmente simples só porque elimina esses detalhes irrelevantes logo no início do cálculo, calculando a média sobre eles*” (Jaynes E. T., 1978).

À vista disso, se por um lado é essencial que na distribuição de máxima entropia nenhuma informação a respeito do sistema seja ignorada, por outro, em hipótese alguma se deve atribuir ao problema informações arbitrárias. Jaynes (1957a) ainda nos recorda que “*no problema da previsão, a maximização da entropia não é uma aplicação de uma lei da física, mas apenas um método de raciocínio que assegura que nenhuma suposição arbitrária inconsciente tenha sido introduzida*”.

Isto supõe que

alguns tipos de informações são muito vagos para serem usados em uma teoria matemática por qualquer método conhecido atualmente, embora nosso senso comum seja capaz de fazer algum uso deles. (...) Com a experiência, a pessoa se torna mais hábil em converter informações verbais em restrições matemáticas. (Jaynes E. T., 1985)

A primeira das restrições a ser considerada no problema de otimização é a chamada condição de normalização, já que a soma de todas as possibilidades é igual a 1. Logo,

$$\int_{i=1}^{nep} (px_i)_i dx = 1 \quad (24)$$

Assim sendo, substituindo-se a variável aleatória x_i pela matriz aleatória considerada neste trabalho e denominada por $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$, e considerando-se a Equação (21) tem-se, a partir da Equação (24), que

$$\int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = 1 \quad (25)$$

As demais informações que conseguimos sobre o problema, sejam elas obtidas por meio de dados experimentais ou por outros meios, nos levam a considerar que elas estão contidas na distribuição de probabilidade, ou seja, na *FDP* que se vai calcular.

Segundo Jaynes, é possível que se ajuste a distribuição de probabilidade $p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$ para que se possa “*incorporar determinada informação*” sobre \mathbf{G} . Isso significa que, pela aplicação de métodos adequados, é possível retirar esta mesma informação de $p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$.

De acordo com (Jaynes E. T., 1978) “*em princípio, todo tipo diferente de informação testável gerará um tipo diferente de problema matemático. Mas há uma classe importante de problemas para os quais a solução geral foi dada de uma vez por todas por Gibbs*”. Neste caso, e segundo o mesmo autor, se as restrições consistem em especificar valores médios de certas funções $(fx_1)_1, (fx_2)_2, \dots, (fx_m)_m$, vale a equação a seguir para variáveis contínuas:

$$\int_{i=1}^{nep} (px_i)_i (fx_i)_r dx = f_r, \quad 1 \leq r \leq m \quad (26)$$

em que x_i é a variável contínua considerada, nep é o número de eventos possíveis de ocorrer, $(px_i)_i$ é a probabilidade em função da variável x_i , $(fx_i)_r$ é uma função de x_i onde $1 \leq r \leq m$,

em que m é o número de funções $f x_i$ e f_r é um valor dado na declaração do problema e que é chamado de valor médio.

Porém, como se sabe, o lado direito da Equação (26) é conhecido como valor médio esperado (ou esperança matemática) e, portanto, pode-se escrever que:

$$E((f x_i)_r) = \int_{i=1}^{nep} (p x_i)_i (f x_i)_r dx = f_r, \quad 1 \leq r \leq m \quad (27)$$

Com isso, Jaynes (1978) quer dizer que o valor médio f_r e a esperança matemática $E((f x_i)_r)$ da variável aleatória x_i devem coincidir.

Sendo assim, as restrições matemáticas envolvidas no problema de otimização tomarão a forma de “*expectativas de várias quantidades sobre as quais temos algumas informações*”. Este é o tipo de restrição mais simples e que geralmente se estuda (Jaynes E. T., 1985).

Entretanto, é preciso recordar que esta tese trabalha com uma variável aleatória (como x_i) e não com uma função de variáveis aleatórias (como $f x_i$), logo, é possível reescrever a Equação (22) como:

$$E((x_i)_r) = \int_{i=1}^{nep} (p x_i)_i (x_i)_r dx = f_r, \quad 1 \leq r \leq m_1$$

(28)

A partir disto, tem-se a segunda restrição do problema de otimização para esta tese. Com base em uma quantidade m_1 de dados apresentados pelo problema, obtém-se m_1 variáveis aleatórias x_i , que no caso correspondem às matrizes aleatórias $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$ portanto, $m_1 = 3$. A partir delas se obtém as matrizes médias $\bar{\mathbf{G}} \equiv \{\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{K}}\}$, que, por sua vez, substituirão o termo f_r na Equação (28).

Logo, é possível escrevê-la da seguinte maneira:

$$E[(\mathbf{G}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{G}_i)_r (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_r, \quad 1 \leq r \leq m_1$$

(29)

Além da adição da média probabilística, denominada na Equação (28) por f_r e na Equação (24) por $\bar{\mathbf{G}}_r$, é preciso especificar a média probabilística ao quadrado f_r^2 ou qualquer número

de momentos f_r^n ou funções mais gerais (Jaynes E. T., 1978).

No caso desta tese, uma restrição relacionada com a existência do momento inverso da matriz de rigidez dinâmica deve ser adicionada partindo-se do princípio de que ela “*deve existir para que a solução estocástica* (\dots) *seja um processo estocástico de segunda ordem*” (Soize, 2005c) . Este é o terceiro tipo de restrição previsto por Jaynes.

Assim, pode-se escrever, tendo como referência as definições apresentadas pelas Equações (14) e (15) que:

$$E[\|\mathbf{H}(\omega)\|_F^v] < +\infty, \quad \forall \omega \quad (30)$$

em que $v \geq 1$ é um inteiro positivo que representa a ordem do momento que se está querendo calcular e $\|\bullet\|_F$ é a norma de *Frobenius*.

Mas como $\mathbf{H}(\omega)$ dada pela Equação (15) é também dependente das matrizes aleatórias \mathbf{M}_i , \mathbf{C}_i e \mathbf{K}_i , e estas são representadas por $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$, pode-se escrever, segundo (Soize, 2000):

$$E\left[\|\mathbf{G}_i^{-1}\|_F^{v_G}\right] < +\infty, \quad \forall \omega$$

(31)

E segundo Jaynes,

geralmente, sempre que descobrimos que não estamos obtendo uma solução normalizável, é assim que a teoria nos diz que ainda não especificamos informações suficientes para justificar quaisquer inferências definidas. Como em qualquer situação de informação insuficiente, não podemos esperar obter algo por nada, e o único remédio é obter mais informações. Quase sempre, acontece que a pessoa que usa a teoria, na verdade, tinha mais algumas informações que ela não havia colocado nas equações, sem perceber que isso era essencial. (Jaynes E. T., 1985)

Ademais é fundamental observar que

como dito em Kyriazis & Wöger (1998), se duas pessoas estabelecem distribuições de probabilidade diferentes considerando que se tenha a mesma informação incompleta sobre um mensurado, então, isto só pode significar que

uma dessas duas pessoas fez uso de mais informação do que realmente foi fornecida. (Justino, 2012)

5.3.3 O formalismo do *PME*

Em teoria da informação, maximizar a entropia significa determinar a distribuição de probabilidade que represente o máximo de incerteza, dadas certas restrições. Ou seja, significa determinar a distribuição (...) que seja mais parecida com a uniforme e diferindo dela apenas devido às restrições. Estas, por sua vez, refletem algum tipo de informação prévia sobre o fenômeno probabilístico de interesse, como, por exemplo, a média e a variância da distribuição que se quer determinar. (Mattos & Veiga, 2002)

No caso de sistemas dinâmicos lineares, a variável aleatória é a matriz real, simétrica e positiva-definida dada aqui por \mathbf{G}_i e ela assume variações com diferentes possibilidades, sendo então distintas umas das outras. Sendo assim, pode-se representar tal conjunto de possibilidades por $[\mathbf{G}_i]^t = [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \dots, \mathbf{G}_n]^t$. Além disso, a probabilidade de ocorrência de \mathbf{G}_i , $\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i$, também assume diferentes valores já representados anteriormente na Equação (21). Se a dificuldade inicial foi amenizada com a existência de alguma informação I sobre $\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i$, o problema agora é representar $\mathbf{p}_G \mathbf{G}_i$ por uma função densidade de probabilidade, denominada *FDP* que tenha entropia máxima enquanto concorda com a informação I .

Tal problema só pode ser solucionado por meio da aplicação do método de otimização que é um processo em que se encontra uma função ótima que expressa o objetivo a ser alcançado pelo problema em estudo. Ele é tratado como um método utilizado na determinação de uma ou mais soluções admissíveis, as quais correspondem a valores extremos de uma ou mais funções, denominadas funções objetivas.

A aplicação do *PME* à solução de um problema pressupõe expressá-lo como um problema de otimização que, segundo Rao (2009), e de uma forma geral, pode ser representado como:

$$\begin{aligned}
 \text{Encontrar } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k_1} \end{pmatrix} \\
 &\text{que maximize} \quad f(\mathbf{x}) \\
 &\text{sujeita as restrições} \quad \begin{cases} h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, 2 \dots k_2 \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0, & j = 1, 2 \dots k_3 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{32}$$

em que \mathbf{x} é chamado de vetor de projeto que, por sua vez é composto pelas variáveis de projeto ou variáveis de decisão. $f(\mathbf{x})$ representa a função objetivo que é escolhida em função da natureza do problema, ela indica um critério para que seja cumprido na escolha da melhor solução do problema de otimização e, neste caso, o problema é chamado monoobjetivo. Quando existe mais de um critério a ser satisfeito simultaneamente, duas ou mais funções objetivo podem ser usadas, neste caso, tem-se um problema multiobjetivo. Já as duas restrições apresentadas e que correspondem a restrições de igualdade $h_j(\mathbf{x})$ e desigualdade $g_j(\mathbf{x})$, compõem o conjunto das restrições de projeto. Elas podem ou não existir em um problema de otimização dependendo do projeto em análise e são representadas por um vetor de restrições de projeto denominado $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{nr}\}$, em que nr corresponde ao número de restrições consideradas. (Rao S. S., 2009)

Vale lembrar que existem dois tipos de restrições que podem ser incluídas em um problema de otimização: as restrições de comportamento ou funcionais, que representam limitações referentes ao comportamento ou performance do sistema, e as restrições geométricas ou laterais, que representam aquelas limitações físicas relacionadas à viabilidade, fabricação e transporte. (Rao S. S., 2009)

Neste contexto, levando-se em conta a Equação (32) e a medida da entropia de Shannon apresentada na Equação (23), pode-se escrever o problema de otimização da entropia de Shannon, sujeita às restrições dadas pelas Equações (25), (29) e (31) para a quantificação de incerteza referente a problemas contínuos como:

$$\text{Encontrar} \quad (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i = \left\{ \begin{array}{c} (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_1)_1 \\ (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_2)_2 \\ \vdots \\ (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_{nep})_{nep} \end{array} \right\}$$

$$\text{que maximize} \quad S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i = - \int_{\mathbf{G}_i > 0} (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \ln(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \, d\mathbf{G}$$

$$\text{s. a.} \quad D = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \, d\mathbf{G} = 1, & i = 1, \dots, nep \\ E[(\mathbf{G}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{G}_i)_r (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \, d\mathbf{G} = \bar{G}_r, & r = 1, \dots, m_1 \\ E[\|\mathbf{G}_i^{-1}\|_F^{v_{\mathbf{G}}}] < +\infty & i = 1, \dots, nep \\ (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \geq 0, & i = 1, \dots, nep \end{array} \right. \quad (33)$$

em que se deseja maximizar a equação $S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$, que corresponde à função objetivo do problema, de forma a encontrar uma *FDP* para \mathbf{G}_i que represente, juntamente com parâmetros adequados, a máxima expressão da ignorância humana sobre os possíveis resultados do problema, e que satisfaça as condições propostas pelo conjunto viável D , que, de acordo com Camponogara (2006), definem o espaço factível de soluções. $p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$ é a *FDP* de máxima entropia que se quer encontrar e que pertence ao vetor de *FDPs* $\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$. Ele é o vetor de projeto e é composto pelas variáveis de projeto $[(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_1)_1, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_2)_2, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_3)_3, \dots, (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_{nep})_{nep}]$ definidas na Equação (21) que são resultados possíveis de serem obtidos e que também são chamadas de variáveis de decisão. $\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$ contém as *FDPs* resultantes da variação estocástica de \mathbf{G} , que por sua vez é uma matriz aleatória $n \times n$ que contém variáveis aleatórias e que é utilizada para o cálculo das *FDPs* $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ contidas em $\mathbf{p}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i$. $E[\bullet]$, segundo Mattos & Veiga (2002), caracterizam as chamadas restrições de consistência e aqui cada $E[\bullet]$ representa o momento de ordem $v_{\mathbf{G}}$ (que são inteiros positivos), já previstas por Jaynes (1985). Por último, a restrição $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \geq 0$ é uma restrição geométrica (ou lateral) que possui uma desigualdade. São as restrições de não-negatividade $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \geq 0$ e elas implicam que todas as n *FDPs* devem ser positivas.

Por último, o conjunto viável D é composto, de maneira geral, por quatro restrições do problema de otimização. A primeira corresponde à restrição de normalização, a segunda é a chamada restrição do modelo médio, a terceira é denominada restrição do momento inverso de

G_i e a quarta é a restrição de não-negatividade. Tais restrições tem suas particularidades portanto, serão estudadas detalhadamente no Capítulo 7. Com isso, será possível apresentar o problema de otimização final a ser solucionado, sob uma fórmula mais eficiente para a sua solução.

Capítulo 6

CONJUNTO POSITIVO-DEFINIDO (CPD) E SUAS PROPRIEDADES

Soize (2005a) coloca 5 espaços amostrais segundo propriedades distintas que “*são úteis para modelar dados e modelar incertezas em mecânica computacional*”. São eles:

1. $M_{n,m}(\mathbb{R})$: espaço amostral de todas as matrizes retangulares ($n \times m$) e reais.
2. $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$: espaço amostral de todas as matrizes quadradas ($n \times n$) e reais.
3. $M_n^S(\mathbb{R})$: espaço amostral de todas as matrizes quadradas ($n \times n$), reais e simétricas.
4. $M_n^{+0}(\mathbb{R})$: espaço amostral de todas as matrizes quadradas ($n \times n$), reais, simétricas e semi-positivas-definidas.
5. $M_n^+(\mathbb{R})$: espaço amostral de todas as matrizes quadradas ($n \times n$), reais, simétricas e positiva-definidas.

Dessa forma, vale a relação:

$$M_n^+(\mathbb{R}) \subset M_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset M_n^S(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \subset M_{n,m}(\mathbb{R}) \quad (34)$$

Convém notar que no caso da modelagem estocástica é preciso atentar para 3 conjuntos

cujas propriedades auxiliam de forma determinante no desenvolvimento algébrico das equações envolvidas na obtenção da *FDP* apropriada e seus parâmetros. São eles: $M_n(\mathbb{R})$, $M_n^S(\mathbb{R})$ e $M_n^+(\mathbb{R})$, sendo que este último, além de ter suas propriedades específicas, ainda engloba as propriedades dos outros dois.

Isto posto, pode-se agora definir o *CPD*, chamado de SE^+ por Soize (2005b), como sendo o conjunto de todas as matrizes aleatórias \mathbf{G}_i com valores em $M_n^+(\mathbb{R})$ que é o espaço composto por matrizes quadradas, reais, simétricas e positiva-definidas. No caso desta tese, deste conjunto fazem parte, por exemplo, as matrizes \mathbf{G}_i e $\bar{\mathbf{G}}$, já definidas Capítulo 6 Capítulo 5.

Este conjunto é a base para todo o processo de modelagem estocástica. Ao se fazer uso do *CPD*, é possível, por meio do *PME* no contexto da *TMA*, se obter a *FDP* com parâmetros apropriados resolvendo-se o problema de maximização da entropia de Shannon sujeita às restrições do problema de otimização, que são definidas com base em informações confiáveis e que estejam disponíveis a priori.

Segundo Soize,

para aplicações físicas, o conjunto mais importante da teoria de matriz aleatória é o *Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)* para o qual os elementos são constituídos de matrizes aleatórias simétricas reais com entradas estatisticamente independentes e que são invariantes sob transformações lineares ortogonais”. (Soize, 2003a)

Porém, a utilização do *GOE* não foi validada “*para a faixa de frequências de interesse em dinâmica estrutural, vibração e sistemas vibro acústicos que são concernentes às faixas de baixa, média e alta frequência*” (Soize, 2003a). Dessa forma, se fez necessário o estudo de um conjunto adequado que pudesse ser utilizado na quantificação de incertezas de modelagem de sistemas dinâmicos e tal conjunto adequado é chamado aqui de *CPD*.

Logo, o conjunto de matrizes *CPD* que pertencem ao espaço $M_n^+(\mathbb{R})$ “*é usado para construir o modelo de probabilidade das matrizes generalizadas de massa, amortecimento e rigidez do modelo reduzido para sistemas dinâmicos sem deslocamentos de corpo rígido*” (Soize, 2005b).

No que diz respeito às matrizes \mathbf{G}_i , elas pertencem ao conjunto *CPD*. Considerando-se que $\|\bullet\|_F$ é a norma *Frobenius* de (\bullet) , tal conjunto têm as seguintes propriedades colocadas

por (Soize, 2005b):

1. É quase certo de que a matriz aleatória \mathbf{G}_i seja real positiva-definida: $\mathbf{G}_i \in M_n^+(\mathbb{R})$.
2. A matriz aleatória \mathbf{G}_i é uma variável aleatória de segunda ordem: $E[\|\mathbf{G}_i\|_F^2] < +\infty$.
3. O valor médio da matriz aleatória \mathbf{G}_i é tal que $E\{\mathbf{G}_i\} = \bar{\mathbf{G}} \in M_n^+(\mathbb{R})$.
4. A matriz aleatória \mathbf{G}_i é tal que $E[\|\mathbf{G}_i^{-1}\|^2] \leq E[\|\mathbf{G}_i^{-1}\|_F^2] < +\infty$.

Conseqüentemente, a matriz aleatória \mathbf{G}_i pertencente ao conjunto *CPD* satisfaz as restrições do problema de otimização apresentadas na Equação (33).

Assim sendo, neste momento é oportuno observar a Figura 17 referente a um esquema onde se pode verificar mais claramente as propriedades das matrizes aleatórias do conjunto *CPD* pertencentes ao espaço $M_n^+(\mathbb{R})$ que, por sua vez, inclui aquelas derivadas dos conjuntos $M_n(\mathbb{R})$ e $M_n^S(\mathbb{R})$, como já dito anteriormente. Na sequência, tais propriedades, que serão utilizadas diretamente na obtenção da *FDP* de máxima entropia, são apresentadas em detalhe.

Vale destacar também que, por simplicidade na representação das matrizes e dos formulários apresentados, o índice i das matrizes aleatórias e das *FDPs* serão suprimidos daqui em diante neste capítulo.

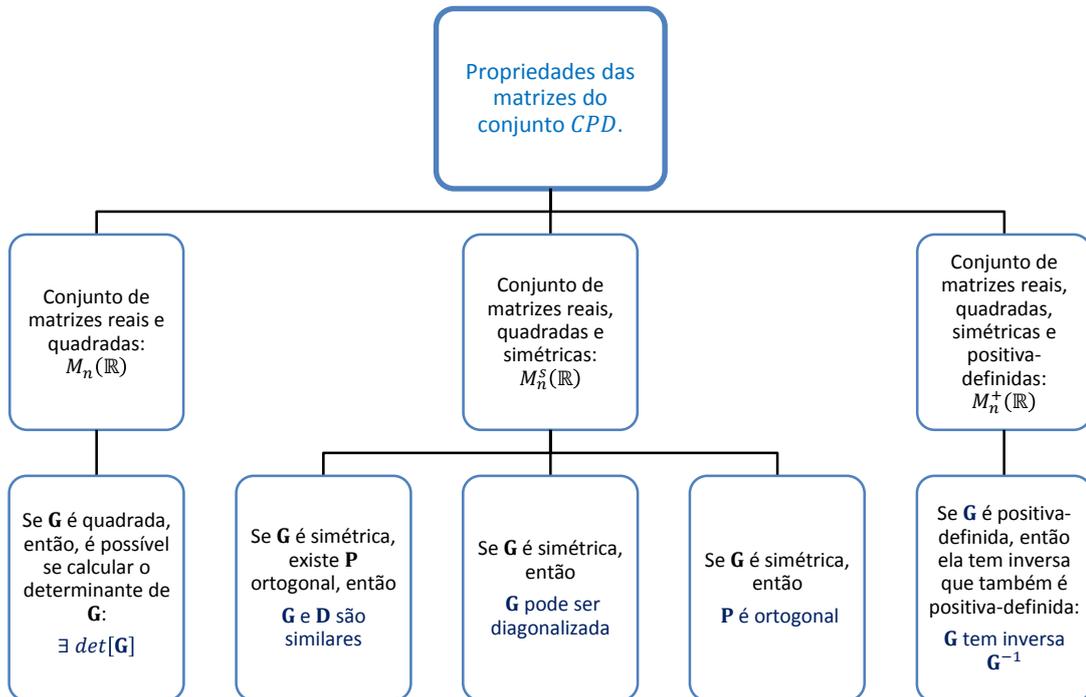


Figura 17: O CPD e suas principais propriedades. Fonte: autor.

6.1 CONJUNTO DE MATRIZES QUADRADAS REAIS: $M_n(\mathbb{R})$

Já se sabe que as matrizes aleatórias \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} , têm dimensão $(n \times n)$, ou seja, são quadradas, e também são reais. Como, por simplicidade, elas serão representadas por $\mathbf{G} \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$, então esta também é uma matriz quadrada $(n \times n)$ real, sendo n o número de graus de liberdade da matriz \mathbf{G} .

O fato de \mathbf{G} ser uma matriz quadrada e real traz algumas propriedades importantes que podem ser usadas para obtenção da FDP no processo da modelagem estocástica. Segue algumas delas.

6.1.1 Determinante das matrizes aleatórias

Propriedade precedente: para que o determinante da matriz \mathbf{G} exista é necessário que esta matriz seja quadrada.

Definição: Seja \mathbf{G} uma matriz quadrada ($n \times n$), o determinante de \mathbf{G} , representado por $\det(\mathbf{G})$ ou $|\mathbf{G}|$, é um número real associado a \mathbf{G} .

Cálculo: o determinante da matriz $\mathbf{G} \in M_n(\mathbb{R})$ é dado por

$$\det(\mathbf{G}) = |\mathbf{G}| = \sum g_{ii} \cdots g_{nn} = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n, \quad 1 \leq i \leq n \quad (35)$$

em que $n = gdl$ de \mathbf{G} e $(\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n)$ correspondem aos autovalores de \mathbf{G} .

6.1.2 Traço das matrizes aleatórias

Propriedade precedente: para que o traço da matriz \mathbf{G} exista é necessário que esta matriz seja quadrada.

Definição: Seja \mathbf{G} uma matriz quadrada ($n \times n$), o traço de \mathbf{G} , representado por $tr(\mathbf{G})$, é “uma função escalar definida como a soma dos elementos da diagonal” de \mathbf{G} . (Lima, 2007)

Cálculo: o traço da matriz $\mathbf{G} \in M_n(\mathbb{R})$ é dado por

$$tr(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^n g_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (36)$$

em que $n = gdl$ de \mathbf{G} e $(\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n)$ correspondem aos autovalores de \mathbf{G} .

6.2 CONJUNTO DE MATRIZES REAIS SIMÉTRICAS: $M_n^S(\mathbb{R})$

Propriedade precedente: para uma matriz \mathbf{G} ser simétrica (não-singular), ela deve antes ser quadrada e real.

Definição: uma matriz real simétrica é aquela que obedece à regra $g_{ij} = g_{ji}$ em que vale a seguinte relação:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^t \quad (37)$$

Teorema 1: Se \mathbf{G} é uma matriz simétrica, então existe uma matriz ortogonal $\mathbf{P}(\mathbb{R})$ ($n \times n$), tal que, $\mathbf{P}^t \mathbf{G} \mathbf{P} = \mathbf{D}$, onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal de ordem n . (Elias, 2010)

Teorema 2: se \mathbf{G} e \mathbf{D} são $(n \times n)$ e \mathbf{P} $(n \times n)$ é não-singular, tem-se que, dessas matrizes aleatórias, \mathbf{G} e \mathbf{P} são invariantes com relação à permutação cíclica dos fatores, ou seja, a ordem de multiplicação das matrizes pode ser alterada conforme um padrão cíclico sem que se tenha alteração no valor do traço. E deve-se ficar atento para que se faça realmente uma permutação cíclica, já que a permutação não-cíclica pode não preservar o traço. (Meyer, 2000)

Assim, pode-se escrever:

$$\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{D}) \quad (38)$$

Teorema 3: segundo (Lima, 2007), se \mathbf{D} é $(n \times n)$ e \mathbf{P} $(n \times n)$ é qualquer matriz ortogonal, então,

$$\text{tr}(\mathbf{P}^t\mathbf{D}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{D}) \quad (39)$$

A seguir são apresentadas algumas propriedades importantes para o desenvolvimento da modelagem estocástica e que derivam do fato da matriz aleatória \mathbf{G} ser simétrica.

6.2.1 Matrizes similares

Propriedade precedente: para que exista uma matriz ortogonal \mathbf{P} que possibilite a similaridade entre \mathbf{G} e \mathbf{D} , \mathbf{G} deve ser simétrica.

Definição: Considerando-se \mathbf{G} e \mathbf{D} como sendo matrizes quadradas $(n \times n)$ de mesma ordem, diz-se que as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{D} são similares se, e somente se, existir uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_{n \times n}$ não-singular, ou seja, invertível, e de dimensão também $(n \times n)$ tal que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{P}$$

(40)

Este produto é chamado de transformação de similaridade em \mathbf{G} e é essencial no processo de diagonalização de matrizes.

Teorema 1: As matrizes similares \mathbf{G} e \mathbf{D} têm a mesma equação (ou polinômio) característica e portanto, têm também os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades. Estes autovalores ocupam a diagonal de \mathbf{D} . Pode-se dizer então que \mathbf{G}^k e \mathbf{D}^k são similares para

todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, matrizes similares não precisam ter os mesmos autovetores. (Meyer, 2000)

Teorema 2: Os determinantes das matrizes similares são iguais, ou seja, $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{D})$. (Fogo, 2013)

6.2.2 Diagonalização de matrizes

Propriedade precedente: para que \mathbf{G} possa ser diagonalizada, é necessário que ela seja simétrica, o que possibilita a similaridade entre \mathbf{G} e \mathbf{D} .

Condições para diagonalização de matrizes: A matriz aleatória \mathbf{G} é diagonalizável se, e somente se, ela tiver n autovetores linearmente independentes e se \mathbf{D} for uma matriz diagonal. (Elias, 2010)

A aplicação do processo de diagonalização fará com que a matriz \mathbf{G} seja transformada em uma matriz diagonal. Isto é conveniente tendo em vista que algumas operações com matrizes diagonais são muito mais fáceis de serem realizadas do que quando se trabalha com matrizes não-diagonais. É o caso, por exemplo, de matrizes elevadas a uma potência. Uma matriz cheia elevada a uma certa potência é muito mais complicada de se trabalhar e resolver do que uma matriz diagonal elevada a esta mesma potência.

Definição: Uma matriz aleatória \mathbf{G} , de dimensão $(n \times n)$ é diagonalizável se ela é semelhante a uma matriz diagonal \mathbf{D} , ou seja, se existe uma matriz \mathbf{P} $(n \times n)$, tal que vale a Equação (35).

6.2.3 Matrizes ortogonais

Propriedade precedente: para que a matriz \mathbf{P}_n seja ortogonal, é necessário que ela seja simétrica.

Definição: Uma matriz invertível \mathbf{P} é ortogonal se:

$$\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$$

(41)

Teorema 1: \mathbf{P} é uma matriz cujas colunas são, respectivamente, n autovetores linearmente independentes de \mathbf{G} . (Elias, 2010)

6.3 CONJUNTO DE MATRIZES REAIS SIMÉTRICAS E POSITIVAS-DEFINIDAS: $M_n^+(\mathbb{R})$

Propriedade precedente: para uma matriz \mathbf{G} ser positiva-definida, ela deve antes ser quadrada, real e simétrica.

Definição: A matriz real e simétrica $\mathbf{G} (\mathbb{R})$ é positiva-definida se:

$$\mathbf{x}^t \mathbf{G} \mathbf{x} > 0 \quad (42)$$

para todo autovetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero.

Identificação de uma matriz positiva-definida: é condição necessária e suficiente para que uma matriz Hermitiana \mathbf{G} seja positiva-definida, que todos os seus autovalores sejam positivos. (Bronson, 1989)

Teorema 1: Se \mathbf{G} é uma matriz positiva-definida, então, o $\det(\mathbf{G}) > 0$. (Elias, 2010)

Teorema 2: Se \mathbf{G} é positiva-definida, então \mathbf{G} é invertível e \mathbf{G}^{-1} também é positiva-definida. (Elias, 2010)

Teorema 3: Se \mathbf{G} é positiva-definida, então, os elementos de sua diagonal e, portanto, seus autovalores, são todos positivos. (Elias, 2010)

Teorema 4: Uma matriz \mathbf{G} positiva-definida é não-singular. Vale lembrar que as matrizes não-singulares tem inversa única. (Lima, 2007)

Para uma matriz ser positiva-definida, ela tem necessariamente que ser quadrada, real e simétrica, portanto, as matrizes pertencentes ao conjunto $M_n^+(\mathbb{R})$, além de terem as

propriedades mostradas referentes às matrizes positivas-definidas, também têm todas as propriedades já mostradas anteriormente.

A seguir são apresentadas algumas outras propriedades importantes para o desenvolvimento da modelagem estocástica e que derivam do fato da matriz aleatória \mathbf{G} ser positiva-definida.

6.3.1 Matrizes inversas

Propriedade precedente: para que uma matriz \mathbf{G} tenha uma inversa \mathbf{G}^{-1} é necessário que ela seja positiva-definida. Assim sua inversa também será positiva-definida.

Definição: A matriz quadrada \mathbf{G} de dimensão $(n \times n)$ é inversível (ou invertível), ou não-singular, se existe uma matriz \mathbf{G}^{-1} também quadrada e de mesma dimensão $(n \times n)$, tal que:

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_n \quad (43)$$

em que \mathbf{G}^{-1} tem dimensão $(n \times n)$ e é chamada de matriz inversa de \mathbf{G} . \mathbf{I}_n é a matriz identidade também de dimensão $(n \times n)$.

Teorema 1: \mathbf{G} , de dimensão $(n \times n)$, é inversível (ou não-singular) se, e somente se, $\det(\mathbf{G}) \neq 0$, senão \mathbf{G} não é inversível (ou seja, é singular). (Junior, 2015b)

Capítulo 7

RESTRIÇÕES E PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO A SER RESOLVIDO

A matriz aleatória $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$ é capaz de assumir valores matriciais contínuos $\mathbf{G}_i (i = 1, 2, \dots, nep)$ que por sua vez tem sua FDP correspondente $[\mathbf{p}_G \mathbf{G}]^t = [(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_1)_1, (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_2)_2, (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_3)_3, \dots, (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_{nep})_{nep}]$, “determinada unicamente por certas exigências muito elementares de consistência e aditividade” (Shannon, 1948). Tais exigências, por sua vez correspondem às restrições impostas segundo as informações obtidas previamente. Elas foram incorporadas ao problema de otimização apresentado na Equação (33) e serão discutidas em detalhes nesse capítulo.

7.1 A RESTRIÇÃO NATURAL

A primeira restrição de projeto da Equação (33) é uma restrição geométrica (ou lateral) chamada condição natural ou de normalização. Para entendê-la, deve-se ter em mente que o conjunto de todas as possibilidades que um experimento pode ter é chamado de espaço amostral e que a soma de todas essas possibilidades é igual a 1, ou seja, $(\mathbf{p}_G \mathbf{G}_1)_1 + (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_2)_2 + (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_3)_3 + \dots + (\mathbf{p}_G \mathbf{G}_{nep})_{nep} = 1$, em que nep é o número de eventos possíveis.

Considerando-se cada uma das matrizes aleatórias do sistema dinâmico linear amortecido, vem que:

$$\int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{M}} \mathbf{M}_i)_i d\mathbf{M} = 1, \quad i = 1 \dots nep \quad (44)$$

$$\int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{C}} \mathbf{C}_i)_i d\mathbf{C} = 1, \quad i = 1 \dots nep \quad (45)$$

$$\int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_i)_i d\mathbf{K} = 1, \quad i = 1 \dots nep \quad (46)$$

ou de uma forma generalizada para $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$, e como já mostrado na Equação (25), tem-se:

$$\int_{i=1}^{nep} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = 1, \quad i = 1 \dots nep \quad (47)$$

Mas valendo-se do fato de que a matriz aleatória \mathbf{G}_i deve ser uma matriz real simétrica positiva-definida e que, por isso, a integral deve ser calculada para valores positivos de \mathbf{G}_i , é também possível escrever a Equação (47) da seguinte forma:

$$\int_{\mathbf{G}_i > 0} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = 1, \quad i = 1 \dots nep \quad (48)$$

7.2 A RESTRIÇÃO DO MODELO MÉDIO

De acordo com Mattos & Veiga (2002), a segunda restrição de projeto apresentada na Equação (33), denominada restrição de comportamento (ou funcional), dá origem à restrições de consistência. No caso desta tese, receberá o nome de restrição do modelo médio.

As matrizes médias, também conhecidas por matrizes determinísticas, podem ser obtidas por meio da modelagem em elementos finitos do sistema em estudo. Elas são representadas por $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ e devem ser iguais às esperanças matemáticas das matrizes $\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i$ e \mathbf{K}_i que, por sua vez, representam o “*valor médio esperado*” de uma experiência ao repeti-la um certo número de vezes.

Sendo, então, as matrizes $\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i$ e \mathbf{K}_i variáveis aleatórias de segunda ordem pertencentes ao CPD, como descrito no Capítulo 6, pode-se escrever:

$$E[(\mathbf{M}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{M}_i)_r (p_{\mathbf{M}}\mathbf{M}_i)_i d\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}_r, \quad r = 1, \dots, m_1 \quad (49)$$

$$E[(\mathbf{C}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{C}_i)_r (p_{\mathbf{C}}\mathbf{C}_i)_i d\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}_r, \quad r = 1, \dots, m_1 \quad (50)$$

$$E[(\mathbf{K}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{K}_i)_r (p_{\mathbf{K}}\mathbf{K}_i)_i d\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}_r, \quad r = 1, \dots, m_1 \quad (51)$$

ou de uma forma generalizada para $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$, como na Equação (29), as equações acima podem ser representadas por:

$$E[(\mathbf{G}_i)_r] = \int_{i=1}^{nep} (\mathbf{G}_i)_r (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_r, \quad r = 1, \dots, m_1 \quad (52)$$

em que $E[\bullet]$ é a esperança matemática de (\bullet) .

Ou ainda para matrizes reais simétricas e positiva-definidas:

$$E[(\mathbf{G}_i)_r] = \int_{\mathbf{G}_i > 0} (\mathbf{G}_i)_r (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = \bar{\mathbf{G}}_r, \quad r = 1, \dots, m_1 \quad (53)$$

7.3 A RESTRIÇÃO REFERENTE À EXISTÊNCIA DO MOMENTO INVERSO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DINÂMICA

A terceira restrição, também chamada de restrição de comportamento (ou funcional), está relacionada com a existência do momento das matrizes aleatórias inversas de massa, amortecimento e rigidez.

Soize (2000) afirma que é necessário se introduzir esta restrição relacionada a \mathbf{M}_i^{-1} , \mathbf{C}_i^{-1} e \mathbf{K}_i^{-1} para que seja possível obter um modelo probabilístico consistente e uma propriedade de convergência da resposta estocástica quando a dimensão das matrizes se aproximarem do infinito. O mesmo autor ainda declara que é quase certo de que as matrizes aleatórias sejam positivas-definidas, então, é quase certo de que suas inversas existam, “*mas esta propriedade não implica na existência de momentos*” (Soize, 2000). Então, a última informação, que dará origem à terceira restrição do problema de otimização, é introduzida com o objetivo de se garantir a existência do momento das matrizes aleatórias inversas de forma que a solução

estocástica “*seja um processo estocástico de segunda ordem*” (Soize, 2005c).

Neste caso, para um sistema amortecido, a condição proposta e descrita logo a seguir, garante a existência dos momentos da função resposta em frequência da matriz aleatória considerada. Logo, pode-se fazer, segundo Soize (2000):

$$E \left[\|\mathbf{M}_i^{-1}\|_F^{v_M} \right] < +\infty, \quad v_M \geq 1 \quad (54)$$

$$E \left[\|\mathbf{C}_i^{-1}\|_F^{v_C} \right] < +\infty, \quad v_C \geq 1 \quad (55)$$

$$E \left[\|\mathbf{K}_i^{-1}\|_F^{v_K} \right] < +\infty, \quad v_K \geq 1 \quad (56)$$

ou de forma generalizada para $\mathbf{G}_i \equiv \{\mathbf{M}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{K}_i\}$, como na Equação (31):

$$E \left[\|\mathbf{G}_i^{-1}\|_F^{v_G} \right] < +\infty, \quad v_G \geq 1 \quad (57)$$

em que $v_{(\bullet)} \geq 1$ é um inteiro positivo que representa a ordem do momento que se está querendo calcular e $\|\bullet\|_F$ é a norma de *Frobenius*. Para momentos de segunda ordem basta fazer $v_{(\bullet)} = 2$ na Equação (57). Porém, o que se pretende aqui é chegar a um formulário geral para que seja possível a obtenção de momentos de qualquer ordem, portanto, tal valor não será substituído nos cálculos seguintes.

Além disso, algumas operações são necessárias para que se obtenha uma inequação que seja mais fácil de se trabalhar em termos algébricos. Para isso, é preciso lembrar que a matriz aleatória \mathbf{G} pertence ao conjunto *CPD* e tem valores em $M_n^+(\mathbb{R})$, portanto, suas propriedades, já colocadas no Capítulo 6, devem ser consideradas.

Convém observar que, por simplicidade, os índices i serão omitidos das equações nas operações seguintes apresentadas neste capítulo.

7.3.1 Diagonalização de \mathbf{G}

A diagonalização de \mathbf{G} se faz necessária tendo em vista facilitar os cálculos subsequentes e que se relacionam à solução do problema de otimização a ser resolvido.

Sabe-se que para a diagonalização da matriz aleatória \mathbf{G} é preciso inicialmente que ela seja simétrica (o que é garantido tendo em vista a sua pertença ao conjunto CPD). Tal propriedade é suficiente para que haja similaridade entre \mathbf{G} e \mathbf{D} , como já dito no item 6.2.1 Matrizes similares. Assim sendo, já que existe a matriz ortogonal $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_{n,n}$, chamada de matriz modal, também não-singular e de mesma dimensão que \mathbf{G} , vale a Equação (40). A matriz \mathbf{P} contém os autovetores linearmente independentes de \mathbf{G} como diz o **Teorema 1** do item 6.2.3 Matrizes ortogonais.

A Equação (40) também comporta a matriz \mathbf{D} , que é uma matriz diagonal real que contém os autovalores de \mathbf{G} em sua diagonal principal conforme descrito no **Teorema 1** do item 6.2.1 Matrizes similares. Além do mais, e segundo Elias (2010), todos os autovalores de uma matriz real simétrica são reais.

Partindo agora do fato de que \mathbf{P} é simétrica, e portanto, ortogonal, pode-se considerar a Equação (41) e substituí-la na Equação (40), o que resulta em:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^t \mathbf{G} \mathbf{P} \quad (58)$$

Tal resultado valida o descrito no **Teorema 1** do item 6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $\mathbf{M}_n^S(\mathbb{R})$.

Para se isolar e obter \mathbf{G} , é necessário pré-multiplicar a Equação (58) por \mathbf{P} e pós-multiplicar a mesma equação por \mathbf{P}^t . Logo:

$$\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^t = \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{P}^t}_I \mathbf{G} \underbrace{\mathbf{P} \mathbf{P}^t}_I = \mathbf{G} \quad (59)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^t \quad (60)$$

Com a obtenção da Equação (60), a matriz \mathbf{G} está escrita em função dos seus autovalores presentes na matriz diagonal \mathbf{D} e seus autovetores que correspondem às colunas da matriz \mathbf{P} . Essas duas matrizes tem respectivamente a forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \quad (62)$$

em que $(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)$ são os autovalores de \mathbf{D} e $(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n)$ são os autovetores que formam, cada um, uma coluna de \mathbf{P} .

7.3.2 Traço de \mathbf{G}

O traço da matriz $\mathbf{G} \in M_n(\mathbb{R})$ corresponde à soma dos elementos da sua diagonal principal conforme já descrito no item 6.1.2 Traço das matrizes aleatórias, logo vale a Equação (36). Ademais, como \mathbf{D} contém os autovalores de \mathbf{G} , considerando-se a Equação (61), a Equação (36) pode ser reescrita como:

$$\text{tr}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^n (g_{ii}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{D}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad (63)$$

em que $\text{tr}(\mathbf{G})$ é o traço de \mathbf{G} e n é a dimensão da matriz aleatória \mathbf{G} . Tal resultado comprova o descrito pelo **Teorema 3** do item 6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $\mathbf{M}_n^{\mathbf{S}}(\mathbb{R})$.

7.3.3 Potência de \mathbf{G}

Sendo \mathbf{G} uma matriz $(n \times n)$ diagonalizada e partindo-se do princípio de que \mathbf{G}^k e \mathbf{D}^k são similares para todo $k \in \mathbb{N}$, como descrito no **Teorema 1** do item 6.2.1 Matrizes similares, é possível determinar com facilidade sua potência \mathbf{G}^k . Então, elevando-se a Equação (60) à potência de ordem k , vem:

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{PDP}^t)^k = \underbrace{(\mathbf{PDP}^t) \times (\mathbf{PDP}^t) \times \cdots \times (\mathbf{PDP}^t) \times (\mathbf{PDP}^t)}_{k \text{ vezes}} = \prod_{i=1}^k (\mathbf{PDP}^t) \quad (64)$$

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{PDP}^t)^k = \underbrace{\mathbf{PD} \underbrace{(\mathbf{P}^t \mathbf{P})}_I \times \mathbf{D} \underbrace{(\mathbf{P}^t \mathbf{P})}_I \times \mathbf{D} \underbrace{(\mathbf{P}^t \mathbf{P})}_I \times \cdots \times \mathbf{D} \underbrace{(\mathbf{P}^t \mathbf{P})}_I \times \mathbf{DP}^t}_{k \text{ vezes}} \quad (65)$$

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{PDP}^t)^k = \mathbf{P} \underbrace{\mathbf{DI} \times \mathbf{DI} \times \mathbf{DI} \times \cdots \times \mathbf{DI}}_{k \text{ vezes}} \times \mathbf{DP}^t \quad (66)$$

$$\mathbf{G}^k = (\mathbf{PDP}^t)^k = \mathbf{PD}^k \mathbf{P}^t \quad (67)$$

Considerando-se o **Teorema 2** sobre a propriedade da permutação cíclica do item 6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $\mathbf{M}_n^{\mathbf{S}}(\mathbb{R})$, pode-se fazer na Equação (67):

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^t = \mathbf{D}^k \underbrace{\mathbf{P}^t\mathbf{P}}_I = \mathbf{D}^k \quad (68)$$

Então,

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{D}^k \quad (69)$$

7.3.4 Norma de \mathbf{G}

Sendo $\mathcal{C}^{m \times n}$ um espaço vetorial de dimensão $(m \times n)$, a magnitude de uma matriz que pertença a $\mathcal{C}^{m \times n}$ pode ser mensurada empregando-se alguma norma de vetor em $\mathcal{C}^{m \times n}$.

Para o caso da matriz \mathbf{G} ($n \times n$) com coeficientes reais, a norma de Frobenius será empregada. Sua definição é dada por:

$$\|\mathbf{G}\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |\mathbf{g}_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad (70)$$

em que $|\bullet|$ corresponde ao módulo, ou valor absoluto, de (\bullet) .

Para $p = 2$, obtém-se a norma de Frobenius, definida por (Bronson, 1989) como:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |\mathbf{g}_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |\mathbf{g}_{ij}|^2} \quad (71)$$

Sendo assim, a norma da matriz aleatória \mathbf{G} de momento ν é calculada fazendo-se a raiz quadrada da soma de todos os seus componentes.

Como \mathbf{G} foi diagonalizada, o cálculo da norma de Frobenius é simplificado e torna-se a raiz quadrada da soma dos componentes da sua diagonal.

Logo, pode-se fazer:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{g}_{ii}|^2} \quad (72)$$

Porém, ao se levar em conta o Teorema 3 do item 6.3 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas e Positivas-Definidas: $\mathbf{M}_n^+(\mathbb{R})$ (em que se diz que os autovalores de \mathbf{G} – que são os mesmos de \mathbf{D} , são positivos), pode-se simplificar a Equação (72) da seguinte maneira:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_{ii}^2} \quad (73)$$

que pode ainda ser reescrita na forma:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_{ii}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{G}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{G}\mathbf{G}^t} \quad (74)$$

Comparando-se agora a Equação (74) com a definição do traço de \mathbf{G} dada pela Equação (63), pode-se dizer que:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{G}\mathbf{G}^t} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^t)} \quad (75)$$

Substituindo-se a Equação (60) na Equação (75) fica:

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^t \times (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^t)^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^t \times \mathbf{P}^t\mathbf{D}^t\mathbf{P})} \quad (76)$$

Aplicando-se mais uma vez o Teorema 2 do item 6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $\mathbf{M}_n^S(\mathbb{R})$, A Equação (76) fica:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}\|_F &= \sqrt{\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^t \times \mathbf{P}^t\mathbf{D}^t\mathbf{P})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{P}^t\mathbf{P} \times \mathbf{D}^t\mathbf{P}\mathbf{P}^t)} \Rightarrow \\ \|\mathbf{G}\|_F &= \sqrt{\text{tr}\left(\underbrace{\mathbf{D}\mathbf{P}^t\mathbf{P}}_I \times \underbrace{\mathbf{D}^t\mathbf{P}\mathbf{P}^t}_I\right)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D} \times \mathbf{D}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^2)} \end{aligned} \quad (77)$$

Logo,

$$\|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{G}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^t)} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^2)} \quad (78)$$

7.3.5 Momento ν de \mathbf{G}^{-1}

A inclusão de \mathbf{G}^{-1} nos cálculos que virão é possível (além de necessária) tendo em vista que tal matriz também é positiva-definida como mostrado no Teorema 2 do item 6.3 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas e Positivas-Definidas: $\mathbf{M}_n^+(\mathbb{R})$. Além disso, diz o Teorema 4 do mesmo item que matrizes não-singulares tem inversa única, então, \mathbf{G}^{-1} é a inversa positiva-definida de \mathbf{G} e é única.

