Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Conjuntos Relativamente Compactos em Espaços de Lebesgue com Expoente Variável

Elaine Andressa Tavares de Lima

Orientadora: Prof. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 27 de Fevereiro de 2019

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Conjuntos Relativamente Compactos em Espaços de Lebesgue com Expoente Variável

Elaine Andressa Tavares de Lima

Orientadora: Prof. Dra. Mariza Stefanello Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
27 de Fevereiro de 2019

Aos meus pais Dimas e Luciene, que são meu espelho de vida, minha querida irmã Ritiéli, e aos meus avós, que hoje são estrelas que olham por mim, dedico.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, que me concedeu o dom da vida e está sempre comigo e permitiu que pudesse concluir este desafio.

A minha família, em especial minha mãe Luciene, meu pai Dimas, minha irmã Ritiéli e meu namorado Thiago, pelo imenso apoio, carinho e amor incondicionais, disposição e sinceras orações. Podem ter certeza que de diversas formas vocês tornaram e tornam minha vida mais feliz.

À UNIFEI, por todo suporte acadêmico desde minha graduação.

A minha querida orientadora Profª Mariza, uma pessoa de um coração gigante, agradeço por tudo. Pela pessoa maravilhosa que é, pelo profissionalismo, competência e paciência. Agradeço-a, sobretudo, pela confiança que a mim depositou para que este trabalho fosse concluído.

A todos meus colegas de mestrado. Em especial meus queridos amigos: Matheus Barnabé, Luana e Ronisio. A vocês quero deixar registrado que sou imensamente grata pelo companheirismo no decorrer do Mestrado.

Aos funcionários e ao corpo docente do Mestrado em Matemática da UNIFEI–PMAT, em nome do Prof. Leandro, deixo meu sincero agradecimento por todo apoio e paciência. Em especial, aos professores que puderam transmitir um pouco de seu conhecimento a mim, com certeza vou levar para minha vida o aprendizado adquirido e todos vocês em meu coração.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, com vocês divido a alegria desta experiência.

"Together we stand, divided we fall", Pink Floyd

Existe uma teoria que diz que, se um dia alguém descobrir exatamente para que serve o Universo e por que ele está aqui, ele desaparecerá instantaneamente e será substituído por algo ainda mais estranho e inexplicável.

⋆ ⋆ ⋆

Existe uma segunda teoria que diz que isso já aconteceu.

Douglas Adams

Resumo

O objetivo deste estudo é a caracterização de conjuntos relativamente compactos (precompactos) em espaços de Lebesgue com expoente variável em espaços de medida métricos. Será apresentada uma detalhada discussão a respeito de tais espaços e de suas propriedades fundamentais a fim de estabelecer uma conexão para alcançarmos este propósito fundamental. Além disso, o estudo de conjuntos relativamente compactos em espaços de Lebesgue com expoente variável será abordado de forma particular para o espaço Euclidiano e também para o caso do espaço análogo discreto, isto é, o espaço de sequências com expoente variável.

Palavras–chave: Precompacidade, Espaços de Lebesgue, Expoente Variável.

Abstract

The objective of this study is the characterization of relatively compact sets (precompacts) in variable Lebesgue spaces in metric measure spaces. A detailed discussion will be presented of such spaces and their fundamental properties in order to establish a connection to achieve this fundamental purpose. Moreover, the study of relatively compact sets in variable Lebesgue spaces will be approached in a particular way for the Euclidean space and also for the case of the discrete analogue space, that is, the space of sequences with variable exponent.

Keywords: Precompacity, Lebesgue Spaces, Variable Exponents.

Sumário

Introdução

Os espaços de Lebesgue com expoente variável, como o próprio nome já diz, são extensões naturais dos espaços clássicos de Lebesgue, L^p, onde substituímos o expoente constante p por uma função expoente $p(\cdot)$. No caso do espaços L^p podemos destacar a homogeneidade em sua definição. Porém, não podemos dizer o mesmo a respeito dos espaços de Lebesgue com expoente variável, denotados por $L^{p(\cdot)}$, neles utilizamos uma abordagem diferente onde deixamos o domínio intacto e permitimos que o expoente varie de acordo com o ponto dado.

Mais precisamente, para um conjunto Ω mensurável qualquer e μ uma medida em Ω, definimos os espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ da seguinte maneira:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável}, \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} \; \mathrm{d}\mu(x) < \infty \right\}.$$

Como um exemplo simples em $\Omega = \mathbb{R}$, considere a função expoente $p(\cdot)$, dada por

$$p(x) \quad = \quad \begin{cases} 2, \text{ se } x \leq 0, \\ 4, \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

Então, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ consiste de todas as funções reais, f, tais que

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|^2 \; \mathrm{d}x \; + \; \int_0^\infty |f(x)|^4 \; \mathrm{d}x \; < \; \infty.$$

Evidentemente, quanto mais complexa a função expoente $p(\cdot)$, mais delicado o espaço $L^{p(\cdot)}$ resultante. Assim, podemos perceber que mesmo assumindo condições sobre a função expoente, ainda podemos obter um comportamento bastante complicado.

Podemos também considerar espaços onde a função expoente $p(\cdot)$ é ilimitada, por exemplo, considere $\Omega = \mathbb{R}$ e $p(x) = 1 + |x|$. Porém, aqui neste estudo nos contentaremos em considerar o caso onde $p(\cdot)$ é limitada.

Os espaços $L^{p(\cdot)}$ possuem diversas propriedades análogas a dos espaços L^p. Contudo eles também se diferem em alguns aspectos. Por esta razão, os espaços $L^{p(\cdot)}$ possuem um interesse intrínseco, mas eles também são muito importantes, por exemplo, para aplicações em equações diferenciais parciais.

Nos últimos anos, observamos um intenso crescimento no interesse no estudo de tais espaços. Destacamos o uso no estudo de fluidos eletroreológicos que têm sido utilizados, por exemplo, na robótica e tecnologia espacial. Devido tais fluidos possuírem inomogeneidades, modelar um problema utilizando os espaços de Lebesgue e Sobolev clássicos, L^p e $W^{1,p}$, não é adequado, pois o expoente p é fixo. Necessita, então, que o expoente possa variar, ou seja, requer o uso de espaços com expoente variável. Para obter mais informações sobre propriedades, modelagem e aplicações a esses fluidos com espaços com expoente variável, indicamos a referência [21].

Seguindo, como já dito, os espaços $L^{p(\cdot)}$ são importantes nos estudos de equações diferenciais parciais e um interesse comum neste estudo é a busca de existência de soluções para uma dada equação diferencial parcial. Sabemos que até mesmo para o caso de equações diferenciais ordinárias esta questão é muitas vezes difícil. Um artifício que buscamos seria a compacidade de seus domínios, que é um importante objeto de pesquisa em análise, devido suas relevantes propriedades e grandes aplicações, como por exemplo garantir que sequências possuirão subsequências convergentes e tal limite da subsequência seria um forte candidato a solução almejada.

Posto isto, o objeto central de estudo deste trabalho são conjuntos relativamente compactos (precompactos) em espaços de Lebesgue com expoente variável em espaços de medida métricos, isto é, caracterizar famílias relativamente compactas (precompactas) em tais espaços. Apontamos, [10], como principal referência utilizada para a realização deste trabalho.

A dissertação compõe-se de cinco capítulos e esta disposta como segue. O Capítulo 1 é destinado à abordagem de conceitos preliminares e é composto por duas seções. Sendo a primeira dedicada a apresentar definições e resultados da Teoria de Espaços Métricos, Análise Funcional e Medida e Integração que serão importantes para a leitura deste trabalho. Já na segunda seção abordamos de maneira precisa os espaços de Lebesgue com expoente variável, estabelecendo inicialmente sua definição e, por conseguinte, algumas de suas propriedades estruturais, fundamentados principalmente em [6, 7, 11]. Dando destaque ao Teorema 1.2.6 que se refere a convergência em norma destes espaços, devido a [10].

O Capítulo 2 dedica-se a Espaços de Medida Métricos e divide-se em três seções. Ao longo das duas primeiras, baseados em [6, 7] e em [4, 13] respectivamente, estudaremos duas condições, sendo a primeira relacionada a regularidade da função expoente $p(\cdot)$, chamada de continuidade log-Hölder e a segunda relativa a medida, que intitularemos de condição de duplicação. E, por fim, na última seção buscaremos entender sobre a limitação do Operador Maximal de Hardy-Littlewood em $L^{p(\cdot)}$ e para tal tivemos por referência [1].

Em suma, os Capítulos 1 e 2 foram propostos a fim de oferecer o preparo necessário para o desenvolvimento do capítulo subsequente.

Sendo assim, o Capítulo 3 é destinado ao nosso objetivo central e está dividido em duas seções. Para tal, inicialmente abordamos propriedades relacionadas a precompacidade em espaços métricos, que serão essenciais e cruciais para a seção seguinte. Seção esta dedicada ao estudo do Teorema 3.2.1, o ponto chave desta dissertação, onde explicitaremos, embasados em [10], uma caracterização das famílias precompactas em espaços de Lebesgue com expoente variável em espaços métricos. Veremos, fazendo uso do estudo acumulado dos capítulos precedentes, que certas condições serão necessárias e suficientes para que uma família seja precompacta nestes espaços.

Por fim, nos Capítulos 4 e 5, fundamentados em [10], particularizaremos o resultado obtido no Teorema 3.2.1 para o caso Euclidiano e o caso do espaço de sequências com expoente variável, denotado por $l^{\{p_n\}}$. No contexto Euclidiano, abordado no Capítulo 4, destacaremos duas caracterizações para conjuntos precompactos, sendo uma delas com um enfraquecimento na hipótese sobre a função expoente. E, ainda, trataremos do caso da não-invariância por translações dos espaços $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para $p(\cdot)$ não constante, como o intuito de exemplificar que mesmo ocorrendo este fato podemos encontrar famílias precompactas neste espaço, sem nos recairmos sempre no caso $p(\cdot)$ constante. Para o caso do espaço $l^{\{p_n\}}$, retratado no Capítulo 5, propomos a princípio em explorar algumas de suas propriedades básicas, tendo por referência [16], para então completarmos com a caracterização de precompactos nestes espaços.

Para finalizar, salientamos que o tema proposto possui uma aplicação direta (veja [10]), onde prova-se o mergulho compacto do espaço de Hajlasz-Sobolev, denotado por $M^{1,p(\cdot)}$, em $L^{p(\cdot)}$ para o caso de espaços métricos compactos munido por uma medida de duplicação e $p(\cdot)$ uma função expoente log-Hölder contínua.

Capítulo 1

Preliminares

O presente capítulo tem por objetivo expor os conceitos basilares que envolvem o tema deste estudo. As propriedades e definições aqui estudadas, muitas vezes serão diretamente aplicadas ao longo da dissertação, enquanto outras serão apresentadas a fim de facilitar a compreensão deste trabalho.

1.1 Uma Coletânea de Resultados

Nesta seção apresentamos os conceitos iniciais para a leitura desta dissertação e também estabelecemos algumas notações que serão utilizadas ao longo do texto. A teoria aqui apresentada pode ser encontrada com mais profundidade e detalhes nas referências [8, 13, 15, 17, 19, 20].

Definição 1.1.1. *Se X e Y são conjuntos, denotamos por $X\backslash Y$, a* ***diferença*** *de X por Y, isto é,*

$$X\backslash Y := \{x\ ;\ x \in X \text{ e } x \notin Y\}.$$

E, ainda, será denotado por $X\Delta Y$, a ***diferença simétrica*** *de X e de Y, isto é,*

$$X\Delta Y := (X\backslash Y) \cup (Y\backslash X).$$

Lema 1.1.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $a,\ b \geq 0$. Então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Proposição 1.1.1 (Desigualdade de Young). *Para* $1 < p < \infty$ *e* $q = \frac{p}{p-1}$, *isto é,* $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *e para quaisquer dois números positivos* a *e* b, *temos*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Definição 1.1.2. *Uma **métrica** num conjunto* M *é uma aplicação* $d : M \times M \to \mathbb{R}$, *que associa a cada par ordenado de elementos* $x,\ y \in M$ *um número real* $d(x,y)$, *chamado a **distância** de* x *a* y, *de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer* $x,\ y,\ z \in M$:

(i) $d(x,x) = 0$;

(ii) Se $x \neq y$ *então* $d(x,y) > 0$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 1.1.3. *Um **espaço métrico** é um par* (M,d), *onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M. *Ou, ainda, diremos simplesmente "o espaço métrico* M*", deixando subentendida qual métrica* d *que está sendo considerada.*

Definição 1.1.4. *Em um espaço métrico* M *a **bola aberta** de centro* a *e raio* r *é o conjunto* $B(a,r)$, *também denotado simplesmente por* B, *definido por*

$$B(a,r) := \{x \in M \ ; \ d(x,a) < r\}.$$

Definição 1.1.5. *Seja* M *um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto* $X \subset M$ *é **aberto** se para todo* $x \in X$ *existe* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subset X$.

Definição 1.1.6. *Um ponto* a *diz-se **aderente** a um subconjunto* X *de um espaço métrico* (M,d) *quando* $d(a,X) = 0$, *isto é, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $x \in X$ *tal que* $d(a,x) < \varepsilon$.

Definição 1.1.7. *O **fecho** de um conjunto* X *num espaço métrico* M *é o conjunto* $\overline{X}$ *dos pontos de* M *que são aderentes a* X.

Definição 1.1.8. *Um subconjunto* $X \subset M$ *diz-se **denso** em* M *quando* $\overline{X} = M$.

Definição 1.1.9. *Um subconjunto $X \subset M$ diz-se* ***fechado*** *em M quando seu complementar, X^c, é aberto, ou quando $\overline{X} = X$. Ou ainda, se $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, então $x \in X$.*

Definição 1.1.10. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma* ***cobertura*** *de X é uma família $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de M tal que $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in L} \mathcal{C}_\lambda$.*

Se existe um subconjunto $J \subset L$ tal que, para cada $x \in X$, ainda se pode obter $\lambda \in J$ com $x \in \mathcal{C}_\lambda$, então a subfamília $\mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in J}$ chama-se ***subcobertura*** *de $\mathcal{C}$.*

Uma cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in L} \mathcal{C}_\lambda$ diz-se ***aberta*** *quando cada conjunto $\mathcal{C}_\lambda$, $\lambda \in L$, é aberto em M. A cobertura $X \subset \bigcup\limits_{\lambda\in L} \mathcal{C}_\lambda$ diz-se* ***finita*** *quando L é um conjunto finito.*

Definição 1.1.11. *Um espaço métrico M chama-se* ***compacto*** *quando toda cobertura aberta de M possui uma subcobertura finita.*

Definição 1.1.12. *Um subconjunto X de um espaço métrico (M, d) chama-se* ***limitado*** *quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer x, $y \in X$. O menor desses números c será chamado o* ***diâmetro*** *de X, isto é, definimos o diâmetro de X por*

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y)\ ;\ x, y \in X\}.$$

Definição 1.1.13. *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M, d) é chamada* ***de Cauchy****, se $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $m, n \to \infty$. Diz-se que (M, d) é* ***completo*** *quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Definição 1.1.14. *Uma* ***norma*** *num espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$ (real ou complexo) é uma aplicação $\|\,.\,\|_{\mathrm{V}} : V \to \mathbb{R}$, que satisfaz:*

(i) $\|\xi\|_{\mathrm{V}} \geq 0$ *para todo* $\xi \in V$, *e* $\|\xi\|_{\mathrm{V}} = 0$ *se, e somente se,* $\xi = 0$;

(ii) $\|\lambda\, \xi\|_{\mathrm{V}} = |\lambda|\, \|\xi\|_{\mathrm{V}}$ *para todo* $\xi \in V$ *e qualquer* $\lambda \in \mathbb{F}$;

(iii) $\|\xi + \eta\|_{\mathrm{V}} \leq \|\xi\|_{\mathrm{V}} + \|\eta\|_{\mathrm{V}}$ *para todos* $\xi, \eta \in V$.

Definição 1.1.15. *Um* ***espaço vetorial normado*** *é um par $(V, \|\,.\,\|_{\mathrm{V}})$, onde V é um espaço vetorial (real ou complexo) e $\|\,.\,\|_{\mathrm{V}}$ é uma norma em V. Ou, ainda, diremos* *simplesmente "o espaço normado V", deixando subentendida qual norma $\| \,.\, \|_{\mathrm{V}}$ que está sendo considerada.*

Definição 1.1.16. *Sejam $(V, \| \,.\, \|_{\mathrm{V}})$ e $(W, \| \,.\, \|_{\mathrm{W}})$ espaços normados. Definimos a norma do espaço $V + W := \{x + y : \ x \in X, \ y \in Y\}$, por*

$$\| \, z \, \|_{\mathrm{V+W}} = \inf \{ \| \, x \, \|_{\mathrm{V}} + \| \, y \, \|_{\mathrm{W}} \ : \ x \in V, \ y \in W, \ z = x + y \} \, .$$

Definição 1.1.17. *Um espaço normado $(V, \| \,.\, \|_{\mathrm{V}})$ é dito **espaço de Banach**, quando $(V, \| \,.\, \|_{\mathrm{V}})$ for completo em relação a métrica induzida pela norma, isto é,*

$$d(x, y) = \|x - y\|_{\mathrm{V}} \, , \quad x, y \in V.$$

Definição 1.1.18.

*(a) Um **operador linear** entre espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : \mathrm{dom}T \subset X \to Y$, em que seu domínio $\mathrm{dom}T$ é um subespaço vetorial e $T(\xi + \alpha\, \eta) = T(\xi) + \alpha\, T(\eta)$, para todos $\xi, \eta \in \mathrm{dom}T$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ (real ou complexo);*

*(b) Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear contínuo é também chamado de **limitado**, e o conjuntos dos operadores limitados de X em Y serão denotados por $B(X, Y)$;*

*(c) Se X é um espaço normado, então o espaço de Banach $B(X, \mathbb{F})$ será denotado por X^* e chamado de **espaço dual** de X. Cada elemento de X^* é chamado de **funcional linear** contínuo em X.*

Observação 1.1.1. *Como X^* é um espaço de Banach, está bem definido $X^{**} := (X^*)^*$, chamado de **bidual** de X. Uma maneira de identificar elementos de X com elementos de X^{**} consiste em: a cada $\xi \in X$ associa-se $\xi^{**} \in X^{**}$ por*

$$\xi^{**}(f) := f(\xi), \quad f \in X^*.$$

*Esta aplicação é chamada **aplicação canônica** de X em X^{**} e é uma isometria linear.*

Definição 1.1.19. *Se a aplicação canônica é sobrejetora, então o espaço normado X é chamado espaço* ***reflexivo****. Ou seja, X é reflexivo se ele é isomorfo a X^{**} e o isomorfismo é dado por esta aplicação canônica.*

Definição 1.1.20. *Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$* ***converge fracamente*** *a $\xi \in X$ se $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ para todo $f \in X^*$.*

Teorema 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui subsequência fracamente convergente.*

Definição 1.1.21. *Seja X um conjunto.*

(a) Uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X é dita uma ***topologia*** *em X, se $\mathcal{T}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

  (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;

  (ii) Se $V_i \in \mathcal{T}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{T}$;

  (ii) Se $\{V_\alpha\}$ é uma coleção arbitrária de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

(b) Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X, então X é chamado um ***espaço topológico****, e os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados* ***conjuntos abertos*** *de X. Usa-se a notação $(X, \mathcal{T})$ para denotar espaços topológicos, mas comumente é usada simplesmente a notação X para denotar estes espaços, quando é claro a topologia em que X esta munido;*

(c) Seja $f : X \to Y$, onde X e Y são espaços topológicos, então f é dita ***contínua*** *se $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto de X para todo conjunto aberto, V, de Y.*

Definição 1.1.22. *Seja f um função real em um espaço topológico.*

(a) Se o conjunto $\{x\,;\ f(x) > \alpha\}$ é aberto para todo número real α, dizemos que f é ***semicontínua inferiormente****;*

(b) Se o conjunto $\{x\,;\ f(x) < \alpha\}$ é aberto para todo número real α, dizemos que f é ***semicontínua superiormente****.*

Definição 1.1.23. *Chamamos de **suporte** de uma função complexa f em um espaço topológico X o fecho do conjunto $\{x\ ;\ f(x) \neq 0\}$, denotado por* $\text{supp} f$.

Definição 1.1.24. *Seja X um conjunto.*

*(a) Uma coleção $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de X é dita uma σ-**álgebra** em X se $\mathfrak{M}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $X \in \mathfrak{M}$;

(ii) Se $A \in \mathfrak{M}$, então $A^c \in \mathfrak{M}$, onde A^c é o complementar de A relativo a X;

(ii) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se $A_n \in \mathfrak{M}$ para $n \in \mathbb{N}$, então $A \in \mathfrak{M}$.

*(b) Se $\mathfrak{M}$ é uma σ-álgebra em X, então X é chamado um **espaço mensurável**, e os elementos de $\mathfrak{M}$ são chamados **conjuntos mensuráveis** de X. Usa-se a notação $(X, \mathfrak{M})$ para denotar espaços mensuráveis, mas comumente é usada simplesmente a notação X para denotar estes espaços, quando é claro a σ-álgebra que X está munido;*

*(c) Se X é um espaço mensurável, Y é um espaço topológico e f é uma aplicação de X para Y, então f é dita **mensurável** se $f^{-1}(V)$ é um conjunto mensurável de X para todo conjunto aberto, V, de Y.*

Proposição 1.1.2. *Seja X um espaço mensurável. Se E é um conjunto mensurável de X e se*

$$\chi_E(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E, \end{cases}$$

*então χ_E é uma função mensurável, chamada de **função característica** do conjunto E.*

Teorema 1.1.2. *Seja X um espaço mensurável. Se $\mathcal{F}$ é uma coleção de subconjuntos de X, então existe uma menor σ-álgebra $\mathfrak{M}^*$ em X tal que $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}^*$. Chamamos $\mathfrak{M}^*$ de σ-**álgebra gerada** por $\mathcal{F}$.*

Observação 1.1.2. *Se X é um espaço topológico, pelo Teorema 1.1.2 existe a menor σ-álgebra $\mathcal{B}$ em X tal que todo conjunto aberto de X pertence a $\mathcal{B}$. Chamamos $\mathcal{B}$ de **σ-álgebra de Borel** de X e seus elementos são chamados de **conjuntos de Borel** ou **borelianos** de X.*

Definição 1.1.25. *Sejam X um conjunto e $\mathfrak{M}$ uma σ-álgebra em X.*

*(a) Uma **medida positiva** é uma função $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ aditiva contável, ou seja, se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjunto mensuráveis dois a dois disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right).$$

*Frequentemente chamamos uma medida positiva somente de **medida**;*

*(b) Um **espaço de medida** é um espaço mensurável munido de uma medida positiva definida na σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis. Denotamos um espaço de medida pela trinca $(X, \mathfrak{M}, \mu)$;*

*(c) Se $\mu(X) < \infty$ dizemos que μ é uma **medida finita**. Se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, onde $A_i \in \mathfrak{M}$ com $\mu(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, dizemos que μ é uma **medida σ-finita** ou, ainda, dizemos que X é um **conjunto σ-finito** para μ;*

*(d) Se para qualquer conjunto A mensurável de X com $\mu(A) > 0$ existe um subconjunto $\hat{A}$ de A mensurável tal que $\mu(A) > \mu(\hat{A}) > 0$, dizemos que a medida μ é uma medida **não-atômica**;*

*(e) Uma **medida de Borel** em X é uma medida μ definida na $\sigma-$álgebra de Borel de X. E, ainda, uma medida de Borel μ em X é dita **regular** quando satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) ; A \subset U$ aberto em $X\}$, para todo A boreliano em X;

(ii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) ; K \subset U$ compacto$\}$, para todo subconjunto aberto U de X;

(iii) $\mu(K) < \infty$, para todo subconjunto compacto K de X.

