

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Análise de Estabilidade Angular Utilizando  
Métodos de Estimação de Amortecimento no  
Sistema Elétrico de Potência

Gabriel de Vasconcelos Eng

Itajubá, 15 de Fevereiro de 2019

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ - UNIFEI**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Gabriel de Vasconcelos Eng**

**Análise de Estabilidade Angular Utilizando**  
**Métodos de Estimação de Amortecimento no**  
**Sistema Elétrico de Potência**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

**Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência**

**Orientador: Prof. Dsc. Zulmar Soares Machado Júnior**

**15 de Fevereiro de 2019**

**Itajubá**



Ministério da Educação  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ**  
Criada pela Lei nº 10.435, de 24 de abril de 2002

**A N E X O I**

**FOLHA DE JULGAMENTO DA BANCA EXAMINADORA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Título da Dissertação: **“Análise de Estabilidade Angular Utilizando Métodos de Estimação de Amortecimento no Sistema Elétrico de Potência”**

Autor: **Gabriel de Vasconcelos Eng**

**JULGAMENTO**

Examinadores	Conceito A = Aprovado - R = Reprovado	Rubrica
1º	A	
2º	A	
3º	A	

Resultado Final: Conceito final:   A  , ou seja,   APROVADO  

Observações: \_\_\_\_\_

**Observações:**

- (1) O Trabalho será considerado Aprovado (A) se todos os Examinadores atribuírem conceito A.
  - (2) O Trabalho será considerado Reprovado (R) se forem atribuídos pelos menos 2 conceitos R.
- Este documento terá a validade de 30 (trinta) dias a contar da data da defesa da Dissertação.

Itajubá, 15 de fevereiro de 2019.

**Dr. Nelson Martins**  
1º Examinador - CEPEL

**Prof. Dr. Robson Celso Pires**  
2º Examinador - UNIFEI

**Prof. Dr. Zulmar Soares Machado Junior**  
3º Examinador (Orientador) - UNIFEI

# Agradecimentos

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida pelas inúmeras oportunidades e bençãos concedidas.

À minha família, meu pai Rogério, minha mãe Raquel, minha irmã Amanda, por estarem sempre presentes por mim e me fazerem lembrar que não estava sozinho nos momentos de dificuldade.

Ao meu orientador, professor Zulmar, por me guiar em todas as etapas deste desafio com sua enorme disposição e vontade, sendo para mim uma referência de profissional.

Aos meus amigos: Caique, Claudio, Edmar, Gabriel, Giovane, Lucas, Nicolás, Pedro e Victor. A contribuição de cada um de vocês foi fundamental para que pudesse caminhar por toda essa jornada.

A todos meus colegas da UNIFEI e do GESiS, oferecendo apoio de forma altruísta e solidária.

Agradeço ao CEPEL (Centro de Pesquisas em Energia Elétrica) a disponibilização das versões acadêmicas dos programas ANAREDE, PacDyn e ANATEM, utilizados nas simulações deste trabalho.

Agradeço ao Sr. Jorge Jardim (HPPA) pela disponibilização da versão acadêmica do ORGANON, também utilizado nas simulações eletromecânicas realizadas neste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



*“Só existem dois dias do ano que nada pode ser feito. Um se chama ontem e o outro se chama amanhã, portanto hoje é o dia certo para amar, acreditar, fazer e principalmente viver”*

*(Dalai Lama)*

# Resumo

A introdução de novas tecnologias nos sistemas elétricos de potência está modificando gradualmente a característica de operação da rede elétrica. A aplicação de medidores modernos, capazes de produzir uma grande quantidade de dados, é um exemplo destes avanços tecnológicos. A utilidade destes equipamentos abrange desde a identificação de perfis instáveis nas redes elétricas, assim como no monitoramento das oscilações eletromecânicas em grandes sistemas de potência. Os métodos tradicionais na análise da estabilidade em sistemas elétricos derivam das equações diferenciais que regem a dinâmica do sistema, sendo necessário conhecer os parâmetros de cada elemento que compõe a rede. O trabalho propõe avaliar a estabilidade angular de sistemas elétricos, tanto em regime permanente, como no transitório eletromecânico. Os dados coletados em simulação são levados a quatro metodologias de estimação de autovalores, determinando os parâmetros modais dos sinais (amortecimento, frequência natural). Portanto, o operador do sistema poderá avaliar a estabilidade angular da rede, sem que seja necessário conhecer plenamente o modelo algébrico-diferencial.

**Palavras-chaves:** Amortecimento. Estabilidade angular. Frequência Natural. Medições. Sistemas de potência.

# Abstract

Power systems are undergoing evolution, since new technologies are being applied and gradually modifying the characteristic of the electrical network. As an example, the application of modern metering devices, which are capable of producing a large amount of data. The usefulness of these equipments ranges from identification of unstable profiles in distribution networks, as well as monitoring of electromechanical signals in large power systems. The analysis of angular stability in power systems is traditionally done from the differential equations that govern the system dynamics, being necessary to acknowledge the paramets of each element that is part of the grid. This work proposes the assessment of angular stability, both in steady state and on electromechanical transiet, by using only measurement data. The data is obtained through simulation, and is applied to four methodologies, in order to perform eigenvalue estimation, and determine the modal parameters of the signals (damping, natural frequency). Therefore, system operators will be able to evaluate the angular stability of the network, without full knowledge of the differential-algebrical equations that models the power system.

**Key-words:** Angular stability. Damping. Measurements. Natural frequency. Power systems.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Rotação desenvolvida no sistema $\mathbb{R}^2$ . . . . .	40
Figura 2 – Fluxograma para execução do algoritmo QR. . . . .	43
Figura 3 – Fluxograma para execução do método de Prony. . . . .	47
Figura 4 – Fluxograma para execução do RML. . . . .	51
Figura 5 – Entrada dos dados e inicialização dos elementos recursivos. . . . .	52
Figura 6 – Estimação do vetor de parâmetros. . . . .	53
Figura 7 – Teste de estabilidade de Jury. . . . .	54
Figura 8 – Preparação para a próxima amostra. . . . .	55
Figura 9 – Fluxograma para execução do DMD. . . . .	59
Figura 10 – Fluxograma para cálculo do ERA. . . . .	70
Figura 11 – Matriz hankel para utilização no EMAC. . . . .	73
Figura 12 – Variação do ângulo do rotor aplicado impulso na potência mecânica. . . . .	78
Figura 13 – Variação do ângulo do rotor versus tempo, devido a um degrau na potência mecânica. . . . .	81
Figura 14 – Variação da potência elétrica aplicado degrau e ruído na $\Delta P_m$ . . . . .	83
Figura 15 – Variação da velocidade angular aplicado entrada degrau e ruído na $\Delta P_m$ . . . . .	84
Figura 16 – Variação da velocidade angular aplicado entrada impulso e ruído na $\Delta P_m$ . . . . .	85
Figura 17 – Fluxograma referente à comparação de 2 vetores com dimensões distintas. . . . .	88
Figura 18 – Entrada de dados no fluxograma da figura 17. . . . .	88
Figura 19 – Cálculo do FM no fluxograma da figura 17. . . . .	90
Figura 20 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 50 [ms]. . . . .	125
Figura 21 – Velocidade angular para o curto circuito por 50 [ms]. . . . .	125
Figura 22 – Potência elétrica para o curto circuito por 50 [ms]. . . . .	126
Figura 23 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 100 [ms]. . . . .	127
Figura 24 – Velocidade angular para o curto circuito por 100 [ms]. . . . .	127
Figura 25 – Potência elétrica para o curto circuito por 100 [ms]. . . . .	128
Figura 26 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 200 [ms]. . . . .	129
Figura 27 – Velocidade angular para o curto circuito por 200 [ms]. . . . .	129

Figura 28 – Potência elétrica para o curto circuito por 200 [ms]. . . . .	130
Figura 29 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 210 [ms]. . . . .	131
Figura 30 – Velocidade angular para o curto circuito por 210 [ms]. . . . .	131
Figura 31 – Potência elétrica para o curto circuito por 210 [ms]. . . . .	132
Figura 32 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 132. . . . .	134
Figura 33 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 132. . . . .	134
Figura 34 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 132. . . . .	134
Figura 35 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 150. . . . .	136
Figura 36 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 150. . . . .	136
Figura 37 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 150. . . . .	136
Figura 38 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 250. . . . .	138
Figura 39 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 250. . . . .	138
Figura 40 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 250. . . . .	138
Figura 41 – Ângulo do rotor para as múltiplas contingências. . . . .	140
Figura 42 – Velocidade angular para as múltiplas contingências. . . . .	140
Figura 43 – Potência elétrica para as múltiplas contingências. . . . .	140
Figura 44 – Diagrama unifilar do sistema radial. . . . .	147
Figura 45 – Diagrama unifilar do sistema Brazilian Birds. . . . .	149
Figura 46 – Regulador automático de tensão para Canário, Sabiá e Tucano. . . . .	153
Figura 47 – Regulador automático de tensão para Gavião. . . . .	154
Figura 48 – Regulador de velocidade para Canário, Tucano e Gavião. . . . .	155
Figura 49 – Regulador de velocidade para Sabiá. . . . .	155
Figura 50 – Algoritmo da iteração inversa. . . . .	180
Figura 51 – Matriz jacobiana aplicada em sistemas de potência. . . . .	181

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Índices de confiança para o sistema radial aplicado impulso em $\Delta P_m$ . . . . .	80
Tabela 2 – Índices de confiança para o sistema radial, aplicado degrau em $[\Delta P_m]$ . . . . .	82
Tabela 3 – Índices para o sistema radial, considerando entrada degrau unitário com ruído. . . . .	83
Tabela 4 – Índices de confiança para o sistema radial aplicado degrau em $\Delta P_m$ . . . . .	84
Tabela 5 – Ponto de operação utilizado para o sistema teste . . . . .	91
Tabela 6 – Autovalores do Sistema BBTS . . . . .	94
Tabela 7 – Modos Eletromecânicos do Sistema BBTS . . . . .	94
Tabela 8 – Autovalores através do Prony no estudo 1, caso 1 . . . . .	97
Tabela 9 – Autovalores através do RML no estudo 1, caso 1 . . . . .	98
Tabela 10 – Autovalores através do DMD no estudo 1, caso 1 . . . . .	98
Tabela 11 – Autovalores através do ERA no estudo 1, caso 1 . . . . .	99
Tabela 12 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 1, caso 1 . . . . .	100
Tabela 13 – Autovalores através do Prony no estudo 2, caso 1 . . . . .	101
Tabela 14 – Autovalores através do RML no estudo 2, caso 1 . . . . .	101
Tabela 15 – Autovalores através do DMD no estudo 2, caso 1 . . . . .	101
Tabela 16 – Autovalores através do ERA no estudo 2, caso 1 . . . . .	102
Tabela 17 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 2, caso 1 . . . . .	103
Tabela 18 – Autovalores através do Prony no estudo 3, caso 1 . . . . .	103
Tabela 19 – Autovalores através do RML no estudo 3, caso 1 . . . . .	104
Tabela 20 – Autovalores através do DMD no estudo 3, caso 1 . . . . .	104
Tabela 21 – Autovalores através do ERA no estudo 3, caso 1 . . . . .	105
Tabela 22 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 3, caso 1 . . . . .	106
Tabela 23 – Fatores de magnitude calculados para os estudos do caso 1. . . . .	106
Tabela 24 – Autovalores através do Prony no estudo 1, caso 2 . . . . .	108
Tabela 25 – Autovalores através do RML no estudo 1, caso 2 . . . . .	108
Tabela 26 – Autovalores através do DMD no estudo 1, caso 2 . . . . .	108
Tabela 27 – Autovalores através do ERA no estudo 1, caso 2 . . . . .	109
Tabela 28 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 1, caso 2 . . . . .	110

Tabela 29 – Autovalores através do Prony no estudo 2, caso 2 . . . . .	110
Tabela 30 – Autovalores através do RML no estudo 2, caso 2 . . . . .	111
Tabela 31 – Autovalores através do DMD no estudo 2, caso 2 . . . . .	111
Tabela 32 – Autovalores através do ERA no estudo 2, caso 2 . . . . .	112
Tabela 33 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 2, caso 2	113
Tabela 34 – Autovalores através do Prony no estudo 3, caso 2 . . . . .	113
Tabela 35 – Autovalores através do RML no estudo 3, caso 2 . . . . .	114
Tabela 36 – Autovalores através do DMD no estudo 3, caso 2 . . . . .	114
Tabela 37 – Autovalores através do ERA no estudo 3, caso 2 . . . . .	115
Tabela 38 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 3, caso 2	116
Tabela 39 – Autovalores através do Prony no estudo 4, caso 2 . . . . .	116
Tabela 40 – Autovalores através do RML no estudo 4, caso 2 . . . . .	117
Tabela 41 – Autovalores através do DMD no estudo 4, caso 2 . . . . .	117
Tabela 42 – Autovalores através do ERA no estudo 4, caso 2 . . . . .	118
Tabela 43 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 4, caso 2	119
Tabela 44 – Fatores de magnitude calculados para os estudos do caso 2. . . . .	119
Tabela 45 – Autovalores utilizando DMD no caso 3 . . . . .	121
Tabela 46 – Autovalores utilizando ERA no caso 3 . . . . .	122
Tabela 47 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o caso 3 . . . . .	122
Tabela 48 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 50 [ms]. .	126
Tabela 49 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 100 [ms].	128
Tabela 50 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 200 [ms].	130
Tabela 51 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 210 [ms].	132
Tabela 52 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 132. . . . .	135
Tabela 53 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 150. . . . .	137
Tabela 54 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 250. . . . .	139
Tabela 55 – Estimação com o ERA para as múltiplas contingências. . . . .	141
Tabela 56 – Dados do sistema radial. . . . .	147
Tabela 57 – Tensões em cada barra do sistema radial. . . . .	147
Tabela 58 – Linhas de transmissão e capacitores série . . . . .	150
Tabela 59 – Transformadores do sistema . . . . .	151
Tabela 60 – Geração e carga no sistema para o ponto de operação definido . . . . .	152
Tabela 61 – Shunts do sistema para o ponto de operação definido . . . . .	152

Tabela 62 – Dados transitórios das máquinas do sistema teste . . . . .	153
Tabela 63 – Parâmetros do regulador automático de tensão para Canário, Sabiá e Tucano . . . . .	154
Tabela 64 – Parâmetros do regulador automático de tensão para Gavião . . . . .	154
Tabela 65 – Parâmetros do regulador de velocidade para Canário, Tucano e Gavião	155
Tabela 66 – Parâmetros do regulador de velocidade para Sabiá . . . . .	155
Tabela 67 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 1, caso 1 . . . . .	157
Tabela 68 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 1, caso 1 . . . . .	158
Tabela 69 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 1, caso 1 . . . . .	159
Tabela 70 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 2, caso 1 . . . . .	160
Tabela 71 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 2, caso 1 . . . . .	161
Tabela 72 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 2, caso 1 . . . . .	162
Tabela 73 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 3, caso 1 . . . . .	163
Tabela 74 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 3, caso 1 . . . . .	164
Tabela 75 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 3, caso 1 . . . . .	165
Tabela 76 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 1, caso 2 . . . . .	166
Tabela 77 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 1, caso 2 . . . . .	167
Tabela 78 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 1, caso 2 . . . . .	168
Tabela 79 – Todos os autovalores identificados via ERA para estudo 1, caso 2 . . . . .	169
Tabela 80 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 2, caso 2 . . . . .	170
Tabela 81 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 2, caso 2 . . . . .	171
Tabela 82 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 2, caso 2 . . . . .	172



Tabela 83 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 3, caso 2 . . . . .	173
Tabela 84 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 3, caso 2 . . . . .	174
Tabela 85 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 3, caso 2 . .	175
Tabela 86 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 4, caso 2 . . . . .	176
Tabela 87 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 4, caso 2 . . . . .	177
Tabela 88 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 4, caso 2 . .	178
Tabela 89 – Todos os autovalores identificados via DMD para o caso 3 . . . . .	179

# Lista de abreviaturas e siglas

AVR	<i>Automatic Voltage Regulator</i>
CMI	<i>Consistent Mode Indicator</i>
DMD	<i>Dynamic Modal Decomposition</i>
EMAC	<i>Extended Modal Amplitude Coherence</i>
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>
GOV	<i>Speed Governor</i>
MAC	<i>Modal Amplitude Coherence</i>
MLE	<i>Maximum Likelihood Estimator</i>
MPC	<i>Modal Phase Collinearity</i>
MSV	<i>Modal Singular Value</i>
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PSS	<i>Power System Stabilizer</i>
RDFT	<i>Recursive Discrete Fourier Transform</i>
RML	<i>Recursive Maximum Likelihood</i>
TLS	<i>Total Least Squares</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>19</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>20</b>
1.2.1	Método de Prony	21
1.2.2	Máxima Verossimilhança Recursiva	24
1.2.3	Decomposição em Modos Dinâmicos	27
1.2.4	Algoritmo de Realização de Sistemas	32
1.2.5	Ajuste Vetorial	37
<b>1.3</b>	<b>Abordagem deste Trabalho</b>	<b>38</b>
<b>1.4</b>	<b>Estrutura da Dissertação</b>	<b>38</b>
<b>2</b>	<b>TÉCNICAS DE CÁLCULO DE AMORTECIMENTO</b>	<b>39</b>
<b>2.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>39</b>
<b>2.2</b>	<b>Algoritmo QR</b>	<b>39</b>
<b>2.3</b>	<b>Método de Prony</b>	<b>44</b>
<b>2.4</b>	<b>Máxima Verossimilhança Recursiva</b>	<b>47</b>
2.4.1	Características Gerais	47
2.4.2	Método de Predição de Erro	48
2.4.3	Metodologia da Máxima Verossimilhança Recursiva em conjunto com o Método PEM	50
<b>2.5</b>	<b>Decomposição em Modos Dinâmicos</b>	<b>56</b>
<b>2.6</b>	<b>Algoritmo de Realização de Sistemas</b>	<b>60</b>
2.6.1	Demonstração Algébrica	60
2.6.2	Coordenadas Modais no Domínio Discreto	68
2.6.3	Indicadores de Confiança	71
2.6.3.1	Coerência de Amplitude Modal (MAC)	72
2.6.3.2	Coerência de Amplitude Modal Estendida (EMAC)	72
2.6.3.3	Colinearidade de Fase Modal (MPC)	74
2.6.3.4	Valor Singular Modal (MSV)	75

2.6.3.5	Indicador de Consistência Modal (CMI) . . . . .	76
2.6.4	Exemplos de Aplicação do ERA em Sistemas Radiais . . . . .	76
2.6.4.1	Caso A - Impulso em $\Delta P_m$ sem ruído - sinal de saída $\Delta\delta$ . . . . .	78
2.6.4.2	Caso B - Degrau em $\Delta P_m$ com ruído - sinal de saída $\Delta\delta$ . . . . .	81
2.6.4.3	Caso C - Degrau em $\Delta P_m$ com ruído - sinal de saída $\Delta P_e$ . . . . .	82
2.6.4.4	Caso D - Degrau em $\Delta P_m$ com ruído - sinal de saída $\Delta\omega$ . . . . .	84
<b>2.7</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS DA ESTABILIDADE ANGULAR EM REGIME PER-</b>	
	<b>MANENTE . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>3.1</b>	<b>Considerações Iniciais . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>3.2</b>	<b>Metodologia de Comparação . . . . .</b>	<b>87</b>
3.2.1	Descrição do Método . . . . .	87
3.2.2	Fator de Magnitude (FM) . . . . .	89
<b>3.3</b>	<b>Sistema Brazilian Birds . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>3.4</b>	<b>Estudo de Casos . . . . .</b>	<b>95</b>
3.4.1	Caso 1 . . . . .	97
3.4.1.1	Estudo 1: Ângulo do Rotor . . . . .	97
3.4.1.2	Estudo 2: Velocidade Angular . . . . .	100
3.4.1.3	Estudo 3: Potência Elétrica . . . . .	103
3.4.1.4	Análise de Resultados do Caso 1 . . . . .	106
3.4.2	Caso 2 . . . . .	107
3.4.2.1	Estudo 1: Máquinas em Canário . . . . .	107
3.4.2.2	Estudo 2: Máquinas em Sabiá . . . . .	110
3.4.2.3	Estudo 3: Máquinas em Tucano . . . . .	113
3.4.2.4	Estudo 4: Máquinas em Gavião . . . . .	116
3.4.2.5	Análise de Resultados do Caso 2 . . . . .	119
3.4.3	Caso 3 . . . . .	120
3.4.3.1	Estudo único: Análise de todas as máquinas do sistema . . . . .	120
<b>3.5</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS DA ESTABILIDADE ANGULAR EM TRANSITÓ-</b>	
	<b>RIOS ELETROMECÂNICOS . . . . .</b>	<b>124</b>

<b>4.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>124</b>
<b>4.2</b>	<b>Caso 1 - Sistema Radial</b>	<b>124</b>
4.2.1	Estudo 1 - Curto Circuito de 50 [ms]	125
4.2.2	Estudo 2 - Curto Circuito por 100 [ms]	126
4.2.3	Estudo 3 - Curto Circuito por 200 [ms]	128
4.2.4	Estudo 4 - Curto Circuito por 210 [ms]	131
4.2.5	Análise de Resultados no Sistema Radial	132
<b>4.3</b>	<b>Caso 2 - Sistema Brazilian Birds</b>	<b>133</b>
4.3.1	Estudo 1 - Curto Circuito na barra 132 e Abertura da Interligação	133
4.3.2	Estudo 2 - Curto Circuito na barra 150 e Abertura das LTs	135
4.3.3	Estudo 3 - Curto Circuito na barra 250 e Abertura das LTs	137
4.3.4	Estudo 4 - Múltiplas Contingências	139
<b>4.4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>141</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>143</b>
<b>5.1</b>	<b>Considerações Gerais</b>	<b>143</b>
<b>5.2</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>144</b>
	 <b>APÊNDICES</b>	 <b>146</b>
	<b>APÊNDICE A – SISTEMA RADIAL</b>	<b>147</b>
	<b>APÊNDICE B – SISTEMA BRAZILIAN BIRDS</b>	<b>149</b>
	<b>APÊNDICE C – RESULTADOS NO REGIME PERMANENTE PARA O BRAZILIAN BIRDS</b>	<b>156</b>
<b>C.1</b>	<b>Caso 1</b>	<b>156</b>
C.1.1	Estudo 1	156
C.1.2	Estudo 2	159
C.1.3	Estudo 3	162
<b>C.2</b>	<b>Caso 2</b>	<b>165</b>
C.2.1	Estudo 1	165
C.2.2	Estudo 2	169
C.2.3	Estudo 3	172

C.2.4	Estudo 4 . . . . .	175
C.3	<b>Caso 3 . . . . .</b>	<b>178</b>
	<b>APÊNDICE D – ALGORITMO DE ITERAÇÃO INVERSA IMPLÍ- CITA . . . . .</b>	<b>180</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>184</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Considerações Iniciais

Sistemas de potência representam todo o conjunto de equipamentos, os quais são responsáveis para que a energia elétrica seja gerada, transportada e consumida. A operação de uma rede elétrica é resultado da sobreposição de dinâmicas distintas, tanto das máquinas que convertem energia em eletricidade, como também devido à carga, a qual pode inclusive prejudicar a qualidade da energia, inserindo harmônicos no sistema. Além das dinâmicas citadas é esperado que a resposta do sistema seja ainda mais complexa, devido às novas tecnologias de geração intermitente sendo implementadas como, por exemplo, fotovoltaicas e eólicas [1].

A operação de um sistema de potência também considera aspectos financeiros, pois existe um custo diferente a ser acessado para cada formato de energia entregue à rede. Outra consequência observada quando na procura por uma solução otimizada para a distribuição de potências é o carregamento dos sistema de transmissão, transitando todo o sistema elétrico para condições próximas aos limites técnicos regulamentados.

Mesmo em condições nominais, a rede pode estar sujeita a rápidos desbalanços de potência, entre o que foi gerado e consumido para um dado patamar de carga em um período de tempo. As dinâmicas destes fenômenos possuem, em geral, pequenas amplitudes e estão diretamente relacionadas ao ponto de operação em que a máquina se encontra. Mecanismos de controle devem ser projetados para compensar estas oscilações, pois já foram relatados cortes de grandes quantidades de carga em detrimento dos modos inter-áreas de grandes sistemas de potência [2].

Em geral, as metodologias para verificação da estabilidade de um sistema derivam do conhecimento sobre as equações diferenciais que modelam o comportamento dinâmico de todos os elementos da rede. Ainda que estas metodologias apresentem um elevado grau de precisão, promovendo suporte aos operadores nas tomadas de decisão, sempre será necessário verificar se os modelos condizem com as medições em campo. Assim como novas tecnologias de geração têm recebido importância, novos formatos de medição estão sendo

disponibilizados, modificando gradativamente para que seja capaz coletar não somente a magnitude, como também o ângulo das variáveis elétricas.

A análise das medições em campo é uma área de estudo de elevada importância neste aspecto, onde novas adições à literatura de sistemas de potência são contempladas. Ao interpretar os dados neste ambiente, torna-se possível verificar casos instáveis com rapidez, assim como obter estimativas de amortecimento do sistema, sem que seja necessário conhecer o modelo exato da rede.

A motivação do trabalho é conhecer o amortecimento sem a necessidade de determinar o espaço de estados do sistema, considerando a simulação no tempo, ou mesmo os sinais medidos por PMUs. Portanto, a dissertação tem como objetivo apresentar e discutir os resultados obtidos das técnicas de estimação de amortecimento, considerando métodos tradicionais (Prony) e avançados, utilizando modos dinâmicos e decomposição em valores singulares.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O estudo de sinais em sistemas de potência é um assunto que recebeu diversos trabalhos, procurando por métodos para analisar qualitativamente os sinais resultantes de fenômenos na rede elétrica. Entre estes trabalhos, um deles foi importante para o contexto científico, propondo calcular autovalores a partir de uma estimativa inicial, conhecido como “Algoritmo de Iteração Inversa Implícita” [3]. Os resultados com esta ferramenta não serão estudados neste trabalho, porém encontra-se disponível no apêndice D a fundamentação teórica do método.

Na revisão bibliográfica deste trabalho foram levantadas as principais técnicas de estimação de amortecimento, tais como, Prony, Máxima Verossimilhança Recursiva (RML), Decomposição em Modos Dinâmicos (DMD), Algoritmo de Realização de Sistemas (ERA) e o também conhecido *Vector Fitting*.

Entretanto, será dada maior ênfase para a decomposição em modos dinâmicos e ao algoritmo de realização de sistemas. Para as demais técnicas, serão apresentadas as principais referências sobre análise de desempenho e aplicações em sistemas elétricos de potência.



### 1.2.1 Método de Prony

Em 1990, Hauer *et al* [4] apresentaram os primeiros resultados obtidos na aplicação do método de Prony em sistemas de potência. A análise de Prony consiste em obter um modelo de predição linear correspondente ao sinal introduzido, para que sejam estimadas diretamente as componentes modais do mesmo. A ferramenta permitiu: desenvolvimento de mecanismos para ações emergenciais, análise de modos eletromecânicos em unidades geradoras e avaliação do amortecimento em estudos de estabilidade transitória. Entretanto, a formulação exata do modelo de predição depende da ordem do sistema, a qual não pode ser conhecida e, caso seja estimada, resultará em estimações contendo parâmetros oriundos de modos numéricos.

Em 1991, Trudnowski *et al* [5] utilizam o método de Prony para desenvolver uma metodologia capaz de modelar os geradores conectados em grandes sistemas de potência no formato de funções de transferência, com o objetivo de propiciar fontes de dados confiáveis no projeto de estabilizadores de sistemas de potência (PSS). A validação do trabalho foi realizada através de simulações em um sistema teste de 27 barras, especificamente no projeto de 2 PSS, onde foi comprovada a eficácia do estudo preliminar conduzido pelos autores.

Em 1993, Grund *et al* [6] compararam 2 metodologias de identificação modal aplicadas em sistemas de potência. A primeira é direta, pois calcula a decomposição em autovalores da matriz de estados do sistema de potência, enquanto que a outra é indireta, pois necessita somente das séries temporais resultantes do sistema em estudo, a qual é conhecida como método de Prony. Utilizando como base de comparação os parâmetros modais determinados, o método de Prony foi indicado como uma metodologia de forte aplicação prática, uma vez que não é necessário conhecer completamente a matriz de estados do sistema elétrico, entretanto os autores destacaram a sensibilidade da metodologia com relação aos seus parâmetros de processamento, sugerindo a execução de outros métodos em conjunto com o Prony para assegurar maior confiança na análise de estabilidade.

Em 1999, Trudnowski *et al* [7] apresentaram uma versão do método de Prony capaz de analisar múltiplos sinais simultaneamente, resultando em somente 1 conjunto de estimação modal. Utilizando esta proposta, e com base no estudo realizado com as medições em campo provenientes do sistema da América do Norte antes dos blecautes

que ocorreram em 10 de agosto de 1996, foi constatado não somente uma simplificação na interpretação dos resultados para a análise da estabilidade, como também um aumento na precisão dos modos estimados em comparação ao processo tradicional.

Em 2003, Lobos *et al* [8] apresentaram resultados do método de Prony aplicado para conversores de frequência em sistemas de potência. Durante sua operação, conversores produzem um grande espectro de harmônicos característicos, não característicos e interharmônicos, todos prejudiciais a confiabilidade do sistema elétrico conectado. O conhecimento dos parâmetros relacionados a resposta em frequência dos conversores torna mais efetiva a ação do controle e da proteção no sistema de potência. A análise de Prony foi introduzida neste cenário, resultando em estimações precisas das frequências que compõe o sinal. Em formas de onda severamente distorcidas, com o propósito de eliminar os modos numéricos estimados, foi sugerido determinar a razão entre as amplitudes pelos respectivos coeficientes de amortecimento, mantendo somente no espectro da estimação os maiores quocientes calculados.

Em 2004, Xiao *et al* [9] apresentaram uma versão do método de Prony capaz de obter estimações modais através de medições em tempo real. A proposta foi considerar sobre o sistema de equações de predição linear do modelo, uma decomposição em valores singulares, com o objetivo de reduzir a ordem do sistema, mantendo os modos eletromecânicos dominantes. A validação da metodologia foi conduzida em um sistema teste do sudeste chinês, apresentando desempenho satisfatório na captura da dinâmica modal em cada instante de análise, atendendo as características do tempo real.

Em 2007, Janik *et al* [10] aplicaram o método de Prony e uma metodologia de regressão linear na análise de sinais provenientes de um transitório elétrico em um sistema com alta participação de geração assíncrona, associadas a turbinas eólicas. Os resultados obtidos com a metodologia de regressão linear não foram tão satisfatórios como observado no Prony, sendo a causa apontada na sensibilidade da regressão com o surgimento de mínimos locais, dificultando a estimação exata dos modos dinâmicos.

Em 2008, Sun *et al* [11] realizaram um estudo em um sistema elétrico no sudeste chinês, utilizando o método de Prony, para analisar oscilações eletromecânicas mensuradas através de unidades de medição fasorial (PMU).

Em 2012, Zhou *et al* [12] revisitaram a análise de Prony com foco na determinação

dos modos eletromecânicos dominantes. Com o objetivo de suprimir ruídos e melhorar a precisão, empregou-se o método de Prony com modelos de elevada ordem. A consequência, entretanto, é o surgimento de modos numéricos, com coeficientes de amortecimento menores, ou até mesmo negativos. A proposta do trabalho é identificar quais modos são dominantes em relação a dinâmica do sistema, utilizando o método de regressão passo a passo (*Stepwise Regression Method*) com base em um teste estatístico de adição, e remoção, de componentes modais. Resultados obtidos com simulação Monte Carlo aplicando medições de campo validaram a robustez e desempenho, sobretudo quando submetido a baixos valores de relação sinal-ruído (*Signal-to-Noise Ratio*).

Em 2013, Zhou *et al* [13] apresentaram uma referência em parâmetros e métodos numéricos com foco em aumentar a precisão da análise de Prony. Os parâmetros estudados foram a ordem do modelo “n” e o fator de decimação “d”, cuja função é aumentar o período de amostragem por meio do produto entre o tempo original e uma constante “d”. As simulações determinaram que aumentar “n” e “d” implicarem na redução do ruído da estimação e melhora da precisão, ainda que o sistema fique mais susceptível ao ruído nas medições. Os métodos mínimos quadrados (*Least Squares*), mínimos quadrados totais (*Total Least Squares*) e autovetor de princípio (*Principle Eigenvector*), foram comparados usando simulações Monte Carlo, resultando em estimações similares, com exceção do TLS para ordem menores, o qual apresentou maior precisão que os demais.

Em 2014, Khan *et al* [14] apresentaram uma comparação entre o método de Prony e a transformada discreta de Fourier recursiva (*Recursive Discrete Fourier Transform*), aplicados na localização de faltas de curta duração. Resultados comprovaram a dependência com o tempo de extinção para o cálculo da localização de falta, obtendo como conclusão que quanto maior o tempo de exposição ao evento, mais precisa será a estimação da distância. O desempenho da análise de Prony apresentou-se superior frente ao RDFT, pois no primeiro, são determinadas as componentes para a frequência atual do sistema, enquanto que no RDFT, o cálculo é sempre executado na frequência nominal da rede.

Em 2017, Zhao e Loparo [15] propuseram uma nova versão para o método de Prony, conhecido como “método de Prony estendido direto e inverso” (*Forward and Backward Extended Prony*), comparando seu desempenho frente a 3 algoritmos: decomposição em valores singulares-mínimos quadrados totais (*Singular Value Decomposition-Total Least*

*Squares*), algoritmo de Trudnowski e Prony com método de regressão passo a passo. O método FBEP determina os pólos do sistema calculando, inicialmente, os dois vetores de ordem mínima “h”, os quais representam o espaço nulo definido pela matriz de dados “Y”, ou seja, que satisfaçam  $Yh = 0$ . Os resultados da comparação em um sistema de potência indicam o desempenho superior do FBEP, obtendo menores variâncias na estimação dos modos, mesmo em condições desfavoráveis para estimação, como modos em crescimento e decaimento, simultaneamente.

### 1.2.2 Máxima Verossimilhança Recursiva

Em 1965, Åstrom e Bohlin [16] utilizaram o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros de um sistema dado observações da entrada e saída do mesmo. A maximização da função de verossimilhança foi abordada através da minimização de uma função de perda, ou custo, empregando Newton-Raphson para a solução numérica. A avaliação do algoritmo foi realizada computacionalmente e no controle de uma máquina produtora de papel, obtendo bons resultados na identificação dos parâmetros.

Em 1973, Söderström [17] apresentou a versão recursiva para o método de máxima verossimilhança na estimação de parâmetros em sistemas dinâmicos. A proposta consiste em calcular uma nova estimativa dos parâmetros de um modelo para cada par de entradas e saídas recebido, equacionando por meio uma função de perdas associadas ao resíduo do processo. Testes realizados em reator nuclear e em processos de difusão de calor foram conduzidos para avaliar o desempenho do RML, apontando resultados satisfatórios quando utilizado dados de simulação, porém ocorrendo propagação de erros. A justificativa para a promoção de erros na estimação foi relacionada com a dificuldade em estabelecer a ordem de sistemas reais, impactando negativamente na estimação, entretanto, os modos dominantes foram corretamente identificados em cada cenário.

Em 1974, Gertler e Bányász [18] apresentaram modificações na versão recursiva do algoritmo de máxima verossimilhança (*Recursive Maximum Likelihood*) para estimação *on-line* de parâmetros. Duas modificações foram propostas para o desenvolvimento do método: a substituição do filtro autoregressivo para o de média móvel na modelagem do ruído nas medições, e a utilização de aproximações no equacionamento recursivo. A avaliação computacional do RML foi realizada em um sistema de segunda ordem [16], obtendo resultados satisfatórios ao ser comparado com o método dos mínimos quadrados

generalizado *on-line* (*On-Line Generalized Least-Square*).

Em 1978, Hagan e Klein [19] utilizaram a máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*) em modelos de Box e Jenkins na previsão de cargas elétricas a curto prazo. Os modelos para funções transferências e autoregressivos integrados com média móvel (*Autoregressive-Integrated-Moving Average*) foram utilizados devido a capacidade de ambos em representar processos não estacionários, multiperíódicos e permitir entradas explícitas da temperatura, variável importante na predição de cargas. O método foi avaliado com medições de energia de uma companhia em Wichita, Kansas.

Em 1979, Norton [20] apresentou uma versão estendida do método de máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*), com objetivo de reduzir o viés das pequenas amostras e o erro quadrático médio nas estimações, sem comprometer a estabilidade numérica e o esforço computacional. A proposta foi incluir no vetor de coeficientes a serem estimados os elementos associados a predição do erro no passo de integração seguinte. Simulações conduzidas por Monte Carlo determinaram a superioridade em desempenho da versão estendida, obtendo as reduções desejadas e tempo de execução menor que a referência utilizada.

Em 1981, Friedlander [21] utilizou a máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*) para ajustar os coeficientes de um filtro de resposta infinita ao impulso (*Infinite Impulse Response*) na medida que o sinal torna-se disponível. Testes em aplicações acústicas, também conhecidas como melhora adaptativa de linha (*Adaptive Line Enhancement*), determinaram que o RML não é um dos melhores algoritmos para análise em ALE, entretanto, motivou a pesquisa por outros métodos de identificação de sistemas.

Em 1981, Friedlander e Ljung [22] desenvolveram uma “estrutura entrelaçada” para implementação computacional da máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*). Este método de implementação promove, para cada ciclo de dados, o filtro e estimação dos parâmetros. Os estudos apresentados determinaram que a implementação também possui propriedades assintóticas idênticas ao RML inicialmente proposto.

Em 1982, Friedlander [23] aplicou a máxima verossimilhança recursiva (RML) na estimação de parâmetros de modelos autoregressivos com média móvel (*Autoregressive-Moving Average*). A metodologia desenvolvida permite trabalhar com grandes quantida-

des de dados em tempo real, estimando os parâmetros através das medições, operando com uma a cada instante de tempo. Testes utilizando dados virtuais e alternativas de implementação computacional também foram abordadas no trabalho.

Outra contribuição do mesmo autor e ano [24], apresentou os resultados do ARMALE, nomenclatura respectiva ao modelo autoregressivo com média móvel (*Autoregressive-Moving Average*) em filtragem ótima para aplicações acústicas (*Adaptive Line Enhancement*). O desempenho satisfatório do ARMALE, mesmo quando submetido a baixo SNR, indicou o potencial da estrutura.

Em 1985, Murali e Rao [25] apresentam uma nova versão do método de máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*) para estimar os parâmetros de um modelo autoregressivo (*Autoregressive*). A nova metodologia ainda busca minimizar a função de perdas, o que maximiza, conseqüentemente, a função logarítmica de verossimilhança, utilizando o método de Gauss-Newton para o cálculo. O método introduziu uma modificação no processo de filtragem no gradiente para acelerar a resposta transitória no RML, entretanto, quando há mais parâmetros a serem estimados o desempenho da proposta deteriora-se, o que sugere seu uso somente no período transitório, deixando o RML operar no regime estacionário.

Em 2011, Dosiek e Pierre [26] propuseram um método mais eficiente de calcular as variâncias na estimação de modos eletromecânicos utilizando somente dados inerentes ao procedimento, técnica conhecida como *bootstrapping*. O algoritmo de identificação de sistemas empregado foi a máxima verossimilhança recursiva, a qual utiliza a família de funções de predição de erro (*Prediction Error Methods*) para calcular os polinômios do modelo ARMA.

Em 2013, Dosiek *et al* [27] utilizaram no método de máxima verossimilhança recursiva (*Recursive Maximum Likelihood*) o modelo ARMAX e propuseram calcular a variância de cada modo estimado. O algoritmo RML desenvolvido apresentou desempenho similar ao método robusto regularizado de mínimos quadrados recursivos (*Regularized Robust Recursive Least Squares*, ou R3LS) quanto a estimação dos modos. O aumento da confiabilidade dos resultados foi o destaque neste trabalho, devido ao conhecimento das variâncias.

### 1.2.3 Decomposição em Modos Dinâmicos

A decomposição em modos dinâmicos é uma metodologia recente na literatura de análise de sinais e, por causa disso, o estudo das referências bibliográficas começa no ano de 2005 pelo trabalho de Mezić.

Em 2005, Mezić [28] apresentou duas questões importantes sobre as propriedades espectrais de sistemas dinâmicos, no contexto dos operadores de Koopman, para discutir as características de projeções com dimensões finitas. O primeiro assunto foi a relação das propriedades espectrais da dinâmica no atrator do sistema dinâmico original, cuja dimensão é elevada, com as propriedades e possibilidades de redução do modelo. O segundo tópico consistiu no estudo sobre a validação do modelo, utilizando como base o teorema estatístico de Takens para assegurar o método da energia média como ferramenta de verificação da precisão em estimativas modais. Outra contribuição foi a proposta de uma metodologia para decompor espectralmente o sinal antes da decomposição ortogonal própria (*Proper Orthogonal Decomposition*), justificada pelo aumento da estabilidade numérica de todo o processo.

Em 2008, Schmid e Sesterhenn [29], e em seguida no ano de 2010, publicado por Schmid [30], a decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*) foi apresentada como uma nova ferramenta para analisar fluxos de fluídos não lineares gerados por simulação numérica, ou obtidos experimentalmente. O método é proposto para trabalhar com sequências de medições amostradas a cada instante no tempo, com o objetivo mapeá-las linearmente, formulando o problema como uma sequência de Krylov. Entre as características citadas, destacou-se a necessidade que a frequência de amostragem seja maior, ou igual, à frequência de Nyquist do sistema. O método teve sua robustez e desempenho avaliados em 3 casos de mecânica dos fluídos, reproduzindo a dinâmica do sistema com maior precisão do que na decomposição ortogonal própria (*Proper Orthogonal Decomposition*).

Em 2009, Rowley *et al* [31] apresentaram uma técnica para estudar o comportamento dinâmico de sistemas não lineares, comprando o desenvolvimento com a decomposição ortogonal própria (*Proper Orthogonal Decomposition*) em uma aplicação aeronáutica. Utilizando uma variação do algoritmo de Arnoldi, similar a decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*), torna-se possível estimar os modos de Koopman

a partir de um conjunto de medições. Estes autovalores capturaram a dinâmica da estrutura teste com mais precisão do que os calculados via linearização do sistema, e ainda decompueram as frequências mais eficientemente em relação ao POD.

Em 2011, Schmid *et al* [32] apresentaram os resultados obtidos em 2 aplicações da decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*). O primeiro estudo realizado foi em um jato de hélio, utilizando a técnica de Schlieren para visualizar a dinâmica em um campo escalar, proporcional ao gradiente de densidade. O segundo estudo analisou a velocimetria por imagem de partículas (*Particle Image Velocimety*), provenientes de um jato axissimétrico forçado e não forçado. O desempenho do DMD em ambos os cenários foi coerente com a literatura específica às áreas de mecânica, sendo capaz de determinar o comportamento dominante do fluxo observado.

Em 2012, Chen *et al* [33] apresentaram variações da decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*), utilizando aplicações de mecânica dos fluidos para avaliação do desempenho de cada implementação. Os primeiros desenvolvimentos consistiram em subtrair do conjunto de medições a média do sinal correspondente, e depois do ponto de equilíbrio, com objetivo de melhorar o atendimento das condições de contorno. Outra variação foi o DMD otimizado (*Optimized Dynamic Mode Decomposition*), o qual calcula com maior exatidão as taxas de crescimento e frequência, além de ser mais preparado para lidar com modos numéricos, do que no método de truncamento nos valores singulares.

Em 2012, Jovanović *et al* [34] apresentou duas variações da decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*), as quais foram aplicadas na mecânica dos fluidos. A primeira, DMD de posto mínimo, propõe resolver um problema de otimização para calcular o posto mínimo e, conseqüentemente, determinar o número de modos necessários para representar o sistema.

A segunda técnica, DMD com promoção de esparsidade (*Sparsity Promoting Dynamic Mode Decomposition*), também publicada pelos mesmos autores no ano de 2014 [35], combina otimização convexa e sensoriamento compressivo para alcançar o equilíbrio entre a qualidade e a quantidade de modos estimados para representar o sistema dinâmico. Para isto, deve ser induzido a esparsidade por meio da regulação do desvio por mínimos quadrados entre as matrizes de medições e a combinação linear dos modos DMD.



Estudos com as duas variações apresentaram a segunda versão implementada com um nível de deterioração menor, na medida que o número de modos do sistema era reduzido.

Em 2013, Tu *et al* [36] estenderam (*Dynamic Mode Decomposition*) para que o método pudesse operar com séries temporais não sequenciais, realizaram a introdução do conceito de consistência linear, e estabeleceram conexões com o algoritmo de realização de sistemas (*Eigensystem Realization Algorithm*) e a modelagem linear inversa (*Linear Inverse Modeling*). A formulação generalizada deixa de requisitar que os dados sejam uniformemente amostrados no tempo, além de aumentar a eficiência computacional. A consistência linear define a relação entre os modos DMD com a análise espectral de Koopman, sendo que um sistema linearmente consistente será capaz de fornecer bons resultados com o DMD. A análise matemática entre os algoritmos citados revelou que, sob condições pré-estabelecidas, o método LIM é equivalente ao DMD. Verificaram também a conexão entre o ERA e DMD, motivando a aplicação do ERA em situações desfavoráveis ao DMD.

Em 2014, Berger *et al* [37] apresentaram uma nova metodologia de aprendizagem computacional para detecção de influências físicas em robôs. A técnica utiliza a deformação dinâmica no tempo (*Dynamic Time Warp*), a decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*) e sua versão considerando promoção da esparsidade (*Sparsity Promoting Dynamic Mode Decomposition*), para que seja possível detectar e quantificar as perturbações externas.

Em 2015, Barocio *et al* [38] apresentaram a decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*) para monitorar as dinâmicas espacial, e temporal, de fenômenos não lineares transitórios em sistemas de potência. As simulações realizadas em sistemas teste e medições provenientes de PMUs resultaram em análises modais satisfatórias, mesmo quando submetido à grandes quantidades de informação.

Em 2016, Annoni *et al* [39] apresentaram uma extensão da decomposição em modos dinâmicos com promoção de esparsidade (*Sparsity Promoting Dynamic Mode Decomposition*), para que as entradas exógenas pudessem ser aplicadas. A diferença, em relação a metodologia do SPDMD, consiste na necessidade de induzir esparsidade por blocos nas amplitudes, contemplando tanto as condições iniciais, como para as entradas. As vanta-

gens da proposta são o aumento da robustez e maior facilidade de identificação modal, devido a energia adicional no sistema. Os testes foram realizados em um fluxo de canal linearizado, incompressível e tridimensional, modelado pelas equações de Navier-Stokes.