Considerando-se agora a Equação (60) e a propriedade da permutação cíclica dada pelo **Teorema 2** do item 6.2 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas: $\mathbf{M}_n^S(\mathbb{R})$, tem-se, segundo (Adhikari, 2007b):

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{G}^{-1})\|_F^{v_G} &= tr \left(\sqrt{\mathbf{P}\mathbf{D}^{-v_G}\mathbf{P}^t \times \mathbf{P}\mathbf{D}^{-v_G}\mathbf{P}^t} \right) = tr \left(\sqrt{(\mathbf{P}\mathbf{D}^{-v_G}\mathbf{P}^t)^2} \right) = tr (\mathbf{P}\mathbf{D}^{-v_G}\mathbf{P}^t) \Rightarrow \\ \|(\mathbf{G}^{-1})\|_F^{v_G} &= tr \left(\mathbf{D}^{-v_G} \underbrace{\mathbf{P}^t\mathbf{P}}_I \right) = tr (\mathbf{D}^{-v_G}) = \lambda_1^{-v_G} + \lambda_2^{-v_G} + \lambda_3^{-v_G} + \dots + \lambda_n^{-v_G} \quad (79) \end{aligned}$$

7.3.6 Primeiro momento de \mathbf{G}^{-1}

Como o que se deseja obter aqui é o primeiro momento (ou seja, a média) da matriz aleatória inversa apresentada pelo primeiro termo da Equação (57), pode-se fazer, considerando-se o resultado da Equação (79):

$$E[\|\mathbf{G}^{-1}\|_F^{v_G}] < +\infty \Rightarrow E[tr (\mathbf{D}^{-v_G})] = E[\lambda_1^{-v_G} + \lambda_2^{-v_G} + \lambda_3^{-v_G} + \dots + \lambda_n^{-v_G}] < +\infty \quad (80)$$

Segundo (Adhikari, 2007b), por causa dos autovalores de \mathbf{G} serem todos positivos, a condição apresentada pela Inequação (80) é sempre satisfeita quando se aplica logaritmo no primeiro termo desta mesma Inequação. Assim, obtém -se:

$$E[\ln \lambda_1^{-v_G} + \ln \lambda_2^{-v_G} + \ln \lambda_3^{-v_G} + \dots + \ln \lambda_n^{-v_G}] < \infty \quad (81)$$

Considerando a propriedade válida para logaritmos de mesma base descrita como

$$\ln(\mathbf{a}) + \ln(\mathbf{b}) = \ln(\mathbf{ab}) \quad (82)$$

e aplicando-a na Equação (76), vem:

$$E[\ln \lambda_1^{-v_G} + \ln \lambda_2^{-v_G} + \ln \lambda_3^{-v_G} + \dots + \ln \lambda_n^{-v_G}] = E[\ln (\lambda_1^{-v_G} \times \lambda_2^{-v_G} \times \dots \times \lambda_n^{-v_G})] < \infty \quad (83)$$

Considerando-se agora a Equação (35) colocada no item 6.1.1 Determinante das matrizes aleatórias e valendo-se do Teorema 2 do item 6.2.1 Matrizes similares, a Equação (83) resulta em:

$$E[\ln (\lambda_1^{-v_G} \times \lambda_2^{-v_G} \times \dots \times \lambda_n^{-v_G})] = E[\ln |\mathbf{G}|^{-v_G}] \quad (84)$$

Aqui cabe retomar o Teorema 1 do item 6.3 Conjunto de Matrizes Reais Simétricas e Positivas-Definidas: $\mathbf{M}_n^+(\mathbb{R})$ em que se confirma o fato de que $\det(\mathbf{G}) > 0$. Assim, não se tem problemas com o logaritmo, já que $\ln[0]$ não é definido. Ademais, é imprescindível que $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ para que esta matriz seja singular, o que se atesta pelo Teorema 1 do item 6.3.1 Matrizes inversas.

Sabendo-se, no entanto, que para o cálculo de $E[\mathbf{G}]$, denominada esperança matemática da variável aleatória \mathbf{G} , faz-se:

$$E[\mathbf{G}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}} d\mathbf{G} \quad (85)$$

para o cálculo de $E[\ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}}]$, chamada esperança matemática de $\ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}}$, faz-se:

$$E[\ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}} p_{\mathbf{G}} d\mathbf{G} \quad (86)$$

Retomando o índice $i = 1 \dots nep$ na Equação (86), resulta:

$$E[\ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}}] = \int_{i=1}^{nep} \ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G}, \quad i = 1 \dots nep \quad (87)$$

Ou ainda para matrizes reais simétricas e positivas-definidas:

$$E[\ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}}] = \int_{\mathbf{G}_i > 0} \ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G}, \quad i = 1 \dots nep \quad (88)$$

Finalmente, a Equação (88) corresponde à terceira restrição do problema de otimização, chamada restrição do momento inverso, a ser considerada em substituição da Equação (57).

7.4 RESTRIÇÃO DE NÃO-NEGATIVIDADE

A quarta restrição apresentada na Equação (33) é chamada restrição geométrica (ou lateral) e é a única das restrições que possui uma desigualdade. São as restrições de não-negatividade $(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i \geq 0, i = 1 \dots nep$ e elas implicam que todas as FDPs $(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i$ devem ser positivas.

Porém, a função objetiva contém o termo $\ln(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i$ que não está definida para valores

negativos de $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$, ou seja, a medida da entropia está definida somente para $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ maiores que zero. Então,

$$1. \exists \ln(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \text{ para } (p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i > 0, \quad i = 1 \cdots nep$$

2. $\nexists \ln(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ para $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i = 0$, $i = 1 \cdots nep$, ou seja, $\ln[0]$ não é definido. No entanto, e segundo Mattos & Veiga (2002), é válido lembrar que $S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ está definida para valores nulos de $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ pois quando $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{0}$, $\lim(\mathbf{G} \ln \mathbf{G}) = \mathbf{0}$.

A distribuição de máxima entropia tem automaticamente a propriedade $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i \geq 0$ porque o logaritmo tem uma singularidade em zero que nunca poderíamos passar. Tem, além disso, a propriedade de nunca permitir que a automação atribua probabilidade zero a qualquer possibilidade, a menos que a evidência force essa probabilidade a ser zero. O único lugar onde uma probabilidade vai para zero é no limite onde a média é exatamente um ou exatamente três. Mas é claro que, nesse caso, algumas probabilidades tinham que ser zero. (Jaynes, 1958)

Isto posto, conclui-se que a quarta restrição é não-operante e pode ser retirada do conjunto de restrições da Equação (33).

7.5 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO A SER RESOLVIDO

Finalmente, o problema de otimização apresentado na Equação (33) pode ser reescrito considerando-se as restrições obtidas e representadas nas Equações (48), (53) e (88) da seguinte maneira:

$$\text{Encontrar } (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i = \left\{ \begin{array}{c} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_1)_1 \\ (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_2)_2 \\ \vdots \\ (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_{nep})_{nep} \end{array} \right\}$$

$$\text{que maximize } S(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i = - \int_{\mathbf{G}_i > 0} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i \ln(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G}$$

$$\text{s. a. } D = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\mathbf{G}_i > 0} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = 1, & i = 1, \dots, nep \\ E[(\mathbf{G}_i)_r] = \int_{\mathbf{G}_i > 0} (\mathbf{G}_i)_r (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G} = \bar{G}_r, & r = 1, \dots, m_1 \\ E[\ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}}] = \int_{\mathbf{G}_i > 0} \ln |\mathbf{G}_i|^{-\nu_{\mathbf{G}}} (p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i d\mathbf{G}, & i = 1, \dots, nep \end{array} \right.$$

(89)

em que se determina $(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i$ por meio da maximização da entropia de Shannon $S(p_{\mathbf{G}} \mathbf{G}_i)_i$, a qual representa a medida da ignorância humana, ou seja, a incerteza do projetista na modelagem do sistema dinâmico.

Capítulo 8

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

“Otimização é o ato de obter o melhor resultado sob determinadas circunstâncias” (Rao S. S., 2009). No caso desta tese, esta definição pode ser traduzida como sendo o ato de se obter a *FDP* de máxima incerteza, que quantifica o conhecimento do analista sobre o modelo numérico construído, e que ao mesmo tempo deve satisfazer as condições impostas pelas restrições do problema de otimização proposto.

Sendo assim, um método adequado para a solução do problema de otimização deve ser escolhido e, tendo isso em mente, pode-se fazer as seguintes observações relacionadas à Equação

(89):

1. Tanto a função objetiva quanto as restrições são não-lineares em relação à variável de projeto \mathbf{G} . Para este tipo de sistema, segundo o documento de (PUC-RIO, s.a.), pode-se fazer uso de dois métodos de solução. O primeiro é o método determinístico (também chamado de método clássico) em que se maximiza ou minimiza a função objetivo em sucessivas direções por meio de uma fórmula de recorrência. Em geral, para que se obtenham essas direções de busca é necessário se fazer uso do cálculo de derivadas que englobam vetores gradientes e matrizes Hessianas. O segundo método corresponde às técnicas não-determinísticas, que tentam “imitar” fenômenos ou processos. Eles incluem, por exemplo, os algoritmos genéticos, muito

utilizados em otimizações multi-objetivo. Nesta tese uma metodologia clássica será utilizada já que se faz útil ao encontrar a solução ótima de funções contínuas e diferenciais. São métodos analíticos e usam técnicas de cálculo diferencial na localização dos pontos ótimos.

2. O problema proposto tem restrições e, portanto, é solucionado por um método de otimização com restrições.

3. O problema de otimização apresentado tem a formulação de um problema mono-objetivo, já que envolve somente uma função objetivo dada por $S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$, e portanto, tem-se uma única meta a ser atingida que é a determinação de uma solução ótima global. Dessa forma, será utilizada uma solução aplicada à otimização mono-objetivo.

4. O problema apresentado aqui é também um problema de programação estocástica em que as matrizes aleatórias $\mathbf{G} \equiv \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$ são estocásticas.

Contudo, para o tipo de problema proposto na Equação

(89), será usado o método clássico de cálculo diferencial, utilizado para se encontrar, neste caso, a *FDP* de máxima incerteza. Segundo Rao (2009), esta metodologia assume que a função objetivo seja duas vezes diferenciável, o que não é um problema para a equação da entropia de Shannon, já que ela tem esta característica, a qual pode ser observada na propriedade 4 do subitem 5.2.7 Propriedades da medida de Shannon. Por outro lado, no caso desse método clássico, para problemas com restrições de igualdade apenas, o que é o caso apresentado aqui, utiliza-se o método dos multiplicadores de Lagrange para solucioná-las.

Como conclusão, a metodologia clássica de cálculo diferencial, por meio da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange, é a mais adequada para que o problema da Equação

(89) com uma variável aleatória, definida no conjunto $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$, e três restrições de igualdade, pertencentes ao conjunto viável D , seja solucionado.

O objetivo é que seja possível encontrar uma solução ótima global (considera todo o espaço de busca do problema) maximizando uma função objetivo restrita a certas condições especificadas em D . No caso desta tese, a *FDP* de máxima incerteza deve ser encontrada, para que, desta forma, seja a expressão de máxima ignorância humana a respeito de sistemas dinâmicos lineares amortecidos modelados.

Pode-se ter, com relação à solução de um problema de otimização, dois casos distintos. O primeiro está relacionado ao fato de que a solução desejada está no interior do conjunto viável. Neste caso, segundo (Pádua S. G., 2008), é como se o problema fosse sem restrições, e daí, a regra de *Fermat* é suficiente para solucioná-lo. Porém, se a solução pertence à fronteira (ou no contorno) do conjunto viável, ainda segundo o mesmo autor, “*ele não precisa ser um ponto crítico, no sentido de ser um zero do vetor gradiente*”. Neste caso, pode-se utilizar para solução o teorema dos multiplicadores de Lagrange, já que as restrições são de igualdade. Além disso, este método evita a parametrização no caso de curvas. Isto significa que o ponto máximo ou mínimo se encontra no contorno, que é o caso em que as restrições do problema de otimização têm sinais de igualdade.

8.1 O LAGRANGEANO E A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE $p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}$

Seja a função objetivo definida por $S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ e as funções pertencentes ao conjunto de restrições dado pelo conjunto viável D , funções de classe C^1 (as funções são contínuas e suas derivadas existem e são funções contínuas) e seja também a *FDP* a função densidade de probabilidade máxima (mais incerta) de $S(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}_i)_i$ no conjunto viável D (já que ele contém a solução do problema) dado pelas restrições do problema da Equação

(89), supõe-se que a *FDP* satisfaz a condição de regularidade em que o posto da matriz jacobiana deve ser igual ao número de restrições do problema de otimização. Se tal condição é satisfeita, então existem números e/ou matrizes reais denominados multiplicadores de Lagrange.

Sendo assim, o Lagrangeano na Equação

(89) pode ser escrito, segundo Adhikari (2007b), da seguinte forma (por simplicidade, os índices i e r serão suprimidos):

$$\mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}] = - \int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \, d\mathbf{G} - (\mu - 1) \left(\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \, d\mathbf{G} - 1 \right) - \int_{\mathbf{G}>0} \ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \, d\mathbf{G} - \text{tr} \left(\mathbf{\Lambda} \left(\int_{\mathbf{G}>0} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \, d\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}} \right) \right) \quad (90)$$

em que $\mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]$ é o Lagrangeano em função da variável do problema $(p_{\mathbf{G}}\mathbf{G})$, μ é o multiplicador escalar de Lagrange, $\mathbf{\Lambda}$ é o multiplicador matricial de Lagrange.

Vale ressaltar que a primeira e terceira restrições da Equação

(89) têm como solução resultados escalares, ou seja, números, portanto seus multiplicadores são também escalares. Por outro lado, a segunda restrição, dada pela restrição do modelo médio tem como solução um resultado matricial, portanto o seu multiplicador de Lagrange também deve ser matricial. Foi usado $(\mu - 1)$ na primeira restrição apenas por razões de simplificação nos próximos passos.

A condição ótima correspondente ao máximo é dada pelo cálculo variacional definido por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = 0 \quad (91)$$

Sabendo da definição de integrais indefinidas dada por

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ se e somente se } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (92)$$

em que $f(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida, faz-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \left(\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} \right)}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = \left(1 \times \ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} + p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \times \frac{1}{p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})} \right) = \ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} + 1 \\ \frac{\partial \left(\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - 1 \right)}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = [1 - 0] = 1 \\ \frac{\partial \left(\int_{\mathbf{G}>0} \ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} \right)}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = \ln [|\mathbf{G}|]^{-\nu} \times 1 = \ln [|\mathbf{G}|]^{-\nu} = -\nu \ln |\mathbf{G}| \\ \frac{\partial \left(\int_{\mathbf{G}>0} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}} \right)}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = [\mathbf{G} \times 1 - 0] = \mathbf{G} \end{array} \right. \quad (93)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}] = & - \int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} \ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - (\mu - 1) \left(\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - 1 \right) - \int_{\mathbf{G}>0} \ln |\mathbf{G}|^{-\nu_{\mathbf{G}}} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - \\ & \text{tr} \left(\mathbf{\Lambda} \left(\int_{\mathbf{G}>0} \mathbf{G} p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} d\mathbf{G} - \bar{\mathbf{G}} \right) \right) \end{aligned} \quad (94)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = -(\ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} + 1) - (\mu - 1)(1) + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) \quad (95)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = -\ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} - 1 - \mu + 1 + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) \quad (96)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = -\ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} - \mu + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) \quad (97)$$

Igualando a Equação (97) a zero como mostra a Equação (91), vem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}[p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}]}{\partial p_{\mathbf{G}}\mathbf{G}} = -\ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} - \mu + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) = 0 \quad (98)$$

então,

$$\ln p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = -\mu + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G}) \quad (99)$$

Considerando as propriedades de logaritmos e do traço, em que:

$$\ln[a] = x \Rightarrow a = \exp\{x\} \quad (100)$$

$$\exp\{x + y\} = \exp\{x\} \exp\{y\} \quad (101)$$

$$\exp\{\ln[a]\} = a \quad (102)$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A) \quad (103)$$

em que $\exp\{\cdot\}$ corresponde ao exponencial $\{\cdot\}$ e c é um escalar.

pode-se isolar $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ na Equação(99):

$$p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \exp\{-\mu + \nu \ln|\mathbf{G}| - \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} \quad (104)$$

$$p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \exp\{-\mu\} \times \exp\{\ln|\mathbf{G}|^\nu\} \times \exp\{-\text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} \quad (105)$$

$$p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \exp\{-\mu\} \times |\mathbf{G}|^\nu \times \exp\{-\text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} \quad (106)$$

$$p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \exp\{-\mu\} \times |\mathbf{G}|^\nu \times \exp\{\text{tr}(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} \quad (107)$$

Logo,

$$p_{\mathbf{G}}\mathbf{G} = \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^\nu \exp\{\text{tr}(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} \quad (108)$$

a Equação (108) corresponde à *FDP* da matriz aleatória \mathbf{G} . Porém, para utilizá-la os multiplicadores de Lagrange devem ser encontrados o que será feito na próxima subseção.

8.2 MULTIPLICADOR ESCALAR DE LAGRANGE

Na obtenção do multiplicador escalar de Lagrange μ , é preciso inicialmente substituir a Equação (108) na Equação (48) que corresponde à primeira restrição do problema de otimização apresentado na Equação (89). Logo,

$$\int_{\mathbf{G}>0} p_{\mathbf{G}} d\mathbf{G} = 1 \Rightarrow \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-\Lambda\mathbf{G})\} d\mathbf{G} = 1 \quad (109)$$

Como $\exp\{-\mu\}$ é uma constante, a Equação (109) resulta:

$$\exp\{-\mu\} \int_{\mathbf{G}>0} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-\Lambda\mathbf{G})\} d\mathbf{G} = 1 \quad (110)$$

$$\exp\{-\mu\} = \left\{ \int_{\mathbf{G}>0} |\mathbf{G}|^{\nu} \exp\{\text{tr}(-\Lambda\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \right\}^{-1} \quad (111)$$

A solução aqui está na aplicação da transformada de Laplace do lado direito do resultado da Equação (111). E para isso, faz necessário apresentar a definição da transformada de Laplace de matriz variável que, segundo Adhikari (2007b), é dada por:

$$\mathbb{L}\{|\mathbf{G}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{Z}|^{-a} \int_{\mathbf{Y}>0} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} d\mathbf{Y} \quad (112)$$

A Equação (112) é a resolução da integral da Equação (111). Então, a Equação (111) fica:

$$\exp\{-\mu\} = \left\{ |\mathbf{Z}|^{-a} \int_{\mathbf{Y}>0} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} d\mathbf{Y} \right\}^{-1} \quad (113)$$

Considerando-se agora a função *Gamma* multivariável, cuja definição, de acordo com Adhikari (2007b), é dada por:

$$\Gamma_n(a) = \int_{\mathbf{Y}>0} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} \exp\{\text{tr}(-\mathbf{Y})\} d\mathbf{Y} \quad (114)$$

a Equação (113) resulta em

$$\exp\{-\mu\} = \{|\mathbf{Z}|^{-a} \Gamma_n(a)\}^{-1} = |\mathbf{Z}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \quad (115)$$

Considerando $\mathbf{Z} = \mathbf{\Lambda}$, a Equação (115) torna-se:

$$\exp\{-\mu\} = |\mathbf{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \quad (116)$$

em que $\mathbf{\Lambda}$ é o multiplicador matricial de Lagrange.

O resultado da Equação (116) será posteriormente utilizado, juntamente com o multiplicador matricial de Lagrange que será obtido na próxima subseção. Ambos serão substituídos na Equação (108).

8.3 MULTIPLICADOR MATRICIAL DE LAGRANGE

O multiplicador matricial de Lagrange $\mathbf{\Lambda}$ deve ser encontrado partindo-se do cálculo da função característica da matriz aleatória \mathbf{G} que, de acordo com a Adhikari (2007b), é dada por:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = E[\exp\{tr(i\mathbf{\Omega}\mathbf{G})\}] = \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\mathbf{\Omega}\mathbf{G})\} p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}) d\mathbf{G} \quad (117)$$

em que $\mathbf{\Omega}$ é uma matriz simétrica.

Substituindo $p_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ dado pela Equação (108) na Equação (117), vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\mathbf{\Omega}\mathbf{G})\} \exp\{-\mu\} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (118)$$

Agora, substituindo $\exp\{-\mu\}$ dado pela Equação (116) na Equação (118), vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\mathbf{\Omega}\mathbf{G})\} |\mathbf{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (119)$$

Como $|\mathbf{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1}$ é constante, resulta que:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\Omega}) = |\mathbf{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\mathbf{\Omega}\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{G})\} d\mathbf{G} \quad (120)$$

Rearranjando os termos, fica:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})\} \exp\{tr(-\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^v d\mathbf{G} \quad (121)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(i\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^v d\mathbf{G} \quad (122)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr((-\boldsymbol{\Lambda} + i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^v d\mathbf{G} \quad (123)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} \int_{\mathbf{G}>0} \exp\{tr(-(\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})\mathbf{G})\} |\mathbf{G}|^v d\mathbf{G} \quad (124)$$

A integral do lado direito da Equação (124) também pode ser resolvida pela aplicação da transformada de Laplace, como ocorreu com a Equação (111). E de acordo com Adhikari (2007b), tem-se:

$$\mathbb{L}\{f(\mathbf{G})\} = \int_0^\infty \exp\{tr(-\mathbf{Z}\mathbf{G})\} f(\mathbf{G}) d\mathbf{G} \quad (125)$$

em que $\mathbb{L}\{f(\mathbf{G})\}$ é a transformada de Laplace da função $f(\mathbf{G})$ e \mathbf{Z} é uma matriz simétrica complexa $n \times n$.

Comparando-se as integrais das Equações (124) e (125), é possível concluir que:

$$\mathbf{Z} = (\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}) \quad (126)$$

Considerando-se a Equação (112), que corresponde à definição da transformada de Laplace de matriz variável dada por Adhikari (2007b), vem:

$$\mathbb{L}\{|\mathbf{G}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{Z}|^{-a} \underbrace{\int_{\mathbf{Y}>0} |\mathbf{Y}|^{a-(n+1)/2} \exp\{tr(-\mathbf{Y})\} d\mathbf{Y}}_{\Gamma_n(a)} \quad (127)$$

Substituindo-se agora a Equações (114) na Equação (127), resulta:

$$\mathbb{L}\{|\mathbf{G}|^{a-(n+1)/2}\} = |\mathbf{Z}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (128)$$

Substituindo-se a Equação (126) na Equação (128), vem:

$$\mathcal{L}\{|\mathbf{X}|^{a-(n+1)/2}\} = |\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (129)$$

Esta é a solução final da integral do lado direito da Equação (124). Então, substituindo a

Equação (129) na Equação (124) resulta:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} |\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}|^{-a} \Gamma_n(a) \quad (130)$$

Simplificando, vem:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a |\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}|^{-a} \quad (131)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas na Equação (131), fica:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^a |\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}|^{-a} = |\boldsymbol{\Lambda}|^a |(\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})^{-1}|^a = |\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})^{-1}|^a \quad (132)$$

Trabalhando agora somente com o termo $(\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})$, pode-se colocar a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ em evidência, logo $(\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Lambda} (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})$. Substituindo este resultado na Equação (132):

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\Lambda} - i\boldsymbol{\Omega})^{-1}|^a = |\boldsymbol{\Lambda} [\boldsymbol{\Lambda} (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})]^{-1}|^a \quad (133)$$

Mas $[\boldsymbol{\Lambda} (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})]^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1}$, então, da Equação (133), resulta:

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |\boldsymbol{\Lambda} [\boldsymbol{\Lambda} (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})]^{-1}|^a = \left| \underbrace{\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}}_I (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1} \right|^a = \quad (134)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |(I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1}|^a = |(I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})|^{-a} \quad (135)$$

$$\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = |(I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})|^{-a} \quad (136)$$

onde I é a matriz identidade e $\varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega})$ é a função característica da variável aleatória \mathbf{G} .

Aplicando logaritmo nos dois lados da Equação (136), vem:

$$\ln \varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = \ln |(I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})|^{-a} = -a \ln (I - i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}) \quad (137)$$

que segundo Adhikari (2007b), resulta em

$$\ln \varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega}) = a (i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + i\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \dots) \quad (138)$$

Ainda segundo Adhikari , a esperança matemática de \mathbf{G} pode ser obtida pela seguinte equação:

$$E(\mathbf{G}) = \left. \frac{\partial \ln \varphi_{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\Omega})}{\partial i\boldsymbol{\Omega}} \right|_{\boldsymbol{\Omega}=0} \quad (139)$$

que resulta em:

$$E(\mathbf{G}) = a \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad (140)$$

Agora, levando-se em conta a Equação (53), que corresponde à segunda restrição do problema de otimização apresentado na Equação (89), e comparando-a com a Equação (140), tem-se:

$$E(\mathbf{G}) = \bar{\mathbf{G}} = a \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad (141)$$

Logo, pode-se concluir que:

$$\mathbf{\Lambda} = a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (142)$$

Com isso, o multiplicador matricial de Lagrange $\mathbf{\Lambda}$ é dado pela Equação (142).

8.4 OBTENÇÃO DA FDP FINAL

Substituindo as Equações (116) e (142) na Equação (108), vem:

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = |\mathbf{\Lambda}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G})\} \quad (143)$$

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = |a \bar{\mathbf{G}}^{-1}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G})\} \quad (144)$$

Considerando-se a propriedade dos determinantes dada por:

$$\det(k\mathbf{G}) = k^n \det(\mathbf{G}) \quad (145)$$

em que k é um número real, n é a ordem da matriz considerada, e aplicando-a na Equação (144),

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = a^{an} |\bar{\mathbf{G}}^{-1}|^a (\Gamma_n(a))^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G})\} \quad (146)$$

Considerando-se agora uma outra propriedade dos determinantes dada por:

$$\det(\mathbf{G}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{G}) = [\det(\mathbf{G})]^{-1} \quad (147)$$

logo,

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = a^{an} |\bar{\mathbf{G}}|^{-a} \left(\Gamma_n(a) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G})\}$$

(148)

sendo que, segundo Adhikari (2007b):

$$a = v + \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{2v+(n+1)}{2} = \frac{2v+n+1}{2} \quad (149)$$

A Equação (148) é a *FDP* que se queria encontrar para a propagação das incertezas. Ela já tem os multiplicadores de Lagrange substituídos e, assim, depende apenas da matriz média de \mathbf{G} , dos graus de liberdade do sistema e da ordem do momento inverso. No entanto, esta equação ainda pode passar por alguns cálculos e simplificações algébricas.

Assim sendo, substituindo a Equação (149) na Equação (148), fica:

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left(\frac{2v+n+1}{2} \right)^{\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)n} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\left\{tr\left(-\left(\frac{2v+n+1}{2}\right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}\right)\right\} \quad (150)$$

mas, $\left(\frac{2v+n+1}{2} \right) = \left(\frac{2}{2v+n+1} \right)^{-1}$, logo

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left(\frac{2}{2v+n+1} \right)^{-n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\left\{tr\left(-\left(\frac{2v+n+1}{2}\right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}\right)\right\} \quad (151)$$

Da Equação (149) pode-se isolar v :

$$v = a - \frac{(n+1)}{2} \quad (152)$$

Substituindo na Equação (151):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left(\frac{2}{2v+n+1} \right)^{-n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\left(\frac{2v+n+1}{2} \right)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2v+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\boxed{a - \frac{(n+1)}{2}}} \exp\left\{tr\left(-\left(\frac{2v+n+1}{2}\right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}\right)\right\} \quad (153)$$

mas, substituindo-se o valor de a dado pela Equação (149) no termo marcado na Equação (153), vem:

$$a - \frac{(n+1)}{2} = \frac{2\nu+n+1}{2} - \frac{(n+1)}{2} = \frac{1}{2} [(2\nu + n + 1) - (n + 1)] \quad (154)$$

Substituindo na Equação (153):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \exp \left\{ tr \left(- \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (155)$$

Considerando-se agora o termo marcado na Equação (155) e levando-se em conta que $\left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) = \left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-1}$, tem-se:

$$- \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \bar{\mathbf{G}}^{-1} = - \left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{G}}^{-1} = - \frac{(2)^{-1}}{(2\nu+n+1)^{-1}} \bar{\mathbf{G}}^{-1} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \quad (156)$$

Substituindo este resultado na Equação (155):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \exp \left\{ tr \left(- \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (157)$$

Considerando-se agora o termo marcado na Equação (157), vem que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{2\nu+n+1} \right)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} = \frac{(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}}{(2\nu+n+1)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} = \\ & = \frac{(2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)}}{((2\nu+n+1)^n)^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)}} |\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} = (2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \frac{|\bar{\mathbf{G}}|^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)}}{((2\nu+n+1)^n)^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)}} = \\ & = (2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \left(\frac{|\bar{\mathbf{G}}|}{(2\nu+n+1)^n} \right)^{-\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \end{aligned} \quad (158)$$

Substituindo este resultado na Equação (157):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = (2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \left[\frac{|\bar{\mathbf{G}}|}{(2\nu+n+1)^n} \right]^{\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (159)$$

Considerando-se o termo marcado na Equação (159), levando-se em conta a propriedade dos determinantes descrita na Equação (145) e sabendo que a soma $(2\nu + n + 1)$ é uma constante, vem:

$$\left(\frac{|\bar{\mathbf{G}}|}{(2\nu+n+1)^n} \right) = |\bar{\mathbf{G}}| ((2\nu + n + 1)^n)^{-1} = |\bar{\mathbf{G}}| \underbrace{((2\nu + n + 1)^{-1})^n}_{\text{constante}} = \left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right| \quad (160)$$

Logo, a Equação (159) fica:

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = (2)^{-\frac{n}{2}(2\nu+n+1)} \left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right|^{\frac{1}{2}(2\nu+n+1)} \left(\Gamma_n \left(\frac{2\nu+n+1}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(2\nu+n+1)-(n+1)]} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{(2\nu+n+1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (161)$$

Fazendo

$$(2\nu + n + 1) = p \quad (162)$$

em que p é um escalar positivo, pode-se então substituí-lo na Equação (161):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = (2)^{-\frac{n}{2}(p)} \left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right|^{-\frac{1}{2}(p)} \left(\Gamma_n \left(\frac{p}{2} \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}[(p)-(n+1)]} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (163)$$

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = (2)^{-\frac{1}{2}np} \left| \frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right|^{-\frac{1}{2}p} \left(\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n+1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} \right)^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (164)$$

Fazendo-se agora

$$\frac{\bar{\mathbf{G}}}{p} = \boldsymbol{\Sigma} \quad (165)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz.

Substituindo-se agora a Equação (165) na Equação (164), vem:

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \boxed{(2)^{-\frac{1}{2}np} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}p} \left(\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1}} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n+1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (166)$$

Considerando-se o termo marcado da Equação (166), vem:

$$\begin{aligned} (2)^{-\frac{1}{2}np} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}p} \left(\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} &= \left((2)^{\frac{1}{2}np} \right)^{-1} \left(|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \right)^{-1} \left(\Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} = \\ &= \left((2)^{\frac{1}{2}np} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (167)$$

Substituindo na Equação (166):

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = \left((2)^{\frac{1}{2}np} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}p} \Gamma_n \left(\frac{1}{2}p \right) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^{\frac{1}{2}(p-n+1)} \exp \left\{ \text{tr} \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{G} \right) \right\} \quad (168)$$

Pode-se notar que se o momento inverso de ordem ν existe e apenas a média de \mathbf{G} , ou seja, $\bar{\mathbf{G}}$, está disponível, resulta que a *FDP* de máxima entropia de \mathbf{G} , dada na Equação (168), corresponde à distribuição *Wishart* com os parâmetros mostrados nas Equações (162) e (165).

8.5 PARÂMETROS ÓTIMOS DA DISTRIBUIÇÃO WISHART

Adhikari (2008b) menciona que não é óbvio que o *TMA* deva ser formulada com relação à \mathbf{G} ou \mathbf{G}^{-1} ou qualquer outra distribuição de \mathbf{G} , porém, dependendo da escolha entre elas (informação disponível), as distribuições resultantes podem se diferenciar drasticamente uma da outra. Assim sendo, o autor referido testa alguns critérios de seleção de parâmetros para que não se corra o risco de uma escolha tendenciosa.

Os critérios adotados podem ser resumidos como se segue, de acordo com a Adhikari (2008b):

Critério 1: proposto por Soize (2000) e (2001). Neste caso considera-se que:

$$E[\mathbf{G}] = \bar{\mathbf{G}} \quad (169)$$

$$\sigma_{\mathbf{G}} = \tilde{\sigma}_{\mathbf{G}} \quad (170)$$

em que $E[\mathbf{G}]$ é a média da matriz aleatória \mathbf{G} , $\bar{\mathbf{G}}$ é a média da matriz determinística, $\sigma_{\mathbf{G}}$ é o desvio padrão normalizado calculado e $\tilde{\sigma}_{\mathbf{G}}$ é o desvio padrão normalizado medido.

Crítério 2: proposto por Adhikari (2006) e (2007b). Matematicamente, a condição aqui é dada pela Equação (170) e pelas duas equações seguintes:

$$\|\bar{\mathbf{G}} - E[\mathbf{G}]\|_F = \text{valor mínimo} \quad (171)$$

$$\|\bar{\mathbf{G}}^{-1} - E[\mathbf{G}^{-1}]\|_F = \text{valor mínimo} \quad (172)$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

Crítério 3: proposto por Adhikari (2008b). Neste caso, a condição é dada pela Equação (170) e também pela seguinte equação:

$$E[\mathbf{G}^{-1}] = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (173)$$

Crítério 4: proposto por Adhikari (2008b). A condição aqui é dada pelas equações:

$$E[\mathbf{M}^{-1}] = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \quad (174)$$

$$E[\mathbf{K}] = \bar{\mathbf{K}} \quad (175)$$

$$\sigma_{\mathbf{M}} = \tilde{\sigma}_{\mathbf{M}} \quad (176)$$

$$\sigma_{\mathbf{K}} = \tilde{\sigma}_{\mathbf{K}} \quad (177)$$

Adhikari (2008b), com base nos quatro critérios acima referidos, alcançou melhores resultados ao utilizar o terceiro critério e usou-os para obter os parâmetros ótimos da *FDP Wishart*.

Portanto, se a ν -ésima ordem do momento inverso de um sistema de matriz $\mathbf{G} = \{\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}\}$ existe e apenas a média de \mathbf{G} , denominada $\bar{\mathbf{G}}$, está disponível, a distribuição não tendenciosa de \mathbf{G} segue a distribuição *Wishart*, representada pela Equação (168), com seus parâmetros ótimos dados por

$$p = \theta + n + 1 \quad (178)$$

$$\Sigma = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\theta} \quad (179)$$

Onde θ é dado pela Equação (6) repetida abaixo:

$$\theta = \frac{1}{\bar{\sigma}_{\mathbf{G}}^2} \left\{ 1 + \frac{\{tr(\bar{\mathbf{G}})\}^2}{tr(\bar{\mathbf{G}}^2)} \right\} - (n + 1) \quad (180)$$

Por fim, tem-se o solução final da Modelagem Estocástica que resultou a *FDP* e seus parâmetros ótimos dados por:

$$p_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = a^{an} |\bar{\mathbf{G}}|^{-a} \left(\Gamma_n(a) \right)^{-1} |\mathbf{G}|^v \exp\{tr(-a \bar{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G})\}$$

$$p = \theta + n + 1 \quad (181)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\bar{\mathbf{G}}}{\theta}$$

em que vale a Equação (180).

Capítulo 9

ESTUDOS DE CASO

Muito se fala a respeito da necessidade da quantificação de incertezas, tanto paramétrica quanto não-paramétrica, principalmente quando se tem em vista que modelos experimentais são caros e não é possível a construção de protótipos em número de amostras suficientes para realizar testes experimentais. A solução portanto, é realizar tais testes computacionalmente.

Neste capítulo portanto, dois estudos de caso serão apresentados e neles se poderá identificar a incerteza presente no modelo do sistema dinâmico considerado. Será possível também verificar a sua real necessidade de quantificação e avaliar, depois de quantificada a incerteza, se o modelo tem ou não alta confiabilidade para que seja utilizado em estudos computacionais ao invés de se realizar estudos experimentais.

Além disso, para se proceder às análises, serão considerados quatro tipos de modelos do sistema em estudo e que são apresentados na Figura 18.

Para que as análises sejam possíveis em cada caso, foram utilizadas nos sistemas dinâmicos considerados uma certa quantidade de massas, representadas por imãs fixadas nas vigas para que desta maneira se pudesse simular a variação aleatória na distribuição de massa, com isso, somente a matriz massa será considerada como incerta.

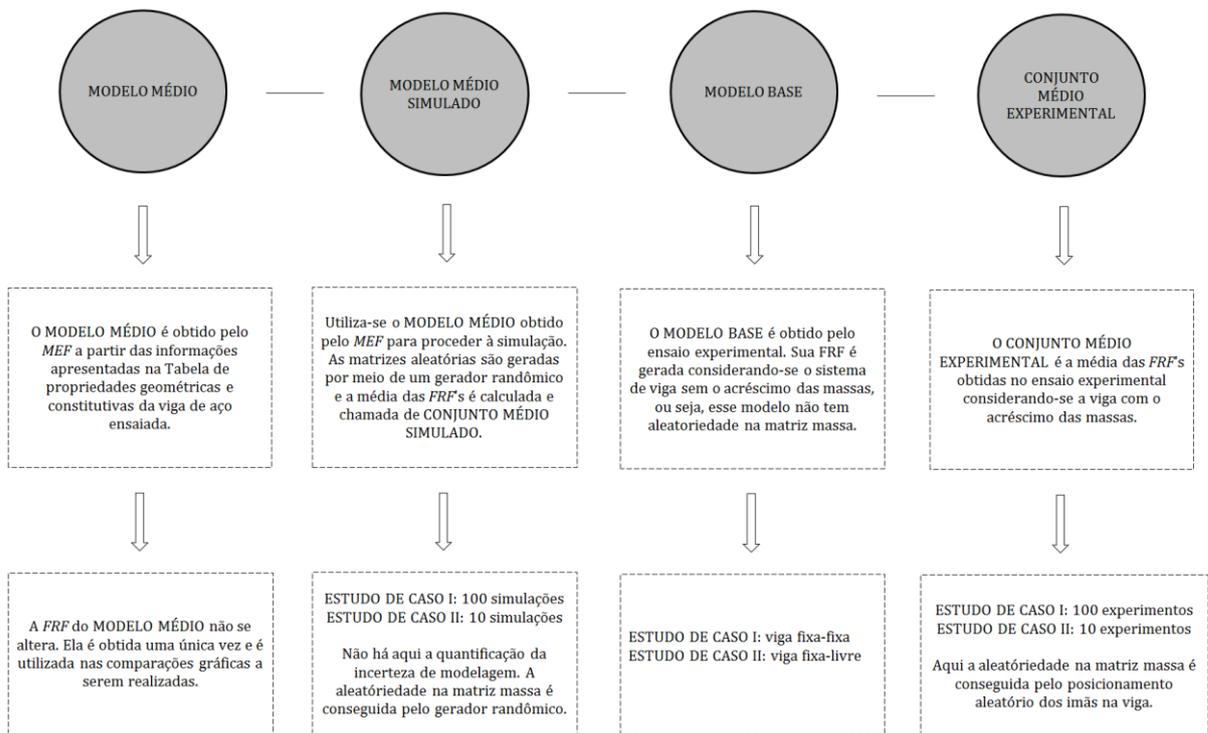


Figura 18: Modelos a serem considerados nas análises. Fonte: autor.

MODELO MÉDIO: é construído pelo *MEF* conforme os dados apresentados na tabela de propriedades geométricas e constitutivas da viga de aço ensaiada. Nesse modelo não se inclui nenhum tipo de aleatoriedade na modelagem, como se verá mais adiante no conjunto médio experimental em que se considerará o acréscimo de massas posicionadas aleatoriamente na viga ensaiada, haja vista que o modelo médio, ao ser modelado tendo por base um modelo projetado, como mostra a Figura 1, já é um modelo incerto.

ESTUDO DE CASO I: vale a Tabela 1. O cálculo numérico considerou 120 elementos de viga de *Euler Bernoulli* fixa-fixa com 2 *gdl* por nó, 1 *gdl* de deslocamento vertical e 1 *gdl* de rotação. O resultado de elementos finitos correspondeu a um modelo de 238 *gdl*. Apenas metade dos modos, ou seja, 119, foram usados para o cálculo das *FRF*'s, já que este modelo gera 119 *gdl* de deslocamento e 119 *gdl* de rotação e a análise é baseada nos *gdl*'s de deslocamento. Foi considerado também um fator de amortecimento de 1,5% para todos os modos.

ESTUDO DE CASO II: vale a Tabela 2. O sistema representado pela viga uniforme fixa-livre é modelado em *EF*. O cálculo numérico considerou 95 elementos unidimensionais de viga de *Euler Bernoulli* com 2 *gdl* por nó, 1 *gdl* de deslocamento vertical e 1 *gdl* de rotação. O resultado de elementos finitos correspondeu a um modelo de 190 *gdl*. Bem como no estudo de

caso I, usou-se apenas metade dos modos para o cálculo das *FRFs*, ou seja, 119. O amortecimento utilizado foi o de *Rayleigh*. A matriz proporcional é dada por $\bar{C} = \alpha\bar{M} + \beta\bar{K} = \bar{M} + 10^{-8}\bar{K}$, em que os parâmetros α e β foram escolhidos de forma a aproximar a *FRF* teórica da *FRF* experimental.

A *FRF* desse modelo médio será comparada com a *FRF* do modelo base e do conjunto médio experimental.

CONJUNTO MÉDIO SIMULADO: é obtido por meio da simulação numérica convencional. Nela, o que se faz é obter a *FRF* das simulações de Monte Carlo em que as matrizes aleatórias de massa são geradas por meio de um gerador aleatório randômico sem a aplicação da abordagem não-paramétrica tendo em vista que o objetivo é reproduzir o que é feito usualmente por analistas portanto, aqui não há a quantificação da incerteza de modelagem. Dessa forma, por causa da geração aleatórias das matrizes de massa, ocorre uma variação da massa nessa matriz de forma semelhante ao que ocorre no experimento ao se acrescentar os imãs na viga em posições aleatórias.

ESTUDO DE CASO I: foram obtidas as *FRF's* de 100 simulações de Monte Carlo e o conjunto médio simulado foi gerado como a média dessas *FRF's*.

ESTUDO DE CASO II: foram obtidas as *FRF's* de 10 simulações de Monte Carlo e o conjunto médio simulado foi gerado como a média dessas *FRF's*.

Sendo assim, tendo as *FRF's* da simulação em mãos, o conjunto médio simulado é obtido de forma a ser comparado com o conjunto médio experimental.

MODELO BASE: a *FRF* do modelo base é obtida considerando-se o sistema de viga sem o acréscimo das massas. Este é um modelo considerado sem a aleatoriedade na matriz massa e sua *FRF* será comparada com a *FRF* do modelo médio e do conjunto médio experimental.

CONJUNTO MÉDIO EXPERIMENTAL: é a média das *FRF's* obtidas no ensaio experimental considerando-se a viga com o acréscimo das massas em posições aleatórias.

ESTUDO DE CASO I: foram obtidas as *FRF's* de 100 ensaios e o conjunto médio experimental foi gerado como a média dessas *FRF's*.

ESTUDO DE CASO II: foram obtidas as FRF 's de 10 ensaios e o conjunto médio experimental foi gerado como a média dessas FRF 's.

Assim, tendo as FRF 's da simulação em mãos, a FRF do conjunto médio experimental é obtida de forma a ser comparada com a FRF do modelo base, do modelo médio e do conjunto médio simulado.

Com os resultados gráficos dos quatro modelos citados anteriormente para cada um dos estudos de caso separadamente, e considerando-se agora o esquema mostrado na Figura 19, inicialmente a FRF do modelo médio será comparada com a FRF do modelo base. Esses dois modelos foram construídos sem se considerar nenhuma variação na matriz massa do sistema portanto, suas respostas gráficas deveriam ter uma boa aproximação. No entanto, isso não ocorre devido a presença de incertezas no sistema, tanto no modelado quanto no experimental.

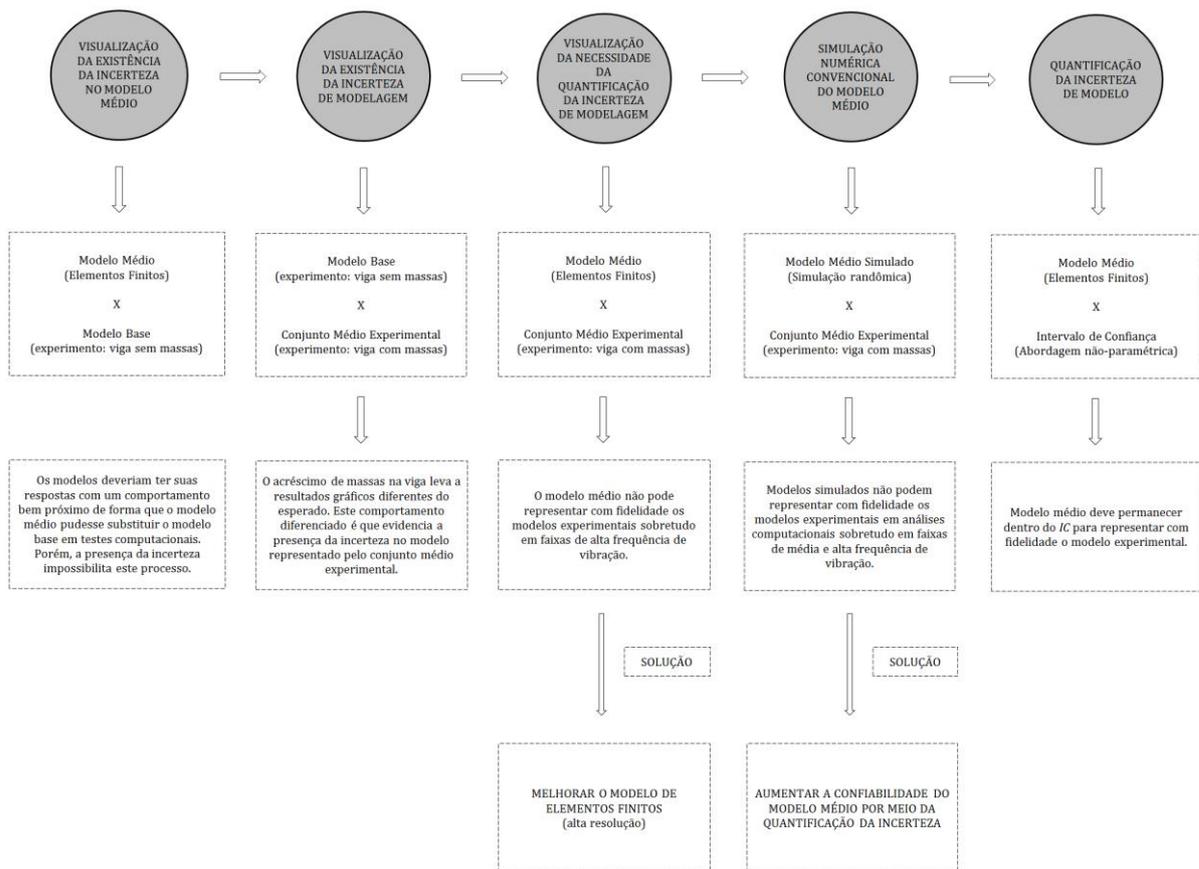


Figura 19: Etapas para a avaliação da confiabilidade de um modelo numérico. Fonte: autor.

