UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

MATEUS BIBIANO FRANCISCO

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ALUNOS COM TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA (TEA): um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Itajubá – MG
2018

MATEUS BIBIANO FRANCISCO

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ALUNOS COM TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA (TEA): um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Educação em Ciências.

Área de concentração: Educação e Tecnologias

ORIENTADORA: Prof. Dra. Denise Pereira de Alcântara Ferraz

COORIENTADORA: Prof. Dra. Eliane Matesco Cristóvão

Itajubá – MG

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

Mateus Bibiano Francisco

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ALUNOS COM TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA (TEA): um estudo à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação aprovada por banca examinadora em 26 de fevereiro de 2018, conferindo ao autor o título de **Mestre em Educação em Ciências em nome do programa.**

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Denise Pereira de Alcântara Ferraz (Orientadora)

Prof.ª Dr.ª Eliane Matesco Cristóvão (Coorientadora)

Prof. Dr. João Ricardo Neves da Silva

Prof. Dr. Paulo César Oliveira

Itajubá

2018

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação a minha mãe, Marta, que se esforçou para que minha travessia fosse concretizada, com muito amor e confiança.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pela paciência e dedicação para que eu pudesse concretizar meus anseios, numa relação sempre regada de amor e carinho.

Aos meus amigos, pelas palavras de incentivo e apoio nas frustações, espero sempre aprender e me engrandecer ao lado de vocês.

Às minhas orientadoras, Denise e Eliane, pelas contribuições sempre acompanhadas de profissionalismo e competência. Pelo lado humano e sensível que trilhamos no reconhecimento das pessoas do Público Alvo da Educação Especial. Por reconhecerem a necessidade de promover ações para um ensino de Matemática de qualidade.

Aos meus colegas de trabalho, em especial, as amigas Sheila e Estela, por abrirem espaço para discutirmos sobre inclusão e tentarem promover ações que pudessem transpor as barreiras que existem no ensino regular para esse público.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e a Universidade Federal de Itajubá pelo suporte e fornecimento de subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos que, de certa forma, contribuíram para o meu trabalho, e consequentemente o meu reconhecimento.

RESUMO

Com o objetivo de compreender como a transição entre diferentes registros de representação semiótica contribui para a aprendizagem de álgebra por alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA), essa pesquisa preocupa-se em reconhecer e destacar a importância da inclusão, promovendo diálogos e reflexões acerca da temática. Para a pesquisa de campo, foram considerados os registros produzidos por quatro alunos com TEA, matriculados no oitavo ano de uma instituição privada da cidade de Itajubá/MG, a partir de intervenções que visavam introduzir conceitos ligados à álgebra. Para análise da produção matemática dos alunos, com foco em especial na linguagem algébrica, empregou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, difundida pelo francês Raymond Duval. Com base em tal teoria, procura-se compreender o papel das mobilizações de diversos registros semióticos, o papel da língua natural para externar raciocínios e o estabelecimento de explicações para algumas dificuldades relacionadas ao fenômeno de congruência semântica. Revelou-se que essa mobilização de diversos registros oferta aos alunos com TEA uma estratégia para a superação das dificuldades relacionadas com a linguagem. A pesquisa também evidenciou que a abordagem utilizada favoreceu o protagonismo dos sujeitos em seu processo de aprendizagem, contrastando com suas dificuldades relacionadas ao desenvolvimento da linguagem e da capacidade de generalização.

Palavras-chaves: Educação Matemática, Álgebra, Prática de sala de aula, Inclusão.

ABSTRACT

In order to understand how the transition between different registers of semiotic representation contributes to the learning of algebra by students with Autism Spectrum Disorder (ASD), this research is concerned with recognizing and highlighting the importance of inclusion, promoting dialogues and reflections about thematic. For the field research, we considered the records produced by four students with ASD, enrolled in the eighth year of a private institution in the city of Itajubá / MG, based on interventions aimed at introducing concepts related to algebra. For the analysis of the mathematical production of the students, with special focus on the algebraic language, the Theory of the Registers of Semiotic Representation, diffused by French Raymond Duval was used. Based on this theory, we try to understand the role of the mobilizations of several semiotic registers, the role of the natural language to express reasoning and the establishment of explanations for some difficulties related to the phenomenon of semantic congruence. It was revealed that this mobilization of several records offers students with ASD a strategy for overcoming difficulties related to language. The research also showed that the approach used favored the protagonism of the subjects in their learning process, contrasting with their difficulties related to the development of language and the generalization capacity.

Keywords: Mathematics Education, Algebra, Classroom practice, Inclusion.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

CID: Classificação Internacional de Doenças

DSM: Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais

PAAE: Público Alvo da Educação Especial

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

PET: Programa de Educação Tutorial

PIBID: Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência

SEI: Serviço de Educação Inclusiva

TRSS: Teoria do Registro de Representação Semiótica

TEA: Transtorno de Espectro Autista

TGD: Transtorno Global do Desenvolvimento

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

"Passarinho de toda cor

Gente de toda cor

Amarelo, rosa e azul

Me aceita como eu sou

[...]"

Renato Luciano

1 INTRODUÇÃO

1.1 – Minha Trajetória: de aluno a professor-pesquisador

Talvez esta seja uma das seções mais difíceis de serem escritas, pois para isso é necessário mergulhar-se em si, reconhecer nossos desejos e frustações. É olhar para o passado, refletir sobre fatos e memórias, na procura incessante de se compreender. Nunca tive facilidade para falar de mim, e talvez não seja o único, mas reconheço que a melhor forma de iniciar esse trabalho é promovendo um resgate de minha trajetória.

Filho de pais que não possuíram o privilégio do acesso à educação, tive oportunidades que ambos nunca imaginaram ter. Cursei toda minha educação básica em uma escola que não se limitou à mera transmissão de conteúdo, mas que tinha em seu seio a preocupação de formar cidadãos. Um espaço que valorizou e contribuiu com o desenvolvimento de minhas habilidades.

Nessa escola fui incentivado a reconhecer meu direito a uma vaga no ensino superior, superando o senso comum de que esse espaço era dedicado às elites. Fui orientado a buscar um futuro profissional do qual um dia eu pudesse me orgulhar. E não é que esse dia chegou? Sim, sou professor com muito orgulho!

Essa escolha me causou alguns olhos tortos, que eu poderia até mesmo caracterizar como deboche, afinal, quem quer ser professor no Brasil? Simplesmente esta é uma profissão que hoje não é devidamente valorizada em nosso país, mas mesmo sendo incentivado a desistir, mantive o desejo de ser professor de matemática.

Pensando novamente nos tempos de escola, hoje, apesar de relembrar minhas aulas de matemática na educação básica com olhar mais crítico, reconheço que eram as aulas que me traziam satisfação e que me instigavam a estudar muito fora de sala de aula. Portanto, não foi por acaso que acabei por ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI.

Entretanto, a faculdade não retrata as versões romantizadas dos filmes americanos, e configurou-se em um período de enormes frustações e de baixa expectativa em relação à profissão e à Matemática. Constitui-se num lugar onde tive que conviver com algumas pessoas arrogantes, que se achavam detentoras do saber e num período que se limitou à exigência do pensamento lógico-dedutivo, de decorebas e de infindáveis listas de exercícios. Pergunta-se: era o que eu realmente desejava? Certamente não!

Não quero generalizar, visto que contei com o apoio de vários professores, matemáticos inclusive, dos quais até hoje me orgulho, e que foram importantes para minha formação, seja pela simpatia ou pelo cuidado em revelar as belezas da matemática.

Além disso, neste mesmo espaço, encontrei profissionais que realmente fizeram renascer em mim o desejo de estudar matemática. Mas estes não eram matemáticos, e sim, educadores matemáticos. Nas aulas de prática de ensino, encontrei motivações que conduziram essa caminhada pela profissão, com o objetivo de professorar.

Nessa trajetória, também contei com as contribuições do Programa de Educação Tutorial (PET), que possibilitou intervenções no contexto de um museu de ciências, um espaço de educação não formal que recebe alunos da rede pública e privada em monitorias de modo a compreender experimentos ligados a Física e a Matemática.

Entretanto, tenho que destacar o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), tal projeto forneceu possibilidades de crescimento como pesquisador da própria prática. O Pibid Matemática da UNIFEI acabou por se estabelecer como grupo colaborativo, discutindo questões do que é ser professor e como se promover a aprendizagem com foco nos alunos. Ser inserido no âmbito da escola pública, pensar e promover ações que visavam melhorar o ensino de matemática foi, sem sombra de dúvidas, uma possibilidade que abriu horizontes para que eu pudesse compreender o que é ensinar e, de certa forma, contribuiu para o professor que sou hoje.

Mas, e a hora da entrada realmente em uma sala de aula? Existem alguns momentos que ficam marcados em nossa memória, e certamente a sensação de estar pela primeira vez em sala de aula como professor eu nunca esquecerei. As pernas ficaram bambas, e embora cada ação tivesse sido meticulosamente planejada, as falhas foram inevitáveis. Apesar dos insucessos, tinha certeza de que era isso que eu gostava de fazer.

As dificuldades nessa profissão são inúmeras e não me limito a dizer sobre as péssimas condições de trabalho, a falta de valorização ou de políticas públicas que amparem o professor. Refiro-me, também, aos desafios que ela apresenta, independente das condições de trabalho, pois a sala de aula é um ambiente complexo, cheio de diversidade, de heterogeneidade e exige que nos preparemos para atender as especificidades de cada um dos alunos.

Lembro-me das minhas incertezas, do receio ao ter que lidar com um aluno com Síndrome de Down em classe, e claro, do arrependimento por fazer tão pouco por ele devido a minha inexperiência. Outros alunos vieram, TDAH, Deficiência Intelectual, TEA, Discalculia, Disgrafia, Dislexia, e nunca consegui atendê-los de forma totalmente eficiente, embora, em cada caso, tenha me debruçado em estudos na tentativa de fornecer um atendimento, no mínimo, coerente.

Talvez, justamente essa busca incessante por promover a inclusão em minhas aulas, carregue em si a gênese desse trabalho: apostar na pesquisa como uma tentativa simbólica de permitir que alunos do Público Alvo da Educação Especial sejam realmente atendidos de forma mais adequada, e possam assumir, com meu auxilio, o protagonismo de sua aprendizagem.

1.2 – Considerações sobre o contexto e a necessidade dessa pesquisa

A escola é um espaço fundamentalmente propício para a construção de uma sociedade inclusiva (ZANIOLO e DALL'ACQUA, 2012). Entretanto, a constituição de uma escola democrática e inclusiva exige uma postura reflexiva de todos que atuam em seu espaço. Uma postura que se distancie da negligência e da segregação em variados aspectos das ações desenvolvidas em seu âmbito, mas esta não é uma tarefa trivial.

Nesse sentido, percebo a necessidade de um novo olhar para as ações pedagógicas, de forma que elas promovam a inclusão de pessoas com deficiências, transtornos globais e/ou altas habilidades/superdotação na escola regular. Esta necessidade impulsionou minhas próprias reflexões sobre que tipo de prática pedagógica poderia atender a essa demanda, no caso desta pesquisa, especialmente no campo do Ensino de Matemática.

Diversas intervenções governamentais tem sido realizadas objetivando oferecer subsídios aos grupos minoritários, por meio de políticas públicas que possibilitem o debate da temática e o reconhecimento da inclusão como aspecto fundamental e necessário. Dentre vários documentos que definem estas políticas, pode-se destacar a Constituição Federal Brasileira (BRASIL, 1998), a Declaração Mundial de Educação para Todos (UNESCO, 1990), a Declaração de Salamanca (BRASIL,1994), Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), além de pesquisas (ZANIOLO, DALL'ACQUA, 2012) que reconhecem e defendem o respeito às diferenças e potencializam a valorização da diversidade.

Nesse contexto, cabe evidenciar o papel da Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência e da Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015), sancionada recentemente, que entre outras ações, também têm o intuito de fomentar a inclusão do PAEE no ensino regular.

Nesse cenário, o Brasil criou a Lei nº 12.764/2012, que fez vigorar a Política Nacional de Proteção aos Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista (TEA), estabelecendo o bem-estar integral da pessoa com TEA na sociedade brasileira, buscando evitar qualquer forma de discriminação e reafirmando os direitos de cidadania desse grupo (VIANA, 2017).

Englobado em transtornos do neurodesenvolvimento, o TEA configura-se por déficits na comunicação, na interação social e no uso da imaginação. O diagnóstico considera uma variedade de aspectos que permitem avaliar o nível de gravidade, dentre as quais se podem citar a presença de padrões repetitivos de comportamento, interesses ou atividades (AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION - APA, 2014).

Aos diagnosticados com TEA, cabe considerar algumas dificuldades que podem se tornar evidentes, permeando o desenvolvimento da linguagem, a interação social, a integração sensorial, o funcionamento motor e o processamento cognitivo (MOORE, 2005).

Diante desse contexto, e tendo em vista que esta pesquisa se localiza no campo do Ensino de Matemática, dentre essas dificuldades, optou-se por um direcionamento de atenção para a questão da linguagem e do processo cognitivo no âmbito da aprendizagem de um conteúdo específico, a álgebra.

O trabalho de Mello et al (2013) apresenta, como estimativa para a população de autistas no Brasil, valores próximos a 1,2 milhões de pessoas. Esses expressivos dados revelam e suscitam pesquisas que possam subsidiar ações que efetivem a Lei nº 12.764/2012, especialmente aquelas que se disponham a propor inovações no ensino e a promover reflexões sobre a prática pedagógica, como forma de oferecer uma educação de qualidade a alunos com autismo.

No campo da Matemática, em especial, conforme destaca Duval (2009, p.13),

> a aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceituação, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos.

Assim, o ensino da álgebra se coloca como um desafio tanto ao aluno com TEA quanto para os demais, pois sua aprendizagem exige o emprego de uma linguagem muito específica, essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Imersa nesse contexto da linguagem e da representação de objetos matemáticos, esta pesquisa, de cunho qualitativo, busca compreender as potencialidades do trabalho com diferentes registros de representação semiótica para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos com TEA.

O reconhecimento desse objetivo vinculasse com o fato do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval destacar a relevância e a necessidade de se atentar as representações semióticas no ensino de matemática. Muitas das dificuldades que acabam por se estabelecer como obstáculos para a aprendizagem matemática podem estar vinculados a este fato. Neste sentido, este trabalho deve-se apropriar da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), defendida por ele, de modo a compreender as implicações aos alunos com TEA.

Para atingir o objetivo proposto, intervenções foram cuidadosamente planejadas de modo a captar, analisar e reagir ao pensamento dos alunos. Assim, foram propostas tarefas que propiciavam ao aluno o contato com diferentes registros de representação semiótica, e que incentivavam o trânsito entre estes registros, tendo em vista que é preciso transitar entre diferentes registros de representação semiótica para realmente se efetivar uma aprendizagem em matemática (PANTOJA, CAMPOS, SALCEDOS, 2013).

Destacados pontos essenciais, cabe então refletir sobre questionamentos pertinentes ao contexto apresentado: como promover uma aprendizagem em Matemática para alunos diagnosticados com TEA, especialmente no campo da álgebra, permeada por uma linguagem própria e pela exigência de um nível considerável de abstração? Como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica poderia auxiliar nesse processo?

Questionamentos como esses se tornam relevantes quando se reconhece necessidade de explicitar e compreender estratégias que possam potencializar a aprendizagem Matemática de alunos com TEA especialmente no campo da álgebra, que apresenta tantos desafios a esse público.

1.3 – Estrutura da Dissertação

Compreender as necessidades dos alunos que compõem PAEE, em especial aos alunos com TEA, que apresentam uma série de especificidades, assim como apontar o objetivo proposto por essa dissertação são apontamentos relevantes e apresentados neste primeiro capítulo de um total de cinco. Segue, portanto, uma síntese do que será abordado nos capítulos posteriores.

O segundo capítulo se debruça no levantamento de informações relevantes que deverão embasar os argumentos que serão apresentados. Uma revisão da literatura que visa disponibilizar o cenário em que se encontra a educação inclusiva. Será dado um direcionamento especial a história e as informações básicas de modo compor uma visão sobre o TEA.

Mediado pelo trabalho com a disciplina de Matemática, o segundo capítulo ainda promoverá uma discussão sobre o atual cenário da Educação Matemática Inclusiva e como se efetiva o ensino de álgebra no intuito do desenvolvimento algébrico dos alunos.

Claramente, o mesmo capítulo aborda o principal referencial teórico, Duval com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica que promove implicações diretas na confecção dos instrumentos de coleta e análise de dados.

O terceiro capítulo irá expor os argumentos que irão caracterizar essa pesquisa como qualitativa e como estudo de caso. Nesta parte, que aborda os aspectos metodológicos, também frisará como foram estruturados os instrumentos de coleta e análise de dados.

O quarto capítulo irá se empreender na análise dos registros obtidos dos alunos em diversas atividades por eles desenvolvidas. Serão relatadas argumentações com base nos referenciais teóricos que abordam o TEA e a TRRS.

O último capítulo, que visa apresentar as considerações finais desta pesquisa, será composto de observações que podem ser avaliadas como resultados da abordagem adotada. Posteriormente, poderão ser encontradas as referências adotadas e no apêndice, as atividades aplicadas aos alunos sujeitos da pesquisa.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

"O sonho da igualdade só cresce no terreno do respeito pelas diferenças."

Augusto Cury

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Essa seção apresentará uma consideração acerca da inclusão em termos de políticas públicas e como ela é caracterizada em termos teóricos no Brasil. No intuito de embasar o planejamento de ações que atendam alunos com TEA, será apresentada uma retomada histórica, reconhecendo as suas necessidades, em especial no âmbito da Matemática. Nesse sentido, deve-se promover uma reflexão sobre o ensino da álgebra, finalizado com o referencial que dará suporte para as análises posteriores, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, defendida por Raymond Duval.

2.1– REVISÃO DA LITERATURA SOBRE A EDUCAÇÃO INCLUSIVA

Desde 1997 o Brasil vem adotando uma política que estimula a inclusão de alunos do Público Alvo da Educação Especial (PAEE) no ensino regular (CONCEIÇÃO, 2012). Neste sentido, ao considerar o atual cenário de políticas públicas que abrangem a temática de inclusão, o Brasil destaca-se por apresentar intervenções em favor de proporcionar uma educação que possua concordância com a proposta inclusiva.

Em termos práticos, os reflexos dessas atuações ainda são ínfimos, mas apresentam resultados positivos, como destaca Santos (2013, p.286), ao pontuar que “o conjunto de medidas institucionais [...] vem gerando significativa alteração no cenário atual, conforme denotam os indicadores de acesso de pessoas com deficiências na educação básica”, em referência ao crescimento gradativo de alunos PAEE no ensino regular.

Essa perspectiva, na qual se idealiza uma educação de qualidade para todos, fora adotada por meio da apropriação do paradigma da inclusão, que por sua vez, induz seu embate quanto às ações advindas do paradigma integracionista. A distinção entre as duas é fundamental, visto que a promoção da integração está associada à ideia de normalização, exigindo a utópica adaptação do aluno com deficiência às condições dos demais alunos, aqueles sem deficiência, no contexto da sala de aula regular (MENDES, 2006).

Devido aos limites da perspectiva integracionista, suscitaram-se outras intervenções, que, por sua vez, resultaram em sua substituição. Uma nova mobilização contra a segregação arraigada ao sistema educacional fez-se necessária, e nesse sentido,

> a convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência, outorgada pela ONU em 2006, é ratificada pelo Brasil como emenda constitucional, por meio do Decreto Legislativo nº 186, de 2008 e pelo Decreto Executivo nº 6.949, de 2009. Esse documento sistematiza estudos e debates mundiais realizados ao longo da última década do século XX e dos primeiros anos deste século, criando uma conjectura favorável à definição de políticas públicas fundamentais no paradigma da inclusão social. (SANTOS, 2013, p. 280).

Assim, nesse reconhecimento de que a educação inclusiva é um direito humano, que se passa a estimular a efetivação de práticas que possam proporcionar a consolidação da inclusão de estudantes com deficiências, transtornos globais do desenvolvimento (TGD) e altas habilidades/superdotação.

No âmbito desse trabalho, pode-se recorrer as considerações apresentadas por Teixeira et al (2010) e Oliveira e Paula (2012) em que apontam a necessidade de romper a carência de trabalhos que abordem a escolarização de estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/ superdotação. Convém nesse sentido, destacar que

> faz-se necessária a realização de estudos brasileiros com dados empíricos que abordem a inclusão escolar desses alunos sob a perspectiva dos pais e dos professores, usando amostras robustas e metodologias mais complexas, contribuindo para elaboração de políticas públicas mais eficazes (OLIVEIRA, PAULA, 2012, p. 63).

Observe que tal análise fornece subsídios para justificativas sobre a real importância do desenvolvimento de pesquisas que retratem o papel fundamental da inclusão de alunos do PAEE, assim como o papel das políticas públicas que venham a consolidar e fomentar ações para o cumprimento de tais ações.

Para tal, como forma de fomentar a proposta em questão, promovendo ações que visem incluir alunos do PAEE, que esta pesquisa se debruça no intuito de contribuir com propostas que atendam às exigências de alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA). A seguir, se faz necessário realizar alguns apontamentos ao que diz respeito a esse transtorno.

2.1.1 – CONSIDERAÇÕES ACERCA DO TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA (TEA)

Como apresentado anteriormente, o Brasil se destaca no que diz respeito à definição de políticas públicas embasadas no paradigma inclusivo, neste contexto, destaca-se a Lei 12.764 do Código Civil, de 27 de dezembro de 2012. Esta Lei é responsável por instituir a Política Nacional de Proteção dos Diretos da Pessoa como Transtorno do Espectro Autista e estabelecer diretrizes para sua consecução. Estabelece-se, assim, uma caracterização para pessoas com TEA, reconhecendo-a como pessoa com deficiência para efeitos legais e definindo direitos, tais como:

> Art. 3º São direitos da pessoa com transtorno do espectro autista:
> "I – a vida digna, a integridade física e moral, o livre desenvolvimento da personalidade, a segurança e o lazer;
> II – a proteção contra qualquer forma de abuso e exploração;
> III – o acesso a ações e serviços de saúde, com vistas à atenção integral às suas necessidades de saúde [...];
> IV - o acesso:
> a) à educação e ao ensino profissionalizante [...]
> Parágrafo único. Em casos de comprovada necessidade, a pessoa com transtorno do espectro autista incluída nas classes comuns de ensino regular, nos termos do inciso IV do art. 2º, terá direito a acompanhante especializado."

Ainda no âmbito dessa Lei, explicita-se punição para eventuais recusas de matrícula de aluno com TEA. Configura-se, assim, um passo crucial para inclusão de alunos com autismo no ensino regular, assim como demanda pesquisas que visem responder e contribuir com propostas às questões que são suscitadas pela inclusão desses alunos.

O Transtorno do Espectro Autista, em concordância com o DSM-V, está inserido em transtornos do neurodesenvolvimento, englobando transtornos antes denominados por autismo infantil precoce, autismo infantil, autismo de Kanner, transtorno desintegrativo da infância, transtorno de Aspeger, entre outros. (AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION – APA, 2004).

Em uma retomada histórica, o termo 'autismo' foi empregado por Eugen Bleuler, ao promover caracterizações à esquizofrenia, em 1911 (FLEIRA, 2016). No entanto, coube a Leo Kanner e Hans Asperger, em uma abordagem clínica, a caracterização do autismo, cuja tese central estava assentada na premissa do transtorno no relacionamento com o ambiente ao seu redor, afastando e discriminando-o da esquizofrenia (BRASIL, 2015). Cabe a seguinte ressalva aos trabalhos de Kanner e Asperger:

> Estes dois foram pioneiros no reconhecimento do autismo como uma perturbação distinta de outras patologias do desenvolvimento, até estão descritas. De salientar o uso do mesmo termo 'autismo', para caracterizar crianças que apresentavam as mesmas alterações de comportamento na vertente das interações sociais. Os dois autores consideravam, ainda, que este tipo de alteração social era inata e permanente (ALMEIDA, 2017, p. 5).

De maneira mais específica, Leo Kanner, apoiado na esquizofrenia de Bleuler, denotou autismo como uma síndrome, em 1943. O autor descreveu tal condição como a incapacidade natural de criar contato afetivo com as demais pessoas (FLEIRA, 2016).

Asperger, ao observar às limitações das relações sociais, a presença repetitiva de gestos, as dificuldades linguagem e na comunicação em crianças, denominou tais ações como "psicopatia autista". Em contrapartida a Kanner, Asperger fora responsável por ressaltar aspectos educacionais de crianças com as características descritas anteriormente (FILHO e FERREIRA, 2010).

A formalização do termo autismo ocorreu em 1975, no intuito de caracterizar uma psicose da infância, sendo incorporado na Classificação Internacional de Doenças (CID-9) (ALMEIDA, 2017, p.5). Como a redefinição dos critérios de diagnósticos, promovidos por Rutter e Ritvo, o autismo passou a ser reconhecido como perturbações do desenvolvimento com início da infância, tendo a denominação de "Transtorno Global do Desenvolvimento" (TGD) no DSM-III (1980).

As principais características apresentadas nessa versão do manual aborda o autismo como distúrbios clínicos que atingiam o comportamento e o desenvolvimento, porém, após a revisão do manual, publicada em 1987, o autismo passou a ser associado a comprometimentos na interação social, comunicação e no comportamento, esse último associado a ações repetitivas (ALMEIDA, 2017, p.6).

Ao considerarmos as edições posteriores do manual, o DSM-IV e DSM-V, pode-se destacar que o primeiro procurou estabelecer entidades de diagnósticos associados ao TGD, esses por sua vez foram denominados como Transtorno Autista, Transtorno de Asperger, Transtorno Desintegrativo da Infância, Transtorno de Rett e o Transtorno Global do Desenvolvimento sem outra Especificação. Em contrapartida, o DSM-V elimina essas entidades, configurando-as como Transtorno do Espectro Autista, tratando-a como Perturbação Neurodesenvolvimentais.

Na busca de uma justificativa plausível para o diagnóstico do autismo, desenvolveram-se modelos explicativos. Esses, por sua vez, perpassaram por incapacidade de cuidados maternos, psicose infantil, até consolidar-se como transtorno global do desenvolvimento. Existem pesquisas que visam evidenciar as relações da causalidade desse transtorno em termos da genética, no entanto, os resultados ainda não apresentam caráter conclusivo (COUTINHO, BOSSO, 2015).

No âmbito educacional, como destaca Fleira (2016), ao se tratar de alunos com TEA, apropria-se de uma variedade de especificidades, cujas necessidades variam em diferentes graus. Exige-se, portanto, intervenções que sejam amplas, diversificadas e intensivas.

Ao reconhecer alunos com TEA como alunos do PAEE, torna-se indispensável que as disciplinas da Educação Básica se reorganizem para atender as propostas atuais da Educação Inclusiva e, assim, aumentar a possibilidade de desenvolver nos estudantes o senso crítico, a autonomia e a aprendizagem de conteúdo (FERNANDES, SALVI, 2017, 146).

Essa consideração exige reflexões que nos levem a reconhecer as potencialidades de pesquisas de modo a contribuir para uma educação efetiva e de qualidade a alunos com TEA.

No intuito de empregar ações no âmbito da Matemática aos alunos com TEA, cabe, neste momento, apresentar o cenário em que se encontram as pesquisas que visam incluir alunos do PAEE em atividades que abordam essa disciplina. No item a seguir, serão descritas as limitações e necessidades do campo de pesquisa da Educação Matemática Inclusiva.

2.1.2 – O CENÁRIO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA

Infelizmente vivenciamos um cenário em que a educação básica se revela excludente, no qual pouco se efetivaram práticas que visem atender todos os alunos no reconhecimento de suas necessidades. Tendo em vista que os processos de inclusão são relativamente novos no Brasil, pode-se dizer que ainda estamos traçando uma caminhada para consolidar processos de ensinar e aprender que possibilitem ao aluno o acesso a recursos essenciais para a aprendizagem, que ele tenha possibilidade de permanecer em um ambiente com respeito mútuo e livre de preconceito. Kranz (2015) destaca algumas dessas adversidades em nosso país, pois,

> No Brasil, a realidade educacional, explicitada no interior das escolas como também nos índices de reprovação e das avaliações externas, revela-se

> altamente excludente, apontando certa incompetência da escola para com a aprendizagem, inclusive matemática, de seus alunos. (p. 95).

