Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Blow-up e Extinção em Tempo Finito para Soluções de uma Classe de Sistemas Rotacionais.

Luis Filipe Mendes

Orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Mariza Stefanello Simsen.

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 8 de julho de 2019

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Blow-up e Extinção em Tempo Finito para Soluções de uma Classe de Sistemas Rotacionais.

Luis Filipe Mendes

Orientador: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Mariza Stefanello Simsen.

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
8 de julho de 2019

Dedico à Deus, autor da minha existência, à minha família pelo apoio dado acreditando e investindo em mim e à minha namorada, Elisa que sempre me encorajou.

Agradecimentos

Esta dissertação de mestrado não aconteceria sem alguns preciosos apoios.

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem Ele nada seria possível e à Nossa Senhora que a todo momento intercedeu por mim. Aos meus pais, Luis Carlos e Eliane, por me ensinarem a caminhar sendo em tudo exemplo e a base dessa vitória que é tão deles quanto minha. À minha irmã Thais, que sempre me incentivou a seguir esse sonho que se realiza. À minha namorada Elisa, por todas as palavras de ânimo e incentivo, me acalmando nos momentos turbulentos e desesperadores os quais seriam muito mais difíceis sem sua presença e aos meus familiares que deram-me apoio, de forma particular aos meus avôs.

Desejo igualmente agradecer minha orientadora, Professora Mariza Stefanello Simsen pela paciência e empenho que sempre me orientou neste trabalho e nos seminários. Obrigado pelas correções fraternas necessárias, porém, sem nunca desmotivar, pela excelência em profissionalismo que levo como exemplo para minha vida onde quer que eu vá.

Agradeço também aos professores que passaram pela minha formação, os quais muitos se tornaram amigos e tiveram importante participação na conclusão desse mestrado: Anderson, Ângela, Franco e José Paulo ao qual tenho imensa admiração. Não poderia deixar de agradecer às amizades que estiveram presente ao longo da trajetória, seja direta ou indiretamente: Michele, Bruna, Paulo, Daiane e Thiago.

Por fim, mas não menos significante, aos professores Lucas e José Paulo pela disposição em compor a banca examinadora e às agências de fomento FAPEMIG e CAPES pelo financiamento.

"A vida pode te derrubar,

mas você decide se vai

ou não levantar.

(Karatê Kid)"

Resumo

Neste trabalho estudaremos as soluções do sistema

$$
\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{h} + \nabla \times \left(|\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times h \right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{h} &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,T) \\
|\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma \times (0,T) \\
\boldsymbol{h}(\cdot, 0) &= \boldsymbol{h}_0 \ \text{ em } \Omega,
\end{aligned}
$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado simplesmente conexo, $\nabla \times \boldsymbol{h}$ denota o rotacional do vetor funcional $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \lambda \boldsymbol{h} \left(\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ com $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Quando $\lambda \in \{-1, 0\}$ consideramos $0 < \sigma \leq 2$ e para $\lambda = 1$ tomamos $\sigma \geq 1$. No caso $\lambda \in \{-1, 0\}$ estudamos a extinção em tempo finito das soluções e no caso $\lambda = 1$ o comportamento blow-up das soluções.

Palavras–chave: Blow-up, Sistemas rotacionais, Extinção em tempo finito.

Abstract

In this work we will study the system solutions

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \boldsymbol{h} + \nabla \times \left(|\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h} \right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{h} & = & 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ |\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} & = & 0 \quad \text{in } \Gamma \times (0,T) \\ \boldsymbol{h}(\cdot, 0) & = & \boldsymbol{h}_0 \ \text{ in } \Omega, \end{array}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a simply connected domain, $\nabla \times \boldsymbol{h}$ denotes the rotational of a vector function $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$ and $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \lambda \boldsymbol{h} \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ with $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. When $\lambda \in \{-1, 0\}$ will study $0 < \sigma \leq 2$ and for $\lambda = 1$ we take $\sigma \geq 1$. In case $\lambda \in \{-1, 0\}$ we studied the finite-time extinction of solutions and in the case $\lambda = 1$ the blow-up behavior of solutions.

Keywords: Blow-up, Rotational Systems, Finite Time Extinction.

Sumário

Agradecimentos **ii**

Resumo **iv**

Abstract **v**

Índice **vi**

Sumário **vi**

Introdução 1

1 Pré-requisitos **3**

1.1 O Espaço de Lebesgue $L^{P(\cdot)}(\Omega)$ e o espaço de Sobolev $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ 3

1.2 Conceitos de Distribuição 6

1.3 Mollifiers e Aproximação por Funções Suaves 7

1.4 Mais propriedades dos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ 8

1.5 Resultados e Desigualdades 10

2 Estrutura Funcional e Variáveis Espaciais **13**

2.1 O espaço $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 13

2.2 Uma base para $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 15

2.3 Uma Formulação Fraca Para o Problema 17

3 O caso $\lambda \in \{-1, 0\}$ e $0 < \sigma \leq 2$ **20**

3.1 Existência de Solução 20

3.2 Extinção em tempo finito e comportamento assintótico 40

4 O caso $\lambda = 1$ e $\sigma \geq 1$ **52**

4.1 Existência de Solução. 52

4.2 Blow-up 59

Bibliografia **64**

Referências Bibliográficas **64**

INTRODUÇÃO

Dentro da Matemática Aplicada, as equações diferencias têm tido um importante papel, vinculando-se com outras ciências e descrevendo desde fenômenos ligados à Física a fenômenos biológicos e epidemiológicos. O que se descobriu recentemente e desde então teve um significativo crescimento cientifico, é que o estudo de equações diferencias parciais ou sistemas com expoente variável nos dá uma descrição de comportamento mais precisa de certos fenômenos e comportamento de materiais. Neste trabalho faremos um estudo aprofundado do artigo **[1]** que trata exatamente deste tipo de equação com o operador $p(\cdot, t)$-rotacional, introduzindo a partir de agora alguns conceitos básicos. Ao longo do trabalho as funções e espaços vetoriais serão representados em negrito.

A **divergência** de um vetor funcional $\boldsymbol{h} = (h_1, h_1, h_3)$ é denotada por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \partial_{x_1} h_1 + \partial_{x_2} h_2 + \partial_{x_3} h_3$$

e o **rotacional** de $\boldsymbol{h}$ por

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = (\partial_{x_2} h_3 - \partial_{x_3} h_2, \partial_{x_3} h_1 - \partial_{x_1} h_3, \partial_{x_1} h_2 + \partial_{x_2} h_1).$$

Recordamos as seguintes identidades:

$$-\Delta \boldsymbol{h} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}) - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}),$$

onde $\Delta \boldsymbol{h} = (\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3)$ e $\Delta h_i = \nabla \cdot (\nabla h_i)$, i=1,2,3.

Vamos mostrar a existência de solução do seguinte sistema chamado Laplaciano de h_i, analisar sua extinção em tempo finito e sua explosão dependendo dos parâmetros λ e σ

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{h} + \nabla \times \big(|\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{h} &= 0 \quad \text{em } Q_T && \text{(1a)}\\
|\nabla \times \boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{h} \cdot n &= 0 \quad \text{em } \Sigma_T && \text{(1b)}\\
\boldsymbol{h}(\cdot, 0) &= \boldsymbol{h}_0 \ \text{ em } \Omega, && \text{(1c)}
\end{aligned}$$

onde Ω é um domínio limitado simplesmente conexo em $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}^{1,1}$ é uma fronteira suave representada por Γ, $T \in \mathbb{R}^+$, $\quad Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$.

Além disso, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \lambda \boldsymbol{h}\Big(\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ com $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ e σ é uma constante positiva. A existência de solução $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}(Q_T) \cap \mathcal{H}^1(0, T : \boldsymbol{L}^2(\Omega))$ para o problema citado acima será provada usando o método de Galerkin, onde o espaço funcional

$$\boldsymbol{X}(Q_T) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(Q_T) : \nabla \times \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T), \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma}\}$$

é a estrutura adequada para se resolver fracamente o sistema.

No primeiro capítulo foi feita uma revisão de alguns resultados essenciais para o desenvolvimento do trabalho. O segundo capítulo é voltado para caracterização de um espaço vetorial e de uma base topológica apropriados para o espaço de soluções $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ e a apresentação de uma estrutura funcional na qual foi possível reformular o problema acima para um outro equivalente. No capítulo três inicialmente mostrou-se a existência global de solução para este problema reformulado onde $\lambda \in \{-1, 0\}$ e $0 < \sigma \leq 2$ que resulta na extinção da função a partir de um certo tempo t_0 isto é, a partir do tempo t_0 a solução se anula. No último capítulo também mostramos a existência de solução do problema equivalente com $\lambda = 1$ e $\sigma \geq 1$, entretanto com essa variação dos parâmetros temos que as soluções locais explodem num intervalo de tempo $(0, t_{max})$.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos e resultados de Análise que serão usados ao longo do trabalho. A menos de menção contrária os resultados aqui enunciados se encontram demonstrados na Dissertação de Cícero, J, G. **[2]**, sendo devidamente referenciados quando fora desse padrão.

1.1 O Espaço de Lebesgue $L^{P(\cdot)}(\Omega)$ e o espaço de Sobolev $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Considere o conjunto*

$$L^{\infty}_{+}(\Omega) = \{p \in L^{\infty}(\Omega) : inf\ ess\ p \geq 1\}.$$

Definição 1.2. *Seja $p \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$. Definimos o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ por*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e} \int_{\Omega} |u(x)|^{p(\cdot)} dx < \infty\}.$$

Denotamos

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(\cdot)} dx, \ \ p^{-} = inf\ ess\ p \ \text{ e } \ p^{+} = sup\ ess\ p.$$

*$\rho(u)$ é dita **Função Modular**.*

Proposição 1.1. *Para todos* $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, *tem-se*

(a) $\rho(u) = 0$ *se e, somente se,* $u = 0$;

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$;

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$, *i.e,* ρ *é função convexa;*

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}[\rho(u) + \rho(v)]$;

(e) Se $\lambda > 1$, *então*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u)$$

e se $0 < \lambda < 1$, *temos as desigualdades invertidas;*

(f) Para cada $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\backslash\{0\}$, $\rho(\lambda u)$ *é uma função crescente, contínua e convexa em* $\lambda \in [0, \infty)$.

Proposição 1.2. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *é um espaço vetorial.*

Proposição 1.3. $||u||_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho\Big(\dfrac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\}$ *é norma em* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Proposição 1.4. *Seja* $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Então,*

1. $||u||_{p(\cdot)} < 1 (= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1(= 1; > 1)$;

2. *Se* $||u||_{p(\cdot)} > 1$, *então* $||u||_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(\cdot)}^{p^+}$;

3. *Se* $||u||_{p(\cdot)} < 1$, *então* $||u||_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq ||u||_{p(\cdot)}^{p^-}$.

Teorema 1.1. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *é espaço de Banach.*

Teorema 1.2. *Seja* $p^- > 1$ *e seja* $q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Então, dado $f \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))^*$ *existe um único* $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ *tal que*

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \text{ para todo } u \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Definição 1.3. *Seja $f(x)$ uma função com domínio em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ então o* ***suporte de*** *$f(x)$ aqui denotado por supp f é dado por:*

$$supp\ f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Denotando por $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, o conjunto de todas as funções definidas em Ω com derivadas parciais contínuas até ordem k, seja $C_0^k(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $\varphi \in C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

Teorema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então, os espaços $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são densos em $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. E além disso o espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ é separável.*

Teorema 1.4. *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e sejam $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$. Então*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

se, e somente se, $q(x) \leq p(x)$ q.t.p. x em Ω. E neste caso a imersão é contínua, isto é existe $C > 0$ tal que,

$$||u||_{q(\cdot)} \leq C||u||_{p(\cdot)} \text{ para todo } u \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Definição 1.4. *Chamamos de Espaço de Sobolev e representamos por $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ o seguinte espaço*

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(\cdot)}(\Omega), j = 1, ..., N \right\}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ a j-ésima derivada fraca de u. Também em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ podemos definir a seguinte norma,

$$||u||_* = ||u||_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{p(\cdot)}$$

Observe que podemos escrever o espaço $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}, \tag{1.1}$$

usando convenientemente a seguinte norma equivalente:

$$||u|| = ||u||_{p(\cdot)} + ||\nabla u||_{p(\cdot)}.$$

Teorema 1.5. *$W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço de Banach. É também separável e reflexivo se $p^- > 1$.*

Definição 1.5. *Definimos o espaço $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.*

Teorema 1.6. *$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Teorema 1.7. *Sejam $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ tais que $q(x) < p(x)$, q.t.p. em Ω. Então*

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,q(\cdot)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Teorema 1.8. *Se $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são tais que,*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega),$$

com imersão contínua e compacta, onde:

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

1.2 Conceitos de Distribuição

Esta seção, na qual introduziremos os conceitos de Distribuição, é baseada em **[3]**.

Claramente $C_0^\infty(\Omega)$ é espaço linear, podemos assim introduzir em $C_0^\infty(\Omega)$ uma convergência como na definição que segue

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência* $\{\varphi_i\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *converge para* φ, *se*

i) *existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que supp* $\varphi_i \subset K$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim\limits_{i\to\infty} D^\alpha \boldsymbol{\varphi_i} = D^\alpha \varphi$ *uniformemente em* K, *para todo* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, *onde* $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}, ..., D_{x_N}^{\alpha_N}$, $D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., N$.

