Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Funções Convexas, Subdiferenciais e Aplicações

Tiago Sousa Mota

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e FAPEMIG

Itajubá, 28 de fevereiro de 2019

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Funções Convexas, Subdiferenciais e Aplicações

Tiago Sousa Mota

Orientador: Prof. Dr. Jacson Simsen

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise

Itajubá – MG
28 de fevereiro de 2019

Dedico este trabalho

aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado vida e força para alcançar essa conquista.

À minha família, que sempre acreditou na minha capacidade.

Aos amigos e companheiros de mestrado, que sempre demonstraram grande companheirismo e solidariedade, em especial, Rafael e Camila, que me receberam muito bem e deram todo apoio que precisei ao ingressar no curso.

Ao professor Dr. Jacson Simsen, pela dedicação, orientação, paciência e compreensão para realização deste trabalho.

À República Alcatraz Bumae e todos os seus moradores por dar me darem oportunidade de fazer parte desta família e a Lilí, que sempre cuidou de todos nós como se fosse uma mãe.

A todos os professores do departamento de matemática por todo conhecimento transmitido.

À CAPES e a FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

A todos os membros da banca avaliadora por aceitar fazer parte deste trabalho.

Não importa o quão forte você seja nunca tente

fazer tudo sozinho, caso contrário irá falhar.

Uchiha Itachi.

Resumo

Considerando X um espaço de Banach real e $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, semicontínua inferior e própria, veremos algumas propriedades de φ e de sua conjugada $\varphi^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Além disso, estudaremos a relação entre a subdiferencial de φ e a subdiferencial da conjugada φ^*. Estas subdiferenciais aparecem como operador principal em muitos modelos de EDP's, por exemplo, o operador $p(x)$-Laplaciano perturbado é a subdiferencial de uma função convexa, semicontínua inferior e própria, e EDP's com este operador tem aplicações em processamento de imagens e fluidos eletroeológicos.

Palavras–chave: Subdiferenciais, funções convexas, semicontinuidade inferior.

Abstract

Considering X a real Banach space and $\varphi : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ a proper, lower semicontinuos and convex function, we shall see some properties of φ and its conjugate $\varphi^* : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. In addition, we will study the relationship between the subdifferential of φ and the subdifferential of the conjugate of φ. These subdifferential appear as main operator in many PDE's models, for example, the perturbed $p(x)$-Laplacian operator is the subdifferential of a proper, lower semicontinuo and convex function and PDE's with this operator have applications in image process and electrorheological fluids.

Keywords: Subdifferentials, convex functions, lower semicontinuity.

Sumário

Agradecimentos **ii**

Resumo **iv**

Abstract **v**

Índice **vi**

Introdução ix

1 Funções Convexas e Côncavas na Reta **7**

1.1 Funções Convexas na Reta 7

1.2 Funções Côncavas na Reta 11

2 Função Semicontínua Inferior e sua Conjugada **15**

2.1 Função Semicontínua Inferiormente 15

2.2 Função Fracamente Semicontínua Inferior 18

2.3 Função Conjugada 21

3 Subdiferenciais **25**

3.1 Subdiferenciais 25

3.2 Exemplos de Subdiferenciais 26

3.3 Subdiferencial da Conjugada da Função 31

4 Aplicação **39**

4.1 Algumas definições e resultados importantes 39

4.2 O operador $p(x)$-Laplaciano 42

Bibliografia **48**

Introdução

Dada $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, semicontínua inferior e própria, com X sendo um espaço de Banach real, nosso objetivo é estudar a aplicação,

$\partial\varphi : X \longrightarrow X^*$, conhecida como a subdiferencial de φ, visando aplicações em EDP's.

Para isso, veremos inicialmente uma breve revisão sobre conceitos de espaços de Banach, topologia fraca, entre outros, e enunciaremos alguns resultados que serão bastante utilizados no decorrer deste trabalho. No primeiro capítulo, introduziremos o conceito de funções convexas e côncavas na reta, pois a convexidade de funções será importante para trabalharmos com subdiferenciais.

No segundo capítulo, definiremos o que é uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ semicontínua inferior e própria, com X sendo um espaço de Banach real, e veremos algumas relações de φ com os seus conjuntos de níveis e seu epígrafo. Além disso, definiremos a conjugada de φ, denotada por $\varphi^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, e mostraremos que, se φ for convexa, semicontínua inferior e própria, então φ^* também tem estas mesmas propriedades.

Para o terceiro capítulo, teremos como foco trabalhar com a subdiferencial $\partial\varphi$ de funções $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ que são convexas, semicontínuas inferior e próprias. Devido aos resultados do capítulo anterior, estudaremos a subdiferencial da conjugada de φ e veremos a relação entre $\partial\varphi$ e $\partial\varphi^*$.

No último capítulo enunciaremos algumas propriedades do espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ e do espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e definiremos o operador $p(x)$-Laplaciano. Mostraremos que para $H = L^2(\Omega)$ o operador $p(x)$-Laplaciano é a subdiferencial de uma função convexa, semicontínua inferior e própria.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas ferramentas matemáticas e notações que serão utilizadas nos demais capítulos desta dissertação.

Seja C um subconjunto de um espaço vetorial E. $x \in E$ é uma **cota superior** de C se $x \geq y$, para todo $y \in C$. x é uma **cota inferior** de C se $x \leq y$, para todo $y \in C$.

Definição 0.0.1.

(a) *O* ***supremo*** *de um conjunto C, denominado* $\sup C$, *é a menor das cotas superiores.*

(b) *O* ***ínfimo*** *de um conjunto C, denominado* $\inf C$, *é a maior das cotas inferiores.*

Definição 0.0.2.

(a) *Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(-\infty, +\infty)$ e sejam,*

$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...\}, k = 1, 2, 3, ...$ *e* $\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, ...\}$.

β *é chamado* ***limite superior*** *de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e escrevemos,*

$$\beta = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} a_n.$$

(b) *Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(-\infty, +\infty)$ e sejam,*

$b_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...\}, k = 1, 2, 3, ...$ *e* $\alpha = \sup\{b_1, b_2, b_3, ...\}$.

α *é chamado* ***limite inferior*** *de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e escrevemos,*

$$\alpha = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n.$$

Definição 0.0.3.

(a) *Seja E um espaço vetorial e C um subconjunto de E. O subconjunto C é convexo se dados $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$, então $[\lambda x + (1 - \lambda)y] \in C$.*

(b) Uma função $\varphi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ é convexa, se dados quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$ então:

$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.

Proposição 0.0.4. *Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são convexas, então $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) + g(x)$ é convexa.*

Demonstração:

Para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$ temos que,

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda[f(x) + g(x)] + (1-\lambda)[f(y) + g(y)] = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \end{aligned}$$

Portanto, h é convexa. □

Seja X um espaço vetorial real normado, com norma $||.||_X$, denotado por $(X, ||.||_X)$. O espaço vetorial $(X, ||.||_X)$ é um espaço de Banach quando X for completo em relação a métrica $d(x,y) = ||x-y||$, com $x, y \in X$, isto é, se toda sequência de Cauchy em X converge.

Neste trabalho, sempre que não especificado, denotaremos X como um espaço de Banach real.

Dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear real sobre X se satisfaz:

$(i) f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in X$.

$(ii) f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 0.0.5. *Sejam $(E; ||.||_E)$ e $(F; ||.||_F)$ espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ é limitada se existe uma constante $M > 0$ tal que,*

$$||T(x)||_F \leq M||x||_E$$

para todo $x \in E$.

Proposição 0.0.6. *Sejam E e F espaço vetoriais e $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é contínua.

(ii) T é contínua na origem.

(iii) T é limitada.

Demonstração: Ver [9], página 91. $\square$

Definição 0.0.7.

(a) *O conjunto formado por todas as aplicações lineares contínuas $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ será chamado de **espaço dual** de X e será denotado por X^*.*

(b) *A norma usual adotada no espaço X^* é $||T|| = \inf\{M \in \mathbb{R} : ||T(x)|| \leq M||x||, \forall\ x \in X\}$.*

Proposição 0.0.8. *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear limitada. Então,*

$$\begin{aligned} ||T|| = \sup\left\{\frac{||T(x)||}{||x||};\ x\ \in E - \{0\}\right\} &= \sup\left\{||T(x)||;\ x\ \in E\ \ e\ ||x|| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{||T(x)||;\ x \in E\ \ e\ ||x|| = 1\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver [9], página 86. $\square$

Notação: Dados $f \in X^*$ e $x \in X$, denotaremos $\langle f, x\rangle := f(x)$. Temos que $\langle ., .\rangle$ denota o produto dualidade entre X^* e X.

Dados $f, g \in X^*$, $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\langle ., .\rangle$ satisfaz

- $\langle f + \lambda g, x\rangle = \langle f, x\rangle + \lambda\langle g, x\rangle$,
- $\langle f, x + \lambda y\rangle = \langle f, x\rangle + \lambda\langle f, y\rangle$.

Seja X um espaço de Banach e consideremos $f \in X^*$. Designaremos por $\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$, para todo $x \in X$. A medida que f percorre X^*, se obtém uma família $\{\varphi_f\}_{f \in X^*}$ de aplicações de X em $\mathbb{R}$.

Sejam $(X; \tau_1)$ e $(X; \tau_2)$ espaços topológicos. Se $\tau_1 \subset \tau_2$, dizemos que a topologia τ_1 é mais grossa que τ_2 ou que τ_2 é mais fina que τ_1.

Definição 0.0.9. *A topologia fraca $\sigma(X;X^*)$ sobre X, é a topologia menos fina (ou mais grossa) em X para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f, com $f \in X^*$.*

Dada uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se designa por $y_n \rightharpoonup y$ a convergência de y_n para y na topologia fraca $\sigma(X;X^*)$. Dizemos, neste caso, que $\{y_n\}$ converge fraco para y em X.

Uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco para y em X se, e somente se, $\langle f, y_n\rangle \longrightarrow \langle f, y\rangle$ quando $n \longrightarrow +\infty$, para toda $f \in X^*$.

Definição 0.0.10. *Seja C um subconjunto do espaço vetorial normado X com norma $||.||$,*

- *C é **fortemente fechado** (ou, C é fechado na topologia forte de X) se C é fechado na topologia da norma, isto é, se dada uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tal que $||y_n - y|| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então $y \in C$.*
- *C é **fracamente fechado** se ele é fechado na topologia fraca de X, ou seja, se dada uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$, tal que $\langle f, y_n\rangle \longrightarrow \langle f, y\rangle$ quando $n \longrightarrow +\infty$, para toda $f \in X^*$, então $y \in C$.*

Lema 0.0.11. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que $f \in \mathbb{R}^*$ se, somente se, $f(x) = \alpha x$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Se $f \in \mathbb{R}^*$, então $f(1) = \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}$, temos que, $f(x) = f(x.1) = xf(1) = \alpha x$.

Por outro lado, se $f(x) = \alpha x$, claramente f é uma aplicação linear contínua, provando assim o resultado. $\square$

Teorema 0.0.12. *Sejam X e Y espaços de Banach. Existe um isomorfismo de $(X \times Y)^*$ para $X^* \times Y^*$, neste caso, denotaremos $(X \times Y)^* \approx X^* \times Y^*$.*

Demonstração: Ver [11] pag. 6. $\square$

Definição 0.0.13. *Seja X um espaço vetorial real. Um **hiperplano afim** de X é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = \alpha\},$$

sendo que $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma aplicação linear não nula.*

Escrevemos que H tem equação $[f = \alpha]$.

Proposição 0.0.14. *O hiperplano* H *de equação* $[f = \alpha]$ *é fechado se , somente se,* f *é contínua.*

Demonstração: Ver [11] pag. 25. $\square$

Definição 0.0.15. *Sejam* X *um espaço vetorial normado e* A,B *subconjuntos de* X.

- *O hiperplano* H *de equação* $[f = \alpha]$ *separa* A *e* B *no sentido lato se,*

  $f(x) \leq \alpha$, *para todo* $x \in A$ *e* $f(x) \geq \alpha$, *para todo* $x \in B$.

- *O hiperplano* H *de equação* $[f = \alpha]$ *separa* A *e* B *no sentido estrito se,*

  $f(x) < \alpha$, *para todo* $x \in A$ *e* $f(x) > \alpha$, *para todo* $x \in B$.

