

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**RETRATOS DE FASE GLOBAIS DE CAMPOS DE
VETORES POLINOMIAIS NO PLANO E A
CONJECTURA JACOBIANA REAL**

Gina Maritzell Colmenares Jiménez

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Coorientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES

ITAJUBÁ, 1 DE JULHO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**RETRATOS DE FASE GLOBAIS DE CAMPOS DE
VETORES POLINOMIAIS NO PLANO E A
CONJECTURA JACOBIANA REAL**

Gina Maritzell Colmenares Jiménez

Orientador: Prof. Dr. Luis Fernando Mello

Co Orientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática como parte dos requisitos para obtenção do
Título de Mestre em Ciências em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Ordinárias

ITAJUBÁ – MG

1 DE JULHO DE 2019

Esta dissertação é dedicada ao amor da minha vida: Angelo Valentino.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que me permitiu esta e muitas outras conquistas ao longo da minha vida;

Ao Palermo e Santos, meus pais, por terem me auxiliado na minha formação, pelo amor incondicional, pelo respeito, pela dedicação. Vocês são meu maior exemplo de vida!

Ao Valentín, por alimentar em mim um amor cada vez maior pela matemática.

Ao Franz e Annete, pela amizade, pelo amor, pelo apoio e por terem acreditado em mim. Vocês são os melhores irmãos do mundo.

Ao professor Luis Fernando, meu orientador, pela confiança, dedicação, profissionalismo, ajuda e por todos os ensinamentos ao longo da orientação.

Ao professor Denis, meu coorientador, pela ajuda, profissionalismo, pelo conhecimento que me transmitiu, dedicação, amizade e paciência.

A todos os professores da UNIFEI que fizeram parte de minha vida acadêmica.

Ao meus amigos, por terem acreditado no meu potencial;

À banca examinadora, por ter aceitado o convite e pelas sugestões;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES, pelo apoio financeiro.

Finalmente, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma com esta dissertação, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

A Conjectura Jacobiana Real Forte, relacionada com a Conjectura Jacobiana, afirma que uma transformação polinomial do plano no plano com Jacobiano não nulo é injetora. Numa célebre construção, Pinchuk forneceu um contraexemplo para esta conjectura, o qual tem orientado muitas pesquisas nesta área. A função polinomial $F = (p, q)$, obtida por Pinchuk, consiste num par de funções polinomiais p de grau 10 e q de grau 40. Posteriormente, Campbell mostrou que o grau de q pode ser reduzido a 25. Neste trabalho, apresentamos os retratos de fase globais dos campos vetoriais Hamiltonianos H_p e H_q associados à aplicação polinomial de Pinchuk.

Palavras-chave: Conjectura Jacobiana, Aplicação de Pinchuk, Retrato de fase.

Abstract

The Strong Real Jacobian Conjecture, related to the Jacobian Conjecture, states that a planar polynomial map with non vanishing Jacobian is injective. In a celebrated construction, Pinchuk provided a counterexample to this conjecture which has guided much research in this area. The polynomial function $F = (p, q)$, obtained by Pinchuk, consists of a pair of polynomial functions, p of degree 10 and q of degree 40. Campbell showed that the degree of q can be reduced to 25. In this work, we present the global phase portraits of the Hamiltonian polynomial vector fields H_p and H_q associated to the Pinchuk polynomial map.

Keywords: Jacobian conjecture, Pinchuk map, Phase portrait.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 O Problema Principal e as Conjecturas Jacobianas	1
1.2 Revisão da Literatura	3
1.3 Resultados da Dissertação	6
1.4 Estrutura da Dissertação	9
2 Preliminares	10
2.1 Primeiras Definições e Teoremas	10
2.2 Estrutura Local de Pontos Singulares	13
2.3 A Técnica do <i>Blow Up</i>	16
2.4 Compactificação de Poincaré	20
2.5 Sobre o Exemplo de Pinchuk	27
2.5.1 Demonstração do Teorema 1.2	29

3	Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_p, sendo p de grau 10	31
3.1	Estudo das Singularidades Infinitas do Campo Vetorial H_p	31
3.1.1	Estudo Qualitativo na Carta U_1	31
3.1.2	Estudo Qualitativo na Carta U_2	41
3.2	Variedade Assintótica	49
3.3	Parte Finita	50
3.4	Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_p	62
4	Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_q, sendo q de grau 25	65
4.1	Estudo das Singularidades Infinitas do Campo Vetorial H_q	65
4.1.1	Estudo Qualitativo na Carta U_1	66
4.1.2	Estudo Qualitativo na Carta U_2	74
4.2	Parte Finita	84
4.3	Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_q	92
	Conclusões	95
	Bibliografia	96
	Anexo I	98
	Anexo II	114

Lista de Figuras

1.1	Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré.	7
1.2	Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré.	8
2.1	Setores de um ponto singular p de acordo com a Definição 2.10. (a) Setor parabólico atrator. (b) Setor parabólico repulsor. (c) Setor hiperbólico. (d) Setor elíptico.	16
2.2	Projeções centrais.	21
2.3	Cartas locais U_1, U_2 e U_3 da esfera de Poincaré.	23
2.4	Meia componente de Reeb.	27
2.5	Esboço do gráfico de $y = y(x)$	30
3.1	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.6) na singularidade $(0, -1)$	36
3.2	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.5).	37
3.3	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.5) nas três singularidades, a origem, os pontos $(1, 0)$ e $(2, 0)$	37
3.4	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.4).	38
3.5	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.3) nas singularidades, na origem e no ponto $(0, 1)$	39
3.6	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.2).	40

3.7	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.1) na carta U_1	41
3.8	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.12) com a singularidade na origem.	44
3.9	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.12).	45
3.10	Esboço topológico do retrato de fase local do campo vetorial (3.11).	46
3.11	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.10) nas singularidades $(0, 0)$ e $(0, -1)$	46
3.12	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.9).	47
3.13	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.8).	48
3.14	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.7) na carta U_2	48
3.15	Esboço topológico do retrato de fase local da compactificação do campo vetorial H_p no infinito no disco de Poincaré.	49
3.16	Curva assintótica β	50
3.17	Componentes conexas do nível $c = 0$	53
3.18	Componentes conexas do nível $c = -1$	54
3.19	Curvas de nível -1 e 0 de p no disco de Poincaré.	57
3.20	Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré.	63
3.21	Retrato de fase de $\mathcal{P}(H_p)$, no disco de Poincaré, obtido através do <i>software</i> MATLAB.	64
4.1	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.5) na singularidade $(0, -1)$	70
4.2	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.4).	71
4.3	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.3).	71

4.4	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.2) nas singularidades na origem e no ponto $(0, 1)$	72
4.5	Esboço topológico do <i>blow down</i> do retrato de fase local do campo de vetores (4.2) nas singularidades $(0, 0)$ e $(0, 1)$	73
4.6	Esboço topológico do retrato de fase local após o <i>blow down</i> do campo de vetores (4.2).	73
4.7	Comportamento qualitativo do retrato de fase local do campo de vetores (4.1) na carta U_1	74
4.8	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.11) nas singularidades, na origem e no ponto $(0, -0.47)$	79
4.9	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.10).	80
4.10	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.9).	80
4.11	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.9) com a sela	81
4.12	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.8).	81
4.13	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.8) com o ponto repulsor $(0, 1)$	82
4.14	Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.7).	83
4.15	Comportamento qualitativo da singularidade do retrato de fase local do campo de vetores (4.6) na carta U_2	83
4.16	Esboço topológico do retrato de fase local da compactificação do campo vetorial H_q no infinito no disco de Poincaré.	84
4.17	Esboço das curvas de nível dos polinômios p e q	88
4.18	Curvas de nível $-163/4$ e 0 de q no disco de Poincaré.	90
4.19	Esboço do gráfico de $T'(x)$	91
4.20	Esboço do gráfico de $V'(y)$	92
4.21	Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré.	93
4.22	Retrato de fase de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré, obtido através do <i>software</i> MATLAB.	94

Lista de Tabelas

3.1	Componentes conexas de $p^{-1}(\{c\})$	50
4.1	Componentes conexas de $q^{-1}(\{c\})$	85

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo aborda a ideia geral desta dissertação, com a apresentação do problema a ser estudado, a revisão da literatura, resultados e a estrutura do trabalho.

1.1 O Problema Principal e as Conjecturas Jacobianas

Nosso trabalho está inserido no seguinte problema geral.

Problema 1. *Dada uma aplicação $F : U \rightarrow V$, em que U e V são conjuntos não vazios, resolver a equação $y = F(x)$, para $y \in V$.*

Ao resolver o Problema 1, em geral, procura-se por resultados que garantam a **existência** e a **unicidade** de soluções para uma ampla classe de funções F . Assim, relacionado com o Problema 1, propõe-se o seguinte problema.

Problema 2 (Fundamental). *Dada uma aplicação $F : U \rightarrow V$, em que condições ela admite uma inversa (global)?*

O Problema Fundamental, assim colocado, é muito geral e difícil. Deste modo, utilizaremos estruturas da Análise e assumiremos que os conjuntos U e V são subconjuntos do espaço euclidiano \mathbb{E}^n , o qual, por sua vez, pode ser \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n .

É usual trabalhar com condições relacionadas ao Jacobiano da função ou aplicação. Por exemplo, supondo que a aplicação F tem Jacobiano não nulo em cada ponto, o que pode ser dito em relação à injetividade? Neste contexto, a passagem do pontual para o local é dada pelo Teorema da Função Inversa, isto é, se uma aplicação F possui Jacobiano não nulo num ponto, então a injetividade é garantida pelo menos numa vizinhança U desse ponto. A condição acima não é suficiente para a questão da injetividade global. De fato, considere a aplicação F do plano no plano, definida por

$$F(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)),$$

cujo Jacobiano é não nulo em todo ponto. A função F é localmente injetora, mas não é globalmente injetora.

A partir dos comentários anteriores, podemos formular a seguinte pergunta: quais são os mecanismos que influenciam a passagem da invertibilidade local para a invertibilidade global? Em particular, no caso de aplicações polinomiais definidas em \mathbb{C}^n , Ott-Heinrich Keller introduziu em 1939, no artigo [14], a seguinte conjectura.

Conjectura 1.1 (Conjectura Jacobiana). *Considere $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então, F é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

A Conjectura Jacobiana tem sido considerada um dos principais problemas matemáticos do século XXI, ver por exemplo S. Smale [20]. Já no espaço \mathbb{R}^n esta conjectura é enunciada da seguinte maneira.

Conjectura 1.2 (Conjectura Jacobiana Real). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo. Então, F é invertível e a sua inversa é uma aplicação polinomial.*

Se modificarmos a condição sobre o Jacobiano na Conjectura Jacobiana Real obtemos a seguinte conjectura.

Conjectura 1.3 (Conjectura Jacobiana Real Forte). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é invertível.*

1.2 Revisão da Literatura

Sabe-se que, nas hipóteses das Conjecturas Jacobianas, se $F : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é uma aplicação polinomial injetora, então ela é sobrejetora (e a sua inversa é uma aplicação polinomial quando trabalhamos em \mathbb{C}^n), conforme foi provado em 1995 por Rudin em [19]. Por outro lado, uma resposta à Conjectura Jacobiana Real pode ser dada pelo Teorema de Hadamard. Antes, precisamos da seguinte definição. Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada **própria** se $F^{-1}(K)$ é um compacto, sempre que K for um compacto ou, equivalentemente, a aplicação contínua F é própria se

$$\|F(x)\| \rightarrow \infty, \text{ sempre que } \|x\| \rightarrow \infty.$$

No artigo [9] de Gordon podemos encontrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 (Hadamard). *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é um difeomorfismo global se, e somente se, F é própria.*

Em 1994, Pinchuk provou no artigo [17] que a Conjectura Jacobiana Real Forte é falsa em \mathbb{R}^2 . Nesta dissertação, apresentaremos parte do trabalho de Pinchuk. Mais precisamente, no Capítulo 2 daremos uma ideia da prova do seguinte teorema.

Teorema 1.2 (Teorema de Pinchuk). *Existe $F = (p, \bar{q}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto, mas não injetora.*

A função polinomial $F = (p, \bar{q})$, obtida por Pinchuk, consiste num par de funções polinomiais p e \bar{q} em que p , dada por

$$p(x, y) = (x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y), \quad (1.1)$$

tem grau 10 e \bar{q} , dada por

$$\begin{aligned}
\bar{q}(x, y) = & \frac{75}{4}y^{16}x^{24} - 300y^{15}x^{23} + 225y^{15}x^{22} + 2250y^{14}x^{22} - 3225y^{14}x^{21} - \\
& 10500y^{13}x^{21} + \frac{2475}{2}y^{14}x^{20} + 21525y^{13}x^{20} + 34125y^{12}x^{20} - \\
& 15750y^{13}x^{19} - 88725y^{12}x^{19} - 81900y^{11}x^{19} + 4125y^{13}x^{18} + \\
& \frac{185313}{2}y^{12}x^{18} + 252525y^{11}x^{18} + 150150y^{10}x^{18} - 46125y^{12}x^{17} - \\
& 333828y^{11}x^{17} - 525525y^{10}x^{17} - 214500y^9x^{17} + \frac{37125}{4}y^{12}x^{16} + \\
& 236421y^{11}x^{16} + \frac{1645083}{2}y^{10}x^{16} + 825825y^9x^{16} + \frac{482625y^8x^{16}}{2} - \\
& 90000y^{11}x^{15} - 735192y^{10}x^{15} - 1465530y^9x^{15} - 997425y^8x^{15} - \\
& 214500y^7x^{15} + 14850y^{11}x^{14} + 396234y^{10}x^{14} + 1546890y^9x^{14} + \\
& \frac{3892185}{2}y^8x^{14} + 933075y^7x^{14} + 150150y^6x^{14} - 122850y^{10}x^{13} - \\
& 1047060y^9x^{13} - 2324835y^8x^{13} - 1955448y^7x^{13} - 675675y^6x^{13} - \\
& 81900y^5x^{13} + 17325y^{10}x^{12} + 456246y^9x^{12} + \frac{3699443}{2}y^8x^{12} + \\
& 2567250y^7x^{12} + \frac{2986137}{2}y^6x^{12} + 375375y^5x^{12} + 34125y^4x^{12} - \\
& 119700y^9x^{11} - 1004346y^8x^{11} - 2302442y^7x^{11} - 2109312y^6x^{11} - \\
& 861498y^5x^{11} - 156975y^4x^{11} - 10500y^3x^{11} + 14850y^9x^{10} + \\
& 366219y^8x^{10} + 1457301y^7x^{10} + 2072917y^6x^{10} + 1290249y^5x^{10} + \\
& \frac{739035}{2}y^4x^{10} + 47775y^3x^{10} + 2250y^2x^{10} - 83250y^8x^9 - \\
& 653940y^7x^9 - 1465801y^6x^9 - 1362782y^5x^9 - 581115y^4x^9 - \\
& 114180y^3x^9 - 9975y^2x^9 - 300yx^9 + \frac{37125}{4}y^8x^8 + 203094y^7x^8 + \\
& \frac{1511655}{2}y^6x^8 + 1045365y^5x^8 + \frac{2605285}{4}y^4x^8 + 187785y^3x^8 + \\
& \frac{48033}{2}y^2x^8 + 1275yx^8 + \frac{75}{4}x^8 - 40500y^7x^7 - 283248y^6x^7 - \\
& 591740y^5x^7 - 530121y^4x^7 - 221654y^3x^7 - 41400y^2x^7 - 3078yx^7 - \\
& 75x^7 + 4125y^7x^6 + 75096y^6x^6 + 248804y^5x^6 + \frac{635821}{2}y^4x^6 + \\
& 187781y^3x^6 + 51247y^2x^6 + 5616yx^6 + \frac{363}{2}x^6 - 13125y^6x^5 - \\
& 77112y^5x^5 - 142133y^4x^5 - 115356y^3x^5 - 44241y^2x^5 - 7262yx^5 - \\
& 357x^5 + \frac{2475}{2}y^6x^4 + 17109y^5x^4 + \frac{94875}{2}y^4x^4 + 52156y^3x^4 + \\
& \frac{53551}{2}y^2x^4 + 6201yx^4 + 478x^4 - 2550y^5x^3 - 11625y^4x^3 - \\
& 17440y^3x^3 - 11564y^2x^3 - 3512yx^3 - 385x^3 + 225y^5x^2 + \frac{4017}{2}y^4x^2 + \\
& 4224y^3x^2 + 3575y^2x^2 + 1352yx^2 + \frac{381}{2}x^2 - 225y^4x - 696y^3x - \\
& 758y^2x - 346yx - 61x + \frac{75}{4}y^4 + 69y^3 + 91y^2 + 50y + \frac{33}{4},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

tem grau 40. Propriedades geométricas da aplicação $F = (p, \bar{q})$ de Pinchuk foram estudadas por Gwozdziejewicz em [11].

No artigo [5], Campbell mostrou que o grau da segunda componente da aplicação polinomial de Pinchuk pode ser reduzido a 25, encontrando a função polinomial q dada por

$$\begin{aligned}
q(x, y) = & -75x^{15}y^{10} + \frac{199x^2}{2} - 450x^{13}y^9 - 3375x^{13}y^8 + \frac{15045x^{12}y^8}{4} + \\
& 9000x^{12}y^7 - 1125x^{11}y^8 - 13890x^{11}y^7 - 15750x^{11}y^6 + 7575x^{10}y^7 + \\
& 29715x^{10}y^6 + 18900x^{10}y^5 - 1500x^9y^7 - 21959x^9y^6 - 40530x^9y^5 - \\
& 15750x^9y^4 + \frac{15375x^8y^6}{2} + 35679x^8y^5 + \frac{72975x^8y^4}{2} + 9000x^8y^3 - \\
& 1125x^7y^6 - 16298x^7y^5 - 35385x^7y^4 - 21630x^7y^3 - 3375x^7y^2 + \\
& 3975x^6y^5 + 750x^6y + 21805x^6y^3 + 8115x^6y^2 + + \frac{36833x^6y^4}{2} - \\
& 450x^5y^5 - 5409x^5y^4 - 11936x^5y^3 - 8085x^5y^2 - 1740x^5y - 75x^5 + \\
& \frac{3525x^4y^4}{4} + 3688x^4y^3 + \frac{8953x^4y^2}{2} + 1629x^4y + \frac{645x^4}{4} - 75x^3y^4 - \\
& 560x^3y^3 - 1485x^3y^2 - 946x^3y - 134x^3 + 30x^2y^3 + \frac{569x^2y^2}{2} + \\
& 417x^2y + 750x^{14}y^9 - 5xy^2 - 164xy - 61x + 50y + \frac{33}{4}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Definindo $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (p(x_1, x_2), q(x_1, x_2), x_3, x_4, \dots, x_n),$$

em que p e q são como no contraexemplo de Pinchuk, encontramos um contraexemplo à Conjectura Jacobiana Real Forte em \mathbb{R}^n , para $n \geq 2$.

Existem respostas afirmativas à Conjectura Jacobiana Real Forte em \mathbb{R}^2 considerando os graus das componentes de $F = (f, g)$. Por exemplo, no artigo [12], Gwozdziejewicz provou que esta conjectura é verdadeira se os graus de f e g são menores ou iguais a 3. Em [2], Braun e dos Santos Filho provaram que a Conjectura Jacobiana Real Forte é verdadeira desde que o grau de uma das funções coordenadas de F seja menor ou igual a 3, independentemente do grau da outra. O melhor resultado nesta direção foi obtido por Braun e Oréface–Okamoto em [4]. Nesse artigo, estendendo o resultado anterior de

[2], os autores provaram que a Conjectura Jacobiana Real Forte é verdadeira desde que o grau de uma das funções coordenadas de F , por exemplo f , seja menor ou igual a 4, independentemente do grau de g . Baseados nestes trabalhos, terminamos esta seção deixando a seguinte questão.

Questão 1.1. *O que pode ser dito a respeito da Conjectura Jacobiana Real Forte em \mathbb{R}^2 se o grau de uma das funções coordenadas de $F = (f, g)$ é maior ou igual a 5 e menor ou igual a 9?*

1.3 Resultados da Dissertação

Dada uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o campo Hamiltoniano H_f associado a f é definido por

$$H_f(x, y) = (-f_y(x, y), f_x(x, y)),$$

o qual tem a seguinte propriedade: as suas trajetórias estão contidas nas curvas de nível de f .

O objetivo principal desta dissertação é entender os retratos de fase globais dos campos H_p e H_q , em que p e q são dados em (1.1) e (1.3), respectivamente, e, deste modo, entender as curvas de nível de p e q , as quais, como veremos adiante, estão relacionadas com a injetividade. Neste contexto, provamos os seguintes teoremas.

Teorema 1.3. *Se p é como em (1.1), então o retrato de fase topológico global da compactificação de Poincaré do campo H_p , $\mathcal{P}(H_p)$, é tal como na Figura 1.1.*

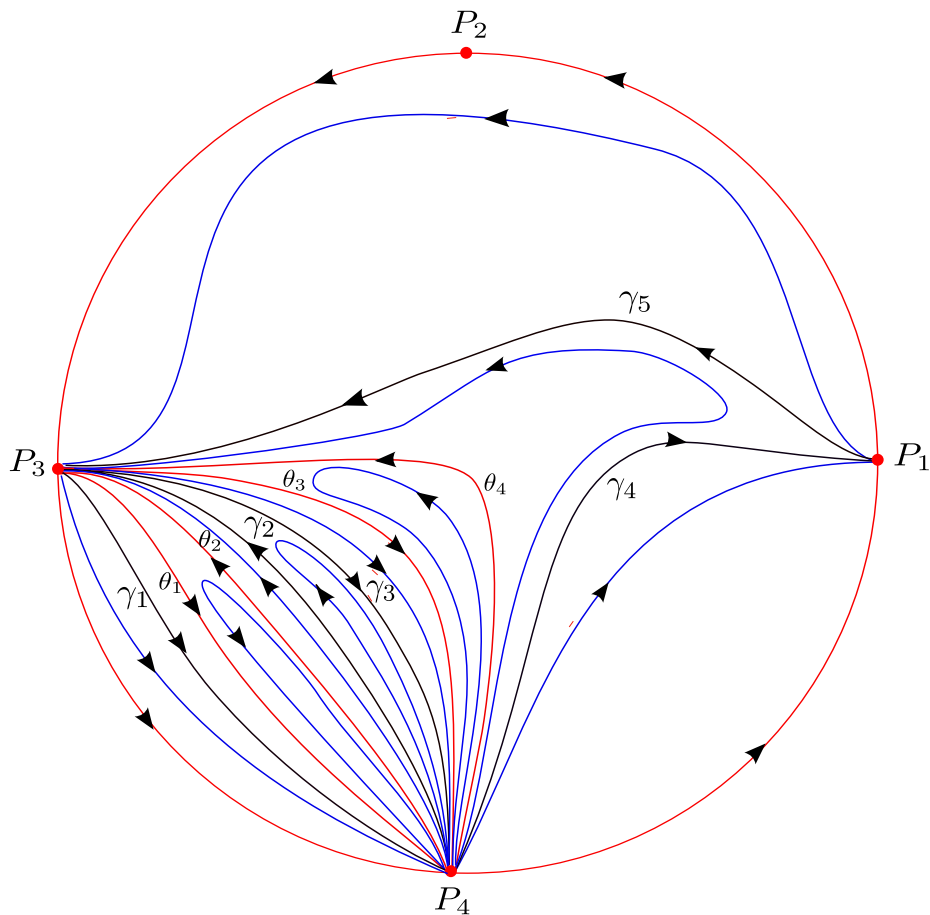


Figura 1.1: Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré.

Seguindo a compactificação de Poincaré de H_p , vemos que este campo possui 4 pontos singulares no infinito que são pontos no equador da esfera, denotados por P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . A decomposição setorial de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré é a seguinte (veja Figura 1.1):

- a. Existe um setor hiperbólico e dois setores parabólicos em P_1 ;
- b. Existe um setor hiperbólico em P_2 ;
- c. Existem três setores hiperbólicos e cinco setores parabólicos em P_3 ;
- d. Existem três setores elípticos e cinco setores parabólicos em P_4 .

Também, o conjunto de nível $p^{-1}(\{0\})$ tem 5 componentes conexas $\gamma_1, \dots, \gamma_5$, ilustradas em preto. O conjunto de nível $p^{-1}(\{-1\})$ tem 4 componentes conexas $\theta_1, \dots, \theta_4$, ilustradas em vermelho e o campo H_p possui exatamente 4 meias componentes de Reeb.

Teorema 1.4. *Se q é como em (1.3), então o retrato de fase topológico global da compactificação de Poincaré do campo H_q , $\mathcal{P}(H_q)$, é tal como a Figura 1.2.*

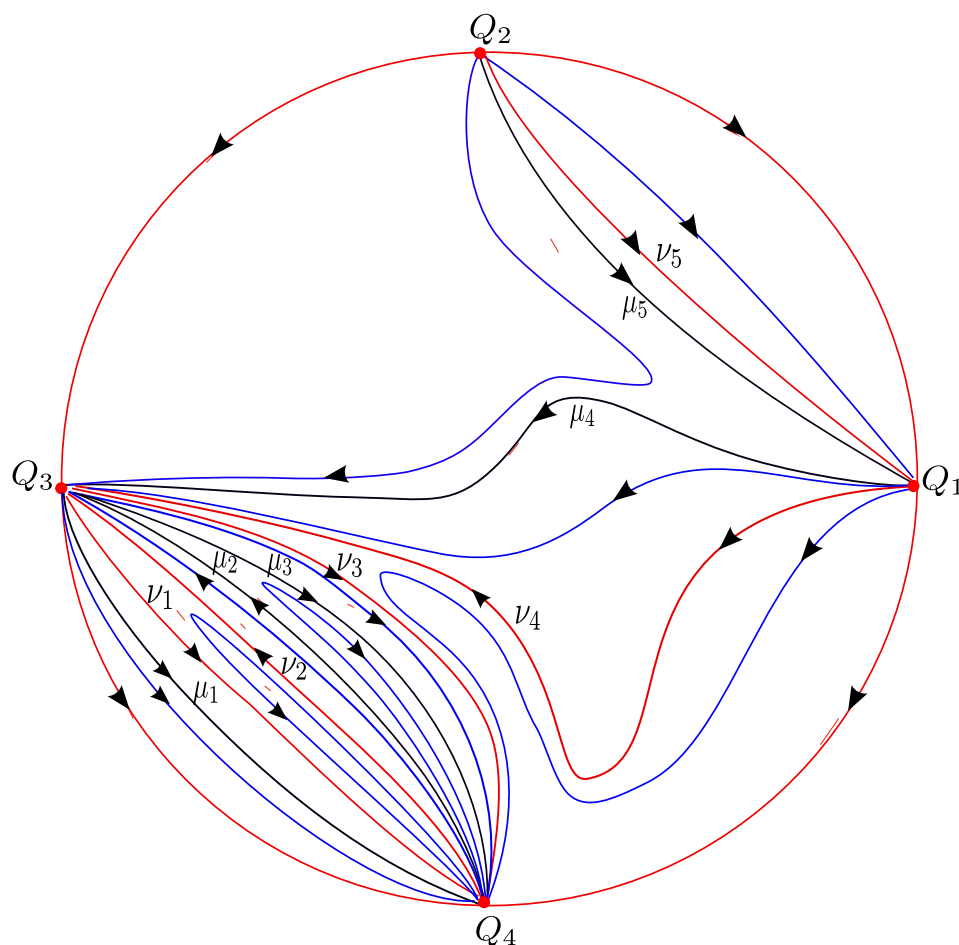


Figura 1.2: Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré.