No que diz respeito às comparações realizadas entre as FRF 's do modelo base e do conjunto médio experimental, o que se observa é que o acréscimo das massas (representadas pelos imãs) na viga faz com que seu comportamento, representado pela FRF do conjunto

médio experimental, se diferencie do observado no modelo base. E é isto que caracteriza a incerteza de modelo. É possível, então, visualizar, na diferença entre as respostas obtidas, a existência da incerteza e como ela torna diferente a *FRF* do sistema representado pelo conjunto médio experimental quando comparado a do sistema representado pelo modelo base.

Diante do ocorrido, tenta-se construir um modelo em Elementos Finitos (*EF*) (chamado nesta tese por modelo médio) que possa representar com maior fidelidade o conjunto médio experimental de forma que o primeiro possa ser utilizado em análises computacionais ao invés do segundo em testes experimentais. Sendo assim, *FRF's* do modelo médio e do conjunto médio experimental também serão comparadas e nelas se poderá notar a real necessidade da quantificação de incertezas tendo em vista que a resposta gráfica do modelo médio também não acompanha de perto a *FRF* do conjunto médio experimental. O modelo médio, também chamado de modelo numérico, pode ser melhorado ao se levar em conta o tipo de elemento considerado, o número de elementos e a qualidade da malha, por exemplo. Mesmo assim, em muitos casos, a resposta obtida ainda não é satisfatória, em especial quando se trata de sistemas complexos.

Tendo isto em vista, e partindo-se agora para uma segunda tentativa de representação computacional do sistema dinâmico em estudo e também levando-se em conta que pesquisas sobre a quantificação de incertezas de modelo em sistemas dinâmicos e suas abordagens é recente e ainda não acessível a muitas empresas, o que se faz atualmente é proceder a simulações numéricas em que se usa um gerador aleatório randômico que gera as matrizes aleatórias de forma a obter respostas computacionais que possam ser suficientemente confiáveis para representar as respostas experimentais. Se assim acontecesse, não haveria a necessidade da construção de protótipos para a realização de testes, bastaria fazê-las computacionalmente. No entanto, o que será observado mais adiante ao se comparar as *FRF's* do modelo médio simulado e do conjunto médio experimental, é que a utilização das simulações como descritas, que deveriam reproduzir os resultados experimentais, não o fazem, e portanto, não podem ser utilizadas de forma que representem com fidelidade tais modelos. Isto evidencia a necessidade da quantificação da incerteza, que é caracterizada pela construção do Intervalo de Confiança (*IC*). Neste caso portanto, o modelo médio deve pertencer a tal intervalo e ainda cumprir com critérios impostos pelo analista para que seja considerado de alta confiabilidade.

A quantificação da incerteza de modelo considerado neste capítulo será realizada pela

aplicação da abordagem não-paramétrica e por meio de um programa computacional desenvolvido pela autora na plataforma do *software* MATLAB®. Inicialmente, ele constrói a *FRF* do modelo numérico (modelo médio) e em seguida, o gráfico de convergência e o intervalo de confiança de 95%.

A convergência na quantificação da incerteza é determinada pela Equação (1) e os seus valores nos gráficos são apresentados em *dB*.

Além disso, para uma melhor visualização do comportamento das *FRFs*, os resultados gráficos serão apresentados separadamente para toda a faixa de frequência de vibração, para a faixa de baixa frequência, para a faixa de média frequência e para a faixa de alta frequência de vibração.

9.1 ESTUDO DE CASO I: VIGA FIXA-FIXA

O primeiro estudo de caso a ser apresentado nesta tese terá seus dados retirados da referência (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b), já que se encontram disponibilizados pelo autor por meio do endereço <http://engweb.swan.ac.uk/~adhikaris/uq> na intenção de que sejam utilizados em pesquisas. Com isso, será possível a reprodução das respostas gráficas para que se proceda à comparações entre as curvas de *FRF*.

O sistema dinâmico é constituído por uma viga de aço de seção transversal retangular uniforme. As extremidades da viga são aparafusadas em dois blocos de aço pesado, que por sua vez, são fixos a uma mesa rígida por meio de parafusos. Este arranjo de fixação foi construído com o objetivo de proporcionar a condição de contorno fixa-fixa, como mostrado na Figura 20. As propriedades do sistema mencionado são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades materiais e geométricas da viga fixa-fixa.

<i>Propriedades geométricas e constitutivas da viga de aço ensaiada</i>		
<i>Propriedade</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidade</i>
Comprimento efetivo (<i>L</i>)	1.200	<i>mm</i>
Largura (<i>b</i>)	40,06	<i>mm</i>

Espessura (t)	2,05	mm
Densidade de massa (ρ)	7.800	kg/m^3
Módulo de Young (E)	200	GPa
Área da seção transversal ($a = bt$)	$8,212 \times 10^{-5}$	m^2
Momento de inércia ($I = 1/12bt^3$)	$2,876 \times 10^{-11}$	m^4
Massa por unidade de comprimento (ρ_l)	0,641	kg/m
Rigidez à flexão (EI)	5,752	Nm^2
Peso total	0,7687	kg

9.1.1 Configuração experimental da viga fixa-fixa

A visão geral do ensaio de viga fixa-fixa pode ser vista na Figura 20. A incerteza será propagada na matriz massa do sistema dinâmico por isso, para simular a aleatoriedade na distribuição da massa, houve a fixação na viga, em posições aleatórias, de 12 massas iguais. Elas são pequenos imãs e sua massa (2g cada) aleatória corresponde ao total de 1,6% da massa da viga.



Figura 20: Visão geral do sistema de viga fixa-fixa. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).

Primeiramente foram obtidas as respostas do sistema base que corresponde ao sistema sem o acréscimo dos imãs na viga. Posteriormente, foram realizados os testes com o acréscimo dos imãs. Como foram realizados 100 ensaios, as posições aleatórias dos imãs são geradas por uma distribuição uniforme com 100 amostras, ou seja, são gerados 100 vetores de 12 posições cada. Em cada um dos ensaios, a posição aleatória dos imãs é alterada, e então, tem-se cem

amostras nominalmente idênticas dos sistemas dinâmicos criados e individualmente testados. Cada linha da Figura 21 apresenta a posição das 12 massas ao longo da viga para a realização de cada um dos 100 ensaios. Já na Figura 22 é possível observar alguns imãs posicionados na viga

Como se sabe, 100 conjuntos de amostras não são suficientes para uma análise estatística confiável porém, e de acordo com Adhikari, Friswell, & Lonkar (2007b), “*segundo o melhor conhecimento dos autores, até agora esse talvez seja o conjunto mais abrangente de dados de resposta medidos experimentalmente disponíveis para sistemas dinâmicos estocásticos*”.

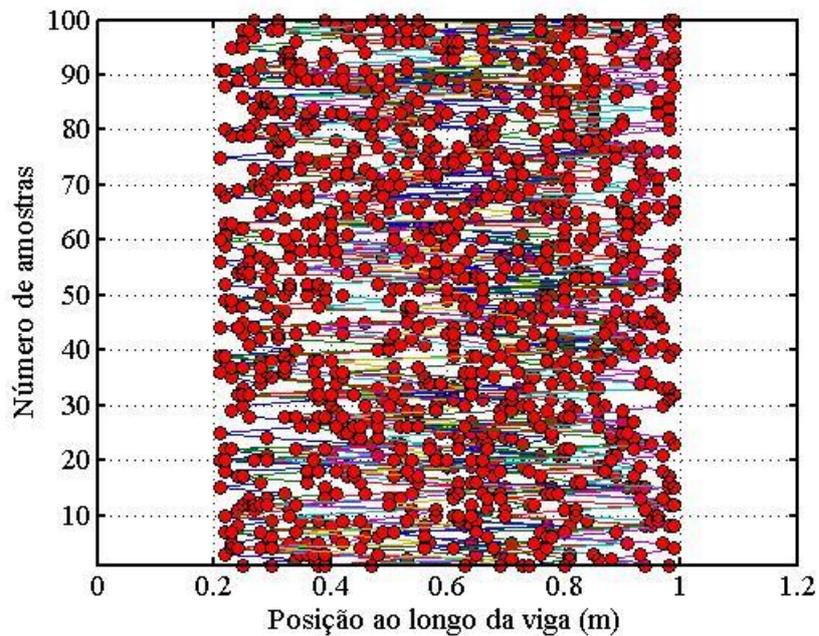


Figura 21: Variação na localização das 12 massas. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).



Figura 22: Massas posicionadas em localizações aleatórias da viga. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).

9.1.2 Cuidados na realização do ensaio da viga fixa-fixa

Um fato muito importante aqui é que o experimento é realizado de forma que seja possível se conhecer a fonte da incerteza, que no caso vem do posicionamento aleatório dos imãs na viga. Para isso alguns cuidados foram tomados. São eles:

1. A viga é uma régua. Seu uso garante que os imãs possam ser facilmente colocados em localizações pré-determinadas, evitando-se assim erros de posicionamento. É o que se verifica na Figura 22;
2. As massas adicionadas são representadas por imãs, o que facilita o seu posicionamento em qualquer localização da viga. Isto pode ser visto também na Figura 22;
3. É utilizado um *shaker* para excitação da estrutura que age como um martelo de impacto. Isso se justifica pelo fato de que, no caso do martelo, é difícil garantir que o impacto ocorra exatamente na mesma localização com a mesma força em cada uma das amostras. Assim, a utilização do shaker elimina, tanto quanto possível, as incertezas que surgem devido às forças de entrada. Tal montagem pode ser vista na Figura 23.

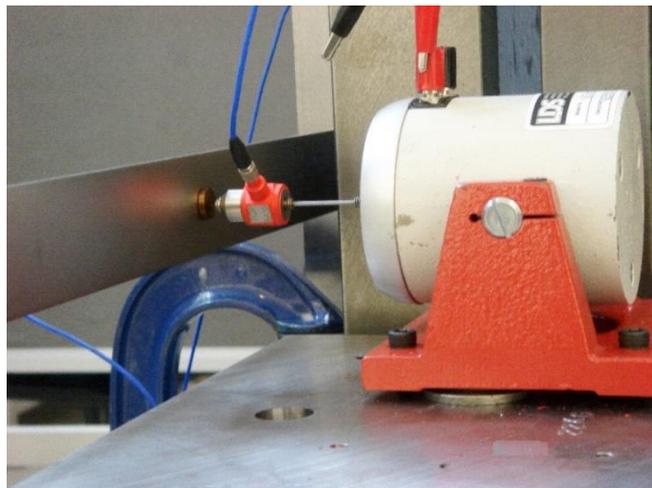


Figura 23: Utilização do shaker que age como um martelo de impacto. Fonte: (Adhikari, Friswell, & Lonkar, 2007b).

4. Uma pequena placa circular de latão de 2g (como pode ser visto na Figura 23) foi fixada na viga para evitar que o impacto do shaker causasse um entalhe na régua por causa da utilização da ponta de aço que é mais ‘dura’ do que o material da viga.

9.1.3 Obtenção das respostas do ensaio da viga fixa-fixa

Na obtenção das respostas experimentais foram utilizados três acelerômetros (cada um deles tem massa de 6g) como sensores de resposta para obtenção das *FRFs* experimentais. Suas posições são selecionadas tal que dois deles ficam próximos às extremidades da viga e o terceiro é posicionado na extremidade mais próxima à excitação. No entanto, nesta tese serão utilizadas somente as respostas referentes ao acelerômetro 1 localizado no ponto de excitação, ou seja, onde também está localizado o *shaker*. A disposição dos acelerômetros pode ser verificada na Figura 20.

A ponta de aço usada no experimento apenas fornece dados limpos até aproximadamente 4.500 Hz, e assim, esse valor de frequência é usado como o limite máximo das *FRFs* medidas, obtidas na unidade $dB[(m/s)/N] \times Hz$. A unidade *dB* foi escolhida, pois aproxima o tamanho dos picos dos gráficos *FRFs*, facilitando a análise.

9.1.4 Visualização da existência da incerteza no modelo médio

Compara-se nesse subitem as respostas gráficas do modelo médio e do modelo base. Tais modelos, como já informado no início desse capítulo, foram construídos sem se inserir neles nenhum tipo de aleatoriedade, como ocorre com o conjunto médio experimental ao se acrescentar na viga ensaiada os imãs em posições aleatórias. Pode-se dizer então que, devido a esse fato, as *FRF's* de tais modelos deveriam concordar já que são construídos tendo por base um único sistema projetado, denominado aqui de modelo projetado, conforme apresentado na Figura 1.

No entanto, não é o que se observa nas respostas gráficas mostradas na Figura 29, obtida para toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz), melhor visualizadas na Figura 30 (faixa de baixa frequência: 0 a 800 Hz), na Figura 31 (faixa de média frequência: 800 a 2.200 Hz) e na Figura 27 (faixa de alta frequência: 2.200 a 4.500 Hz). Na faixa de baixa frequência de vibração a *FRF* do modelo médio segue um pouco mais de perto a *FRF* do modelo base apesar de haver um deslocamento dos picos de ressonância das duas curvas. Já a medida que a frequência aumenta, cresce a diferença entre as respostas.

Como se sabe, ao se construir o modelo experimental incertezas aleatórias irreduzíveis

(como apresentadas na Figura 13) são nele introduzidas. Isso, juntamente com o fato de que o modelo médio carrega a incerteza de modelo, faz com que as curvas sejam demasiadas diferentes impossibilitando que se utilize o modelo médio em lugar do modelo experimental, tal qual é o objetivo da abordagem não-paramétrica. Sendo assim, pode-se dizer que o modelo médio deve ter sua confiabilidade aumentada.

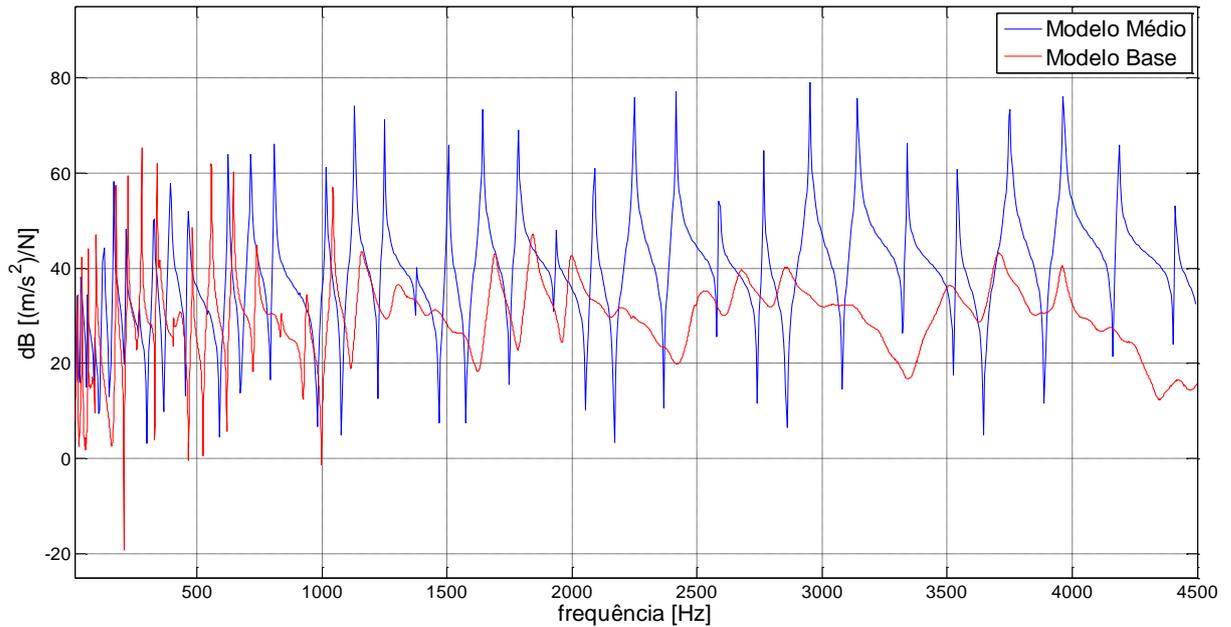


Figura 24: *FRF* do modelo médio e modelo base para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

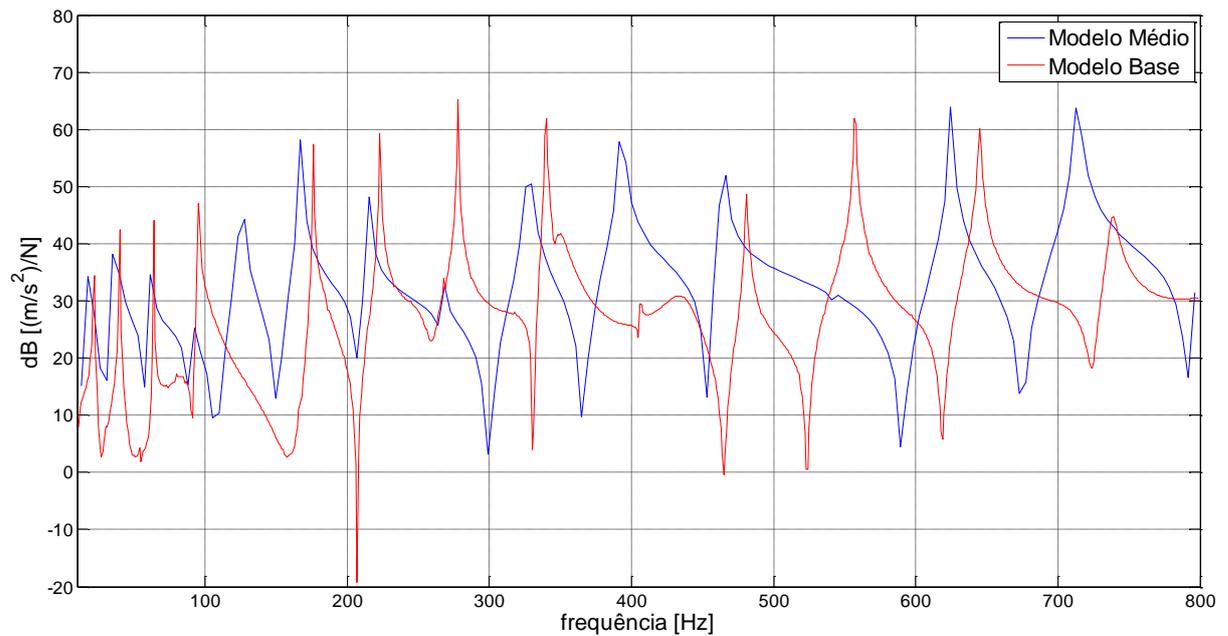


Figura 25: *FRF* do modelo médio e modelo base para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

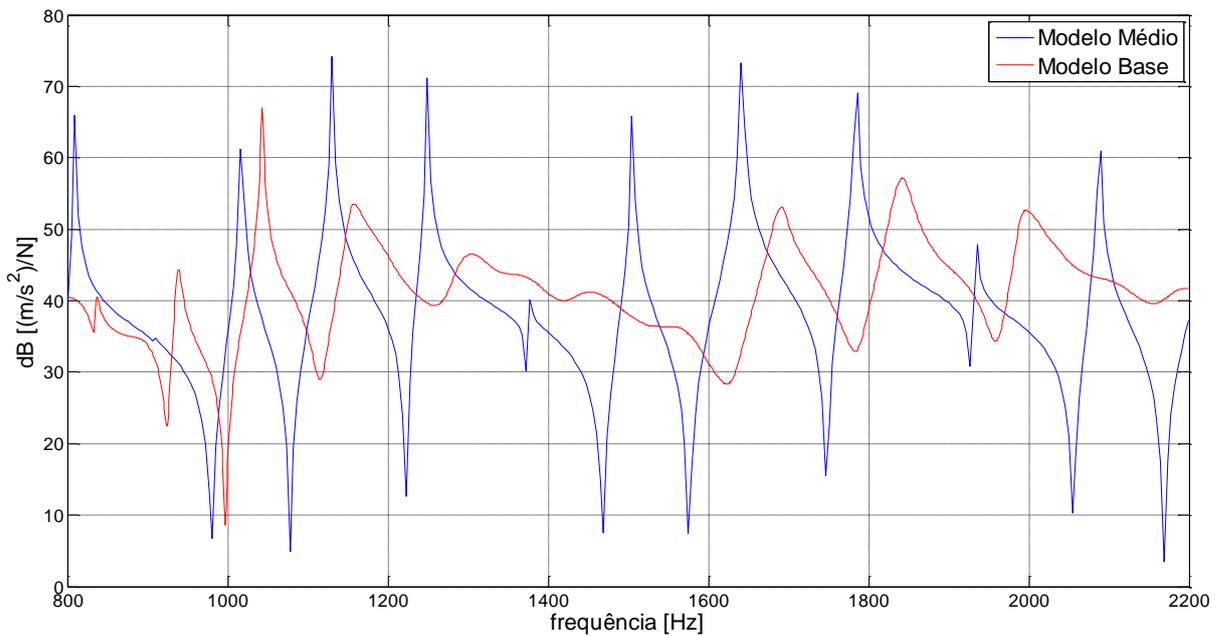


Figura 26: *FRF* do modelo médio e modelo base para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

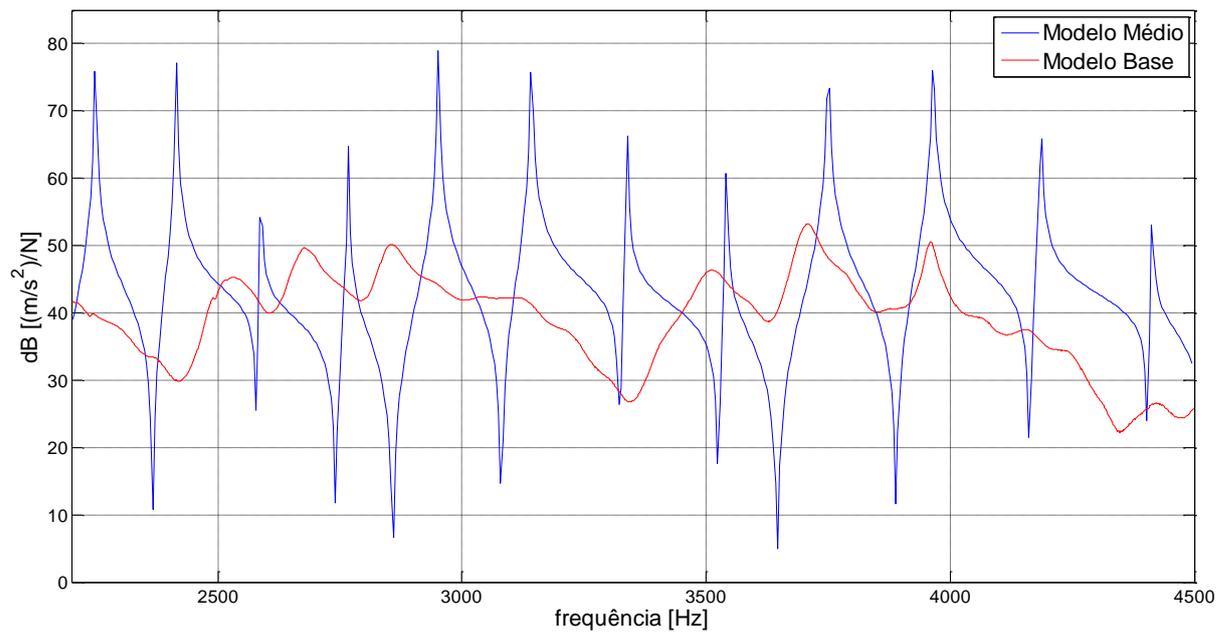


Figura 27: *FRF* do modelo médio e modelo base para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.1.5 Visualização da existência da incerteza de modelagem

As respostas gráficas a serem observadas a seguir mostram as alterações que se pode obter na *FRF* quando se incorpora incertezas no sistema, que no caso dessa tese, se faz por meio do acréscimo de imãs na viga em posições aleatórias. Sendo assim, as análises farão uso das

respostas resultantes do experimento referentes ao modelo base que é representado pela viga sem acréscimo de imãs, e do conjunto médio experimental, que é a média das 100 medidas experimentais com o acréscimo das massas na viga.

A Figura 28 mostra o resultado para toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) porém, é possível observar na Figura 29, em que se tem as FRF 's para a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), que o conjunto médio experimental segue o modelo base mais de perto. Já na Figura 30, que mostra resultados para a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz), pode-se ver que se inicia uma tendência de distanciamento entre as curvas no que diz respeito aos picos de ressonância, que apresentam um deslocamento entre eles desde aproximadamente 100 Hz. Os resultados tendem a piorar na faixas de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz), como apresentado na Figura 31. Este comportamento ocorre devido à presença de massas no conjunto médio experimental, as quais não se acrescentou no modelo base.

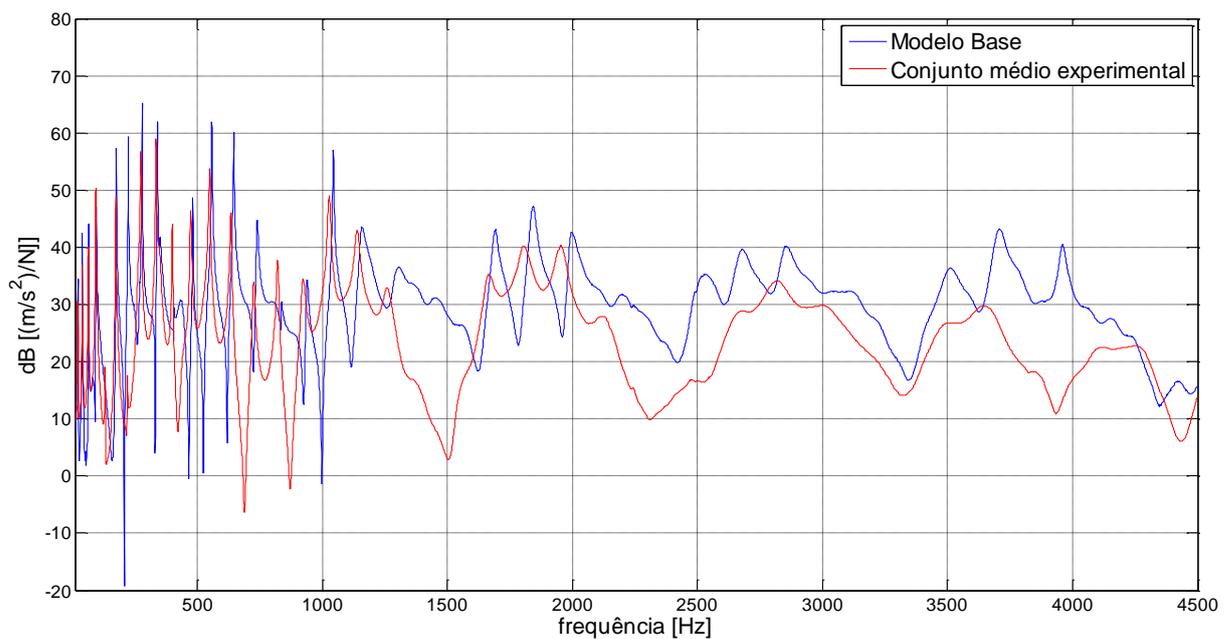


Figura 28: FRF do modelo base e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

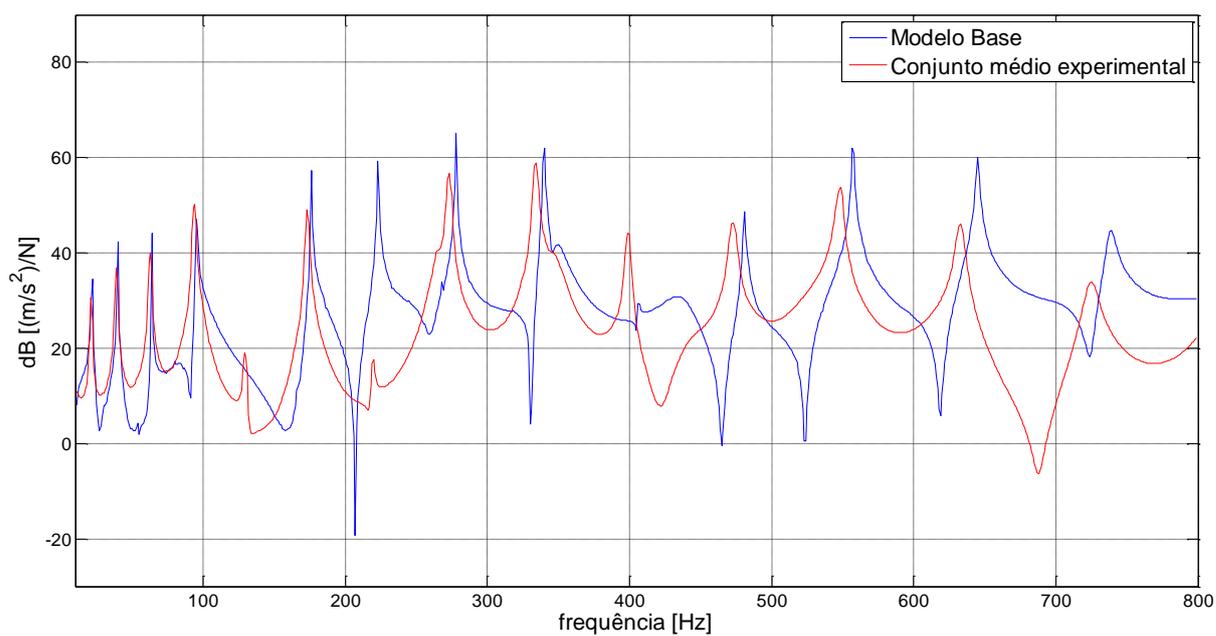


Figura 29: *FRF* do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

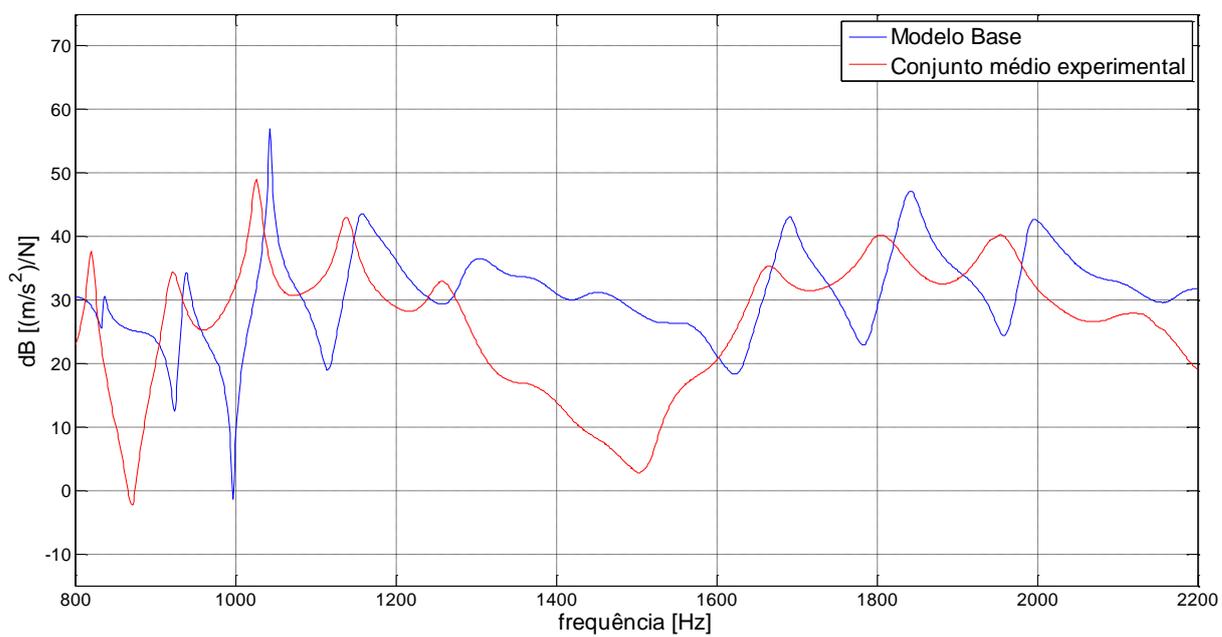


Figura 30: *FRF* do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

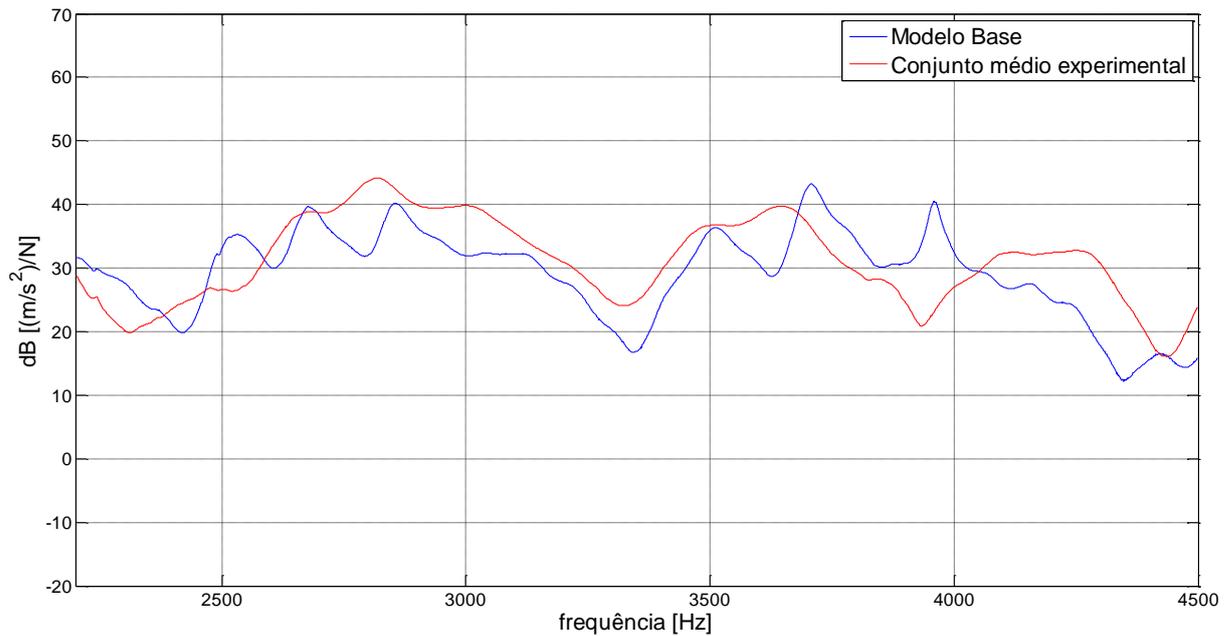


Figura 31: *FRF* do modelo base e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.1.6 Visualização da necessidade da quantificação da incerteza de modelagem

Em projetos reais, o que se espera é que o modelo médio possa representar com fidelidade o modelo experimental. No entanto, não é o que se observa nas comparações das respostas gráficas a serem realizadas entre o sistema modelado em *EF*, denominado modelo médio, e o conjunto médio experimental.

Verifica-se em toda a faixa de frequência (0 a 4.500 *Hz*), apresentada na Figura 32, que as curvas do conjunto médio experimental não seguem de perto as curvas do modelo médio. Isso pode ser melhor observado principalmente na Figura 34, em que se tem as *FRF's* da faixa de média frequência (800 a 2.200 *Hz*) e na Figura 35, que mostra os resultados para a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 *Hz*). Além disso, existe um deslocamento dos picos de ressonância melhor visualizados especialmente na faixa de baixa frequência (0 a 800 *Hz*) apresentada na Figura 33. Isto decorre do fato de que em altas frequências se torna mais difícil a previsibilidade do modelo.

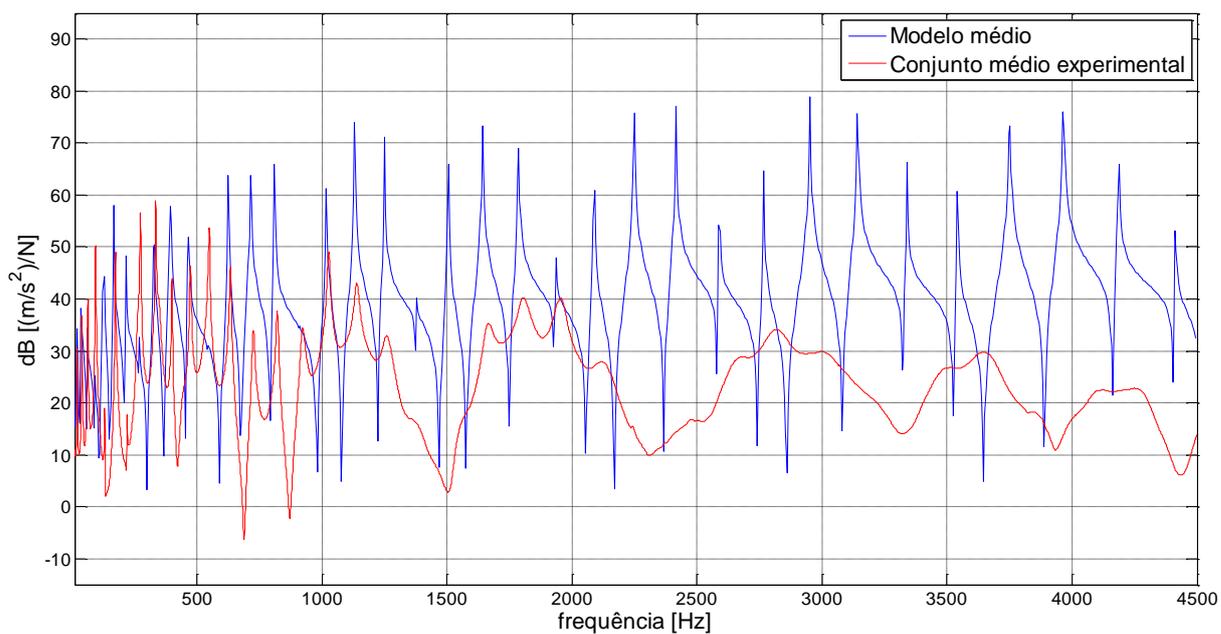


Figura 32: *FRF* do modelo médio e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

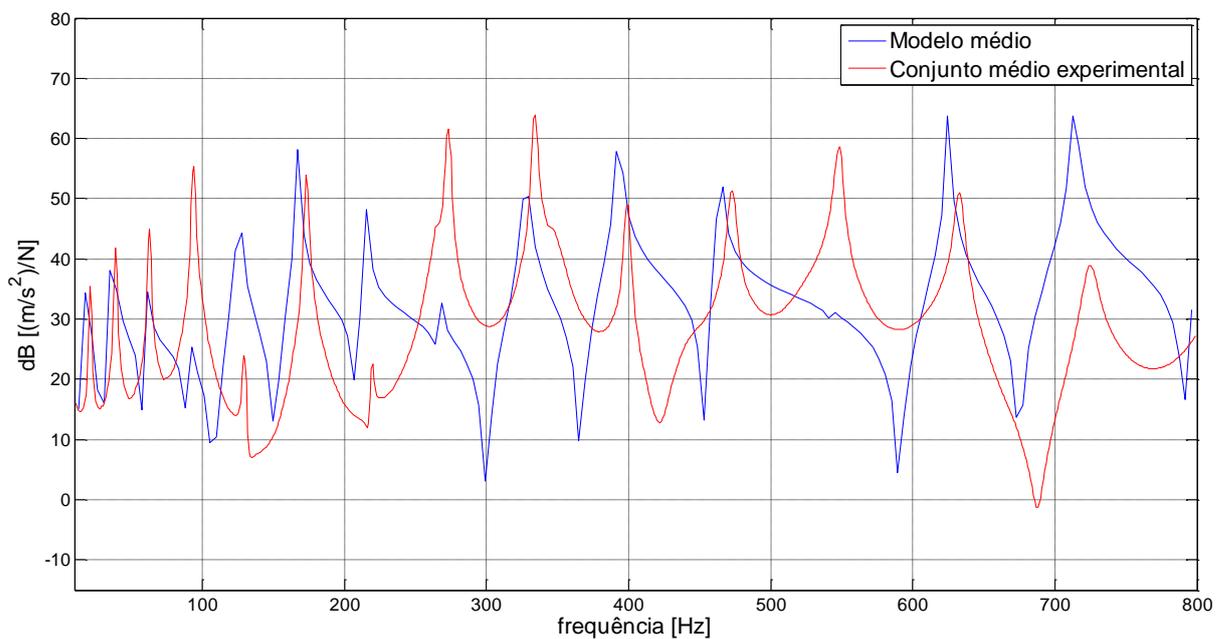


Figura 33: *FRF* do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

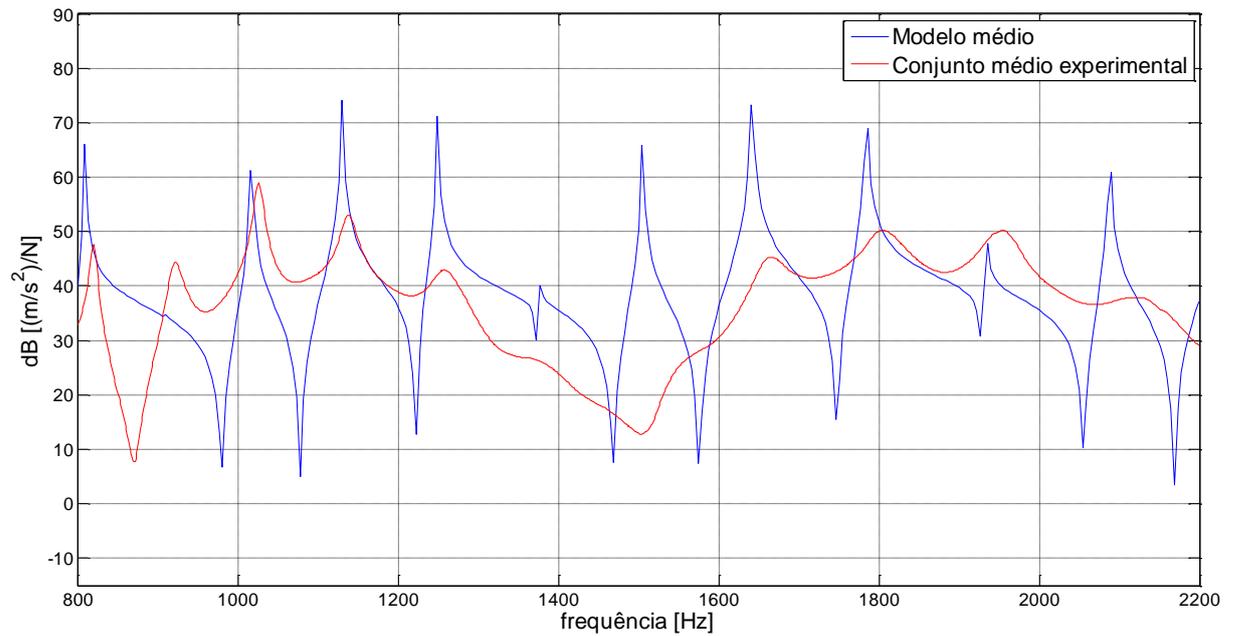


Figura 34: *FRF* do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

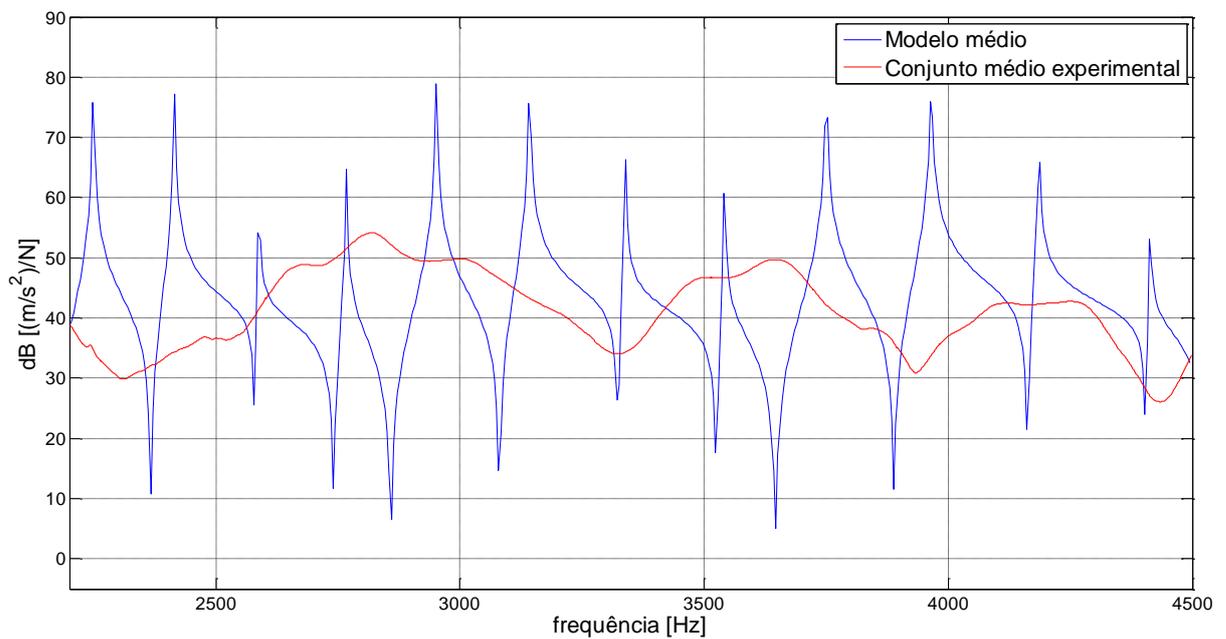


Figura 35: *FRF* do modelo médio e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.1.7 Simulação numérica convencional do modelo médio

Aqui serão comparadas as *FRF's* da viga para o conjunto médio simulado e o conjunto médio experimental. Em toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) mostrada na Figura 36

observa-se uma discordância muito acentuada entre os resultados gráficos. Para melhor visualização desses resultados são mostrados separadamente gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 37 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 38 a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz) e na Figura 39 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz).