Neste cenário, em que se estabelece uma dívida com todos os alunos, encontram-se os alunos que compõem o PAEE, que, por sua vez, acabam por enfrentar as mazelas de políticas públicas que parecem ainda não terem saído do papel.

Dentre os responsáveis por tal exclusão, a matemática, estigmatizada como difícil e incompreensível, "é uma disciplina que provoca altos índices de reprovação, contribuindo de maneira significativa para o fracasso escolar" (SILVA et al, 2013, p. 1), não só dos alunos PAEE. Evidentemente, é preciso que os professores reflitam sobre a necessidade de adotar metodologias mais eficazes e que proporcionem o rompimento dessa impressão que é atribuída à disciplina de matemática.

Dado o reconhecimento da exclusão proporcionada pela matemática na educação básica, em relação às consequências de seu ensino a alunos do PAEE, Kranz (2015) denuncia que eles não estavam aprendendo conceitos matemáticos, apontando que

> Muitas eram as justificativas dadas pelos professores e gestores para esse feito: desde a incapacidade dos alunos até suas constantes ausências em sala de aula. Porém, em várias turmas participantes do estudo, esses alunos nem sempre participavam das mesmas atividades que os demais, os "normais", o que era justificado pelos mesmos motivos apontados para sua não aprendizagem: sua incapacidade (p. 100).

Pode-se perceber que não são dadas as mesmas oportunidades a todos os alunos, pois não há um reconhecimento da diversidade e das distintas necessidades de aprendizagem. Assim, Kranz (2015) lança a seguinte questão: "Ora, se não são oferecidas as mesmas oportunidades para todos alunos, como será possível que todos aprendam os conceitos trabalhados em sala?". Essa afirmação nos instiga a refletir e a buscar efetivar ações que possibilitem a concretização da inclusão de alunos do PAEE, e, ao mesmo tempo, exige que estejamos empenhados em divulgar os resultados obtidos, contribuindo assim para o avanço das pesquisas na área.

No cenário das pesquisas que abordam a inclusão no âmbito da Educação Matemática, podemos destacar a análise promovida por Passos, Passos e Arruda (2013). Ao consultarem os principais periódicos da área, as autoras configuram como incipiente a produção de pesquisas retratando a temática.

Tal análise ainda identificou o foco dessas pesquisas, que visam tornar os alunos do PAEE protagonistas de sua aprendizagem. Estas considerações são relevantes para esta pesquisa, tendo em vista que apontam para a necessidade de promover adaptações de modo a possibilitar uma postura ativa dos alunos do PAEE, contribuindo assim para a sua inclusão.

Por outro lado, Moreira e Manrique (2012), apontam que ainda são necessárias ações que visem minimizar o preconceito de professores ao possuírem vínculo com alunos do PAEE, assim como capacitá-los de modo a propiciar que intervenham com atividades produtivas e que contemplem a turma como um todo.

Os professores, quando submetidos a reflexões sobre a necessidade de promover adaptações como forma de atender as diferenças e necessidades dos alunos do PAEE, apresentam certa resistência em mudar sua prática, mostrando-se receosos e desmotivados em arriscarem-se na busca de novas estratégias de ensino e no desenvolvimento de práticas diferenciadas (LANUTI, 2015, p.30).

O cenário empobrecido das pesquisas sobre a Educação Matemática Inclusiva e o papel dos professores também são apontados por Fernandes e Salvi (2017), que destacam a necessidade de os professores auxiliarem no processo de aprendizagem, contextualizando os conteúdos de modo que possam ser compreendidos por alunos do PAEE.

A análise realizada por Fernandes e Salvi (2017) sintetiza informações sobre as produções de dissertações e teses nos últimos dez anos, no âmbito do tema Educação Matemática Inclusiva. O resultado apresenta um balanço positivo, porém, muitas pesquisas nesse campo ainda são necessárias, como destacam as autoras:

> [...] do estado da arte da Educação Matemática Inclusiva, com a certeza de que esse ramo do conhecimento é frutífero e que existe a necessidade de novas pesquisas relacionadas ao mesmo, pois a inclusão de estudantes com NEE na Educação Básica regular é uma realidade, que tende a crescer. É adequado que todos os envolvidos no processo de inclusão estejam preparados. (FERNANDES, SALVI, 2017, p. 154).

Fleira (2016) também descreve em sua dissertação uma síntese dos principais trabalhos que abordam a relação do ensino de Matemática a alunos com TEA, os quais versam sobre como ocorre a inclusão desses alunos, assim como o ensino da Matemática a este público.

Estes autores reforçam as premissas apresentadas como justificativas para o desenvolvimento de pesquisas como esta ao afirmarem que

> Os dados a respeito desse tema indicam a falta de pesquisas, principalmente de teses, que busquem auxiliar no desenvolvimento de atividades para que ocorra a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos, bem como

> pesquisas voltadas à estudantes que possuem síndromes com menor incidência, por exemplo, Síndrome de Rett, ou então, altas habilidades e superdotados (FERNANDES, SALVI, 2017, p. 152).

Estas pesquisas nos asseguram que é frutífero o campo de pesquisas que possam nortear abordagens inclusivas no ensino de Matemática, além de reforçar a necessidade de promover ações voltadas ao ensino de conteúdos específico, tais como os vinculados à álgebra, uma área da matemática, como dito anteriormente, que se caracteriza por possuir uma linguagem própria e por exigir alto nível de abstração.

Com relação ao ensino da álgebra, para todos os alunos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) chamam atenção para a necessidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, pontuando que o aluno deve desenvolver e exercitar a capacidade de abstração e generalização. A recém-aprovada Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016) apresenta considerações semelhantes, ao apontar os objetivos de um trabalho com o conteúdo de álgebra:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico - que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2016, p. 268).

A BNCC destaca, ainda, a necessidade da oferta de atividades que permitam ao aluno a identificação de regularidades e padrões em sequências numéricas e não numéricas. Apresenta a importância de criar, interpretar e transitar entre distintas representações gráficas e simbólicas, o que corrobora a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, embora a mesma não seja citada no documento.

Assim, a busca por metodologias mais eficientes e que procurem atender a todos será, com certeza, a forma mais sensata de incluir aqueles que compõem o PAEE ou aqueles que apenas sintam-se em condição de fracassado por não compreenderem conteúdos ligados à matemática.

> A Educação Matemática que busca incluir todos os alunos nos processos de ensinar e aprender precisa levar em consideração a equiparação de oportunidades para todos os envolvidos, o que pressupõe rever concepções acerca do que seja matemática e, a partir disso, buscar novas metodologias que criem possibilidades reais e concretas para a aprendizagem e para o desenvolvimento de todos (KRANZ, 2015, p. 106).

De forma a aprofundar o debate e a compreensão sobre as especificidades do ensino de álgebra e do desenvolvimento do pensamento algébrico, será apresentado a seguir um panorama a respeito dessa temática.

2.1.3 – O ENSINO DA ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Caracterizada como sistema matemático utilizado para generalizar algumas operações matemáticas com o emprego de letras ou outros símbolos que substituem os números (BORRALHO, et al, 2007), a álgebra é detentora de uma linguagem própria e universal, apresentando formalismos que contribuem para uma postura de rejeição por parte dos alunos, reforçando assim seu caráter de exclusão.

Dados preocupantes são apresentados por inúmeros trabalhos que argumentam sobre os resultados obtidos em provas de âmbito nacional. Consideremos, como exemplo, os dados obtidos pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que já em 1998 revelava que os itens referentes à álgebra raramente atingiam o índice de 40% de acerto (SILVA, et al, 2013, p.33). Não diferentemente, em análises realizadas em 2009,

> Impressiona negativamente o fato de termos obtido aproximadamente 71% de distratores[1] nos itens relacionados ao Tema III associado à álgebra e à aritmética. O baixíssimo desempenho dos alunos nos revela a total falta de habilidade dos alunos com um tema matemático tão relevante e presente no seu dia a dia (SILVA, et al, 2013, p.26).

Possibilitar o contato com a álgebra é favorecer o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, contribuindo para a aquisição de uma excelente ferramenta de resolução de problemas (BRASIL, 1998, p. 115), entretanto, esta não é uma tarefa fácil.

O uso dos formalismos necessários e a adoção de metodologias que possibilitem a construção de conceitos que levem em consideração uma variedade de representações exige muito conhecimento e preparação do professor. Geralmente o processo de aprendizagem pode ser comprometido pela dificuldade de interpretação dos símbolos, o que acaba por resultar em uma aprendizagem mecânica, reduzida a manipulações desses símbolos, sem a devida atribuição de significados. Neste sentido, como destaca Gil (2008, p. 40), "essa forma de ensino tem sido limitadora,

[1] Distratores são consideradas alternativas incorretas na resolução de uma situação-problema, entretanto, são respostas plausíveis que induzem o aluno ao erro caso não domine a habilidade exigida pela questão.

nela o papel do aluno se restringe à memorização de regras já que não propicia relação dos procedimentos algébricos com situações reais".

Ponte (2006) destaca que devemos reconhecer a álgebra como promotora do desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, desde que o seu ensino não se limite a simples manipulação dos elementos simbólicos que a constituem. O autor destaca, ainda, que o pensamento algébrico abrange o estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e da variação, conforme exemplificado a seguir:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas);
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização);
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação);
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da Variação). (PONTE, 2006).

Neste sentido, o pensamento algébrico procura não somente atentar-se aos objetos, mas às relações que eles estabelecem entre si, cuja representação é feita de modo geral e abstrato. Ponte, Branco e Matos (2009) ainda apontam que o pensamento algébrico abrange o trabalho com expressões algébricas, equações, inequações, sistema de equações e de inequações e funções, incluindo a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas, empregando-as na interpretação e na resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

Os mesmos autores ainda complementam estas ideias ao descreverem as vertentes fundamentais do pensamento algébrico, promovendo concordância aos elementos apresentados por Ponte (2006). No Quadro 1 são apresentadas estas vertentes.

Quadro 1: Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais;

	• Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelado compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

FONTE: Ponte, Branco e Matos (2009, p.11)

De modo a abranger essas vertentes, e em concordância com os PCN (BRASIL, 1998) e com a BNCC (BRASIL, 2016), o ensino da álgebra precisa garantir que os alunos trabalhem com problemas, de forma que possam atribuir significados à linguagem algébrica e às ideias matemáticas que elas carregam.

Ainda no âmbito do PCN (BRASIL, 1998), destaca-se a necessidade da utilização de recursos tecnológicos e de propiciar o trabalho com diferentes objetos matemáticos ligados à álgebra. Segundo esse documento, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

Segundo o documento, para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador (BRASIL, 1998, p. 84). O documento da BNCC (2016) também salienta que uma das competências para o ensino da matemática dar-se-á pelo emprego de tecnologias digitais disponíveis para modelar, resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, de modo a sintetizar tais considerações, retomo as ideias de Ponte, Branco e Matos (2009), que baseados na perspectiva de James Kaput e Maria Blanton, apontam elementos que visam efetivar o pensamento algébrico no currículo escolar:

> (a) Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;
> (b) Tratar os números e as operações algebricamente como objetos formais para o pensamento algébrico;
> (c) Promover o estudo de padrões e regularidades. (p. 15).

Tais observações nos levam a compreender a importância de considerar as vertentes e condições para inserção do pensamento algébrico na educação básica. Considerando-as, temos o desafio de promover atividades que levem em consideração esses princípios para que, no contexto das aulas, possibilitemos uma aprendizagem significativa e não pautada em formalismos e memorizações destituídas de sentido.

Diante dos argumentos apresentados, transitar entre os diferentes meios de representar objetos matemáticos parece configurar-se em uma forma de beneficiar, em particular, a aprendizagem em álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico. No intuído de compreender com maior profundidade e destacar os benefícios do trânsito entre diferentes registros de representações apresenta-se, no próximo tópico, a Teoria dos Registros das Representações Semióticas, defendida por Raymond Duval.

2.2– A TEORIA DOS REGISTROS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE RAYMOND DUVAL

Preocupado com a aprendizagem em matemática, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval foi responsável por construir uma teoria que discute a necessidade do trabalho com diferentes representações dos objetos matemáticos de modo a propiciar e/ou contribuir com o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Pode-se afirmar que existe uma trivialidade no reconhecimento de que a matemática estabelece uma forte relação com as formas e com a representação e tratamento dos seus objetos. Desse fato, no âmbito educacional, “as representações assumem um papel decisivo na aprendizagem e no ensino da matemática, muito importante e peculiar, haja vista, os objetos matemáticos serem de natureza abstrata.”

(PATRÍCIO, 2011, p.32). Tais considerações apontam a necessidade de refletir sobre o papel das representações.

Em sua Teoria dos Registros das Representações Semióticas (TRRS), Duval (2012) chama atenção ao fato de que diferentes representações são essenciais para o ensino da matemática, visto que "não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação" (DUVAL, 2009, p. 29). Tal consideração também se remete aos objetos matemáticos, que exigem representações de modo a serem compreendidos, como se destaca a seguir:

> Os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'. É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamento sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado (DUVAL, 2012, p. 268).

Neste contexto, "os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado." (PANTOJA, CAMPOS & SALCEDOS, 2013, s.p.). Na concepção de Duval, os percalços na aprendizagem de conceitos matemáticos podem estar associados a dificuldade de diferenciar o objeto matemático em si e sua representação. Sobre esse cuidado, o mesmo destaca que:

> Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático [...] não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem (DUVAL, 2012, p. 268).

Diante aos fatos, da necessidade de reconhecimento da importância das representações assim como as devidas observações em relação à natureza das mesmas, convém pontuar que o "funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação" (DUVAL, 2012, p. 270).

Deste modo, no âmbito do ensino de matemática Duval (2012, p. 270) destaca que "o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidas em cada uma de suas representações".

Para finalizar, ainda reforçando a importância da multiplicidade de representações no ensino de matemática, sublinha-se que

> Na medida em que a Matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais do indivíduo. Visar esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de tal ou tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para sua educação (DUVAL, 2003, p.15).

Reconhecida a questão das representações e para esclarecer em que sentido essa teoria contribui para a aprendizagem, serão apresentados os aspectos do conceito de representação.

2.2.1 – Classificação dos diferentes tipos de representação

Na intenção de compreender as relações e distinções estabelecidas entre as representações mentais, computacionais e semióticas, Duval recorre aos trabalhos de Le Ny (1985), Paivo (1986) e Larkin et Simon (1987), que por sua vez procuram diferenciar as representações por meio das seguintes oposições: interna/externa e consciente/não-consciente.

A oposição **consciente/não-consciente** configura-se como uma tomada de consciência por parte do indivíduo, a mudança de estado do objeto que passa a ser ‘visto’ pelo sujeito (DUVAL, 2009, p. 40). A referida mudança de estado se refere à passagem do não-consciente ao consciente, correspondendo a um processo de objetivação, na qual o mesmo toma ciência de algo que anteriormente não tinha conhecimento.

O par **externo/interno** “é a oposição entre aquilo que, de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema, é diretamente visível e observável e aquilo que, ao contrário, não o é” (DUVAL, 2009, p.41). As representações externas se referem as representações que são produzidas por um sujeito ou por um sistema, essas são denominadas representações semióticas. Em contrapartida, as representações internas pertencem a um sujeito e não são comunicadas a outro por meio da produção de uma representação externa. Neste sentido, as representações externas atuam com a função de comunicação e atuando também como outras funções cognitivas, essas denominadas de função de objetivação e a função de tratamento.

A função de objetivação (para si) é quase sempre assimilada àquela de expressão (para outro), apesar de ser independente dela (DUVAL, 2009, p. 42), enquanto a função de tratamento depende das representações externas, visto a utilização de um sistema semiótico.

A tabela a seguir sintetiza as informações apresentadas até ao momento no que se refere às classificações das representações.

Quadro 2: Classificação das Representações

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSCIENTE	Mental *Função de objetivação*	Semiótica *Função de objetivação* *Função de expressão* *Função de tratamento intencional*
NÃO-CONSCIENTE	Computacional *Função de tratamento automática ou quase instantânea*	

FONTE: DUVAL (2000, p. 43).

Da análise da tabela pode-se concluir que as representações semióticas se referem às representações que são simultaneamente conscientes e externas. Neste sentido, elas possibilitam uma ‘visão do objeto’ por meio da percepção de estímulos e com significados. As figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, entre outros, são exemplos de representações semióticas.

2.2.2 – Os registros de representação semiótica e suas transformações

A seção anterior foi finalizada com exemplos de representações semióticas. E essas por sua vez, possibilitam três atividades denominadas: **formação**, **tratamento** e **conversão**.

A **formação** refere-se à criação de uma marca que possa ser identificada como representação de um objeto. O **tratamento** se configura como mudança de forma, mas preservando as características próprias do sistema onde fora criado e por fim, a **conversão**, é contemplada com a passagem a outro sistema, mas mantendo o mesmo objeto de referência. O papel dessas definições no contexto da Educação Matemática justifica-se pelo fato de que

> Em matemática há uma multiplicidade de representações, ou seja, existem diversos registros, que possibilitam a mobilização simultânea de várias representações de um objeto e a troca entre essas representações, a qualquer momento, de acordo com a necessidade. A originalidade da atividade matemática está justamente nessas características. Sabe-se que em determinadas ocasiões um tipo de registro pode ser colocado em evidência, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro. (PATRÍCIO, 2011, p. 38).

Um reconhecimento mais preciso dos tipos de representação semiótica na matemática permite um aprofundamento nos conceitos de tratamento e conversão. De forma sucinta, Duval (2208) promove uma classificação dessas representações, que podem ser analisadas no quadro a seguir.

Quadro 3: Classificação dos tipos de representação semiótica

	Registros DISCURSIVOS	**Registros NÃO DISCURSIVOS**
Registros MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
Registros MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistema de escritas: • Numérica (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudança de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

FONTE: DUVAL (2008, p. 14).

Segundo Duval (2012, p.272, grifos do autor) "**o tratamento** de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro", enquanto a "**conversão** de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a **totalidade** ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial".

A partir do quadro anterior, podemos perceber que um único registro nunca será uma boa representação para um objeto matemático, pois

> A análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela matemática mostra, ao contrário, a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder compreender. A atividade matemática real não se limita jamais à utilização de um único registro. (DUVAL, 2011, p.116).

Em suma, as transformações semióticas apresentadas configuram-se como essenciais para a compreensão de conceitos matemáticos, em especial quando se tratam das conversões.

De modo a exemplificar esses dois tipos de transformação, serão apresentados dois exemplos referentes à álgebra. Inicialmente tomemos o caso representado na Figura 1 a seguir.

Figura 1: Exemplo de tratamento empregado na resolução de uma equação

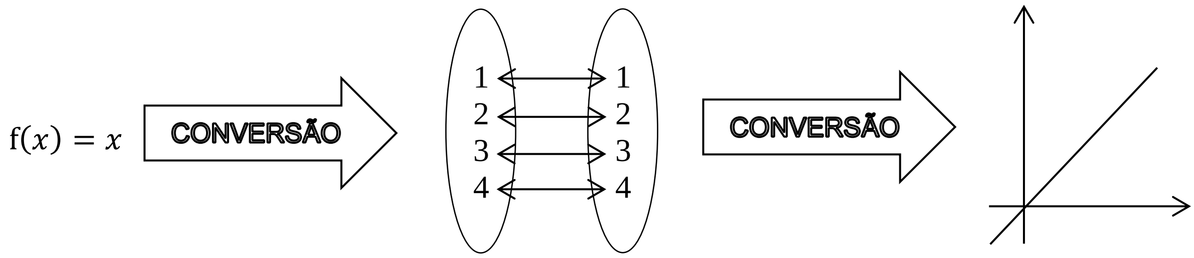
$$2 \cdot x = 6 \xrightarrow{\text{TRATAMENTO}} x = 3$$

FONTE: Kluppel (2012, p.35)

Observe que houve apenas uma simplificação da expressão apresentada a esquerda, mobilizando apenas um registro de representação, ou seja, uma transformação interna a um registro, o que caracteriza um tratamento.

No exemplo a seguir, representando na Figura 2, são caracterizadas duas conversões, ou seja, transformações que transitam entre diferentes registros de representação.

Figura 2: Exemplos de conversões no estudo de funções



FONTE: Kluppel (2012, p.35)

Perceba que a representação de um mesmo objeto foi realizada em diferentes sistemas semióticos, neste sentido a conversão realizada refere-se a uma transformação que permite a mudança de registros. Uma síntese sobre os conceitos de transformações é apresentada no quadro a seguir.

Quadro 4: Transformações de um registro de representação semiótica em outro registro de representação semiótica

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: **Tratamento**	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: **Conversão**
Quase sempre é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ela corresponde a procedimento de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", trata-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de **não-congruência**. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

FONTE: DUVAL (2015, p.15)

O empreendimento na compreensão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica configura-se como método que possibilita observar os fenômenos cognitivos no âmbito da atividade matemática, mas para isso exige a compreensão de mais um ponto chave da teoria, **os fenômenos de congruência e não-congruência.**

2.2.3 – Os fenômenos de congruência e não-congruência na conversão das representações

Vimos anteriormente que as conversões assumem um papel importante no que tange a aprendizagem em matemática. Entretanto, Duval (2015) salienta que os percalços relacionados com as conversões podem estar ligados com o fenômeno de congruência. Segundo o autor

> [...] entre uma relação de congruência semântica e uma relação de não-congruência, comanda o problema da significação em matemática: ela é corroborada por uma variação importante de custo no tratamento cognitivo. Certas dificuldades de aprendizagem matemática, aparentemente heterogêneas, encontram nesta perspectiva uma interpretação precisa e fecunda. (DUVAL, 2012, p. 99)

Portanto, algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos podem estar vinculadas ao conceito de congruência. Neste contexto, Duval (2009) destaca três critérios para que uma conversão seja congruente:

- Correspondência semântica dos elementos significantes: cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade significante elementar;
- Univocidade semântica terminal: cada unidade significante elementar da representação da partida corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada;
- Ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações: referindo à forma de apresentação de cada uma das representações.

Quando um desses critérios não é satisfeito, uma conversão é intitulada como não-congruente. O autor destaca ainda que, quando a conversão é congruente, os alunos apresentam facilidade nas resoluções das atividades, o que evidentemente é contraposto pelas dificuldades ao se depararem com conversões não-congruentes.

De modo a exemplificar a situação descrita anteriormente, usaremos o modelo adotado por Duval (2012, p. 111). O autor inicia apresentando o seguinte enunciado:

Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, 31 anos a menos do que seu pai. A soma da idade das três pessoas é 119 anos. Calcular as idades.

Promovendo uma conversão, no sentido de traduzir tal situação na linguagem algébrica, o mesmo denomina por *x* a idade do pai e por *y* a idade do filho, obtendo:

- x – 23 = y, em referencia **a idade de pai menos 23** é igual a idade do filho;
- x = y + 23, em referencia a idade do pai é igual **a idade do filhos mais 23**.

As duas expressões anteriores não são congruentes com a frase do enunciado, na qual foi expresso que o pai tem 23 anos a mais do que seu filho. Apesar de incorreta, a expressão x + 23 = y é a mais esperada para a situação, visto sua congruência semântica com a frase.

Diante dos principais pontos que regem a TRRS, serão apresentados, nos aspectos metodológicos, como tais promoveram implicações no planejamento e no andamento das intervenções. Claramente, tais considerações serão base para a análise dos dados, que se trata aos registros escritos dos alunos.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS

"Lutar pela igualdade sempre que as diferenças nos discriminem,
lutar pela diferença sempre que a igualdade nos descaracterize"

Boaventura de Souza Santos

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1 – A escola contexto da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida durante o ano de 2017 em uma instituição privada, fundada em 1995 e localizada na cidade de Itajubá, no Sul de Minas Gerais. Essa escola destaca-se pelo fomento de uma equipe de profissionais em constante aperfeiçoamento, no intuito de acatar a expectativa de uma escola que visa oferecer ensino de qualidade a seus alunos, buscando atender as exigências de uma sociedade de rápidas e profundas transformações.

Neste contexto, a instituição adota como uma missão: "oferecer aos alunos espaços e oportunidades que os transformem em cidadãos possuidores de uma mentalidade lógica e crítica, que sejam capazes de compreender a sociedade e a natureza para nelas conseguirem uma inserção harmoniosa".

No ano de 2017, a escola possuía 685 alunos distribuídos da Educação Infantil ao Pré-vestibular. Sua estrutura física é composta por 27 salas de aula, dois laboratórios de informática, um laboratório de ciências, duas salas de robótica, secretaria, tesouraria, três quadras cobertas, refeitório, biblioteca, sala dos professores e um campo de futebol. A escola conta com 54 professores e 42 funcionários.

Com a preocupação de oferecer uma formação que inclui o respeito à diversidade, o incentivo ao trabalho colaborativo, o estimulo da autonomia dos alunos e em consonância com a lei 13.146/15, conhecida como Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência, a escola sistematizou suas ações de apoio à inclusão de alunos do PAEE, criando um projeto denominado Serviço de Educação Inclusiva (SEI).

Tais sistematizações se referem a diversas ações que já eram empregadas, porém, sem uma reflexão mais aprofundada da situação, como se pode perceber no excerto do documento desse projeto, destacado a seguir

> [a escola] sempre acolheu seus alunos reconhecendo que o processo de aprendizagem não acontece da mesma maneira com todas as pessoas. Ao longo de sua história, recebeu crianças com necessidades especiais que demandaram atenção diferenciada quanto às adaptações necessárias: rampas de acesso, aulas no contra turno, entre outros. Algumas mudanças foram evidentes e permaneceram, como as reformas físicas, já outras – de ordem pedagógica – exigem reflexão e preparação mais profundas.

Neste sentido, podemos perceber que a escola se preocupa com a questão da inclusão, estabelecendo meios de concretizar práticas inclusivas para os alunos PAEE que a frequentam. O SEI, portanto, procura mobilizar a comunidade escolar para a importância de reconhecer a inclusão como um processo natural no ambiente escolar.

A escola realiza atendimentos a diferentes alunos que compõe seu PAEE. Dentre essas especificidades, podemos destacar alunos com Síndrome de Down, Síndrome de Prader Willi, Transtorno do Déficit de Atenção e hiperatividade (TDAH) e Transtorno Global do Desenvolvimento, além do atendimento a alunos com dislexia e discalculia.

Nesse universo, o número de alunos com TEA, atendidos pela escola, é o que mais chama atenção: são 16 alunos, com demandas diferenciadas. De modo a efetivar suas propostas, a escola promove algumas ações de suma importância, tais como a aplicação de provas diferenciadas, reuniões de formação com os professores e a comunidade escolar, acolhimento e atendimento às famílias.

Além disso, há profissionais observando os alunos durante as aulas, tais ações visam reconhecer as potencialidades e dificuldades desses alunos, para que se pensem ações capazes de promover uma aprendizagem significativa para todos. Esses, por sua vez, promovem adaptações alinhadas ao planejamento e em conjunto com professor regente da turma. Muitas das observações obtidas por essa parceria são comunicadas à coordenação, que sempre contribui para o aperfeiçoamento do processo educativo.

3.2 – Os alunos: sujeitos da pesquisa, protagonistas das aulas

As atividades elaboradas para essa pesquisa foram desenvolvidas em duas turmas de 8º ano, no contexto das aulas de matemática, totalizando o número de 41 alunos. Desse total, quatro alunos com TEA configuram-se como sujeitos da pesquisa, assim, suas produções e comportamentos são analisados de forma mais detalhada. A seleção dos sujeitos deu-se pela análise de laudos clínicos apresentados pela família à escola, tendo como critério o diagnóstico de TEA. A seguir serão apresentadas as caracterizações destes alunos, segundo os laudos clínicos e as observações realizadas por professores e pela coordenação da escola.

3.2.1 – Aluno A[2]

O **aluno A**, menino, 13 anos, é diagnosticado com TEA e Transtorno Misto Ansioso Depressivo. A necessidade de um diagnóstico originou-se de queixas dos pais quanto ao isolamento social, comportamento inflexível e imaturidade emocional. Esses diagnósticos, por sua vez, evidenciaram, sob análises médicas, prejuízos no desenvolvimento sensorial e da psicomotricidade, bem como na velocidade do processamento auditivo.