Seguindo a compactificação de Poincaré de H_q , vemos que este campo possui 4 pontos singulares no infinito que são pontos no equador da esfera, denotados por Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_4 . A decomposição setorial de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré é a seguinte (veja Figura 1.2):

- a. Existe um setor hiperbólico e três setores parabólicos em Q_1 ;
- b. Existem dois setores parabólicos em Q_2 ;

- c. Existem três setores hiperbólicos e cinco setores parabólicos em Q_3 ;
- d. Existem dois setores elípticos e quatro setores parabólicos em Q_4 .

Além disso, o conjunto de nível $q^{-1}(\{0\})$ tem 5 componentes conexas μ_1, \dots, μ_5 , ilustradas em preto. O conjunto de nível $q^{-1}(\{-163/4\})$ tem 5 componentes conexas ν_1, \dots, ν_5 , ilustradas em vermelho e o campo H_q possui exatamente 4 meias componentes de Reeb.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentaremos conceitos e definições que serão utilizados ao longo do texto, por exemplo, a técnica do *blow up*, a compactificação de Poincaré e uma ideia da demonstração do Teorema de Pinchuk.

No Capítulo 3, estudaremos o retrato de fase da compactificação de Poincaré do campo de vetores H_p e faremos a demonstração do Teorema 1.3. Já no Capítulo 4, estudaremos o retrato de fase da compactificação de Poincaré do campo de vetores H_q e faremos a demonstração do Teorema 1.4.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, discutiremos alguns conceitos da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais que serão utilizados ao longo do texto, trataremos da técnica do *blow up*, a compactificação de Poincaré e no final demonstraremos o Teorema de Pinchuk.

2.1 Primeiras Definições e Teoremas

Teorema 2.1 (Teorema da Função Implícita). *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\partial f(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$. Então, existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0) , tal que $f^{-1}(\{c\}) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \rightarrow J$ de classe C^k . Além disto,*

$$\xi'(x) = -\frac{\partial f(x, \xi(x))/\partial x}{\partial f(x, \xi(x))/\partial y}, \quad \forall x \in I.$$

Como $(x_0, y_0) \in I \times J$, o intervalo aberto I contém x_0 , enquanto J contém y_0 . A afirmação de que $f^{-1}(\{c\}) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \rightarrow J$ significa que, para cada $x \in I$, existe um único $y \in J$ com $f(x, y) = c$. Colocando $y = \xi(x)$, a função $\xi : I \rightarrow J$ diz-se “definida implicitamente”, no aberto $I \times J$, pela equação $f(x, y) = c$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 161 do livro [15].

Teorema 2.2 (Teorema da Função Inversa). *Considere $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a transformação linear*

$$DF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

seja um isomorfismo. Então, existem vizinhanças U_0 e V_0 de x_0 e de $F(x_0)$, respectivamente, tais que $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada na página 239 do livro [18].

Para as próximas definições, considere Δ um conjunto aberto do Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . A equação diferencial

$$x' = X(x), \tag{2.1}$$

está associada com o campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Diremos que φ é uma solução da equação diferencial (2.1) se*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo $t \in I$.

Definição 2.2. *Um ponto $p_0 \in \Delta$ é ponto de equilíbrio de X se $X(p_0) = 0$.*

Ao longo do texto, utilizaremos os termos ponto de equilíbrio, ponto singular e singularidade como sinônimos.

Definição 2.3. *Seja $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$. Uma função $\varphi : I \rightarrow \Delta$ é solução máxima em I ou maximal em I de (2.1) se para toda solução em J*

$$\psi : J \rightarrow \Delta$$

$$t \mapsto \psi(t)$$

de $x' = X(x)$, tal que $I \subset J$ e $\varphi(t) = \psi(t)$, $\forall t \in I$, isto é,

$$\varphi = \psi|_I,$$

então $I = J$ e, conseqüentemente, $\varphi = \psi$. O intervalo I é chamado de intervalo máximo ou maximal.

Definição 2.4. O retrato de fase de um campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, é a decomposição do conjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ pelas órbitas de X , sendo que estas órbitas estão orientadas pelas curvas integrais de X . Os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

Definição 2.5. Sejam $X_1 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^k , $k \geq 1$, nos abertos Δ_1 e Δ_2 , respectivamente. Diremos que X_1 é topologicamente equivalente a X_2 se existir um homeomorfismo h que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 preservando a orientação. Mais precisamente, se $p \in \Delta_1$ e γ_p^1 é a órbita orientada de X_1 passando pelo ponto p , então

$$h(\gamma_p^1) = \gamma_{h(p)}^2,$$

sendo $\gamma^2 h(p)$ a órbita orientada de X_2 passando pelo ponto $h(p) \in \Delta_2$. A função $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ é chamada de equivalência topológica entre X_1 e X_2 .

Definição 2.6. Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, e $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, define-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados, respectivamente, de conjunto ω -limite e conjunto α -limite de p .

Teorema 2.3. Seja $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$ a semiórbita positiva do campo vetorial X pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ está contida num subconjunto compacto $K \subset \Delta$, então:

- a. $\omega(p) \neq \emptyset$;
- b. $\omega(p)$ é compacto;

- c. $\omega(p)$ é invariante por X , isto é, se $q \in \omega(p)$, então a curva integral de X passando por q está contida em $\omega(p)$;
- d. $\omega(p)$ é conexo.

Observe que o mesmo resultado é válido para a semiórbita negativa, $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p); t \leq 0\}$, e para o conjunto $\alpha(p)$.

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada na página 13 do livro [8].

Teorema 2.4 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, e $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que $\gamma^+(p)$ esteja contida num compacto $K \subset \Delta$. Se $\omega(p)$ não possui pontos singulares, então, $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada na página 24 do livro [8].

2.2 Estrutura Local de Pontos Singulares

Definição 2.7. *Sejam $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, e p um ponto singular de X . Dizemos que*

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

é a parte linear do campo vetorial X no ponto singular p . O ponto singular p é chamado:

- i. não degenerado, se 0 não é autovalor de $DX(p)$;
- ii. hiperbólico, se a parte real de cada autovalor de $DX(p)$ é não nula;
- iii. semi-hiperbólico, se exatamente um autovalor de $DX(p)$ é igual a 0;
- iv. nilpotente, se ambos os autovalores de $DX(p)$ forem nulos, mas $DX(p) \neq 0$;

v. linearmente nulo, se $DX(p) \equiv 0$;

vi. centro, se existir uma vizinhança de p consistindo apenas de órbitas periódicas. A singularidade é chamada de **linearmente centro**, se os autovalores de $DX(p)$ são complexos conjugados não nulos, mas com partes reais nulas.

Teorema 2.5 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de $0 \in \mathbb{R}^2$, tais que $X|_W$ é topologicamente equivalente a $DX(p)|_V$.*

A demonstração do teorema anterior pode ser encontrada na página 287 do livro [24].

Teorema 2.6 (Teorema da Curva de Jordan). *Seja \mathcal{C} uma curva de Jordan. Então, seu complementar $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ tem duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada, denotada por $\text{int}(\mathcal{C})$, e a outra ilimitada, denotada por $\text{ext}(\mathcal{C})$, sendo \mathcal{C} a fronteira comum das duas.*

A prova pode ser encontrada na página 89 do livro [10].

Definição 2.8. *Seja p um ponto singular. Dizemos que $\gamma(t)$ é uma órbita característica em p , se $\gamma(t) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ e o $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\gamma(t) - p) / \|\gamma(t) - p\|$ existe.*

Definição 2.9. *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 com um ponto singular $p \in \Delta$, $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização de uma curva de Jordan \mathcal{C} de classe C^2 orientada positivamente, tal que $\phi'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [0, 1]$, $p \in \text{int}(\mathcal{C})$ sendo o único ponto singular de X em $\text{int}(\mathcal{C})$.*

- i. Dizemos que p é um **centro**, se \mathcal{C} é uma órbita periódica e se todas as órbitas em $\text{int}(\mathcal{C}) \setminus \{p\}$ são periódicas. (Veja item vi. da Definição 2.7);
- ii. Dizemos que p é um **foco ou nó atrator**, se em cada ponto de \mathcal{C} as órbitas cruzam do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$ e para cada $q \in \text{int}(\mathcal{C}) \setminus \{p\}$, $\omega(q) = \{p\}$ e $\gamma^-(q) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$;
- iii. Dizemos que p é um **foco ou nó repulsor**, se em cada ponto de \mathcal{C} as órbitas cruzam do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$ e para cada $q \in \text{int}(\mathcal{C}) \setminus \{p\}$, $\alpha(q) = \{p\}$ e $\gamma^+(q) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$;

iv. Dizemos que p possui uma decomposição setorial finita, se não ocorrer um dos casos i., ii. ou iii. e se existe um número finito de órbitas características, c_0, \dots, c_{n-1} , cada uma intersectando \mathcal{C} transversalmente em exatamente um ponto $p_i \in \mathcal{C}$.

Definição 2.10. Considere o item iv. da Definição 2.9. Seja $t_i \in [0, 1)$ tal que $\phi(t_i) = p_i$. Suponhamos adicionalmente que os pontos p_i estejam ordenados de modo que $t_i < t_{i+1}$. Dizemos que a região compacta S_i limitada por $\{p\}$, c_i, c_{i+1} e $\phi([t_i, t_{i+1}])$, é um setor de $X|_{\text{int}(\mathcal{C})}$. Existem quatro possibilidades de setores:

- a. *Setor parabólico atrator.* Em todos os pontos de $\phi([t_i, t_{i+1}])$, as órbitas cruzam ϕ do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$ e para todo $q \in S_i \setminus \{p\}$, $\omega(q) = \{p\}$ e $\gamma^-(q) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$;
- b. *Setor parabólico repulsor.* Em todos os pontos de $\phi([t_i, t_{i+1}])$, as órbitas cruzam ϕ do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$ e para todo $q \in S_i \setminus \{p\}$, $\alpha(q) = \{p\}$ e $\gamma^+(q) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$;
- c. *Setor hiperbólico.* Existe um ponto $t^* \in (t_i, t_{i+1})$, tal que $q_i = \phi(t^*)$, com a propriedade de que todos os pontos $\phi([t_i, t^*])$ cruzam ϕ do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$ (respectivamente, do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$), enquanto todos os pontos de $\phi((t^*, t_{i+1}])$ cruzam ϕ do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$ (respectivamente, do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$). O campo X é tangente a ϕ em q_i , $\gamma(q_i) \cap \text{int}(\mathcal{C}) = \emptyset$ e para todo $q \in \text{int}(S_i)$, $\gamma^+(q) \cap \phi((t^*, t_{i+1})) \neq \emptyset$ e $\gamma^-(q) \cap \phi((t_i, t^*)) \neq \emptyset$;
- d. *Setor elíptico.* Existe um ponto $q_i = \phi(t^*) \in \phi(t_i, t_{i+1})$ com a propriedade de que $\gamma(q_i) \in S_i$, $\omega(q_i) = \alpha(q_i) = \{p\}$, o campo X em $\phi((t_i, t^*))$ cruza do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$ (respectivamente, do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$), e em $\phi((t^*, t_{i+1}))$ cruza do $\text{ext}(\mathcal{C})$ para o $\text{int}(\mathcal{C})$ (respectivamente, do $\text{int}(\mathcal{C})$ para o $\text{ext}(\mathcal{C})$) e para qualquer $q \in \phi((t_i, t^*))$, $\gamma^-(q) \subset S_i$, com $\alpha(q) = \{p\}$ e para qualquer $q \in \phi((t^*, t_{i+1}))$, $\omega\{q\} = \{p\}$, $\gamma^+(q) \subset S_i$, para todo $q \in \text{int}(\gamma(q_i) \cup \{p\})$, $\alpha\{q\} = \omega\{q\} = \{p\}$.

Na Figura 2.1, temos um esboço dos diferentes setores descritos anteriormente.

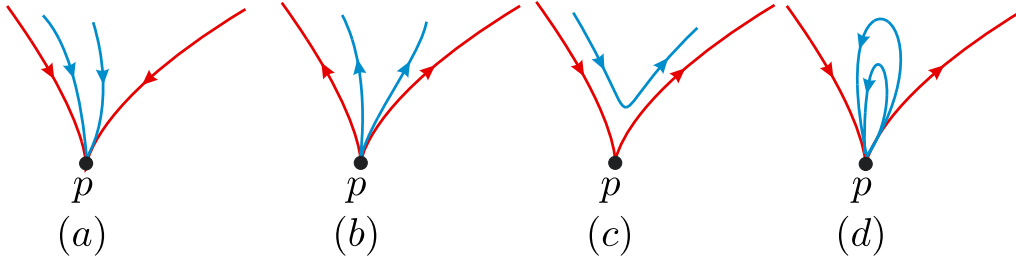


Figura 2.1: Setores de um ponto singular p de acordo com a Definição 2.10. (a) Setor parabólico atrator. (b) Setor parabólico repulsor. (c) Setor hiperbólico. (d) Setor elíptico.

Recomendamos a Seção 36 de [1] para um estudo do índice de um ponto de equilíbrio isolado de um campo de vetores.

Teorema 2.7. *O índice $i_X(p_0)$ de um campo vetorial $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 , no ponto de equilíbrio isolado $p_0 \in \Delta$, pode ser calculado pela fórmula de Bendixson*

$$i_X(p_0) = 1 + \frac{\#e - \#h}{2}, \quad (2.2)$$

sendo $\#e$ o número de setores elípticos e $\#h$ o número de setores hiperbólicos do campo vetorial X numa vizinhança de p_0 .

Veja uma demonstração do teorema anterior na página 166 do livro [13].

Teorema 2.8 (Teorema de Hopf). *Seja X um campo de vetores de classe C^1 tangente a \mathbb{S}^2 com um número finito de pontos de equilíbrio p_1, \dots, p_n . Então,*

$$\sum_{j=1}^n i_X(p_j) = 2.$$

Uma prova deste teorema pode ser encontrada na página 315 de [1].

2.3 A Técnica do *Blow Up*

A técnica do *blow up* consiste em “explodir” a singularidade de um campo de vetores no plano por meio de uma mudança de variáveis. Após a mudança de variáveis, cancelamos fatores em comum no campo, e:

- a. se o termo que cancelamos têm expoente par, então dizemos que o *blow up* é de ordem par e a orientação das órbitas associadas com os campos vetoriais obtidos pela mudança de variáveis é preservada;
- b. se o termo que cancelamos têm expoente ímpar, então dizemos que o *blow up* é de ordem ímpar e a orientação das órbitas associadas com os campos vetoriais obtidos pela mudança de variáveis é trocada.

Com esta técnica, aparecerão novas singularidades nos eixos x e y , que serão “mais simples” que a singularidade original. Se estas novas singularidades forem linearmente nulas, repete-se o processo até obtermos singularidades elementares, ou seja, não linearmente nulas. Em 1977, Durmortier provou em [7] que, sob certas hipóteses, este processo iterativo é sempre finito.

As mudanças de variáveis que usaremos são as seguintes

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto T_1(x, y) = (u, w), \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $x = u$ e $y = uw$, e

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto T_2(x, y) = (u, w), \end{aligned} \tag{2.4}$$

em que $x = uw$ e $y = w$. Chamaremos a transformação T_1 de *blow up* na direção x e a transformação T_2 de *blow up* na direção y .

Tomamos $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $X = (P, Q)$ como sendo um campo vetorial polinomial, com uma singularidade na origem e consideraremos a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposição 2.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como em (2.5). Então, o campo vetorial, após a mudança de coordenadas (2.3) e (2.4), tem as seguintes expressões, respectivamente:*

1. Para T_1 ,

$$\begin{cases} u' = P(u, uw), \\ w' = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}; \end{cases}$$

2. Para T_2 ,

$$\begin{cases} u' = Q(uw, w), \\ w' = \frac{P(uw, w) - uQ(uw, w)}{w}. \end{cases}$$

Demonstração. Faremos a prova para T_1 , pois para T_2 é análoga. Como em T_1 temos que $x = u$ e $y = uw$, derivando estas expressões obtemos

$$\begin{cases} x' = u', \\ y' = u'w + uw', \end{cases}$$

logo $w' = (y' - uw')/u$. Assim, de (2.5), resulta que

$$\begin{cases} u' = P(u, uw), \\ w' = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}. \end{cases}$$

■

As seguintes proposições ajudar-nos-ão a entender algumas propriedades das mudanças de variáveis anteriormente definidas.

Proposição 2.2. *Considere a transformação T_1 . Valem as seguintes propriedades:*

- i. T_1 transforma a origem na reta $u = 0$;
- ii. A reta $y = ax$, com exceção da origem, é levada na reta $w = a$, com exceção da reta $u = 0$;
- iii. O primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante;
- iv. O quarto quadrante é levado no quarto quadrante;
- v. O segundo quadrante é levado no terceiro quadrante;

vi. O terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

Demonstração.

i. Os pontos nos quais a origem é levada satisfazem o sistema

$$\begin{cases} u = 0, \\ uw = 0, \end{cases}$$

cuja solução é a reta $u = 0$.

ii. O conjunto dos pontos da reta $y = ax$ é levado em

$$uw = au.$$

Se $x \neq 0$, segue que $u \neq 0$ e, então, $w = a$.

iii. Se $x > 0$ e $y > 0$, temos que $u > 0$ e $w > 0$, e, assim, o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

iv. Se $x > 0$ e $y < 0$, obtemos que $u > 0$ e $w < 0$ e, deste modo, o quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

v. Se $x < 0$ e $y > 0$, resulta que $u < 0$ e $w < 0$ e, logo, o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

vi. Se $x < 0$ e $y < 0$, então, $u < 0$ e $w > 0$ e, portanto, o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

■

Proposição 2.3. *Para a transformação T_2 valem as seguintes propriedades:*

i. T_2 transforma a origem na reta $w = 0$;

ii. A reta $y = ax$, com exceção da origem, é levada na reta $w = a$, com exceção da reta $w = 0$;

- iii. O primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante;
- iv. O segundo quadrante é levado no segundo quadrante;
- v. O terceiro quadrante é levado no quarto quadrante;
- vi. O quarto quadrante é levado no terceiro quadrante.

A demonstração da proposição anterior é análoga àquela da Proposição 2.2.

Pelo processo inverso ao *blow up*, denominado *blow down*, obtém-se o retrato de fase local do campo vetorial original em uma vizinhança da singularidade estudada. Mais detalhes acerca de *blow up* podem ser encontrados em [8].

2.4 Compactificação de Poincaré

Nesta seção, no lugar de (x, y) , usaremos (x_1, y_1) como coordenadas do plano. Construiremos a Compactificação de Poincaré de um campo de vetores polinomial em \mathbb{R}^2 . Esta compactificação é uma técnica muito útil que nos fornecerá uma compreensão global do retrato de fase de um campo de vetores polinomial no plano.

Seja $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ um campo vetorial polinomial planar. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, que é chamada de esfera de Poincaré, e o plano \mathbb{R}^2 no espaço \mathbb{R}^3 , com coordenadas $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$, que é tangente à esfera \mathbb{S}^2 no ponto $(0, 0, 1)$. Dividamos \mathbb{S}^2 em três partes, o hemisfério norte $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 > 0\}$, o hemisfério sul $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 < 0\}$ e o equador $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 : y_3 = 0\}$. Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a reta passando por $(0, 0, 0)$ e $(x_1, x_2, 1)$ que intersecta \mathbb{S}^2 em exatamente dois pontos antipodais,

$$y^+ = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_+,$$

$$y^- = - \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_-,$$

em que $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. Consideremos as projeções do campo vetorial X de \mathbb{R}^2 em \mathbb{S}^2 dadas pelas projeções centrais $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, sendo $f^+(x) = y^+$ e $f^-(x) = y^-$, conforme Figura 2.2.

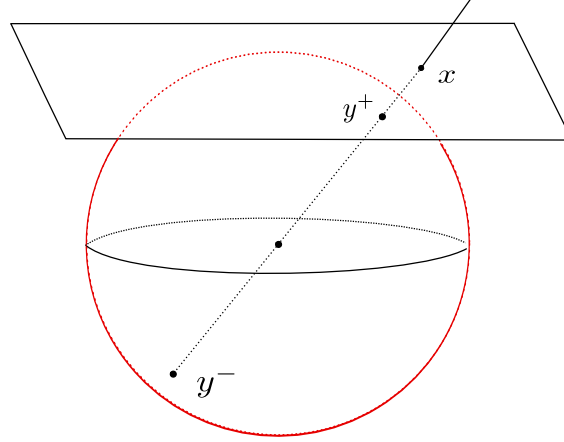


Figura 2.2: Projeções centrais.

Assim, obtemos campos vetoriais induzidos em cada hemisfério. Consideremos o campo induzido $\bar{X} : H_+ \cup H_- \rightarrow H_+ \cup H_-$ definido por

$$\bar{X}(y) = \begin{cases} Df^+(x)X(x), & \text{se } y = f^+(x) \in H_+, \\ Df^-(x)X(x), & \text{se } y = f^-(x) \in H_-. \end{cases}$$

Observemos que \bar{X} é um campo vetorial em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ que é tangente a \mathbb{S}^2 em cada ponto. É fácil verificar que se $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2$,

$$(f^+)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \text{ se } y_3 > 0,$$

$$(f^-)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \text{ se } y_3 < 0.$$

Podemos escrever o campo \bar{X} explicitamente como

$$\bar{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 > 0, \\ Df^- \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), & \text{se } y_3 < 0. \end{cases}$$

Assim, tendo em conta que $\Delta(x) = 1/|y_3|$, segue que

$$Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{bmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}$$

e

$$Df^- \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{bmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, tanto em H_+ quanto em H_- , o campo \bar{X} tem a mesma expressão. Notemos que quando $\|x\| \rightarrow \infty$, $\Pi_3(f^+(x)) \rightarrow 0$, em que $\Pi_3(y_1, y_2, y_3) = y_3$. Neste sentido, o equador representa o “infinito” de \mathbb{R}^2 . Para estudar o comportamento do campo X no infinito, gostaríamos de definir o campo \bar{X} em toda a esfera. Mas, este campo próximo ao equador, em geral, não é limitado. Para resolver este problema multiplicaremos o campo vetorial \bar{X} pelo fator $\rho(x) = y_3^{d-1}$, onde $d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$. Assim, o campo pode ser estendido continuamente em $y_3 = 0$, visto que cada componente de

$$\begin{pmatrix} y_3^d P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ y_3^d Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix}$$

é um polinômio homogêneo de grau d nas variáveis y_1, y_2 e y_3 . O novo campo $\mathcal{P}(X)$, sendo $\mathcal{P}(X)(y) = \rho(y)\bar{X}(y)$, é chamado de **compactificação de Poincaré** do campo de vetores X .

Para continuar a construção, notemos que \mathbb{S}^2 é uma variedade compacta que pode ser coberta pelas seguintes seis cartas locais: (U_k, ϕ_k) dadas por $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi_k(y) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right), \quad m < n, m, n \neq k,$$

em que,

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k > 0\}$$

e (V_k, ψ_k) dadas por

$$\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi_k(y) = -\phi_k(y), \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2; y_k < 0\}$$

com $k \in \{1, 2, 3\}$. Denotemos por $z = (u, v)$ o valor de $\phi_k(y)$ ou $\psi_k(y)$ para todo k , de modo que (u, v) dependerá da carta local que se está considerando. Geometricamente, as coordenadas (u, v) podem ser visualizadas na Figura 2.3. Os pontos de \mathbb{S}^1 em qualquer carta são dados por $v = 0$.

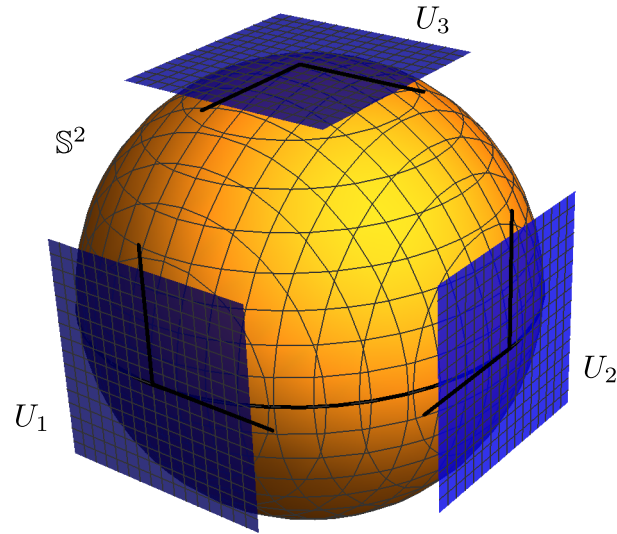


Figura 2.3: Cartas locais U_1 , U_2 e U_3 da esfera de Poincaré.

Agora, faremos um cálculo detalhado a fim de obter expressões de $\mathcal{P}(X)$ nas cartas locais. Calcularemos apenas na carta local U_1 . Nas demais cartas, os cálculos são semelhantes. Visto que $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$, então,

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x) \text{ com } y = f^+(x)$$

e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Seja $\bar{X}|_{U_1}$ o sistema definido como $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$. Como

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) = (u, v),$$

temos que

$$\begin{aligned}\bar{X}|_{U_1} &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).\end{aligned}$$

Agora, como

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1} m(z),$$

onde $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2}$, segue que

$$\rho(\bar{X}|_{U_1})(z) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

A fim de provar que a extensão de $\rho\bar{X}$ para $\mathcal{P}(X)$ está definida em todo \mathbb{S}^2 , notamos que enquanto $\bar{X}|_{U_1}$ não está bem definido em $v = 0$, $\mathcal{P}(X)|_{U_1} = \rho\bar{X}|_{U_1}$ está bem definido em $v = 0$, pois multiplicando-o por v^{d+1} cancelamos qualquer fator de v que apareça no denominador. Argumentos semelhantes podem ser aplicados as outras cartas locais.

Para simplificar o campo vetorial estendido, também fazemos uma reparametrização do tempo e removemos o fator $m(z)$. Obtemos ainda um campo vetorial em \mathbb{S}^2 que é equivalente a X em quaisquer dos hemisférios H_+ e H_- .

As expressões para $\mathcal{P}(X)$, nas cartas locais, são dadas como a seguir:

a. Na carta (U_1, ϕ_1) , temos:

$$\begin{cases} u' = v^d \left[-u P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{cases} \quad (2.6)$$

b. Na carta (U_2, ϕ_2) , temos:

$$\begin{cases} u' = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - u Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ v' = -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{cases} \quad (2.7)$$

c. Na carta (U_3, ϕ_3) , temos:

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases}$$

As expressões para $\mathcal{P}(X)$, nas cartas (V_k, ψ_k) , $k \in \{1, 2, 3\}$, são as mesmas de (U_k, ϕ_k) multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Observemos de (2.6) e (2.7) que o eixo v das cartas U_1 e U_2 é invariante e, conseqüentemente, o mesmo ocorre com as cartas V_1 e V_2 .