Em 2016, Dawson *et al* [40] apresentaram 3 modificações no DMD para remover o erro de estimação, realizando comparações com o DMD otimizado (ODMD) [CITAR O CHEN 2012] e DMD com promoção de esparsidade (SPDMD), em aplicações de mecânica dos fluidos. A primeira versão é o DMD com correção de ruído (*Noise-corrected DMD*), que apesar de ser computacionalmente cara e requisitar o conhecimento da covariância do ruído, consegue eliminar quase toda a perturbação da estimação. Os demais algoritmos, DMD direto e inverso no tempo (*Forward-backward DMD*) e DMD com mínimos quadrados totais (*Total Least-Squares DMD*), não necessitam do conhecimento prévio da covariância do ruído. O fbDMD apresentou gasto computacional menor que o tlsDMD, sendo que a vantagem do segundo sobre o primeiro foi uma pequena melhora na qualidade dos resultados comparados por simulações. A conclusão sobre a escolha da melhor técnica dependerá da precisão desejada, assim como da quantidade disponibilizada de dados e o nível de ruído sobre estes.

Em 2016, Dicle *et al* [41] apresentaram a decomposição em modos dinâmicos para fatores de baixa classificação (*Factorized Low Rank DMD*), a qual demonstrou maior robustez ao ruído frente às decomposições com promoção de esparsidade (SPDMD) e a de mínimos quadrados totais (tlsDMD). As simulações foram realizadas utilizando gravações de fluxo de pessoas, extraindo informações modais para predição de congestionamento, tanto em regime permanente, como no transitório.

Em 2016, Mohapatra e Overbye [42] aplicaram a decomposição em modos dinâmicos (DMD) em conjuntos de medições de frequência e magnitude da tensão provenientes de PMUs. Os estudos conduzidos com grandes quantidades de informação foram realizados em alta velocidade, caracterizando como vantagem do método. Os autores também constaram que utilizar janelas de tempo menores, porém aumentando o número de canais de medição, gera um gasto computacional menor do que o contrário da afirmação.

Em 2016, Raak *et al* [43] propuseram avaliar 3 tipos de algoritmos derivados da decomposição modal de Koopman (*Koopman Mode Decomposition*) quando a dimensão espacial, ou número de medições, torna-se baixa ou singular. Os métodos testados foram:

algoritmo de Arnoldi, análise do vetor de Prony e o DMD. As simulações foram realizadas com um sistema elétrico de 7 barras e depois com dados de vento provenientes do Japão. Os resultados apontaram estimativas precisas ao método de Prony quando o sistema é aproximadamente linear, entretanto, ao ser submetido à grandes quantidades de dados e frequência de amostragem, seu desempenho foi comprometido. O DMD, segundo os autores, não foi recomendado para aplicações com elevada razão entre as dimensões temporal e espacial.

Em 2016, Wang e Qing [44] apresentaram a decomposição em modos dinâmicos com norma nuclear regularizada (*Nuclear Norm Regularised DMD*), com o objetivo de extrair a menor quantidade possível de modos dominantes. A metodologia introduz um termo de norma nuclear no algoritmo de otimização a mínimos quadrados, utilizando o método de Split Bregman para resolução do problema. O NNR-DMD foi avaliado em um sistema de potência, conseguindo identificar a frequência temporal através dos dados espaço-temporal, assim como a identificação da coerência entre geradores.

Em 2017, Héas e Herzet [45] apresentaram uma solução ótima de forma fechada, com base na decomposição em valores singulares, para determinar os modos dominantes no DMD. Simulações foram realizadas em sistemas lineares e não lineares, com o objetivo de apresentar o desempenho superior da proposta em comparação ao DMD com séries temporais não sequenciais e DMD com promoção de esparsidade.

Em 2017, Barocio *et al* [46] utilizaram a decomposição em modo dinâmicos (DMD) para monitorar a distorção harmônica em microrredes elétricas. A informação dinâmica extraída de um sistema teste permitiu o cálculo das contribuições de energia para cada modo estimado, o que resultou na localização das fontes de harmônico, e sua respectiva propagação, na microrrede estudada.

Em 2017, Takeishi *et al* [47] apresentaram a decomposição em modos dinâmicos esparsa não negativa (*Sparse Nonnegative DMD*), a qual pode decompor uma transmissão de vídeo por partes de acordo com os modos dinâmicos extraídos. O SN-DMD consiste em um problema otimização com limites não negativos e regularização por norma- $\ell_1$ , solucionado pelo método de Newton aproximado com aproximação do Hessiano L-BFGS. A comparação de desempenho entre o DMD, tIsDMD e DMD para problemas multiconvexos bloqueados, resultou na superioridade da proposta sobre os demais, apresentando a

possibilidade de incluir mais limites e regularizações complexas ao problema inicial.

### 1.2.4 Algoritmo de Realização de Sistemas

Em 1985, Juang e Pappa [48] desenvolveram o algoritmo de realização de sistemas (*Eigensystem Realization Algorithm*), e dois indicadores de confiança, os quais permitiram identificar os parâmetros modais de um sistema dinâmico aeroespacial utilizando somente séries temporais. Idealmente, os dados inseridos ao ERA devem representar os parâmetros de Markov, ou seja, a resposta do sistema quando submetido à função impulso. A construção das matrizes Hankel, e a posterior decomposição em valores singulares para determinar a ordem mínima do sistema, representam a primeira parte do método. A segunda, e última, rotina do ERA consiste no cálculo da representação no espaço de estados. Os indicadores coerência de amplitude modal (*Modal Amplitude Coherence*) e colinearidade de fase modal (*Modal Phase Collinearity*) fornecem uma estimativa da precisão do método, analisando o grau de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, do sistema realizado.

Em 1986, Juang e Pappa [49] analisaram os parâmetros modais identificados pelo ERA quando há ruídos nas séries temporais. O problema indicado no trabalho foi a dificuldade em estabelecer a ordem mínima para truncar a matriz de Hankel, devido ao aumento da magnitude de todos os valores singulares, inclusive aos correspondentes ao ruído. A solução encontrada foi a estipulação de um valor ótimo para o truncamento dos valores singulares, considerando a estrutura de covariância do ruído. Outra contribuição do artigo foi o estudo do indicador coerência de amplitude modal para situações distintas de magnitude de ruído, utilizando a metodologia de Monte Carlo para a realização das simulações.

Em 1988, Juang e Suzuki [50] desenvolveram o algoritmo de realização de sistemas no domínio da frequência (*Eigensystem Realization Algorithm in Frequency Domain*), demonstrando a proximidade dos conceitos tempo e frequência na identificação de parâmetros modais em sistemas lineares. A formulação do ERA-FD contempla as técnicas de sobreposição por média (*overlap averaging*) e janelamento (*windowing*), as quais permitem suavizar os valores das funções de transferência e concentrar a análise no espectro desejado, respectivamente. Os indicadores de confiança coerência da amplitude modal de saída e coerência do espectro modal foram apresentados, sendo que o primeiro é similar

à coerência de amplitude modal introduzido para análise de séries temporais por Juang e Pappa [48].

Em 1989, Longman e Juang [51] apresentaram uma versão recursiva do algoritmo de realização de sistemas utilizando como fundamento a ortonormalização de Gram-Schmidt. A proposta consiste em aumentar recursivamente o número de colunas da matriz de Hankel, até que seu posto alcance a ordem mínima do sistema. Os resultados obtidos quando comparados ao ERA revelaram que a nova versão possui menor gasto computacional e calcula a realização com precisão similar.

Em 1993, Pappa *et al* [52] apresentaram o indicador de consistência modal (*Consistent Mode Indicator*) como ferramenta definitiva na avaliação de modos identificados via algoritmo de realização de sistemas. O CMI é resultado do produto entre outros dois indicadores, os quais são conhecidos como coerência de amplitude modal estendida (*Extended Modal Amplitude Coherence*) e colinearidade fase modal (MPC). O EMAC quantifica a consistência temporal da realização estendida no tempo, o que requer uma modificação na formulação da matriz de Hankel. O MPC avalia a consistência espacial dos modos identificados, analisando as partes real e imaginária de cada um.

Em 1999, Hunter [53] utilizou a resposta ao impulso de um modelo de elementos finitos, aplicado em estágios de litografia, para ser a referência na comparação de desempenho entre o ERA e a análise canônica variada (*Canonical Variate Analysis*). O critério de comparação foi o cálculo do erro entre as respostas da função impulso no modelo com a reconstrução do sinal correspondente a cada um dos métodos de identificação. Conforme os resultados, o ERA foi capaz de operar dados no formato de função de transferência de forma eficaz, entretanto obteve erro superior ao CVA, sobretudo quando aplicado a grandes séries de dados.

Em 1999, Sanchez-Gasca e Chow [54] analisaram as oscilações eletromecânicas de baixa frequência utilizando os seguintes métodos de identificação de sistemas: algoritmo de Steiglitz-McBride, algoritmo de realização de sistemas (ERA), e o método de Prony. O estudo foi realizado em sistemas dinâmicos lineares e, em seguida, para redes elétricas, aplicando uma função impulso em uma das entradas para obter na saída o sinal a ser introduzido aos métodos. Nas simulações em sistemas mais complexos os métodos de Prony e ERA obtiveram desempenho superior ao Steiglitz-McBride.

Em 2003, Alves e Ribeiro [55] utilizaram o ERA para identificar um sistema mecânico linear contendo 2 graus de liberdade, comparando os resultados posteriormente. A similaridade observada entre as respostas no tempo e na frequência, dos modelos físico e virtual, validaram a aplicabilidade do ERA.

Em 2003, Bazán [56] analisou quais condições podem contribuir para que os pólos do sistema sejam menos sensíveis ao ruído, contribuindo para uma reformulação no EA. A modificação realizada considera matrizes preditoras obtidas da projeção ortogonal, permitindo que a decomposição em valores singulares seja calculada com maior eficiência computacional. Os resultados do estudo em uma estrutura aeroespacial indicaram que os pólos discretos próximos ao círculo de raio unitário apresentam baixa sensibilidade ao ruído, contanto que a matriz de Hankel seja grande o suficiente e exista uma distância espacial suficiente entre pólos. Outro produto apresentado foi o equacionamento do erro da estimação, considerando a dimensão da matriz de Hankel para determinar a distância entre pólos do sistema.

Em 2006, Kuan e Chen [57] apresentaram uma metodologia para calcular os parâmetros de uma descarga atmosférica utilizando o ERA e o método de Newton-Raphson. Em primeira instância, aplica-se o ERA com objetivo de calcular a representação no espaço de estados correspondente aos dados da descarga. Em seguida, eliminam-se os modos de baixa frequência, o que causa uma pequena distorção no sinal. Utilizando as matrizes de estado modificadas, emprega-se o método de Newton para determinação dos parâmetros. Resultados validaram os métodos, havendo destaque na flexibilidade em permitir o ajuste, decomposição e combinação de curvas de impulso atmosférico.

Em 2009, Lian *et al* [58] desenvolveram uma metodologia, aplica em sistemas hidráulicos, capaz de reconstruir o sinal contaminado por ruídos e identificar os parâmetros modais, utilizando em conjunto: técnica de excitação natural (NExT), algoritmo de realização de sistemas (ERA) e a entropia singular (SE). A SE têm no método as funções de filtrar o ruído obtido nas medições e determinar a ordem mínima para que o ERA obtenha as matrizes de estado do sistema identificado. A dificuldade técnica em aplicar uma função impulso no sistema hidráulico motivou o uso da NExT como ferramenta capaz de gerar a resposta desejada através das medições em pontos distintos submetidos apenas ao ruído branco. Testes realizados na barragem de arco de Ertn, sob condição de descarga, e na casa de máquinas da hidrelétrica de Lijixia, permitiram avaliar a rigidez de ambas

estruturas.

Em 2011, Lam e Mevel [59] propuseram quantificar as incertezas associadas a 2 métodos de estimação de parâmetros modais, o ERA e a identificação estocástica de subespaço (*Stochastic Subspace Identification*). O cálculo apresentado para cada método têm como fundamento a análise da covariância, utilizando a matriz subespacial no método SSI, e as matrizes de observabilidade e controlabilidade no ERA. O estudo das técnicas foi conduzido com dados da vibração ambiente de uma ponte austríaca, indicando proximidade nas margens calculadas para as frequências modais, entretanto, para o amortecimento, os intervalos de confiança foram maiores. A justificativa derivada da teoria estatística, associando os limites inferiores da covariância com a matriz de informação de Fisher.

Em 2011, Li *et al* [60] estudaram a influência das dimensões da matriz de Hankel no ERA para casos contendo ruídos, propondo uma metodologia para avaliação da robustez dos modos estimados. O método de aproximação via posto inferior utilizado para decompor a matriz de Hankel em duas outras matrizes, uma contendo as características do sinal e outra constituída somente por ruído. A decomposição estudada apresentou melhor desempenho quanto mais próximo foi o número de linhas e colunas da Hankel. Outra contribuição do artigo foi o procedimento desenvolvido para verificar a sensibilidade dos modos verdadeiros frente ao ruído, realizando uma comparação entre as estimações obtidas do sinal original e do mesmo sinal, porém o segundo acrescido de ruído aleatório.

Em 2012, Singler [61] apresentou o ERA para calcular a mínima ordem de sistemas de equações diferenciais lineares no tempo contínuo. A proposta consiste em aproximar os valores e vetores singulares do operador de Hankel utilizando uma função quadratura para o cálculo da integral. Os resultados indicaram boa precisão no método, entretanto, na medida que a ordem mínima do modelo aumenta, o método da decomposição ortogonal própria (*Proper Orthogonal Decomposition*) supera o desempenho do ERA.

Em 2013, Vishwajeet *et al* [62] apresentaram um método gráfico, utilizando teoria de probabilidade, para auxiliar na determinação da ordem mínima no ERA. A análise por meio da função de densidade conjunta obteve resultados satisfatórios para pequenos valores de SNR, entretanto a metodologia possui como desvantagem a aplicação restrita a sistemas com apenas 1 saída.

Em 2014, Zhang *et al* [63] apresentaram 3 ferramentas complementares ao ERA,

com o propósito de auxiliar a distinção entre modos numéricos e do sistema. O primeiro estudo foi realizado no índice de similaridade modal (*Modal Similarity Indice*), o qual propõe medir a distância entre 2 pólos estimados, sendo que os modos com MSI superior a 1 foram estabelecidos como numéricos. O nível de energia modal (*Modal Energy Level*) foi desenvolvido para calcular a contribuição de energia em cada modo sistema, indicando aqueles responsáveis majoritariamente pela vibração. A última ferramenta foi um algoritmo de agrupamento de modos automático, permitindo facilitar a implementação do diagrama de estabilização, este utilizado também na identificação modal. Os testes em um modelo reduzido da ponte de Chaotianmen, em Changqing (China), validaram o trabalho.

Em 2014, Seppänen *et al* [64] apresentaram as vantagens na utilização da técnica de excitação natural (*Natural Excitation Technique*) junto ao ERA. O NExT permite obter a resposta ao impulso por meio das funções de correlação cruzada entre medições situadas em pontos distintos do sistema, contanto que estas tenham sido resultado somente de ruído branco. O NExT requer a seleção de uma variável como referência, preferencialmente se esta possuir alta observabilidade ao modo de interesse. Os estudos conduzidos em sistemas elétricos teste e real validaram o NExT-ERA, apresentando robustez frente a pequenos valores de SNR, entretanto solicita uma janela maior de análise para que a estimação seja mais precisa.

Em 2016, Jiang *et al* [65] apresentaram uma metodologia robusta para identificação dos modos eletromecânicos dominantes de grandes sistemas de potência interligados. A proposta utiliza as medições obtidas de sincrofasores para gerar funções de correlação cruzada e determinar quais das funções pode ser a referência ótima, ou seja, representa um avanço a técnica de excitação natural. Em seguida, com o espectro de correlação cruzada (*Cross Correlation Specter*), as oscilações dominantes são destacadas e levadas ao ERA. A ordem do sistema reduzido, neste trabalho, é determinada por meio da razão entre os elementos diagonais da matriz de valores singulares. Após o cálculo dos autovalores contínuos, são determinados os dominantes via CCS e por conhecimento prévio da dinâmica do sistema.

Em 2016, Jia *et al* [66] realizaram uma comparação entre o método de Prony e o ERA, aplicados na estabilidade a pequenos sinais em sistemas de potência. Em ambos os métodos foram considerados como parâmetros a ordem do sistema e o fator de decimação,



estes também estudados em 2013 por Zhou *et al* [13]. Os resultados calculados conforme o método de Monte Carlo verificaram o melhor desempenho do ERA frente ao Prony, o qual ainda apresentou maior robustez na estimação, pois foi constatado menor sensibilidade a mudança dos parâmetros do que observado na análise de Prony.

### 1.2.5 Ajuste Vetorial

Em 1998, Gustavsen e Semlyen [67] apresentaram um método robusto e simplificado com o objetivo de reduzir o gasto computacional em modelos dependentes da frequência em linhas de transmissão, identificado como *vector fitting*. A proposta da metodologia consiste em ajustar um dado vetor para que todos os seus elementos apresentem o mesmo conjunto de pólos, considerando como entrada do processo uma estimativa inicial para os pólos e assumindo o vetor em análise como função da frequência. Estudos em sistemas de transmissão verificaram a robustez e o ganho computacional com a ferramenta, permitindo inclusive o uso de estimativas iniciais de ordens elevadas, sem comprometer a precisão dos resultados.

Em 1999, Gustavsen e Semlyen [68] revisitaram a estrutura da técnica *vector fitting* com o propósito de permitir a análise de sinais na frequência que apresentassem elevadas quantidades de picos, característica intrínseca da ressonância. A modificação proposta consiste em possibilitar que estimativas iniciais para os pólos sejam feitas também no domínio dos números complexos. Resultados obtidos em funções artificiais, e medições de campo em transformadores e equivalentes de rede, verificaram características positivas quanto a precisão e robustez da implementação.

Em 2006, Gustavsen [69] apresentou uma nova modificação na técnica *vector fitting* para melhorar a capacidade de realocação de pólos, melhorando a eficiência e a robustez, pois reduz significativamente a importância de uma estimativa inicial precisa. A alteração consiste em substituir os requisitos assintóticos para a função de escalonamento, para condições menos rigorosas, onde somente será necessário que a soma da parte real de cada elemento da função de escalonamento, para um dado conjunto de amostras na frequência, seja diferente de zero. Os resultados considerando esta modificação permitiram que o *vector fitting* fosse capaz de analisar com maior precisão medições contendo ruído, sem ocorrer aumento no gasto computacional.

### 1.3 Abordagem deste Trabalho

Para os métodos apresentados na revisão bibliográfica, foram utilizados como referência para o método de Prony os trabalhos [4, 5, 6], no qual demonstrava facilidade de implementação. A máxima verossimilhança recursiva escolhida foi a mesma descrita por [17], entretanto modelada para sistemas ARMAX, conforme o trabalho [27].

Adotou-se como referências fundamentais para a decomposição em modos dinâmicos os trabalhos [29, 38, 42, 46], enquanto que para o algoritmo de realização de sistemas, as referências que orientaram sua implementação são [48, 52, 66].

Todas as metodologias citadas foram implementadas no Matlab [70], o que contribuiu para facilitar o desenvolvimento da pesquisa, pois o ambiente da Mathworks já disponibiliza por padrão as decomposições para os usuários (tais como, QR e SVD).

### 1.4 Estrutura da Dissertação

A estrutura da dissertação está dividida em 5 capítulos e 4 apêndices. Os capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte forma:

O capítulo 1 apresenta a introdução e objetivo da dissertação, contemplando ainda a revisão bibliográfica sobre os métodos estudados.

O capítulo 2 contém a fundamentação teórica de cada uma das metodologias relacionadas à análise da estabilidade angular.

O capítulo 3 apresenta os resultados em regime permanente, no ponto de operação definido para o sistema teste *Brazilian Birds*.

O capítulo 4 apresenta os resultados na estabilidade transitória, para um sistema radial e para o *Brazilian Birds*, utilizando o ERA na estimação dos parâmetros modais.

O capítulo 5 conclui o trabalho, apresentando as considerações finais e os desenvolvimentos futuros do trabalho.

## 2 Técnicas de Cálculo de Amortecimento

### 2.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo serão apresentadas as fundamentações teóricas das técnicas de estimação de amortecimento escolhidas para a pesquisa deste trabalho, as quais são: Algoritmo QR; Análise de Prony; Algoritmo de realização de sistemas (ERA); Decomposição de modos dinâmicos (DMD).

### 2.2 Algoritmo QR

O método QR têm como objetivo determinar todo o conjunto de autovalores e autovetores de uma dada matriz. A técnica foi desenvolvida, em 1963, por Francis, como uma alternativa ao algoritmo LR, onde foi demonstrado que aplicar transformações unitárias ao invés do pivoteamento de elementos na composição da matriz triangular  $R$  obtinha resultados com melhores características de precisão e estabilidade numérica [71, 72].

A aplicação do algoritmo QR é realizada por meio da fatoração da matriz  $A_{m \times n}$ , assim como apresentada na equação (2.1).

$$A_{m \times n} = Q_{m \times m} R_{m \times n} \quad (2.1)$$

Na equação (2.1),  $Q$  é uma matriz ortogonal e  $R$  uma matriz triangular superior. O método é iterativo, executando a decomposição QR sucessivamente até que o maior valor absoluto abaixo da diagonal principal de  $A$  seja inferior à uma tolerância especificada. Propõe, a princípio, determinar a matriz  $Q$  utilizando um conjunto de matrizes ortogonais  $B$ , sendo as últimas responsáveis por anular cada termo presente abaixo da diagonal principal de  $A$ , conforme equação (2.2).

$$\begin{cases} (B_s B_{s-1} \cdots B_2 B_1) A = R \\ s = \frac{(m-1)m}{2} \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que se isolarmos  $A$  na equação (2.2) ocorrerá a validação da equação (2.1).

$$A = (B_1^T B_2^T \cdots B_{s-1}^T B_s^T) R = QR$$

A escolha do conjunto de matrizes  $B$  pode ser feita entre rotacionais ou refletores [73], mas na abordagem deste trabalho serão utilizados as matrizes rotacionais, em especial as de Givens [74]. O operador da rotação vetorial é definido pela equação (2.3), onde os elementos não representados na matriz  $B$  são iguais à zero.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & b_{pp} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & b_{qq} \\ & & & b_{qp} & & & & \\ & & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (2.3)$$

Os elementos  $b_{pp}$ ,  $b_{pq}$ ,  $b_{qp}$  e  $b_{qq}$  são funções do ângulo desenvolvido na rotação  $\theta$  e do sentido assumido para o deslocamento angular. Na figura 1, têm-se uma configuração possível para rotacionar os vetores  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

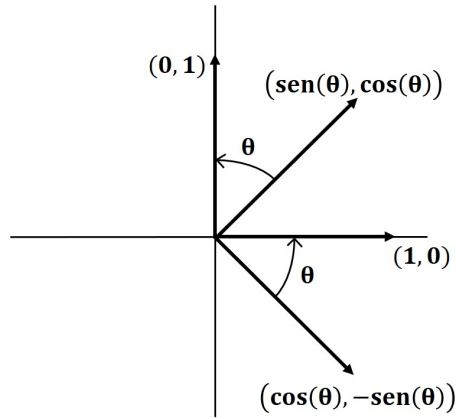


Figura 1 – Rotação desenvolvida no sistema  $\mathbb{R}^2$ .

Utilizando a equação (2.3) como referência, e o gráfico apresentado na figura 1, as variáveis  $b_{pp}$ ,  $b_{pq}$ ,  $b_{qp}$  e  $b_{qq}$  podem ser calculadas via equação (2.4).

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Em seguida, o produto matricial  $[B][A]$  é calculado, resultando em uma matriz  $[A']$ , de forma que seja possível escolher o ângulo  $\theta$  necessário para anular o elemento correspondente à  $b_{qp}$ , considerando  $p \neq q$  [73]. Para simplificar a notação, a matriz  $[A]$  foi considerada quadrada de ordem  $n$ , já que o método de rotação por Givens pode ser aplicado também a matrizes retangulares.

$$[B][A] = [A']$$

$$[B] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} \end{bmatrix}$$

Substituindo a matriz  $[B]$  pela equação (2.3), cujos elementos rotacionais foram identificados na equação (2.4), obtém-se uma expressão genérica para o termo  $A'_{qp}$ , segundo a equação (2.5).

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{pp} & A'_{pq} \\ A'_{qp} & A'_{qq} \end{bmatrix}$$

$$A'_{qp} = A_{pp}(-\text{sen}(\theta)) + A_{qp}(\cos(\theta)) \quad (2.5)$$

O objetivo deste cálculo é determinar o ângulo  $\theta$  que anulará  $A'_{qp}$  na equação (2.5), obtendo iterativamente uma matriz triangular superior. Portanto, o próximo passo será igualar a equação (2.5) à zero, tal como apresentado pela equação (2.6), onde o termo senoidal foi posto em evidência.

$$\text{sen}(\theta) = \frac{A_{qp}}{A_{pp}} \cos(\theta) \quad (2.6)$$

Sabendo que o seno e cosseno são funções trigonométricas, estas podem ser relacionadas conforme a equação (2.7).

$$\cos^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta) \quad (2.7)$$

Logo, ao realizar a substituição da equação (2.7) em (2.6), obtém-se a expressão para o cosseno do ângulo que anulará o termo  $A'_{qp}$ , apresentada em (2.8).

$$\cos(\theta) = \frac{A_{pp}}{\sqrt{A_{pp}^2 + A_{qp}^2}} \quad (2.8)$$

Realizando procedimento análogo para o cálculo do seno do mesmo ângulo, obtém-se a equação (2.9).

$$\sen(\theta) = \frac{A_{qp}}{\sqrt{A_{pp}^2 + A_{qp}^2}} \quad (2.9)$$

O fluxograma na figura 2 sintetiza a rotina de execução do algoritmo QR. As primeiras etapas do fluxograma descrevem a inicialização do algoritmo, onde apresenta-se a matriz  $A$ , de ordem  $n$ , a qual será decomposta, e também os parâmetros  $q$  e  $p$ , responsáveis por verificar cada elemento abaixo da diagonal principal da matriz  $A$ . O parâmetro  $s$ , por sua vez, é responsável por registrar o número de matrizes  $B$  calculadas, o qual para completar uma iteração deverá ser igual ao número de elementos abaixo da diagonal principal da matriz  $A$ .

O primeiro bloco de cálculo, “Calcular  $B_{base}$ ”, consiste em manter disponível a matriz identidade para inicializar cálculos subsequentes, sem que haja a necessidade de recalculá-la a cada iteração.

A etapa “Calcular  $B_s$ ” realiza a inicialização da matriz  $B$ , podendo se manter igual à identidade recebida caso o elemento  $A_{qp}$  já seja nulo. Entretanto, se este elemento  $qp$  existir na matriz  $A$ , a matriz  $B_s$  deve passar por uma revisão em 4 elementos, conforme indicado no bloco “Atualizar  $B_s$ ”, com o objetivo de eliminá-los na matriz  $A$ .

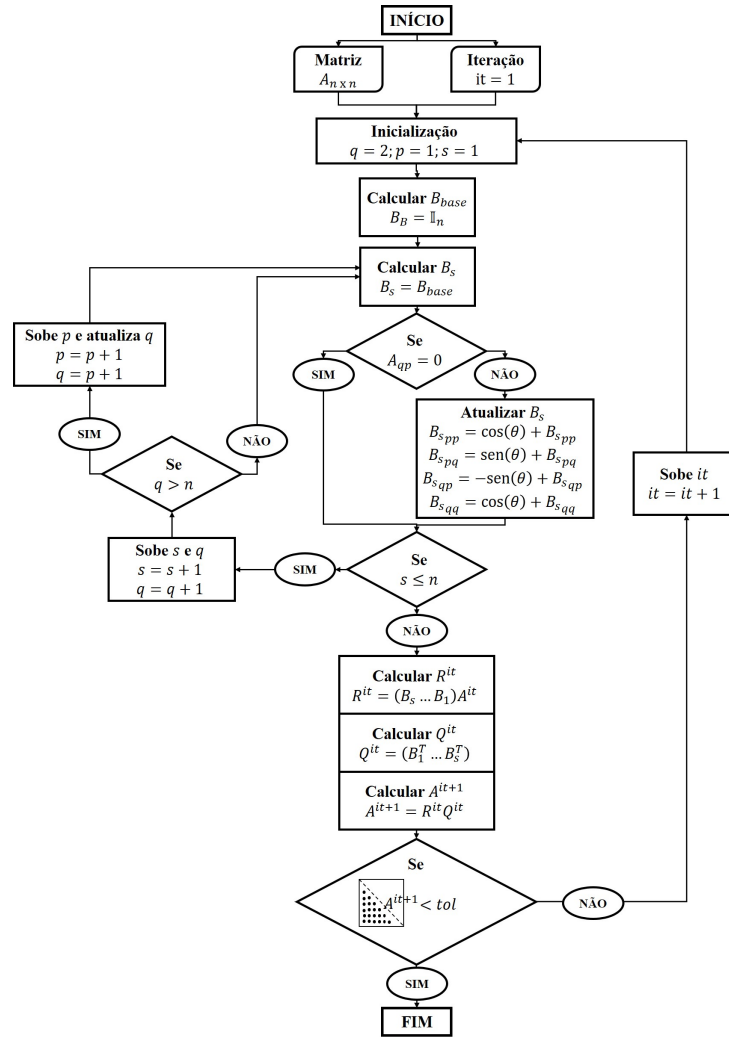


Figura 2 – Fluxograma para execução do algoritmo QR.

Antes de realizar o cálculo das matrizes da decomposição QR, o algoritmo verificará se o número de matrizes  $B_s$  calculadas é menor, ou igual, ao número de linhas de  $A$ , representado pelo bloco “Se  $s \leq n$ ”. Caso positivo, o método atualizará seus parâmetros de execução e retornará para o bloco “Calcular  $B_s$ ”.

Caso negativo, com todas as matrizes  $B_1 \dots B_s$ , será possível determinar na primeira iteração as matrizes  $R$  e  $Q$  características da decomposição QR e, em seguida, a matriz  $A$ , a qual procura-se triangularizar.

O fim do processo é alcançado quando os elementos abaixo da diagonal principal de  $A$  são menores do que uma tolerância pré-especificada. Caso contrário, em uma nova iteração, serão calculadas novas matrizes  $B_s$  de acordo com os processos descritos no fluxograma. A metodologia desenvolvida pode ser aprimorada se for implementado no algoritmo um passo anterior à decomposição QR da matriz  $A$ . A transformação de  $A$

para uma matriz de Hessenberg utilizando, por exemplo, os refletores de Householder, e a posterior decomposição desta nova matriz via rotação de Givens, reduz o tempo computacional [74, 73].

## 2.3 Método de Prony

O método de Prony permite estimar a frequência, amortecimento, módulo e ângulo de fase relativo das componentes modais presentes em um dado sinal [4]. Então, considere um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, o qual recebe como entrada uma função impulso em  $t = t_0$ , tal que gera uma condição inicial para a variável de estado  $x(t_0) = x_0$ . Assumindo que não existam outras entradas subsequentes [4, 13], após o impulso exercido pela função de entrada, a dinâmica do sistema oscilará até o novo estado conforme a equação diferencial (2.10).

$$\dot{x}_{n \times 1} = A_{n \times n} x_{n \times 1} \quad (2.10)$$

Na equação (2.10),  $x$  é o vetor dos  $n$  estados do sistema dinâmico. A solução de (2.10) é a resposta no tempo para o sistema dinâmico, a qual pode ser vista na equação (2.11).

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n z_i \quad (2.11)$$

Na equação (2.11),  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor pertencente ao domínio dos números complexos. Na prática, as equações que modelam o comportamento do sistema não são conhecidas, sendo necessário amostrar a cada  $\Delta t$  (unidades de tempo) um ponto de  $y(t)$ , resultando na equação (2.12).

$$y[k] = y(k\Delta t) = \sum_{i=1}^n z_i^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.12)$$

A proposta do método de Prony consiste em reconstruir o sinal amostrado em (2.12) por um modelo de predição linear como o apresentado em (2.13).

$$\hat{y}[n+k] = \hat{a}_1 y[n-1+k] + \hat{a}_2 y[n-2+k] + \dots + \hat{a}_n y[k] \quad (2.13)$$



Expandindo esse modelo para todas as  $N$  amostras realizadas no sinal, têm-se a formulação matricial (2.14) do problema de predição linear.

$$\begin{bmatrix} y[n] & y[n-1] & \cdots & y[1] \\ y[n+1] & y[n] & \cdots & y[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y[N-1] & y[N-2] & \cdots & y[N-n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[n+1] \\ y[n+2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A solução da equação (2.14) resulta nos coeficientes do polinômio característico descrito na equação (2.15), o qual contém a informação sobre os autovalores discretos do sistema.

$$\hat{z}^n - [\hat{a}_1 \hat{z}^{n-1} + \hat{a}_2 \hat{z}^{n-2} + \cdots + \hat{a}_n \hat{z}^0] = 0 \quad (2.15)$$

Conhecido as raízes discretas que satisfazem a equação (2.15) será necessário convertê-las para o domínio do tempo contínuo, aplicando (2.16), para que seja possível estimar os parâmetros do sinal reconstruído.

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\Delta t} \ln \hat{z}_i \quad (2.16)$$

Caso seja necessário reconstruir o sinal, as amplitudes complexas  $c_i$  devem ser calculadas, assim como sinalizado na equação (2.11). A resolução do sistema de equações (2.17) permitirá o conhecimento sobre estas amplitudes, porém deve ser tomado cuidado ao manusear a álgebra, pois nem sempre a matriz das raízes do polinômio será quadrada [8].

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_n^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_n^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}[1] \\ \hat{y}[2] \\ \vdots \\ \hat{y}[N] \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

A resolução das equações (2.14), (2.15) e (2.17), determinará uma estimativa para os pólos do sistema via método de Prony. Caso o sinal direcionado para a análise  $y[k]$  seja disponibilizado, é possível determinar a qualidade da estimação utilizando a relação

sinal-ruído [4, 75], utilizando o sinal reconstruído  $\hat{y}[k]$  e a equação (2.18).

$$SNR = 20 \log \left( \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \right) \quad (2.18)$$

A formulação implementada neste trabalho para o método de Prony, entretanto, apresenta algumas dificuldades: a análise de somente um sinal de cada vez; a necessidade de estimar previamente a ordem do sistema. A primeira situação pode causar imprecisão nos resultados uma vez que, em sistemas elétricos, há múltiplas entradas e saídas a serem consideradas, ainda mais quando da presença de sistemas de controle. Enquanto que na segunda situação, estimar a ordem do sistema é uma tarefa difícil, pois necessita conhecimento sobre a dinâmica do sistema e das características do ruído relacionados aos dispositivos de medição.

Contribuições na área de tratamento de erros por análise de valores singulares [8, 75], e na determinação dos modos dominantes por regressão gradual [12], foram desenvolvidas com o objetivo de solucionar os problemas citados na metodologia tradicional.

Entretanto, tais contribuições não foram incorporadas ao desenvolvimento deste trabalho, uma vez que outras técnicas mais avançadas serão discutidas e apresentadas. Sendo assim, tais melhorias na metodologia de Prony ficará para desenvolvimentos futuros desta pesquisa.

Na figura 3 têm-se o fluxograma para implementação do método de Prony. A inicialização da implementação é realizada através da obtenção do sinal  $y(k)$  amostrado em  $N$  amostras e também com uma estimativa para a ordem do sistema  $n$ . Utilizando estas informações, calcula-se o sistema linear representado na equação (eq:My[n+k]). Os coeficientes resultantes  $\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n$  constituem em um polinômio discreto, onde na próxima etapa da metodologia será calcular as raízes do mesmo, as quais são equivalentes aos autovalores discretos do sistema.

Em seguida, no bloco “Calcular os autovalores contínuos”, realiza-se a conversão entre o tempo discreto para o contínuo, onde obtém-se os autovalores que podem ser utilizados para estimar amortecimento, frequência natural e constante de tempo do sistema dinâmico. Com o objetivo de complementar o procedimento, incluindo a reconstrução do sinal, o fluxograma segue para a resolução do sistema linear da equação (eq:zc=y), resultando nos coeficientes  $\hat{c}_1 \dots \hat{c}_n$ .

Utilizando os coeficientes complexos calculados anteriormente, os últimos blocos do fluxograma são processados resultando na amplitude e defasagem do sinal reconstruído via método de Prony.

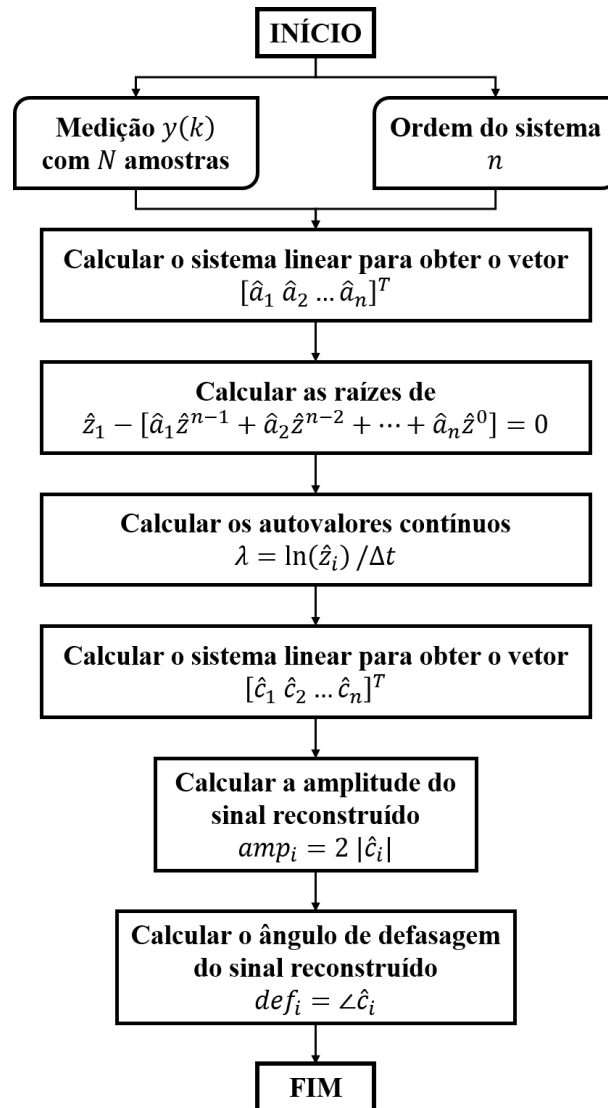


Figura 3 – Fluxograma para execução do método de Prony.

## 2.4 Máxima Verossimilhança Recursiva

### 2.4.1 Características Gerais

A máxima verossimilhança recursiva (Recursive Maximum Likelihood) é um método capaz de estimar para cada conjunto de dados recebidos a frequência e amortecimento de cada modo do sistema em análise [27]. O objetivo desta técnica é calcular os parâmetros do modelo escolhido e, conseqüentemente, determinar os coeficientes do polinômio

autoregressivo (AR). O cálculo das raízes do polinômio AR resultará, portanto, nos modos do sistema dinâmico.

A primeira parte da demonstração é escolher entre os modelos ARMA, do inglês, *Autoregressive Moving Average* [26], e ARMAX, do inglês, *Autoregressive Moving Average Exogenous* [27], aquele que melhor se adaptará aos dados que o usuário possui. Devido ao segundo ser mais genérico que o primeiro, este será representado na equação (2.19).

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}e(k) \quad (2.19)$$

Onde  $y(k)$  são as medições da saída do sistema,  $u(k)$  são os dados de uma entrada conhecida do sistema,  $e(k)$  são os dados aleatórios provenientes das entradas do sistema, e  $k$  o contador de amostra. Os polinômios AR, MA e X, representados por  $A(q)$ ,  $C(q)$ , e  $B(q)$ , respectivamente, são funções do operador discreto  $q$ . O tempo de amostragem utilizado para obter os sinais discretos deverá ser o mesmo. A equação de diferenças correspondentes ao modelo ARMAX é apresentada em (2.20):

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k) \quad (2.20)$$

Na equação (2.20),  $n_a$ ,  $n_b$  e  $n_c$ , representam a ordem do polinômio respectivo. Conhecidas as raízes  $p_i$  de  $A(q)$ , as quais satisfazem o modelo apresentado, têm-se a conversão do domínio discreto para o contínuo por meio da equação (2.21).

$$\lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \ln p_i \quad (2.21)$$

Somente como observação, com a formulação apresentada para o modelo ARMAX é possível obter o ARMA, anulando  $u(k)$  nas equações (2.19) e (2.20), o que resultaria na eliminação de uma ordem  $n_b$  a ser estimada. O trabalho foi desenvolvido utilizando o modelo ARMAX, então este procedimento não será necessário na formulação do método.

## 2.4.2 Método de Predição de Erro

A próxima parte da demonstração consiste em apresentar o método de predição de erro (Prediction Error Method), o qual será empregado para calcular os parâmetros que descrevem os polinômios do ARMAX [76, 77]. A estimação dos parâmetros do sistema é

realizada por meio de uma função custo [26, 27], cujo valor também será de minimizar os erros da predição da mesma forma como ocorre nos métodos de regressão de mínimos quadrados. Os erros de predição podem ser interpretados como os dados de entradas aleatórias  $e(k)$  observado na equação (2.19) e, portanto, a reformulação da equação de diferenças (2.20) é proposta na equação (2.22).

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} \hat{a}_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_b} \hat{b}_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} \hat{c}_i \varepsilon(k-i, \hat{\underline{\theta}}) + \varepsilon(k, \hat{\underline{\theta}}) \quad (2.22)$$

Isolando o erro de predição na equação (2.22), obtém-se uma expressão para o mesmo, definida pela equação (2.23).

$$\varepsilon(k, \hat{\underline{\theta}}) = y(k) - \underline{\varphi}^T(k, \hat{\underline{\theta}}) \hat{\underline{\theta}} \quad (2.23)$$

Onde os vetores  $\underline{\varphi}$  e  $\hat{\underline{\theta}}$  são representados nas equações (2.24) e (2.25), respectivamente.

$$\underline{\varphi} = [-y(k-1) \cdots -y(k-n_a) \ u(k) \cdots u(k-n_b) \ \bar{\varepsilon}(k-1, \hat{\underline{\theta}}) \cdots \bar{\varepsilon}(k-n_c, \hat{\underline{\theta}})] \quad (2.24)$$

$$\hat{\underline{\theta}} = [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_{n_a} \ \hat{b}_0 \cdots \hat{b}_{n_b} \ \hat{c}_1 \cdots \hat{c}_{n_c}]^T \quad (2.25)$$

Na equação (2.24),  $\bar{\varepsilon}$  refere-se ao resíduo estimado já considerando o vetor de parâmetros calculado na iteração atual. A função de custo escolhida para que seja minimizada em função dos parâmetros  $\underline{\theta}$  do sistema é apresentada pela equação (2.26), quadrática e dependente do número de amostras  $N$  e por funções  $\gamma(N)$  e  $\beta(N, k)$ , as quais fazem com que a equação (2.26) seja uma média aritmética ponderada dos quadrados dos erros de predição. A equação (2.27) apresenta matematicamente a relação entre  $\gamma(N)$  e  $\beta(N, k)$ .

$$V_N(\underline{\theta}) = \gamma(N) \sum_{k=1}^N \beta(N, k) \frac{1}{2} \varepsilon^2(k, \underline{\theta}) \quad (2.26)$$

$$\gamma(N) = \left[ \sum_{k=1}^N \beta(N, k) \right]^{-1} \quad (2.27)$$

O vetor de parâmetros  $\underline{\theta}$  que minimizará a função custo poderá ser calculado fazendo a derivada da equação (2.26) com relação à  $\underline{\theta}$ , e igualando a zero. O resultado deste procedimento será a solução do PEM e ao mesmo tempo a estimação do vetor de parâmetros  $\hat{\underline{\theta}}_N$ , para as  $N$  amostras do sistema, conforme equação (2.28).

$$\hat{\underline{\theta}}_N = \left[ \gamma(N) \sum_{k=1}^N \beta(N, k) \underline{\psi}(k, \hat{\underline{\theta}}_N) \underline{\varphi}^T(k, \hat{\underline{\theta}}_N) \right]^{-1} \cdot \left[ \gamma(N) \sum_{k=1}^N \beta(N, k) \underline{\psi}(k, \hat{\underline{\theta}}_N) y(k) \right] \quad (2.28)$$

O cálculo da equação (2.28) requer o gradiente de  $\varepsilon(k, \underline{\theta})$ , o qual é apresentado pela equação (2.29).

$$\underline{\psi}(k, \underline{\theta}) = -\frac{d}{d\underline{\theta}} \varepsilon(k, \underline{\theta}) = \frac{1}{C(q)} \underline{\varphi}(k, \underline{\theta}) \quad (2.29)$$

A dependência simultânea do vetor de variáveis em ambos os lados da equação (2.28) sugere a aplicação de métodos iterativos ou recursivos para que seja possível calcular efetivamente a equação. Portanto, na próxima seção será apresentada a metodologia para que possa ser empregado um algoritmo de máxima verossimilhança, disposto na seção de técnicas recursivas.

### 2.4.3 Metodologia da Máxima Verossimilhança Recursiva em conjunto com o Método PEM

Quando os erros de predição são assumidos como derivados de ruídos gaussianos, o operador de verossimilhança logarítmico torna-se equivalente à função de custo quadrático do PEM [77, 27]. Logo, utilizar o método descrito na seção anterior sobre esta suposição permite que todo o conjunto de técnicas apresente as características esperadas de um estimador de máxima verossimilhança (MLE), justificando o uso da metodologia que é resumida pela figura 4.

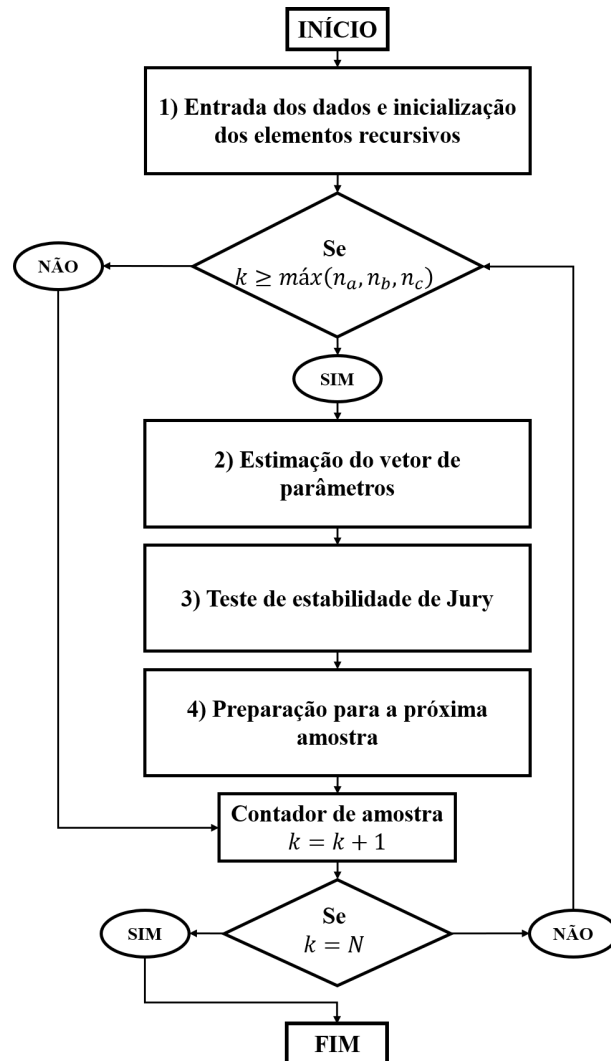


Figura 4 – Fluxograma para execução do RML.