Quando um conjunto no espaço $C_0^\infty(\Omega)$ *satisfaz estas condições o denotamos por* $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.7. *Um funcional linear contínuo* h *definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é chamado uma distribuição em* Ω.

1.3 Mollifiers e Aproximação por Funções Suaves

Esta seção tem o intuito de esclarecer a definição e algumas propriedades de Mollifiers e é baseada em **[4]**.

Definição 1.8. *Seja* J *uma função de valor real, não negativa, pertencente a* $C_0^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, *com as seguintes propriedades:*

i) $J(x) = 0$, *se* $|x| \geq 1$;

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} J(x)dx = 1.$

Se $\varepsilon > 0$, a função $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ é chamada mollifier, e a convolução

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

definida para funções u para as quais o lado direito da equação faz sentido, é chamado molificação ou regularização para u.

Por exemplo, vamos tomar

$$J(x) = \begin{cases} k \quad exp\left[\dfrac{-1}{1-|x|^2}\right], & \text{se} \quad |x| < 1, \\ \qquad 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $k > 0$ é escolhido de modo que $ii)$ seja satisfeita.

Valem as seguintes propriedades:

Lema 1.1. *Seja u uma função definida em $\mathbb{R}^N$ e identicamente nula fora do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*

a) *Se $u \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, então $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega)$;*

b) *Se $\overline{supp\ u} \subset \Omega$, $\overline{supp\ u}$ é compacto e $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, então $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, desde que $\varepsilon <$ dist(supp $u, \partial\Omega$), sendo $\partial\Omega$ a fronteira de Ω;*

c) *Se $u \in L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$, então $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$. Além disso,*

$$||J_\varepsilon * u||_p \leq ||u||_p \ \ e \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} ||J_\varepsilon * u - u||_p = 0;$$

d) Se $u \in C(\Omega), \overline{G} \subset \Omega$ e $\overline{G}$ é compacto, então $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente em G;

e) Se $u \in C(\overline{\Omega})$, então $\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ uniformemente em G.

1.4 Mais propriedades dos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

A partir de agora vamos assumir que

$$p^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x) \ \ e \ \ p^+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} p(x), \quad 1 < p^- < p(x) < p^+ < \infty, \tag{1.2}$$

e que equivalentemente ao definido anteriormente

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u|^{p(\cdot)} \in L^1(\Omega)\},$$

equipado com a norma

$$||u||_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = ||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Considere ainda,

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) : u_{|\Gamma} = 0\}$$

com a norma

$$||u||_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Vamos agora apresentar algumas propriedades básicas dos espaços $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ que usaremos ao longo do trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas na Dissertação de Cicero **[2]**.

Teorema 1.9. *Considere a norma do espaço $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ então para todo $f \in L^{p(\cdot)}$*

$$\min\left(||f||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||f||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\right) \leq \rho(f) \leq \max\left(||f||^{p-}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||f||^{p+}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\right). \tag{1.4}$$

Teorema 1.10. *Para todo $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega), g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ com*

$$p(x) \in (1, \infty), \quad q(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1},$$

as seguintes desigualdades são válidas.

$$\Big|\int_\Omega fg\Big| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right)||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}||g||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq 2||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}||g||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}.$$

Para os próximos dois resultados considere $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, \infty)$ uma função contínua, usaremos a notação $p \in \mathcal{C}_{log}(\overline{\Omega})$ se p satisfaz,

$$\forall \;\; \xi_1, \xi_2 \in \overline{\Omega}, |\xi_1 - \xi_2| < 1, |p(\xi_1) - p(\xi_2)| \leq \omega(|\xi_1 - \xi_2|), \limsup_{\tau \to 0^+} \omega(\tau) \log\frac{1}{\tau} = C \tag{1.5}$$

Teorema 1.11. *Se p satisfaz (1.5) vale que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, e este último espaço pode ser definido como o complemento de $\mathcal{D}(\Omega)$, com respeito à norma (1.3).*

A densidade de funções suaves no espaço $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é crucial para compreensão destes espaços. A condição de log continuidade de $p(\cdot)$ é a mais conhecida e mais usada para densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Tal condição não é necessária e pode ser substituída por outras condições (encontradas em **[5]**), mas a manteremos a fim de simplificar o texto.

Teorema 1.12. *Sabido que $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega)$, a Desigualdade de Sobolev*

$$||f||_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq C||f||_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$$

é válida com, $1 \leq q \leq \dfrac{3p^-}{3-p^-}$ se $p^- < 3$, qualquer se $p^- = 3$ e $q = \infty$ se $p^- > 3$. Onde $C = C(p^-, \Omega)$ é uma constante positiva.

1.5 Resultados e Desigualdades

O próximo teorema pode ser encontrado em **[[6] Proposição 3.5]**

Definição 1.9. *Seja $\big(\mathcal{B}, ||\cdot||_{\mathcal{B}}\big)$ um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{B}$. Então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente se, e somente se $f(x_n)$ converge para $f(x)$ para toda $f \in \mathcal{B}^* = \{f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} : f$ é contínua $\}$.*

Teorema 1.13. *Seja $\big(\mathcal{B}, ||\cdot||_{\mathcal{B}}\big)$ um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{B}$. Então*

i) se $x_n \to x$ em $\mathcal{B}$, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\mathcal{B}$;

ii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente, então $||x_n||$ é limitada e $||x|| \leq \liminf ||x_n||$;

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente e se $f_n \to f$ em $\mathcal{B}^*$ então $f_n(x_n) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$.

O próximo corolário pode ser encontrado em **[[6] Corolário 3.30]**

Teorema 1.14. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach separável. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{B}^*$ então existe $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ fracamente.*

O próximo resultado pode ser encontrado na dissertação de Cícero, J, G. **[[2] Apêndice A]**.

Teorema 1.15. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então*

$$\big\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \big\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & p \geq 2 \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{\big(|x|^p + |y|^p\big)^{2-p}}, & 1 < p < 2. \end{cases}$$

Este resultado pode ser encontrado no Teorema 8.5.2 de **[7]**.

Lema 1.2. *Seja Ω um conjunto lipschitz e suponha que $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Se $u \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$, então existe uma extensão a uma função em $W^{k,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

O próximo corolário pode ser encontrado em **[[8] Corolário 3.8]**.

Corolário 1.1. ***(Desigualdade de Young com ε)*** *Sejam a, b números reais não negativos e p, q como na proposição anterior. Então,*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

em que $\varepsilon > 0$ e $C(\varepsilon)$ é uma constante real positiva que depende de ε.

O próximo resultado pode ser encontrado em **[9]**.

Teorema 1.16. ***(Desigualdade de Sobolev)*** *Sejam $p \geq 1$, onde p é finito, e $q = \dfrac{np}{n-p}$. Então,*

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & p(x) < N \\ C^0(\overline{\Omega}), & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Isto é, se $p > n$, toda $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ tem uma (única) representante contínua em $\overline{\Omega}$.

Ainda, existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que para toda $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ temos

$$\begin{cases} ||u||_q \leq C||\nabla u||_p, & p(x) < N \\ \sup\limits_{\Omega} |u| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}}||\nabla u||_p, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Em particular, a única função constante em $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ é a função nula.

Teorema 1.17. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja* $p \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $p^- > 1$. *Então, existe* $C > 0$ *tal que*

$$||u||_{p(\cdot)} \leq C||\nabla u||_{p(\cdot)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

O próximo teorema pode ser encontrado **[[10] Teorema 5]**

Teorema 1.18. *Sejam* $X \subset B \subset Y$ *espaços de Banach,* F *de* X *wm* B *uma imersão compacta e* $1 \leq p \leq \infty$. *Se*

i) F *é subconjunto limitado de* $L^p(0, T; X)$;

ii) Se $||f(t+h) - f(t)||_{L^p(0,T-h;Y)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ *uniformemente sempre que* $f \in F$.

Então F *é relativamente compacta em* $L^p(0, T; B)$ *e em* $\big(\mathcal{C}(0, T; B)\big)$ *se* $p = \infty$.

Capítulo 2

Estrutura Funcional e Variáveis Espaciais

Neste capítulo iremos caracterizar o espaço de funções vetoriais livre de divergência em $\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ com rotacional em $\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ e traço nulo normal. Também faremos a construção de uma base topológica adequada para esse espaço, que será denotado por $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$.

2.1 O espaço $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado simplesmente conexo, $\Gamma = \partial\Omega$ uma fronteira suave, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$ com $T \in \mathbb{R}^+$. Seja ainda $\boldsymbol{h} = (h_1, h_1, h_3)$ um vetor funcional, então a **divergência de $\boldsymbol{h}$** é

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \partial_{x_1} h_1 + \partial_{x_2} h_2 + \partial_{x_3} h_3$$

e o **rotacional**

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = (\partial_{x_2} h_3 - \partial_{x_3} h_2, \partial_{x_3} h_1 - \partial_{x_1} h_3, \partial_{x_1} h_2 - \partial_{x_2} h_1).$$

Definimos

$$\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega) : \nabla \times \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega), \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0\}$$

equipado a norma:

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)} = ||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} + ||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

Teorema 2.1. *Assuma que $1 < p^- < p(\cdot) \leq p^+ < \infty$ e que p satisfaça (1.5). Então $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}_{n_0}(\Omega)$ onde,*

$$\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}_{n_0}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega) : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0\}.$$

Além disso, se $p^- > \dfrac{6}{5}$, então $||\nabla \times \cdot||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)}$ é uma norma em $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ equivalente à norma induzida por $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Em particular

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

com $C = C(p^-, p^+, \Omega)$.

A prova deste teorema é apresentada no artigo **[1]**. A demonstração emprega técnicas e resultados avançados da teoria de Equações Diferenciais Parciais como os utilizados em **[9]** e **[11]**.

Observação 2.1. *Seja p satisfazendo (1.5) com $p^- > \dfrac{6}{5}$, pelos Teoremas (1.12) e (2.1) segue que,*

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{2.1}$$

desde que $1 \leq q < \dfrac{3p^-}{3-p^-}$, qualquer se $p^- = 3$ se $p^- < 3$ e $q = \infty$ se $p^- > 3$, onde $C = C(p^-, p^+, \Omega)$.

2.2 Uma base para $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$

Nesta seção mostraremos que $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ tem uma base topológica contável. Isso é importante para podermos definir uma família de problemas aproximados em subespaços de dimensão finita.

Proposição 2.1. *Existe uma base topológica contável* $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_n$ *de* $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\psi}_n \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$, *onde*

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^{\mathbf{1}}(\overline{\boldsymbol{\Omega}}) : \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0\}$$

Prova: Note que toda função $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ pertence a $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Assim, pelo Lema (1.2) existe uma extensão ainda denotada por $\boldsymbol{u}$, pertencendo à $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ um mollifier, defina

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{u} * \rho_\varepsilon = (u_1 * \rho_\varepsilon, u_2 * \rho_\varepsilon, u_3 * \rho_\varepsilon).$$

Sabemos que $\boldsymbol{u}_\varepsilon \longrightarrow \boldsymbol{u}$ em $\boldsymbol{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}(\cdot)}(\boldsymbol{\Omega})$ quando $\varepsilon \to 0$ e $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Seja v_ε uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon = -\nabla \cdot \boldsymbol{u}_\varepsilon & \text{em} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} & \text{em} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Pela suavidade de $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ temos que $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_\varepsilon \in \boldsymbol{W}^{2,q(\cdot)}(\Omega)$ e consequentemente $v_\varepsilon \in \boldsymbol{W}^{2,q(\cdot)}(\Omega)$ para $1 < q < \infty$. Em particular, $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Defina $\boldsymbol{z}_\varepsilon = \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon$ e observe que $\nabla \cdot \boldsymbol{z}_\varepsilon = 0$, $\nabla \times \boldsymbol{z}_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{C}}(\overline{\Omega}) \subset \boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ e $\boldsymbol{z}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0$

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{z}_\varepsilon &= \nabla \cdot \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nabla \cdot (\nabla v_\varepsilon) \\
&= \Delta v_\varepsilon - \nabla \cdot (\nabla v_\varepsilon) \\
&= \nabla \cdot (\nabla v_\varepsilon) - \nabla \cdot (\nabla v_\varepsilon) \\
&= 0 \qquad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Como $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ segue que, $\nabla \times \boldsymbol{z}_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{C}}(\overline{\Omega})$.

Do cálculo vetorial temos que $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla v \cdot \boldsymbol{n}$ onde $\boldsymbol{n}$ é vetor normal, assim

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} &= \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} - \nabla v_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} \\
&= \left.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Gamma - \nabla v_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\boldsymbol{z}_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ pela definição dos conjuntos.