Definição 2.11. *Chamamos de pontos singulares finitos (infinitos, respectivamente) de X ou $\mathcal{P}(X)$ os pontos singulares de $\mathcal{P}(X)$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ (\mathbb{S}^1 , respectivamente).*

Assim, para estudar o comportamento do campo X , incluindo seu comportamento no infinito, é suficiente trabalhar em $H_+ \cup \mathbb{S}^1$. Observe que o equador da esfera é invariante pelo fluxo da compactificação de Poincaré. A projeção de $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ em \mathbb{R}^2 será chamada de disco de Poincaré.

Seja $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ o conjunto formado por todas as separatrizes de $\mathcal{P}(X)$. Cada componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ é chamada de região canônica de $\mathcal{P}(X)$.

Definição 2.12. *Dizemos que $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ e $\mathcal{S}(\mathcal{P}(Y))$ são equivalentes se existir um homeomorfismo em \mathbb{S}^2 preservando o infinito \mathbb{S}^1 e levando órbitas de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(X))$ em órbitas de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(Y))$, preservando ou invertendo simultaneamente o sentido de todas as órbitas.*

Estudemos as singularidades infinitas. Já observamos que os pontos singulares infinitos são da forma $(u, 0)$. Denotemos por P_i e Q_i os polinômios homogêneos de grau i de P e Q . Podemos escrever P e Q da seguinte forma

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_m(x, y) + \cdots + P_n(x, y), \\ Q(x, y) &= Q_m(x, y) + \cdots + Q_n(x, y), \end{aligned}$$

sendo que $P_j(x, y)$ e $Q_j(x, y)$ são as partes homogêneas de grau j de P e Q , com $j = m, \dots, n$, e P_m e Q_m , com $m > 0$, são as partes homogêneas não nulas de menor grau.

Proposição 2.4. *Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^2 . Então $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto singular infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,*

$$F(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0,$$

e $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto singular infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$G(u) \equiv Q_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

Demonstração. De (2.6), obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^d \left[-uP \left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t} \right) + Q \left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t} \right) \right] = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

Suponhamos que $(u, 0)$ seja um ponto singular. Então, $Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0$. Reciprocamente, suponhamos que $Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0$. Novamente, de (2.6), resulta que

$$\lim_{t \rightarrow 0} -t^{d+1} Q \left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t} \right).$$

Assim, $(u, 0)$ é um ponto singular.

De maneira análoga, podemos provar que $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto singular infinito de $\mathcal{P}(X)$ se, e somente se,

$$G(u) \equiv Q_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0.$$

■

Definição 2.13. *Considere uma submersão $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja H_f um campo Hamiltoniano associado a f . Considere o conjunto*

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\} \setminus \{(0, 0)\}$$

e a função polinomial $g(x, y) = xy$ (veja Figura 2.4). De acordo com [6], um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ é uma meia componente de Reeb (m.c.R) para H_f se existe uma equivalência topológica $H : B \rightarrow \mathcal{A}$ entre

$$H_g|_B \quad \text{e} \quad H_f|_{\mathcal{A}}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- a. O segmento $A_0 = \{(x, y) \in B : x + y = 2\}$ é aplicado por H em uma seção transversal C_0 para o fluxo de H_f no complemento do ponto $H(1, 1)$. Essa curva C_0 é chamada o bordo compacto de \mathcal{A} ;
- b. Os segmentos $A_1 = \{(x, y) \in B : y = 0\}$ e $A_2 = \{(x, y) \in B : x = 0\}$ são aplicados por H nas semitrajetórias \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 do campo de vetores H_f . Essas duas semitrajetórias de H_f são chamadas os bordos não compactos de \mathcal{A} .

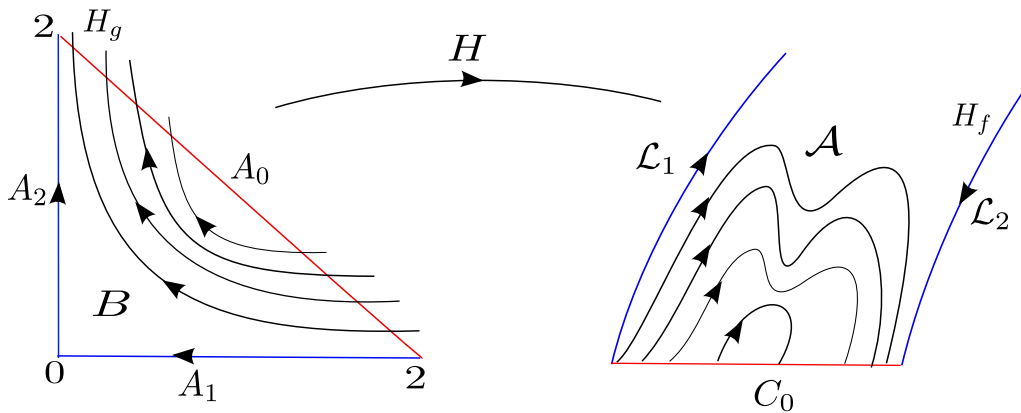


Figura 2.4: Meia componente de Reeb.

O lema a seguir fornece uma ligação entre a não injetividade de uma aplicação polinomial $F = (f, g)$ com a existência de uma m.c.R do campo de vetores H_f .

Lema 2.1. *Se $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local polinomial não injetivo, então o campo de vetores H_f tem, pelo menos, uma meia componente de Reeb.*

Uma prova do lema pode ser encontrada em [6].

2.5 Sobre o Exemplo de Pinchuk

Os seguintes teoremas ajudar-nos-ão a entender melhor o exemplo de Pinchuk.

Teorema 2.9. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^∞ com Jacobiano não nulo em todo ponto. Se os conjuntos de nível de f ou de g são conexos, então F é injetora.*

Demonstração. Como o Jacobiano de $F = (f, g)$ é não nulo em todo ponto, segue que $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são submersões. Defina o campo de vetores Hamiltoniano associado a f por

$$H_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H_f(x, y) = (-f_y(x, y), f_x(x, y)).$$

As curvas de nível de f definem uma folheação, \mathcal{F}_f , sem singularidades em \mathbb{R}^2 a qual coincide com as órbitas de H_f . Assim, cada componente conexa da curva de nível $f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$, é composta por uma órbita de H_f . Suponha que os conjuntos de nível de f são conexos (para g é análogo). Seja $\phi_t(x, y)$ o fluxo do campo de vetores H_f . Como o Jacobiano de $F = (f, g)$ é não nulo em todo ponto,

$$\frac{d}{dt}(g(\phi_t(x, y))) = \det(D(f, g)(\phi_t(x, y))) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, a derivada acima é sempre positiva ou sempre negativa. Isto implica que a função g é monótona ao longo das órbitas de H_f . Suponha que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Se $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$, então $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ e a prova do teorema termina. Consideremos assim, $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = a \in \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{L} = f^{-1}(\{a\})$. Por hipótese, $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_f$ tem apenas uma componente conexa a qual contém (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Mas, g é monótona ao longo da folha \mathcal{L} . Então, $g(x_1, y_1) \neq g(x_2, y_2)$, o que implica que $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$. ■

Teorema 2.10. *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com Jacobiano não nulo em todo ponto. Então, F é injetora se, e somente se, os conjuntos de nível de f e de g são conexos.*

Demonstração.

(\Leftarrow) Suponha que os conjuntos de nível de f e de g sejam conexos. Pelo Teorema 2.9, F é injetora.

(\Rightarrow) Suponha que F é injetora. Como mencionado anteriormente (veja [19]), sendo F polinomial, F é sobrejetora, logo um difeomorfismo global. Considere $a \in \mathbb{R}$, arbitrário. É simples observar que

$$f^{-1}(\{a\}) = F^{-1}(\{a\} \times \mathbb{R}),$$

o qual é um conjunto conexo. Raciocínio análogo vale para a função coordenada g . ■

A hipótese de que F é polinomial é essencial no último teorema. De fato, considere a seguinte aplicação

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = ((1 - x^2)e^y, -xe^y).$$

Assim,

$$\det(DF(x, y)) = e^{2y}(1 + x^2) > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como os conjuntos de nível de g são conexos, segue que F é injetora. No entanto, $f^{-1}(\{0\}) = \{x = -1\} \cup \{x = 1\}$, o qual não é conexo.

2.5.1 Demonstração do Teorema 1.2

A função polinomial p obtida por Pinchuk tem grau 10 e é dada por

$$p(x, y) = (x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y)$$

e a função polinomial \bar{q} tem grau 40, mas faremos a prova para a função polinomial q de grau 25 que está escrita explicitamente em (1.3). Deste modo, $J(p, q) = t^2 + f^2 + [r(t, h, f)]^2 > 0$, sendo

$$t(x, y) = xy - 1,$$

$$h(x, y) = t(xt + 1),$$

$$f(x, y) = (xt + 1)^2(t^2 + y),$$

$$r(t, h, f) = t + f(13 + 15h).$$

Se $p(x, y) = 0$, obtemos que $(x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y) = 0$.

Em particular,

$$(x^2y - x + 1) = 0.$$

Logo, $y = (x - 1)/x^2 = 0, x \neq 0$. O gráfico de $y = y(x)$ é ilustrado na Figura 2.5.

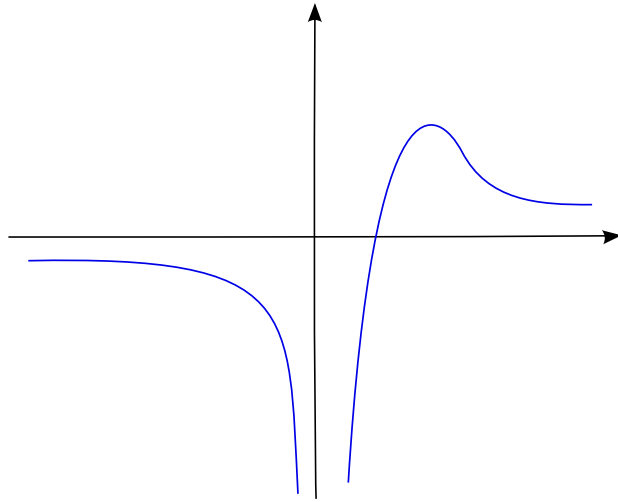


Figura 2.5: Esboço do gráfico de $y = y(x)$.

Desta forma, $p^{-1}(\{0\})$ é desconexo. Assim, pelo Teorema 2.10, temos que F é não injetora. Portanto, a aplicação $F = (p, q)$ é polinomial com Jacobiano positivo em todo ponto, mas é não injetora.

Capítulo 3

Retrato de Fase Global do Campo

Vetorial H_p , sendo p de grau 10

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 1.3 construindo o retrato de fase global do campo vetorial Hamiltoniano H_p , dado por

$$H_p(x, y) = (-p_y(x, y), p_x(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

associado ao polinômio p definido em (1.1). Este material foi estudado em [3].

Estudaremos o comportamento topológico das singularidades no infinito da Compactificação de Poincaré do campo vetorial H_p em suas cartas locais, através da técnica de *blow up*, e também o comportamento do campo vetorial na parte finita de \mathbb{R}^2 . Para concluir o capítulo, faremos o retrato de fase global do campo vetorial $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré.

3.1 Estudo das Singularidades Infinitas do Campo Vetorial H_p

3.1.1 Estudo Qualitativo na Carta U_1

Os cálculos apresentados nesta seção, e ao longo da dissertação, foram feitos no *software Mathematica* [22]. Visto que o polinômio p é de grau 10, então, $\text{grau}(H_p) = 9$. Primeiramente, encontraremos os pontos singulares infinitos do campo vetorial na carta U_1 .

Para isto utilizaremos a Proposição 2.4. Neste caso, resulta que $d = 9$, $P(x, y) = -q_y$, $Q(x, y) = q_x$, $P_9(x, y) = -4x^6y^3$, $Q_9(x, y) = 6x^5y^4$ e, então, $F(u) = 10u^4$. Assim, concluímos que a origem é o único ponto singular infinito do campo vetorial $\mathcal{P}(H_p)$ na carta U_1 . Estudemos agora o comportamento desta singularidade.

A expressão do campo vetorial na carta U_1 é dada por (2.6) da qual obtemos

$$\begin{cases} x' = 10x^4 - 32x^3y^2 + 21x^3y^3 + \dots, \\ y' = y(4x^3 - 12x^2y^2 + 9x^2y^3 + \dots). \end{cases} \quad (3.1)$$

Estamos considerando apenas três parcelas para cada campo vetorial, porém a expressão completa pode ser vista no arquivo apresentado no Anexo I. É de cálculo direto que o eixo x é invariante e o campo de vetores aponta da esquerda para a direita e o eixo y não é invariante. Para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção sudeste. Calculando a parte linear do campo vetorial na origem, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, o estudo desta singularidade será feito através da técnica do *blow up* apresentada na Seção 2.3. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, resultando um *blow up* ímpar de ordem 3. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^3 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(10 - 32xy^2 + \dots), \\ y' = y(-6 + 20xy^2 + \dots), \end{cases}$$

no qual $x = u$ e $y = w$. Tal campo vetorial possui uma singularidade na origem com parte linear

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, a origem é uma sela com eixos invariantes, sendo o eixo x repulsor e o eixo y atrator. Agora, fazemos um *blow up* no campo vetorial (3.1) na direção y através da mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtendo novamente um *blow up* ímpar de ordem 3. Depois de eliminar o fator comum w^3 , o novo campo vetorial é da forma

$$\begin{cases} x' = 6x^4 - 20x^3y + 24x^2y^2 + \dots, \\ y' = y(4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 + \dots), \end{cases} \quad (3.2)$$

em que, $x = u$ e $y = w$. No eixo x , o campo vetorial aponta da esquerda para direita e no eixo y , o campo vetorial está na direção sudeste. Calculando a parte linear do campo vetorial na origem, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, outro *blow up* será necessário. Na direção x , empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, resulta um *blow up* ímpar de ordem 3. Com essa mudança de variáveis, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^3 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(6 - 20y + \dots), \\ y' = y(-2 + 8y + \dots), \end{cases} \quad (3.3)$$

com $x = u$ e $y = w$. Este campo vetorial possui duas singularidades, a primeira na origem e a segunda no ponto $(0, 1)$. Suas respectivas partes lineares são

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo x é repulsor e o eixo y é atrator. A singularidade no ponto $(0, 1)$ é do tipo linearmente nula. Para estudarmos tal singularidade, faremos uma translação do ponto $(0, 1)$ para a origem, obtendo o campo vetorial dado por

$$\begin{cases} x' = 3x^3 - 4x^2y + 9x^3y + \dots, \\ y' = x^3 + 7x^3y - 2xy^2 + \dots, \end{cases} \quad (3.4)$$

no qual $x = u$ e $y = w$. Aqui, o eixo x não é invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste. Já o eixo y é invariante e ao longo dele o campo vetorial aponta de cima para baixo. A parte linear na origem tem a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, faremos outro *blow up*. Antes disso, faremos o *blow up* no campo vetorial (3.2) na direção y . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, resulta um *blow up* ímpar de ordem 3. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum w^3 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = 2 - 8x + 12x^2 + \dots, \\ y' = y(-4 + 12x - 12x^2 + \dots). \end{cases}$$

O campo vetorial possui a singularidade $(1, 0)$ que já foi estudada quando fizemos o *blow up* no campo vetorial na direção x . Continuando com o campo vetorial (3.4), vimos que a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, faremos um *blow up* no campo vetorial (3.4) na direção x , com a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtendo um *blow up* par de ordem 2. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^2 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(3 - 4y + \dots), \\ y' = 1 - 3y + \dots. \end{cases}$$

Este campo vetorial possui duas singularidades, uma no ponto $(0, 1/2)$ e a outra no ponto $(0, 1)$, que serão estudadas quando fizermos o *blow up* no campo vetorial na direção y . Agora, faremos o *blow up* no campo vetorial (3.4) na direção y . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, resulta um *blow up* par de ordem 2. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum w^2 , o seguinte campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-2x + 3x^2 - x^3 + \dots), \\ y' = y(-2x + x^3 - 2y + \dots). \end{cases} \quad (3.5)$$

Este campo vetorial possui três singularidades localizadas nos pontos $(1, 0)$, $(2, 0)$ e na origem. Assim, calculando a parte linear em cada ponto singular, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -28 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Portanto, a linearização no ponto $(1, 0)$ possui autovalores -1 e 1 , tendo os seguintes autovetores associados $(-2, 1)$ e $(1, 0)$, respectivamente, resultando numa singularidade hiperbólica do tipo sela em que o eixo x é repulsor. A linearização no ponto $(2, 0)$ possui autovalores -4 e 4 , tendo os seguintes autovetores associados $(1, 0)$ e $(-7, 2)$, respectivamente, sendo, portanto, uma singularidade do tipo sela na qual o eixo x é atrator. Já a origem é uma singularidade linearmente nula.

No eixo x , em relação à singularidade na origem, o campo vetorial aponta da direita para esquerda e, em relação à singularidade no ponto $(1, 0)$, para valores de $x < 1$, o campo vetorial aponta para a esquerda e, para valores de $x > 1$, o campo vetorial aponta para a direita. Já em relação à singularidade no ponto $(2, 0)$, para valores de $x < 2$, o campo vetorial aponta para a direita e, para valores de $x > 2$, o campo vetorial aponta para a esquerda (veja Figura 3.3).

Visto que a origem é uma singularidade linearmente nula, outro *blow up* será necessário. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtendo um *blow up* par de ordem 2. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^2 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -2 + 3x + \dots, \\ y' = y(-3 + 2x + \dots). \end{cases} \quad (3.6)$$

Este campo vetorial tem uma singularidade no ponto $(0, -1)$. Tal singularidade tem parte linear

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

a qual possui autovalores -1 e 1 e os seguintes autovetores associados $(1, 2)$ e $(1, 1)$, respectivamente, sendo, assim, uma singularidade hiperbólica do tipo sela como vemos na Figura 3.1.

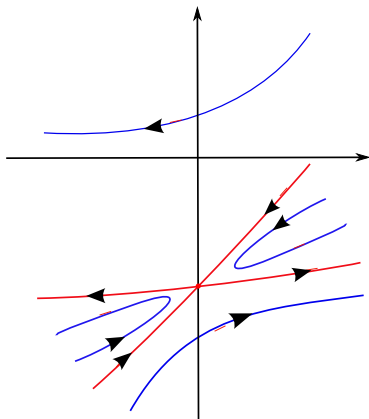


Figura 3.1: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.6) na singularidade $(0, -1)$.

Agora, faremos o *blow up* no campo vetorial (3.5) na direção y , $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtendo um *blow up* par de ordem 2, resultando, depois de eliminar o fator comum w^2 , o novo campo vetorial com a seguinte expressão

$$\begin{cases} x' = x(6 + 9x + 3x^2 + \dots), \\ y' = -2 - 2x - 2y + \dots \end{cases}$$

Este campo vetorial tem uma singularidade no ponto $(-1, 0)$. Esta singularidade já foi estudada quando fizemos o *blow up* no campo vetorial na direção x .

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.5), faremos um *blow down* par na direção x , isto é, o setor hiperbólico do terceiro quadrante será levado no segundo quadrante com a orientação das órbitas preservada e no quarto quadrante temos um setor hiperbólico, junto a dois setores parabólicos, um setor parabólico atrator perto do eixo x , para valores de $x > 0$, e um setor parabólico repulsor perto do eixo y , para valores de $y < 0$. Vimos que os eixos são invariantes. No eixo x , o campo vetorial aponta da

direita para a esquerda e no eixo y , o campo aponta de cima para baixo. Um esboço das transformações feitas depois de fazer o *blow down* pode ser visto na Figura 3.2.

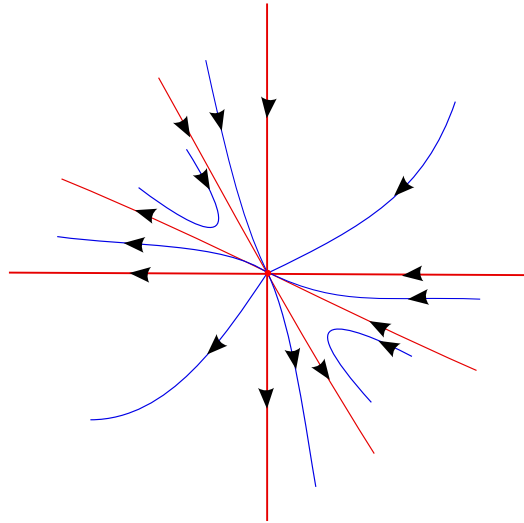


Figura 3.2: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.5).

Agora, juntamos o retrato de fase local na origem como os retratos de fase locais nas duas singularidades calculadas do campo vetorial (3.5). Uma ilustração do retrato de fase local do campo vetorial (3.5) nas três singularidades é apresentada na Figura 3.3.

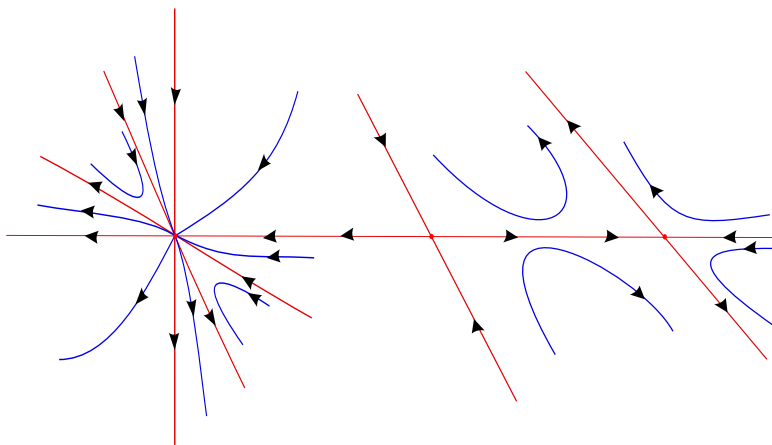


Figura 3.3: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.5) nas três singularidades, a origem, os pontos $(1, 0)$ e $(2, 0)$.

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.4) faremos um *blow down* par no campo vetorial (3.5) na direção y . Aqui forma-se um setor hiperbólico no primeiro quadrante, que será levado em um setor hiperbólico no primeiro quadrante com a orientação das órbitas preservada. No quarto quadrante resulta um setor hiperbólico que se junta aos dois setores parabólicos, um atrator e um repulsor, que serão levados para o terceiro quadrante com a orientação das órbitas preservada. Vimos também que o eixo x é não invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudeste e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste. Já o eixo y é invariante e o campo vetorial aponta de baixo para cima. Uma ilustração do esboço do retrato de fase local do campo vetorial (3.4) pode ser vista na Figura 3.4.

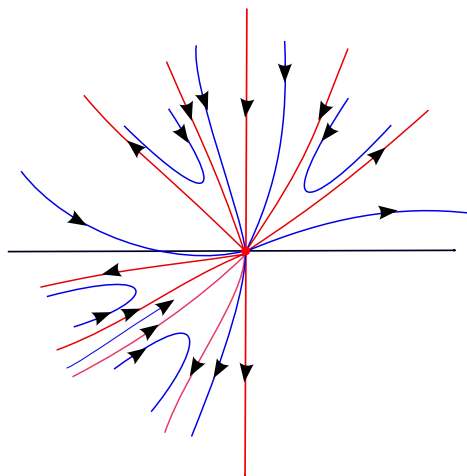


Figura 3.4: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.4).

Levamos agora as transformações feitas para o ponto $(0, 1)$, conforme Figura 3.4, e juntamos com a sela que tínhamos calculado. Um esboço topológico do retrato de fase local do campo vetorial (3.3) é dado na Figura 3.5.

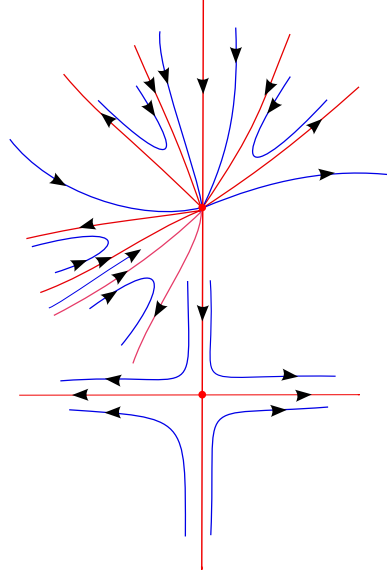


Figura 3.5: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.3) nas singularidades, na origem e no ponto $(0, 1)$.

Faremos um *blow down* ímpar na direção x para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.2). Já vimos que o eixo x é invariante e o campo vetorial aponta da esquerda para a direita, porém no eixo y o campo é não invariante. Para valores de $y < 0$, as órbitas se afastam da origem e, para valores de $y > 0$, as órbitas chegam na origem. Temos três setores hiperbólicos e dois setores parabólicos no terceiro quadrante. Uma ilustração das transformações feitas pode ser vista na Figura 3.6.

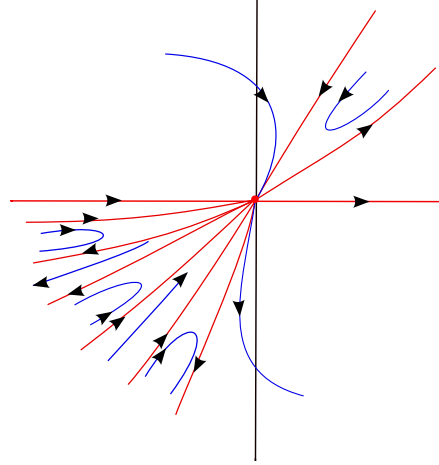


Figura 3.6: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.2).

Assim, para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.1), faremos um *blow down* ímpar na direção y . Resulta que o setor hiperbólico do primeiro quadrante fica no primeiro quadrante, porém os setores hiperbólicos do terceiro quadrante serão levados para o quarto quadrante com a orientação das órbitas trocada. No quarto quadrante, como anteriormente, temos dois setores parabólicos, um atrator e um repulsor. Vimos também que o eixo x é invariante e o campo vetorial vai da esquerda para a direita. Já o eixo y não é invariante e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção sudeste. Uma ilustração das transformações feitas do retrato de fase local no campo vetorial (3.1) pode ser vista na Figura 3.7

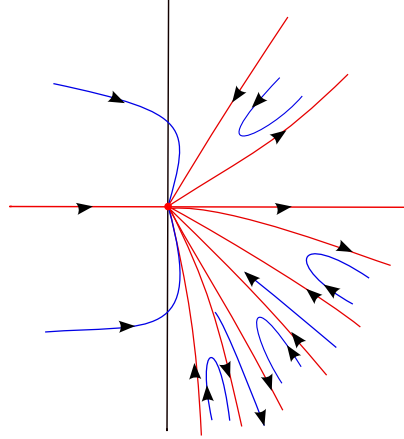


Figura 3.7: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.1) na carta U_1 .

3.1.2 Estudo Qualitativo na Carta U_2

Nesta subseção, faremos o retrato de fase local do campo vetorial na carta U_2 da mesma forma como foi feito na carta U_1 . Para isto utilizaremos a Proposição 2.4, obtendo $G(u) = -10u^6$. Como H_p não possui singularidades finitas, a origem é a única singularidade na carta U_2 .