No fluxograma apresentado, a primeira parte é a inicialização dos parâmetros da metodologia, assim como a aquisição das medições de saída e entrada do sistema dinâmico, e também as estimativas para a ordem de cada polinômio que constitui o modelo ARMAX. Em seguida, analisa-se se o contador de amostras consegue providenciar informação suficiente para as estimativas de ordem dos polinômios  $n_a$ ,  $n_b$  e  $n_c$ , fornecidas pelo usuário.

Quando o resultado da verificação for positivo, o bloco 2, “Estimação do vetor de parâmetros”, é ativado, onde os cálculos dos vetores do modelo de predição linear serão realizados, assim como uma estimativa será obtida para os parâmetros que modelam a dinâmica do sistema  $\hat{\theta}(k)$ . O vetor de parâmetros estimado precisa ter sua estabilidade verificada devido a metodologia de filtro empregada, sendo avaliada através do teste de Jury, metodologia análoga ao teste de estabilidade Routh-Hurwitz, porém para o tempo

discreto.

Se o teste de Jury concluir que o vetor  $\hat{\theta}(k)$  é estável, o vetor já representará os coeficientes do polinômio, cujas raízes são iguais aos autovalores discretos do sistema, podendo ser convertidos para o tempo contínuo utilizando a mesma equação (2.16) apresentada no método de Prony, representada a seguir ou na seção 2.3 deste trabalho.

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{\Delta t} \ln \hat{z}_i$$

Caso o teste de Jury conclua que o vetor  $\hat{\theta}(k)$  é instável, portanto, para a amostra  $k$  considerada, o vetor de parâmetros será igual ao da amostra anterior, seguindo normalmente o cálculo dos autovalores discretos e dos processos descritos no fluxograma da figura 4. Na etapa 4, “Preparação para a próxima amostra”, o RML calculará os vetores de erro e a matriz P, ambos necessários na estimação de um novo vetor de parâmetros.

A metodologia descrita irá se repetir até que todas as amostras sejam contabilizadas, isto é,  $k = N$ , obtendo a cada iteração  $k$  um conjunto de autovalores que modelam a dinâmica do sistema. Com o objetivo de melhorar a visualização de todos esses processos, apresentam-se as figuras 5, 6, 7 e 8, contendo fluxogramas de cada etapa descrita.

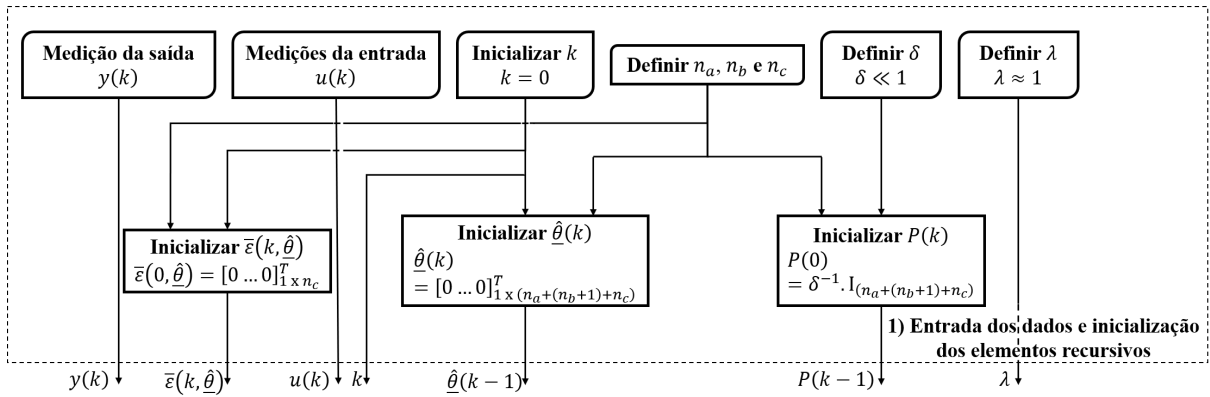


Figura 5 – Entrada dos dados e inicialização dos elementos recursivos.



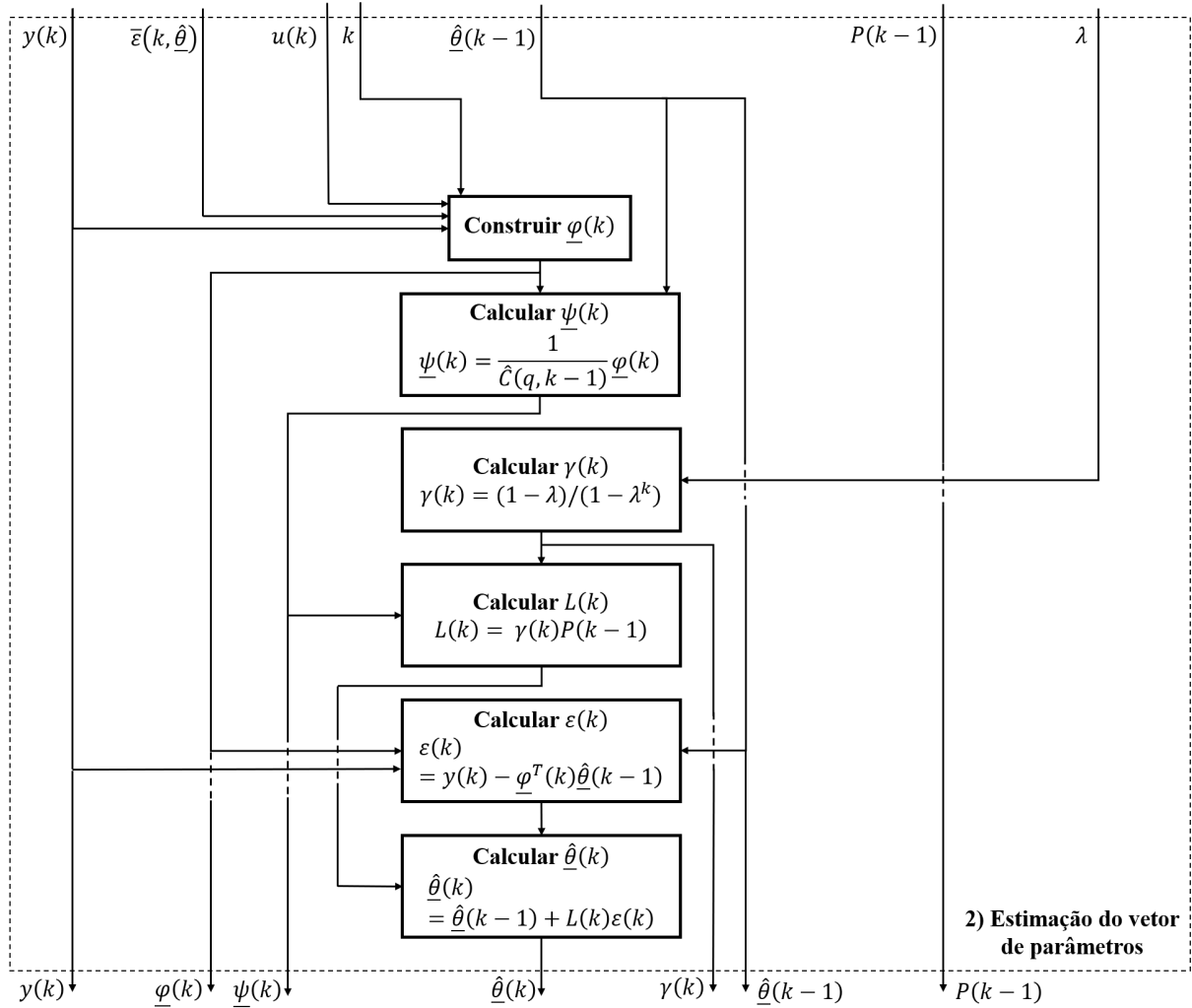


Figura 6 – Estimação do vetor de parâmetros.

Na figura 5 é apresentado a entrada de variáveis em conjunto com a inicialização de elementos que serão utilizados ao longo da execução do programa, até que todas as amostras, tanto da entrada  $u(k)$ , como da saída  $y(k)$ , sejam analisadas. Na figura 6 são executados os cálculos necessários para obter o vetor de parâmetros respectivo a nova amostra considerada, por meio de equações recursivas provenientes do algoritmo de máxima verossimilhança (MLE) [77].

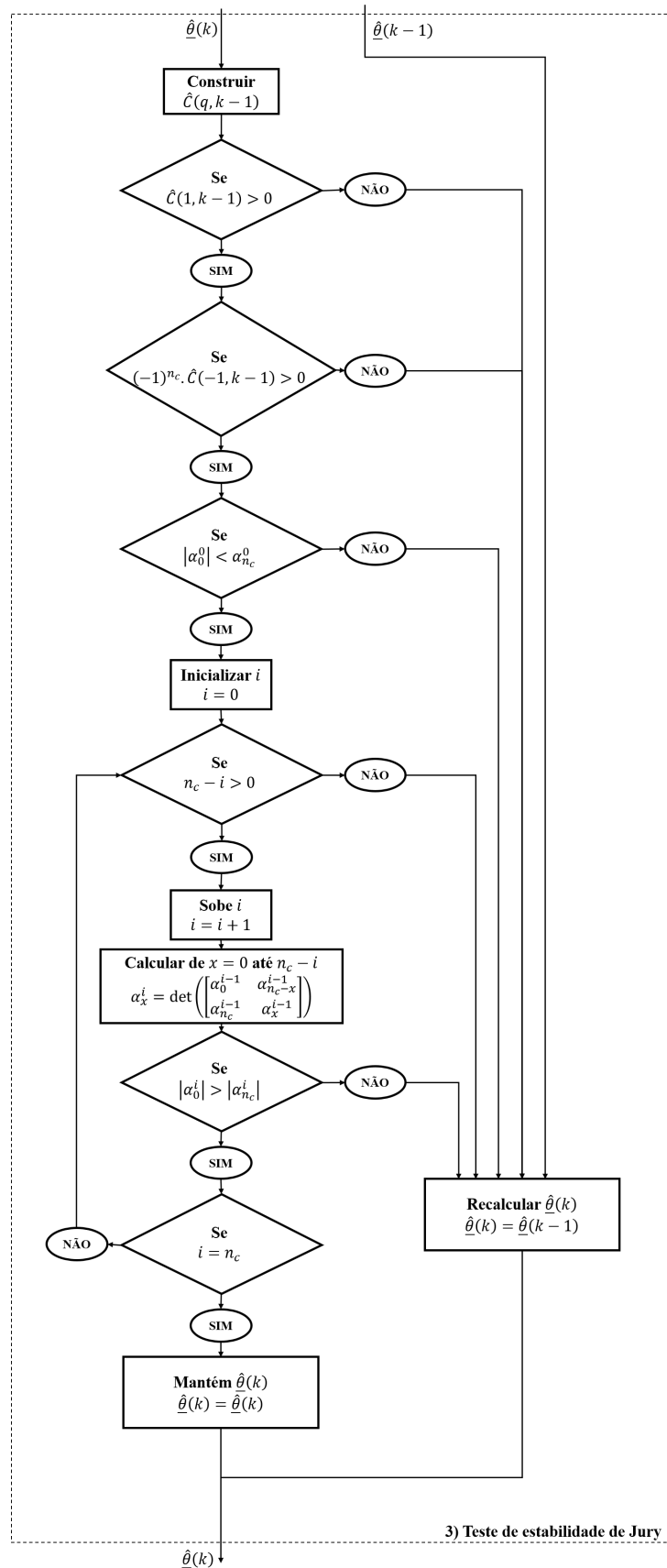


Figura 7 – Teste de estabilidade de Jury.

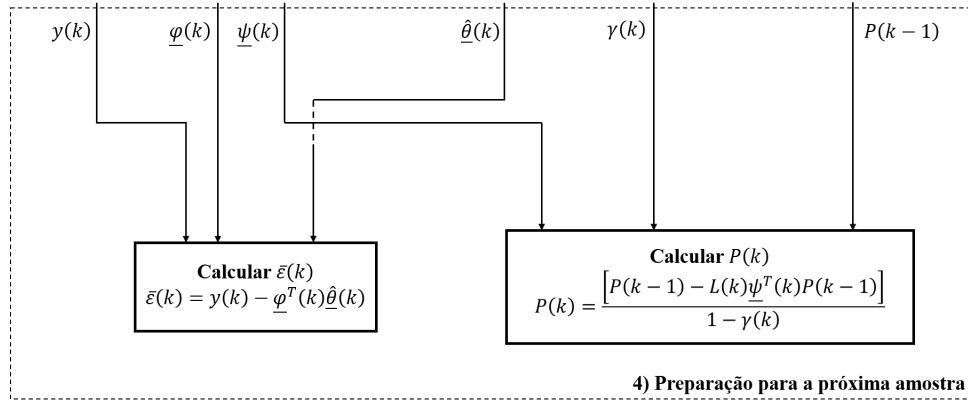


Figura 8 – Preparação para a próxima amostra.

Após calculado o vetor de parâmetros torna-se necessário avaliar se este foi construído a partir de um polinômio  $C(q)$  estável e, portanto, utiliza-se o teste de estabilidade de Jury [78] e que é apresentado na figura 7. Na rotina do teste de estabilidade, os elementos  $\alpha^i$  correspondem aos coeficientes do polinômio  $C(q)$  da iteração  $i$ , dispostos conforme equação (2.30).

$$C(q) = \alpha_{n_c} q^{n_c} + \alpha_{n_c-1} q^{n_c-1} + \dots + \alpha_1 q^1 + \alpha_0, \text{ onde } \alpha_{n_c} > 0 \quad (2.30)$$

Definido o vetor de parâmetros de acordo com o teste de estabilidade, o cálculo dos autovalores discretos é feito por meio das raízes da equação que definem o polinômio de parâmetros  $\hat{a}_i$ . Os autovalores contínuos, portanto, são extraídos para a amostra  $k$ , convertendo os discretos utilizando o tempo de amostragem do sinal de saída  $y(k)$ , ou entrada  $u(k)$ .

A figura 8 encerra a análise da amostra  $k$ , preparando os elementos que serão utilizados na próxima iteração do método numérico. Note que para o cálculo do amortecimento é necessário conhecer o valor dos coeficientes de  $\hat{a}_1$  até  $\hat{a}_{n_a}$ , contidos no vetor de parâmetros, o qual é calculado por amostra recebida. As raízes do polinômio  $A(q)$  equivalem aos autovalores no domínio discreto, os quais podem ser convertidos ao domínio de tempo contínuo utilizando o tempo de amostragem.

## 2.5 Decomposição em Modos Dinâmicos

A decomposição em modos dinâmicos (*Dynamic Mode Decomposition*), ou DMD, é um método de identificação modal o qual permite analisar um conjunto de sinais simultaneamente, desde que estes tenham sido uniformemente amostrados à cada  $\Delta t$  (unidades de tempo) [1]. Considerando um conjunto de  $M$  sinais, cada um contendo  $N + 1$  amostras, dispostas na matriz  $Y$  descrita pela equação (2.31).

$$Y = \begin{bmatrix} [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_1 \\ [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_M \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Na equação (2.31),  $y_i$  é a  $i$ -ésima amostra do sinal a ser analisado. Em seguida, seja separar  $Y$  em duas matrizes, ambas possuindo  $M$  linhas e  $N$  colunas, apresentadas em (2.32) e (2.33).

$$Y_0 = \begin{bmatrix} [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_{N-1}]_1 \\ [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_{N-1}]_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_0 & y_1 & \cdots & y_n & \cdots & y_{N-1}]_M \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} [y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_1 \\ [y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots & y_N]_M \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Assumindo que exista uma matriz de mapeamento linear e constante, a qual contém a informação sobre a dinâmica do sistema [38], logo, as equações (2.32) e (2.33) podem ser relacionadas como realizado na equação (2.34).

$$Y_1 = AY_0 + \rho\eta_N^T \quad (2.34)$$

Na equação 2.34,  $\rho$  é o erro residual ao considerar a utilização da matriz de mapeamento, e  $\eta_N^T$  um vetor unitário contendo  $N$  elementos. O produto  $\rho\eta_N^T$  será o menor

possível baseado no teorema de projeção, considerando a ortogonalidade de  $\rho$  no espaço de medições definido pelas colunas de  $Y_0$  [31, 30].

A matriz de mapeamento contém a dinâmica do sistema, logo, a formulação do problema é semelhante ao comportamento esperado pelos operadores de Koopman [31]. Portanto, se os modos de Koopman calculados para um sistema que envolva um atrator sempre caem no círculo de raio unitário [28], então os modos estimados pelo DMD também representarão o sistema precisamente.

A equação (2.34) pode ser atualizada, considerando que a parcela respectiva aos erros residuais será a menor possível dada a projeção considerada [1], portanto, têm-se a equação (2.35).

$$Y_1 \approx AY_0 \quad (2.35)$$

Em ambientes onde há uma grande quantidade de dados a serem analisados com o DMD, aplicar diretamente a decomposição em autovalores e autovetores da matriz de mapeamento pode exigir muito processamento computacional e comprometer a precisão dos resultados [30]. A alternativa encontrada para reduzir esse gasto é realizar uma aproximação da matriz de mapeamento por meio da decomposição em valores de  $Y_0$ , descrita em (2.36).

$$Y_0 = U_{M \times M} \Sigma_{M \times N} (V_{N \times N})^T \quad (2.36)$$

Na equação 2.36,  $U$  é uma matriz ortonormal contendo os autovetores singulares à esquerda,  $V^T$  é também uma matriz ortonormal para os autovetores singulares à direita, e  $\Sigma$  a matriz diagonal com os  $N$  autovalores singulares  $\{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \cdots \sigma_N\}$ . A matriz  $\Sigma$  pode também ser constituída de autovalores numéricos, ainda mais se as medições apresentarem ruído. Neste trabalho foi considerado uma tolerância  $\varepsilon$  para a razão entre os valores singulares, de forma que  $\sigma_n$  dividido por  $\sigma_1$  determinará o limite superior máximo permitido para a ordem do sistema.

Considerando a ordem  $n$  (com  $n < N$ ) e realizando a substituição da equação

(2.36) em (2.35), têm-se uma formulação alternativa para  $Y_1$  em (2.37).

$$Y_1 = A_{M \times M} U_{M \times n} \Sigma_{n \times n} (V_{N \times n})^T \quad (2.37)$$

Isolando a matriz de mapeamento na equação (2.37), e sabendo que a inversa das matrizes de autovetores à direita e esquerda são calculadas por meio da transposição de seus elementos, obtém-se uma aproximação para  $A$ , apresentada na equação (2.38).

$$A = Y_{1M \times N} V_{N \times n} (\Sigma_{n \times n})^{-1} (U_{M \times n})^T \quad (2.38)$$

Finalmente, a aproximação desejada para a matriz de mapeamento, chamada de  $\tilde{A}$ , pode ser determinada ao multiplicar à esquerda por  $U^T$ , e a direita por  $U$ , onde o produto matricial  $U^T U$  é igual à uma matriz identidade de ordem  $n$ . Esta operação é considerada como uma implementação robusta, pois relaciona o DMD com uma outra técnica de identificação de autovalores, conhecida como decomposição ortogonal própria (POD). A relação entre as metodologias DMD e POD é descrita em [30], e apresentada na equação (2.39).

$$\tilde{A} = (U_{M \times n})^T Y_{1M \times N} V_{N \times n} (\Sigma_{n \times n})^{-1} \quad (2.39)$$

A decomposição em autovalores e autovetores de  $\tilde{A}$  resultarão nos modos discretos do sistema, os quais podem ser convertidos para seus correspondentes de tempo contínuo utilizando o tempo de amostragem. O fluxograma da figura 9 demonstra os passos necessários para implementação do algoritmo de decomposição.

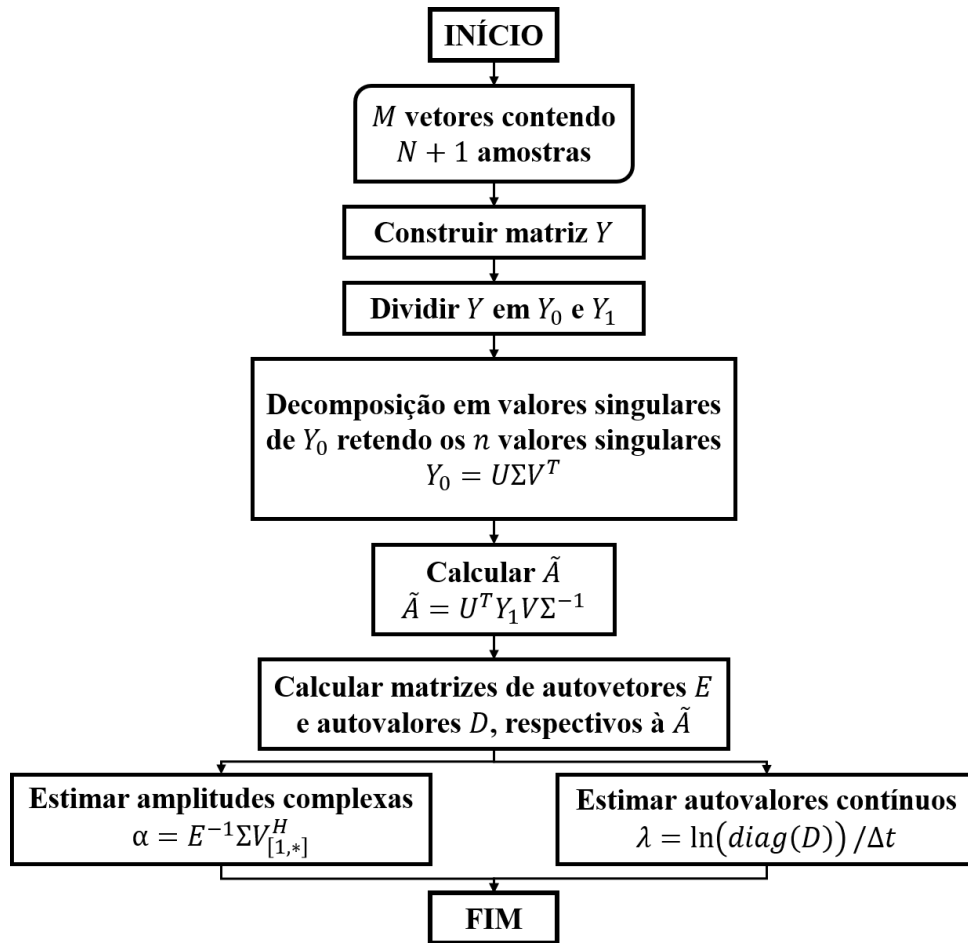


Figura 9 – Fluxograma para execução do DMD.

Após a inicialização da rotina, armazenando na memória os  $M$  sinais contendo cada um  $N + 1$  amostras, a primeira de cálculos será construir a matriz  $Y$  tal como indicado na equação (2.31), alocando em cada linha da matriz os sinais em análise. O próximo bloco do fluxograma, “Dividir  $Y$ ”, refere-se a aplicação das equações (2.32) e (2.33) para obter as matrizes  $Y_0$  e  $Y_1$ , respectivamente.

A etapa seguinte é o cálculo da decomposição em valores singulares da matriz  $Y_0$ , realizando após este procedimento, a retenção dos  $n$  elementos correspondentes aos maiores valores determinados. O resultado do procedimento fornecerá os subsídios para determinar uma aproximação para a matriz de mapeamento linear, indicada no bloco “Calcular  $\tilde{A}$ ”.

A decomposição em autovalores e autovetores da matriz  $\tilde{A}$  determinará os autovalores discretos do sistema dinâmico. A partir destes autovalores, torna-se possível tanto estimar os autovalores contínuos, utilizando a equação apresentada no bloco “Esti-

mar autovalores contínuos” da figura 9, como também reconstruir os sinais introduzidos, calculando o bloco “Estimar amplitudes complexas” da mesma figura 9.

Sobre o bloco “Estimar autovalores contínuos”,  $\text{diag}(D)$  refere-se a função que obtém todos os valores presentes na diagonal principal da matriz  $D$ . Uma alternativa para redução do custo computacional do método é determinar a decomposição em valores singulares “econômica”, a qual realiza a verificação se  $M > N$  em  $Y_0$ . Caso positivo, então apenas as primeiras  $N$  colunas de  $U$  serão computadas e, conseqüentemente, a matriz  $\Sigma$  será quadrada com  $N \times N$  elementos.

## 2.6 Algoritmo de Realização de Sistemas

### 2.6.1 Demonstração Algébrica

Considere as equações de estado que modelam um sistema dinâmico discreto, linear e invariante no tempo e que são apresentadas em (2.40) e (2.41).

$$x(k+1) = [A_d]_{n \times n} x_{n \times 1}(k) + [B_d]_{n \times m} u_{m \times 1}(k) \quad (2.40)$$

$$y(k) = [C_d]_{p \times n} x_{n \times 1}(k) + [D_d]_{p \times m} u_{m \times 1}(k) \quad (2.41)$$

O sistema possui  $m$  entradas e  $p$  saídas, sendo  $k$  o indicador de amostra. A proposta do Algoritmo de Realização de Sistemas (*Eigensystem Realization Algorithm*) ou, simplesmente ERA, é determinar a representação de menor ordem no espaço de estados, a partir de medições realizadas na saída do modelo. Seja aplicar nas entradas  $u(k)$  do sistema dinâmico definido pelas equações (2.40) e (2.41) a função impulso, o qual produzirá na saída os parâmetros de Markov, conforme equação (2.42) [48].

$$\begin{cases} Y(k) = [D_d], & \text{se } k = 0 \\ Y(k) = [C_d][A_d]^{k-1}[B_d], & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

Como observação, caso o sistema possua mais de uma entrada, ou saída, ainda será necessário determinar todos os parâmetros de Markov para cada instante de tempo, porém excitando uma entrada de cada vez com a função impulso. Este procedimento inibirá



a ocorrência de correlações entre as entradas e saídas de um sistema, as quais podem prejudicar os resultados da técnica [79, 55]. No caso descrito, têm-se na equação (2.43) a matriz resultante dos parâmetros de Markov para o sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), onde as linhas e colunas representam as saídas e entradas, respectivamente.

$$Y(k) = \begin{pmatrix} y_{11}(k) & y_{12}(k) & \cdots & y_{1m}(k) \\ y_{21}(k) & y_{22}(k) & \cdots & y_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1}(k) & y_{p2}(k) & \cdots & y_{pm}(k) \end{pmatrix}_{p \times m} \quad (2.43)$$

Assim como representado nas equações (2.40) e (2.41), os coeficientes  $m$  e  $p$  implicam no número de entradas e saídas do sistema, sendo os dados na matriz disponibilizados conforme estas quantidades. O próximo passo é construir uma matriz chamada de Matriz de Hankel Generalizada [48], com o propósito de armazenar as submatrizes (2.43) para todas as amostras introduzidas.

A dimensão da matriz é definida pelo número de saídas  $p$  e entradas  $m$ , multiplicada pelos parâmetros  $r$  e  $s$ . As constantes  $r$  e  $s$  indicadas são escolhidas de forma arbitrária [48], ou considerando uma estimativa sobre a ordem da matriz característica e tempo de acomodação da resposta do sistema [55].

Neste trabalho, foi considerado como premissa arbitrar  $r$  e  $s$  de forma que alcance todos os dados disponibilizados nos sinais de entrada, aumentando consideravelmente a dimensão da matriz de Hankel, agregando maior estabilidade e precisão numérica na maioria dos casos [62]. A equação (2.44) demonstra a lei de formação da matriz de Hankel.

$$H_{rs}(k-1) = \begin{pmatrix} Y(k) & Y(k+1) & \cdots & Y(k+(s-1)) \\ Y(k+1) & Y(k+2) & \cdots & Y(k+s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(k+(r-1)) & Y(k+r) & \cdots & Y(k+r+s-2) \end{pmatrix}_{rp \times sm} \quad (2.44)$$

Considerando  $k \geq 1$  e representando as submatrizes propostas em (2.43) na equação (2.44), têm-se:

$$H_{rs}(k-1) = \begin{pmatrix} [C_d][A_d]^{k-1}[B_d] & [C_d][A_d]^k[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+s-2}[B_d] \\ [C_d][A_d]^k[B_d] & [C_d][A_d]^{k+1}[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+s-1}[B_d] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [C_d][A_d]^{k+r-2}[B_d] & [C_d][A_d]^{k+r-1}[B_d] & \cdots & [C_d][A_d]^{k+r+s-3}[B_d] \end{pmatrix}_{rp \times sm}$$

Desenvolvendo a  $H_{rs}(k-1)$  em um produto matricial, têm-se na equação (2.45) a decomposição da Hankel em suas matrizes de observabilidade  $[P_r]$ , e controlabilidade  $[Q_s]$ .

$$H_{rs}(k-1) = \begin{pmatrix} [C_d] \\ [C_d][A_d] \\ \vdots \\ [C_d][A_d]^{r-1} \end{pmatrix} [A_d]^{k-1} \begin{pmatrix} [B_d] & [A_d][B_d] & \cdots & [A_d]^{s-1}[B_d] \end{pmatrix}$$

$$H_{rs}(k-1) = [P_r][A_d]^{k-1}[Q_s] \quad (2.45)$$

Na teoria de controle e representação no espaço de estados [80], a matriz de observabilidade está associada a possibilidade em se determinar o comportamento interno do sistema (estados), dados somente os sinais de entrada e saída do sistema. A matriz de controlabilidade está relacionada a existência de uma função de controle que permita transitar a saída do sistema ao valor desejado. A técnica do ERA consiste na análise da equação (2.45), aplicando dois valores distintos para o índice de amostragem, resultando em (2.46) e (2.47).

$$H_{rs}(0) = [P_r][Q_s] \quad (2.46)$$

$$H_{rs}(1) = [P_r][A_d][Q_s] \quad (2.47)$$

Note que as matrizes de observabilidade e controlabilidade se mantêm constantes para qualquer elevação no índice de amostragem, modificando somente o expoente da matriz  $[A_d]$ . O posto das matrizes  $[P_r]$  e  $[Q_s]$  estão limitados a valores inferiores ou iguais

a  $r$  e  $s$ . De acordo com o desenvolvimento da equação (2.45), estes não devem superar  $n$ , o posto de  $[A_d]$ . Portanto, após a acomodação dos dados provenientes da série temporal, a matriz Hankel será quadrada, de onde o ERA formulará a realização controlável e observável, resultando em um sistema cuja ordem será no mínimo igual a da matriz  $[A_d]$ .

$$\text{posto}(Hankel) = \text{posto}([A_d]) = \text{posto}([P_r]) = \text{posto}([Q_s]) = n$$

A segunda parte da demonstração consiste em calcular a decomposição em valores singulares da equação (2.46).

$$H_{rs}(0) = [U_N]_{rp \times rp} [\Sigma_N]_{rp \times sm} [V_N]_{sm \times sm}^T \quad (2.48)$$

Onde as matrizes  $[U_N]$  e  $[V_N]$  representam os vetores singulares à esquerda e direita de  $H_{rs}(0)$ , definidas como ortonormais. O expoente  $T$  indica que  $[V_N]$  deve ser transposta para o produto final ser válido. A matriz  $[\Sigma_N]$  é diagonal, cujos elementos contém os valores singulares, respectivos, a ordem da matriz Hankel formulada com os dados temporais, conforme equação (2.49).

$$\Sigma_N = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{(n+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \sigma_N \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (2.49)$$

Caso não exista ruído nas medições, somente os valores singulares respectivos a ordem  $n$  apresentarão valores diferentes de zero. Entretanto, a presença de interferências nos experimentos provocará o aparecimento de modos numéricos, que em uma primeira abordagem, podem ser eliminados determinando uma tolerância  $\varepsilon$  entre o valor calculado  $\sigma_{calc}$  e o primeiro elemento  $\sigma_1$ .

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{calc}}{\sigma_1}$$

Se o valor for menor que a especificação da tolerância, então realiza-se o truncamento das  $(N - n)$  últimas linhas e colunas, resultando na equação (2.50).

$$H_{rs}(0) = [U_n][\Sigma_n][V_n]^T \quad (2.50)$$

Alternativamente, ao invés de usar uma tolerância  $\varepsilon$ , é possível estimar a ordem  $n$  calculando o posto da matriz  $\Sigma$  ou da matriz  $H_{rs}(0)$ , a qual produzirá uma melhor identificação do sistema caso este não apresente ruídos nas medições [48]. Analisando a equação (2.44), se for desejado extrair o termo  $Y(k)$  será necessário multiplicar a matriz Hankel por vetores matriciais definidos a seguir:

$$Y(k) = \begin{pmatrix} [\mathbb{I}_p] & [0_p] & \cdots & [0_p]_{r-1} \end{pmatrix} H_{rs}(k-1) \begin{pmatrix} [\mathbb{I}_m] \\ [0_m] \\ \vdots \\ [0_m]_{s-1} \end{pmatrix}$$

Onde  $[\mathbb{I}_p]$ , e  $[\mathbb{I}_m]$ , são matrizes identidade e os vetores  $[0_p]$ , e  $[0_m]$ , representam as colunas, e linhas, de ordem  $p$  e  $m$ , respectivamente. A equação (2.51) simplifica a notação matemática desenvolvida, em termos de  $[E_p]$  e  $[E_m]$ .

$$Y(k) = [E_p][H_{rs}(k-1)][E_m] \quad (2.51)$$

Substituindo (2.45) em (2.51), temos:

$$Y(k) = [E_p][P_r][A_d]^{k-1}[Q_s][E_m]$$

Colocando em evidência as matrizes identidade entre  $[P_r]$ ,  $[A_d]^{k-1}$  e  $[Q_s]$ , têm-se a equação (2.52).

$$Y(k) = [E_p][P_r][\mathbb{I}][A_d]^{k-1}[\mathbb{I}][Q_s][E_m] \quad (2.52)$$

A próxima parte do ERA é determinar a matriz  $H_{rs}^+(0)$ , a qual é a pseudo-inversa de  $H_{rs}(0)$ . Supondo que a mesma exista, satisfazendo a equação (2.53), propõe-se demonstrar

se esta atende a definição [48] proposta em (2.54).

$$[Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r] = [\mathbb{I}_n] \quad (2.53)$$

$$H_{rs}(0)H_{rs}^+(0)H_{rs}(0) = H_{rs}(0) \quad (2.54)$$

Substituindo (2.46) em (2.54).

$$([P_r][Q_s])H_{rs}^+(0)([P_r][Q_s]) = ([P_r][Q_s])$$

$$[P_r][Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r][Q_s] = [P_r][\mathbb{I}][Q_s]$$

Aplicando a equação (2.53), comprova-se que a mesma representa a pseudo-inversa da matriz Hankel para  $k = 1$ .

$$[P_r][Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r][Q_s] = [P_r][Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r][Q_s]$$

Na equação (2.52) foram destacadas matrizes identidade, as quais serão substituídas conforme equação (2.53).

$$Y(k) = [E_p][P_r]([Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r])[A_d]^{k-1}([Q_s]H_{rs}^+(0)[P_r])[Q_s][E_m]$$

A decomposição de  $H_{rs}(0)$  em matrizes de observabilidade e controlabilidade pode ser analisada de forma reversa, ou seja, aplicando a relação descrita em (2.46), resulta na equação (2.55).

$$Y(k) = [E_p]H_{rs}(0)H_{rs}^+(0)[P_r][A_d]^{k-1}[Q_s]H_{rs}^+(0)H_{rs}(0)[E_m] \quad (2.55)$$

A equação (2.55) estrutura a forma com que a representação proposta pelo algoritmo fornecerá. Entretanto, para que o sistema seja de ordem mínima, será necessário inserir em (2.55) as decomposições em valores singulares das matrizes  $H_{rs}(0)$  e  $H_{rs}^+(0)$ . Da definição de pseudo-inversa (2.54), considerando a decomposição de  $H_{rs}(0)$  em (2.50), e isolando para  $H_{rs}^+(0)$ .

$$H_{rs}^+(0) = ([U_n][\Sigma_n][V_n]^T)^{-1}([U_n][\Sigma_n][V_n]^T)([U_n][\Sigma_n][V_n]^T)^{-1}$$

$$H_{rs}^+(0) = [V_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T \quad (2.56)$$

O desenvolvimento da equação (2.55) pode ser realizado ao substituir a pseudo-inversa  $H_{rs}^+(0)$  pela equação (2.56).

$$Y(k) = [E_p]H_{rs}(0)[V_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T[P_r][A_d]^{k-1}[Q_s][V_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T H_{rs}(0)[E_m]$$

Utilizando a decomposição em valores singulares considerando a ordem  $n$ , tal como deduzida pela equação (2.50), têm-se ao substituir  $H_{rs}(0)$  na formulação de  $Y(k)$ :

$$Y(k) = [E_p][U_n][\Sigma_n][V_n]^T[V_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T[P_r][A_d]^{k-1}[Q_s][V_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T[U_n][\Sigma_n][V_n]^T[E_m]$$

As matrizes de vetores singulares  $[V_n]$  e  $[U_n]$  são ortonormais, portanto o produto destas pelas respectivas transpostas resultam em matrizes identidade.

$$Y(k) = [E_p][U_n][\Sigma_n][\Sigma_n]^{-1}[U_n]^T[P_r][A_d]^{k-1}[Q_s][V_n][\Sigma_n]^{-1}[\Sigma_n][V_n]^T[E_m]$$

O próximo passo na representação de  $Y(k)$  consiste na decomposição das matrizes  $[\Sigma_n]$  e  $[\Sigma_n]^{-1}$  em  $[\Sigma_n]^{1/2}[\Sigma_n]^{1/2}$  e  $[\Sigma_n]^{-1/2}[\Sigma_n]^{-1/2}$ . O cálculo de apenas dois, dos quatro termos vizinhos, é feito para que se produza a equação (2.57).

$$Y(k) = ([E_p][U_n][\Sigma_n]^{1/2})([\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T[P_r][A_d]^{k-1}[Q_s][V_n][\Sigma_n]^{-1/2})([\Sigma_n]^{1/2}[V_n]^T[E_m]) \quad (2.57)$$

Onde nos resta determinar a matriz  $[A_d]^{k-1}$ . Igualando a decomposição de observabilidade e controlabilidade com a de valores singulares, ou seja, relacionando as equações (2.45) e (2.50), têm-se:

$$[P_r][Q_s] = [U_n][\Sigma_n][V_n]^T$$

$$([P_r])([Q_s]) = ([U_n][\Sigma_n]^{1/2})([\Sigma_n]^{1/2}[V_n]^T) \quad (2.58)$$

Utilizando a equação (2.58) em (2.47), e isolando para  $[A_d]$ :

$$\begin{aligned} [A_d] &= ([U_n][\Sigma_n]^{1/2})^{-1} H_{rs}(1)([\Sigma_n]^{1/2}[V_n]^T)^{-1} \\ [A_d] &= [\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T H_{rs}(1)[V_n][\Sigma_n]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Elevando (2.59) em  $k - 1$ , resulta na equação (2.60).

$$[A_d]^{k-1} = ([\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T H_{rs}(1)[V_n][\Sigma_n]^{-1/2})^{k-1} \quad (2.60)$$

Voltando à demonstração de  $Y(k)$ , equação (2.57), considerando (2.60), obtém-se:

$$Y(k) = [E_p][P_r]( [\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T H_{rs}(1)[V_n][\Sigma_n]^{-1/2} )^{k-1} [Q_s][E_m]$$

As matrizes de observabilidade e controlabilidade também podem ser expressas em função da decomposição de valores singulares, segundo equação (2.58). Portanto, a substituição destas na demonstração produz a expressão estendida para  $Y(k)$ , apresentada na equação (2.61).

$$Y(k) = ([E_p][U_n][\Sigma_n]^{1/2})([\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T H_{rs}(1)[V_n][\Sigma_n]^{-1/2})^{k-1}([\Sigma_n]^{1/2}[V_n]^T[E_m]) \quad (2.61)$$

Realizando uma comparação entre as equações (2.61) e (2.42) obtém-se a realização discreta de ordem mínima calculada pelo ERA.

$$\begin{aligned} [A_d] &= [\Sigma_n]^{-1/2}[U_n]^T H_{rs}(1)[V_n][\Sigma_n]^{-1/2} \\ [B_d] &= [\Sigma_n]^{1/2}[V_n]^T[E_m] \\ [C_d] &= [E_p][U_n][\Sigma_n]^{1/2} \\ [D_d] &= y(0) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Calculada a matriz de autovalores do sistema discreto  $[\Lambda_d]$ , ou seja, a matriz diagonal que contenha os autovalores de  $[A_d]$ , a sua análoga no tempo contínuo é determinada por meio da equação (2.63).

$$[\Lambda_c] = \frac{1}{\Delta t} \ln[\Lambda_d] \quad (2.63)$$

Finalmente, com os autovalores no espaço contínuo, o cálculo da frequência natural, amortecimento e constante de tempo pode ser efetuado via equações (2.64), (2.65) e (2.66), respectivamente [80].

$$f_n = \frac{|\lambda_c|}{2\pi} \quad (2.64)$$

$$\zeta = -\frac{\text{Re}(\lambda_c)}{|\lambda_c|} \quad (2.65)$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_n \zeta} \quad (2.66)$$

## 2.6.2 Coordenadas Modais no Domínio Discreto

O objetivo do ERA consiste em determinar a realização de mínima ordem a qual permita identificar a dinâmica de todo o sistema em estudo. Sendo assim, após determinar as matrizes de estado utilizando a equação (2.62), os autovalores e autovetores discretos associados à identificação são calculados. Com o objetivo de assegurar que todos estes correspondem ao sistema, propõe-se o uso das coordenadas modais para que sejam elaborados indicadores de confiança específicos ao ERA [52, 48].

Seja a matriz de autovetores discreta  $[\Psi_d]$ , calculada a partir de  $[A_d]$ , a qual será utilizada para realizar a transformação linear descrita na equação (2.67).

$$x(k) = [\Psi_d]x(k)_M \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) no sistema de equações discretas, apresentado anteriormente conforme equações (2.40) e (2.41), obtém-se o sistema modal (2.68).



$$\begin{cases} x(k+1)_M = [\Psi_d]^{-1}[A_d][\Psi_d]x(k)_M + [\Psi_d]^{-1}[B_d]u(k) \\ y(k) = [C_d][\Psi_d]x(k)_M + [D_d]u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1)_M = [\Lambda_d]x(k)_M + [B_d]_M u(k) \\ y(k) = [C_d]_M x(k)_M + [D_d]u(k) \end{cases} \quad (2.68)$$

Onde  $[B_d]_M$  e  $[C_d]_M$  são matrizes que representam os fatores de participação, e as formas modais, de cada modo do sistema encontrado pelo ERA. As equações (2.69) e (2.70), descrevem as matrizes  $[B_d]_M$  e  $[C_d]_M$  em função de seus respectivos vetores colunas.

$$[B_d]_M = \begin{pmatrix} [\varphi_1]^T \\ [\varphi_2]^T \\ \vdots \\ [\varphi_j]^T \\ \vdots \\ [\varphi_n]^T \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$[C_d]_M = \left( [\phi_1] \quad [\phi_2] \quad \cdots \quad [\phi_j] \quad \cdots \quad [\phi_n] \right) \quad (2.70)$$

Definem-se também as matrizes de observabilidade e controlabilidade modal, via equações (2.71) e (2.72).

$$P_M = U_n [\Sigma_n]^{1/2} [\Psi_d] \quad (2.71)$$

$$Q_M = [\Psi_d]^{-1} [\Sigma_n]^{1/2} V_n^T \quad (2.72)$$

A figura 10 apresenta o fluxograma do algoritmo de realização de sistemas, sintetizando as principais etapas para cálculo da representação mínima e, portanto, dos autovalores estimados.

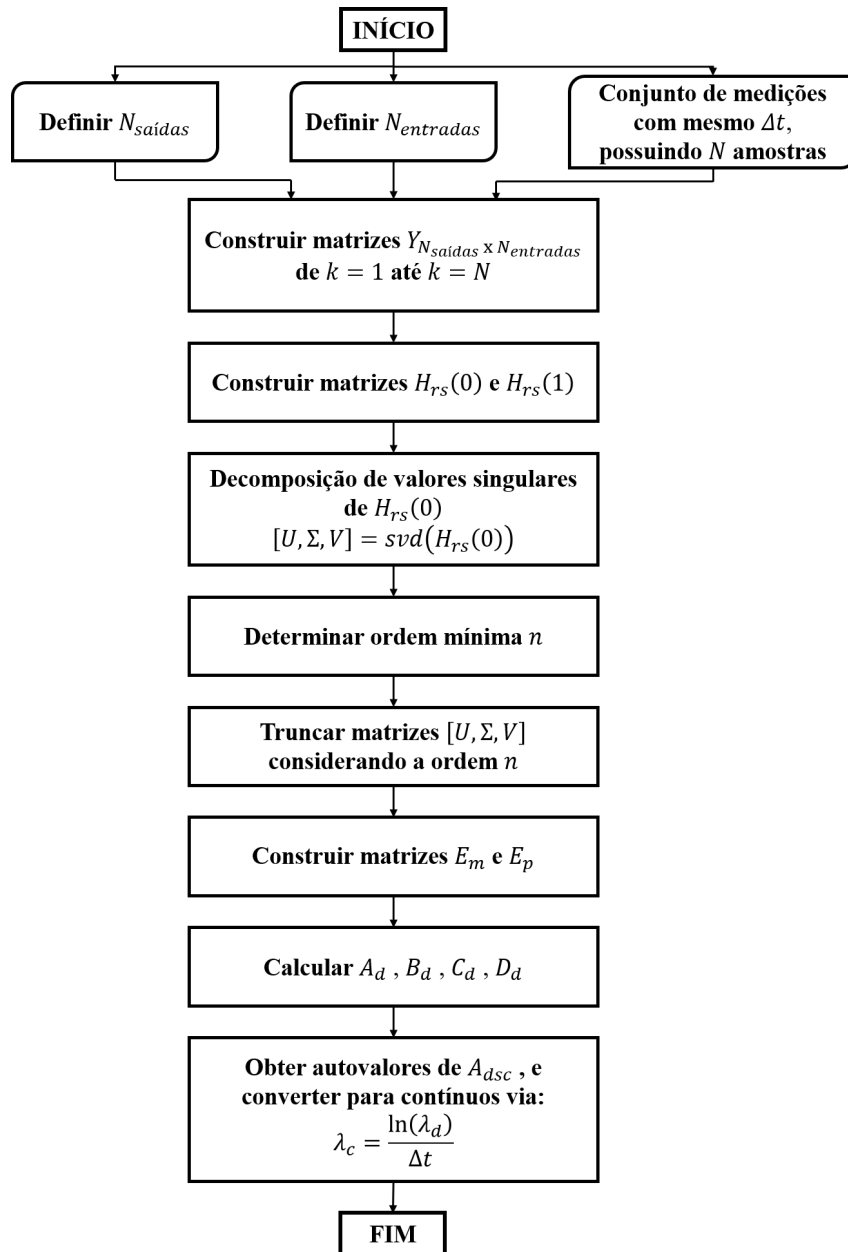


Figura 10 – Fluxograma para cálculo do ERA.