Teorema 0.0.16 (Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica)**.** *Sejam* X *um espaço vetorial normado e* $A, B \subset X$ *subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se* A *é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa* A *e* B *no sentido lato.*

Teorema 0.0.17 (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica)**.** *Sejam* X *um espaço vetorial normado e* $A, B \subset X$ *subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Assuma que* A *é fechado e* B *é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa estritamente os subconjuntos* A *e* B.

Definição 0.0.18. *O dual topológico de* X^* *é chamado* ***bidual*** *de* X *e o denotaremos por* X^{**}. *Em outras palavras,* $X^{**} = \{\phi : X^* \longrightarrow \mathbb{R};\ \phi$ *é linear e contínua* $\}$.

Existe uma aplicação canônica J *entre* X *e* X^{**} *definida como,*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longrightarrow J(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad x^* \longrightarrow J(x)(x^*) = x^*(x) = \langle x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Dizemos que X *é um espaço* ***reflexivo*** *quando* $J(X) = X^{**}$.

Proposição 0.0.19. *A aplicação* $J : X \longrightarrow X^{**}$ *como na definição anterior é um isomorfismo isométrico de* X *em* $J(X)$.

Demonstração: Veja [11], pág. 46

Teorema 0.0.20. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e* $K \subset X$ *um subconjunto convexo, fechado e limitado. Então* K *é compacto na topologia fraca de* X.

Demonstração: Ver [4], página 46.

Capítulo 1

Funções Convexas e Côncavas na Reta

Neste capítulo faremos uma revisão de funções convexas e côncavas na reta tendo como referência o livro [3].

1.1 Funções Convexas na Reta

Se $a \neq b$, a reta que liga os pontos (a, A) e (b, B) no plano $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$y = A + \dfrac{B-A}{b-a}(x-a)$ ou equivalentemente, $y = B + \dfrac{B-A}{b-a}(x-b)$.

Definição 1.1.1. *Seja a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dados $a, b \in X$, o segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ será chamado de secante ab.*

Definição 1.1.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se* ***convexa*** *quando a parte de seu gráfico se situa abaixo de cada secante, $a \leq x \leq b$. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:*

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

ou equivalentemente,

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Observação 1.1.3. *Sejam $a, b, x \in I$. A função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e somente se, $a < x < b \Longrightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$.*

Decorre direto do fato de:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e,

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Consequentemente, para $a < x < b$, a secante ax tem inclinação menor que a secante ab e esta por sua vez, tem inclinação menor de que a secante xb.

Teorema 1.1.4. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo ponto $c \in intI$.*

Demonstração: Pela observação anterior a função definida como $\phi_c(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ é monótona não-decrescente no intervalo $J = I \cap (c, +\infty)$. Como $c \in intI$, existe $a \in I$, com $a < c$. Portanto para,

$$a < c < x \Longrightarrow \frac{f(a) - f(c)}{a - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq$$

$$\leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \phi_c(x)$$

Logo,

$$\phi_c(x) \geq \frac{f(a) - f(c)}{a - c}, \text{ para todo } x \in J.$$

Assim, a função $\phi_c : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Sendo assim, existe o limite à direita $\lim\limits_{x \to c^+} \phi_c(x) = f'_+(c)$.

Para a derivada a esquerda o raciocínio é análogo. $\square$

Corolário 1.1.5. *Uma função convexa $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior do intervalo I.*

Demonstração: Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então pelo teorema anterior as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ existem em todo ponto $c \in intI$. Note que,

$$0 \leq |f(c + h) - f(c)| = \left| \frac{f(c + h) - f(c)}{h} |.|h| \right| \leq M|h|.$$

Fazendo $h \longrightarrow 0^+$ e $h \longrightarrow 0^-$, temos que, $\lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c)$.

Portanto f é contínua em c. $\square$

Exemplo: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ se $0 < x \leq 1$, é convexa porém descontínua no ponto 0 (ponto extremo).

Teorema 1.1.6. *As seguintes afirmações sobre a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, são equivalentes:*

(1) f é convexa.

(2) A derivada $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente.

(3) Para quaisquer $a, x \in I$ têm-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) :

Sejam $a < x < b$ em I. Como f é convexa temos que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Aplicando o limite de $x \longrightarrow a^+$ na primeira desigualdade e analogamente com $x \longrightarrow b^-$ na segunda desigualdade, temos que:

$$f'(a) = f'_+(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(b) = f'(b).$$

Logo $a < b \Longrightarrow f'(a) \leq f'(b)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) :

Suponhamos $a < x$ em I. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a,x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x-a)$. Como f' é monótona não-decrescente, temos que $f'(z) \geq f'(a)$. Logo, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Se $x < a$, pelo teorema do Valor Médio, existe w $\in (x,a)$ tal que,

$$f(a) - f(x) = f'(w)(a-x) \Longrightarrow f(x) = f(a) - f'(w)(a-x) = f(a) + f'(w)(x-a).$$

Como f' é monótona não-decrescente, temos $f'(w) \leq f'(a)$. Como $(x-a) < 0$, temos que $f'(w)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$. Portanto, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

$(3) \Longrightarrow (1)$:

Suponhamos que vale a condição (3) e sejam $a < c < b$ em I. Queremos mostrar que,

$$f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-a).$$

De fato, consideremos $g(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ e $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq g(x)\}$ o semi-plano superior determinado pela reta $y = g(x)$ que é a tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.

Evidentemente H é um subconjunto convexo do plano, isto é, o segmento que liga quaisquer dois pontos de H está contido em H.

Da hipótese, temos que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertence a H, logo o segmento de reta que une estes dois pontos estão contidos em H. Em particular, o ponto desse segmento que tem abcissa c, $(c, f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a))$, pertence a H, isto é,

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(c-a) \geq g(c) = f(c).$$

Portanto, f é convexa. □

Corolário 1.1.7. *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

Demonstração: Seja $a \in I$ um ponto crítico de uma função convexa $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, $f'(a) = 0$. Pela condição (3) do teorema temos que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \forall x \in I$, como $f'(a) = 0$ segue que $f(x) \geq f(a)$, $\forall\ x \in I$.

Portanto, a é ponto de mínimo absoluto para f. □

Corolário 1.1.8. *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável em I, é convexa se, e somente se, $f"(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Demonstração: $f"(x) \geq 0\ \forall\ x \in I \Longleftrightarrow f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente $\Longleftrightarrow f$ é convexa. □

1.2 Funções Côncavas na Reta

Definição 1.2.1. *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se côncava quando $-f$ é convexa, isto é, quando o gráfico de f está acima de qualquer de suas secantes.*

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ou equivalentemente,

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) \geq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Portanto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é côncava se, somente se,

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

De forma análoga ao caso das funções convexas, obtemos os seguintes resultados.

Proposição 1.2.2. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é côncava no intervalo I, então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo ponto $c \in int(I)$.*

Demonstração: Análoga ao Teorema 1.0.1, basta tomar $g(x) = -f(x)$ em I, e usar as propriedades de $g(x)$ ser convexa.

Corolário 1.2.3. *Uma função côncava $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior do intervalo I.*

Teorema 1.2.4. *As seguintes afirmações sobre a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I, são equivalentes:*

(1) f é côncava.

(2) A derivada $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-crescente.

(3) Para quaisquer $a, x \in I$ têm-se $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado abaixo de suas tangentes.

Corolário 1.2.5. *Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.*

Corolário 1.2.6. *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I, é côncava se, e somente se, $f"(x) \leq 0$, para todo $x \in I$.*

Definição 1.2.7. *Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa quando,*

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

f é estritamente côncava quando,

$$a < x < b \text{ em } I \Longrightarrow f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observação 1.2.8. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa, implica que f' é crescente, mas não implica que $f"(x) > 0$, para todo $x \in I$. Entretanto, $f"(x) > 0$, para todo $x \in I$ implica que f' é crescente e portanto, f é estritamente convexa.*

Exemplo 1.2.9. *A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = 1/x$, é estritamente côncava para $x < 0$ e estritamente convexa para $x > 0$. Como $f"(x) = \dfrac{2}{x^3}$ e temos,*

$$x > 0 \Longrightarrow f"(x) > 0 \Longrightarrow f' \text{ é crescente }.$$

Portanto, f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

$$x < 0 \Longrightarrow f"(x) < 0 \Longrightarrow f' \text{ é decrescente.}$$

Portanto, f é estritamente côncava em $(-\infty, 0)$.

Exemplo 1.2.10. *A função $f(x) = e^x$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$, pois $f"(x) = e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f' é crescente e, conseguentemente, f é estritamente convexa.*
Enquanto a função $g(x) = \ln(x)$, para $x > 0$, é estritamente côncava, pois $g"(x) = -1/x^2 < 0$, para todo $x > 0$.

Todo ponto $x \in [a, b]$ é escrito de modo único sob a forma $x = (1 - t)a + tb$, com $0 \leq t \leq 1$.

O segmento de reta que liga o ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ no plano é definido por $y = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, com $a \leq x \leq b$. O ponto de abscissa $x = (1 - t)a + tb$ tem ordenada $y(t) = (1 - t)f(a) + tf(b)$, pois

$$\begin{aligned} y(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}((1 - t)a + tb - a) &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(-ta + tb) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t(b - a)) \\ &= (1 - t)f(a) + tf(b). \end{aligned}$$

Portanto, uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, somente se,

$$a, b \in I, 0 \leq t \leq 1 \Longrightarrow f((1 - t)a + tb) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Equivalentemente, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para quaisquer $a_1, a_2 \in I$ e $t_1, t_2 \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 = 1$ tem-se $f(t_1a_1 + t_2a_2) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2)$.

Basta notar que substituindo $t_1 = 1 - t_2$ na equação acima obtemos:

$$a_1, a_2 \in I, t_2 \in [0, 1] \Longrightarrow f((1 - t_2)a_1 + t_2a_2) \leq (1 - t_2)f(a_1) + t_2f(a_2).$$

Proposição 1.2.11. *Sejam $a_1, a_2, a_3 \in I$ e $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então $f(t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3) \leq t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + t_3f(a_3)$.*

Demonstração: Se $t_1 = t_2 = 0$, então $t_3 = 1$ e a desigualdade decorre direto $(f(a_3) = f(a_3))$.

Suponha agora que $t_1 + t_2 \neq 0$, com $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ e note que,
$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 = (t_1 + t_2)\left[\dfrac{t_1}{t_1 + t_2}a_1 + \dfrac{t_2}{t_1 + t_2}a_2\right] + t_3a_3$ e
$1 = \dfrac{t_1 + t_2}{t_1 + t_2} = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2} + \dfrac{t_2}{t_1 + t_2}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3) &= f\left((t_1 + t_2)\left[\frac{t_1}{t_1 + t_2}a_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2}a_2\right] + t_3a_3\right) \\ &\leq (t_1 + t_2)f\left(\frac{t_1}{t_1 + t_2}a_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2}a_2\right) + t_3f(a_3) \\ &\leq (t_1 + t_2)\left[\frac{t_1}{t_1 + t_2}f(a_1) + \frac{t_2}{t_1 + t_2}f(a_2)\right] + t_3f(a_3) \\ &= t_1f(a_1) + t_2f(a_2) + t_3f(a_3). \end{aligned}$$

As desigualdades ocorrem do fato de f ser convexa e as constantes satisfazerem as hipóteses. $\square$

Observação 1.2.12. *Analogamente, se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa então, dados $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ e $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, 1]$ com $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$, vale*

$$f(t_1 a_1 + ... + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + ... + t_n f(a_n).$$

Com isso podemos provar a seguinte relação entre a média aritmética e a média geométrica:

Exemplo 1.2.13. *Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$, temos que $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.*

Com efeito, considere a função convexa $f(x) = e^x$, $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$ e $a_1 = \ln x_1, ..., a_n = \ln x_n$ temos,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = \sqrt[n]{e^{a_1} e^{a_2} ... e^{a_n}} = e^{\frac{a_1 + ... + a_n}{n}} = f(t_1 a_1 + ... + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + ... + t_n f(a_n) =$$

$$= \frac{e^{a_1} + ... + e^{a_n}}{n} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$ $\square$

Exemplo 1.2.14. *Sejam $x_1, ..., x_n$ números positivos e $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ com $t_1 + ... + t_n = 1$. Então vale a seguinte desigualdade:*

$$x_1^{t_1} . x_2^{t_2} ... x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + ... + t_n x_n.$$

De fato, se existir $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x_j = 0$, claramente a desigualdade é válida. Considere a função convexa $f(x) = e^x$, e $a_1 = \ln x_1, ..., a_n = \ln x_n$, com $x_i > 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Então,

$$x_1^{t_1} . x_2^{t_2} ... x_n^{t_n} = e^{t_1 a_1} . e^{t_2 a_2} ... e^{t_n a_n} = e^{t_1 a_1 + ... + t_n a_n} = f(t_1 a_1 + ... + t_n a_n) \leq$$

$$\leq t_1 f(a_1) + ... + t_n f(a_n) = t_1 e^{\ln x_1} + ... + t_n e^{\ln x_n} = t_1 x_1 + t_2 x_2 + ... + t_n x_n.$$

Capítulo 2

Função Semicontínua Inferior e sua Conjugada

Este capítulo e o próximo são baseados na segunda seção do primeiro capítulo do livro [13].