Definição 1.1.26. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida.*

(a) Um conjunto $A \in \mathfrak{M}$ *tal que* $\mu(A) = 0$ *é chamado de conjunto de* ***medida nula****;*

(b) Se uma afirmativa sobre pontos de $x \in X$ *vale, exceto possivelmente para* x *em um conjunto de medida nula, dizemos que a afirmativa vale quase sempre em* X*;*

(c) Uma medida cujo domínio contém todos os subconjuntos de conjuntos com medida nula é chamada ***completa****.*

Definição 1.1.27. *Existe um medida* μ *completa definida na* $\sigma-$*álgebra* $\mathfrak{M}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) Para todo $W = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i, \; 1 \leq i \leq k\}$*, têm-se*

$$\mu(W) = \mathrm{vol}(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) \, ;$$

(b) $\mathfrak{M}$ *contém todos os conjuntos de Borel e* μ *é regular;*

(c) μ *é invariante por translação, isto é,* $\mu(E + x) = \mu(E)$*, para todo* $E \in \mathfrak{M}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

(d) Se ν *é qualquer medida de Borel positivamente invariante por translação em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\nu(K) < \infty$ *para todo conjunto compacto* K*, então existe uma constante* c *tal que* $\nu(E) = c\mu(E)$ *para todo conjunto de Borel* $E \subset \mathbb{R}^n$*;*

(e) Para toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *corresponde um número real* ΔT *tal que,* $\mu(T(E)) = \Delta T \mu(E)$*, para todo* $E \in \mathfrak{M}$*.*

Os membros de $\mathfrak{M}$ *são chamados de conjuntos* ***Lebesgue mensuráveis*** *em* $\mathbb{R}^n$ *e* μ *é dita* ***medida de Lebesgue*** *em* $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 1.1.28. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Para uma sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funções complexas em* X*, uma função complexa* f *em* X *e um subconjunto mensurável* A *de* X*, dizemos que*

(a) *a sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* f*, que denotaremos por* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$*,* ***pontualmente*** *em* A *se* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*, para todo* $x \in A$*;*

(b) *a sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$*,* ***pontualmente quase sempre*** *em* A*, se* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *pontualmente em* $A\backslash B$*, onde* $B \subset X$ *é mensurável e possui medida nula;*

(c) *a sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$*,* ***uniformemente*** *em* A*, se para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$*, para todo* $n \geq N$*.*

Definição 1.1.29. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida.*

(a) *Denotamos por* $L^+(X)$ *o espaço de todas as funções mensuráveis* $f : X \to [0, \infty]$*.*

(b) *Denomina-se por* ***função simples*** *uma função* $s \in L^+(X)$ *dada pela seguinte forma*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *são distintos e se* $E \in \mathfrak{M}$*, definimos*

$$\int_E s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i \cap E\right);$$

(c) *Se* $f \in L^+(X)$ *e* $E \in \mathfrak{M}$*, definimos*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \int_E s \, \mathrm{d}\mu,$$

o supremo sobre todas as funções simples tal que $0 \leq s \leq f$ *e o chamamos de* ***integral de Lebesgue*** *de* f *sobre* E*, com respeito a* μ*.*

Teorema 1.1.3 (Convergência Monótona de Lebesgue). *Sejam* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $L^+(X)$*, e suponha que*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$ *para quase todo* $x \in X$*;*

(b) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *para quase todo* $x \in X$*.*

Então f *é mensurável, e*

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Lema 1.1.2 (de Fatou). *Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n \in L^+(X)$, para cada inteiro positivo n, então*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Corolário 1.1.1. *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida e suponha que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^+(X)$, $f \in L^+(X)$ e $f_n \to f$ quase sempre, então*

$$\int_X f\, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Definição 1.1.30. *Denotamos por $L^1(X)$ ou $L^1(\mu)$ a coleção de funções complexas mensuráveis f em X tal que*

$$\int_X |f|\, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

*Chamamos os membros de $L^1(\mu)$ de funções **Lebesgue integráveis** (com respeito a μ).*

Teorema 1.1.4 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(\mu)$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ exista para quase todo $x \in X$. Suponha ainda que exista $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para quase todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(\mu)$ e valem as seguintes propriedades:*

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, \mathrm{d}\mu = 0$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu = \int_X f\, \mathrm{d}\mu.$

Teorema 1.1.5 (de Fubini). *Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos e seja f um função $(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N})$-mensurável em $X\times Y$.*

(a) Se $0 \leq f \leq \infty$, e se

$$\varphi(x) = \int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu \qquad \gamma(x) = \int_X f^y\, \mathrm{d}\mu \quad (x \in X, y \in Y),$$

então φ é $\mathfrak{M}$-mensurável, γ é $\mathfrak{N}$-mensurável e

$$\int_X \varphi\, \mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f\, \mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_Y \gamma\, \mathrm{d}\nu;$$

(b) Se $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ e se

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x \, \mathrm{d}\nu \quad e \quad \int_X \varphi^* \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

então $f \in L^1(\mu\times\nu)$;

(c) Se $f \in L^1(\mu\times\nu)$, então $f_x \in L^1(\nu)$ para quase todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para quase todo $y \in Y$; as funções φ e γ definidas em (a) pertencem a $L^1(\mu)$ e $L^1(\nu)$, respectivamente, e o item (b) vale.

Definição 1.1.31. *Dizemos que uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções mensuráveis em um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ é de **Cauchy em medida** em X se para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\mu\left(x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{quando } m, n \to \infty,$$

*e que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge em medida** para f em X se para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\mu\left(x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Teorema 1.1.6 (Riesz). *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ em medida em X, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente a f quase sempre em X.*

Teorema 1.1.7 (Egoroff). *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $\mu(X) < \infty$ e que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f$ sejam funções mensuráveis em X tais que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ quase sempre. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \varepsilon$ e $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente em E^{c}.*

Proposição 1.1.3. *Assuma que E possua medida finita. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^+(E)$ que converge pontualmente quase sempre para f em E e ainda que f é finita quase sempre em E. Então $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em medida em E.*

Definição 1.1.32. *Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Uma função mensurável f é dita **localmente integrável** (com respeito a μ), se f for integrável em cada subconjunto de A de seu domínio X, cujo fecho é compacto, isto é, seja $\overline{K} \subset A$ compacto então*

$$\int_K |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Denotamos por $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ a coleção de funções localmente integráveis f em A.

Definição 1.1.33. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Se* $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ *e* A *é um conjunto mensurável de* X*, definimos o* ***valor médio*** *da função* f *sobre o conjunto* A *por*

$$\fint_A f \, \mathrm{d}\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.1.8 (**da Diferenciação de Lebesgue**)**.** *Se* f *é não-negativa e localmente integrável no espaço de medida* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$*, então*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f \, \mathrm{d}\mu = f(x),$$

para quase todo $x \in X$.

Definição 1.1.34. *Caso* $1 \leq p < \infty$*, definimos o espaço* l^p *como o conjunto de todas as sequências* $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, com* $x_n \in \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Caso $p = \infty$*, o espaço* l^∞ *é definido como o coleção de todas as sequências* $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, com* $x_n \in \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tais que*

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty.$$

Definição 1.1.35. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Caso* $1 \leq p < \infty$*, definimos o espaço* $L^p(X)$ *como o conjunto de todas as funções complexas mensuráveis em* X*, tais que*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Caso $p = \infty$*, o espaço* $L^\infty(X)$ *é definido como o coleção de todas as funções complexas mensuráveis em* X*, tais que*

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Proposição 1.1.4 (**Desigualdade de Hölder**)**.** *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *e suponha* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Se* $f \in L^p(X)$ *e* $g \in L^q(X)$*, então* $fg \in L^1(X)$ *e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Proposição 1.1.5 (**Desigualdade de Chebyshev**). *Se* $f \in L^p$ $(0 < p < \infty)$, *então para qualquer* $\alpha > 0$,

$$\mu\left(\{x : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p.$$

Proposição 1.1.6 (**Desigualdade de Jensen**). *Sejam* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida,* $q \in [1, \infty]$ *constante e* $f \in L^q(B)$, *onde* B *é uma bola em* X, *então*

$$\left(⨍_B |f(y)| \; \mathrm{d}\mu(y)\right)^q \leq ⨍_B |f(y)|^q \; \mathrm{d}\mu(y).$$

Definição 1.1.36. *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida. Dados* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^s(X)$ *e o conjunto* $\lambda(E) := \limsup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n(x)|^s \; \mathrm{d}\mu(x)$, *para* $E \subset X$ *mensurável, dizemos que* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é* ***equi-integrável*** *se:*

1. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *com* $\lambda(E) < \varepsilon$ *para todo* E *mensurável com* $\mu(E) < \delta$;

2. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* X_0 *com* $\mu(X_0) < \infty$ *e* $\lambda(X \backslash X_0) < \varepsilon$.

Teorema 1.1.9 (**da Convergência de Vitali**). *Seja* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *um espaço de medida* $\sigma-$*finito e completo. Seja ainda* $1 \leq s < \infty$ *e* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^s(X)$ *uma sequência de funções que converge quase sempre para* f *em* X. *Então* $f \in L^s(X)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^s(X)} \longrightarrow 0$ *se, e somente se* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é equi-integrável.*

1.2 Espaços de Lebesgue com Expoente Variável

Nesta seção daremos a definição precisa dos espaços de Lebesgue com expoente variável, também comumente chamado por espaços de Lebesgue generalizados, que diferem dos espaços de Lebesgue clássicos devido o expoente p não ser constante e sim uma função.

Apresentaremos também algumas de suas propriedades estruturais e, salientamos aqui, que demonstrações de resultados que, porventura não forem expostas, serão substituídas por referências apropriadas.

Ao longo desta seção, considere (Ω, μ) um espaço de medida $\sigma-$finito, onde Ω é um conjunto mensurável qualquer e μ é uma medida completa. As principais referências para esta seção são [6, 7, 11].

1.2.1 Definições e Resultados Básicos

Para a definição de espaços de Lebesgue com expoente variável é necessário primeiramente introduzirmos qual tipo de expoente variável estamos interessados.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis com respeito a μ definidas em Ω no intervalo $[1,\infty]$, isto é, $p(\cdot) : \Omega \to [1,\infty]$. Os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ são chamados de* ***funções expoente*** *ou simplesmente* ***expoentes****. Para distinguir entre expoente variáveis e constantes, denotaremos funções expoente por $p(\cdot)$.*

Exemplo 1.2.1. *Alguns exemplos de funções expoente em $\Omega = \mathbb{R}$ são $p(x) = p$ para alguns p constantes, $1 \leq p \leq \infty$, ou $p(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$.*

Funções expoente podem ser ilimitadas, como por exemplo: se $\Omega = (1,\infty)$, seja $p(x) = x$, e se $\Omega = (0,1)$, seja $p(x) = \dfrac{1}{x}$.

Definição 1.2.2. *Dados $U \subset \Omega$ e $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos os pontos $p^+(U)$ e $p^-(U)$ por*

$$p^+(U) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in U} p(x) \quad e \quad p^-(U) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in U} p(x).$$

Caso $U = \Omega$, escreveremos simplesmente, $p^+ = p^+(\Omega)$ e $p^- = p^-(\Omega)$.

Neste trabalho vamos assumir que as funções expoente são **limitadas**, isto é, $p^+ < \infty$. Logo temos a seguinte possibilidade:

$$1 \leq p^- \leq p^+ < \infty.$$

Definição 1.2.3. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definimos a* ***função expoente conjugado****, $p'(\cdot)$, pela fórmula*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \quad x \in \Omega,$$

com a seguinte convenção: $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Agora estamos prontos para definir os espaços de Lebesgue com expoente variável em Ω, denotado por $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Definição 1.2.4. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e f uma função mensurável, definimos a* ***função modular*** *(ou simplesmente* ***modular****) associada a $p(\cdot)$, por*

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Além disso, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ consiste das funções mensuráveis, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, para o qual o modular, $\rho_{p(\cdot)}(f)$, é finito, ou seja,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável}, \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty \right\}.$$

Como vimos, o modular é de grande importância para os espaços de Lebesgue generalizados. Assim, é importante destacar algumas de suas propriedades:

Proposição 1.2.1. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, tem-se que para todas f, $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$:*

(a) $\rho_{p(\cdot)}(f) = 0$ se, e somente se, $f = 0$ quase sempre em Ω;

(b) $\rho_{p(\cdot)}(-f) = \rho_{p(\cdot)}(f)$;

(c) $\rho_{p(\cdot)}(tf + (1-t)g) \leq t\rho_{p(\cdot)}(f) + (1-t)\rho_{p(\cdot)}(g)$, para todo $t \in [0,1]$, isto é, $\rho_{p(\cdot)}$ é uma função convexa;

(d) $\rho_{p(\cdot)}(f+g) \leq 2^{p^+-1}\left[\rho_{p(\cdot)}(f) + \rho_{p(\cdot)}(g)\right]$;

(e) Se $\lambda > 1$, então

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda^{p^-}\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) \leq \lambda^{p^+}\rho_{p(\cdot)}(f),$$

e se $0 < \lambda < 1$, temos

$$\lambda^{p^+}\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) \leq \lambda^{p^-}\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(f);$$

(f) Para cada $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \backslash \{0\}$, a função $\rho_{p(\cdot)}(\lambda f)$ é crescente, contínua e convexa em $\lambda \in [0, \infty)$.

Demonstração. Veja [11], Proposição 1.1. ∎

Observação 1.2.1. *Segue imediatamente da definição de modular que para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, que*

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) &= \rho_{p(\cdot)}(|\lambda|\, f) \leq |\lambda|\, \rho_{p(\cdot)}(f), \ \text{para todo} \ |\lambda| \leq 1, \\ \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) &= \rho_{p(\cdot)}(|\lambda|\, f) \geq |\lambda|\, \rho_{p(\cdot)}(f), \ \text{para todo} \ |\lambda| \geq 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposição 1.2.2. *Dado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Segue dos itens (a), (b), (d) e (e) da Proposição 1.2.1. ∎

Vamos agora definir uma norma no espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, que será denotada por $\| \, . \, \|_{p(\cdot)}$.

Definição 1.2.5. *Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, e f uma função mensurável, defina o seguinte funcional, chamado de **"Norma de Luxemburg"**,*

$$||f||_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$ [1]

O funcional $\| \, . \, \|_{p(\cdot)}$ define uma norma em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Notamos que, frequentemente, se faz necessário passar entre norma e modular. Assim, os próximos resultados nos fornecem relações entre a norma e o modular que serão muito úteis ao longo deste trabalho.

Lema 1.2.1. *Dados $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. São equivalentes:*

(i) $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$;

(ii) $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

Além disso, como $\rho_{p(\cdot)}(f)$ é contínuo, então $\|f\|_{p(\cdot)} < 1$ e $\rho_{p(\cdot)}(f) < 1$ são equivalentes, bem como também são equivalentes $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$ e $\rho_{p(\cdot)}(f) = 1$.

Demonstração. Considere $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Se $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$, então $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ pela definição de $\| \cdot \|_{p(\cdot)}$. Por outro lado, caso $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, então $\rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1$, para todo $\lambda > 1$. Logo, como $\rho_{p(\cdot)}(f)$ é contínuo, segue que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

Agora, se $\|f\|_{p(\cdot)} < 1$ então existe $\lambda < 1$ tal que $\rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1$. Assim, por (1.1) temos que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \lambda \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq \lambda < 1$. Reciprocamente, caso $\rho_{p(\cdot)}(f) < 1$, segue da

[1] Cabe destacar que para o caso dos espaços de Lebesgue clássicos, quer dizer, $p =$ constante, temos que a norma estabelecida na Definição 1.2.5 coincide com a norma usual, (Veja [11], Proposições 1.3 e 1.4).

continuidade de $\rho_{p(\cdot)}$ que existe $\alpha > 1$ tal que $\rho_{p(\cdot)}(\alpha f) < 1$. Portanto, $\|\alpha f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ e $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \dfrac{1}{\alpha} < 1$.

A equivalência de $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$ e $\rho_{p(\cdot)}(f) = 1$ segue como uma combinação dos casos anteriores. ■

Proposição 1.2.3. *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então*

(i) Se $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ então $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$;

(ii) Se $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$ então $\rho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$;

(iii) $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho_{p(\cdot)}(f) + 1$;

(iv) Se $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$, então $\|f\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}$;

(v) Se $\|f\|_{p(\cdot)} < 1$, então $\|f\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p^-}$.

Demonstração. Considere $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

(i): Se $f \equiv 0$, a prova é óbvia. Suponha, então que $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Como $\left\| \frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} = 1$, pelo Lema 1.2.1 segue que $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) = 1$. Dado que $\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}} \geq 1$, segue dê (1.1) que

$$1 = \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) \geq \frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}}\rho_{p(\cdot)}(f),$$

o que implica que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.

(ii): Assuma que $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$. Então $\rho_{p(\cdot)}\left(\dfrac{f}{\lambda}\right) > 1$ para $1 < \lambda \leq \|f\|_{p(\cdot)}$ e por (1.1) segue que

$$1 < \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\rho_{p(\cdot)}(f),$$

o que implica que $\lambda \leq \rho_{p(\cdot)}(f)$. Como λ é arbitrário, vem que $\rho_{p(\cdot)}(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$.

(iii): Segue imediatamente de *(ii)*.

(iv): Seja $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$. Então, $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) = 1$. Como $\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}} < 1$, temos pelo item (e) da Proposição 1.2.1 que

$$\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}}\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1 \leq \frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p^-}}\rho_{p(\cdot)}(f).$$

Logo $\|f\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}$.

(v): É análogo ao item *(iv)*. ∎

Como consequência do Lema 1.2.1 e da Proposição 1.2.3 obtemos o próximo resultado que nos mostra que a convergência em norma é equivalente a convergência em modular em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Proposição 1.2.4. *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Se $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_{p(\cdot)} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_n - f) = 0$.

Demonstração. Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Suponha, primeiramente, que $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_{p(\cdot)} = 0$, então dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos $||f_n - f||_{p(\cdot)} < \varepsilon < 1$. Logo, pela Proposição 1.2.3 - item (i), $\rho_{p(\cdot)}(f_n - f) \leq ||f_n - f||_{p(\cdot)} < \varepsilon$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_n - f) = 0.$$

Reciprocamente, se $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{p(\cdot)}(f_n - f) = 0$, dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ temos $\rho_{p(\cdot)}(f_n - f) < \varepsilon^{p^+} < \varepsilon < 1$. Logo, pelo Lema 1.2.1, $||f_n - f||_{p(\cdot)} < 1$. E, por fim, pela Proposição 1.2.3 - item (v), $\|f_n - f\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho_{p(\cdot)}(f_n - f) < \varepsilon^{p^+}$, para todo $n \geq n_1$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{p(\cdot)} = 0.$$

∎

1.2.2 Propriedades do Espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Intuitivamente podemos nos perguntar de quais propriedades estruturais os espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ estão munidos. Como vimos, eles são espaços vetoriais normados e adiante veremos que uma de suas propriedades básicas é que são espaços de Banach reflexivos. A proposta desta parte da seção será apresentar tais propriedades de modo que no decorrer deste estudo possamos fazer uso das mesmas. Em especial, pode-se destacar que será exposto um teorema do tipo de convergência de Vitali (Teorema 1.1.9) que será essencial para a demonstração de um dos principais resultados estudados nesta dissertação.

Teorema 1.2.1. *$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [11], Teorema 1.8. ∎

Teorema 1.2.2 (Representação de Riesz para $L^{p(\cdot)}(\Omega)$).
Seja $p^- > 1$. Então $(L^{p(\cdot)}(\Omega))^* = L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, isto é,

(i) Para toda $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, f definido por

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \tag{1.2}$$

é um funcional linear contínuo sobre $L^{p(\cdot)}(\Omega)$;

(ii) Para todo funcional linear contínuo f definido em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, existe um único $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ tal que f é definido exatamente por (1.2).

Ou seja, o espaço dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [11], Teorema 1.12. ∎

Teorema 1.2.3. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração. Veja [11], Teorema 1.11. ∎

Proposição 1.2.5 (Desigualdade de Hölder para $L^{p(\cdot)}(\Omega)$).
Seja $p^- > 1$. Se $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, então

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}\right) \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Veja [11], Proposição 1.10. ∎

Observação 1.2.2. *Note que, como $p^- > 1$, isto é, $\dfrac{1}{p^-} < 1$, segue que $\dfrac{1}{p'^-} < 1$ e $\left(\dfrac{1}{p^-} + \dfrac{1}{p'^-}\right) < 2$. Portanto, a segunda desigualdade em (1.3) segue de forma imediata.*

Já é bem conhecido da teoria dos espaços de Lebesgue clássicos que se $\mu(\Omega) < \infty$, $L^p(\Omega)$ é um subespaço de $L^q(\Omega)$ com p, $q \in [1, \infty]$ se, e somente se $p \geq q$. Logo, isto nos sugere uma semelhante caracterização para o mergulho $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ para $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ que veremos a seguir.

Teorema 1.2.4. *Sejam $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. Defina o expoente $r(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ por*

$$\frac{1}{r(y)} := \max\left\{\frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right\}, \text{ para todo } y \in \Omega.$$

(a) Se $q(\cdot) \leq p(\cdot)$ quase sempre em Ω e $1 \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$, então $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ com norma no máximo $2||1||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}$;

(b) Se μ é uma medida não-atômica e $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ com norma $K > 0$, então $q(\cdot) \leq p(\cdot)$ quase sempre em Ω e $||1||_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq 4K$.