Os primeiros blocos do fluxograma referem-se à inicialização do ERA, onde é indicado o número de entradas, saídas e os sinais, estes amostrados a cada  $\Delta t$  segundos, totalizando  $N$  amostras. O bloco seguinte sinaliza a construção de matrizes  $Y$ , as quais têm como função armazenar os dados dos sinais no formato descrito na equação (2.43), para cada uma das amostras realizadas nos sinais.

Utilizando todas as  $Y$  obtidas no passo anterior, o próximo bloco do fluxograma será a formação das matrizes hankel  $H_{rs}(0)$  e  $H_{rs}(1)$ , por meio da equação (2.44) para  $k = 1$  e  $k = 2$ , respectivamente. Neste trabalho, foi estabelecido que as matrizes hankel

utilizassem todas as matrizes  $Y(k)$  em sua construção, garantindo somente que o elemento da primeira linha e coluna de  $H_{rs}(0)$  seja  $Y(1)$ , e o elemento da última linha e coluna de  $H_{rs}(1)$  seja  $Y(k+1)$ . Deste modo, não será necessário para o usuário adotar valores nos parâmetros  $r$  e  $s$ , e ainda agregará maior estabilidade numérica e precisão [62].

O bloco seguinte é a decomposição em valores singulares da matriz  $H_{rs}(0)$ , segundo equação (2.46). O bloco seguinte refere-se a determinação da ordem mínima  $n$ , a qual pode ser obtida tanto pelo cálculo do posto da matriz diagonal de valores singulares  $\Sigma_N$ , ou através de uma tolerância. A escolha entre estas duas formas de reduzir a ordem varia conforme a aplicação, sendo que neste trabalho optou-se usar o posto nos estudos em regime permanente para se obter uma melhor precisão, e a tolerância nos estudos transitórios para reduzir o esforço computacional.

Conhecida a ordem mínima  $n$  do sistema, o bloco seguinte é a operação de truncamento das linhas e colunas das matrizes resultantes da decomposição em valores singulares de  $H_{rs}(0)$ , conforme a equação (2.50). Em seguida, as matrizes  $E_m$  e  $E_p$  são geradas conforme a equação (2.51). Utilizando todos os resultados obtidos em cada um dos blocos até o momento, torna-se possível calcular as matrizes que constituem na representação de ordem mínima do sistema, isto é, as matrizes  $A_d$ ,  $B_d$ ,  $C_d$  e  $D_d$ , segundo o sistema de equações (2.62).

O último bloco do ERA constitui na decomposição em autovalores e autovetores da matriz  $A_d$ , o que resultará no conhecimento dos modos discretos do sistema dinâmico  $[\Lambda_d]$ . A conversão do tempo discreto para contínuo pode ser feita através da equação (2.63) e, portanto, estimativas de frequência natural, amortecimento e constante de tempo poderão ser calculadas usando as equações (2.64), (2.65) e (2.66), respectivamente.

### 2.6.3 Indicadores de Confiança

Havendo presença de ruídos na série temporal os valores singulares calculados na decomposição da matriz Hankel apresentarão uma faixa de valores mais abrangente, podendo inclusive passar pela tolerância e introduzir erros numéricos no ERA. Indicadores foram desenvolvidos para avaliar a realização calculada e identificar o conjunto real de autovalores que descrevem a dinâmica do sistema [48, 52, 81, 82]. Neste trabalho foram implementados os seguintes indicadores de confiança:

- Coerência de Amplitude Modal (*Modal Amplitude Coherence*);
- Coerência de Amplitude Modal Estendida (*Extended Modal Amplitude Coherence*);
- Colinearidade de Fase Modal (*Modal Phase Collinearity*);
- Valor Singular Modal (*Modal Singular Value*);
- Indicador de Consistência Modal (*Consistent Modal Indicator*).

### 2.6.3.1 Coerência de Amplitude Modal (MAC)

Este critério quantifica a consistência temporal, excluindo a questão de ortogonalidade [48, 82], resultando em um valor entre zero e um. Caso a série temporal gerada pela representação do ERA seja igual com uma idealizada a partir dos dados de entrada, o resultado do MAC será unitário. Primeiro calcula-se via equações (2.73) e (2.74) a série histórica ideal de cada modo  $j$  utilizando as colunas de  $[B_d]_M^{\otimes}$  e o tempo de amostragem  $\Delta t$ . O expoente  $\otimes$  refere-se ao conjugado transposto, ou hermitiano, e  $\lambda_{dj}$  é o autovalor do sistema discreto respectivo ao modo  $j$ .

$$\left[ [b_1] \ [b_2] \ \cdots \ [b_j] \ \cdots \ [b_n] \right]^{\otimes} = [B_d]_M \quad (2.73)$$

$$\bar{q}_j^{\otimes} = \left[ b_j^{\otimes} \ b_j^{\otimes} \exp(\lambda_{dj} \Delta t) \ \cdots \ b_j^{\otimes} \exp(\lambda_{dj} \Delta t (rp - 1)) \right] \quad (2.74)$$

A série proveniente do modelo calculado pelo ERA é obtida via equação (2.75).

$$\left[ [q_1] \ [q_2] \ \cdots \ [q_j] \ \cdots \ [q_n] \right]^{\otimes} = [\Psi_d]^{-1} [\Sigma_n]^{1/2} [V_n]^T \quad (2.75)$$

O indicador de coerência de amplitude modal para o  $j$ -ésimo modo é proposto pela equação (2.76).

$$MAC_j = \frac{|\bar{q}_j^{\otimes} q_j|}{|\bar{q}_j^H q_j| |q_j^H q_j|} \quad (2.76)$$

### 2.6.3.2 Coerência de Amplitude Modal Estendida (EMAC)

A coerência de amplitude modal estendida quantifica a consistência temporal, resultando em valores no intervalo  $[0, 1]$ , assim como no índice MAC. A diferença entre

os métodos consiste na modificação da Matriz de Hankel Generalizada, apresentada na equação (2.44), proposta pelo EMAC, o qual propõe realizar um deslocamento de 10 amostras entre a penúltima e última, linha e coluna, da matriz  $H_{rs}(k-1)$  [52, 81, 82]. Realizado esta modificação nas matrizes  $H_{rs}(0)$  e  $H_{rs}(1)$ , o restante dos cálculos se mantêm como representado no fluxograma da figura 10. A figura 11 apresenta graficamente o deslocamento introduzido pela metodologia do EMAC.

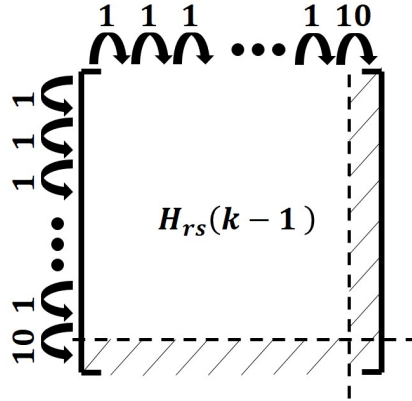


Figura 11 – Matriz hankel para utilização no EMAC.

A evolução temporal das formas e dos fatores de participação modais são calculadas desde o instante da primeira leitura dos dados em  $t = 0$ , até os respectivos tempos associados aos últimos blocos de linhas  $T_1$ , e colunas  $T_2$ , das matrizes de observabilidade e controlabilidade modal. Seja  $\phi_{jk_0}$  a componente  $k$  da forma modal  $j$ , obtida das primeiras  $p$  linhas da matriz  $P_M$ , então  $\tilde{\phi}_{jk}^{T_1}$  será a estimativa do mesmo elemento porém no instante  $T_1$ , conforme equação (2.77).

$$\tilde{\phi}_{jk}^{T_1} = \phi_{jk_0} e^{s_j T_1} \quad (2.77)$$

Onde  $s_j$  é o  $j$ -ésimo autovalor contínuo. A forma modal que será utilizada como referência é aquela localizada no último bloco de linhas de  $P_M$ , definida como  $\phi_{jk}^{T_1}$ . As equações (2.78) e (2.79) resultam em fatores que nos permitem comparar as magnitudes e ângulos de fase entre as formas modais de referência e estimada.

$$R_{Ojk} = \begin{cases} |\phi_{jk}^{T_1}|/|\tilde{\phi}_{jk}^{T_1}|, & \text{se } |\phi_{jk}^{T_1}| \leq |\tilde{\phi}_{jk}^{T_1}| \\ |\tilde{\phi}_{jk}^{T_1}|/|\phi_{jk}^{T_1}|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.78)$$

$$W_{Ojk} = \begin{cases} 1 - [|\angle(\phi_{jk}^{T_1}/\tilde{\phi}_{jk}^{T_1})|/(\pi/4)], & \text{se } |\angle(\phi_{jk}^{T_1}/\tilde{\phi}_{jk}^{T_1})| \leq \pi/4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.79)$$

Logo, o EMAC de saída é determinado via equação (2.80).

$$EMAC_{O_{jk}} = R_{O_{jk}} W_{O_{jk}} \quad (2.80)$$

Analogamente, realiza-se o processo para os fatores de participação e assim obter o EMAC de entrada. Seja  $\varphi_{jk_0}$ , a componente  $k$  da participação do modo  $j$ , obtida das  $m$  primeiras colunas da matriz  $Q_M$ , então  $\tilde{\varphi}_{jk}^{T_2}$  será a estimativa do mesmo em  $T_2$ , segundo equação (2.81).

$$\tilde{\varphi}_{jk}^{T_2} = \varphi_{jk_0} \exp(s_j T_2) \quad (2.81)$$

Considerando que  $\varphi_{jk}^{T_2}$  represente o último bloco de colunas de  $Q_M$ , têm-se as equações que comparam magnitudes e ângulos de fase, resultando no EMAC de saída, descritas de (2.82) à (2.84).

$$R_{I_{jk}} = \begin{cases} |\varphi_{jk}^{T_2}| / |\tilde{\varphi}_{jk}^{T_2}|, & \text{se } |\varphi_{jk}^{T_2}| \leq |\tilde{\varphi}_{jk}^{T_2}| \\ |\tilde{\varphi}_{jk}^{T_2}| / |\varphi_{jk}^{T_2}|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.82)$$

$$W_{I_{jk}} = \begin{cases} 1 - [|\angle(\varphi_{jk}^{T_2} / \tilde{\varphi}_{jk}^{T_2})| / (\pi/4)], & \text{se } |\angle(\varphi_{jk}^{T_2} / \tilde{\varphi}_{jk}^{T_2})| \leq \pi/4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.83)$$

$$EMAC_{I_{jk}} = R_{I_{jk}} W_{I_{jk}} \quad (2.84)$$

Finalmente, o EMAC definido para o  $j$ -ésimo modo é calculado por meio de uma média ponderada, conforme equação (2.85), limitado entre 0 e 1.

$$EMAC_j = \frac{[\sum_{k=1}^p (EMAC_{O_{jk}}) (|\phi_{jk}^{T_1}|)^2] [\sum_{k=1}^m (EMAC_{I_{jk}}) (|\varphi_{jk}^{T_2}|)^2]}{[\sum_{k=1}^p (|\phi_{jk}^{T_1}|)^2] [\sum_{k=1}^m (|\varphi_{jk}^{T_2}|)^2]} \quad (2.85)$$

### 2.6.3.3 Colinearidade de Fase Modal (MPC)

O indicador de colinearidade de fase modal calcula a relação funcional entre as partes real e imaginária de um modo identificado, ou seja, a consistência espacial da identificação [82]. A análise deste indicador determina se o vetor de forma modal apresenta comportamento "monofásico", isto é, se todas as posições de uma estrutura vibram em fase, ou fora de fase [52]. O método aplicado para determinar este critério consiste em analisar os autovalores da matriz de variância e covariância das partes real e imaginária de cada modo do sistema realizado.

Valores unitários de MPC implicam que ao menos um autovalor da matriz  $S$  será nulo e, portanto, os ângulos de fase da forma modal estão correlacionados. Entretanto, caso o indicador retorne valor nulo significará que os autovalores de  $S$  são aproximadamente iguais, não havendo correlação. Sejam os vetores  $\Phi_j^{Re}$  e  $\Phi_j^{Im}$ , contendo as partes real e imaginária da forma modal do  $j$ -ésimo modo, então a matriz  $S$  pode ser determinada, segundo equação (2.86).

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= \Phi_j^{ReT} \Phi_j^{Re} = \sum_{k=1}^N [\Phi_{jk}^{Re}]^2 \\
 S_{xy} &= \Phi_j^{ReT} \Phi_j^{Im} = \sum_{k=1}^N [\Phi_{jk}^{Re} \Phi_{jk}^{Im}] \\
 S_{yy} &= \Phi_j^{ImT} \Phi_j^{Im} = \sum_{k=1}^N [\Phi_{jk}^{Im}]^2 \\
 S &= \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Os autovalores de  $S$  são calculados conforme equações (2.87) e (2.88).

$$\lambda_{S1,2} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm S_{xy} \sqrt{\eta^2 + 1} \tag{2.87}$$

$$\eta = \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2S_{xy}} \tag{2.88}$$

O índice colinearidade de fase modal para o  $j$ -ésimo modo é proposto pela equação (2.89).

$$MPC_j = \left( \frac{\lambda_{S1} - \lambda_{S2}}{\lambda_{S1} + \lambda_{S2}} \right)^2 \tag{2.89}$$

Note que sistemas SISO sempre apresentarão valor unitário para este indicador, uma vez que os vetores  $\Phi^{Re}$  e  $\Phi^{Im}$  possuirão dimensão unitária.

#### 2.6.3.4 Valor Singular Modal (MSV)

O valor singular modal fornece a contribuição de cada modo  $j$  na resposta impulsiva do sistema [82, 83]. A motivação deste indicador deriva da ideia de que um modo com elevada contribuição para a resposta impulsiva do sistema, também será responsável pela resposta impulsiva real do sistema em análise. O cálculo do MSV necessita das matrizes

$[B_d]_M$  e  $[C_d]_M$ , aplicadas conforme equação (2.90) para o  $j$ -ésimo modo.

$$MSV_j = \sqrt{||[\phi_j]|| \left( \sum_{k=1}^{N_{Markov}-2} |\lambda_{dj}|^2 \right) ||[\varphi_j]||} \quad (2.90)$$

Na equação (2.90),  $N_{Markov}$  é o número de parâmetros de Markov, ou seja, o número de medições realizadas na saída do sistema quando em cada entrada é aplicada, separadamente, a função impulso. No trabalho foi adotado a normalização deste índice, de forma que o MSV esteja limitado entre zero e um.

#### 2.6.3.5 Indicador de Consistência Modal (CMI)

O indicador de consistência modal é definido como o produto entre o EMAC e o MPC, sintetizando as qualidades de ambos. Em seu projeto de desenvolvimento [52] foi observado que a precisão do algoritmo de realização de sistemas é dependente da consistência temporal e espacial do modo, justificando a utilização do CMI. A equação (2.91) apresenta matematicamente o produto para qualificar o  $j$ -ésimo modo.

$$CMI_j = EMAC_j \times MPC_j \quad (2.91)$$

#### 2.6.4 Exemplos de Aplicação do ERA em Sistemas Radiais

A topologia do sistema radial, assim como os dados da máquina síncrona e o ponto de operação, são apresentados no apêndice A. A proposta dos exemplos é verificar a capacidade do ERA em estimar corretamente o comportamento de estabilidade em regime permanente do sistema radial, determinando os autovalores e comparando com aqueles provenientes da matriz característica do sistema.

A máquina síncrona no barramento 1 está representada pelo modelo clássico, cujas equações diferenciais para o ângulo do rotor  $\delta$ , e velocidade angular  $\omega$ , são apresentadas no sistema (2.92).

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega_s(\omega - 1) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{2H}[P_m - P_e - D_m(\omega - 1)] \end{cases} \quad (2.92)$$

Em estudos de regime permanente, têm-se como ponto de partida a matriz característica do sistema, a qual é calculada por meio da linearização do conjunto de equações



diferenciais (2.92). Sendo a potência mecânica no eixo da máquina a entrada da linearização, e estabelecendo como saídas o ângulo e velocidade angular do rotor, têm-se a representação no espaço de estados do sistema radial (2.93).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_s \\ \frac{-P_s}{2H} & \frac{-D_m}{2H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2H} \end{bmatrix} [\Delta P_m] \\ [\Delta\delta] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Onde  $P_s$  é o coeficiente que indica a sensibilidade da variação de potência elétrica pela variação do deslocamento angular, conhecido também como coeficiente de potência sincronizante. A equação (2.94) apresenta a fórmula simplificada para seu cálculo, específica para máquinas do tipo polos lisos.

$$P_s = \left. \frac{dP_e}{d\delta} \right|_{\delta_0} = \frac{EV_2}{x_d + x_{sis}} \cos \delta_0 \quad (2.94)$$

Na equação (2.94),  $\delta_0$  refere-se ao ângulo calculado para o ponto de operação, o qual deseja-se avaliar a estabilidade angular. Substituindo os dados do ponto de operação do sistema, apresentados no apêndice A, na equação (2.94) e, posteriormente, em (2.93), resulta na representação no espaço de estados (2.95).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 376,9911 \\ -0,2074 & -0,1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1000 \end{bmatrix} [\Delta P_m] \\ [\Delta\delta] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Na representação (2.95), para cada exemplo, modifica-se o vetor que multiplica as variáveis de estado, de forma a obter diferentes saídas e, conseqüentemente, curvas, para serem avaliadas no ERA. Considera-se como um sucesso, toda vez que o ERA estimar precisamente os mesmos autovalores que os obtidos da matriz característica, apresentados na equação (2.96), os quais foram calculados por meio do método QR na matriz de estados

do sistema linearizado.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0,0500 + j8,8423 \\ \lambda_2 = -0,0500 - j8,8423 \end{cases} \quad (2.96)$$

#### 2.6.4.1 Caso A - Impulso em $\Delta P_m$ sem ruído - sinal de saída $\Delta\delta$

O objetivo deste exemplo será avaliar a validade do ERA considerando que a análise de autovalores é conhecida! Sendo assim, será aplicado uma função impulso em  $[\Delta P_m]$  e, conseqüentemente, será utilizado a resposta  $[\Delta\delta]$  para calcular os autovalores via ERA. Considera-se que sobre o sistema não havia condição inicial,  $y(t_{0-}) = 0$ , e foram adquiridas 2000 amostras igualmente espaçadas, desde  $t_0 = 0$  até  $t = 30$  segundos, com tempo de amostragem definido em  $0,015[s]$ . A figura 12 apresenta a curva de variação de  $\delta$  para uma entrada ao impulso, esta curva será utilizada como entrada para o ERA.

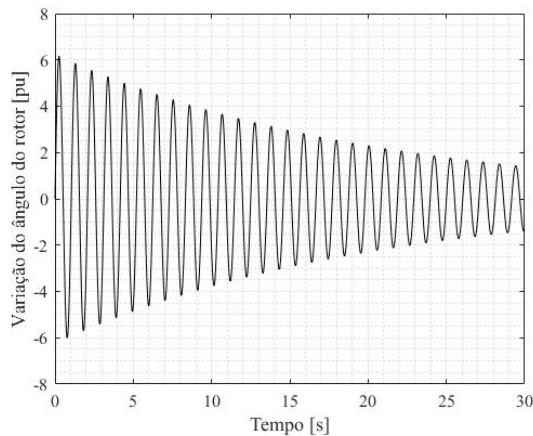


Figura 12 – Variação do ângulo do rotor aplicado impulso na potência mecânica.

A escolha da ordem das matrizes Hankel é arbitrária, sendo assim, considerou-se que  $H_{rs}(0)$  e  $H_{rs}(1)$  apresentarão ordem igual à metade do número de amostras inseridas, ou seja,  $1000 \times 1000$ . O indicador de confiança EMAC, o qual será avaliado assim como os demais índices desenvolvidos, requer que ambas as matrizes Hankel apresentem deslocamento de 10 amostras entre o penúltimo e último bloco de linhas e colunas. Portanto, para que seja atendida tal condição, propõe alterar de 1000 para 990 a ordem inicial de  $H_{rs}(0)$  e  $H_{rs}(1)$ , podendo desconsiderar tanto as primeiras, quanto as últimas amostras.

Neste trabalho, foi arbitrado desconsiderar as 11 primeiras amostras, conforme equação (2.97), o que promoveu facilidade na implementação computacional.

$$\begin{aligned}
H_{rs}(0) &= \begin{pmatrix} Y(12) & Y(13) & \cdots & Y(1000) & Y(1010) \\ Y(13) & Y(14) & \cdots & Y(1001) & Y(1011) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y(1000) & Y(1001) & \cdots & Y(1988) & Y(1998) \\ Y(1010) & Y(1011) & \cdots & Y(1998) & Y(1999) \end{pmatrix}_{990 \times 990} \\
H_{rs}(1) &= \begin{pmatrix} Y(13) & Y(14) & \cdots & Y(1001) & Y(1011) \\ Y(14) & Y(15) & \cdots & Y(1002) & Y(1012) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y(1001) & Y(1002) & \cdots & Y(1989) & Y(1999) \\ Y(1011) & Y(1012) & \cdots & Y(1999) & Y(2000) \end{pmatrix}_{990 \times 990}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Avaliando a equação (2.97) com os dados obtidos da série temporal, figura 12, obtém-se as duas matrizes Hankel.

$$\begin{aligned}
H_{rs}(0) &= \begin{pmatrix} 4,2024 & 4,2243 & \cdots & 1,1715 & 1,8594 \\ 4,2243 & 4,1720 & \cdots & 1,3771 & 1,7444 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1,1715 & 1,3771 & \cdots & -0,2081 & 0,8527 \\ 1,8597 & 1,7444 & \cdots & 0,8527 & 0,9008 \end{pmatrix}_{990 \times 990} \\
H_{rs}(1) &= \begin{pmatrix} 4,2243 & 4,1720 & \cdots & 1,3771 & 1,7444 \\ 4,1720 & 4,0464 & \cdots & 1,5581 & 1,5989 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1,3771 & 1,5581 & \cdots & -0,0823 & 0,9008 \\ 1,7444 & 1,5989 & \cdots & 0,9008 & 0,9329 \end{pmatrix}_{990 \times 990}
\end{aligned}$$

O próximo passo é o cálculo da decomposição em valores singulares de  $H_{rs}(0)$  para determinar a mínima ordem que represente o sistema dinâmico. Entre adotar uma tolerância para os valores singulares ou utilizar o posto da matriz de valores singulares, foi escolhida a primeira opção, não somente para diminuir o gasto computacional, como também nos próximos exemplos serão estudados casos que contenham ruídos nas medições.

Portanto, assumindo uma tolerância para a decomposição em valores singulares de  $\varepsilon = 0,01$ , têm-se a redução da ordem do sistema de 990 para 2. O cálculo das matrizes de estado discretas, as quais modelam a representação do ERA, definidas na equação (2.62), resultam em:

$$[A_d] = \begin{bmatrix} 0,9895 & 0,1322 \\ -0,1322 & 0,9915 \end{bmatrix} \quad [B_d] = \begin{bmatrix} -2,0536 \\ -0,1220 \end{bmatrix} \quad [C_d] = \begin{bmatrix} -2,0536 & 0,1220 \end{bmatrix} \quad [D_d] = [0]$$

Os autovalores discretos  $\lambda_d$ , determinados a partir de  $[A_d]$ , e seus análogos contínuos  $\lambda_c$ , utilizando equação (2.63), são apresentados abaixo:

$$\begin{cases} \lambda_{d1} = 0,9905 + j0,1322 \\ \lambda_{d2} = 0,9905 - j0,1322 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{c1} = -0,0500 + j8,8423 \\ \lambda_{c2} = -0,0500 - j8,8423 \end{cases}$$

É possível verificar que os autovalores encontrados pelo ERA são iguais aos detectados previamente pela QR, segundo equação (2.96). Como forma de avaliação propõe-se também avaliar os índices de confiança para este exemplo, os quais são apresentados na tabela 1.

Tabela 1 – Índices de confiança para o sistema radial aplicado impulso em  $\Delta P_m$ .

Índice	$\lambda_{c1}$	$\lambda_{c2}$
<i>MAC</i>	0,9997	0,9997
<i>EMAC</i>	0,9993	0,9993
<i>MPC</i>	1,0000	1,0000
<i>MSV</i>	1,0000	1,0000
<i>CMI</i>	0,9993	0,9993

Pela análise da tabela 1, é possível observar que o índice EMAC sofreu uma pequena diferença no cálculo da razão de módulos, justificada pela propagação de erros no cálculo da estimativa da forma e participação modal. O desvio encontrado no MAC têm sua causa associada a modificação da consistência temporal dos dados, devido ao deslocamento temporal produzido sobre a matriz Hankel para que fosse calculado o EMAC. Por outro lado verifica-se que os resultados foram satisfatórios, pois o ERA conseguiu encontrar todos os autovalores do sistema, com índices de confiança validando este resultado.

2.6.4.2 Caso B - Degrau em  $\Delta P_m$  com ruído - sinal de saída  $\Delta\delta$ 

A análise do ERA será avaliada estabelecendo na entrada do sistema  $[\Delta P_m]$  um degrau de amplitude 0,05, em substituição à função impulso (caso A). Complementando a saída é considerado também a presença de ruído não correlacionado, cuja amplitude máxima é de 0,03 [pu], apresentando 20 [dB] de intensidade. A figura 13a apresenta a resposta do sistema ao degrau, enquanto que na figura 13b ilustra o mesmo sinal com adição do ruído.

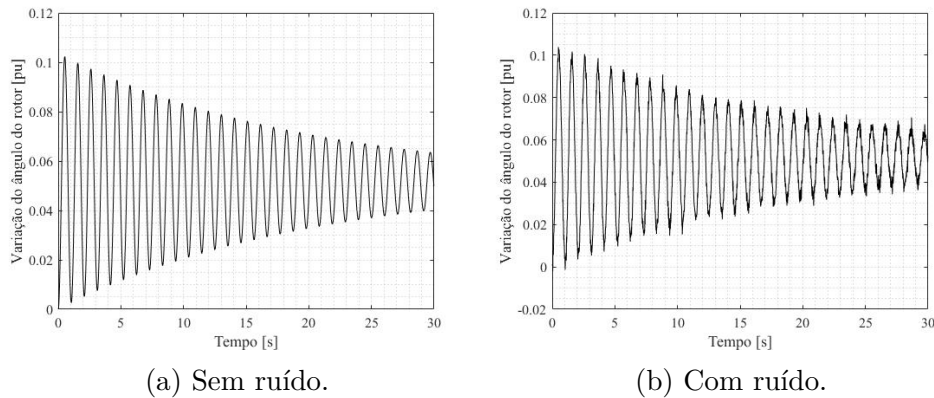


Figura 13 – Variação do ângulo do rotor versus tempo, devido a um degrau na potência mecânica.

Utilizando como entrada os dados da figura 13b, os autovalores encontrados pelo ERA, assumindo a mesma formatação das matrizes Hankel e tolerância para os valores singulares que aquelas adotadas para o caso A, são:

$$\begin{cases} \lambda_{c1} = -2,4610E - 04 \cong 0 \\ \lambda_{c2} = -0,0490 + j8,8435 \\ \lambda_{c3} = -0,0490 - j8,8435 \end{cases}$$

A presença de um terceiro autovalor era esperada, uma vez que foi introduzido ao ERA dados provenientes de uma entrada do tipo degrau complementada com ruído, situação distinta ao desenvolvimento algébrico do algoritmo, porém, esta escolha foi adotada para validar a robustez da metodologia do ERA para entradas em degrau e com a consideração de ruídos. A tabela 2 reúne o valor dos indicadores para o referido exemplo.

Tabela 2 – Índices de confiança para o sistema radial, aplicado degrau em  $[\Delta P_m]$ .

<b>Índice</b>	$\lambda_{c1}$	$\lambda_{c2}$	$\lambda_{c3}$
<i>MAC</i>	1,0000	0,9997	0,9997
<i>EMAC</i>	0,9995	0,9887	0,9887
<i>MPC</i>	0	1	1
<i>MSV</i>	0,0036	1,0000	1,0000
<i>CMI</i>	0	0,9887	0,9887

A dinâmica do sistema foi corretamente capturada por meio dos índices CMI, MPC e MSV, ainda que a série utilizada seja uma entrada diferente do impulso unitário. Os índices MAC e EMAC apresentaram resultados próximos a unidade para todos os autovalores, pois todos foram responsáveis pelo comportamento apresentado na figura 13b, tanto aqueles que modelam a dinâmica do sistema de potência ( $\lambda_{c2,3}$ ), como os provenientes de ruídos ( $\lambda_{c1}$ ).

A característica do EMAC em calcular a razão entre fim de uma janela de tempo expandida, e o início da dinâmica, demonstra vulnerabilidade do indicador em casos onde o ruído modifique severamente os primeiros pontos que serão inicializados nas matrizes Hankel. Neste caso o efeito não foi tão prejudicial, ainda que o EMAC sinalizou maior confiança no autovalor que menos representa a dinâmica deste sistema.

O índice MPC avalia a colinearidade de fase modal, ou seja, autovalores complexos conjugados resultam em valores unitários para o indicador, sinalizando que o primeiro autovalor calculado tenha sido gerado por ruído. O MSV, por outro lado, avalia a influência destes em relação ao decaimento de uma função impulso no sistema, determinando corretamente a dinâmica deste cenário. Portanto, com base na interpretação dos resultados dos índices, sobretudo o CMI, MPC e MSV, concluí-se, de fato, que o autovalor  $\lambda_{c1}$  pode ser desconsiderado do conjunto solução.

#### 2.6.4.3 Caso C - Degrau em $\Delta P_m$ com ruído - sinal de saída $\Delta P_e$

Neste estudo será analisado o ERA considerando que a variável de saída do sistema seja a potência elétrica, cuja equação é apresentada em (2.98).

$$\Delta P_e = P_s \Delta \delta \quad (2.98)$$

Foi utilizado o mesmo degrau e ruído considerado na 2.6.4.2, ou seja, ruído com

0,03 [pu] de máxima amplitude contendo 20 [dB] de intensidade, adicionado ao degrau, o qual possui 0,05 [pu] de máxima amplitude. A figura 14 apresenta a resposta de variação da potência elétrica quando da aplicação do degrau, sem ruído (figura 14a) e com ruído (figura 14b).

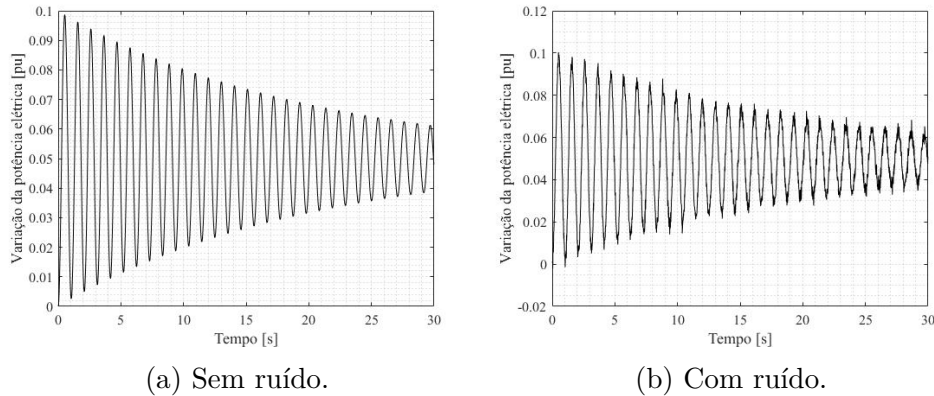


Figura 14 – Variação da potência elétrica aplicado degrau e ruído na  $\Delta P_m$ .

Os autovalores contínuos identificados pelo ERA são:

$$\begin{cases} \lambda_{c1} = -1,1781E - 04 \cong 0 \\ \lambda_{c2} = -0,0495 + j8,8428 \\ \lambda_{c3} = -0,0495 - j8,8428 \end{cases}$$

Assim como verificado no exemplo anterior, surgiu um terceiro autovalor. O cálculo dos indicadores de confiança foi realizado e apresentado na tabela 3.

Tabela 3 – Índices para o sistema radial, considerando entrada degrau unitário com ruído.

Índice	$\lambda_{c1}$	$\lambda_{c2}$	$\lambda_{c3}$
MAC	1,0000	0,9997	0,9997
EMAC	0,9995	0,9928	0,9928
MPC	0	1	1
MSV	0,0036	1,0000	1,0000
CMI	0	0,9928	0,9928

Observe que, o cálculo da variação da potência elétrica é calculado por meio do produto de  $\Delta\delta$  com  $P_s$  e, portanto, era esperado que os resultados desta tabela fossem próximos do calculado na tabela 2 (caso B).

2.6.4.4 Caso D - Degrau em  $\Delta P_m$  com ruído - sinal de saída  $\Delta\omega$ 

Nesta etapa da análise será considerada a curva de variação da velocidade angular  $\Delta\omega$  como sinal a ser analisado pelo ERA. Já para a determinação de  $\Delta\omega$  foi definido uma entrada em degrau de 0,05 [pu] na potência mecânica, com ruído não correlacionado de 20 [dB] correspondente a uma amplitude de 0,0003 [pu]. Na figura 15 apresentam-se as formas de onda, da variável  $\Delta\omega$ , sem e com ruído, respectivamente nas figuras 15a e 15b.

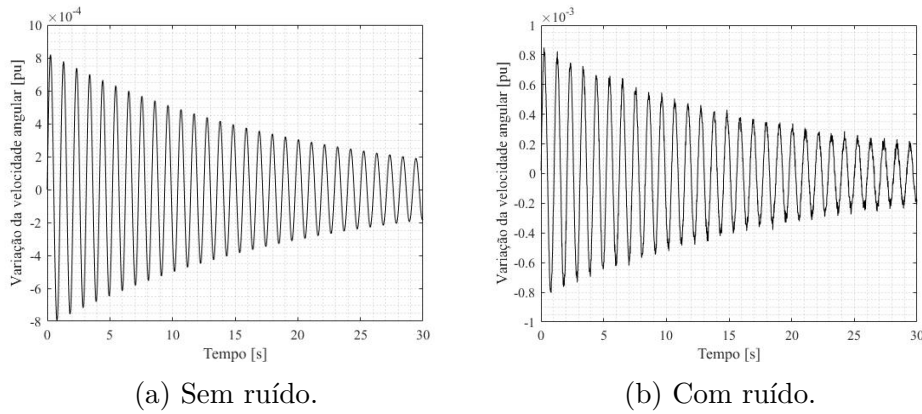


Figura 15 – Variação da velocidade angular aplicado entrada degrau e ruído na  $\Delta P_m$ .

Considerando a entrada realizada por meio da curva apresentada na figura 15b e mesma tolerância aplicada sobre os valores singulares igual a  $\varepsilon = 0,01$ , a ordem do sistema reduzido neste exemplo foi determinada igual a 2, resultando nos seguintes autovalores contínuos:

$$\begin{cases} \lambda_{c1} = -0,0494 + j8,8421 \\ \lambda_{c2} = -0,0494 - j8,8421 \end{cases}$$

Os indicadores de confiança avaliados para este caso são apresentados na tabela 4.

Tabela 4 – Índices de confiança para o sistema radial aplicado degrau em  $\Delta P_m$ .

Índice	$\lambda_{c1}$	$\lambda_{c2}$
<i>MAC</i>	0,9997	0,9997
<i>EMAC</i>	0,9936	0,9936
<i>MPC</i>	1	1
<i>MSV</i>	1	1
<i>CMI</i>	0,9936	0,9936

Nos casos B e C foi constatado que aplicar degrau com ruído e analisar o ângulo do rotor  $\delta$ , ou a potência elétrica  $P_e$ , surgia um autovalor proveniente de erro numérico.



Entretanto, a aplicação do ERA neste cenário já conseguiu identificar corretamente os autovalores que regem a dinâmica do sistema, com os indicadores de confiança apresentados na tabela 4 validando o resultado.

Observe que, na figura 15, todas as curvas, sem e com ruído, convergem para 0 na medida que o tempo avança, diferente do que foi observado nas figuras 13 e 14. A característica observada reflete na precisão dos resultados, uma vez que para a variação da velocidade angular, um degrau na potência mecânica assemelha-se muito ao comportamento esperado se um impulso fosse aplicado em substituição ao degrau.

Para comprovar este argumento é apresentada a figura 16, contendo a curva esperada para um impulso aplicado em  $\Delta P_m$ , sem (figura 16a) e com (figura 16b) ruído.

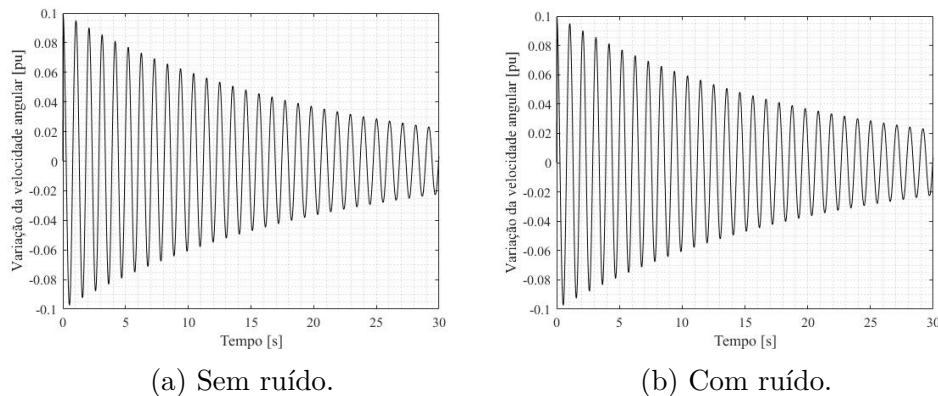


Figura 16 – Variação da velocidade angular aplicado entrada impulso e ruído na  $\Delta P_m$ .

Verifica-se, portanto, que mesmo com amplitudes distintas, ambas as as figuras 15 e 16 tendem a convergir seus valores finais de variação da velocidade angular para zero. Uma vez que as curvas sejam similares em forma, assim serão também os autovalores identificados.

## 2.7 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentadas metodologias para o cálculo de autovalores e suas aplicações na estimação dos parâmetros modais em sistemas dinâmicos. Entre os métodos, o QR foi o único que inicia seu cálculo a partir de uma matriz de estados, sendo que os demais podem ser aplicados em sinais de medição. O método de Prony destaca-se por sua facilidade de implementação, entretanto, em sua versão tradicional, não permite

o tratamento para sistemas com múltiplas entradas e saídas, e ainda pode gerar erros numéricos se a estimativa para o ordem do sistema não for precisa.

Da mesma forma que o Prony, o método da máxima verossimilhança recursiva, ou RML, também é vulnerável a erros numéricos se as estimativas para as ordens dos polinômios do ARMAX não forem satisfatórias. Por outro lado, o RML apresenta como forte característica sua capacidade de obter resultados na medida que as amostras são disponibilizadas, permitindo acompanhar os autovalores e amortecimento para cada instante de tempo.

O DMD é um método que permite trabalhar com sistemas MIMO, e utilizando da decomposição em valores singulares, permite realizar um tratamento sobre os erros numéricos que eventualmente podem surgir da estimação de autovalores. Por fim foi apresentado o ERA, o qual também utiliza da decomposição em valores singulares do DMD, mas difere-se no agrupamento de dados exercido pelas matrizes hankel, agregando maior robustez à metodologia, tal como evidenciado nos resultados preliminares em um sistema radial utilizando funções de entrada diferentes do impulso.

# 3 Resultados da Estabilidade Angular em Regime Permanente

## 3.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através da análise dos algoritmos de estimação de amortecimento em um sistema elétrico de potência. O sistema teste (BBTS) escolhido foi o “Brazilian Birds”, o qual apresenta 43 barras, 3 usinas hidrelétricas e 1 térmica, conforme apresentado no apêndice B. Com o propósito de se determinar o desempenho de cada técnica, os conjuntos calculados serão comparados aos autovalores do sistema obtidos via PacDyn [84], que é uma ferramenta computacional para análise de Estabilidade Angular em Regime Permanente, que é desenvolvida pelo Centro de Pesquisas em Energia Elétrica, vinculada ao sistema Eletrobras.

## 3.2 Metodologia de Comparação

### 3.2.1 Descrição do Método

Os métodos de estimação de amortecimento produzem como resposta um conjunto de autovalores, cuja dimensão pode ser distinta do sistema em análise. A avaliação da qualidade das estimativas de autovalores utiliza, em geral, gráficos contendo nos eixos das abcissas e ordenadas as partes real e imaginária, respectivamente, de cada modo do sistema. Entretanto, em cenários onde há uma grande quantidade de autovalores a serem apresentados, a dependência exclusiva destes elementos ilustrativos pode elevar a complexidade da observação, e compreensão, da dinâmica capturada pelos algoritmos de identificação.

Neste trabalho, propõe-se uma contribuição para a análise de grandes conjuntos de dados, realizando uma rotina de filtro de resultados por meio da comparação entre dois vetores de dimensões, e valores, distintos. A figura 17 apresenta o fluxograma contendo a metodologia de comparação.

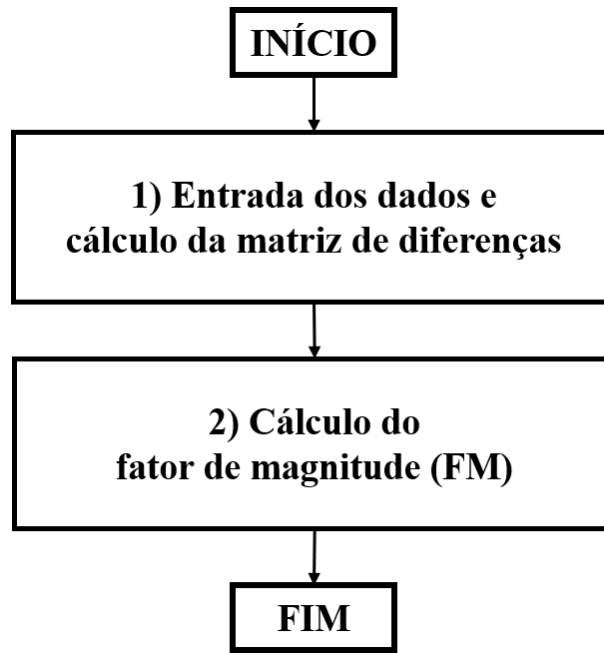


Figura 17 – Fluxograma referente à comparação de 2 vetores com dimensões distintas.

Cada bloco que constitui a figura 17 será detalhado a seguir, com o objetivo de, ao final da rotina, obter um indicador: o fator de magnitude (FM). A figura 18 apresenta a entrada do fluxograma por meio dos vetores de referência, e o alvo da comparação. Em seguida, calcula-se a matriz de diferenças, a qual será utilizada para o desenvolvimento dos indicadores.

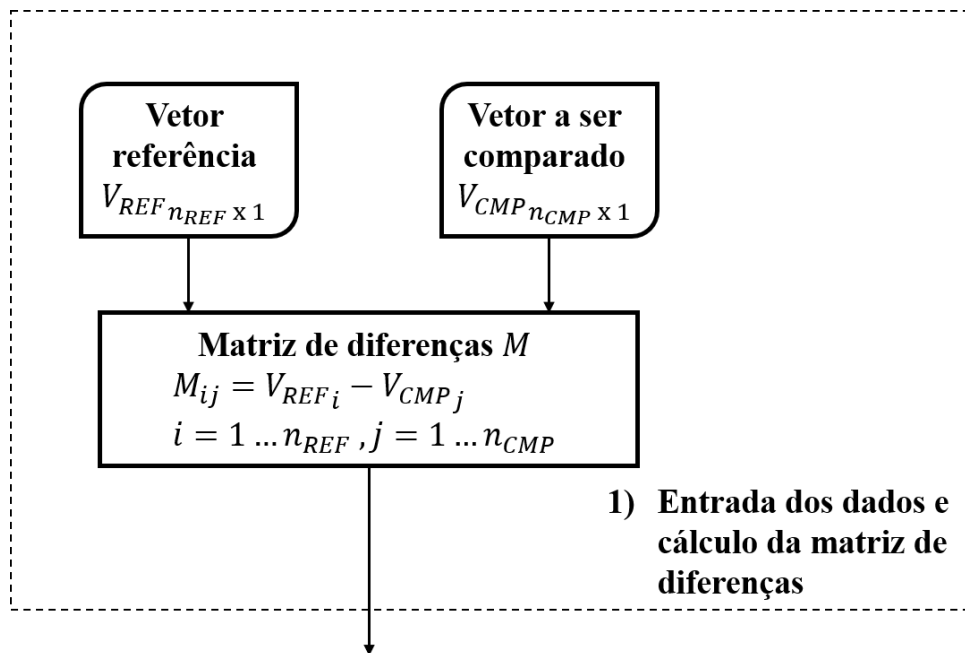


Figura 18 – Entrada de dados no fluxograma da figura 17.

A matriz apresentada têm número de linhas e colunas igual ao comprimento dos vetores de referência  $V_{REF}$  e o alvo da comparação  $V_{CMP}$ . Concluído os cálculos têm-se um resultado de fácil observação, note que para a  $j$ -ésima coluna, por exemplo, obtém-se em cada linha os valores dos desvios entre cada elemento que constitui  $V_{REF}$  pelo  $j$ -ésimo autovalor de  $V_{CMP}$ .

### 3.2.2 Fator de Magnitude (FM)

O fator de magnitude (FM) é um índice com limites entre 0 e 1, cujo objetivo é avaliar se os elementos encontrados em  $V_{CMP}$  são correspondentes, perante uma tolerância, aos valores descritos em  $V_{REF}$ . Logo, um FM unitário significa que  $V_{CMP}$  apresenta, dentro de seu conjunto, todos os autovalores descritos em  $V_{REF}$ . A comparação exercida pela tolerância é realizada com base no módulo dos elementos e, de acordo com as simulações realizadas neste trabalho, foi considerado usar tal parâmetro em 0,100. A figura 19 apresenta a rotina de execução para o FM.

O cálculo de FM é realizado iterativamente, analisando o módulo da primeira coluna da matriz de diferenças por etapa, armazenando no vetor  $vec$ . Em seguida, avalia-se o vetor  $vec$  para identificar a linha  $lin$  correspondente ao menor desvio encontrado. O mínimo valor de  $vec$ , isto é,  $vec(lin)$  é comparado com a tolerância  $tol$ . Caso o teste seja positivo, implicará que ao menos 1 elemento de  $V_{CMP}$  assemelha-se à 1 autovalor de  $V_{REF}$ , o que nos leva aos questionamentos: O autovalor em questão está se repetindo em  $V_{CMP}$ ? O autovalor encontrado em  $V_{CMP}$  é apenas 1 dentre todas as repetições existentes em  $V_{REF}$ ?

Antes de abordar as questões levantadas é realizada a operação recursiva para atualizar o FM acumulado, considerando a razão de  $(1 - vec(lin))$  pela dimensão do vetor referência  $n_{REF}$ . Desta forma, têm-se um FM que permite ao analista obter resultados mais precisos sobre a qualidade da estimação, além de sua função básica em informar a quantidade de autovalores em  $V_{CMP}$  que correspondem à  $V_{REF}$ .