Agora pelo Teorema 2.1 temos que,

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)} &= ||\nabla \times (\boldsymbol{z}_\varepsilon - \boldsymbol{u})||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \\
&= ||\nabla \times \boldsymbol{z}_\varepsilon - \nabla \times \boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \\
&= ||\nabla \times (\boldsymbol{u}_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon) - \nabla \times \boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \\
&= ||\nabla \times \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nabla \times \nabla v_\varepsilon - \nabla \times \boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \\
&= ||\nabla \times \boldsymbol{u}_\varepsilon - \nabla \times \boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ é um espaço separável, admite uma base topológica contável digamos $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_n$. Note que, como $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ é espaço de funções, $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_n$ é sequência de funções em $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$, assim dados $n, m \in \mathbb{N}$ construímos funções $\boldsymbol{z}_{n,m}$ como acima com $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$, tal que $\boldsymbol{z}_{n,m} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ e

$$||\boldsymbol{z}_{n,m} - \boldsymbol{\varphi}_n||_{\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \frac{1}{m}.$$

Isso implica que $\{\boldsymbol{z}_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto contável de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ tal que,

$$\Big\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\mu_{i,j}\boldsymbol{z}_{i,j} : k,l\in\mathbb{N}, \mu_{i,j}\in\mathbb{R} \;\; \text{para} \;\; i=1,...,k \;\; \text{e} \;\; j=1,...,l\Big\}$$

é denso em $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Em virtude disso podemos extrair de $\{\boldsymbol{z}_{n,m}\}_{n,m}$ uma base vetorial topológica contável de $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$. ■

2.3 Uma Formulação Fraca Para o Problema

Nesta seção apresentaremos uma formulação fraca do problema

$$\partial_t\boldsymbol{h} + \nabla\times\big(|\nabla\times\boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}), \quad \nabla\cdot\boldsymbol{h} = 0 \quad \text{em } Q_T \tag{2.2a}$$

$$|\nabla\times\boldsymbol{h}|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{em } \Sigma_T \tag{2.2b}$$

$$\boldsymbol{h}(\cdot,0) = \boldsymbol{h}_0 \;\; \text{em } \Omega, \tag{2.2c}$$

surgido em uma aplicação de eletromagnetismo com uma função $\boldsymbol{f}$ não linear, problema esse que desejamos demonstrar a existência de solução através do método de Galerkin o qual consiste na busca de aproximações $\boldsymbol{h}_m = \sum_{i=1}^{m}\delta_i^n(t)\psi_i$ que são projeções ortogonais da solução desejada em um subespaço de dimensão finita. Denotaremos o campo magnético poro $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{f} = \lambda\boldsymbol{h}\bigg(\displaystyle\int_\Omega|\boldsymbol{h}|^2\bigg)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ com $\lambda\in\{-1,0,1\}$, quando $\lambda\in\{-1,0\}$ consideramos $0<\sigma\leq 2$ e para $\lambda=1$ tomamos $\sigma\geq 1$.

Seja $p:\overline{Q}_T\to(1,\infty)$ uma função. Diremos que $p\in\mathcal{C}_{\log}(\overline{Q}_T)$ se p satisfaz a condição de log-continuidade no cilindro $\overline{Q}_T$, isto é, se existe uma função ω tal que

$$\begin{gathered}\forall\zeta_1,\zeta_2\in\overline{Q}_T, \zeta_1=(x,t), \zeta_2=(y,\tau), |\zeta_1-\zeta_2|^2 = |x-y|^2+(t-\tau)^2<1,\\ |p(\zeta_1)-p(\zeta_2)|\leq\omega(|\zeta_1-\zeta_2|), \quad \limsup_{s\to0^+}\omega(s)\log\frac{1}{s} = C\end{gathered} \tag{2.3}$$

No que segue usaremos a seguinte notação

$$p^- = \min_{\zeta \in \overline{Q}_T} p(\zeta) \qquad \text{e} \qquad p^+ = \max_{\zeta \in \overline{Q}_T} p(\zeta).$$

Seja

$$\boldsymbol{X}(Q_T) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(Q_T) : \nabla \times \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T), \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{|\Gamma} = 0\}$$

equipado com a norma

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{X}(Q_T)} = ||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)} + ||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T)}.$$

Observação 2.2. *Lembremos que pelo Teorema 2.1, se* $p^- > \dfrac{6}{5}$ *dado* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}(Q_T)$*, para q.t.p.* $t \in (0,T)$ *temos*

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)}$$

que implica em

$$||\nabla \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)},$$

assim pelo Teorema 1.9

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}(\cdot,t)|^{p(\cdot,t)} \leq C_1 \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{v}(\cdot,t)|^{p(\cdot,t)}$$

em que, denotando $p^-(t) = \inf_{x\in\Omega} p(x,t)$ *e* $p^+(t) = \sup_{x\in\Omega} p(x,t)$*,* C_1 *é uma constante positiva dependente apenas de* $p^-(t)$*,* $p^+(t)$ *e* Ω*. Como* $p^- \leq p^-(t) \leq p(x,t) \leq p^+(t) \leq p^+$ *a constante* C_1 *independe de* t*.*

Proposição 2.2. *Seja* $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_n$ *uma base de* $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ *definida como na Proposição (2.1). Então o conjunto*

$$\boldsymbol{V} = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \zeta_k(t)\psi_k(x) : \zeta_k \in \mathcal{C}^1([0,T]), m \in \mathbb{N} \Big\}$$

é denso em $\boldsymbol{X}(Q_T)$*.*

Prova: Sabemos que o conjunto

$$\boldsymbol{Z} = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \mu_k \psi_k : \mu_k \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \Big\}$$

é denso em $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ pela construção feita na Proposição 2.1.

Por outro lado, o conjunto

$$\boldsymbol{Y}(Q_T) = \Big\{ \alpha(t)\psi(x) : \alpha \in \mathcal{C}^1([0,T]), \psi \in \boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega) \Big\} \tag{2.4}$$

é denso em $L^q(0,T;\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega))$, para cada $1 < q < \infty$.

Como por definição $\boldsymbol{X}(Q_T) \subset L^{\min\{2,p^-\}}(0,T;\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega))$ o resultado segue. ■

Definição 2.1. *Definimos o espaço das funções*

$$\mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)) = \{\boldsymbol{h} \in \mathcal{C}\big([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)\big) : \boldsymbol{h}' \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)\}.$$

Munidos da base e das informações que extraímos anteriormente sobre ela, vamos apresentar uma formulação fraca do Problema (2.2), ou seja: encontrar $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}(Q_T) \cap \mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ que satisfaça para q.t.p. $t \in (0,T)$ a seguinte equação para todo $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}(t) \cdot \boldsymbol{\psi} + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}(t) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}(t)) \cdot \boldsymbol{\psi}, \tag{2.5a}$$

$$\boldsymbol{h}(\cdot,0) = \boldsymbol{h}_0 \tag{2.5b}$$

Observe que, para $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}(Q_T) \cap \mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ temos que $\boldsymbol{h} \in \mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ e que $\boldsymbol{h}(\cdot,0)$ tem sentido.

Capítulo 3

O caso $\lambda \in \{-1, 0\}$ e $0 < \sigma \leq 2$

Neste capítulo vamos provar a existência de soluções globais e a extinção em tempo finito das soluções do problema (2.5) com $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \lambda \boldsymbol{h}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2\right)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ para $\lambda \in \{-1, 0\}$ e $0 < \sigma \leq 2$.

3.1 Existência de Solução

Seja $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_n$ uma base de $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ definida como na Proposição 2.1, assuma que

$$\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p(\cdot,0)}(\Omega) \tag{3.1}$$

e seja $\boldsymbol{h}_{m0}$ uma aproximação em $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot,0)}(\Omega)$ de $\boldsymbol{h}_0$ tal que, $\boldsymbol{h}_{m0} \in \langle \boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_m \rangle$, onde $\langle \boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_m \rangle$ denota o subespaço gerado por $\{\boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_m\}$.

Considere a família de problemas aproximados em dimensão finita, vamos encontrar

$$\boldsymbol{h}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i^m(t) \boldsymbol{\psi}_i$$

satisfazendo o seguinte sistema de EDO's nas icógnitas $\zeta_1, ..., \zeta_m$

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)\cdot \boldsymbol{\psi}_i + \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi}_i \tag{3.2a}$$
$$-\lambda\int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\boldsymbol{\psi}_i\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0,$$
$$\boldsymbol{h}_m(\cdot,0) = \boldsymbol{h}_{m_0}. \tag{3.2b}$$

Da teoria de equações diferenciais esse sistema tem uma solução $(\zeta_1^m, ..., \zeta_m^m) \in \mathcal{C}^1\big([0,T]\big)^m$ e além disso é equivalente a

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)\cdot \boldsymbol{\psi} + \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi} \tag{3.3a}$$
$$-\lambda\int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\boldsymbol{\psi}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{\psi}\in\langle\boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_m\rangle$$
$$\boldsymbol{h}_m(\cdot,0) = \boldsymbol{h}_{m_0} \tag{3.3b}$$

Proposição 3.1. *Assuma que $1 < p^- \leq p(\cdot,\cdot) \leq p^+ < \infty$, p e $\boldsymbol{h}_0$ satisfazendo (2.3) e (3.1) respectivamente. Seja $\boldsymbol{h}_m$ uma solução do problema (3.3). Então existe uma constante positiva, independente de m, tal que,*

$$||\boldsymbol{h}_m||_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leq C, \quad ||\nabla\times\boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T)} \leq C \tag{3.4}$$

Prova: Note primeiramente que se $\partial_t \boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_t\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}dx &= \langle\partial_t\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\\
&= \frac{1}{2}\big(\langle\partial_t\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \langle\partial_t\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\langle\partial_t\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \langle\boldsymbol{h},\partial_t\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\partial_t\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\big)\\
&= \frac{1}{2}\partial_t||\boldsymbol{h}||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Uma vez que $\boldsymbol{h}_m(t) \in \langle \boldsymbol{\psi}_1, ..., \boldsymbol{\psi}_m \rangle$, podemos usá-la como função teste em (3.3) obtendo

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \boldsymbol{h}_m(t) dx + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) dx$$
$$-\lambda \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \boldsymbol{h}_m(t) dx \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 dx \bigg)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0.$$

Usando 3.5 obtemos

$$\frac{1}{2} \partial_t ||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^2 dx$$
$$-\lambda \int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 dx \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 dx \bigg)^{\frac{\sigma}{2}-1} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \partial_t ||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} - \lambda \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \bigg)^{\frac{\sigma}{2}} = 0.$$

Integrando de 0 a t e denotando $Q_t = (0, t) \times \Omega$ temos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \partial_t ||\boldsymbol{h}_m(\tau)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} - \lambda \int_0^t \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 \bigg)^{\frac{\sigma}{2}} = 0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\bigg(\frac{1}{2} ||\boldsymbol{h}_m(\tau)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \bigg) \bigg|_0^t + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} - \lambda \int_0^t \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 \bigg)^{\frac{\sigma}{2}} = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2} ||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} d\tau - \lambda \int_0^t \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 \bigg)^{\frac{\sigma}{2}} d\tau = \frac{1}{2} ||\boldsymbol{h}_m(0)||^2_{L^2(\Omega)},$$

No caso em que $\lambda = 0$ obtemos

$$\frac{1}{2} ||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} = \frac{1}{2} ||\boldsymbol{h}_{m_0}||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},$$

No caso em que $\lambda = -1$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} \\
\leq \ & \frac{1}{2}||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} + \int_0^t \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} \\
= \ & \frac{1}{2}||\boldsymbol{h}_{m_0}||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Em ambos os casos temos que

$$||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + 2\int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)} \leq ||\boldsymbol{h}_{m_0}||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

e portanto

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||\boldsymbol{h}_m(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} + 2\int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} \leq ||\boldsymbol{h}_{m_0}||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}.$$

Assim sendo, $||\boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leq C$ e $||\nabla \times \boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T)} \leq C$, para uma constante C independente de m. ■

Mostraremos agora que com hipóteses mais fortes sobre a função $p(\cdot,\cdot)$ a derivada parcial de $\boldsymbol{h}$ com respeito a t pertence a $\boldsymbol{L}^2(Q_T)$.

Proposição 3.2. *Assuma que $1 < p^- \leq p(\cdot,\cdot) \leq p^+ < \infty$, p e $\boldsymbol{h}_0$ satisfazendo, respectivamente, (2.3) e (3.1), e que além disso exista uma constante positiva C tal que $-C \leq \partial_t p \leq 0$ q.t.p. em Q_T. Então*

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} \right) \\
\leq \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_{m_0}|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} + \frac{c|\Omega|T}{(p^-)^2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Em particular,

$$||\partial_t \boldsymbol{h}_m||_{L^2(Q_T)} \leq C. \tag{3.7}$$

Antes de iniciarmos a demonstração da proposição, mostraremos um lema técnico que nos será útil em momentos oportunos.