Obtemos a expressão do campo vetorial na carta U_2 ,

$$\begin{cases} x' = -10x^6 + 32x^5y^2 - y^9 + \dots, \\ y' = y(-6x^5 + 20x^4y^2 - 12x^3y^3 + \dots), \end{cases} \quad (3.7)$$

através de (2.7). Observemos que o eixo x é invariante e aponta da direita para esquerda e a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, o estudo desta singularidade será feito através da técnica do *blow up* direcional apresentada na Seção 2.3. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtendo um *blow up* ímpar de ordem 5. Com a mudança de variáveis anterior e eliminando o fator comum u^5 , resulta o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-10 + 32xy^2 + \dots), \\ y' = y(4 - 12xy^2 + \dots), \end{cases}$$

em que $x = u$ e $y = w$. Para este campo vetorial a origem é a única singularidade. Tal singularidade tem como parte linear

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo x é atrator e o eixo y é repulsor. Voltando ao campo vetorial (3.7), faremos um *blow up* no campo vetorial na direção y . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtemos um *blow up* ímpar de ordem 5. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum w^5 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-4x^5 - 9x^3y + 12x^4y + \dots), \\ y' = y(-6x^5 - 12x^3y + 20x^4y + \dots). \end{cases} \quad (3.8)$$

A origem é a única singularidade ao longo do eixo y e possui parte linear

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula, logo, outro *blow up* é necessário. Na direção x , $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtemos um *blow up* par de ordem 2. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^2 , o novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-4x^3 - 9x^2y + 12x^3y + \dots), \\ y' = y(-2x^3 - 3x^2y + 8x^3y + \dots). \end{cases} \quad (3.9)$$

É de cálculo direto que ambos os eixos são invariantes. Além disso, o campo vetorial ao longo do eixo y aponta de baixo para cima e ao longo do eixo x aponta da direita para a esquerda e que a origem é a única singularidade que possui parte linear identicamente nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, outro *blow up* será necessário. Fazendo um *blow up* no campo vetorial (3.8) na direção y não obtivemos singularidades. Logo, continuamos com o campo vetorial (3.9).

Na direção x , empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, resulta um *blow up* ímpar de ordem 3. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^3 , o novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-4 - 9y + \dots), \\ y' = y(2 + 6y + \dots). \end{cases} \quad (3.10)$$

Este campo vetorial tem duas singularidades, uma na origem e outra no ponto $(0, -1)$. Suas partes lineares são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A singularidade na origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo x é atrator e o eixo y é repulsor, porém no ponto $(0, -1)$ é linearmente nulo. Para estudar esta singularidade, faremos uma translação do ponto $(0, -1)$ para a origem, resultando a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -x^2 - 7x^3 - 4x^4 + \dots, \\ y' = 3x^3 + 2x^4 - xy + \dots. \end{cases} \quad (3.11)$$

Calculando a parte linear na origem, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a origem é linearmente nula. Faremos um *blow up* no campo vetorial (3.9) na direção y , obtendo uma singularidade no ponto $(0, -1)$, que estudaremos fazendo o *blow up* no campo vetorial (3.9) na direção x . Agora, faremos um *blow up* do campo vetorial (3.11) na direção x . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, resulta um *blow up* par de ordem 2. Com esta mudança de variáveis, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^2 , a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -1 - 7x - 4x^2 + \dots, \\ y' = 3 + 2x + 7y + \dots, \end{cases}$$

no qual $x = u$ e $y = w$. Este campo vetorial não tem singularidades. Faremos o *blow up* no campo vetorial (3.11) na direção y . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, resulta um *blow up* par de ordem 2. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum w^2 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -x - 6x^2 - 7x^3 + \dots, \\ y' = -x - 2y - xy + \dots. \end{cases} \quad (3.12)$$

A origem é a única singularidade. Tal singularidade tem como parte linear

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

o qual possui autovalores -1 e -2 com autovetores associados $(-1, 1)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Portanto, é uma singularidade hiperbólica do tipo nó atrator, como podemos ver na Figura 3.8.

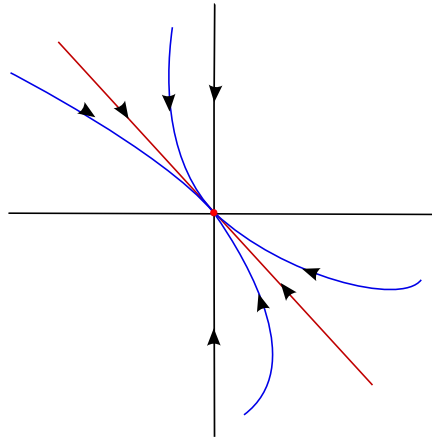


Figura 3.8: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.12) com a singularidade na origem.

Agora, para voltarmos ao campo vetorial original (3.7), utilizaremos a técnica do processo inverso ao *blow up* que foi dada na Seção 2.3. Faremos um *blow down* par na direção y . Aqui vemos que o eixo x não é invariante e, para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na

direção sudeste, formando desta forma, dois setores elípticos, um no segundo quadrante e outro no quarto quadrante. Porém, no eixo y , o campo vetorial é invariante e aponta para a origem. O esboço topológico do retrato de fase local do campo vetorial (3.12) é tal como na Figura 3.9.

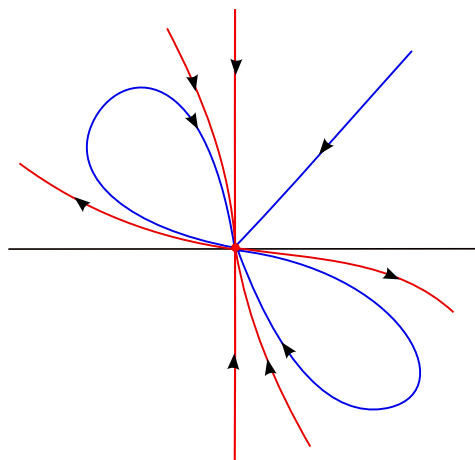


Figura 3.9: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.12).

Assim, para obtermos o retrato de fase do campo vetorial (3.11), faremos um *blow down* par na direção y , isto é, o setor elíptico do quarto quadrante é levado no terceiro quadrante. Já vimos que o eixo y é invariante e o campo vetorial aponta para a origem, porém no eixo x , o campo vetorial é não invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste, como podemos ver na Figura 3.10.

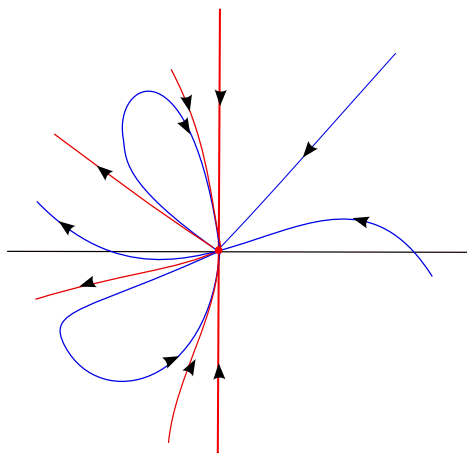


Figura 3.10: Esboço topológico do retrato de fase local do campo vetorial (3.11).

Agora, levaremos a singularidade no ponto $(0, -1)$ e juntaremos com a sela na origem que já tínhamos calculado. Um esboço topológico do retrato de fase local do campo vetorial (3.10) nas singularidades mencionadas é feito na Figura 3.11.

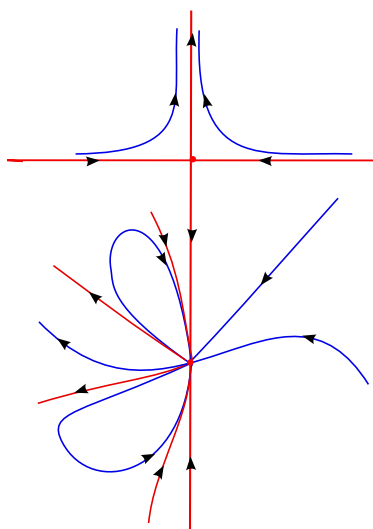


Figura 3.11: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.10) nas singularidades $(0, 0)$ e $(0, -1)$.

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.9), faremos um *blow down* de ordem ímpar na direção x , isto é, os setores elípticos do terceiro quadrante serão levados

no segundo quadrante. Vemos que os eixos são invariantes, sendo que, ao longo do eixo x , o campo vetorial aponta da direita para esquerda e, ao longo do eixo y , o campo vetorial aponta de baixo para cima. Uma ilustração do retrato de fase local do campo vetorial (3.9) pode ser vista na Figura 3.12.

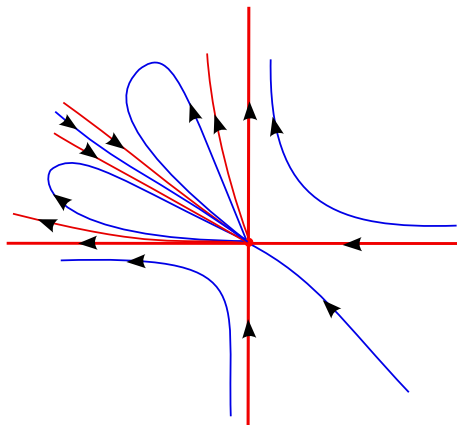


Figura 3.12: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.9).

Agora, para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (3.8), faremos um *blow down* par na direção x , isto é, os setores elípticos do segundo quadrante serão levados para o terceiro quadrante com a orientação das órbitas preservada. Aqui, o eixo y não é invariante. Para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste e, como tínhamos órbitas saindo da origem no terceiro quadrante, formar-se-á um setor elíptico. Para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste e, ali, as órbitas passam. Um esboço das transformações feitas pode ser visto na Figura 3.13.

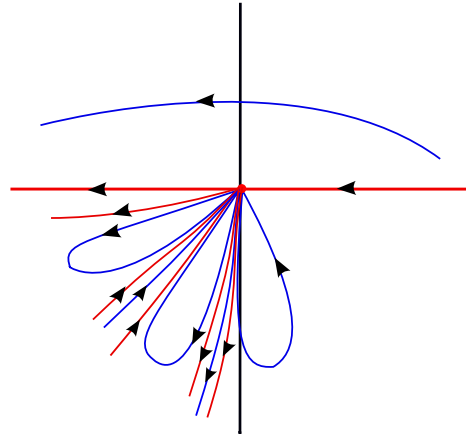


Figura 3.13: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.8).

Por fim, para obter o retrato de fase local do campo vetorial (3.7) na carta U_2 , faremos um *blow down* ímpar na direção y . A Figura 3.14 mostra tal comportamento.

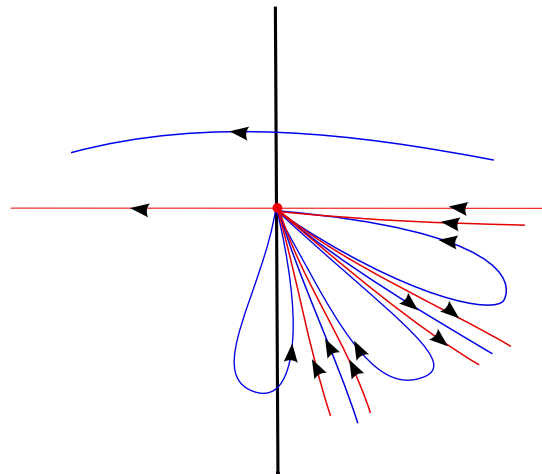


Figura 3.14: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (3.7) na carta U_2 .

Com o comportamento do campo vetorial nas cartas U_1 e U_2 , faremos um esboço do seu retrato de fase numa vizinhança dos pontos de equilíbrio no infinito no disco de Poincaré, conforme Figura 3.15.

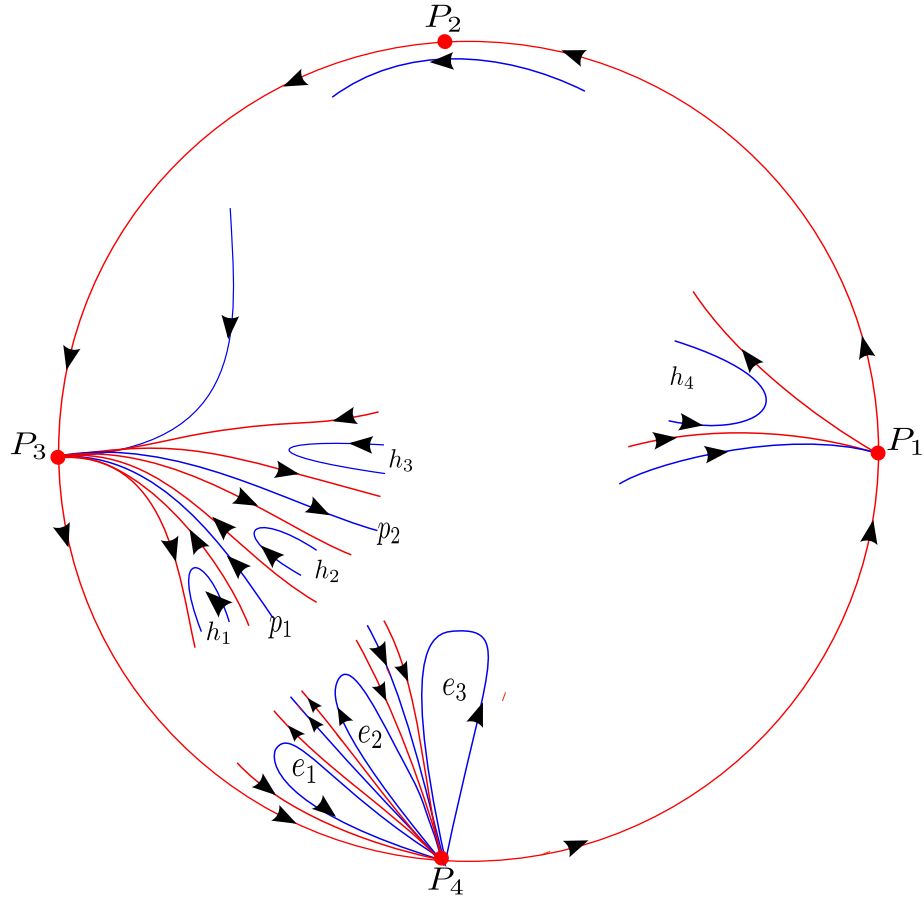


Figura 3.15: Esboço topológico do retrato de fase local da compactificação do campo vetorial H_p no infinito no disco de Poincaré.

3.2 Variedade Assintótica

De acordo com Campbell [5], os pontos $(-1, -163/4)$ e $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ não têm imagem inversa sob a aplicação $F = (p, q)$, todos os pontos da curva

$$\beta(s) = \left(s^2 - 1, -75s^5 + \frac{345s^4}{4} - 29s^3 + \frac{117s^2}{2} - \frac{163}{4} \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

têm exatamente uma imagem inversa e todos os outros pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \beta(\mathbb{R})$ têm duas imagens inversas. Um esboço, fora de escala, da curva assintótica é dado pela Figura 3.16.

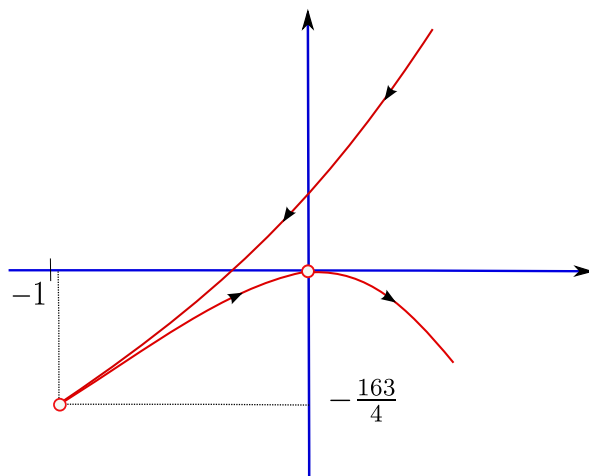


Figura 3.16: Curva assintótica β .

3.3 Parte Finita

Nesta seção, calcularemos a quantidade de componentes conexas de cada nível $p^{-1}(\{c\})$ de p . Veja Tabela 3.1.

$p = c$	Componentes Conexas de $p^{-1}(\{c\})$
$c > 0$	4 componentes conexas
$c = 0$	5 componentes conexas
$-1 < c < 0$	4 componentes conexas
$c = -1$	4 componentes conexas
$c < -1$	2 componentes conexas

Tabela 3.1: Componentes conexas de $p^{-1}(\{c\})$.

I. Caso $c = 0$. Segue que $p(x, y) = 0$, ou seja,

$$(x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y) = 0. \quad (3.13)$$

Estudando o fator $x^2y - x + 1$, vemos que $x^2y - x + 1 = 0$. Assim,

$$y = \frac{x - 1}{x^2}.$$

Portanto, o gráfico da função anterior possui duas componentes

$$\gamma_2 = \left\{ \left(x, \frac{x - 1}{x^2} \right); x < 0 \right\},$$

$$\gamma_4 = \left\{ \left(x, \frac{x - 1}{x^2} \right); x > 0 \right\}.$$

Para o segundo fator $G(x, y) = x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y$, a equação $G(x, y) = 0$ implica que

$$x^4y^3 + (2x^2 - 3x^3)y^2 + (3x^2 - 2x + 1)y - x = 0.$$

Lembremos que o discriminante da equação cúbica $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ é dado por $\text{Disc} = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27ad$. Neste caso, uma substituição dos coeficientes fornece o valor

$$\text{Disc} = -x^5(32x^2 - 13x + 4).$$

Assim, obtemos que:

- a.** Se $x < 0$, então $\text{Disc} > 0$, e, portanto, existem 3 soluções reais $y_1(x), y_2(x)$ e $y_3(x)$ da equação $G(x, y) = 0$. Escrevendo em potências de y vemos que todos os coeficientes são positivos, ou seja, não existem mudanças de sinal, o que implica, pelo critério de Descartes, que não existem raízes positivas. Assim, podemos ordenar-lás da seguinte forma $y_1(x) < y_2(x) < y_3(x) < 0$. Estas três soluções correspondem a três componentes conexas

$$\gamma_1 = \{(x, y_1(x)); x < 0\},$$

$$\gamma_3 = \{(x, y_2(x)); x < 0\},$$

$$\gamma_5 = \{(x, y_3(x)); x < 0\}.$$

- b. Se $x > 0$, então $\text{Disc} < 0$ e, portanto, existe somente uma solução $z(x)$ da equação $G(x, y) = 0$. O gráfico desta está contido numa componente conexa γ . Analisando o ponto $(0, 0)$, vemos que

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita 2.1, existem uma vizinhança $(-\delta, \delta)$ e uma função $y(x)$ de classe C^∞ tais que $G(x, y(x)) = 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$. Como a vizinhança $(-\delta, \delta)$ possui números negativos e positivos, o gráfico de $y = y(x)$ deve estar contido numa das componentes $\gamma^* \in \{\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5\}$ em $x < 0$ e na componente γ em $x > 0$. Portanto, $\gamma = \gamma^*$. Vamos provar que $\gamma^* = \gamma_5$. De fato, se $\gamma^* = \gamma_3$, então, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_2(x) = 0$, o que implica que $\lim_{x \rightarrow 0^-} y_3(x) = 0$ também. Deste modo, existiriam três curvas no nível 0 coincidindo no ponto $(0, 0)$. Isto é uma contradição. Se supomos que $\gamma^* = \gamma_1$, obtemos também uma contradição.

- c. Tomando a reta $x = -1$, verificamos que existem 4 soluções para a equação $p(-1, y) = 0$, que são -3.24 , -2 , -1.55 , e -0.19 e que correspondem aos pontos $a_1 = (-1, -3.24)$, $a_2 = (-1, -2)$, $a_3 = (-1, -1.55)$ e $a_4 = (-1, -0.19)$. Nos próximos cálculos, se necessário for, utilizaremos também apenas duas casas decimais sem arredondamento. Note que, $a_2 \in \gamma_2$. Ordenando os pontos na reta $x = -1$, resulta que $\gamma_1 \prec \gamma_2 \prec \gamma_3$.

Veja na Figura 3.17, um esboço das 5 componentes conexas do nível $c = 0$.

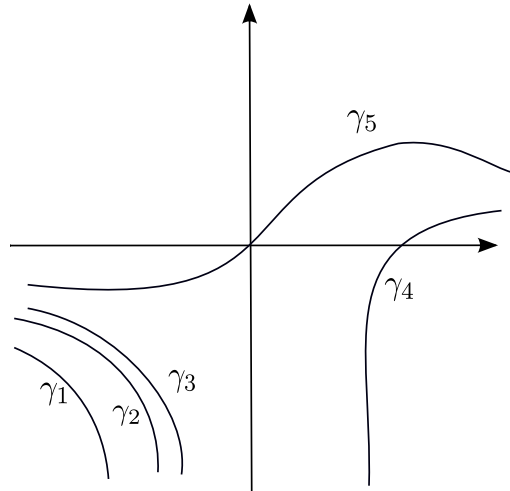


Figura 3.17: Componentes conexas do nível $c = 0$.

II. Caso $c = -1$. Sendo $p(x, y) = -1$, temos que

$$(x^2y - x + 1)(x^4y^3 - 3x^3y^2 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 2xy - x + y) = -1.$$

Assim,

$$p + 1 = (1 + y - 2xy + x^2y^2)(1 - x + x^2 + 2x^2y - 2x^3y + x^4y^2) = 0. \quad (3.14)$$

Estudando o fator $1 + y - 2xy + x^2y^2$ vemos que $1 + y - 2xy + x^2y^2 = 0$, implicando que,

$$x = \frac{y \pm \sqrt{-y^3}}{y^2}.$$

Desta forma, o gráfico da função anterior possui duas componentes conexas

$$\theta_2 = \left\{ \left(\frac{y - \sqrt{-y^3}}{y^2}, y \right); y < 0 \right\},$$

$$\theta_4 = \left\{ \left(\frac{y + \sqrt{-y^3}}{y^2}, y \right); y < 0 \right\}.$$

Para o segundo fator $1 - x + x^2 + 2x^2y - 2x^3y + x^4y^2$, temos que $1 - x + x^2 + 2x^2y - 2x^3y + x^4y^2 = 0$.

Dai,

$$y = \frac{-x^2 + x^3 \pm \sqrt{-x^5}}{x^4}.$$

Portanto, o gráfico da função possui duas componentes conexas

$$\theta_1 = \left\{ \left(x, \frac{-x^2 + x^3 - \sqrt{-x^5}}{x^4} \right); x < 0 \right\},$$

$$\theta_3 = \left\{ \left(x, \frac{-x^2 + x^3 + \sqrt{-x^5}}{x^4} \right); x < 0 \right\}.$$

Na Figura 3.18 vemos um esboço das componentes conexas do nível $c = -1$.

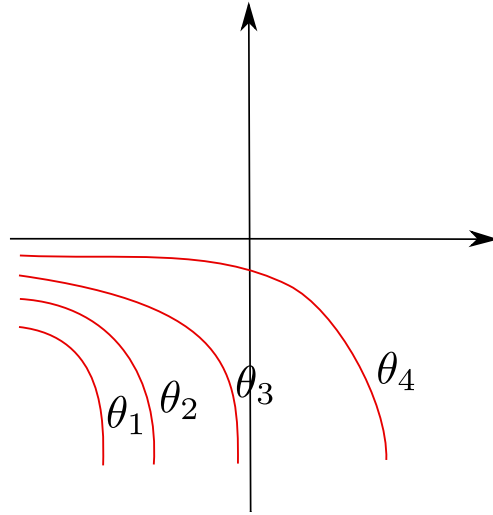


Figura 3.18: Componentes conexas do nível $c = -1$.

III. Caso $c \neq 0$ e $c \neq -1$. Sabemos que $h = t(xt + 1)$ e, assim, $xt^2 = h - t$. Logo,

$$f = \frac{h^2}{t^2}(t^2 + y) = h^2 + \frac{h^2 y}{t^2} = h^2 + \frac{h^2(t+1)}{t^2 x}$$

e, visto que, $c = f + h$, segue que

$$c - h = h^2 + \frac{h^2(t+1)}{h-t}.$$

Desse modo, isolando t , temos

$$t = \frac{c - 2h - h^2}{c - h}.$$

Logo, $h = t^2x + t$, implicando que

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{h-t}{t^2} = \frac{[h(c-h) - h(c-2h-h^2)]/(c-h)}{h^2(c-2h-h^2)^2/(c-h)^2} \\
 &= \frac{h(c-h-c+2h+h^2)(c-h)}{h^2(c-2h-h^2)^2} \\
 &= \frac{h(h^2+h)(c-h)}{h^2(c-2h-h^2)^2} \\
 &= \frac{h^2(h+1)(c-h)}{h^2(c-2h-h^2)^2} \\
 &= \frac{(h+1)(c-h)}{(c-2h-h^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{t+1}{x} = \frac{[h(c-2h-h^2) + c-h]/(c-h)}{(h+1)(c-h)/(c-2h-h^2)^2} \\
 &= \frac{(hc-2h^2-h^3+c-h)(c-2h-h^2)^2}{(h+1)(c-h)^2} \\
 &= \frac{[c(h+1) - h(h+1)^2](c-2h-h^2)^2}{(h+1)(c-h)^2} \\
 &= \frac{(h+1)[c-h(h+1)](c-2hh^2)^2}{(h+1)(c-h)^2} \\
 &= \frac{(c-h^2-h)(c-2h-h^2)^2}{(c-h)^2}.
 \end{aligned}$$

IV. Caso $-1 < c < 0$. Afirmamos que $p^{-1}(\{c\})$ possui quatro componentes conexas.

Sabemos que $\#\{(\{c\} \times \mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})\} = 2$. Suponhamos que sejam (c, a) e $(c, b) \in \{(\{c\} \times \mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R})\}$, $a < b$. Neste caso, existem seis possibilidades, a priori, para a imagem de uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ por F . São elas: $\{c\} \times \mathbb{R}$, $\{c\} \times (-\infty, a)$, $\{c\} \times (-\infty, b)$, $\{c\} \times (a, b)$, $\{c\} \times (a, \infty)$, $\{c\} \times (b, \infty)$. Porém, elas não podem ocorrer simultaneamente, pois temos $\#\{F^{-1}((c, a))\} = \#\{F^{-1}((c, b))\} = 1$ e $\#\{F^{-1}((c, d))\} = 2$ se $d \neq a$ ou $d \neq b$.

Suponha que existe uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ levada em $\{c\} \times \mathbb{R}$. Neste caso, a imagem pela aplicação F de nenhuma outra componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ pode intersectar $\beta(\mathbb{R})$.

Como $\#\{F^{-1}((c, d))\} = 2$, para $d \neq a$ ou $d \neq b$, existe uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ cuja imagem pela aplicação F passa por (c, d) e, assim, a única opção é que $p^{-1}(\{c\})$ possua 4 componentes conexas que são levadas em $\{c\} \times \mathbb{R}$, $\{c\} \times (-\infty, a)$, $\{c\} \times (b, +\infty)$ e $\{c\} \times (a, b)$.