Demonstração. Veja [7], Teorema 3.3.1. ∎

Teorema 1.2.5. *Sejam $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $p(\cdot) \leq q(\cdot) \leq r(\cdot)$ quase sempre em Ω. Então*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{r(\cdot)}(\Omega).$$

As constantes de mergulho são no máximo 2. Mais precisamente, para $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ as funções $g_0 := \operatorname{sgn} g \, \max\{|g| - 1, 0\}$ e $g_1 := \operatorname{sgn} g \, \min\{|g|, 1\}$ satisfazem $g = g_0 + g_1$, $|g_0|$, $|g_1| \leq |g|$, $||g_0||_{p(\cdot)} \leq 1$ e $||g_1||_{r(\cdot)} \leq 1$.

Demonstração. Veja [7], Teorema 3.3.11. ∎

Agora será demonstrado um lema técnico, que é apontado por [10] como uma versão para $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ da Desigualdade de Chebyshev (Proposição 1.1.5).

Lema 1.2.2. *Para qualquer $\lambda > 0$ e $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos:*

$$\mu\left(\{x \in \Omega; |g(x)| \geq \lambda\}\right) \leq \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}} \, \mathrm{d}\mu(x), & \text{se } 0 < \lambda < 1 \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}} \, \mathrm{d}\mu(x), & \text{se } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Como $1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, para todo $x \in \Omega$, segue que:

- $\dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}} \leq \dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} \leq \dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}}$, para $0 < \lambda < 1$;
- $\dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}} \leq \dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} \leq \dfrac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}}$, para $\lambda \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Logo, } \mu\left(\{x \in \Omega;\ |g(x)| \geq \lambda\}\right) &= \int_{\left\{x \,\in\, \Omega;\ \frac{|g(x)|}{\lambda} \geq 1\right\}} \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int_\Omega \frac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^+}}\, \mathrm{d}\mu(x), & \text{se } 0 < \lambda < 1 \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{|g(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p^-}}\, \mathrm{d}\mu(x), & \text{se } \lambda \geq 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

■

O teorema a seguir é tipo de convergência de Vitali (Teorema 1.1.9) e em sua demonstração utilizaremos o Lema 1.2.2. Empregaremos, ainda, as seguintes notações, $\mathcal{P}(X,\mu)$ e $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, para o conjunto das funções expoentes e para o espaço de Lebesgue com expoente variável, respectivamente, quando o espaço em discussão for um espaço de medida (X,μ).

Teorema 1.2.6. *Sejam (X,μ) um espaço de medida e $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X,\mu)$, $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$. Assuma que f_n, $f \in L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em medida;*

(ii) *a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é $p(\cdot)$-equi-integrável, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \subset X$ com $\mu(A) < \delta$, vale que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon;$$

(iii) a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decai uniformemente no infinito, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_0 \subset X$ com $\mu(C_0) < \infty$, tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\setminus C_0} |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon.$$

Demonstração. Suponha, primeiramente, que são verdadeiras *(i)*, *(ii)* e *(iii)* e então mostraremos que $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$.

Como $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em medida pelo Teorema de Riesz (Teorema 1.1.6), $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge quase sempre em (X,μ) para alguma $f \in L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, (utilizaremos a notação $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para tal subsequência).

Fixe $\varepsilon > 0$ e sejam $C_0 \subset X$ e $\delta > 0$ como em *(ii)* e *(iii)*. E ainda, podemos escolher $C' \subset X$ com $\mu(C') < \infty$, tal que

$$\int_{X\setminus C'} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Considere $C = C_0 \cup C'$. Desde que $\mu(C) < \infty$ (pois $\mu(C_0), \mu(C') < \infty$) e $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ quase sempre em (X,μ), então pelo Teorema de Egoroff (Teorema 1.1.7) podemos escolher $E \subset C$ tal que $\mu(C\setminus E) < \delta$ e $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente em E.

Temos que,

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{C\setminus E} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_E |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_{X\setminus C} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \;=\; I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Por *(ii)* e pelo Corolário do Lema de Fatou (Corolário 1.1.1) obtêm-se para I_1, que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{C\setminus E} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\int_{C\setminus E} |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) + \int_{C\setminus E} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \\
&< 2^{p^+-1}\left(\varepsilon + \liminf_{n\to\infty} \int_{C\setminus E} |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \\
&< 2^{p^+-1}(\varepsilon + \varepsilon) \;=\; 2^{p^+}\varepsilon.
\end{aligned}$$

E, como $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente em E, vem que $|f_n(\cdot) - f(\cdot)|^{p(\cdot)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em E. Logo,

$$I_2 \;=\; \int_E |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \;<\; \varepsilon,$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Além disso, por *(iii)* e (1.4)

$$\begin{aligned}
I_3 \;&=\; \int_{X\setminus C} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq\; 2^{p^+-1}\left(\int_{X\setminus C} |f_n(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{X\setminus C} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x)\right) \\
&\leq\; 2^{p^+-1}\left(\int_{X\setminus C_0} |f_n(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{X\setminus C'} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x)\right) \\
&<\; 2^{p^+-1}(\varepsilon + \varepsilon) \;=\; 2^{p^+}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \left(2^{p^++1} + 1\right)\varepsilon.$

Logo, pela Proposição 1.2.4, concluímos que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, devido a convergência em modular.

Reciprocamente, assuma, agora, que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ e vamos mostrar que as condições *(i)*, *(ii)* e *(iii)* são satisfeitas.

(i) Como $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ é um espaço vetorial, segue que $(f_n(\cdot) - f(\cdot)) \in L^{p(\cdot)}(X,\mu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Lema 1.2.2, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixo, temos

$$\mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \begin{cases} \displaystyle\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|^{p(x)}}{\varepsilon^{p^+}} \, \mathrm{d}\mu(x), & 0 < \varepsilon < 1 \\ \displaystyle\int_X \frac{|f_n(x) - f(x)|^{p(x)}}{\varepsilon^{p^-}} \, \mathrm{d}\mu(x), & \varepsilon \geq 1 \end{cases},$$

isto é,

$$\mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^{p^\pm}} \int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Como, por hipótese, $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, pela Proposição 1.2.4, segue que

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$

ou seja, $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em medida.

(ii) Vamos mostrar que a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é $p(\cdot)-$equi-integrável, para tal fixe $\varepsilon > 0$. Como $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X,\mu)$, pela Proposição 1.2.4, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}, \text{ para } n \geq N. \tag{1.5}$$

A partir de agora, para esta demonstração, usaremos a seguinte notação $f = f_0$. Fixe $\delta_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, para o qual para todo $A \subset X$ com $\mu(A) < \delta_i$, temos

$$\int_A |f_i(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}. \tag{1.6}$$

Então, para $\delta = \min\{\delta_i : i = 0, 1, \ldots, N-1\}, n < N$ e $A \subset X$ satisfazendo $\mu(A) < \delta$ temos

$$\int_A |f_n(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2^{p^+}} < \varepsilon,$$

já para $n \geq N$ segue de (1.5) e (1.6) que

$$\begin{aligned}
\int_A |f_n(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) &\leq 2^{p^+-1}\left(\int_A |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x)\right.\\
&+ \left.\int_A |f(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x)\right)\\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x)\right.\\
&+ \left.\int_A |f(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x)\right)\\
&< 2^{p^+-1}\left(\frac{\varepsilon}{2^{p^+}} + \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família $p(\cdot)-$equi-integrável.

(iii) Por fim, mostraremos que a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decai uniformemente no infinito. Para isto fixe $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que satisfaça (1.5), para todo $n \geq N$.

Seja $C_i \subset X, \mu(C_i) < \infty$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, tais que

$$\int_{X\setminus C_i} |f_i(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}. \tag{1.7}$$

Para $C = \bigcup_{i=0}^{N-1} C_i$ e para qualquer $n < N$, temos

$$\int_{X\setminus C} |f_n(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{X\setminus C_n} |f_n(x)|^{p(x)} \ \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon,$$

e, já para $n \geq N$ obtemos de (1.5) e (1.7) que

$$\begin{aligned}
\int_{X\setminus C} |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) &\leq 2^{p^+-1}\left(\int_{X\setminus C_0} |f_n(x)-f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right.\\
&+ \left.\int_{X\setminus C_0} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right)\\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\int_{X} |f_n(x)-f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right.\\
&+ \left.\int_{X\setminus C_0} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\right)\\
&< 2^{p^+-1}\left(\frac{\varepsilon}{2^{p^+}}+\frac{\varepsilon}{2^{p^+}}\right)\ = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que a família $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decai uniformemente no infinito, o que completa a demonstração.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Espaços de Medida Métricos

No Capítulo 1 estudamos os espaços $L^{p(\cdot)}$ de uma maneira geral. Vimos que certas propriedades são válidas para funções expoentes quaisquer, isto é, não impomos condições adicionais aos expoentes para que estas propriedades fossem satisfeitas.

Este Capítulo é dedicado a obter ferramentas mais avançadas para tais espaços, a fim de obtermos uma bagagem adequada para a compreensão dos resultados pretendidos ao longo da dissertação. Aqui estamos interessados em espaços de medida métricos onde a medida da qual o espaço está munido satisfaça uma condição especial, que chamaremos de condição de duplicação e, ainda caracterizaremos o operador maximal de Hardy-Littlewood para expoentes variáveis.

Vamos perceber que as tarefas aqui não serão fáceis, no sentido de que não usaremos simplesmente o que é conhecido para os espaços de Lebesgue clássicos, em geral não é possível transferir essas ferramentas para $L^{p(\cdot)}$, acontece que uma certa regularidade deverá ser necessária sobre os expoentes, chamada de continuidade log-Hölder.

2.1 Condição de Continuidade Log-Hölder

Para esta seção considere (X, ϱ) um espaço métrico e $\Omega \subset X$ um conjunto qualquer. A ideia aqui é estabelecer um condição quanto a regularidade dos expoentes $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$. As principais referências para esta seção são [6, 7].

Definição 2.1.1. *Diz-se que uma função* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *é* ***localmente log-Hölder contínua em*** Ω *se, existe constante* $c_1 > 0$ *tal que, para todos* $x, y \in \Omega$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)}. \tag{2.1}$$

Diz-se ainda, que o expoente $p(\cdot)$ *satisfaz a* ***condição de decaimento log-Hölder no infinito com base no ponto*** $x_0 \in X$ *se, existem constantes* $p_\infty \in \mathbb{R}$ *e* $c_2 > 0$ *tais que, para todo* $x \in \Omega$

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}. \tag{2.2}$$

Além disso, diz-se que o expoente $p(\cdot)$ *é* ***globalmente log-Hölder contínuo em*** Ω *se,* $p(\cdot)$ *satisfaz as condições (2.1) e (2.2). E, as contantes* c_1 *e* c_2 *são chamadas de* ***constante log-Hölder local*** *e* ***constante Hölder de decaimento****, respectivamente. Já, a constante*

$$C_{\log}(p) = \max\{c_1, c_2\}$$

é chamada de ***constante log-Hölder relacionada com o expoente*** $p(\cdot)$*.*

Observação 2.1.1. *A condição de decaimento estabelecida em (2.2) independe do ponto* $x_0 \in X$ *escolhido como base, isto é, se* $p(\cdot)$ *é uma função que satisfaz a condição (2.2) com base no ponto* $x_0 \in X$*, então* $p(\cdot)$ *satisfaz a condição (2.2) com base em um ponto* $y_0 \in X$ *qualquer. É claro que a constante de decaimento possivelmente poderá ser diferente para pontos distintos. (Veja [1], Lema 2.1).*

Proposição 2.1.1. *Seja* $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função globalmente log-Hölder contínua em* Ω*, então* $p(\cdot)$ *é limitada em* Ω*.*

Demonstração. De fato, seja $p : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função globalmente log-Hölder contínua em Ω. Então, como $p(\cdot)$ satisfaz a condição (2.2), existem constantes $p_\infty \in \mathbb{R}$ e $c_2 > 0$ tais que, para todo $x \in \Omega$

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} |p(x)| - |p_\infty| &\leq ||p(x)| - |p_\infty|| \\ &\leq |p(x) - p_\infty| \\ &\leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|p(x)| \leq |p_\infty| + \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.$$

Como $\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right) \geq \log\ e = 1$, segue que

$$|p(x)| \leq |p_\infty| + c_2.$$

Portanto, $p(\cdot)$ é limitada em Ω. ■

Definição 2.1.2. *Definimos o conjunto dos expoentes log-Hölder contínuos por*

$$\mathcal{P}_{\log}(\Omega) = \{p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega);\ p(\cdot) \text{ é globalmente log-Hölder contínuo}\}.$$

Proposição 2.1.2. *Se $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $p^+ < \infty$, então $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$ se, e somente se, $\dfrac{1}{p(\cdot)} \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$.*

Demonstração. De fato, se $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$ então existem constantes $c_1 > 0, c_2 > 0$ e $p_\infty \in \mathbb{R}$, tais que para todos $x, y \in \Omega$ e $x_0 \in \Omega$

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)} \quad \text{e} \quad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| &= \left|\frac{p(y) - p(x)}{p(x)p(y)}\right| \\ &\leq |p(x) - p(y)| \\ &\leq \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)}, \end{aligned}$$

e, ainda temos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| &= \left|\frac{p_\infty - p(x)}{p(x)p_\infty}\right| \\
&= \frac{1}{p(x)\,|p_\infty|}\,|p(x) - p_\infty| \\
&\leq \frac{1}{|p_\infty|}\frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.
\end{aligned}$$

Então, $\dfrac{1}{p(\cdot)}$ é globalmente log-Hölder contínuo em Ω.

Reciprocamente, se $\dfrac{1}{p(\cdot)} \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$ então existem constantes $c_1 > 0, c_2 > 0$ e $p_\infty \in \mathbb{R}$, tais que para todos $x, y \in \Omega$ e $x_0 \in \Omega$

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)} \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.$$

E, temos que

$$\begin{aligned}
|p(x) - p(y)| &= \left|p(x)\frac{p(y)}{p(y)} - p(y)\frac{p(x)}{p(x)}\right| \\
&= \left|(p(x)p(y))\left(\frac{1}{p(y)} - \frac{1}{p(x)}\right)\right| \\
&\leq |p(x)|\,|p(y)|\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \\
&\leq (p^+)^2\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \\
&\leq (p^+)^2\frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)},
\end{aligned}$$

e, de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned}
|p(x) - p_\infty| &\leq |p(x)|\,|p_\infty|\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \\
&\leq p^+\,|p_\infty|\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| \\
&\leq p^+\,|p_\infty|\,\frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $p(\cdot)$ é globalmente log-Hölder contínuo em Ω. ■

Considere agora o espaço métrico $(\mathbb{R}^n, \varrho)$. As vezes, gostaríamos que os resultados para funções expoente $p(\cdot)$ fossem definidos em todo $\mathbb{R}^n$, mas, no entanto, o expoente variável é nos dado em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$. O seguinte lema nos fornece que tal expoente variável pode ser estendido para todo $\mathbb{R}^n$ sem alterações em suas propriedades fundamentais.

Lema 2.1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$, então existe um expoente $q(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\mathbb{R}^n)$, que é uma extensão de $p(\cdot)$ em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz*

$$C_{\log}(q) = C_{\log}(p),\ q^- = p^- \ e\ q^+ = p^+.$$

Demonstração. Sejam $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ e $p_\infty \geq 1$, tal que para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)} \quad \text{e} \quad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_2}{\log\left(e + \varrho(x, x_0)\right)}.$$

Defina $a(\cdot)$, uma função contínua de $\mathbb{R}^n$, por

$$\frac{1}{a(y)} := \sup_{z \in \Omega} \left(\frac{1}{p(z)} - \frac{c_1}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(z,y)}\right)}\right),$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Note que, $a(\cdot)$ é localmente log-Hölder contínua com constante log-Hölder local menor ou igual a c_1 e ainda $a(y) = \dfrac{1}{p(y)}$, para todo $y \in \Omega$.

Para garantirmos que a extensão satisfaça também a condição de decaimento log-Hölder com base no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e possua os mesmos limites superior e inferior de $p(\cdot)$, definimos $q(\cdot)$ por

$$\frac{1}{q(y)} := \min\left\{\max\left\{a(y), \frac{1}{p_\infty} - \frac{c_2}{\log(e + \varrho(x, x_0))}, \frac{1}{p_\Omega^+}\right\}, \frac{1}{p_\infty} + \frac{c_2}{\log(e + \varrho(x, x_0))}, \frac{1}{p_\Omega^-}\right\},$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Desde que a função $x \longmapsto \dfrac{c_2}{\log(e + \varrho(x, x_0))}$ é globalmente log-Hölder contínua com constante c_2, temos que a constante de $\dfrac{1}{q(\cdot)}$ não excede o $\max\{c_1, c_2\} = C_{log}(p)$.

A condição de decaimento de $\dfrac{1}{p(\cdot)}$ nos dá que $\dfrac{1}{q(y)} = a(y) = \dfrac{1}{p(y)}$, para todo $y \in \Omega$. Portanto, $q(\cdot)$ é o expoente variável desejado. ■

Observação 2.1.2. *Se Ω é ilimitado, então $q_\infty = p_\infty$. (Veja [7], Proposição 4.1.7).*

2.2 Medidas de Duplicação

Estudaremos, agora, uma condição de duplicação sobre medidas e veremos na seção seguinte que medidas que são de duplicação nos fornecem resultados importantes. Os estudos para esta parte do trabalho foram baseados nas referências [4, 13] e destacamos que elas são boas fontes de consulta para o leitor interessado em propriedades adicionais envolvendo esta condição.

Para esta seção, considere (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico, onde ϱ é uma métrica e μ é uma medida de Borel regular.

Definição 2.2.1. *Uma medida μ é dita* ***de duplicação*** *se existe uma contante C_μ, chamada de* ***constante de duplicação de*** *μ, tal que dado $x \in X$ e $r > 0$ temos que para toda bola $B(x, r)$,*

$$\mu\left(B(x, 2r)\right) \leq C_\mu \mu\left(B(x, r)\right). \tag{2.3}$$

Exemplo 2.2.1. *A medida de Lebesgue usual em $\mathbb{R}^n$ é uma medida de duplicação, com constante de duplicação $C_\mu = 2^n$.*

Lema 2.2.1. *Assuma que μ seja uma medida de duplicação e sejam ainda $B(x_1, r_1) \subset X$, $x_2 \in B(x_1, r_1)$ e $0 < r_2 \leq r_1 < \infty$. Então,*

$$\frac{\mu\left(B(x_2, r_2)\right)}{\mu\left(B(x_1, r_1)\right)} \geq D\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^s,$$

onde $s = \log_2 C_\mu$ e $D = C_\mu^{-2}$.

Demonstração. Considere o inteiro não-negativo k tal que

$$2^{k-1} r_2 < r_1 \leq 2^k r_2. \tag{2.4}$$

Se $x \in B(x_1, r_1)$, então $\varrho(x, x_1) < r_1$ e, da desigualdade triangular e de (2.4) segue que

$$\varrho(x, x_2) \leq \varrho(x, x_1) + \varrho(x_1, x_2) < 2r_1 \leq 2^{k+1} r_2.$$

Logo, $x \in B(x_2, 2^{k+1}r_2)$ e assim

$$B(x_1, r_1) \subset B(x_2, 2^{k+1}r_2), \tag{2.5}$$

e, por consequência de (2.5), vem que

$$\mu\left(B(x_1, r_1)\right) \leq \mu\left(B(x_2, 2^{k+1}r_2)\right). \tag{2.6}$$

Como μ é de duplicação, temos que $\mu\left(B(x_2, 2^{k+1}r_2)\right) \leq C_\mu \mu\left(B(x_2, 2^k r_2)\right)$.

Analogamente, obtemos que

$$\mu\left(B(x_2, 2^{k+1}r_2)\right) \leq C_\mu^{k+1} \mu\left(B(x_2, r_2)\right). \tag{2.7}$$

Assim, (2.6) e (2.7) implicam que

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\left(B(x_2, r_2)\right)}{\mu\left(B(x_1, r_1)\right)} &\geq C_\mu^{-k-1} = C_\mu^{-2} C_\mu^{1-k} \\
&= C_\mu^{-2} 2^{\log_2 C_\mu^{1-k}} = C_\mu^{-2} \left(2^{1-k}\right)^{\log_2 C_\mu}.
\end{aligned}$$

Note ainda que, por (2.4), segue que $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \dfrac{r_2}{r_1}$. Portanto, obtemos que

$$\frac{\mu\left(B(x_2, r_2)\right)}{\mu\left(B(x_1, r_1)\right)} \geq D\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^s,$$

onde $s = \log_2 C_\mu$ e $D = C_\mu^{-2}$ e, o resultado segue. ■

Lema 2.2.2. *Se X é um conjunto limitado e μ uma medida de duplicação, então existe $b > 0$ tal que para $r \leq \operatorname{diam}(X)$, então $\mu\left(B(x, r)\right) \geq br^s$, onde $s = \log_2 C_\mu$.*

Demonstração. De fato, sejam $x \in X$ e $0 < r \leq \operatorname{diam}(X) < \infty$, então pelo Lema 2.2.1, temos que

$$\frac{\mu\left(B(x, r)\right)}{\mu(X)} \geq D\left(\frac{2r}{\operatorname{diam}(X)}\right)^s,$$

onde $s = \log_2 C_\mu$ e $D = C_\mu^{-2}$.