Lema 3.1. *Nas condições da proposição acima temos que.*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\partial_t \boldsymbol{h}_m(t) + I,$$

onde

$$I = \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2}\Big(-1+p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|\Big)\partial_t p(\cdot,t). \tag{3.8}$$

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} &= \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)}\right)\\ &= \int_\Omega \left(\frac{\frac{d}{dt}|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}p(\cdot,t)-\partial_t p(\cdot,t)|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2}\right) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} &= \frac{d}{dt}e^{\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}\\ &= e^{\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}\ \frac{d}{dt}\Big(\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\Big)\\ &= |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\ \frac{d}{dt}\Big(p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|\Big)\\ &= |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\ \Big(\partial_t p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|+p(\cdot,t)\partial_t\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|\Big) \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Substituindo (3.10) em (3.9) temos que,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = \int_\Omega \Bigg(\frac{p(\cdot,t)|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\partial_t p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|}{p(\cdot,t)^2}$$

$$\frac{+p(\cdot,t)^2|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\partial_t\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)| - \partial_t p(\cdot,t)|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2}\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2} \Big(-1 + p(\cdot,t)\log|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\Big)\partial_t p(\cdot,t) \\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \partial_t \log\big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\big)|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \\
&= I + \int_\Omega \partial_t \log\big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\big)|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Sabemos que

$$\textstyle\int_\Omega \partial_t \log\big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\big)|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} = \int_\Omega \frac{1}{|\nabla\times\boldsymbol{h}_m(t)|}\partial_t|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}, \qquad (3.12)$$

assim se $\nabla \times \boldsymbol{h}_m = (g_1, g_2, g_3)$ então $|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$, portanto

$$
\begin{aligned}
\partial_t|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| &= \frac{1}{2}\frac{1}{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|}\ \partial_t(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|}\ 2(g_1\partial_t g_1 + g_2\partial_t g_2 + g_3\partial_t g_3) \\
&= \frac{1}{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|}\ (g_1, g_2, g_3)\cdot\partial_t(g_1, g_2, g_3) \\
&= \frac{1}{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|}\ \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\partial_t\boldsymbol{h}_m(t).
\end{aligned}
$$

A substituição desta última igualdade em (3.12) nos leva a seguinte igualdade

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_\Omega \partial_t \log\big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\big)|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} &= \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^2}\ \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\partial_t\boldsymbol{h}_m(t) \\
&= \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\ \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\partial_t\boldsymbol{h}_m(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, se substituirmos essa última igualdade em (3.11) obtemos o resultado desejado.

■

Prova da Proposição 3.2: Observe que podemos usar $\partial_t\boldsymbol{h}_m$ como função teste em (3.3) obtendo a seguinte equação,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \partial_t\boldsymbol{h}_m(t)\cdot\partial_t\boldsymbol{h}_m(t) + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\partial_t\boldsymbol{h}_m(t) \\
&\qquad -\lambda\int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\partial_t\boldsymbol{h}_m(t)\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)$$
$$-\lambda \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0. \tag{3.13}$$

Por outro lado temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{-\lambda}{\sigma} \frac{d}{dt} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} &= \frac{-\lambda}{\sigma} \frac{\sigma}{2} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \\
&= \frac{-\lambda}{2} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{h}_m, \boldsymbol{h}_m \rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \\
&= \frac{-\lambda}{2} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} 2 \langle \boldsymbol{h}_m, \partial_t \boldsymbol{h}_m \rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \\
&= -\lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \langle \boldsymbol{h}_m, \partial_t \boldsymbol{h}_m \rangle_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \\
&= -\lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \partial_t \boldsymbol{h}_m(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Segue de (3.13), (3.14) e do Lema (3.1) que,

$$\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{d}{dt} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} = I, \tag{3.15}$$

I como em (3.8).

Usando que $\partial_t p \leq 0$ podemos estimar I da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2} \Big(-1 + p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| \Big) \partial_t p(\cdot,t) \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2} \Big(1 - p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| \Big) |\partial_t p(\cdot,t)| \\
&= \int_{\Omega \cap \{1 \geq p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\}} \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2} \Big(1 - p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| \Big) |\partial_t p(\cdot,t)| \\
&+ \int_{\Omega \cap \{1 < p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|\}} \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2} \Big(1 - p(\cdot,t) \log |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)| \Big) |\partial_t p(\cdot,t)|
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega\cap\{1\geq p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|\}} \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2}\Big(1-p(\cdot,t)\log|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)\Big)|\partial_t p(\cdot,t)|.$$

Note que considerando a função

$$F(\eta)=\begin{cases} \dfrac{\eta^{p(\cdot,\cdot)}}{p(\cdot,\cdot)^2}(1-p(\cdot,\cdot)\log\eta), & \text{se} \quad 0<\eta\leq e^{\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}} \\ 0, & \text{se} \qquad \eta=0 \end{cases}$$

temos que:

$$\begin{aligned} F(e^{\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}}) &= \frac{\big(e^{\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}}\big)^{p(\cdot,\cdot)}}{p(\cdot,\cdot)^2}(1-p(\cdot,\cdot)\log e^{\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}}) \\ &= \frac{e}{p(\cdot,\cdot)^2}\Bigg(1-\frac{p(\cdot,\cdot)}{p(\cdot,\cdot)}\Bigg) \\ &= 0=F(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(\eta) &= \frac{1}{p(\cdot,\cdot)^2}\Big(p(\cdot,\cdot)\eta^{p(\cdot,\cdot)-1}(1-p(\cdot,\cdot)\log\eta)-\eta^{p(\cdot,\cdot)}p(\cdot,\cdot)\frac{1}{\eta}\Big) \\ &= \frac{1}{p(\cdot,\cdot)^2}\quad p(\cdot,\cdot)\quad \eta^{p(\cdot,\cdot)-1}\Big((1-p(\cdot,\cdot)\log\eta)-1\Big) \\ &= -\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}\quad \eta^{p(\cdot,\cdot)-1}\quad p(\cdot,\cdot)\log\eta \\ &= -\eta^{p(\cdot,\cdot)-1}\quad p(\cdot,\cdot)\log\eta. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\max_{0\leq\eta\leq e^{\frac{1}{p(\cdot,\cdot)}}} F(\eta)=F(1)=\frac{1}{p(\cdot,\cdot)^2}.$$

Como por hipótese $-C\leq\partial_t p(\cdot,t)\leq 0$ temos que $|\partial_t p(\cdot,t)|\leq C$, tomando

$\eta = |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}$ e sendo $m(\Omega) = |\Omega|$ a Medida de Lebesgue de um conjunto Ω, obtemos

$$
\begin{aligned}
I &\leq \int_{\Omega\cap\{1\geq p(\cdot,t)\log|\nabla\times h_m(t)|\}} \frac{1}{p(\cdot,\cdot)^2}C \\
&= \frac{C}{p^-} m\Big(\Omega\cap\{1\geq p(\cdot,t)\log|\nabla\times h_m(t)|\}\Big) \\
&\leq \frac{C\ |\Omega|}{p^-}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Integrando (3.15) de 0 à t obtemos,

$$
\int_0^t\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 + \int_0^t \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(\tau)|^{p(\cdot,\tau)}}{p(\cdot,\tau)} - \frac{\lambda}{\sigma}\int_0^t \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\tau)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} = \int_0^t I,
$$

usando (3.16)

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_t} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(0)|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \\
+\frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(0)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \leq \int_0^t \frac{c|\Omega|}{p(\cdot,\cdot)^2}d\tau,
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_t} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(0)|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \\
+\frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(0)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \leq \frac{c|\Omega|t}{(p^-)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(\tau)|^2 + \sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}\right) \\
\leq \int_\Omega \frac{|\nabla\times \boldsymbol{h}_{m_0}|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} - \frac{\lambda}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} + \frac{c|\Omega|T}{(p^-)^2},
\end{aligned}
$$

provando assim a desigualdade (3.6). Resta provar a desigualdade (3.7). Note que pelo Teorema (1.9)

$$
\int_\Omega |\boldsymbol{f}|^{p(\cdot,\cdot)} \leq \max\Big\{||\boldsymbol{f}||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)}, ||\boldsymbol{f}||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)}\Big\},
$$

assim

$$\frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_{m_0}|^{p(\cdot,0)} \leq \frac{1}{p^-}\max\left\{||\nabla \times \boldsymbol{h}_{m_0}||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,0)}(\Omega)}, ||\nabla \times \boldsymbol{h}_{m_0}||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,0)}(\Omega)}\right\},$$

finalizando a demonstração da proposição. ■

Teorema 3.1. *Assuma que* $\frac{6}{5} < p^- \leq p(\cdot,\cdot) \leq p^+ < \infty$*,* p *e* $\boldsymbol{h}_0$ *satisfazendo (2.3) e (3.1), respectivamente e suponha também que exista uma constante positiva* C *tal que* $-C \leq \partial_t p \leq 0$ *q.t.p. em* Q_T*. Então o problema (2.5) tem uma solução* $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}(Q_T) \cap \mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$*. Além disso, se* $\sigma \geq 1$ *então a solução é única.*

Prova: Pelas estimativas (3.4) e (3.7) e pelo Teorema 1.14 existem $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{h}$ tal que, passando a uma subsequência se necessário temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{h}_m &\rightharpoonup \boldsymbol{G} \text{ em } \boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T) \\ \partial_t \boldsymbol{h}_m &\rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{h} \text{ em } \boldsymbol{L}^2(Q_T), \end{aligned} \tag{3.17}$$

quando $m \to \infty$.

Seja $q = \min\{2, p^-\}$, lembremos que da Observação 2.2 dado $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}(Q_T)$ existe uma constante positiva C tal que

$$||\nabla \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^q(Q_T)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^q(Q_T)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T)} \qquad {\scriptstyle (q \leq p^- \leq p)}$$

e

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^q(Q_T)} \leq C||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)} \qquad {\scriptstyle (q \leq 2),}$$

logo

$$||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^q(Q_T)} + ||\nabla \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^q(Q_T)} \leq C\big(||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^2(Q_T)} + ||\nabla \times \boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,\cdot)}(Q_T)}\big).$$

Então $\{\boldsymbol{h}_m\}_m$ é limitada em $\boldsymbol{W}^{1,q}(Q_T)$ que pelo Teorema 1.8 é uma imersão compacta em $\boldsymbol{L}^{q^*}(Q_T)$, onde q^* é o expoente crítico de Sobolev e é maior que 2 pois $p^- > \frac{6}{5}$.

Assim, ao menos para uma subsequência, temos que $\boldsymbol{h}_m \longrightarrow \boldsymbol{h}$ fortemente em $\boldsymbol{L}^{q^*}(Q_T)$ e $\boldsymbol{h}_m(x,t) \longrightarrow \boldsymbol{h}(x,t)$ para q.t.p. $(x,t) \in Q_T$ quando $m \to \infty$.

Outrossim temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,t)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)|^2 \;=\; 2\int_\Omega \Big(\boldsymbol{h}(\cdot,t)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)\Big)\cdot\Big(\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,t)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)\Big).$$

Integrando ambos os lados de 0 a t e tomando $Q_t = \Omega\times(0,t)$ temos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^2 \;=\; 2\int_0^t\int_\Omega \Big(\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big)\cdot\Big(\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big),$$

isto é

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,t)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)|^2-\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,0)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,0)|^2\\ &\le 2\int_{Q_T}\Big(\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big)\cdot\Big(\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em $\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)$ e em $\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)$ com $p=q=2$,

$$\begin{aligned}&2\int_{Q_T}\Big(\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big)\cdot\Big(\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big)\\ &\le 2\left(\int_{Q_T}\Big|\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big|^2\right)^{\frac12}\left(\int_{Q_T}\Big|\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big|^2\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,t)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)|^2 \le 2&\left(\int_{Q_T}\Big|\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big|^2\right)^{\frac12}\left(\int_{Q_T}\Big|\partial_t\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)-\partial_t\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\Big|^2\right)^{\frac12}\\ &+\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,0)-\boldsymbol{h}_m(\cdot,0)|^2,\end{aligned}\tag{3.18}$$

e esta última pelas hipóteses iniciais, converge a zero quando $m\to\infty$.

Assim $\{\boldsymbol{h}_m\}_m \to \boldsymbol{h}$ em $\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$.

Para $N \in \mathbb{N}$, seja $\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{N} d_k(t)\boldsymbol{\psi}_k$. Por (3.3) temos que

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(\cdot,t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(t) + \int_\Omega |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi}(t)$$
$$-\lambda\int_\Omega \boldsymbol{h}_m(\cdot,t)\cdot\boldsymbol{\varphi}(t)\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\cdot,t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0. \tag{3.19}$$

Integrando com respeito a t temos

$$\int_0^t\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau) + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi}(\tau)$$
$$-\lambda\int_0^t\int_\Omega \boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\quad\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0,$$

ou seja

$$\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau) + \int_{Q_T} |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi}(\tau)$$
$$-\lambda\int_{Q_T} \boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\quad\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0,$$

assim passando o limite de $m\to\infty$ para N fixado obtemos

$$\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{h}(\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau) + \lim_{m\to\infty}\int_{Q_T} |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m(\cdot,\tau)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi}(\tau)$$
$$-\lambda\int_{Q_T} \boldsymbol{h}(\cdot,\tau)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\tau)\quad\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(\cdot,\tau)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0,$$

primeiramente para esta $\boldsymbol{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} d_k(t)\psi_k$ e posteriormente para $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{X}(Q_T)$ por densidade.