Suponhamos agora que $\{c\} \times \mathbb{R}$ não seja a imagem de uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$. Portanto, necessariamente, $\{c\} \times (-\infty, b)$ e $\{c\} \times (a, +\infty)$ são imagens pela aplicação F de exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$, pois são os únicos intervalos que intersectam (c, a) e (c, b) , respectivamente, e $\#\{F^{-1}((c, a))\} = \#\{F^{-1}((c, d))\} = 1$. Logo, como $\#\{F^{-1}((c, d))\} = 2$ para $d \neq a$ ou $d \neq b$, só nos resta a opção que $p^{-1}(\{c\})$ possua 4 componentes conexas e elas são levadas em $\{c\} \times (-\infty, a)$, $\{c\} \times (-\infty, b)$, $\{c\} \times (a, +\infty)$ e $\{c\} \times (b, +\infty)$. Deste modo, $p^{-1}(\{c\})$ possui 4 componentes conexas.

V. Caso $c > 0$. Neste caso, $p^{-1}(\{c\})$ possui 4 componentes conexas. A prova desta afirmação é análoga àquela do caso IV.

A partir de (3.13) e (3.14), e utilizando a função *parametrization* do *software Maple* [21], obtivemos uma parametrização racional para as curvas $p = 0$ e $p = -1$. Logo, temos parametrizações para as componentes conexas de p nos níveis -1 e 0 . Chamaremos de $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ as componentes conexas para o nível 0 e de $\theta_1, \dots, \theta_4$ as componentes conexas do nível -1 .

I. Para o nível 0 :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left\{ \left(\frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in (0, 1) \right\}, \\ \gamma_2 &= \left\{ \left(\frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in (1, 2) \right\}, \\ \gamma_3 &= \left\{ \left(s, \frac{s-1}{s^2} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in (-\infty, 0) \right\}, \\ \gamma_4 &= \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(\frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R} \setminus (0, 2) \right\}, \\ \gamma_5 &= \left\{ \left(s, \frac{s-1}{s^2} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in (0, \infty) \right\}.\end{aligned}$$

II. Para o nível -1 :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \left\{ \left(-\frac{s^2}{(4s+1)^2}, -\frac{(21s^2+9s+1)(4s+1)^2}{s^4} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{-1}{4}, 0 \right) \right\}, \\ \theta_2 &= \left\{ \left(-12, -\frac{1}{9} \right) \right\} \cup \left\{ \left(-\frac{(3s+1)(4s+1)}{s^2}, -\frac{s^2}{(3s+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{3}, 0 \right) \right\}, \\ \theta_3 &= \left\{ \left(-\frac{s^2}{(4s+1)^2}, -\frac{(21s^2+9s+1)(4s+1)^2}{s^4} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in \left(-\frac{1}{4}, 0 \right) \right\}, \\ \theta_4 &= \left\{ \left(-\frac{(3s+1)(4s+1)}{s^2}, -\frac{s^2}{(3s+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2; s \in \left(\frac{-1}{3}, 0 \right) \right\}.\end{aligned}$$

Um esboço das curvas de nível -1 e 0 de p no disco de Poincaré é feito na Figura 3.19. As curvas em vermelho ilustram as componentes conexas do nível -1 e as curvas em preto ilustram as componentes conexas do nível 0 .

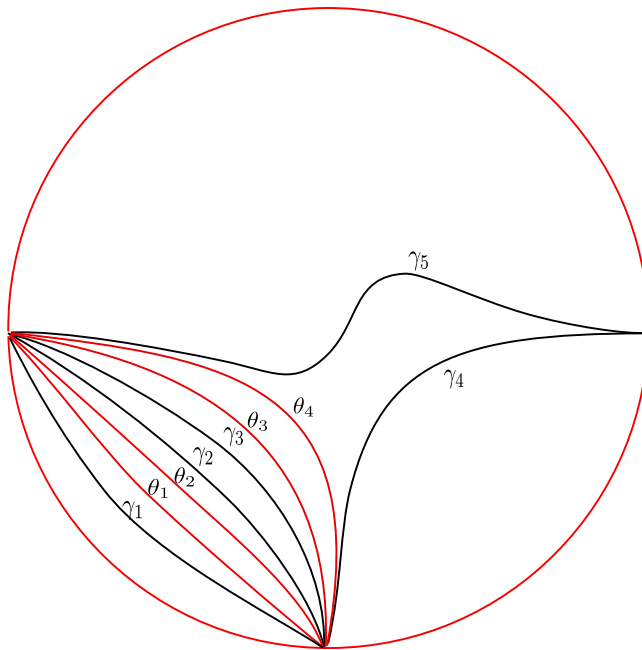


Figura 3.19: Curvas de nível -1 e 0 de p no disco de Poincaré.

Proposição 3.1. *Cada componente conexa dos níveis -1 e 0 , com exceção de γ_5 , intersecta o conjunto*

$$C = \{(-1, t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}$$

em exatamente um ponto.

A demonstração pode ser feita usando as parametrizações das componentes conexas. Podemos induzir uma relação de ordem nas componentes conexas dos níveis -1 e 0 de p como veremos nas seguintes proposições.

Proposição 3.2. *Seja M o conjunto das componentes conexas dos níveis -1 e 0 de p . Sejam $x, y \in M \setminus \gamma_5$. Denotemos por x' a componente vertical de $x \cap M$. Então, a relação $x \prec y$, se, e somente se, $x' < y'$ define uma relação de ordem parcial estrita em $M \setminus \gamma_5$.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in M \setminus \gamma_5$. Resulta que:

- i. \prec é irreflexiva. Temos que $x \not\prec x$, pois $x' \not< x'$.
- ii. \prec é transitiva. Se $x \prec y$ e $y \prec z$, então, $x' < y'$ e $y' < z'$. Portanto, $x' < z'$, e, logo, $x \prec z$.
- iii. \prec é antisimétrica. Se $x \prec y$, então, $x' < y'$. Desta forma, $y' \not< x'$, então, $y \not\prec x$ e assim, $y \not\prec x$.

Assim, \prec é uma relação de ordem parcial estrita em $M \setminus \gamma_5$. ■

A partir da parametrização das componentes, é de cálculo imediato que

$$\gamma_1 \prec \theta_1 \prec \theta_2 \prec \gamma_2 \prec \gamma_3 \prec \theta_3 \prec \theta_4 \prec \gamma_4.$$

No artigo [5], Campbell forneceu uma parametrização para a curva de nível $c \neq -1$ ou 0 ,

$$x(s) = \frac{(c-s)(s+1)}{c-2s-s^2} \quad \text{e} \quad y(s) = \frac{(c-2s-s^2)^2(c-s-s^2)}{(c-s)^2}. \quad (3.15)$$

Assim, fixando $c < -1$, temos a parametrização de duas componentes conexas de $p^{-1}(\{c\})$

$$\theta_1(c) = \{(x(s), y(s)); s \in (-\infty, c)\},$$

$$\theta_2(c) = \{(x(s), y(s)); s \in (c, +\infty)\}.$$

Proposição 3.3. *Sejam $\theta_1(c)$ e $\theta_2(c)$ as únicas componentes conexas de $p^{-1}(\{c\})$ quando $c < -1$. Então, $\theta_1(c)$ está contida na região entre θ_1 e θ_2 e $\theta_2(c)$ está contida na região entre θ_3 e θ_4 .*

Demonstração. Observemos que qualquer componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ está contida, por continuidade, em uma das regiões entre θ_1 e θ_2 e entre θ_3 e θ_4 e de (3.14), chamemos $\alpha(x, y) = 1 + y - 2xy + x^2y^2$ e $\beta(x, y) = 1 - x + x^2 + 2x^2y - 2x^3y + x^4y^2$. Calculando $\alpha(x(s), y(s))$, resulta

$$\frac{(-s^2 + c - 2s)^2}{c - s}.$$

Assim, α é positiva para $s < c$ e negativa para $s > c$, isto é, $\theta_2(c)$ está contida na região entre θ_2 e θ_4 e $\theta_1(c)$ não está.

Calculando $\beta(x(s), y(s))$, obtemos

$$\frac{(1 + c)(c - s)}{(c - 2s - s^2)^2}.$$

Como $c < -1$, segue que $c + 1 < 0$ e, logo, $(c - s) < 0$. Portanto, β é positiva para $s > c$ e negativa quando $s < c$, isto é, $\theta_1(c)$ está contida na região entre θ_1 e θ_3 e, então, $\theta_2(c)$ não está. ■

Proposição 3.4. *Seja $-1 < c < 0$. Então, exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ está contida em cada uma das seguintes regiões, entre γ_1 e θ_1 , entre θ_2 e γ_2 , entre γ_3 e θ_3 e entre θ_4 e γ_5 .*

Demonstração. Sabemos que $p^{-1}(\{c\})$ possui quatro componentes conexas para $-1 < c < 0$. Observemos que o interior de cada uma dessas quatro regiões não contém nenhuma componente conexa dos níveis -1 e 0 de p e como p é contínua em cada uma dessas regiões, então, exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$ está contida em cada uma dessas regiões. ■

Proposição 3.5. *A componente conexa γ_5 , divide o plano em duas regiões, uma que contém todas as outras componentes conexas do nível 0 e outra que não contém nenhuma, que chamaremos de D_5 . Além disso, p é ilimitado superiormente na região D_5 .*

Demonstração. Segue da Proposição 3.1 que a reta $f(t) = (-1, t)$ está contida em uma das componentes conexas o qual γ_5 divide o plano. Como f intersecta todas as outras

componentes do nível 0, segue que todas as componentes estão contidas nessa região e, então, a outra região não contém nenhuma, como queríamos. Para mostrar que p é ilimitado na região que não contém nenhuma componente de $p^{-1}(\{0\})$, consideremos a reta $g(t) = (t, -t)$. Assim, $p(g(t)) = 0$, possui duas soluções reais, $t = 0$ e $t = 0.68$, sendo que uma dessas soluções intersecta γ_4 e a outra γ_5 . Segue, então, que $p(g(t))$ está contida na componente conexa do nível 0, a qual γ_5 divide o plano e não contém nenhuma outra componente conexa do nível 0, para todo t suficientemente grande. Por outro lado, $p(g(t)) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$. ■

Proposição 3.6. *A componente conexa γ_4 divide o plano em duas regiões, uma que contém todas as outras componentes conexas do nível 0 e outra que não contém nenhuma, que chamaremos de D_4 . Além disso, p é ilimitado superiormente na região D_4 .*

Demonstração. Como $\gamma_1 \prec \gamma_2 \prec \gamma_3 \prec \gamma_4$, então, segue que $\gamma_1 \prec \gamma_2 \prec \gamma_3$ estão na mesma componente conexa o qual γ_4 divide o plano. Temos que mostrar agora que γ_5 também está nesta componente conexa. Considere a reta $g(t) = (t, -1)$. Assim, $p(g(t)) = 0$, possui quatro soluções reais, $t = 0.61$, $t = -1.38$, $t = -1.61$ e $t = -2.28$ que intersectam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ e não intersecta γ_4 . Portanto, γ_5 está contido na mesma região que γ_3 . Por outro lado, p é ilimitado superiormente na região que não contém nenhuma componente conexa do nível 0, para todo t suficientemente grande. Assim, $p(g(t)) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$. ■

A demonstração da próxima proposição é análoga àquelas das Proposições 3.5 e 3.6.

Proposição 3.7. *A componente conexa γ_1 divide o plano em duas regiões, uma que contém todas as outras componentes conexas do nível 0 e outra que não contém nenhuma, que chamaremos de D_3 . Além disso, p é ilimitado superiormente na região D_3 .*

As demonstrações das Proposições 3.8 e 3.9 podem ser encontradas em [3].

Proposição 3.8. *O polinômio p é ilimitado superiormente na região entre γ_2 e γ_3 .*

Proposição 3.9. *Dado $c > 0$, cada uma das regiões D_3 , D_4 , D_5 e a região entre γ_2 e γ_3 contém exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(\{c\})$.*

Proposição 3.10. *Existe uma m.c.R de H_p no primeiro quadrante, para a qual os bordos não compactos estão contidos em γ_4 e γ_5 .*

Demonstração. Observemos que $(0, 0) \in \gamma_4$ e $(1, 0) \in \gamma_5$. Consideremos λ o segmento de reta que une esses dois pontos. É fácil ver que λ está contido na região entre θ_4 , γ_4 e γ_5 . Tomando a parametrização $f : [0, 2] \rightarrow \lambda$, $f(t) = (t, 0)$, vemos que $g(t) = p(f(t)) = -t + t^2$. Então, $g'(t) = -1 + 2t$. Assim, o valor extremo de g é atingido em $t = 1/2$. Como $g''(1/2) = 2 > 0$, esse extremo corresponde a um mínimo que é $p(1/2, 0) = -1/4$, e $g(t) = c \in (-1/4, 0]$ quando $t \in (0, 1)$. Além disso, $t = (1 \pm \sqrt{1 + 4c})/2$.

- a. Se $c \in (-1/4, 0]$, então, existem dois valores para t ;
- b. Se $c = -1/4$, então, $t = 1/2$;
- c. Se $c < -1/4$, então, $t \notin \mathbb{R}$.

Portanto, segue que existe uma m.c.R no primeiro quadrante delimitada por γ_4 e γ_5 . ■

Proposição 3.11. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma submersão e H_f seu campo vetorial Hamiltoniano. Seja \mathcal{F}_f a folheação induzida pelo campo vetorial H_f . Se \mathcal{F}_f possui uma m.c.R \mathcal{A} , então, os bordos não compactos de \mathcal{A} estão contidos em duas componentes conexas de um mesmo nível de f .*

Demonstração. Sejam $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, 0 < x + y \leq 2\}$, $h(x, y) = xy$ e $T : B \rightarrow \mathcal{A}$ a aplicação que leva os níveis de h nos níveis de \mathcal{A} . Veja definição em 2.13. Defina $g : [0, 1] \rightarrow B$ tal que $g(t) = (1-t)(0, 1) + t(1, 0)$. Seja $x_n \in (0, 1)$ tal que $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e defina $y_n = 1 - x_n$. Então, os pontos $T(g(x_n))$ e $T(g(y_n))$ são pontos de uma mesma órbita de H_f ,

$$f(T(g(x_n))) = f(T(g(y_n))).$$

Pela continuidade das funções, $f(T(g(0))) = f(T(g(1)))$. Então,

$$f(T(0, 1)) = f(T(1, 0)),$$

com $T(0, 1)$ e $T(1, 0)$ pertencentes a bordos não compactos distintos. Como cada bordo não compacto também é uma semiórbita de H_f , segue que os bordos não compactos estão em um mesmo nível. ■

Proposição 3.12. *O campo H_p possui exatamente 4 m.c.R. Os bordos não compactos dessas m.c.R são partes de θ_1 e θ_2 , γ_2 e γ_3 , θ_3 e θ_4 e γ_4 e γ_5 .*

Demonstração. Pela Proposição 3.10, sabemos que existe uma m.c.R em cada uma dessas regiões e, pelas Proposições 3.3 e 3.9, existe exatamente uma componente de cada nível em cada uma das regiões entre θ_1 e θ_2 , γ_2 e γ_3 e θ_3 e θ_4 . Logo, pela Proposição 3.10, essas componentes são necessariamente as fronteiras das m.c.R. ■

3.4 Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_p

Pela Proposição 3.12, pelo estudo das componentes conexas dos níveis de p e pelo estudo dos retratos de fase qualitativos nas cartas U_1 e U_2 , obtemos o esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré. Veja Figura 3.20.

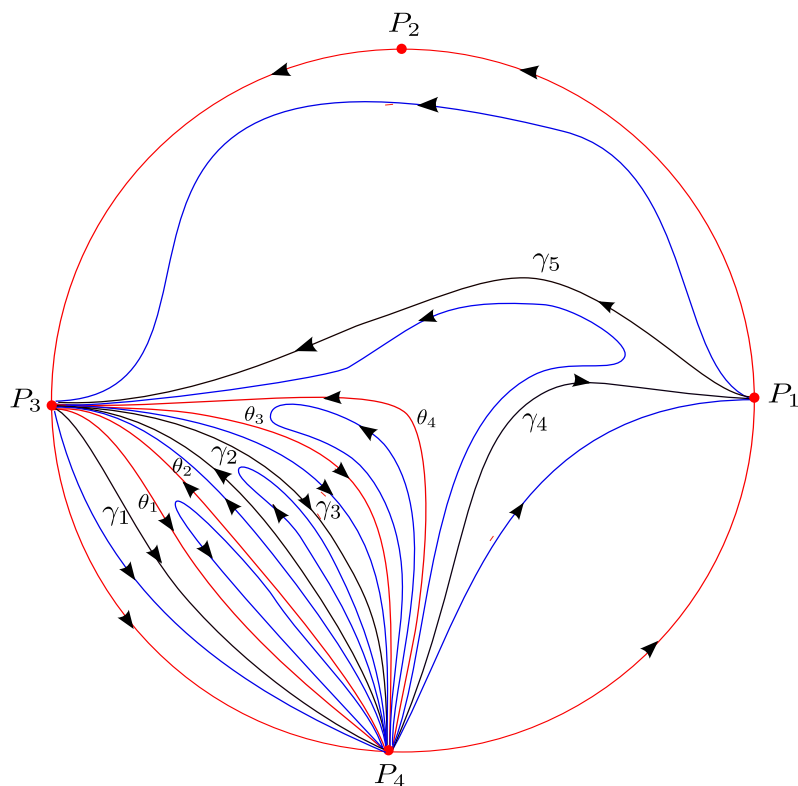


Figura 3.20: Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_p)$ no disco de Poincaré.

Pelo Teorema de Markus-Neumann-Peixoto em [16], se X_1 e X_2 são campos de vetores cujos fluxos ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente, possuem apenas singularidades isoladas, então ϕ_1 e ϕ_2 são topologicamente equivalentes se, e somente se, seus esqueletos completos de separatrizes forem topologicamente equivalentes. Deste modo, o retrato de fase global do campo H_p é topologicamente equivalente ao retrato de fase da Figura 3.20.

Veja na Figura 3.21 o retrato de fase de $\mathcal{P}(H_p)$, no disco de Poincaré, obtido através do *software* MATLAB [23]. Observando que nem todas as m.c.R são visíveis na figura.

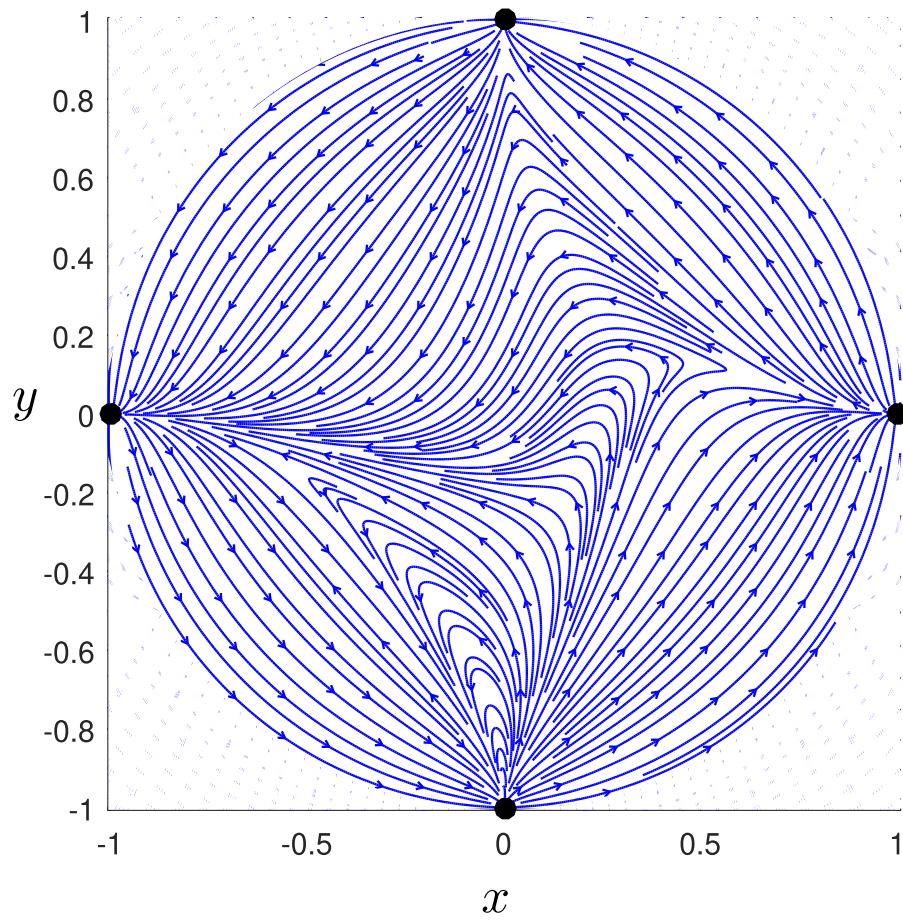


Figura 3.21: Retrato de fase de $\mathcal{P}(H_p)$, no disco de Poincaré, obtido através do *software* MATLAB.

A análise anterior conduz naturalmente à prova do Teorema 1.3.

Capítulo 4

Retrato de Fase Global do Campo

Vetorial H_q , sendo q de grau 25

Neste capítulo, demonstraremos o Teorema 1.4 construindo o retrato de fase global do campo vetorial Hamiltoniano H_q , dado por

$$H_q(x, y) = (-q_y(x, y), q_x(x, y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

associado ao polinômio q definido em (1.3).

Estudaremos o comportamento topológico das singularidades no infinito da compactificação de Poincaré do campo vetorial H_q em suas cartas locais, através da técnica de *blow up*, e também o comportamento do campo vetorial na parte finita de \mathbb{R}^2 . Para concluir o capítulo, faremos o retrato de fase global do campo vetorial $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré.

4.1 Estudo das Singularidades Infinitas do Campo Vetorial H_q

Como H_q não possui singularidades finitas, necessariamente possui singularidades infinitas. Para estudar tais singularidades, analisaremos o campo vetorial em suas cartas locais.

4.1.1 Estudo Qualitativo na Carta U_1

Visto que o polinômio q é de grau 25, então, o grau(H_q) = 24. Primeiramente, encontraremos os pontos singulares infinitos do campo vetorial na carta U_1 . Para isto utilizaremos a Proposição 2.4. Neste caso, temos $d = 24$, $P(x, y) = -q_y$, $Q(x, y) = q_x$, $P_{24}(x, y) = 750x^{15}y^9$, $Q_{24}(x, y) = -1125x^{14}y^{10}$ e, então, $F(u) = -1875u^{10}$. Concluimos que a origem é o único ponto singular infinito do campo vetorial na carta U_1 . Estudemos o comportamento desta singularidade.

A expressão do campo vetorial é dada por (2.6) da qual obtemos

$$\begin{cases} x' = -1875x^{10} + 17250x^9y^2 - 9900x^9y^3 + \dots, \\ y' = -750x^9y + 6750x^8y^3 - 4050x^8y^4 + \dots. \end{cases} \quad (4.1)$$

Estamos considerando apenas três parcelas para cada campo vetorial, porém a expressão completa pode ser vista no arquivo apresentado no Anexo II. É de cálculo direto que o eixo x é invariante e aponta da direita para a esquerda, porém o eixo y não é invariante. Para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Calculando a parte linear do campo vetorial na origem, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, o estudo desta singularidade será feito através da técnica do *blow up* direcional apresentada na Seção 2.3. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$ obtendo um *blow up* ímpar de ordem 9. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^9 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-1875 + 17250xy^2 + \dots), \\ y' = y(1125 - 10500xy^2 + \dots), \end{cases}$$

no qual $x = u$ e $y = w$. Tal campo vetorial possui apenas uma singularidade na origem. A linearização do campo na origem tem a forma

$$\begin{pmatrix} -1875 & 0 \\ 0 & 1125 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma sela, sendo o eixo x atrator e o eixo y repulsor. Faremos um *blow up* no campo vetorial (4.1) na direção y . Empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtendo um *blow up* ímpar de ordem 9, resultando, depois de eliminar o fator comum w^3 , a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -1125x^{10} + 10500x^9y - 43875x^8y^2 + \dots, \\ y' = -750x^9y + 6750x^8y^2 - 27000x^7y^3 + \dots. \end{cases} \quad (4.2)$$

É de cálculo direito que o eixo x é invariante e o campo vetorial aponta da direita para esquerda. Porém, o eixo y não é invariante e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. A parte linear na origem tem a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, outro *blow up* será necessário. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtendo um *blow up* ímpar de ordem 9. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^9 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-1125 + 10500y + \dots), \\ y' = y(375 - 3750y + \dots). \end{cases}$$

Este campo vetorial possui duas singularidades ao longo do eixo y , a primeira na origem e a segunda no ponto $(0, 1)$. A linearização do campo vetorial nestas singularidades fornece, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} -1125 & 0 \\ 0 & 375 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo x é atrator e o eixo y é repulsor. A singularidade no ponto $(0, 1)$ é do tipo linearmente nula. Para estudarmos tal singularidade, faremos uma translação do ponto $(0, 1)$ para a origem, obtendo como novo campo vetorial o seguinte

$$\begin{cases} x' = -170x^7 + 1216x^6y - 1990x^7y + \dots, \\ y' = y(170x^6 + 2355x^6y - 698x^4y^2 + \dots). \end{cases} \quad (4.3)$$

Agora, fazendo um *blow up* do campo vetorial (4.2) na direção y e empregando as mudanças $u \rightarrow uw, w \rightarrow w$, obtemos um *blow up* ímpar de ordem 9. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum w^9 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -375 + 3750x - 16875x^2 + \dots, \\ y' = y(750 - 6750x + 27000x^2 + \dots), \end{cases}$$

tendo o ponto de equilíbrio $(1, 0)$ que estudaremos fazendo o *blow up* no campo vetorial (4.2) na direção x . Continuando com o campo vetorial (4.3), e, calculando a parte linear deste campo vetorial na origem, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, faremos um *blow up*. Na direção x , empregando a mudança $u \rightarrow u, w \rightarrow uw$, obtemos um *blow up* par de ordem 6. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^6 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-170 + 1216y + \dots), \\ y' = y(340 - 1216y + \dots). \end{cases}$$

Tal campo vetorial possui uma singularidade na origem cuja parte linear é

$$\begin{pmatrix} -170 & 0 \\ 0 & 340 \end{pmatrix}.$$

Assim, a origem é uma sela, sendo o eixo x atrator e o eixo y repulsor. Agora, faremos um *blow up* do campo vetorial (4.3) na direção y . Empregando a mudança $u \rightarrow uw, w \rightarrow w$,

obtemos um *blow up* par de ordem 6. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum w^6 , um novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = 522x^4 - 1396x^5 + 1216x^6 + \dots, \\ y' = y(522x^3 - 698x^4 + 170x^6 + \dots). \end{cases} \quad (4.4)$$

Tal campo vetorial possui duas singularidades, a origem e o ponto $(1.66, 0)$. A linearização do campo vetorial nestas singularidades tem as respectivas formas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1299.29 & -850.09 \\ 0 & 649.64 \end{pmatrix}.$$

Logo, a origem é uma singularidade linearmente nula e a outra é hiperbólica do tipo sela. Estudaremos a singularidade na origem. Como a origem é uma singularidade linearmente nula, faremos um *blow up*. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$ obtendo um *blow up* par de ordem 4. Com a mudança de variáveis anterior, obtemos, depois de eliminar o fator comum u^4 , um novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = 522 - 1396x + \dots, \\ y' = y(698 - 1216x + \dots), \end{cases} \quad (4.5)$$

que possui apenas uma singularidade no ponto $(0, -1)$. A parte linear do campo em $(0, -1)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -178 & 117 \\ -242 & 178 \end{pmatrix},$$

a qual possui autovalores -58.05 , 58.05 com autovetores associados $(0.97, 1)$ e $(0.49, 1)$, respectivamente. Portanto, é uma singularidade hiperbólica do tipo sela. Logo, faremos o *blow up* no campo vetorial (4.4) na direção y e empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtemos um *blow up* par de ordem 4. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum w^4 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-1125 - 3915x - 5331x^2 + \dots), \\ y' = 375 + 1155x + 1302x^2 + \dots, \end{cases}$$

possuindo apenas uma singularidade no ponto $(0, -1)$, que já foi analisada quando fizemos o *blow up* no campo vetorial (4.4) na direção x . Na Figura 4.1 está o esboço do retrato de fase local do campo vetorial (4.5) na singularidade $(0, -1)$.