Logo, segue que

$$\mu\left(B(x, r)\right) \geq D\left(\frac{2}{\operatorname{diam}(X)}\right)^s \mu(X)\, r^s.$$

Tome $b = D\left(\dfrac{2}{\operatorname{diam}(X)}\right)^s \mu(X)$ e, o resultado segue. ■

Observação 2.2.1. *Por outro lado, se o espaço de medida munido de uma medida de duplicação é não-limitado, então a desigualdade dada pelo Lema 2.2.2 não é necessariamente válida. (Veja [10]).*

Definição 2.2.2. *Sejam $\alpha > 0$, $x \in X$ e $r > 0$. Diz-se que a medida μ é **inferiormente Ahlfors α-regular** se existe uma constante c tal que*

$$cr^{\alpha} \leq \mu\left(B(x,r)\right).$$

*Diz-se, também, que μ é uma medida **superiormente Ahlfors α-regular** se existe uma constante C tal que*

$$\mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^{\alpha}.$$

*E, por fim, a medida μ é chamada de uma medida **Ahlfors α-regular** se ela é inferiormente e superiormente Ahlfors $\alpha-$regular, isto é, existem constantes c e C tais que*

$$cr^{\alpha} \leq \mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^{\alpha}.$$

Observação 2.2.2. *Note que nas condições do Lema 2.2.2 a medida μ é inferiormente Ahlfors s-regular.*

Proposição 2.2.1. *Seja μ uma medida Ahlfors α-regular, então μ é uma medida de duplicação.*

Demonstração. Seja μ uma medida Ahlfors α-regular, isto é, para qualquer $x \in X$ e $r > 0$ existem constantes c e C, tais que

$$cr^{\alpha} \leq \mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^{\alpha}.$$

Então para $B(x, 2r)$, existe constante D tal que

$$\mu\left(B(x,2r)\right) \leq (D2^{\alpha})r^{\alpha} \tag{2.8}$$

e, ainda

$$(D2^{\alpha})cr^{\alpha} \leq (D2^{\alpha})\mu\left(B(x,r)\right). \tag{2.9}$$

Portanto, de (2.8) e (2.9) segue que

$$\mu\left(B(x,2r)\right) \leq \left(\frac{D2^{\alpha}}{c}\right)\mu\left(B(x,r)\right),$$

ou seja, μ é uma medida de duplicação com constante de duplicação $C_{\mu} = \left(\frac{D2^{\alpha}}{c}\right)$. ∎

Observação 2.2.3. *A recíproca da Proposição 2.2.1 não é válida. (Veja [10]).*

Proposição 2.2.2. *Seja μ é uma medida de duplicação, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) para todo $r > 0$, vale que $\inf\left\{\mu\left(B(x,r)\right) : x \in X\right\} > 0$;

(ii) existe $\theta > 0$, tal que $\inf\left\{\mu\left(B(x,1)\right) : x \in X\right\} \geq \theta$.

Demonstração. Considere que μ seja de duplicação e suponha, inicialmente, que *(i)* vale, ou seja, para todo $r > 0$

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,r)\right) : x \in X\right\} > 0.$$

Tome $r = 1$, então $\inf\left\{\mu\left(B(x,1)\right) : x \in X\right\} > 0$. Logo existe $\theta > 0$ tal que

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,1)\right) : x \in X\right\} \geq \theta.$$

Reciprocamente, suponha que *(ii)* é válida, isto é, existe $\theta > 0$ tal que

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,1)\right) : x \in X\right\} \geq \theta.$$

Assim, existe n_0, múltiplo de 2, tal que para todo $r > 0$, temos que $\dfrac{r}{n_0} < 1$. E, como μ é de duplicação, segue que

$$\mu(B(x,r)) \leq C_{\mu}^{n_0+1}\mu(B(x,\frac{r}{n_0})).$$

E, ainda como $B(x,\frac{r}{n_0}) \subset B(x,1)$, segue que

$$\mu\left(B(x,r)\right) \leq C_{\mu}^{n_0+1}\mu\left(B(x,1)\right).$$

Das propriedades de ínfimo, concluímos que

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,r)\right) : x \in X\right\} \geq C_{\mu}^{n_0+1}\inf\left\{\mu\left(B(x,1)\right) : x \in X\right\} \geq C_{\mu}^{n_0+1}\theta > 0.$$

∎

Exemplo 2.2.2. *Seja (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico. Então, a condição (i) da Proposição 2.2.2 é válida, nos seguintes casos:*

1. *Se (X, ϱ, μ) é inferiormente Ahlfors $\alpha-$regular;*

2. *Se o $\operatorname{diam}(X) < \infty$ e μ uma medida de duplicação;*

3. *Se X é compacto e μ uma medida **contínua com respeito a métrica** ϱ, isto é, se para todos $x, y \in X$ e $r > 0$*

$$\lim_{y \to x} \mu\left(B(x,r) \Delta B(y,r)\right) = 0.$$

Verificação. **1.** De fato, se (X, ϱ, μ) é inferiormente Ahlfors α-regular, então existe uma constante c tal que $cr^{\alpha} \leq \mu\left(B(x,r)\right)$, para todos $x \in X$ e $r > 0$.

Em particular, temos que para todo $r > 0$

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,r)\right); x \in X\right\} \geq cr^{\alpha} > 0.$$

2. Caso μ seja uma medida de duplicação e $\operatorname{diam}(X) < \infty$, pelo Lema 2.2.2, existe $b > 0$ tal que para $r \leq \operatorname{diam}(X)$

$$\mu\left(B(x,r)\right) \geq br^{s}, \quad s = \log_2 C_{\mu}.$$

Em particular, temos que

$$\inf\left\{\mu\left(B(x,r)\right); x \in X\right\} \geq br^{\alpha} > 0.$$

3. Fixe $r > 0$ e seja $\{B(x,r); x \in X\}$ uma cobertura aberta de X, e como X é compacto, temos que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Seja ainda $x \in X$ qualquer, então

$$B(x,r) \subset X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r).$$

Suponha que $\min_{1 \leq i \leq n} \mu\left(B(x,r) \Delta B(x_i,r)\right) \geq \varepsilon$. Por hipótese, μ é contínua com respeito a métrica ϱ, isto é,

$$\lim_{y \to x} \mu\left(B(x,r) \Delta B(y,r)\right) = 0.$$

Em outras palavras, existe $\tau_i > 0$ tal que, se $\varrho(x_i, y) < \tau_i$, então

$$\mu\left(B(x_i, r)\Delta B(y, r)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Mas, sabemos que

$$\begin{aligned} B(x_i, r)\Delta B(y, r) &= \left(B(x_i, r)\backslash B(y, r)\right) \cup \left(B(y, r)\backslash B(x_i, r)\right) \\ &= \left(B(x_i, r) \cup B(y, r)\right) - \left(B(x_i, r) \cap B(y, r)\right). \end{aligned}$$

Assim, dê (2.10), segue que $\mu\left(\left(B(x_i, r) \cup B(y, r)\right) - \left(B(x_i, r) \cap B(y, r)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Além disso, $B(x, r) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r) \cap B(x, r)\right)$. Seja $\tau = \max \tau_i$ e considere x_j tal que $\varrho(x_j, x) < \tau$, logo

$$\begin{aligned} \mu\left(B(x, r)\right) &\geq \mu\left(B(x, r) \cap B(x_j, r)\right) \\ &\geq \mu\left(B(x, r) \cup B(x_j, r)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $r > 0$, segue que $\inf\left\{\mu\left(B(x, r)\right); x \in X\right\} > 0$. ∎

2.3 O Operador Maximal em Espaços de Lebesgue com Expoente Variável

Nesta seção nos propusemos a investigar o operador maximal de Hardy-Littlewood em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$, onde (X, ϱ, μ) é um espaço de medida métrico. As consultas para esta parte do trabalho foram tomadas de [1] e de referências indicadas por ele.

Definição 2.3.1. *Para toda $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ definimos*

$$\mathcal{M}_{B(x,r)} f = \fint_{B(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}\mu(y)$$

e a função maximal de Hardy-Littlewood

$$\mathcal{M} f = \sup_{r>0} \mathcal{M}_{B(x,r)} f,$$

para todos $x \in X$ e $r > 0$.

O operador $\mathcal{M}$ é chamado de ***operador maximal de Hardy-Littlewood****.*

É bem conhecido, que para $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ a função $\mathcal{M} : X \to [0, \infty]$ é semicontínua inferiormente e satisfaz $|f| \leq \mathcal{M}f$ quase sempre em X, e que para qualquer $q \in [1, \infty]$ e $f \in L^q(X)$ a função $\mathcal{M}f$ é em quase toda parte finita. Além do mais, para $1 < q \leq \infty$ o operador maximal é limitado, no sentido de que existe constante $c > 0$ tal que

$$\|\mathcal{M}f\|_q \leq \frac{cq}{q-1} \|f\|_q . \tag{2.11}$$

O principal objetivo desta seção é mostrar um resultado que caracteriza a limitação de $\mathcal{M}$ em $L^{p(\cdot)}(X)$, isto é, generalizar (2.11) para $L^{p(\cdot)}(X)$, resultado este que será essencial na prova de um dos principais resultados estudados no Capítulo 3 deste trabalho que descreve conjuntos relativamente compactos em $L^{p(\cdot)}(X)$. Estes resultados, aqui mencionados, são bem conhecidos da literatura para o operador $\mathcal{M}$ no contexto dos espaços de Lebesgue clássicos. No entanto, para os leitores interessados em examinar propriedades adicionais do operador $\mathcal{M}$ recomendamos, por exemplo, as referências [8] para o caso Euclidiano e [13] para os espaços de medida métricos.

Iniciamos com algumas definições e lemas técnicos, com a finalidade de facilitar o compreensão dos resultados almejados nesta seção.

Lema 2.3.1. [1] *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ e $p_\infty \in [1, \infty]$. A função $1 \in L^{s(\cdot)}(X)$, onde $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ dada por $\frac{1}{s(\cdot)} := \left| \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{p_\infty} \right|$, se, e somente se, existe $\gamma > 0$ tal que*

$$\int_X \gamma^{s(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \;\; < \;\; \infty.$$

Definição 2.3.2. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$. Diz-se que $p(\cdot) \in \mathcal{P}^\mu_{\log}(X)$ se existe $c > 0$ tal que*

$$\mu\left(B\right)^{\frac{1}{p_B^+} - \frac{1}{p_B^-}} \;\; \leq \;\; c,$$

para toda bola $B \subset X$ e existe $p_\infty \in [1, \infty]$, tal que $1 \in L^{s(\cdot)}(X)$, onde $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ dada por $\frac{1}{s(\cdot)} := \left| \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{p_\infty} \right|$.

[1] Indicamos para o leitor interessado em mais detalhes a referência [7].

Lema 2.3.2. *Sejam $\alpha \in L^{\infty}(X)$ e $c > 0$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para toda bola $B \subset X$, temos $\mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha_B^+} \leq c$;

(ii) Para toda bola $B \subset X$ e todo $x \in B$, temos $\mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha(x)} \leq c$;

(iii) Para toda bola $B \subset X$ e todo $x \in B$, temos $\mu(B)^{\alpha(x) - \alpha_B^+} \leq c$;

(iv) Para toda bola $B \subset X$ e todos $x, y \in B$, temos $\mu(B)^{-|\alpha(x)-\alpha(y)|} \leq c$.

Demonstração. Primeiramente, note que em todos os casos as inequações são verdadeiras quando $c = 1$ e $\mu(B) > 1$. Consideremos, então o caso $\mu(B) \leq 1$.

Assuma que *(ii)* seja válida e escolha pontos $x_i \in B$ tais que $\lim \alpha(x_i) = \alpha_B^+$. Então,

$$\begin{aligned} \mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha_B^+} &\leq \mu(B)^{\alpha_B^- - \lim \alpha(x_i)} \\ &= \lim \mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha(x_i)} \quad \leq c, \end{aligned}$$

isto é, *(i)* é válida. A recíproca segue de que

$$\mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha(x)} \leq \mu(B)^{\alpha_B^- - \alpha_B^+},$$

quando $\mu(B) \leq 1$. As equivalências de *(i)* e *(iii)* e de *(i)* e *(iv)* são verificadas similarmente. ∎

Lema 2.3.3. *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$ e μ uma medida de duplicação. Então para toda bola $B \subset X$ e para todos $x, y \in B$, temos*

$$\mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right|} \leq c,$$

onde c depende das constantes C_μ, $\mu(B(x_0, 1))$ e $C_{\log}(p)$.

Demonstração. Considere que $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$ e μ uma medida de duplicação. Fixe $B_0 := B(x_0, 1)$, $C_1 := \frac{\mu(B_0)}{C_\mu^2}$ e $B := B(x, r)$ e $y \in B$.

Inicialmente, tome $\mu(B) \geq C_1$ e note que $\sup\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \frac{1}{p^-} \leq 1$. Então

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\right)^{\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right|} \leq \max\left\{1, \frac{1}{C_1}\right\}^{\sup\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right|} \leq \max\left\{1, \frac{1}{C_1}\right\} =: C(\mu),$$

o que implica $\mu\,(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq C(\mu)$.

Assuma, agora, que $\mu(B) < C_1$. Para este caso, suponha primeiramente que o raio r de B seja no mínimo 1, isto é, $r \geq 1$. Se $\varrho(x,y) \leq 1$, então pela desigualdade triangular, segue que $\varrho(x_0,y) \leq \varrho(x_0,x) + \varrho(x,y) \leq (1+\varrho(x_0,x))$. Consequentemente, $\frac{1}{r}B \subset (1+\varrho(x_0,x))\,B_0$. Pelo Lema 2.2.1, temos que

$$\begin{aligned}
\mu(B_0) &\leq \mu\left((1+\varrho(x_0,x))\,B_0\right)\\
&\leq C_\mu^2\, r^{\log_2 C_\mu}\,(1+\varrho(x_0,x))^{\log_2 C_\mu}\,\mu(\frac{1}{r}B)\\
&\leq C_\mu^2\, r^{\log_2 C_\mu}\,(1+\varrho(x_0,x))^{\log_2 C_\mu}\,\mu\,(B)\,.
\end{aligned}$$

Logo, tomando $c = \frac{C_\mu^2\, r^{\log_2 C_\mu}}{\mu(B_0)}$

$$\mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq c\,(1+\varrho(x_0,x))^{\log_2 C_\mu\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|}. \tag{2.12}$$

Agora, precisamos estimar o lado direito da desigualdade (2.12). Para tal, necessitamos analisar o seguinte: suponha que $B_0 \cap 2B \neq \emptyset$. Seja $z \in B_0 \cap 2B$ e $w \in B_0$, então $\varrho(x,w) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,w) \leq 2(1+r) \leq 4r$, desde que $r \geq 1$. Isto significa que $B_0 \subset 4B$. Usando novamente o Lema 2.2.1, temos $\mu(B) \geq \frac{\mu(4B)}{C_\mu^2} \geq \frac{\mu(B_0)}{C_\mu^2} = C_1$, o que é uma contradição. Logo $B_0 \cap 2B = \emptyset$ e, em particular, $x_0 \notin 2B$. Logo, segue que $\varrho(x_0,x) > 2r$. Pela desigualdade triangular

$$\varrho(x,x_0) \leq \varrho(x,y) + \varrho(x_0,y).$$

Como $\varrho(x_0,x) > 2r$, segue que $\varrho(x_0,y) \geq r$. Portanto, $\varrho(x,x_0) \leq 2\varrho(y,x_0)$, e assim

$$(1+\varrho(x,x_0))^{\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq (1+\varrho(x,x_0))^{\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p_\infty}\right|}\,(1+2\,\varrho(y,x_0))^{\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p_\infty}\right|} \leq c,$$

pela condição log-Hölder de decaimento de $p(\cdot)$, e portanto (2.12) conclui este caso.

Resta considerar o caso $r < 1$. Novamente pelo Lema 2.2.1, temos

$$\mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq c r^{-\log_2 C_\mu\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|}\mu(\frac{1}{r}B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|}.$$

Analogamente, podemos argumentar como em (2.12) para a bola $\frac{1}{r}B$ para mostrar que o último termo é limitado por uma constante; e pela continuidade log-Hölder local de $p(\cdot)$, $r^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq c$. Portanto,

$$\mu\,(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq c,$$

onde x é o centro de B e $y \in B$.

Considere, por fim, o caso $y, z \in B$, não necessariamente no centro. Se $\mu(B) \geq 1$, então o resultado é válido, tomando $c = 1$. Logo, assuma que $\mu(B) < 1$, onde x é o centro de B. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(z)}-\frac{1}{p(y)}\right|} &\leq \mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(z)}-\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \\
&\leq \mu(B)^{-\left(\left|\frac{1}{p(z)}-\frac{1}{p(x)}\right|+\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|\right)} \\
&\leq \mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(z)}-\frac{1}{p(x)}\right|} + \mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|}.
\end{aligned}$$

E, para verificar que $\mu(B)^{-\left|\frac{1}{p(z)}-\frac{1}{p(y)}\right|}$ é limitado, basta aplicar aos membros do lado direito da desigualdade acima a primeira parte da prova. ∎

Lema 2.3.4. *Sejam $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$, $p_\infty \in [1, \infty]$ e $x_0 \in X$. Se $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$, dada por $\frac{1}{s(\cdot)} := \left|\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{p_\infty}\right|$, então para todo $m > 0$ existe $\gamma \in (0,1)$, dependendo da constante $C_{\log}(p)$, tal que*

$$\gamma^{s(x)} \leq (e + \varrho(x, x_0))^{-m},$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Se para todo $x \in X$ temos que $s(x) = \infty$, então $\gamma^\infty = 0$. Assuma então que $s(x) < \infty$. Como $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$, temos que

$$\frac{1}{s(x)} \leq \frac{C_{\log}(p)}{\log(e + \varrho(x, x_0))},$$

para todo $x \in X$ e, portanto,

$$s(x) \leq \frac{\log(e + \varrho(x, x_0))}{C_{\log}(p)}.$$

Considere $\gamma := \exp(-mC_{\log}(p))$, então para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}
\gamma^{s(x)} &\leq \gamma^{\frac{\log(e+\varrho(x,x_0))}{C_{\log}(p)}} \\
&= \exp(-m \log(e + \varrho(x, x_0))) \\
&= (e + \varrho(x, x_0))^{-m}.
\end{aligned}$$

∎

Lema 2.3.5. *Sejam* (X, ϱ, μ) *um espaço de medida métrico, onde* μ *é uma medida de duplicação e* $x_0 \in X$*. Se* $m > \log_2 C_\mu$*, então* $(e + \varrho(\cdot, x_0))^{-m} \in L^1(X)$*.*

Demonstração. Denotaremos a bola centrada em x_0 e raio 2^k, $B(x_0, 2^k)$, simplesmente por B_k. Logo, $X = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} B_k$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\int_X (e + \varrho(x, x_0))^{-m} \, \mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} \int_{B_k \backslash B_{k-1}} (e + \varrho(x, x_0))^{-m} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &+ \int_{B_2} (e + \varrho(x, x_0))^{-m} \, \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Se $x \in B_k \backslash B_{k-1}$, então $2^{k-1} < \varrho(x, x_0) < 2^k$, então

$$\begin{aligned}\int_X (e + \varrho(x, x_0))^{-m} \, \mathrm{d}\mu(x) &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \int_{B_k \backslash B_{k-1}} (e + \varrho(x, x_0))^{-m} \, \mathrm{d}\mu(x) + \frac{1}{e^m} C_\mu^2 \mu(B_0) \\ &\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{C_\mu^k \mu(B_0)}{(2^{k-1})^m} + C_\mu^2 \mu(B_0) \\ &= \mu(B_0) \left(C_\mu \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{C_\mu}{2^m} \right)^k + C_\mu^2 \right).\end{aligned}$$

Portanto, como $\log_2 C_\mu < m$, isto é, $C_\mu < 2^m = \frac{C_\mu}{2^m} < 1$, concluímos que o lado direito da desigualdade acima é finito. Logo, $(e + \varrho(\cdot, x_0))^{-m} \in L^1(X)$. ■

Corolário 2.3.1. *Sejam* (X, ϱ, μ) *um espaço de medida métrico, onde* μ *é uma medida de duplicação,* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$*,* $x_0 \in X$ *e* $p_\infty \in [1, \infty]$*. Então* $1 \in L^{s(\cdot)}$*, onde* $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ *dada por* $\frac{1}{s(\cdot)} := \left| \frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{p_\infty} \right|$*.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3.4, para todo $x \in X$ e $m > 0$, em particular para $m > \log_2 C_\mu$, existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que

$$\gamma^{s(x)} \leq (e + \varrho(x, x_0))^{-m}.$$

Logo, pelo Lema 2.3.5, $\gamma^{s(\cdot)}$ é superiormente integrável, e consequentemente $\gamma^{s(\cdot)} \in L^1(X)$, isto é,

$$\int_X \gamma^{s(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

o que é equivalente a dizer que $1 \in L^{s(\cdot)}$, pelo Lema 2.3.1. ■

Teorema 2.3.1. *Se μ é uma medida de duplicação e $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$, então $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3.3, como $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$ e μ é uma medida de duplicação, temos que $\mu(B)^{\left|\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p(y)}\right|} \leq c$, para toda bola $B \subset X$ e para todos $x, y \in B$.

Assim, pelo Lema 2.3.2 segue que para toda bola $B \subset X$, $\mu(B)^{\frac{1}{p_B^-}-\frac{1}{p_B^+}} \leq c$. E, pelo Corolário 2.3.1, $1 \in L^{s(\cdot)}$, onde $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ dada por $\frac{1}{s(\cdot)} := \left|\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{p_\infty}\right|$.

Portanto, $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$. ■

Observação 2.3.1. *Por outro lado, a recíproca do Teorema 2.3.1 não é válida. (Veja [1]).*

Lema 2.3.6. *Sejam (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico e $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$. Assuma que $p^+ < \infty$ e defina as seguintes condições:*

(i) $p(\cdot)$ é localmente log-Hölder contínuo;

(ii) Para toda bola $B \subset X$, temos $\mu(B)^{p_B^- - p_B^+} \leq c$.

Se μ é inferiormente Ahlfors $\alpha-$regular, então (i) implica (ii) e se μ é superiormente Ahlfors $\alpha-$regular, então (ii) implica (i).

Demonstração. Suponha que μ é inferiormente Ahlfors $\alpha-$regular, isto é, para todos $x \in X$ e $r > 0$, existe constante c_0 tal que $c_0 r^\alpha \leq \mu(B(x,r))$. E, suponha adicionalmente, que $p(.)$ é localmente log-Hölder contínuo, ou seja, para todos $x, y \in X$, existe constante $c_1 > 0$ tal que $|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_1}{\log(e+\frac{1}{\varrho(x,y)})}$.

Como, $p_B^- - p_B^+ \leq 0$, temos que para qualquer bola $B \subset X$

$$\begin{aligned}\mu(B)^{p_B^- - p_B^+} &\leq (c_0 r^\alpha)^{p_B^- - p_B^+} \\ &\leq (c_0 r^\alpha)^{\frac{c_1}{\log(e+\frac{1}{\varrho(x,y)})}} \\ &= C.\end{aligned}$$

Logo, *(ii)* é válida. Considere agora que $\mu(B)^{p_B^- - p_B^+} \leq c$, para toda $B \subset X$, e ainda que μ seja superiormente $\alpha-$regular Ahlfors, ou seja, para todos $x \in X$ e $r > 0$, existe constante c_2 tal que $\mu(B(x,r)) \leq c_2 r^\alpha$.