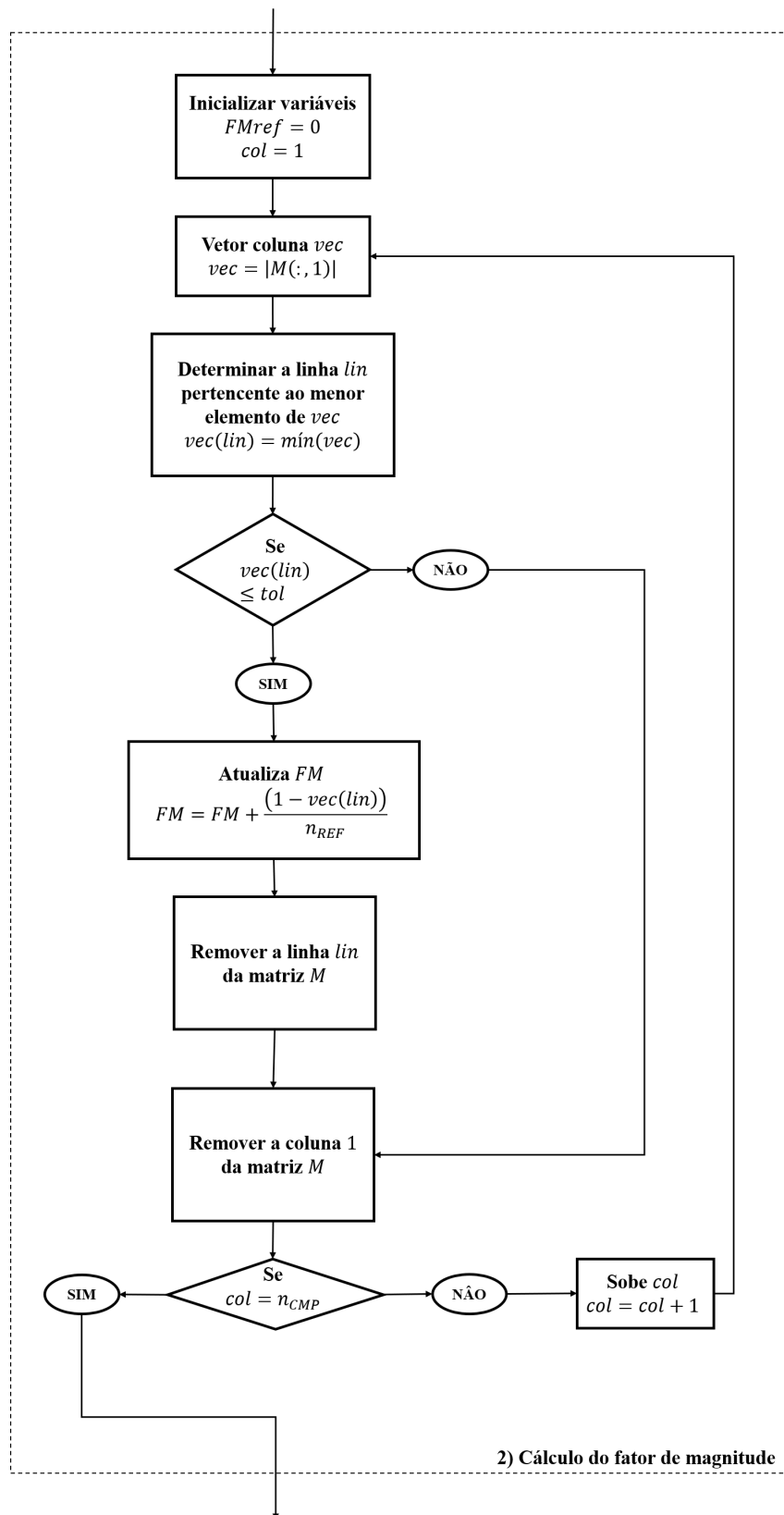


Figura 19 – Cálculo do FM no fluxograma da figura 17.

Sobre a questão de valores repetidos em  $V_{CMP}$ , é possível contornar este problema ao realizar a remoção da linha  $lin$ , aquela respectiva ao menor elemento encontrado no

vetor  $vec$ , na matriz de diferenças  $M$ . Note que realizar este processo e, supondo que existam elementos repetidos em  $V_{CMP}$ , haverá uma iteração que nenhuma célula do vetor  $vec$  respeitará a tolerância  $tol$  para o valor repetido, o que inibirá automaticamente a contabilização de elementos repetidos em FM, de acordo com o fluxograma da figura 19.

O próximo ponto de dúvida é a possibilidade de repetições no vetor referência, o que influenciará diretamente nas colunas da matriz  $M$ , pois ao menos 2 células validarão a tolerância estipulada. A solução deste problema é incluir na rotina a remoção da primeira coluna de  $M$  a cada iteração do método, permitindo que em uma próxima etapa sejam analisadas cada vez menos valores que respeitem a tolerância, até alcançar a convergência para o FM.

O segundo passo de verificação consiste em comparar o número da coluna atual  $col$  com o comprimento do vetor em comparação  $V_{CMP}$ . Se positivo, a rotina é finalizada, caso contrário, o iterador  $col$  é acrescido em 1, retornando para a fase de extração do vetor  $vec$ .

### 3.3 Sistema Brazilian Birds

O ponto de operação definido para análise da estabilidade angular em regime permanente sendo apresentado pela tabela 5.

Tabela 5 – Ponto de operação utilizado para o sistema teste

Número da Barra	Tipo	Nome da Barra	Tensão [pu]	Ângulo [graus]	Área
10	Referência	CANARIO-18	1,030	0,0	1
11	PV	SABIA—13	1,030	-11,0	1
100	PQ	CANARIO230	1,043	-4,1	1
110	PQ	SABIA—230	1,045	-15,0	1
1110	PQ	SABIA—FIC	1,080	-17,0	1
111	PQ	SABIA—138	1,027	-19,0	1
112	PQ	SABIA—440	1,078	-17,0	1
113	PQ	SABIA—13	1,080	-17,0	1
120	PQ	CARDEAL230	1,028	-14,0	1

Continuação da Tabela 5

Número da Barra	Tipo	Nome da Barra	Tensão [pu]	Ângulo [graus]	Área
121	PQ	CARDEAL-88	1,002	-18,0	1
130	PQ	CURIO-230	1,047	-15,0	1
1130	PQ	CURIO-FIC	1,089	-12,0	1
131	PQ	CURIO-CS5	1,078	-13,0	1
132	PQ	CURIO-440	1,087	-12,0	1
133	PQ	CURIO-13	1,089	-12,0	1
134	PQ	CURIO-69	1,010	-21,0	1
135	PQ	CURIO-138	1,001	-21,0	1
140	PQ	SANHACO-69	0,979	-23,0	1
150	PQ	TIZIU-230	1,022	-15,0	1
151	PQ	TIZIU-138	1,005	-20,0	1
160	PQ	PARDAL-138	1,012	-21,0	1
161	PQ	PARDAL-69	1,008	-22,0	1
170	PQ	AZULAO-138	1,012	-20,0	1
171	PQ	AZULAO-69	1,003	-22,0	1
180	PQ	BICUDO-440	1,082	-17,0	1
1180	PQ	BICUDO-FIC	1,058	-22,0	1
181	PQ	BICUDO-69	1,058	-22,0	1
182	PQ	BICUDO-13	1,060	-22,0	1
190	PQ	CHOPIN-440	1,093	-17,0	1
191	PQ	CHOPIN-138	1,062	-23,0	1
20	PV	TUCANO-13	1,030	9,8	2
21	PV	GAVIAO-13	1,030	5,62	2
200	PQ	CORUJA-230	1,046	3,98	2
210	PQ	GAVIAO-230	1,038	2,86	2
220	PQ	ARARA-230	1,042	-5,6	2
1220	PQ	ARARA-FIC	1,093	-8,9	2
221	PQ	ARARA-CS5	1,079	-8,1	2



Continuação da Tabela 5

Número da Barra	Tipo	Nome da Barra	Tensão [pu]	Ângulo [graus]	Área
222	PQ	ARARA-440	1,090	-8,7	2
223	PQ	ARARA-13	1,093	-8,9	2
224	PQ	ARARA-138	1,009	-11,0	2
230	PQ	PELICAN230	1,048	-12,0	2
1230	PQ	PELICANFIC	1,098	-15,0	2
231	PQ	PELICAN440	1,095	-15,0	2
232	PQ	PELICANO13	1,098	-15,0	2
240	PQ	CORUJA-230	1,036	-14,0	2
250	PQ	URUBU-230	1,025	-7,4	2
251	PQ	URUBU-138	1,007	-13,0	2
260	PQ	GARCA-230	1,025	-5,0	2

Utilizando o PacDyn, obtém-se os autovalores que representam a dinâmica do sistema no ponto de operação definido pela tabela 5. Este conjunto será considerado como o vetor referência  $V_{REF}$ , descrito na seção 3.2, o qual é apresentado na tabela 6. Além disto, os dados dinâmicos utilizados pelo PacDyn para as máquinas síncronas do sistema *Brazilian Birds* se encontram no apêndice B.

Tabela 6 – Autovalores do Sistema BBTS

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4530	31	-1,7566
2	-57,2900	32	-1,6542
3	-56,7900	33	-1,4476
4	-43,2190	34	-1,0769
5	-37,9800	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8150	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2340	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1580	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5610	39	-1,0000
10	-22,5540	40	-0,8900 + j0,2583
11	-22,5440	41	-0,8900 - j0,2583
12	-21,2430	42	-0,06734
13	-18,3230	43	-0,01661
14	-15,4190	44	-0,01660
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

De acordo com os fatores de participação modal estimados via PacDyn, os modos eletromecânicos do sistema BBTS são destacados na tabela 7.

Tabela 7 – Modos Eletromecânicos do Sistema BBTS

Número	Modo Eletromecânico
1	-0,3028 ± j6,2872
2	-0,6364 ± j8,2757
3	-0,9951 ± j8,4454

Como observação adicional, os autovalores que obtiveram o menor amortecimento via PacDyn são aqueles que compõe o primeiro modo eletromecânico, contido na tabela

7, com valor calculado em 4,8101%.

### 3.4 Estudo de Casos

Nas subseções seguintes serão apresentados os conjuntos de autovalores identificados para cada técnica de estimação de amortecimento. Utilizando o modelo no espaço de estados do sistema *Brazilian Birds*, obtido via PacDyn [84], foi aplicada em uma entrada de cada vez a função impulso, com objetivo de adquirir nas saídas do sistema os sinais que serão introduzidos aos métodos de estimação.

Ao total foram avaliados 3 casos, onde, no caso 1, as entradas do sistema foram a potência mecânica  $P_m$  e tensão de referência  $V_{ref}$  em cada máquina síncrona. As saídas consideradas alternam conforme os 3 estudos realizados dentro deste primeiro caso, as quais são o ângulo do rotor  $\delta$  (estudo 1), velocidade angular  $\omega$  (estudo 2) e a potência elétrica  $P_e$  (estudo 3), de cada máquina conectada na rede elétrica. Em todas as simulações do caso 1, o tempo de amostragem foi 0,015 [s], aplicado durante 30 [s].

No caso 2, as entradas do sistema foram a potência mecânica  $P_m$  e tensão de referência  $V_{ref}$  em cada máquina síncrona. As saídas consideradas em cada um dos 4 estudos foram o ângulo do rotor  $\delta$ , velocidade angular  $\omega$ , potência elétrica  $P_e$  e potência mecânica  $P_m$ . A diferença em cada estudo deste caso consiste na escolha da máquina que fornecerá as saídas mencionadas, sendo: Canário (estudo 1), Sabiá (estudo 2), Tucano (estudo 3) e Gavião (estudo 4).

Em todas as simulações do caso 2, o tempo de amostragem foi 0,015 [s], aplicado durante 30 [s]. O caso 3 considerou como entradas a potência mecânica  $P_m$  e tensão de referência  $V_{ref}$  de cada máquina síncrona. As saídas consideradas foram o ângulo do rotor  $\delta$ , velocidade angular  $\omega$ , potência elétrica  $P_e$ , tensão de campo da máquina síncrona  $E_{fd}$ , tensões transitória  $E'_q$  e subtransitória  $E''_q$  no eixo em quadratura, e a tensão subtransitória  $E''_d$  de eixo direto, avaliadas em cada barra de geração. Somente foi realizado 1 estudo, cujo tempo de amostragem foi igual a 0,015 [s], durante 15 [s] de simulação.

É importante destacar que algoritmos como o ERA e DMD conseguem trabalhar de forma simultânea com todos os sinais disponibilizados. Por outro lado, o Prony e RML são técnicas que analisam somente 1 sinal de cada vez, ambos produzindo como resposta um conjunto de autovalores com ordem pré-estabelecida, referente a melhor aproximação

determinada para a dinâmica do sistema. Portanto, foi necessário criar uma rotina de repetição para que o Prony e RML estimassem os autovalores de cada sinal introduzido. O número de repetições será igual ao número total de sinais fornecidos, ou seja, o produto entre o número de entradas e saídas do sistema linearizado via PacDyn.

A escolha da melhor ordem que represente a dinâmica do sistema para os métodos de Prony e RML foi arbitrada por meio de diversos testes realizados. Para a primeira técnica, foi estipulado ordem igual à 6, enquanto que para os polinômios  $A(q)$ ,  $B(q)$  e  $C(q)$  do RML, as ordens estabelecidas foram 50, 10 e 5, respectivamente. Esta combinação gerou a melhor qualidade de estimação de autovalores, sendo utilizada nos casos 1 e 2, ou seja, todos os cenários considerados para aplicação do Prony e RML.

Na exibição dos resultados nas próximas subseções têm-se os autovalores que se comparam àqueles presentes na tabela 6, a qual contém o conjunto que será utilizado como referência na validação para cada um dos 4 métodos implementados. No apêndice C encontram-se todo o conjunto de autovalores identificados com as técnicas, sendo que para os métodos de Prony e RML foram registrados somente os elementos mais próximos dos correspondentes da tabela 6, devido ao grande número de autovalores produzidos nas estimativas. Para se ter uma noção da quantidade, em um estudo de caso com 8 entradas e 4 saídas, foram determinados no Prony e RML aproximadamente 192 e 1888 autovalores.

A proposta de todos os estudos realizados neste capítulo é avaliar o desempenho das técnicas nas melhores condições de sinal possíveis, sendo assim, o ruído foi desconsiderado. Logo, os métodos DMD e ERA determinarão a ordem mínima do sistema realizado por meio do posto da matriz de valores singulares. Além disso, não será realizado o deslocamento em 10 amostras na matriz Hankel para o cálculo dos índices EMAC e CMI no ERA, com o propósito de manter a equidade na validação das metodologias.

Em relação ao sistema de potência, as máquinas de Canário, conectadas na barra 10, constituem a referência angular da rede. Portanto, quando for desejado obter como saída do sistema o ângulo do rotor  $\delta$ , o PacDyn, por padrão, executará o cálculo da linearização do ângulo do rotor utilizando como referência o  $\delta_{10}$ . Desta forma, medições de  $\delta$  na barra 10 com relação ao mesmo barramento não serão consideradas nos estudos, pois resultarão em sinais nulos, o que além de comprometer a teoria de análise de sinais, não têm significado físico, pois indicaria que tal máquina não participa da dinâmica do

sistema de potência.

A escolha das entradas e saídas do sistema no espaço de estados será descrita para cada caso, assim como os métodos empregados para análise, considerando todos os pontos citados nesta seção. A implementação computacional empregou o Matlab R2016b, ambiente desenvolvido pela Mathworks [70].

### 3.4.1 Caso 1

Para este caso serão considerados estudos, respectivamente, sobre as curvas de ângulo do rotor  $\delta$ , velocidade angular  $\omega$ , e potência elétrica  $P_e$ , das máquinas do sistema, com referência à barra 10. A proposta é realizar um estudo respectivo a cada variável de saída, de forma a detectar se alguma destas permitem identificar mais autovalores. As medições das saídas citadas serão todas obtidas para uma mesma entrada, realizando um impulso na potência mecânica e na tensão de referência das barras de geração 10, 11, 20 e 21. Observe que a análise do caso 1 considera múltiplas entradas e saídas (MIMO).

#### 3.4.1.1 Estudo 1: Ângulo do Rotor

Considerando como variável de saída para análise o ângulo do rotor das máquinas equivalentes presentes nas barras 11, 20 e 21, têm-se como resultado as tabelas 8, 9, 10 e 11, respectivas às melhores estimações obtidas com os algoritmos de estimação de autovalores Prony, RML, DMD e ERA, quando comparados à resposta do PacDyn, presente na tabela 6.

Tabela 8 – Autovalores através do Prony no estudo 1, caso 1

Número	Autovalor
1	-28,8095
2	-22,5024
3	-1,0114 + j8,4423
4	-1,0114 - j8,4423
5	-0,6703 + j8,2479
6	-0,6703 - j8,2479
7	-0,3096 + j6,2890
8	-0,3096 - j6,2890
9	-1,7813
10	-1,6370
11	-1,0384
12	-1,0207
13	-0,01578

Tabela 9 – Autovalores através do RML no estudo 1, caso 1

Número	Autovalor
1	$-1,0035 + j8,4326$
2	$-1,0035 - j8,4326$
3	$-0,6351 + j8,2774$
4	$-0,6351 - j8,2774$
5	$-0,3042 + j6,2831$
6	$-0,3042 - j6,2831$
7	$-2,7638$
8	$-2,5263$
9	$-1,7059$
10	$-1,6497$
11	$-0,9504$
12	$-0,0662$
13	$-0,0229$

Tabela 10 – Autovalores através do DMD no estudo 1, caso 1

Número	Autovalor
1	$-0,2638 + j6,2489$
2	$-0,2638 - j6,2489$
3	$-0,2745 + j2,9893$
4	$-0,2745 - j2,9893$
5	$-0,0830 + j0,0688$
6	$-0,0830 - j0,0688$

Tabela 11 – Autovalores através do ERA no estudo 1, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1579	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5612	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5536	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,06734
12	-21,2433	42	-0,01660
13	-18,3227	43	-0,01661
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

Sobre os resultados apresentados, somente o DMD não obteve sucesso em identificar os 3 modos eletromecânicos do sistema. Ambos os métodos de Prony e RML identificaram a mesma quantidade de autovalores pertencentes ao sistema, sendo que a segunda técnica foi mais precisa na identificação de elementos com módulos menores. O ERA identificou uma ampla variedade de autovalores, destacando-se das demais implementações. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 12, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 12 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 1, caso 1

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	144	0,2860
RML	1200	0,2798
DMD	24	0,1281
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 12, os métodos de análise simultânea de sinais estimaram menos autovalores do que as demais técnicas, entretanto o ERA obteve a maior precisão entre as demais técnicas, restando a identificação de somente 1 autovalor para capturar completamente a dinâmica do sistema de potência. O método de Prony obteve um FM maior que o RML, ainda que ambas as técnicas tenham estimado a mesma quantidade de autovalores. A justificativa para tal ocorrência está relacionada com a capacidade do indicador em considerar o desvio entre o autovalor estimado com o seu correspondente calculado no PacDyn, sendo possível, portanto, classificar os métodos de acordo com a qualidade de seus resultados.

Da tabela 12 é possível observar também que o valor do FM do ERA é muito superior aos demais, ou seja, aproximadamente igual à 100%. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.1.1.

#### 3.4.1.2 Estudo 2: Velocidade Angular

Considerando como variável de saída para análise a velocidade angular das máquinas equivalentes presentes nas barras 10, 11, 20 e 21, têm-se como resultado as tabelas 13, 14, 15 e 16, respectivas às melhores estimações obtidas com os algoritmos de estimação de autovalores Prony, RML, DMD e ERA, quando comparados à resposta do PacDyn, presente na tabela 6.



Tabela 13 – Autovalores através do Prony no estudo 2, caso 1

Número	Autovalor
1	-57,3071
2	-56,8561
3	-1,0225 + j8,4086
4	-1,0225 - j8,4086
5	-0,2202 + j6,2800
6	-0,2202 - j6,2800
7	-1,5171
8	-1,0586
9	-1,0048
10	-0,05295

Tabela 14 – Autovalores através do RML no estudo 2, caso 1

Número	Autovalor
1	-0,5881 + j8,2853
2	-0,5881 - j8,2853
3	-0,2839 + j6,2670
4	-0,2839 - j6,2670
5	-6,0172
6	-1,7488
7	-1,4375
8	-1,0476
9	-0,9995

Tabela 15 – Autovalores através do DMD no estudo 2, caso 1

Número	Autovalor
1	-0,9951 + j8,4454
2	-0,9951 - j8,4454
3	-0,6364 + j8,2757
4	-0,6364 - j8,2757
5	-0,3028 + j6,2872
6	-0,3028 - j6,2872
7	-0,2997 + j2,9542
8	-0,2997 - j2,9542
9	-1,5630 + j1,4404
10	-1,5630 - j1,4404
11	-0,4529 + j0,9009
12	-0,4529 - j0,9009
13	-0,06722

Tabela 16 – Autovalores através do ERA no estudo 2, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1579	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5612	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5536	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,0673
12	-21,2433	42	-0,0166
13	-18,3227	43	-0,0166
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

Sobre os resultados apresentados, os modos eletromecânicos  $-0,6364 \pm j8,2757$  e  $-0,9951 \pm j8,4454$  não foram identificados pelos métodos de Prony e RML. Neste estudo, tanto o DMD quanto o ERA obtiveram sucesso em capturar os modos eletromecânicos do sistema BBTS, os quais se encontram na tabela 7. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 17, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 17 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 2, caso 1

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	192	0,2188
RML	1600	0,1968
DMD	32	0,2921
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 17, os métodos de análise simultânea de sinais estimaram menos autovalores do que as demais técnicas, entretanto o DMD e ERA capturaram 29% e 98% de todos os autovalores do sistema, aproximadamente. O método de Prony obteve um FM superior ao do RML, o que é uma consequência direta da estimação de mais autovalores próximos aos calculados do PacDyn, conforme inspeção das tabelas 13 e 14. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.1.2.

#### 3.4.1.3 Estudo 3: Potência Elétrica

Considerando como variável de saída para análise a potência elétrica das máquinas equivalentes presentes nas barras 10, 11, 20 e 21, têm-se como resultado as tabelas 18, 19, 20 e 21, respectivas às melhores estimações obtidas com os algoritmos de estimação de autovalores Prony, RML, DMD e ERA, quando comparados à resposta do PacDyn, presente na tabela 6.

Tabela 18 – Autovalores através do Prony no estudo 3, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,4494
2	-57,2048
3	-56,8876
4	-18,3528
5	-0,9703 + j8,4117
6	-0,9703 - j8,4117
7	-0,6491 + j8,2639
8	-0,6491 - j8,2639
9	-0,2870 + j6,2570
10	-0,2870 - j6,2570
11	-2,3822
12	-1,7453
13	-0,0955

Tabela 19 – Autovalores através do RML no estudo 3, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-25,2236
2	-0,9908 + j8,4440
3	-0,9908 - j8,4440
4	-0,6286 + j8,2774
5	-0,6286 - j8,2774
6	-0,3135 + j6,2429
7	-0,3135 - j6,2429
8	-2,8171
9	-1,5458
10	-0,9795
11	-0,1653
12	-0,0368
13	0,01109

Tabela 20 – Autovalores através do DMD no estudo 3, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-0,2979 + j6,2936
2	-0,2979 - j6,2936
3	-0,3043 + j2,9382
4	-0,3043 - j2,9382
5	-0,0500
6	-0,0142

Tabela 21 – Autovalores através do ERA no estudo 3, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1579	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5612	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5536	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,0673
12	-21,2433	42	-0,0166
13	-18,3227	43	-0,0166
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

A utilização da potência elétrica para estimação dos sinais não propiciou resultados satisfatórios para o DMD, pois não foi possível estimar os modos eletromecânicos  $-0,6364 \pm j8,2757$  e  $-0,9951 \pm 8,4454$ . O RML, neste terceiro estudo, identificou um autovalor com parte real positiva, como uma possível tentativa de capturar o autovalor -0,01660 do PacDyn, entretanto, este resultado compromete a robustez do método. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 22, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 22 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 3, caso 1

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	192	0,2851
RML	1600	0,2793
DMD	32	0,1348
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 22, os métodos de análise simultânea de sinais estimaram uma quantidade menor de autovalores em comparação com o Prony e RML, contudo, o desempenho do ERA manteve muito superior aos demais métodos, capturando aproximadamente 98% de todos os autovalores do sistema. O método de Prony obteve um FM maior que o RML, indicando que sua estimação foi mais precisa do que a calculada com o RML, mesmo ambas tendo determinado a mesma quantidade de autovalores. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.1.3.

#### 3.4.1.4 Análise de Resultados do Caso 1

Utilizando as informações levantadas nas tabelas 12, 17 e 22 foi resumida a tabela 23, a qual apresenta os fatores de magnitude (FM) calculados para cada um dos estudos realizados neste caso 1.

Tabela 23 – Fatores de magnitude calculados para os estudos do caso 1.

<b>Métodos</b>	<b>Fator de Magnitude (FM)</b>		
	<b>Ângulo do Rotor</b>	<b>Velocidade Angular</b>	<b>Potência Elétrica</b>
<b>Prony</b>	0,2860	0,2188	0,2851
<b>RML</b>	0,2798	0,1968	0,2793
<b>DMD</b>	0,1281	0,2921	0,1348
<b>ERA</b>	0,9773	0,9773	0,9773

Os métodos Prony e RML ambos apresentaram resultados consistentes, sem haver muita variação entre cada estudo aplicado. Observou-se também que para estas ferramentas, os melhores resultados ocorreram ao considerar o ângulo do rotor e a potência elétrica, sugerindo que medições diretamente dependentes do  $\delta$  podem gerar estimações mais precisas em ambas metodologias. Ao contrário das técnicas comentadas, o DMD

apresentou seu melhor resultado quando a saída do sistema linearizado foram as curvas de velocidade angular das máquinas síncronas do sistema.

O desempenho do DMD para as outras saídas estudadas ( $\delta$  e  $P_e$ ) foi inferior ao das demais técnicas, conseguindo apenas capturar no mínimo 12% de todos os autovalores determinados com o PacDyn. O ERA, por outro lado, foi a metodologia mais consistente e com melhor desempenho, pois não somente identificou para cada saída distinta os mesmos autovalores do sistema BBTS, como também o fez com elevada exatidão.

### 3.4.2 Caso 2

Para este segundo caso serão considerados estudos sobre as curvas de ângulo do rotor  $\delta$ , velocidade angular  $\omega$ , potência elétrica  $P_e$ , e potência mecânica  $P_m$ , porém, para uma única barra de geração. A proposta é verificar se ao analisar uma máquina é possível capturar a dinâmica em regime permanente do sistema, comparando com os autovalores obtidos via PacDyn (tabela 6). Em cada estudo será indicada qual máquina foi considerada, sendo que para detectar as curvas das variáveis de saída mencionadas, foi necessário aplicar a função impulso na potência mecânica e tensão de referência nas barras de geração 10, 11, 20 e 21.

Observe que no caso 1, era considerado uma mesma curva de cada máquina síncrona do sistema. Neste caso 2, serão consideradas 3 curvas de uma mesma máquina, com a única exceção no estudo 1, devido à curva de ângulo do rotor não existir, pois a máquina de canário é a referência do sistema. O objetivo é testar a robustez dos métodos.

#### 3.4.2.1 Estudo 1: Máquinas em Canário

As tabelas 24, 25, 26 e 27 apresentam os resultados das metodologias de estimativa de amortecimento para os métodos Prony, RML, DMD e ERA, respectivamente para o caso 2, ao analisar as variáveis de saída ( $\omega$ ,  $P_e$  e  $P_m$ ) apenas das máquinas de Canário (barra 10).

Tabela 24 – Autovalores através do Prony no estudo 1, caso 2

Número	Autovalor
1	-56,8876
2	-22,5352
3	-18,3528
4	-0,9703 + j8,4117
5	-0,9703 - j8,4117
6	-0,2870 + j6,2570
7	-0,2870 - j6,2570
8	-2,3822
9	-1,0048
10	-0,0806
11	-0,0226

Tabela 25 – Autovalores através do RML no estudo 1, caso 2

Número	Autovalor
1	-25,2236
2	-0,9545 + j8,4367
3	-0,9545 - j8,4367
4	-0,2839 + j6,2670
5	-0,2839 - j6,2670
6	-2,8122
7	-1,0476
8	-0,4541 + j0,9526
9	-0,4541 - j0,9526
10	-1,0169

Tabela 26 – Autovalores através do DMD no estudo 1, caso 2

Número	Autovalor
1	-22,5085
2	-0,9952 + j8,4449
3	-0,9952 - j8,4449
4	-0,6365 + j8,2752
5	-0,6365 - j8,2752
6	-0,3028 + j6,2872
7	-0,3028 - j6,2872
8	-0,3000 + j2,9544
9	-0,3000 - j2,9544
10	-0,4558 + j0,8959
11	-0,4558 - j0,8959
12	-0,06699



Tabela 27 – Autovalores através do ERA no estudo 1, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,3258	31	-0,9936 + j0,3170
2	-56,7711	32	-0,9936 - j0,3170
3	-43,1927	33	-0,4535 + j0,9012
4	-28,8280	34	-0,4535 - j0,9012
5	-26,2566	35	-0,8900 + j0,2583
6	-25,1538	36	-0,8900 - j0,2583
7	-22,5544	37	-0,0673
8	-21,2412	38	-0,01661
9	-18,3161	39	-0,01660
10	-15,4207		
11	-0,9951 + j8,4454		
12	-0,9951 - j8,4454		
13	-0,6364 + j8,2757		
14	-0,6364 - j8,2757		
15	-0,3028 + j6,2872		
16	-0,3028 - j6,2872		
17	-5,9430		
18	-3,4996 + j1,2218		
19	-3,4996 - j1,2218		
20	-0,2997 + j2,9542		
21	-0,2997 - j2,9542		
22	-2,8235		
23	-2,4299		
24	-2,3712		
25	-1,6270 + j1,4040		
26	-1,6270 - j1,4040		
27	-1,7544		
28	-1,6555		
29	-1,4484		
30	-1,0769		

Os métodos de Prony e RML foram os únicos que não indentificaram todos os 3 modos eletromecânicos, pois ambos não foram capazes de estimar o  $-0,6364 \pm j8,2757$ . O DMD determinou em sua estimação uma ampla variedade de modos complexos conjugados, entretanto não superou o desempenho observado pelo ERA. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 28, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 28 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 1, caso 2

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	144	0,2388
RML	1200	0,2168
DMD	24	0,2716
ERA	41	0,8831

De acordo com a tabela 28, o ERA obteve a maior precisão entre as demais técnicas, capturando aproximadamente 88% de todos os autovalores do sistema, seguido do DMD, Prony e, por último, o RML. Neste estudo foi observado na estimação do ERA a presença de 2 autovalores incorretamente identificados, o que contribuiu de forma negativa para o FM. Entretanto, estes autovalores estimados resultaram próximos aos valores esperados, logo se uma tolerância maior fosse aplicada, estes não causariam este impacto negativo sobre a robustez do algoritmo de realização de sistemas. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.2.1.

### 3.4.2.2 Estudo 2: Máquinas em Sabiá

As tabelas 29, 30, 31 e 32 apresentam os resultados das metodologias de estimativa de amortecimento para os métodos Prony, RML, DMD e ERA, respectivamente para o caso 2, ao analisar as variáveis de saída ( $\delta$ ,  $\omega$  e  $P_e$ ) apenas das máquinas de Sabiá (barra 11).

Tabela 29 – Autovalores através do Prony no estudo 2, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,3071
2	-22,5024
3	-1,0120 + j8,4427
4	-1,0120 - j8,4427
5	-0,2740 + j6,2805
6	-0,2740 - j6,2805
7	-5,9620
8	-1,7453
9	-0,1006
10	-0,0157

Tabela 30 – Autovalores através do RML no estudo 2, caso 2

Número	Autovalor
1	$-0,9908 + j8,4440$
2	$-0,9908 - j8,4440$
3	$-0,3546 + j6,2449$
4	$-0,3546 - j6,2449$
5	$-2,8171$
6	$-1,7488$
7	$-1,6049$
8	$-1,4375$
9	$-1,1757$
10	$-0,0368$

Tabela 31 – Autovalores através do DMD no estudo 2, caso 2

Número	Autovalor
1	$-0,9951 + j8,4454$
2	$-0,9951 - j8,4454$
3	$-0,6364 + j8,2757$
4	$-0,6364 - j8,2757$
5	$-0,3028 + j6,2872$
6	$-0,3028 - j6,2872$
7	$-3,4873 + j1,2431$
8	$-3,4873 - j1,2431$
9	$-0,2997 + j2,9542$
10	$-0,2997 - j2,9542$
11	$-1,6297 + j1,4049$
12	$-1,6297 - j1,4049$
13	$-1,8236$
14	$-0,9400 + j0,3435$
15	$-0,9400 - j0,3435$
16	$-0,4535 + j0,9012$
17	$-0,4535 - j0,9012$
18	$-0,9684$
19	$-0,8831 + j0,2602$
20	$-0,8831 - j0,2602$
21	$-0,0673$
22	$-0,0171$

Tabela 32 – Autovalores através do ERA no estudo 2, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,6542
2	-57,2938	32	-1,4476
3	-56,7900	33	-1,0769
4	-43,2181	34	-0,9936 + j0,3170
5	-37,9775	35	-0,9936 - j0,3170
6	-28,8155	36	-0,4535 + j0,9012
7	-26,2327	37	-0,4535 - j0,9012
8	-25,1578	38	-0,8900 + j0,2583
9	-22,5568	39	-0,8900 - j0,2583
10	-22,5466	40	-0,0673
11	-21,2433	41	-0,0166
12	-18,3218	42	-0,0166
13	-15,4194		
14	-0,9951 + j8,4454		
15	-0,9951 - j8,4454		
16	-0,6364 + j8,2757		
17	-0,6364 - j8,2757		
18	-0,3028 + j6,2872		
19	-0,3028 - j6,2872		
20	-5,9430		
21	-3,4996 + j1,2218		
22	-3,4996 - j1,2218		
23	-0,2997 + j2,9542		
24	-0,2997 - j2,9542		
25	-2,8246		
26	-2,4329		
27	-2,3695		
28	-1,6270 + j1,4040		
29	-1,6270 - j1,4040		
30	-1,7566		

Assim como observado no primeiro estudo deste caso, os métodos de Prony e RML foram os únicos que não indentificaram todos os 3 modos eletromecânicos, pois ambos não foram capazes de estimar o  $-0,6364 \pm j8,2757$ . O DMD estimou um número maior de autovalores correspondentes à dinâmica do sistema, entretanto não superou o desempenho obtido com o ERA. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 33, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 33 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 2, caso 2

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	192	0,2211
RML	1600	0,2377
DMD	32	0,4935
ERA	42	0,9542

De acordo com a tabela 33, o ERA obteve a maior precisão entre as demais técnicas, capturando aproximadamente 95% de todos os autovalores do sistema, seguido do DMD, RML e, por último, o Prony. Realizando a comparação de todos os autovalores estimados, presentes na tabela 33, com os que mais se aproximaram dos determinados pelo PacDyn, têm-se que somente o ERA foi capaz de realizar uma estimação que não contemplasse modos de origem numérica, ou incorretos. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.2.2.

### 3.4.2.3 Estudo 3: Máquinas em Tucano

As tabelas 34, 35, 36 e 37 apresentam os resultados das metodologias de estimativa de amortecimento para os métodos Prony, RML, DMD e ERA, respectivamente para o caso 2, ao analisar as variáveis de saída ( $\delta$ ,  $\omega$  e  $P_e$ ) apenas das máquinas de Tucano (barra 20).

Tabela 34 – Autovalores através do Prony no estudo 3, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,4494
2	-28,8095
3	-0,6491 + j8,2639
4	-0,6491 - j8,2639
5	-0,3083 + j6,2883
6	-0,3083 - j6,2883
7	-1,7198
8	-1,6362
9	-1,4641
10	-1,1073
11	-1,0377
12	-0,0639

Tabela 35 – Autovalores através do RML no estudo 3, caso 2

Número	Autovalor
1	$-0,6690 + j8,2483$
2	$-0,6690 - j8,2483$
3	$-0,3042 + j6,2831$
4	$-0,3042 - j6,2831$
5	$-6,0172$
6	$-1,6497$
7	$-1,5193$
8	$-0,9995$
9	$-0,0662$
10	$-0,0229$

Tabela 36 – Autovalores através do DMD no estudo 3, caso 2

Número	Autovalor
1	$-56,8797$
2	$-0,9951 + j8,4454$
3	$-0,9951 - j8,4454$
4	$-0,6364 + j8,2757$
5	$-0,6364 - j8,2757$
6	$-0,3028 + j6,2872$
7	$-0,3028 - j6,2872$
8	$-5,9045$
9	$-3,4934 + j1,1925$
10	$-3,4934 - j1,1925$
11	$-0,2997 + j2,9542$
12	$-0,2997 - j2,9542$
13	$-2,4981$
14	$-1,6254 + j1,3967$
15	$-1,6254 - j1,3967$
16	$-1,5826$
17	$-0,9576 + j0,3158$
18	$-0,9576 - j0,3158$
19	$-0,4535 + j0,9012$
20	$-0,4535 - j0,9012$
21	$-0,8330 + j0,2499$
22	$-0,8330 - j0,2499$
23	$-0,0673$
24	$-0,0168$

Tabela 37 – Autovalores através do ERA no estudo 3, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1578	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5610	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5537	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,0673
12	-21,2433	42	-0,0166
13	-18,3227	43	-0,0166
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

Ambos os métodos de Prony e RML não conseguiram capturar o modo eletromecânico  $-0,9951 \pm j8,4454$ . Tanto o DMD como o ERA obtiveram êxito na identificação dos modos característicos das máquinas síncronas, sobretudo o ERA que foi capaz de identificar 43 dos 44 autovalores do sistema BBTS. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 38, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 38 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 3, caso 2

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	192	0,2637
RML	1600	0,2377
DMD	32	0,5335
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 38, o ERA obteve a maior precisão entre as demais técnicas, capturando aproximadamente 98% de todos os autovalores do sistema, seguido do DMD com 53%, Prony e, por último, o RML. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.2.3.

#### 3.4.2.4 Estudo 4: Máquinas em Gavião

As tabelas 39, 40, 41 e 42 apresentam os resultados das metodologias de estimativa de amortecimento para os métodos Prony, RML, DMD e ERA, respectivamente para o caso 2, ao analisar as variáveis de saída ( $\delta$ ,  $\omega$  e  $P_e$ ) apenas das máquinas de Gavião (barra 21).

Tabela 39 – Autovalores através do Prony no estudo 4, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-56,8561
2	-1,0383 + j8,3714
3	-1,0383 - j8,3714
4	-0,6497 + j8,2992
5	-0,6497 - j8,2992
6	-0,2956 + j6,2955
7	-0,2956 - j6,2955
8	-5,9718
9	-1,7704
10	-1,0207
11	-0,0450
12	-0,0360



Tabela 40 – Autovalores através do RML no estudo 4, caso 2

Número	Autovalor
1	$-1,0035 + j8,4326$
2	$-1,0035 - j8,4326$
3	$-0,6351 + j8,2774$
4	$-0,6351 - j8,2774$
5	$-0,3478 + j6,2832$
6	$-0,3478 - j6,2832$
7	$-5,9099$
8	$-2,8614$
9	$-1,7059$
10	$-0,9958$

Tabela 41 – Autovalores através do DMD no estudo 4, caso 2

Número	Autovalor
1	$-57,3423$
2	$-0,9951 + j8,4454$
3	$-0,9951 - j8,4454$
4	$-0,6364 + j8,2757$
5	$-0,6364 - j8,2757$
6	$-0,3028 + j6,2872$
7	$-0,3028 - j6,2872$
8	$-5,9471$
9	$-3,4773 + j1,2154$
10	$-3,4773 - j1,2154$
11	$-0,2997 + j2,9542$
12	$-0,2997 - j2,9542$
13	$-1,6273 + j1,4035$
14	$-1,6273 - j1,4035$
15	$-1,7528$
16	$-1,1583$
17	$-1,0298 + j0,3468$
18	$-1,0298 - j0,3468$
19	$-0,4535 + j0,9012$
20	$-0,4535 - j0,9012$
21	$-0,8658 + j0,2765$
22	$-0,8658 - j0,2765$
23	$-0,0673$
24	$-0,0172$

Tabela 42 – Autovalores através do ERA no estudo 4, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1579	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5613	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5537	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,0673
12	-21,2433	42	-0,0166
13	-18,3227	43	-0,0166
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

Neste estudo, os 4 métodos de estimação de amortecimento conseguiram capturar todos os modos eletromecânicos do sistema de potência BBTS. O número de autovalores estimados em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 43, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 43 – Análise da dimensão e qualidade da estimação para o estudo 4, caso 2

<b>Técnica</b>	<b>Ordem da Estimação</b>	<b>FM</b>
Prony	192	0,2993
RML	1600	0,2391
DMD	32	0,5376
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 43, o ERA foi a técnica que obteve o melhor desempenho, seguido pelo DMD, o qual apresentou seu melhor resultado no caso em avaliação identificando aproximadamente 54% de todos os autovalores do sistema BBTS. O método de Prony posicionou-se a frente do RML, devido não somente a qualidade da estimação, como também por causa da maior quantidade de elementos identificados. Os resultados completos contendo todos os autovalores estimados encontram-se no apêndice C.2.4.

#### 3.4.2.5 Análise de Resultados do Caso 2

Utilizando as informações levantadas nas tabelas 28, 33, 38 e 43 foi projetada a tabela 44, a qual apresenta os fatores de magnitude (FM) calculados para cada um dos estudos realizados neste segundo caso.

Tabela 44 – Fatores de magnitude calculados para os estudos do caso 2.

<b>Métodos</b>	<b>Fator de Magnitude (FM)</b>			
	<b>Canário (B. 10)</b>	<b>Sabiá (B. 11)</b>	<b>Tucano (B. 20)</b>	<b>Gavião (B. 21)</b>
<b>Prony</b>	0,2388	0,2211	0,2637	0,2993
<b>RML</b>	0,2168	0,2377	0,2377	0,2391
<b>DMD</b>	0,2716	0,4935	0,5335	0,5376
<b>ERA</b>	0,8831	0,9542	0,9773	0,9773

De modo geral, os melhores resultados encontrados foram obtidos ao utilizar as saídas da barra de Gavião. Os métodos de Prony e RML mantiveram o FM superior à 20%, entretanto somente identificaram todos os 3 modos eletromecânicos no último estudo. Por outro lado, as metodologias DMD e ERA já estimavam os modos eletromecânicos do sistema desde a análise das máquinas conectadas à barra de Canário.

Sobre o estudo realizado na barra 10, têm-se que as metodologias de análise simultânea de sinais passaram por dificuldades para estimar os autovalores do sistema, o que

pode ser consequência do menor número de informações disponíveis, pois somente nesta configuração o ângulo do rotor foi desconsiderado.

O DMD apresentou para este segundo caso índices superiores aos métodos de Prony e RML, entretanto, não conseguiu superar o desempenho obtido pelo ERA. Em cada etapa realizada no segundo caso, o ERA estimou no mínimo 88% de todos os autovalores do sistema, conseguindo até mesmo alcançar o valor de 97% no FM quando considerado as saídas das máquinas de Tucano e Gavião.

### 3.4.3 Caso 3

Nos últimos dois casos o ERA apresentou os melhores resultados. Por outro lado, o DMD apresentou uma estimação com elevada exatidão no primeiro caso e, no segundo caso, foi consistentemente superior aos métodos de Prony e RML conforme sinais de dinâmicas distintas eram considerados simultaneamente. Com o propósito de verificar se o DMD pode vir a superar o ERA quando há uma grande disponibilidade de dados, têm-se a motivação pela análise de um novo caso.

#### 3.4.3.1 Estudo único: Análise de todas as máquinas do sistema

As variáveis de saída consideradas para este estudo no caso 3 serão 27 no total, sendo elas: ângulo do rotor  $\delta$ , velocidade angular  $\omega$ , potência elétrica  $P_e$ , tensão de campo da máquina síncrona  $E_{fd}$ , tensões transitória  $E'_q$  e subtransitória  $E''_q$  no eixo em quadratura, e a tensão subtransitória  $E''_d$  de eixo direto, de todas as barras de geração quando aplicável, pois o  $\delta_1^0$  não será utilizado.

Para tanto, foi aplicado uma função impulso na potência  $P_m$  e na tensão de referência  $V_{ref}$ , das barras de geração 10, 11, 20 e 21, totalizando 8 entradas para o sistema. O tempo máximo de simulação foi reduzido de 30 para 15 segundos, mantendo o tempo de amostragem, com o propósito apenas de reduzir o custo computacional das técnicas.

Observe que neste caso, o objetivo é fornecer mais sinais para a estimação analisar, e verificar se os métodos ainda manterão os resultados esperados, como já verificado anteriormente. As tabelas 45 e 46 apresentam os resultados obtidos que mais se aproximaram dos autovalores do sistema de potência linearizado, aplicando a metodologia proposta para o DMD e ERA, respectivamente.

Tabela 45 – Autovalores utilizando DMD no caso 3

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4542	31	-0,9905 - j0,3184
2	-57,2907	32	-0,4535 + j0,9012
3	-56,7923	33	-0,4535 - j0,9012
4	-43,2057	34	-0,8890 + j0,2563
5	-37,9978	35	-0,8890 - j0,2563
6	-28,8301	36	-0,0673
7	-26,2193	37	-0,0166
8	-25,1759		
9	-21,2548		
10	-18,3234		
11	-15,4192		
12	-0,9951 + j8,4454		
13	-0,9951 - j8,4454		
14	-0,6364 + j8,2757		
15	-0,6364 - j8,2757		
16	-0,3028 + j6,2872		
17	-0,3028 - j6,2872		
18	-5,9429		
19	-3,4996 + j1,2217		
20	-3,4996 - j1,2217		
21	-0,2997 + j2,9542		
22	-0,2997 - j2,9542		
23	-2,8042		
24	-2,4603		
25	-1,6270 + j1,4040		
26	-1,6270 - j1,4040		
27	-1,6727		
28	-1,4331		
29	-1,0888		
30	-0,9905 + j0,3184		

Tabela 46 – Autovalores utilizando ERA no caso 3

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4527	31	-1,7566
2	-57,2901	32	-1,6542
3	-56,7904	33	-1,4476
4	-43,2191	34	-1,0769
5	-37,9803	35	-0,9936 + j0,3170
6	-28,8155	36	-0,9936 - j0,3170
7	-26,2338	37	-0,4535 + j0,9012
8	-25,1579	38	-0,4535 - j0,9012
9	-22,5612	39	-0,8900 + j0,2583
10	-22,5536	40	-0,8900 - j0,2583
11	-22,5438	41	-0,0673
12	-21,2433	42	-0,0166
13	-18,3227	43	-0,0166
14	-15,4193		
15	-0,9951 + j8,4454		
16	-0,9951 - j8,4454		
17	-0,6364 + j8,2757		
18	-0,6364 - j8,2757		
19	-0,3028 + j6,2872		
20	-0,3028 - j6,2872		
21	-5,9430		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-0,2997 + j2,9542		
25	-0,2997 - j2,9542		
26	-2,8246		
27	-2,4329		
28	-2,3695		
29	-1,6270 + j1,4040		
30	-1,6270 - j1,4040		

Ambas as técnicas foram capazes de calcular todos os modos eletromecânicos do sistema BBTS, entre outros autovalores também pertencentes ao conjunto calculado pelo PacDyn. O número de estimações realizadas em cada uma das técnicas é apresentado na tabela 47, assim como os resultados obtidos com a metodologia de comparação desenvolvida na seção 3.2.