Dentre as constatações de tais diagnósticos, destaca-se que o aluno se alfabetizou bem e não apresenta dificuldades no rendimento escolar, mas frisa os baixos desempenhos em problemas matemáticos que exigem mais abstração. Sua letra é legível, mas não caligráfica, se distrai com facilidade durante as aulas e possui dificuldades de interpretar imagens e questões.

Durante a aula, o aluno faz desenhos, geralmente com a temática de *Super Heróis*, exigindo que o professor sempre solicite sua atenção. A maioria das atividades exige mediação, assim como orientações de maneira clara, curta, objetiva e diretamente para ele.

A coordenação solicita o incentivo de sua participação nas atividades coletivas que favoreçam as relações interpessoais e a compreensão de regras sociais, assim como o planejamento de atividades relacionadas com desenhos, de modo a incentivá-lo a participar da aula.

Nas aulas de matemática, o aluno mantem a postura de desenhar durante as explicações do professor, exigindo várias intervenções, e alega não ter interesse por tal disciplina, pois prefere os conteúdos aprendidos no ensino fundamental 1 (1º ao 5º ano). Tais alegações relacionam-se diretamente com o conteúdo que estava sendo trabalhado, a álgebra, que na sua visão, não se tratava de um conteúdo interessante. Tal desinteresse pode estar associado às suas dificuldades com conteúdos que exigem maior abstração, como os tópicos associados à álgebra.

O aluno, no ano da pesquisa, era novato na escola, e, apesar da dificuldade de socialização, foi bem aceito pelo grupo. Sempre participava das aulas quando solicitado. Em atividades avaliativas é recorrente a solicitação da presença do professor para correção das questões.

[2] De modo a preservar a identidade dos alunos, em todo âmbito dessa dissertação, eles serão denominados como alunos A, B, C e D.

3.2.2 – Aluno B

O aluno B, menino, 14 anos, foi diagnosticado com TEA e TDAH. Seu relatório médico aponta a necessidade de tomada de providências pedagógicas especiais, sendo submetido a avaliações escolares em horário diferente da turma, com maior tempo e supervisionado pelo professor regente. Tais recomendações são seguidas pela escola, o que tem contribuído com o desempenho do aluno.

Apesar do desempenho suficiente, o aluno demostra problema com a autoestima e dificuldades em respeitar limites, além de ser muito ansioso. Sempre desmotivado, precisa ser estimulado constantemente para persistir. Durante a aula, também se distrai com facilidade e quando é proposta uma atividade, levanta-se imediatamente para se dirigir ao professor, alegando dúvida sem ao menos ter lido as solicitações.

Aluno na escola desde o 6º ano, conhece praticamente todos os alunos e funcionários da escola, tendo a comunicação bem desenvolvida. Durante as aulas de matemática, sempre procura realizar as atividades, porém, faz muitos questionamentos fora do contexto, tais como foi o final de semana do professor e dos demais colegas. Participa de um projeto de xadrez promovido pela escola, como forma de potencializar seu raciocínio para aulas de matemática.

3.2.3 – Aluna C

A aluna C, menina, 13 anos, é diagnosticada com TEA e transtorno de leitura e escrita (dislexia leve). Faz acompanhamento fonoaudiológico. Usa medicamento para TDAH, de modo a contribuir para que assuma uma postura mais tranquila e adaptada, para alcançar seus objetivos pessoais e escolares.

A aluna está matriculada na escola desde o 6º ano, apresentando baixo desempenho em matérias que exigem raciocínio abstrato e nas habilidades sociais, não conseguindo manter amizades. Necessita de adequações escolares de modo a minimizar o impacto negativo dos déficits de aprendizagem, mantendo, assim, a sua motivação e seu interesse escolar.

Durante as aulas de matemática, a aluna demonstra interesse, faz as atividades, quase sempre de forma incorreta. Compreende melhor os conceitos quando o conteúdo é abordado com apoio de material concreto, auxiliando em seus problemas de abstração. O professor procura sempre contextualizar as informações, de modo a possibilitar que o mesmo possa superar suas dificuldades de organizar informações quando estas estão fora de um contexto.

3.2.4 – Aluna D

A aluna D, menina, 13 anos, é diagnosticado com TEA, tendo como características o bom potencial cognitivo, apesar das dificuldades proeminentes na atenção concentrada, da insegurança, que exige constante apoio, além de ser ansiosa. Existem indicativos de um quadro sugestivo de TDAH, do tipo desatenção.

Seu relatório médico também aponta desempenho médio em aritmética, tendo dificuldades na realização de cálculos mais complexos. Destaca-se também o fato de possuir dificuldades em interpretação de textos e em problemas de matemática. Tem dificuldade para lidar com tudo que demanda raciocínio lógico e abstração.

Presente na escola desde o 5º ano, sempre procurou se esquivar das dificuldades. Durante as aulas de matemática, procura se manter concentrada, solicitando silêncio aos que estão ao seu redor. Demonstra dificuldades nas resoluções de questões, mas não solicita a ajuda do professor, recorrendo aos colegas no seu entorno.

3.3 – Abordagem da Pesquisa

Diante dos objetivos e do contexto apresentados, no âmbito dessa pesquisa, adota-se uma abordagem qualitativa, que se preocupa com "aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais." (GERHARDT & SILVEIRA, 2009, p. 32). Esta parece ser a abordagem mais apropriada pelo fato da pesquisa se desenvolver no âmbito de uma escola de educação básica, no contexto das aulas de Matemática ministradas pelo próprio pesquisador.

Além disso, diante da relevância de considerar propostas que estejam em consonância com a proposta inclusiva, o pesquisador/professor tem a necessidade de promover reflexões de modo a possibilitar intervenções coerentes para o atendimento das necessidades dos seus quatro alunos com TEA, no âmbito da Educação Matemática. Um fator que favorece este processo refere-se ao fato de tal proposta estar vinculada a uma escola com olhar diferenciado para os alunos que compõe o PAEE e, de forma mais específica, atentar-se ao ensino de álgebra para alunos com

TEA. Assim, julgamos pertinente também compreender essa pesquisa como estudo de caso.

Segundo Gil (2008, p.57) o estudo de caso “é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado”. De modo coerente, Yin (2003, p. 32) afirma que o estudo de caso é uma investigação empírica que visa:

- Investigar um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, argumento intensificado quando,
- os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos.

A participação do pesquisador é reconhecida nesta abordagem, mas com ressalvas, como apresentado a seguir:

> O papel do pesquisador tem relevância quando está pautado numa atuação crítica e criativa descrevendo, interpretando, explicando e encadeando evidências. Para ser suficiente, o estudo de caso deve ter os limites entre ele e o fenômeno claramente determinados. (CUNHA, DEUS e MACIEL, 2010, p.5).

Tal argumentação é necessária haja vista a participação do pesquisador no contexto da pesquisa, e o desenvolvimento com rigor e seriedade devem ser empregados por parte do mesmo. Além do mais, o planejamento das ações se faz fundamental para que a qualidade da pesquisa seja efetivada. Assim, como as demais metodologias, o estudo de caso prevê fundamentos para coleta de dados. Sobre tal, convém destacar que

> o investigador deverá escolher uma técnica para coleta de dados necessários ao desenvolvimento e conclusões de sua pesquisa. Em um Estudo de Caso a coleta de dados ocorre após a definição clara e precisa do tema, enunciado das questões orientadoras, colocação das proposições – teoria preliminar –, levantamento do material que irá compor a plataforma do estudo, planejamento de toda a pesquisa incluindo detalhado protocolo, bem como as opções por técnicas de coleta de dados. (MARTINS, 2008, p.22)

Além da clara necessidade de se promover uma coleta de dados com rigorosidade, a análise deve ser efetuada como competência de modo a observar e obter dados e informações sem interpretações rasas por parte do pesquisador. (MARTINS, 2008, p.24).

3.2 – A obtenção dos dados dessa pesquisa

Com intuito de efetivar a inclusão dos alunos com TEA, foi elaborado um conjunto de atividades que atenderiam suas especificidades, mas que ao mesmo tempo teriam como objetivo desenvolver o pensamento algébrico de todos os demais alunos. Assim, o processo de elaboração das atividades foi realizado com cautela, visto que elas precisavam

> Ampliar a possiblidade de acesso do aluno à linguagem receptiva e expressiva, ampliando assim, o repertório comunicativo do aluno por meio de atividades de vida diária e comunicação alternativa, visando à autonomia, partindo de seus interesses, respeitando suas possibilidades motoras, cognitivas e afetivas, para promover um avanço conceitual. (SILVA, ALMEIDA, 2012, p.72)

Portanto, no planejamento das atividades, de modo a auxiliar a interpretação, disponibilizou-se a confecção de enunciados curtos e objetivos, o emprego de representações figurais de modo a favorecer o pensamento e a incorporação de ferramentas no formato virtual de modo a despertar o interesse dos alunos. A validade dessas e de outras medidas aos alunos com TEA terão o devido embasamento no decorrer do trabalho.

A previsão de momentos para a socialização de resultados, como uma oportunidade de fomentar o desenvolvimento da comunicação dos alunos, e o emprego de recursos que pudessem contribuir para a aprendizagem dos alunos com TEA, com base em seus interesses, também incorporam os principais critérios para a elaboração das atividades.

Foi aplicado um total de quatro intervenções, durante as quais o pesquisador se preocupou com a obtenção dos registros dos alunos e realizou uma série de observações e anotações em relação aos comentários realizados durante as aulas e nos momentos de socialização. É importante salientar que tal proposta foi apresentada a todos os alunos da classe, sem distinções.

As atividades foram desenvolvidas no contexto das aulas de matemática dos alunos, cuja organização semanal era estrutura no trabalho com duas frentes, a de álgebra e geometria. Como nosso foco é promover análise quanto ao pensamento algébrico, os conteúdos desenvolvidos na frente de geometria não serão foco dessa abordagem. Entretanto, muitas as atividades empregaram conceitos geométricos, como o cálculo de áreas de figuras geométricas planas. A inserção dessa medida beneficia a compreensão que a álgebra e a geometria possuem ínfimas relações, assim como auxilia os autistas com o uso de representações figurais.

No ano anterior, quando eles estavam no 7º ano, tiveram o primeiro contato com a álgebra formal, quando foi introduzido o conceito de equações do primeiro grau. Portanto, o reconhecimento de que uma letra pode significar um número desconhecido é de comum acordo a todos eles. Vejamos no quadro a seguir os principais tópicos de álgebra apresentados aos alunos quando estavam cursando o 7° ano.

Quadro 5: Conteúdos algébricos abordados no 7º ano aos alunos com TEA

Conteúdo	Tópicos	Assuntos abordados
Equações	• Expressões algébricas; • Calculando com letras; • Equações do 1º grau com uma incógnita; • Situações problemas resolvidas por equação.	• Aplicação da álgebra em situações reais; • Valor numérico de uma expressão algébrica; • Resolução de problemas com a utilização de letras; • Diferenciação entre equações e fórmulas; • Raiz ou solução de uma equação; • Resolução de problemas por meio da utilização de equações.
Sistema de duas equações do 1º grau	• Equações do 1º grau com duas incógnitas; • Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.	• Determinação das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas; • Determinação da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.
Inequações do 1º grau com uma incógnita	• Desigualdade • Inequação do 1º grau com uma incógnita.	• Princípios de equivalência das desigualdades.

FONTE: o autor.

A novidade para a álgebra do 8º ano se deve à compreensão das expressões algébricas, da diferenciação entre incógnita e variável e os cálculos que podem ser empregados com diferentes expressões.

Como o conteúdo de cálculo algébrico é extenso, estes momentos de intervenção foram escolhidos no âmbito de um conjunto maior de atividades que propiciaram o desenvolvimento do conteúdo como um todo. A escolha desses momentos está associada à introdução de conceitos que apresentavam uma maior possibilidade de trabalho com diferentes registros de modo a possibilitar uma análise mais precisa. No quadro a seguir são apresentados os recortes realizados em conformidade com a justificativa apresentada.

Quadro 6: Síntese das atividades desenvolvidas

Conteúdo/Tópicos Abordados		**Houve intervenção com fim de coletar dados para a análise?**	
		SIM	**NÃO**
Expressões Algébricas	Situações envolvendo expressões algébricas	X	
	Expressão algébrica: definição		
	Valor numérico de uma expressão algébrica		
Monômios	Monômios semelhantes		x
	Operações com monômios		
Polinômios	Redução de termos semelhantes		x
	Polinômio de uma variável		
	Operações com polinômios		
Produtos Notáveis	Quadrado da soma de dois termos	x	
	Quadrado da diferença de dois termos		
	Produto da soma pela diferença de dois termos		
Fatoração algébrica	Fatoração	x	
	Fator comum em evidência		
	Agrupamento		
	Diferença entre dois quadrados		
	Trinômio quadrado perfeito		

FONTE: o autor.

Deste recorte também foram dispensados outros conteúdos que estavam atrelados à frente de álgebra, tais como a construção do conjunto dos números dos números reais e o cálculo de potências e raízes. A justificativa, já apresentada anteriormente, se deve ao fato de analisar a aprendizagem do cálculo algébrico.

Diante desse cenário, as atividades propostas possibilitaram as mobilizações de diferentes registros de representação, de modo a avaliar as contribuições do trânsito entre os diferentes registros para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos em geral e, de modo específico, daqueles com TEA.

De modo a possibilitar a compreensão e uma ampla visão das atividades desenvolvidas, será apresentada uma síntese de cada uma delas, dando ênfase no objetivo da proposta, na sua relação com a TRRS e nas possíveis contribuições para os alunos com TEA.

Quadro 7: Síntese das atividades desenvolvidas com intuito de obtenção de dados

<table>
<tr><th>ATIVIDADE</th><th>OBJETIVO DA ATIVIDADE</th><th>INFORMAÇÕES GERAIS</th><th>RELAÇÃO COM A TRRS</th><th>CONTRIBUIÇÕES AOS ALUNOS COM TEA</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">Observar padrões e expressar generalizações, usando variáveis e outros símbolos da linguagem matemática.</td><td rowspan="2">• Aulas destinadas a atividade 1: 6 h/a.
• Aulas destinadas à atividade 2: 4 h/a.
• Recursos empregados: material impresso.</td><td rowspan="4">• Possibilitar as conversões da língua natural para a linguagem algébrica;
• Estabelecer relações entre duas representações distintas;
• Analisar a influência do fenômeno da congruência nas dificuldades apresentadas pelos alunos;
• Promover conversões para a linguagem algébrica a partir do contato com representações figurais;
Promover tratamentos com expressões algébricas e com representações figurais.</td><td rowspan="4">Todas as atividades proporcionam uma variedade de representações que, por sua vez, visa contribuir como artificio para minimizar a dificuldade com a linguagem e com a capacidade de abstração desses alunos. Em vários momentos, os mesmos foram convidados para a socialização dos resultados obtidos.</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Desenvolver o conceito de produtos notáveis, relacionando os mesmo com sua abordagem geométrica.</td><td>• Aulas destinadas à atividade: 8 h/a.
• Recursos empregados: material impresso, computado com GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Compreender as principais técnicas de fatoração, promovendo uma abordagem relacionando com a geometria.</td><td>• Aulas destinadas à atividade: 8 h/a.
• Recursos empregados: material impresso, computado com GeoGebra.</td></tr>
</table>

FONTE: o autor.

Tais atividades foram desenvolvidas em um total de 26 aulas e geraram registros escritos, essenciais para uma análise mais precisa, sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, possibilitando verificar as contribuições de tais intervenções para o pensamento algébrico de alunos com TEA.

A análise, por sua vez, irá se proceder do isolamento e reconhecimento das unidades de sentido matematicamente pertinentes no âmbito dos registros de representação utilizados pelos alunos, tendo em vista que

> Para analisar as atividades matemáticas organizadas com objetivo de aprendizagem ou de formação, é preciso, portanto, poder considerar todos os registros utilizados em matemática. Assim, para analisar uma resolução de problemas, não podemos privilegiar o registro no qual fazemos os tratamentos matemáticos que resolvem o problema. A mobilização dos outros registros relativos aos dados do problema, a maneira pela qual eles são representados é também essencial. (DUVAL, 2011, p. 116).

Assim, destaca-se a importância de fomentar atividades que considerem a conversão de representações. Duval (2011) aponta que a atividade matemática não se deve limitar a um único registro. Neste sentido, nas atividades aplicadas, visa-se promover considerações que abordem os aspectos salientados por Duval (2011):

- Os fenômenos de congruência e não-congruência na conversão das representações;
- O lugar da língua natural no funcionamento cognitivo subjacente aos encaminhamentos matemáticos;
- A compreensão dos enunciados de problemas e a necessidade de representações auxiliares de transição;
- O problema da articulação cognitiva entre a língua natural e os outros registros.

Tais pontos delinearam a análise dos registros obtidos que, associados às observações, poderão descrever um cenário que permita argumentar como o trabalho com diferentes registros de representação semiótica pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos com TEA.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO PROCESSO E DOS DADOS OBTIDOS

"Quem elegeu a busca, não pode recusar a travessia."

Guimarães Rosa

4 ANÁLISE DO PROCESSO E DOS DADOS OBTIDOS

Neste capítulo serão apresentados e analisados os dados obtidos a partir do conjunto de atividades propostas aos alunos da turma, com foco especial nas produções dos alunos com TEA. Muitos comentários realizados por parte do pesquisador foram subsidiados também pelos registros realizados imediatamente após o término das aulas.

Cabe destacar que as atividades aqui relatadas foram destinadas a todos os alunos da classe, não havendo distinções no modo em que as mesmas foram apresentadas. Houve, no entanto, uma prioridade em convidar os alunos com TEA para do compartilhamento dos seus resultados em momentos de socialização e/ou construção de conceitos. Essa atenção diferenciada aos seus registros e observações se deve ao fato dos mesmos constituírem o grupo de sujeitos desta pesquisa.

O trabalho iniciou-se com discussões e a sistematização entre as distinções entre os conceitos de equações e expressões algébricas. Tais conceitos, portanto, poderão ser empregados no âmbito das respostas dos alunos.

Todas as atividades que esse trabalho se propõe a analisar consideram a mobilização de pelo menos dois registros diferentes, de modo a verificar como essa variedade de representações influencia no aprendizado dos alunos e, em especial, dos alunos com TEA.

A análise, inicialmente, irá recorrer aos sucessos ou erros nas atividades, o que permitirá duas tomadas de estratégias para interpretação dos dados, conforme apontado por Duval et al (2015):

- Quantificar os erros e os sucessos de modo a obter uma interpretação estatística, ou, de forma qualitativa, identificar os procedimentos associados aos erros ou,
- Fundir todos os resultados sem a preocupação de distinguir o desempenho aluno por aluno, de modo a avaliar o desempenho de uma sequência didática.

Como estamos interessados em analisar de forma mais intrínseca o desempenho dos alunos com TEA, iremos adotar o primeiro procedimento, olhando para os dados e procurando pontuar o que exprime o quadro a seguir.

Quadro 8: A “dualidade dos dados a analisar”

DADOS		Em termos de compreensão ou não compreensão
	Resultado *do ponto de vista matemático*	*Em relação a que, e como, analisar estes dados?*
PRODUÇÃO	**ERRO** ou **abandono**	← Qual é a causa ou a natureza, da **DIFICULDADE SUBJACENTE**?
	SUCESSO	← **Aquisição** de um saber: qual margem de progressão ou qual capacidade de transferência?

FONTE: (DUVAL et al, 2015, p. 38)

As dificuldades apresentadas pelos alunos serão visualizadas de acordo com as mobilizações apresentadas nos registros e/ou as necessidades decorrentes do TEA, apresentadas pelos alunos com o transtorno.

4.1 – PROMOVENDO O CONTATO COM A GENERALIZAÇÃO

As primeiras atividades a serem analisadas visavam apresentar aos alunos situações que necessitavam observar padrões, assim como expressar generalização verbalmente e/ou usando variáveis e outros símbolos da linguagem matemática.

A proposta configura-se como contributiva para o desenvolvimento do pensamento algébrico, visto que os padrões possibilitam o reconhecimento do conceito de variável e, quando se promovem generalizações, permite-se pensar algebricamente (STAR, HERBEL-EINSENMANN e SMITH, 2000).

Do ponto de vista da TRRS, tais atividades propiciaram a transição entre a linguagem natural e a linguagem matemática, obtendo-se, de forma mais precisa, expressões algébricas.

Para uma melhor caracterização, iremos dividir a análise dessas atividades em três partes, de acordo com os seguintes critérios:

- A transição da língua natural para a linguagem algébrica;
- A escrita de generalizações diante de situações que apresentam padrões;

- O estabelecimento de padrões por parte dos alunos e a suas generalizações.

4.1.1 PROPICIANDO TRANSIÇÕES ENTRE A LÍNGUA NATURAL E A LINGUAGEM ALGÉBRICA – ATIVIDADE 1 – PARTE I

Inicialmente, foi apresentada a tirinha apresentada na Figura 3, solicitando que os alunos escrevessem uma expressão algébrica que pudesse representar o problema apresentado pelas personagens. Vejamos a tirinha e posteriormente, os resultados obtidos.

Figura 3: Tirinha apresentada aos alunos – Atividade 1

FONTE: Níquel Náusea, Fernando Gonsales

O quadro a seguir sintetiza as representações expostas pelos alunos:

Quadro 9: Respostas apresentadas pelos alunos com TEA - Questão 1 - Atividade 1

Aluno A	Aluno B
$3x+5\div2+4$	5 ✱3 = 15 + a + 5 = 20 ⌊2 + 2 10
Aluna C	**Aluna D**
$x \cdot 3+6 + \frac{x}{2} + 4$	$x \cdot 3+5\div2+4$

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

Esta atividade exigia uma conversão e essa, por sua vez, configura-se como não-congruente. As dificuldades naturalmente apareceram, a perceber pelas respostas dos alunos, que apresentaram expressões seguindo os comandos apresentados na tirinha. Sobre isso, Duval (2012, p.110) destaca que "a passagem de um enunciado do discurso natural para uma expressão escrita simbolicamente com variáveis, símbolos de relação ou operação, constitui, para muitos alunos, um abismo dificilmente transponível".

Além da dificuldade relatada por Duval (2012), ao considerar o ensino de matemática, somam-se as dificuldades apresentadas especificamente pelos alunos com TEA, cuja linguagem é afetada, e esse tipo de conversão passa a ser, portanto, uma atividade extremamente complicada para eles. Entretanto, ao analisar os resultados dos alunos A e D, destaca-se apenas a ausência dos parênteses e/ou o fato da divisão por dois não ser representada pela barra fracionária. Tal equívoco também pode ser identificado nos resultados apresentados pelos demais alunos regulares, mesmo que em pequena parcela.

Percebe-se assim, que as respostas desses alunos são exprimidas com estrutura lógica e coerente, com expressões que se aproximam das esperadas como respostas adequadas a situação:

$$\frac{3x+5}{2}+4 \quad ou \quad (3x+5):2+4$$

O aluno B não apresentou uma expressão algébrica coerente, apenas colocando algumas letras fora de contexto. Entretanto, tudo evidencia que o mesmo aproveitou o espaço para efetuar cálculos com um determinado número.

A aluna C não se distancia da resposta correta, visto que compreendeu a sentença "divida por dois e some mais quatro" como algo a ser realizado com o número pensado inicialmente.

Diante da expressão obtida, os alunos foram convidados a efetuarem o cálculo de valor numérico, supondo que o número pensado inicialmente fosse o 5. Isso se configura como um tratamento, visto que nesta abordagem é mobilizado apenas um único meio de representação.

Os alunos A e B seguiram os comandos expressos na língua natural, obtendo o resultado com sucesso. Já as alunas C e D, optaram por utilizar as expressões obtidas e assim, mesmo efetuando o cálculo corretamente, não chegaram aos resultados corretos.

A proposta seguinte mantém o objetivo, sugerindo a mesma transição entre os meios de representação. O Quadro 9, a seguir, apresenta uma síntese dos resultados obtidos pelos alunos em questão.

Quadro 10: Síntese das respostas dos alunos - Questão 2 - Atividade 1

Item	Aluno A	Aluno B	Aluna C	Aluna D
Adição de dois números reais quaisquer.	$X+X$	$a+F$	$5-3=2$	$x+y$
Diferença de dois números reais quaisquer.	$X-X$	$A \neq B$	não lembro	$X-y$
Quadrado de um número real qualquer	X^2	a^2	8^2	X^2
Quadrado da soma de dois números reais quaisquer	X^2+X^2	$a+b$	2^2+2^2	x^2+y^2
Produto de dois números reais quaisquer	$X \cdot X$	$F+G$	não lembro	$X \cdot y$
Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer	$(X+) \cdot (X-)$	$F-G$	não lembro	$X \cdot y+x-y$

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

Pela análise do quadro acima podemos inferir que os conceitos de diferença e produto não estão claros a todos os alunos com TEA, em especial aos alunos B e C. Como forma de efetivar tal argumentação, consideremos o fato do aluno B associar o conceito diferença ao símbolo de diferença (≠) e a aluna C, ao se deparar com situações que envolvesse algum desses conceitos, assinalou que não se lembrava.

A aluna C também não compreendeu o que foi solicitado na questão, em que sua consigna solicitava o uso de letras. Cabe ressaltar que a mesma teve contato com álgebra no ano anterior e, no ano em questão, acompanhou as definições dos conceitos de expressões algébricas e de variável, o que a habilita empregar letras na atividade proposta. Entretanto, no resgate de seu histórico, percebe-se que o transtorno na leitura e na escrita podem ter influenciado seu desempenho. Retomando os aspectos do autismo, verifica-se que esses alunos podem ter demonstrado dificuldade devido a rigidez dos pensamentos exigidos pela atividade, além da dificuldade deles em flexibilizar seu raciocínio matemático, especialmente em relação ao pensamento algébrico. Esta dificuldade pode ser relacionada com a dificuldade em criar, de associar palavras ao seu significado, compreender a língua falada e generalizar a aprendizagem (GOMES, 2007).

Em relação à congruência das transformações, fica evidente nos itens iniciais um maior índice de acertos em comparação com os itens finais, visto que estes não respeitam o fenômeno da congruência, mas foram ali apresentados para um posterior uso nos estudos de produtos notáveis.

Como foi recorrente a questão da congruência, cabe aqui apresentar mais um exemplo do que está ocorrendo. Destaca-se que esses problemas se referem especificamente às mudanças de registro e, de certa forma, são previsíveis.

Para exemplificação, vamos analisar uma das propostas apresentadas aos alunos e sua representação algébrica:

Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer	$\rightarrow$	$(x+y)\cdot(x-y)$

Duval (2009, p. 68) considera unidade significante elementar como toda unidade que se destaca do "léxico" de um registro. Neste caso, a unidade significante "produto", que aparece em primeiro lugar na língua natural, aparece após a soma de dois números reais na linguagem algébrica. O fenômeno da não-congruência, nesse caso, decorre da falta de "possibilidade de uma correspondência semântica dos elementos significantes" (DUVAL, 2009, p.68).

Esta parte da atividade apresentava indícios de que tais dificuldades seriam recorrentes no estudo dos produtos notáveis, portanto, o emprego da representação geométrica seria um fator de grande influência na compreensão de tais conceitos.

Veremos, posteriormente, que as imagens auxiliam na aprendizagem de alunos com TEA, visto seu pensamento visual.

4.1.2 PROMOVENDO GENERALIZAÇÕES POR MEIO DA OBSERVAÇÃO DE PADRÕES – ATIVIDADE 1 – PARTE II

A etapa anterior teve como proposta as conversões da língua natural para a linguagem algébrica. Nessa segunda parte, de modo a valorizar o desenvolvimento do pensamento algébrico, aborda-se a generalização de situações que envolvem padrões.

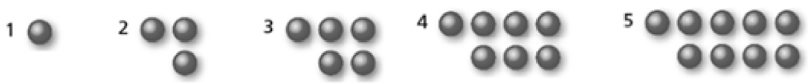
Tais atividades contribuem significativamente para aprendizado de alunos autistas, visto que possibilitam conduzir situações de abstração de forma mais adequada a eles, pois

> Este tipo de tarefa poderá ser um veículo poderoso para a compreensão de relações entre quantidades e, também, constituir uma forma concreta e transparente de os alunos começarem a debater-se com as noções de generalizações e abstração. Espera-se ainda que, através desta abordagem, sejam capazes de mais facilmente atribuir significado à linguagem e ao simbolismo usados na álgebra. (BARBOSA, VALE, 2013, p. 3073).