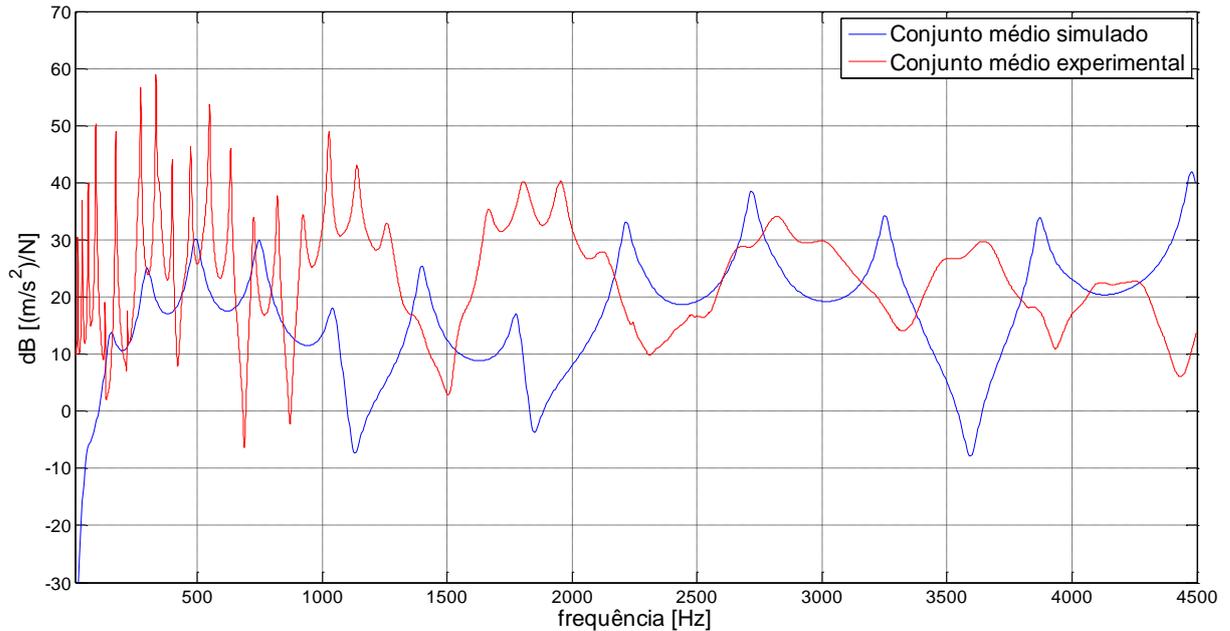


Figura 36: *FRF* do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

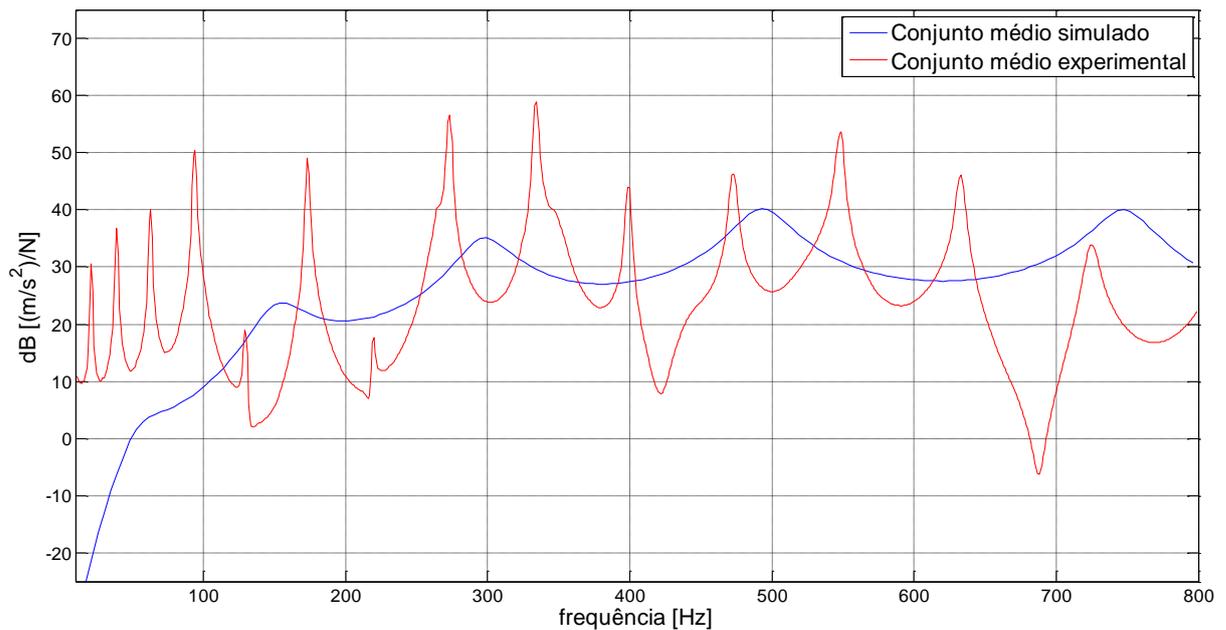


Figura 37: *FRF* do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

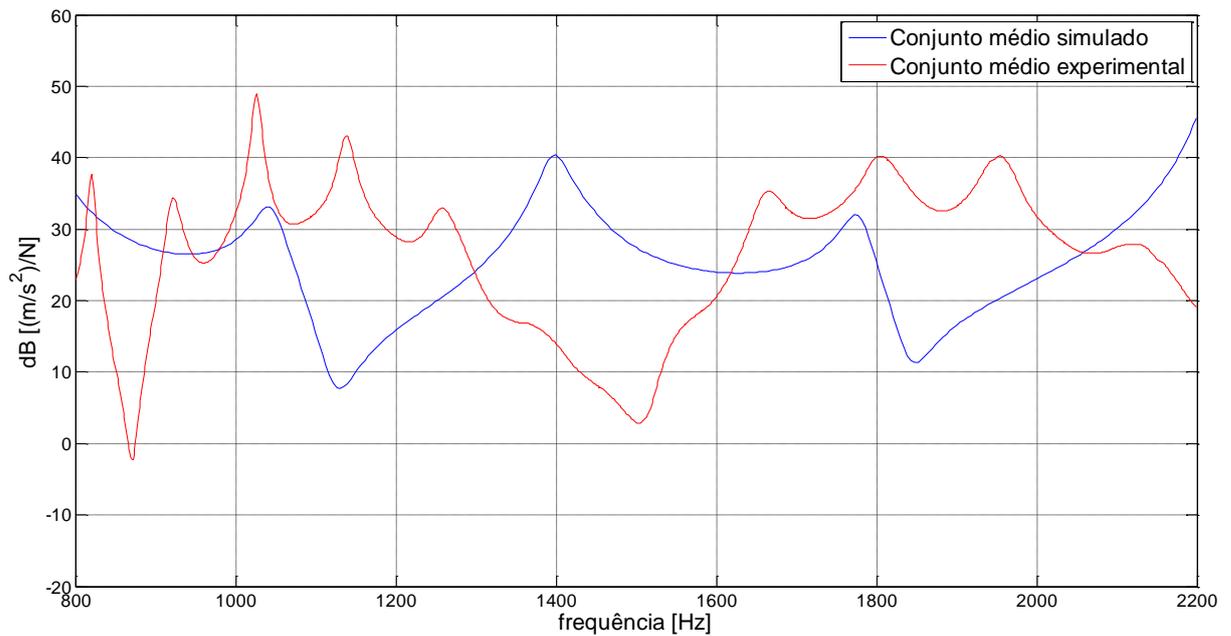


Figura 38: *FRF* do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

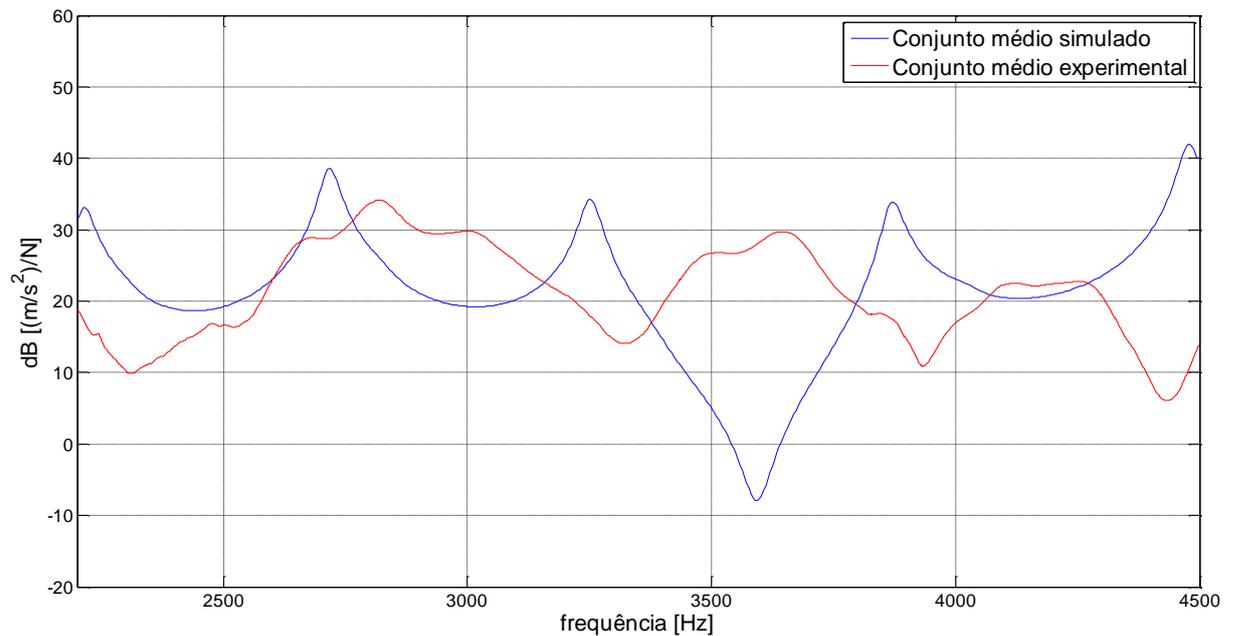


Figura 39: *FRF* do conjunto médio simulado e conjunto médio experimental para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.1.8 Quantificação da incerteza de modelo

A quantificação da incerteza de modelo será realizada neste subitem para que se possa aumentar a confiabilidade do modelo numérico, chamado modelo médio.

Uma variável fundamental para esta quantificação é o parâmetro de dispersão. Ele carrega a informação sobre a incerteza no modelo de *EF* e deve ser calculado para se proceda à aplicação da abordagem não-paramétrica. Entretanto, tendo em vista que ele tem uma grande influência na resposta da quantificação, a quantificação da incerteza de modelo neste subitem será realizada para cinco valores de parâmetros de dispersão adotados arbitrariamente δ (0,01 / 0,05 / 0,1 / 0,2 / 0,5) com a intenção justamente de se estudar a sua influência na resposta ao se considerar incerteza na matriz massa.

É preciso lembrar que a incerteza é dada pelo intervalo de confiança *IC* de 95%.

9.1.8.1 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,01$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o *IC* de 95% além da *FRF* do modelo médio. A Figura 40 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,01. Já para as *FRFs*, toda a faixa de frequência (0 a 4.500 *Hz*) é mostrada na Figura 41 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 42 a faixa de baixa frequência (0 a 800 *Hz*), na Figura 43 a faixa de média frequência (800 a 2.200 *Hz*) e na Figura 44 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 *Hz*).

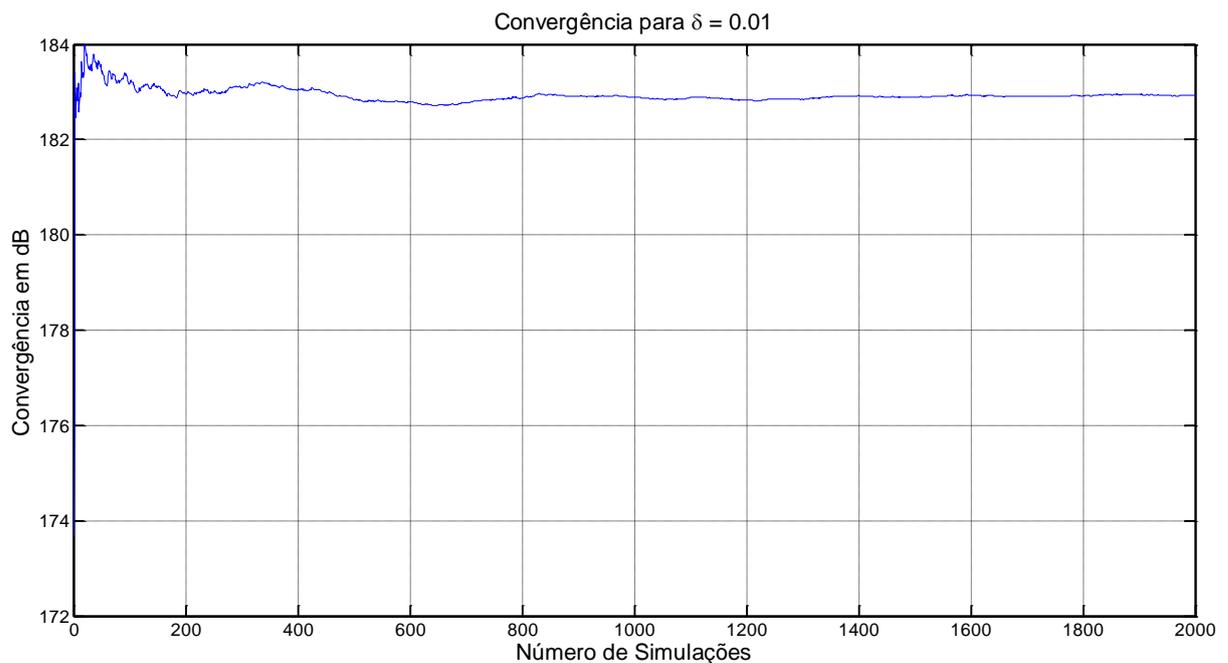


Figura 40: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

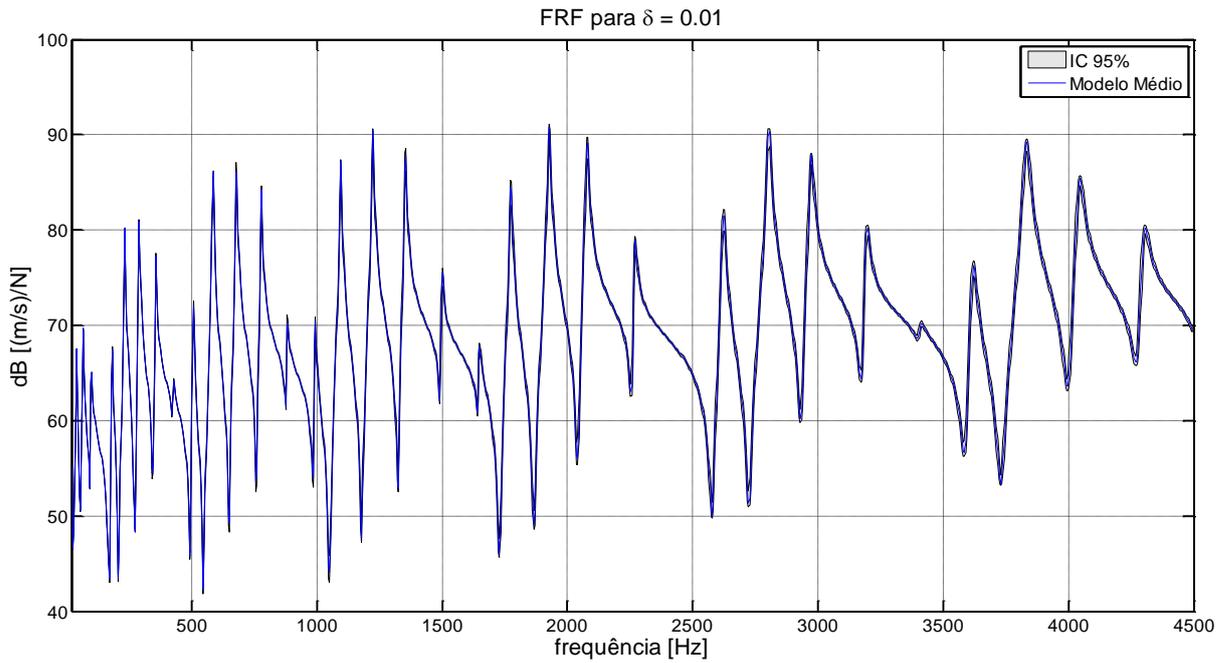


Figura 41: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

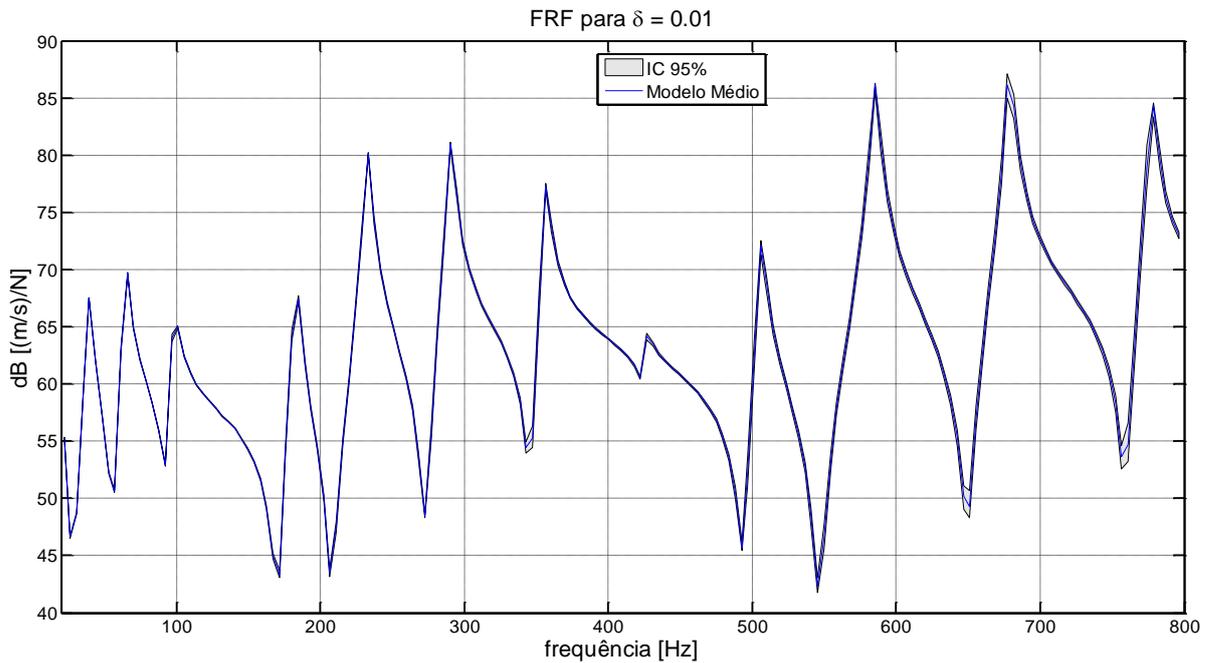


Figura 42: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

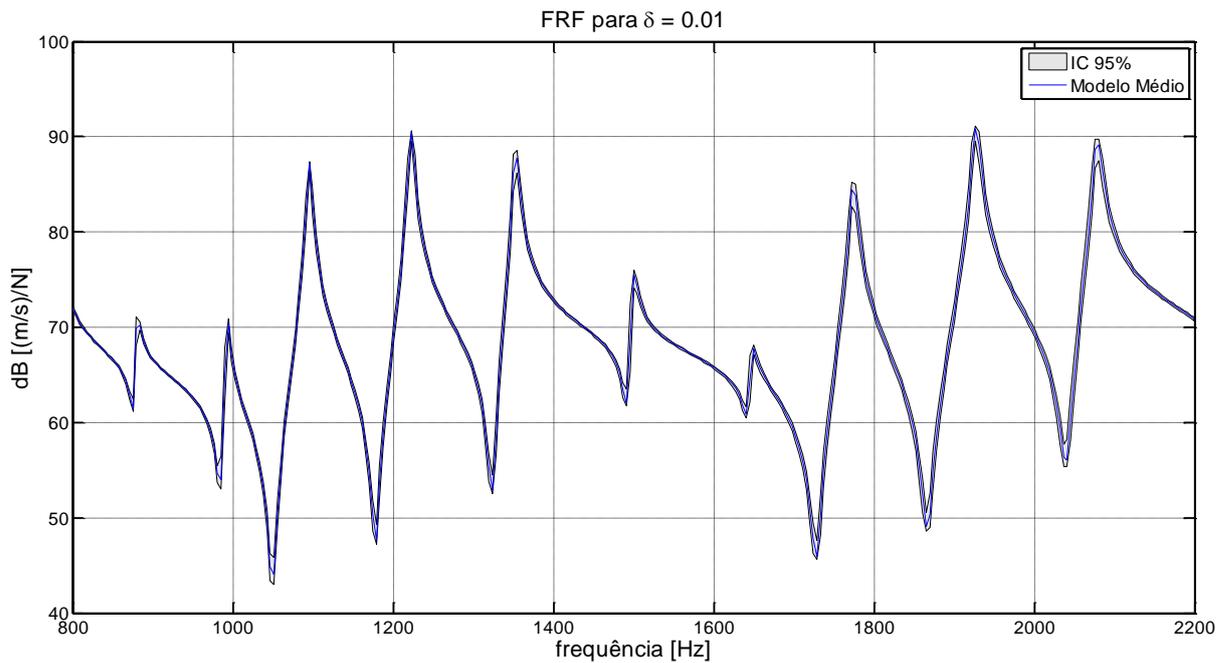


Figura 43: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

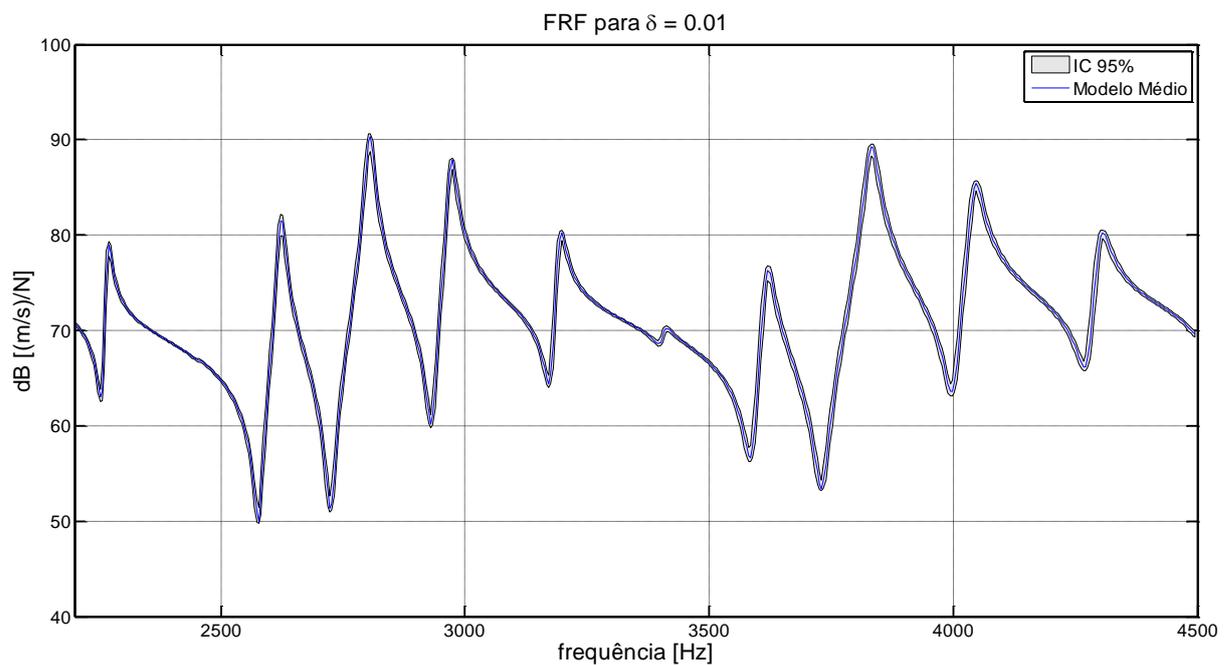


Figura 44: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

9.1.8.2 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,05$

Aqui serão apresentadas as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 45 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,05. Já para as FRFs, toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) é

mostrada na Figura 46 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 47 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 48 a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz) e na Figura 49 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz).

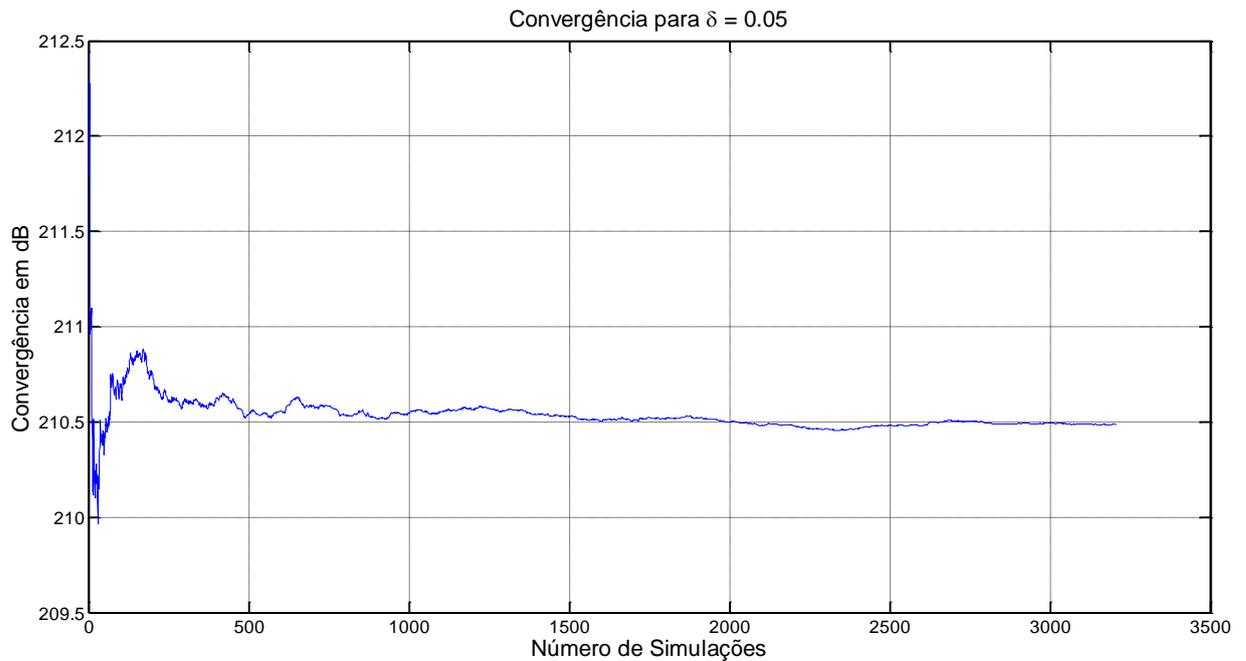


Figura 45: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

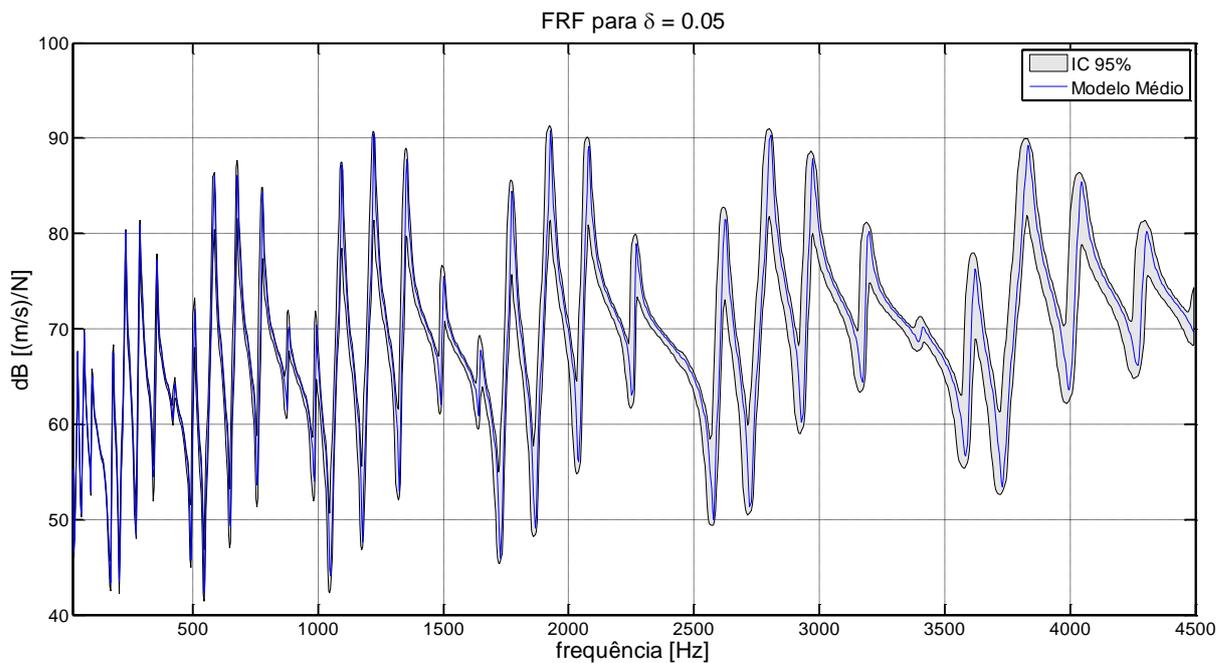


Figura 46: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

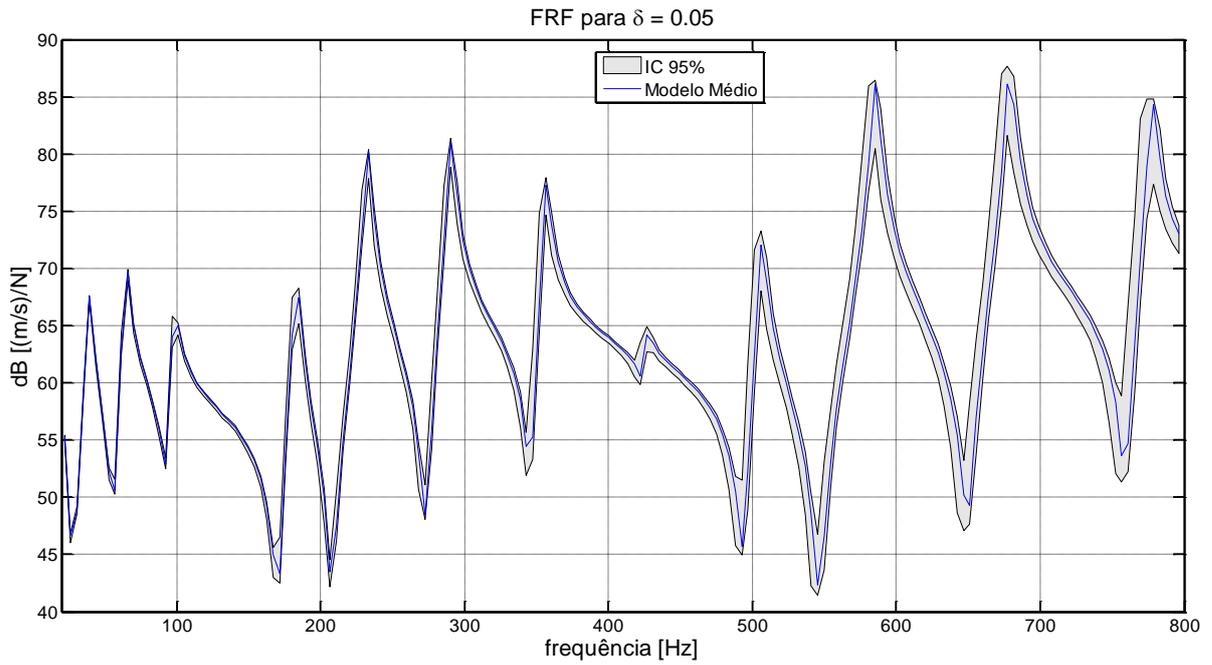


Figura 47: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

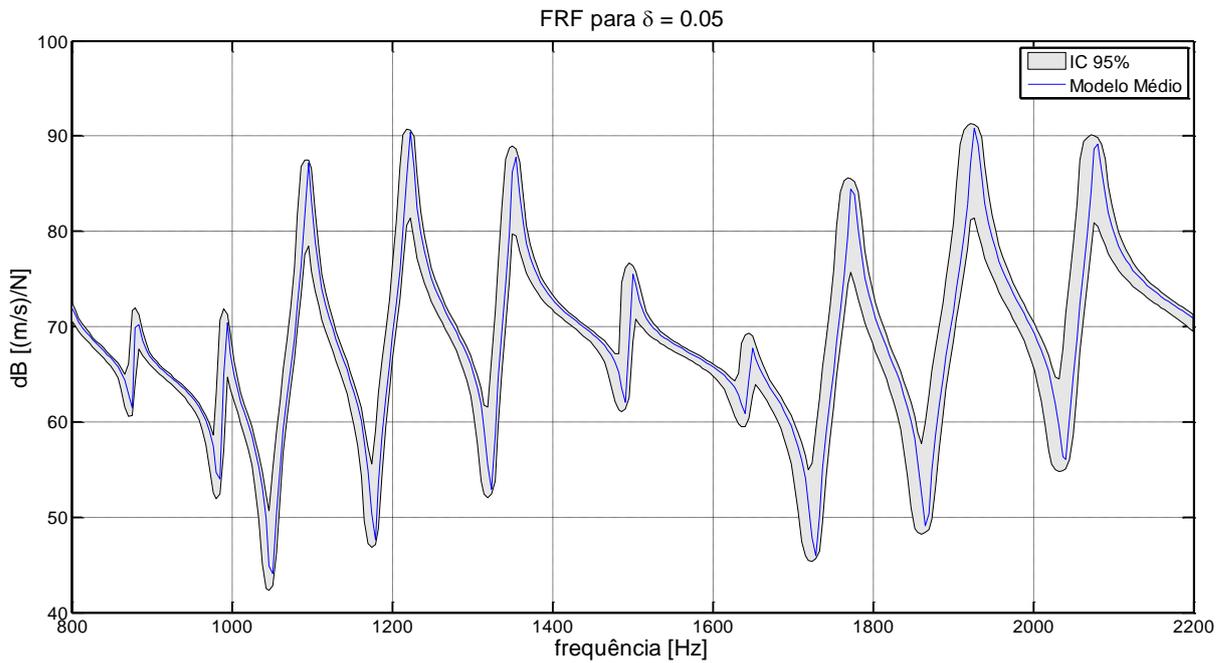


Figura 48: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

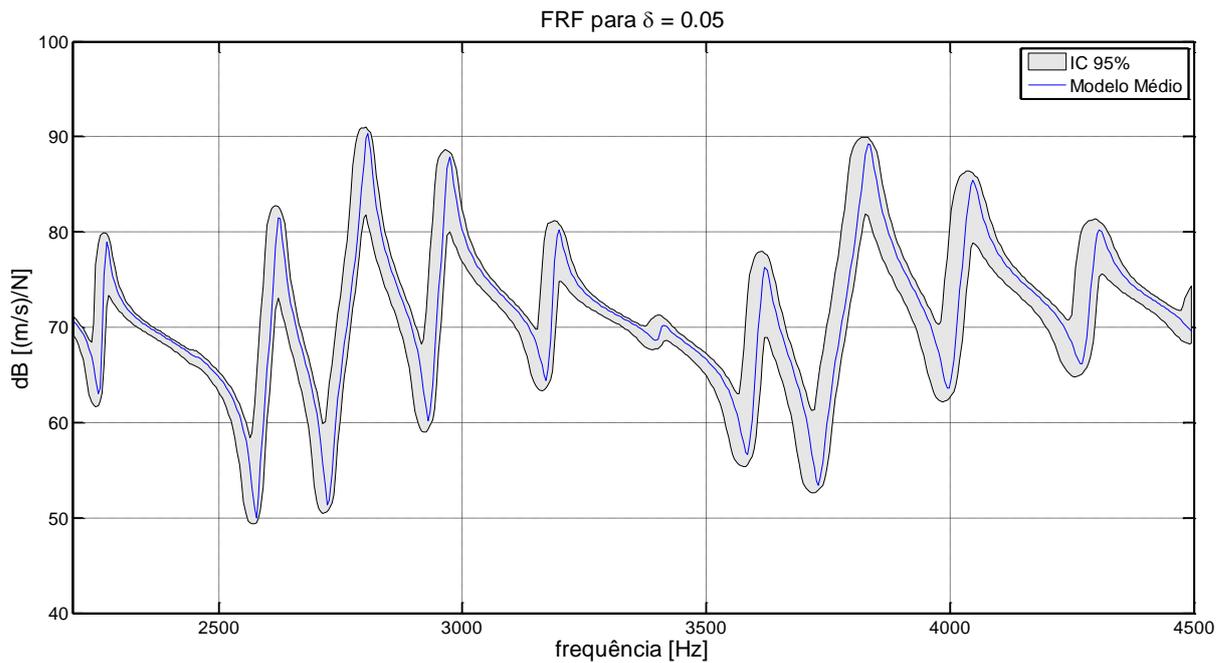


Figura 49: Modelo médio e *IC* para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

9.1.8.3 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,1$

Considerando-se o parâmetro de dispersão de 0,1, o *IC* de 95% e a *FRF* do modelo médio são apresentadas. O gráfico da Figura 50 apresenta a convergência do método. Já a *FRF* para toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) é mostrada na Figura 51 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 52 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 53 a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz) e na Figura 54 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz).

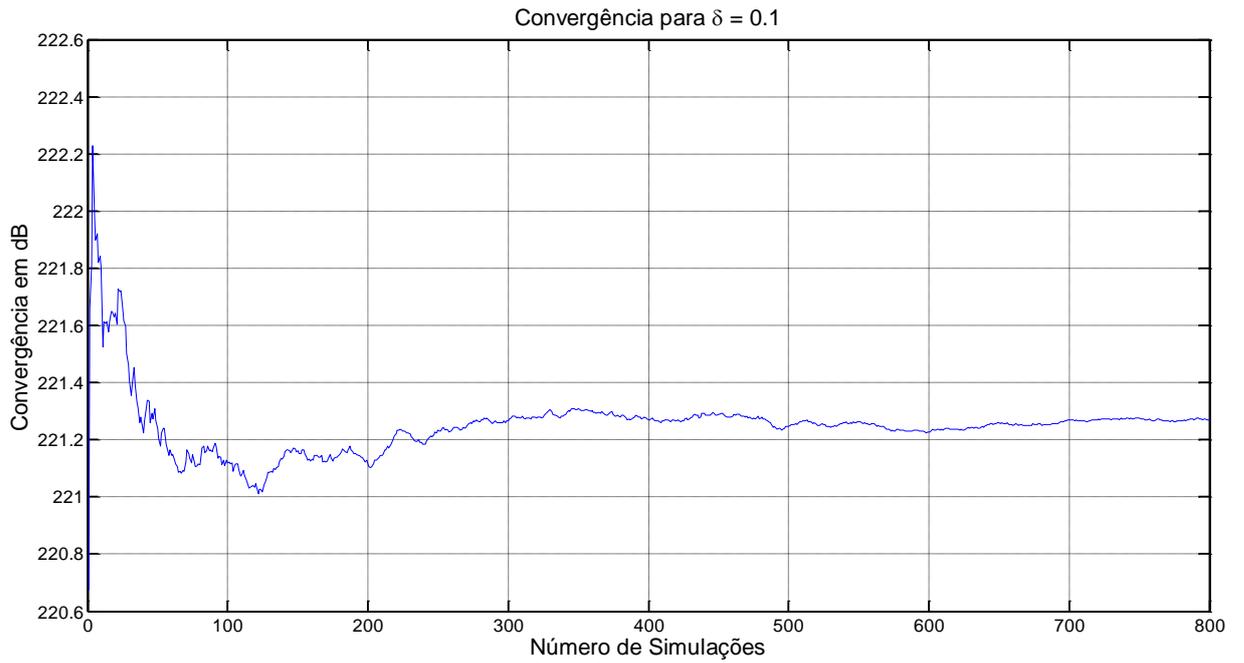


Figura 50: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

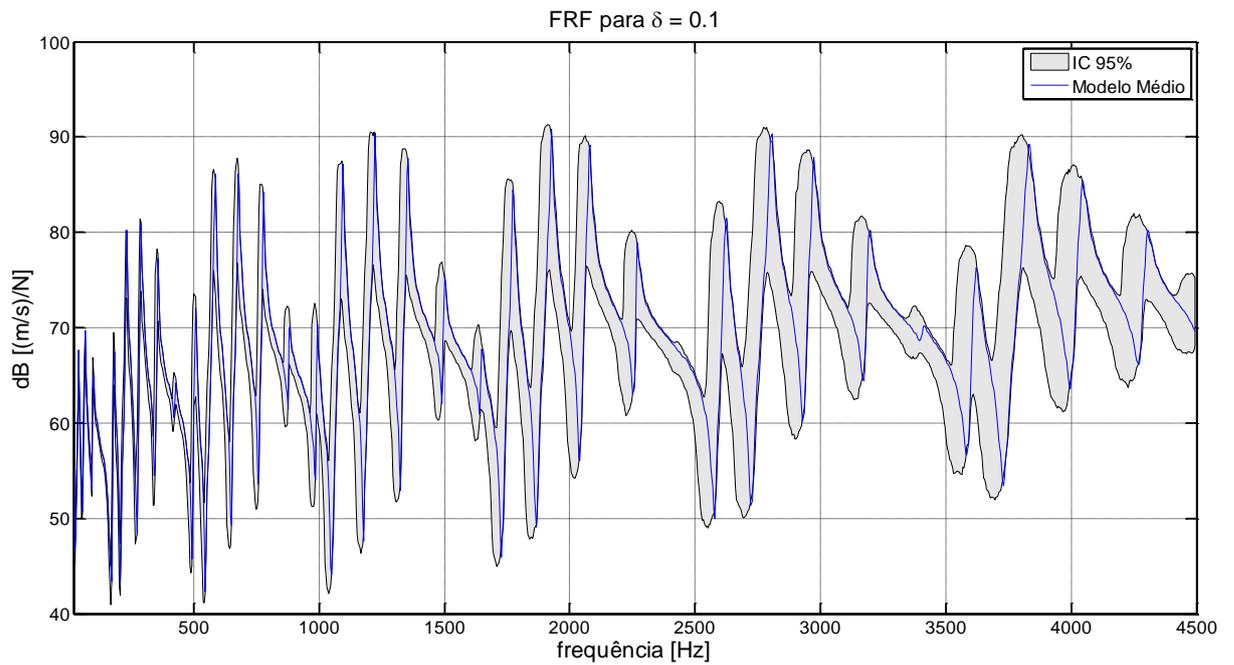


Figura 51: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

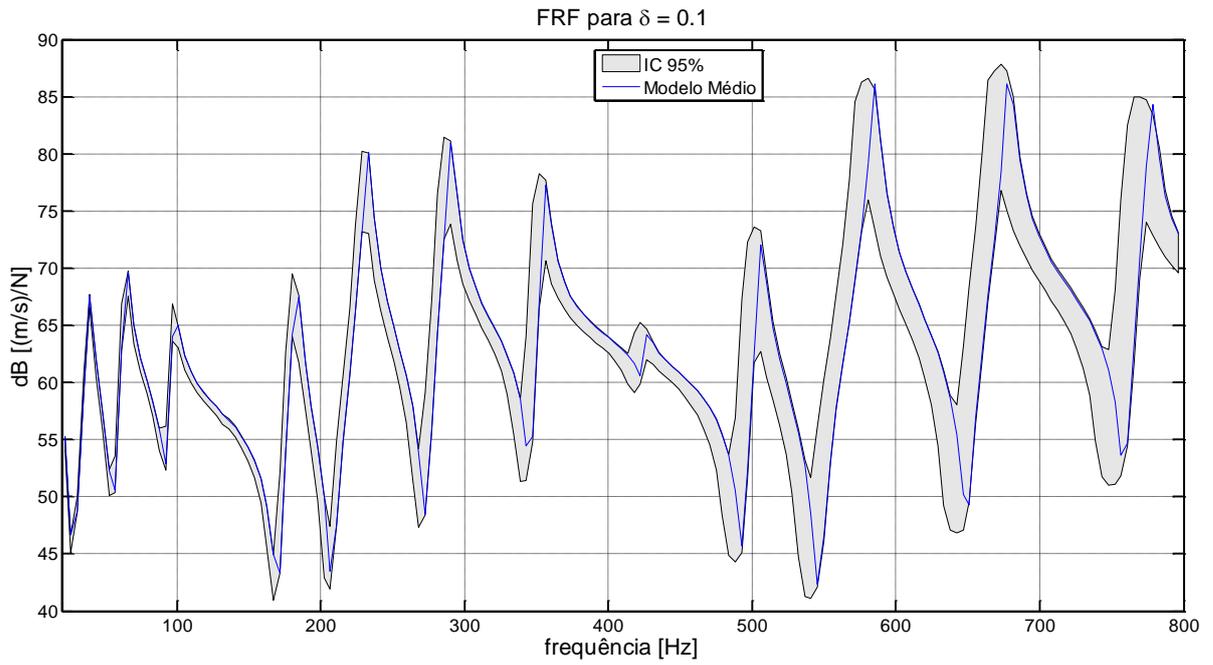


Figura 52: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

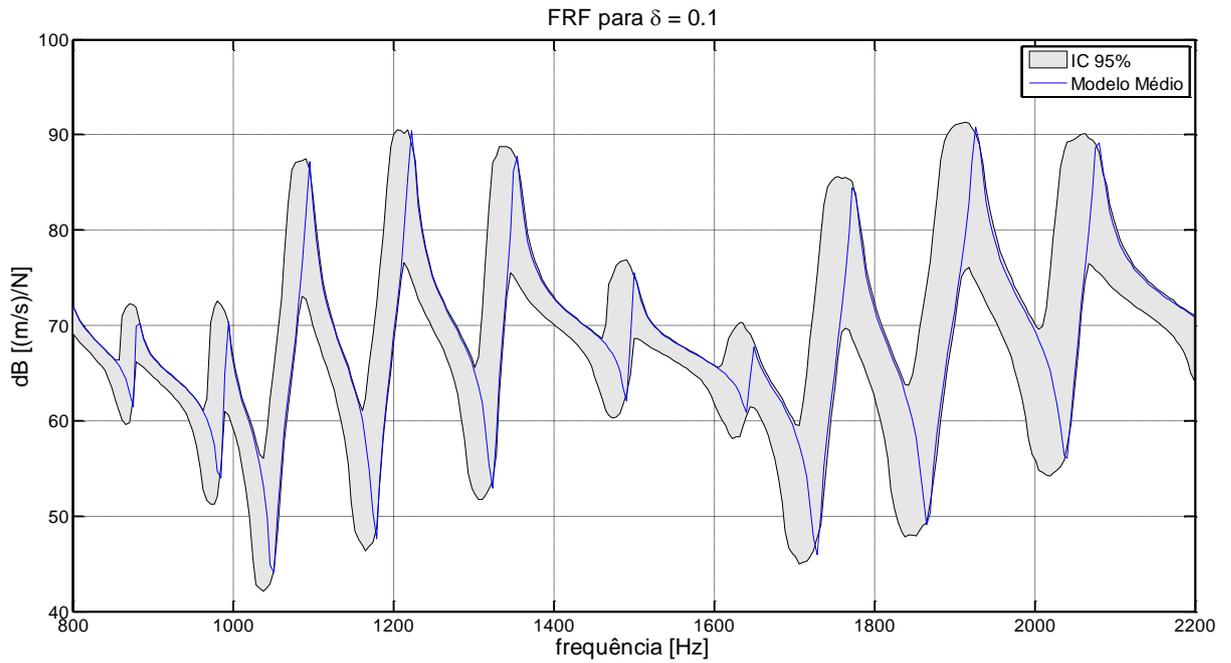


Figura 53: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

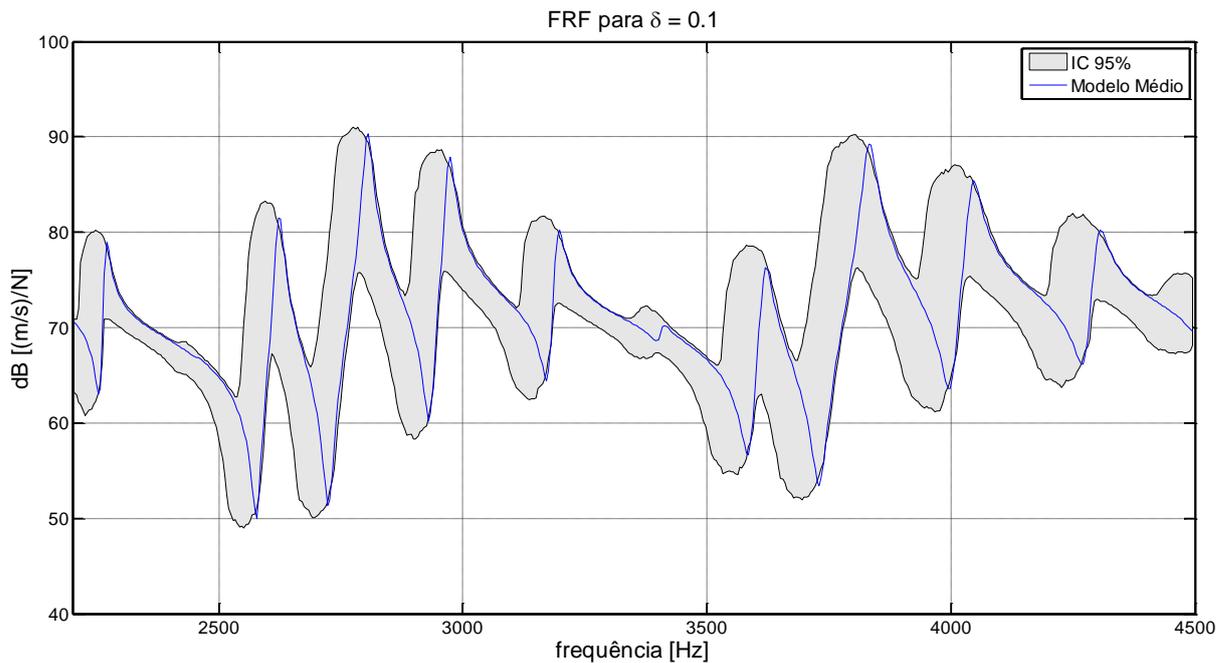


Figura 54: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

9.1.8.4 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,2$

Ao se considerar o parâmetro de dispersão de 0,2, o IC de 95% e a FRF do modelo médio são apresentadas. O gráfico da Figura 55 apresenta a convergência do método. Já a FRF para toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) é mostrada na Figura 56 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 57 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 58 a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz) e na Figura 59 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz).