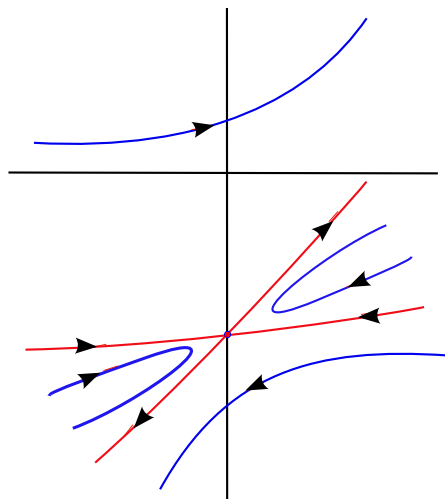


Figura 4.1: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.5) na singularidade $(0, -1)$.

Agora, para voltarmos ao campo vetorial original (4.1), utilizaremos a técnica do processo inverso ao *blow up* que foi dada na Seção 2.3. Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (4.4), faremos um *blow down* par do campo vetorial (4.5) na direção x . Aqui a orientação das órbitas é preservada, o segundo quadrante é levado para o terceiro quadrante. Deste modo, concluímos que as órbitas correspondem a duas órbitas no segundo quadrante, uma saindo e a outra entrando, formando um setor hiperbólico. Já o setor hiperbólico do quarto quadrante é mantido e o setor hiperbólico do terceiro quadrante corresponde a um setor hiperbólico no segundo quadrante. Deste modo, obtemos o retrato de fase local do campo vetorial (4.4). Veja Figura 4.2.

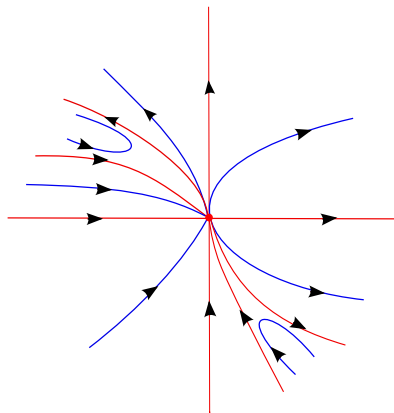


Figura 4.2: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.4).

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (4.3), faremos um *blow down* par na direção y e, juntando com a outra singularidade $(1.66, 0)$, obtemos um setor hiperbólico no primeiro quadrante e dois setores hiperbólicos no quarto quadrante. Como o *blow up* do campo vetorial (4.3) foi de ordem par e na direção y , então, a orientação das órbitas é preservada e os setores hiperbólicos do quarto quadrante correspondem aos setores hiperbólicos do terceiro quadrante. Os eixos são invariantes, sendo que ao longo do eixo x o campo vetorial aponta para a origem e no eixo y o campo vetorial vai de baixo para cima, conforme a Figura 4.3.

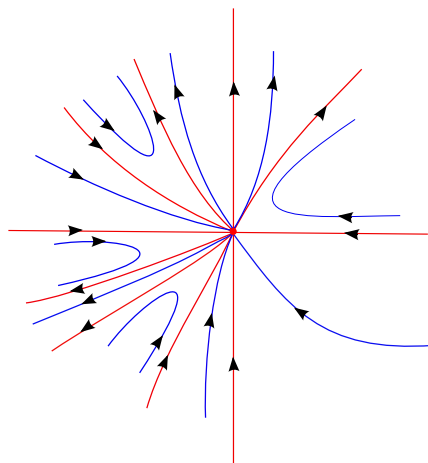


Figura 4.3: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.3).

O campo vetorial (4.2) é a translação do campo vetorial (4.3). A origem é levada no ponto $(0, 1)$. Na Figura 4.4 esboçamos o retrato de fase local do campo vetorial (4.3) com a sela na origem a qual havíamos calculado.

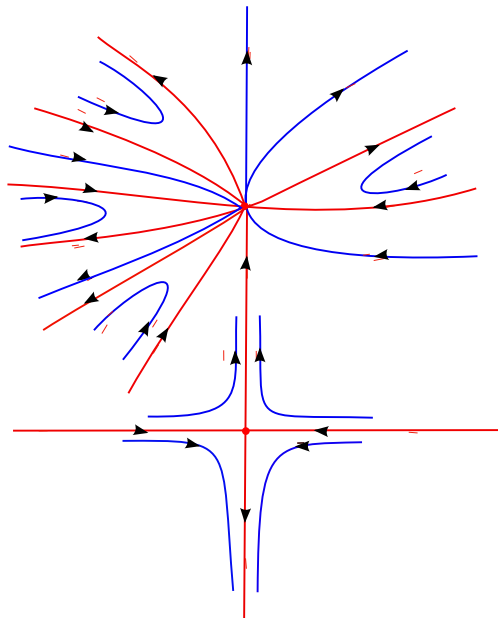


Figura 4.4: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.2) nas singularidades na origem e no ponto $(0, 1)$.

Agora, faremos um *blow down* ímpar do campo vetorial (4.2) na direção x . No primeiro quadrante o campo vetorial tem um setor hiperbólico. Tal setor é preservado, visto que todas as órbitas, numa vizinhança da origem, cruzam a reta $x = y$ da direita para esquerda. Já no segundo quadrante temos três setores hiperbólicos. Sabemos que o eixo y é não invariante e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção nordeste, e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Porém, no eixo x , o campo vetorial aponta para a origem, como está ilustrado na Figura 4.5.

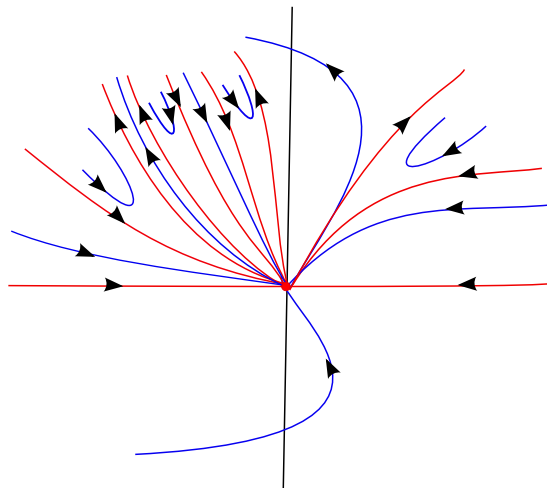


Figura 4.5: Esboço topológico do *blow down* do retrato de fase local do campo de vetores (4.2) nas singularidades $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

Logo, faremos um *blow down* ímpar na direção x , isto é, os setores hiperbólicos do segundo quadrante correspondem aos setores hiperbólicos do terceiro quadrante, com a orientação das órbitas trocada, porém no primeiro quadrante o setor hiperbólico é preservado. Sabemos que o eixo x é invariante e o campo vetorial aponta da direita para esquerda. Porém, o eixo y não é invariante e o campo vetorial aponta na direção noroeste. Veja a Figura 4.6 com uma ilustração das transformações feitas após o *blow down*.

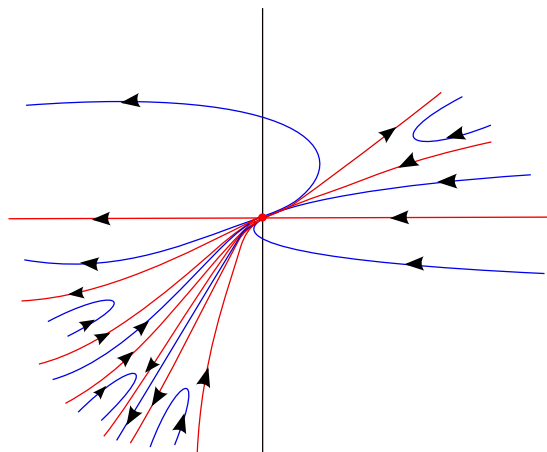


Figura 4.6: Esboço topológico do retrato de fase local após o *blow down* do campo de vetores (4.2).

Agora, para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial na carta U_1 , faremos um *blow down* ímpar do campo vetorial (4.1) na direção y , isto é, as transformações feitas no terceiro quadrante correspondem ao quarto quadrante com a orientação das órbitas trocada. Sabemos que o eixo x é invariante e o campo vetorial aponta da direita para esquerda. Porém, o eixo y não é invariante e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Tais comportamentos são ilustrados na Figura 4.7.

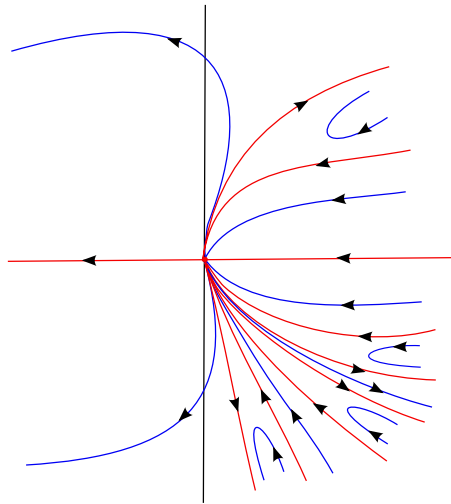


Figura 4.7: Comportamento qualitativo do retrato de fase local do campo de vetores (4.1) na carta U_1 .

4.1.2 Estudo Qualitativo na Carta U_2

Nesta subseção, faremos o do retrato de fase local campo vetorial na carta U_2 . Primeiro, encontraremos os pontos singulares no infinito do campo vetorial. Para isto utilizaremos a Proposição 2.4. Neste caso, temos $G(u) = 1875u^{15}$. Como o campo não possui singularidades finitas, concluímos que a origem é o único ponto singular infinito do campo vetorial na carta U_2 . Estudemos o comportamento desta singularidade.

A expressão do campo vetorial é dada por (2.7), obtendo

$$\begin{cases} x' = 1875x^{15} - 17250x^{14}y^2 + 9900x^{13}y^3 + \dots, \\ y' = 1125x^{14}y - 10500x^{13}y^3 + 5850x^{12}y^4 + \dots. \end{cases} \quad (4.6)$$

Aqui o eixo x é invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta para esquerda e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta para direita e a origem é uma singularidade linearmente nula. Logo, o estudo desta singularidade será feito através da técnica do *blow up* direcional apresentada na Seção 2.3. Na direção x , empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtemos um *blow up* par de ordem 14. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^{14} , um novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(1875 - 17250xy^2 + \dots), \\ y' = y(-750 + 6750xy^2 + \dots). \end{cases}$$

É de cálculo direto que ambos os eixos são invariantes. A parte linear do campo vetorial na origem é

$$\begin{pmatrix} 1875 & 0 \\ 0 & -750 \end{pmatrix}.$$

Logo, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela em que o eixo x é repulsor e o eixo y é atrator. Faremos um *blow up* do campo vetorial (4.6) na direção y . Empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtendo um *blow up* par de ordem 14. Com esta mudança de variáveis, resulta, depois de eliminar o fator comum w^{14} , um novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = 750x^{15} + 4050x^{13}y - 6750x^{14}y + \dots, \\ y' = 1125x^{14}y + 5850x^{12}y^2 - 10500x^{13}y^2 \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

O eixo x é invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta da origem para a esquerda e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta da origem para direita. Porém, no eixo y o campo vetorial é não invariante. Para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. A parte linear do campo na origem tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, como a origem é uma singularidade linearmente nula, então, outro *blow up* é necessário. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtendo

um *blow up* par de ordem 8. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^8 , um novo campo vetorial

$$\begin{cases} x' = 750x^7 + 4050x^6y + \dots, \\ y' = y(375x^6 + 1800x^5y + \dots). \end{cases} \quad (4.8)$$

É de cálculo direito que o eixo x é invariante. Para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta da origem para a esquerda e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta da origem para direita. Este campo vetorial possui duas singularidades, no ponto $(0, 0)$ e no ponto $(0, 1)$. Suas linearizações são, respetivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 170 & 0 \\ 0 & 170 \end{pmatrix}.$$

A singularidade na origem é do tipo linearmente nula e a outra é hiperbólica do tipo repulsora. Faremos o *blow up* do campo vetorial (4.7) na direção y e, empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtemos um *blow up* par de ordem 8. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum w^8 , o seguinte campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -50 + 5x - 30x^2 + \dots, \\ y' = y(5 - 60x + 225x^2 + \dots), \end{cases}$$

obtendo a singularidade $(-1, 0)$, que já foi estudada quando fizemos o *blow up* no campo vetorial (4.7) na direção x .

Para estudar a singularidade linearmente nula do campo (4.8), faremos um novo *blow up*. Primeiro na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$ e obtemos um *blow up* par de ordem 6, resultando, depois de eliminar o fator comum u^6 , a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(750 + 4050y + \dots), \\ y' = y(-375 - 2250y + \dots). \end{cases}$$

Este campo vetorial possui duas singularidades nos pontos $(0, 0)$ e $(0, -1)$. As linearizações são dadas, respetivamente, por

$$\begin{pmatrix} 750 & 0 \\ 0 & -375 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A singularidade na origem é hiperbólica do tipo sela, sendo o eixo x repulsor e o eixo y atrator e, no ponto $(0, -1)$, a singularidade é de tipo linearmente nula. Assim, é necessário fazer um *blow up*. Na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$ e obtemos um *blow up* par de ordem 6. Com a mudança de variáveis anterior, resulta, depois de eliminar o fator comum u^6 , um novo campo vetorial. Fazendo o *blow up* do campo vetorial (4.8) na direção y , resultam singularidades que estudaremos fazendo *blow up* no campo vetorial (4.8) na direção x . Deste modo, continuando com a singularidade $(0, -1)$ do campo vetorial (4.8), faremos outro *blow up*. Para simplificar as contas, fazemos a translação $(u, w) = (u, v - 1)$, resultando a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -16x^4 + 388x^5 + 5429x^6 + \dots, \\ y' = 2x^3 - 10x^4 - 1320x^6 + \dots. \end{cases} \quad (4.9)$$

Para este campo vetorial, o eixo x não é invariante e, para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Porém, o eixo y é invariante e aponta para cima. Como a origem é uma singularidade linearmente zero, é necessário fazermos um *blow up*. Primeiro, faremos um *blow up* na direção x . Empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, obtemos um *blow up* par de ordem 2 sem singularidades a analisar. Agora, fazendo o *blow up* do campo vetorial (4.9) na direção y e empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow uw$ e $w \rightarrow w$, obtemos um *blow up* par de ordem 2. Depois da mudança de variáveis, e eliminado o fator comum w^2 , resulta a seguinte expressão para o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = -2x^4 + 6x^3y + 38x^4y + \dots, \\ y' = 2x^3y - 18x^2y^2 - 54x^3y^2 + \dots. \end{cases} \quad (4.10)$$

Ambos os eixos são invariantes, sendo que no eixo x o campo vetorial aponta da direita para esquerda e no eixo y o campo vetorial aponta de baixo para cima. A parte linear do

campo vetorial na origem é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a origem é uma singularidade linearmente nula e, então, outro *blow up* é necessário. Para fazermos o *blow up* no campo vetorial (4.10) na direção x , empregamos a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$ e obtemos um *blow up* ímpar de ordem 3, resultando, depois de eliminar o fator comum u^3 , o campo vetorial

$$\begin{cases} x' = x(-2 + 6y + 38xy + \dots), \\ y' = y(4 - 24y - 92xy + \dots). \end{cases} \quad (4.11)$$

Este campo vetorial possui duas singularidades, uma na origem e a outra no ponto $(0, -0.47)$. Fazendo as linearizações, obtemos

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -12.97 & 0 \\ 31.40 & -51.90 \end{pmatrix}.$$

A singularidade na origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela em que o eixo x é atrator e o eixo y é repulsor. Já na singularidade $(0, -0.47)$, possui autovalores -51.90 , -12.97 com autovetores associados $(0, 1)$ e $(0.77, 0.62)$, respectivamente, e, portanto, a singularidade é um nó atrator. A Figura 4.8, ilustra o comportamento topológico do retrato de fase local do campo vetorial (4.11) nas singularidades mencionadas.

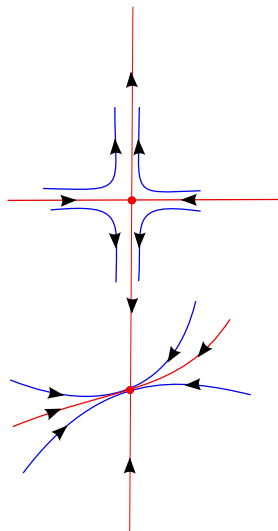


Figura 4.8: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.11) nas singularidades, na origem e no ponto $(0, -0.47)$.

Faremos o *blow up* do campo vetorial (4.10) na direção y e empregando a mudança de variáveis $u \rightarrow u$ e $w \rightarrow uw$, resulta um *blow up* ímpar de ordem 3. Assim, após eliminar o fator em comum w^3 , o campo vetorial obtido é da forma

$$\begin{cases} x' = x(-300 - 75x + 24x^2 + \dots), \\ y' = y(375 + 75x - 18x^2 + \dots), \end{cases} \quad (4.12)$$

que possui duas singularidades, uma na origem e a outra no ponto $(-2.09, 0)$, as quais foram analisadas quando fizemos o *blow up* no campo vetorial na direção x .

Devemos agora retornar às variáveis originais utilizando as informações dadas na Seção 2.3. Para obtermos o retrato de fase do campo vetorial (4.11), faremos um *blow down* ímpar no campo vetorial (4.11) na direção x e, então, a orientação das órbitas é trocada e o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante. Já sabemos que os eixos são invariantes. Na Figura 4.9, ilustramos o comportamento topológico do retrato de fase local do campo vetorial (4.10).

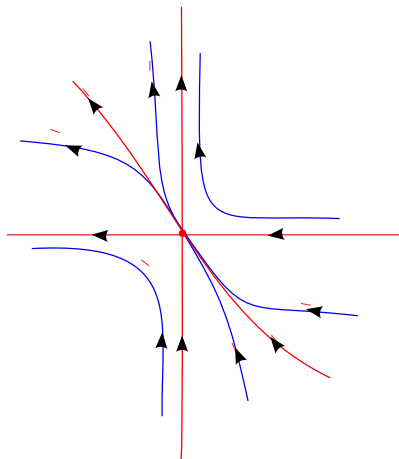


Figura 4.9: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.10).

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (4.9), faremos um *blow down* par do campo vetorial (4.10) na direção y , isto é, o quarto quadrante é levado para o terceiro quadrante com a orientação das órbitas preservada. O eixo x é não invariante e, para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudoeste formando um setor elíptico, e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Aqui as órbitas só passam. Na Figura 4.10, ilustramos o comportamento topológico do retrato de fase local do campo vetorial (4.9).

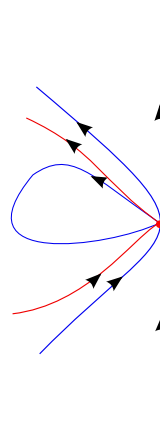


Figura 4.10: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.9).

O campo vetorial (4.8) é a translação do campo vetorial (4.9), com a origem sendo

levada ao ponto $(0, -1)$. Na Figura 4.11, esboçamos o retrato de fase local do campo vetorial (4.9) com a sela na origem a qual havíamos calculado.

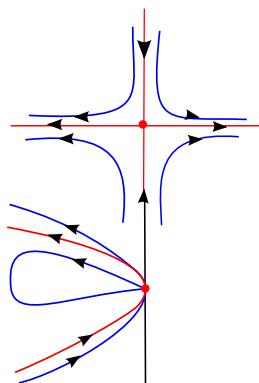


Figura 4.11: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.9) com a sela .

Para obtermos o retrato de fase local do campo vetorial (4.8) faremos um *blow down* par na direção x . Já sabemos que ambos os eixos são invariantes, sendo que ao longo do eixo x o campo vetorial sai da origem e no eixo y o campo vetorial aponta para a origem. O setor elíptico do terceiro quadrante é levado no segundo quadrante com a orientação preservada. Na Figura 4.12, esboçamos o retrato de fase local do campo vetorial (4.8).

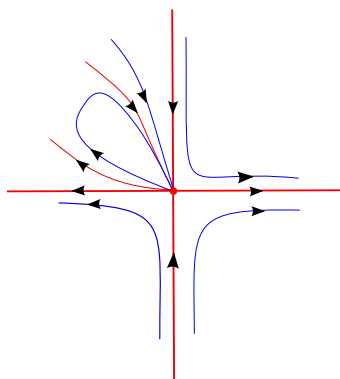


Figura 4.12: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.8).

Na Figura 4.13, ilustramos o retrato de fase local do campo vetorial (4.8) com o ponto repulsor em $(0, 1)$.

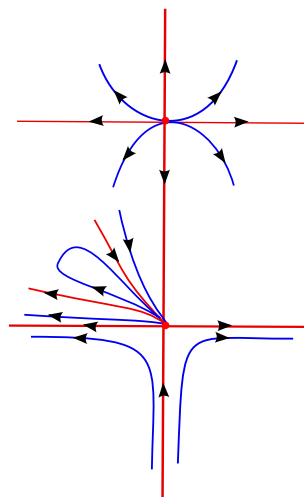


Figura 4.13: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.8) com o ponto repulsor $(0, 1)$.

O esboço do retrato de fase local campo vetorial (4.7) é obtido após um *blow down* par do campo vetorial (4.8) na direção x . O eixo y é não invariante e, para valores de $y < 0$, o campo vetorial aponta na direção sudeste e, para valores de $y > 0$, o campo vetorial aponta na direção noroeste. Já o eixo x é invariante pelo fluxo e, para valores de $x < 0$, o campo vetorial aponta para esquerda e, para valores de $x > 0$, o campo vetorial aponta para a direita, tendo agora dois setores elípticos no segundo quadrante que serão levados ao terceiro quadrante com a orientação mantida. Porém, o primeiro e quarto quadrante serão mantidos. Na Figura 4.14, esboçamos o retrato de fase local do campo vetorial (4.7).

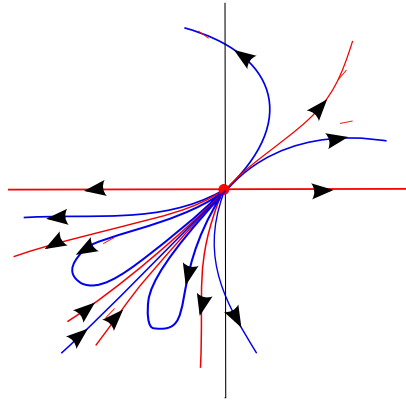


Figura 4.14: Esboço topológico do retrato de fase local do campo de vetores (4.7).

Agora, para obtermos o comportamento topológico do campo vetorial na carta U_2 , faremos um *blow down* par do campo vetorial (4.7) na direção y , isto é, o terceiro quadrante será levado no quarto quadrante com a orientação das órbitas mantida. O primeiro e segundo quadrante serão preservados. Tal comportamento é ilustrado na Figura 4.15.

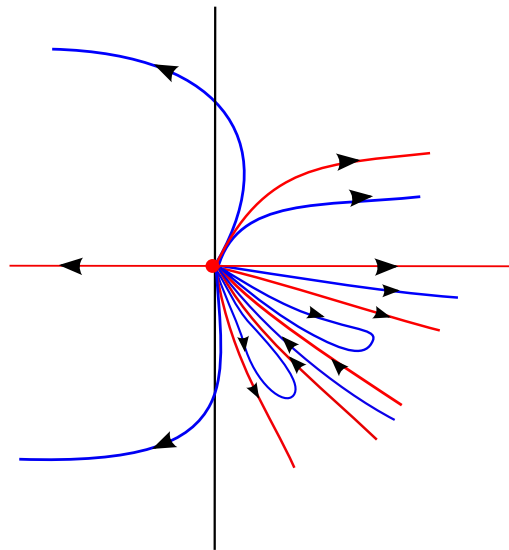


Figura 4.15: Comportamento qualitativo da singularidade do retrato de fase local do campo de vetores (4.6) na carta U_2 .

Com o comportamento dos campos vetoriais nas cartas U_1 e U_2 , obtemos, na Figura 4.16, o retrato de fase global do campo vetorial H_q no infinito no disco de Poincaré.

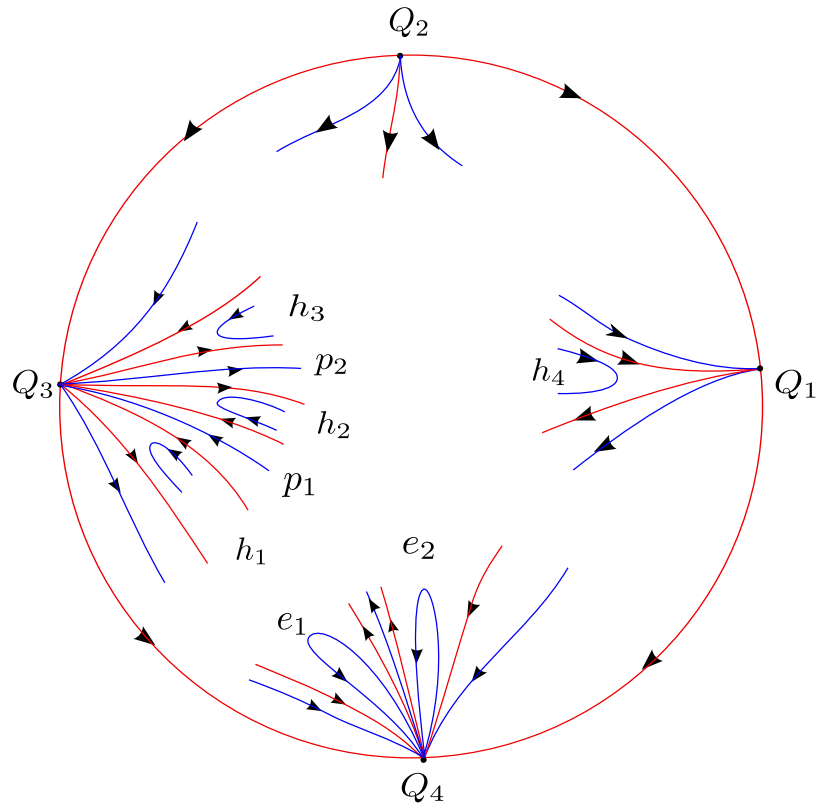


Figura 4.16: Esboço topológico do retrato de fase local da compactificação do campo vetorial H_q no infinito no disco de Poincaré.