Agora vamos mostrar que se $A(\boldsymbol{v}) = |\nabla\times\boldsymbol{v}|^{p(\cdot,\cdot)-2}\nabla\times\boldsymbol{v}$ então

$$\int_{Q_T}\boldsymbol{G}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi} = \lim_{m\to\infty}\int_{Q_T} A(\boldsymbol{h}_m)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi} = \int_{Q_T} A(\boldsymbol{h})\cdot\nabla\times\boldsymbol{\varphi},$$

e consequentemente que

$$\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi} - \lambda \int_{Q_T} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0. \tag{3.20}$$

Note que pelo Teorema 1.15

$$\int_{Q_T} \big(A(\boldsymbol{v}) - A(\boldsymbol{w}) \big) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) > 0. \tag{3.21}$$

Subtraindo (3.20) com $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{h}$ em (3.19) integrada no intervalo $[0, T]$ com $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{h}_m$ temos

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{\varphi}|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi} - \lambda \int_0^T \Big(\int_\Omega \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big) \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^2 \Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \\ &\quad - \int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + \lambda \int_{Q_T} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \ \left(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}} = 0, \end{aligned}$$

simplificando chegamos à seguinte igualdade

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{\varphi}|^{p(\cdot,\cdot)} - \lambda \int_0^T \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} - \int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ &\quad - \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + \lambda \Big(\int_{Q_T} |\boldsymbol{\varphi}|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} = 0, \end{aligned}$$

desfazendo as substituições em $\boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{h}_m \cdot \boldsymbol{h}_m + \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - \lambda \Big(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}_m|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} - \int_{Q_T} \partial_t \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h} \\ &\quad - \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h} + \lambda \Big(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} = 0, \end{aligned}$$

isso implica que

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \Big(\partial_t \boldsymbol{h}_m \cdot \boldsymbol{h}_m - \partial_t \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h} \Big) - \lambda \left[\Big(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}_m|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} - \Big(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}|^2 \Big)^{\frac{\sigma}{2}} \right] \\ &\quad + \int_{Q_T} \Big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Chamando

$$J_m = \int_{Q_T} \left(\partial_t \boldsymbol{h}_m \cdot \boldsymbol{h}_m - \partial_t \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{h}\right) - \lambda \left[\left(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}_m|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} - \left(\int_{Q_T} |\boldsymbol{h}|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} \right]$$

temos que

$$J_m + \int_{Q_T} \left(|\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h} \right) = 0 \tag{3.22}$$

e como $\boldsymbol{h}_m \to \boldsymbol{h}$ fortemente em Q_T e por hipótese $\partial_t \boldsymbol{h}_m \rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{h}$ então, $J_m \to 0$ quando m vai a infinito e além disso, da igualdade acima segue que

$$\int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} \to \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}$$

ou de forma equivalente

$$\int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m \to \int_{Q_T} \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}. \tag{3.23}$$

Subtraindo (3.22) de (3.21) com $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{h}_m$ e passando o limite de $m \to \infty$ obtemos

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; & \int_{Q_T} \big(A(\boldsymbol{v}) - A(\boldsymbol{h}_m)\big) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{h}_m)\, dx - J_m - \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}\, dx \\
= \; & \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{v}|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} - |\nabla \times \boldsymbol{v}|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m \\
& - |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m\, dx - J_m \\
& - \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}\, dx.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim aplicando o limite de $m \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{m \to \infty} \; & \int_{Q_T} |\nabla \times \boldsymbol{v}|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} - |\nabla \times \boldsymbol{v}|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m \\
& - |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} + |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} - |\nabla \times \boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} + \boldsymbol{G} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}\, dx \\
& - J_m \geq 0.
\end{aligned}$$

Isto é

$$\lim_{m\to\infty} \int_{Q_T} A(\boldsymbol{v})\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} - A(\boldsymbol{v})\cdot\nabla\times\boldsymbol{h}_m - |\nabla\times\boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$$
$$+\boldsymbol{G}\cdot\nabla\times\boldsymbol{h}\,dx - J_m \geq 0,$$

pelo Lema 1.13

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{Q_T} -A(\boldsymbol{v})\cdot\big(-\nabla\times\boldsymbol{v}+\nabla\times\boldsymbol{h}\big) - \boldsymbol{G}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G}\cdot\nabla\times\boldsymbol{h} \\ &= \int_{Q_T} -A(\boldsymbol{v})\cdot\big(-\nabla\times\boldsymbol{v}+\nabla\times\boldsymbol{h}\big) + \boldsymbol{G}\cdot\big(-\nabla\times\boldsymbol{v}+\nabla\times\boldsymbol{h}\big) \end{aligned}$$

$$\int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{v})\big)\cdot\big(\nabla\times(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{v})\big). \tag{3.25}$$

Tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} - \nu\boldsymbol{w}$ sendo ν um número real positivo e $\boldsymbol{w}$ qualquer funcional em $\boldsymbol{X}(Q_T)$ e substituindo em (3.25) temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{w})\big)\cdot\big(\nabla\times\nu\boldsymbol{w}\big) \\ &= \nu\int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{w})\big)\cdot\big(\nabla\times\boldsymbol{w}\big). \end{aligned}$$

Como ν é positivo temos que

$$\int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{h}-\nu\boldsymbol{w})\big)\cdot\big(\nabla\times\boldsymbol{w}\big). \tag{3.26}$$

Fazendo $\nu\to 0$, obtemos que $0 \leq \int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{h})\big)\cdot\big(\nabla\times\boldsymbol{w}\big)$. Como essa desigualdade vale para todo funcional em $\boldsymbol{X}(Q_T)$ podemos tomar $-\boldsymbol{w}$ de forma a invertê-la e portanto temos que $0 = \int_{Q_T} \big(\boldsymbol{G} - A(\boldsymbol{h})\big)\cdot\big(\nabla\times\boldsymbol{w}\big)$ donde $\boldsymbol{G} = A(\boldsymbol{h})$.

Lembremos que $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ implica que $\boldsymbol{h} \in \mathcal{C}\big([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)\big)$. Tomando $q = min\{p^-, 2\}$, pela Proposição 3.1 o conjunto $\{\boldsymbol{h}_m\}_m$ é limitado em

$$\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^q\big(0,T;\boldsymbol{W}^{p^-}(\Omega)\big) : \partial_t\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^2(Q_T)\}.$$

Vamos mostrar agora que $\boldsymbol{Z}$ é uma inclusão compacta em $\mathcal{C}\big([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)\big)$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t+\delta)-\boldsymbol{h}_m(t)|^q\,dx &= \int_\Omega \left|\int_t^{t+\delta} \partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)\,d\tau\right|^q dx \\
&\leq \int_\Omega \left|\int_t^{t+\delta} 1\;\partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)\,d\tau\right|^q dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\left(\int_t^{t+\delta} |1|^{q'}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_t^{t+\delta} |\partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)|^q\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q dx \\
&= \int_\Omega \left(\left(\int_t^{t+\delta} |1|^{q'}\,d\tau\right)^{\frac{q}{q'}} \left(\int_t^{t+\delta} |\partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)|^q\,d\tau\right)\right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\delta^{q-1} \quad \int_t^{t+\delta} |\partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)|^q\,d\tau\right) dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\delta^{q-1} \quad \int_t^{T} |\partial_t\boldsymbol{h}_m(\tau)|^q\,d\tau\right) dx \\
&= \delta^{q-1}||\partial_t\boldsymbol{h}_m||^q_{L^q(Q_T)} \\
&\leq \delta^{q-1}C, \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

onde q' é expoente conjugado de q e portanto $\dfrac{q}{q'} = q-1$.

Como $p^- > \dfrac{6}{5}$ temos duas possibilidades:

1. $\dfrac{6}{5} < p^- \leq 2$ e portanto $(p^-)^* \geq 2$;

2. $p^- > 2$ então $(p^-)^* \geq 6$,

em ambos os casos vale os Teoremas 1.8 e 1.4 donde segue que $\boldsymbol{W}^{p^-}(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^2(\Omega) \subset \boldsymbol{L}^{q(\cdot)}(\Omega)$.

Por outro lado $\{\boldsymbol{h}_m\}_m$ é subconjunto limitado em $\boldsymbol{L}^q(0,T;\boldsymbol{W}^{p^-}(\Omega))$ pois o é em

$\boldsymbol{L}^q(0,T;\boldsymbol{W}^q(\Omega))$, denotando $\tau_\delta(\boldsymbol{f}(t)) = \boldsymbol{f}(t+\delta)$ temos,

$$
\begin{aligned}
||\tau_\delta(\boldsymbol{h}_m) - \boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^\infty(0,T-\delta;\boldsymbol{L}^q(\Omega))} &= ||\boldsymbol{h}_m(t+\delta) - \boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^\infty(0,T-\delta;\boldsymbol{L}^q(\Omega))} \\
&= \sup_{t\in[0,T-\delta]} \mathrm{ess}||\boldsymbol{h}_m(t+\delta) - \boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^q(\Omega)} \\
&= \sup_{t\in[0,T-\delta]} \mathrm{ess}\bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t+\delta) - \boldsymbol{h}_m(t)|^q\bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{t\in[0,T-\delta]} \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t+\delta) - \boldsymbol{h}_m(t)|^q\bigg)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

e esta última converge a zero com $\delta \to 0$, por (3.27). Assim pelo Teorema 1.18 $\boldsymbol{Z}$ é uma inclusão compacta em $\mathcal{C}\big([0,T];\boldsymbol{L}^2(\Omega)\big)$.

Então pelo menos para uma subsequência de $\mathcal{C}\big([0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)]\big)$ temos que $\boldsymbol{h}_m \longrightarrow \boldsymbol{h}$ em todo ponto quando $m \to \infty$, em particular $\boldsymbol{h}(0) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{h}_m(0) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{h}_{m_0} = \boldsymbol{h}_0$.

Isso conclui que $\boldsymbol{h}$ é solução do Problema (2.5).

Provaremos agora a unicidade da solução no caso $\sigma \geq 1$. Vamos escrever a prova no caso de λ geral e posteriormente faremos as substituições com $\lambda = \{-1, 0\}$.

Sejam $\boldsymbol{h}_1$ e $\boldsymbol{h}_2$ duas soluções do problema (2.5), usando $\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2$ como função teste nos problemas das respectivas funções e as subtraindo temos,

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \int_\Omega \Big[\partial_t \boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx + \int_\Omega \Big[|\nabla \times \boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_1 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \\
& -\lambda \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2 dx\bigg)^{\frac{\sigma-2}{2}} - \int_\Omega \Big[\partial_t \boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \\
& - \int_\Omega \Big[|\nabla \times \boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_2 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \\
& +\lambda \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \bigg(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2 dx\bigg)^{\frac{\sigma-2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big[\partial_t \boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2) - \partial_t \boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx + \int_\Omega \Big[|\nabla \times \boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_1 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2) \\
&\quad - |\nabla \times \boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_2 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx - \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx \\
&\quad + \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big[\partial_t \big(\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\big) \cdot \big(\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\big)\Big] dx \\
&\quad + \int_\Omega \Big[\Big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_1 - |\nabla \times \boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_2\Big) \cdot \nabla \times \Big(\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\Big)\Big] dx \\
&\quad - \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx + \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \partial_t \int_\Omega |\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2|^2 \\
&\quad + \int_\Omega \Big[\Big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_1 - |\nabla \times \boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_2\Big) \cdot \nabla \times \Big(\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\Big)\Big] dx \\
&\quad - \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx + \lambda \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2 dx\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] dx,
\end{aligned}
$$

integrando de 0 até t temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2|^2\Big)\Big|_0^t \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega \Big[\Big(|\nabla \times \boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_1 - |\nabla \times \boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_2\Big) \cdot \nabla \times \Big(\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\Big)\Big] \\
&\quad - \lambda \int_0^t \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big] + \lambda \int_0^t \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(0)-\boldsymbol{h}_2(0)|^2\Big) \\
&\quad + \int_0^t\int_\Omega \Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1 - |\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big] \\
&\quad -\lambda\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_1\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big] + \lambda\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_2\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big) \\
&\quad + \int_{Q_t} \Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1 - |\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big] \\
&\quad -\lambda\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_1\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big] + \lambda\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_2\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big].
\end{aligned}
$$

Note que pela equação (3.21)

$$
\int_{Q_t} \Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1 - |\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big] \geq 0,
$$

logo se $\lambda = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big) \\
&\quad + \int_{Q_t} \Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1 - |\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big) = \\
-\int_{Q_t} \Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1 - |\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big] \leq 0
\end{gathered}
$$

ou seja $0 \leq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big) \leq 0$.