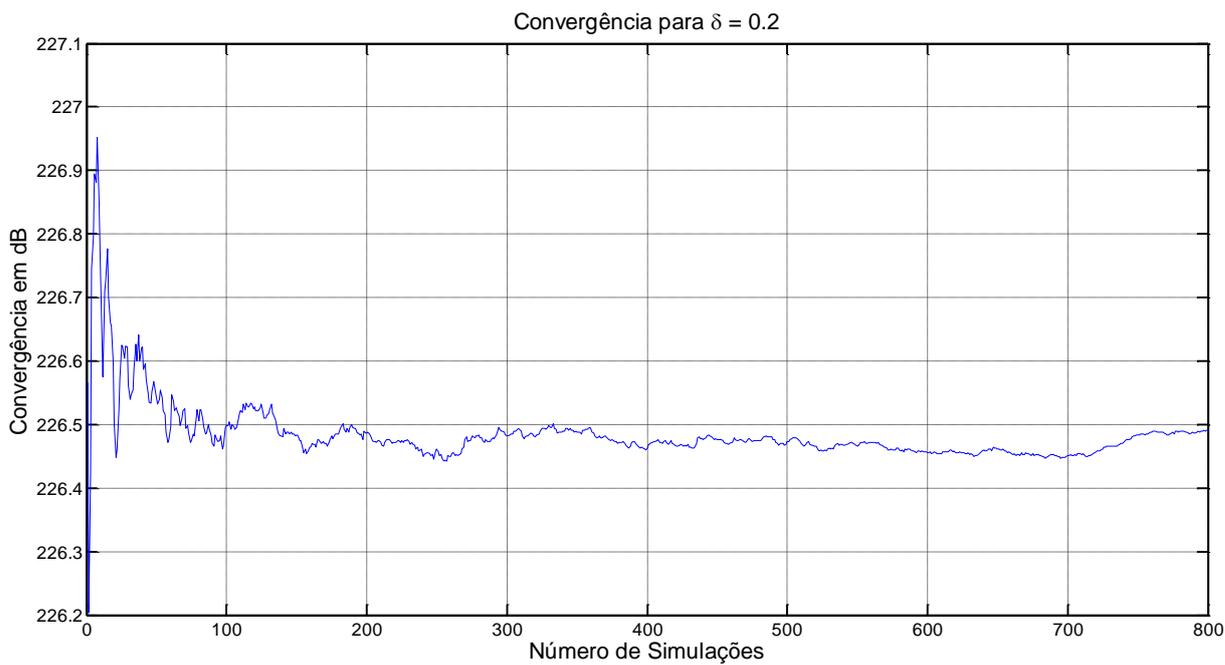


Figura 55: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

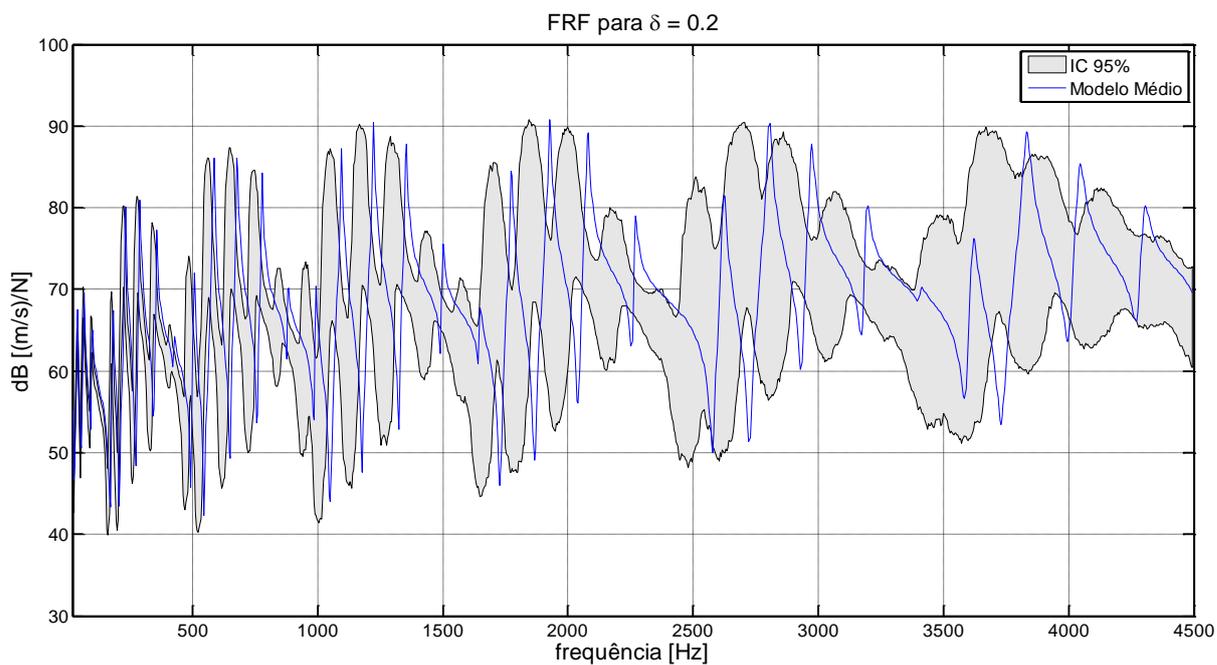


Figura 56: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

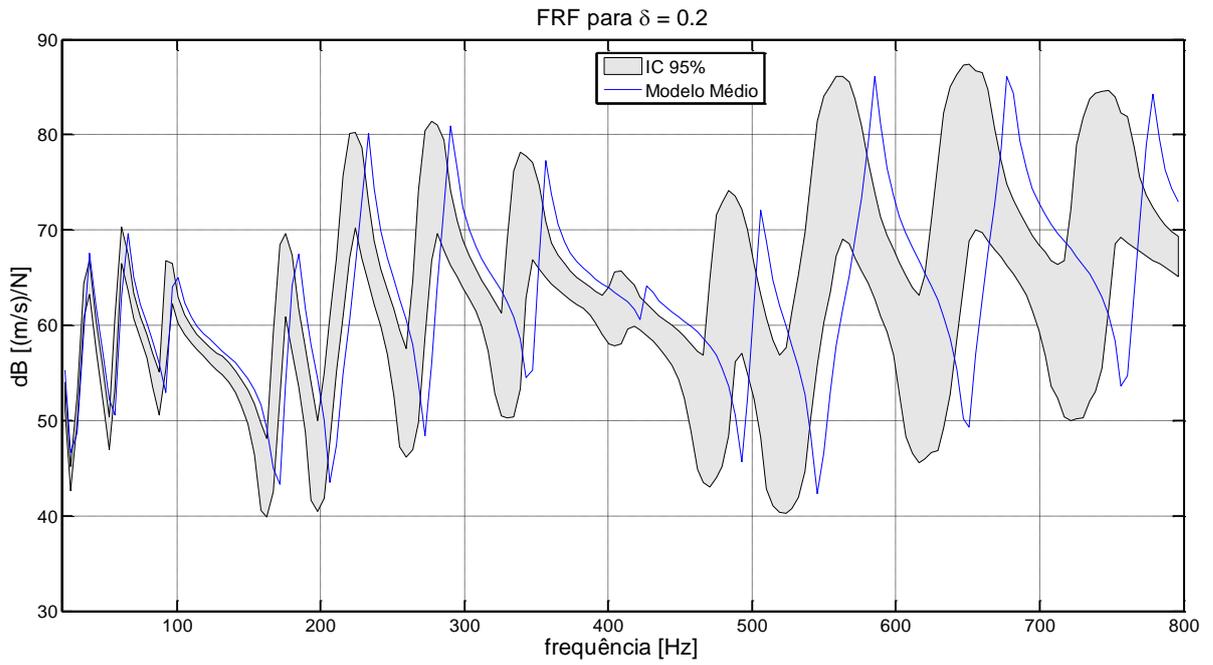


Figura 57: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

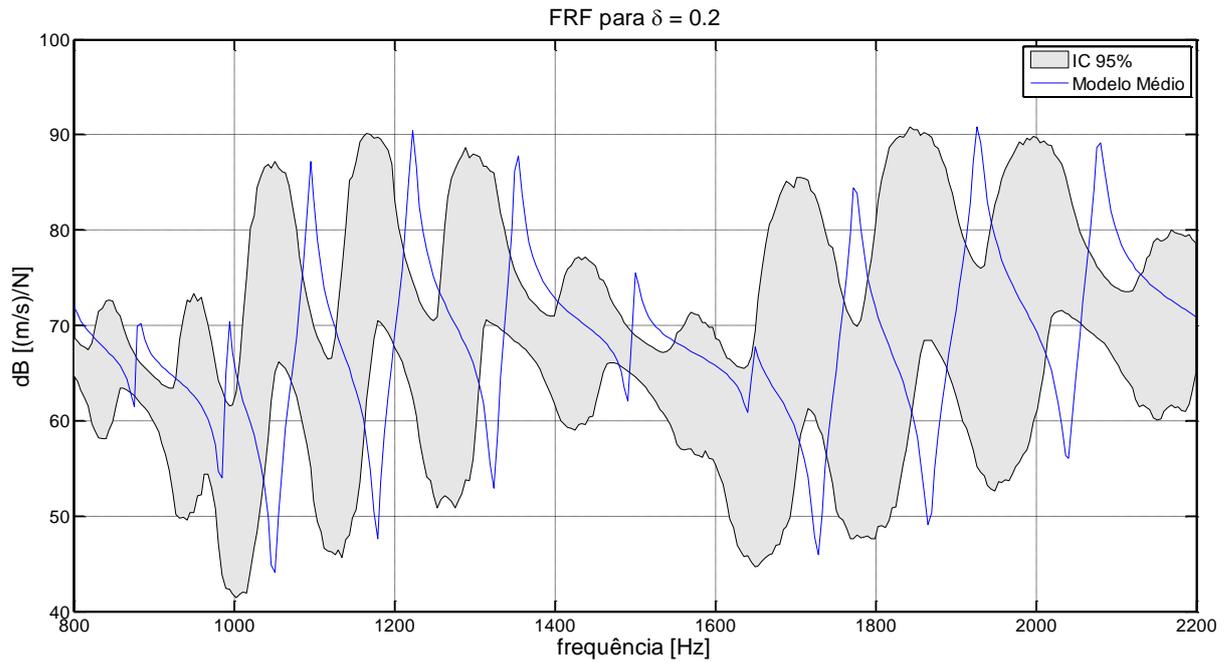


Figura 58: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

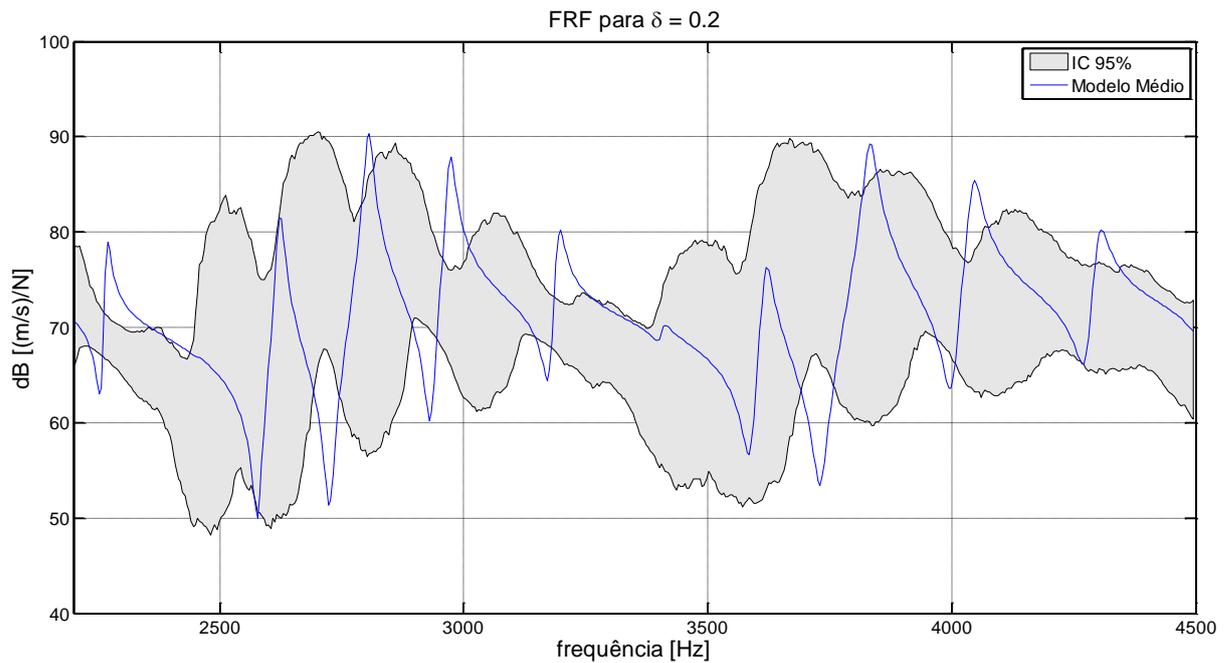


Figura 59: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

9.1.8.5 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,5$

Considerando-se o parâmetro de dispersão de 0,5, o IC de 95% e a FRF do modelo médio são apresentadas. O gráfico da Figura 60 apresenta a convergência do método. Já a FRF para toda a faixa de frequência (0 a 4.500 Hz) é mostrada na Figura 61 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 62 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 63 a faixa de média frequência (800 a 2.200 Hz) e na Figura 64 a faixa de alta frequência (2.200 a 4.500 Hz).

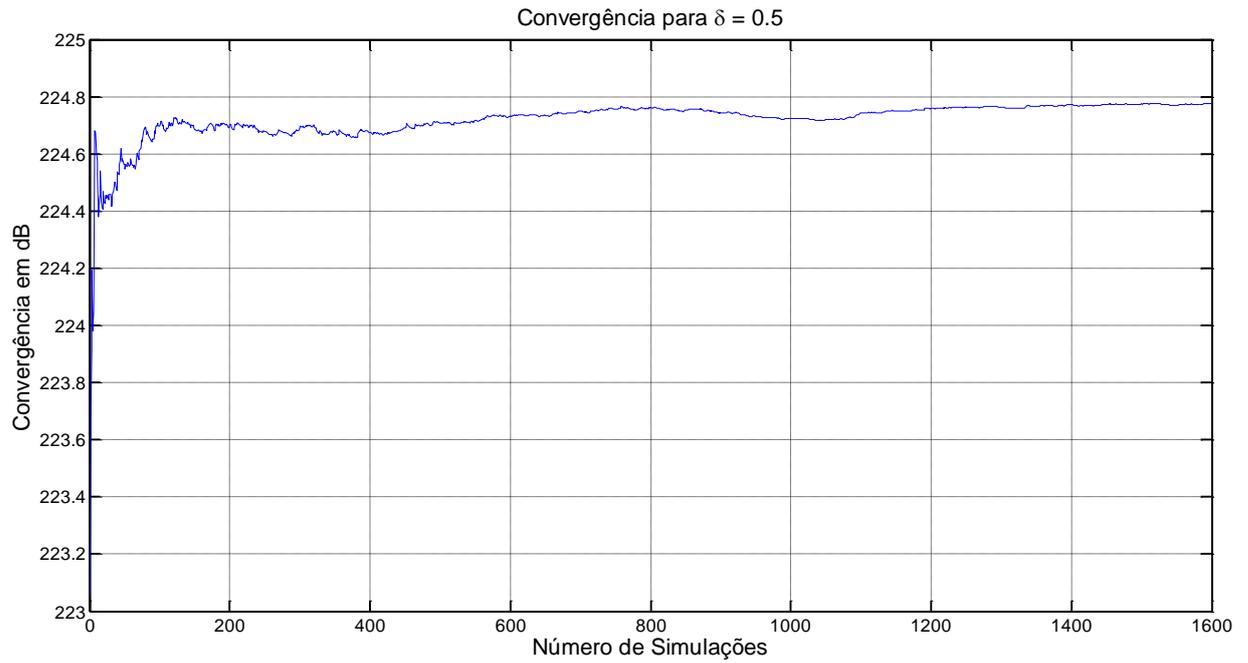


Figura 60: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

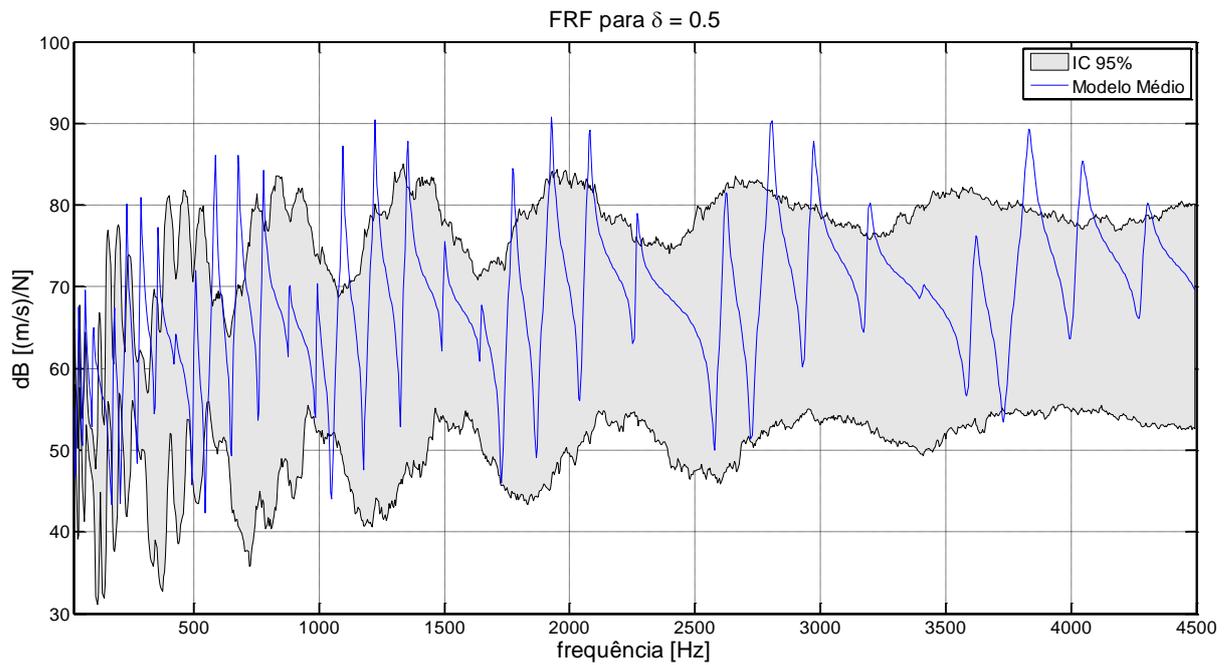


Figura 61: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

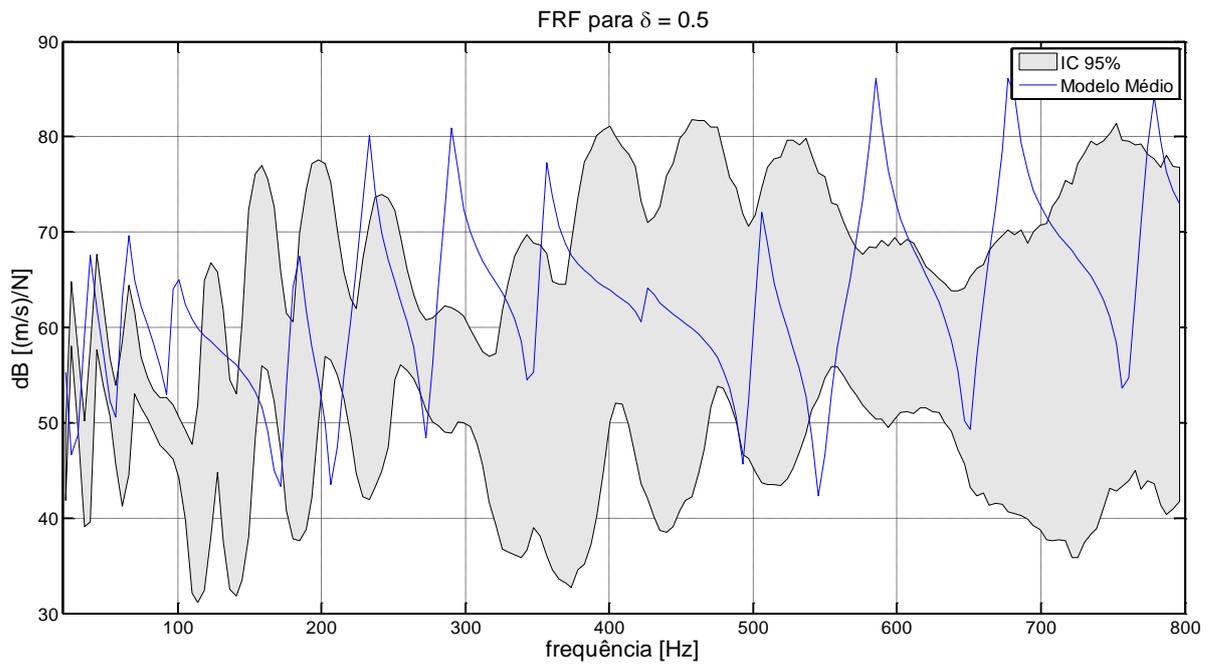


Figura 62: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

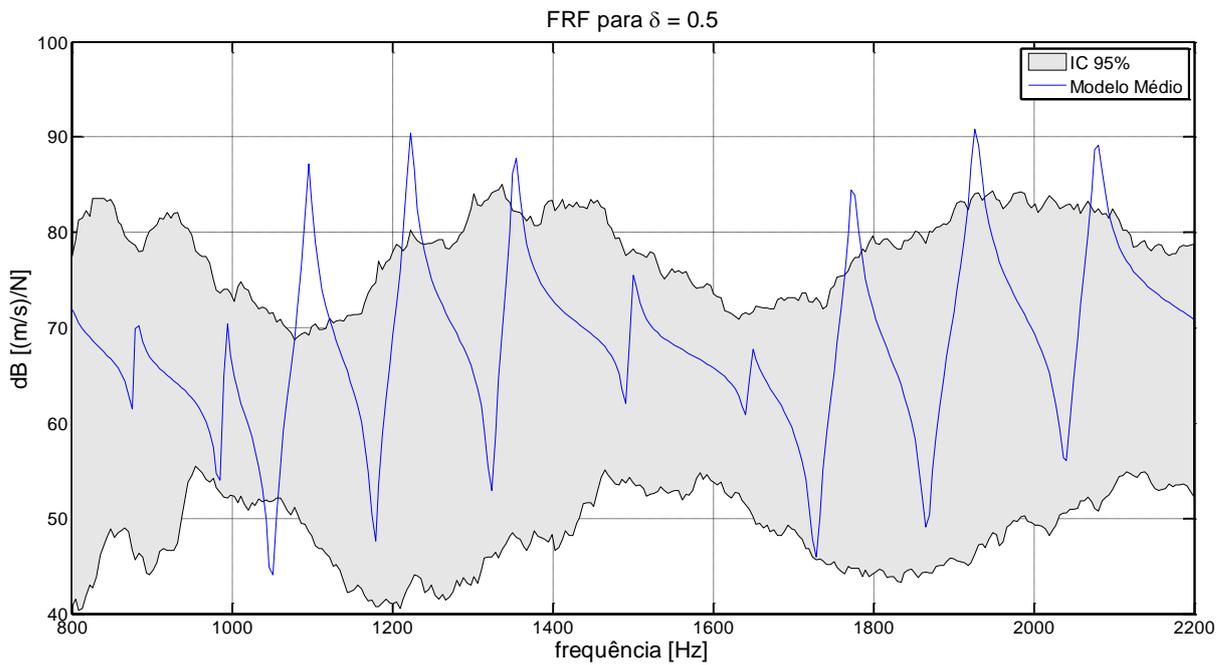


Figura 63: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

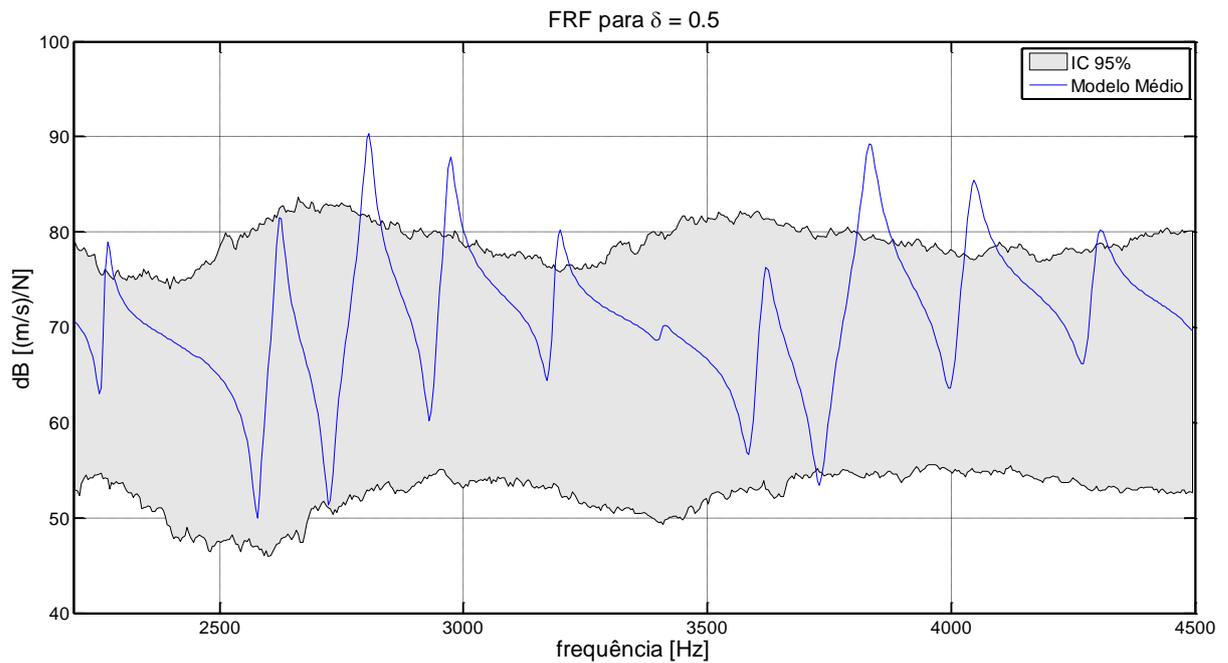


Figura 64: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

É possível observar na Figura 40, Figura 45, Figura 50, Figura 55 e Figura 60 que a convergência ocorre por volta de 400 simulações.

No que diz respeito à quantificação, ao se utilizar parâmetros de dispersão $\delta = 0,01$, $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,1$, o modelo médio permanece dentro do IC por toda a faixa de frequência de vibração. Já para $\delta = 0,2$ e $\delta = 0,5$, ocorre uma tendência da FRF do modelo médio de se afastar dos limites deste mesmo intervalo. Esta tendência se intensifica ainda mais a medida que se aumenta o parâmetro de dispersão até que o IC passa a conter toda a curva do modelo médio, o que é mais evidente ao se observar as respostas gráficas para $\delta = 0,5$.

É perceptível ainda que o IC cresce tanto tendo como referência o eixo da frequência quanto tendo como referência o eixo da amplitude em dB . Isto quer dizer que o IC se torna mais largo e, não só com o aumento da frequência como já concluído por alguns autores citados no Capítulo 2, mas também com o aumento do parâmetro de dispersão.

9.2 ESTUDO DE CASO II: VIGA FIXA-LIVRE

O segundo estudo de caso a ser apresentado nesta tese resulta de ensaios realizados no

Laboratório de Vibrações Mecânicas do Instituto de Engenharia Mecânica (IEM) da Universidade Federal de Engenharia de Itajubá (UNIFEI). Da mesma forma que no primeiro estudo de caso, aqui também será possível a obtenção das *FRFs* para que sejam analisadas.

O sistema dinâmico neste caso é constituído por uma viga de aço de seção transversal retangular uniforme. Uma das extremidades da viga é presa em um bloco de aço, que por sua vez, é fixo a uma mesa rígida por meio de parafusos. A outra extremidade da viga é livre. As propriedades do sistema mencionado são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2: Propriedades materiais e geométricas da viga fixa-livre.

<i>Propriedades geométricas e constitutivas da viga de aço ensaiada</i>		
Propriedade	Valor	Unidade
Comprimento efetivo (L)	950	mm
Largura (b)	32,94	mm
Espessura (t)	1,42	mm
Densidade de massa (ρ)	7.800	kg/m^3
Módulo de Young (E)	210	GPa
Área da seção transversal ($a = bt$)	$4,677 \times 10^{-5}$	m^2
Momento de inércia ($I = 1/12bt^3$)	$2,415 \times 10^{-9}$	m^4
Massa por unidade de comprimento (ρ_l)	0,313	kg/m
Rigidez à flexão (EI)	5,071	Nm^2
Peso total	0,2973	kg

9.2.1 Configuração experimental da viga fixa-livre

A visão geral do ensaio de viga fixa-livre pode ser vista na Figura 65 e um esquema com a descrição e posicionamento dos instrumentos é apresentada na Figura 66. A incerteza será propagada na matriz massa do sistema dinâmico por isso, para simular a aleatoriedade na distribuição da massa, houve a fixação na viga, em posições aleatórias, de 10 massas iguais. Elas são pequenos imãs e sua massa (0,60g cada) aleatória corresponde ao total de 2% da massa da viga.

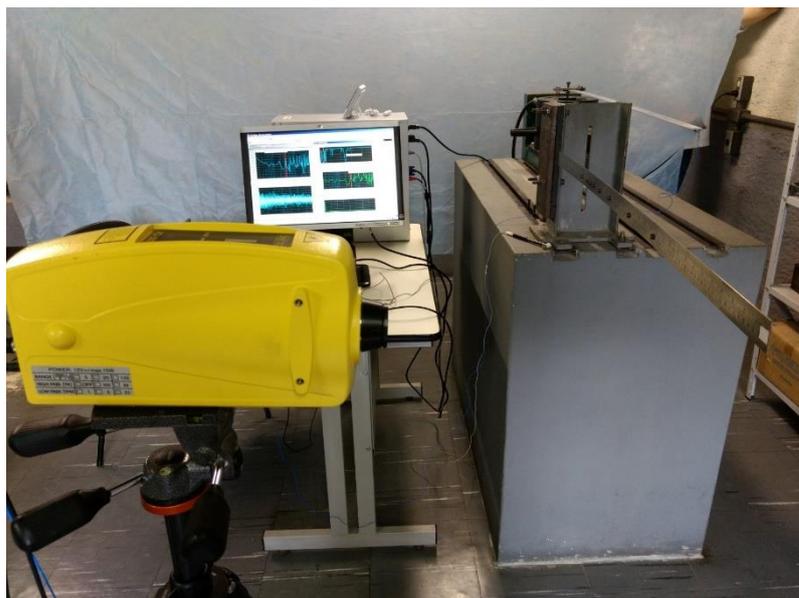


Figura 65: Visão geral do sistema de viga fixa-livre. Fonte: autor.

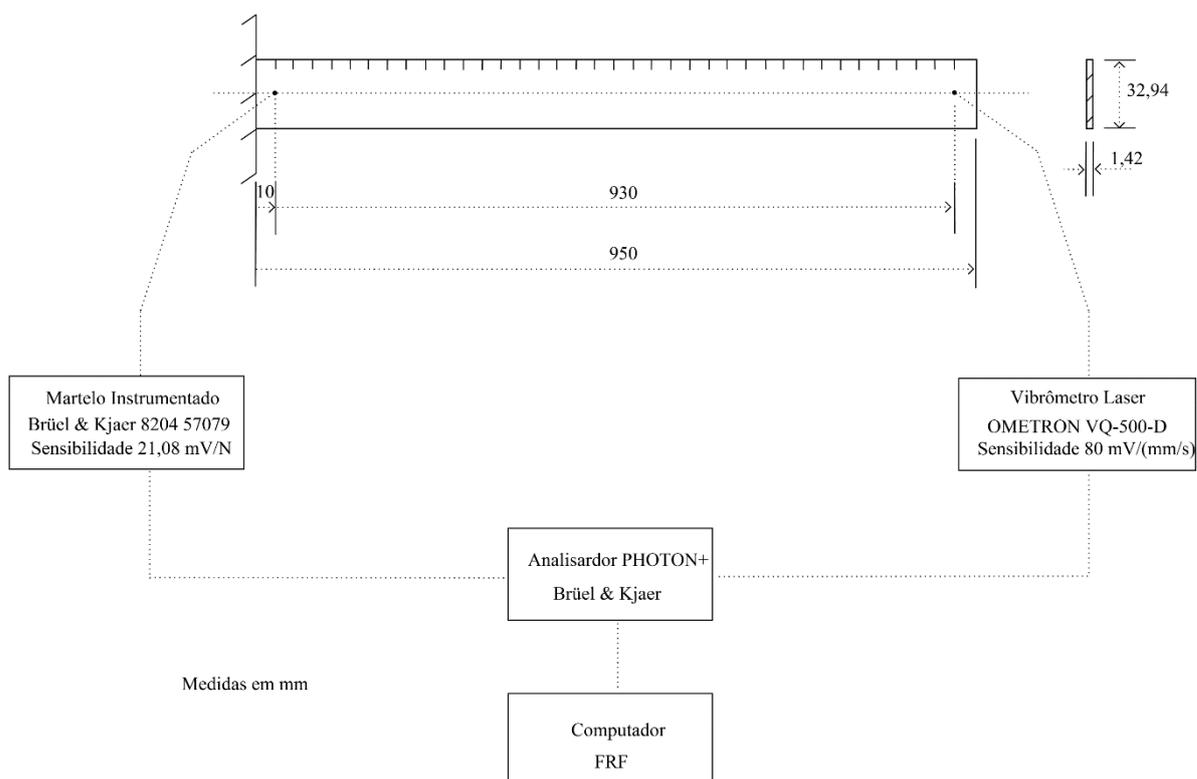


Figura 66: Visão geral do sistema de viga fixa-livre. Fonte: autor.

Primeiramente foram obtidas as respostas do sistema base que corresponde ao sistema sem o acréscimo dos ímãs na viga. Posteriormente, foram realizados os testes com o acréscimo dos ímãs. Como foram realizados 10 ensaios, as posições aleatórias dos ímãs são geradas por uma distribuição uniforme com 10 amostras, ou seja, são gerados 10 vetores de 10 posições cada. Em cada um dos ensaios, a posição aleatória dos ímãs é alterada, e então, tem-se dez

amostras nominalmente idênticas dos sistemas dinâmicos criados e individualmente testados. A variação das localizações das 10 massas, ou imãs, é mostrada na Figura 67. Já na Figura 68 é possível observar alguns imãs posicionados na viga.

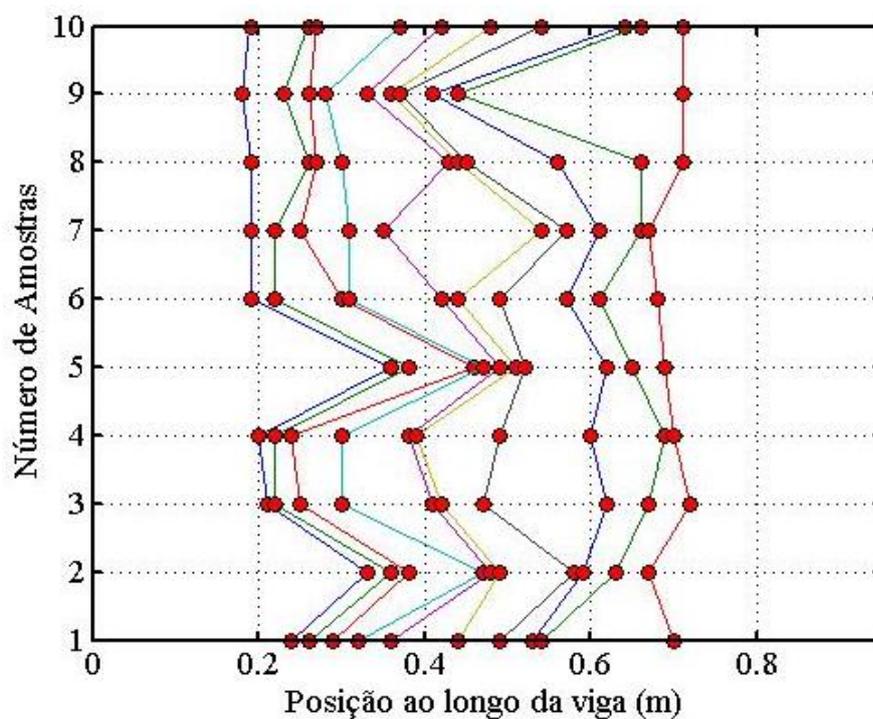


Figura 67: Variação na localização das 12 massas. Fonte: autor.



Figura 68: Massas posicionadas em localizações aleatórias da viga. Fonte: autor.

9.2.2 Cuidados na realização do ensaio da viga fixa- livre

Neste ensaio foram tomados certos cuidados, alguns diferentes dos mostrados no primeiro estudo de caso, porém, também importantes para que, na medida do possível, se possa obter respostas que traduzam a presença da incerteza que resulta da falta de conhecimento do sistema. São eles:

1. A viga é uma régua. Seu uso garante que os imãs possam ser facilmente colocados em localizações pré-determinadas, evitando-se assim erros de posicionamento. É o que se verifica na Figura 68.
2. As massas adicionadas são representadas por imãs, o que facilita o seu posicionamento em qualquer localização da viga. Isto pode ser visto também na Figura 68.
3. Para que fossem eliminadas, tanto quanto possível, as incertezas que surgem devido às forças de entrada, foi feita uma marca na viga para que a excitação com o martelo de impacto fosse sempre na mesma posição, o que pode ser verificado na Figura 69.



Figura 69: Marca feita na viga para excitação com o martelo de impacto. Fonte: autor.

4. As medidas foram realizada por um vibrômetro laser que não interfere no comportamento do sistema já que não se tem um acréscimo de massa na viga como ocorre quando se fixa acelerômetros.

9.2.3 Obtenção das respostas do ensaio da viga fixa-livre

A excitação foi realizada por meio de um martelo instrumentado com ponta de aço. Obteve-se *FRFs* com frequência de até 3600 *Hz*, porém foram consideradas, para efeito de análise, frequências até 2700 *Hz*.

Na obtenção das respostas experimentais foi utilizado um vibrômetro como sensor de resposta para obtenção das *FRFs* experimentais. A leitura foi realizada a 940 mm do engaste.

9.2.4 Visualização da existência da incerteza no modelo médio

Partindo do princípio de que o modelo médio e o modelo base deveriam concordar a ponto do modelo base, usado em testes experimentais, poder ser substituído pelo modelo médio em testes computacionais, o que se pode dizer a respeito das respostas gráficas obtidas é que se tem uma boa concordância das curvas em quase toda a faixa de frequência estudada ao se observar a Figura 70.

Isso pode ser observado de forma mais clara na Figura 71 e na Figura 73, as quais mostram, respectivamente, as *FRF's* para as faixas de baixa frequência (0 a 800 *Hz*) e alta frequência de vibração (1.600 a 2.700 *Hz*). Já na Figura 72, que apresenta os resultados para a faixa de média frequência (800 a 1.600 *Hz*), verifica-se que ocorre mais uma vez um maior deslocamento dos picos de ressonância do modelo base com relação ao modelo médio.

Diante dos resultados, o que se deve fazer é aumentar a confiabilidade do modelo médio, neste caso, devido principalmente aos resultados apresentados na faixa de média frequência.