4.2 Parte Finita

Nesta seção, estudaremos a quantidade de componentes conexas de cada nível $q^{-1}(\{c\})$ de q . Na Tabela 4.1, informamos a quantidade de componentes conexas de $q^{-1}(\{c\})$ que podem ser determinadas usando a curva assintótica β definida na Seção 3.2.

$q = c$	Componentes Conexas de $q^{-1}(\{c\})$
$c > 0$	3 componentes conexas
$c = 0$	5 componentes conexas
$-163/4 < c < 0$	5 componentes conexas
$c = -163/4$	5 componentes conexas
$c < -163/4$	3 componentes conexas

Tabela 4.1: Componentes conexas de $q^{-1}(\{c\})$.

Provaremos as seguintes proposições.

Proposição 4.1. *Para o polinômio q dado em (1.3), vemos que:*

- i. $q^{-1}(\{0\})$ possui 5 componentes conexas $\{\mu_i\}$;
- ii. $q^{-1}(\{-163/4\})$ possui 5 componentes conexas $\{\nu_i\}$;
- iii. A relação de ordem entre as componentes conexas dos níveis $-163/4$ e 0 de q é

$$\mu_1 \prec \nu_1 \prec \nu_2 \prec \mu_2 \prec \mu_3 \prec \nu_3 \prec \nu_4 \prec \mu_4 \quad \text{e} \quad \mu_5 \prec \nu_5.$$

Demonstração. Usaremos a variedade assintótica definida em (3.2) e o polinômio p que foi definido em (1.1). Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ e $\theta_1, \dots, \theta_4$ as componentes conexas dos conjuntos $p^{-1}(\{0\})$ e $p^{-1}(\{-1\})$, respectivamente. Avaliando na reta horizontal $y = -0.5$, tanto em p como em q , obtemos

$$S(x) = p(x, -0.5) = (1 - x - 0.5x^2)(-0.5 - x^2 - 0.75x^3 - 0.12x^4)$$

e

$$\begin{aligned} T(x) = q(x, -0.5) = & -16.75 + 19.75x - 41.625x^2 + 33.06x^3 + 59.95x^4 - 58.25x^5 \\ & -45.06x^6 + 140.17x^7 + 160.61x^8 - 49.20x^9 - 185.50x^{10} \\ & -141.97x^{11} - 55.62x^{12} - 12.30x^{13} - 1.46x^{14} - 0.073x^{15}. \end{aligned}$$

Calculando as raízes de $S(x) = 0$, obtemos quatro soluções, sendo elas $-3.85, -2.73, -2.43$, e 0.73 . De modo análogo, obtemos $-3.60, -3.41, -1.65$ e -0.58 como raízes de $S(x) = -1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} A_1 &= (-3.85, -0.5) \in \gamma_1, A_2 = (-3.60, -0.5) \in \theta_1, A_3 = (-3.41, -0.5) \in \theta_2, \\ A_4 &= (-2.73, -0.5) \in \gamma_2, A_5 = (-2.43, -0.5) \in \gamma_3, A_6 = (-1.65, -0.5) \in \theta_3, \\ A_7 &= (-0.58, -0.5) \in \theta_4 \text{ e } A_8 = (0.73, -0.5) \in \gamma_4. \end{aligned}$$

Agora, resolvendo a equação $T(x) = 0$, resultam três soluções: $-3.67, -2.50$ e -2 . Porém, no nível $-163/4$, que corresponde à equação $T(x) = -163/4$, obtemos, cinco soluções: $-3.57, -3.40, -1.49, -0.57$ e 0.90 . Assim, os pontos

$$\begin{aligned} B_1 &= (-3.67, -0.5), B_2 = (-3.57, -0.5), B_3 = (-3.40, -0.5), B_4 = (-2.50, -0.5), \\ B_5 &= (-2, -0.5), B_6 = (-1.49, -0.5), B_7 = (-0.57, -0.5), \text{ e } B_8 = (0.90, -0.5), \end{aligned}$$

pertencem às componentes conexas dos conjuntos de nível $q^{-1}(\{0\})$ ou $q^{-1}(\{-163/4\})$.

- a. Seja ν_1 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$ que contém o ponto B_2 . Como B_2 está no segmento horizontal $[A_2, A_3]$, cujos extremos estão no conjunto $p^{-1}(\{-1\})$ e o ponto $(-1, -163/4)$ não tem pré-imagens, então, ν_1 deve estar contida na região limitada por θ_1 e θ_2 . Visto que no segmento $[A_2, A_3]$ só existe uma raiz de $T(x) = -163/4$, segue que ν_1 é uma curva que se estende desde o ponto Q_3 até Q_4 ;
- b. Seja μ_1 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{0\})$ que contém B_1 . Como o ponto $(0, 0)$ não tem pré-imagens, segue que μ_1 não intersecta γ_1 e, assim, μ_1 está contida na região limitada por γ_1 e ν_1 , podendo intersectar θ_1 . Como no segmento (A_1, B_2) só existe uma raiz de $T(x) = 0$, segue que a curva μ_1 se estende desde Q_3 até Q_4 ;
- c. Seja μ_2 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{0\})$ que contém B_4 . Como B_4 está no segmento horizontal $[A_4, A_5]$, cujos extremos estão no conjunto $p^{-1}(\{0\})$, e o ponto $(0, 0)$ não tem pré-imagens, deste modo, μ_2 deve estar contida na região limitada por γ_2 e γ_3 . Já que no segmento $[A_4, A_5]$ só existe uma raiz de $T(x) = 0$, μ_2 é uma curva que se estende desde o ponto Q_3 até Q_4 ;

- d. Seja ν_2 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$ que contém B_3 . Como B_3 está no segmento horizontal $[A_3, A_4]$, e o ponto $(-1, -163/4)$ não tem pré-imagens, segue que ν_2 não intersecta θ_2 , e, portanto, ν_2 está contida na região limitada θ_2 e μ_2 , podendo intersectar γ_2 . Como no segmento (A_3, B_4) só existe uma raiz de $T(x) = -163/4$, segue que a curva ν_2 se estende desde Q_3 até Q_4 ;
- e. Seja ν_3 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$ que contém B_6 . Como B_6 está no segmento horizontal $[A_6, A_7]$, cujos extremos estão no conjunto $p^{-1}(\{-1\})$, e o ponto $(-1, -163/4)$ não tem pré-imagens, deste modo, ν_3 deve estar contida na região limitada por θ_3 e θ_4 . Visto que no segmento $[A_6, A_7]$ só existe uma raiz de $T(x) = -163/4$, resulta que ν_3 é uma curva que se estende desde o ponto Q_3 até Q_4 ;
- f. Seja μ_3 a componente conexa do conjunto $q^{-1}(\{0\})$ que contém B_5 . Como o ponto $(0, 0)$ não tem pré-imagens, segue que μ_3 não intersecta γ_3 , o que implica que μ_3 está contida na região limitada por γ_3 e ν_3 , podendo intersectar θ_3 . Como no segmento $[A_5, B_6)$ só existe uma raiz de $T(x) = 0$, segue que a curva μ_3 se estende desde Q_3 até Q_4 .

Um esboço das curvas de nível dos polinômios p e q é dado na Figura 4.17.

Sejam

$$U(y) = p(1, y) = y(-1 + 2y - y^2 + y^3)$$

e

$$V(y) = q(1, y) = -1 - 4y - 74y^2 + 397y^3 - (3335y^4)/4 + 1276y^5 \\ - (2863y^6)/2 + 1185y^7 - (2955y^8)/4 + 300y^9 - 75y^{10}.$$

Como antes, resolvendo $U(y) = 0$, provamos que os pontos $A_9 = (1, 0)$ e $A_{10} = (1, 0.56)$ pertencem aos níveis γ_4 e γ_5 , respectivamente. Por sua vez, resolvendo $V(y) = 0$ e $V(y) = -163/4$, obtemos que os pontos $B_9 = (1, -0.33)$ e $B_{12} = (1, 1.12)$ pertencem a $q^{-1}(\{-163/4\})$ e os pontos $B_{10} = (1, 0.48)$ e $B_{11} = (1, 1)$ pertencem a $q^{-1}(\{0\})$.

- g. Note que o ponto B_{11} pertence à curva $y = 1/x$, com $x > 0$, que é a componente conexa μ_5 , pois $1 - xy$ é um fator de $q(x, y) = 0$;

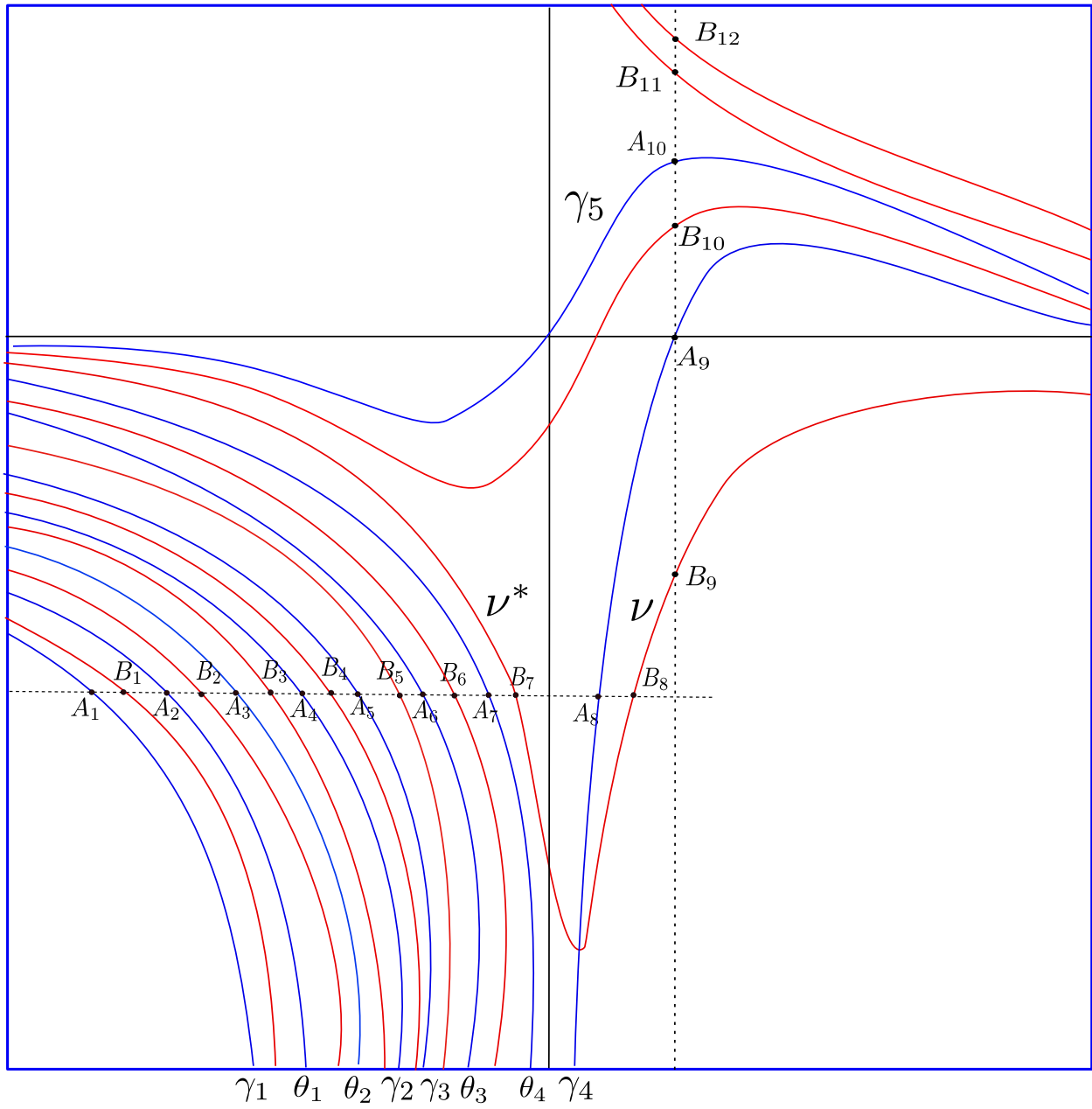


Figura 4.17: Esboço das curvas de nível dos polinômios p e q .

- h. Como B_{12} está acima de μ_5 , segue que B_{12} pertence a uma componente conexa ν_5 de $q^{-1}(\{-163/4\})$ satisfazendo $\mu_5 \prec \nu_5$;
- i. Sejam ν e ν^* as componentes conexas que contém os pontos B_7 , B_8 e B_9 . Pelos itens anteriores, existem 4 componentes conexas de $q^{-1}(\{-163/4\})$ que satisfazem: $\nu_1 \prec \nu_2 \prec \nu_3 \prec \theta_4$ e $\mu_5 \prec \nu_5$. Como ao todo existem somente 5 componentes do conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$, então $\nu = \nu^* = \nu_4$;
- j. Seja μ_4 a componente conexa do nível $q^{-1}(\{0\})$ que contém B_{10} . Observemos que B_{10} está no segmento vertical $[A_9, A_{10}]$, cujos extremos estão no conjunto $p^{-1}(\{0\})$ e o ponto $(0, 0)$ não tem pré-imagens, deste modo, μ_4 deve estar contida na região limitada por γ_4 e γ_5 . Como no segmento $[A_9, A_{10}]$ só existe uma raiz de $V(y) = 0$, segue que μ_4 é uma curva que se estende desde o ponto Q_1 até Q_3 na compactificação de Poincaré.

Desta forma, a relação de ordem entre as componentes conexas dos níveis $-163/4$ e 0 de q é

$$\mu_1 \prec \nu_1 \prec \nu_2 \prec \mu_2 \prec \mu_3 \prec \nu_3 \prec \nu_4 \prec \mu_4 \quad \text{e} \quad \mu_5 \prec \nu_5.$$

■

Um esboço das componentes conexas das curvas de nível $-163/4$ e 0 de q no disco de Poincaré pode ser visto na Figura 4.18. As curvas em vermelho ilustram as componentes conexas dos níveis $-163/4$ e as curvas em preto ilustram as componentes conexas do nível 0 .

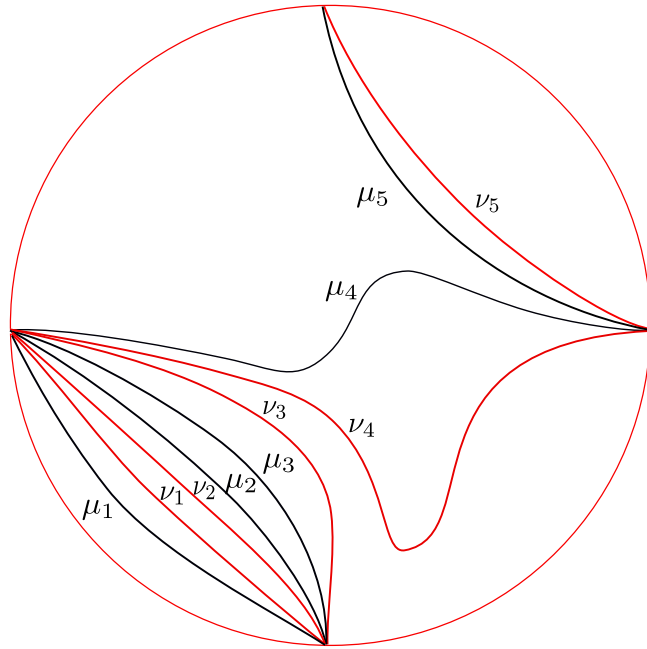


Figura 4.18: Curvas de nível $-163/4$ e 0 de q no disco de Poincaré.

Proposição 4.2. *O campo H_q possui exatamente 4 m.c.R. Os bordos destas m.c.R são partes de ν_1 e ν_2 , μ_2 e μ_3 , ν_3 e ν_4 , μ_4 e μ_5 .*

Demonstração. Considere a derivada de $T(x) = q(x, -0.5)$,

$$\begin{aligned}
 T'(x) = & 19.75 - 83.25x + 99.18x^2 + 239.81x^3 - 291.25x^4 \\
 & -270.37x^5 + 981.20x^6 + 1284.94x^7 - 442.82x^8 \\
 & -1855.08x^9 - 1561.7x^{10} - 667.44x^{11} - 159.96x^{12} \\
 & -20.50x^{13} - 1.09x^{14},
 \end{aligned}$$

cujo gráfico é dado na Figura 4.19.

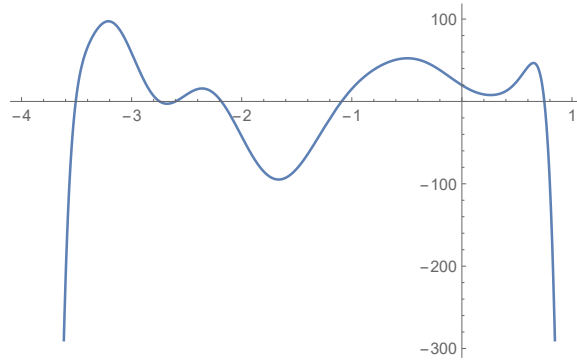


Figura 4.19: Esboço do gráfico de $T'(x)$.

Resolvendo a equação $T'(x) = 0$, obtemos as raízes $-3.50, -2.74, -2.60, -2.18, -1.09$, e 0.74 , que correspondem aos pontos $D_1 = (-3.50, -0.5)$, $D_2 = (-2.74, -0.5)$, $D_3 = (-2.60, -0.5)$, $D_4 = (-2.18, -0.5)$, $D_5 = (-1.09, -0.5)$ e $D_6 = (0.74, -0.5)$. Vemos que:

- i.** O ponto $D_1 \in [B_2, B_3]$ e ambos os pontos B_2 e B_3 pertencem ao conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$.
Como $T'(x) > 0$ no intervalo $[B_2, D_1)$ e $T'(x) < 0$ no intervalo $(D_1, B_3]$, existe uma m.c.R entre ν_1 e ν_2 ;
- ii.** O ponto $D_4 \in [B_4, B_5]$ e ambos os pontos B_4 e B_5 pertencem ao conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$.
Como $T'(x) > 0$ no intervalo $[B_4, D_4)$ e $T'(x) < 0$ no intervalo $(D_4, B_5]$, portanto, existe uma m.c.R entre μ_2 e μ_3 ;
- iii.** O ponto $D_5 \in [B_6, B_7]$ e ambos os pontos B_6 e B_7 pertencem ao conjunto $q^{-1}(\{-163/4\})$.
Como $T'(x) > 0$ no intervalo $[B_6, D_5)$ e $T'(x) < 0$ no intervalo $(D_5, B_7]$, desta forma, existe uma m.c.R entre ν_3 e ν_4 .

Considere a derivada de $V(y) = q(1, y)$,

$$V'(y) = -4 - 148y + 1191y^2 - 3335y^3 + 6380y^4 - 8589y^5 + 8295y^6 - 5910y^7 + 2700y^8 - 750y^9,$$

cujo gráfico é dado na Figura 4.20.

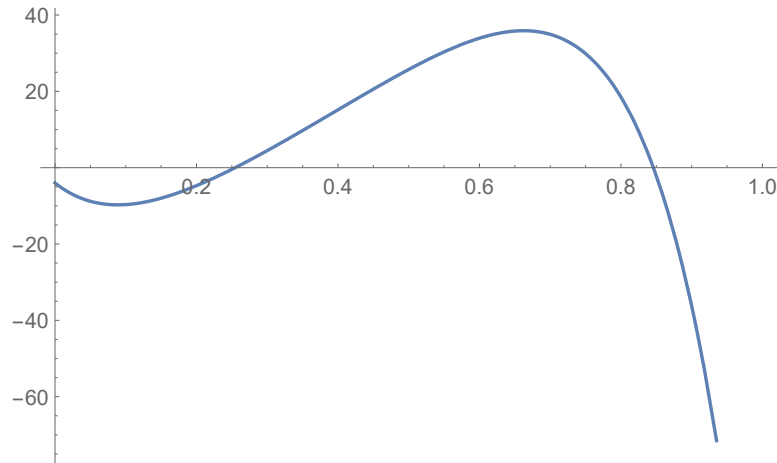


Figura 4.20: Esboço do gráfico de $V'(y)$.

Resolvendo a equação $V'(y) = 0$, obtemos as raízes: $-0.02, 0.25$ e 0.84 . Podemos ver que existe um ponto $D_7 = (1, 0.84)$ tal que, se $(1, y) \in [B_{10}, D_7)$, então $V'(y) > 0$, e se $(1, y) \in (D_7, B_{11}]$, então $V'(y) < 0$. As outras duas raízes não se encontram em níveis iguais. Assim, existe uma m.c.R entre μ_4 e μ_5 . Desta forma, obtemos 4 m.c.R. ■

4.3 Retrato de Fase Global do Campo Vetorial H_q

Utilizando a Proposição 4.1, o estudos dos conjuntos de nível de q e o comportamento topológico no infinito do campo vetorial H_q nas cartas U_1 e U_2 , obtemos o esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré, como pode ser visto na Figura 4.21.

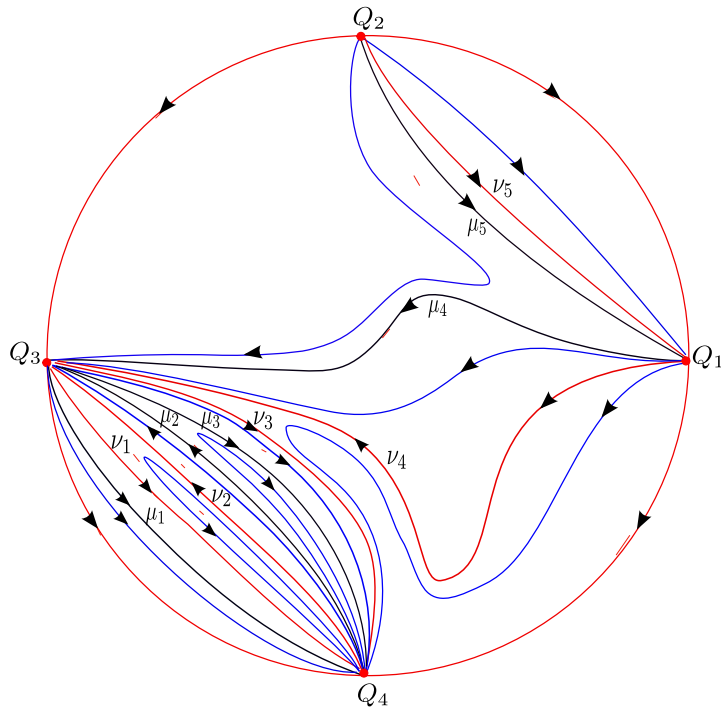


Figura 4.21: Esqueleto completo das separatrizes de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré.

Veja na Figura 4.22 o retrato de fase de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré obtido através do *software* MATLAB [23].

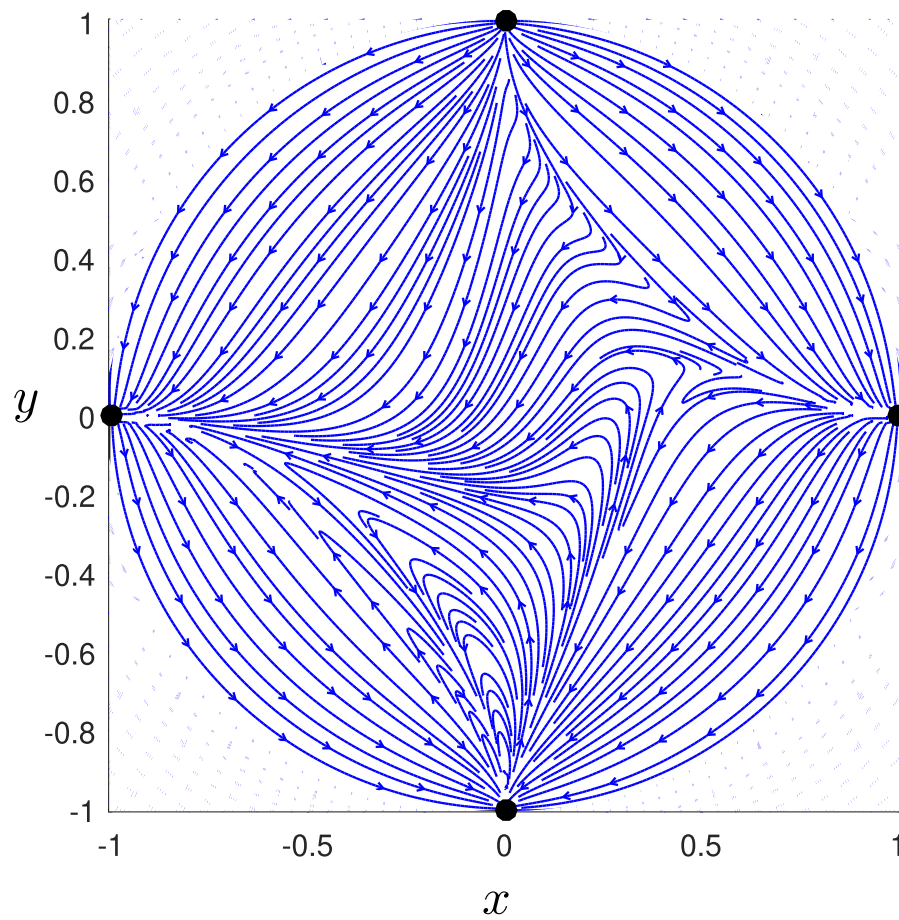


Figura 4.22: Retrato de fase de $\mathcal{P}(H_q)$ no disco de Poincaré, obtido através do *software* MATLAB..

As Proposições 4.1 e 4.2 e as análises feitas anteriormente conduzem naturalmente à prova do Teorema 1.4.

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos retratos de fase globais dos campos vetoriais polinomiais no plano e a Conjectura Jacobiana Real Forte. Os campos vetoriais estudados estão associados à aplicação polinomial $F = (p, q)$ de Pinchuk a qual fornece um contraexemplo a esta conjectura. Após o estudo dos conceitos da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, da técnica do *blow up* e da compactificação de Poincaré, demonstramos os Teoremas 1.3 e 1.4, nos quais descrevemos os retratos de fase dos campos vetoriais Hamiltonianos associados às componentes p e q da aplicação de Pinchuk. Os Teoremas 1.3 e 1.4 foram demonstrados usando informações do número e também do comportamento assintótico no infinito das componentes conexas dos níveis de p e de q .