2.1 Função Semicontínua Inferiormente

Chamaremos de domínio efetivo de $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, onde X é um espaço de Banach real, o conjunto

$$D(\varphi) = \{x \in X; \varphi(x) < +\infty\}.$$

Definição 2.1.1.

*(a) $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma função **própria** se $D(\varphi) \neq \emptyset$, ou seja, φ não é identicamente $+\infty$.*

(b) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível λ de uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é

$$\{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\} =: [\varphi, \lambda].$$

(c) Uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferiormente (s.c.i.) se, $\liminf_{u \longrightarrow x} \varphi(u) \geq \varphi(x)$, para todo $x \in X$. Equivalentemente, temos $\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$, onde $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$, com $x_n \longrightarrow x$.

Proposição 2.1.2. *Uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é semicontínua inferiormente se, e somente se, todos os conjuntos de níveis de φ são fechados.*

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e considere o conjunto de nível $[\varphi \leq \lambda]$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado arbitrariamente. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [\varphi \leq \lambda]$ uma sequência convergindo para x e vamos mostrar que $x \in [\varphi \leq \lambda]$, ou seja, $\varphi(x) \leq \lambda$. Como $\varphi(x_n) \leq \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então,

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n) \leq \lambda. \tag{1}$$

Por outro lado, como φ é s.c.i. temos que,

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x). \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que $\varphi(x) \leq \lambda$.

$(\Longleftarrow)$

Suponha que $[\varphi \leq \lambda] = \{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\}$ seja fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dado $x \in X$, seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ uma sequência convergindo para x.

- Se $\liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n) = +\infty$, então $\varphi(x) \leq +\infty$ e o resultado decorre direto.

- Se $\liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n) = \alpha < +\infty$, considere $\lambda_\epsilon = \alpha + \epsilon$, sendo ϵ um número real positivo. Temos uma subsequência $\{\varphi(x_{n_k})\}$ da sequência $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\varphi(x_{n_k}) \longrightarrow \alpha$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$ temos que $\varphi(x_{n_k}) \leq \lambda_\epsilon$. Como $x_n \longrightarrow x$, quando $n \longrightarrow +\infty$, a subsequência $x_{n_k} \longrightarrow x$ quando $k \longrightarrow +\infty$, e o conjunto de nível $[\varphi, \lambda_\epsilon]$ é fechado, então $x \in [\varphi, \lambda_\epsilon]$, isto é, $\varphi(x) \leq \lambda_\epsilon = \alpha + \epsilon$. Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ temos que
  $\varphi(x) \leq \alpha = \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(x_n)$. □

Observação 2.1.3. *Note que o resultado da Proposição 2.1.2 independe da topologia usada em X.*

Proposição 2.1.4. *Cada conjunto de nível de uma função convexa $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é convexo.*

Demonstração:

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto de nível $[\varphi, \lambda] \neq \emptyset$. Tome $x, y \in [\varphi, \lambda]$. Como φ é convexa, temos que,

$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda$, para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto $(tx + (1-t)y) \in [\varphi, \lambda]$ para todo $t \in [0, 1]$. $\square$

Dada uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, chamaremos de **epígrafo** de φ o conjunto

$$Epi(\varphi) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Proposição 2.1.5. *Uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é s.c.i. se, e somente se, o conjunto $Epi(\varphi)$ é fechado.*

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

Suponha que $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é s.c.i. e considere a sequência $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Epi(\varphi)$ convergindo para (x, λ). Segue que $x_n \longrightarrow x$ em X e $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ em $\mathbb{R}$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Como φ é s.c.i. e $\varphi(x_n) \leq \lambda_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que,

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \geq \lim_{n\to+\infty} inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Portanto $(x, \lambda) \in Epi(\varphi)$.

$(\Longleftarrow)$ Suponha que o conjunto $Epi(\varphi)$ seja fechado. Tome $x \in X$ e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergindo para x e note que:

(i) Se $\lim_{n\to+\infty} inf \varphi(x_n) = +\infty$ o resultado é direto.

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} inf \varphi(x_n) = \alpha < +\infty$, então a sequência $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{\varphi(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para α. Para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$, temos que $\varphi(x_{n_k}) \leq \lambda_\epsilon := \alpha + \epsilon \Longrightarrow (x_{n_k}, \lambda_\epsilon) \in Epi(\varphi)$, para $k \geq k_0$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e o $Epi(\varphi)$ é fechado, então $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ e $(x_{n_k}, \lambda_\epsilon)$ converge para $(x, \lambda_\epsilon) \in Epi(\varphi)$ quando $k \longrightarrow +\infty$. Portanto, $(x, \lambda_\epsilon) \in Epi(\varphi)$, isto é, $\varphi(x) \leq \lambda_\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, temos que,

$$\varphi(x) \leq \alpha = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \varphi(x_n).$$

$\square$

Corolário 2.1.6. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Então os conjuntos de níveis de φ são fechados se, somente se, o $Epi(\varphi)$ é fechado.*

Demonstração:

Segue direto das proposições 2.1.2 e 2.1.5.

Proposição 2.1.7. *A função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é convexa se, e somente se, o conjunto $Epi(\varphi)$ é convexo.*

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

Tome $(x, \lambda_0), (y, \lambda_1) \in Epi(\varphi)$. Como φ é convexa, temos que,

$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \leq t\lambda_0 + (1-t)\lambda_1$, para todo $t \in [0, 1]$.

Assim $t(x, \lambda_0) + (1-t)(y, \lambda_1) = (tx + (1-t)y, t\lambda_0 + (1-t)\lambda_1) \in Epi(\varphi)$, para todo $t \in [0, 1]$.

$(\Longleftarrow)$

Dados $x, y \in X$, note que $(x, \varphi(x)), (y, \varphi(y)) \in Epi(\varphi)$. Como $Epi(\varphi)$ é convexo, temos que

$$\lambda(x, \varphi(x)) + (1-\lambda)(y, \varphi(y)) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)) \in Epi(\varphi), \forall\ \lambda \in [0, 1].$$

Portanto, $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \forall\ \lambda \in [0, 1]$. $\square$

Teorema 2.1.8. *Seja $C \subset X$ um conjunto convexo. Então C é fracamente fechado em X se, e somente se, C é fortemente fechado em X.*

Demonstração: Ver [4] pag. 38.

2.2 Função Fracamente Semicontínua Inferior

Definição 2.2.1. *Uma função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é fracamente semicontínua inferior se for semicontínua inferior num espaço X dotado da topologia fraca, isto é, se $x_n \rightharpoonup x$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então $\varphi(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \varphi(x_n)$.*

Proposição 2.2.2. *Se $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma função própria e convexa então φ é semicontínua inferior se, somente se, é fracamente semicontínua inferior.*

Demonstração:

$(\Longrightarrow)$

Como φ é convexa e própria, pela Proposição 2.1.4, temos que

$[\varphi, \lambda] = \{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\}$ é um subconjunto convexo de X.

O subconjunto $[\varphi, \lambda]$ é fortemente fechado pois φ é s.c.i. na topologia forte em X (veja a Proposição 2.1.2). Pelo Teorema 2.1.8, temos que $[\varphi, \lambda]$ é fechado para $\sigma(X, X^*)$ e o resultado segue da Proposição 2.1.2.

$(\Longleftarrow)$

Seja φ fracamente s.c.i. e considere a sequência $\{x_n\}$ em X com $x_n \longrightarrow x$ fortemente quando $n \to \infty$. Como a convergência forte implica a fraca, temos que $x_n \rightharpoonup x$. Portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} inf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

$\square$

Proposição 2.2.3. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função própria, s.c.i. e convexa. Então φ é delimitada por baixo por uma função afim, isto é, existe $x_0^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq \langle x_0^*, x \rangle + \beta$, para todo $x \in X$.*

Demonstração:

Como φ é própria, temos que existe $x_0 \in D(\varphi)$ tal que $\varphi(x_0) < \infty$. Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_0 < \varphi(x_0)$, então o ponto $(x_0, \lambda_0) \notin Epi(\varphi)$.

Como φ é convexa e s.c.i., pelas Proposições 2.1.5 e 2.1.7, o $Epi(\varphi)$ é um subconjunto convexo e fechado de $X \times \mathbb{R}$. Note que $Epi(\varphi) \neq \emptyset$, pois φ é própria.

Por outro lado, $B := \{(x_0, \lambda_0)\}$ é um subconjunto compacto e convexo de $X \times \mathbb{R}$ e $Epi(\varphi) \bigcap B = \emptyset$.

Pelo Teorema de Hahn Banach, segunda forma geométrica, existe $\psi \in (X \times \mathbb{R})^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que:

$\psi((x, \lambda)) < \alpha < \psi((x_0, \lambda_0))$, para todo $(x, \lambda) \in Epi(\varphi)$.

Como $\psi \in (X \times \mathbb{R})^*$ e pelo Teorema 0.0.12 e Lema 0.0.11 podemos escrever,

$\psi((x,\lambda)) = h(x) + k\lambda$, onde $h \in X^*$ e $k \in \mathbb{R}$.

Assim,

$h(x) + k\lambda < \alpha < h(x_0) + k\lambda_0$, para todo $(x,\lambda) \in Epi(\varphi)$.

Em particular, para $\lambda = \varphi(x_0)$, temos que $(x_0, \varphi(x_0)) \in Epi(\varphi)$. Portanto,

$h(x_0) + k\varphi(x_0) < h(x_0) + k\lambda_0 \Longrightarrow k(\varphi(x_0) - \lambda_0) < 0$. Como $\varphi(x_0) > \lambda_0$, temos $k < 0$.

Note que todo ponto $(x, \varphi(x)) \in Epi(\varphi)$, sendo assim, tomando $\lambda = \varphi(x)$ temos,

$h(x) + k\varphi(x) \leq \alpha \Longrightarrow \dfrac{-h(x)}{k} - \varphi(x) \leq \dfrac{-\alpha}{k}$. Tomando $x_0^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$x_0^*(x) = \frac{-h(x)}{k} \text{ e } \beta = \frac{\alpha}{k},$$

temos que,

$\langle x_0^*, x\rangle - \varphi(x) \leq -\beta \Longrightarrow \varphi(x) \geq \langle x_0^*, x\rangle + \beta$, para todo $x \in D(\varphi)$.

Se $x \notin D(\varphi)$, então decorre direto, visto que $\varphi(x) = +\infty$.

Portanto $\varphi(x) \geq \langle x_0^*, x\rangle + \beta$, para todo $x \in X$. $\square$

Proposição 2.2.4. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, s.c.i. e própria. Então φ é contínua no $intD(\varphi)$.*

Demonstração:

Ver [5], pág. 40.