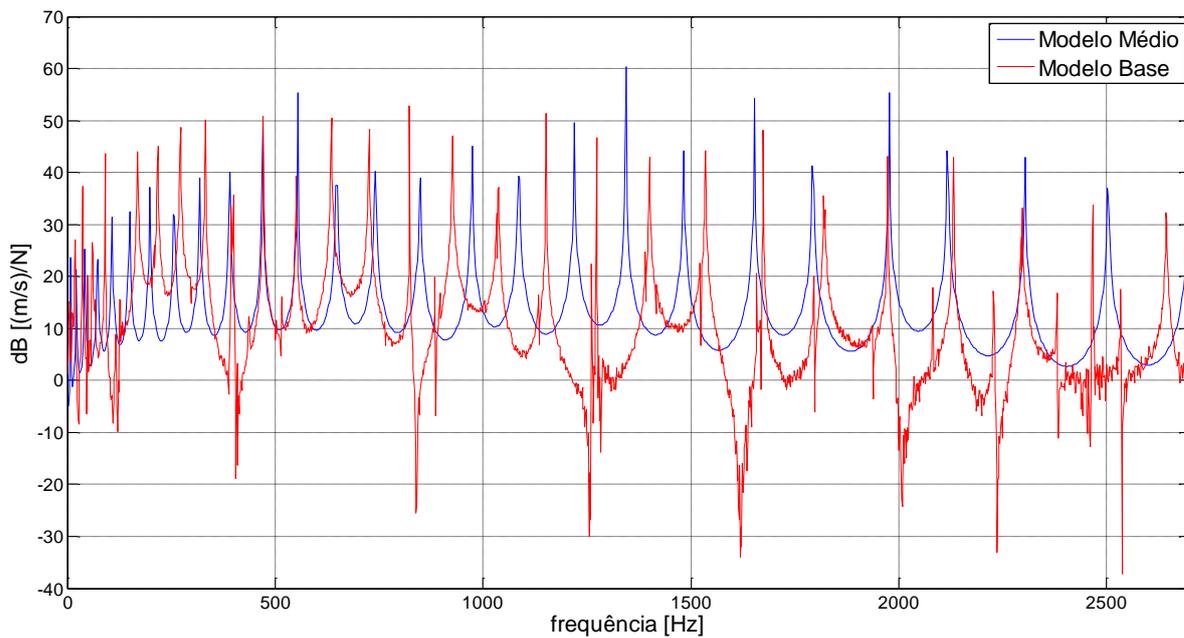


Figura 70: Simulação numérica da amplitude para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

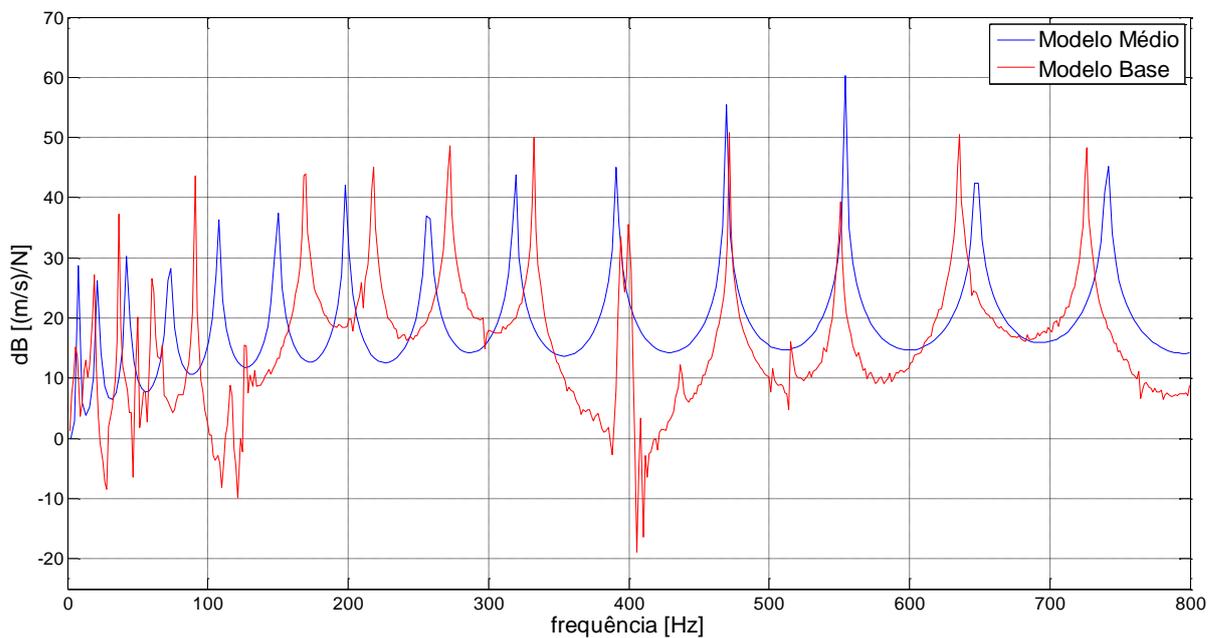


Figura 71: Simulação numérica da amplitude para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

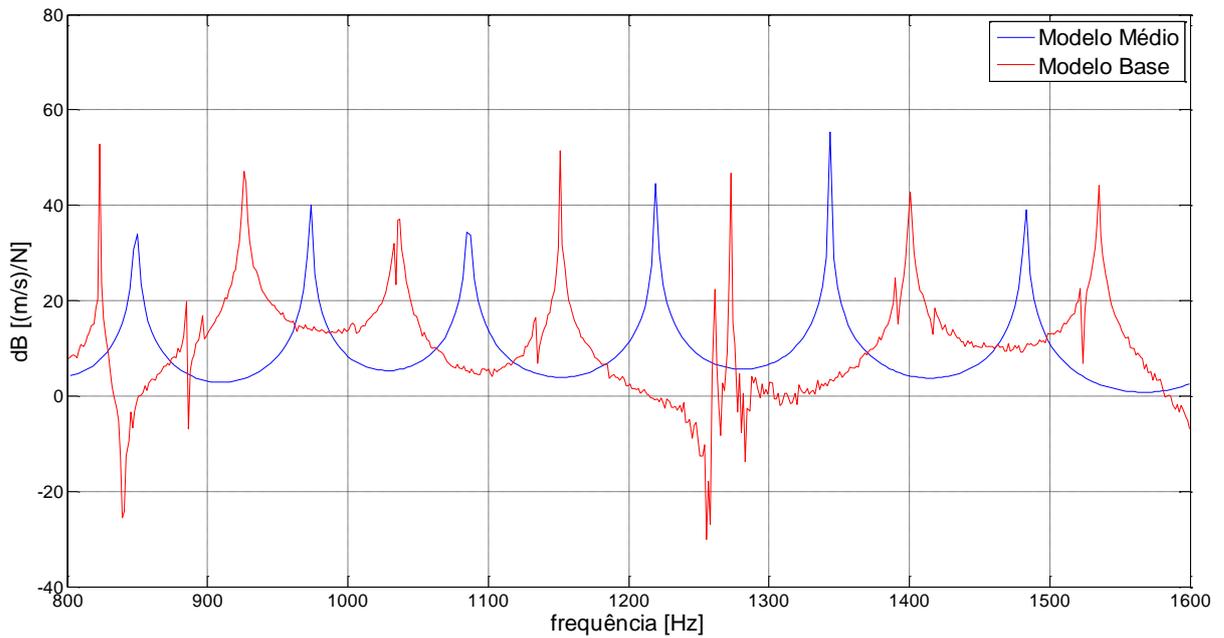


Figura 72: Simulação numérica da amplitude para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

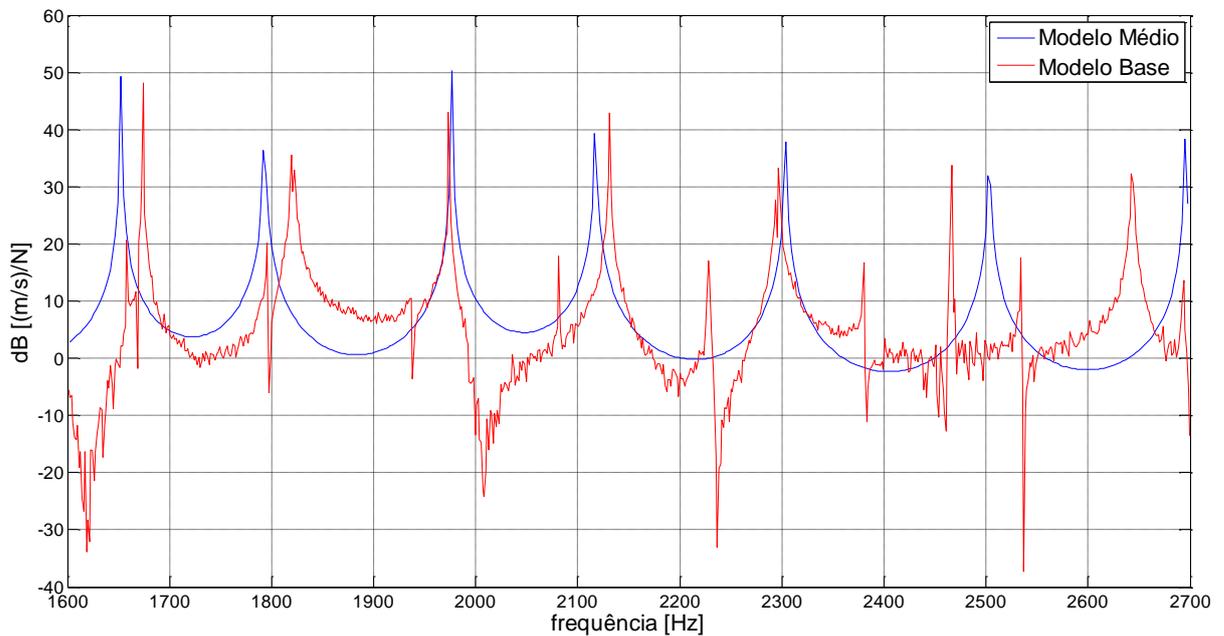


Figura 73: Simulação numérica da amplitude para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.2.5 Visualização da existência da incerteza de modelagem

As respostas gráficas a serem observadas a seguir mostram as alterações que se pode obter na *FRF* quando se considera incertezas na modelagem. Serão utilizadas respostas resultantes

do experimento referentes ao modelo base e ao conjunto médio experimental que podem, inicialmente, serem vistas para toda a faixa de frequência estudada (0 a 2.700 Hz) na Figura 74.

Bem como no primeiro estudo de caso, o conjunto médio experimental segue o modelo base mais de perto na região de baixa frequência (0 a 800 Hz), cujas respostas podem ser vistas na Figura 75. Porém, até mesmo nesta faixa de baixa frequência, à medida que a frequência aumenta se percebe um deslocamento dos picos de ressonância do conjunto médio com relação ao modelo base. Essa tendência vai se intensificando nos resultados para as faixas de média frequência (800 a 1.600 Hz), apresentados na Figura 76 e nas faixas de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz), apresentados na Figura 77.

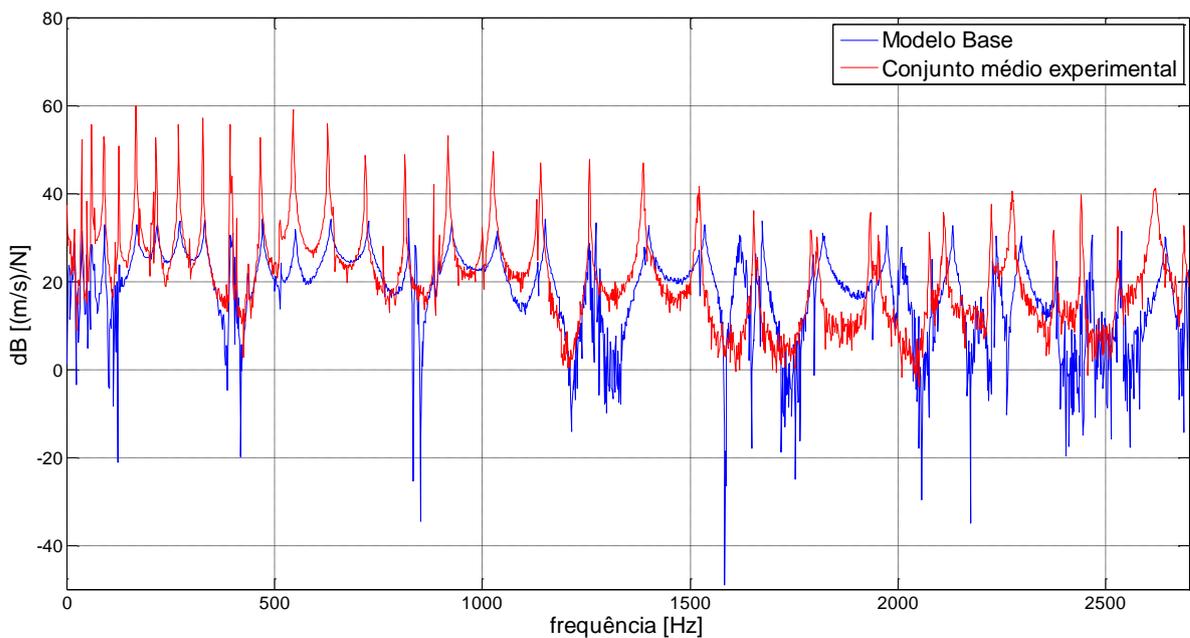


Figura 74: Simulação numérica da amplitude para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

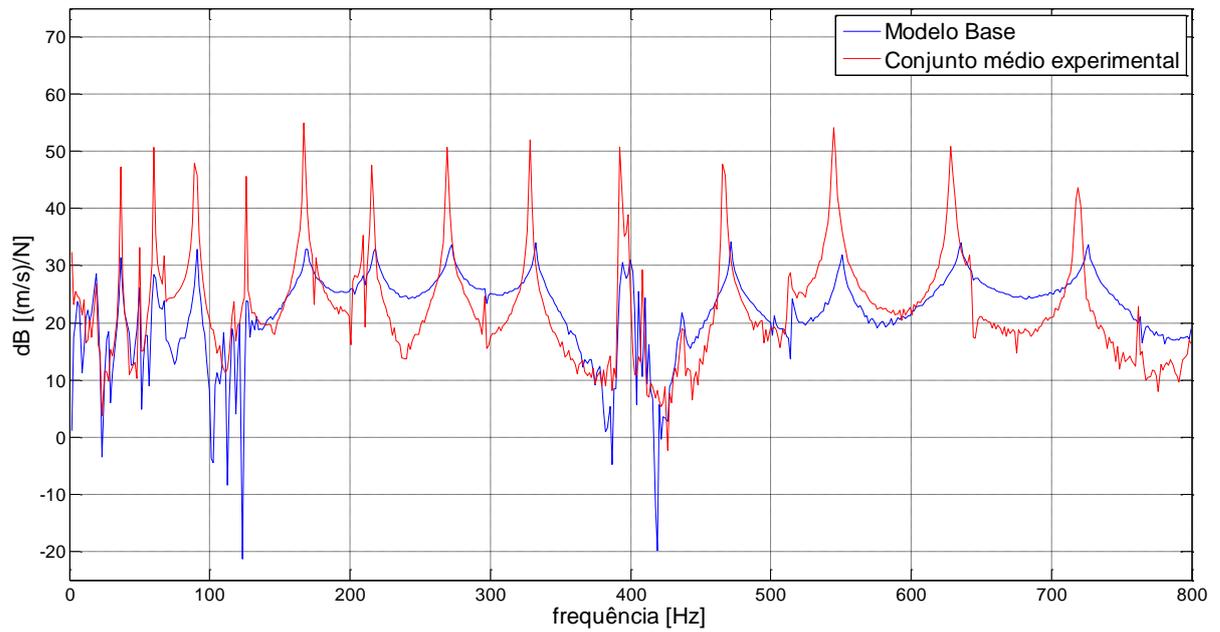


Figura 75: Simulação numérica da amplitude para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

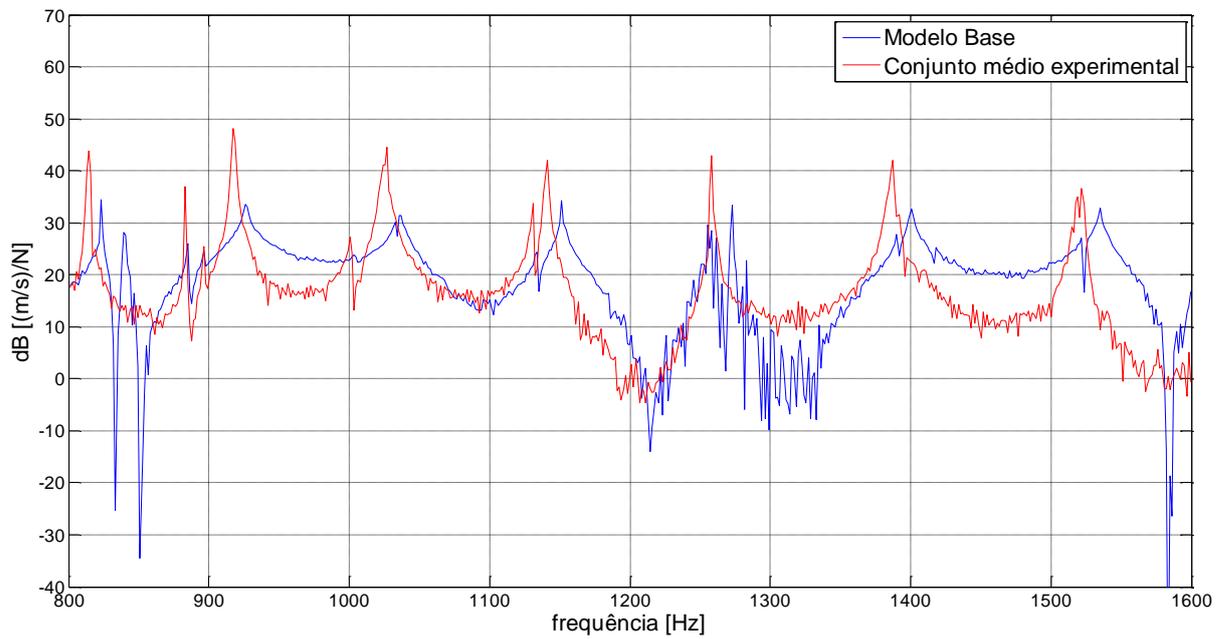


Figura 76: Simulação numérica da amplitude para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

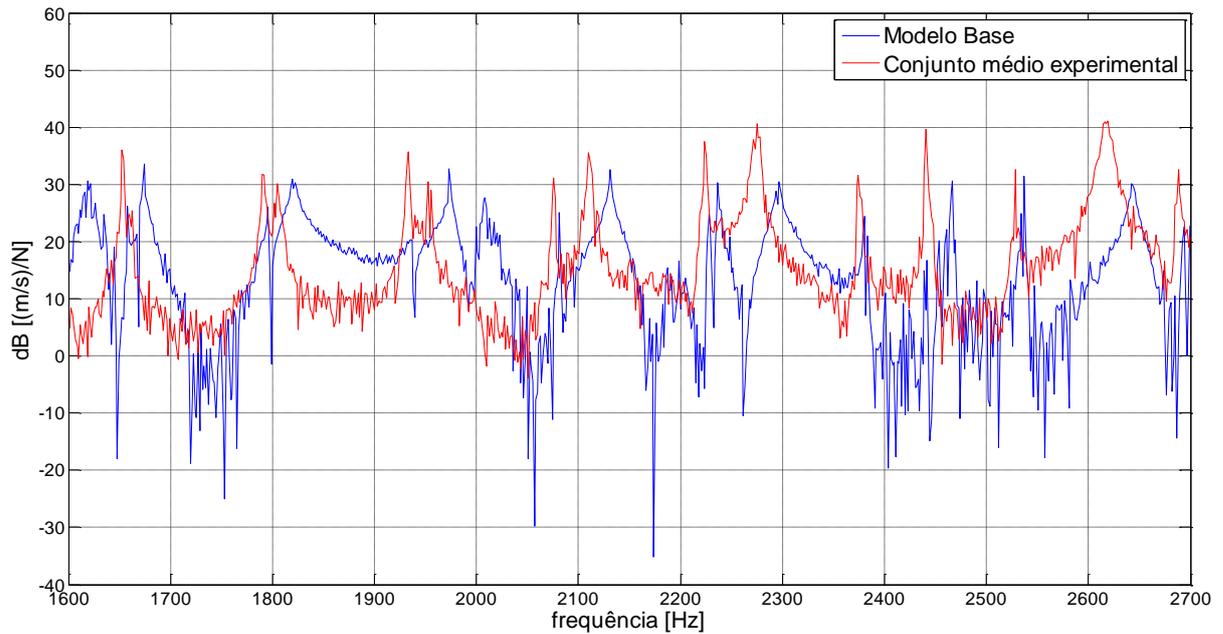


Figura 77: Simulação numérica da amplitude para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.2.6 Visualização da necessidade da quantificação da incerteza de modelagem

Em projetos reais, o que se espera é que o modelo médio possa representar com fidelidade o modelo experimental. No entanto, a comparação entre as FRF 's dos dois modelos mostra que tal feito não se faz possível devido ao fato das respostas não concordarem muito ao se verificar toda a faixa de frequência de vibração estudada (0 a 2.700 Hz) apresentada na Figura 78.

Aqui mais uma vez se observa um deslocamento dos picos de ressonância que tem seu início na faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), cujos resultados podem ser vistos na Figura 79, e que se acentuam nas faixas de média frequência (800 a 1.600 Hz), observada na Figura 80 e na faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz), verificada na Figura 81.

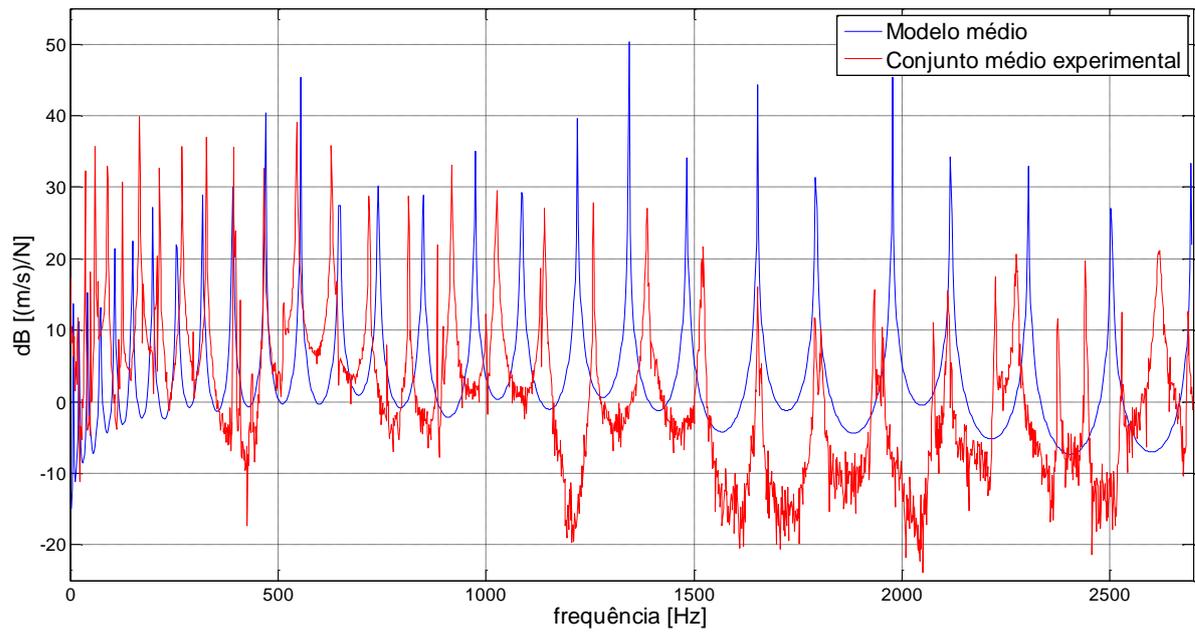


Figura 78: Resultados do modelo médio e do conjunto médio experimental para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

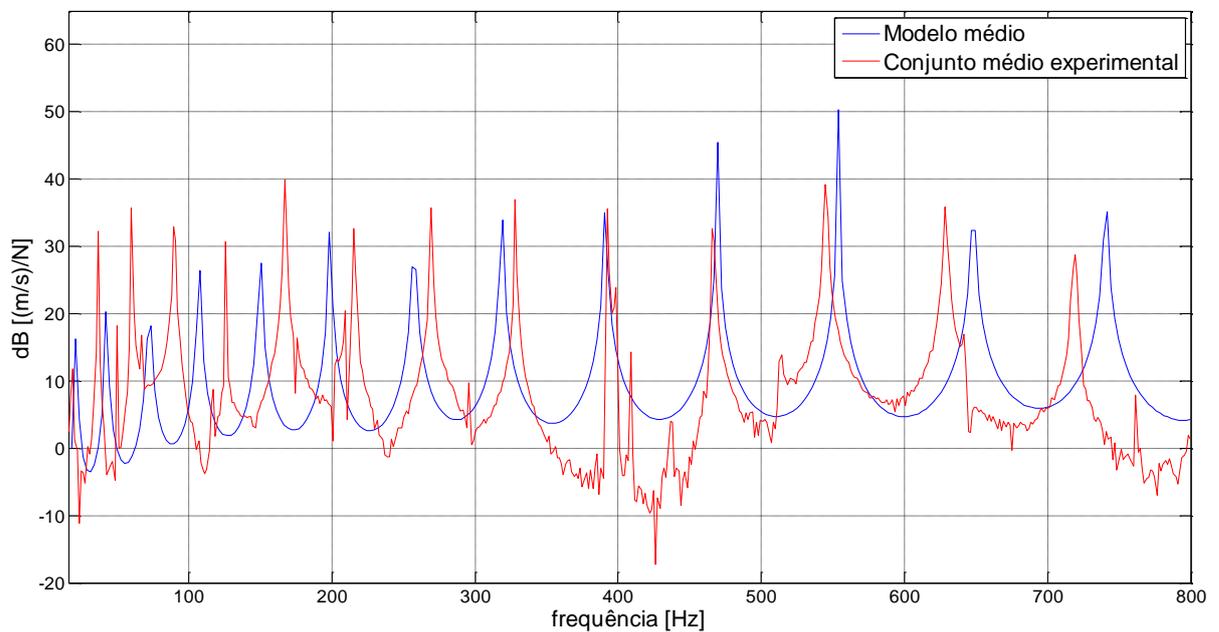


Figura 79: Resultados simulados e experimentais para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

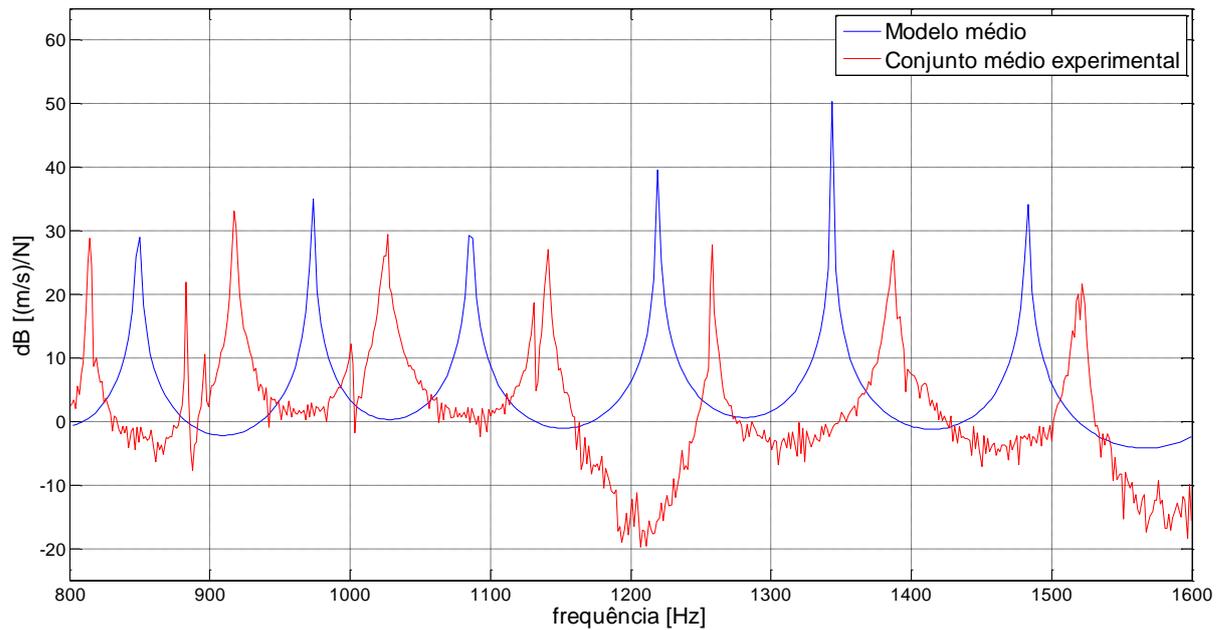


Figura 80: Resultados simulados e experimentais para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

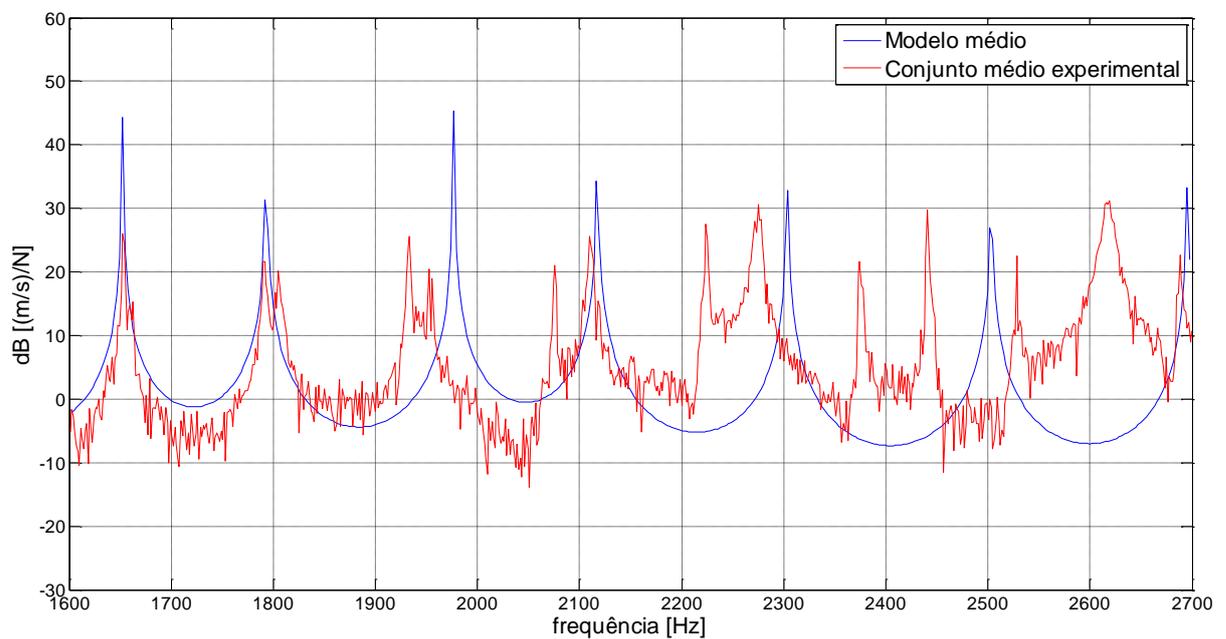


Figura 81: Resultados simulados e experimentais para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.2.7 Simulação numérica convencional do modelo médio

Aqui serão comparadas as respostas gráficas referentes à amplitude da *FRF* da viga para o conjunto médio simulado e o conjunto médio do experimento. O gráfico da Figura 82 mostra

o resultado para toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 83 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 84 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 85 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

Em todos os casos, ou seja, em toda a faixa de vibração estudada, é possível perceber a ocorrência de um deslocamento dos picos de ressonância das curvas.

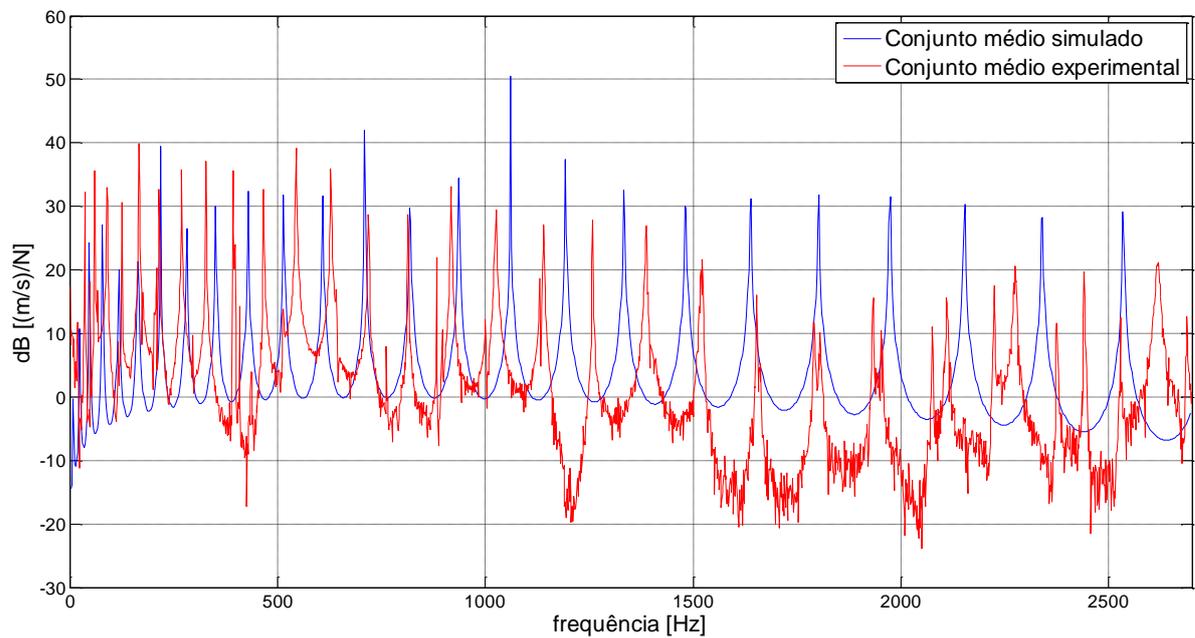


Figura 82: Resultados simulados e experimentais para toda a faixa de frequência. Fonte: autor.

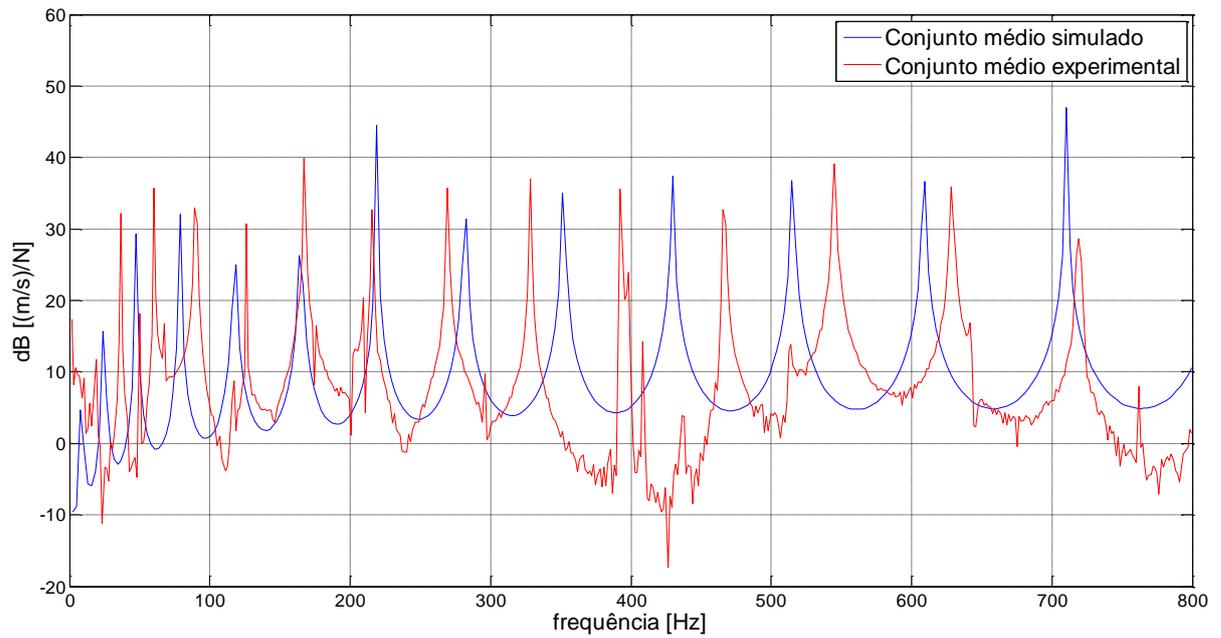


Figura 83: Resultados simulados e experimentais para a faixa de baixa frequência. Fonte: autor.

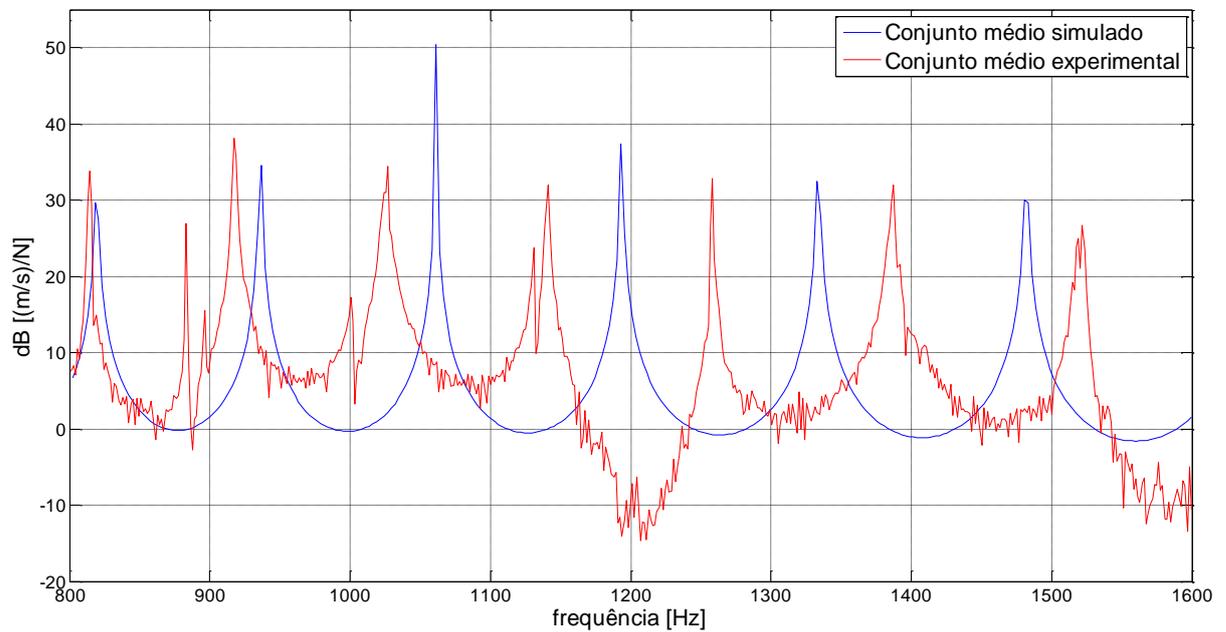


Figura 84: Resultados simulados e experimentais para a faixa de média frequência. Fonte: autor.

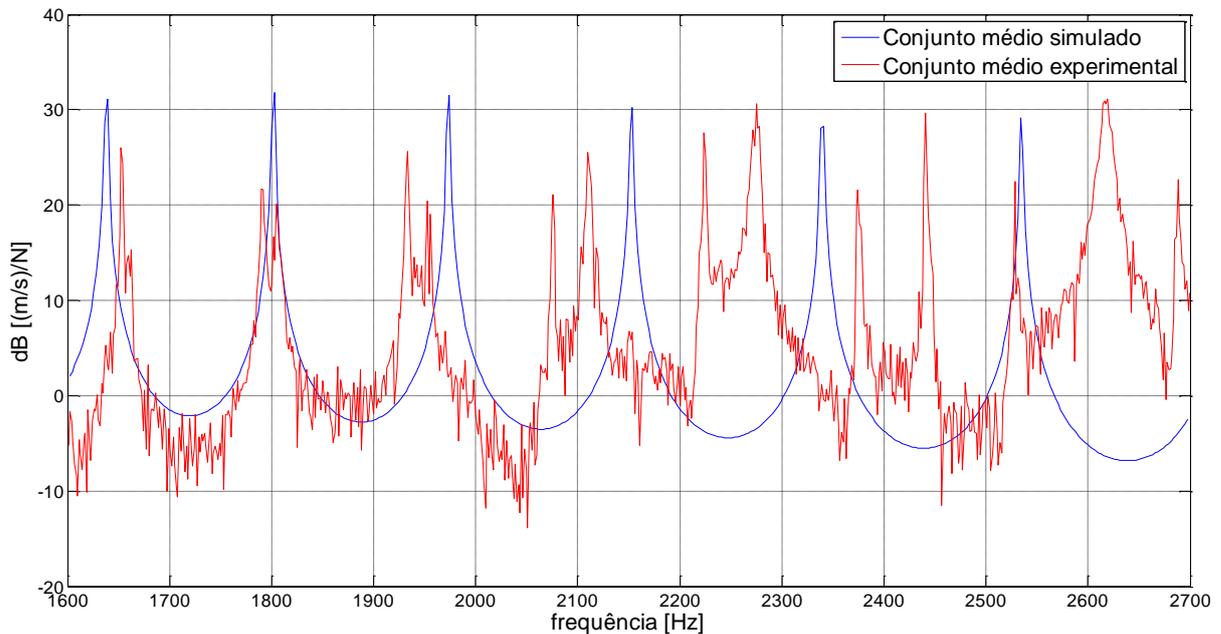


Figura 85: Resultados simulados e experimentais para a faixa de alta frequência. Fonte: autor.

9.2.8 Quantificação da incerteza de modelo

Da mesma forma que para o sistema de viga fixa-livre, a quantificação da incerteza de modelo será realizada neste subitem para que se possa aumentar a confiabilidade do modelo numérico, chamado modelo médio.

Além disso, é preciso lembrar que a incerteza é dada pelo intervalo de confiança IC de 95% e será realizada para cinco valores de parâmetros de dispersão δ (0,01 / 0,05 / 0,1 / 0,2 / 0,5) com a intenção de se estudar a sua influência na resposta do sistema.

9.2.8.1 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,01$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 86 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,01. Já para as $FRFs$, toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) é mostrada na Figura 87 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 88 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 89 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 90 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

É apresentada também a tabela com os dados numéricos resultantes.

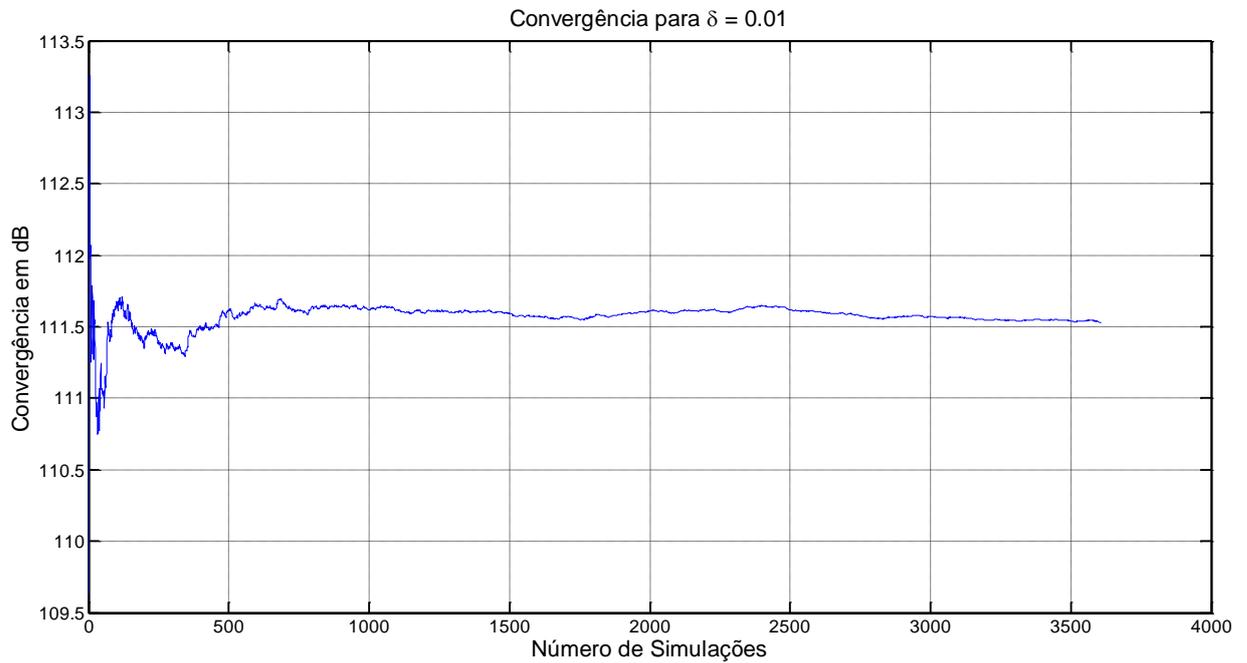


Figura 86: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

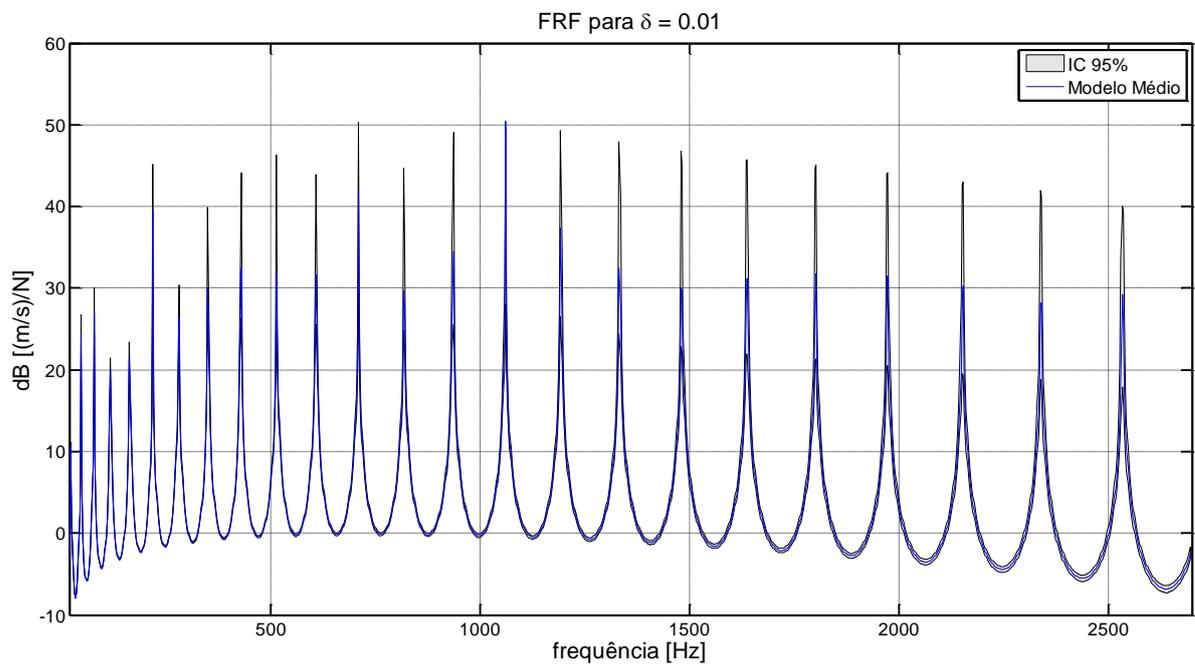


Figura 87: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

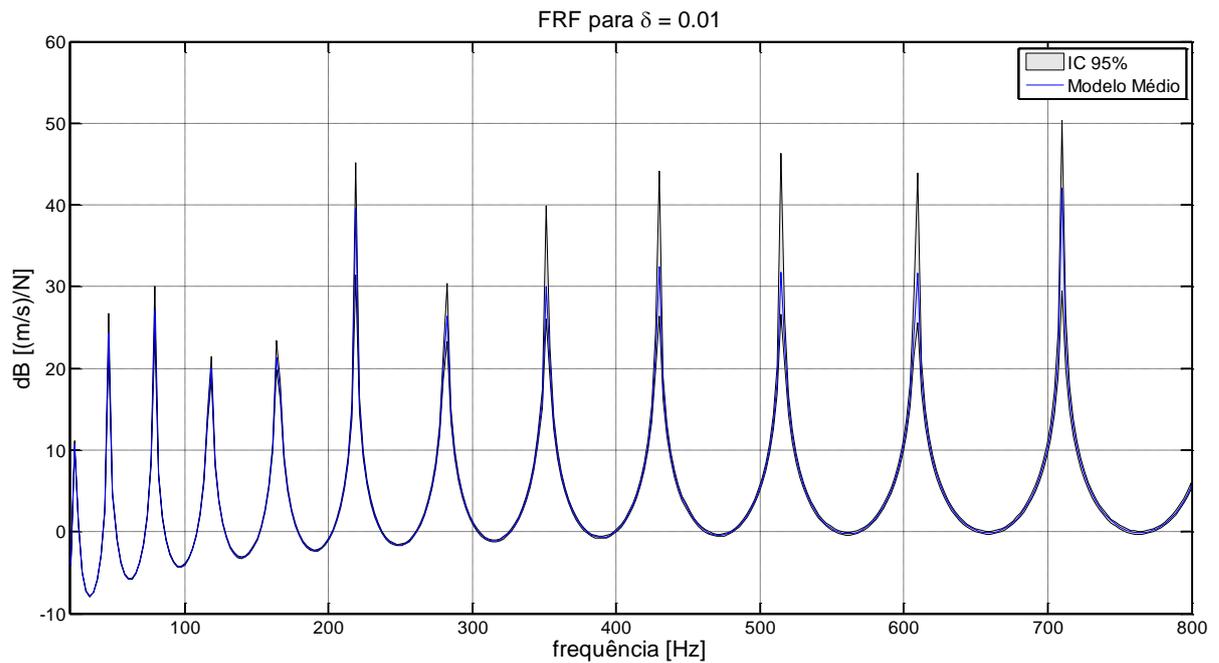


Figura 88: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

Tabela 3: Frequências referentes à Figura 88.