De modo a possibilitar tal demanda, foi proposta inicialmente à análise de três situações que permitiam sintetizar os padrões por meio de uma fórmula, como podemos visualizar no Quadro 11 a seguir[3].

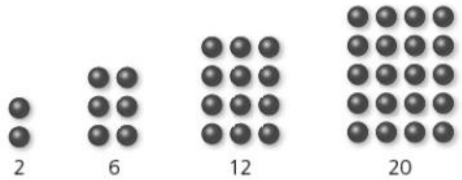
Quadro 11: Promovendo generalização, Questões 3 a 5, Atividade 1

SITUAÇÃO 1
Objetivo: Diante a sequência abaixo, obter uma fórmula que permita relacionar o número de palitos com o número de triângulo em cada figura.

SITUAÇÃO 2
Objetivo: Dada uma sequência de figuras, determinar uma fórmula para expressar o número de bolinhas de uma determinada figura.


[3] Cabe destacar que os enunciados das questões estão simplificados, compreendendo apenas a essência da proposta solicitada aos alunos. Os detalhes presentes na questão estão no apêndice.

SITUAÇÃO 3
Objetivo: Semelhante à situação 2, obter uma fórmula que determine o número de bolinhas de uma determinada figura.

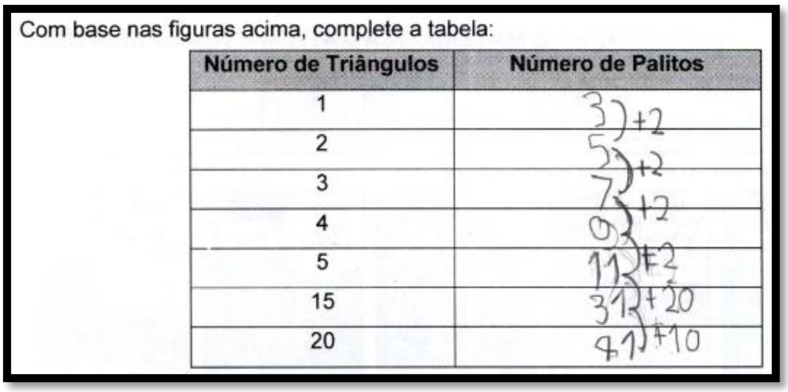


FONTE: Atividade adaptada de Imenes e Lellis vol. 7 (2012).

A opção por uma proposta de atividade que prevê a análise dos padrões por meio da sequência de figuras se deve ao fato dos alunos autistas possuírem um “pensamento visual”, isso implica que seus raciocínios são estimulados pela utilização de imagens e sistemas visuais (GOMES, 2007).

Em análise após aplicação da atividade, foi possível refletir que a multiplicidade de registros, como exposto nas situações anteriores, poderia ser um complicador aos alunos com TEA. Tal multiplicidade se refere ao fato de que, na primeira situação, as figuras são ordenadas de acordo com a quantidade de triângulos, na segunda, de acordo com a posição e na terceira, de acordo com a quantidade de bolinhas. Entretanto, para a condução de uma generalização, foi apresentada uma organização tabular que permitisse perceber o que estava acontecendo de uma figura para outra, uma representação auxiliar de transição, que conduziu o pensamento dos alunos e evitou estes empecilhos. Mais uma vez, o trânsito entre diversos registros se mostrou um caminho fértil para a aprendizagem de todos.

Essa organização tabular permitiu um melhor direcionamento à conclusão esperada, sendo introduzida de forma intencional de modo a contribuir especialmente aos alunos com TEA. Vejamos, a seguir, como conduziu o aluno A na situação 1.



Com base nas figuras acima, complete a tabela:

Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3 +2
2	5 +2
3	7 +2
4	9 +2
5	11 +2
15	31 +20
20	41 +10

Figura 4: Registro do aluno A, Questão 3, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno A

O aluno percebe que há um aumento de duas unidades de uma figura para outra, isso auxiliou o mesmo na generalização de uma fórmula que relaciona a quantidade de palitos (p) com o número de triângulos (t) da figura:

Figura 5: Registro do aluno A, Questão 3, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno A

Para tal expressão, o aluno A destaca as mesmas observações que foram realizadas pelas alunas C e D, vejamos o que aponta um deles:

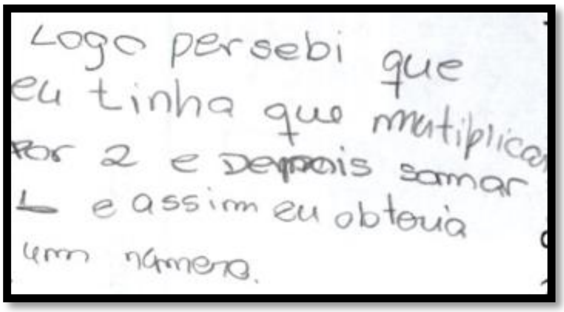
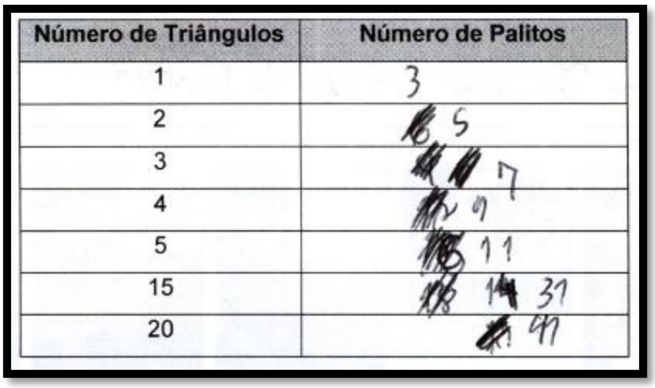


Figura 6: Registro da aluna C, Questão 3, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna C.

Nesta primeira situação, os alunos A, C e D executaram com sucesso. Cabe destacar que o aluno C emprega a língua natural para expressar suas conclusões, assim como apresentou uma expressão, permeando pelo menos duas representações.

O aluno B conseguiu quantificar adequadamente o número de palitos para uma determinada quantidade de triângulos. Para tal, o mesmo recorreu a inúmeros desenhos, não se atentando a possibilidade de generalizar. Vejamos seu registro:



Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
15	31
20	41

Figura 7: Registro do aluno B, Questão 3, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno B.

Diferentemente dos colegas, o aluno B acabou por empreender a representação gráfica para cada quantidade de triângulos exigida. Isso implicou em uma desmotivação por parte do mesmo pela atividade.

Na segunda situação, na qual se esperava obter uma fórmula que relacionasse o número de bolinhas de uma determinada figura, a atividade inicial previa a representação das figuras de números 6 e 7 da sequência. Todos os alunos conseguiram prever o número de bolinhas, mesmo não respeitando o padrão disposto nas figuras, como podemos perceber na representação do aluno C:

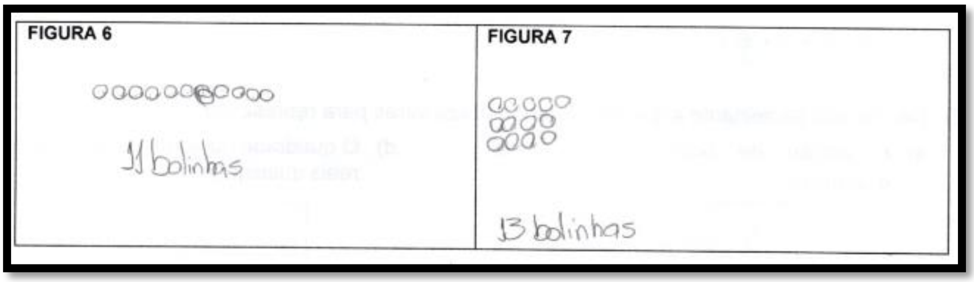


Figura 8: Registro da aluna C, Questão 4, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna C.

O motivo pelo qual certamente não respeitou tal representação deve-se a preocupação em determinar o número de bolinhas contidas em cada figura, não se atentando a presença de um padrão geométrico, que deveria permanecer. A aluna não está realizando um tratamento adequado, visto que o objetivo é expressar uma representação figural. Ela expõe uma identificação do padrão numérico, usufruindo da língua natural.

Cada numero acresentava 2 bolinhas desde do inicio

Figura 9: Registro da aluna C, Questão 4, Atividade 1
FONTE: Registros da aluna C.

A mesma observação foi ponto de partida para os alunos A e C obterem uma expressão que generalizasse a situação. Vejamos:

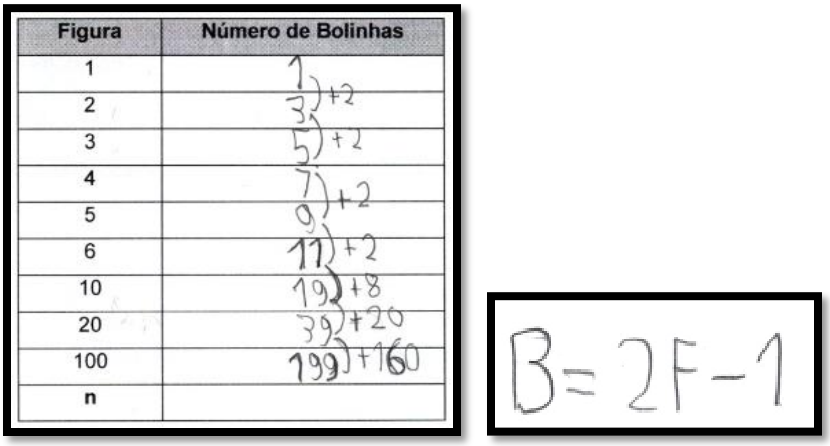


Figura	Número de Bolinhas
1	1
2	3 +2
3	5 +2
4	7 +2
5	9
6	11 +2
10	19 +8
20	39 +20
100	199 +160
n	

B= 2F-1

Figura 10: Registro do aluno A, Questão 4, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno A.

Nota-se que o aluno A, em sua organização tabular, prefere utilizar a letra “B” para designar o número de bolinhas e a letra “F” para a posição da figura. Tais escolhas indicam que essas seriam as letras que forneceriam uma melhor compreensão da sentença obtida. Deve-se atentar também, que na tabela auxiliar, a generalização da figura é dada pela letra “n”. Aparentemente, a aluna C também recorre à letra “F” para a indicação da figura, assim como o aluno A, como pode ser observado a seguir:

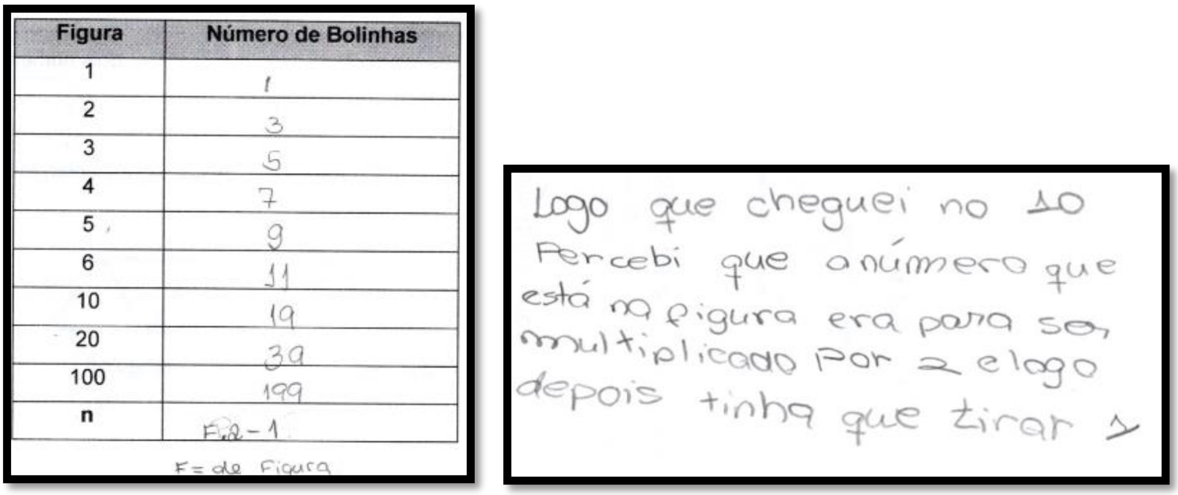


Figura	Número de Bolinhas
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
10	19
20	39
100	199
n	F.2 - 1

F= de Figura

Logo que cheguei no 10
Percebi que o número que
está na figura era para ser
multiplicado por 2 e logo
depois tinha que tirar 1

Figura 11: Registro da aluna C, Questão 4, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna C.

O aluno B novamente não apresenta uma expressão que generalizasse a situação, mas preencheu corretamente a tabela que quantifica o número de bolinhas presente em determinadas figuras. A aluna D também não obtém uma expressão, entretanto, consegue identificar outra regularidade, diferente do observado pelos alunos A e C, como podemos constatar em seus registros.

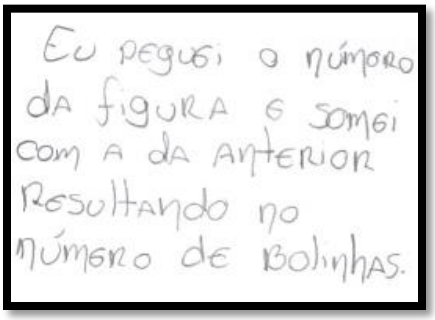


Figura 12: Registro da aluna D, Questão 4, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna D.

Nas considerações acerca do padrão observado, novamente se faz presente o emprego da língua natural. Alguns chegaram a relatar a dificuldade de expor o padrão em uma fórmula, talvez, esse seja o motivo do recorrente emprego da língua natural. Cabe destacar que a “língua natural deve ser considerada, ao mesmo tempo, um registro de partida e um registro de chegada” (DUVAL, 2012, p. 295), evidenciando uma conversão que foi estabelecida no processo.

Na terceira situação, a maioria dos alunos optou por se apoiar em desenhos, o que parece ter facilitado à compreensão e a identificação do padrão. O aluno A foi categórico em suas considerações, chegando a uma expressão que determina o total de bolinhas. Para ele, como as bolinhas estavam dispostas numa organização retangular, bastava multiplicar o número da figura [que determinava o número de bolinhas da base do retângulo] pelo seu sucessor [que determinava o número de bolinhas na altura do retângulo] de modo a determinar o valor esperado.

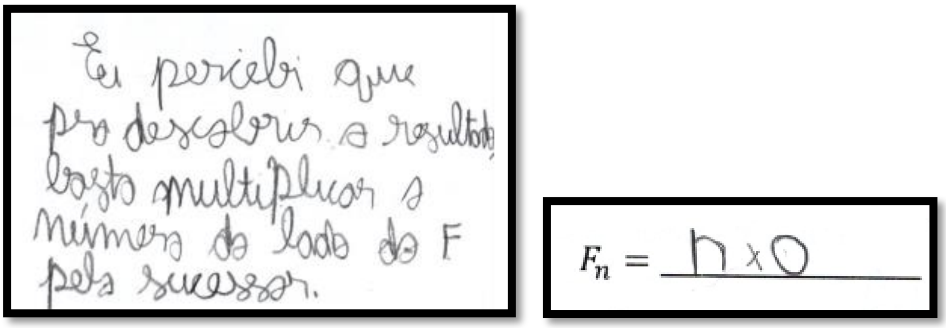


Figura 13: Registro ao aluno A, Questão 5, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno A.

Cabe ressaltar que para o aluno A, o símbolo “*o*” designa o sucessor do número natural “n”, pois ele recorre a ordem alfabética. Na socialização dos resultados, por meio da intervenção do professor, foi retomando a ideia de que o sucessor, neste caso, poderia ser representado por “$n + 1$”. Empregando um raciocínio semelhante, o aluno B também obteve o resultado esperado, mesmo não apresentando uma fórmula.

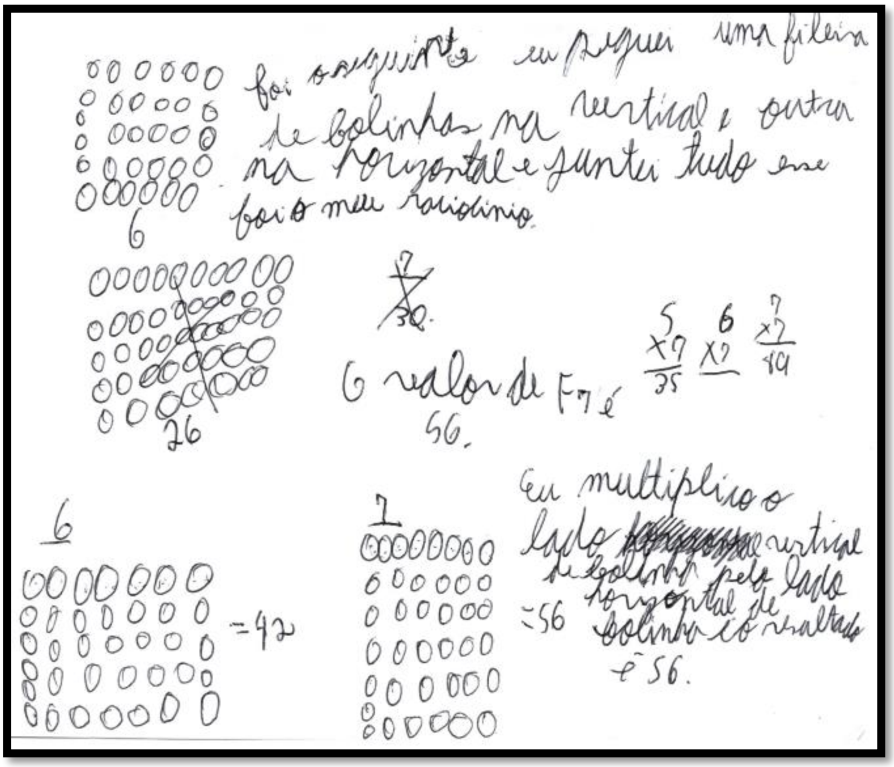


Figura 14: Registro do aluno B, Questão 5, Atividade 1

FONTE: Registros do aluno B.

O aluno B apresenta uma série de registros de modo a verificar sua conclusão final, neste caso, uma série de tratamentos foi realizada por ele, expressando sua consideração final por meio da língua natural. Entretanto, há uma mudança de registro, quando o mesmo emprega o cálculo de produtos para determinar o número de bolinhas. Tal argumento é reforçado quando o aluno argumenta em suas conclusões: “Eu multiplico lado vertical de bolinhas pelo lado horizontal de bolinhas e resultado é 56”, evidenciando que houve uma conversão na sua generalização, essa sendo expressa pela língua natural.

A aluna C também recorreu a esse recurso e apesar de não apresentar valores corretos ao completar a tabela auxiliar, argumentou de forma adequada, como se pode observar em seu registro, apresentado na Figura 15.


Cada vez que o F subia eu acresentava 1 Bolinha na linha sendo vertical e horizontal

Figura 15: Registro da aluna C, Questão 5, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna C.

A análise empregada pela aluna C parece indicar que a mesma passou a apoiar sua análise apenas pela observação da tabela, descartando os vínculos com a representação geométrica, o que provavelmente a levou ao erro.

A aluna D também identifica o padrão corretamente, conforme se observa no preenchimento apresentado em seus registros, presentes na Figura 16.

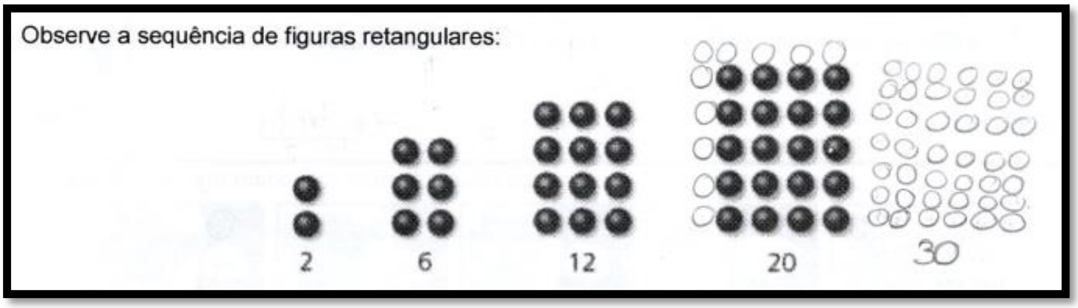


Figura 16: Registro da aluna D, Questão 5, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna D.

A aluna aproveita a quarta figura para determinar o número de bolinhas da quinta. Ao lado, a priori, representou a quinta figura, com 30 bolinhas, e a completou de modo a obter a sexta figura, com 42 bolinhas. Tal análise decorre do registro apresentado pela aluna no primeiro questionamento da terceira situação, como se pode ver em seus registros na Figura 17.

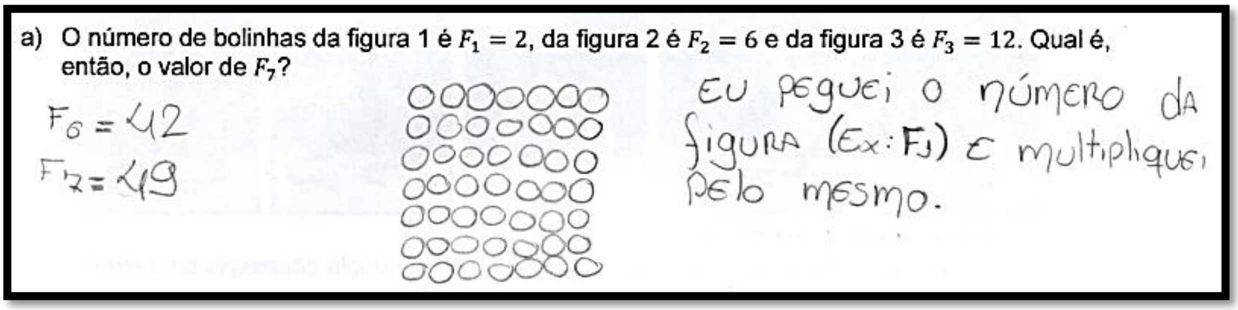


Figura 17: Registro da aluna D, Questão 5a, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna D

No registro da aluna há referência à sexta figura, indicada por F_6, cuja quantidade indicada é 42. Porém, ao aproveitar o espaço para representação da sétima figura, a aluna comete um erro no tratamento, organizando as bolinhas em um formato retangular 7x7. Tal equívoco implica em uma conversão condizente com a última figura obtida, porém, não generaliza o que é apresentado nas figuras anteriores. Esse erro conduziu a sua conclusão, como destacado na Figura 18, na linguagem natural e algébrica.

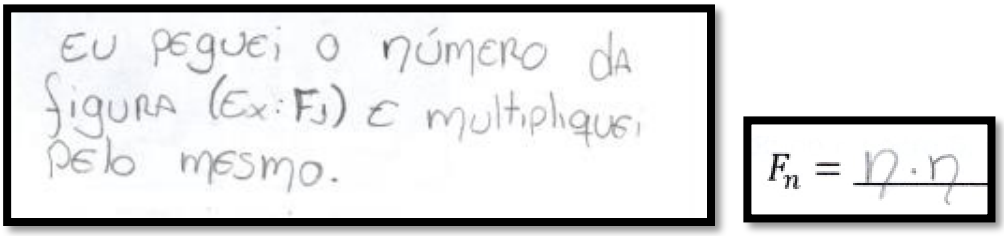


Figura 18: Registro da aluna D, Questão 5, Atividade 1

FONTE: Registros da aluna D.

Percebe-se, portanto, que a conclusão equivocada da aluna está associada ao fato do tratamento das imagens não ter sido realizado de forma precisa, não implicando que a mesma não seja capaz de promover generalizações. No histórico da aluna, há um quadro sugestivo de TDAH, do tipo desatenção, que pode ter influenciado em seu desempenho, portanto este é um fator importante a ser considerado quando analisamos as produções de alunos com transtornos.

Para finalizar as considerações acerca da primeira atividade, que visava à generalização, podemos perceber a utilização constante da linguagem natural para expressar as conclusões e certa dificuldade de direcionar as mesmas de modo algébrico. Convém destacar que a utilização dessa forma de expressar seus resultados não direciona a premissa que os alunos estão com dificuldade de generalizar, pelo contrário, a maioria conseguiu identificar e apontar adequadamente o comportamento estabelecido pelas figuras. Isso denota que

> A linguagem natural não pode estar em oposição de modo simples e global à linguagem lógico-matemática e às representações figurais ou gráficas: a verdadeira fronteira, aquela que bloqueia muitos alunos, é a congruência e a não-congruência semântica no jogo da substituição de uma expressão a outra, ou de uma representação a outra. (DUVAL, 2012, p. 116)

Ainda quanto ao emprego da mesma, destaca-se o que dizem Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p. 88): “[...] não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim”.

A segunda atividade, apresentada no tópico a seguir, irá permear os mesmos objetivos, porém, os alunos serão convidados a apresentar um estabelecimento de padrão e posteriormente promover sua generalização.

4.1.3 GERANDO PADRÕES E GENERALIZAÇÕES – ATIVIDADE 2

Tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico, as atividades apresentadas até então visavam promover nos alunos a compreensão do papel das letras no âmbito das representações algébricas na matemática. A segunda atividade reforça essa perspectiva por meio do empreendimento de padrões e sua devida generalização. Essa abordagem se justifica pois

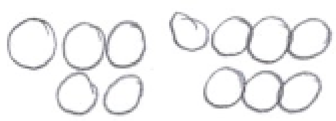
> Quando apelamos aos padrões no ensino da Matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma Matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai de [ao] encontro a esse aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões e fazerem generalizações e também previsões. (VALE et al., 2007, p.6).

Esse tipo de abordagem torna o ensino de álgebra mais significativo, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Diante do apresentado, cabe destacar que, diferente das atividades de observações de padrões analisadas anteriormente, nessa segunda atividade os alunos foram convidados ao desenvolvimento de padrões e posteriormente a identificação de uma fórmula que determinasse o número de bolinhas de uma dada figura. Para tal, uma sequência inicial foi apresentada, de modo que eles criassem um padrão para as figuras seguintes. Vejamos essa sequência:

Figura 19: Sequência inicial, Atividade 2
FONTE: Inspirado na atividade proposta por Fernandes (2011)

Ao considerar os resultados, três alunos desenvolveram o mesmo padrão, como se pode observar na representação dada por eles para a terceira e quarta figuras da sequência, conforme o Quadro 12 a seguir.

Quadro 12: Registro dos alunos na Atividade 2

ALUNO	PADRÃO ADOTADO	OBSERVAÇÃO REALIZADA
ALUNO A		A cada figura é adicionado duas bolinhas
ALUNA C		N.2-1
ALUNA D		Número da figura mais o número da figura anterior é igual ao número de bolinhas.

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

Na análise feita a posteriori, percebe-se a inadequação do momento em que essa proposta, que deveria ser mais aberta, e capaz de incentivar uma postura mais investigativa dos alunos, foi apresentada. Ao fornecer um início de sequência que não determinava a forma exata de continuar, a ideia era que os alunos desenvolvessem sua criatividade, apresentando diversas possibilidades de continuação para a sequência, porém, o fato dos alunos já terem trabalhado com uma sequência envolvendo bolinhas com este mesmo início fez com que eles recorressem à atividade anterior, e assim, as conclusões limitaram-se ao modelo já apresentado e discutido. Isso certamente prejudicou a atividade e seu objetivo principal, em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico de forma mais aberta. Apenas o aluno A, por finalizar a atividade antes dos demais alunos, foi desafiado a obter uma nova possibilidade de continuação para a sequência e, consequentemente, apresentou uma nova generalização. A seguir, é apresentada a representação para a terceira e quarta figuras do aluno A:

Figura 20: Sequência estabelecida pelo aluno A, Atividade 2
FONTE: Registros do aluno A.

Para tal sequência, o aluno argumenta:

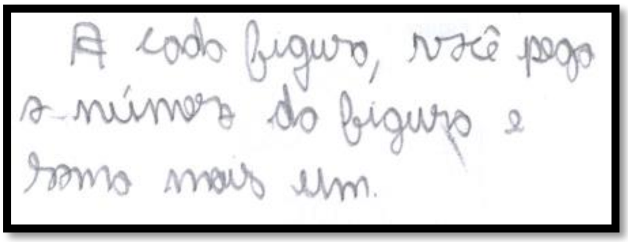

A cada figura, você pega o número da figura e soma mais um.