Lema 2.2.5. *Seja $\{f_i\}_{i\in I}$ uma família de funções s.c.i.. Então $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, com $\varphi(x) = sup_{i\in I}\{f_i(x)\}$ é semicontínua inferior.*

Demonstração:

Note que $Epi(\varphi) = \bigcap\limits_{i\in I} Epi(f_i)$ pois,

(a) $Epi(\varphi) \subset \bigcap\limits_{i\in I} Epi(f_i)$:

Dado $(x,\lambda) \in Epi(\varphi)$ temos que,

$\varphi(x) \leq \lambda \Longrightarrow sup_{i\in I}\{f_i(x)\} \leq \lambda$, isto é, $f_i(x) \leq \lambda, \forall i \in I$.

Portanto, $(x,\lambda) \in \bigcap\limits_{i\in I} Epi(f_i)$.

(b) $\bigcap\limits_{i\in I} Epi(f_i) \subset Epi(\varphi)$:

Dado $(x,\lambda) \in \bigcap\limits_{i\in I} Epi(f_i)$, então $f_i(x) \leq \lambda, \forall i \in I$. Assim, $sup_{i\in I}\{f_i(x)\} \leq \lambda$.

Portanto,

$\varphi(x) \leq \lambda \Longrightarrow (x,\lambda) \in Epi(\varphi)$.

Como f_i é s.c.i., para todo $i \in I$, pela Proposição 2.1.5 temos que o $Epi(f_i)$ é fechado para todo $i \in I$. Como a interseção arbitrária de fechados é fechado, temos que o $Epi(\varphi)$ é fechado, pela Proposição 2.1.5 temos que φ é semicontínua inferiormente. $\square$

2.3 Função Conjugada

Definição 2.3.1. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. A função $\varphi^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por,*

$$\varphi^*(f) = \sup\{\langle f, x\rangle - \varphi(x) : x \in X\}$$

é chamada de ***conjugada*** *de φ.*

Proposição 2.3.2. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função própria, s.c.i. e convexa. Então φ^* é s.c.i., convexa e própria no espaço X^*.*

Demonstração:

- φ^* é convexa.

  Dados $f, g \in X^*$ e $x \in X$ com $t \in [0,1]$, temos que,

$$\begin{aligned}\langle tf + (1-t)g, x\rangle - \varphi(x) &= t\langle f, x\rangle + (1-t)\langle g, x\rangle - \varphi(x) - t\varphi(x) + t\varphi(x)\\ &= t[\langle f, x\rangle - \varphi(x)] + (1-t)[\langle g, x\rangle - \varphi(x)].\end{aligned}$$

  Portanto,

$$\begin{aligned}\varphi^*(tf + (1-t)g) &= \sup\{\langle tf + (1-t)g, x\rangle - \varphi(x); x \in X\}\\ &= \sup\{t[\langle f, x\rangle - \varphi(x)] + (1-t)[\langle g, x\rangle - \varphi(x)]; x \in X\}\\ &\leq t\sup\{\langle f, x\rangle - \varphi(x); x \in X\} + (1-t)\sup\{\langle g, x\rangle - \varphi(x), x \in X\}\\ &= t\varphi^*(f) + (1-t)\varphi^*(g),\end{aligned}$$

  provando o resultado.

- φ^* é própria.

  Como φ é s.c.i., convexa e própria, pela Proposição 2.2.3 existe $f \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle f, x\rangle + \beta \leq \varphi(x), \forall x \in X &\Longrightarrow \langle f, x\rangle - \varphi(x) \leq -\beta, \text{para todo x} \in X \\ &\Longrightarrow \varphi^*(f) = Sup\{\langle f, x\rangle - \varphi(x); x \in X\} \leq -\beta < +\infty. \end{aligned}$$

  Portanto, $D(\varphi^*) \neq \emptyset$ provando o resultado.

- φ^* é semicontínua inferior.

  Para isso, usaremos o Lema 2.2.5.

  Dado $x \in X$, defina

  $\psi_x : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, por $\psi_x(f) = \langle f, x\rangle - \varphi(x)$.

  Mostraremos que ψ_x é uma aplicação contínua, daí em particular, ψ_x será s.c.i..

  Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X^*, com $f_n \longrightarrow f$ quando $n \longrightarrow +\infty$ em X^*, isto é,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} |\langle f_n - f, x\rangle| = 0, \forall\ x \in X$ com $||x|| \leq 1$.

  Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n - f, x\rangle| = 0 &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \psi_x(f_n) = \psi_x(f) \end{aligned}$$

  Para um caso geral, basta tomar $y = \dfrac{x}{||x||}$ com x não nulo, fixado arbitrariamente em X e notar que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n - f, y\rangle| = 0 &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n - f, \frac{x}{||x||}\rangle| = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{||x||} \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n - f, x\rangle| = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| = 0. \end{aligned}$$

  Portanto, $\{\psi_x\}_{x\in X}$ é uma família de funções s.c.i..

Pelo Lema 2.2.5, a função conjugada $\varphi^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, com $\varphi^*(f) = \sup\{\psi_x(f)\}_{x\in X}$ é s.c.i.. $\square$

Proposição 2.3.3. *Se $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma função fracamente semicontínua inferior tal que os conjuntos de níveis $[\varphi, \lambda] = \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ são fracamente compactos, então φ atinge seu mínimo em X. Em particular, se X é reflexivo e φ é convexa, s.c.i. e própria em X tal que*

$$\lim_{||x||\to+\infty} \varphi(x) = \infty,$$

então existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) = \inf\{\varphi(x); x \in X\}$.

Demonstração:

Defina $d = inf\{\varphi(x); x \in X\}$.

Se $d = -\infty$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = -\infty$. Logo, dado $\lambda \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N_0$ então $\varphi(x_n) \leq \lambda$. Portanto, para $n \geq N_0$, temos que $\{x_n\}_{n=N_0}^{\infty} \subset [\varphi, \lambda]$. Então, visto que $[\varphi, \lambda]$ é fracamente compacta, existe uma subsequência que nomearemos por $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $x_k \rightharpoonup x$ em $[\varphi, \lambda]$, quando $k \longrightarrow +\infty$. Logo, $\varphi(x) \leq \lambda$.

Como φ é s.c.i. na topologia fraca de X temos que,

$$\varphi(x) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \varphi(x_k) = -\infty.$$

Isto implicaria que $\varphi(x) = -\infty$, o que é um absurdo visto que $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$.

Portanto $d > -\infty$.

Pela definição de ínfimo, temos uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ com

$d \leq \varphi(x_n) < d + \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $\lambda = d+1$, temos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [\varphi, \lambda]$. Como todo conjunto de nível é fracamente compacto, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ em $[\varphi, \lambda]$ quando $k \longrightarrow \infty$, logo $\varphi(x_0) \leq \lambda$.

Como $d \leq \varphi(x_{n_k}) < d + \dfrac{1}{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e φ é s.c.i. na topologia fraca em X, temos que,

$$d = \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \varphi(x_{n_k}) \geq \varphi(x_0).$$

Por outro lado, $d \leq \varphi(x_0)$, pois d é o ínfimo de φ. Portanto, $\varphi(x_0) = d$.

Suponhamos agora que X é reflexivo e φ é s.c.i., convexa e própria tal que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Pela Proposição 2.2.2, φ é s.c.i. na topologia fraca em X. Mostraremos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível $[\varphi, \lambda]$ é fracamente compacto e o resultado seguirá da parte anterior.

Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fixado arbitrariamente. Como $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, existe $R > 0$ tal que $\varphi(u) > \lambda_0$, para todo $u \in X$, com $||u|| > R$. Assim,

$$[\varphi, \lambda_0] = \{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda_0\} \subseteq \overline{B_R(0)}. \tag{2.1}$$

Pela Proposição 2.1.2, o conjunto de nível $[\varphi, \lambda_0]$ é fechado na topologia fraca de X. Por (2.1), temos que $[\varphi, \lambda_0]$ é limitado.

Visto que X é reflexivo, pelo Teorema 0.0.20, temos que $[\varphi, \lambda_0]$ é fracamente compacto e o resultado segue. $\square$

Capítulo 3

Subdiferenciais

Considere $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sendo X um espaço de Banach real. A função $f' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x,y) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}. \tag{3.1}$$

Caso exista o limite, será chamado de **derivada direcional** de f em x na direção y.

A função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **Gâteaux diferenciável** em $x \in X$, se existe $\bigtriangledown f(x) \in X^*$, de modo que,

$$f'(x,y) = \langle \bigtriangledown f(x), y \rangle, \qquad \forall y \in X.$$

Se a convergência em (3.1) é uniforme em y sobre subconjuntos limitados, então f será chamada de **Fréchet diferenciável** e $\bigtriangledown f$ será chamada de **diferencial de Fréchet** de f.

Obs: Note que Fréchet diferenciável $\Longrightarrow$ Gâteaux diferenciável, mas não vale a recíproca.

3.1 Subdiferenciais

Caso a função $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ seja convexa e própria, a aplicação $\partial\varphi : X \longrightarrow X^*$ dada por

$$\partial\varphi(x) = \{x^* \in X^*; \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x^*, x-y \rangle, \forall \ y \in X\} \tag{3.2}$$

será chamada de **subdiferencial** de φ.

Em geral, $\partial\varphi$ é um operador multívoco de X em X^* não definido em todos os pontos $x \in X$ e pode ser visto como um subconjunto de $X \times X^*$.

O elemento $x^* \in \partial\varphi(x)$, caso exista, será chamado de **subgradiente** de φ em x. Nós denotaremos, como de costume, por $D(\partial\varphi)$ o conjunto de todos os $x \in X$ para o qual $\partial\varphi(x) \neq \emptyset$, isto é, $D(\partial\varphi) = \{x \in X; \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$.

Definição 3.1.1. *O mapeamento $J : X \longrightarrow X^*$ dado por,*

$$J(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}, \text{ para todo } x \in X,$$

é chamado de mapeamento da dualidade do espaço X.

Sejam φ e ψ funcionais multívocos (ou unívocos) definidos num espaço X, escrevemos $\varphi \subset \psi$ se $\varphi(x) \subset \psi(x)$, para todo $x \in X$, equivalentemente, se $w \in \varphi(x)$ então $w \in \psi(x)$.

Vejamos alguns exemplos simples:

3.2 Exemplos de Subdiferenciais

Exemplo 3.2.1. *Seja $\varphi(x) = \frac{1}{2}||x||^2$. Então, $\partial\varphi = J$ (o mapeamento da dualidade do espaço X).*

a) $J \subset \partial\varphi$:

Seja $x^* \in J(x)$ e tome arbitrariamente $y \in X$, então $\langle x^*, x\rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2$. Assim,

$$\langle x^*, x - y\rangle = \langle x^*, x\rangle - \langle x^*, y\rangle = ||x||^2 - \langle x^*, y\rangle. \tag{1}$$

Note que,

$$\begin{aligned}(||x^*|| - ||y||)^2 \geq 0 &\Longrightarrow ||x^*||^2 + ||y||^2 - 2||x^*||.||y|| \geq 0\\ &\Longrightarrow \frac{||x^*||^2 + ||y||^2}{2} \geq ||x^*||.||y|| \geq \langle x^*, y\rangle\\ &\Longrightarrow -\langle x^*, y\rangle \geq \frac{-||x^*||^2 - ||y||^2}{2}, \forall\ y \in X.\end{aligned}$$

Assim,

$$||x||^2 - \langle x^*, y\rangle \geq ||x||^2 - \frac{||x^*||^2}{2} - \frac{||y||^2}{2} = ||x||^2 - \frac{||x||^2}{2} - \frac{||y||^2}{2} = \frac{||x||^2}{2} - \frac{||y||^2}{2}. \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2) temos que,
$\langle x^*, x-y\rangle \geq \frac{||x||^2}{2} - \frac{||y||^2}{2}$, ou seja, $\langle x^*, x-y\rangle \geq \varphi(x) - \varphi(y), \forall\, y \in X$.
Portanto $\varphi(x) \leq \langle x^*, x-y\rangle + \varphi(y)$, para todo $y \in X$, logo $x^* \in \partial\varphi(x)$.

b) $\partial\varphi \subset J$:

Seja $x^* \in \partial\varphi(x)$, então $\varphi(x) - \varphi(y) \leq \langle x^*, x-y\rangle, \forall y \in X$. Assim,

$$\frac{1}{2}[||x||^2 - ||y||^2] \leq \langle x^*, x-y\rangle, \forall y \in X. \tag{3}$$

Tomando $y = \lambda x$, com $\lambda \in (0,1)$ e substituindo em (3) temos que
$\langle x^*, x(1-\lambda)\rangle \geq \frac{1-\lambda^2}{2}||x||^2 \Longrightarrow (1-\lambda)\langle x^*, x\rangle \geq \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)}{2}||x||^2$.
Como $(1-\lambda) \in (0,1)$ temos que,
$\langle x^*, x\rangle \geq \frac{1}{2}(1+\lambda)||x||^2$, para todo $\lambda \in (0,1)$. Fazendo $\lambda \longrightarrow 1^-$, temos que

$$\langle x^*, x\rangle \geq ||x||^2. \tag{4}$$

Agora, tomando $y = \lambda x$, com $\lambda > 1$ e substituindo em (3) temos que,
$(1-\lambda)\langle x^*, x\rangle \geq \frac{1-\lambda^2}{2}||x||^2$. Como $1-\lambda < 0$, temos que,

$$\langle x^*, x\rangle \leq \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)}{2(1-\lambda)}||x||^2 = \frac{1+\lambda}{2}||x||^2, \text{ para todo } \lambda > 1.$$

Fazendo $\lambda \longrightarrow 1^+$, temos que

$$\langle x^*, x\rangle \leq ||x||^2. \tag{5}$$

Portanto, de (4) e (5) temos que $\langle x^*, x\rangle = ||x||^2$. Agora, vamos mostrar a igualdade $||x|| = ||x^*||$.