Tabela 47 – Análise da dimensão e qualidade da estimacão para o caso 3

Técnica	Ordem da Estimacão	FM
DMD	38	0,8364
ERA	43	0,9773

De acordo com a tabela 47, verifica-se que o DMD de fato obtém melhores estimações conforme se analisa sinais de dinâmicas distintas em conjunto, tal que o permitiu calcular aproximadamente 83% de todos os autovalores do sistema BBTS. Neste caso 3, o ERA desenvolveu o mesmo FM que vêm sendo observado desde o primeiro caso deste capítulo, capturando aproximadamente 97% da dinâmica do sistema.

Portanto, com base na tabela 47, o elevado número de sinais para a estimação melhora significativamente o resultado do DMD, enquanto que para o ERA esta característica não comprometeu sua precisão. Entretanto, é importante observar que aumentar o número de sinais implica em elevar o esforço computacional para realizar as decomposições que os métodos exigem, o que neste trabalho foi considerado ao reduzir somente neste caso o tempo máximo de simulação para 15 [s].

A tabela completa contendo todos os autovalores estimados com o DMD é apresentada no apêndice C.3, enquanto que para o ERA não é necessário complementar seus resultados, pois todos já descritos nessa seção corresponderam aos autovalores do sistema linearizado.

### 3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram demonstrados e comparados os resultados obtidos com os algoritmos de estimação de amortecimento para um ponto de operação definido no sistema elétrico BBTS, em relação aos autovalores provenientes das equações diferenciais que regem o modelo. No primeiro caso foram analisadas curvas de  $\delta$ ,  $\omega$  e  $P_e$  obtidas para cada máquina do sistema, no qual o ERA demonstrou resultados satisfatórios. No segundo caso foram analisadas para cada grupo de máquinas as mesmas variáveis de saída,  $\delta$ ,  $\omega$  e  $P_e$ , onde o ERA apresentou os melhores resultados de estimação, mas com queda em seus índices, ao passo de que o DMD obteve êxito em melhorar seus indicadores de confiança.

Em um terceiro caso, considerando somente a aplicação de estimação das metodologias que melhor se desenvolveram nos estudos, o DMD e ERA apresentaram ambos resultados positivos em comparação com os casos anteriores, porém o destaque foi ao ERA que determinou aproximadamente 98% de todos os autovalores respectivos ao sistema Brazilian Birds (BBTS).

## 4 Resultados da Estabilidade Angular em Transitórios Eletromecânicos

### 4.1 Considerações Iniciais

Tendo em vista os resultados satisfatórios apresentado pelo ERA, este capítulo irá apresentar resultados de estimação de estados quando aplicados em curvas obtidas através de simulações eletromecânicas no domínio do tempo. Para tanto, a ferramenta desenvolvida pelo Operador Nacional do Sistema (ONS), chamada ORGANON [85], será utilizado nas simulações dos eventos no sistema. Os sistemas de potência estudados foram: sistema radial contendo 3 barras; sistema “Brazilian Birds”.

### 4.2 Caso 1 - Sistema Radial

Os dados e topologia do sistema radial são apresentados no apêndice A, onde é descrito também o ponto de operação inicial da rede. A proposta desta seção é apresentar os resultados de 4 simulações neste sistema, enfatizando o estudo do transitório eletromecânico, utilizando o Organon na resolução das equações diferenciais.

A característica dos eventos é a mesma em todos os estudos, a qual consiste na aplicação de um curto circuito na barra 3 e posterior remoção de um dos circuitos da linha de transmissão entre as barras 3 e 2. A diferença entre cada uma das 4 simulações realizadas será no tempo de exposição ao curto circuito, com o objetivo de avaliar a resposta do ERA até que o sistema não suporte a contingência designada.

Para possibilitar a aplicação do ERA sem a necessidade de qualquer adaptação na realização de estados foi considerado o passo de integração do Organon igual a 5 [ms], enquanto que o tempo máximo de execução em 15 [s]. As contingências aplicadas estão divididas nas seções seguintes, onde para cada uma o ERA estimou os parâmetros modais das curvas do ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica da máquina conectada na barra 1. A tolerância para discretização dos valores singulares no ERA foi considerada igual em todos os casos, cujo valor é 0,01.



### 4.2.1 Estudo 1 - Curto Circuito de 50 [ms]

A contingência para o sistema neste caso foi a aplicação de um curto circuito trifásico franco na barra 3 por 50 [ms], o qual foi extinto no instante 0,5 [s], ao mesmo tempo que ocorreu a abertura de um dos circuitos da linha de transmissão entre as barras 3 e 2. Aplicou-se o ERA no período definido pelos instantes 0,5 e 15,0 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica.

As figuras 20, 21 e 22 apresentam os sinais submetidos ao ERA para a realização de estados. Observe que o ERA será aplicado no período de tempo conhecido como “pós-defeito”.

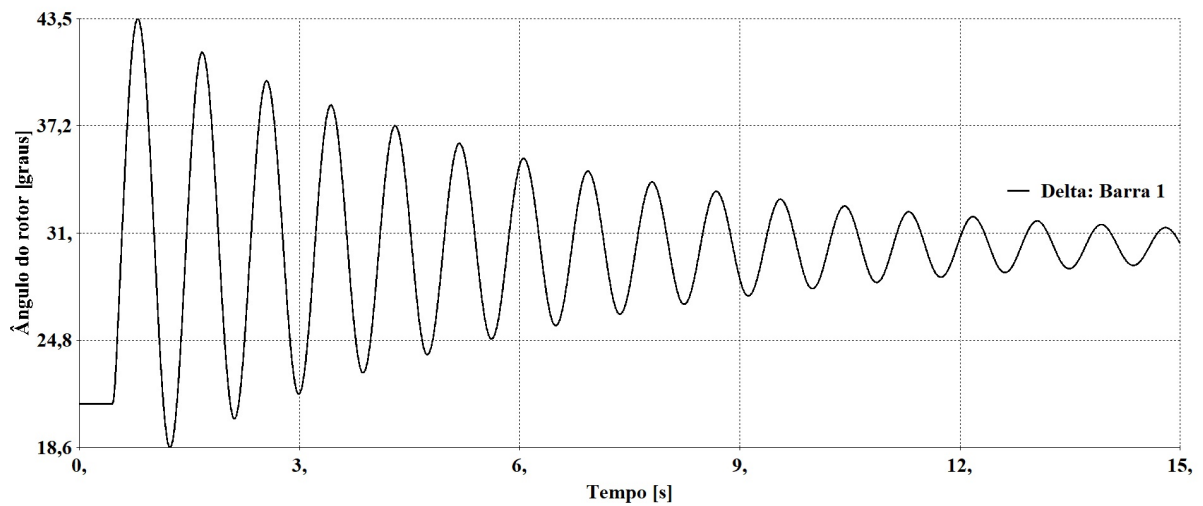


Figura 20 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 50 [ms].

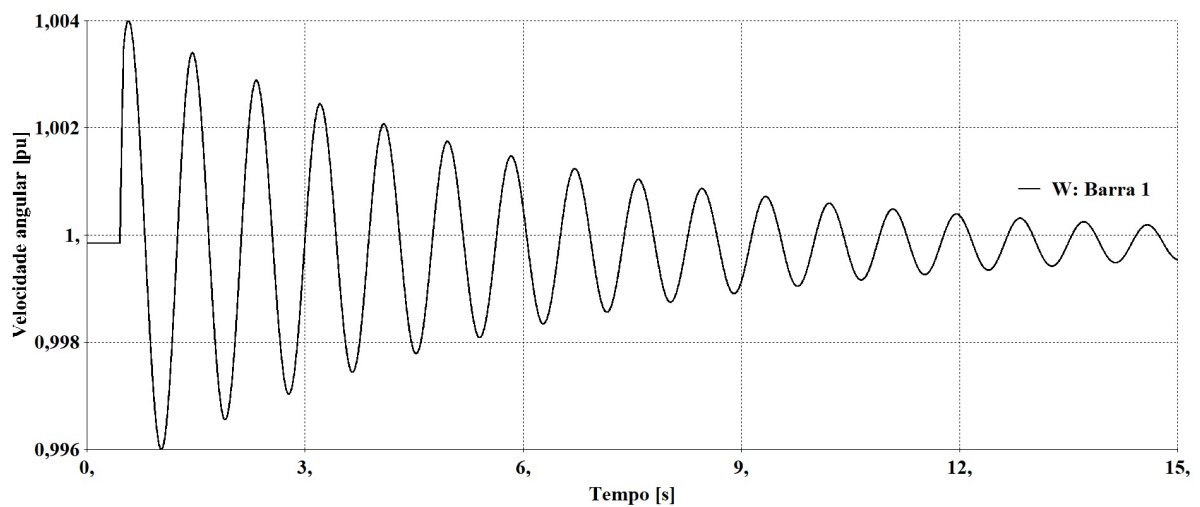


Figura 21 – Velocidade angular para o curto circuito por 50 [ms].

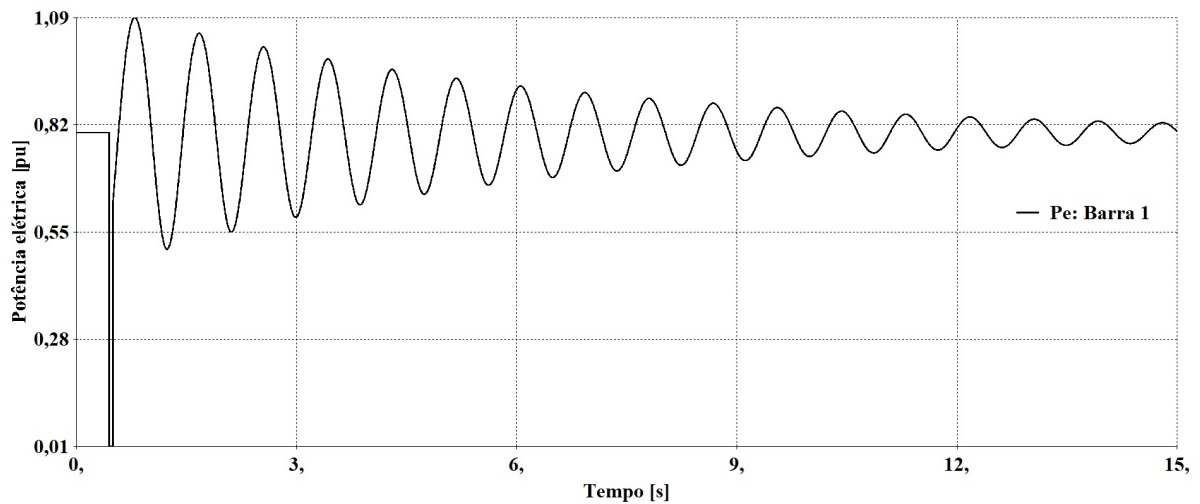


Figura 22 – Potência elétrica para o curto circuito por 50 [ms].

A tabela 48 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 48 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 50 [ms].

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
-7,2833E-04	1,0000	1,1592E-04	1,3730E+03	0,0055
-0,1791 + j7,1724	0,02496	1,1419	5,5832	1,0000
-0,1791 - j7,1724	0,02496	1,1419	5,5832	1,0000

De acordo com o valor singular modal (MSV), apresentado na seção 2.6.3.4 na página 75, os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema constituem o par conjugado  $-0,1791 \pm j7,1724$ . O amortecimento respectivo à estes elementos foi aproximadamente igual à 0,025, sendo suficiente para informar a estabilidade do sistema, tendo em vista que um amortecimento negativo indicaria um autovalor com parte real positiva.

#### 4.2.2 Estudo 2 - Curto Circuito por 100 [ms]

A característica do evento aplicado neste estudo foi a mesma do anterior, havendo somente uma maior exposição ao curto circuito, ou seja, 100 [ms]. Novamente, aplicou-se o ERA entre os instantes 0,5 e 15 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular

e potência elétrica. As figuras 23, 24 e 25 apresentam os sinais submetidos ao ERA para a realização de estados.

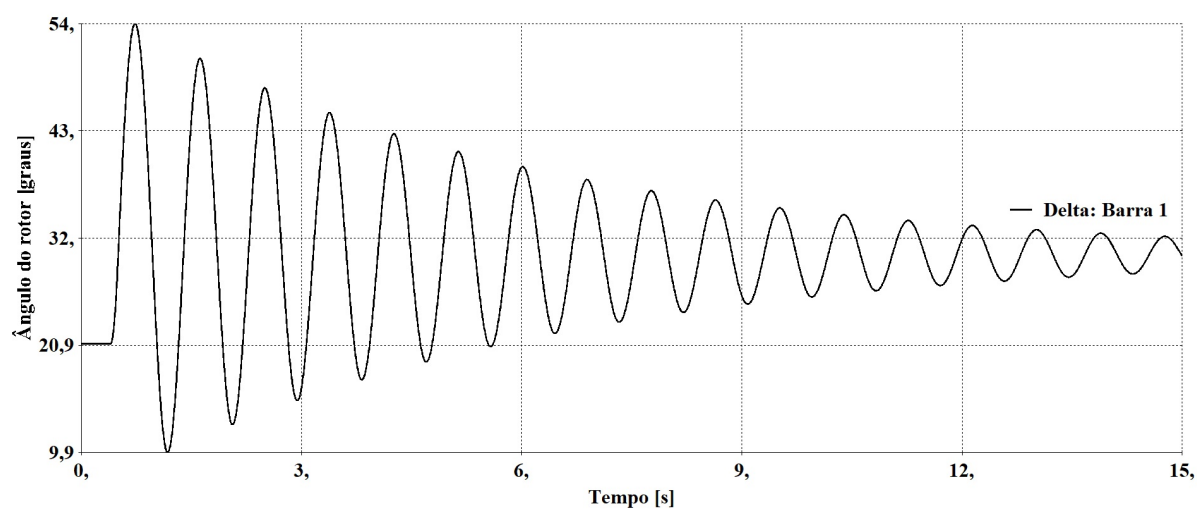


Figura 23 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 100 [ms].

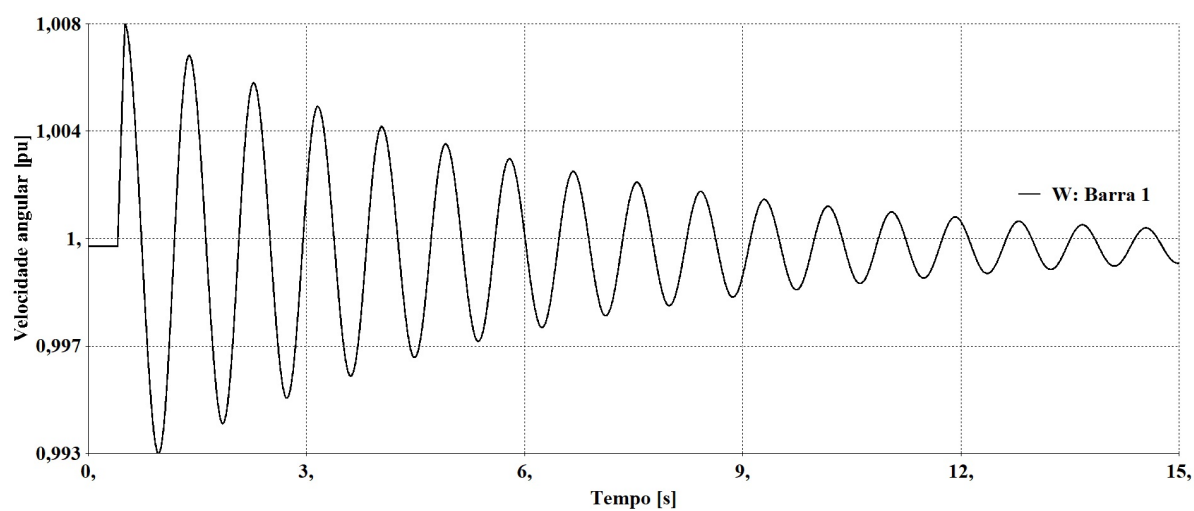


Figura 24 – Velocidade angular para o curto circuito por 100 [ms].

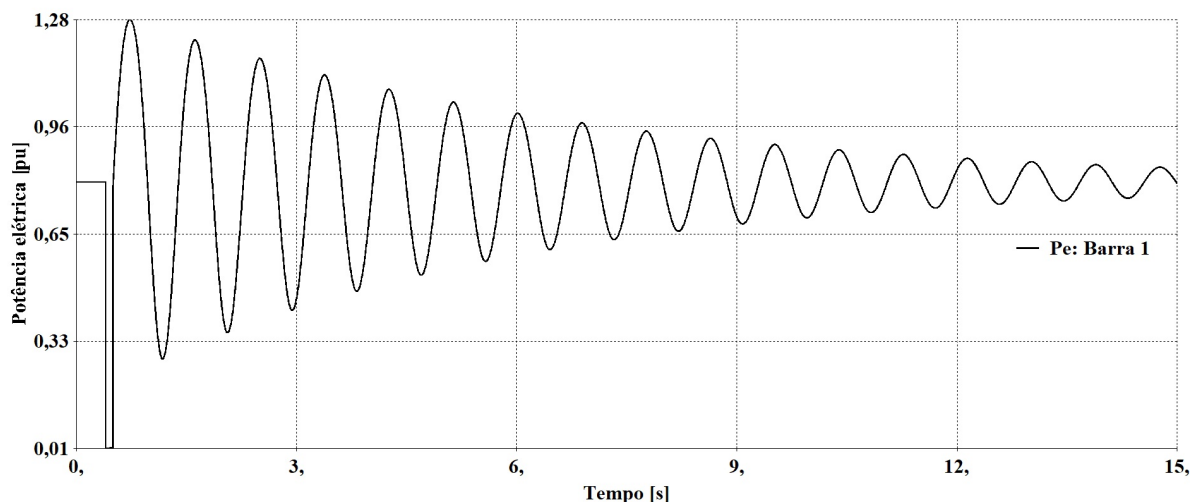


Figura 25 – Potência elétrica para o curto circuito por 100 [ms].

A tabela 49 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 49 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 100 [ms].

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
-0,0022	1,0000	3,5016E-04	0,4546E+03	0,0042
-0,1797 + j7,1482	0,02514	1,1308	5,5636	1,0000
-0,1797 - j7,1482	0,02514	1,1308	5,5636	1,0000

De acordo com o valor singular modal (MSV), os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema constituem o par conjugado  $-0,1797 \pm j7,1482$ . O amortecimento respectivo à estes elementos foi aproximadamente igual à 0,025. A comparação de impacto entre os estudos 1 e 2 é muito pequena, não sendo possível ao ERA detectar diferença significativa na estimação. Além do fato de que o ângulo do rotor  $\delta$  não superou o limite teórico de  $90^\circ$ .

#### 4.2.3 Estudo 3 - Curto Circuito por 200 [ms]

Mantendo as mesmas características do evento, propõe-se neste estudo aumentar somente o tempo de exposição ao curto para 200 [ms]. Novamente, aplicou-se o ERA entre os instantes 0,5 e 15 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência

elétrica. As figuras 26, 27 e 28 apresentam os sinais submetidos ao ERA para a realização de estados.

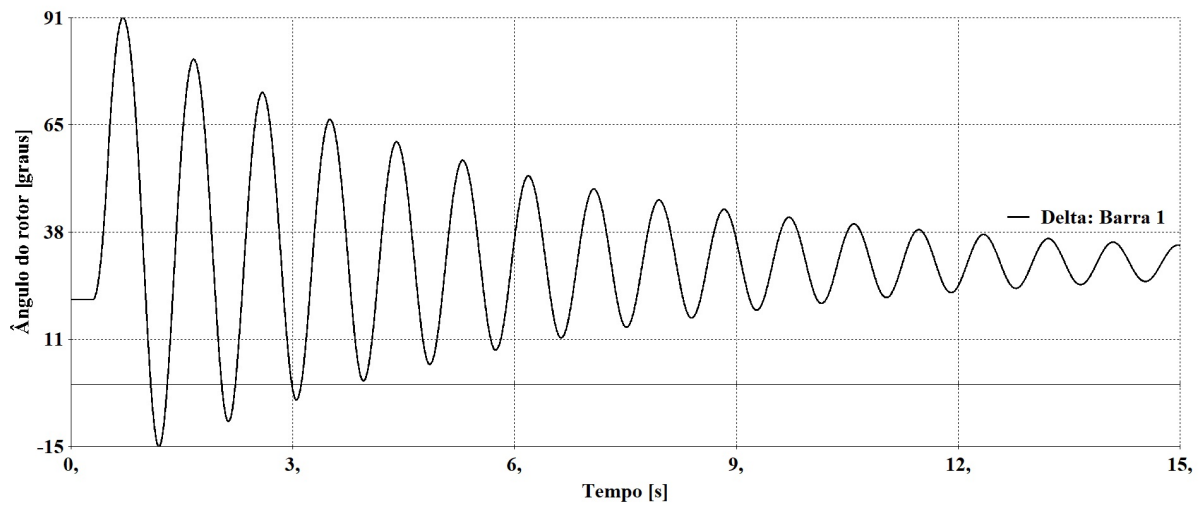


Figura 26 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 200 [ms].

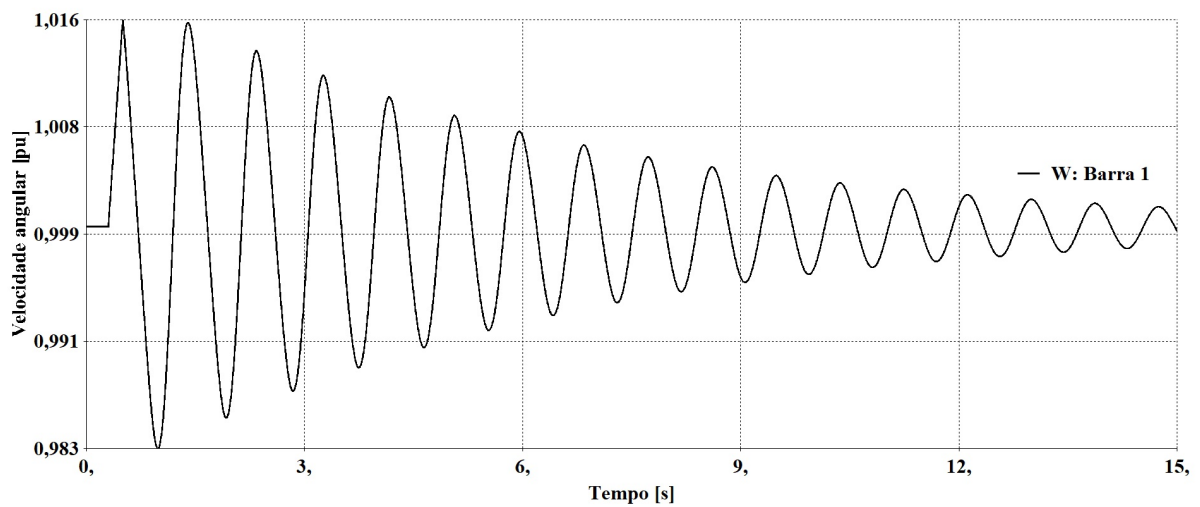


Figura 27 – Velocidade angular para o curto circuito por 200 [ms].

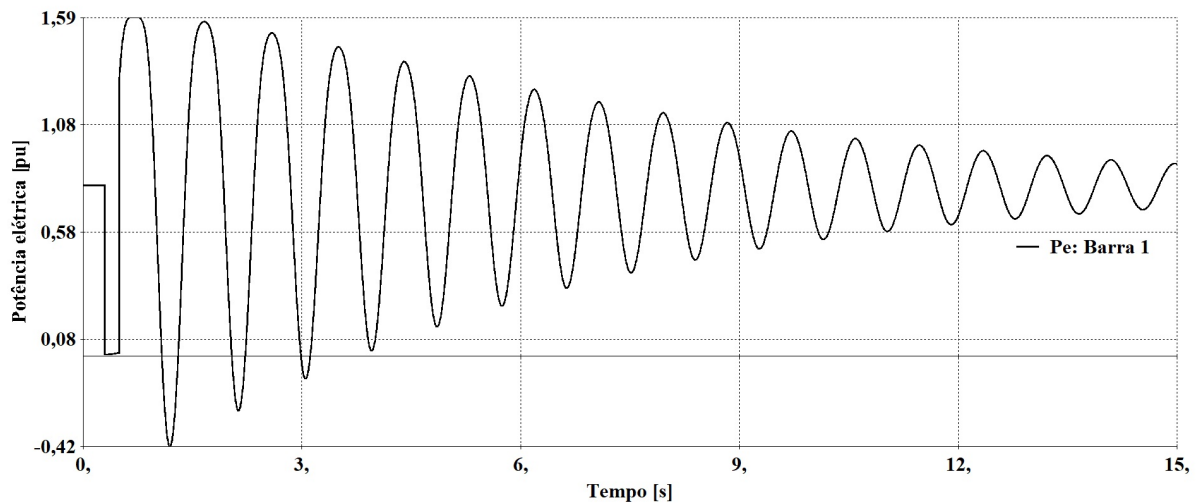


Figura 28 – Potência elétrica para o curto circuito por 200 [ms].

A tabela 50 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 50 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 200 [ms].

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
-1,6178E-04	1,0000	2,5748E-05	6,1813E+03	0,0025
-0,4025	1,000	0,0641	2,4844	0,0309
-0,1460 + j7,1483	0,0204	1,1379	6,8475	0,7821
-0,1460 - j7,1483	0,0204	1,1379	6,8475	0,7821
-0,5676 + j6,7768	0,0835	1,0823	1,7618	1,0000
-0,5676 - j6,7768	0,0835	1,0823	1,7618	1,0000

De acordo com o valor singular modal (MSV), os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema foram os pares conjugados  $-0,5676 \pm j6,7768$  e  $-0,1460 \pm j7,1483$ , com 100% e 78% de participação. O amortecimento de cada par conjugado calculado foi 0,0204 e 0,0835, respectivamente. Ainda que o primeiro par tenha apresentado um amortecimento superior ao observado nos estudos anteriores, surgiu neste estudo um segundo modo dinâmico relevante ao comportamento da resposta do sistema frente o curto circuito de 200 [ms]. Considerando esta característica, e a ultrapassagem momentânea do limite teórico de  $90^\circ$  para o ângulo do rotor, há indícios de sobreposição de dinâmicas e proximidade com a região de instabilidade angular.

#### 4.2.4 Estudo 4 - Curto Circuito por 210 [ms]

A proposta deste último estudo é aumentar sensivelmente o tempo de exposição ao curto circuito para 210 [ms]. Entretanto, ao ser simulado o caso no Organon, foi detectado desvio de frequência, conduzindo a dinâmica do sistema em uma região de instabilidade angular. Devido a sinalização de instabilidade, a ferramenta de simulação limitou o tempo de execução e, portanto, o intervalo de análise do ERA foi modificado, restrito entre 0,3 e 0,7 [s]. As figuras 29, 30 e 31 apresentam os sinais submetidos ao ERA para a realização de estados.

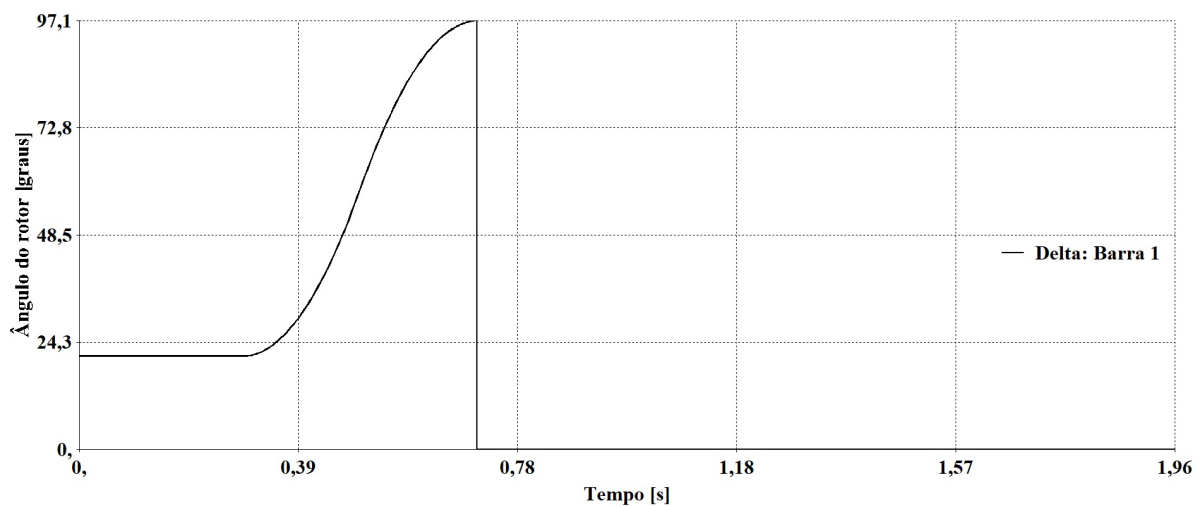


Figura 29 – Ângulo do rotor para o curto circuito por 210 [ms].

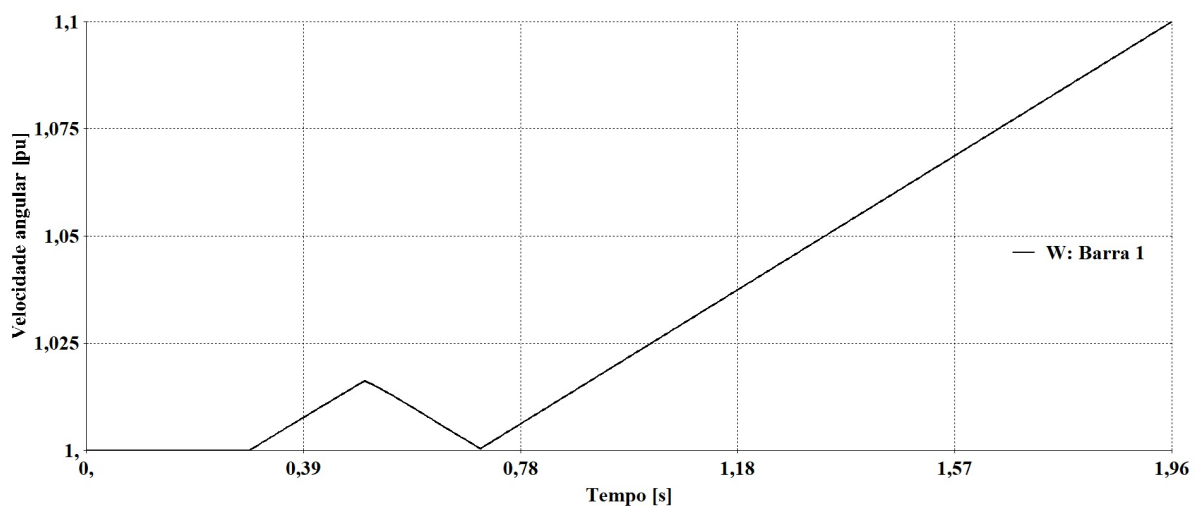


Figura 30 – Velocidade angular para o curto circuito por 210 [ms].

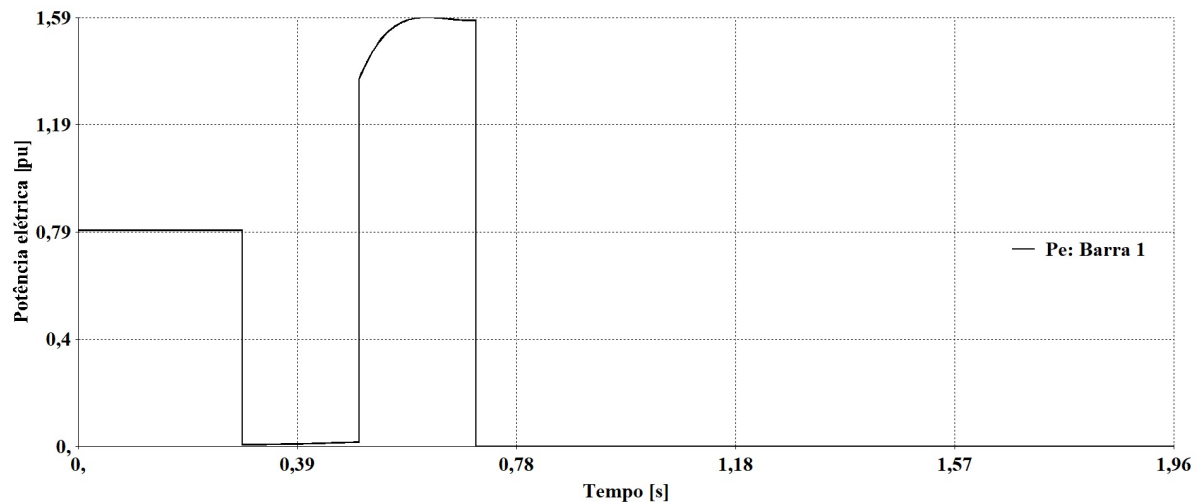


Figura 31 – Potência elétrica para o curto circuito por 210 [ms].

A tabela 51 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 51 – Estimação com o ERA para o curto circuito com duração de 210 [ms].

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
2,2410	-1,0000	0,3567	-0,4462	0,4551
$0,9883 + j10,9479$	-0,0899	1,7495	-1,0118	1,0000
$0,9883 + j10,9479$	-0,0899	1,7495	-1,0118	1,0000

De acordo com o valor singular modal (MSV), todos os autovalores estimados obtiveram parcelas significativas na dinâmica do sistema e, em especial, todos apresentaram também parte real positiva. Esta característica reafirma o critério de parada do Organon devido a perda de estabilidade angular, e apresenta o ERA com resultado dentro do esperado para análise de sinais em sistemas de potência.

#### 4.2.5 Análise de Resultados no Sistema Radial

Nos estudos realizados para este caso foram observados resultados de estimação de amortecimento em sinais provenientes de curto circuitos em um sistema radial. O método ERA, empregado nas análises, identificou a característica dos sinais de ângulo do rotor,



velocidade angular e potência elétrica de cada um dos estudos, mesmo no último estudo, onde foi detectado instabilidade angular.

Observou-se nas estimativas dos 2 primeiros estudos comportamentos dinâmicos similares, devido a proximidade dos parâmetros modais estimados. No estudo 3, próximo da região limite de estabilidade angular, foram identificados diversos autovalores apontados pelo indicador de valor singular modal, sinalizando estresse sobre a máquina. O último estudo realizado neste caso indica a instabilidade angular, por meio dos autovalores com parte real positiva e, conseqüentemente, amortecimento negativo.

Os resultados obtidos e a resposta do Organon, motivou a aplicação do ERA em novos estudos, com sistemas de maior porte, com o propósito de avaliar diferentes situações sob a perspectiva do amortecimento das oscilações eletromecânicas.

### 4.3 Caso 2 - Sistema Brazilian Birds

Os dados e topologia do sistema *Brazilian Birds* são apresentados no apêndice B, sendo o ponto de operação inicial da rede o mesmo descrito no capítulo 3.3. A proposta é aplicar no sistema de potência diferentes contingências, armazenando as curvas resultantes de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica, de cada uma das máquinas conectadas. Em seguida, aplica-se o ERA para estimar os autovalores e, posteriormente, os parâmetros modais dos sinais mencionados.

Assim como no caso anterior, o Organon foi empregado na resolução das equações diferenciais, mantendo constantes o passo de integração e tempo máximo de simulação. O valor da tolerância para discretização dos valores singulares no ERA também é o mesmo do caso anterior. Nas seções seguintes são apresentados os 4 eventos estudados no sistema.

#### 4.3.1 Estudo 1 - Curto Circuito na barra 132 e Abertura da Interligação

A contingência realizada no sistema foi a aplicação de um curto circuito trifásico franco na barra 132 por 100 [ms], sendo extinta no instante 0,5 [s], onde a consequência foi a abertura do capacitor série conectado entre as barras 132 e 131. Aplicou-se o ERA no período definido pelos instantes 0,5 e 15,0 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica, de cada uma das 4 máquinas do sistema de potência. As figuras 32, 33 e 34 apresentam os sinais introduzidos na metodologia.

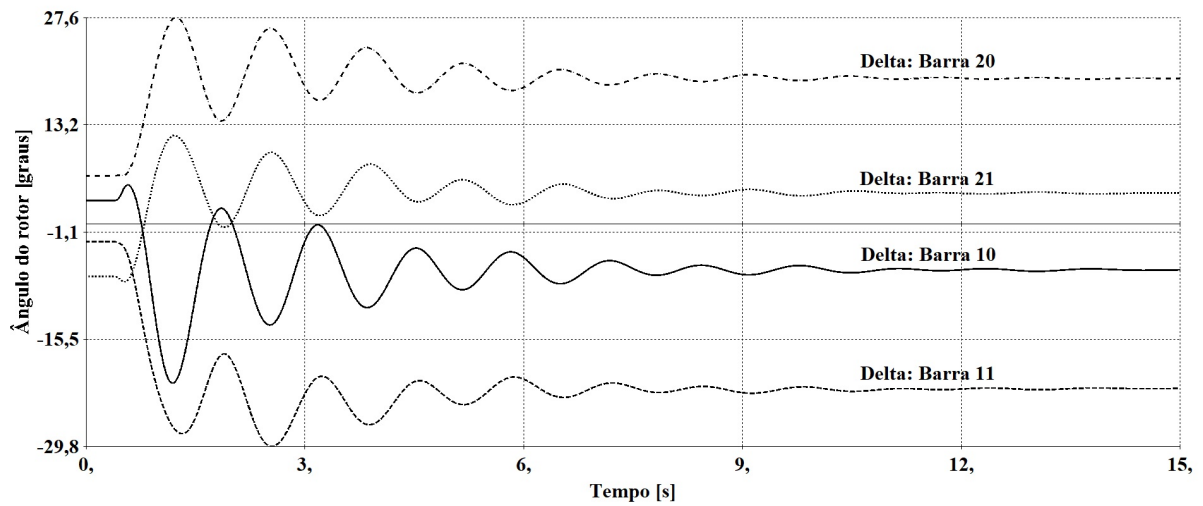


Figura 32 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 132.

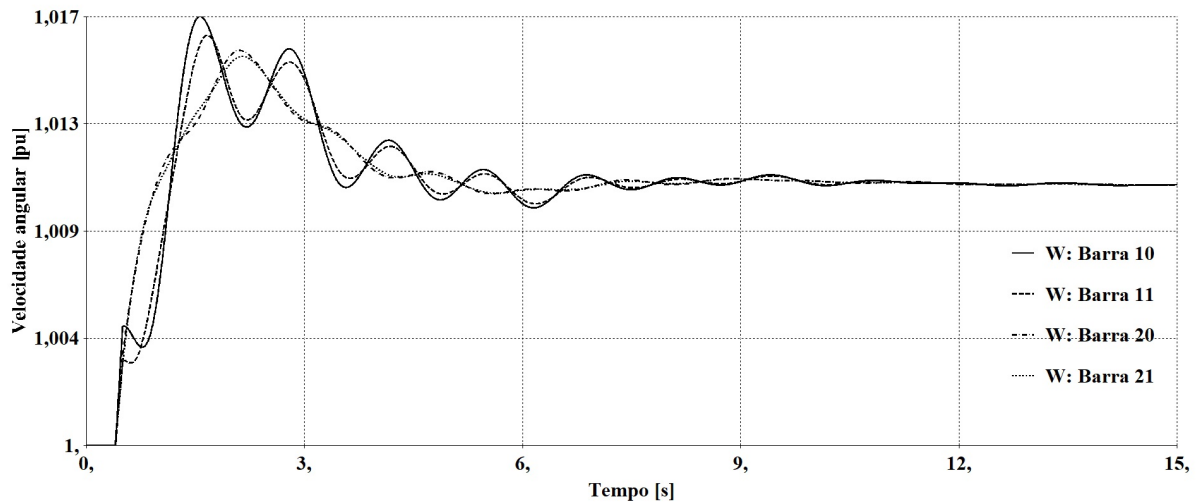


Figura 33 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 132.

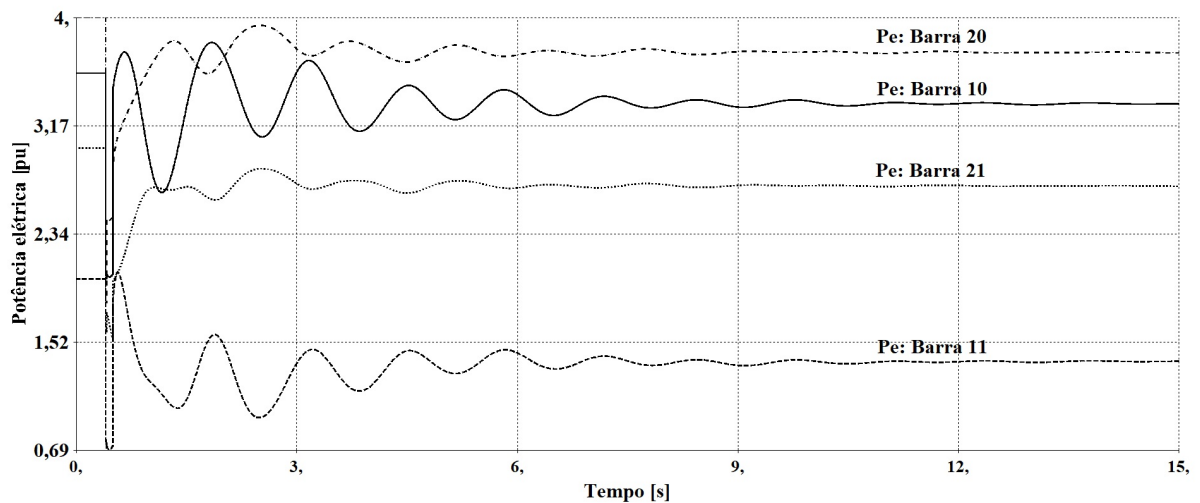


Figura 34 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 132.

A tabela 52 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 52 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 132.

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
$-0,3746 + j4,7409$	0,0788	0,7569	2,6697	1,0000
$-0,3746 - j4,7409$	0,0788	0,7569	2,6697	1,0000
-0,0011	1,0000	1,6838E-04	0,9452E+03	0,0039
$-0,5815 + j0,7668$	0,6043	0,1532	1,7196	0,0847
$-0,5815 - j0,7668$	0,6043	0,1532	1,7196	0,0847

De acordo com o valor singular modal (MSV), os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema constituem o par conjugado  $-0,3746 \pm j4,7409$ . O amortecimento respectivo à estes elementos foi aproximadamente igual à 0,0788, sendo suficiente para informar a estabilidade do sistema, pois um valor negativo de amortecimento implica em autovalor com parte real positiva.

#### 4.3.2 Estudo 2 - Curto Circuito na barra 150 e Abertura das LTs

A contingência realizada no sistema foi a aplicação de um curto circuito trifásico franco na barra 150 por 100 [ms], sendo extinta no instante 0,5 [s], onde a consequência foi a abertura de todas os circuitos das linhas de transmissão conectadas. Desconsiderando problemas relacionados ao sobreaquecimento dos equipamentos de transmissão devido a passagem de grandes quantidades de potência, o evento, ainda que severo para a estabilidade do sistema, não implicará em cortes de cargas.

Aplicou-se o ERA no período definido pelos instantes 0,5 e 15,0 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica, de cada uma das 4 máquinas do sistema de potência. As figuras 35, 36 e 37 apresentam os sinais introduzidos na metodologia.

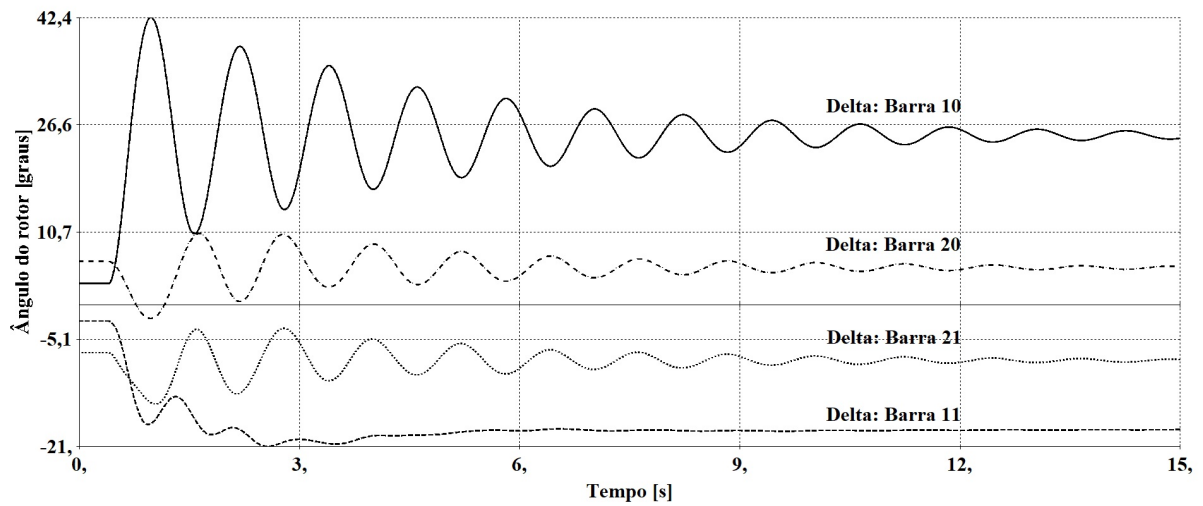


Figura 35 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 150.

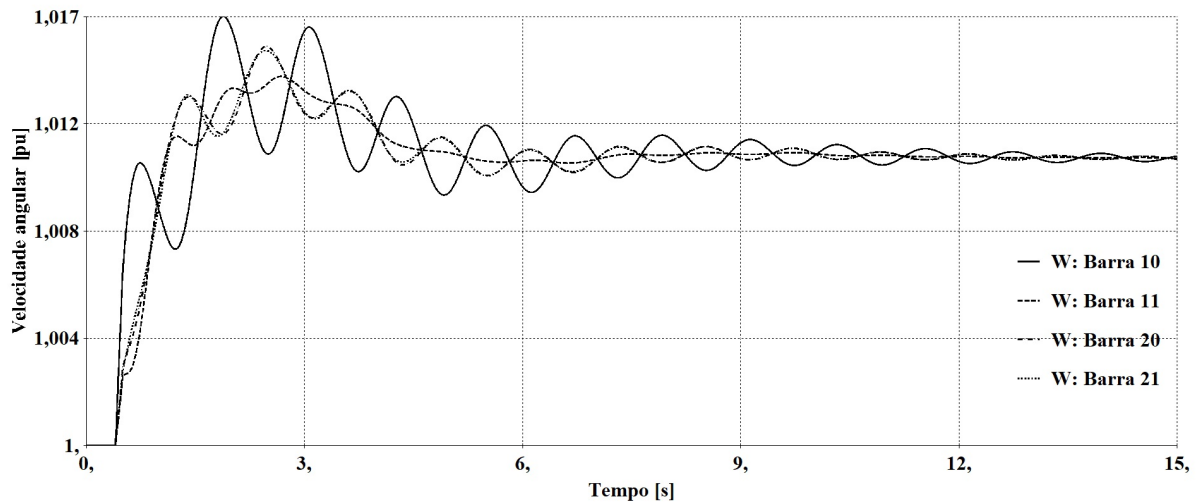


Figura 36 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 150.