Sejam $x, y \in X$ quaisquer e denote $B = B(x, (e + \frac{1}{\varsigma(x,y)}))$, então

$$\begin{aligned}\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)^{-|p(x)-p(y)|} &= \left(\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{-|p(x)-p(y)|}{\alpha}} \\ &\leq \left(\frac{1}{c_2}\mu\left(B\right)\right)^{\frac{-|p(x)-p(y)|}{\alpha}} \\ &\leq \left(\frac{1}{c_2}\mu\left(B\right)\right)^{\frac{p_B^- - p_B^+}{\alpha}} \\ &= D.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}-\left|p(x) - p(y)\right| &\leq \log_{(e+\frac{1}{\varrho(x,y)})} D \\ &= \frac{\log D}{\log\left(e + \frac{1}{\varrho(x,y)}\right)}.\end{aligned}$$

Portanto, $p(.)$ é localmente log-Hölder contínuo e a prova esta finalizada. ∎

Definição 2.3.3. *O* ***espaço de Lebesgue fraco***, $\mathrm{w} - L^q$, *com* $q \in [1, \infty]$ *é definido pela norma*

$$\|f\|_{\mathrm{w}-L^q} := \sup_{\lambda>0} \left\|\lambda\chi_{|f|>\lambda}\right\|_q .$$

A quase norma apresentada acima satisfaz a seguinte desigualdade triangular:

$$\|f + g\|_{\mathrm{w}-L^q} \leq 2\left(\|f\|_{w-L^q} + \|g\|_{\mathrm{w}-L^q}\right),$$

enquanto as outras propriedades de norma permanecem verdadeiras.

Sabe-se ainda que $\mathcal{M}$ é do tipo fraco $(1, 1)$, isto é, $\mathcal{M}$ mapeia $L^1(X)$ para $\mathrm{w} - L^1(X)$ e vale o seguinte mergulho

$$\mathrm{w} - L^1(X) \cap L^\infty(X) \hookrightarrow L^q(X). \tag{2.13}$$

Para o leitor interessado em se aprofundar nos detalhes das propriedades acima mencionadas recomendamos as referências [7, 8, 13]. Os resultados seguintes são generalizações para estimativas pontuais do caso Euclidiano estudado em [7].

Definição 2.3.4. *Definimos para* $t \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$, $\varphi_p(t) := t^p$ *e, ainda, para* $p = \infty$

$$\varphi_\infty(t) \ := \ \begin{cases} 0, & para\ 0 \leq t \leq 1 \\ \infty, & para\ 1 < t < \infty \end{cases} .$$

Denotamos a função inversa de $\varphi_p(t)$ *por* $\varphi_p^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$. *Note que para o caso* $p = \infty$ *temos que* $\varphi_\infty^{-1}(t) = \chi_{(0,\infty)}(t)$.

Dado $y \in X$ *e* $t \geq 0$ *definimos para o caso de expoente variável,* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$, *que* $\varphi_{p(\cdot)}(y,t) := \varphi_{p(y)}(t)$.

Observação 2.3.2. *Dados* $t \geq 0$ *e* $p \in [1,\infty)$ *a função* $\varphi_p(t)$ *é contínua, positiva e convexa.*

Lema 2.3.7 (Desigualdade de Young). *Sejam* $p,\ q,\ s \in [1,\infty]$ *com* $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. *Então, para todos* $a,\ b \geq 0$

$$\varphi_s(ab) \leq \frac{s}{p}\varphi_p(a) + \frac{s}{q}\varphi_q(b),$$

com a seguinte convenção $\dfrac{s}{p} = \dfrac{s}{q} = 1$ *para* $s = p = q = \infty$.[2]

Lema 2.3.8. *Seja* $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$. *Então existe* $\beta \in (0,1)$, *dependendo da constante* $C_{\log}(p)$, *tal que*

$$\left(\beta\left(\frac{\lambda}{\mu\left(B\right)}\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right)^{p(x)} \ \leq \ \frac{\lambda}{\mu\left(B\right)},$$

para todo $\lambda \in [0,1]$, *e qualquer bola* $B \subset X$ *e* $x \in B$.

Demonstração. Considere $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$, uma bola $B \subset X$ e $x \in B$. Se $\lambda = 0$, então o resultado segue, desde que $0^{\frac{1}{p_B^-}} = 0$ e $0^{p(x)} = 0$.

Então, suponha que $\lambda > 0$. Se $p_B^- = \infty$, então pela continuidade de $\frac{1}{p(\cdot)}$, $p(x) = \infty$ para todo $x \in X$ e $\varphi_\infty\left(\frac{1}{2}\varphi_\infty^{-1}\left(\lambda\mu(B)^{-1}\right)\right) = \varphi_\infty\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, uma vez que $\varphi_\infty^{-1} = \chi_{(0,\infty)}$.

[2] Para mais detalhes a respeito da função φ_p e provas de suas propriedades indicamos [7] - Seção 3.1.

Assuma agora que $p_B^- < \infty$ e $p(x) < \infty$. Como $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}^{\mu}(X)$, pelo Lema 2.3.2, existe $\beta \in (0,1)$ tal que

$$\beta\mu\left(B\right)^{\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p_B^-}} \leq 1. \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.14) por $\mu(B)^{-\frac{1}{p(x)}}$ e elevando o resultado a $p(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\left(\beta\mu\left(B\right)^{\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p_B^-}}\right)\mu\left(B\right)^{-\frac{1}{p(x)}}\right)^{p(x)} &\leq \left(\mu\left(B\right)^{-\frac{1}{p(x)}}\right)^{p(x)} \\
\Longleftrightarrow \left(\beta\left(\frac{1}{\mu\left(B\right)}\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right)^{p(x)} &\leq \frac{1}{\mu\left(B\right)},
\end{aligned}$$

e, assim, obtemos o desejado para $\lambda = 1$.

Para o caso $0 \leq \lambda < 1$, temos

$$\left(\beta\left(\frac{1}{\mu\left(B\right)}\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right)^{p(x)} \leq \lambda^{\frac{p(x)}{p_B^-}}\left(\beta\left(\frac{1}{\mu\left(B\right)}\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right)^{p(x)} \leq \lambda\frac{1}{\mu\left(B\right)}.$$

Resta considerar o caso $p(x) = \infty$ e $p_B^- < \infty$. Note que,

$$\varphi_\infty\left(\beta\left(\lambda\mu\left(B\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right) = 0,$$

se $\beta\left(\lambda\mu\left(B\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{p_B^-}} \leq 1$. No entanto, como $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}^{\mu}(X)$, segue que

$$c \geq \mu\left(B\right)^{\frac{1}{p(x)}-\frac{1}{p_B^-}} = \mu\left(B\right)^{-\frac{1}{p_B^-}} \geq \left(\lambda\mu\left(B\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{p_B^-}},$$

logo o resultado segue tomando $\beta = \dfrac{1}{c}$. ∎

O seguinte lema nos revela que é possível generalizar o caso do expoente constante apresentado na Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6) para o caso de expoente variável, $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$. Porém, há um preço a se pagar, visto que aparecerão um termo multiplicativo ao lado esquerdo e um termo aditivo ao lado direito da desigualdade obtida, isto é, obtemos um erro adicional.

Lema 2.3.9. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}^{\mu}(X)$. Defina $q(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X \times X)$ por*

$$\frac{1}{q(x,y)} := \max\left\{\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right\}.$$

Então para qualquer $\gamma \in (0,1)$ existe $\beta \in (0,1)$, dependendo de γ e $C_{\log}(p)$ tal que

$$\beta \left(\fint_B |f(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \right)^{p(x)} \leq \fint_B |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) + \fint_B \gamma^{q(x,y)} \chi_{\{0<|f(y)|\leq 1\}} \, \mathrm{d}\mu(y),$$

para toda bola $B \subset X$, $x \in B$ e $f \in L^{p(\cdot)}(X) + L^\infty(X)$ com $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)+L^\infty(X)} \leq 1$.

Demonstração. Considere $f \in L^{p(\cdot)}(X)+L^\infty(X)$, de modo que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)+L^\infty(X)} \leq 1$. Pela convexidade de $\varphi_{p(y)}(t)$ é suficiente mostrar separadamente os casos $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ e $\|f\|_\infty \leq 1$.

Sejam $B \subset X$ uma bola e $x \in B$. Se $p_B^- = \infty$, então $p(y) = \infty$ para todo $y \in B$, e o resultado é justamente a própria Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6) para a função convexa φ_∞.

Assuma então que $p_B^- < \infty$. Seja $\beta \in (0,1)$ a constante do Lema 2.3.8, assim podemos supor que $\beta \leq \gamma$.

Dando sequência, vamos dividir a função f nas seguintes partes:

$$\begin{aligned} f_1(y) &:= f(y)\chi_{\{y\in B;\, |f(y)|>1\}}, \\ f_2(y) &:= f(y)\chi_{\{y\in B;\, 0<|f(y)|\leq 1,\, p(y)\leq p(x)\}}, \\ f_3(y) &:= f(y)\chi_{\{y\in B;\, 0<|f(y)|\leq 1,\, p(y)>p(x)\}}. \end{aligned}$$

Logo, $f = f_1 + f_2 + f_3$ e $|f_j| \leq |f|$, e então $\rho_{p(\cdot)}(f_j) \leq \rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$, $j = 1,2,3$. Pela convexidade de $\varphi_{p(x)}(t)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{3} \fint_B |f(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \right)^{p(x)} &\leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\beta \fint_B |f_j(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \right)^{p(x)} \\ &=: \frac{1}{3} \left(I_1 + I_2 + I_3 \right). \end{aligned}$$

(Note que $\frac{\beta}{3}$ corresponde a β no resultado desejado). Assim, é suficiente considerar as funções f_1, f_2 e f_3 separadamente. Começando por f_1, temos pela convexidade de $\varphi_{p_B^-}(t)$ e da Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6), que

$$I_1 \leq \left(\beta \left(\fint_B |f_1(y)|^{p_B^-} \, \mathrm{d}\mu(y) \right)^{\frac{1}{p_B^-}} \right)^{p(x)},$$

onde usamos que $\varphi_{p(x)}(t)$ e $\varphi^{-1}_{p_B^-}(t)$ são não-decrescentes, desde que $|f_1(y)| > 1$ ou $|f_1(y)| = 0$ e $p_B^- \leq p(y)$, então $|f_1(y)|^{p_B^-} \leq |f_1(y)|^{p(y)}$, e portanto

$$I_1 \leq \left(\beta \left(\fint_B |f_1(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{p_B^-}}\right)^{p(x)}.$$

Se $\|f\|_\infty \leq 1$, então $f_1 = 0$ e $I_1 = 0$. Se, por outro lado, $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, temos pelo Lema 1.2.1, que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$, e assim $\int_B |f_1(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leq 1$. Logo, pelo Lema 2.3.8, tomando $\lambda = \int_B |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y)$, segue que

$$I_1 \leq \fint_B |f_1(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \fint_B |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y).$$

A Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6) implica que

$$I_2 \leq \fint_B \beta \, |f_2(y)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Uma vez que $\beta \, |f_2(y)| \leq |f_2(y)| \leq 1$ e $\varphi_{p(x)}(t) \leq \varphi_{p(y)}(t)$ para todo $t \in [0,1]$ com $p(y) \leq p(x)$, obtemos que

$$I_2 \leq \fint_B (\beta \, |f_2(y)|)^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \fint_B |f_2(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \fint_B |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Finalmente, para I_3, segue da Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6), que

$$I_3 \leq \fint_B (\beta \, |f(y)|)^{p(x)} \, \chi_{\{y \in B;\, 0 < |f(y)| \leq 1,\, p(y) > p(x)\}} \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Neste caso, como $p(y) > p(x)$, temos que $\frac{1}{q(x,y)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}$, logo $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(x,y)}$.

Assim, usando a Desigualdade de Young (Lema 2.3.7) para $\beta \frac{|f(y)|}{\gamma}$ e γ, e tendo em vista que $\beta \leq \gamma$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \fint_B \left(\beta \frac{|f(y)|}{\gamma} \gamma\right)^{p(x)} \chi_{\{y \in B;\, 0 < |f(y)| \leq 1,\, p(y) > p(x)\}} \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leq \fint_B \left(\frac{p(x)}{p(y)} \left(\beta \frac{|f(y)|}{\gamma}\right)^{p(y)} + \frac{p(x)}{q(x,y)} \gamma^{q(x,y)}\right) \chi_{\{y \in B;\, 0 < |f(y)| \leq 1,\, p(y) > p(x)\}} \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leq \fint_B \left(\left(\beta \frac{|f(y)|}{\gamma}\right)^{p(y)} + \gamma^{q(x,y)}\right) \chi_{\{y \in B;\, 0 < |f(y)| \leq 1,\, p(y) > p(x)\}} \, \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leq \fint_B |f(y)|^{p(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) + \fint_B \gamma^{q(x,y)} \chi_{\{y \in B;\, 0 < |f(y)| \leq 1,\, p(y) > p(x)\}} \, \mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. ∎

No caso onde $\frac{1}{p_\infty} := \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{1}{p(x)}$ existe, é útil dividir a segunda integral da estimativa do Lema 2.3.9 em duas partes, descreveremos este processo no lema a seguir.

Lema 2.3.10. *Seja $q(\cdot)$ definida tal como no Lema 2.3.9 e, ainda $s(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ dado por $\frac{1}{s(x)} := \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|$. Então, para todo $t \in [0,1]$,*

$$t^{q(x,y)} \quad \leq \quad t^{\frac{s(x)}{2}} + t^{\frac{s(y)}{2}}.$$

Demonstração. Seja $t \in [0,1]$. Para todos $x,\ y \in X$. temos

$$0 \leq \frac{1}{q(x,y)} = \max\left\{\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right\} \leq \frac{1}{s(x)} + \frac{1}{s(y)}.$$

Logo, $q(x,y) \geq \dfrac{s(x)s(y)}{s(x)+s(y)}$ e, concluímos que

$$q(x,y) \geq \min\left\{\frac{s(x)}{2}, \frac{s(y)}{2}\right\}.$$

Como $t \in [0,1]$, obtemos o desejado, isto é,

$$t^{q(x,y)} \leq t^{\frac{s(x)}{2}} + t^{\frac{s(y)}{2}}.$$

∎

Combinando os Lemas 2.3.9 e 2.3.10, obtemos o próximo resultado.

Teorema 2.3.2. *Sejam (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico onde μ é uma medida de duplicação e $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$. Então para todo $\gamma > 0$ existe $\beta \in (0,1)$ dependendo da constante de duplicação de μ e de $p(\cdot)$ tal que*

$$\beta\left(\fint_B |f(y)|\ \mathrm{d}\mu(y)\right)^{p(x)} \quad \leq \quad \fint_B |f(y)|^{p(y)}\ \mathrm{d}\mu(y) + \fint_B \left(\gamma^{s(x)} + \gamma^{s(y)}\right)_{\chi_{\{0<|f(y)|\leq 1\}}}\ \mathrm{d}\mu(y).$$

para toda bola $B \subset X$ e toda $f \in L^{p(\cdot)}(X) + L^\infty(X)$ com $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)+L^\infty(X)} \leq 1$.

Observação 2.3.3. *Note que no Teorema 2.3.2, γ corresponde a $\gamma^{\frac{1}{2}}$ no Lema 2.3.9.*

Como exposto no início desta seção para obtermos resultados mais sofisticados a respeito dos espaços de Lebesgue com expoente variável precisamos investigar o operador maximal de Hardy-Littlewood, $\mathcal{M}$, nestes espaços. Este operador é um recurso muito poderoso e veremos que sua importância vem do fato de que uma de suas propriedades centrais é sua limitação. É sabido que para os espaços de Lebesgue clássicos, tal operador $\mathcal{M}$ é limitado e neste momento estamos prontos para apresentar uma generalização deste resultado para o caso de funções expoente que será de grande aplicabilidade para o estudo de precompactos em espaços de Lebesgue com expoente variável.

Proposição 2.3.1. *Sejam (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico, onde μ é uma medida de duplicação, e $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$. Então para qualquer $\gamma > 0$ existe $\beta \in (0,1)$, dependendo das constantes C_μ e $C_{\log}(p)$, tal que*

$$(\beta \mathcal{M} f(x))^{p(x)} \leq \mathcal{M}\left(|f|^{p(\cdot)}\right)(x) + h(x),$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(X) + L^{\infty}(X)$ com $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)+L^{\infty}(X)} \leq 1$ e para todo $x \in X$, onde $h(x) := 2\mathcal{M}\left(\gamma^{s(\cdot)}\right)(x)$ e $\frac{1}{s(x)} := \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|$.

Demonstração. Seja $\gamma > 0$ qualquer, pelo Teorema 2.3.2 existe $\beta \in (0,1)$, dependendo de C_μ e de $p(\cdot)$, tal que

$$\begin{aligned}
\beta\left(\fint_B |f(y)|\ \mathrm{d}\mu(y)\right)^{p(x)} &\leq \fint_B |f(y)|^{p(y)}\ \mathrm{d}\mu(y) + \fint_B \left(\gamma^{s(x)} + \gamma^{s(y)}\right)\chi_{\{0<|f(y)|\leq 1\}}\ \mathrm{d}\mu(y) \\
&\leq \fint_B |f(y)|^{p(y)}\ \mathrm{d}\mu(y) + \gamma^{s(x)} + \fint_B \gamma^{s(y)}\ \mathrm{d}\mu(y),
\end{aligned}$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(X) + L^{\infty}(X)$ com $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(X)+L^{\infty}(X)} \leq 1$ e para toda bola $B \subset X$ e $x \in B$.

Tomando o supremo dos raios de todas as bolas $B \subset X$, com $x \in B$ e usando que $|g| < \mathcal{M}g$, temos

$$\begin{aligned}
(\beta \mathcal{M} f(x))^{p(x)} &\leq \mathcal{M}\left(|f|^{p(\cdot)}\right)(x) + \gamma^{s(x)} + \mathcal{M}\left(\gamma^{s(\cdot)}\right)(x) \\
&\leq \mathcal{M}\left(|f|^{p(\cdot)}\right)(x) + h(x).
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.3.3. *Sejam* (X, ϱ, μ) *um espaço de medida métrico e* $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$ *com* $p^- > 1$. *Então existe* $C > 0$, *dependendo de* $p(\cdot)$, *tal que*

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(\cdot)} \leq C\, \|f\|_{p(\cdot)}\,,$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(X)$.

Demonstração. Para $q(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p^-}$, temos que $q(\cdot) \in \mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$ com $q^- = 1$, pois

$$\begin{aligned} q^- &= \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} \frac{p(x)}{p^-} \\ &= \frac{1}{p^-} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} p(x) \;=\; 1. \end{aligned}$$

Seja $f \in L^{p(\cdot)}(X)$ com $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{1}{4}$. Como $q(\cdot) < p(\cdot) < \infty$, então pelo Teorema 1.2.5

$$L^{p(\cdot)}(X) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(X) + L^{\infty}(X)$$

e, $\|f\|_{L^{q(\cdot)}(X)+L^{\infty}(X)} \leq 2\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1$. Portanto, pela Proposição 2.3.1, para qualquer $\gamma > 0$ existe $\beta \in (0,1)$, dependendo de C_μ e $C_{\log}(p)$ tal que

$$(\beta \mathcal{M}f(x))^{q(x)} \;\leq\; \left(\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)(x) + h(x)\right)^{p^-},$$

com $h(x) := 2\mathcal{M}\left(\gamma^{s(\cdot)}\right)(x)$. Então

$$\begin{aligned} (\beta\mathcal{M}f(x))^{p(x)} &= \left((\beta\mathcal{M}f(x))^{q(x)}\right)^{p^-} \\ &\leq \left(\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)(x) + h(x)\right)^{p^-} \\ &\leq c\left(\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)(x)^{p^-} + h(x)^{p^-}\right). \end{aligned}$$

Integrando em X ambos os lados a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}\left(\beta\mathcal{M}f\right) &= \int_X |\beta\mathcal{M}f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq c\left(\int_X \left|\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)(x)^{p^-} + h(x)^{p^-}\right|\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \\ &\leq c\left(\int_X \left|\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)(x)\right|^{p^-}\ \mathrm{d}\mu(x) + \int_X |h(x)|^{p^-}\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \\ &= c\left(\left\|\mathcal{M}\left(|f|^{q(\cdot)}\right)\right\|_{p^-}^{p^-} + \|h\|_{p^-}^{p^-}\right). \end{aligned}$$

Como $\gamma^{s(\cdot)} \in L^1(X)$ e M é do tipo fraco $(1,1)$, então $h \in \mathrm{w}-L^1(X)$. E, como $h \in L^\infty(X)$ segue de (2.13) que $h \in L^{p^-}(X)$. Além disso, como $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ implica que $\left\| |f|^{q(\cdot)} \right\|_{p^-} \leq 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\| |f|^{q(\cdot)} \right\|_{p^-}^{p^-} &= \int_X \left(|f(x)|^{\frac{p(x)}{p^-}} \right)^{p^-} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \rho_{p(\cdot)}(f), \end{aligned}$$

logo da Proposição 1.2.4, segue que

$$\left\| |f|^{q(\cdot)} \right\|_{p^-}^{p^-} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

Dando sequência a demonstração, temos que usando a limitação de $\mathcal{M}$ em $L^{p^-}(X)$, (veja (2.11)), segue

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(\beta \mathcal{M} f) &\leq \frac{cp^-}{p^- - 1} \left(\left\| |f|^{q(\cdot)} \right\|_{p^-}^{p^-} + \left\| \gamma^{s(\cdot)} \right\|_{p^-}^{p^-} \right) \\ &\leq \frac{cp^-}{p^- - 1}. \end{aligned}$$

Portanto, novamente da Proposição 1.2.4, obtemos que

$$\|\mathcal{M} f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{cp^-}{p^- - 1},$$

para $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{1}{4}$.

Para o caso geral, $f \neq 0$, tome $\tilde{f} := \dfrac{f}{4\|f\|_{p(\cdot)}}$. Então, segue da mesma forma feita anteriormente que

$$\left\| \mathcal{M} \tilde{f} \right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{cp^-}{p^- - 1},$$

do qual segue da linearidade da norma e homogeneidade de $\mathcal{M}$ que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M} \tilde{f} \right\|_{p(\cdot)} &= \left\| \mathcal{M} \left(\frac{f}{4\|f\|_{p(\cdot)}} \right) \right\|_{p(\cdot)} \\ &= \|\mathcal{M} f\|_{p(\cdot)} \frac{1}{4\|f\|_{p(\cdot)}} \\ &\leq \frac{cp^-}{p^- - 1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{4cp^-}{p^- - 1} \|f\|_{p(\cdot)} .$$

Tome $C = 4c$, e o resultado segue. ∎

No Teorema 2.3.1 é estabelecida uma relação entre os expoentes que pertencem aos conjuntos $\mathcal{P}_{\log}(X)$ e $\mathcal{P}^{\mu}_{\log}(X)$, onde tal relação depende de C_μ- constante de duplicação da medida μ, $C_{\log}(p)$- constante log-Hölder de $p(\cdot)$ e da $\mu\left(B(x_0, 1)\right)$. Tais dependências foram estabelecidas através dos resultados estudados para obtermos o teorema mencionado. Em consequência deste fato, obtemos o próximo resultado, que é o central desta seção.