Se $x = 0$, a igualdade ocorre direto. Seja $x \neq 0$ e note que $||x^*||.||x|| \geq \langle x^*, x\rangle = ||x||^2$. Assim

$$||x^*|| \geq ||x||. \tag{6}$$

Por outro lado, tomando $y = x + \lambda u$, com $\lambda > 0$ e $u \in X$ arbitrários e substituindo em (3) temos que,

$\langle x^*, x - x - \lambda u\rangle \geq \frac{1}{2}(||x||^2 - ||x+\lambda u||^2)$, logo

$$\begin{aligned}\lambda\langle x^*, u\rangle &\leq \frac{1}{2}(||x+\lambda u||^2 - ||x||^2)\\ &\leq \frac{1}{2}[(||x|| + ||\lambda u||)^2 - ||x||^2]\\ &= \frac{1}{2}(||x||^2 + 2||x||.||\lambda u|| + ||\lambda u||^2 - ||x||^2)\\ &= \frac{\lambda^2||u||^2}{2} + \lambda||x||.||u||.\end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, temos que $\langle x^*, u\rangle \leq ||x||.||u|| + \dfrac{\lambda||u||^2}{2}$. Fazendo $\lambda \longrightarrow 0^+$ temos, $\langle x^*, u\rangle \leq ||x||.||u||$, para todo $u \in X$. Assim, pela definição da norma de um operador linear, temos que

$$||x^*|| \leq ||x||. \tag{7}$$

Portanto, de (6) e (7) segue a igualdade $||x|| = ||x^*||$.

Exemplo 3.2.2. *Seja K um subconjunto não vazio, convexo e fechado de X. A função $I_K : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por*

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad x \in K \\ +\infty & , \text{ se } \quad x \notin K \end{cases}$$

*é chamada de **função indicatriz** de K com subdiferencial $\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x-y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$, para todo $x \in K$. Além disso, $\partial I_k(x) = 0$ se $x \in int(K)$, $D(\partial I_K) = K$ e sua conjugada $I_K^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle, x \in K\}$.*

Primeiramente, note que I_K é convexa, s.c.i. e própria.

- Como $K \neq \emptyset$, existe $x \in K$, logo $I_K(x) = 0 < +\infty$, portanto I_K é própria.

- I_K é s.c.i., pois seus conjuntos de níveis são fechados.

  Para $\lambda < 0$, o conjunto de nível $[I_K, \lambda] = \emptyset$, é fechado. Se $\lambda \geq 0$, então $[I_K, \lambda] = K$, que é fechado. Pela Proposição 2.1.2 segue o resultado.

- I_K é convexa, pois como o conjunto $Epi(I_K) = K \times [0, +\infty)$ é convexo, o resultado segue da Proposição 2.1.7.

1) Vamos calcular a subdiferencial de I_K.

$\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; I_K(x) \leq I_K(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \forall y \in X\}$.

(a) Se $x \notin K \Longrightarrow I_K(x) = +\infty$. Então,

$\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; I_K(y) + \langle x^*, x - y\rangle \geq +\infty, \forall y \in X\} = \{\emptyset\}$, pois,

Se $y \in K \Longrightarrow I_K(y) = 0 \Longrightarrow \langle x^*, x - y\rangle = +\infty$.

(b) Se $x \in K \Longrightarrow I_K(x) = 0$. Então,

$\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; 0 \leq I_K(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \forall y \in X\}$.

Note que se $y \notin K$, a desigualdade $0 \leq I_K(y) + \langle x^*, x - y\rangle$ é satisfeita, para todo $x^* \in X^*$. Assim,

$\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; 0 \leq I_K(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \forall y \in K\}$, isto é,

$\partial I_K(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x - y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$.

Portanto,

$$\partial I_K(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^*; \langle x^*, x - y\rangle \geq 0, \forall y \in K & \text{, se}\} \quad x \in K \\ \emptyset & \text{, se} \quad x \notin K. \end{cases} \tag{3.3}$$

2) $\partial I_K(x) = 0$, se $x \in int(K)$.

Se $x \in int(K) \Longrightarrow$ existe $\epsilon > 0$ tal que a bola $B(x, \epsilon) \subset K$.

Se $x^* \in \partial I_K(x)$, então $\langle x^*, x - u\rangle \geq 0, \forall u \in K$, em particular, $\forall u \in B(x, \epsilon)$.

Por outro lado, dado $y \in X$ com y não nulo, existe $\lambda > 0$ tal que $u_0 := x + \lambda y \in B(x, \epsilon)$ pois,

$||x - u_0|| = ||x - (x + \lambda y)|| = || - \lambda y|| = \lambda ||y|| < \epsilon$, para λ suficientemente pequeno. Assim,

$0 \leq \langle x^*, x - u_0\rangle = \langle x^*, x - (x + \lambda y)\rangle = \langle x^*, -\lambda y\rangle = -\lambda\langle x^*, y\rangle$. Portanto,

$$\langle x^*, y\rangle \leq 0, \forall y \in X. \tag{I}$$

Dado $z \in X$, considere $y = -z$. Temos que,

$$\langle x^*, z\rangle = \langle x^*, -y\rangle \geq 0. \tag{II}$$

De (I) e (II) temos que $\langle x^*, w\rangle = 0, \forall w \in X$. Portanto, $x^* = 0$.

3) Calculando a conjugada I_K^* de I_K temos,

$I_K^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é dada por,

$$\begin{aligned} I_K^*(x^*) &= \sup\{\langle x^*, x\rangle - I_K(x), x \in X\} = \sup\{\langle x^*, x\rangle - I_K(x), x \in K\} \\ &= \sup\{\langle x^*, x\rangle, x \in K\}. \end{aligned}$$

4) O fato de $D(\partial I_K) = K$, segue direto de (3.3). Basta notar que $0 \in \partial I_K(x)$, para todo $x \in K$.

Exemplo 3.2.3. *Seja φ uma função convexa e Gâteaux diferenciável em $x \in X$. Então $\partial\varphi(x) = \triangledown\varphi(x)$.*

- $\triangledown\varphi(x) \subset \partial\varphi(x)$:

  Como φ é convexa, dado $x, y \in X$ e $\lambda \in (0,1)$ temos que

  $\varphi(x + \lambda(y - x)) = \varphi(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda\varphi(y) + (1-\lambda)\varphi(x)$, para todo $y \in X$.

  Equivalentemente,
  $$\frac{\varphi(x + \lambda(y - x)) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \varphi(y) - \varphi(x), \text{ para todo } y \in X. \tag{1}$$
  Fazendo $\lambda \longrightarrow 0^+$ em (1) temos que
  $$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda(y - x)) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \varphi(y) - \varphi(x). \tag{2}$$
  Como φ é Gâteaux diferenciável em $x \in X$, existe $\triangledown\varphi(x) \in X^*$ tal que
  $$\varphi'(x, y - x) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda(y - x)) - \varphi(x)}{\lambda} = \langle \triangledown\varphi(x), y - x\rangle, \text{ para todo } y \in X.$$
  Substituindo em (2) temos que,

  $\langle \triangledown\varphi(x), y - x\rangle \leq \varphi(y) - \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle \triangledown\varphi(x), x - y\rangle$, para todo $y \in X$.

  Portanto $\triangledown\varphi(x) \in \partial\varphi(x)$.

- $\partial\varphi(x) \subset \triangledown\varphi(x)$:

  Se $w \in \partial\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle w, x - y\rangle$, para todo $y \in X$.

  Equivalentemente,
  $$\varphi(x) - \langle w, x\rangle \leq \varphi(y) - \langle w, y\rangle, \forall\, y \in X. \tag{3}$$

Defina a função $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por $g(z) = \varphi(z) - \langle w, z \rangle$. Como φ é Gâteaux diferenciável em x, segue que g é Gâteaux diferenciável em x e temos,

$$\begin{aligned}
\langle \bigtriangledown g(x), y \rangle &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{g(x + \lambda y) - g(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \langle w, x + \lambda y \rangle - \varphi(x) + \langle w, x \rangle}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} - \langle w, y \rangle = \langle \bigtriangledown \varphi(x), y \rangle - \langle w, y \rangle \\
&= \langle \bigtriangledown \varphi(x) - w, y \rangle, \forall\ y \in X.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bigtriangledown g(x) = \bigtriangledown \varphi(x) - w$. (4)

Afirmação: $\bigtriangledown g(x) = 0$.

De fato, note que por (3) temos que x é ponto mínimo de g, isto é, $g(x) \leq g(y)$, para todo $y \in X$, logo

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{g(x + \lambda y) - g(x)}{\lambda} \geq 0, \forall y \in X \Longrightarrow \langle \bigtriangledown g(x), y \rangle \geq 0, \forall\ y \in X.$$

Considerando $y' = -y$ temos que,

$$0 \leq \langle \bigtriangledown g(x), y' \rangle = \langle \bigtriangledown g(x), -y \rangle = -\langle \bigtriangledown g(x), y \rangle, \forall\ y \in X \Longrightarrow \bigtriangledown g(x) = 0.$$

De (4) concluímos que $\bigtriangledown \varphi(x) = w$.

Lema 3.2.4. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i. e convexa. Temos que $\varphi(x) = \inf\{\varphi(u); u \in X\}$ se, e somente se, $0 \in \partial \varphi(x)$.*

Demonstração:

Seja $x \in X$ tal que $\varphi(x) = \inf\{\varphi(u); u \in X\}$, pela definição de ínfimo, temos que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ para todo $y \in X$. Assim,

$$\varphi(x) \leq \varphi(y), \forall y \in X \Longleftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle 0, x - y \rangle, \forall y \in X \Longleftrightarrow 0 \in \partial \varphi(x).$$ □

3.3 Subdiferencial da Conjugada da Função

Definição 3.3.1. *Se φ^* é própria, a função $\varphi^{**} : X^{**} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ dada por $\varphi^{**}(x^{**}) = \sup\{\langle x^{**}, f \rangle - \varphi^*(f); f \in X^*\}$ é chamada conjugada de φ^*.*

Pela Proposição 0.0.19 temos que $J(X) \subset X^{**}$, no caso de X ser reflexivo temos que $J(X) = X^{**}$, ou seja, $X = X^{**}$ e escrevemos,

$\varphi^{**}(x) = \sup\{\langle f, x\rangle - \varphi^*(f); f \in X^*\}$ via identidade com a definição acima, pois dado $x^{**} \in X^{**}$, temos que existe $x \in X$, tal que

$\langle x^{**}, f\rangle = \langle J(x), f\rangle = J_x(f) = f(x) = \langle f, x\rangle$.

Definição 3.3.2. $\partial\varphi^*(x^*) = \{x^{**} \in X^{**}; \varphi^*(x^*) \leq \langle x^{**}, x^* - y^*\rangle + \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\}$,

equivalentemente, caso X seja reflexivo,

$\partial\varphi^*(x^*) = \{x \in X; \varphi^*(x^*) \leq \langle x^* - y^*, x\rangle + \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\}$.