$\delta = 0,01$						
$0 < \text{frequência} < 800 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
1	1,3864	1,3881	1,3882	1,3898	0,0010497	0,00075621
2	8,6884	8,6990	8,6999	8,7097	0,0065084	0,00074818
3	24,328	24,357	24,360	24,386	0,0180760	0,00074210
4	47,673	47,673	47,736	47,790	0,0353920	0,00074150
5	78,804	78,902	78,911	78,997	0,0587640	0,00074476
6	117,73	117,87	117,88	118,01	0,0881150	0,00074758
7	164,43	164,63	164,64	164,83	0,1232200	0,00074846
8	218,91	219,18	219,20	219,45	0,1657100	0,00075605
9	281,16	281,52	281,55	281,86	0,2110300	0,00074963
10	351,22	351,66	351,69	352,09	0,2599000	0,00073905
11	429,04	429,57	429,63	430,11	0,3247100	0,00075588
12	514,67	515,31	515,36	515,94	0,3848700	0,00074687

13	608,09	608,83	608,89	609,56	0,44770	0,00073533
14	709,25	710,13	710,21	711,02	0,53159	0,00074858

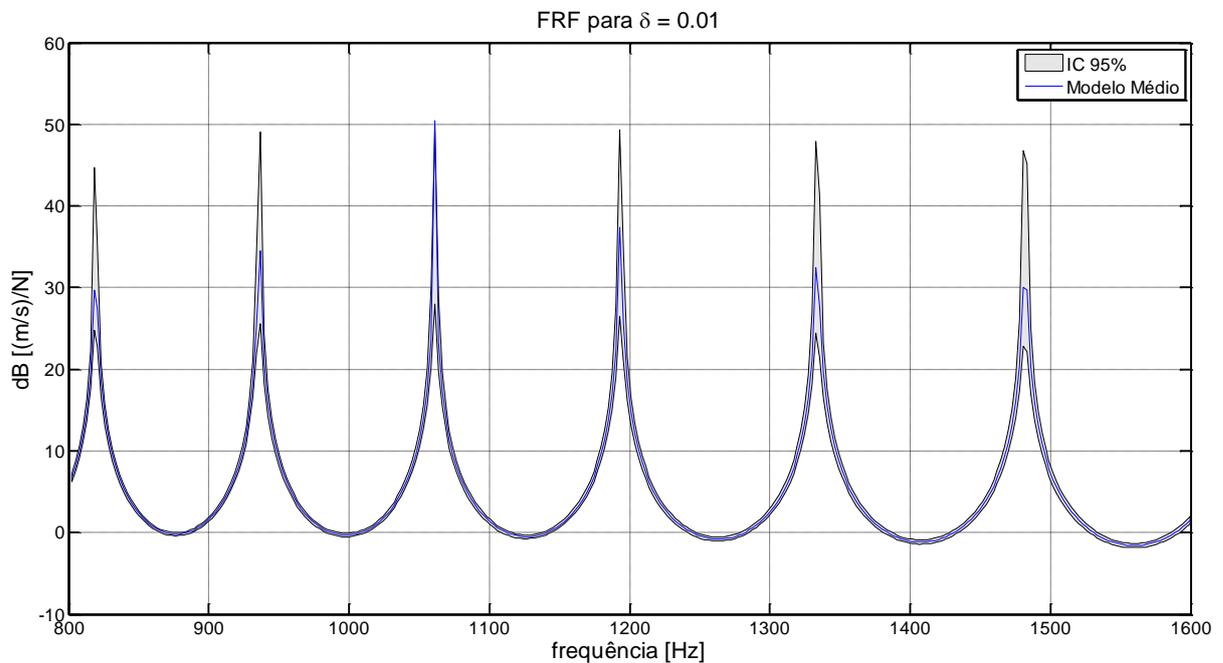


Figura 89: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

Tabela 4: Frequências referentes à Figura 89.

$\delta = 0,01$						
$800 < \text{frequência} < 1.600 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
15	818,26	819,25	819,34	820,24	0,60625	0,00074000
16	934,98	936,15	936,25	937,30	0,70257	0,00075049
17	1059,6	1060,9	1061,0	1062,2	0,79280	0,00074731
18	1192,0	1193,4	1193,5	1194,9	0,88219	0,00073923
19	1332,0	1333,7	1333,8	1335,3	0,99567	0,00074656
20	1480,1	1481,8	1481,9	1483,6	1,09600	0,00073964

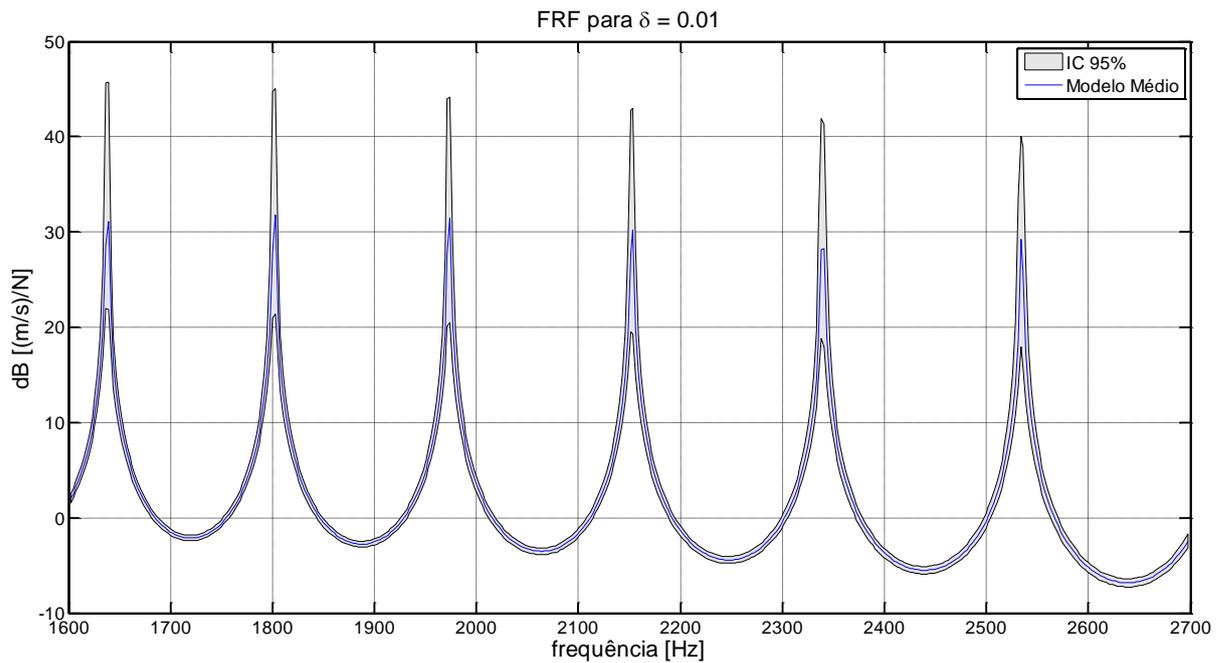


Figura 90: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,01$. Fonte: autor.

Tabela 5: Frequências referentes à Figura 90.

$\delta = 0,01$						
$1.600 < \text{frequência} < 2.700 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
21	1635,7	1637,7	1637,9	1639,7	1,2141	0,00074138
22	1799,2	1801,4	1801,6	1803,6	1,3428	0,00074541
23	1970,6	1973,0	1973,2	1975,4	1,4903	0,00075536
24	2149,7	2152,4	2152,6	2154,9	1,5850	0,00073639
25	2336,7	2339,5	2339,7	2342,3	1,7171	0,00073396
26	2531,4	2534,5	2534,8	2537,6	1,8850	0,00074376

9.2.8.2 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,05$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 91 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de

dispersão considerado de 0,05. Já para as *FRFs*, toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) é mostrada na Figura 92 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 93 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 94 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 95 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

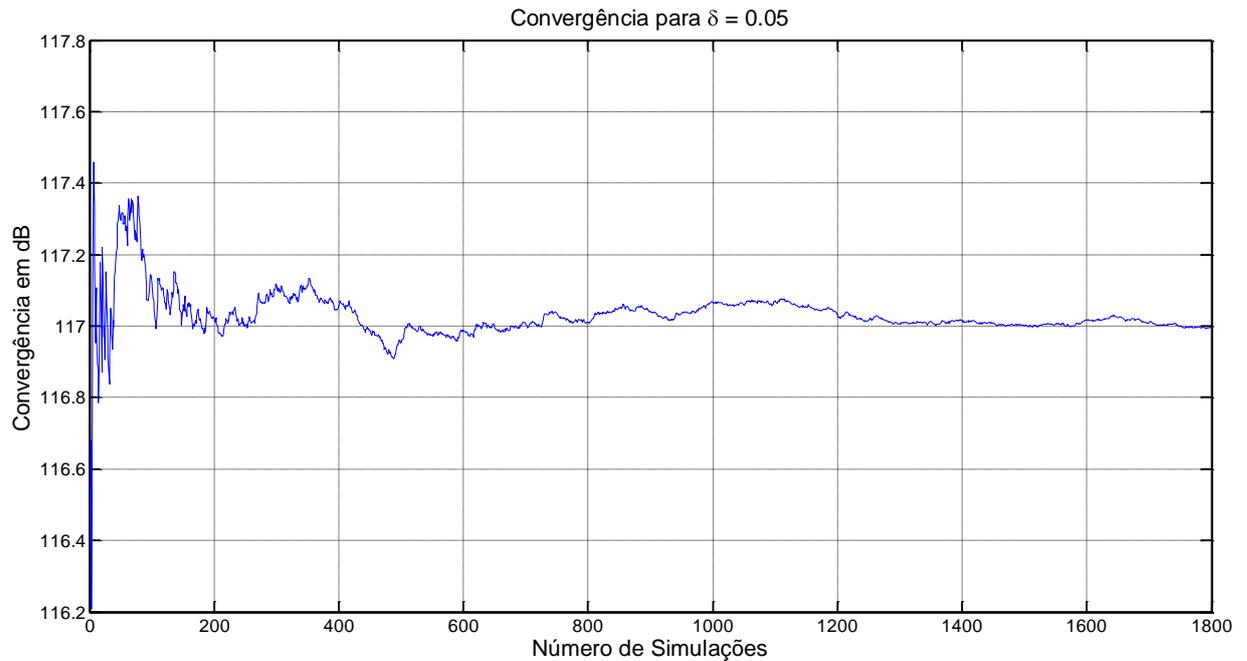


Figura 91: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

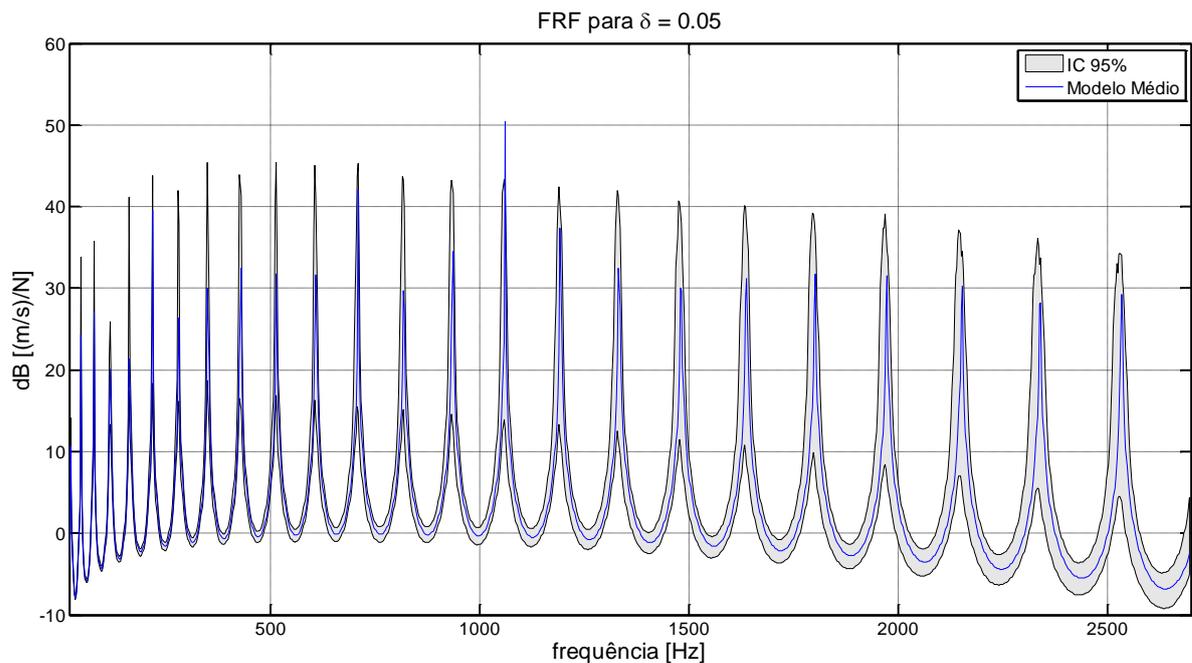


Figura 92: Modelo médio e *IC* para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

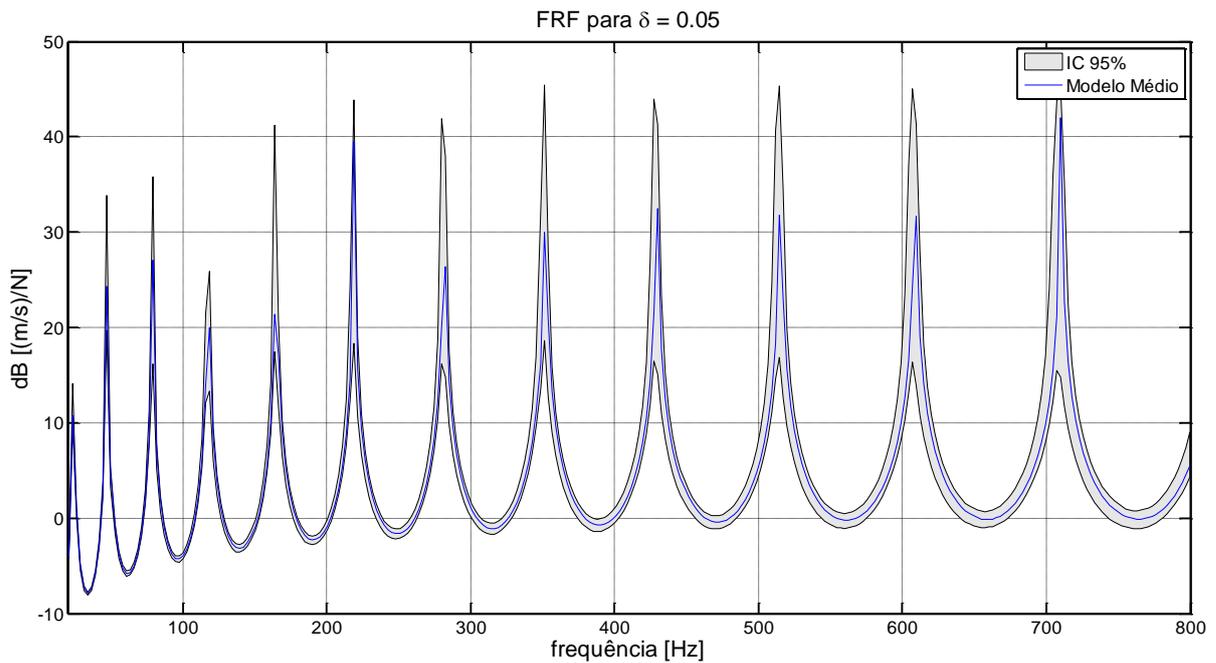


Figura 93: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

Tabela 6: Frequências referentes à Figura 93.

$\delta = 0,05$						
$0 < \text{frequência} < 800 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
1	1,3762	1,3847	1,3882	1,3933	0,005113	0,0036926
2	8,6226	8,6768	8,6999	8,7299	0,032280	0,0037204
3	24,155	24,298	24,360	24,447	0,088228	0,0036310
4	47,330	47,610	47,736	47,908	0,175410	0,0036842
5	78,221	78,695	78,911	79,174	0,292040	0,0037110
6	116,85	117,59	117,88	118,31	0,448990	0,0038184
7	163,23	164,22	164,64	165,22	0,608530	0,0037057
8	217,29	218,65	219,2	220,01	0,799740	0,0036577
9	279,15	280,88	281,55	282,58	1,036700	0,0036910
10	348,74	350,76	351,69	352,83	1,248800	0,0035603
11	425,97	428,54	429,63	431,16	1,572600	0,0036696
12	510,99	514,05	515,36	517,12	1,906700	0,0037091

13	603,74	607,41	608,89	611,12	2,229700	0,0036708
14	704,07	708,46	710,21	712,77	2,634500	0,0037187

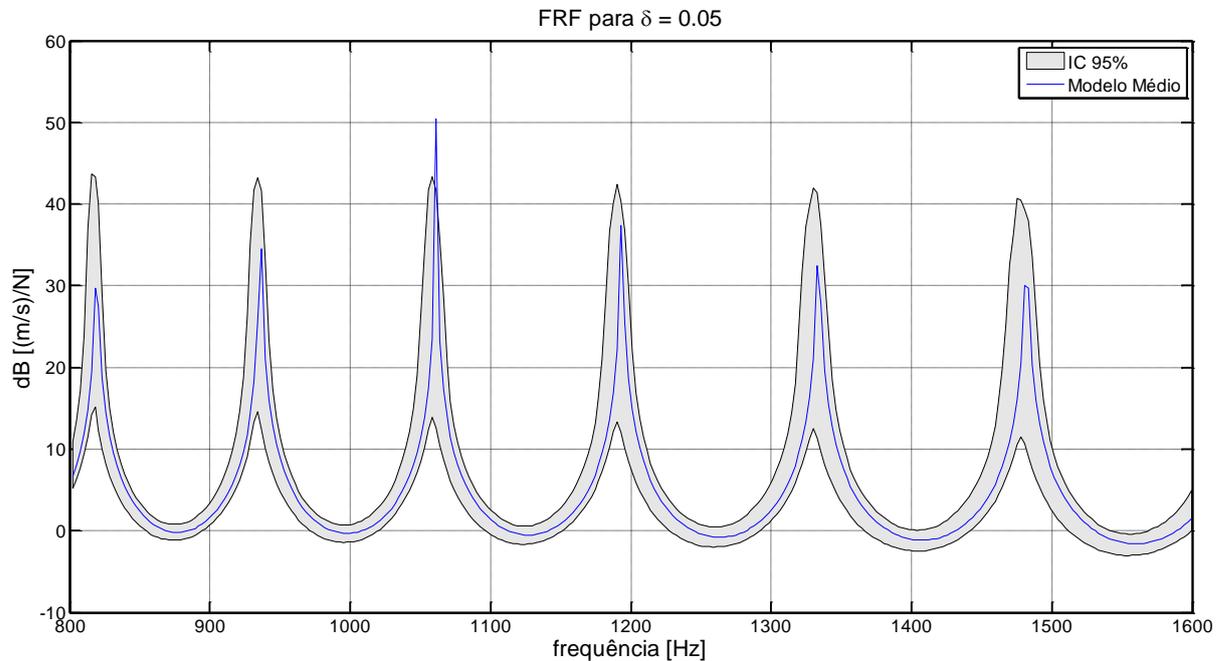


Figura 94: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

Tabela 7: Frequências referentes à Figura 94.

$\delta = 0,05$

$800 < \text{frequência} < 1.600 \text{ Hz}$

Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
15	812,47	817,33	819,34	822,33	3,009	0,0036815
16	928,10	933,95	936,25	939,75	3,4517	0,0036958
17	1052,1	1058,5	1061,0	1065,2	3,9146	0,0036982
18	1183,3	1190,4	1193,5	1197,7	4,4104	0,0037048
19	1322,1	1330,4	1333,8	1338,4	4,9291	0,0037050
20	1469,2	1478,1	1481,9	1487,2	5,4885	0,0037131

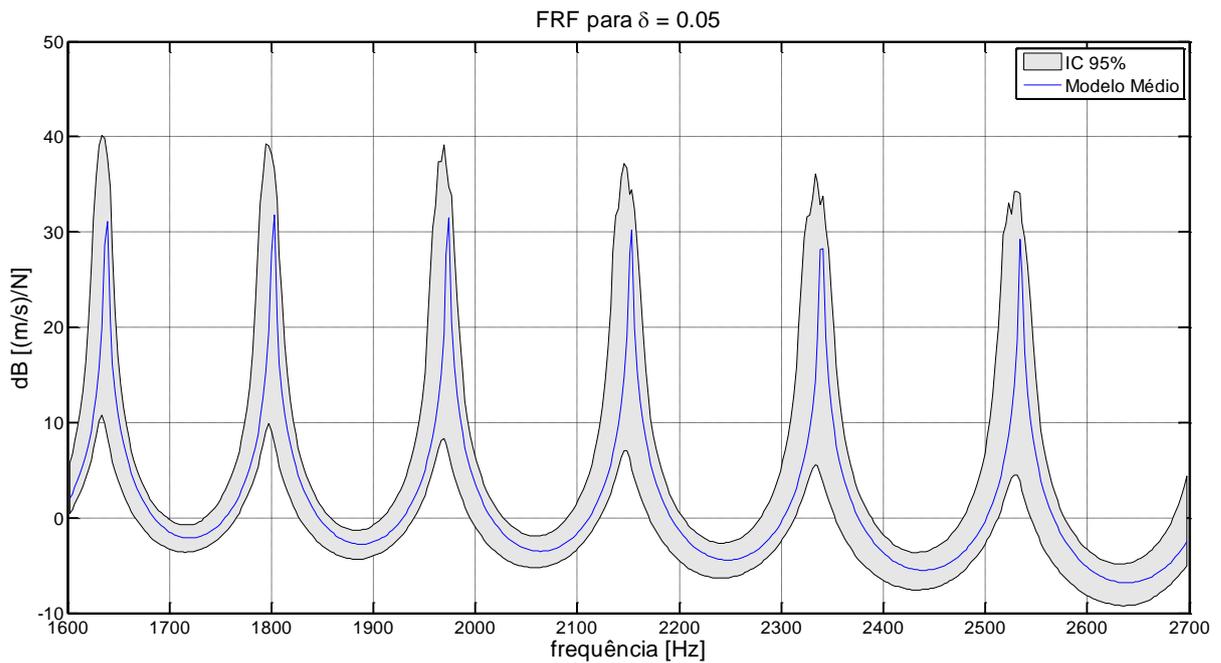


Figura 95: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,05$. Fonte: autor.

Tabela 8: Frequências referentes à Figura 95.

$\delta = 0,05$						
$1.600 < \text{frequência} < 2.700 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
21	1624,2	1634,1	1637,9	1643,7	5,9528	0,0036428
22	1786,9	1797,4	1801,6	1808,5	6,5501	0,0036441
23	1957,1	1968,7	1973,2	1980,4	7,1869	0,0036505
24	2134,4	2147,5	2152,6	2160,8	8,0968	0,0037703
25	2319,8	2334,1	2339,7	2348,8	8,9210	0,0038220
26	2514,5	2529,0	2534,8	2543,9	9,0810	0,0035908

9.2.8.3 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,1$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 96 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,1. Já para as $FRFs$, toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) é

mostrada na Figura 97 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 98 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 99 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 100 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

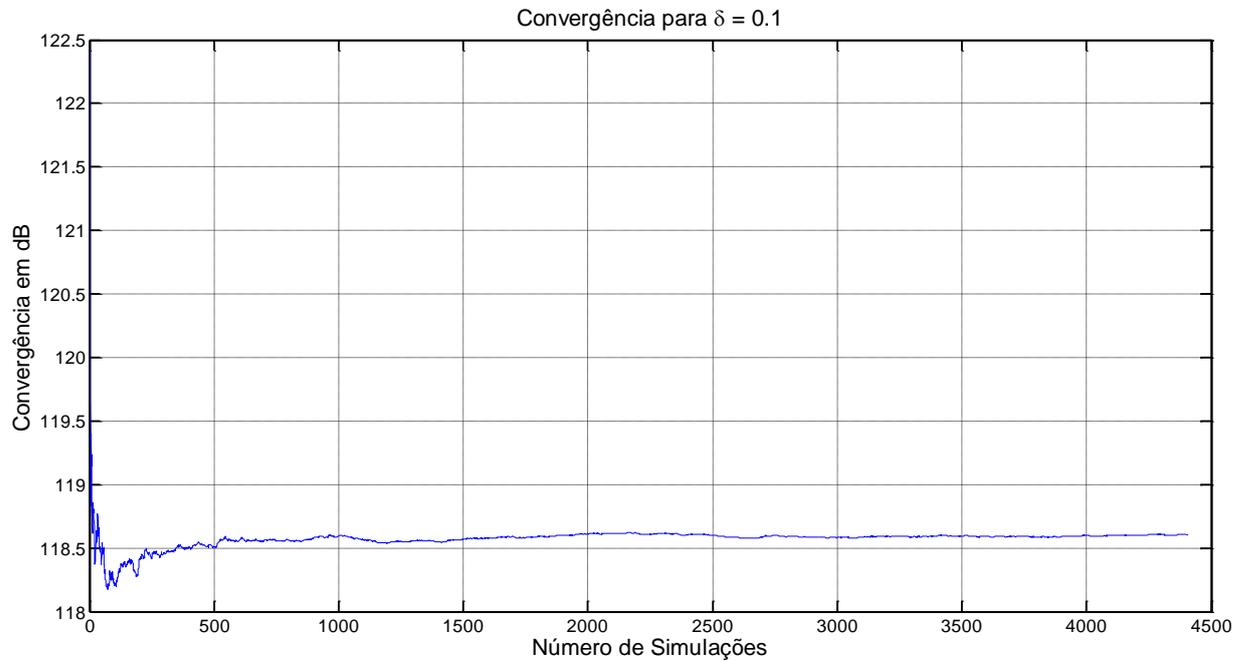


Figura 96: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

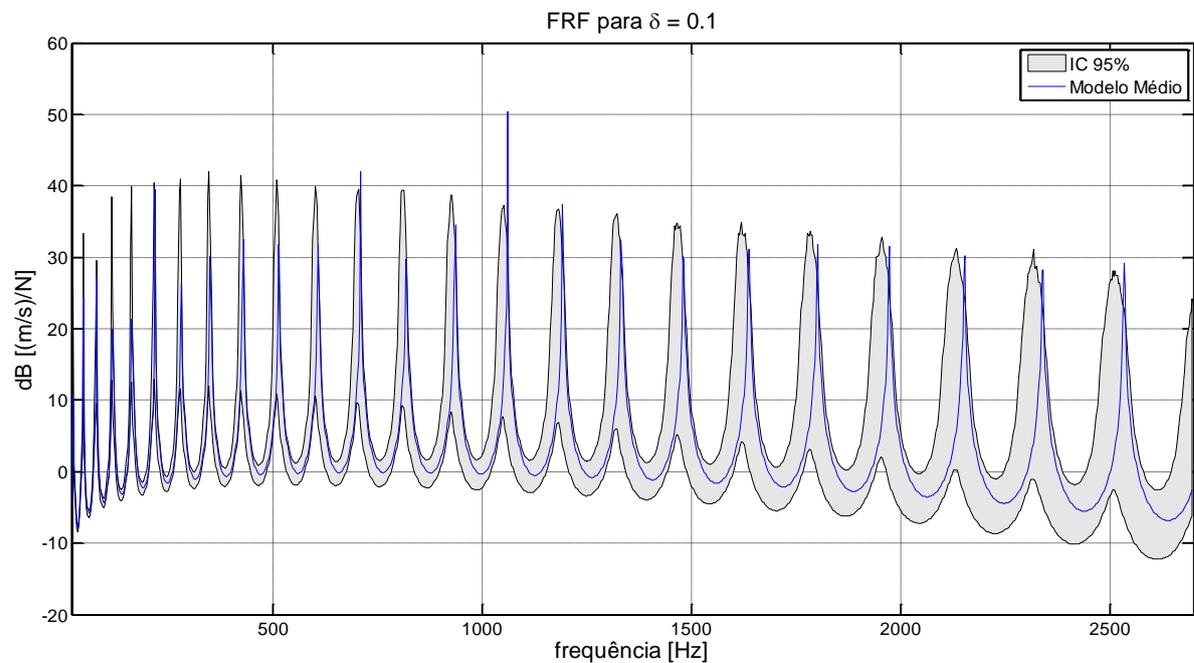


Figura 97: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

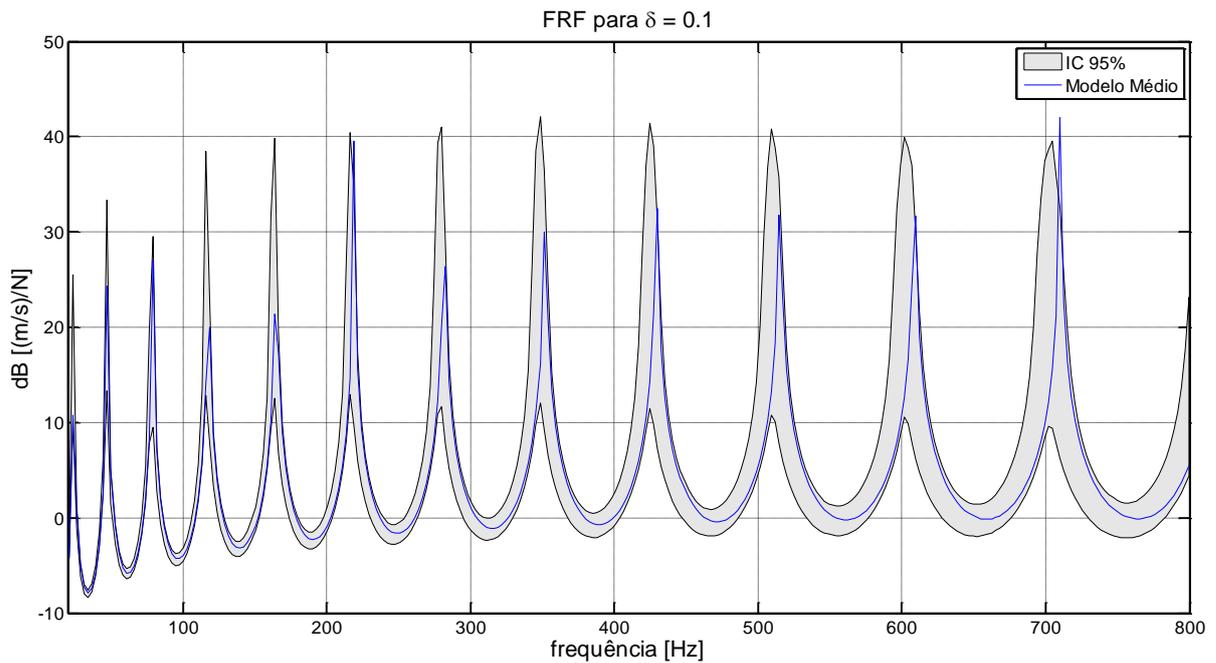


Figura 98: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

Tabela 9: Frequências referentes à Figura 98.

$\delta = 0,1$						
$0 < \text{frequência} < 800 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
1	1,3570	1,3737	1,3882	1,3904	0,010200	0,0074253
2	8,5075	8,6100	8,6999	8,7172	0,064568	0,0074992
3	23,818	24,110	24,360	24,412	0,180650	0,0074929
4	46,672	47,243	47,736	47,820	0,348450	0,0073758
5	77,154	78,096	78,911	79,062	0,580540	0,0074336
6	115,32	116,67	117,88	118,14	0,865710	0,0074202
7	161,01	162,98	164,64	165,03	1,228900	0,0075406
8	214,32	216,94	219,20	219,64	1,612900	0,0074346
9	275,37	278,71	281,55	282,27	2,076400	0,0074498
10	343,93	348,16	351,69	352,54	2,624100	0,0075372
11	419,91	425,32	429,63	430,68	3,229000	0,0075920
12	503,98	510,16	515,36	516,43	3,796100	0,0074410

13	595,43	602,69	608,89	610,07	4,460000	0,0074002
14	694,47	703,10	710,21	711,88	5,269500	0,0074947

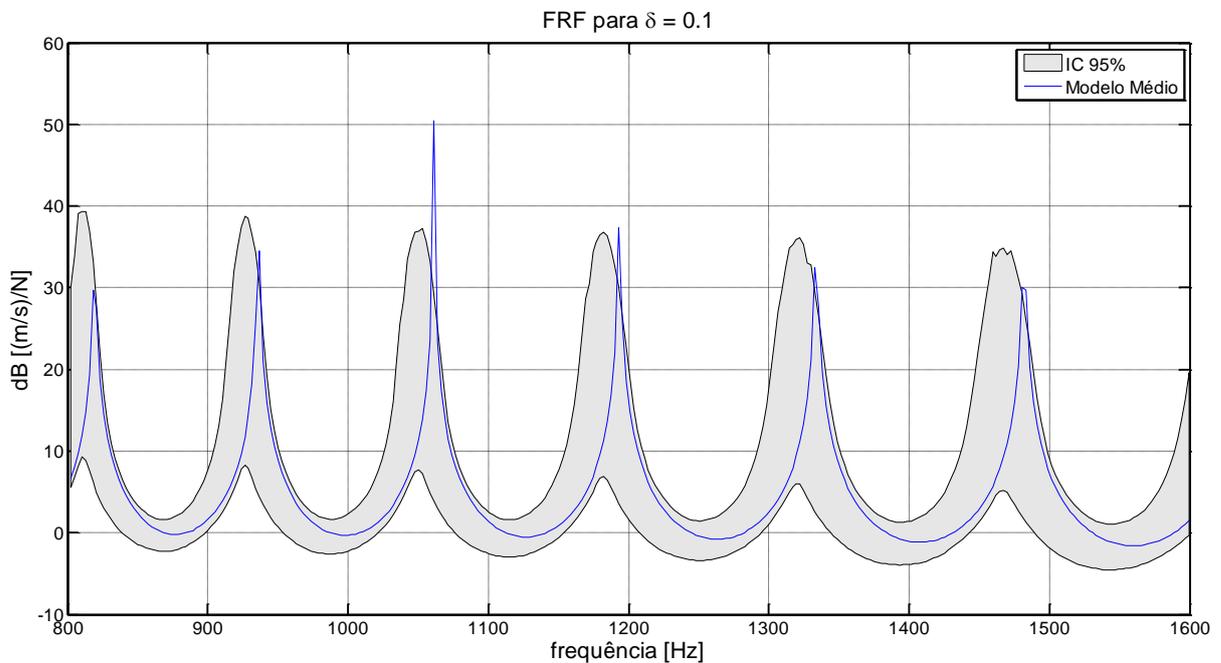


Figura 99: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

Tabela 10: Frequências referentes à Figura 99.

$\delta = 0,1$						
$800 < \text{frequência} < 1.600 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
15	801,52	811,19	819,34	821,02	5,9198	0,0072977
16	915,90	927,09	936,25	938,30	6,9031	0,0074460
17	1037,8	1050,4	1061,0	1063,1	7,6394	0,0072726
18	1167,6	1181,8	1193,5	1196,6	8,7875	0,0074358
19	1304,8	1320,8	1333,8	1337,0	9,7802	0,0074048
20	1449,9	1467,4	1481,9	1485,1	10,715	0,0073025

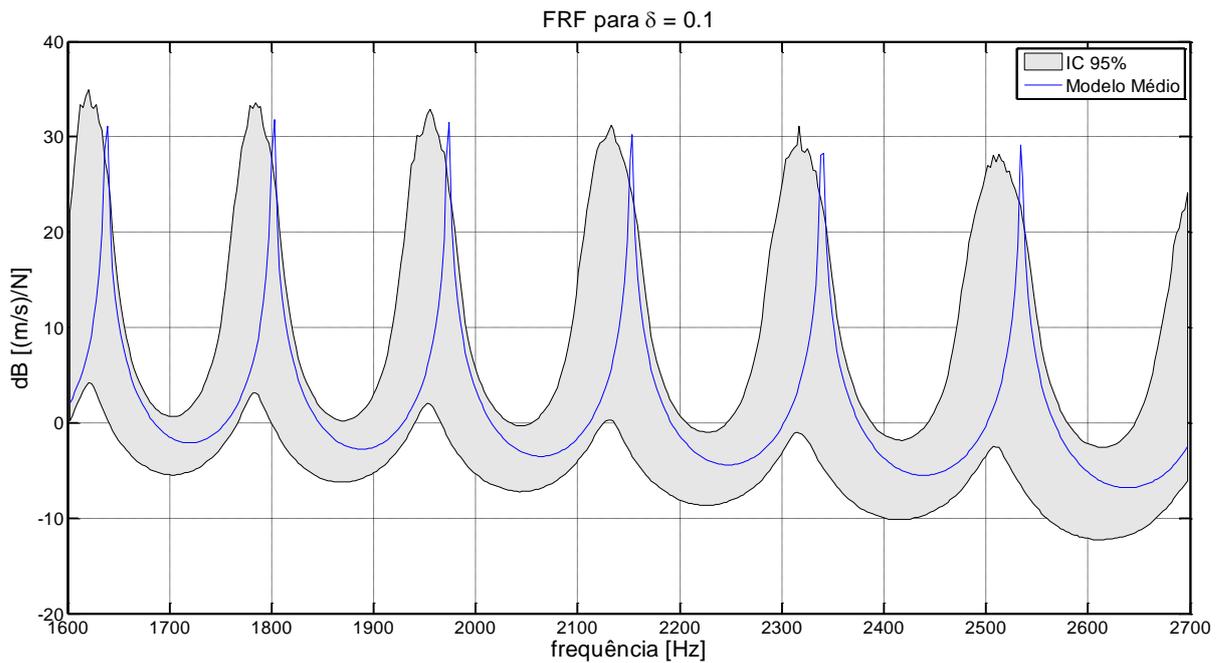


Figura 100: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,1$. Fonte: autor.

Tabela 11: Frequências referentes à Figura 100.

$\delta = 0,1$						
$1.600 < \text{frequência} < 2.700 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
21	1602,2	1621,9	1637,9	1642,0	12,066	0,0074390
22	1762,3	1784,4	1801,6	1806,4	13,415	0,0075180
23	1931,0	1954,6	1973,2	1978,4	14,372	0,0073529
24	2105,4	2131,9	2152,6	2159,2	16,264	0,0076289
25	2289,3	2317,5	2339,7	2345,2	17,214	0,0074276
26	2480,5	2511,4	2534,8	2541,8	18,635	0,0074201

9.2.8.4 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,2$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 101 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,2. Já para as FRFs, toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) é

mostrada na Figura 102 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 103 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 104 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 105 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

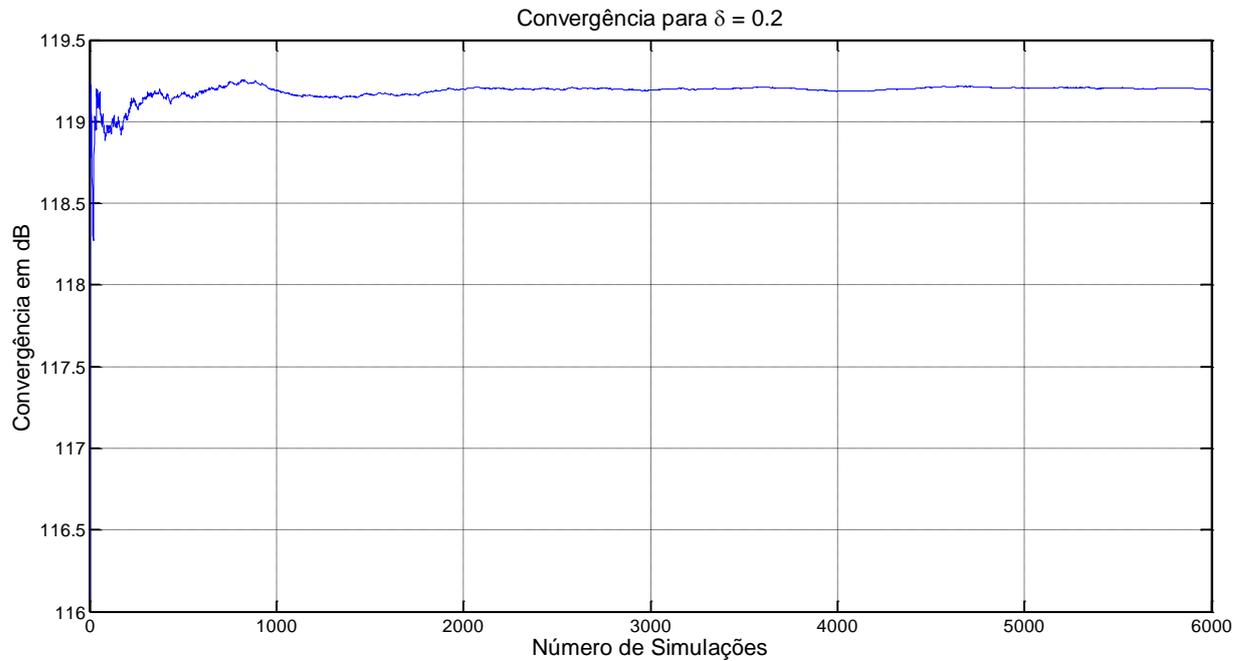


Figura 101: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

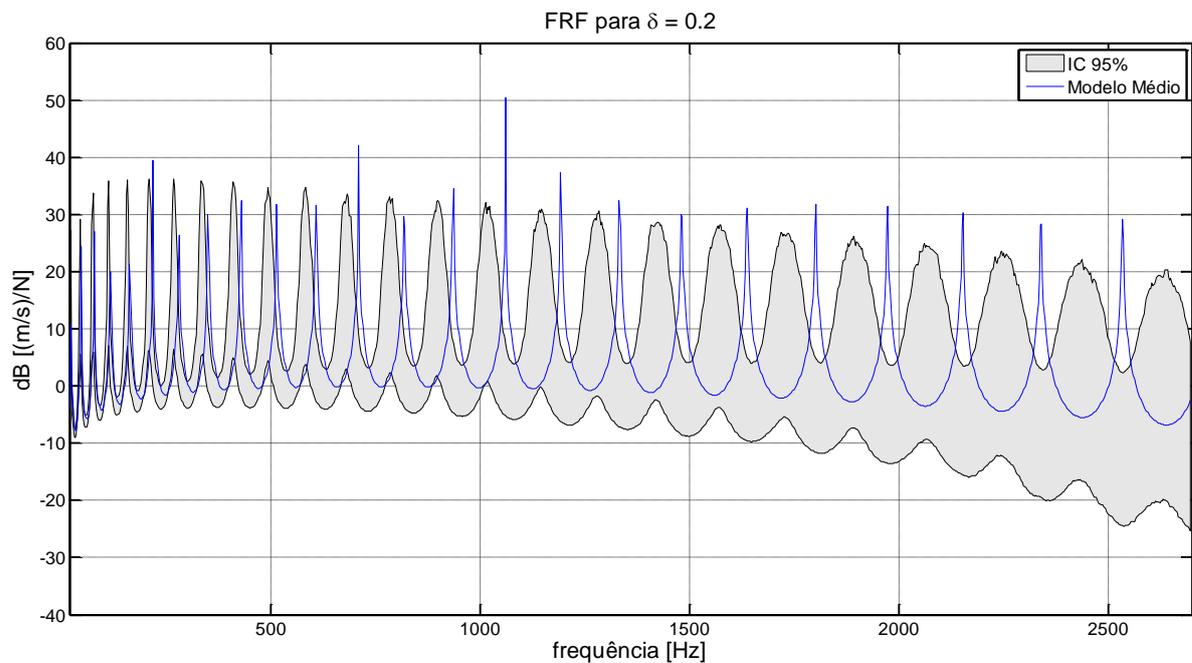


Figura 102: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

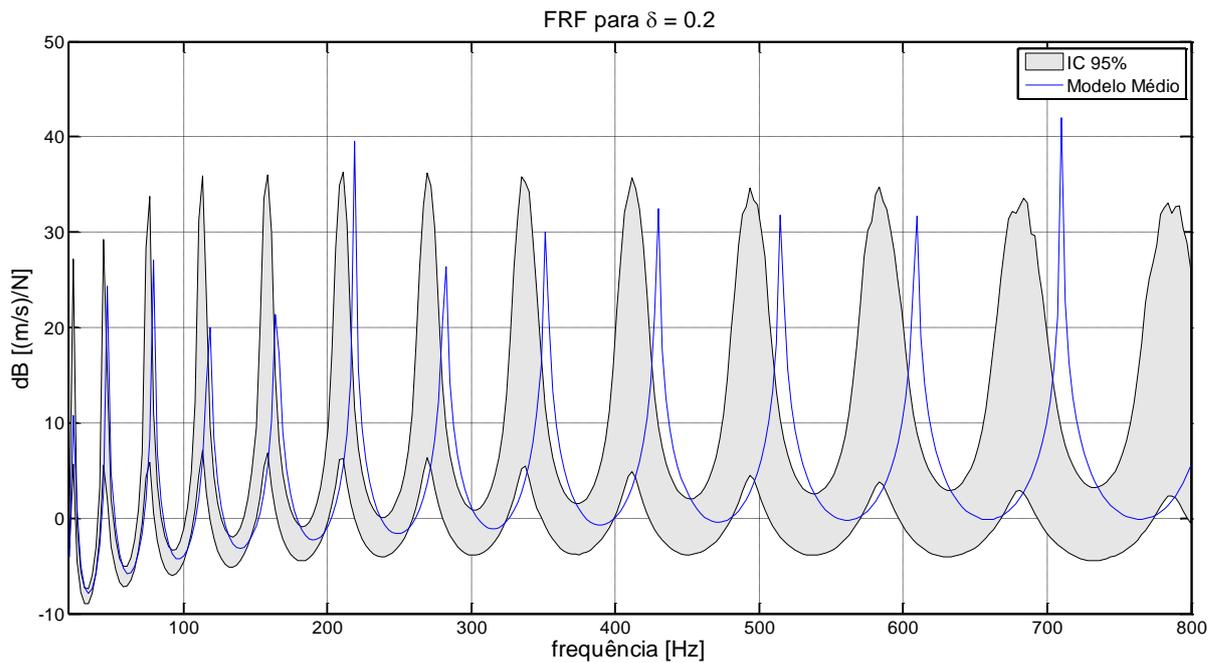


Figura 103: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

Tabela 12: Frequências referentes à Figura 103.

$\delta = 0,2$

$0 < \text{frequência} < 800 \text{ Hz}$

Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
1	1,2968	1,3289	1,3882	1,3617	0,019612	0,014758
2	8,1276	8,3289	8,6999	8,5359	0,124010	0,014889
3	22,768	23,324	24,360	23,891	0,347640	0,014905
4	44,605	45,716	47,736	46,832	0,670990	0,014678
5	73,720	75,566	78,911	77,484	1,142100	0,015114
6	110,16	112,94	117,88	115,78	1,717000	0,015203
7	153,88	157,76	164,64	161,62	2,372200	0,015037
8	204,99	210,06	219,20	215,13	3,081200	0,014668
9	263,28	269,78	281,55	276,32	3,936500	0,014591
10	328,94	337,13	351,69	345,52	5,011200	0,014864
11	401,90	411,92	429,63	422,04	6,153200	0,014938
12	482,13	494,11	515,36	506,33	7,279100	0,014732

13	569,96	583,86	608,89	598,52	8,663700	0,014839
14	665,13	681,29	710,21	698,21	10,11500	0,014847
15	767,74	786,22	819,34	805,56	11,47900	0,014600

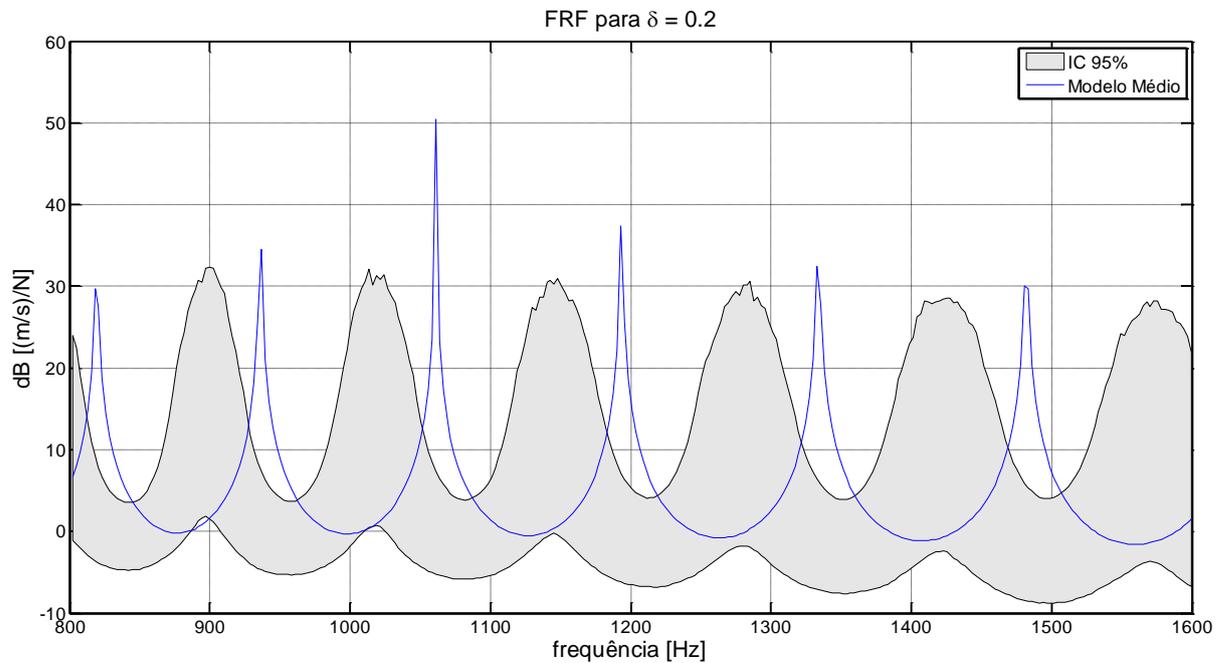


Figura 104: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

Tabela 13: Frequências referentes à Figura 104.