Por outro lado se $\lambda = -1$ temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big)\\
&\quad+\int_{Q_t}\Big[\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}_1|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_1-|\nabla\times\boldsymbol{h}_2|^{p(\cdot,\tau)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_2\Big)\cdot\nabla\times\Big(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2\Big)\Big]\\
&\quad+\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_1\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big]-\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_2\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big].\\
&\geq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t)-\boldsymbol{h}_2(t)|^2\Big)\\
&\quad+\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_1\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big]-\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_2\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big].\\
&\geq \int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_1\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big]-\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[\boldsymbol{h}_2\cdot(\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_2)\Big].\\
&= \int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[|\boldsymbol{h}_1|^2-\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2\Big]-\int_0^t\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\Big[-|\boldsymbol{h}_2|^2+\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2\Big].
\end{aligned}
$$

Chamando $y_1(\tau)=\displaystyle\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2$ e $y_2(\tau)=\displaystyle\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2$, usando a Desigualdade de Schwarz e o Teorema 1.15 temos para $\sigma\geq 1$

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \int_0^t\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}+\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{h}_2-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\int_\Omega\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{h}_2\\
&= \int_0^t\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}+\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_1(\tau)\Big)^{-\frac{1}{2}}\int_\Omega\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{h}_2\\
&\quad-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_2(\tau)\Big)^{-\frac{1}{2}}\int_\Omega\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{h}_2\\
&\geq \int_0^t\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}+\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_1(\tau)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_2(\tau)\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \int_0^t\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}+\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \int_0^t\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big)-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big)\\
&= \int_0^t\Big(\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{\sigma-1}{2}}\Big)\Big(\Big(y_1(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}-\Big(y_2(\tau)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle |y_1|^{\frac{\sigma+2}{2}-2}\big(y_1\big)^{\frac{1}{2}} - |y_2|^{\frac{\sigma+2}{2}-2}\big(y_2\big)^{\frac{1}{2}}, \big(y_1\big)^{\frac{1}{2}} - \big(y_2\big)^{\frac{1}{2}} \right\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Assim pela desigualdade acima segue que $y_1(\tau) = y_2(\tau)$ para q.t.p. $\tau \in (0,T)$ e também que

$$
\int_0^t \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_1 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2) \Big] - \int_0^t \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_2|^2 \right)^{\frac{\sigma-2}{2}} \int_\Omega \Big[\boldsymbol{h}_2 \cdot (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2) \Big] = 0.
$$

Consequentemente $0 \leq \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_1(t) - \boldsymbol{h}_2(t)|^2 \leq 0.$

Portanto em ambos os casos $\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_2$ para q.t.p em Q_T mostrando a unicidade da solução. ■

3.2 Extinção em tempo finito e comportamento assintótico

Estudaremos nessa seção a extinção em tempo finito das soluções do Problema (2.5), dependendo da escolha dos parâmetros λ e σ.

Teorema 3.2. *Seja* $\boldsymbol{h}$ *uma solução do problema (2.5) com* $1 < p(\cdot,\cdot) < \infty$, $\lambda = -1$, $0 < \sigma < 2$ *e* $\boldsymbol{h}_0 \in L^2(\Omega)$. *Então existe* $t_* = \dfrac{1}{2-\sigma} ||\boldsymbol{h}_0||_{L^2(\Omega)}^{2-\sigma}$ *positivo tal que para* $t \geq t_*$, *temos* $||\boldsymbol{h}(t)||_{L^2(\Omega)} = 0$

Prova: Note que uma solução do problema (2.5) nas condições acima deve satisfazer

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} + \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} = 0. \tag{3.29}
$$

Denotando $Y = \displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 = ||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^2$ resulta que Y satisfaz a seguinte inequação diferencial

$$
Y(t)' + 2Y(t)^{\frac{\sigma}{2}} \leq 0.
$$

Se $0 < \sigma < 2$ e $Y'(t) + 2Y(t)^{\frac{\sigma}{2}} \leq 0$ então

$$Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} \leq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} - (2-\sigma)t.$$

De fato multiplicando $Y'(t) + 2Y(t)^{\frac{\sigma}{2}} \leq 0$ por $Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}}$ temos

$$Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}} + 2 \leq 0. \tag{3.30}$$

Como

$$\begin{aligned}\left(Y(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}}\right)' &= Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}} - \frac{\sigma}{2}Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}-1}Y'(t)Y(t)\\ &= \left(Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}}\right)\left(1-\frac{\sigma}{2}\right),\end{aligned}$$

se multiplicarmos (3.30) por $\left(1-\dfrac{\sigma}{2}\right)$ temos

$$\begin{aligned}0 &\geq \left(\frac{2-\sigma}{2}\right)\left(Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}}\right) + 2\left(\frac{2-\sigma}{2}\right)\\ &= \left(Y(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}}\right)' + (2-\sigma)\\ &= \left(Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}}\right)' + (2-\sigma).\end{aligned}$$

Integrando de 0 à t

$$\begin{aligned}0 &\geq \int_0^t \left(Y(s)^{\frac{2-\sigma}{2}}\right)' + \int_0^t (2-\sigma)\\ &= Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} - Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} + (2-\sigma)t\end{aligned}$$

assim $Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} \leq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} - (2-\sigma)t$ e $Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} = ||\boldsymbol{h}(t)||_{L^2(\Omega)}^{2-\sigma} \geq 0$.

Agora note que

$$
\begin{aligned}
Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} - (2-\sigma)t \leq 0 \ &\Leftrightarrow \ (2-\sigma)t \geq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} \\
&\Leftrightarrow \ t \geq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} \frac{1}{2-\sigma} \\
&\Leftrightarrow \ t \geq \frac{1}{2-\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2\right)^{\frac{2-\sigma}{2}}.
\end{aligned}
$$

Ou seja $||\boldsymbol{h}(t)||_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $t \geq \dfrac{1}{2-\sigma}\left(\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2\right)^{\frac{2-\sigma}{2}}$

■

Observação 3.1. *Pela equação (3.29), para o caso limite $\sigma = 2$ e também para $\sigma > 2$ há uma extinção assintótica da solução quando $t \to \infty$, ou seja,* $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$

De fato, usando a notação anterior temos que:

Se $\sigma = 2$ então

$$
Y'(t) + 2Y(t) \leq 0,
$$

multiplicando por e^{2t}

$$
\begin{aligned}
0 \ &\geq \ Y'(t)e^{2t} + 2Y(t)e^{2t} \\
&= \ \left(Y(t)e^{2t}\right)',
\end{aligned}
$$

integrando de 0 à t

$$
\begin{aligned}
0 \ &\geq \ \int_0^t \left(Y(s)e^{2s}\right)' \\
&= \ (Y(t)e^{2t}) - (Y(0)e^0).
\end{aligned}
$$

Logo $Y(t) \leq Y(0)e^{-2t}$ e quando $t \to \infty$ temos que $Y(0)e^{-2t} \to 0$, ou seja $Y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$;

Se $\sigma > 2$ então

$$\begin{aligned} 0 &\geq Y'(t) + 2Y(t)^{\frac{\sigma}{2}} \\ &= Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}} + 2, \end{aligned}$$

multiplicando por $\dfrac{2-\sigma}{2}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2-\sigma}{2} Y'(t)Y(t)^{-\frac{\sigma}{2}} + (2-\sigma) \\ &= \left(Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}}\right)' + (2-\sigma), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} &\geq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}} - (2-\sigma)t \\ &= Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}}\left(1 - t(2-\sigma)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right), \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{1}{Y(t)^{\frac{\sigma-2}{2}}} \geq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}}\left(1 - t(2-\sigma)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)$$

e assim

$$Y(t) \leq \frac{Y(0)}{\left(1 - t(2-\sigma)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)^{\frac{2}{\sigma-2}}}.$$

Portanto $Y(t)$ vai a zero quando $t \to \infty$ finalizando a demonstração da observação.

Faremos agora uma análise do comportamento assintótico de $\boldsymbol{h}(t)$ com respeito a t, onde $\boldsymbol{h}$ é solução do problema (2.5) quando o termo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h})$ inexiste, isto é $\lambda = 0$.

Teorema 3.3. *Seja $\boldsymbol{h}$ uma solução do problema (2.5) com $1 < p(\cdot,\cdot) \leq p^+ < 2$, $\lambda = 0$ e $\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Então existe uma constante positiva finita t_* tal que $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 0$ para todo $t \geq t_*$.*

Prova: Retomando a desigualdade (3.4) podemos assumir sem perda de generalidade que $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq 1$. Assim, como $\boldsymbol{h}$ é solução do problema (2.5) e $\lambda = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} = 0.$$

Pelo Teorema (1.9) e a Observação (2.1) temos que

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} &\leq C||\nabla \times \boldsymbol{h}||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq C\max\left(\left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^-}}, \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^+}}\right). \quad (3.31) \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.4:

Se $||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{L^2(\Omega)} \geq 1$ então

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

disso de segue que

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{\frac{p^-}{p^+}}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^+}} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^1_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

e

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^1_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^-}} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{\frac{p^+}{p^-}}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

e assim, temos

$$\left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^+}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^-}},$$

donde pela equação (3.31)

$$||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{1}{p^-}}.$$

Se $||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq 1$ então

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

disso de segue que

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{\frac{p^+}{p^-}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^1$$

e

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^1 \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \right)^{\frac{1}{p^+}} \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{\frac{p^-}{p^+}}$$

e assim, temos

$$\left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \right)^{\frac{1}{p^-}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \right)^{\frac{1}{p^+}},$$

donde pela equação (3.31)

$$||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \right)^{\frac{1}{p^+}}.$$

Segue que $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^-} \leq C \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}$ ou que $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^+} \leq C \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}$, podendo-se concluir que como $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq 1$ e $p^- < p^+$

$$||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^+} = \min\left(||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^-}, ||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^+} \right) \leq C \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}.$$

Nomeando $Y(t) = ||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^2$, da desigualdade acima e do fato de $\boldsymbol{h}$ ser solução segue

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)} \\ &\geq Y'(t) + C||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}^{p^+\frac{2}{2}} \\ &= Y'(t) + CY(t)^{\frac{p^+}{2}}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

procedendo de forma análoga a demonstração feita no Teorema 3.2,

$$Y(t)^{\frac{2-p^+}{2}} \leq Y(0)^{\frac{2-p^+}{2}} - Ct\frac{2-p^+}{2}.$$

Agora $Y(t)^{\frac{2-p^+}{2}} = \left(||\boldsymbol{h}(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\right)^{\frac{2-p^+}{2}} = ||\boldsymbol{h}(t)||^{2-p+}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$ e como $2-p^+>0$ temos que,

$$||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ||\boldsymbol{h}(t)||^{2-p^+}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Agora

$$\begin{aligned} Y(0)^{\frac{2-p^+}{2}} - Ct\frac{2-p+}{2} \leq 0 \ &\Leftrightarrow \ Y(0)^{\frac{2-p^+}{2}} \leq Ct\frac{2-p+}{2} \\ &\Leftrightarrow \ t_* = ||\boldsymbol{h}_0||^{(2-p+)}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\frac{2}{C(2-p+)} \leq t, \end{aligned}$$

completando a prova do teorema. ■

No que segue iremos considerar o caso limite em que

$$1 < p(\cdot,\cdot) \leq \sup_{x\in\Omega} p(x,t) = p^+(t) \leq 2 \quad \text{e} \qquad p^+(t) \nearrow 2 \text{ quando } t \to \infty. \tag{3.33}$$

Neste caso faremos uso do seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada no Lema 9.1 de **[12]** e no Lema 6.7 de **[13]**.

Lema 3.2. *Seja uma função não negativa $\Theta(t)$ satisfazendo as condições,*

$$\begin{cases} \Theta'(t) + C\Theta^{\mu(t)}(t) \leq 0 \quad q.t.p. \ \ t \geq 0 \\ \quad \Theta(t) \leq \Theta(0) < \infty, \quad \Theta(0) > 0. \end{cases}$$

Se o expoente $\mu(t) \in (0,1)$ é monótono crescente e C é constante positiva, então $\Theta(t) \equiv 0$ para todo $t \geq t_*$ com t_* definido a partir da equação

$$C\int_0^{t^*} \Theta^{\mu(s)-1}(0)ds = \int_0^\infty \frac{dz}{e^{z(1-\mu(z))}}.$$

Prova: Seja $J(t) = \dfrac{\theta(t)}{\theta(0)}$, temos que J satisfaz as seguintes condições:

- $J(0) = 1$;
- $J'(t) \leq 0$ uma vez que $\theta(t) \leq \theta(0) < \infty$;

- $J'(t) + C\theta^{\mu(t)-1}(0)J^{\mu(t)} \leq 0$, pois por hipótese

$$\theta'(t) + C\theta^{\mu(t)}(t) \quad \leq \quad 0$$

dai segue que

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(0)} + C\frac{\theta^{\mu(t)}(t)}{\theta(0)} \quad \leq \quad 0$$

multiplicando e dividindo $\theta(0)$ por $1 = \left(\theta^{\mu(t)}(0)\right)\left(\theta^{-\mu(t)}(0)\right)$ temos

$$J'(t) + C\frac{\theta^{\mu(t)}(t)}{\left(\theta^{\mu(t)}(0)\right)\left(\theta^{-\mu(t)+1}(0)\right)} \quad \leq \quad 0$$

de onde segue o ultimo item.

Agora façamos a seguinte mudança de variável, seja $\tau = C\int_0^t \theta^{\mu(t)-1}(0)dt$, $a(\tau) \equiv \mu(t)$ e $I(\tau) \equiv J(t)$, temos que $I(\tau)$ satisfaz as seguintes condições q.t.p. $\tau > 0$

- $I(0) \equiv J(0) = 1$;
- $I(\tau) \geq 0$, pois por definição $I(\tau) \equiv J(t) = \dfrac{\theta(t)}{\theta(0)}$, por sua vez $\theta(t)$ é função não negativa fazendo de $J(\tau)$ uma função não negativa.
- $I'(\tau) + I^{a(\tau)} \leq 0$, pois

$$I(\tau) = J(t)$$

assim

$$I'(\tau)\frac{d\tau}{dt} = J'(t)$$

como $\dfrac{d\tau}{dt} = C\theta^{\mu(t)-1}(0)$ e $J'(t) \leq -C\theta^{\mu(t)-1}(0)J^{\mu(t)}$ então,

$$I'(t)C\theta^{\mu(t)-1}(0) \leq -C\theta^{\mu(t)-1}(0)J^{\mu(t)}.$$

Simplificando e substituindo $J^{\mu(t)}$ por $I^{a(t)}$ o resultado segue;

- Do item anterior segue que $I'(\tau) \leq -I^{a(\tau)}$ e como I é função positiva temos que $I'(\tau) \leq 0$.