Vejamos a seguir algumas relações entre $\partial\varphi$ e $\partial\varphi^*$.

Proposição 3.3.3. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função semicontínua inferior, convexa e própria. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(i) $x^* \in \partial\varphi(x)$,

(ii) $\varphi(x) + \varphi^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$,

(iii) $x \in \partial\varphi^*(x^*)$.

Em particular, $\partial\varphi^* = (\partial\varphi)^{-1}$ e $(\varphi^*)^* = \varphi$.

Demonstração:

Note que, pela proposição 2.3.2 temos que $\varphi^* : X^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é s.c.i., convexa e própria.

$(i) \Longrightarrow (ii)$:

Seja $x^* \in \partial\varphi(x)$. Então,

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \forall y \in X \Longrightarrow \varphi(x) + \langle x^*, y\rangle - \varphi(y) \leq \langle x^*, x\rangle, \forall y \in X.$$

Consequentemente,

$\varphi(x) + \sup\{\langle x^*, y\rangle - \varphi(y); y \in X\} \leq \langle x^*, x\rangle$. Portanto

$$\varphi(x) + \varphi^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle. \tag{1}$$

Por outro lado, temos que $\varphi^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, y\rangle - \varphi(y); y \in X\} \geq \langle x^*, x\rangle - \varphi(x)$. Assim,

$$\varphi(x) + \varphi^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue a igualdade de (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$:

De (ii) temos que,

$$\begin{aligned}\langle x^*, x\rangle = \varphi(x) + \varphi^*(x^*) &= \varphi(x) + \sup\{\langle x^*, x\rangle - \varphi(x); x \in X\}\\ &\geq \varphi(x) + \langle x^*, y\rangle - \varphi(y), \forall y \in X. \text{ Assim,}\end{aligned}$$

$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \forall y \in X \Longrightarrow x^* \in \partial\varphi(x)$.

Para provar que $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$, primeiramente vamos mostrar que $\varphi^{**} = \varphi$.

Afirmação 1: $\varphi^{**} \leq \varphi$.

Note que, $\varphi^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - \varphi(x), x \in X\}, \forall x^* \in X^*$. Assim, para cada $x \in X$, temos que

$\varphi^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle - \varphi(x), \forall x^* \in X^* \Longrightarrow \langle x^*, x\rangle - \varphi^*(x^*) \leq \varphi(x), \forall x^* \in X^*$

Portanto, para cada $x \in X$, temos,

$\sup\{\langle x^*, x\rangle - \varphi^*(x^*), x^* \in X^*\} \leq \varphi(x) \Longrightarrow \varphi^{**}(x) \leq \varphi(x), \forall x \in X$.

Provando a afirmação 1.

Suponha que exista $x_0 \in X$ tal que $\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0)$, logo $(x_0, \varphi^{**}(x_0)) \notin Epi(\varphi)$. Pela Proposição 2.1.5, $Epi(\varphi)$ é fechado e pela Proposição 2.1.7, temos que $Epi(\varphi)$ é convexo em $X \times \mathbb{R}$. Como φ é própria, então $Epi(\varphi) \neq \emptyset$. Definindo $A = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0))\}$, claramente A é convexo e compacto em $X \times \mathbb{R}$ e disjunto de $Epi(\varphi)$.

Pela segunda forma geométrica do Teorema de Hahn Banach, existe $\psi \in (X \times \mathbb{R})^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\psi(x_0, \varphi^{**}(x_0)) \leq \alpha - \epsilon < \alpha < \alpha + \epsilon \leq \psi(x, \lambda), \forall (x, \lambda) \in Epi(\varphi), \tag{3}$$

para algum $\epsilon > 0$.

Pela Proposição 0.0.12, temos que, $(X \times \mathbb{R})^* \approx X^* \times \mathbb{R}^*$. Logo, existe $x_0^* \in X^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que, $\psi(x, \lambda) = \langle x^*, x\rangle + k\lambda, \forall (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$. Substituindo em (3) temos,

$\langle x_0^*, x_0\rangle + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha < \langle x_0^*, x\rangle + k\lambda$, para todo $(x, \lambda) \in Epi(\varphi)$.

Tomando $\lambda = \varphi(x)$, temos claramente que $(x, \varphi(x)) \in Epi(\varphi)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $k > 0$, então

$\langle \frac{x_0^*}{k}, x_0\rangle + \varphi^{**}(x_0) < \langle \frac{x_0^*}{k}, x\rangle + \varphi(x)$, para todo $x \in X$.

Equivalentemente,

$\left\langle \dfrac{-x_0^*}{k}, x_0 \right\rangle - \varphi^{**}(x_0) > \left\langle \dfrac{-x_0^*}{k}, x \right\rangle - \varphi(x)$, para todo $x \in X$. Assim,

$$\left\langle \frac{-x_0^*}{k}, x_0 \right\rangle - \varphi^{**}(x_0) > \sup\left\{ \left\langle \frac{-x_0^*}{k}, x \right\rangle - \varphi(x), x \in X \right\} = \varphi^*\left(\frac{-x_0^*}{k}\right).$$

Portanto, $\sup\{\langle f, x_0\rangle - \varphi^*(f); f \in X^*\} = \varphi^{**}(x_0) < \left\langle \dfrac{-x_0^*}{k}, x_0 \right\rangle - \varphi^*\left(\dfrac{-x_0^*}{k}\right)$, o que contradiz a definição de φ^{**}.

Portanto, segue que $\varphi^{**} = \varphi$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$:

Como (ii) vale e $\varphi^{**} = \varphi$ temos que $\varphi^{**}(x) + \varphi^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned} -\varphi^*(x^*) &= -\langle x^*, x\rangle + \varphi^{**}(x) \\ &= -\langle x^*, x\rangle + \sup\{\langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\} \\ &\geq -\langle x^*, x\rangle + \langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*), \forall y^* \in X^*. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi^*(x^*) \leq \langle x^* - y^*, x\rangle + \varphi^*(y^*), \forall y^* \in X^*$.

Usando a reflexibilidade do espaço X temos,

$\varphi^*(x^*) \leq \langle x, x^* - y^*\rangle + \varphi^*(y^*), \forall y^* \in X^*$.

Portanto $x \in \partial\varphi^*(x^*)$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$:

$x \in \partial\varphi^*(x^*) \Longrightarrow \varphi^*(x^*) \leq \langle x^* - y^*, x\rangle + \varphi^*(y^*), \forall y^* \in X^*$. Assim,

$$\varphi^*(x^*) + \langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*) \leq \langle x^*, x\rangle, \forall y^* \in X^*.$$

Equivalentemente,

$\varphi^*(x^*) + \sup\{\langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\} \leq \langle x^*, x\rangle$. Assim,

$$\varphi^*(x^*) + \varphi^{**}(x) \leq \langle x^*, x\rangle. \tag{6}$$

Por outro lado, temos que

$\varphi^{**}(x) = \sup\{\langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\} \geq \langle x^*, x\rangle - \varphi^*(x^*)$. Logo

$$\varphi^{**}(x) + \varphi^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle. \tag{7}$$

De (6), (7) e do fato de $\varphi^{**} = \varphi$, segue a igualdade de (ii).

A prova da igualdade $\partial\varphi^* = (\partial\varphi)^{-1} = D(\partial\varphi)$ segue da equivalência entre (i) e (iii).

De fato, se $x \in (\partial\varphi)^{-1}$ então existe $x^* \in X^*$ tal que $x^* \in \partial\varphi(x)$, como $(i) \Longrightarrow (iii)$, temos que $x \in \partial\varphi^*(x^*)$. Por outro lado, se $x \in \partial\varphi^*(x^*)$, para algum $x^* \in X^*$, como $(iii) \Longrightarrow (i)$ temos que $x^* \in \partial\varphi(x)$, portanto $x \in (\partial\varphi)^{-1}$. $\square$

Definição 3.3.4. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, s.c.i. e própria. Para cada $\epsilon > 0$ defina o conjunto $\partial_\epsilon\varphi(x)$ de subgradientes aproximados de φ em x por,*

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon\varphi(x) &= \{x^* \in X^*; \varphi(y) \geq \varphi(x) - \epsilon + \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in X\}\\ &= \{x^* \in X^*; \varphi(x) + \varphi^*(x^*) - \langle x^*, x\rangle \leq \epsilon\}.\end{aligned}$$

A conjugada φ^{**} de φ^* coincide com φ em X (considerando X como um subespaço de X^{**}), isto é, $\varphi(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle - \varphi^*(x^*), x^* \in X^*\}$, para cada $x \in X$.

Observação 3.3.5. *Note que, se $x \in D(\varphi)$, então $\partial_\epsilon\varphi(x) \neq \emptyset$.*

De fato, como $x \in D(\varphi)$ temos que,

$\varphi(x) = \sup\{\langle y^*, x\rangle - \varphi^*(y^*), y^* \in X^*\} < +\infty$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $z_\epsilon^* \in X^*$ tal que,

$\varphi(x) - \epsilon < \langle z_\epsilon^*, x\rangle - \varphi^*(z_\epsilon^*) \Longrightarrow \varphi(x) + \varphi^*(z_\epsilon^*) - \langle z_\epsilon^*, x\rangle < \epsilon$. Portanto, $z_\epsilon^* \in \partial_\epsilon\varphi(x)$.

Lema 3.3.6. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função convexa, s.c.i. e própria com $x^* \in \partial_\epsilon\varphi(x)$. Então, para cada $\lambda > 0$, existe $\bar{x} \in X$ e $\bar{x}^* \in X^*$ tal que $||\bar{x} - x|| \leq \lambda$, $||\bar{x}^* - x^*|| \leq \dfrac{\epsilon}{\lambda}$ e $\bar{x}^* \in \partial\varphi(\bar{x})$.*

Demonstração: ver lema em [1], pág. 608. $\square$

Proposição 3.3.7. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i., convexa e própria. Então, $D(\partial\varphi)$ é um subconjunto denso de $D(\varphi)$.*

Demonstração:

1) $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$.

Seja $x \in D(\partial\varphi)$, então existe $x^* \in X^*$ tal que,

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle x^*, x - y\rangle, \text{ para todo } y \in X. \qquad (I)$$

Como φ é própria, existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) < +\infty$. Tomando $y = u$ em (I) temos que, $\varphi(x) \leq \varphi(u) + \langle x^*, x - u\rangle < +\infty$.

Portanto, $x \in D(\varphi)$.

2) $\overline{D(\partial\varphi)}^X = D(\varphi)$.

Agora vamos mostrar a densidade de $D(\partial\varphi)$ no $D(\varphi)$. Seja $x \in D(\varphi)$, e vamos mostrar que existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\partial\varphi)$ tal que $||x_n - x|| \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

Como $x \in D(\varphi)$, pela Observação 3.3.5, dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon^* \in \partial_\epsilon\varphi(x)$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\epsilon_n = \dfrac{1}{n^2} > 0$ e $\lambda_n = \dfrac{1}{n} > 0$. Pelo Lema 3.3.6 temos que existe $\bar{x}_n \in X$ e $\bar{x}_n^* \in X^*$ tal que,

$||\bar{x}_n - x|| \leq \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, $||\bar{x}_n^* - x_n^*|| \leq \dfrac{\epsilon_n}{\lambda_n} = \dfrac{1}{n}$ e $\bar{x}_n^* \in \partial\varphi(\bar{x}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a sequência $\{\bar{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\partial\varphi)$ e fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em ambos os lados da desigualdade $||\bar{x}_n - x|| \leq \dfrac{1}{n}$, temos que, $||\bar{x}_n - x|| \longrightarrow 0$, e o resultado segue. □

Proposição 3.3.8. *Seja $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função s.c.i., convexa e própria. Então, $intD(\varphi) \subset D(\partial\varphi)$.*

Demonstração:

Se $intD(\varphi) = \emptyset$, o resultado decorre direto.

Suponha que $intD(\varphi) \neq \emptyset$ e seja $x_0 \in intD(\varphi)$, então existe $r > 0$ tal que,

$V = B(x_0, r) = \{x \in X; ||x - x_0|| < r\} \subset D(\varphi)$. Pela Proposição 2.2.4, temos que φ é contínua em V.