Teorema 2.3.4. *Sejam (X, ϱ, μ) um espaço de medida métrico, onde μ é uma medida de duplicação. Assuma que $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X)$, com $p^- > 1$. Então*

$$\|\mathcal{M}f\|_{p(\cdot)} \leq \frac{Cp^-}{p^- - 1} \|f\|_{p(\cdot)} ,$$

para toda $f \in L^{p(\cdot)}(X)$, onde C depende de $\mu\left(B(x_0, 1)\right)$, C_μ- constante de duplicação da medida μ e $C_{\log}(p)$- constante log-Hölder de $p(\cdot)$.

Capítulo 3

Precompactos em Espaços de Lebesgue Generalizados

Este capítulo foi fundamentado em [10] e tem por objetivo o estudo de conjuntos relativamente compactos (precompactos) em espaços de Lebesgue com expoente variável em espaços de medida métricos. Serão apresentados preliminarmente alguns resultados relacionados com precompacidade para espaços métricos e em seguida o resultado central desta dissertação que visa caracterizar conjuntos precompactos em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$.

3.1 Conceitos Iniciais

Descreveremos nesta seção alguns conceitos e propriedades importantes a respeito de conjuntos relativamente compactos (precompactos) em espaço métricos. Tais resultados podem, muitas vezes, ser considerados relativamente simples no sentido de que a teoria necessária para obtê-los não necessita necessariamente ser muito vasta, contudo serão essenciais e cruciais para a seção e capítulo subsequentes onde serão apresentados os resultados principais deste trabalho.

Esta seção foi embasada na teoria que pode ser encontrada nas referências [12, 17].

Definição 3.1.1. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se* ***totalmente limitado*** *se para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de pontos de M tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, onde $B(x_i, \varepsilon)$ é uma bola aberta de centro x_i e raio ε para cada $i = 1, \cdots, n$.*

Observação 3.1.1. *Em consequência da Definição 3.1.1, qualquer conjunto totalmente limitado é também limitado.*

Definição 3.1.2. *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se* ***relativamente compacto*** *ou* ***precompacto*** *quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto, isto é, toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M.*

Lema 3.1.1. *Sejam (X, ϱ) um espaço métrico e $A \subset (X, \varrho)$ precompacto, então A é totalmente limitado e, assim, limitado.*

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então dado $\varepsilon > 0$, A esta contido em uma bola aberta de X e raio ε.

Assuma então que $A \neq \emptyset$ e tome $x_1 \in A$ qualquer fixado. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varrho(x_1, y) < \varepsilon$ para todo $y \in A$, então $A \subset B(x_1, \varepsilon)$.

Por outro lado, se existe $x_2 \in A$ tal que $\varrho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ e se para todo $y \in A$ temos que $\varrho(x_1, y) < \varepsilon$ ou $\varrho(x_2, y) < \varepsilon$, então $A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$.

E, ainda se existe $x_3 \in A$ tal que $\varrho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ ou $\varrho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ e se para todo $y \in A$ temos que $\varrho(x_1, y) < \varepsilon$ ou $\varrho(x_2, y) < \varepsilon$ ou $\varrho(x_3, y) < \varepsilon$, então $A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup B(x_3, \varepsilon)$.

Recursivamente, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que este processo acaba, e assim

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon). \tag{3.1}$$

De fato, suponha que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que (3.1) ocorra, assim obtemos uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para $i \neq j$.

Logo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente em A. Porém, A é precompacto, ou seja, $\overline{A}$ é compacto, e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset \overline{A}$. Então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em um compacto que não possui subsequência convergente, o que é um absurdo.

Portanto,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

o que implica que A é totalmente limitado. $\blacksquare$

Lema 3.1.2. *Sejam (X, ϱ) um espaço métrico e $A \subset (X, \varrho)$ totalmente limitado, então para todo $\varepsilon > 0$, A está contido na união de um número finito de bolas abertas de raio ε centradas em pontos de A.*

Demonstração. O caso $A = \emptyset$ é trivial. Suponha então que $A \neq \emptyset$, e por hipótese dado $\varepsilon > 0$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$$

onde $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subset X$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Sejam $z_i \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$, $i = 1, \cdots, n$, pontos quaisquer dessas interseções. Então o conjunto $\{z_1, \cdots, z_n\} \subset A$ e

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon),$$

pois para todo $z \in A$

$$\varrho(z, z_i) \leq \varrho(z, x_i) + \varrho(x_i, z_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Lema 3.1.3. *Sejam (X, ϱ) um espaço métrico completo e $A \subset (X, \varrho)$ totalmente limitado, então A é precompacto.*

Demonstração. Seja $A \subset (X, \varrho)$ totalmente limitado. Inicialmente note que $\overline{A}$ também é totalmente limitado, uma vez que modificando a cobertura de A com os mesmos centros, porém com raios dobrados temos que ela cobrirá $\overline{A}$.

Como A está contido em (X, ϱ) que é completo, para mostrar que seu fecho é compacto basta verificar que toda sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{A}$ possui subsequência de Cauchy.

Uma vez que $\overline{A}$ é totalmente limitado, dado uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\overline{A}$ existe uma subsequência $\{x_{1_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida em uma bola aberta de raio 1. De maneira análoga, existe uma subsequência $\{x_{2_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{1_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida em uma bola aberta de raio $\frac{1}{2}$. Recursivamente constrói-se, assim, subsequências $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{k-1_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ contidas em bolas de raio $\frac{1}{k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, $\{x_{k_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de Cauchy de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Lema 3.1.4. *Sejam $(X, \varrho_{\mathrm{x}})$ um espaço métrico. Assuma que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $\delta > 0$, um espaço métrico $(W, \varrho_{\mathrm{w}})$ e uma função $\Phi : X \to W$ satisfazendo*

(a) $\Phi(X)$ é totalmente limitado;

(b) Se $x, y \in X$ e $\varrho_{\mathrm{w}}(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta$ então $\varrho_{\mathrm{x}}(x, y) < \varepsilon$.

Então, X é totalmente limitado.

Demonstração. Para qualquer $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$, espaço métrico $(W, \varrho_{\mathrm{w}})$ e uma função $\Phi : X \to W$ tais como na hipótese.

Como $\Phi(X)$ é totalmente limitado, $\Phi(X)$ está contido em uma união finita de bolas abertas em W de raio δ, isto é,

$$\Phi(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\mathrm{w}}(\Phi(x_i), \delta). \tag{3.2}$$

Sendo assim, aplicando a inversa de Φ e usando o item (b) em (3.2), temos que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\mathrm{x}}(x_i, \varepsilon).$$

Portanto, X é totalmente limitado. ■

3.2 Caracterização de Precompactos em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$

Esta seção é dedicada ao estudo do Teorema 3.2.1, em específico, que é o ponto chave desta dissertação e que nos diz a respeito da caracterização de conjuntos relativamente compactos em espaços de Lebesgue com expoente variável em espaços de medida métricos.[1]

[1] O Teorema 3.2.1 é a generalização para o caso $p(\cdot)$ = constante, mostrado em [9].

Para a demonstração de tal teorema faremos uso de toda a bagagem acumulada dos Capítulos 1 e 2, e veremos que ele é um recurso valioso e muito poderoso para o entendimento de famílias precompactas em espaços de Lebesgue generalizados.

No que segue, dado (X,ϱ,μ) um espaço de medida métrico, denotaremos para $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ e A é um conjunto mensurável de X, o **valor médio** da função f sobre o conjunto A por

$$(f)_A := \fint_A f \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 3.2.1. *Sejam (X,ϱ,μ) um espaço de medida métrico, onde μ é uma medida de duplicação e $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(X,\mu)$ com $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Assuma que, para todo $r > 0$*

$$h(r) := \inf \{\mu(B(x,r))\, ;\, x \in X\} > 0,$$

isto é, vale a condição (i) da Proposição 2.2.2 (Veja também o Exemplo 2.2.2).

Então uma família $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\mathcal{F}$ é limitada em $L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$, isto é, existe $M > 0$, tal que $\int_X |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \leq M$, para toda $f \in \mathcal{F}$;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $r_0 > 0$, tais que $\int_X \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon$, para todo $0 < r < r_0$ e toda $f \in \mathcal{F}$;

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $\int_{X \setminus B(x_0,R)} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e para algum $x_0 \in X$.

Demonstração. Inicialmente assuma que a família $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$. Fixe $0 < \varepsilon < 1$ tal que $\tilde{\varepsilon} = \frac{p^- - 1}{Cp^-}\varepsilon < 1$, onde $C > 0$ é escolhido tal como nas hipóteses do Teorema 2.3.4.

Pelo Lema 3.1.2 podemos escolher $\{f_k\}_{k=1,\cdots,N}$ em $\mathcal{F}$, de forma que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(f_k, \tilde{\varepsilon}).$$

Para $f \in \mathcal{F}$, fixe $k \in \{1, \cdots, N\}$ satisfazendo $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} < \tilde{\varepsilon}$. Assim, pela Proposição 1.2.3-(i), temos

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(f_k - f) &= \int_X |f_k(x) - f(x)|^{p(\cdot)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \|f_k - f\|_{p(\cdot)} \\ &< \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mostremos, então, que as condições (i)-(iii) são satisfeitas:

(i): Como $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$, segue pelo Lema 3.1.1 que $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e, assim, limitada.

(ii): Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \int_X \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) &\leq 2^{p^+-1} \left(\int_X |f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right. \\ &+ \left. \int_X \left|f_k(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \\ &\leq 2^{p^+-1} \int_X |f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &+ 2^{2p^+-2} \left(\int_X \left|f_k(x) - (f_k)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right. \\ &+ \left. \int_X \left|(f_k)_{B(x,r)} - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \\ &= 2^{p^+-1} I_1 + 2^{2p^+-2} \left(I_2 + I_3\right). \end{aligned}$$

Para I_1, temos que por (3.3)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_X |f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &< \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Seguindo, para I_2 temos que desde que $p^- > 1$, temos que $L^{p(\cdot)}(X, \mu) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mu)$, logo pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue (Teorema 1.1.8)

$$\lim_{r \to 0} (f_k)_{B(x,r)} = f_k(x), \tag{3.4}$$

para quase todo $x \in X$.

Além disso, pelo Teorema 2.3.4

$$\begin{aligned} \left|f_k(x) - (f_k)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} &\leq 2^{p^+-1} \left(|f_k(x)|^{p(x)} + \left|(f_k)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \right) \\ &\leq 2^{p^+-1} \left(|f_k(x)|^{p(x)} + |\mathcal{M}(f_k)(x)|^{p(x)} \right) \in L^1(X, \mu). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto, tendo em vista (3.4) e (3.5) podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.1.4) para obter o seguinte

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_X \left|f_k(x) - (f_k)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeno.

E, por fim, para I_3 notamos que, pelo Teorema 2.3.4 temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(f_k - f)\|_{p(\cdot)} &\leq \frac{Cp^-}{p^- - 1} \|f_k - f\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \frac{Cp^-}{p^- - 1}\tilde{\varepsilon} \\ &= \varepsilon < 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Então pela Proposição 1.2.3-(i) segue que

$$\begin{aligned} \int_X |\mathcal{M}(f_k - f)(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) &\leq \|\mathcal{M}(f_k - f)\|_{p(\cdot)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Logo, usando (3.6) e (3.7) obtemos para I_3 que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_X \left|(f_k)_{B(x,r)} - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \left|⨍_{B(x,r)} (f_k(y) - f(y)) \, \mathrm{d}\mu(y)\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \|\mathcal{M}(f_k - f)\|_{p(\cdot)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) &\leq 2^{p^+-1}\tilde{\varepsilon} + 2^{2p^+-2}(\varepsilon + \varepsilon) \\ &= \varepsilon \left(2^{p^+-1}\frac{p^- - 1}{Cp^-} + 2^{2p^+-1}\right). \end{aligned}$$

Tome $r_0 = r$ e o item (ii) esta provado.

(iii): Para $k = 1, \cdots, N$ fixe $R_k > 0$ tal que

$$\int_{X \setminus B(x_0, R_k)} |f_k(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) < \varepsilon, \tag{3.8}$$

para alguns $x_0 \in X$.

Então, para $R = \max\{R_k;\ k = 1, \cdots, N\}$, temos que por (3.8), para toda $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\int_{X \setminus B(x_0, R)} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) &\leq 2^{p^+ - 1} \left(\int_X |f_k(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right. \\
&\quad + \left. \int_{X \setminus B(x_0, R_k)} |f_k(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \\
&< 2^{p^+ - 1} (\varepsilon + \varepsilon) = 2^{p^+} \varepsilon.
\end{aligned}$$

o que implica que (iii) é válida.

Reciprocamente, mostraremos a suficiência de (i)-(iii) para que $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$ seja precompacta.

Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sequência qualquer em $\mathcal{F}$. Como $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ é reflexivo e $\mathcal{F}$ é limitada, pelo Teorema 1.1.1 existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente para alguma $f \in L^{p(\cdot)}(X, \mu)$. (Denotaremos esta subsequência por $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

Mostraremos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ também converge fortemente em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$, isto é, na norma de $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$.

Note que, X é um espaço métrico, assim dado $x_0 \in X$ temos que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_0, k)$.

Inicialmente provaremos que $f_n \chi_{B(x_0, k)} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f \chi_{B(x_0, k)}$ em $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Para tal, fixe $k \in \mathbb{N}$ e apliquemos o Teorema 1.2.6.

(1): $p(\cdot)$-equi-integrabilidade: Seja $\varepsilon > 0$ fixo, $r > 0$ tal como em (ii) e fixe $A \subset X$. Usando a condição (i), onde $M > 0$ é a constante de limitação, a condição (ii), a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.2.5) e a Proposição 1.2.3-(iii), obtemos

$$\int_A \left| f_n(x) \chi_{B(x_0, k)}(x) \right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_A |f_n(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$2^{p^+ - 1} \left(\int_A \left| f_n(x) - (f_n)_{B(x,r)} \right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_A \left| (f_n)_{B(x,r)} \right|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+\int_A\left|\frac{2}{\mu\left(B(x,r)\right)}\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}\left\|1\right\|_{L^{p'(\cdot)}(B(x,r))}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+\int_A\left|\frac{2}{\mu\left(B(x,r)\right)}\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}\left(\int_{B(x,r)}\,\mathrm{d}\mu(x)+1\right)\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)=$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+\int_A\left|\frac{2}{\mu\left(B(x,r)\right)}\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}\left(\mu\left(B(x,r)\right)+1\right)\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)=$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+\int_A\left|2\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}+\frac{2}{\mu\left(B(x,r)\right)}\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)=$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+\int_A\left|2\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(B(x,r))}\left(1+\frac{1}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right)\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{p^+}\left(\left\|f_n\right\|_{L^{p(\cdot)}(X,\mu)}+1\right)^{p^+}\int_A\left|\frac{1+\mu\left(B(x,r)\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{p^+}\left(\rho_{p(\cdot)}(f_n)+2\right)^{p^+}\int_A\left|\frac{1+\mu\left(B(x,r)\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{2p^+-1}\left(M+1\right)^{p^+}\int_A\left|\frac{1+\mu\left(B(x,r)\right)}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)=$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{2p^+-1}\left(M+1\right)^{p^+}\int_A 1+\left|\frac{1}{\mu\left(B(x,r)\right)}\right|^{p(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{2p^+-1}\left(M+1\right)^{p^+}\left(\mu\left(A\right)+\int_A\frac{1}{h(r)^{p(x)}}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\right)\leq$$

$$2^{p^+-1}\left(\varepsilon+2^{2p^+-1}\left(M+1\right)^{p^+}\mu\left(A\right)\left(1+\frac{1}{h(r)^{p^+}}\right)\right).$$

Assim para a escolha de $0 < \delta < \dfrac{h(r)^{p^+}\varepsilon}{2^{2p^+-1}(M+1)^{p^+}(1+h(r))^{p^+}}$ e $A \subset X$ tal que $\mu(A) < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_A \left|f_n(x)\chi_{B(x_0,k)}(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}\mu(x) &< 2^{p^+-1}\left(\varepsilon + \frac{h(r)^{p^+}\varepsilon}{(1+h(r))^{p^+}}\left(1+\frac{1}{h(r)^{p^+}}\right)\right)\\
&= 2^{p^+-1}\left(\varepsilon + \frac{h(r)^{p^+}\varepsilon}{(1+h(r))^{p^+}} + \frac{\varepsilon}{(1+h(r))^{p^+}}\right)\\
&= 2^{p^+-1}(\varepsilon+\varepsilon)\\
&= 2^{p^+}\varepsilon.
\end{aligned}$$

(2): Convergência em medida: Fixe $\varepsilon > 0$ e considere o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned}
&\left\{x \in X;\ \left|f_n(x)\chi_{B(x_0,k)}(x) - f(x)\chi_{B(x_0,k)}(x)\right| \geq \varepsilon\right\} =\\
&\{x \in B(x_0,k);\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset\\
&\left\{x \in B(x_0,k);\ \left|f_n(x) - (f_n)_{B(x,r)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup\\
&\left\{x \in B(x_0,k);\ \left|(f_n)_{B(x,r)} - (f)_{B(x,r)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup\\
&\left\{x \in B(x_0,k);\ \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \;=\; A_1 \cup A_2 \cup A_3.
\end{aligned}$$

Note que A_1, A_2 e A_3 são disjuntos, assim vamos mostrar que para qualquer $\delta > 0$ fixado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ a seguinte condição é satisfeita

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) < \delta.$$

Supondo sem perda de generalidade que $0 < \dfrac{\varepsilon}{3} < 1$, temos que, pela condição (ii) e pelo Lema 1.2.2, para $\mu(A_1)$ vale

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &\leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \int_{B(x_0,k)} \left|f_n(x) - (f_n)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \int_X \left|f_n(x) - (f_n)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &< \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \varepsilon \\ &< \frac{\delta}{3},\end{aligned}$$

para $0 < r < r_1$.

Novamente pelo Lema 1.2.2, temos que para $\mu(A_3)$ vale

$$\begin{aligned}\mu(A_3) &\leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \int_{B(x_0,k)} \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \int_X \left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue (Teorema 1.1.8), a função integrada em (3.9) tende a zero quando $r \to 0^+$, portanto é suficiente mostrar que valem as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.1.4) para esta função e aplicá-lo.

Note que

$$\left|f(x) - (f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}\left(|f(x)|^{p(x)} + |\mathcal{M}(f)(x)|^{p(x)}\right) \in L^1(X,\mu),$$

logo para $0 < r < r_2$, temos

$$\begin{aligned}\mu(A_3) &< \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{p^+} \varepsilon \\ &< \frac{\delta}{3}.\end{aligned}$$

Resta analisar o conjunto A_2. Desde que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ fracamente em $L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ e $\chi_{B(x,r)} \in L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ para todo $x \in X$ e $r > 0$, temos pela definição de convergência fraca e pela caracterização de dualidade entre $L^{p(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$ e $L^{p'(\cdot)}(X,\varrho,\mu)$, que para todos $x \in B(x_0,k)$ e $r > 0$

$$\int_X f_n(y)\chi_{B(x,r)}(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(y)\chi_{B(x,r)}(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Assim sendo, para todos $x \in B(x_0, k)$ e $r > 0$

$$(f_n)_{B(x,r)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f)_{B(x,r)}.$$

A convergência acima implica que $(f_n)_{B(x_0,r)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f)_{B(x_0,r)}$ em medida em $B(x_0, k)$, desde que $\mu\,(B(x_0, k)) < \infty$. Portanto, segue que $\mu\,(A_2) < \dfrac{\delta}{3}$, para $n \geq N$.

Finalmente, para $0 < r < \min\{r_1, r_2\}$ e $n \geq N$ temos que

$$\mu\,(A_1) + \mu\,(A_2) + \mu\,(A_3) < \delta.$$

Logo, $f_n\chi_{B(x_0,k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\chi_{B(x_0,k)}$ em medida.

(3): Condição de decaimento no infinito: Segue diretamente da condição (iii).

Assim, concluímos pelo Teorema 1.2.6, que $f_n\chi_{B(x_0,k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\chi_{B(x_0,k)}$ em $L^{p(\cdot)}(X, \mu)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado.

Para concluir a prova, mostraremos que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$.

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{B(x_0,k)} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_{X\setminus B(x_0,k)} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int_{B(x_0,k)} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&+ 2^{p^+-1}\Bigg(\int_{X\setminus B(x_0,k)} |f_n(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\
&+ \int_{X\setminus B(x_0,k)} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)\Bigg) \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Escolha $R > 0$ tal como na condição (iii) para $\dfrac{\varepsilon}{3\cdot 2^{p^+-1}}$ e $R_1 > 0$ tal que

$$\int_{X\setminus B(x_0,R_1)} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \ \leq\ \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^{p^+-1}}.$$

Seja $k = \max\{\lceil R \rceil, \lceil R_1 \rceil\}$. Como $f_n \chi_{B(x_0,k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\chi_{B(x_0,k)}$ em $L^{p(\cdot)}(X, \varrho, \mu)$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado, segue que dado $N \in \mathbb{N}$, temos que $J_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ para $n \geq N$. Então

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{3} + 2^{p^+-1}\left(\frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p^+-1}} + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{p^+-1}}\right) = \varepsilon.$$

Logo, como obtemos convergência em modular, segue pela Proposição 1.2.4 a convergência em norma e, portanto, a prova esta finalizada. ∎

Capítulo 4

Precompactos em Espaços de Lebesgue Generalizados no Espaço Euclidiano

Neste Capítulo estudaremos conjuntos relativamente compactos em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, sendo $\mathbb{R}^n$ munido da medida de Lebesgue usual. Daremos duas caracterizações diferentes para precompactos em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fundamentados em [10] e exemplos de famílias onde tais caracterizações poderão ser aplicadas. [1]

4.1 Precompactos em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Como um simples corolário do Teorema 3.2.1, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. *Seja $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e assuma que $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Denote por*

$$f_h(x) := (f)_{B(x,h)} = \fint_{B(x,h)} f(y)\, \mathrm{d}y,$$

então a família $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $\mathcal{F}$ é limitada em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$;

[1] Como uma observação interessante destacamos que antes da publicação de [10] as caracterizações de precompactos conhecidas, sendo elas para um conjunto Ω limitado de $\mathbb{R}^n$, podem ser encontradas em [3, 18].