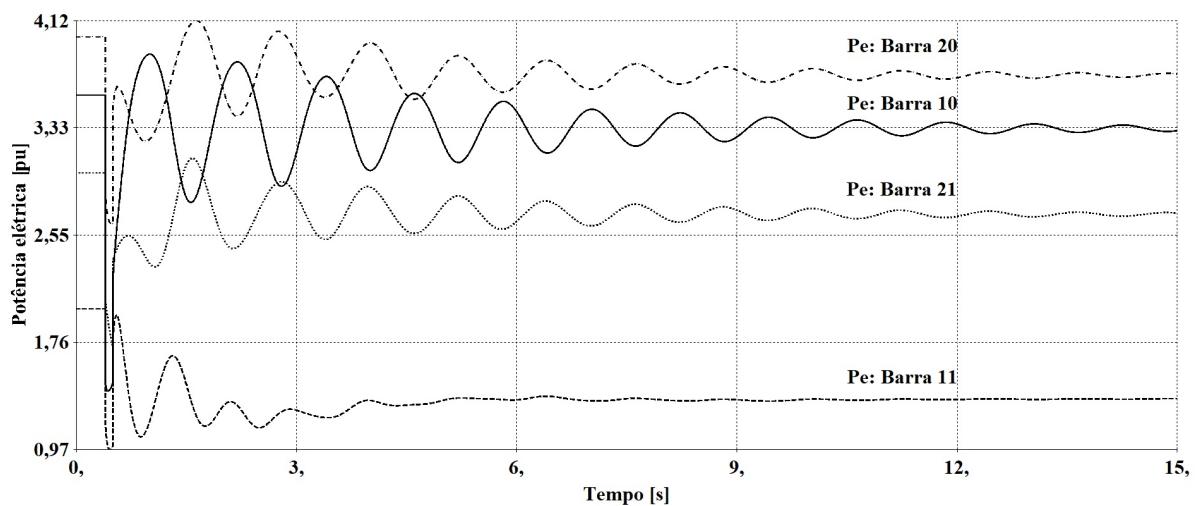


Figura 37 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 150.

A tabela 53 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 53 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 150.

<b>Autovalor</b>	<b>Amortecimento</b>	<b>Frequência Natural não amortecida [Hz]</b>	<b>Constante de tempo [s]</b>	<b>MSV</b>
-0,3020 + j6,4970	0,0464	1,0352	3,3114	1,0000
-0,3020 - j6,4970	0,0464	1,0352	3,3114	1,0000
-0,0036	1,0000	5,6544E-04	0,2815E+03	0,0047
-1,7383	1,0000	0,2767	0,5753	0,1212

De acordo com o valor singular modal (MSV), os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema constituem o par conjugado  $-0,3020 \pm j6,4970$ . O amortecimento respectivo à estes elementos foi aproximadamente igual à 0,0464, o qual é inferior ao observado no primeiro estudo deste caso. Portanto, em uma primeira análise considerando os resultados obtidos no sistema radial, o defeito na barra 150 foi mais severo que o realizado na barra 132, possivelmente devido ao maior número de elementos sendo desconectados da rede.

### 4.3.3 Estudo 3 - Curto Circuito na barra 250 e Abertura das LTs

A contingência realizada no sistema foi a aplicação de um curto circuito trifásico franco na barra 250 por 100 [ms], sendo extinta no instante 0,5 [s], onde a consequência foi a abertura de todas os circuitos das linhas de transmissão conectadas. Ainda que o sobreaquecimento seja desconsiderado, assim como no segundo estudo, ao serem retiradas de operação as linhas da barra 250, haverá interrompimento de energia na barra 251 de 138 [kV], parcela correspondente à 80 [MW] e 10 [Mvar].

Aplicou-se o ERA no período definido pelos instantes 0,5 e 15,0 [s], nas curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica, de cada uma das 4 máquinas do sistema de potência. As figuras 38, 39 e 40 apresentam os sinais introduzidos na metodologia.

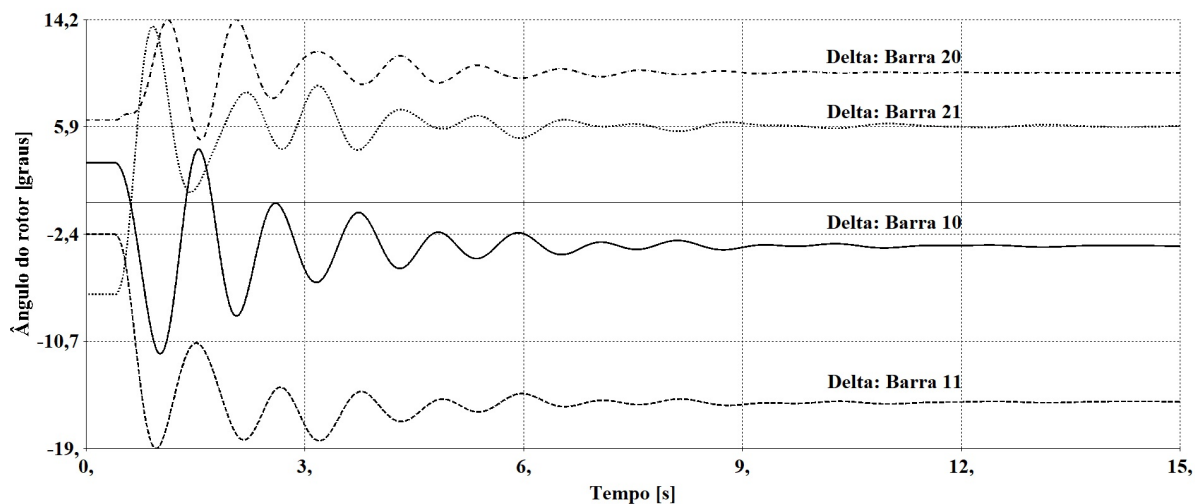


Figura 38 – Ângulo do rotor para o curto circuito na barra 250.

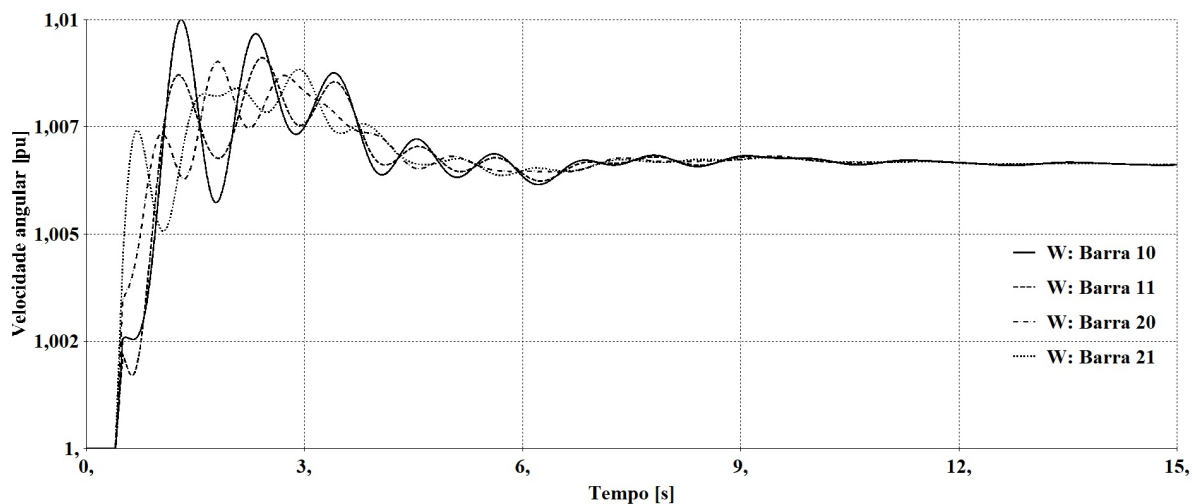


Figura 39 – Velocidade angular para o curto circuito na barra 250.

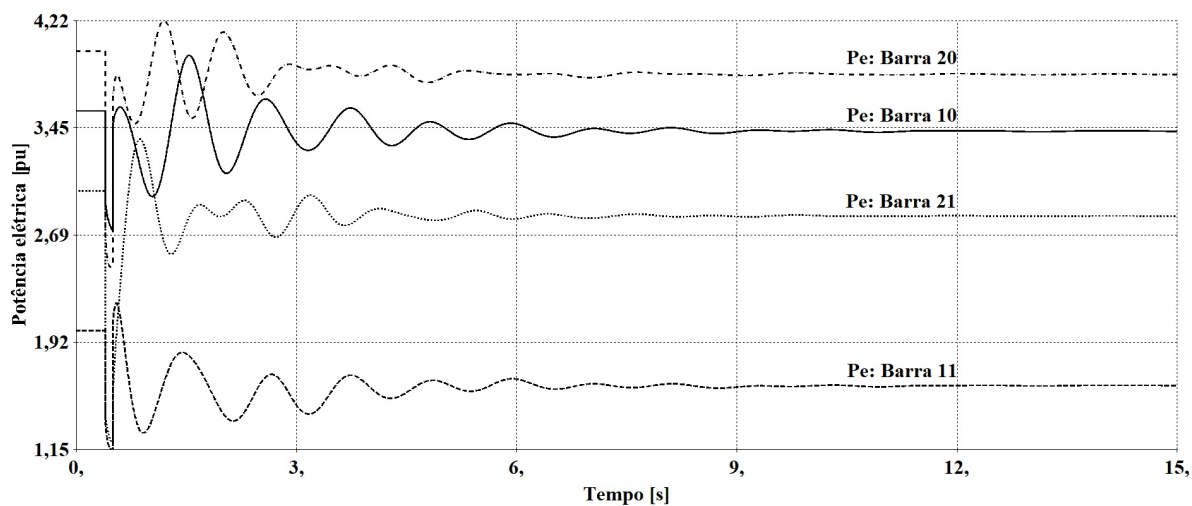


Figura 40 – Potência elétrica para o curto circuito na barra 250.

A tabela 54 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 54 – Estimação com o ERA para o curto circuito na barra 250.

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
-0,0043	1,0000	6,9029E-04	0,2306E+03	0,0021
-1,1521	1,0000	0,1834	0,8680	0,0538
-0,7087 + j7,5190	0,0938	1,2020	1,4111	1,0000
-0,7087 - j7,5190	0,0938	1,2020	1,4111	1,0000
-0,9199 + j6,6235	0,1376	1,0643	1,0871	0,8339
-0,9199 - j6,6235	0,1376	1,0643	1,0871	0,8339

De acordo com o valor singular modal (MSV), os autovalores que mais influenciaram na dinâmica do sistema foram os pares conjugado  $-0,7087 \pm j7,5190$  e  $-0,9199 \pm j6,6235$ . O amortecimento respectivo à estes elementos foram aproximadamente iguais à 0,0938 e 0,1376 , respectivamente.

Outro argumento que atesta a severidade deste evento em relação aos demais analisados é o fato da carga presente na barra 251 ser desligada, em decorrência da desenergização do transformador trifásico entre as barras 250 e 251.

#### 4.3.4 Estudo 4 - Múltiplas Contingências

A proposta deste último estudo é considerar que todas as contingências descritas anteriormente ocorram simultaneamente no sistema, cuja probabilidade é muito pequena, mas verificará se o ERA será capaz de capturar a instabilidade na rede elétrica. O resultado observado no Organon foi a detecção de instabilidade angular, o que era esperado dado a dimensão do evento. A análise pelo ERA será realizada entre os instantes 0,5 e 8,0 [s], aproximadamente, devido aos mecanismos da ferramenta de simulação no bloqueio da execução para aliviar o esforço computacional. As figuras 41, 42 e 43 apresentam os sinais introduzidos na metodologia.

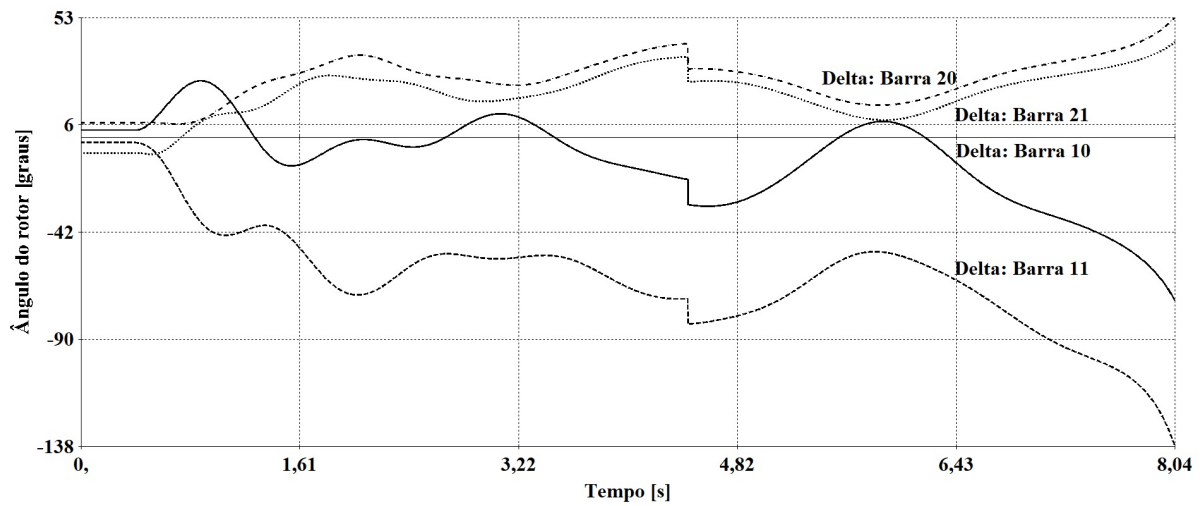


Figura 41 – Ângulo do rotor para as múltiplas contingências.

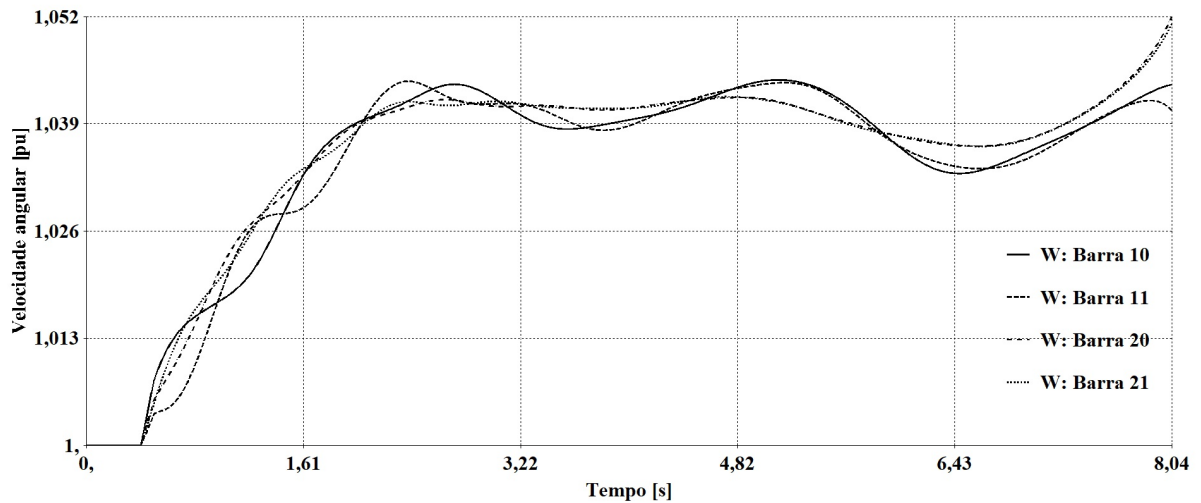


Figura 42 – Velocidade angular para as múltiplas contingências.

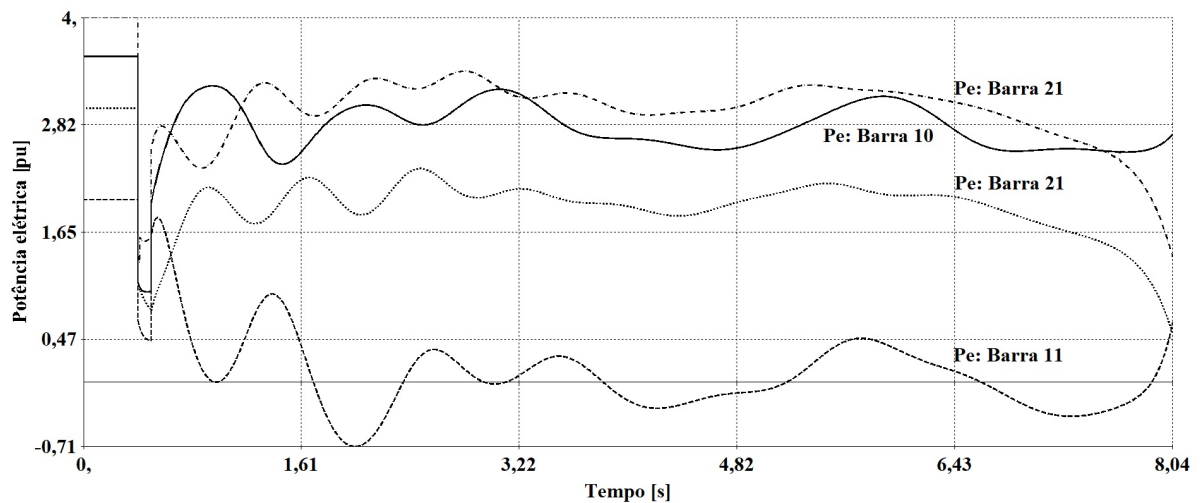


Figura 43 – Potência elétrica para as múltiplas contingências.



A tabela 55 apresenta as estimações de autovalores, amortecimento, frequência natural não amortecida, constante de tempo e também o valor que o indicador de confiança MSV resultou para cada elemento calculado via ERA.

Tabela 55 – Estimação com o ERA para as múltiplas contingências.

Autovalor	Amortecimento	Frequência Natural não amortecida [Hz]	Constante de tempo [s]	MSV
$-0,1140 + j7,3110$	0,0156	1,1637	8,7706	0,2130
$-0,1140 - j7,3110$	0,0156	1,1637	8,7706	0,2130
$-0,4820 + j5,6970$	0,0843	0,9099	2,0747	1,0000
$-0,4820 - j5,6970$	0,0843	0,9099	2,0747	1,0000
-1,1838	1,0000	0,1884	0,8447	0,0283
$0,0804 + j0,3485$	-0,2248	0,0569	-12,4384	0,0537
$0,0804 - j0,3485$	-0,2248	0,0569	-12,4384	0,0537
$0,0391 + j2,3934$	-0,0164	0,3810	-25,5446	0,3661
$0,0391 - j2,3934$	-0,0164	0,3810	-25,5446	0,3661
$0,0256 + j4,0894$	-0,0063	0,6509	-36,9879	0,2377
$0,0256 - j4,0894$	-0,0063	0,6509	-36,9879	0,2377

De acordo com o valor singular modal (MSV), diversos autovalores obtiveram parcela significativa na dinâmica do sistema, inclusive um conjunto que apresentou parte real positiva. Esta característica, também observada no estudo de instabilidade angular em sistema radial, reafirma a robustez do ERA em detectar casos instáveis.

## 4.4 Considerações Finais

Este capítulo teve por objetivo testar o ERA na estimação de estados a partir de simulações transitórias em sistemas teste e equivalentes à sistemas reais. Para os testes realizados, foram aplicadas diferentes tipos de contingências para verificar inclusive a capacidade do ERA em obter modos instáveis.

Para o estudo de 50 [ms] e 100 [ms] no sistema radial, os resultados são praticamente iguais, apresentando somente autovalores com parte real negativa, caracterizando que o sistema possui muita área de desaceleração para compensar a aceleração adquirida pela máquina síncrona do sistema. É possível verificar que o ângulo do rotor  $\delta$  da máquina não atingiu  $90^\circ$ , o que contribui para verificar a robustez do ERA.

Para os testes realizados no sistema *Brazilian Birds*, o ERA estimou em cada

estudo um conjunto menor de autovalores do que o esperado e observado nos casos em regime permanente. A falha deste resultado pode ser entendida analisando o período de tempo em que o ERA está sendo aplicado, pois logo após a extinção do curto-circuito, dinâmicas com características distintas exercem influência no sistema de potência.

A resposta do sistema para todas estas dinâmicas é promover uma grande excursão angular e, conseqüentemente, prejudica a qualidade do conjunto de autovalores estimados no ERA. A expectativa para que a precisão dos resultados seja aperfeiçoada é considerar a aplicação do método em um intervalo de tempo posterior à eliminação do curto-circuito, onde o sistema estará mais próximo da região de atração para um novo ponto de equilíbrio, caso a estabilidade ainda seja garantida.

Considerando estes pontos, e as características distintas de amortecimento encontradas em cada situação, é possível verificar que é necessário um número maior de testes e simulações para permitir uma avaliação mais conclusiva sobre os resultados encontrados neste capítulo.

## 5 Conclusão

### 5.1 Considerações Gerais

A análise da estabilidade angular em sistemas de potência é uma área da Engenharia Elétrica, cuja importância está associada com a operação segura das redes elétricas. Em razão das inovações tecnológicas sendo integradas, esta área têm sido alvo de estudos para que as ferramentas apresentem um grau cada vez mais elevado de precisão e robustez. Seguindo esta tendência, neste trabalho, foram apresentadas metodologias de estimação de amortecimento, as quais têm como objetivo calcular os parâmetros modais das séries temporais introduzidas.

O modelo constituído destes parâmetros serve como uma orientação da estabilidade angular, abrangendo desde o regime permanente, identificando todos os autovalores da matriz característica no ponto de operação, até na estabilidade transitória, onde o amortecimento das oscilações permite inferir se o sistema está caminhando para uma região de instabilidade angular.

As metodologias consideradas foram: Método de Prony; Máxima verossimilhança recursiva (RML); Decomposição em modos dinâmicos (DMD); Algoritmo de realização de sistemas (ERA). Os dois primeiros métodos citados, Prony e RML, apresentam como desvantagens a capacidade trabalhar com somente 1 sinal de cada vez, e a necessidade estimar previamente a ordem do polinômio, sendo que para o RML, são requisitados 3 estimativas para cada um dos polinômios da metodologia. Por outro lado, o DMD e ERA já são capazes de trabalhar com diversos sinais simultaneamente e ainda capturar a ordem do sistema sem a necessidade de estimação prévia.

Na análise em regime permanente, o *software* PacDyn foi utilizado para linearizar o sistema teste de pequeno porte conhecido como *Brazilian Birds*. A aplicação da função impulso em cada entrada do sistema linearizado permitiu obter nas saídas as curvas, as quais foram introduzidas aos métodos de estimação de amortecimento. Os resultados para casos distintos indicaram o ERA como a metodologia de melhor resultado, obtendo sucesso na estimação de 43 dos 44 autovalores identificados pelo PacDyn no caso base.

No estudo de estabilidade transitória, a ferramenta empregada para simular os sistemas de potência teste foi o ORGANON, aplicativo reconhecido tecnicamente pelo Operador Nacional do Sistema. Aplicando contingências na rede, foram levantadas as curvas de ângulo do rotor, velocidade angular e potência elétrica, de cada uma das máquinas. A metodologia empregada para este caso foi somente o ERA, dado o seu desempenho superior visualizado no caso de regime permanente. A resposta do ERA em conjunto com seu indicador de valor singular modal correspondeu com as premissas esperadas no sistema avaliado neste trabalho, requerendo maiores estudos para comprovar a validade, de fato, da metodologia.

De acordo com os resultados apresentados, conclui-se que este trabalho apresentou uma comparação atrativa na análise de metodologias para estabilidade angular. As ferramentas estudadas apresentaram uma forte aderência ao universo técnico, ainda mais devido a possibilidade de obter conclusões sobre a estabilidade do sistema utilizando somente medições. O algoritmo de realização de sistemas ofereceu uma ampla variedade de resultados consistentes, sendo destacado como o método de maior interesse neste contexto.

## 5.2 Trabalhos Futuros

As metodologias comparadas para análise da estabilidade se limitaram na análise de sistemas elétricos tradicionais de pequena dimensão, compostos somente por máquinas e medições reais, provenientes, por exemplo, de sistemas SCADA. Portanto, pode-se recomendar como trabalhos futuros nesta área:

1. Utilização de medições complexas, como por exemplo, de unidades de medição fasorial (PMU);
2. Realizar testes em sistemas de grande porte;
3. Investigar o tempo computacional e a robustez numérica, pois em sistemas reais com grandes dimensões, espera-se que as técnicas sejam aplicáveis tanto no planejamento quanto na operação em tempo real.
4. Aplicar a análise das curvas em sistemas que contemplem geração intermitente, como é o caso das fontes eólica e solares;

5. Considerar a implementação de versões atualizadas das metodologias apresentadas, principalmente no que se diz respeito à método de Prony;
6. Avaliar os resultados do ERA utilizando janelas de tempo posterior à eliminação do defeito, sendo este um período onde o sistema se aproxima de uma região de atração correspondente a um novo ponto de equilíbrio, para a existência de estabilidade.
7. Utilizar os resultados obtidos para o ajuste de controladores específicos aos sistemas de potência, tais como regulador de tensão (AVR), estabilizador de sistema de potência (PSS) e regulador de velocidade (GOV);

# Apêndices

## APÊNDICE A – Sistema Radial

O sistema radial utilizado nos estudos possui somente 3 barras, onde um gerador é conectado ao barramento infinito através de um sistema de transmissão composto por transformador e 2 circuitos de uma linha de transmissão. A figura 44 apresneta o diagrama unifilar do sistema radial.

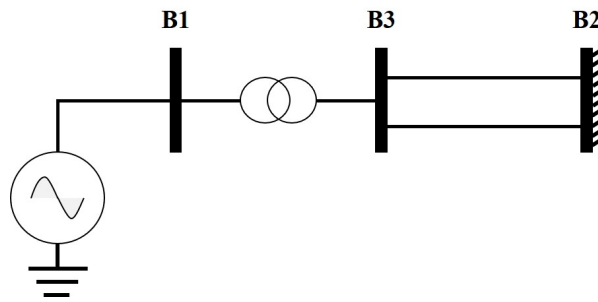


Figura 44 – Diagrama unifilar do sistema radial.

Os dados da máquina síncrona e dos sistemas de transmissão são apresentados na tabela 56, onde os dados já encontram-se definidos para a potência base de 100 [MVA], na frequência de 60 [Hz].

Tabela 56 – Dados do sistema radial.

Máquina	Transformador	Linha de Transmissão
$x_d = 0,20$ [pu] $H = 5$ [s] $D_m = 1,0$ [pu] $P_m = 0,8$ [pu]	$x_{TR} = 0,10$ [pu]	$x_{LT} = 0,40$ [pu]

Realizando um estudo em regime permanente, considerando o barramento infinito como referência angular, o ponto de operação para as tensões em cada barra é informado na tabela 57.

Tabela 57 – Tensões em cada barra do sistema radial.

Barra	Módulo [pu]	Ângulo [graus]
1	1,050	13,21
2	1,000	0,0
3	1,027	8,96

A inicialização para a tensão na barra interna da máquina foi calculada considerando o modelo clássico, resultando em:

$$\bar{E} = E \angle \delta = 1,1115 \angle 21,0975^\circ [\text{pu}]$$



## APÊNDICE B – Sistema Brazilian Birds

O sistema teste Brazilian Birds é um sistema equivalente separado em 2 áreas através da interligação de 440 [kV], tendo um sistema de transmissão de 230 [kV] com total de geração em 1257,2 [MW] para atendimento à carga. A figura 45 apresenta o diagrama unifilar do sistema Brazilian Birds (BBTS).

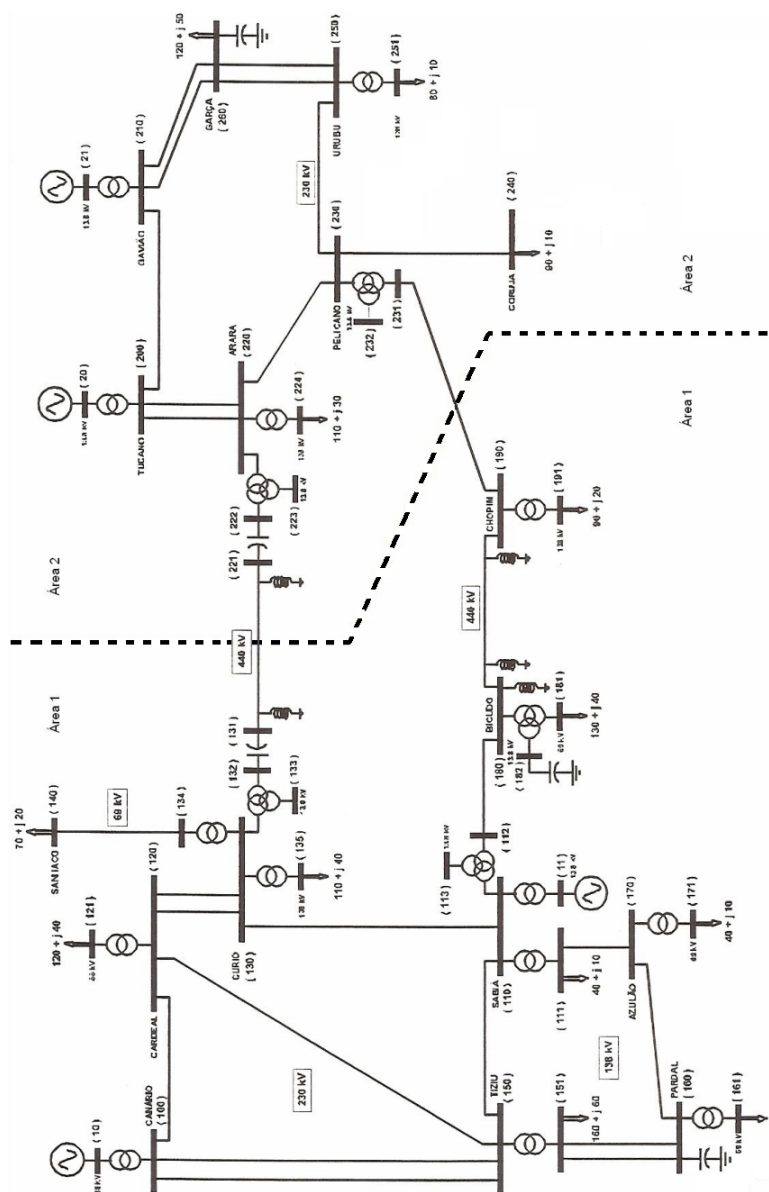


Figura 45 – Diagrama unifilar do sistema Brazilian Birds.

Os dados de linhas de transmissão e capacitores série, e transformadores, constam

nas tabelas 58 e 59, respectivamente.

Tabela 58 – Linhas de transmissão e capacitores série

Barra DE	Barra PARA	Circuito	Resistência [%]	Reatância [%]	Susceptância [Mvar]	Área
100	120	1	2,76	10,44	18,43	1
100	150	1	5,29	20,0	35,3	1
100	150	2	5,29	20,0	35,3	1
120	150	1	5,76	21,76	38,4	1
120	130	1	4,61	17,41	30,72	1
120	130	2	4,61	17,41	30,72	1
110	130	1	1,28	4,84	8,53	1
110	150	1	2,41	9,09	16,04	1
134	140	1	2,91	5,0	0,11	1
151	160	1	5,08	10,56	2,48	1
151	160	2	5,08	10,56	2,48	1
111	170	1	2,41	5,02	1,18	1
160	170	1	3,3	6,86	1,61	1
180	190	1	0,2	2,39	116,1	1
190	231	1	0,31	3,82	185,7	1
131	221	1	0,59	7,16	348,2	1
112	180	1	0,08	0,95	46,42	1
230	240	1	1,05	3,96	7,0	2
230	250	1	1,66	6,29	11,09	2
250	260	1	1,13	4,25	7,51	2
250	260	2	1,13	4,25	7,51	2
210	260	1	2,3	8,7	15,36	2
210	260	2	2,3	8,7	15,36	2
200	210	1	2,18	8,22	14,51	2
200	220	1	2,46	9,28	16,39	2
200	220	2	2,46	9,28	16,39	2
220	230	1	2,59	9,77	17,24	2
131	132	1	0,0	-1,0	-	1
221	222	1	0,0	-1,0	-	2

Tabela 59 – Transformadores do sistema

Barra DE	Barra PARA	Circuito	Reatância [%]	Tap [pu]
10	100	1	2,13	1,0
11	110	1	3,85	1,0
110	111	1	9,17	1,0
120	121	1	5,91	1,0
130	135	1	10,0	1,0
130	134	1	20,95	1,0
130	134	2	42,83	1,0
160	161	1	3,92	1,0
170	171	1	8,8	1,0
150	151	1	4,64	1,0
190	191	1	13,27	1,0
20	200	1	2,73	1,0
21	210	1	1,72	1,0
220	224	1	9,25	1,0
250	251	1	12,92	1,0
180	1180	1	7,48	1,0
181	1180	1	0,02	1,0
182	1180	1	2,2	1,0
130	1130	1	4,92	1,0
132	1130	1	-0,25	1,0
133	1130	1	3,75	1,0
220	1220	1	4,92	1,0
222	1220	1	-0,25	1,0
223	1220	1	3,75	1,0
110	1110	1	4,92	1,0
112	1110	1	-0,25	1,0
113	1110	1	3,75	1,0
230	1230	1	4,92	1,0
231	1230	1	-0,25	1,0
232	1230	1	3,75	1,0

As injeções nominais e calculadas dos geradores e cargas, e *shunts* de barra constam nas tabelas 5, 60 e 61.

Tabela 60 – Geração e carga no sistema para o ponto de operação definido

Número	Geração		Carga	
	Ativa [MW]	Reativa [Mvar]	Ativa [MW]	Reativa [Mvar]
10	357,2	-48,6		
11	200,0	-32,0		
111			40,0	10,0
121			120,0	40,0
135			110,0	40,0
140			70,0	20,0
151			160,0	60,0
161			40,0	10,0
171			40,0	10,0
181			130,0	40,0
191			90,0	20,0
20	400,0	-39,4		
21	300,0	-43,3		
224			110,0	30,0
240			90,0	10,0
251			80,0	10,0
260			120,0	50,0

Tabela 61 – Shunts do sistema para o ponto de operação definido

Número	Shunt Nominal [Mvar]	Shunt Calculado [Mvar]
131	-80,0	-92,97
160	40,0	40,97
180	-40,0	-46,83
182	10,0	11,24
190	-80,0	-95,57
221	-80,0	-93,14
260	50,0	52,53

Os dados transitórios das máquinas do sistema são apresentados pela tabela 62.

Tabela 62 – Dados transitórios das máquinas do sistema teste

Nome do Grupo	Tipo	Número de Geradores	Sn [MVA]	H [s]	X'd [pu]	X'q [pu]	Xd [pu]	Xq [pu]
CANÁRIO	UHE	5	100,0	3,120	0,314		1,014	0,770
SABIÁ	UTE	4	75,0	6,187	0,185	0,360	1,050	0,980
TUCANO	UHE	5	115,0	3,817	0,315		1,060	0,610
GAVIÃO	UHE	4	158,0	3,177	0,300		0,920	0,510

Nome do Grupo	Ra [pu]	T'd0 [s]	T'q0 [s]	D [pu]	X''d [pu]	T''d0 [s]	T''q0 [s]	Xl [pu]
CANÁRIO	0,0050	6,55		2,0	0,28	0,039	0,07	0,163
SABIÁ	0,0031	6,10	0,30	2,0	0,13	0,038	0,10	0,070
TUCANO	0,0024	8,68		2,0	0,25	0,040	0,08	0,147
GAVIÃO	0,0020	5,20		2,0	0,22	0,029	0,03	0,130

A figura 46 e a tabela 63 apresentam o modelo utilizado para o regulador automático de tensão das máquinas de Canário, Sabiá e Tucano. A figura 47 e a tabela 64, configuram o regulador de tensão implementado em Gavião.

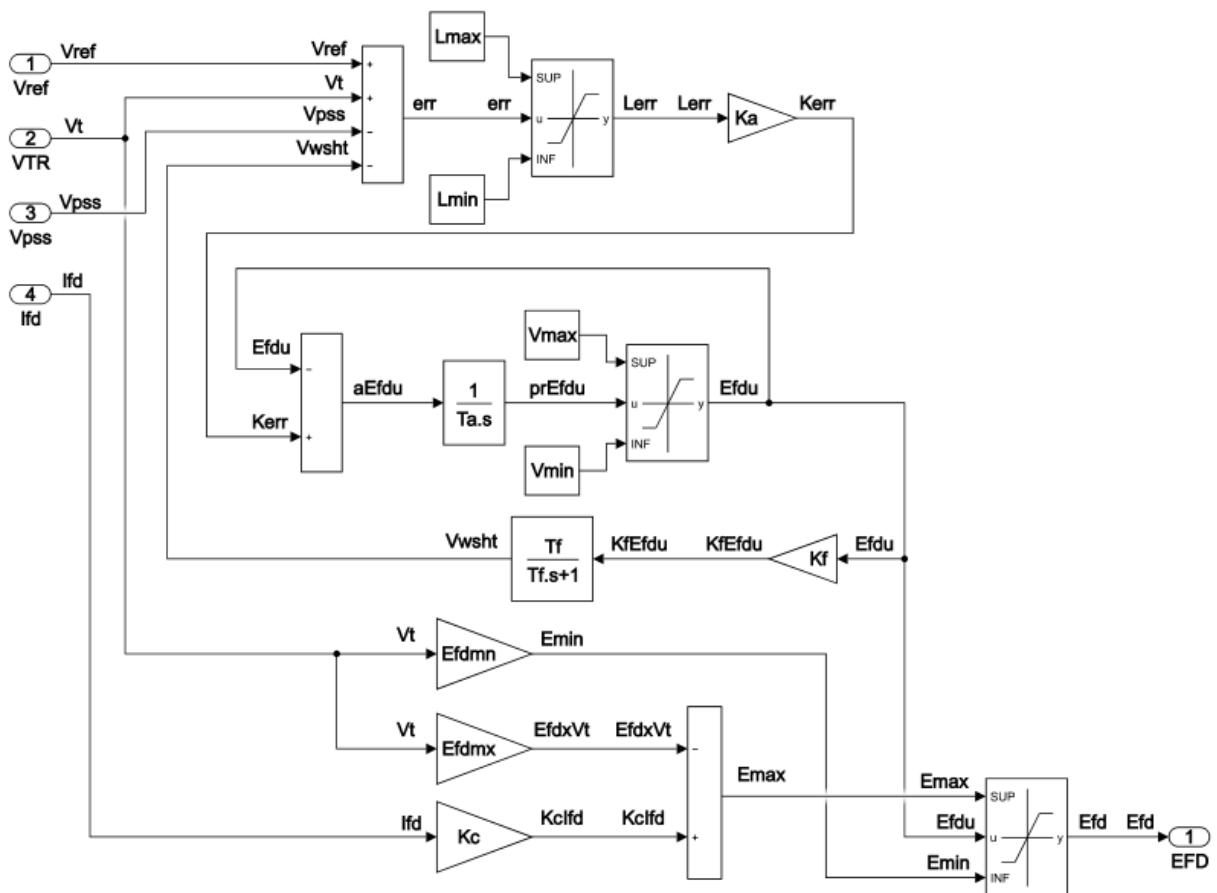


Figura 46 – Regulador automático de tensão para Canário, Sabiá e Tucano.



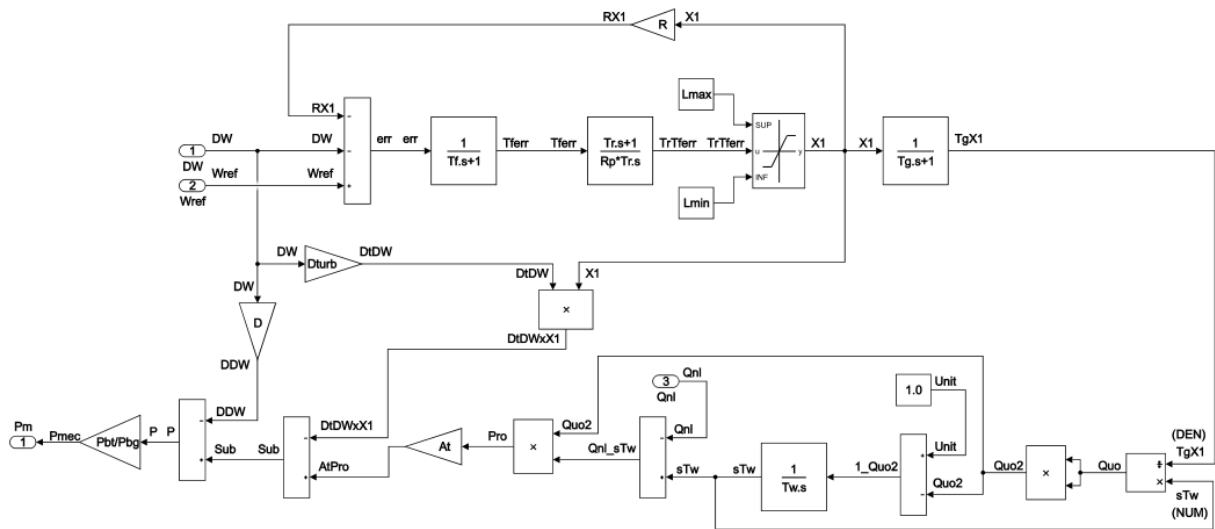


Figura 48 – Regulador de velocidade para Canário, Tucano e Gavião.

Tabela 65 – Parâmetros do regulador de velocidade para Canário, Tucano e Gavião

Parâmetros	Tf [s]	Rp [pu]	Tr [s]	R [pu]	Tg [s]	D [pu]	Tw [s]
Valores	0,05	0,38	7,0	0,05	0,5	1,0	1,5
Parâmetros	Qnl [pu]	At [pu]	Dt [pu]	Pbg [pu]	Lmin [pu]	Lmax [pu]	Pbt [pu]
Valores	0,15	1,2	0,5	1,0	-2,0	1,10	1,0

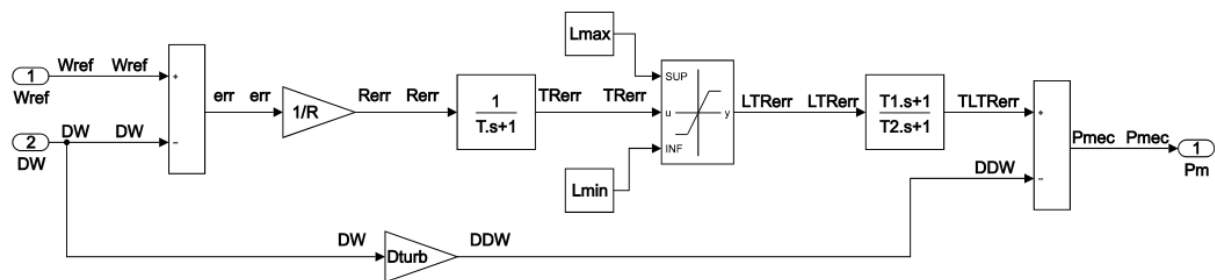


Figura 49 – Regulador de velocidade para Sabiá.

Tabela 66 – Parâmetros do regulador de velocidade para Sabiá

Parâmetros	R [pu]	T [s]	T1 [s]	T2 [s]	Lmin [pu]	Lmax [pu]	Dturb [pu]
Valores	0,05	0,20	0,0	0,3	0,0	1,2	0,0

# APÊNDICE C – Resultados no Regime Permanente para o Brazilian Birds

Os resultados completos dos algoritmos de estimação de amortecimento para o sistema teste submetido as avaliações em regime permanente serão disponibilizados neste apêndice, divididos em seções para organização das tabelas.

## C.1 Caso 1

Os resultados do caso 1 estão divididos entre os 3 estudos realizados no capítulo 3.

### C.1.1 Estudo 1

As tabelas 67, 68 e 69 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 1, caso 1. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.1.1.



Tabela 67 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 1, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-28,8095	31	-0,3278 + j6,2165
2	-22,5024	32	-0,3278 - j6,2165
3	-1,0120 + j8,4427	33	-0,3385 + j6,2116
4	-1,0120 - j8,4427	34	-0,3385 - j6,2116
5	-1,0344 + j8,4260	35	-0,2890 + j6,1935
6	-1,0344 - j8,4260	36	-0,2890 - j6,1935
7	-0,6698 + j8,2477	37	-1,7813
8	-0,6698 - j8,2477	38	-1,7198
9	-0,7142 + j8,2224	39	-1,6362
10	-0,7142 - j8,2224	40	-1,1165
11	-0,6167 + j8,2255	41	-1,0377
12	-0,6167 - j8,2255	42	-1,0207
13	-0,3707 + j6,3063	43	-0,9497
14	-0,3707 - j6,3063	44	-0,0157
15	-0,2598 + j6,2985		
16	-0,2598 - j6,2985		
17	-0,3318 + j6,2939		
18	-0,3318 - j6,2939		
19	-0,2956 + j6,2955		
20	-0,2956 - j6,2955		
21	-0,3083 + j6,2883		
22	-0,3083 - j6,2883		
23	-0,3408 + j6,2841		
24	-0,3408 - j6,2841		
25	-0,2740 + j6,2805		
26	-0,2740 - j6,2805		
27	-0,2047 + j6,2773		
28	-0,2047 - j6,2773		
29	-0,2890 + j6,2628		
30	-0,2890 - j6,2628		

Tabela 68 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 1, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-1,0467 + j8,4863	31	-2,7638
2	-1,0467 - j8,4863	32	-1,7059
3	-1,0240 + j8,4711	33	-1,6497
4	-1,0240 - j8,4711	34	-1,6049
5	-1,0035 + j8,4326	35	-0,9179
6	-1,0035 - j8,4326	36	-0,0662
7	-0,6109 + j8,3307	37	-0,0229
8	-0,6109 - j8,3307		
9	-0,6427 + j8,3255		
10	-0,6427 - j8,3255		
11	-0,6351 + j8,2774		
12	-0,6351 - j8,2774		
13	-0,3607 + j6,3317		
14	-0,3607 - j6,3317		
15	-0,3160 + j6,2984		
16	-0,3160 - j6,2984		
17	-0,3478 + j6,2832		
18	-0,3478 - j6,2832		
19	-0,2968 + j6,2849		
20	-0,2968 - j6,2849		
21	-0,3042 + j6,2831		
22	-0,3042 - j6,2831		
23	-0,3093 + j6,2686		
24	-0,3093 - j6,2686		
25	-0,3692 + j6,2512		
26	-0,3692 - j6,2512		
27	-0,3546 + j6,2449		
28	-0,3546 - j6,2449		
29	-0,3019 + j6,2255		
30	-0,3019 - j6,2255		

Tabela 69 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 1, caso 1

Número	Autovalor
1	$-11,3913 + j28,7307$
2	$-11,3913 - j28,7307$
3	$-2,9205 + j11,1202$
4	$-2,9205 - j11,1202$
5	$-0,4462 + j8,5649$
6	$-0,4462 - j8,5649$
7	$-0,7386 + j7,6690$
8	$-0,7386 - j7,6690$
9	$-0,2638 + j6,2489$
10	$-0,2638 - j6,2489$
11	$-1,2022 + j4,1756$
12	$-1,2022 - j4,1756$
13	$-0,2745 + j2,9893$
14	$-0,2745 - j2,9893$
15	$-0,5636 + j2,3422$
16	$-0,5636 - j2,3422$
17	$-0,3170 + j1,4531$
18	$-0,3170 - j1,4531$
19	$-0,1810 + j0,9226$
20	$-0,1810 - j0,9226$
21	$-0,1654 + j0,4743$
22	$-0,1654 - j0,4743$
23	$-0,0830 + j0,0688$
24	$-0,0830 - j0,0688$

### C.1.2 Estudo 2

As tabelas 70, 71 e 72 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 2, caso 1. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.1.2.