Defina $C = \{(x, \lambda) \in V \times \mathbb{R}; \varphi(x) < \lambda\}$.

- C é aberto em $X \times \mathbb{R}$. De fato, dado $(x', \lambda') \in C$, como φ é contínua em V e $\varphi(x') < \lambda'$, podemos tomar $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, de forma que $\varphi(x) < \lambda' - \epsilon, \forall x \in B(x', \delta) \subset V$.Note que $B(x', \delta) \times (\lambda' - \epsilon, \lambda' + \epsilon) =: A$ é um aberto de $X \times \mathbb{R}$ contendo o ponto (x', λ') e $A \subset C$. Portanto, C é um aberto de $X \times \mathbb{R}$.

- C é um conjunto convexo.

  Dados $(x, \alpha), (y, \beta) \in C$, então $\varphi(x) < \alpha$ e $\varphi(y) < \beta$. Como V é um subconjunto convexo de X e φ é convexa, temos que

  $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \forall \lambda \in (0, 1)$. Assim,

  $\lambda(x, \alpha) + (1-\lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in C$, para todo $\lambda \in (0, 1)$, provando a afirmação.

Seja $B := \{(x_0, \varphi(x_0))\}$ e note que $B \cap C = \emptyset$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, primeira forma geométrica, existe um hiperplano fechado que separa B e C no sentido lato, isto é, existe $\psi \in (X \times \mathbb{R})^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(x_0, \varphi(x_0)) \leq \beta \leq \psi(x, \lambda), \forall\ (x, \lambda) \in C. \tag{I}$$

Como ψ é contínua, temos

$$\beta \leq \psi(x, \lambda), \forall\ (x, \lambda) \in \overline{C}. \tag{II}$$

Pelo Teorema 0.0.12 temos que $(X \times \mathbb{R})^* \approx X^* \times \mathbb{R}^*$. Portanto, existe $f \in X^*$ e $K \in \mathbb{R}$, K não nulo (veja Lema 0.0.11), tal que,

$$\psi(x, \lambda) = \langle f, x \rangle + K\lambda, \forall\ (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}. \tag{III}$$

Por (I), (II) e (III) temos,

$\langle f, x_0 \rangle + K\varphi(x_0) \leq \beta \leq \langle f, x \rangle + K\lambda,$ para todo $(x, \lambda) \in \overline{C}$.

Sem perda de generalidade, suponha que $K > 0$. Assim,

$\langle \dfrac{f}{K}, x_0 \rangle + \varphi(x_0) \leq \dfrac{\beta}{K} \leq \langle \dfrac{f}{K}, x \rangle + \lambda,$ para todo $(x, \lambda) \in \overline{C}$.

Tomando $x_0^* = \dfrac{-f}{K} \in X^*$ e $\alpha = \dfrac{\beta}{K} \in \mathbb{R}$ obtemos que,

$\langle -x_0^*, x_0 \rangle + \varphi(x_0) \leq \alpha \leq \langle -x_0^*, x \rangle + \lambda,$ para todo $(x, \lambda) \in \overline{C}$. Como $(x, \varphi(x)) \in \overline{C}$ para todo $x \in V$ temos que, $\langle -x_0^*, x_0 \rangle + \varphi(x_0) \leq \langle -x_0^*, x \rangle + \varphi(x),$ para todo $x \in V$.

Equivalentemente,

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) \leq \langle x_0^*, x_0 - x \rangle, \forall\ x \in V. \tag{IV}$$

Para todo $u \in X$, podemos tomar $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)u \in V$ pois,

$||\lambda x_0 + (1 - \lambda)u - x_0|| = (1 - \lambda)||u - x_0|| < r$ para algum λ suficientemente próximo de 1. Substituindo $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)u$ em (IV), temos pela convexidade de φ que,

$\varphi(x_0) - \lambda\varphi(x_0) - (1 - \lambda)\varphi(u) \leq \varphi(x_0) - \varphi(\lambda x_0 + (1 - \lambda)u) \leq \langle x_0^*, x_0 - \lambda x_0 - (1 - \lambda)u \rangle,$ para todo $u \in X$. Assim,

$\varphi(x_0) \leq \lambda\varphi(x_0) + (1 - \lambda)\varphi(u) + \langle x_0^*, (1 - \lambda)(x_0 - u) \rangle,$ para todo $u \in X$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Como x_0^* é contínua, fazendo $\lambda \longrightarrow 0^+$, temos que,

$\varphi(x_0) \leq \varphi(u) + \langle x_0^*, x_0 - u \rangle$, para todo $u \in X$.

Portanto, $x_0^* \in \partial\varphi(x_0) \Longrightarrow x_0 \in D(\partial\varphi)$. $\square$

Proposição 3.3.9. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $\varphi : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função* *própria, s.c.i. e convexa. Se*

$$\lim_{||x||\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Então $R(\partial\varphi) = X^*$, *sendo que* $R(\partial\varphi) := \{x^* \in X^*;\ \exists\, z \in X,\ x^* \in \partial\varphi(z)\}$

Demonstração:

Dado $f \in X^*$, temos que f é limitada, contínua e convexa (pela linearidade de f). Definindo $g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ por $g(x) = \varphi(x) - f(x)$ temos que g é convexa, semicontínua inferior, própria e

$\lim\limits_{||x||\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{||x||\to+\infty} \varphi(x) - f(x) = +\infty$, pois f é limitada e $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Pela Proposição 2.3.3, segue que existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) \leq g(y)$, para todo $y \in X$. Equivalentemente,

$\varphi(x_0) - f(x_0) \leq \varphi(y) - f(y), \forall y \in X \Longrightarrow \varphi(x_0) \leq \varphi(y) + \langle f, x_0 - y\rangle, \forall y \in X.$

Portanto, $f \in \partial\varphi(x_0)$, provando que $R(\partial\varphi) = X^*$. □

Observação 3.3.10. *Sejam* $\varphi, \psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções convexas, semicontínuas inferiormente e próprias. Se* $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \emptyset$ *então* $\partial\psi + \partial\varphi \subset \partial(\psi + \varphi)$.

Seja $w^* = w_1^* + w_2^*$, com $w_1^* \in \partial\psi(x)$ e $w_2^* \in \partial\varphi(x)$. Assim,

$\psi(x) \leq \psi(y) + \langle w_1^*, x - y\rangle$, para todo $y \in X$. (I)

$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \langle w_2^*, x - y\rangle$, para todo $y \in X$. (II)

Somando ambos os lados das desigualdades (I) e (II) temos que,

$\varphi(x) + \psi(x) \leq \varphi(y) + \psi(y) + \langle w_1^* + w_2^*, x - y\rangle$, para todo $y \in X$.

Portanto, $w^* \in \partial(\varphi + \psi)(x)$.

Proposição 3.3.11. *Sejam* φ *e* ψ *funções convexas, semicontínuas inferiormente e próprias em* X *tais que* $int(D(\psi)) \cap D(\varphi) \neq \emptyset$. *Então* $\partial(\psi + \varphi) = \partial\psi + \partial\varphi$.

Demonstração:

Ver [5] p. 41. □ .

Capítulo 4

Aplicação

Neste capítulo, definiremos o operador $p(x)$-Laplaciano perturbado e mostraremos que a realização deste operador no espaço $H = L^2(\Omega)$ é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i.. O operador p(x) - Laplaciano aparece em muitos modelos de EDP's com aplicações em processamento de imagens e fluidos eletroreológicos. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [8].

4.1 Algumas definições e resultados importantes

Nesta seção, iremos evidenciar algumas definições e resultados que serão úteis ao longo do capítulo.

Definição 4.1.1. *O espaço de Lebesgue generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ é definido por*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um conjunto mensurável e $p \in L^\infty(\Omega)$, com $p \geq 1$.

Para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+ := \{q \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess q} \geq 1\}$ denotaremos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx,$$

$$p^- = \inf \text{ess}\, p \text{ e } p^+ = \sup \text{ess}\, p.$$

Por [15, 7, 10], $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{p(x)} = \inf\Big\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\Big\}.$$

Definição 4.1.2. *O espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \big\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\big\}.$$

De acordo com [15, 6, 10], temos que $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_* := ||u||_{p(x)} + ||\nabla u||_{p(x)}.$$

Definição 4.1.3. $W_o^{1,p(x)} = \overline{C_o^\infty(\Omega)}^{W^{1,p(x)}(\Omega)}$.

Proposição 4.1.4. *[16, 10] As normas $||\nabla u||_{p(x)}$ e $||u||_*$ são equivalentes em $W_o^{1,p(x)}$.*

Teorema 4.1.5. *[15, 10] Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então*

(i) $||u||_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ *se e somente se* $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$*;*

(ii) *Se $||u||_{p(x)} > 1$, então $||u||_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(x)}^{p^+}$;*

(iii) *Se $||u||_{p(x)} < 1$, então $||u||_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(x)}^{p^-}$.*

Teorema 4.1.6. *[2, 12, 10] Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções mensuráveis tais que $p(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $1 \leq p(x)q(x) \leq +\infty$ para quase todo $x \in \Omega$. Seja $f \in L^{q(x)}(\Omega)$, $f \neq 0$. Então*

$$||f||_{p(x)q(x)}^{p^+} \leq |||f|^{p(x)}||_{q(x)} \leq ||f||_{p(x)q(x)}^{p^-}\ ,\ se\ ||f||_{p(x)q(x)} \leq 1,$$

e

$$||f||_{p(x)q(x)}^{p^-} \leq |||f|^{p(x)}||_{q(x)} \leq ||f||_{p(x)q(x)}^{p^+}\ ,\ se\ ||f||_{p(x)q(x)} \geq 1.$$

Em particular, se $p(x) \equiv p$ é constante, então $|||f|^p||_{q(x)} = ||f||_{p(x)q(x)}^p$.

Proposição 4.1.7. *[6, 17, 10] O espaço conjugado de $L^{p(x)}(\Omega)$ é $L^{q(x)}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$. Além disso, para $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $g \in L^{q(x)}(\Omega)$ vale a desigualdade*

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq 2||f||_{p(x)}||g||_{q(x)}.$$

Teorema 4.1.8. *[15, 16, 10]*

(i) *O espaço* $(L^{p(x)}(\Omega), ||\cdot||_{p(x)})$ *é separável;*

(ii) *Se* $p^- > 1$, *então* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é reflexivo;*

(iii) *Se* $p^- > 1$, *então* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *é separável e reflexivo.*

Segue imediatamente da definição de $W_o^{1,p(x)}$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, que $W_o^{1,p(x)}$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Teorema 4.1.9. *[15, 16, 10] Seja* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^N$ *e* $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$. *Então*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se e somente se $q(x) \leq p(x)$ *para quase todo* $x \in \Omega$, *e neste caso a imersão é contínua.*

Teorema 4.1.10. *[16, 10] Seja* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^N$ *e sejam* $p, q \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $p^-, q^- \geq 1$. *Assuma que*

$$q(x) < p^*(x) := \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)} & , p(x) < N \\ +\infty, & p(x) \geq N \end{cases},$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. *Então,*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

e a imersão é contínua e compacta.

Definição 4.1.11. *Seja* V *um espaço de Banach. Dizemos que um operador* $A : V \to V^*$ *é hemicontínuo se, para todo* $u, v \in V$,

$$A(u + \lambda v) \rightharpoonup Au,$$

quando $\lambda \to 0$.

Definição 4.1.12. *Seja* V *um espaço de Banach. Dizemos que um operador* $A : V \to V^*$ *é coercivo se*

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\langle Au_j, u_j\rangle_{V^*,V}}{||u_j||_V} = +\infty$$

qualquer que seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset V$ *com* $\lim\limits_{j\to+\infty} ||u_j||_V = +\infty$.