$\delta = 0,2$						
$800 < \text{frequência} < 1.600 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
16	877,09	898,47	936,25	919,97	12,955	0,014419
17	994,37	1018,5	1061,0	1043,2	14,747	0,014480
18	1119,3	1146,3	1193,5	1173,9	16,760	0,014621
19	1250,0	1280,6	1333,8	1311,6	18,768	0,014656
20	1389,6	1422,9	1481,9	1457,2	20,697	0,014546
21	1536,4	1573,3	1637,9	1610,8	22,735	0,014451

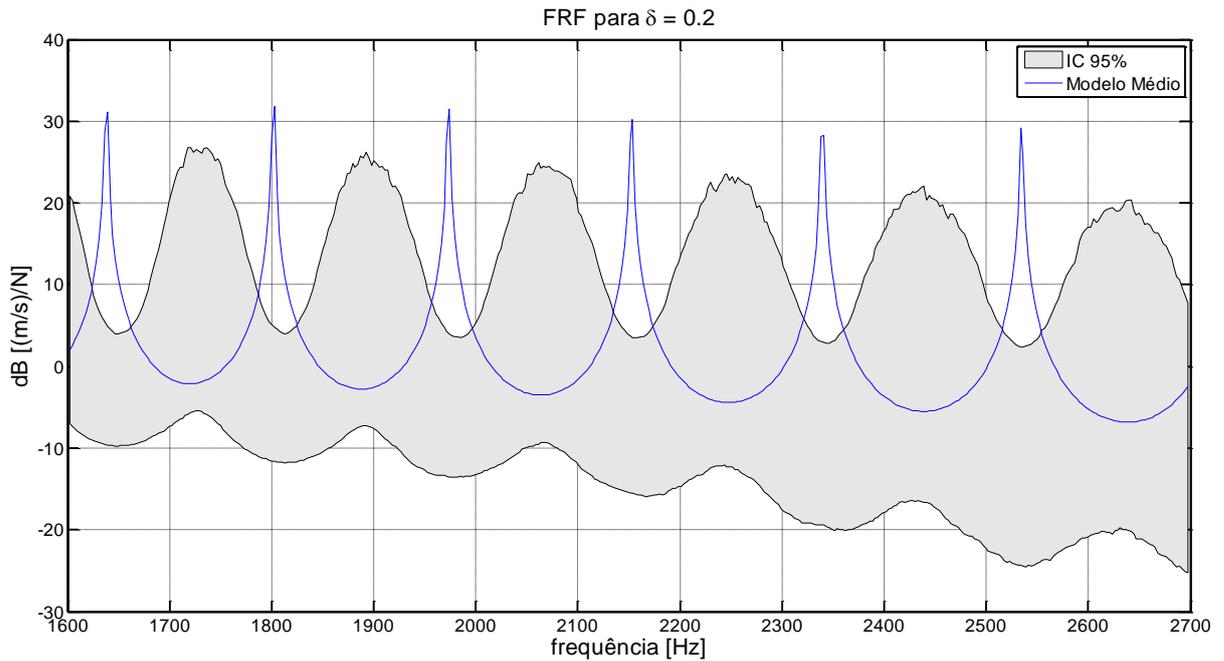


Figura 105: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,2$. Fonte: autor.

Tabela 14: Frequências referentes à Figura 105.

$\delta = 0,2$						
$1.600 < \text{frequência} < 2.700 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
22	1689,4	1730,7	1801,6	1773,3	25,591	0,014786
23	1850,2	1895,6	1973,2	1942,8	28,128	0,014839
24	2019,9	2068,9	2152,6	2118,6	29,905	0,014454
25	2195,4	2248,7	2339,7	2303,0	32,450	0,014431
26	2379,6	2437,4	2534,8	2496,6	35,691	0,014643
27	2570,9	2632,3	2737,6	2695,6	38,011	0,014440

9.2.8.5 Quantificação da incerteza de modelo para $\delta = 0,5$

São apresentadas a seguir as respostas gráficas para o IC de 95% além da FRF do modelo médio. A Figura 106 apresenta o gráfico de convergência do método para o parâmetro de dispersão considerado de 0,5. Já para as FRFs, toda a faixa de frequência (0 a 2.700 Hz) é

mostrada na Figura 107 porém, para melhor visualização dos resultados, são mostrados também gráficos em que a faixa de frequência é dividida. Sendo assim, foi considerado na Figura 108 a faixa de baixa frequência (0 a 800 Hz), na Figura 109 a faixa de média frequência (800 a 1.600 Hz) e na Figura 110 a faixa de alta frequência (1.600 a 2.700 Hz).

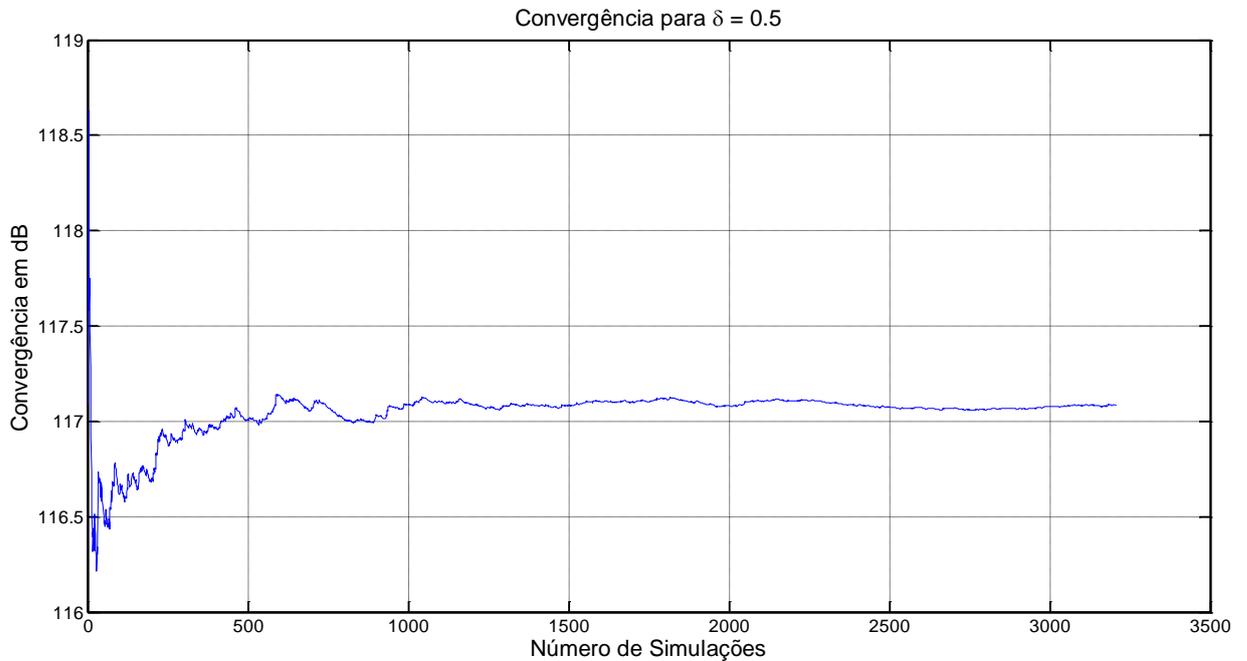


Figura 106: Gráfico de convergência do método para $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

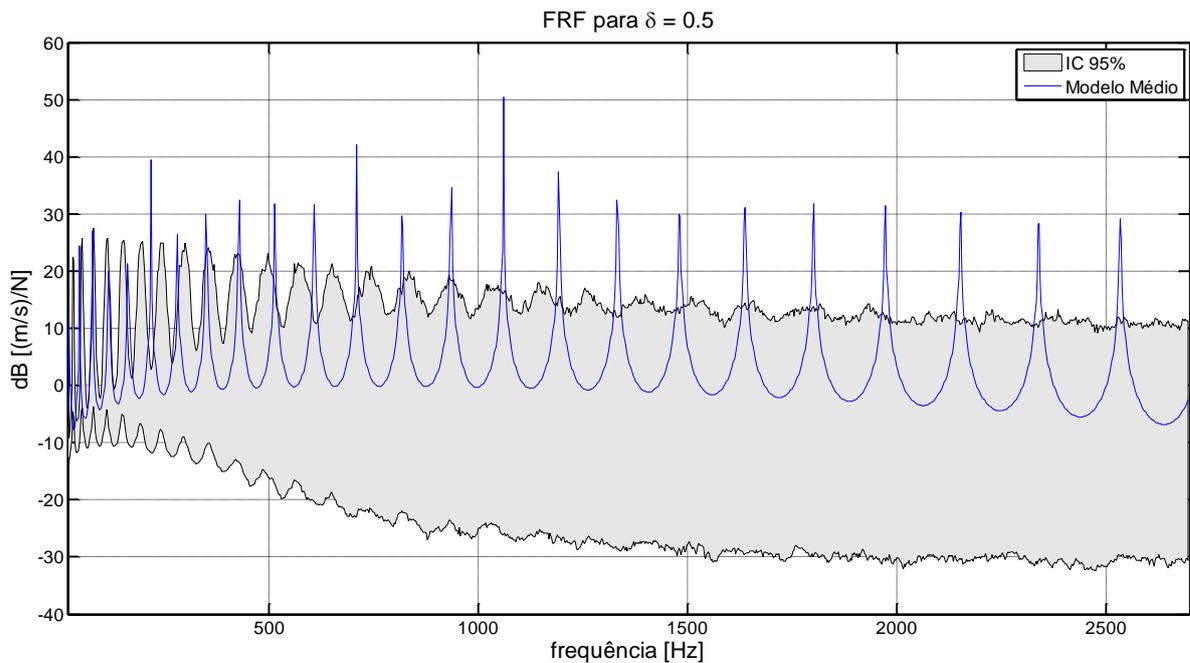


Figura 107: Modelo médio e IC para toda a faixa de frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

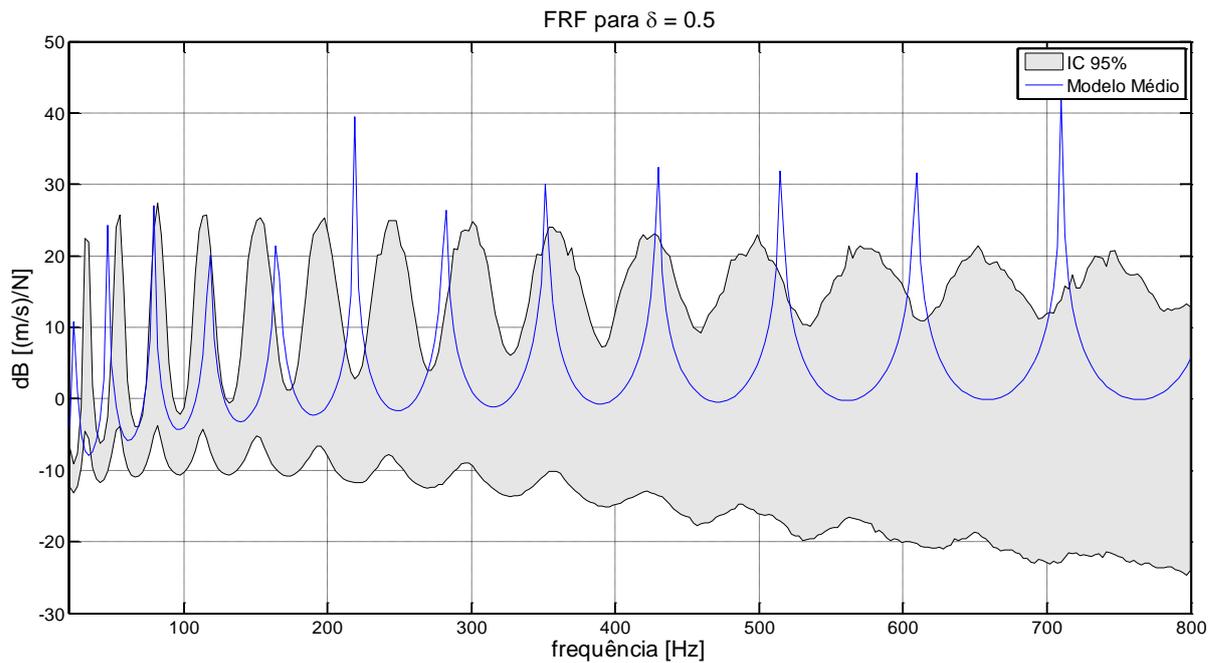


Figura 108: Modelo médio e IC para a faixa de baixa frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

Tabela 15: Frequências referentes à Figura 108.

$\delta = 0,5$						
$0 < \text{frequência} < 800 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
1	5,6500	5,9995	8,6999	6,3618	0,21949	0,036584
2	15,836	16,810	24,360	17,874	0,62224	0,037015
3	30,938	32,977	47,736	35,037	1,25490	0,038053
4	51,269	54,508	78,911	57,986	2,04660	0,037546
5	76,882	81,684	117,88	86,878	3,05870	0,037446
6	107,24	113,99	164,64	121,03	4,18950	0,036752
7	143,18	152,08	219,20	161,57	5,62990	0,037019
8	183,91	195,60	281,55	208,22	7,37950	0,037727
9	230,20	244,52	351,69	259,84	8,99720	0,036795
10	281,94	298,99	429,63	317,19	10,6440	0,035601
11	338,74	358,71	515,36	380,64	12,7700	0,035601
12	400,10	424,57	608,89	450,44	15,4290	0,036341

13	466,53	495,76	710,21	525,69	17,7430	0,035788
14	540,34	572,85	819,34	606,02	20,3300	0,035489
15	617,64	654,42	936,25	693,57	22,9370	0,035049
16	702,48	743,20	1061,0	787,36	25,8110	0,034729

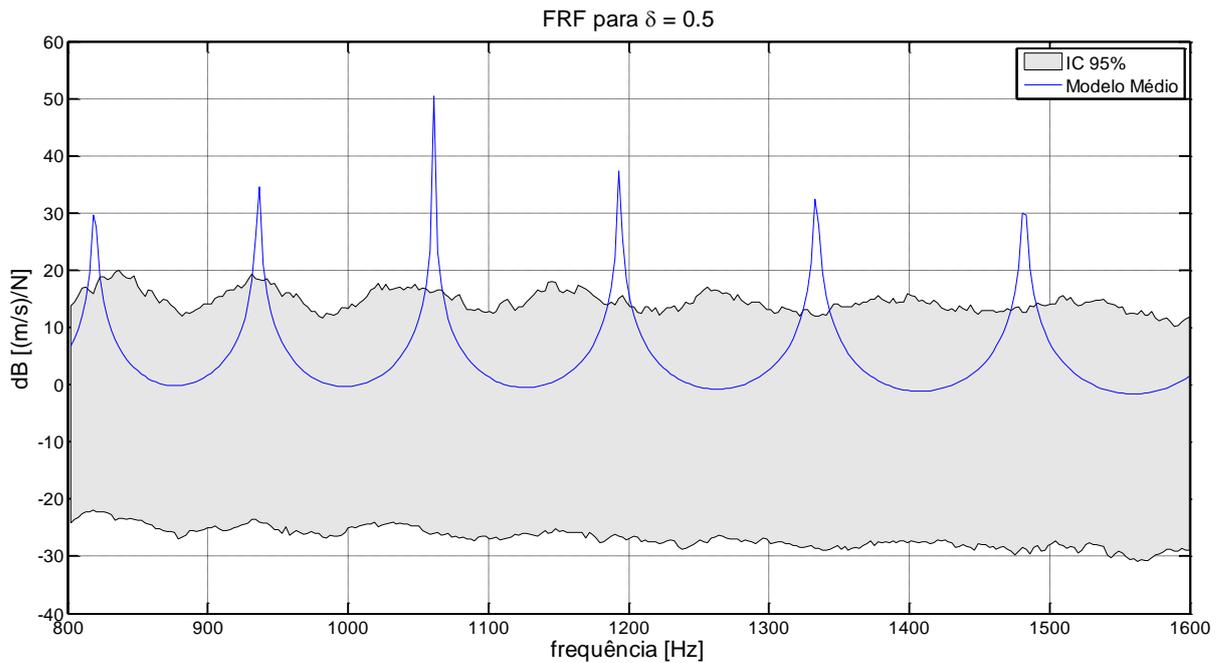


Figura 109: Modelo médio e IC para a faixa de média frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

Tabela 16: Frequências referentes à Figura 109.

$\delta = 0,5$						
$800 < \text{frequência} < 1.600 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
17	791.78	836.86	1193.5	884.60	28.047	0.033514
18	886.95	936.30	1333.8	990.30	30.947	0.033052
19	985.99	1040.6	1481.9	1097.7	33.878	0.032558
20	1091.9	1152.7	1637.9	1213.4	36.802	0.031926
21	1201.9	1267.7	1801.6	1335.6	40.366	0.031842
22	1319.9	1390.6	1973.2	1464.5	43.985	0.031630
23	1444.3	1519.6	2152.6	1597.9	46.568	0.030644

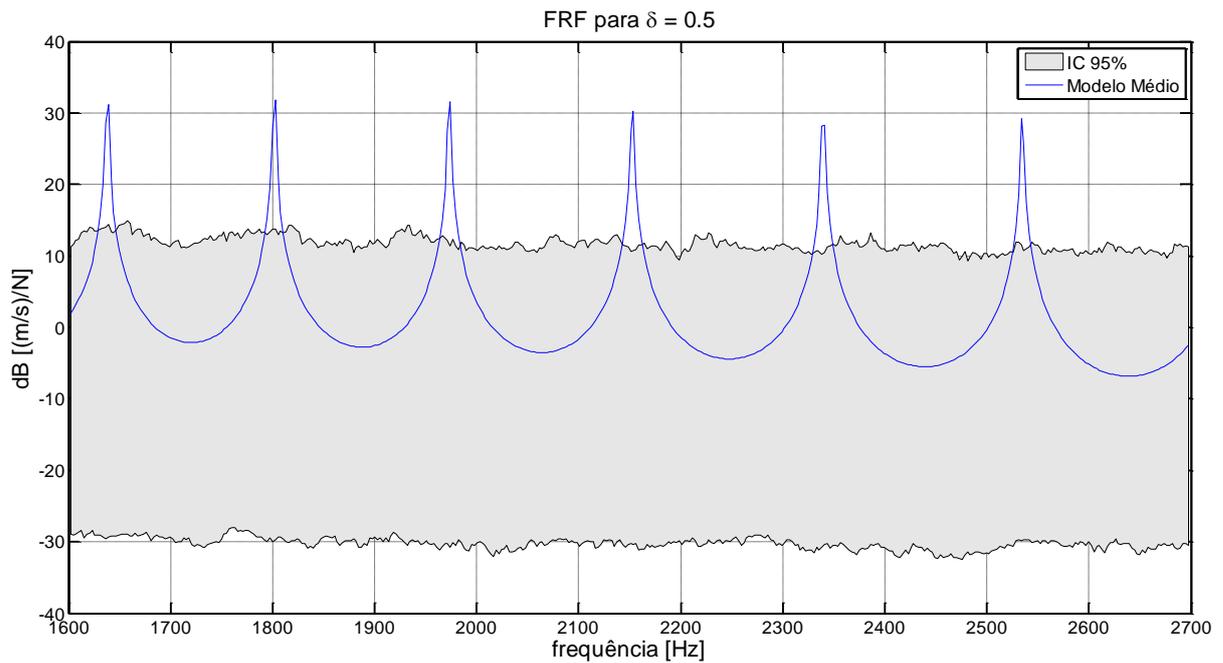


Figura 110: Modelo médio e IC para a faixa de alta frequência e $\delta = 0,5$. Fonte: autor.

Tabela 17: Frequências referentes à Figura 110.

$\delta = 0,5$						
$1.600 < \text{frequência} < 2.700 \text{ Hz}$						
Var1	IC5	Modelo Médio	Modelo Base	IC95	Desvio padrão (DP)	DP médio
24	1574,1	1653,3	2339,7	1737,7	49,673	0,030044
25	1706,2	1792,7	2534,8	1882,3	53,429	0,029803
26	1848,9	1938,4	2737,6	2030,4	56,247	0,029017
27	1993,6	2091,6	2948,3	2193,8	61,171	0,029246
28	2146,7	2247,7	3166,9	2350,0	62,774	0,027929
29	2299,6	2410,9	3393,3	2526,5	67,276	0,027905
30	2461,9	2582,5	3627,5	2698,9	71,999	0,027880

De forma semelhante ao primeiro estudo de caso, é possível observar nos gráficos de convergência representados, neste caso pela Figura 86, Figura 91, Figura 96, Figura 101 e Figura 106, que a convergência ocorre por volta de 400 simulações.

No que diz respeito à quantificação, também foram obtidos resultados semelhantes ao

primeiro estudo de caso. Ao se utilizar parâmetros de dispersão $\delta = 0,01$, $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,1$, o modelo médio permanece dentro do *IC* por toda a faixa de frequência de vibração. Já para $\delta = 0,2$ e $\delta = 0,5$, ocorre uma tendência da *FRF* do modelo médio de se afastar dos limites deste mesmo intervalo. Esta tendência se intensifica ainda mais a medida que se aumenta o parâmetro de dispersão até que o *IC* passa a conter toda a curva do modelo médio, o que é mais evidente ao se observar as respostas gráficas para $\delta = 0,5$.

É perceptível ainda que o *IC* cresce tanto tendo como referência o eixo da frequência quanto tendo como referência o eixo da amplitude em *dB*. Isto quer dizer que o *IC* se torna mais largo e, não só com o aumento da frequência como já concluído por alguns autores citados no Capítulo 2, mas também com o aumento do parâmetro de dispersão.

Capítulo 10

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

10.1 CONCLUSÕES

Tendo em vista que a abordagem não-paramétrica tem uma importância fundamental na quantificação da incerteza de modelagem em modelos de sistemas dinâmicos, em especial ao se trabalhar com sistemas de alta complexidade, esta tese apresenta e explica o arcabolo teórico desse método de quantificação além de apresentar um passo-a-passo para a sua aplicação em exemplos práticos. Isto se justifica tendo em vista que não há outra maneira de se fazer com que o modelo médio represente com fidelidade o modelo real senão pela quantificação da incerteza, tanto paramétrica quanto não-paramétrica, e com isso, é possível que empresas possam fazer uso do método para aumentar a confiabilidade de seus modelos numéricos de forma a torna-los suficientemente confiáveis para estudos computacionais. Assim, com o modelo médio substituindo o modelo experimental (manufaturado), é possível evitar que haja necessidade de testes demasiadamente longos e caros e que muitas vezes são até inviáveis de serem realizados.

É claro que todo o procedimento para a correta aplicação do método já foi estudada e definida, em especial, por Jaynes. Porém, antes disso, Shannon, com a sua medida do grau de ignorância humana e sua formulação para o cálculo desta ignorância, denominada entropia de Shannon, deu as bases para que Jaynes, de certa forma, ‘traduzisse’ os resultados do primeiro,

que se encontrava no âmbito da Teoria da Informação, para que fossem aplicados também em outras áreas. Com isso, e diante do problema de se conseguir a correta *FDP*, tendo disponível pouca ou nenhuma informação sobre o problema, Jaynes constatou que a única forma de se obter uma *FDP* que pudesse representar honestamente o estado de conhecimento incompleto do analista sobre o problema era por meio da maximização da incerteza sujeita a todas as informações que se têm. A incerteza maximizada é a entropia de Shannon e as informações são traduzidas em restrições do problema de otimização. Vale lembrar que estas restrições são expectativas matemáticas de quantidades sobre as quais temos alguma informação. Esta formulação torna o problema mais simples de ser resolvido.

Tendo por base todos estes estudos, Soize (1998 até 2005) apresentou a abordagem não-paramétrica para sistemas dinâmicos, o que abriu um horizonte para a quantificação da incerteza nestes sistemas. Adhikari veio depois dele e procedeu a alguns estudos promissores em especial na primeira fase da abordagem, chamada Modelagem Estocástica, em que se obtém a *FDP* apropriada para as matrizes aleatórias do sistema.

Porém, o que se vê nos artigos referentes ao tema do método não-paramétrico é que a literatura não dispõe explicitamente alguns pontos de suma importância para uma correta compreensão e aplicação do método. Sendo assim, foi detalhado em grande parte neste trabalho a fase da Modelagem Estocástica que resultou na obtenção da *FDP Wishart* e seus parâmetros ótimos.

Há de se notar, entretanto, que existem também limitações na aplicação do método não-paramétrico e elas estão no fato de que as matrizes aleatórias devem pertencer ao conjunto *CPD* de matrizes reais, simétricas e positivas-definidas. Este conjunto é o fundamento de toda a modelagem estocástica. Com a aplicação de suas propriedades às restrições, estas se convertem em equações mais fáceis de se trabalhar. Com isso, torna mais simples o processo de se calcular a *FDP* com parâmetros apropriados resolvendo-se o problema de maximização da entropia de Shannon sujeita às restrições do problema de otimização. Não é possível portanto, a aplicação da abordagem em modelos de sistemas com matrizes que não pertençam a este conjunto.

Por outro lado, dois estudos de casos foram apresentados para que um passo-a-passo fosse mostrado no processo de avaliação da confiabilidade do sistema até a quantificação da incerteza. O primeiro trata-se de uma viga fixa-fixa cujo experimento foi realizado por

Adhikari, Friswell e Lonkar (2007b) e o segundo se refere a uma viga fixa-livre cujo ensaio foi realizado pelo autor.

É possível constatar para os dois sistemas que o conjunto médio experimental segue o modelo base mais de perto na região de baixa frequência porém, à medida que a frequência aumenta se percebe um atraso do conjunto médio experimental com relação às frequências do modelo base. Essa tendência vai se intensificando com o aumento da frequência. Isto ocorre porque a massa do modelo base é menor que a massa dos sistemas aleatórios experimentais. A incerteza incorporada no conjunto médio experimental faz resultar em *FRF's* com comportamentos diferentes do esperado, mesmo ao se levar em conta um simples sistema de viga fixa-fixa. Em sistemas mais complexos provavelmente a diferença entre as duas curvas (modelo base e conjunto médio experimental) será ainda maior. Estas conclusões observadas nas respostas gráficas deixam mais clara a presença da incerteza de modelo no sistema considerado representada pelo comportamento diverso das *FRF's*.

No que diz respeito às curvas do conjunto médio experimental comparadas com as curvas do modelo médio, verificou-se uma diferença entre os dois estudos de caso. Enquanto no primeiro, em especial a partir de aproximadamente 100 Hz, as curvas do conjunto médio experimental não seguem de perto as curvas do modelo médio, no segundo estudo de caso as curvas do conjunto médio experimental seguem um pouco mais de perto as curvas do modelo médio em toda a faixa de frequência de vibração. Além disso, nos dois estudos de caso ocorrem deslocamentos dos picos de ressonância nas *FRFs* comparadas. No entanto, deve-se dizer que o modelo médio ainda pode ter a sua confiabilidade aumentada. Eis aí a evidência da importância e da necessidade da quantificação de incertezas de modelagem pois, ao quantificá-las é possível 'melhorar' o modelo médio, aumentar sua confiabilidade, e com isso utilizá-lo em substituição do modelo experimental.

Porém, a tentativa imediata de solução para tal problema seria proceder a uma simulação computacional que pudesse reproduzir de forma satisfatória a resposta obtida pelo ensaio, ao invés de quantificar a incerteza. No entanto, o que se verifica nos dois estudos de caso é uma discordância entre as curvas de *FRF* do conjunto médio simulado e do conjunto médio experimental em toda a faixa de frequência e portanto, não se pode adotar o modelo que resulta da simulação usual reproduzido aqui, já que ele não produz respostas com confiabilidade suficiente de forma a representar o modelo experimental em análises realizadas

computacionalmente. A solução portanto, como já dito anteriormente, é quantificar a incerteza presente no modelo médio.

Tendo este objetivo em vista, a quantificação da incerteza de modelo nos dois estudos de caso apresentados foi realizada para cinco valores de parâmetros de dispersão δ (0,01 / 0,05 / 0,1 / 0,2 / 0,5) com o propósito de, além de quantificar a incerteza, também de se estudar a influência de tal parâmetro na resposta dos sistemas e demonstrar a sua importância. Estudos como estes são essenciais na quantificação de incertezas, pois o comportamento da resposta pode ser observado em função da única informação que se tem sobre a incerteza do sistema dinâmico, que é o parâmetro de dispersão

Foi possível verificar que ao se utilizar parâmetros de dispersão $\delta = 0,01$, $\delta = 0,05$ e $\delta = 0,1$, o modelo médio permanece dentro do *IC* por toda a faixa de frequência de vibração. Já para $\delta = 0,2$ e $\delta = 0,5$, ocorre uma tendência da *FRF* do modelo médio de se afastar dos limites deste mesmo intervalo. Esta tendência se intensifica ainda mais a medida que se aumenta o parâmetro de dispersão até que o *IC* passa a conter toda a curva do modelo médio, o que é mais evidente ao se observar as respostas gráficas para $\delta = 0,5$. Neste caso, tal comportamento pode ser justificado pelo valor do parâmetro de dispersão ser elevado para tal estudo, já que o sistema simulado corresponde a uma estrutura bem simples.

É perceptível ainda que o *IC* cresce tanto tendo como referência o eixo da frequência quanto tendo como referência o eixo da amplitude em *dB*. Isto quer dizer que a região de confiança, ou seja, o *IC*, se torna mais largo e, não só com o aumento da frequência mas também com o aumento do parâmetro de dispersão. Este comportamento dificulta a previsibilidade do sistema.

Por outro lado, vale aqui uma nota com relação ao critério utilizado na escolha do parâmetro de dispersão. Como já mencionado no Capítulo 2, Soize (2005a), por exemplo, propõe que o parâmetro de dispersão deve ter seu valor entre zero e um. No entanto Adhikari (2006), por exemplo, não considera tais limites e chega a usar neste mesmo artigo um parâmetro de dispersão da matriz massa igual a 2,0449. Isto sugere que este parâmetro, de suma importância para a aplicação da abordagem não-paramétrica, deve ser cuidadosamente calculado para que não haja respostas tendenciosas e que não traduzem a realidade do problema. Um analista que fosse escolher arbitrariamente o valor do parâmetro de dispersão para os sistemas estudados neste trabalho poderia optar por valores como $\delta = 0,01$, $\delta = 0,05$, $\delta = 0,1$, $\delta = 0,2$, $\delta = 0,5$

ou até mesmo valores maiores. Mas considerar parâmetros elevados aumenta sobremaneira a incerteza em um sistema, o que não faz sentido já que o que se espera é que o modelo tenha o mínimo de incerteza e não o seu valor máximo. Por outro lado, considerar valores extremamente pequenos, principalmente em sistemas muito complexos pode não ser o suficiente para que se obtenham respostas satisfatórias e condizentes com o sistema em estudo. É por isso que o cálculo cuidadoso e correto deste parâmetro é tão importante, só assim poderão ser obtidas respostas que traduzem a realidade do problema estudado fazendo com que a quantificação das incertezas contribua de forma eficaz no aumento da confiabilidade dos sistemas considerados na análise. Só assim, é possível a modelagem de um sistema de forma que o modelo construído represente com fidelidade máxima o modelo real.

10.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Haja vista todo o trabalho realizado referente ao desenvolvimento teórico e prático que engloba as três fases da aplicação da abordagem não-paramétrica que tem seu início na obtenção da *FDP Wishart* e seus parâmetros ótimos até a quantificação da incerteza e avaliação dos resultados de dois estudos de caso, são sugeridos alguns estudos no intuito de complementar o processo de quantificação pelo método não-paramétrico.

Em primeiro lugar, podem ser realizados estudos mais aprofundados com relação ao desenvolvimento para obtenção dos parâmetros ótimos da *FDP Wishart* para que o detalhamento se torne ainda mais completo.

Além disso, estudos para obtenção do parâmetro de dispersão podem ser realizados levando-se em conta critérios teóricos e experimentais. Uma comparação entre métodos de cálculo pode estimar a maneira mais eficaz de calculá-lo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adhikari, S. (2006). A Non-Parametric Approach for Uncertainty Quantification in Elastodynamics. *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, pp. 1-21.
- Adhikari, S. (2007a). On the Quantification of Damping Model Uncertainty. *Journal of Sound and Vibration*, 306, pp. 153-171.
- Adhikari, S. (2007b). Matrix Variate Distributions for Probabilistic Structural Dynamics. *AIAA Journal*, 45(7), pp. 1748-1762. doi:10.2514/1.25512
- Adhikari, S. (2007c). An Unified Parametric-Nonparametric Uncertainty Quantification Approach for Linear Dynamical Systems. *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, pp. 1-22.
- Adhikari, S. (2008a). Uncertainty Propagation in Complex Aero-mechanical Systems: A Random Matrix Approach. *Transparência para apresentação*. School of Engineering, Swansea University, Swansea, UK.
- Adhikari, S. (2008b). Wishart Random Matrices in Probabilistic Structural Mechanics. *Journal of Engineering Mechanics* © ASCE, 134(12), pp. 1029-1044.
- Adhikari, S. (2010a). Uncertainty Quantification in Structural Dynamics Using Non-Central Wishart Distribution. *International Journal of Engineering Under Uncertainty: Hazards, Assessment and Mitigation*, 2, pp. 123-139.
- Adhikari, S. (2010b). Generalized Wishart Distribution of Probabilistic Structural Dynamics. *Comput Mech*, 45, pp. 495-511. doi:10.1007/s00466-010-0467-3
- Adhikari, S., & Chowdhury, R. (2010). A Reduced-Order Random Matrix Approach for Stochastic Structural Dynamics. *Computers and Structures*, 88, pp. 1230–1238.

- Adhikari, S., & Sarkar, A. (2007). The Nature of Epistemic Uncertainty in Linear Dynamical Systems. *Proceedings of the 25th International Modal Analysis Conference (IMAC-XXV)*.
- Adhikari, S., & Sarkar, A. (2009). Uncertainty in Structural Dynamics: Experimental Validation of a Wishart Random Matrix Model. *Journal of Sound and Vibration*, 323, pp. 802–825. doi:10.1016/j.jsv.2009.01.030
- Adhikari, S., et al. (2007a). Uncertainty in Structural Dynamics: Experimental Case Study on Beams and Plates. *ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, pp. 1-11.
- Adhikari, S., Friswell, M. L., & Lonkar, K. P. (2007b). Experimental Case Studies for Uncertainty Quantification in Structural Dynamics: Part 1, Beam Experiment. *Elsevier Science*.
- Adhikari, S., et al. (2007). Experimental Case Studies for Uncertainty Quantification in Structural Dynamics: Part 2, Plate Experiment. *Elsevier Science*.
- Adhikari, S., et al. (2009). Experimental Case Studies for Uncertainty Quantification in Structural Dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24, pp. 473-492.
- Araújo, A. L. (2014). Matemática computacional. 1-170. Notas de apoio às aulas de Matemática Computacional do Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade de Coimbra.
- Barrico, C. M. (2007). Optimização evolucionária multi-objectivo em ambientes incertos - pesquisa de soluções robustas. *Tese submetida para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Especialidade em Informática*. Coimbra.

- Batista, R. A. (2011). *Erros e incertezas. Material de Estudo*. Universidade Estadual de Campinas: Instituto de Física Gleb Wataghin.
- Belonsi, M. H., Lima, A. M., & Gonçalves, R. (2014). Estudo numérico-computacional do método da entropia máxima. *Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria*, pp. 1-10.
- Bernadá, G. M. (2011). Quantificação de incertezas em problemas de interação fluido estrutura via método de colocação estocástica. *Tese de Doutorado*. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, Brasil.
- Bronson, R. (1989). *Theory and Problems of Matrix Operations*. McGraw-Hill Companies.
- Cabral, P. (2004). Erros e Incertezas nas Medições. Material de Estudo.
- Caliman, H. M. (2014). Avaliação Experimental da Variação da Entropia da Informação de Escoamentos em Meios Porosos. *Projeto de Graduação - Universidade Federal do Espírito Santo*, pp. 1-83.
- Camponogara, E. (2006). Métodos de Otimização: Teoria e Prática (Versão preliminar). *Universidade Federal de Santa Catarina*, pp. 1-369.
- Capiez-Lernout, E., *et. al.* (2006). Data and Model Uncertainties in Complex Aerospace Engineering Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 295, pp. 923–938. doi:10.1016/j.jsv.2006.01.056
- Chebli, H., & Soize, C. (2004). Experimental Validation of a Nonparametric Probabilistic Model of Nonhomogeneous Uncertainties for Dynamical Systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(2), pp. 697-705. doi:10.1121/1.1639335

- Cicirelo, A., & Langley, R. S. (2010). The analysis of random systems with combined parametric and non-parametric uncertainty models. *Conference on Noise and Vibration Engineering (in International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics)*.
- Dionísio, A., Menezes, R., & Mendes, D. (2003). A entropia como medida de informação na modelação económica. In *Temas em Métodos Quantitativos* (3 ed., pp. 1-19). Edições Sílabo.
- Educação, E. K. (s.a.). *O que é Entropia?* Retrieved novembro 17, 2015, from klick Educação: http://www.klickeducacao.com.br/bcoresp/bcoresp_mostra/0,6674,POR-935-3713,00.html
- Elias, L. M. (2010). Minimização de Funções Quadráticas. *Dissertação. Universidade Federal do Paraná*.
- Fogo, J. C. (2013). Teoria de matrizes para estatística. São Carlos: Apostila. Universidade Federal de São Carlos.
- Fontanela, F., & Lenzi, A. (2014). Quantificação de incertezas no modelo estrutural de um tubo de descarga utilizando métodos probabilísticos. *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, pp. 1-10.
- Jaynes, E. T. (1957a). Information Theory and Statistical Mechanics. *The Physical Review*, *106*(4), pp. 620-630.
- Jaynes, E. T. (1957b). Information theory and statistical mechanics II. *The Physical Review*, *108*(2), pp. 171-190.
- Jaynes, E. T. (1958). Probability Theory in Science and Engineering. *Colloquium Lectures in Pure and Applied Science*(4), pp. 1-194.

- Jaynes, E. T. (1963). New engineering applications of information theory. *First Symposium on Engineering*, pp. 163-203.
- Jaynes, E. T. (1967). Foundations of probability theory and statistical mechanics. *Delaware Seminar in the Foundations of Physics*, pp. 77-101.
- Jaynes, E. T. (1978). Where do we stand on maximum entropy. *Maximum Entropy Formalism Conference*.
- Jaynes, E. T. (1979). Concentration of Distributions at Entropy Maxima. *Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics*, pp. 1-20.
- Jaynes, E. T. (1981). Entropy and search theory. *First Maximum Entropy Workshop*, pp. 1-18.
- Jaynes, E. T. (1984). The intuitive inadequacy of classical statistics. *Epistemologia VII - Probability, Statistics, and Inductive Logic*, pp. 43-74.
- Jaynes, E. T. (1985). Where do we go from here. *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, pp. 21-58.
- Jaynes, E. T. (1986). Bayesian Methods: General Background. *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Applied Statistics*, pp. 1-19.
- Jaynes, E. T. (1988). The Relation of bayesian and maximum entropy methods. *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering, I*, pp. 25-29.
- Jaynes, E. T. (1991). Notes on present status and future prospects. *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pp. 1-13.
- Jaynes, E. T. (1995). *Probability Theory: The Logic of Science*. Edição fragmentada de Março 1996.

- Junior, A. M. (2015a). *Geometria Analítica e Álgebra Linear - Aula 05 - Matriz Inversa: Definição e Propriedades (video aula UNIVESP)*. Retrieved novembro 6, 2015, from Univesp TV (Universidade Virtual do Estado de São Paulo): <https://www.youtube.com/watch?v=RNy8yHghiVA&index=5&list=PLxI8Can9yAHfVlmdM6bpJ0ooSZwwdIQjz>
- Junior, A. M. (2015b). *Geometria Analítica e Álgebra Linear - Aula 07 - Determinante: Definição e Propriedades (video aula UNIVESP)*. Retrieved novembro 7, 2015, from https://www.youtube.com/watch?v=novqED_7dI8&list=PLxI8Can9yAHfVlmdM6bpJ0ooSZwwdIQjz&index=7
- Junior, A. M. (2015c). *Geometria Analítica e Álgebra Linear - Aula 19 - Mudança de Base. Representação Matricial (video aula UNIVESP)*. Retrieved novembro 9, 2015, from <https://www.youtube.com/watch?v=5KMgCvSeBB4&list=PLxI8Can9yAHfVlmdM6bpJ0ooSZwwdIQjz&index=19>
- Junior, J. K. (2007). *Incertezas de modelo na análise de torres metálicas treliçadas de linhas de transmissão*. Porto Alegre.
- Justino, L. B. (2012). *Quantificação de incertezas não-paramétricas em modelos estruturais dinâmicos. Dissertação de Mestrado*. Itajubá, MG.
- Kyriazis, G. A. (1998). Estatística Bayesiana e o Guia Internacional para Expressão da Incerteza de Medição. *III SEMETRO - III Seminário Internacional de Metrologia Elétrica*, pp. 1-6.
- Langley, R. S. (2009). Vibration and stress analysis in the presence of structural. *7th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis*, 181. doi:10.1088/1742-6596/181/1/012001

- Lima, C. G. (2007). Álgebra de matrizes. Piracicaba, SP: Apostila. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz. USP.
- Lin, G. E. (2012). Survey and evaluate uncertainty. *Pacific Northwest National Laboratory*. United States.
- Mattos, R. S., & Veiga, A. (2002). Otimização de Entropia de entropia: implementação computacional dos princípios MAXENT e MINXENT. *Pesquisa Operacional*, 22, pp. 37-59.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Livro. Ed. SIAM.
- Nhambiu, J. O. (s.a.). *Otimização - aula 27*. Retrieved novembro 19, 2015, from Universidade Eduardo Mondlane: http://nhambiu.uem.mz/wp-content/uploads/2013/05/OPT_Aula-27.pdf
- Nhambiu, J. O. (s.a.). *Otimização - aula 29*. Retrieved novembro 19, 2015, from Universidade Eduardo Mondlane: http://nhambiu.uem.mz/wp-content/uploads/2013/05/OPT_Aula-29.pdf
- Pádua, S. G. (2008). Multiplicadores de Lagrange: aspectos geométricos e algébricos e uma aplicação em engenharia química na destilação do metanol. *Dissertação. Universidade Estadual de Campinas*, pp. 1-107.
- Pineda, J. O. (2006). A entropia segundo Claude Shannon: O Desenvolvimento do Conceito Fundamental da Teoria da Informação. *Dissertação - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*, pp. 1-126.
- PUC-RIO. (s.a.). *Puc Rio*. Retrieved novembro 19, 2015, from http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/24617/24617_4.PDF

- Rao, S. S. (2009). *Engineering Optimization: Theory and Practice* (4 ed.). New Jersey: John Wiley & Sons, INC.
- Ritto, T., Sampaio, R., & Cataldo, E. (2008). Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXX(4), pp. 295-303.
- Ritto, T., Sampaio, R., & Rochinha, F. A. (2011). Model Uncertainties of Flexible Structures Vibrations Induced by Internal Flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXXIII(3).
- Sampaio, R., & Cataldo, E. (2010). Comparing two Strategies to Model Uncertainties in Structural Dynamics. *Shock and Vibration*, 17, pp. 171-186. doi:10.3233/SAV-2010-0505
- Sampaio, R., & Ritto, T. (2008). *Short course on dynamics of flexible structures – deterministic and stochastic analysis. Seminar on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*. PUC-Rio.
- Sampaio, R., Ritto, T., & Cataldo, E. (2007). Comparison and Evaluation of Two Approaches of Uncertainty Modeling in Dynamical Systems. *Mecánica Computacional*, XXVI, pp. 3078-3094.
- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Reimpresso com correções do The Bell System Technical Journal*, 27, pp. 379-423, 623-656.
- Silva, E. M. (2005). Inversão de Fourier Utilizando o Método do Máximo de Entropia. *Dissertação - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF*, pp. 1-92.

- Soize, C. (1998). Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4), pp. 657-685.
- Soize, C. (2000). A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15, pp. 277–294.
- Soize, C. (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5), pp. 1979-1996.
- Soize, C. (2003a). Random Matrix Theory and Non-Parametric Model of Random Uncertainties in Vibration Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263, pp. 893–916. doi:10.1016/S0022-460X(02)01170-7
- Soize, C. (2003b). Uncertain Dynamical Systems in the Medium-Frequency Range. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(9), pp. 1017-1027. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:9(1017)
- Soize, C. (2005a). Random Matrix Theory for Modeling Uncertainties in Computational Mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp. 1333–1366. doi:10.1016/j.cma.2004.06.038
- Soize, C. (2005b). Comprehensive Overview of a Non-Parametric Probabilistic Approach of Model Uncertainties for Predictive Models in Structural Dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288, pp. 623-652. doi:10.1016/j.jsv.2005.07.009
- Soize, C. (2005c). Modèles probabilistes non paramétriques en mécanique.
- Tavares, J. M. (s.a.). *Entropia. Medidas de Gibbs*. Retrieved novembro 13, 2015, from Centro de Matemática. Universidade do Porto: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/cl/textos/EntropiaMedidaGibbs.pdf>

- Uffink, J. (1997). Can the maximum entropy principle be explained as a consistency requirement. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, pp. 223-261.
- Vandepitte, D. M. (2011). Quantification of uncertain and variable model parameters in non-deterministic analysis. *Springer*, 15.
- Yang, W. Y. (2005). *Applied Numerical Methods Using Matlab* (1 ed.). New Jersey, USA: John Wiley & Sons.