Tabela 70 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 2, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,3071
2	-56,8561
3	-0,9318 + j8,4826
4	-0,9318 - j8,4826
5	-1,0224 + j8,4085
6	-1,0224 - j8,4085
7	-1,0383 + j8,3714
8	-1,0383 - j8,3714
9	-1,0091 + j8,3686
10	-1,0091 - j8,3686
11	-0,2201 + j6,2799
12	-0,2201 - j6,2799
13	-0,3260 + j6,2300
14	-0,3260 - j6,2300
15	-0,2515 + j6,2058
16	-0,2515 - j6,2058
17	-1,4641
18	-1,3484
19	-1,1716
20	-1,1073
21	-1,0048
22	-0,1315
23	-0,1006
24	-0,04498

Tabela 71 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 2, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	$-0,5881 + j8,2853$
2	$-0,5881 - j8,2853$
3	$-0,2839 + j6,2670$
4	$-0,2839 - j6,2670$
5	-6,0172
6	-1,7488
7	-1,4375
8	-1,1166
9	-1,0476
10	-1,0169
11	-0,9995
12	-0,9958
13	-0,9820
14	-0,9776
15	-0,9470

Tabela 72 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 2, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-60,9127	31	-0,4663 + j0,1125
2	-49,9102 + j7,6667	32	-0,4663 - j0,1125
3	-49,9102 - j7,6667		
4	-28,9964 + j5,2642		
5	-28,9964 - j5,2642		
6	-16,7537 + j3,1168		
7	-16,7537 - j3,1168		
8	-13,2380		
9	-0,9951 + j8,4454		
10	-0,9951 - j8,4454		
11	-0,6364 + j8,2757		
12	-0,6364 - j8,2757		
13	-5,5171		
14	-0,3028 + j6,2872		
15	-0,3028 - j6,2872		
16	-0,2997 + j2,9542		
17	-0,2997 - j2,9542		
18	-3,5885 + j0,4455		
19	-3,5885 - j0,4455		
20	-2,6478 + j1,1803		
21	-2,6478 - j1,1803		
22	-0,0672		
23	-1,5630 + j1,4404		
24	-1,5630 - j1,4404		
25	-0,4529 + j0,9009		
26	-0,4529 - j0,9009		
27	-1,0863 + j0,7360		
28	-1,0863 - j0,7360		
29	-0,6949 + j0,3780		
30	-0,6949 - j0,3780		

### C.1.3 Estudo 3

As tabelas 73, 74 e 75 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 3, caso 1. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.1.3.

Tabela 73 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 3, caso 1

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,4494
2	-57,2048
3	-56,8876
4	-18,3528
5	-0,9703 + j8,4117
6	-0,9703 - j8,4117
7	-0,6043 + j8,3351
8	-0,6043 - j8,3351
9	-0,6497 + j8,2992
10	-0,6497 - j8,2992
11	-0,6491 + j8,2639
12	-0,6491 - j8,2639
13	-0,3110 + j6,3518
14	-0,3110 - j6,3518
15	-0,2870 + j6,2570
16	-0,2870 - j6,2570
17	-0,2214 + j6,2425
18	-0,2214 - j6,2425
19	-0,3295 + j6,2368
20	-0,3295 - j6,2368
21	-0,2700 + j6,2076
22	-0,2700 - j6,2076
23	-2,3822
24	-1,7704
25	-1,7453
26	-0,1320
27	-0,0955

Tabela 74 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 3, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-25,2236	31	-0,0368
2	-1,0391 + j8,4929	32	0,01108
3	-1,0391 - j8,4929		
4	-0,9908 + j8,4440		
5	-0,9908 - j8,4440		
6	-0,9025 + j8,4520		
7	-0,9025 - j8,4520		
8	-0,9545 + j8,4367		
9	-0,9545 - j8,4367		
10	-0,9816 + j8,4239		
11	-0,9816 - j8,4239		
12	-0,7095 + j8,2971		
13	-0,7095 - j8,2971		
14	-0,6075 + j8,2859		
15	-0,6075 - j8,2859		
16	-0,6286 + j8,2774		
17	-0,6286 - j8,2774		
18	-0,6690 + j8,2483		
19	-0,6690 - j8,2483		
20	-0,5665 + j8,2064		
21	-0,5665 - j8,2064		
22	-0,2250 + j6,2627		
23	-0,2250 - j6,2627		
24	-0,3135 + j6,2429		
25	-0,3135 - j6,2429		
26	-2,8171		
27	-2,8122		
28	-1,5458		
29	-0,9795		
30	-0,1653		



Tabela 75 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 3, caso 1

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-46,5459 + j60,1380	31	-0,2515 - j0,2266
2	-46,5459 - j60,1380	32	-0,0142
3	-19,2485 + j33,0515		
4	-19,2485 - j33,0515		
5	-9,7071 + j18,0707		
6	-9,7071 - j18,0707		
7	-4,5438 + j9,8573		
8	-4,5438 - j9,8573		
9	-0,8000 + j8,4675		
10	-0,8000 - j8,4675		
11	-0,7262 + j8,1981		
12	-0,7262 - j8,1981		
13	-0,2979 + j6,2936		
14	-0,2979 - j6,2936		
15	-1,9551 + j4,9628		
16	-1,9551 - j4,9628		
17	-0,3043 + j2,9382		
18	-0,3043 - j2,9382		
19	-1,0203 + j3,0616		
20	-1,0203 - j3,0616		
21	-0,6470 + j1,9123		
22	-0,6470 - j1,9123		
23	-0,4159 + j1,2606		
24	-0,4159 - j1,2606		
25	-0,2805 + j0,8928		
26	-0,2805 - j0,8928		
27	-0,0500		
28	-0,2658 + j0,5720		
29	-0,2658 - j0,5720		
30	-0,2515 + j0,2266		

## C.2 Caso 2

Os resultados do caso 2 estão divididos entre os 4 estudos realizados no capítulo 3.

### C.2.1 Estudo 1

As tabelas 76, 77, 78 e 79 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML, DMD e ERA para o estudo 1, caso 2.

Tabela 76 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 1, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-56,8876
2	-22,5352
3	-18,3528
4	-0,9703 + j8,4117
5	-0,9703 - j8,4117
6	-1,0091 + j8,3686
7	-1,0091 - j8,3686
8	-0,2201 + j6,2799
9	-0,2201 - j6,2799
10	-0,2870 + j6,2570
11	-0,2870 - j6,2570
12	-0,2214 + j6,2425
13	-0,2214 - j6,2425
14	-0,2700 + j6,2076
15	-0,2700 - j6,2076
16	-2,3822
17	-1,0048
18	-0,0806
19	-0,0226

Tabela 77 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 1, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-25,2236
2	-1,0391 + j8,4929
3	-1,0391 - j8,4929
4	-0,9476 + j8,4599
5	-0,9476 - j8,4599
6	-0,9025 + j8,4520
7	-0,9025 - j8,4520
8	-0,9545 + j8,4367
9	-0,9545 - j8,4367
10	-0,2839 + j6,2670
11	-0,2839 - j6,2670
12	-0,3135 + j6,2429
13	-0,3135 - j6,2429
14	-2,8122
15	-1,1166
16	-1,1109
17	-0,4541 + j0,9526
18	-0,4541 - j0,9526
19	-1,0476
20	-1,0169
21	-0,9820
22	-0,9795

Tabela 78 – Todos os autovalores identificados via DMD para estudo 1, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-56,6726
2	-24,8843
3	-22,5085
4	-0,9952 + j8,4449
5	-0,9952 - j8,4449
6	-0,6365 + j8,2752
7	-0,6365 - j8,2752
8	-0,3028 + j6,2872
9	-0,3028 - j6,2872
10	-5,4765 + j1,5135
11	-5,4765 - j1,5135
12	-0,3000 + j2,9544
13	-0,3000 - j2,9544
14	-1,9825 + j1,8268
15	-1,9825 - j1,8268
16	-1,7165 + j0,7433
17	-1,7165 - j0,7433
18	-0,4558 + j0,8959
19	-0,4558 - j0,8959
20	-1,1868 + j0,4282
21	-1,1868 - j0,4282
22	-0,0670
23	-0,1738 + j0,3328
24	-0,1738 - j0,3328

Tabela 79 – Todos os autovalores identificados via ERA para estudo 1, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,3258	31	-1,4484
2	-56,7711	32	-1,6555
3	-56,2304	33	-1,7544
4	-43,1927	34	-1,0769
5	-37,7362	35	-0,9936 + j0,3170
6	-25,1538	36	-0,9936 - j0,3170
7	-28,8280	37	-0,8900 + j0,2583
8	-26,2566	38	-0,8900 - j0,2583
9	-21,2412	39	-0,0673
10	-15,4207	40	-0,0166
11	-22,5544	41	-0,0165
12	-18,3161		
13	-0,9951 + j8,4454		
14	-0,9951 - j8,4454		
15	-0,6364 + j8,2757		
16	-0,6364 - j8,2757		
17	-5,9430		
18	-0,3028 + j6,2872		
19	-0,3028 - j6,2872		
20	-0,2997 + j2,9542		
21	-0,2997 - j2,9542		
22	-3,4996 + j1,2218		
23	-3,4996 - j1,2218		
24	-2,8235		
25	-1,6270 + j1,4040		
26	-1,6270 - j1,4040		
27	-0,4535 + j0,9012		
28	-0,4535 - j0,9012		
29	-2,4299		
30	-2,3712		

## C.2.2 Estudo 2

As tabelas 80, 81 e 82 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 2, caso 2. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.2.2.

Tabela 80 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 2, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,3071
2	-57,2048
3	-22,5024
4	-0,9318 + j8,4826
5	-0,9318 - j8,4826
6	-1,0120 + j8,4427
7	-1,0120 - j8,4427
8	-1,0344 + j8,4260
9	-1,0344 - j8,4260
10	-1,0224 + j8,4085
11	-1,0224 - j8,4085
12	-0,2740 + j6,2805
13	-0,2740 - j6,2805
14	-0,3260 + j6,2300
15	-0,3260 - j6,2300
16	-0,3278 + j6,2165
17	-0,3278 - j6,2165
18	-0,3385 + j6,2116
19	-0,3385 - j6,2116
20	-0,2515 + j6,2058
21	-0,2515 - j6,2058
22	-5,9620
23	-1,7453
24	-0,1320
25	-0,1006
26	-0,0157

Tabela 81 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 2, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	$-1,0467 + j8,4863$
2	$-1,0467 - j8,4863$
3	$-1,0240 + j8,4711$
4	$-1,0240 - j8,4711$
5	$-0,9908 + j8,4440$
6	$-0,9908 - j8,4440$
7	$-0,9816 + j8,4239$
8	$-0,9816 - j8,4239$
9	$-0,3546 + j6,2449$
10	$-0,3546 - j6,2449$
11	-2,8171
12	-2,7638
13	-1,7488
14	-1,6049
15	-1,4375
16	-1,1757
17	-0,0368
18	0,0111

Tabela 82 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 2, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,6423	31	-0,0673
2	-54,8599	32	-0,0171
3	-45,6878		
4	-29,0842		
5	-16,2199		
6	-22,5839 + j0,4885		
7	-22,5839 - j0,4885		
8	-0,9951 + j8,4454		
9	-0,9951 - j8,4454		
10	-0,6364 + j8,2757		
11	-0,6364 - j8,2757		
12	-0,3028 + j6,2872		
13	-0,3028 - j6,2872		
14	-6,0660 + j0,1950		
15	-6,0660 - j0,1950		
16	-0,2997 + j2,9542		
17	-0,2997 - j2,9542		
18	-2,6713		
19	-3,4873 + j1,2431		
20	-3,4873 - j1,2431		
21	-1,8236		
22	-1,6297 + j1,4049		
23	-1,6297 - j1,4049		
24	-0,4535 + j0,9012		
25	-0,4535 - j0,9012		
26	-0,9684		
27	-0,9400 + j0,3435		
28	-0,9400 - j0,3435		
29	-0,8831 + j0,2602		
30	-0,8831 - j0,2602		

### C.2.3 Estudo 3

As tabelas 83, 84 e 85 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 3, caso 2. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.2.3.



Tabela 83 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 3, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	-57,4494
2	-28,8095
3	-0,6491 + j8,2639
4	-0,6491 - j8,2639
5	-0,6698 + j8,2477
6	-0,6698 - j8,2477
7	-0,5666 + j8,2283
8	-0,5666 - j8,2283
9	-0,3707 + j6,3063
10	-0,3707 - j6,3063
11	-0,2598 + j6,2985
12	-0,2598 - j6,2985
13	-0,3318 + j6,2939
14	-0,3318 - j6,2939
15	-0,3083 + j6,2883
16	-0,3083 - j6,2883
17	-0,2047 + j6,2773
18	-0,2047 - j6,2773
19	-1,7198
20	-1,6362
21	-1,4641
22	-1,3484
23	-1,1716
24	-1,1165
25	-1,1073
26	-1,0377
27	-0,0639

Tabela 84 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 3, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-0,6109 + j8,3307	31	-0,0229
2	-0,6109 - j8,3307		
3	-0,6427 + j8,3255		
4	-0,6427 - j8,3255		
5	-0,7095 + j8,2971		
6	-0,7095 - j8,2971		
7	-0,6690 + j8,2483		
8	-0,6690 - j8,2483		
9	-0,5665 + j8,2064		
10	-0,5665 - j8,2064		
11	-0,3160 + j6,2984		
12	-0,3160 - j6,2984		
13	-0,2968 + j6,2849		
14	-0,2968 - j6,2849		
15	-0,3042 + j6,2831		
16	-0,3042 - j6,2831		
17	-0,3093 + j6,2686		
18	-0,3093 - j6,2686		
19	-0,3019 + j6,2255		
20	-0,3019 - j6,2255		
21	-6,0172		
22	-1,6497		
23	-1,5458		
24	-1,5193		
25	-1,3653		
26	-0,9995		
27	-0,9470		
28	-0,9179		
29	-0,1653		
30	-0,0662		

Tabela 85 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 3, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-56,8797	31	-0,8330 - j0,2499
2	-46,5724 + j2,2939	32	-0,0168
3	-46,5724 - j2,2939		
4	-24,6651		
5	-22,0170		
6	-18,0721		
7	-12,1881		
8	-0,9951 + j8,4454		
9	-0,9951 - j8,4454		
10	-0,6364 + j8,2757		
11	-0,6364 - j8,2757		
12	-5,9045		
13	-0,3028 + j6,2872		
14	-0,3028 - j6,2872		
15	-0,2997 + j2,9542		
16	-0,2997 - j2,9542		
17	-2,4981		
18	-3,4934 + j1,1925		
19	-3,4934 - j1,1925		
20	-1,5826		
21	-1,6254 + j1,3967		
22	-1,6254 - j1,3967		
23	-0,4535 + j0,9012		
24	-0,4535 - j0,9012		
25	-0,0673		
26	-1,0740 + j0,3926		
27	-1,0740 - j0,3926		
28	-0,9576 + j0,3158		
29	-0,9576 - j0,3158		
30	-0,8330 + j0,2499		

#### C.2.4 Estudo 4

As tabelas 86, 87 e 88 apresentam os resultados mais próximos aos autovalores do sistema BBTS obtidos com os métodos de Prony, RML e DMD para o estudo 4, caso 2. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.2.4.

Tabela 86 – Todos os autovalores mais próximos identificados via Prony para o estudo 4, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-56,8561	31	-0,0955
2	-1,0383 + j8,3714	32	-0,0938
3	-1,0383 - j8,3714	33	-0,0450
4	-0,6043 + j8,3351	34	-0,0360
5	-0,6043 - j8,3351		
6	-0,6497 + j8,2992		
7	-0,6497 - j8,2992		
8	-0,7142 + j8,2224		
9	-0,7142 - j8,2224		
10	-0,6167 + j8,2255		
11	-0,6167 - j8,2255		
12	-0,3110 + j6,3518		
13	-0,3110 - j6,3518		
14	-0,2956 + j6,2955		
15	-0,2956 - j6,2955		
16	-0,3408 + j6,2841		
17	-0,3408 - j6,2841		
18	-0,2890 + j6,2628		
19	-0,2890 - j6,2628		
20	-0,3295 + j6,2368		
21	-0,3295 - j6,2368		
22	-0,2890 + j6,1935		
23	-0,2890 - j6,1935		
24	-5,9718		
25	-1,7813		
26	-1,7704		
27	-1,0207		
28	-0,9497		
29	-0,1315		
30	-0,1001		

Tabela 87 – Todos os autovalores mais próximos identificados via RML para o estudo 4, caso 2

<b>Número</b>	<b>Autovalor</b>
1	$-1,0035 + j8,4326$
2	$-1,0035 - j8,4326$
3	$-0,6075 + j8,2859$
4	$-0,6075 - j8,2859$
5	$-0,5881 + j8,2853$
6	$-0,5881 - j8,2853$
7	$-0,6351 + j8,2774$
8	$-0,6351 - j8,2774$
9	$-0,6286 + j8,2774$
10	$-0,6286 - j8,2774$
11	$-0,3607 + j6,3317$
12	$-0,3607 - j6,3317$
13	$-0,3478 + j6,2832$
14	$-0,3478 - j6,2832$
15	$-0,2250 + j6,2627$
16	$-0,2250 - j6,2627$
17	$-0,3692 + j6,2512$
18	$-0,3692 - j6,2512$
19	$-5,9099$
20	$-2,8614$
21	$-1,7059$
22	$-0,9958$
23	$-0,9776$

Tabela 88 – Todos os autovalores identificados via DMD para o estudo 4, caso 2

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,3423	31	-0,0172
2	-43,6113	32	-0,4334
3	-36,1908 + j1,6724		
4	-36,1908 - j1,6724		
5	-24,4935		
6	-15,5402		
7	-19,8231		
8	-0,9951 + j8,4454		
9	-0,9951 - j8,4454		
10	-0,6364 + j8,2757		
11	-0,6364 - j8,2757		
12	-5,9471		
13	-0,3028 + j6,2872		
14	-0,3028 - j6,2872		
15	-0,2997 + j2,9542		
16	-0,2997 - j2,9542		
17	-2,9865		
18	-3,4773 + j1,2154		
19	-3,4773 - j1,2154		
20	-1,7528		
21	-1,6273 + j1,4035		
22	-1,6273 - j1,4035		
23	-0,4535 + j0,9012		
24	-0,4535 - j0,9012		
25	-1,1583		
26	-0,0673		
27	-1,0298 + j0,3468		
28	-1,0298 - j0,3468		
29	-0,8658 + j0,2765		
30	-0,8658 - j0,2765		

### C.3 Caso 3

A tabela 89 apresenta todos os autovalores identificados com o método DMD ao ser aplicado a metodologia descrita pelo capítulo 3.4.3. Para este estudo, a tabela correspondente ao ERA será omitida, pois todo o espectro de estimação do ERA já foi apresentado na subsubseção 3.4.3.1.

Tabela 89 – Todos os autovalores identificados via DMD para o caso 3

Número	Autovalor	Número	Autovalor
1	-57,4542	31	-0,9905 + j0,3184
2	-57,2907	32	-0,9905 - j0,3184
3	-56,7923	33	-0,4535 + j0,9012
4	-43,2057	34	-0,4535 - j0,9012
5	-37,9978	35	-0,8890 + j0,2563
6	-28,8301	36	-0,8890 - j0,2563
7	-26,2193	37	-0,0673
8	-25,1759	38	-0,0166
9	-21,2548		
10	-18,3234		
11	-15,4192		
12	-0,9951 + j8,4454		
13	-0,9951 - j8,4454		
14	-0,6364 + j8,2757		
15	-0,6364 - j8,2757		
16	-0,3028 + j6,2872		
17	-0,3028 - j6,2872		
18	-5,9429		
19	-3,4996 + j1,2217		
20	-3,4996 - j1,2217		
21	-0,2997 + j2,9542		
22	-0,2997 - j2,9542		
23	-2,8042		
24	-2,4603		
25	-1,6270 + j1,4040		
26	-1,6270 - j1,4040		
27	-2,1036		
28	-1,6727		
29	-1,4331		
30	-1,0888		

# APÊNDICE D – Algoritmo de Iteração Inversa Implícita

O método da iteração inversa calcula com precisão um conjunto de autovalores e autovetores, que esteja mais próximo de uma estimativa inicial fornecida pelo usuário [3, 71]. Na figura 50 têm-se um fluxograma que orienta a execução do algoritmo de iteração inversa na obtenção do  $i$ -ésimo autovalor e autovetor de um sistema genérico de equações diferenciais de primeira ordem:  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

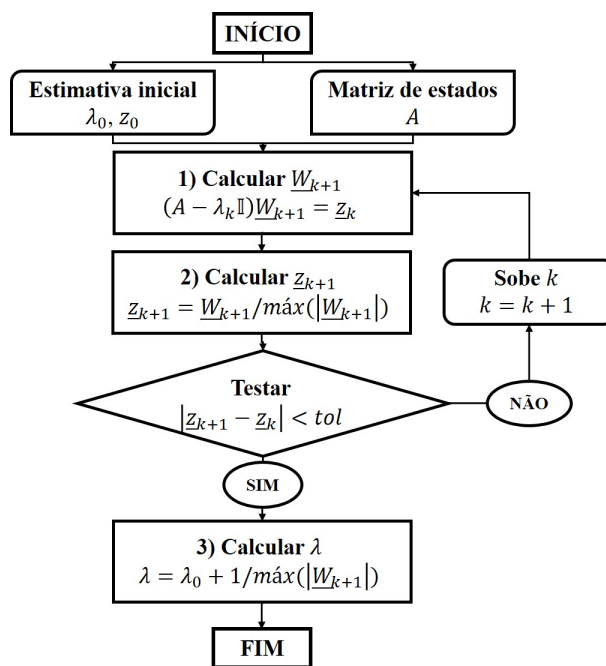


Figura 50 – Algoritmo da iteração inversa.

Após fornecer uma estimativa inicial para  $\lambda_0$  e  $z_0$ , considerando a matriz de estados  $A$ , o algoritmo calcula  $W_{k+1}$  como apresentado na equação D.1 (ver bloco 1 da figura 50).

$$(A - \lambda_k I)W_{k+1} = z_k \quad (\text{D.1})$$

Conhecido  $W_{k+1}$  então é possível obter uma nova estimativa para  $z_k$ , conforme a equação D.2 (ver bloco 2 da figura 50), a qual consiste na normalização do vetor  $W_{k+1}$ .

$$z_{k+1} = \frac{W_{k+1}}{\max(|W_{k+1}|)} \quad (\text{D.2})$$



Na etapa seguinte, o fluxograma testa a convergência do vetor  $z_k$ . Em caso positivo, o autovalor  $\lambda$  pode ser obtido (ver bloco 3 da figura 50) através da equação (D.3), a qual descreve o quociente de Rayleigh [3].

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \frac{1}{\max(|W_{k+1}|)} \tag{D.3}$$

Em caso negativo, então  $k = k + 1$  e retorna o algoritmo ao bloco 1, para que seja feita uma nova estimativa de  $W_{k+1}$ .

Observe que, a rotina apresentada é satisfatória para sistemas onde conhecemos a matriz de estados, porém em sistemas de potência é comum que na modelagem seja construída antes a matriz jacobiana, a qual contempla não somente equações diferenciais, mas também equações algébricas não lineares. A figura 51 ilustra o comportamento esperado de uma matriz jacobiana não linear para sistemas de potência, onde a “hachura” corresponde a elementos diferentes de zero. O resultado da figura 51 foi apresentado por [3].

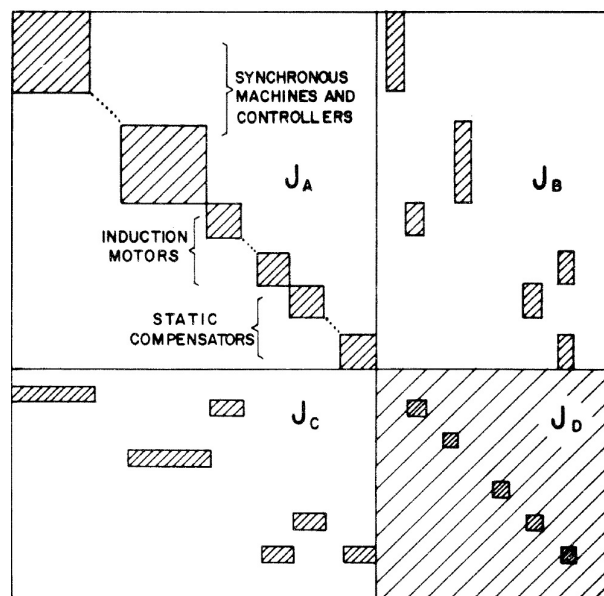


Figura 51 – Matriz jacobiana aplicada em sistemas de potência.

Com o objetivo em determinar a matriz de estados para que seja aplicado o método, torna-se necessário analisar o problema sob a perspectiva da estabilidade angular em regime permanente, ou também conhecida como pequenas perturbações. A análise da estabilidade para pequenas perturbações consiste em expandir o conjunto algébrico-diferencial em série de Taylor, eliminando os termos de ordem igual ou superior a dois. O

resultado do processo é a representação linearizada da matriz jacobiana apresentada na equação (D.4).

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\underline{x}} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J_A] & [J_B] \\ [J_C] & [J_D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{x} \\ \Delta \underline{y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Portanto, a matriz de estados do sistema pode ser obtida executando a redução de Kron sobre a equação (D.4), segundo equação (D.5).

$$\Delta \dot{\underline{x}} = ([J_A] - [J_B][J_D]^{-1}[J_C])\Delta \underline{x} = A\Delta \underline{x} \quad (\text{D.5})$$

Embora, seja matematicamente possível calcular a equação (D.5) para qualquer sistema, a inversão de  $[J_D]$  é uma tarefa computacionalmente cara. Sendo assim, desenvolveu-se o algoritmo para extrair implicitamente os autovalores da matriz jacobiana, calculando a solução particionada do sistema de equações apresentado em (D.6).

$$\begin{bmatrix} [J_A] - \lambda L & [J_B] \\ [J_C] & [J_D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W}_{k+1}^e \\ \underline{T}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_k^e \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Onde  $L$  é uma matriz identidade, porém com valor unitário somente nas células respectivas as equações diferenciais correspondentes ao  $i$ -ésimo bloco dinâmico, de acordo com a organização sugerida para a matriz jacobiana na figura 51. Os vetores  $\underline{W}_{k+1}^e$ ,  $\underline{z}_k^e$  e  $\underline{W}_{k+1}$ , presentes na equação (D.6) [3], são descritos da seguinte forma:

$$\underline{W}_{k+1}^e = \begin{bmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{S}_1 \\ \vdots \\ \underline{W}_{nt} \\ \underline{S}_{nt} \end{bmatrix}, \quad \underline{z}_k^e = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{z}_{nt} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{W}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \\ \vdots \\ \underline{W}_{nt} \end{bmatrix}$$

O subíndice  $nt$  é igual ao número de linhas da matriz  $[J_A]$ , ou  $[J_B]$ , respectivo à quantidade de elementos dinâmicos equacionados para o estudo de estabilidade. O vetor  $\underline{W}_{k+1}$  está contido em  $\underline{W}_{k+1}^e$ , resultando no próprio autovetor na convergência. Os vetores  $\underline{T}_{k+1}$  e  $\underline{S}_k$  não influenciam diretamente na solução. Portanto, com o objetivo de implementar a versão implícita, as etapas que devem ser introduzidas no algoritmo da iteração inversa antes do critério de parada são indicadas:

1. Calcular  $[J_D^*]$  utilizando a equação (D.7).

$$[J_D^*] = [J_D] - [J_C]([J_A] - \lambda_i L)^{-1}[J_B] \quad (\text{D.7})$$

2. Calcular  $\underline{T}_{k+1}$  utilizando a equação (D.8).

$$[J_D^*]\underline{T}_{k+1} = -[J_C]([J_A] - \lambda L)^{-1}\underline{z}_k^e \quad (\text{D.8})$$

3. Calcular  $\underline{W}_{k+1}^e$  utilizando a equação (D.9).

$$([J_A] - \lambda L)\underline{W}_{k+1}^e = \underline{z}_k^e - [J_B]\underline{T}_{k+1} \quad (\text{D.9})$$

4. Calcular  $\underline{z}_{k+1}^e$  utilizando a equação (D.10).

$$\underline{z}_{k+1}^e = \frac{\underline{W}_{k+1}^e}{\max(\underline{W}_{k+1}^e)} \quad (\text{D.10})$$

Após a convergência, calcula-se o autovalor  $\lambda$  com a equação (D.3). A utilização de  $[J_D^*]$  preserva a esparsidade de  $[J_D]$ , permitindo que  $[J_C]([J_A] - \lambda_i L)^{-1}[J_B]$  seja diagonalmente blocado, podendo ser calculado como o produto para a  $i$ -ésima componente do sistema. A eficiência da rotina [3] é resultado também das seguintes características:

- $[J_A]$  pode ser fatorada separadamente;
- O autovetor transposto necessário para o cálculo do quociente de Rayleigh, bloco 3 da figura 50, pode ser obtido a partir dos mesmos fatores LU de  $([J_A] - \lambda_i L)^{-1}$  e  $[J_D^*]$ .

## Referências

- 1 MOHAPATRA, S.; OVERBYE, T. J. Fast modal identification, monitoring, and visualization for large-scale power systems using dynamic mode decomposition. *Power System Computation Conference (PSSC)*, p. 1–7, 2016. 19, 56, 57
- 2 KOSTEREV, D. N.; TAYLOR, C. W.; MITTELSTADT, W. A. Model validation for the august 10,1996 wscs system outage. *IEEE Transactions on Power System*, v. 14, n. 3, p. 967–979, 8 1999. ISSN 0885-8950. 19
- 3 MARTINS, N. Efficient eigenvalue and frequency response methods applied to power system small-signal stability studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 1, n. 1, p. 217–226, 1986. 20, 180, 181, 182, 183
- 4 HAUER, J. F.; DEMEURE, C. J.; SCHARF, L. L. Initial results in prony analysis of power system response signals. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 1, p. 80–89, 1990. 21, 38, 44, 46
- 5 TRUDNOWSKI, D. J. et al. An application of prony methods in pss design for multimachine systems. *IEEE Transactions on Power System*, v. 6, n. 1, p. 118–126, 1991. ISSN 1558-0679. 21, 38
- 6 GRUNT, C. E. et al. Comparison of prony and eigenanalysis for power system control design. *IEEE Transactions on Power System*, v. 8, n. 3, p. 964–971, 1993. ISSN 1558-0679. 21, 38
- 7 TRUDNOWSKI, D. J.; JOHNSON, J. M.; HAUER, J. F. Making prony analysis more accurate using multiple signals. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, p. 226–231, 1999. ISSN 1558-0679. 21
- 8 LOBOS, T.; REZMER, J.; SCHEGNER, P. Parameter estimation of distorted signals using prony method. *2003 IEEE Bologna PowerTech Conference*, v. 4, p. 5, 2003. 22, 45, 46
- 9 XIAO, J. et al. Dynamic tracking of low-frequency oscillations with improved prony method in wide-area measurement system. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, v. 1, p. 1104–1109, 2004. ISSN 0-7803-8465-2. 22
- 10 JANIK, P. et al. Wind generator transients' computation using prony method. *2007 International Conference on Clean Electrical Power*, p. 598–604, 2007. ISSN 1-4244-0631-5. 22
- 11 SUN, S. Y. et al. Analysis of low frequency oscillation mode based on pmu and prony method. *2008 IEEE Canada Electric Power Conference*, p. 1–4, 2008. 22
- 12 ZHOU, N.; PIERRE, J.; TRUDNOWSKI, D. A stepwise regression method for estimating dominant electromechanical modes. *IEEE Transaction on Power System*, v. 27, n. 2, p. 1051–1059, 2012. 22, 46

- 13 ZHOU, N.; PIERRE, J.; TRUNDNOWSKI, D. Some considerations in using prony analysis to estimate electromechanical modes. *2013 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, p. 1–5, 2013. 23, 37, 44
- 14 KHAN, F. Z.; NAGARAJA, R.; KHINCHA, H. P. Improved fault location computation using prony analysis for short duration fault. In: *2014 Eighteenth National Power Systems Conference (NPSC)*. Guwahati, India: [s.n.], 2014. p. 1–5. 23
- 15 ZHAO, S.; LOPARO, K. A. Forward and backward extended prony (FBEP) method for power system small-signal stability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 32, n. 5, p. 3618–3626, Sept 2017. ISSN 0885-8950. 23
- 16 ÅSTRÖM, K.-J.; BOHLIN, T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. In: HAMMOND, P. H. (Ed.). *Theory of Self-Adaptive Control Systems*. Boston, USA: Springer US, 1966. p. 96–111. ISBN 978-1-4899-6289-8. 24
- 17 SÖDERSTRÖM, T. Report 7308, *An On-line Algorithm for Approximate Maximum Likelihood Identification of Linear Dynamic Systems*. Lund Institute of technology – Department of Automatic Control, Lund, Suécia, 1973. 24, 38
- 18 GERTLER, J.; BANYASZ, C. A recursive (on-line) maximum likelihood identification method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, n. 6, p. 816–820, December 1974. ISSN 0018-9286. 24
- 19 HAGAN, M.; KLEIN, R. On-line maximum likelihood estimation for load forecasting. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 8, n. 9, p. 711–715, Sept 1978. ISSN 0018-9472. 25
- 20 NORTON, J. P. Extended recursive maximum-likelihood identification algorithm. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 126, n. 2, p. 185–188, February 1979. ISSN 0020-3270. 25
- 21 FRIEDLANDER, B. A recursive maximum likelihood algorithms for arma line enhancement. In: *ICASSP '81. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Atlanta, GA, USA: [s.n.], 1981. v. 6, p. 488–491. 25
- 22 FRIEDLANDER, B.; LJUNG, L.; MORF, M. Lattice implementation of the recursive maximum likelihood algorithm. In: *1981 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*. San Diego, USA: [s.n.], 1981. p. 1083–1084. 25
- 23 FRIEDLANDER, B. A recursive maximum likelihood algorithm for arma spectral estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 28, n. 4, p. 639–646, July 1982. ISSN 0018-9448. 25
- 24 FRIEDLANDER, B. A recursive maximum likelihood algorithm for arma line enhancement. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 30, n. 4, p. 651–657, August 1982. ISSN 0096-3518. 26
- 25 MURALI, T.; RAO, B. V. A class of recursive maximum-likelihood algorithms. *Proceedings of the IEEE*, v. 73, n. 8, p. 1336–1338, Aug 1985. ISSN 0018-9219. 26

- 26 DOSIEK, L.; PIERRE, J. W. An improved bootstrap method for electromechanical mode estimation using multivariable probability distributions. *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, p. 1–8, 2011. 26, 48, 49
- 27 DOSIEK, L.; PIERRE, J. W.; FOLLUM, J. A recursive maximum likelihood estimator for the online estimation of electromechanical mode with error bounds. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 28, n. 1, p. 441–451, 2013. 26, 38, 47, 48, 49, 50
- 28 MEZIĆ, I. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, v. 41, p. 309–325, 2005. 27, 57
- 29 SCHMID, P.; SESTERHENN, J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. In: *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*. San Antonio, USA: [s.n.], 2008. p. MR.007. Disponível em: <<https://hal-polytechnique.archives-ouvertes.fr/hal-01020654/document>>. 27, 38
- 30 SCHMID, P. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 656, p. 5–28, 2010. 27, 57, 58
- 31 ROWLEY, C. W. et al. Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 641, p. 115–127, 2009. 27, 57
- 32 SCHMID, P. J. et al. Applications of the dynamic mode decomposition. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, v. 25, n. 1, p. 249–259, Jun 2011. ISSN 1432-2250. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00162-010-0203-9>>. 28
- 33 CHEN, K. K.; TU, J. H.; ROWLEY, C. W. Variants of dynamic mode decomposition: Boundary condition, koopman, and fourier analyses. *Journal of Nonlinear Science*, v. 22, n. 6, p. 887–915, Dec 2012. ISSN 1432-1467. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00332-012-9130-9>>. 28
- 34 JOVANOVIĆ, M.; SCHMID, P.; NICHOLS, J. Low-rank and sparse dynamic mode decomposition. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, p. 139–152, 08 2012. Disponível em: <[https://web.stanford.edu/group/ctr/ResBriefs/2012/12\\_jovanovic.pdf](https://web.stanford.edu/group/ctr/ResBriefs/2012/12_jovanovic.pdf)>. 28
- 35 JOVANOVIĆ, M. R.; SCHMID, P. J.; NICHOLS, J. W. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition. *Physics of Fluids*, v. 26, n. 2, p. 024103, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4863670>>. 28
- 36 TU, J. H. et al. On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications. *ArXiv e-prints:1312.0041*, nov. 2013. Disponível em: <<http://cwwrowley.princeton.edu/papers/Tu-DMD.pdf>>. 29
- 37 BERGER, E. et al. Dynamic mode decomposition for perturbation estimation in human robot interaction. In: *The 23rd IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication*. Edinburgh, UK: [s.n.], 2014. p. 593–600. ISSN 1944-9445. 29
- 38 BAROCIO, E. et al. A dynamic mode decomposition framework for global power system oscillation analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 30, n. 6, p. 2902–2912, Nov 2015. ISSN 0885-8950. 29, 38, 56

- 39 ANNONI, J.; SEILER, P.; JOVANOVIĆ, M. R. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition for systems with inputs. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas, USA: [s.n.], 2016. p. 6506–6511. 29
- 40 DAWSON, S. T. M. et al. Characterizing and correcting for the effect of sensor noise in the dynamic mode decomposition. *Experiments in Fluids*, v. 57, n. 3, p. 42, Feb 2016. ISSN 1432-1114. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00348-016-2127-7>>. 30
- 41 DICLE, C. et al. Robust low rank dynamic mode decomposition for compressed domain crowd and traffic flow analysis. In: *2016 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)*. Seattle, USA: [s.n.], 2016. p. 1–6. ISSN 1945-788X. 30
- 42 MOHAPATRA, S.; OVERBYE, T. J. Fast modal identification, monitoring, and visualization for large-scale power systems using dynamic mode decomposition. In: *2016 Power Systems Computation Conference (PSCC)*. Genoa, Italy: [s.n.], 2016. p. 1–7. 30, 38
- 43 RAAK, F. et al. On koopman and dynamic mode decompositions for application to dynamic data with low spatial dimension. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. Las Vegas, USA: [s.n.], 2016. p. 6485–6491. 30
- 44 WANG, S.; QING, X. Nuclear norm regularised dynamic mode decomposition. *IET Signal Processing*, v. 10, n. 6, p. 626–632, 2016. ISSN 1751-9675. 31
- 45 HÉAS, P.; HERZET, C. Optimal low-rank dynamic mode decomposition. In: *2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. New Orleans, USA: [s.n.], 2017. p. 4456–4460. ISSN 2379-190X. 31
- 46 SALDAÑA, A. E. et al. Monitoring harmonic distortion in microgrids using dynamic mode decomposition. In: *2017 IEEE Power Energy Society General Meeting*. Chicago, USA: [s.n.], 2017. p. 1–5. ISSN 1944-9933. 31, 38
- 47 TAKEISHI, N.; KAWAHARA, Y.; YAIRI, T. Sparse nonnegative dynamic mode decomposition. In: *2017 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. Beijing, China: [s.n.], 2017. p. 2682–2686. ISSN 2381-8549. 31
- 48 JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985. 32, 33, 38, 60, 61, 64, 65, 68, 71, 72
- 49 JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 9, n. 3, p. 294–303, maio 1986. ISSN 0731-5090. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.20106>>. 32
- 50 JUANG, J.-N.; SUZUKI, H. An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, ASME, v. 110, n. 1, p. 24–29, jan. 1988. ISSN 1048-9002. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3269475>>. 32
- 51 LONGMAN, R. W.; JUANG, J.-N. Recursive form of the eigensystem realization algorithm for system identification. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 12, n. 5, p. 647–652, set. 1989. ISSN 0731-5090. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514/3.20458>>. 33

- 52 PAPPA, R. S.; ELLIOTT, K. B. A consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 16, n. 5, p. 852–858, 1993. 33, 38, 68, 71, 73, 74, 76
- 53 HUNTER, N. F. Comparing cva and era in transfer function measurements for lithography applications. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*. San Diego, USA: [s.n.], 1999. v. 2, p. 1171–1175 vol.2. ISSN 0743-1619. 33
- 54 SANCHEZ-GASCA, J. J.; CHOW, J. H. Performance comparison of three identification methods for the analysis of electromechanical oscillations. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 3, p. 995–1002, Aug 1999. ISSN 0885-8950. 33
- 55 ALVES, M. T. S.; RIBEIRO, J. F. Identificação de sistemas mecânicos lineares utilizando o ERA (eigensystem realization algorithm). *13<sup>o</sup> POSMEC - Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica*, 2003. 34, 61
- 56 BAZÁN, F. Eigensystem realization algorithm (era): reformulation and system pole perturbation analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 274, n. 1, p. 433 – 444, 2004. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X03010575>>. 34
- 57 KUAN, J.; CHEN, M. Parameter evaluation for lightning impulse with oscillation and overshoot using the eigensystem realization algorithm. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, v. 13, n. 6, p. 1303–1316, December 2006. ISSN 1070-9878. 34
- 58 LIAN, J.; LI, H.; ZHANG, J. Era modal identification method for hydraulic structures based on order determination and noise reduction of singular entropy. *Science in China Series E: Technological Sciences*, v. 52, n. 2, p. 400–412, Feb 2009. ISSN 1862-281X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11431-008-0200-z>>. 34
- 59 LAM, X.-B.; MEVEL, L. Uncertainty quantification for eigensystem-realization-algorithm, a class of subspace system identification. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 6529 – 6534, 2011. ISSN 1474-6670. 18th IFAC World Congress. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016446537>>. 35
- 60 LI, P.; HU, S.; LI, H. Noise issues of modal identification using eigensystem realization algorithm. *Procedia Engineering*, v. 14, p. 1681 – 1689, 2011. ISSN 1877-7058. The Proceedings of the Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705811012884>>. 35
- 61 SINGLER, J. R. Model reduction of linear pde systems: A continuous time eigensystem realization algorithm. In: *2012 American Control Conference (ACC)*. Montreal, Canada: [s.n.], 2012. p. 1424–1429. ISSN 2378-5861. 35
- 62 VISHWAJEET, K.; MAJJI, M.; SINGLA, P. Random matrix based approach to quantify the effect of measurement noise on hankel matrix. In: *2013 American Control Conference*. Washington, USA: [s.n.], 2013. p. 5104–5109. ISSN 0743-1619. 35, 61, 71



- 63 ZHANG, G. et al. Automated eigensystem realisation algorithm for operational modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 15, p. 3550 – 3563, 2014. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X14002041>>. 35
- 64 SEPPÄNEN, J. M. et al. Modal analysis of power systems through natural excitation technique. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 29, n. 4, p. 1642–1652, July 2014. ISSN 0885-8950. 36
- 65 JIANG, T. et al. Synchrophasor measurement-based correlation approach for dominant mode identification in bulk power systems. *IET Generation, Transmission Distribution*, v. 10, n. 11, p. 2710–2719, 2016. ISSN 1751-8687. 36
- 66 JIA, M.; ZHOU, N.; AMIDAN, B. G. A comparative study on the prony analysis and the era for modal analysis. In: *2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM)*. Boston, USA: [s.n.], 2016. p. 1–5. ISBN 978-1-5090-4168-8. ISSN 1944-9933. 36, 38
- 67 GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 13, n. 2, p. 605–614, 1998. ISSN 1937-4208. 37
- 68 GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 14, n. 3, p. 1052–1061, 1999. ISSN 1937-4208. 37
- 69 GUSTAVSEN, B. Improving the pole relocating properties of vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 21, n. 3, p. 1587–1592, 2006. ISSN 1937-4208. 37
- 70 MATLAB. *Matlab R2016b*. Natick, USA, 2016. 38, 97
- 71 WILKINSON, J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. New York: Clarendon Press, 1965. 39, 180
- 72 FRANCIS, J. G. F. The QR transformation, parts I and II. *Computer J.*, p. 265–272, 332–345, 1961. 39
- 73 WATKINS, D. S. *Fundamentals of Matrix Computation*. 2<sup>a</sup>. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002. 40, 41, 44
- 74 JARLEBRING, E. *Lecture notes in numerical linear algebra*. 2014. Disponível em: <<https://www.math.kth.se/na/SF2524/matber15/qrmeth.pdf>>. 40, 44
- 75 NETTO, N. A. R. L. *Novas Ferramentas para a Avaliação da Segurança Estática e Dinâmica de Sistemas de Potência*. 173 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, 2016. 46
- 76 LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. 2<sup>a</sup>. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 48
- 77 LJUNG, L.; SÖDERSTRÖM, T. *Theory and Practice of Recursive Identification*. Cambridge: MIT Press, 1983. 48, 50, 53

- 78 CHOO, Y. An elementary proof of the jury test for real polynomials. *Automatica*, v. 47, p. 249–252, 2010. 55
- 79 BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1986. 61
- 80 OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 2003. 62, 68
- 81 SCZIBOR, V. *Identificação Modal de uma Estrutura Aeronáutica via Algoritmo de Realização de Sistemas*. 104 p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. 71, 73
- 82 OLIVEIRA, L. C. de. *Identificação e Controle: Uma Aplicação em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezoelétricos*. 82 p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Rio de Janeiro, 2003. 71, 72, 73, 74, 75
- 83 JUANG, J.-N. *Applied System Identification*. 1<sup>a</sup>. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1994. 75
- 84 CEPEL. *Pacdyn 9.8.3 user manual*. Rio de Janeiro, Brasil, 2017. 87, 95
- 85 HPPA. *ORGANON Versão Acadêmica, Programa Computacional para Análise em Regime Permanente e Transitórios Eletromecânicos*. Rio de Janeiro, Brasil, 2018. 124
- 86 CEPEL. *Anatem 11.01.00 Manual do Usuário*. Rio de Janeiro, Brasil, 2016. 154