Assim I é uma função decrescente pelo ultimo item portanto monótona, como $I(0) = 1$ segue que no intervalo $[0, \varepsilon)$, $I(\tau) > 0$, por outro lado para algum $\tau > 0$ podemos identificar $I(\tau) \equiv 0$.

Além disso $I(\tau) \leq 1$ e $a(\tau) \equiv \mu(t) \in (0,1)$ donde, $I(\tau) \leq I^{a(\tau)}(\tau)$ que nos leva a seguinte inequação:

$$I'(\tau) + I(\tau) \leq I'(\tau) + I^{a(\tau)}(\tau) \leq 0$$

ou seja

$$\begin{aligned} & I'(\tau)e^{\tau} + I(\tau)e^{\tau} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d}{d\tau}\left(I(\tau)e^{\tau}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Integrando de 0 a τ temos que

$$\begin{aligned} & I(\tau)e^{\tau} - I(0)e^{0} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & I(\tau)e^{\tau} \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & I(\tau) \leq e^{-\tau} \\ \Leftrightarrow\ & \ln I(\tau) \leq -\tau \\ \Leftrightarrow\ & \tau \leq -\ln I(\tau). \end{aligned}$$

Portanto $a(\tau) \leq a(-\ln I(\tau))$ e assim

$$I'(\tau) + I^{a(-\ln I(\tau))}(\tau) \leq I'(\tau) + I^{a(\tau)}(\tau) \leq 0.$$

Multiplicando essa ultima desigualdade por $I^{-a(-lnI(s))}(s)$ e integrando no intervalo

$(0, \tau)$ obtemos

$$\int_0^\tau I'(s) I^{-a(-\ln I(s))}(s) + 1 \; ds \le 0$$

isto é

$$\tau + \int_0^\tau \frac{I'(s)}{I^{a(-\ln I(s))}(s)} ds \le 0,$$

substituindo $r = I(s)$ resulta que

$$\int_1^{I(\tau)} \frac{dr}{r^{a(-\ln r)}} \le -\tau$$

tomando $z = -\ln r$ e fazendo a mudança de variável obtemos que

$$\int_0^{-\ln I(\tau)} \frac{dz}{e^{z(1-a(z))}} \ge \tau \text{ para todo } \tau \ge 0.$$

Como $\tau = C \displaystyle\int_0^t \theta^{\mu(s)-1}(0) ds$ temos que $\tau^* = C \displaystyle\int_0^{t^*} \theta^{\mu(s)-1}(0) ds$ de acordo com a escolha de t^*, portanto, pela desigualdade acima

$$\int_0^{-\ln I(\tau^*)} \frac{dz}{e^{z(1-a(z))}} \ge \tau^* = \int_0^\infty \frac{dz}{e^{z(1-a(z))}}.$$

Entretanto isso só acontece se $I(\tau^*) = \dfrac{\theta(t^*)}{\theta(0)} = 0$ para todo $t^* \ge 0$ escolhido, o que finaliza a demonstração. ■

Teorema 3.4. *Seja $\boldsymbol{h}$ uma solução do problema (2.5) com $p(\cdot,\cdot)$ satisfazendo (3.33), $\lambda = 0$ e $\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Assuma que o expoente $p^+(t)$ é monótono crescente e*

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{t}{2}\left(2-p^+(t)\right)}} < \infty.$$

Então existe uma constante positiva finita t_* tal que $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 0$ para $t \ge t_*$.

Prova: Note que pela desigualdade (3.32) $Y'(t) + CY^{\frac{p^+(t)}{2}}(t) \le 0$, pois por hipótese $\dfrac{p^+(t)}{2} \in (0,1)$ e C é constante positiva. Além disso $Y(0) = ||\boldsymbol{h}_0||^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2 < \infty$ pois $\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

$Y(t) \leq Y(0)$ para todo $t > 0$ pois, uma vez que $CY^{\frac{p^+(t)}{2}}(t) \geq 0$ temos que $-CY^{\frac{p^+(t)}{2}}(t) \leq 0$, como $Y'(t) \leq -CY^{\frac{p^+(t)}{2}}(t)$ temos que que $Y(t)$ é decrescente. Outrossim como por hipótese $p^+(t) \nearrow 2$, $\dfrac{p^+(t)}{2} \nearrow 1$, assim temos que pelo lema anterior existe uma constante positiva $t_* < \infty$ tal que $||\boldsymbol{h}(t)||^2_{\boldsymbol{L}^2} = 0$ para $t \geq t_*$ donde $||\boldsymbol{h}(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} = 0$ para todo $t \geq t_*$, com t_* podendo ser estimado a partir da seguinte equação

$$\begin{aligned} C\int_0^{t_*} ||\boldsymbol{h}_0||^{p^+(s)-2}_{\boldsymbol{L}^2} ds &= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{t\left(1-\frac{p^+(t)}{2}\right)}} \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{t}{2}(2-p^+(t))}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

■

Observação 3.2. *Um exemplo simples de um expoente* $p^+(t) = \sup\limits_{x\in\Omega} p(x,t)$ *satisfazendo as condições do teorema acima é*

$$p^+(t) = 2\Big(1 - \alpha\frac{\log t}{t}\Big) \quad 1 < \alpha, \quad e \leq t.$$

De fato, note que nestas condições como $\log t < t$, $0 \leq \alpha\dfrac{\log t}{t} \leq \alpha$ e portanto $2\Big(1 - \alpha\dfrac{\log t}{t}\Big) \leq 2$, além disso $\alpha\dfrac{\log t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Temos também que $p^+(t) \nearrow 2$ quando $t \to \infty$, assim $p^+(t)$ satisfaz as hipóteses de (3.33) e

$$\begin{aligned} \Big(p^+(t)\Big)' = -2\alpha\left(\frac{\frac{1}{t}t - \log t}{t^2}\right) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\alpha + 2\alpha\log t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \log t \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t \geq e. \end{aligned}$$

Portanto $p^+(t)$ é monótona crescente.

Resta mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{t}{2}(2-p^+(t))}} < \infty,$$

que é verdade pelo que segue

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{t}{2}\left(2-2\left(1-\alpha\frac{\log t}{t}\right)\right)}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{t\left(1-\left(1-\alpha\frac{\log t}{t}\right)\right)}} \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha \log t}} \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \\
&= \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^\infty < \infty \quad \text{pois } 1 < \alpha.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

O caso $\lambda = 1$ e $\sigma \geq 1$

Neste capítulo, vamos provar a existência de solução global ou local, do problema (2.5) para $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}|^2\right)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ e $\sigma \geq 1$. Também estudaremos o blow-up (a explosão) das soluções locais.

4.1 Existência de Solução.

Considere como na Seção 3.1 a base $\{\boldsymbol{\psi}_n\}_n$ de $\boldsymbol{W}^{p(\cdot)}(\Omega)$ definida como na Proposição 2.1. Assumindo que $\boldsymbol{h}_0$ satisfaz a condição (3.1), seja $\boldsymbol{h}_{m_0}$ uma aproximação em $\boldsymbol{W}^{1,p(\cdot,0)}(\Omega)$ de $\boldsymbol{h}_0$ tal que $\boldsymbol{h}_{m_0} \in \langle \boldsymbol{\psi}_1, \cdots, \boldsymbol{\psi}_m \rangle$.

Denote

$$\boldsymbol{h}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_1^m(t)\boldsymbol{\psi}_i,$$

e o sistema de EDO's nas seguintes incógnitas $\zeta_1^m, \cdots, \zeta_m^m$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \boldsymbol{\psi}_i + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2} \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi}_i &= \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \boldsymbol{\psi}_i \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma-2}{2}} \\
\boldsymbol{h}_m(\cdot, 0) &= \boldsymbol{h}_{m_0}
\end{aligned}$$

tem uma solução $(\zeta_1^m, \cdots, \zeta_m^m) \in \mathcal{C}^1\big([0,T]\big)^m$.

Note que o problema acima é equivalente ao que segue,

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\boldsymbol{\psi} + \int_\Omega |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\boldsymbol{\psi}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}, \quad \forall\boldsymbol{\psi}\in\langle\boldsymbol{\psi}_1,\cdots,\boldsymbol{\psi}_m\rangle \tag{4.2a}$$

$$\boldsymbol{h}_m(\cdot,0)=\boldsymbol{h}_{m_0} \tag{4.2b}$$

Teorema 4.1. *Assuma que* $\frac{6}{5} < p^- \leq p(\cdot,\cdot) \leq p^+ < \infty$, *$p$ e $\boldsymbol{h}_0$ satisfazendo (2.3) e (3.1), respectivamente. Assuma também que existe uma constante positiva C tal que $-C \leq \partial_t p \leq 0$ q.t.p. em Q_T.*

1. *Se*

$$1 \leq \sigma \leq \max\{2, p^-\} \tag{4.3}$$

então o problema (2.5) tem uma solução $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{X}(Q_T)\cap\mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ para qualquer T positivo.

2. *Se*

$$\sigma > \max\{2, p^+\} \tag{4.4}$$

o problema (2.5) tem uma solução $\boldsymbol{h}\in\boldsymbol{X}(Q_T)\cap\mathcal{H}^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$ para um $T_{\max}>0$ pequeno.

Prova: Primeiramente vamos obter estimativas, nas soluções $\boldsymbol{h}_m$ dos problemas que são independentes de m. Estas estimativas serão globais, para todo T finito, se (4.3) vale e locais para um $T_{\max}>0$ pequeno se (4.4) vale.

Começamos mostrando que no item 1 para cada T finito existe uma constante positiva C tal que

$$||\boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} + \int_{Q_T} |\nabla\times\boldsymbol{h}_m|^{p(\cdot,\cdot)} \leq C \tag{4.5}$$

e

$$\int_{Q_T} |\partial_t \boldsymbol{h}_m|^2 + \sup_{0\le t\le T} \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \le C. \tag{4.6}$$

Usando $\boldsymbol{h}_m(t)$ como função teste em (4.2) obtemos

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)\cdot \boldsymbol{h}_m(t) + \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)\cdot\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t)\cdot \boldsymbol{h}_m(t)\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} = \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \tag{4.7}$$

No caso $1\le\sigma\le 2$, note que se $Y(t) = \int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2$ então

$$\frac{1}{2}Y'(t) + \int_\Omega |\nabla\times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} = Y(t)^{\frac{\sigma}{2}}$$

donde,

$$Y'(t) \le 2Y(t)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

De forma análoga à demonstração do Teorema 3.2 se $\sigma < 2$

$$\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{2-\sigma}{2}} \le (2-\sigma)t + \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}(t)|^2\Big)^{\frac{2-\sigma}{2}} \le C_1.$$

Agora por construção análoga a feita no primeiro item da Observação 3.1 se $\sigma = 2$

$$\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \le e^{-2t}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}(t)|^2 \le e^{2T}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}(t)|^2 = C_2. \tag{4.8}$$

Em qualquer uma das duas situações

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \leq C_3,$$

ou seja $||\boldsymbol{h}_m||_{\boldsymbol{L}^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leq C_3$.

Pelas equações (4.7) e (4.8) segue que $\displaystyle\int_{Q_T} |\nabla\times\boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,\cdot)} \leq C_4$, com C e C_i^{-s} números rais. Assim concluímos a desigualdade (4.5) para $1 \leq \sigma \leq 2$.

No caso $2 < \sigma < p^-$, pela equação (2.1), para cada t fixado em $[0,T]$ temos

$$||\boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)}$$

isto é,

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} \leq C||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^\sigma_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)}.$$

Agora se $\displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} > 1$ então $||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} > 1$ e pelo Teorema (1.9) temos que,

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\right) \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)},$$

donde concluímos que

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^\sigma_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\right)^{\frac{\sigma}{p^-}}.$$

Por outro lado se $\displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \leq 1$ então $||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq 1$ e novamente pelo Teorema (1.9) temos que,

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{p^+}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\right) \leq ||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{p^-}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)},$$

donde concluímos que

$$||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{\sigma}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \leq \Big(\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\Big)^{\frac{\sigma}{p^+}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} &\leq C||\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)||^{\sigma}_{\boldsymbol{L}^{p(\cdot,t)}(\Omega)} \\ &\leq \begin{cases} C\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\Big)^{\frac{\sigma}{p^-}}, & \text{se } \displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} > 1 \\ C\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}\Big)^{\frac{\sigma}{p^+}}, & \text{se } \displaystyle\int_\Omega |\nabla \times h_m(t)|^{p(\cdot,t)} \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Usando o Corolário 1.1 com $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ e $p = \dfrac{p^-}{\sigma}$ ou $p = \dfrac{p^+}{\sigma}$ temos a seguinte desigualdade

$$\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} + C^*.$$

Substituindo esta última inequação em (4.7), integrando de 0 à t e multiplicando por 2 obtemos

$$\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_{Q_t} |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \leq \int_0^t C_1^*,$$

por fim tomando o supremo de t em $[0,T]$ obtemos o resultado de (4.5) para $2 < \sigma < p^-$.