Figura 21: Observação realizada pelo aluno A, Atividade 2
FONTE: Registros do aluno A.

Tal argumentação parece coerente, mas ela falha quando aplicada na passagem da figura posição 1, que apresenta apenas uma única bolinha, para figura da posição 2 da sequência, que apresenta três bolinhas. Para que o raciocínio apresentado pelo aluno se tornasse correto para toda a sequência, a primeira figura deveria possuir duas bolinhas. Por meio da intervenção do pesquisador, considerando que regra criada seria adotada a partir da segunda posição, foi solicitado que ele apresentasse, verbalmente, uma expressão algébrica que sintetizasse o que foi apontado na língua natural. De forma adequada o aluno respondeu que seria $n + 1$, relacionando a quantidade de bolinhas com a posição da figura, e estabelecendo dessa forma uma conversão correta entre registros, da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Após esse diálogo, foi retomada a situação do erro para a figura da primeira posição da sequência, nesse sentido, foi acordado entre aluno e pesquisador que uma generalização adequada seria a seguinte:

Primeira figura: 1 bolinha

A partir da segunda figura: $n + 1$, sendo n o número da figura.

Por fim, como forma de compilar as informações apresentadas nas atividades 1 e 2, no que se refere a mobilização de registros, foi elaborado um quadro síntese, evidenciando as principais conversões e tratamentos empregados. A partir desse quadro, foram elaboradas as principais observações quanto aos resultados obtidos.

4.1.3 – Considerações acerca das atividades 1 e 2

As atividades apresentadas neste item demandaram reflexões por parte do pesquisador, e de forma mais específica, quanto os equívocos que promoveram implicações na qualidade da aprendizagem dos alunos com TEA e/ou na obtenção de dados da pesquisa. A primeira ponderação a ser feita refere-se ao planejamento, que não levou em conta o fenômeno da congruência. Assim, foi possível notar que várias dificuldades apresentadas pelos alunos, especialmente os alunos com TEA, se devem a esse fenômeno.

Cabe ressaltar que não se trata de privar os alunos do contato com situações em que apareça o fenômeno de não-congruência, pois Duval (2009) aponta a relevância do trabalho com as mesmas para a aprendizagem em matemática. Porém, percebe-se que em atividades iniciais, especialmente quando se tem alunos com TEA, é necessário ter um cuidado para que não se construam barreiras que posteriormente podem ser difíceis de transpor. Como destaca Duval (2009, p. 122) “a dificuldade das conversões reflete a distância cognitiva que separa as representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes”, portanto, todo cuidado com a congruência deve beneficiar o trabalho com os alunos, promovendo um dificuldade crescente ao longo das atividades e, principalmente, discutindo com os alunos o próprio fenômeno, e chamando a atenção deles com os cuidados necessários.

A multiplicidade de representações adotadas nas situações que exigiam generalizações[4] não se constituiu como outro problema do planejamento em

[4] Para verificar tal multiplicidade, consultar o quadro 11.

decorrência do oferecimento das tabelas auxiliares de transição. Essas tabelas poderiam, talvez, ser empregadas de modo mais restrito, permitindo aos alunos a adoção de um método próprio para a generalização. Mas, devido a necessidade de se promover uma organização que auxilie o pensamento do aluno com TEA (BIANCHI, 2017), o pesquisador optou por considerá-las adequadas a atividade.

Há, certamente, uma concordância quando Duval (2009, p. 130) aponta que essas tabelas devem ser "abandonadas pelos alunos logo que eles compreenderem, pois sua utilização lhes parece um procedimento lento e custoso". A crítica anterior se faz pertinente quando tomamos a motivação do aluno B frente as inúmeras representações obtidas de modo a quantificar o número de palitos para uma certa quantidade de triângulos na primeira situação para generalização.

Em relação aos registros discursivos, todos os alunos se apropriaram da língua natural de modo a exprimir suas conclusões. Como se pode ver durante a análise, Duval destaca o papel da língua natural, especificamente ao fato dela ser multifuncional. Cabe ainda destacar que

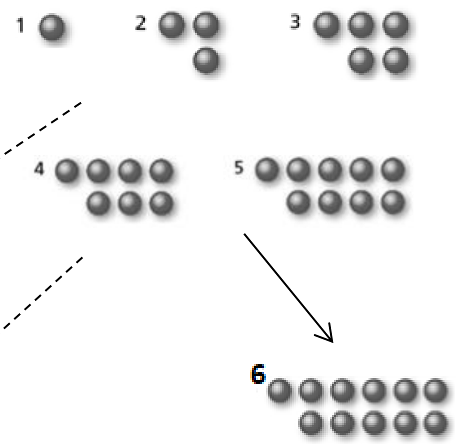
> Mesmo aceitando que a língua natural seja um registro, deve-se precisar de maneira explicita que [...] se trata de um registro muito mais complexo do que os outros normalmente considerados e citados. Em primeiro lugar, esse registro permite funcionamentos discursivos (e, portanto, tratamentos) muito heterogêneos. Existe um funcionamento espontâneo que é o das conversões, narrativo, das discussões, das argumentações e existe um funcionamento especializado que se encontra, por exemplo, no raciocínio matemático dedutivo e que é complemente diferente. (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015, p. 145)

De fato, tais argumentações permitem compreender que, diante de um trabalho recém-iniciado, se faz comum à promoção de conclusões com a utilização da língua natural que, por sua vez, é uma forma de expressar mais confortável, visto que eles ainda estavam aperfeiçoando a sua linguagem algébrica. Portanto, a linguagem natural será empregada para a descrição de objetos, assim como expressar as generalizações, como se viu nas análises. Espera-se, entretanto, que a apropriação da linguagem algébrica se concretize no andamento das atividades posteriores.

Ainda sobre a exposição do papel da língua natural, Duval (2009, p. 106) ainda destaca que "ela se traduz em todos os indivíduos, por uma espontaneidade discursiva que serve de ponto de ancoragem a toda aprendizagem ligada a um ensino", reforçando o esclarecimento do uso recorrente por parte dos alunos.

Conforme já foi exposto, de modo a discutir de forma mais específica as mobilizações de registros nessas primeiras atividades, alguns resultados foram sintetizados no Quadro 13, a seguir, no qual as conversões estão sendo retratadas por setas segmentadas e os tratamentos estão sendo representados por setas contínuas.

Quadro 13: Exemplos de mobilizações realizadas pelos alunos nos diferentes registros das atividades 1 e 2

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Registros DISCURSIVOS</th><th>Registros NÃO DISCURSIVOS</th></tr>
<tr><td>Registros MULTIFUNCIONAIS:
Os tratamentos não são algoritmizáveis</td><td>“Pense num número de um a dez. Multiplique por três e some cinco. Divida por dois e some mais quatro”</td><td>“Logo que chequei no 10 percebi que o número está na figura era para ser multiplicado por 2 e logo depois tinha que tirar 1” (Aluna C)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Representações auxiliares da transição</td><td></td><td><table><tr><th>Figura</th><th>Número de Bolinhas</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>6</td><td>11</td></tr><tr><td>10</td><td>19</td></tr><tr><td>20</td><td>39</td></tr><tr><td>100</td><td>199</td></tr><tr><td>n</td><td>F.2 - 1</td></tr></table>F = da Figura</td><td></td></tr>
</table>

Registros MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	$\frac{3x+5}{2}+4$ $\downarrow$ $\frac{3\cdot 5+5}{2}+4$ $=14$	$b = 2 \cdot n - 1$	**Não houve mobilização de gráficos cartesianos no âmbito dessa proposta.**

FONTE: o autor, com base nos resultados dos alunos participantes da pesquisa e inspirado nos trabalhos de Duval (2011).

4.2 – ATIVIDADE 3: COMPREENDENDO OS PRODUTOS NOTÁVEIS

Nesta fase da pesquisa de campo, cabe destacar a utilização do software GeoGebra[5], que permite uma exploração geométrica de áreas que representam expressões algébricas.

Inicialmente, tal software auxiliou na superação do desafio enfrentado pelo professor-pesquisador com a falta de interesse dos alunos com TEA ao terem contato com o material manipulativo Algeplan[6], apresentado no intuito de debater os conceitos de expressões algébricas e, de forma mais especifica os polinômios, tratados em uma atividade que visava construir o conceito de expressão algébrica. Tal postura foi alterada com o emprego da tecnologia, visto que todas as atividades propostas foram desenvolvidas com afinco pelos alunos, incluindo suas participações em momentos de socialização.

A atividade 3 foi planejada de modo a ser aplicada em quatro etapas, cujo objetivo principal era verificar o conhecimento de alguns produtos notáveis. Essas

[5] O GeoGebra é um software livre, que associa elementos ligados aos conceitos de geometria, álgebra e cálculo, permitindo a construção de diversos conceitos e objetos matemáticos em sua interface gráfica. Cabe frisar suas potencialidades, visto que contribui para o ensino e aprendizagem devido à dinâmica de sua funcionalidade.

[6] Material manipulativo constituindo de retângulos, cuja interpretação de suas áreas permite compreender conceitos ligados às operações com polinômios.

etapas foram organizadas propositalmente, possibilitando que o aluno viesse a promover conversões de diferentes registros de representação.

A utilização de elementos geométricos, relacionados ao conceito de área, também se configurou como um recurso importante, tendo em vista as potencialidades desse registro de representação semiótica para a construção de conceitos algébricos. A intencionalidade de tal escolha ainda visava atender os alunos com TEA, numa abordagem mais concreta e no favorecimento do pensamento visual. Das contribuições, destaca-se:

> Dentre os ramos da matemática, a geometria é a que mais contribui para o estreitamento de laços entre o que aprende [...]. Ensinar geometria implica no desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, que busca permitir uma maneira de compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que se vive. (CARVALHO, 2017, p. 7)

Procurando apresentar as relações estabelecidas entre a geometria e os conceitos algébricos, foi elaborado o Quadro 14, a seguir, que apresenta algumas descrições sobre os objetivos dessa proposta no que tange aos aspectos que pretendem ser analisados. Aponta também, a relação da atividade com os preceitos da TRRS.

Quadro 14: Especificidades da Atividade 3

ATIVIDADE 3		
ITENS	**PARTE DA ATIVIDADE**	**OBSERVAÇÕES**
3A	Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir: a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.	Nessa atividade apresenta-se uma proposta de conversão, em que o aluno deve reconhecer a língua natural e reescrever na linguagem algébrica.
3B	Desenvolva algebricamente, cada um dos produtos notáveis a seguir: a) $(a – b)^2 =$	Uma atividade que visa avaliar um tratamento, no reconhecimento de identidades de produtos notáveis. O principal ponto de observação trata-se da não linearidade dos produtos, visto que o mesmo resulta em um trinômio.
3C	Monte um quadrado com as seguintes peças: • Um quadrado de lado x; • Dois retângulos de lado x e y; • Um quadrado de lado y.	Todas essas atividades foram desenvolvidas no GeoGebra, com intuito de propiciar conversões simultâneas do registro semiótico na língua natural para o registro

<table>
<tr><th colspan="3">ATIVIDADE 3</th></tr>
<tr><th>ITENS</th><th>PARTE DA ATIVIDADE</th><th>OBSERVAÇÕES</th></tr>
<tr><td></td><td>a) Qual a medida do lado do quadrado formado?
b) Qual a área do quadrado formado?</td><td rowspan="3">algébrico, porém com apoio da geometria. De forma mais especifica, as identidades obtidas na parte B passaram a ser interpretadas como área de retângulos.
A proposta era contribuir para que os alunos que não reconheceram a não linearidade dos produtos notáveis, compreendessem, com o apoio visual, que o resultado obtido seriam os seguintes trinômios:
a) $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
c) $(a + b) (a – b) = a^2 – b^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3D</td><td>3D-1) Monte um quadrado com as seguintes peças:
• Um quadrado de área x^2;
• Dois retângulos de área – xy;
• Um quadrado de área y^2.
a) Qual a medida do lado do quadrado formado?
b) Qual a área do quadrado formado?</td></tr>
<tr><td>3D-2) a) Quais peças você deve utilizar para montar um retângulo com lados x + y e x – y?
b) Qual a área do retângulo construído?</td></tr>
</table>

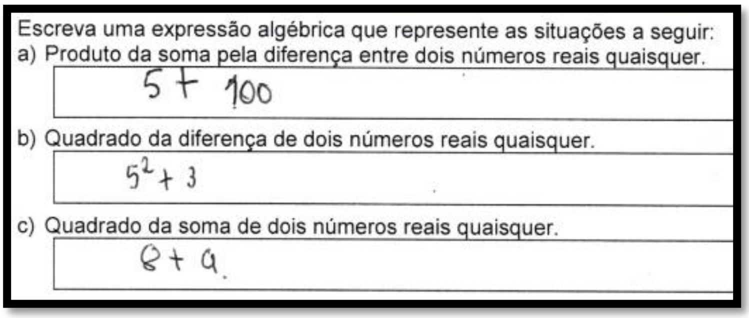
FONTE: o autor.

4.2.1 – Atividade 3 – Parte A

Tomando esses aspectos para interpretação dos dados, iniciaremos observando o resultado da atividade 3A. Os quatro alunos com TEA não apresentaram sucesso, elaborando respostas incompatíveis, assim como a maioria dos demais colegas da classe.

Retomando o que foi apresentado na Atividade 1, esperava-se que os alunos promovessem uma conversão entre a língua natural e a linguagem algébrica. Sobre essa questão, como destacado anteriormente, em uma tentativa de argumentar sobre as dificuldades dos alunos, pode-se destacar que “existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da matemática ou da lógica” (DUVAL, 2015, p. 125). Tal argumento nos sugere a necessidade de um cuidado especial com atividades que levam em conta a conversão que parte da língua natural. Apesar dos alunos já terem realizado atividades de conversão entre a língua natural e a representação algébrica, e acreditar-se que já seria possível uma conversão mais acertiva, o fenômeno de não-congruência continuou a constituir-se como obstáculo para eles.

Sobre os erros cometidos pelos alunos com TEA, destacam-se duas das respostas apresentadas:


Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir:
a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

$5 + 100$

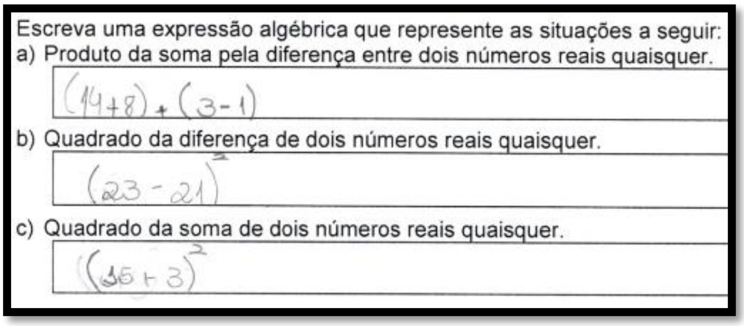
b) Quadrado da diferença de dois números reais quaisquer.

$5^2 + 3$

c) Quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

$8 + 9$.

Figura 22: Respostas apresentadas pelo aluno B, atividade 3A.
FONTE: Registros do aluno B.


Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir:
a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

$(14+8) \cdot (3-1)$

b) Quadrado da diferença de dois números reais quaisquer.

$(23-21)^2$

c) Quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

$(15+3)^2$

Figura 23: Respostas apresentadas pela aluna C, atividade 3A.
FONTE: Registros da aluna C.

Observa-se que ambos não adotam variáveis para representar o que é solicitado, empregando números reais de sua escolha. Entretanto, a aluna C apresenta respostas coerentes ao que era esperado.

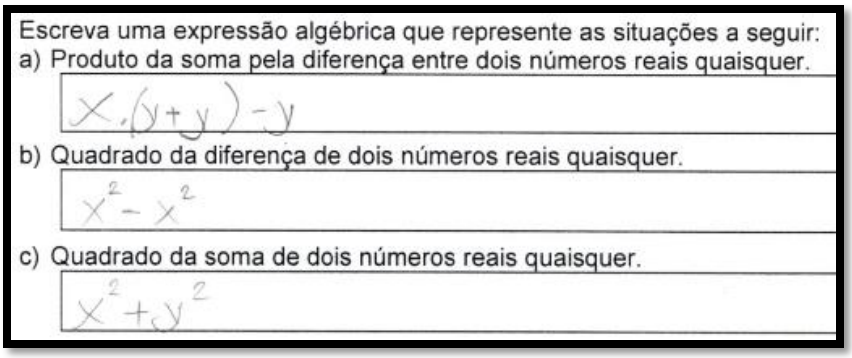
Quadro 15: Análise das respostas da aluna C, Atividade 3A

RESPOSTA ESPERADA	RESPOSTA APRESENTADA
a) $(x + y) \cdot (x - y)$	a) $(14 + 8) \cdot (3 - 1)$
a) $(x - y)^2$	b) $(23 - 21)^2$
b) $(x + y)^2$	c) $(15 + 3)^2$

FONTE: o autor, com base nos resultados da aluna C.

Pode-se perceber uma semelhança na estrutura, o que permite concluir que o problema, para essa aluna, deu-se apenas pela falta de compreensão do enunciado, em que é solicitada a escrita de uma expressão algébrica, ou por falta de compreensão do conceito de variáveis em expressões algébricas.

Para o aluno B, a expressão “dois números reais quaisquer”, parece indicar que qualquer escolha possa ser feita e, diante a intervenção do professor, o mesmo alega ter dificuldades no que está sendo solicitado. Vejamos os resultados apresentados pelos outros dois alunos:


Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir:
a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

$X.(y+y)-y$

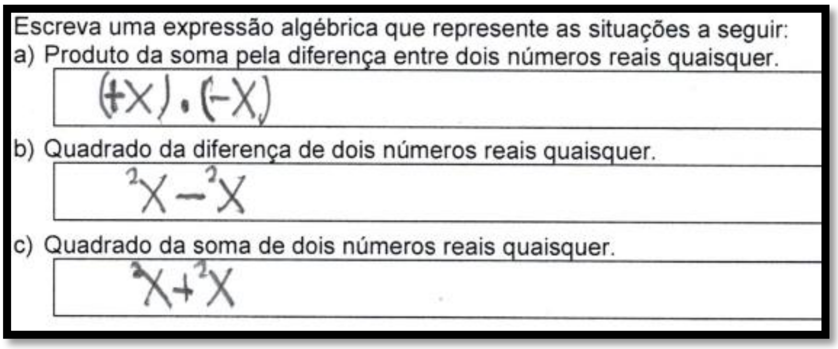
b) Quadrado da diferença de dois números reais quaisquer.

x^2-x^2

c) Quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

x^2+y^2

Figura 24: Respostas apresentadas pela aluna D, atividade 3A.
FONTE: Registros da aluna D.


Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir:
a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

$(+X).(-X)$

b) Quadrado da diferença de dois números reais quaisquer.

${}^2X-{}^2X$

c) Quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

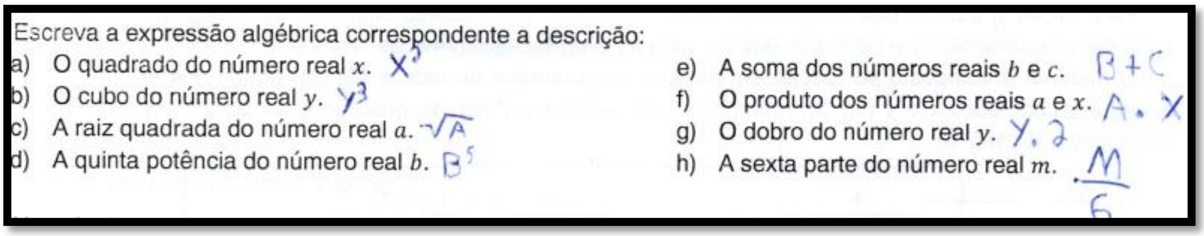
${}^2X+{}^2X$

Figura 25: Respostas apresentadas pelo aluno A, atividade 3A.
FONTE: Registros do aluno A.

Os alunos A e D, diferentemente dos dois primeiros, empregam variáveis para representar números reais quaisquer, mas ambos cometem equívocos na interpretação do sentido de cada signo empregado na língua natural.

O possível erro na conversão se deve ao fenômeno de não-congruência, pois dentre os critérios de congruência, fora infringido aquele que impõe uma “ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações” (DUVAL, 2009, p.69). Dessa forma, na frase “o quadrado da soma de dois números”, como o termo quadrado aparece primeiro, acreditando na congruência, o aluno A apresenta a expressão ${}^2x$, que denota dois equívocos, a eliminação do termo soma e a escrita na ordem em que a palavra quadrado aparece na língua natural.

Tal argumento se baseia no fato do aluno A apresentar resultados coerentes em outra atividade de conversão semelhante, porém, respeitando o fenômeno de congruência.



Escreva a expressão algébrica correspondente a descrição:

a) O quadrado do número real x. X^2
b) O cubo do número real y. Y^3
c) A raiz quadrada do número real a. $\sqrt{A}$
d) A quinta potência do número real b. B^5
e) A soma dos números reais b e c. $B+C$
f) O produto dos números reais a e x. $A \cdot X$
g) O dobro do número real y. $Y \cdot 2$
h) A sexta parte do número real m. $\frac{M}{6}$

Figura 26: Respostas apresentadas pelo aluno A em atividades de conversão que respeita o fenômeno de congruência das representações

FONTE: Registros do aluno A.

Reconhecida a facilidade desses alunos em atividades que respeitam o fenômeno de congruência, destaca-se que ambos empregaram corretamente os sinais das operações, revelando que os mesmos compreendem os conceitos de soma, diferença e produto[7]. Assim, a presença do fenômeno de não-congruência na conversão, sugere o erro apresentado pela aluna D no item (a), em que era esperada a escrita algébrica para o produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

	Produto	Soma	Diferença
Resposta da aluna D	$x \cdot$	$(y + y)$	$-\ y$

Repare que a resposta acompanha a ordem em que são apresentados os conceitos de produto, soma e diferença no enunciado da questão. Reconhecida a dificuldade dos alunos nessa proposta, foi sugerida uma nova atividade, a qual tratava da escrita de uma expressão algébrica que representasse a seguinte colocação: "escreva a expressão algébrica que represente a soma de dois números reais quaisquer e, depois, eleve essa soma ao quadrado". Feita essa nova intervenção, três dos alunos analisados apresentaram uma resposta correta, exatamente a que era esperada para o item (c) da atividade 3A, evidenciando a importância de se discutir a congruência das representações, em especial, com os alunos com TEA, e de propor alternativas para que eles possam realizar as atividades propostas de outra forma. Esse tipo de intervenção, certamente, pode contribuir com a aprendizagem de todos os alunos da turma quando o professor estiver desenvolvendo atividades dessa

[7] Mesmo sendo uma atividade aplicada anteriormente a todas as atividades aqui analisadas, a aluna C demonstra dificuldades nos conceitos de diferença e produto quando foi analisada a primeira atividade, no quadro 10. Porém quando foi aplicada a atividade apresentada na figura 25, a mesma havia se ausentado da aula, o que certamente influenciou suas considerações, visto a não apropriação de tais conceitos.

natureza. O erro apresentado pela aluna D está atrelado à importância da utilização dos parênteses, que o levou a apresentar a expressão $x + y^2$, ao invés de $(x + y)^2$.

4.2.2 – Atividade 3 – Parte B

A proposta contida na parte B da atividade 3 sugere um tratamento envolvendo o desenvolvimento de produtos notáveis. Cabe salientar que havia sido trabalhado anteriormente o conceito de multiplicação de expressões algébricas, em particular o produto de dois binômios.

Com base nesse trabalho de multiplicação de expressões algébricas explicitado anteriormente, dois dos alunos recorreraam aos seus rascunhos para efetuar os cálculos dos produtos e chegaram a apresentar um resultado próximo do que era esperado, conforme se pode observar nas Figuras 26 e 27.

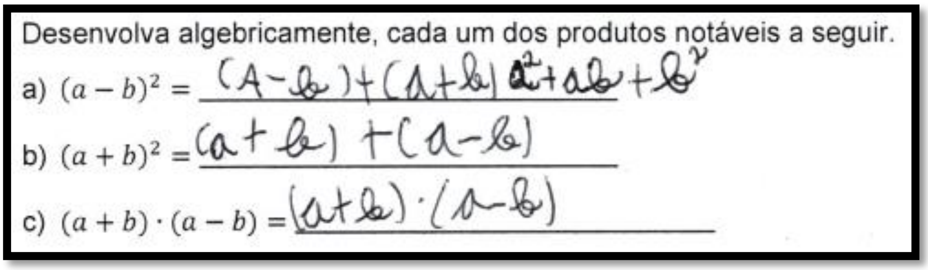


Figura 27: Respostas apresentadas pelo aluno B, atividade 3B.
FONTE: Registros do aluno B.

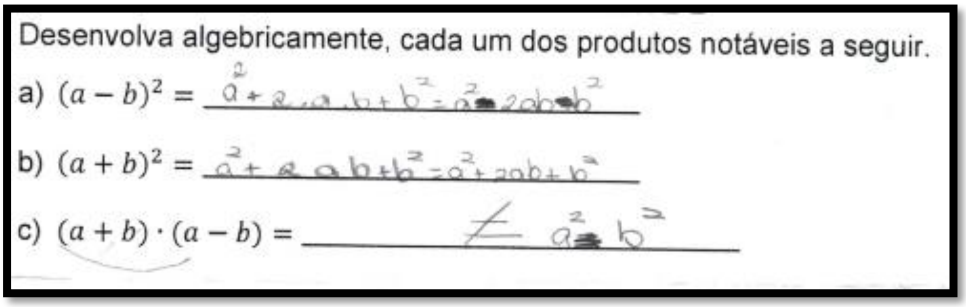
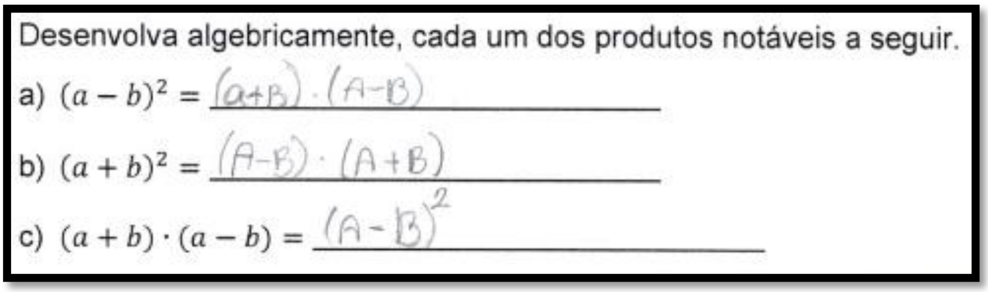


Figura 28: Respostas apresentadas pela aluna C, atividade 3B.
FONTE: Registros da aluna C.

O aluno A chega a apresentar um trinômio como resposta ao item (a), entretanto, se confunde nos sinais apresentados. Logo após, apresentou desinteresse em promover uma solução semelhante nos demais itens. O mesmo acontece com a aluna C, que, confusa com o sinal, acaba rasurando seus registros. Essa aluna registra os resultados esperados e para obtê-los empregou a propriedade distributiva em rascunhos das páginas finais do caderno.

A aluna D parece não diferenciar quando o produto notável envolve apenas soma, apenas subtração ou ambos, apresentando soluções incompatíveis. Tal resultado desperta, no professor, a necessidade de uma retomada teórica do assunto de multiplicação de expressões algébricas. A Figura 28 apresenta as respostas desta aluna.



Desenvolva algebricamente, cada um dos produtos notáveis a seguir.

a) $(a-b)^2 =$ (a+B) · (A-B)

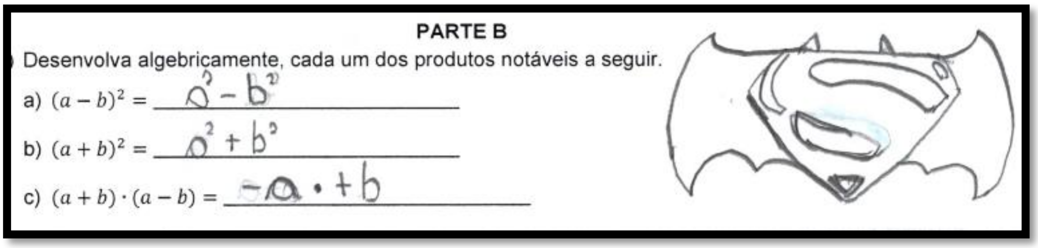
b) $(a+b)^2 =$ (A-B) · (A+B)

c) $(a+b)\cdot(a-b) =$ $(A-B)^2$

Figura 29: Respostas apresentadas pela aluna D, atividade 3B.