4.2 O operador $p(x)$-Laplaciano

Nesta seção, definiremos o operador $p(x)$-Laplaciano e mostraremos algumas propriedades para esse operador, como monotonicidade, coercividade e hemicontinuidade.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e consideremos $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) > 2$ para quase todo $x \in \Omega$. Pelos Teoremas 4.1.9 e 4.1.10 temos que $V \subset H \subset V^*$ com imersões contínuas e densas. Consideremos agora o operador $A : V \to V^*$ dado por

$$A(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u v dx.$$

Lema 4.2.1. *Sejam a e b números reais positivos e $q > 1$. Então $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$.*

Lema 4.2.2. *[16] Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$ uma constante. Vale a desigualdade*

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi - \eta) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p.$$

Lema 4.2.3. *Sejam $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$ e $\widetilde{p}(x) := p(x) - 1$. Se $||u||_V \leq 1$ então*

(i) $\langle Au, u \rangle_{V^*,V} \geq \dfrac{1}{2^{p^+-1}} ||u||_V^{p^+}$;

(ii) $||Au||_{V^*} \leq ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^-} + 1$;

(iii) $||Au||_{V^*} \leq 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-}\right)$.

Lema 4.2.4. *Sejam $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$ e $\widetilde{p}(x) := p(x) - 1$. Se $||u||_V \geq 1$ então*

(i)

$$\langle Au, u \rangle_{V^*,V} \geq \begin{cases} \dfrac{1}{2^{p^- -1}} ||u||_V^{p^-}, & se \ ||u||_{p(x)} \geq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^+}, & se \ ||u||_{p(x)} \leq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^-}, & se \ ||u||_{p(x)} \geq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \leq 1 \end{cases};$$

(ii)

$$||Au||_{V^*} \leq \begin{cases} ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^+} + 1, & se \ ||u||_{p(x)} \geq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^+} + ||u||_{p(x)}^{p^-} + 1, & se \ ||u||_{p(x)} \leq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ ||\nabla u||_{p(x)}^{p^-} + ||u||_{p(x)}^{p^+} + 1, & se \ ||u||_{p(x)} \geq 1 \ e \ ||\nabla u||_{p(x)} \leq 1 \end{cases};$$

(iii)

$$||Au||_{V^*} \leq \begin{cases} 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}\right) & , \; se \;\; ||u||_{p(x)} \geq 1 \;\; e \;\; ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-}\right) & , \; se \;\; ||u||_{p(x)} \leq 1 \;\; e \;\; ||\nabla u||_{p(x)} \geq 1 \\ 2\left(||\nabla u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^-} + ||u||_{p(x)}^{\widetilde{p}^+}\right) & , \; se \;\; ||u||_{p(x)} \geq 1 \;\; e \;\; ||\nabla u||_{p(x)} \leq 1 \end{cases}.$$

□

Definição 4.2.5.

Um operador $A : V \longrightarrow V^*$ *é monótono se, dado* $x_1, x_2 \in D(A)$*, então*

$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$

O operador A é dito ser maximal monótono, se não estiver propriamente contido em qualquer outro operador monótono.

Lema 4.2.6. *O operador* $A : V \to V^*$ *é monótono.*

Demonstração: Sejam $u, v \in V$. Usando o Lema 4.2.2 para cada $x \in \Omega$ fixado obtemos

$$\begin{aligned} & \langle Au - Av, u - v \rangle_{V^*,V} = \langle Au, u - v \rangle_{V^*,V} - \langle Av, u - v \rangle_{V^*,V} \\ = & \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla (u - v) dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u.(u - v) dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v . \nabla (u - v) dx \\ - & \int_\Omega |v|^{p(x)-2} v.(u - v) dx = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v\right) (\nabla u - \nabla v)\, dx \\ + & \int_\Omega \left(|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v\right) (u - v)\, dx \geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx \\ + & \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\right)^{p(x)} |u - v|^{p(x)} dx \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{p^+} \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p(x)} dx + \int_\Omega |u - v|^{p(x)} dx\right) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 4.2.7. *O operador* $A : V \to V^*$ *é coercivo.*

Lema 4.2.8. *O operador* $A : V \to V^*$ *é hemicontínuo.*

Assim, o operador $A : V \to V^*$, $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$ definido por

$$A(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u . \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} u v dx,$$

é monótono, coercivo e hemicontínuo para cada $u, v, \in V$. Portanto, A é maximal monótono (veja [13]). Agora, seja A_H a realização de A em $H = L^2(\Omega)$ dada por

$$\begin{cases} D(A_H) := \{u \in V; A(u) \in H\} \\ A_H(u) = A(u), \quad se \quad u \in D(A_H) \end{cases}.$$

Usualmente, podemos representar $\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx$ por $-\Delta_{p(x)}(u)(v)$. Mostraremos que A_H é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. Considere

$$\varphi_{p(x)}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx \quad , se \quad u \in V \\ +\infty, \quad se \quad u \in H - V \end{cases}.$$

Lema 4.2.9. *A aplicação $\varphi_{p(x)}$ é convexa e própria.*

Demonstração: Seja $u \in V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx\right] < \infty$$

donde $\varphi_{p(x)}$ é própria. Como a aplicação λ^p é convexa para $\lambda > 0$, então, para $u, v \in V$ e $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{p(x)}(tu + (1-t)v) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu + (1-t)v)|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|tu + (1-t)v|^{p(x)}dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|t\nabla u + (1-t)\nabla v|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|tu + (1-t)v|^{p(x)}dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|\nabla u| + (1-t)|\nabla v|\right)^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|u| + (1-t)|v|\right)^{p(x)}dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|\nabla u|^{p(x)} + (1-t)|\nabla v|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(t|u|^{p(x)} + (1-t)|v|^{p(x)}\right)dx \\ &= t\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + t\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx + (1-t)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla v|^{p(x)}dx \\ &+ (1-t)\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|v|^{p(x)}dx = t\varphi_{p(x)}(u) + (1-t)\varphi_{p(x)}(v). \end{aligned}$$

Logo $\varphi_{p(x)}$ é convexa e o lema está provado. □

Lema 4.2.10. *A aplicação $\varphi_{p(x)}$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\varphi_{p(x)}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n)$ se $u_n \to u$ em H. Seja então (u_n) tal sequência. Se $\liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = +\infty$ então

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq +\infty = \liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n).$$

Caso contrário, se $\liminf_{n\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n) = a < +\infty$ então existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subset V$ de (u_n) tal que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_{n_j}|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u_{n_j}|^{p(x)} dx \right) = a.$$

Assim, temos que $\varphi_{p(x)}(u_{n_j})$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|\varphi_{p(x)}(u_{n_j})| \leq M$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando o Teorema 4.1.5 obtemos que

$$||u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} (p^+M)^{\frac{1}{p^-}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ (p^+M)^{\frac{1}{p^+}}, & se \;\; ||u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}$$

e

$$||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \leq \begin{cases} (p^+M)^{\frac{1}{p^-}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} \geq 1 \\ (p^+M)^{\frac{1}{p^+}}, & se \;\; ||\nabla u_{n_j}||_{p(x)} < 1 \end{cases}.$$

Assim podemos concluir que $||u_{n_j}||_V$ é uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo (u_{n_j}) possui uma subsequência (que também iremos denotar por (u_{n_j})) tal que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em V para algum $v \in V$. Como $H^* \subset V^*$ temos que $u_{n_j} \rightharpoonup v$ em H e pela unicidade do limite fraco $u = v \in V$. Considerando agora a subdiferencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$ obtemos,

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) - \varphi_{p(x)}(u),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} + \varphi_{p(x)}(u) \leq \varphi_{p(x)}(u_{n_j}),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em V e $\partial\varphi_{p(x)}(u) \in V^*$ segue que,

$$\langle \partial\varphi_{p(x)}(u), u_{n_j} - u \rangle_{V^*,V} \to 0,$$

quando $j \to +\infty$. Portanto, quando $j \to +\infty$,

$$\varphi_{p(x)}(u) \leq \lim_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_{n_j}) = a = \liminf_{j\to\infty} \varphi_{p(x)}(u_n).$$

$\square$

Teorema 4.2.11. *A_H é a subdiferencial $\partial\varphi_{p(x)}$ de $\varphi_{p(x)}$.*

Demonstração Temos que A_H, que é a realização de A em H é maximal monótono em H. Como $\partial\varphi_{p(x)}$ é monótono em H temos

$$\partial\varphi_{p(x)}(u) \subset A_H(u)$$

qualquer que seja $u \in H$. Assim, basta mostrar que $A_H(u) \subset \partial\varphi_{p(x)}(u)$. Seja então $u \in D(A_H) := \{u \in V; A(u) \in H\}$ e seja $v \in A(u) = A_H(u)$. Então para todo $\xi \in V$ temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} = \langle A_H(u), \xi - u\rangle_{V^*,V} = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.(\nabla\xi - \nabla u)dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u(\xi - u)dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u\xi dx - \int_\Omega |u|^{p(x)}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.\xi dx \\
- &\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \int_\Omega |u|^{p(x)}dx.
\end{aligned}$$

Considerando $q(x)$ de forma que $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla\xi dx \\
+ &\int_\Omega |u|^{p(x)-2}u.\xi dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\xi|dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-1}|\xi|dx \\
\leq &\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{(p(x)-1)q(x)} + \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx \\
= &\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
&\langle v, \xi - u\rangle_{V^*,V} + \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{q(x)}\right)|\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{q(x)}\right)|u|^{p(x)}dx \\
\leq &\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla\xi|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}dx
\end{aligned}$$

e com isso concluímos que

$$\langle v, \xi - u \rangle_{V^*,V} + \varphi_{p(x)}(u) \leq \varphi_{p(x)}(\xi)$$

ou de forma equivalente

$$\langle v, \xi - u \rangle_{V^*,V} \leq \varphi_{p(x)}(\xi) - \varphi_{p(x)}(u)$$

para todo $\xi \in H$. Isso mostra que $A_H(u) = v \in \partial\varphi_{p(x)}(u)$ e o teorema está provado.

$\square$

Pela Proposição 3.3.7 em [14] sabemos que o domínio de A_H é um subconjunto denso de $D(\varphi_{p(x)}) := \{u \in H : \varphi_{p(x)}(u) < \infty\} = V = W^{1,p(x)}(\Omega)$. Como $V \subset H$ e as imersões são contínuas e compactas, temos que $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset \overline{D(A_H)}^H$ para todo $p(x)$ tal que $p(x) > 2$ e $p(x)$ contínua em $\overline{\Omega}$. Consequentemente, obtemos que $\overline{D(A_H)}^H = H$ para todo $p(x)$ tal que $p(x) > 2$ e $p \in C(\overline{\Omega})$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Brondsted, R. T. Rockafellar, 'On the subdifferentiability of convex functions', Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965) 605-11.

[2] D. Edmunds, J. Rakosnik, Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Math., n.143, p.267-293, 2000.

[3] E. L. Lima - Análise Real, vol. 1: Funções de uma Variável, SBM,. Rio de Janeiro, 2001.

[4] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle. 2.ed. Paris: masson, 1983. 233p.

[5] H. Brézis; Operateurs Maximaux Monotone, Et Semi-groupes de Contractions Dans Les Espaces de Hilbert. Editora N.H., Paris, 1978, 183 p..

[6] H. Hudzik, On generalized Orlicz-Sobolev space, Funct. Approx., n.4, p.37-51, 1977.

[7] H. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, Lecture Notes in Mathematics, v.1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] J. Simsen, M.S. Simsen, F.B. Rocha, Existence of solutions for some classes of parabolic problems involving variable exponents, Nonlinear Studies 21(1)(2014) 113-128.

[9] L. B. Machado, Análise Funcional e Aplicações. Dissertação - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo, P. 204. 2012.

[10] L. Diening, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

[11] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, V. Komornik, Introdução à análise funcional. Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2011. 481 p.

[12] M. Sanchon, J.M. Urbano, Entropy solutions for the $p(x)$-Laplace equation, Trans. Amer. Soc., n.361, p.6387-6405, 2009.

[13] V. Barbu, Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces, New York: Springer, 2010.

[14] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space, Noordhoff International, 1976.

[15] X.L. Fan, D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal.Appl, n.263, p.424-446, 2001.

[16] X.L. Fan, Q.H. Zhang, Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems, Nonlinear Anal. n.52, p.1843-1852, 2003.

[17] X.L.Fan, Y. Zhao, D.Zhao, Compact imbedding theorems with symmetry os Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl., n.255, p.333-348, 2001.