Vamos agora mostrar (4.6). Usando $\partial_t \boldsymbol{h}_m$ como função teste em (4.2) resulta

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) \\ &\qquad = \int_\Omega \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \partial_t \boldsymbol{h}_m(t)\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\end{aligned}$$

que é o mesmo que

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} = \int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2}\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t) \cdot \nabla \times \partial_t \boldsymbol{h}_m(t).$$

Pelo Lema 3.1 temos para o mesmo I definido

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)-2} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)\nabla \times \partial_t \boldsymbol{h}_m(t) + I,$$

portanto

$$\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = I + \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}},$$

I sendo estimado em (3.16) e $|I| \leq \dfrac{C}{(p^-)^2}|\Omega|$ isto é

$$\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} \leq \frac{C}{(p^-)^2}|\Omega| + \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Integrando de 0 à t obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q_t} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_{m_0}|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} \\ &+\frac{C}{(p^-)^2}|\Omega|T + \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} - \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_{m_0}|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Retomando a inequação (4.5) temos que $\dfrac{1}{\sigma}\left(\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} < C_0$ para algum C_0 real, concluindo assim que

$$\int_{Q_T} |\partial_t \boldsymbol{h}_m(t)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} \leq C_1.$$

Logo, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} < C_2$ donde

$$\int_{Q_T} |\partial_t \boldsymbol{h}_m|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \leq C$$

com C e C_i com $i = \{0, 1, 2\}$ números reais positivos. Assim concluímos as estimativas (4.5) e (4.6) localmente.

Provaremos agora as estimativas (4.5) e (4.6) para $T > 0$ suficientemente pequeno para o item 2.

Assuma que

$$t < T_{\max} = \frac{1}{(\sigma - 2)||\boldsymbol{h}_0||^{\sigma-2}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}},$$

segue da equação (4.7) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \leq \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}},$$

isto é

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 - \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} \leq 0.$$

Com cálculo análogo ao feito na demonstração do Teorema 3.2, segue que

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{2-\sigma}{2}} \geq \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(0)|^2\right)^{\frac{2-\sigma}{2}} - (2-\sigma)t \tag{4.10}$$

chamando $Y(t) = \displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2$ e evidenciando $Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}}$ temos

$$\frac{1}{Y(t)^{\frac{\sigma-2}{2}}} \geq Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}}\left(1 - t(\sigma-2)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)$$

implicando que

$$Y(t)^{\frac{\sigma-2}{2}} \leq \frac{1}{Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}}\left(1 - t(\sigma-2)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)}$$

logo

$$Y(t)^{\frac{\sigma-2}{2}} \leq \frac{Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}}{\left(1 - t(\sigma-2)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)}.$$

Elevando tudo a $\dfrac{2}{\sigma-2}$ obtemos

$$\begin{aligned} Y(t) &\leq \left(1 - t(\sigma-2)Y(0)^{\frac{\sigma-2}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\sigma}} Y(0) \\ &\leq Y(0) \end{aligned} \tag{4.11}$$

para algum $t < T_{\max}$ pequeno.

Portanto $\displaystyle\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2 \leq K$ para algum K real. Como pela equação (4.7)

$$\int_\Omega |\nabla \times \boldsymbol{h}_m(t)|^{p(\cdot,t)} \leq \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_m(t)|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}},$$

a equação (4.5) é satisfeita. Substituindo novamente em (4.9) obtemos (4.6) para $t < T_{\max}$. A conclusão da prova da existência global de soluções no caso (4.3) e solução local no caso (4.4) segue de forma idêntica a última parte da demonstração de existência do Teorema 3.1. ∎

4.2 Blow-up

Nesta seção, estudaremos a explosão das soluções locais do problema (2.5). Consideremos primeiro o caso onde p depende apenas de x e depois de (x,t).

Teorema 4.2. *Seja $\boldsymbol{h}$ uma solução do problema (2.5) com $1 < p(\cdot) < \infty$, $\lambda = 1$ e $\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Suponha que*

$$E(0) = \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_0|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} - \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} \leq 0$$

e $\sigma > \max\{2, p^+\}$. *Então se* $\mu \in \left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{p^+}\right)$, *a solução do problema (2.5) explode no intervalo* $(0, t_{\max})$ *com*

$$t_{\max} = \frac{\mu\sigma}{(\sigma-2)(\mu\sigma-1)||\boldsymbol{h}_0||^{\sigma-2}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}}.$$

Prova: Seja

$$E(t) = \int_\Omega \frac{|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} - \frac{1}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Usando $\partial_t\boldsymbol{h}(t)$ como função teste em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\partial_t\boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega |\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}(t)\cdot\nabla\times\partial_t\boldsymbol{h}(t) &= \int_\Omega \boldsymbol{h}(t)\cdot\partial_t\boldsymbol{h}(t)\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\partial_t\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}\\
&= \frac{1}{\sigma}\partial_t\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\partial_t\boldsymbol{h}(t)|^2 + \partial_t\int_\Omega \frac{|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} = \frac{1}{\sigma}\partial_t\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} + I,$$

sendo que I é como definido no Capítulo 3, como neste caso $p(\cdot)$ não depende de t temos que $\partial_t p(\cdot) = 0$ implicando que $I = 0$. Assim integrando a equação acima de 0 à t temos

$$\int_{Q_T} |\partial_t\boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} - \int_\Omega \frac{|\nabla\times\boldsymbol{h}_0|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} = \frac{1}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}} - \frac{1}{\sigma}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}},$$

isto é

$$\int_{Q_T} |\partial_t\boldsymbol{h}(t)|^2 + E(t) = E(0),$$

logo

$$E(t) = E(0) - \int_{Q_T} |\partial_t\boldsymbol{h}(t)|^2 \leq 0, \tag{4.12}$$

Defina $F(t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{Q_t}|\boldsymbol{h}(t)|^2$, então temos

$$F'(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2 \quad \text{e} \quad F''(t)=\frac{1}{2}\partial_t\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2=\int_\Omega\partial_t\boldsymbol{h}(t)\cdot\boldsymbol{h}(t).$$

Usando $\boldsymbol{h}$ como função teste em (2.5)

$$\int_\Omega\partial_t\boldsymbol{h}(t)\cdot\boldsymbol{h}(t)+\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{h}(t)=\int_\Omega\boldsymbol{h}(t)\cdot\boldsymbol{h}(t)\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}-1},$$

portanto

$$F''(t)=\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}$$

e por (4.12), se $\dfrac{1}{\sigma}<\mu<\dfrac{1}{p^+}$

$$\begin{aligned}
\mu F''(t) &\geq E(t)+\mu\Bigg[\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}\Bigg]\\
&= \int_\Omega\frac{|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)}-\frac{1}{\sigma}\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}+\mu\Bigg[\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}-\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}\Bigg]\\
&\geq \Big(\frac{1}{p^+}-\mu\Big)\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}+\Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big)\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}\\
&\geq \Big(\frac{1}{p^+}-\mu\Big)\int_\Omega|\nabla\times\boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot)}+\Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big)\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}\\
&\geq \Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big)\Big(\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2\Big)^{\frac{\sigma}{2}}.
\end{aligned}$$

Se definirmos $Y(t)=\displaystyle\int_\Omega|\boldsymbol{h}(t)|^2$ então teremos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu\frac{1}{2}\partial_tY(t)-\Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big)Y(t)^{\frac{\sigma}{2}}\\
&= \frac{\mu}{2}Y'(t)Y(t)^{\frac{-\sigma}{2}}-\Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big)\\
&= \Big(\frac{\mu}{2-\sigma}\Big)\partial_tY(t)^{\frac{2-\sigma}{2}}-\Big(\mu-\frac{1}{\sigma}\Big),
\end{aligned}$$

integrando de 0 à t resulta em

$$\left(\frac{\mu}{2-\sigma}\right)Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} \geq \left(\frac{\mu\sigma-1}{\sigma}\right)t + \frac{\mu}{2-\sigma}Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}},$$

ou seja

$$Y(t)^{\frac{2-\sigma}{2}} \geq \left(\frac{2-\sigma}{\mu}\right)\left(\frac{\mu\sigma-1}{\sigma}\right)t + \left(\frac{2-\sigma}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{2-\sigma}\right)Y(0)^{\frac{2-\sigma}{2}},$$

donde segue que

$$\begin{aligned} Y(t) &\geq \left[\left(\frac{\mu\sigma-1}{\mu\sigma}\right)(2-\sigma)t + \left(Y(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{(2-\sigma)}\right]^{\frac{2}{2-\sigma}} \\ &= \left[\left[\left(\frac{\mu\sigma-1}{\mu\sigma}\right)(2-\sigma)t + \left(Y(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{(2-\sigma)}\right]^{\frac{2}{\sigma-2}}\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{\left[\left(\frac{\mu\sigma-1}{\mu\sigma}\right)(2-\sigma)t + \left(Y(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{(2-\sigma)}\right]^{\frac{2}{\sigma-2}}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \geq \frac{1}{\left[\left(\frac{\mu\sigma-1}{\mu\sigma}\right)(2-\sigma)t + \left(Y(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{(2-\sigma)}\right]^{\frac{2}{\sigma-2}}}$$

para

$$t < t_{\max} = \frac{\mu\sigma}{(\sigma-2)(\mu\sigma-1)||\boldsymbol{h}_0||^{\sigma-2}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}} \tag{4.13}$$

Teorema 4.3. *Seja $\boldsymbol{h}$ uma solução do problema (2.5) com $1 < p(\cdot,\cdot) < \infty$, $-C \leq \partial_t p \leq 0$ q.t.p. em Q_T com C uma constante positiva, $\lambda = 1$ e $\boldsymbol{h}_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Suponha que*

$$E(0) = \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_0|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} - \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}_0|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}} < 0,$$

$\sigma > \max\{2, p^+\}$ e C pequeno o suficiente tal que $t_{\max} < \dfrac{|E(0)|(p^-)^2}{|\Omega|^C}$ para $t_{\max}$ definido em (4.13). Então qualquer solução do problema (2.5) explode quando $t \nearrow t_{\max}$.

Prova: Usando $\partial_t \boldsymbol{h}(t)$ como função teste em (2.5) e recordando agora que p depende agora de (x,t) segue do que foi feito na prova da Proposição 3.2 que

$$\int_\Omega |\partial_t \boldsymbol{h}(t)|^2 + \partial_t \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = I + \frac{1}{\sigma}\partial_t \left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}}$$

onde

$$I = \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)^2}(-1 + p(\cdot,t)\log|\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|)\partial_t p(\cdot,t).$$

Integrando de 0 à t temos que

$$\int_{Q_t} |\partial_t \boldsymbol{h}(t)|^2 + \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} = \int_0^t I + \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}_0|^{p(\cdot,0)}}{p(\cdot,0)} + \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}} - \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}},$$

Definindo

$$E(t) = \int_\Omega \frac{|\nabla \times \boldsymbol{h}(t)|^{p(\cdot,t)}}{p(\cdot,t)} - \frac{1}{\sigma}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{h}(t)|^2 \right)^{\frac{\sigma}{2}}$$

concluímos que

$$E(t) + \int_{Q_t} |\partial_t \boldsymbol{h}(\tau)|^2 = E(0) + \int_0^t I,$$

mas por (3.16) sabemos que $I \leq \dfrac{C|\Omega|}{(p^-)^2}$.

Então para algum t_0 suficientemente pequeno temos que para todo $t \leq t_0$

$$E(0) + \int_0^t I \leq 0$$

e concluímos a demonstração como no teorema anterior. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Antontsev, S; Miranda, F; Santos, L. Blow-up and finite time extinction for $p(x,t)$-curl systems arising in electromagnetism. **Journal of Mathematical Analysis and Applications.** v.440, p. 300-322, (2016) Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.045>.

[2] Guimarães, C, J. **Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o *p(x)*-Laplaciano.** Centro de Ciências e Teconologia - UFCG, Campina Grande, 2006.

[3] Barbu, V. **Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces**, Springer, Berlin, 2010.

[4] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 2° edition, 2003.

[5] Diening, L; et al. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. **Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.** vol.2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[6] Brezis, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] Dienig, L. et al, **Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents.** 3. ed. London New York: Springer Berlin Heidelberg, (2011).

[8] Bonelli, R, C. **Desigualdades Matemáticas e Aplicações.** Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.

[9] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S, **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2001.

[10] Simon, J, Compact sets in the space Lp(0, T; B). **Annali di Matematica Pura ed Applicata.** v.146, p. 65-96, (1987). Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225973895_Compact_sets_in_the _spaceLpOT_B>.

[11] Miranda, F; Rodrigues, J.F; Santos, L. A class of stationary nonlinear Maxwell systems **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.** v.19, p. 1883-1905, (2009) Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218202509003966>.

[12] Antontsev, S,N; Shmarev, S. Vanishing solutions of anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity. **J. Math. Anal.** v.361, p. 371-391, (2010) Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2012.02.
011>.

[13] Antontsev, S,N; Shmarev, S. **Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up**. Atlantis Studies in Differential Equations, Atlantis Press, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.026>.