FONTE: Registros da aluna D.

O caso mais interessante, e de certa forma esperado, é a solução do aluno A, visto que ele não faz o reconhecimento da não linearidade dos produtos notáveis, apresentando as seguintes respostas:



PARTE B

Desenvolva algebricamente, cada um dos produtos notáveis a seguir.

a) $(a-b)^2 =$ $a^2 - b^2$

b) $(a+b)^2 =$ $a^2 + b^2$

c) $(a+b)\cdot(a-b) =$ $-a \cdot +b$

Figura 30: Respostas apresentadas pelo aluno A, Atividade 3B.
FONTE: Registros do aluno A.

Como forma de ilustrar o interesse do aluno A em realizar desenhos com a temática *Super Heróis*, o recorte da atividade foi realizado apresentando a ilustração feita por ele. É possível notar o seu apelo por representações pictóricas também nos registros desse aluno, o que certamente deve ser observado pelo professor.

4.2.3 – Atividade 3 – Parte C e D

As últimas duas partes da atividade 3, como adiantado anteriormente, recorrem ao emprego do GeoGebra, como forma de explorar uma nova interpretação para os produtos notáveis. Duval (2011) destaca “a utilização do computador para tudo que concerne à visualização matemática, tanto em geometria como em análise: os softwares abrem possibilidades consideráveis de criação e exploração” (p. 8).

Em um primeiro momento, foi solicitada a construção de um quadrado com algumas peças do Algeplan. Foi possível, mediante o acompanhamento da linha de raciocínio utilizada pelos alunos, perceber que todos os alunos conseguiram desenvolver a atividade com certa facilidade. A linha de raciocínio dos alunos foi captada pela ferramenta do Windows denominada Gravador de Passos, que obtém capturas da tela a cada movimento realizado. Foi por meio desses registros que conseguimos capturar o pequeno deslize do aluno B, que inicialmente estava a fazer a seguinte representação:

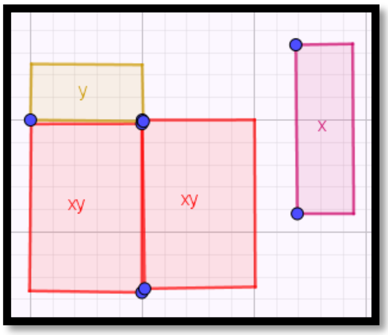


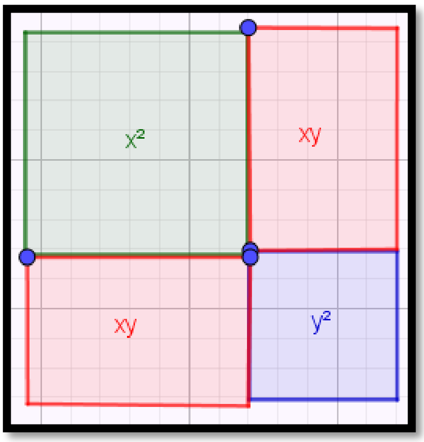
Figura 31: Respostas apresentadas pelo aluno B, atividade 3C.
FONTE: Captura de tela da atividade do aluno B.

Para que se possa compreender e analisar o erro cometido nas escolhas desse aluno, cabe ressaltar o que a atividade solicitava:

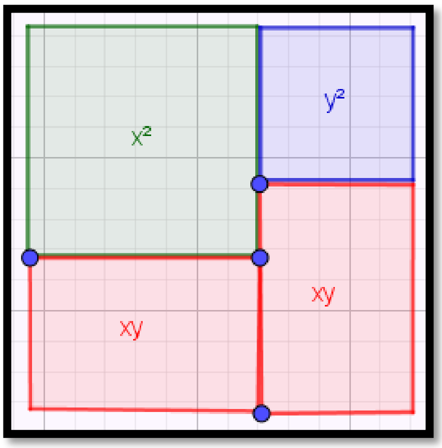
- tomar um quadrado de lado x, entretanto, como o Algeplan virtual indica apenas a área da figura, o aluno deveria selecionar o quadrado de área x^2;
- tomar dois retângulos de lados x e y, os quais seriam representados por dois retângulos de área xy;
- Tomar um quadrado de lado y, o que implicava na seleção do quadrado de área y^2.

Como se pode notar, o aluno B selecionou um retângulo de área x e outro de área y, ao invés do quadrado de área x^2 e do de área y^2, certamente pelo não reconhecimento do que era indicado no Algeplan, ou seja, a área da figura. O mesmo aluno, posteriormente, conseguiu perceber seu erro sem intervenção do professor, visto que não conseguiu obter um quadrado com as peças por ele selecionadas.

Destaca-se, na Figura 31, como foi apresentada a resposta final dos quatros alunos, inclusive após a correção do aluno B:



Resposta final apresentada pelos alunos A, B e C

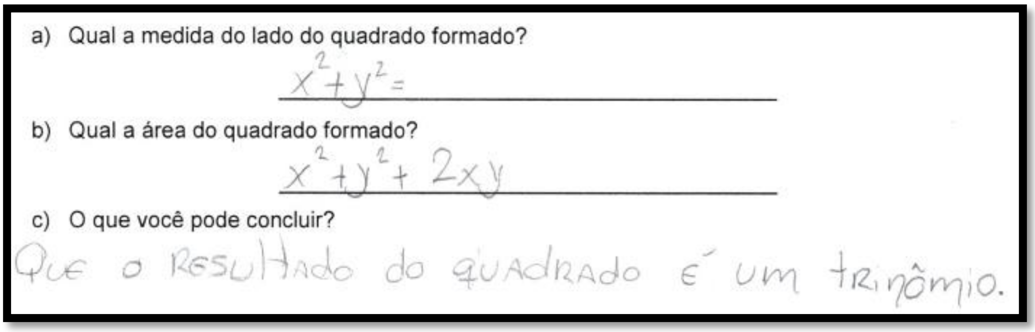


Resposta final apresentada pela aluna D

Figura 32: Respostas apresentadas pelos alunos, atividade 3C.

FONTE: Capturas de tela das atividades dos alunos participantes da pesquisa.

A análise dos quadrados obtidos, por parte dos alunos, permitiu que eles respondessem as questões posteriores. Estas tinham o intuito de verificar se os alunos conseguiam identificar a medida do lado desse quadrado e sua área total. Dois alunos apresentaram a resposta correta, os outros dois, cometeram os erros como os que podem ser visualizados na Figura 32 a seguir.



a) Qual a medida do lado do quadrado formado?

$x^2+y^2=$

b) Qual a área do quadrado formado?

x^2+y^2+2xy

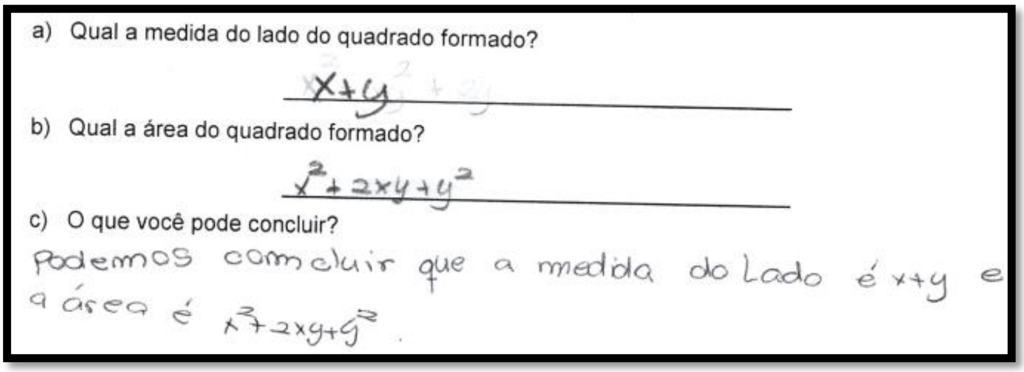
c) O que você pode concluir?

Que o Resultado do quadrado é um trinômio.

Figura 33: Respostas da aluna D, atividade 3C.
FONTE: Registros da aluna D.

A aluna D apresentou a medida do lado do quadrado como $x^2 + y^2$, erro que pode estar associado à forma que ela construiu o seu quadrado [*ver figura 31*] em que os lados dos quadrados de área x^2 e y^2 formam um lado do quadrado maior.

Mesmo se equivocando na medida do lado do quadrado, a aluna D, e seus colegas A e C, acertaram ao expressar a área total desse quadrado, escrevendo a soma das áreas de todas as partes que constituem o quadrado de lado $x + y$, como se pode observar nas Figuras 33 e 34



a) Qual a medida do lado do quadrado formado?

$x+y$

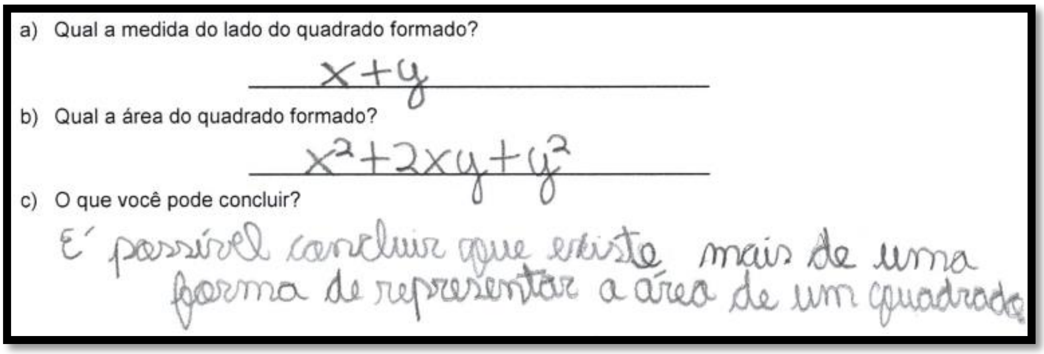
b) Qual a área do quadrado formado?

$x^2+2xy+y^2$

c) O que você pode concluir?

Podemos concluir que a medida do Lado é $x+y$ e a área é $x^2+2xy+y^2$.

Figura 34: Respostas da aluna C, atividade 3C.
FONTE: Registros da aluna C.



a) Qual a medida do lado do quadrado formado?

$x+y$

b) Qual a área do quadrado formado?

$x^2+2xy+y^2$

c) O que você pode concluir?

É possível concluir que existe mais de uma forma de representar a área de um quadrado

Figura 35: Respostas do aluno A, atividade 3C.
FONTE: Registros do aluno A.

Partiremos para a análise da questão lançada após todos os apontamentos feitos em relação ao quadrado de lado $x+y$. Ela faz um questionamento ao aluno sobre o que ele pode concluir da atividade, em especial se levado em consideração os produtos notáveis apresentados nas partes A e B da atividade 3.

O aluno A responde que "existe mais de uma forma de representar a área de um quadrado", devido a essa resposta, ele foi convidado a socializar seus resultados. Ao expor suas considerações, o aluno relata que como o quadrado tem lado $x + y$, sua área pode ser representada por $(x + y)^2$, mas ao fazer a atividade, encontra-se o trinômio $x^2 + 2xy + y^2$, que também representa a área desse quadrado. O professor intervém, pedindo para que o aluno escrevesse no quadro sua conclusão de forma algébrica, ao que ele apresenta:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

É importante resgatar que o mesmo aluno (A), na parte B, apresenta seu desenvolvimento de $(a+b)^2$ como sendo a^2+b^2, porém, ao promover suas considerações a respeito dos seus resultados na parte C, reconhece que o correto seria o emprego do trinômio. Dessa análise, pode-se concluir que o aluno A conseguiu transitar entre as representações, corrigindo seu erro inicial com o auxilio da interpretação da área do quadrado de lado $x + y$.

Esse movimento de transitar entre as representações fica mais evidente para todos os alunos quando submetidos à atividade contida na parte D. Algo semelhante acontece quando a análise passa a ser para o quadrado da diferença. Neste caso, os quatro alunos começam apresentando o seguinte quadrado[8]:

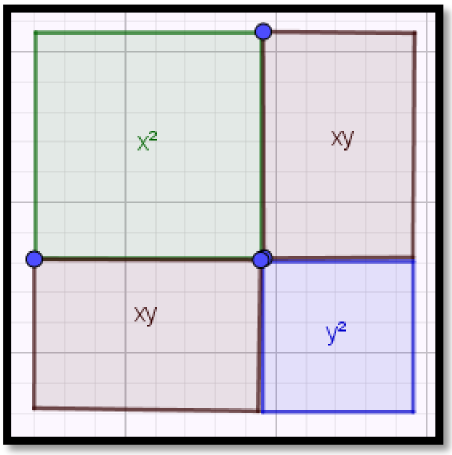


Figura 36: Quadrado solicitado na Atividade 3D - 1.
FONTE: Captura de tela do aluno A.

Neste ponto, três alunos conseguem identificar corretamente a medida do lado desse quadrado, assim como sua área total.

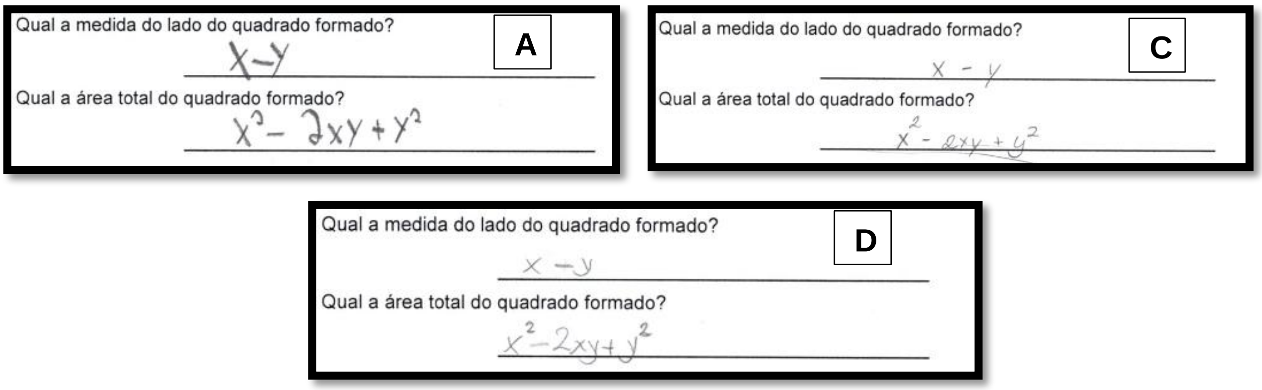


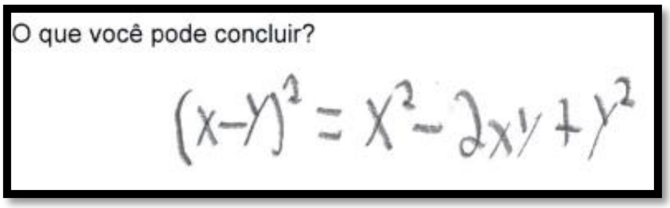
Figura 37: Respostas dos alunos A, C e D, atividade 3D - 1.

FONTE: o autor

Os três alunos conseguiram identificar que o quadrado possui lados de medida $x - y$ e área $x^2 - 2xy + y^2$. Um resultado positivo se comparado com a atividade

[8] Foi definido com os alunos que os retângulos representados pela cor preta representariam valores negativos. A título de simplificação, neste exemplo, fica definido que o retângulo preto de área – xy passa a significar que seus lados possuem medidas x e – y. **Apesar dessa inconsistência no âmbito da matemática, tal adaptação se fez necessária para uma melhor contextualização aos alunos com TEA.**

proposta na parte C. Entretanto, a validade dessa proposta vai se confirmar com as argumentações após o questionamento sobre o que se pode concluir ao relacionar a área obtida com os produtos notáveis apresentados anteriormente. A partir dessas argumentações é possível perceber que os mesmos estão conseguindo transitar entre os meios de representação e, podemos ainda afirmar, que o trabalho com um registro pode ter desencadeado a compreensão de outro que até então não havia se consolidado.

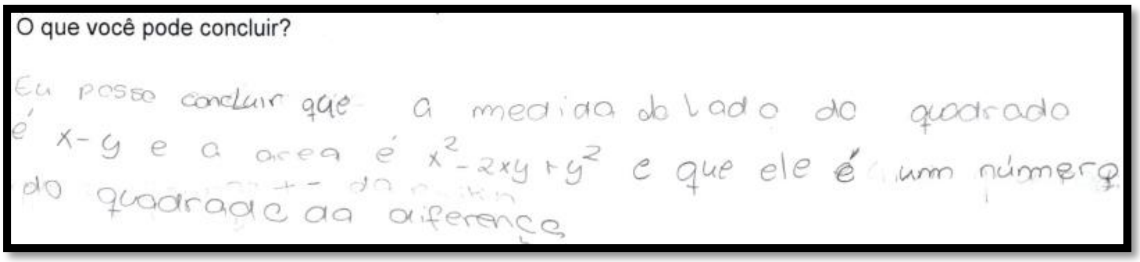

O que você pode concluir?

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Figura 38: Resposta do aluno A, atividade 3D - 1.

FONTE: Registros do aluno A.

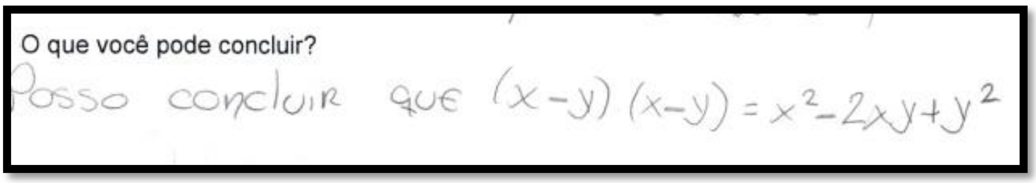
A aluna C apresenta sua conclusão de forma estritamente algébrica, conseguindo novamente reconhecer que $(x - y)^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são duas formas diferentes de representar a área de um quadrado de lado $x - y$, por isso, estabelece a igualdade entre elas. Essa identidade notável não foi verificada por ele na parte B da atividade 3.


O que você pode concluir?

Eu posso concluir que a medida do lado do quadrado é $x - y$ e a area é $x^2 - 2xy + y^2$ e que ele é um número do quadrado da diferença

Figura 39: Resposta da aluna C, atividade 3D - 1.

FONTE: Registros da aluna C.


O que você pode concluir?

Posso concluir que $(x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$

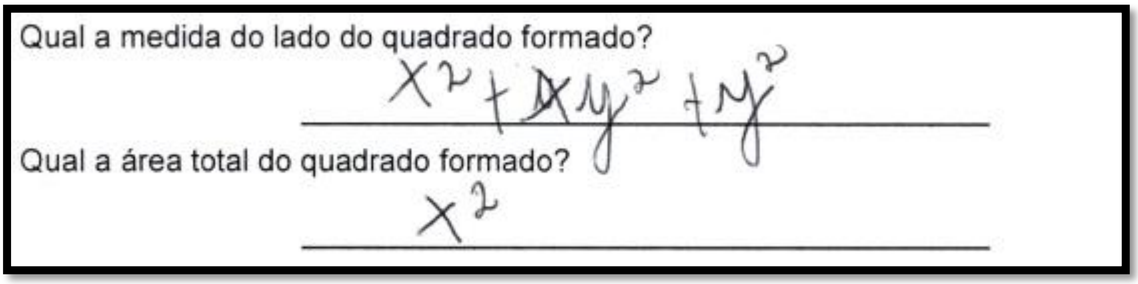
Figura 40: Resposta da aluna D, atividade 3D - 1.

FONTE: Registros da aluna D.

Na Figura 39 pode-se observar que a aluna C apresenta uma síntese de suas produções, fazendo referência a $x^2 - 2xy + y^2$ como resultado do quadrado da diferença.

A aluna D, que não conseguiu apresentar um resultado coerente na parte B da atividade 3, realizou a atividade com êxito na parte D. Reconheceu que $(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$, que por sua vez, é igual ao trinômio $x^2 - 2xy + y^2$.

O aluno B não atingiu os mesmos resultados que seus demais colegas. Ele não soube reconhecer a medida do lado do quadrado, mas explicitou a área total da figura, porém com um erro de representação da soma dos dois retângulos *x.y*. e na questão errada, o que demonstra bastante dificuldade por parte dele em manter a atenção. Entretanto, percebe-se uma lógica na sua resolução, conforme a Figura 40.


Qual a medida do lado do quadrado formado?

$x^2 + 2xy^2 + y^2$

Qual a área total do quadrado formado?

x^2

Figura 41: Resposta do aluno B, atividade 3D - 1.

FONTE: Registros do aluno B.

Finalizados os comentários a respeito do quadrado da diferença, apresenta-se uma síntese dos resultados obtidos com a análise do produto da soma pela diferença. Diferentemente das questões anteriores, é solicitado aos alunos a construção de uma figura geométrica cujos lados tivessem as medidas $x + y$ e $x - y$.

O aluno B novamente começa apresentando a seguinte imagem como solução do problema:

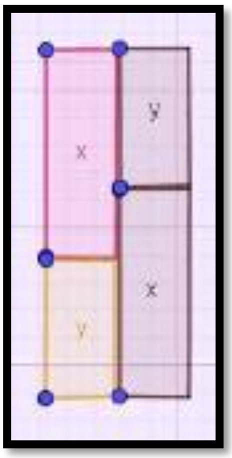


Figura 42: Resposta do aluno B, atividade 3D - 2.

FONTE: Captura de tela do aluno B.

Tal ação do aluno B alertou o professor para a necessidade de uma retomada no cálculo das áreas das figuras apresentadas. Depois de tal intervenção, o aluno B acompanhou os demais colegas ao apresentar como resposta final:

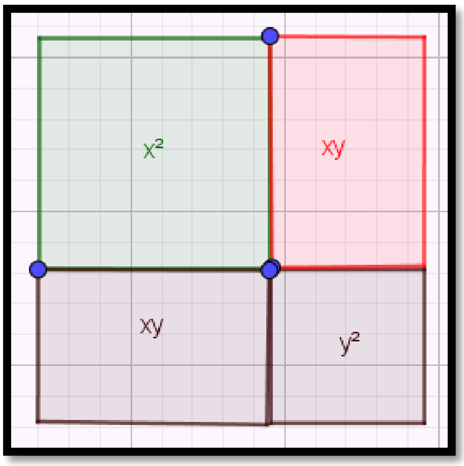


Figura 43: Resposta dos alunos, atividade 3D - 2.

FONTE: Capturas de tela do aluno B.

A partir da produção da imagem, os alunos tiveram facilidade em apontar as áreas de cada figura, relacionando com as peças que foram utilizadas, assim como informar a área total, ou seja, $x^2 - y^2$, considerando que os retângulos, por terem áreas com sinais opostos, se cancelariam. Sobre tal proposta, cabe fazer duas observações a respeito das soluções apresentadas. A primeira sobre o aluno A, que recorre a uma ilustração de modo que pudesse visualizar as peças que deveriam ser utilizadas para a construção do retângulo.

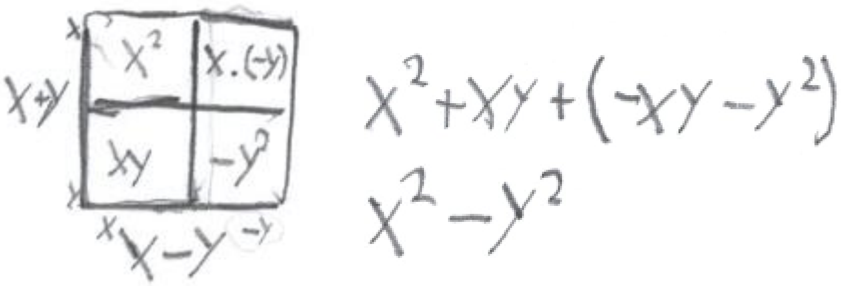


Figura 44: Resposta do aluno A, atividade 3D - 2.

FONTE: Registros do aluno A.

Na Figura 43 pode-se observar que esse aluno, após a identificação das áreas, efetua a soma entre as áreas de cada peça para obter a área total da figura. A aluna

D, por sua vez, faz a socialização com a turma, mesmo tímida, explica que na figura duas peças possuem sinais opostos, logo a soma entre elas resulta em zero, sobrando às áreas x^2 e $-y^2$. A explicação do vínculo de tal área com o produto da soma pela diferença fica a cargo do aluno C.

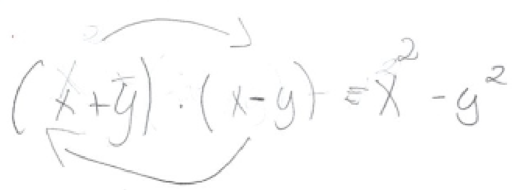


Figura 45: Resposta da aluna C, atividade 3D - 2.

FONTE: Registros da aluna C.

Como se pode observar na Figura 44, o aluno sugere o emprego da propriedade distributiva. Mesmo não apresentado a distribuição de flechas de modo correto, em sua explicação, esse aluno retoma o que foi apresentado pela aluna D, justificando o fato dos termos xy e $-xy$ terem desaparecido.

Após todas essas considerações, fica evidente que o trânsito entre diferentes registros de representação contribuiu para que os alunos com TEA pudessem compreender o conceito de produtos notáveis, evitando que seu aprendizado se limitasse a métodos de repetição para simples memorização.

O trabalho também oportunizou que esses alunos assumissem um papel de protagonistas na aula, socializando os principais resultados com os demais colegas, valorizando e contribuindo para o desenvolvimento das habilidades associadas à comunicação dos mesmos.

4.2.4 – Considerações acerca da atividade 3

Não diferente do que aconteceu nas primeiras atividades, neste momento de reflexões acerca da abordagem, revelou-se a falta de uma total clareza em relação ao fenômeno de congruência quando do planejamento desta atividade, o que por sua vez, propiciou o desencadeamento de uma série de dificuldades por parte dos alunos.

Reflexões, feitas a posteriori, mostram que esses entraves poderiam ser solucionados com pequenas adaptações, como foi feito para o quadrado da soma, que conduziu os alunos a conclusões corretas. Em especial, esse cuidado deve ser tomado tanto em relação aos alunos com TEA, quanto aos demais, visto que o equívoco foi cometido por quase todos os alunos regulares.

Quanto à abordagem, o interessante é perceber os benefícios da representação geométrica no encadeamento de conclusões sobre o fato de que $(x + y)^2$ trata-se de um trinômio. Considerando os alunos com TEA e todos os seus colegas, vários apresentam o binômio $x^2 + y^2$ como a expressão resultante do quadrado da soma. O erro é comum quando há o trabalho desse tópico da álgebra, como apontam D'Amore, Pinilla e Iori (2015) ao afirmar que diversos professores afirmam que seus alunos se limitam a apresentar o binômio, esquecendo-se do termo $2ab$.

Ofertar, portanto, uma terceira representação, baseada numa linguagem diferente, especialmente a visual, permite que os alunos com TEA, assim como seus colegas possam chegar no trinômio sem dificuldades. Tal percepção é reafirmada ao observar o desempenho dos mesmos no decorrer da atividade 3. Ao promover o uso de uma representação geométrica em concomitância com a representação algébrica evidencia-se a presença e a necessidade de se destacar o termo $2ab$ na expressão resultante. Porém, convém destacar que "uma vez construído cognitivamente tal objeto, é evidente que fazer os desenhos é demorado e a expressão algébrica se torna a mais rápida e econômica" (D'AMORE, PINILLA e IORI, 2015, p. 130), o que garante, portanto, a importância da apropriação da linguagem algébrica.