(ii) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f_h(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x < \varepsilon$*, para todo* $|h| < r_0$ *e toda* $f \in \mathcal{F}$*;*

(iii) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $R > 0$*, tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x < \varepsilon$*, para toda* $f \in \mathcal{F}$*.*

Agora, generalizaremos o Teorema 4.1.1 para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Corolário 4.1.1. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer mensurável,* $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$*,* $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\log}(\Omega)$ *com* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ *e* $\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ \tilde{f} = f\chi_\Omega;\ f \in \mathcal{F} \right\}$*. Seja ainda* $\tilde{p}(\cdot)$ *a extensão log-Hölder contínua de* $p(\cdot)$ *em* $\mathbb{R}^n$*. Então a família* $\mathcal{F}$ *é precompacta em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $\mathcal{F}$ *é limitada em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$*;*

(ii) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \left| \tilde{f}_h(x) - \tilde{f}(x) \right|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}x < \varepsilon$*, para todo* $|h| < r_0$ *e toda* $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$*;*

(iii) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $R > 0$*, tal que* $\displaystyle\int_{\Omega \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x < \varepsilon$*, para toda* $f \in \mathcal{F}$*.*

Demonstração. Primeiramente note que a extensão log-Hölder contínua de $p(\cdot)$, $\tilde{p}(\cdot)$, existe e está bem definida em virtude do Lema 2.1.1 e ainda $\tilde{\mathcal{F}} \subset L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Teorema 4.1.1 a família $\tilde{\mathcal{F}}$ é precompacta em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Fixe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ uma sequência qualquer. Então $\left\{ \tilde{f}_n \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ possui uma subsequência $\left\{ \tilde{f}_{n_k} \right\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para alguma $\tilde{f} \in L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, temos que

$$\int_\Omega \left| f_{n_k}(x) - \tilde{f}\chi_\Omega(x) \right|^{p(x)} \mathrm{d}\mu(x) \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \tilde{f}_{n_k}(x) - \tilde{f}(x) \right|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}\mu(x) \ \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ 0.$$

Logo, $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}\chi_\Omega$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, assim $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Suponha, agora, que $\mathcal{F}$ seja precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Então, temos que $\tilde{\mathcal{F}}$ é precompacta em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, para qualquer sequência $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ e subsequência $\left\{\tilde{f}_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{\tilde{f}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ para alguma $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{f}_{n_k}(x) - f\chi_\Omega(x)\right|^{\tilde{p}(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \;=\; \int_\Omega |f_{n_k}(x) - f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, segue do Teorema 4.1.1, que $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfaz as condições (i)-(iii). Logo, $\mathcal{F}$ satisfaz estas condições e a prova esta finalizada. ■

É conhecido para o caso dos espaços clássicos de Lebesgue o seguinte teorema:

Teorema 4.1.2 (**Kolmogorov - Riesz**[2]). *Seja $1 \leq p < \infty$. Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $L^p(\mathbb{R}^n)$ é totalmente limitado se, e somente se, as condições a seguir forem satisfeitas*

(i) $\mathcal{F}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < \delta$;

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $\int_{|x|>R} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p$, para toda $f \in \mathcal{F}$.

Ou seja, para o caso $p =$ constante a condição (ii) do Teorema 4.1.1 pode ser substituída pela seguinte

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, é natural perguntar sobre quais condições similares podemos obter um resultado análogo para o caso de espaço de Lebesgue com expoente variável?

O próximo teorema nos fornecerá um resposta para esta questão.

Teorema 4.1.3. *Seja $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e assuma que $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ com $p^+ < \infty$. Se as seguintes condições forem satisfeitas*

(i) $\mathcal{F}$ é limitada em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$;

---

[2]Para o leitor interessado em se aprofundar a respeito de resultados voltados ao tipo do Teorema de Kolmogorov-Riesz, ou seja, no estudo de precompacidade no espaço euclidiano para o caso dos espaços de Lebesgue clássicos, indicamos as referências [2, 12].

(ii) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x < \varepsilon$, *para todo* $|h| < r_0$ *e toda* $f \in \mathcal{F}$;

(iii) *Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $R > 0$, *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x < \varepsilon$, *para toda* $f \in \mathcal{F}$;

então a família $\mathcal{F}$ *é precompacta em* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ fixo e sejam $\delta > 0$ e $R > 0$ tais como nas condições (ii) e (iii).

Note que podemos encontrar uma δ-cobertura da bola $B(0,R)$ consistindo de cubos disjuntos $\{Q_i\}_{i=1,\cdots,N}$.

Seguindo, defina o seguinte operador

$$P : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to W := [\{Q_i \ : \ i = 1, \cdots, N\}] \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$$

da seguinte maneira

$$P(f)(x) = \sum_{i=1}^{N} \chi_{Q_i} ⨍_{Q_i} f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{N} Q_i} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Da condição (iii) segue imediatamente que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vamos agora analisar I_2. Para tal consideraremos a seguinte notação

$$\mu Q = |Q_i| = \delta.$$

Pela Desigualdade de Jensen (Proposição 1.1.6), temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| f(x) - \frac{1}{\mu Q} \int\limits_{Q_i} f(y) \, \mathrm{d}y \right|^{p(x)} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| \frac{1}{\mu Q} \int\limits_{Q_i} (f(x) - f(y)) \, \mathrm{d}y \right|^{p(x)} \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu Q} \int_{Q_i} \int_{Q_i} |f(x) - f(y)|^{p(x)} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + z$, temos que como x e $y \in Q_i$, então z esta contido no cubo $2Q$ com comprimento igual a 2δ e centrado na origem do sistema de coordenadas.

Pelo Teorema de Fubini (Teorema 1.1.5) e usando a condição (ii), obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu Q} \int_{Q_i} \int_{2Q} |f(x) - f(x+z)|^{p(x)} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu Q} \int_{2Q} \int_{Q_i} |f(x) - f(x+z)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \\
&\leq \frac{1}{\mu Q} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+z)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \\
&\leq \frac{1}{\mu Q} |2Q| \, \varepsilon \\
&= \frac{1}{\mu Q} 2^n \mu Q \varepsilon = 2^n \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - P(f)(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x \quad < \quad (2^n + 1) \, \varepsilon.$$

Agora, mostraremos que P é uma aplicação que satisfaz as condições do Lema 3.1.4.

(a): Usando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.2.5), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |P(f)(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{i=1}^{N} \chi_{Q_i}(x)\frac{1}{\mu Q}\int_{Q_i} f(y)\,\mathrm{d}y\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{i=1}^{N} \chi_{Q_i}(x)\frac{2}{\mu Q}\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_i)}\, \|1\|_{L^{p'(\cdot)}(Q_i)}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_i} \left|\frac{2}{\mu Q}\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=1}^{N} (1+\mu Q)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_i} \left|\frac{2N}{\mu Q}\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (1+\mu Q)+1\right|^{p^+} \mathrm{d}x \\
&= \left|\frac{2N}{\mu Q}\, \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} (1+\mu Q)+1\right|^{p^+} N\mu Q.
\end{aligned}$$

A limitação da família $\mathcal{F}$ implica na limitação da imagem $P(\mathcal{F})$. Além disso, desde que o espaço W é de dimensão finita, então $P(\mathcal{F})$ é totalmente limitado.

(b): Seja $\|P(f)-P(g)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|f-P(f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|P(f)-P(g)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} + \|P(g)-g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \\
&< 2\left((2^n+1)\,\varepsilon\right)^{\frac{1}{p^+}} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.1.4 a família $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e como $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach (Teorema 1.2.1), segue do Lema 3.1.3 que $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. ■

Observação 4.1.1. *Vale a pena notar que não há suposição sobre a regularidade do expoente $p(\cdot)$ no Teorema 4.1.3.*

Corolário 4.1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Seja ainda $\tilde{\mathcal{F}}$ uma família de funções de $\mathcal{F}$ estendidas por 0 fora de Ω, isto é, $\tilde{\mathcal{F}} = \left\{\tilde{f} = f\chi_\Omega \ : f \in \mathcal{F}\right\}$. Assuma que $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ com $p^+ < \infty$ e tome $\tilde{p}(x) = p(x) + p^-\chi_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}(x)$. Se as seguintes condições forem satisfeitas*

(i) *$\mathcal{F}$ é limitada em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$;*

(ii) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)\right|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}x < \varepsilon$, para todo $|h| < r_0$ e toda $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$;*

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$, tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)}\, \mathrm{d}x < \varepsilon$*, para toda* $f \in \mathcal{F}$*;*

então a família $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Demonstração. Primeiramente, note que $\tilde{\mathcal{F}} \subset L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a família $\tilde{\mathcal{F}}$ é limitada em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e a condição (iii) é claramente válida para $\tilde{\mathcal{F}}$. Para a condição (iii) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \left|\tilde{f}(x)\right|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}x &= \int_{\Omega \setminus B(0,R)} |f(x)|^{p(x)}\, \mathrm{d}x \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para $R > 0$ suficientemente grande e para qualquer $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Logo, pelo Teorema 4.1.3, a família $\tilde{\mathcal{F}}$ é precompacta em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Para isto, seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ uma sequência fixada e seja também $\left\{\tilde{f}_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{\tilde{f}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente para alguma $\tilde{f} \in L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ em $L^{\tilde{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

A subsequência $\tilde{f}_{n_k}$ pode ser escolhida de modo que convirja quase sempre pontualmente, e assim obtemos que $\tilde{f}$ é igual a 0 quase sempre em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Logo, segue que

$$\int_\Omega \left|f_{n_k}(x) - \tilde{f}\chi_\Omega(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{f}_{n_k}(x) - \tilde{f}(x)\right|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}\chi_\Omega$ em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, o que completa a demonstração. ■

4.2 A Não Invariância por Translações em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Esta seção é dedicada ao estudo de um possível contratempo que podemos nos deparar ao aplicar a exemplos o Teorema 4.1.3.

A princípio apresentaremos dois lemas bastante surpreendentes e veremos por meio deles que translações são limitadas em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se p é constante, isto é, se estamos no cenário dos espaços clássicos de Lebesgue. Quer dizer, veremos assim que os espaços $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para p não constante não são invariantes por translações.

Porém, a ideia aqui é mostrar através de exemplos que existem sim casos de famílias em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ cujas as hipóteses do Teorema 4.1.3 se aplicam.

As pesquisas para esta parte do trabalho foram fundamentadas em [5, 10, 14].

Lema 4.2.1. *Assuma que $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e defina o operador translação por $\tau_h f := f(y+h)$. Então $\tau_h : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ esta bem definido para todo $h \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se $p =$ constante.*

Demonstração. Se $p(\cdot) = p$, isto é, $p(\cdot)$ é constante então τ_h esta bem definido para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Suponha agora que τ_h é limitado em $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ e fixe $h \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente. Então $\tau_h f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n + h)$, onde $\mathbb{R}^n + h = \{x + h \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$ e, assim

$$\|\tau_h f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{\tau_{-h}p(\cdot)},$$

o que implica

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tau_{-h}p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 1.2.4-(b) temos que $p(\cdot) \geq \tau_{-h}p(\cdot)$ quase sempre. Substituindo f por $-h$ temos que

$$p(\cdot) \geq \tau_h p(\cdot) \geq p(\cdot).$$

Como h é arbitrário, concluímos que p é constante. ∎

Lema 4.2.2. *Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, então se $p(\cdot)$ é não constante existe $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathbb{R}^n$ tais que $\tau_h f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ é não contínuo, isto é, existe $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\lim_{|h| \to 0} \|\tau_h f - f\|_{p(\cdot)} \neq 0.$$

Demonstração. Seja $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ não constante. Para construir a função $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ desejada, fixe $h \in \mathbb{R}^n$ tal que τ_h é um operador não limitado, podemos afirmar que tal h existe em virtude do Lema 4.2.1.

Então existe uma sequência de funções $f_k \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, com $k \in \mathbb{N}$, tais que $\|f_k\|_{p(\cdot)} \leq 1$, mas $\|\tau_h f\|_{p(\cdot)} \geq 4^k$. Se para algum k, $\tau_h f_k \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ obtemos o desejado, caso contrário, seja

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |f_k|.$$

Então

$$\|f\|_{p(\cdot)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|f_k\|_{p(\cdot)} \leq 1, \tag{4.1}$$

mas, para todo $k \in \mathbb{N}$, $f \geq \dfrac{1}{2^k} |f_k|$, e então

$$\|\tau_h f\|_{p(\cdot)} \geq \frac{1}{2^k} \|\tau_h f_k\|_{p(\cdot)} \geq 2^k.$$

Portanto, $\|\tau_h f\|_{p(\cdot)} = \infty$ e $\tau_h f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Para provar a outra parte do lema, note que para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$, $\left(\tau_{h/2} \circ \tau_{h/2}\right) = \tau_h f$. Então $\tau_h f$ é limitado se $\tau_{2^{-k}h}$ o for.

Portanto, pela primeira parte da prova, podemos encontrar $h \in \mathbb{R}^n$, tal que se $h_k = 2^{-k}h$, então τ_{h_k} é não limitado. Assim sendo, existem funções $f_k \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\|f_k\|_{p(\cdot)} \leq 1$, tais que $\tau_{h_k} f_k \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Seja

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |f_k|,$$

então $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, por (4.1), mas para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $f \geq \dfrac{1}{2^k} |f_k|$ e assim $\tau_{h_k} \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\tau_{h_k} f - f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ e o resultado segue. ■

Assim, surge a seguinte questão: as hipóteses do Teorema 4.1.3 nos levam sempre ao caso $p(\cdot) = p$, isto é, nos levam aos espaços de Lebesgue clássicos?

Exemplo 4.2.1. *Seja $\Omega = \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, com $0 < A < B < 0$. Considere a seguinte família de funções*

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ ; \ A \leq \lambda \leq B \right\}.$$

Vamos mostrar que a família $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Corolário 4.1.2 para qualquer expoente variável limitado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, e assim concluiremos que $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Verificação. Sejam $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{p}(\cdot)$ as extensões para a família $\mathcal{F}$ e para o expoente variável limitado $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$, definidas tais como no Corolário 4.1.2.

(i) $\mathcal{F}$ é limitada em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$:

De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x &= \int_{\left\{x\geq 0\ ;\ \lambda e^{-\lambda x}\leq 1\right\}}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x+\int_{\left\{x\geq 0\ ;\ \lambda e^{-\lambda x}\geq 1\right\}}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^-}\ \mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^+}\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda^{p^--1}}{p^-}+\frac{\lambda^{p^+-1}}{p^+}\\
&\leq \frac{B^{p^--1}}{p^-}+\frac{B^{p^+-1}}{p^+}<\infty.
\end{aligned}
$$

(ii) Decaimento uniforme para translações:

Fixe h satisfazendo $\left|e^{-\lambda h}-1\right|<1$ para todo $A<\lambda<B$. Desta forma, para cada h, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left|\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)\right|^{\tilde{p}(x)}\ \mathrm{d}x &= \int_{\{x\geq 0\ ;\ x+h\geq 0\}}|f(x+h)-f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&+ \int_{\{x\geq 0\ ;\ x+h<0\}}|f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&+ \int_{\{x<0\ ;\ x+h\geq 0\}}|f(x+h)|^{\tilde{p}(x)}\ \mathrm{d}x\\
&= I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

onde $I_2\neq 0$ para $h<0$ e $I_3\neq 0$ para $h>0$.

Assim, temos que para I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\{x\geq 0\ ;\ x+h\geq 0\}}|f(x+h)-f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&= \int_{\max\{0,-h\}}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&= \int_{\max\{0,-h\}}^{\infty}\left|\lambda e^{-\lambda x}\left(e^{-\lambda h}-1\right)\right|^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&\leq \left|e^{-\lambda h}-1\right|^{p^-}\int_{\max\{0,-h\}}^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&\leq \left|e^{-\lambda h}-1\right|^{p^-}\int_0^{\infty}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x\\
&\leq \left|e^{-\lambda h}-1\right|^{p^-}\left(\int_{\left\{x\geq 0\ ;\ e^{-\lambda x}\leq 1\right\}}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x+\int_{\left\{x\geq 0\ ;\ e^{-\lambda x}\geq 1\right\}}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)}\ \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|e^{-\lambda h}-1\right|^{p^-}\left(\int_0^\infty \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^-} \mathrm{d}x + \int_0^\infty \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^+} \mathrm{d}x\right)\\
&= \left|e^{-\lambda h}-1\right|^{p^-}\left(\frac{\lambda^{p^- -1}}{p^-}+\frac{\lambda^{p^+ -1}}{p^+}\right) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Para I_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\{x\geq 0\ ;\ x+h<0\}} |f(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x\\
&= \int_0^{-h} |f(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x\\
&= \int_0^{-h} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)} \mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^{-h} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^+} \mathrm{d}x + \int_0^{-h} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^-} \mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda^{p^+ -1}}{p^+}\left(1-e^{\lambda h p^+}\right)+\frac{\lambda^{p^- -1}}{p^-}\left(1-e^{\lambda h p^-}\right) \overset{h\to 0^-}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

E, finalmente, para I_3

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\{x<0\ ;\ x+h\geq 0\}} |f(x+h)|^{\tilde{p}(x)} \mathrm{d}x\\
&= \int_{-h}^{0} |f(x+h)|^{p^-} \mathrm{d}x\\
&= \int_{-h}^{0} \left(\lambda e^{-\lambda(x+h)}\right)^{p^-} \mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda^{p^- -1}}{p^-} e^{\lambda h p^-}\left(e^{\lambda h p^-}-1\right) \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

(iii) Decaimento uniforme no infinito:

Para $R>0$ fixo, temos

$$
\begin{aligned}
\int_R^\infty \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)} \mathrm{d}x &= \int_{\left\{x\geq R\ ;\ \lambda e^{-\lambda x}\leq 1\right\}} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)} \mathrm{d}x\\
&+ \int_{\left\{x\geq R\ ;\ \lambda e^{-\lambda x}\geq 1\right\}} \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p(x)} \mathrm{d}x\\
&\leq \int_R^\infty \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^-} \mathrm{d}x + \int_R^\infty \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)^{p^+} \mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda^{p^- -1}}{p^-} e^{-\lambda p^- R}+\frac{\lambda^{p^+ -1}}{p^+} e^{-\lambda p^+ R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Corolário 4.1.2, a família $\mathcal{F}$ é precompacta em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, com $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ qualquer, não necessariamente constante. ∎

Antes de prosseguirmos com o próximo exemplo, se faz necessário a apresentação do seguinte lema técnico:

Lema 4.2.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(\Omega) < \infty$ e $p(\cdot),\ q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ onde $p(x) \leq q(x)$ quase sempre em Ω, então*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq (1 + \mu(\Omega)) \|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq (1 + \mu(\Omega))$ para toda $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ com $\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$.

Dada $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ com $\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq 1$, segue do Lema 1.2.1, que $\rho_{q(\cdot)}(f) \leq 1$.

Assim, como por hipótese $p(x) \leq q(x)$ quase sempre em Ω, vem que

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(f) &= \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \int_\Omega |f(x)|^{q(x)}\ \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \mu(\Omega) + \rho_{q(\cdot)}(f) \\ &\leq \mu(\Omega) + 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Usando a convexidade de $\rho_{p(\cdot)}$, (Proposição 1.2.1-(c)), e (4.2) temos

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{(\mu(\Omega)+1)}\right) \ \leq\ \frac{1}{(\mu(\Omega)+1)}\rho_{p(\cdot)}(f) \ \leq\ 1.$$

.

Portanto, novamente pelo Lema 1.2.1, seque que

$$\left\|\frac{f}{(\mu(\Omega)+1)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \ =\ \frac{1}{(\mu(\Omega)+1)}\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \ \leq\ 1,$$

isto é,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \ \leq\ (1 + \mu(\Omega)).$$

∎

Exemplo 4.2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\mu(\Omega) < \infty$ e $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$ onde $p(x) \leq q(x)$ quase sempre em Ω. Vamos mostrar que se $p^+ < \infty$, funções, f, limitadas com suporte compacto satisfazem*

$$f(\cdot + h) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} f \text{ em } L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Verificação. De fato, considere $p^+ < \infty$ e f uma função limitada com suporte compacto em Ω. Então para todo h, $|h| < 1$, existe um conjunto compacto, $K \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\operatorname{supp}(f(\cdot + h)) \subset K$.

Sabemos, ainda, que se $1 \leq p < \infty$, o conjunto das funções contínuas (limitadas) com suporte compacto é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, assim temos que, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $\lim\limits_{h \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Logo, pelo Lema 4.2.3 e usando o fato de que o operador translação é contínuo em $L^{p^+}(\Omega)$, segue que

$$\lim_{h \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega \cup K)} \leq (1 + \mu(\Omega \cup K)) \lim_{h \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^{p^+}(\Omega \cup K)} = 0.$$

Portanto, se $p^+ < \infty$, as funções, f, limitadas com suporte compacto satisfazem

$$f(\cdot + h) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} f \text{ em } L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

$\blacksquare$

Capítulo 5

Precompactos em Espaços de Sequências Generalizados

Neste capítulo estamos interessados em analisar o espaço discreto análogo ao espaço de Lebesgue generalizado, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, ou seja, os espaços de sequências com expoente variável, denotado por $l^{\{p_n\}}$. Estudaremos algumas de suas propriedades básicas com o intuito de compreendermos tais espaços, onde tivemos por referência [16], e o indicamos como boa fonte de consulta, bem como também as referências indicadas por ele. E por fim, fundamentados em [10], apresentaremos o ponto chave deste capítulo que é uma caracterização para famílias precompactas em $l^{\{p_n\}}$.

5.1 Definições e Resultados Básicos

Da mesma forma da Subseção 1.2.1, para a definição de espaços de sequências com expoente variável é necessário primeiramente definirmos com qual tipo de expoente variável estamos interessados.

Definição 5.1.1. *Denotamos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as sequências reais $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem*

$$1 \ < \ p^- := \inf_{n\in\mathbb{N}} p_n \ \leq \ p^+ := \sup_{n\in\mathbb{N}} p_n \ < \ \infty.$$

Para esta seção fixemos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$.