O emprego do software GeoGebra, que a priori fora inserido de modo a reduzir o desinteresse no Algeplan, se consolidou como ferramenta para expressar resultados e verificar propriedades. O mesmo foi adotado devido às contribuições que a tecnologia implica na aprendizagem de alunos com TEA (TENÓRIO, VASCONCELOS, 2014), mas trouxeram relações específicas com as representações e o ensino de matemática, como aponta Allevato (2007)

> As pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores conduz os estudantes a modos de pensar e construir conhecimentos típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Destacam-se aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção de conhecimentos como redes de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros (ALLEVATO, 2007, p. 76)

Cabe observar que o empreendimento de tal ferramenta também reflete em benefícios para a comunicação dos alunos. De fato, alguns dos alunos se apoiaram nas figuras em momentos de externar questionamentos e/ou na socialização de suas produções. Neste sentido, inserir a tecnologia como ponto de partida para discussão de conceitos matemáticos com alunos TEA mostra-se como uma estratégia interessante para promover a aprendizagem da álgebra com significado.

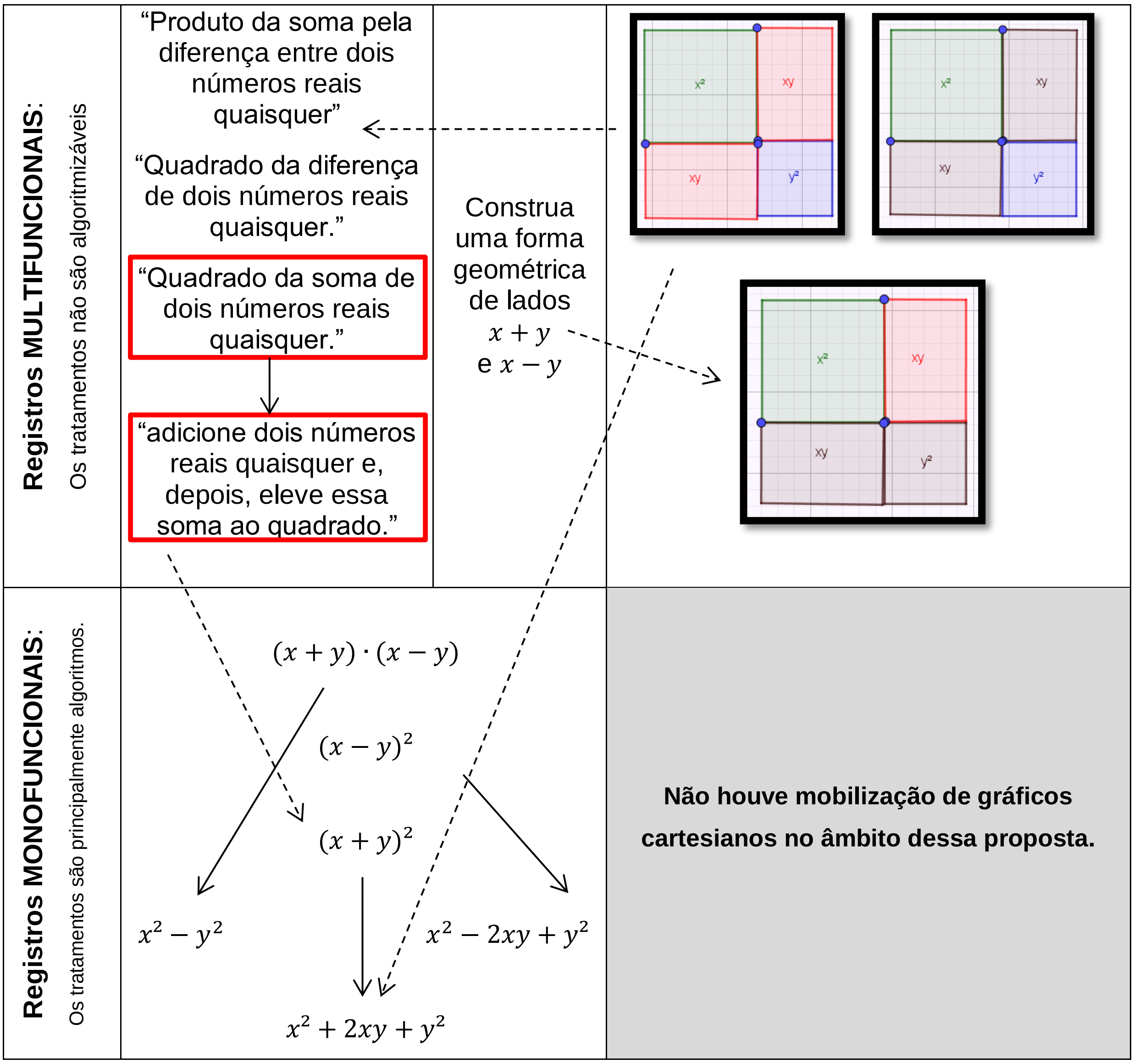
No tocante às representações, convém recordar o alerta de Duval, de que "os computadores não constituem um novo registro de representação. E isso por uma razão simples: as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual" (2011, p. 137).Entretanto, ele também destaca, com o intuito de qualificar os benefícios dos recursos tecnológicos, o fato que "eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos" (2011, p. 137). E cabe destacar ainda que, com o recurso da tecnologia, "as representações semióticas não discursivas tornam-se manipuláveis como objetos reais" (2011, p. 137), assim, cria-se um cenário em que, a validade da tecnologia se satisfaz tanto por atender as necessidades do TEA, como na dinamização do trabalho com as representações para eles e para os demais alunos da turma.

Para finalizar, no Quadro 16 a seguir, apresenta-se um resumo das mobilizações entre os registros propiciadas pela realização da atividade 3. Cabe lembrar que as conversões estão sendo retratadas por setas segmentadas, evidenciando a trajetória dos alunos nas mobilizações dos registros. Os tratamentos, por sua vez, estão sendo representados por setas contínuas, ligadas ao desenvolvimento dos produtos notáveis.

Como explicado anteriormente, será indicado por retângulos vermelhos à apresentação da intervenção realizada pelo professor que, ao respeitar o fenômeno de congruência, auxiliou os alunos com TEA e seus colegas no entendimento da proposta. Convém destacar que foi a partir do entendimento do registro envolvendo figuras geométricas que os alunos conseguiram compreender os demais registros, podendo transitar entre eles.

Quadro 16: Mobilizações realizadas pelos alunos nos diferentes registros na Atividade 3

	Registros DISCURSIVOS	Registros NÃO DISCURSIVOS



FONTE: o autor, com base nos resultados dos alunos participantes da pesquisa e inspirado nos trabalhos de Duval (2011).

4.3 – ATIVIDADE 4: ESTUDANDO AS TÉCNICAS DE FATORAÇÃO

A última atividade desenvolvida no âmbito da pesquisa visava apresentar aos alunos algumas técnicas de fatoração algébrica mais recorrentes, tais como fator comum em evidência, agrupamento e os trinômios quadrados perfeitos, procurando associar representações que englobassem a linguagem natural, a linguagem algébrica e a representação figural (no caso, geométrica).

A escolha por tal intervenção justifica-se pela necessidade de superar o problema causado pelo fato de que, nos livros didáticos, a “fatoração é praticamente apresentada como um método de fazer, no qual os alunos devem memorizar fórmulas e utilizá-las sem meios de verificação da validade do resultado" (GUADAGNINI, 2015, p. 8).

A abordagem meramente algébrica dos livros didáticos também não contribui para a aprendizagem dos alunos com TEA, visto o formalismo exacerbado e apresentação de definições e métodos a partir da análise de exemplos. (ABOU RAAD, 2004). Esta opção, fundamentada na TRRS, objetiva atribuir significados à fatoração algébrica pela mobilização de registros, considerando que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica" (DUVAL, 2010, p. 121).

O trabalho decorrerá por meio da associação da interpretação geométrica com a algébrica, o que possibilita uma melhor construção do conceito, permitindo que os alunos com TEA tenham o contato com uma linguagem diferente e possam transitar entre estes diferentes registros. A opção por representações figurais justifica-se pelo que fora apresentado anteriormente, no se refere ao pensamento visual. De modo a complementar,

> [...] a 'visualização' de expressões algébricas, por meio de cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, [...]. No entanto, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo. Assim, as 'visualizações' desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação-problema (BRASIL, 1997, p.121).

Antes de iniciar a abordagem algébrica das fatorações, se fez necessária uma retomada no conceito de fatoração aplicada aos números, tratando-se da escrita do mesmo como produto de dois ou mais fatores. Tal abordagem objetivava resgatar esse conceito, aprendido em anos anteriores, de modo associar com a interpretação da fatoração de uma expressão algébrica de modo semelhante, porém escrevendo-a como produto de duas ou mais expressões algébricas.

Com o conceito de fatoração algébrica retomado, pôde-se efetuar o trabalho com intuito de compreender as técnicas de fatoração. Para uma visualização geométrica, adotamos novamente o GeoGebra, permitindo que o aluno compreendesse essas técnicas com uma compreensão que superasse o algebrismo sem sentido. Evidentemente, essa decisão está em consonância com a proposta de propiciar o transito entre diferentes meios de representação e no reconhecimento das potencialidades da tecnologia.

A manipulação de figuras para o cálculo de áreas norteará conclusões acerca dos métodos de fatoração. O cálculo de área é do conhecimento de todos os alunos, visto a sua abordagem na frente de geometria, portanto, eles estão habilitados a responderem as questões sem a necessidade de uma revisão prévia.

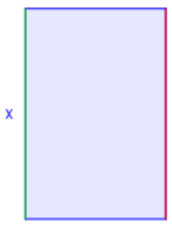
4.3.1 – COMPREENDENDO AS TÉCNICAS DE FATORAÇÃO

Com o propósito de reconhecer as técnicas de fatoração, empregou-se um aplicativo[9] que permite a manipulação de figuras geométricas. Para tal, foi proposto o cálculo das áreas de tais figuras, e posteriormente, uma comparação entre elas. Em relação à potencialidades do pensamento visual e, de modo mais específico, no contexto da fatoração e dessa atividade, destaca-se que

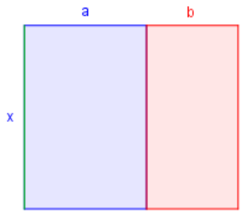
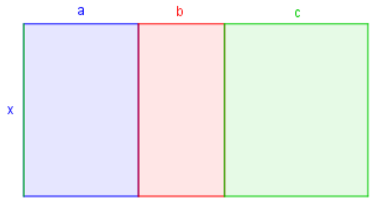
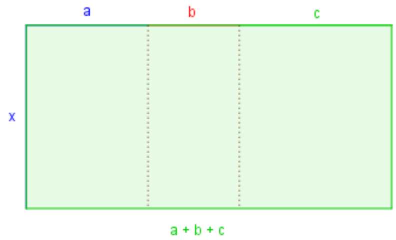
> As expressões algébricas podem surgir da representação simbólica da relação que os alunos identificam tendo por base a decomposição das figuras que formam uma sequência. Deste modo, a análise de sequências pictóricas crescentes pode contribuir para a compressão das expressões algébricas e para a compreensão das operações envolvidas na sua simplificação. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 83).

Em praticamente todas as atividades, se propõe relacionar figuras decompostas, e posteriormente, o conjunto delas. Assim sendo, para introduzir a fatoração por fator comum em evidência, o aplicativo permitiu comparar retângulos de bases distintas e alturas iguais, como se pode observar o quadro a seguir.

Quadro 17: Resultados obtidos pelos alunos, Fatoração por fator comum em evidência, Atividade 4

COMPREENDENDO A FATORAÇÃO POR FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA				
ATIVIDADE	**ALUNO A**	**ALUNO B**	**ALUNA C**	**ALUNA D**
Qual a área do retângulo azul? 	AX	X^2	$x^2+ax+ax+a^2$	xa

[9] Todos os aplicativos designados nesta dissertação foram desenvolvidos no software GeoGebra.

Qual a área do retângulo vermelho? 	Bx	y^2	x^2+Bx+B^2	xb
Qual a área do retângulo verde? 	Cx	$C+y^2$	$x^2+cx+cx+c^2$	xC
Qual a área do retângulo formado pela união dos retângulos azul, vermelho e verde? (duas formas diferentes) 	(A+B+C).X	RMA1 lado vezes lado	X(a+b+c)	ax+bx+Cx
	AX+BX+CX	Em branco	ax+bx+Cx	a+b+C(X)

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

A análise do quadro anterior permite constatar que os alunos A e D responderam praticamente tudo de forma adequada, o que indica que ambos já se demostravam confortáveis no cálculo de área de figuras planas.

Cabe atentar-se, portanto, aos resultados dos alunos B e C. Ambos, em diálogo com o pesquisador, tentavam relacionar tal conteúdo com os produtos notáveis, que haviam sido aprendidos recentemente. A aluna C chega a apresentar respostas semelhantes aos trinômios quadrados perfeitos, certamente por empregar tal associação. Porém, quando é solicitada a área do retângulo formado pela união dos três retângulos, a mesma aluna apresenta as duas formas distintas corretamente. Novamente, em diálogo com a mesma, há uma explicação de como se pode calcular a área de retângulos, seja pela soma das partes ou pela figura por completo.

O aluno B, que agora parece não ter relacionado a representação geométrica com o que foi solicitado na língua natural, escreve que a área do retângulo pode ser obtida fazendo “lado vezes lados”, em referência a multiplicação da base pela altura.

Assim, apesar de reconhecer esta relação, ele não a empregou de modo a apresentar o resultado esperado.

Para uma sistematização da técnica de fatoração, a aluna D, após ser convidada para socialização, apresenta suas duas expressões para a área do retângulo maior, utilizando para isso os registros apresentados na Figura 45.

Figura 46: Resposta aluna D, Fatoração por fator comum em evidência, Atividade 4
FONTE: Registros da aluna D.

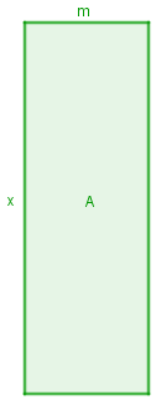
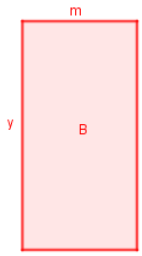
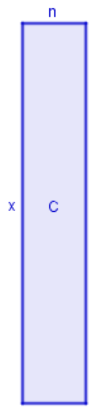
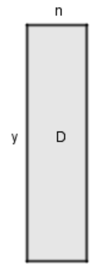
Além de seu registro ter oferecido uma excelente oportunidade para discutir o uso correto dos parênteses, o fato da aluna ter associado as duas expressões com a propriedade distributiva e permitiu discutir ainda que, por isso, as duas tratavam-se de expressões iguais. O professor-pesquisador, partindo da igualdade estabelecida, pôde definir junto aos alunos, que o x, presente em todos os termos da expressão é denominado fator comum. Além disso, destacou que a igualdade das duas expressões ocorre devido ao fato da variável x ter sido apenas colocada em evidência, sem alterar a área que ambas representam.

O trabalho continuou com novas propostas de fatoração, incluindo as presentes no livro didático adotado pela escola. Os alunos com TEA demonstraram êxito na maioria das questões propostas, assim como os demais colegas da classe.

Para a fatoração por agrupamento, foi adotada uma estratégia semelhante, propondo aos alunos o reconhecimento de áreas de alguns retângulos, alguns com bases de mesma medida outros com alturas iguais. O resultado obtido para as áreas é apresentado no Quadro 18 a seguir.

Quadro 18: Resultados obtidos pelos alunos, Fatoração por Agrupamento, Atividade 4

FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTO – ÁREA DE FIGURAS PLANAS				
FIGURA	**A**	**B**	**C**	**D**

				
ALUNO A	mx	my	mx	my
ALUNO B	A m^2 e x^2	$m^2 + y^2$	y^2 e n^2	n^2 e y^2
ALUNA C	mx	my	nx	ny
ALUNA D	m·x	m·y	n·x	ny

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

A aluna C passa a integrar o grupo de alunos que aparentemente executa com tranquilidade do cálculo de áreas. Entretanto, os resultados do aluno B ainda chamavam atenção do pesquisador quanto à necessidade de novas intervenções e um acompanhamento mais intensivo de sua aprendizagem. Mesmo ciente de tal fato, por restrição de tempo, o atendimento individualizado não foi realizado para essa proposta.

O remanejamento da figura, de modo a obter um retângulo maior é o que permitiria promover a igualdade entre as expressões para a área total, seja pela soma das partes e/ou para o produto da base pela altura. O retângulo obtido por todos os alunos se aproximam do que é apresentado na figura a seguir.

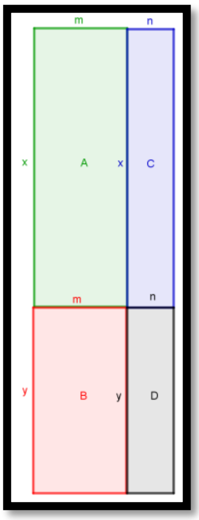


Figura 47: Exemplo de resposta dos alunos, Fatoração por agrupamento, Atividade 4
FONTE: Captura de tela da aluna C.

Para direcionar a organização da atividade, essa proposta foi realizada por partes, utilizando-se questões objetivas e claras, que facilitam a compreensão do aluno com TEA, para nortear as ações.

Quadro 19: Resultados obtidos pelos alunos, Fatoração por Agrupamento, Atividade 4

FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTO			
	Qual é a soma da área dessas quatro figuras?	Movendo as figuras, procure montar um retângulo. Quanto mede cada um dos lados desse retângulo maior?	Escreva um produto de expressão algébrica que permita calcular a área desse retângulo maior.
ALUNO A	$mx + mx + my + my$	$x+y + m+m$	$(x+y) \cdot (m+m)$
ALUNO B	$m^4 + n^4 + y^4 + x^4$	x^2 e y^2	Em branco
ALUNA C	$mx + nx + my + ny$	$y+x$ / $M+N$	$y+x$ - $M+N$
ALUNA D	$mx + my + nx + ny$	$xy \cdot nm$	$(x+y) \cdot (n+m)$

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

A novidade por sua vez aplica-se a observar a medida do lado desse retângulo, ação que gerou dúvidas. Os alunos A e C responderam adequadamente, apesar do aluno A representar a soma das medidas de tais lados. A aluna D, apesar de não expressar corretamente tais medidas, no cálculo da área, considera o produto dos lados $x + y$ e $n + m$, ou seja, fornece elementos que nos permite inferir que a mesma sabe reconhecer os lados do retângulo considerado.

Em relação ao aluno B, não houve mais a possibilidade do adiamento de um atendimento com intuito de sanar suas dúvidas no cálculo de área e no reconhecimento das medidas dos lados de um retângulo. Para tal, de modo a resgatar os conceitos nos quais ele apresentava dificuldades, uma correção foi realizada de forma detalhada com todos os alunos, chamando atenção para as medidas dos lados. Após essa revisão, e enquanto os demais alunos se dedicavam à questão de aprofundamento, apresentada na Figura 47, o pesquisador atendeu individualmente o aluno B para debater sobre esses conceitos.

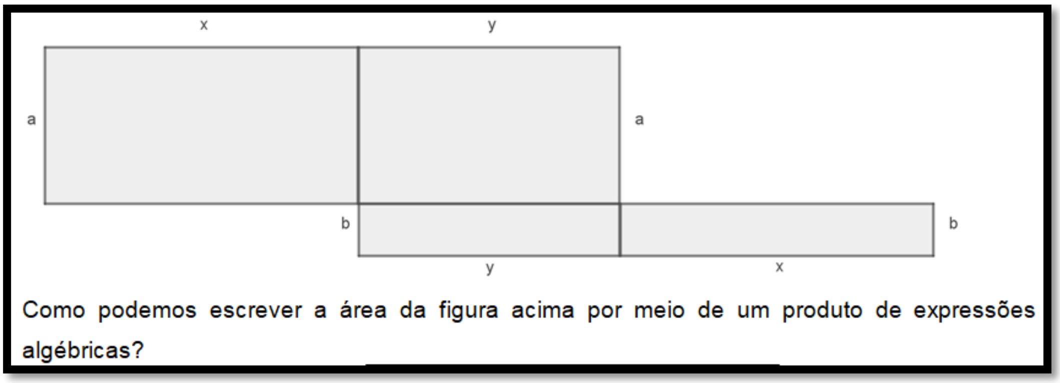


Figura 48: Atividades de aprofundamento, Fatoração por agrupamento, Atividade 4

FONTE: elaborado pelo autor.

Procurando associar esta atividade com a revisão feita pelo professor e com a atividade inicial, o aluno B sugeriu a translação do retângulo de base x e altura b, dispondo-o abaixo do retângulo de lado x e altura a. A nova figura, em sua afirmação, teria lados de medidas $a + b$ e $x + y$. Ao ser solicitada a área, o aluno retoma o "lado vezes lado", expressando a conforme a Figura 48, apresentando indícios de qua agora realmente havia entendido a representação.

Figura 49: Atividades de aprofundamento – Aluno B, Fatoração por agrupamento, Atividade 4

FONTE: Registros do aluno B.

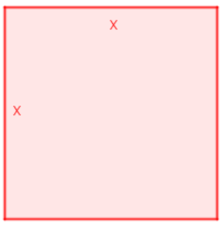
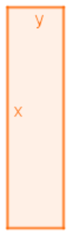
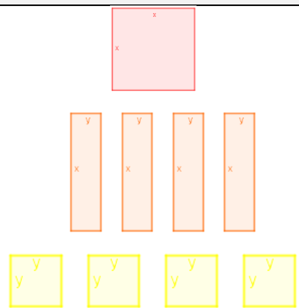
Todos os demais alunos acertaram a questão, e a sistematização foi feita a partir da análise das duas escritas de expressões que representam a área total da figura. Tomando como exemplo essa atividade, explicou-se que a igualdade a seguir indicava uma fatoração, e que este tipo de fatoração está estritamente relacionado com a fatoração por fator comum em evidência. Vejamos:

$$ax + ay + bx + by = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) = (a + b) \cdot (x + y)$$

Essa abordagem, que proporciona uma melhor compreensão da igualdade entre as duas expressões, por apresentar de forma particionada os agrupamentos por evidência, permitiu a conceituação do método de fatoração por agrupamento. A ideia de agrupamento foi discutida com todos, esclarecendo de que forma os termos que possuem fator comum poderiam ser associados.

Por fim, para discutir a técnica de fatoração envolvendo trinômios quadrados perfeitos, como previsto, a atividade também se inicia com o reconhecimento de áreas de figuras retangulares. Percebe-se um avanço gradativo dos alunos com TEA quanto a esse conceito, à medida que inclusive o aluno B demostra ter assimilado o conceito de área.

Quadro 20: Resultados obtidos pelos alunos, Fatoração – trinômios quadrados perfeitos, Atividade 4

FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES OBTIDAS POR PRODUTOS NOTÁVEIS				
QUESTÃO/ FIGURA	Qual a área da figura vermelha?	Qual a área da figura laranja?	Qual a área da figura amarela	Qual é a soma das áreas de TODAS as figuras?
				
ALUNO A	X^2	Xy	y^2	$X^2 + 4Xy + 4y^2$
ALUNO B	X^2	xy	y^2	$(X^2 + xy + 1^2)$
ALUNA C	x^2	xy	y^2	$x^2 + 4xy + 4y^2$
ALUNA D	x^2	xy	y^2	$x^2 + 4xy + 4y^2$

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

Considerando a área total obtida a partir da soma de todas as partes, os alunos foram convidados a realizar um remanejamento dessas partes, obtendo, neste caso, um quadrado. Houve duas representações distintas, como apresentado na Figura 49.

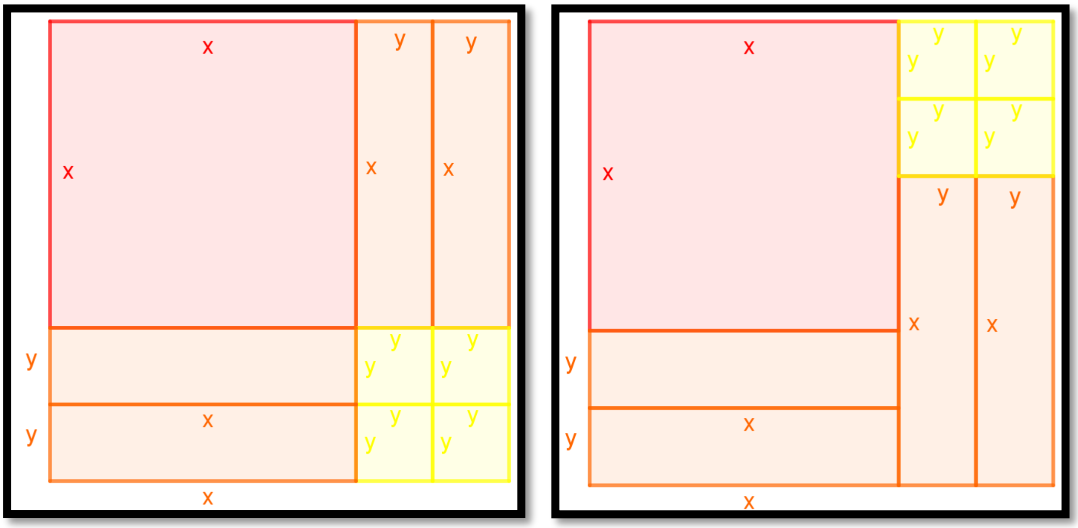


Figura 50: Respostas do aluno A, C e D, a esquerda e do aluno B a direita, Fatoração – trinômios quadrados perfeitos, Atividade 4
FONTE: Captura de telas das produções dos alunos.

A partir destas imagens, foi solicitado aos alunos que expressassem a medida do lado do quadrado e sua área total. Os resultados apresentados por eles estão expressos no Quadro 21 a seguir.

Quadro 21: Resultados obtidos pelos alunos, Fatoração – trinômios quadrados perfeitos, Atividade 4

FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES OBTIDAS POR PRODUTOS NOTÁVEIS		
	Quais são as medidas dos lados do quadrado formado?	Como posso representar o cálculo da área do quadrado formado?
ALUNO A	$X+2y$	$(X+2y)^2$
ALUNO B	$X+2y$	x^2+2y^2
ALUNA C	$x+2y$	$(x^2+2y)^2$
ALUNA D	$2y^2+x$	$(x+2y)^2$

FONTE: Registros dos alunos participantes da pesquisa.

Novamente, se estabelece a relação do trinômio $x^2 + 4xy + 4y^2$ com a sua forma fatorada, $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y)$ por meio da análise da área da figura obtida por eles no remanejamento das peças apresentadas no quadro 20. A igualdade das duas expressões permite discutir o que o trinômio trata-se de um quadrado perfeito, podendo ser, no exemplo apresentado, expresso por meio de um quadrado da soma.

O fato de se ter relacionado as duas expressões, como aconteceu nos casos anteriores, permitiu compreender o papel dos métodos de fatoração, corroborando o que apontam Ponte, Branco e Matos (2009, p. 81), ao afirmarem que "a interpretação geométrica, a partir da determinação da área do quadrado na sua totalidade ou a partir de uma dada composição, pode ajudar a promover a compreensão da equivalência entre as duas expressões".

Nas respostas dos alunos, há uma tendência em apresentar o cálculo da área elevando ao quadrado a medida do lado. O motivo dessa escolha pelos alunos pode estar associado ao fato do livro didático adotado apresentar, no estudo de geometria, que a área de retângulos pode ser calculada pelo produto da base pela altura e para o quadrado, por uma potenciação, elevando o lado ao quadrado. Assim, percebe-se que os alunos adotam certos padrões, incentivados pelos registros mais presentes nos materiais com os quase estabelecem contato.

O aluno B, demonstrando-se mais confortável com a temática, sabe reconhecer o lado do quadrado, mas ainda comete equívocos ao informar sua área. Entretanto, o erro cometido por ele é semelhante aos apresentados pelos demais alunos quando se iniciou o estudo dos produtos notáveis. Isso sugere que o aluno B apresenta um tempo diferenciado para alcançar o mesmo domínio da linguagem algébrica, e este tempo precisa ser respeitado, oferecendo ao aluno o devido acompanhamento.

4.3.4 – Considerações acerca da atividade 4

Convém analisar que transitar entre as diferentes representações permite estabelecer parâmetros para dar significados no processo de fatoração, de modo que o mesmo não se resuma apenas em formalismos sem sentido para os alunos. Diante do apresentado em todas as atividades, fica evidente o papel que elas assumem no processo de aprendizagem dos alunos com TEA, visto que:

> É a [partir da] linguagem que o aluno com autismo em seu processo de aprendizagem sofrerá transformações em seu campo de atenção, aprendendo a diferenciar um determinado objeto de outros existentes, assim como a construir ferramentas internas para integrar estas informações. Pela

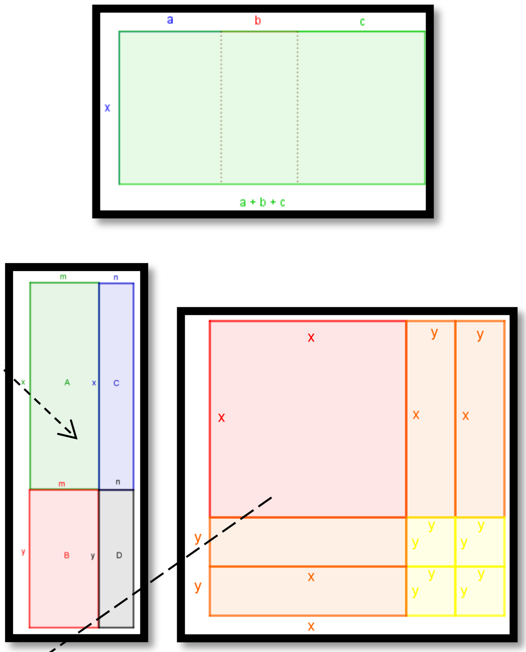
> linguagem também modificará seus processos de memória, deixando de ser engessado por uma ação mecânica de memorização, o que facilitará o desenvolvimento de uma atividade consciente que organiza o que deve ser lembrado. (ORRÚ, 2008, p.11)

Inspiradas na TRRS, as atividades proporcionam o contato com diferentes representações de modo a contribuir para aquisição da linguagem algébrica, sem que a mesma seja baseada apenas na memorização de regras.

Os remanejamentos das regiões retangulares configuram-se como tratamentos que, por sua vez, permitiram uma conversão para linguagem algébrica, tornando-se um recurso para a sistematização dos métodos de fatoração. De modo a exemplificar o trânsito entre esses registros, o Quadro 22 fornece uma síntese da atividade 4. É interessante relembrar que os tratamentos estão representados por setas contínuas e as conversões por setas segmentadas.

Quadro 22: Mobilizações realizadas pelos alunos nos diferentes registros da atividade 4

	Registros DISCURSIVOS	Registros NÃO DISCURSIVOS

Registros MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	“Movendo as figuras, procure montar um único retângulo. Observe as medidas dos lados desse retângulo maior.” “Obtenha a área do retângulo cujos lados medem $a + b + c$ e x”	
Registros MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	$mx + my + nx + ny$ $\downarrow$ $(m+n)\cdot(m+n)$ $ax + bx + cx$ $\downarrow$ $x \cdot (a + b + c)$ $x^2 + 4xy + 4y^2$ $\downarrow$ $(x + 2y)^2$	**Não houve mobilização de gráficos cartesianos no âmbito dessa proposta.**

FONTE: o autor, com base nos resultados dos alunos participantes da pesquisa e inspirado nos trabalhos de Duval (2011).

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“[...] Igual e diferente, de fato
Sou mamífero, sortudo, sortido,
Mutante, colorido, surpreendente, medroso e estupefato
Sou ser humano
Sou o inexato”

Elisa Lucinda

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os desafios que permeiam a temática de inclusão são muitos, entretanto, não se pode deixar que as barreiras impostas se tornem justificativas para ficarmos inertes diante de tal situação. É necessária a promoção de ações que visem atender adequadamente a esse público, em especial, no que tange à educação.

Contamos com um sistema educacional que, por si só, é excludente, que não fornece subsídios suficientes de modo a amparar a diversidade que a permeia. É neste cenário que o PAEE sofre as mazelas de políticas públicas que ainda não se tornaram eficientes.

Neste cenário empobrecido, ações como as relatadas nessa dissertação são essenciais para propiciar a inclusão efetiva desses alunos, reconhecendo suas necessidades e potencialidades. Neste caso, a formação de grupos colaborativos dentro da escola pode ser uma alternativa para o enfrentamento desses desafios. Este pode ser um espaço para debater as dificuldades e as frustrações, mas também um celeiro de ideias e um rico momento para trocas de experiências e para a tomada de iniciativas em prol da temática. É claro que cabe ao professor reconhecer a sua sala de aula, saber das necessidades dos seus alunos e procurar, mesmo que de forma mínima, fornecer sua contribuição para uma educação que atenda a todos, mas espaços de reflexão na própria escola podem apoiar o professor nessa tarefa.

Quanto ao número crescente de casos de autismo, fica evidente a necessidade de estudos cada vez mais abrangentes, em especial procurando responder demandas educacionais suscitadas por esse público. O primeiro ponto a se destacar é o reconhecimento da limitação no processo de abstração, e como isso afeta a aprendizagem de conteúdos vinculados à álgebra.

A partir desse trabalho, foi possível destacar as contribuições do trabalho com diferentes representações para a aprendizagem de conteúdos de álgebra. As contribuições da TRRS foram evidenciadas, de maneira geral, pelo excelente desempenho dos alunos nas aulas que visavam construir conceitos vinculados ao cálculo algébrico. Mas, de modo especial, diante dos quatros alunos analisados, pode-se perceber que, quando nos limitamos ao trabalho com um único registro, não se estabelece a real compreensão dos conceitos ligados à álgebra. Tais alunos, quando imersos em situações que permitiram a mobilização de mais do que um único registro, puderam construir os conceitos pretendidos nas atividades. Esses conceitos, se mal compreendidos, certamente iriam estabelecer barreiras para futuras aprendizagens no campo da álgebra, e o processo vivenciado mostrou que isso seria inevitável se os mesmos fossem tratados simplesmente de forma algébrica.

Suscitar o debate de conceitos algébricos por meio de interpretações baseadas também na linguagem geométrica foi o ponto de partida para muitas das atividades desenvolvidas. Esse debate, por sua vez, revela aos alunos que essas duas áreas da matemática não apresentam papéis isolados no âmbito da matemática, permitindo o estabelecimento de relações e interpretações com mais significado.

Esta pesquisa revelou que muitas das dificuldades demonstradas nas aulas de matemática, especialmente no ensino de álgebra, podem estar relacionadas com o fenômeno da congruência, que interfere na compreensão de determinado objeto matemático. Tais dificuldades possuem relação com o fato de compreender que um determinado objeto matemático não está limitado à sua representação.

Os usos recorrentes da língua natural para sintetizar as considerações acerca de um determinado conteúdo apontam indícios de que os alunos se sentem confortáveis quanto a este tipo de representação. Entretanto, diante do trabalho realizado, pode-se perceber que a assimilação da representação algébrica se fez presente, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quanto ao pensamento algébrico, verificou-se que os alunos com TEA possuem a capacidade de generalização, mesmo quando não exprimem suas considerações por meio de uma fórmula. As ponderações efetuadas por eles foram regadas de coerência e objetividade. Duval, ao defender que a compreensão em matemática se faz pela mobilização de mais de um registro semiótico, se faz pertinente. Assim, as contribuições da TRRS possibilitaram um trabalho diferenciado, mas com benefícios pontuais aos alunos com TEA.

Cabe destacar que aos alunos com TEA, cuja linguagem é afetada, a oferta de diferentes meios de compreender um determinado conteúdo se faz necessária. Transitar entre diferentes representações é fornecer a eles a oportunidade de escolha e de momentos de ressignificação, para que eles possam, assim, assumir o papel de protagonistas de sua aprendizagem.

Nessa postura de assumir um novo papel, destaco que esses alunos superaram o receio de compartilhar seus resultados, participando de todos os momentos de socialização propostos pelo professor. A tecnologia, que a priori atendeu ao critério do interesse dos alunos com TEA, possibilitou uma melhor compreensão do pensamento do aluno, permitindo que eles compartilhassem ideias com os demais colegas e com o professor.

A linguagem e a capacidade de abstração, que a priori seriam os limitadores da aprendizagem de conteúdos algébricos, foram desenvolvidos diante do trabalho realizado com apoio da TRRS. Cabe afirmar, portanto, que a educação, diante do seu papel transformador, deve intervir de modo a criar possibilidade de crescimento a todos os alunos.

REFERÊNCIAS

ABOU RAAD, N. **Les Identités Remarquables fonctionnent-elles comme un théorème ou comme une règle d'action dans le sens de la factorisation pour les élèves de la classe de troisième en France**. 2004. 128 f. Mémoire de DEA (Interactions, Corpus, Apprentissages, Représentations) - Université Lumière Lyon II, Lyon - França, 2004.

ALLEVATO, N. S. G. **Aspectos Emergentes da Utilização da Computador na Educação Matemática.** In: FRANZONI, M. ALLEVATTO, N. S. G. (org) Reflexão sobre a Formação de Professores e o Ensino de Ciências e Matemática. Campinas, São Paulo, eEd. Alínea, 2007. Cap. 4. P. 75 – 96.

ALMEIDA, V. L. L. **Influência do Picture Exchange Communication System (PECS) na comunicação e aquisição da linguagem numa criança com Perturbação do Espectro do Autismo**. 2017. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação Especial). Politécnico de Coimbra, Coimbra.

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION. **Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais DSM-V**. 5 ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

BASSO, M. A. GRAVINA, M. A. **Mídias Digitais na Educação Matemática**. In: Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegra. Cap. 1, p. 4 – 25. 2011.

BARBOSA, A. VALE, I. A Resolução de Tarefas com Padrões Figurativos e a Generalização. **Atas do VII CIBEM**. Uruguai, p. 3073-3081.

BIANCHI, R. C. **A educação de alunos com transtorno do espectro autista no ensino regular: desafios e possibilidades**. 2017. 126 f. Dissertação (Mestrado em Planejamento e Análise de Políticas Públicas). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho, Franca.

BORRALHO, A., CABRITA, I., PALHARES, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), **Números e Álgebra** (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE

BRASIL. Lei Federal nº 12.764/2012, de 27 de dezembro de 2012. Institui a Política Nacional de Proteção dos Direitos da Pessoa com Transtorno do Espectro Autista; e altera o § 3o do art. 98 da Lei no 8.112, de 11 de dezembro de 1990. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF: 28 dez. 2012.

_______. Ministério da Saúde. Secretária de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Especializada e Temática. **Linha de cuidado para a atenção às pessoas com transtorno do espectro do autismo e suas famílias na Rede de Atenção Psicossocial do Sistema Único de Saúde**. Brasília: Ministério da Saúde, 2015.

_______. Secretária de Educação Fundamental (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretária da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Brasília, DF, 2016.

CONCEIÇÃO, K. E. **A Construção de Expressões Algébricas por Alunos Surdos: as contribuições do Micromundo Mathsticks**. 2012. 128f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

CARVALHO, M. A. S. Aprendizagem Matemática de Alunos Diagnosticados com a Síndrome do Espectro do Autismo: Educação Matemática e Inclusão. **Anais do VII CIEM**, Canoas, 2017.

COUTINHO, J. V. S. C.; BOSSO, R. M. V. Autismo e Genética: uma Revisão de Literatura. **Revista Científica do ITPAC**, Araguaína, v. 8, n. 1, Pub. 4, Janeiro 2015.

CUNHA, D. E. S L.; DEUS, A. M; MACIEL, E. M. **Estudo de Caso na Pesquisa Qualitativa em Educação: uma metodologia**. UFPI. 2010.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 183 p.

DA SILVA, Luiz Carlos Marinho; DAS FLORES VICTER, Eline; NOVIKOFF, Cristina. **Análise do rendimento escolar de turmas do 9º ano no simulado de Aprendizagem sem fronteiras Learning without borders Matemática da Prova Brasil: um estudo exploratório na rede pública municipal de Duque de Caxias/RJ**. Revista Práxis, v. 3, n. 6, 2013. Disponível em:< http://web.unifoa.edu.br/praxis/numeros/06/19.pdf> Acesso em: 09 de julho de 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

_________. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: S. D. A. Machado (Eds). Aprendizagem em

Matemática: registros de representação semiótica. (pp, 3 - 11). São Paulo: Papirus, 2008.

_________. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 120 p.

_________. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

FERNANDES, R. K.; SALVI, R. F. Estado da Arte da Educação Matemática Inclusiva: uma Análise a Respeito da Produção Científica. **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**, [S.L], v. 18, n. 2, p. 144-154, 2017.

FILHO, B. FERREIRA, J. **A Educação Especial na Perspectiva da Inclusão Escolar:** transtornos globais do desenvolvimento. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Especial. Universidade Federal do Ceará, 2010.

FIORENTINI, D. , MIGUEL, a. , MIORIM, M. A. **Contribuição para um Pepensar... a Educação Algébrica Elementar** . Campinas, UNICAMP. Pro-posições, 1993 V4 p. 79

FLEIRA, R. C. **Intervenções Pedagógicas para Inclusão de um Aluno Autista nas Aulas de Matemática:** um olhar Vygotskyano. 2016. 136f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Orgs). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GOMES, C. G. S. **Autismo e ensino de habilidades acadêmicas: adição e subtração.** Revista Brasileira de Educação Especial, Set-Dez, v.13, p. 345-364. Marília, 2007.

GUADAGNINI, M. R**. Fatoração Polinomial: um estudo sobre sua potencialidade em aplicações intra e extramatemáticas**. EBRAPEM. 2015.

LANUTI, J. E. O. **Educação Matemática e Inclusão Escolar:** a construção de estratégias para uma aprendizagem significativa. 2015. 127f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual Paulista, São Prudente.

MARTINS, G. A. **Estudo de caso: uma estratégia de pesquisa**. 2 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

MELLO, A. M. et al. **Retratos do autismo no Brasil**. 1 ed. São Paulo: AMA, 2013. 178 p.

MENDES, E. G. A radicalização do debate sobre inclusão escolar no brasil. **Revista brasileira de educação,** [S.L.], v. 11, n. 33, p. 387-405, set./dez. 2006.

MOORE, S. T. **Síndrome de Asperger e a Escola Fundamental**: Soluções práticas para dificuldades acadêmicas e sociais. 1 ed. São Paulo: Associação Mais 1, 2005. 204 p.

MOREIRA, G. E.; MANRIQUE, A. L. O que pensam os professores que ensinam Matemática sobre a inclusão de alunos com NEE? In: Perspectivas sociológicas e educacionais em estudos da criança: **As marcas das dialogicidades luso-brasileiras**, v. 1, 1ª ed., p. 592 – 611. Braga-PT: CIEC – Minho.

NETO, J. C. et al. Autismo e tecnologia: um mapeamento sobre as tecnologias para auxiliar no processo de aprendizagem. **Revista PRIMUS VITAM**, n.9, 2017.

OLIVEIRA, J.; PAULA, C. S. Estado da Arte sobre Inclusão Escolar de alunos com Transtornos do Espectro do Autismo no Brasil. **Cadernos de Pós-Graduação em Distúrbios do Desenvolvimento,** São Paulo, v. 12, n. 1, p. 53-65, 2012.

ORRÚ, S. E. Os estudos da análise do comportamento e a abordagem histórico-cultural no trabalho educacional com autistas. **Revista Iberoamericana de Educação, Araraquara**, v.3, n. 45, p. 1 – 12, 25 fev. 2008.

PANTOJA, L. F. L. CAMPOS, N. F. S. C. SALCEDOS, R. R. R. **A Teoria dos Registros de Representações Semióticas e o Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares.** VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. 2013.

PASSOS, A.M.; PASSOS, M. M.; ARRUDA, S. M. A Educação Matemática Inclusiva no Brasil uma análise baseada em artigos publicados em revistas de Educação Matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. V. 6, n.2, p. 1 - 22, 2013.

PATRÍCIO, R. S. **As dificuldades relacionas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2011. 103f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal de Itajubá, Belém.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. p. 5 – 27. Lisboa: SEM-SPCE, 2006.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no ensino básico. 2009. Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_ NPMEB_ (Set2009).pdf>. Acesso em: 12 dezembro de 2018.

SANTOS, M. C. D. Educação especial e inclusão: por uma perspectiva universal. **Revista retratos da escola,** [S.L.], v. 7, n. 13, p. 277-289, jun./jul. 2013. Disponível em: <www.esforce.org.br>.Acesso em: 26 ago. 2017.

SILVA, E. et al. Matemática: nenhum a menos - a interação e diálogo no enfrentamento do fracasso escolar. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba. 2013.

Star, J. R., Herbel-Eisenmann, B. A. e Smith J. P. (2000). Algebraic Concepts: What`s Really New in New Curricula? **Mathematics Teaching in the Middle School**, 5(7), 446-451.

TEIXEIRA, M. C. T. V. et al. Literatura Científica Brasileira sobre Transtornos do Espectro Autista. **Revista Associação Médica Brasileira**, [S.L], v. 56, n. 5, p. 607-614, 2010.

VALE, I.; PALHARES, P. ; CABRITA, I. ; BORRALHO, A. **Os padrões no Ensino e Aprendizagem do Número e Álgebra**, 2007 – disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Vale-Palhares-Cabrita-Borralho.doc. >. Acesso em: 20 dez. 2018.

VIANA, E. A. **Situações Didáticas de Ensino da Matemática**: um estudo de caso de uma aluna com Transtorno do Espectro Autista. 2017. 99f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos**. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZANIOLO, L. O.; DALL'ACQUA, M. J. C.. **Inclusão Escolar**: Pesquisando políticas públicas, formação de professores e práticas pedagógicas. 1 ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2012. 168 p.

APÊNDICE

ATIVIDADE 1

1) Leia a tirinha para responder o que for solicitado.

Níquel Náusea, de Fernando Gonsales.

a) Escreva uma expressão algébrica que represente o problema proposto na tirinha.

b) Se o rato da direita tivesse pensado no número 5, qual seria o resultado obtido? (Registre os cálculos).

2) De maneira semelhante a questão anterior, utilize letras para representar:

a) A adição de dois números reais quaisquer.

b) A diferança entre dois números reais quaiquer.

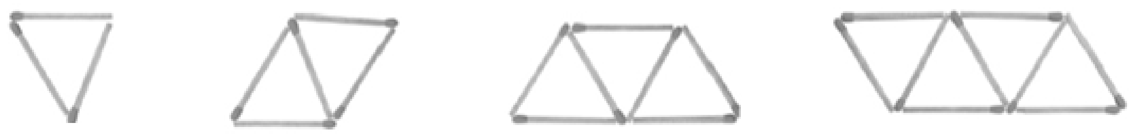
c) O quadrado de um número real qualquer.

d) O quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

f) O produto de dois números reais quaiquer.

g) O produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

3) Com 3 palitos de fósforo, faço um triângulo. Depois, acrescentando sempre 2 palitos, vou obtendo novos triângulos. Veja:



1 triângulo — 2 triângulos — 3 triângulos — 4 triângulos

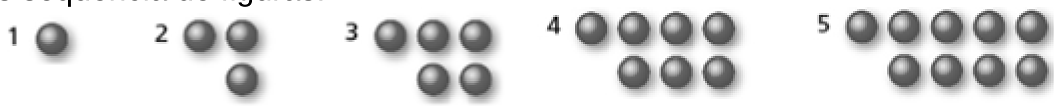
a) Com base nas figuras acima, complete a tabela:

Número de Triângulos	Número de Palitos
1	
2	
3	
4	
5	
15	
20	

b) Se **p** representar o número de palitos, e **t**, o número de triângulos, qual será a fórmula que relaciona **p** com **t**?

____

4) Veja s sequência de figuras:



a) Mantendo o padrão, desenhe as figuras **6** e **7**.

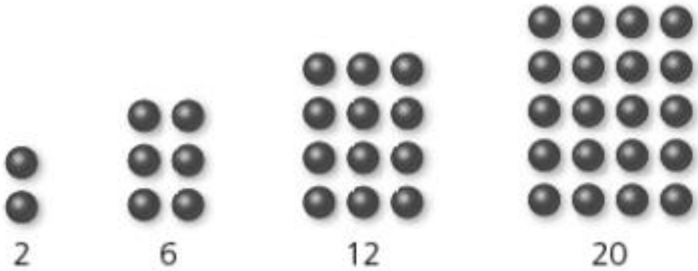
FIGURA 6	**FIGURA 7**

b) Complete a tabela abaixo.
(Dica: Para determinar o número de bolinhas das próximas figuras da sequência, descubra um padrão que relacione o número de bolinhas com o número da figura).

Figura	Número de Bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	

Figura	Número de Bolinhas
6	
10	
20	
100	
n	

5) Observe a sequência de figuras retangulares:



a) O número de bolinhas da figura 1 é $F_1 = 2$, da figura 2 é $F_2 = 6$ e da figura 3 é $F_3 = 12$. Qual é, então, o valor de F_7?

b) Complete a fórmula:

$$F_n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(Dica: Relacione o número de bolinhas de uma fileira horizontal com o número da figura; depois faça o mesmo com o número de bolinhas de uma fileira vertical).

ATIVIDADE 2

IDENTIFICANDO PADRÕES

ATIVIDADE: Nas figuras a seguir, você encontra o início de uma **sequência cujo padrão ainda não foi definido.**

1) Defina um padrão para a sequência acima e desenhe as figuras de número 3 e 4.

Figura 3	**Figura 4**

2) Seguindo seu padrão, complete a tabela a seguir:

Figura	Número de Bolinhas
1	
2	
3	
4	

Figura	Número de Bolinhas
5	
10	
20	
n	

ATIVIDADE 3

PARTE A

1) Escreva uma expressão algébrica que represente as situações a seguir:

a) Produto da soma pela diferença entre dois números reais quaisquer.

b) Quadrado da diferença de dois números reais quaisquer.

c) Quadrado da soma de dois números reais quaisquer.

PARTE B

1) Desenvolva algebricamente, cada um dos produtos notáveis a seguir.

a) $(a - b)^2 =$ ___________________________

b) $(a + b)^2 =$ ___________________________

c) $(a + b) \cdot (a - b) =$ ___________________________

PARTE C

→ Abra o Aplicativo V com o **GeoGebra**.

→ Você deverá ter contato com o Algeplan em seu formato digital.

ATIVIDADE: Monte um quadrado com as seguintes peças:

- Um quadrado de lado x;
- Dois retângulos de lados x e y;
- Um quadrado de lado y.

a) Qual a medida do lado do quadrado formado?

____

b) Qual a área do quadrado formado?

____

c) O que você pode concluir?

PARTE D

→ Continue utilizando o Aplicativo V.

ATIVIDADE 1: Monte um quadrado com as seguintes peças:

- Um quadrado de área x^2;
- Dois retângulos de área – xy;
- Um quadrado de área y^2.

a) Qual a medida do lado do quadrado formado?

____

b) Qual a área total do quadrado formado?

____

c) Justifique o fato do quadrado de área y^2 ser positivo.

d) O que você pode concluir?

ATIVIDADE 2: Abra novamente o Aplicativo V com o GeoGebra. Responda:

a) Quais peças você deve utilizar para montar um retângulo com lados **x + y** e **x – y**?

b) Qual a área do retângulo construído?

ATIVIDADE 4

FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Veja que é possível escrever um número na forma de um produto de dois ou mais fatores. Como exemplo, podemos tomar o número 60, em que:

$$60 = 6 \cdot 10 \qquad 60 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Assim, efetuou-se a **fatoração**, ou decomposição, do número 60. Neste sentido, **fatorar um número** significa escrevê-lo na forma de um produto de dois ou mais fatores.

Atividade 1: Fatore os números:

a) 123	b) 231	c) 429

Atividade 2: Escreva o número cuja forma fatorada é:

a) $3 \cdot 5 \cdot 40 =$ ________ b) $2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 100 =$ ________ c) $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 13 =$ ________

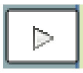
De maneira semelhante, **fatorar uma expressão algébrica** significa escrevê-la na forma de um produto de duas ou mais expressões algébricas.

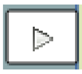
O desafio é como fatorar as expressões algébricas. Para isso vamos ver algumas técnicas.

1ª Técnica de Fatoração – Fator comum em evidência.

1) Abra o arquivo Aplicativo I com o GeoGebra, responda o que for solicitado:

a) Qual a área do retângulo em azul?

b) Clique em  deverá aparecer em sua tela um retângulo vermelho, qual é sua área?

c) Clique novamente em , que por sua vez deverá inserir um retângulo na cor verde. Qual a área do retângulo verde?

d) Escreva de duas formas diferentes, a área do retângulo formado pela união dos retângulos das cores azul, vermelho e verde.

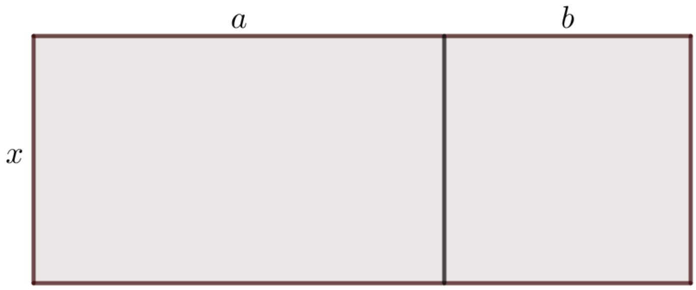
FORMA 1	FORMA 2

O que você pode perceber?

____

____

2) Veja a imagem a seguir:



Escreva na forma de produto o polinômio que representa a área da figura ao lado.

3) Fatore os binômios colocando os fatores comuns em evidência.

a) $\mathrm{ab} + \mathrm{ac} =$ __________ b) $x^2 + 3x =$ ________ c) $a^2 + a =$ _________

d) $5x + 20 =$ _________ e) $14a^2b + 21ab^3 =$ ________ f) $15x^3 - 10x^2 =$ __________

2ª Técnica de Fatoração – Fatoração por agrupamento.

1) Abra o arquivo Aplicativo II com o GeoGebra. Na tela inicial deverão aparecer quatro retângulos A, B, C e D.

a) Escreva a área da cada um dos retângulos.

A	B	c	D

b) Qual é a soma dessas quatro áreas?

c) Movendo as figuras, procure montar um único retângulo. Quanto mede cada um dos lados desse retângulo maior?

/

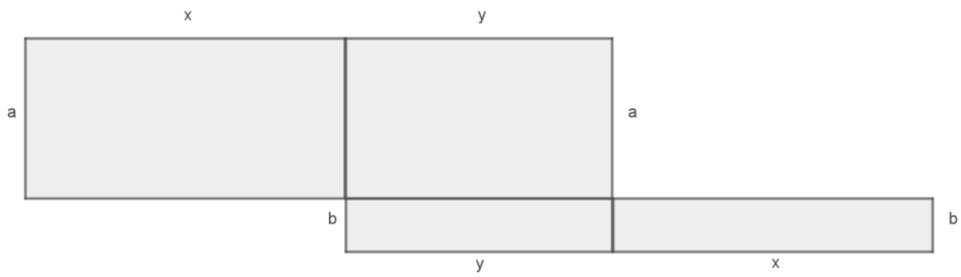
d) Escreva um produto de expressão algébrica que permita calcular a área desse retângulo maior.

e) O que você pode dizer em relação às expressões obtidas nos itens (b) e (d)?

____

____

2) Abra o arquivo do Aplicativo 3 com o GeoGebra. Nele você irá encontrar a seguinte figura:



Como podemos escrever a área da figura acima por meio de um produto de expressões algébricas.

3) Construa os seguintes retângulos no GeoGebra:

	Base	**Altura**	**Área**
Retângulo 1	3a	x	
Retângulo 2	4b	x	
Retângulo 3	3a	y	
Retângulo 4	3a	y	

a) Preencha a área de cada um dos retângulos na tabela anterior.

b) Qual é o produto de expressões algébricas que representa a soma das áreas dos retângulos anteriores.

<u>3ª Técnica de Fatoração – Expressões obtidas dos produtos notáveis</u>

1) Abra o arquivo aplicativo IV com o GeoGebra e responda:

a) Qual a área da figura vermelha?

b) Qual a área da figura laranja?

c) Qual a área da figura amarela?

d) Qual é a soma das áreas de TODAS as figuras?

2) Junte as figuras (vermelha, laranjas e amarelas) formando um quadrado e responda:

a) Quais são as medidas dos lados do quadrado formado?

b) Como posso representar o cálculo da área do quadrado formado?

c) Compare a soma das áreas da questão 1 com a área obtida na questão 2. O que você pode afirmar sobre essa comparação?

3) Utilize o arquivo Aplicativo 5 para fatorar os seguintes trinômios:

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 + 6x - 7$ c) $2x^2 + 8x + 6$