Definição 5.1.2. *Dado $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos o **modular** associado a $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por*

$$\rho_{\{p_n\}}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|^{p_n}.$$

Além disso, $l^{\{p_n\}}$ é definido por

$$l^{\{p_n\}} := \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \rho_{\{p_n\}}(x) < \infty \right\}.$$

Observação 5.1.1. *Note que, para $s > 1$, a função $t \longmapsto t^s$, $t \geq 0$, é convexa. Logo, segue que $x \longmapsto \rho_{\{p_n\}}(x)$ também é uma função convexa.*

Proposição 5.1.1. *Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e x, $y \in l^{\{p_n\}}$, temos:*

(a) $\rho_{\{p_n\}}(x+y) \leq 2^{p^+-1}\left(\rho_{\{p_n\}}(x) + \rho_{\{p_n\}}(y)\right)$;

(b) $\rho_{\{p_n\}}(\lambda x) \leq \max\left(|\lambda|^{p^-}, |\lambda|^{p^+}\right)\rho_{\{p_n\}}(x)$.

Demonstração. (a): Dados x, $y \in l^{\{p_n\}}$, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\{p_n\}}(x+y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n + y_n|^{p_n} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} 2^{p_n-1}\left(|x_n|^{p_n} + |y_n|^{p_n}\right) \\ &\leq 2^{p^+-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|^{p_n} + \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |y_n|^{p_n}\right) = 2^{p^+-1}\left(\rho_{\{p_n\}}(x) + \rho_{\{p_n\}}(y)\right). \end{aligned}$$

(b): Se $\lambda \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, segue que para $x \in l^{\{p_n\}}$

$$\begin{aligned} \rho_{\{p_n\}}(\lambda x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |\lambda x_n|^{p_n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |\lambda|^{p_n} |x_n|^{p_n} \\ &\leq |\lambda|^{p^+} \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|^{p_n} = |\lambda|^{p^+} \rho_{\{p_n\}}(x). \end{aligned}$$

Caso $\lambda \in (-1,1)$, segue que para $x \in l^{\{p_n\}}$

$$\begin{aligned}\rho_{\{p_n\}}(\lambda x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |\lambda x_n|^{p_n} \\ &\leq |\lambda|^{p^-} \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|^{p_n} = |\lambda|^{p^-} \rho_{\{p_n\}}(x).\end{aligned}$$

Portanto, para Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in l^{\{p_n\}}$, vem que

$$\rho_{\{p_n\}}(\lambda x) \leq \max\left(|\lambda|^{p^-}, |\lambda|^{p^+}\right) \rho_{\{p_n\}}(x).$$

■

Note que, segue da Proposição 5.1.1 que o espaço $l^{\{p_n\}}$ é um espaço vetorial.

Definição 5.1.3. *Dados $x \in l^{\{p_n\}}$, defina o seguinte funcional*

$$\|x\|_{\{p_n\}} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

*O funcional $\| \cdot \|_{\{p_n\}}$ define uma norma em $l^{\{p_n\}}$, chamada de **"Norma de Luxemburg"**, e $\left(l^{\{p_n\}}, \| \cdot \|_{\{p_n\}}\right)$ é um espaço de Banach.*[1]

Proposição 5.1.2. *Se $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = \cdots = p =$ constante, então o espaço $l^{\{p_n\}}$ coincide com o espaço de sequências clássicos, l^p, e as normas sobre esses espaços também coincidem.*

Demonstração. Claramente, se $p_0 = p_1 = \cdots = p_n = \cdots = p =$ constante, os espaços $l^{\{p_n\}}$ e l^p coincidem. Agora, dado $x \in l^{\{p_n\}} = l^p$, temos que

$$\begin{aligned}\|x\|_{\{p_n\}} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \left|\frac{x_n}{\lambda}\right|^p \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p}\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} |x_n|^p \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \|x\|_p \leq \lambda\right\} = \|x\|_p.\end{aligned}$$

■

[1] Para mais detalhes indicamos a referência [16].

Lema 5.1.1. *Para qualquer* $x \in l^{\{p_n\}}$*, temos*

$$\rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) \leq 1.$$

Demonstração. Considere $x \in l^{\{p_n\}}$ arbitrário. Pela definição da norma $\|\ .\ \|_{\{p_n\}}$ em $l^{\{p_n\}}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existe λ_k com $\|x\|_{\{p_n\}} \leq \lambda_k \leq \|x\|_{\{p_n\}} + \dfrac{1}{k}$, tal que $\rho_{\{p_n\}}\left(\dfrac{x}{\lambda_k}\right) \leq 1$.

Sendo assim, segue que

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{|x_n|^{p_n}}{\left(\|x\|_{\{p_n\}} + \frac{1}{k}\right)^{p_n}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^{p_n}}{\left(\|x\|_{\{p_n\}} + \frac{1}{k}\right)^{p_n}} \leq \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right) \leq 1.$$

Então,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{|x_n|^{p_n}}{\left(\|x\|_{\{p_n\}}\right)^{p_n}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{|x_n|^{p_n}}{\left(\|x\|_{\{p_n\}} + \frac{1}{k}\right)^{p_n}} \leq 1.$$

Portanto,

$$\rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{|x_n|^{p_n}}{\left(\|x\|_{\{p_n\}}\right)^{p_n}} \leq 1.$$

∎

Proposição 5.1.3. *Dado* $x \in l^{\{p_n\}}$*, então* $\rho_{\{p_n\}}(x) = 1$*, se e somente se* $\|x\|_{\{p_n\}} = 1$.

Demonstração. Seja $x \in l^{\{p_n\}}$ e suponha, inicialmente, que $\rho_{\{p_n\}}(x) = 1$. Aplicando a definição da norma $\|\ .\ \|_{\{p_n\}}$ em $l^{\{p_n\}}$, obtemos

$$1 = \rho_{\{p_n\}}(x) = \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{1}\right) \geq \|x\|_{\{p_n\}}.$$

Caso $\|x\|_{\{p_n\}} < 1$, pela convexidade de $\rho_{\{p_n\}}$ e pelo Lema 5.1.1, segue que

$$\rho_{\{p_n\}}(x) = \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{\|x\|_{\{p_n\}}\, x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) \leq \|x\|_{\{p_n\}}\, \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) < 1,$$

o que é uma contradição. Logo, $\|x\|_{\{p_n\}} = 1$.

Reciprocamente, se $\|x\|_{\{p_n\}} = 1$, temos pelo Lema 5.1.1, que

$$\rho_{\{p_n\}}(x) \;=\; \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) \;\leq\; 1.$$

Suponha que para algum $x \in l^{\{p_n\}}$ com $\|x\|_{\{p_n\}} = 1$, temos $\rho_{\{p_n\}}(x) < 1$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\rho_{\{p_n\}}(x) + \varepsilon < 1$.

Sabemos que a função $x \longmapsto \rho_{\{p_n\}}(x)$ é convexa e como $\rho_{\{p_n\}}(x) < 1$ também é superiormente limitada, e portanto contínua. Assim,

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \rho_{\{p_n\}}(\lambda x) \;=\; \rho_{\{p_n\}}(x).$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que para cada λ com $|\lambda - 1| < \delta$, temos $\left|\rho_{\{p_n\}}(\lambda x) - \rho_{\{p_n\}}(x)\right| < \varepsilon$.

Resulta que, para $1 < \lambda < 1 + \delta$, temos $\rho_{\{p_n\}}(\lambda x) < \rho_{\{p_n\}}(x) + \varepsilon < 1$. Como $x \in l^{\{p_n\}}$, então $\lambda x \in l^{\{p_n\}}$. Assim, uma vez que $\rho_{\{p_n\}}(x) < 1$, segue que

$$1 \;>\; \rho_{\{p_n\}}(\lambda x) \;=\; \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{\lambda x}{1}\right) \;\geq\; \|\lambda x\|_{\{p_n\}} \;=\; \lambda \|x\|_{\{p_n\}}.$$

Então,

$$\lambda \|x\|_{\{p_n\}} \;<\; 1 \Longrightarrow \|x\|_{\{p_n\}} \;<\; \frac{1}{\lambda} \;<\; 1,$$

uma contradição. Logo, $\rho_{\{p_n\}}(x) = 1$. ■

Corolário 5.1.1. *Seja $x \in l^{\{p_n\}}$. Se $\|x\|_{\{p_n\}} < 1$, então*

$$\|x\|_{\{p_n\}}^{p^+} \;\leq\; \rho_{\{p_n\}}(x) \;\leq\; \|x\|_{\{p_n\}}^{p^-}.$$

Se $\|x\|_{\{p_n\}} > 1$, então

$$\|x\|_{\{p_n\}}^{p^-} \;\leq\; \rho_{\{p_n\}}(x) \;\leq\; \|x\|_{\{p_n\}}^{p^+}.$$

Demonstração. Como $p^- \leq p_n \leq p^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que para $\|x\|_{\{p_n\}} < 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_{\{p_n\}}^{p^+} \;\leq\; \|x\|_{\{p_n\}}^{p_n} \;\leq\; \|x\|_{\{p_n\}}^{p^-}.$$

Pela Proposição 5.1.3, usando o fato de que $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}} \right\|_{\{p_n\}} = 1$, vem que

$$\begin{aligned} \rho_{\{p_n\}}(x) &= \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{\|x\|_{\{p_n\}}\, x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|_{\{p_n\}}^{p_n} \left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right)^{p_n} \\ &\qquad\qquad\qquad \leq \|x\|_{\{p_n\}}^{p^-}\, \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) = \|x\|_{\{p_n\}}^{p^-}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

e, ainda

$$\begin{aligned} \rho_{\{p_n\}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|_{\{p_n\}}^{p_n} \left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right)^{p_n} \\ &\geq \|x\|_{\{p_n\}}^{p^+}\, \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) = \|x\|_{\{p_n\}}^{p^+}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Logo, segue de (5.1) e (5.2), que

$$\|x\|_{\{p_n\}}^{p^+} \leq \rho_{\{p_n\}}(x) \leq \|x\|_{\{p_n\}}^{p^-}.$$

Para o caso em que $\|x\|_{\{p_n\}} > 1$, a prova é análoga. ■

Definição 5.1.4. *Seja $A \subset l^{\{p_n\}}$ um subconjunto qualquer.*

*Dizemos que A é **limitado em modular** se existir constante positiva $C_1 > 0$ tal que $\rho_{\{p_n\}}(x) \leq C_1$ para qualquer $x \in A$.*

*E, ainda, dizemos que A é **limitado em norma** se existir constante positiva $C_2 > 0$ tal que $\|x\|_{\{p_n\}} \leq C_2$ para qualquer $x \in A$.*

Corolário 5.1.2. *Seja $A \subset l^{\{p_n\}}$, então A é limitado em norma se, e somente se A é limitado em modular.*

Demonstração. Considere $A \subset l^{\{p_n\}}$. Primeiramente, suponha que A é limitado em norma, isto é, existe constante positiva $C > 0$ tal que para qualquer $x \in A$ têm-se que $\|x\|_{\{p_n\}} \leq C$. Logo, segue pelo Corolário 5.1.1, que $\rho_{\{p_n\}}(x) \leq \|x\|_{\{p_n\}}^{p^{\pm}} \leq C^{p^{\pm}}$. Portanto, $A \subset l^{\{p_n\}}$ é limitado em modular.

A prova da recíproca é análoga. ■

Corolário 5.1.3. *Sejam x e $\left(x^{(k)}\right), k = 1, 2, \cdots \in l^{\{p_n\}}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}} = 0$;

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) = 0$.

Demonstração. Considere x e $\left(x^{(k)}\right), k = 1, 2, \cdots \in l^{\{p_n\}}$.

Suponha, inicialmente, que $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}} = 0$, então dado $0 < \varepsilon < 1$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$, temos $\left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}} < \varepsilon < 1$. Logo, pelo Corolário 5.1.1, $\rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) \leq \left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}}^{p^-} < \varepsilon^{p^-}$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) = 0$.

Por outro lado, se $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_1$, temos $\rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) < \varepsilon$. Novamente, pelo Corolário 5.1.1, segue que $\left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}}^{p^{\pm}} \leq \rho_{\{p_n\}}\left(x^{(k)} - x\right) < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x\right\|_{\{p_n\}} = 0$. ■

Como podemos perceber os espaços $l^{\{p_n\}}$ possuem diversas propriedades análogas com as dos espaços clássicos l^p. Veremos agora uma extensão para estes espaços da Desigualdade de Hölder.

Definição 5.1.5. *O **conjugado** $q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ é definido por*

$$\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} = 1, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Claramente, se $p \in \mathcal{P}$ então $q \in \mathcal{P}$.

Proposição 5.1.4 (Desigualdade de Hölder para $l^{\{p_n\}}$).

Se $q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjugado de $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$, então para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^{\{p_n\}}$ e para todo $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^{\{q_n\}}$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}} \; < \; 2\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}}. \tag{5.3}$$

Demonstração. Para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^{\{p_n\}}$ e para todo $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^{\{q_n\}}$, onde $q = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjugado de $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$, temos que a desigualdade (5.3) é trivialmente satisfeita se $\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}} = 0$. Suponha, então que $\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}} \neq 0$.

Da Desigualdade de Young (Proposição 1.1.1), para quaisquer dois inteiros positivos a, b, temos

$$ab \leq \frac{a^{p_n}}{p_n} + \frac{b^{q_n}}{q_n}.$$

Assim, tomando $a = \dfrac{x_n}{\|x\|_{\{p_n\}}}$ e $b = \dfrac{y_n}{\|y\|_{\{y_n\}}}$, obtemos o seguinte

$$\frac{|x_n y_n|}{\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}}} \leq \frac{1}{p_n}\left(\frac{x_n}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right)^{p_n} + \frac{1}{q_n}\left(\frac{y_n}{\|y\|_{\{q_n\}}}\right)^{q_n}. \tag{5.4}$$

Somando em n, ambos os lados da desigualdade (5.4), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n y_n|}{\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}}} &\leq \frac{1}{p^-} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x_n}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right)^{p_n} + \frac{1}{q^-} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y_n}{\|y\|_{\{q_n\}}}\right)^{q_n} \\ &= \frac{1}{p^-}\, \rho_{\{p_n\}}\left(\frac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right) + \frac{1}{q^-}\, \rho_{\{q_n\}}\left(\frac{y}{\|y\|_{\{q_n\}}}\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Uma vez que, $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_{\{p_n\}}}\right\|_{\{p_n\}} = \left\|\dfrac{y}{\|y\|_{\{q_n\}}}\right\|_{\{q_n\}} = 1$, segue da Proposição 5.1.3, que a desigualdade (5.5) se resume em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n y_n|}{\|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}}} \leq \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}. \tag{5.6}$$

E, ainda, como $p^- > 1$ e $q^- > 1$ então $\dfrac{1}{p^-} < 1$ e $\dfrac{1}{q^-} < 1$. Logo, $\dfrac{1}{p^-} + \dfrac{1}{q^-} < 2$, e, portanto segue de (5.6) o resultado desejado, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \;\leq\; \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}} \;<\; 2\, \|x\|_{\{p_n\}} \|y\|_{\{q_n\}}.$$

■

5.2 Precompactos em $l^{\{p_n\}}$

Esta seção foi embasada em [10] e é dedicada ao estudo do Teorema 5.2.1, que nos diz a respeito de condições que serão necessárias e suficientes para que uma certa família $\mathcal{A} \subset l^{\{p_n\}}$ seja precompacta.

Teorema 5.2.1. *Seja* $\mathcal{A} = \{a^i\}_{i \in I} \subset l^{\{p_n\}}$, $p^+ < \infty$. *Então o conjunto* $\mathcal{A} \subset l^{\{p_n\}}$ *é precompacto em* $l^{\{p_n\}}$ *se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $\mathcal{A}$ *é limitado em* $l^{\{p_n\}}$, *isto é, existe* $M > 0$, *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i|^{p_n} \leq M$, *para todo* $a^i \in \mathcal{A}$;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $K \in \mathbb{N}$, *tal que* $\sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n^i|^{p_n} < \varepsilon$, *para todo* $a^i \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{a^i\}_{i \in I} \subset l^{\{p_n\}}$, onde $p^+ < \infty$. Assuma, primeiramente, que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{A}$ é totalmente limitado, para então concluirmos a precompacidade deste conjunto.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ qualquer fixado. Escolha $K \in \mathbb{N}$ da condição (ii) de modo que para todo $a^i \in \mathcal{A}$ temos

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n^i|^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2^{p^+ +1}}.$$

Com o intuito de fazermos uso do Lema 3.1.4, definamos o operador projeção de um elemento $a^i \in \mathcal{A}$ nas suas primeiras K coordenadas, ou seja,

$$P : \mathcal{A} \subset l^{\{p_n\}} \longrightarrow \mathbb{R}^K \subset l^{\{p_n\}}$$

onde

$$P(a^i) = P\left(\left\{a_1^i, a_2^i, \cdots\right\}\right) = \left\{a_1^i, a_2^i, \cdots, a_K^i, 0, 0, \cdots\right\}.$$

Note que a limitação de $\mathcal{A}$, dada pela condição (i), implica na limitação de $P(\mathcal{A})$. Além disso, $P(\mathcal{A})$ é totalmente limitado, um vez que $P(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^K$ que possui dimensão finita.

Segue da condição (ii), que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^i|^{p_n} &= \sum_{n=1}^{K} |a_n^i|^{p_n} + \sum_{n=K+1}^{\infty} |a_n^i|^{p_n} \\
&< \sum_{n=1}^{K} \left|P(a^i)_n\right|^{p_n} + \frac{\varepsilon}{2^{p^+ +1}}.
\end{aligned}$$

Para a^i, $b^i \in \mathcal{A}$ satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|P(a^i)_n - P(b^i)_n\right|^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2}$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^i - b_n^i\right|^{p_n} &= \sum_{n=1}^{K} \left|P(a^i)_n - P(b^i)_n\right|^{p_n} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \left|a_n^i - b_n^i\right|^{p_n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{K} \left|P(a^i)_n - P(b^i)_n\right|^{p_n} + 2^{p^+-1} \sum_{n=K+1}^{\infty} \left(\left|a_n^i\right|^{p_n} + \left|b_n^i\right|^{p_n}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2^{p^+-1}\left(\frac{2\varepsilon}{2^{p^++1}}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo Lema 3.1.4, $\mathcal{A}$ é totalmente limitado e, como $l^{\{p_n\}}$ é um espaço de Banach, segue pelo Lema 3.1.3 que $\mathcal{A}$ é precompacto.

Reciprocamente, assuma que o conjunto $\mathcal{A} \subset l^{\{p_n\}}$ seja precompacto. Queremos mostrar que as condições (i) e (ii) são satisfeitas. De fato,

(i): Como o conjunto $\mathcal{A}$ é precompacto em $l^{\{p_n\}}$, segue do Lema 3.1.1 que $\mathcal{A}$ é totalmente limitado e, assim, limitado.

(ii): Fixe $\varepsilon > 0$. Pelos Lemas 3.1.1 e 3.1.2 podemos escolher $\{a^1, a^2, \cdots, a^m\} \subset \mathcal{A}$ tal que

$$
\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(a^i, \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}\right).
$$

Com isso, podemos escolher $K_j \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=K_j+1}^{\infty} \left|a_n^j\right|^{p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}$, para qualquer $j = 1, \cdots, m$.

Consideremos $K = \max\{K_j : j = 1, \cdots, m\}$. Para qualquer $a^0 \in \mathcal{A}$ fixado existe a^j, $j = 1, \cdots, m$, tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^0 - a_n^j\right|^{p_n} \leq \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}$.

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=K+1}^{\infty} \left|a_n^0\right|^{p_n} &\leq 2^{p^+-1}\left(\sum_{n=K+1}^{\infty} \left|a_n^0 - a_n^j\right|^{p_n} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \left|a_n^j\right|^{p_n}\right) \\
&\leq 2^{p^+-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n^0 - a_n^j\right|^{p_n} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \left|a_n^j\right|^{p_n}\right) \\
&< 2^{p^+-1}\left(\frac{\varepsilon}{2^{p^+}} + \frac{\varepsilon}{2^{p^+}}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como $a^0 \in \mathcal{A}$ foi escolhido arbitrariamente, a prova esta finalizada. ∎

Referências Bibliográficas

[1] ADAMOWICZ,T.; HARJULEHTO, P.; HÄSTÖ, P., *Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces*, Math. Scand. **116** (1) (2015).

[2] ADAMS, R., A.; FOURNIER J. F., *Sobolev Spaces*, 2ª Ed., Elsevier Science - Academic Press, 2003.

[3] BANDALIYEV, R. A., *Compactness criteria in weighted variable Lebesgue spaces*, Miskolc Math. Notes, Vol. 18, No. 1 (2017) 95-101.

[4] BJÖRN, A.; BJÖRN J., *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*, European Mathematical Society, 2011.

[5] CRUZ-URIBE, D. V.; FIORENZA A., *Approximate identities in variable L^p spaces*, Math. Nachr. **280**, No. 3 (2007) 256-270.

[6] CRUZ-URIBE, D. V.; FIORENZA A., *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[7] DIENING, L.; HARJULEHTO P.; HÄSTO, P.; RUZICKA, M., *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, 2011.

[8] FOLLAND, G. B., *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, Wiley Inter-Science, Second Edition, New York, 1999.

[9] GÓRKA,P.; MACIOS A., *The Riesz-Kolmogorov theorem on metric spaces*, Miskolc Math. Notes, Vol. 15 (2014), No. 2, 459–465.

[10] GÓRKA,P.; MACIOS A., *Almost everything you need to know about relatively compact sets in variable Lebesgue spaces*, J. Funct. Anal. **269** (2015) 1925–1949.

[11] GUIMARÃES, C. J., *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o p(x)-Laplaciano*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFCG, Campina Grande, 2006.

[12] HANCHE-OLSEN, H.; HOLDEN, H., *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, Expo. Math. **28(4)** (2010) 385-394.

[13] HEINONEN, J., *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[14] KOVÁCIK, O.; RÁKOSNÍK, J., *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak. Math. J. **41(116)**, No. 4 (1991) 592-618.

[15] LIMA, E. L., *Espaços métricos*, Projeto Euclides, 5ª Ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[16] MATEI, P., *On the Fréchet differentiability of Luxemburg norm in the sequence spaces $l^{(p_n)}$ with variable exponents*, Rom. J. Math. Comp. Sc. 4 (2014), 2, 167-179.

[17] de OLIVEIRA, C., R., *Introdução a Análise Funcional*, Projeto Euclides, 1ª Ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[18] RAFEIRO, H., *Kolmogorov compactness criterion in variable exponent Lebesgue spaces*, Proc. A. Raz-madze Math. Inst. 150 (2009) 105-113.

[19] ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. M., *Real Analysis*, China Machine Press, Fourth Edition, 2010.

[20] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Third Edition, New York, 1987.

[21] RUZICKA, M., *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.