Referências Bibliográficas

- [1] V. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, translated from the third Russian edition by Roger Cooke, Springer-Verlag, 1992.
- [2] F. Braun, J.R. dos Santos, *The real Jacobian conjecture on \mathbb{R}^2 is true when one of the components has degree 3*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **26** (2010), 75–87.
- [3] F. Braun, F. Fernandes, *Um Estudo Qualitativo do Contraexemplo de Pinchuk*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2017.
- [4] F. Braun, B. Oréface–Okamoto, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in \mathbb{R}^2* , J. Math. Anal. Appl., **443** (2016), 688–706.
- [5] L.A. Campbell, *The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve*, Appl. Math. Lett., **24** (2011), 62–65.
- [6] M. Cobo, C. Gutiérrez, J. Llibre, *On the injectivity of C^1 maps of the real plane*, Canad. J. Math., **54** (2002), 1187–1201.
- [7] F. Dumortier, *Singularities of vector fields on the plane*, J. Differential Equations, **23** (1977), 53–106.
- [8] F. Dumortier, J. Llibre, J. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer-Verlag, 2016.
- [9] W.B. Gordon, *On the diffeomorphisms of Euclidean space*, Amer. Math. Monthly, **79** (1972), 755–759.

- [10] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [11] J. Gwózdźwicz, *A geometry of Pinchuk's map*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **48** (2000), 69–75.
- [12] J. Gwózdźwicz, *The real Jacobian conjecture for polynomials of degree 3*, Ann. Polon. Math., **76** (2001), 121–125.
- [13] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [14] O. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. Math. Phys., **47** (1939), 299–306.
- [15] E.L. Lima, *Curso de Análise*, volume 2, 11^a Edição, IMPA, 2015.
- [16] D.A. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **48** (1975), 73–81.
- [17] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Math. Z., **217** (1994), 1–4.
- [18] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, 3^a Edición, McGraw Hill, 1980.
- [19] W. Rudin, *Injective polynomial maps are automorphisms*, Amer. Math. Monthly, **102** (1995), 540–543.
- [20] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer, **20** (1998), 7–15.
- [21] Software **MAPLE R2019a**: <https://www.maplesoft.com/products/maple/>.
- [22] Software **Mathematica 11.3**: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [23] Software **MATLAB R2019a**: <http://www.mathworks.com>.
- [24] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

Anexo I

Neste Anexo, apresentamos os cálculos feitos para obter os campos vetoriais, após os sucessivos *blow up's*, e construímos o retrato de fase local do campo vetorial Hamiltoniano H_p , sendo p de grau 10. Estes cálculos, foram feitos no *software Mathematica* [22].

Retrato de Fase Global do Campo Hp

```
(* Polinômios homogêneos de maior grau *)
PHM[f_, x_, y_] := Module[{j, d, h, t, s, r},
  |módulo
  s = Sort[Variables[f]][[1]];
  |ord... |variáveis
  r = Sort[Variables[f]][[2]];
  |ord... |variáveis
  d = Abs[Exponent[f /. {s → t, r → t}, t]];
  |val... |expoente
  j = (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, d}]] /. t → 1) -
  |normal |série
  (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, d - 1}]] /. t → 1);
  |normal |série
  h = j /. {s → x, r → y};
  Return[h]
  |retorna
```

```
(* Polinômios homogêneos de menor grau *)
PHm[f_, x_, y_] := Module[{j, d, h, t, s, r},
  |módulo
  s = Sort[Variables[f]][[1]];
  |ord... |variáveis
  r = Sort[Variables[f]][[2]];
  |ord... |variáveis
  d = Abs[Exponent[f /. {s → 1/t, r → 1/t}, t]];
  |val... |expoente
  j = (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, d}]] /. t → 1);
  |normal |série
  h = j /. {s → x, r → y};
  Return[h]
  |retorna
```

```
(* Matriz jacobiana *)
J[f_, g_, x_, y_] := Module[{s, r, j, h},
  |módulo
  s = Sort[Variables[f]][[1]];
  |ord... |variáveis
  r = Sort[Variables[f]][[2]];
  |ord... |variáveis
  j = {{D[f, s], D[f, r]}, {D[g, s], D[g, r]}};
  |derivada |derivada |derivada |derivada
  h = j /. {s → x, r → y};
  Return[h]
  |retorna
```

Polinômio de Pinchuk

```

p[x_, y_] := (x^2 y - x + 1) (x^4 y^3 - 3 x^3 y^2 + 2 x^2 y^2 + 3 x^2 y - 2 x y - x + y)

(* Derivadas de p com respeito a x e y *)

Simplify[D[p[x, y], x]]
[simplifica [derivada]
-1 - 3 y - 20 x^4 y^3 + 6 x^5 y^4 + 12 x^3 y^2 (2 + y) - 3 x^2 y (4 + 7 y) + 2 x (1 + 5 y + 3 y^2)

Simplify[D[p[x, y], y]]
[simplifica [derivada]
1 - 3 x - 12 x^5 y^2 + 4 x^6 y^3 + 3 x^4 y (4 + 3 y) + x^2 (5 + 6 y) - 2 x^3 (2 + 7 y)

(* Polinômios P e Q *)

Pp[x_, y_] := -(1 - 3 x - 12 x^5 y^2 + 4 x^6 y^3 + 3 x^4 y (4 + 3 y) + x^2 (5 + 6 y) - 2 x^3 (2 + 7 y))
Qq[x_, y_] := -1 - 3 y - 20 x^4 y^3 + 6 x^5 y^4 + 12 x^3 y^2 (2 + y) - 3 x^2 y (4 + 7 y) + 2 x (1 + 5 y + 3 y^2)

(* Campo hamiltoniano Hp *)

Hp[x_, y_] := {Pp[x, y], Qq[x, y]}

```

Cálculos com P e Q

```

(* Polinômios P e Q *)

P = -(1 - 3 x - 12 x^5 y^2 + 4 x^6 y^3 + 3 x^4 y (4 + 3 y) + x^2 (5 + 6 y) - 2 x^3 (2 + 7 y));
Q = -1 - 3 y - 20 x^4 y^3 + 6 x^5 y^4 + 12 x^3 y^2 (2 + y) - 3 x^2 y (4 + 7 y) + 2 x (1 + 5 y + 3 y^2);

(* Polinômios homogêneos de P e Q de maior grau *)

PHM[P, x, y]
-4 x^6 y^3

PHM[Q, x, y]
6 x^5 y^4

(* Função F *)

PHM[Q, 1, u] - u PHM[P, 1, u]
10 u^4

(* Grau de P e Q *)

d = Exponent[P /. {x -> t, y -> t}, t]
[expoente]
9

(* Raízes da F *)

```

Solve[PHM[Q, 1, u] - u PHM[P, 1, u] == 0, u]

[resolve

{{u → 0}, {u → 0}, {u → 0}, {u → 0}}

(* Concluimos que a origem é o único ponto singular infinito do campo vetorial Hp na carta U1*)

(* Campo vetorial na carta U1 *)

PU1 = Expand[v^d (-u (P / . {x → $\frac{1}{v}$, y → $\frac{u}{v}$ }) + (Q / . {x → $\frac{1}{v}$, y → $\frac{u}{v}$ }))]

[expande fatores

$10 u^4 - 32 u^3 v^2 + 21 u^3 v^3 + 36 u^2 v^4 - 35 u^2 v^5 - 16 u v^6 + 12 u^2 v^6 + 15 u v^7 + 2 v^8 - 6 u v^8 - v^9 + u v^9$

QU1 = Expand[-v^{d+1} (P / . {x → $\frac{1}{v}$, y → $\frac{u}{v}$ })]

[expande fatores

$4 u^3 v - 12 u^2 v^3 + 9 u^2 v^4 + 12 u v^5 - 14 u v^6 - 4 v^7 + 6 u v^7 + 5 v^8 - 3 v^9 + v^{10}$

(* As expressões acima (PU1; QU1) correspondem ao campo vetorial (3.1).*)

(* A parte linear do campo vetorial (3.1) na origem *)

J[PU1, QU1, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Assim, a origem é uma singularidade linearmente nula *)

(* Blow-up no campo vetorial (3.1) na direção x. *)

BU1 = Simplify[PU1 / . {u → u, v → u w}]

[simplifica

$u^4 (10 - 32 u w^2 + u^6 w^9 - u^5 w^8 (6 + w) + 3 u^2 w^3 (7 + 12 w) - u^3 w^5 (35 + 16 w) + u^4 w^6 (12 + 15 w + 2 w^2))$

BU2 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((QU1 / . {u → u, v → u w}) - w (PU1 / . {u → u, v → u w}))]

[simplifica

$u^3 w (-6 + 20 u w^2 + u^5 w^8 (3 + w) - 12 u^2 w^3 (1 + 2 w) + 3 u^3 w^5 (7 + 4 w) - 2 u^4 w^6 (3 + 5 w + w^2))$

(* Cancelando o termo u³ *)

BU11 = Expand[BU1 / u³]

[expande fatores

$10 u - 32 u^2 w^2 + 21 u^3 w^3 + 36 u^3 w^4 - 35 u^4 w^5 - 16 u^4 w^6 + 12 u^5 w^6 + 15 u^5 w^7 + 2 u^5 w^8 - 6 u^6 w^8 - u^6 w^9 + u^7 w^9$

BU22 = Expand[BU2 / u³]

[expande fatores

$-6 w + 20 u w^3 - 12 u^2 w^4 - 24 u^2 w^5 + 21 u^3 w^6 + 12 u^3 w^7 - 6 u^4 w^7 - 10 u^4 w^8 - 2 u^4 w^9 + 3 u^5 w^9 + u^5 w^{10}$

(* Jacobiano de (BU1, BU2) em (u, v) = (0, 0) *)

J[BU11, BU22, 0, 0]

{{10, 0}, {0, -6}}

(*A origem é uma sela*)

```
Clear[BU11, BU22, BU1, BU2]
```

```
[apaga
```

```
(* Blow-up no campo vetorial (3.1) na direção y*)
```

```
BU12 = Simplify[ $\frac{1}{w} \left( (PU1 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) - u (QU1 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) \right)$ ]
```

```
[simplifica
```

```
 $-w^3 (-6 u^4 + (-2 + w) w^4 - 4 u^3 w (-5 + 3 w) - 3 u^2 w^2 (8 - 7 w + 2 w^2) + u w^3 (12 - 10 w + 3 w^2))$ 
```

```
BU23 = Simplify[QU1 /. {u → u w, v → w}]
```

```
[simplifica
```

```
 $w^4 (4 u^3 + 3 u^2 w (-4 + 3 w) + 2 u w^2 (6 - 7 w + 3 w^2) + w^3 (-4 + 5 w - 3 w^2 + w^3))$ 
```

```
(* Cancelando o termo w3 *)
```

```
BU13 = Expand[BU12 / w3]
```

```
[expande fatores
```

```
 $6 u^4 - 20 u^3 w + 24 u^2 w^2 + 12 u^3 w^2 - 12 u w^3 - 21 u^2 w^3 + 2 w^4 + 10 u w^4 + 6 u^2 w^4 - w^5 - 3 u w^5$ 
```

```
BU24 = Expand[BU23 / w3]
```

```
[expande fatores
```

```
 $4 u^3 w - 12 u^2 w^2 + 12 u w^3 + 9 u^2 w^3 - 4 w^4 - 14 u w^4 + 5 w^5 + 6 u w^5 - 3 w^6 + w^7$ 
```

```
(* As expressões acima (BU13; BU24) correspondem ao campo vetorial(3.2).*)
```

```
(*Pontos de equilíbrio*)
```

```
Solve[{BU13 == 0, BU24 == 0, w == 0}, Reals]
```

```
[resolve
```

```
[números
```

```
{{u → 0, w → 0}}
```

```
J[BU13, BU24, 0, 0]
```

```
{{{0, 0}, {0, 0}}
```

```
(* A origem é uma singularidade linearmente nula. Outro blow up é necessário fazer.*)
```

```
(*Primeiro, o blow up no campo vetorial (3.2) na direção x. *)
```

```
BU31 = Simplify[BU13 /. {u → u, w → u w}]
```

```
[simplifica
```

```
 $u^4 (6 - 20 w + 12 (2 + u) w^2 - 3 (4 + 7 u) w^3 + 2 (1 + 5 u + 3 u^2) w^4 - u (1 + 3 u) w^5)$ 
```

```
BU32 = Simplify[ $\frac{1}{u} \left( (BU24 /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}) - w (BU13 /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}) \right)$ ]
```

```
[simplifica
```

```
 $u^3 w (-2 + 8 w - 3 (4 + u) w^2 + (8 + 7 u) w^3 - (2 + 5 u) w^4 + u w^5 + u^3 w^6)$ 
```

```
(* Cancelando o termo u3 *)
```

```
BU311 = Expand[BU31 / u3]
```

```
[expande fatores
```

```
 $6 u - 20 u w + 24 u w^2 + 12 u^2 w^2 - 12 u w^3 - 21 u^2 w^3 + 2 u w^4 + 10 u^2 w^4 + 6 u^3 w^4 - u^2 w^5 - 3 u^3 w^5$ 
```

BU322 = Expand[BU32/u³]
[[expande fatores](#)]

$$-2w + 8w^2 - 12w^3 - 3uw^3 + 8w^4 + 7uw^4 - 2w^5 - 5uw^5 + uw^6 + u^3w^7$$

(* As expressões acima (BU311; BU322) correspondem ao campo vetorial (3.3).*)

(* Calculando pontos de equilíbrio *)

Solve[{BU311 == 0, BU322 == 0, u == 0}, Reals]
[[resolve](#) [números](#)]

{ {u → 0, w → 0}, {u → 0, w → 1} }

(* Obtemos duas singularidades, (0,0) e (0,1). *)

(* Linearizando no ponto (u,w)=(0,0)*)

J[BU311, BU322, 0, 0]

{ {6, 0}, {0, -2} }

(* Linearizando no ponto (u,w)=(0,1) *)

J[BU311, BU322, 0, 1]

{ {0, 0}, {0, 0} }

(* Faremos o blow up no campo vetorial (3.2) na direção y*)

BU1311 = Simplify[$\frac{1}{w} ((BU13 /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}) - u (BU24 /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}))$]
[[simplifica](#)]

$$-w^3 (-2 - 2u^4 + u^3 (8 - 3w)) + w + u^2 (-12 + 7w) + u (8 - 5w + w^3)$$

BU241 = Simplify[BU24 /. {u → uw, w → w}]
[[simplifica](#)]

$$w^4 (-4 + 4u^3 + 5w - 3w^2 + w^3 + 3u^2 (-4 + 3w)) + 2u (6 - 7w + 3w^2)$$

(* Cancelando o termo w³ *)

BU13111 = Expand[BU1311/w³]
[[expande fatores](#)]

$$2 - 8u + 12u^2 - 8u^3 + 2u^4 - w + 5uw - 7u^2w + 3u^3w - uw^3$$

BU2411 = Expand[BU241/w³]
[[expande fatores](#)]

$$-4w + 12uw - 12u^2w + 4u^3w + 5w^2 - 14uw^2 + 9u^2w^2 - 3w^3 + 6uw^3 + w^4$$

(* Pontos de equilíbrio *)

Solve[{BU13111 == 0, BU2411 == 0, w == 0}, Reals]
[[resolve](#) [números](#)]

{ {u → 1, w → 0} }

(* A singularidade (1,0) será estudada na direção x. *)

(* Assim, no ponto (0,1) faremos outro blow up. Para simplificar as contas, fazemos a translação (u,w)=(u,v+1). *)

BU312 = Expand[BU311 /. {u → u, w → v + 1}]

[[expande fatores](#)]

$$3 u^3 - 4 u^2 v + 9 u^3 v - u^2 v^2 + 6 u^3 v^2 - 4 u v^3 + 9 u^2 v^3 - 6 u^3 v^3 + 2 u v^4 + 5 u^2 v^4 - 9 u^3 v^4 - u^2 v^5 - 3 u^3 v^5$$

BU313 = Expand[BU322 /. {u → u, w → v + 1}]

[[expande fatores](#)]

$$u^3 + 7 u^3 v - 2 u v^2 + 21 u^3 v^2 - 5 u v^3 + 35 u^3 v^3 - 2 v^4 - 3 u v^4 + 35 u^3 v^4 - 2 v^5 + u v^5 + 21 u^3 v^5 + u v^6 + 7 u^3 v^6 + u^3 v^7$$

(* As expressões acima (AU312 ; AU312) correspondem ao campo vetorial (3.4). *)

J[BU312, BU313, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Jacobiano de (BU312, BU313) em (u, w) = (0, 1) *)

(* Assim, precisamos outro blow up. *) (* Primeiro, o blow up no campo vetorial (3.4) na direção x. *)

BU41 = Simplify[BU312 /. {u → u, v → u w}]

[[simplifica](#)]

$$-u^3 (-3 + (4 - 9 u) w + (u - 6 u^2) w^2 + u (4 - 9 u + 6 u^2) w^3 + u^2 (-2 - 5 u + 9 u^2) w^4 + u^4 (1 + 3 u) w^5)$$

BU42 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((BU313 /. {u → u, v → u w}) - w (BU312 /. {u → u, v → u w}))]

[[simplifica](#)]

$$u^2 (1 + (-3 + 7 u) w + (2 - 9 u + 21 u^2) w^2 + u (-4 - 6 u + 35 u^2) w^3 + u (2 - 12 u + 6 u^2 + 35 u^3) w^4 + u^2 (-4 - 4 u + 9 u^2 + 21 u^3) w^5 + u^4 (2 + 3 u + 7 u^2) w^6 + u^7 w^7)$$

(* Cancelando o termo u^2 *)

BU411 = Expand[BU41 / u²]

[[expande fatores](#)]

$$3 u - 4 u w + 9 u^2 w - u^2 w^2 + 6 u^3 w^2 - 4 u^2 w^3 + 9 u^3 w^3 - 6 u^4 w^3 + 2 u^3 w^4 + 5 u^4 w^4 - 9 u^5 w^4 - u^5 w^5 - 3 u^6 w^5$$

BU412 = Expand[BU42 / u²]

[[expande fatores](#)]

$$1 - 3 w + 7 u w + 2 w^2 - 9 u w^2 + 21 u^2 w^2 - 4 u w^3 - 6 u^2 w^3 + 35 u^3 w^3 + 2 u w^4 - 12 u^2 w^4 + 6 u^3 w^4 + 35 u^4 w^4 - 4 u^2 w^5 - 4 u^3 w^5 + 9 u^4 w^5 + 21 u^5 w^5 + 2 u^4 w^6 + 3 u^5 w^6 + 7 u^6 w^6 + u^7 w^7$$

(* Pontos singulares. *)

Solve[{BU411 == 0, BU412 == 0, u == 0}]

[[resolve](#)]

{{u → 0, w → $\frac{1}{2}$ }, {u → 0, w → 1}}

(* Pontos singulares: (0, 1);

(0, $\frac{1}{2}$) que serão estudadas fazendo o blow up na direção y. *)

(* Agora, estudaremos o blow up do campo vetorial (3.4) na direção y *)

BU51 = Simplify $\left[\frac{1}{w} \left((BU312 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) - u (BU313 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) \right)\right]$
|simplifica

$$-u w^2 \left(2 (1 - 2 w) w + 3 u^2 (-1 + w) (1 + w)^4 + u^3 (1 + w)^7 + 2 u (1 + w)^2 (1 - 4 w + w^2) \right)$$

BU52 = Simplify $[BU313 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}]$

|simplifica

$$w^3 (1 + w) \left(-2 w + u (-2 + w) (1 + w)^2 + u^3 (1 + w)^6 \right)$$

(*Cancelando o termo w^2 *)

BU511 = Expand $[BU51/w^2]$

|expande fatores

$$-2 u^2 + 3 u^3 - u^4 - 2 u w + 4 u^2 w + 9 u^3 w - 7 u^4 w + 4 u w^2 + 12 u^2 w^2 + 6 u^3 w^2 - 21 u^4 w^2 + 4 u^2 w^3 - 6 u^3 w^3 - 35 u^4 w^3 - 2 u^2 w^4 - 9 u^3 w^4 - 35 u^4 w^4 - 3 u^3 w^5 - 21 u^4 w^5 - 7 u^4 w^6 - u^4 w^7$$

BU512 = Expand $[BU52/w^2]$

|expande fatores

$$-2 u w + u^3 w - 2 w^2 - 5 u w^2 + 7 u^3 w^2 - 2 w^3 - 3 u w^3 + 21 u^3 w^3 + u w^4 + 35 u^3 w^4 + u w^5 + 35 u^3 w^5 + 21 u^3 w^6 + 7 u^3 w^7 + u^3 w^8$$

(* As expressões acima (BU511; AU512) correspondem ao campo vetorial(3.5).*)

(* Calculando pontos singulares. *)

Solve $[\{BU511 == 0, BU512 == 0, w == 0\}, Reals]$

|resolve

|números

$\{\{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 1, w \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 2, w \rightarrow 0\}\}$

(* Este campo vetorial possui três singularidades localizadas nos pontos $(1,0)$, $(2,0)$ e na origem. *)

(* Calculando a parte linear em cada ponto singular .*)

J $[BU511, BU512, 1, 0]$

$\{\{1, 4\}, \{0, -1\}\}$

J $[BU511, BU512, 2, 0]$

$\{\{-4, -28\}, \{0, 4\}\}$

J $[BU511, BU512, 0, 0]$

$\{\{0, 0\}, \{0, 0\}\}$

Eigensystem $[\{\{1, 4\}, \{0, -1\}\}]$

|autovalores e autovetores

$\{\{-1, 1\}, \{\{-2, 1\}, \{1, 0\}\}\}$

Eigensystem $[\{\{-4, -28\}, \{0, 4\}\}]$

|autovalores e autovetores

$\{\{-4, 4\}, \{\{1, 0\}, \{-7, 2\}\}\}$

J $[BU511, BU512, 0, 0]$

$\{\{0, 0\}, \{0, 0\}\}$

(*Assim, é preciso fazer outro blow up *)
 (* Primeiro, o blow up no campo vetorial (3.5) na direção x. *)

BU61 = Simplify[BU511 /. {u → u, w → u w}]

[simplifica]

$$-u^2 (21 u^7 w^5 + 7 u^8 w^6 + u^9 w^7 + 2 (1 + w) + u^6 w^4 (35 + 3 w) + u^5 w^3 (35 + 9 w) + u^2 (1 - 9 w - 12 w^2) + u^3 w (7 - 6 w - 4 w^2) + u^4 w^2 (21 + 6 w + 2 w^2) - u (3 + 4 w + 4 w^2))$$

BU62 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((BU512 /. {u → u, w → u w}) - w (BU511 /. {u → u, w → u w}))]

[simplifica]

$$u^2 w (42 u^6 w^5 + 14 u^7 w^6 + 2 u^8 w^7 + u^5 w^4 (70 + 3 w) + u^4 w^3 (70 + 9 w) + u (2 - 9 w - 15 w^2) + u^2 w (14 - 6 w - 3 w^2) + 3 u^3 w^2 (14 + 2 w + w^2) - 3 (1 + 3 w + 2 w^2))$$

(*Cancelando o termo u^2 *)

BU611 = Expand[BU61 / (u^2)]

[expande fatores]

$$-2 + 3 u - u^2 - 2 w + 4 u w + 9 u^2 w - 7 u^3 w + 4 u w^2 + 12 u^2 w^2 + 6 u^3 w^2 - 21 u^4 w^2 + 4 u^3 w^3 - 6 u^4 w^3 - 35 u^5 w^3 - 2 u^4 w^4 - 9 u^5 w^4 - 35 u^6 w^4 - 3 u^6 w^5 - 21 u^7 w^5 - 7 u^8 w^6 - u^9 w^7$$

BU612 = Expand[BU62 / (u^2)]

[expande fatores]

$$-3 w + 2 u w - 9 w^2 - 9 u w^2 + 14 u^2 w^2 - 6 w^3 - 15 u w^3 - 6 u^2 w^3 + 42 u^3 w^3 - 3 u^2 w^4 + 6 u^3 w^4 + 70 u^4 w^4 + 3 u^3 w^5 + 9 u^4 w^5 + 70 u^5 w^5 + 3 u^5 w^6 + 42 u^6 w^6 + 14 u^7 w^7 + 2 u^8 w^8$$

(* As expressões acima (BU611; BU612) correspondem ao campo vetorial (3.6).*)

(*Pontos de equilíbrio*)

Solve[{BU611 == 0, BU612 == 0, u == 0}, Reals]

[resolve]

[números]

{{u → 0, w → -1}}

(* O campo vetorial (3.6) tem uma singularidade

[notação O]

no ponto (0, -1). Tal singularidade tem parte linear. *)

J[BU611, BU612, 0, -1]

{{3, -2}, {4, -3}}

Eigensystem[{{3, -2}, {4, -3}}]

[autovalores e autovetores]

{{-1, 1}, {{1, 2}, {1, 1}}}

(* Faremos um blow up do campo vetorial (3.5) na direção y*)

BU71 = Simplify[$\frac{1}{w}$ ((BU511 /. {u → u w, w → w}) - u (BU512 /. {u → u w, w → w}))]

[simplifica]

$$-u w^2 (-6 + 3 u (-3 + w) (1 + w)^2 + 3 u^2 (-1 + w) (1 + w)^4 + 2 u^3 w (1 + w)^7)$$

BU72 = Simplify[BU512 /. {u → u w, w → w}]
[simplifica]

$$w^2 (1 + w) \left(-2 + u (-2 + w) (1 + w)^2 + u^3 w^2 (1 + w)^6 \right)$$

(*Cancelando o termo w^2 *)

BU711 = Expand[BU71 / (w^2)]
[expande fatores]

$$6 u + 9 u^2 + 3 u^3 + 15 u^2 w + 9 u^3 w - 2 u^4 w + 3 u^2 w^2 + 6 u^3 w^2 - 14 u^4 w^2 - 3 u^2 w^3 - 6 u^3 w^3 - 42 u^4 w^3 - 9 u^3 w^4 - 70 u^4 w^4 - 3 u^3 w^5 - 70 u^4 w^5 - 42 u^4 w^6 - 14 u^4 w^7 - 2 u^4 w^8$$

BU722 = Expand[BU72 / (w^2)]
[expande fatores]

$$-2 - 2 u - 2 w - 5 u w - 3 u w^2 + u^3 w^2 + u w^3 + 7 u^3 w^3 + u w^4 + 21 u^3 w^4 + 35 u^3 w^5 + 35 u^3 w^6 + 21 u^3 w^7 + 7 u^3 w^8 + u^3 w^9$$

(*Pontos de equilíbrio*)

Solve[{BU711 == 0, BU722 == 0, w == 0}, Reals]
[resolve] [números]

$$\{ \{ u \rightarrow -1, w \rightarrow 0 \} \}$$

(* Note que só tem um ponto singular $(-1, 0)$, que já foi estudado na direção x *)

(*Carta U2*)

(* Função G *)

$$G = \text{PHM}[P, u, 1] - u \text{PHM}[Q, u, 1] - 10 u^6$$

(* Ráizes da G *)

Solve[PHM[Q, 1, u] - u PHM[P, 1, u] == 0, u]
[resolve]

$$\{ \{ u \rightarrow 0 \}, \{ u \rightarrow 0 \}, \{ u \rightarrow 0 \}, \{ u \rightarrow 0 \} \}$$

(* Campo vetorial na carta U2 *)

$$\text{AU1} = \text{Simplify} \left[v^d \left(\left(P /. \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) - u \left(Q /. \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) \right) \right]$$

$$-10 u^6 + 32 u^5 v^2 - v^9 + u v^8 (6 + v) - 3 u^4 v^3 (7 + 12 v) + u^3 v^5 (35 + 16 v) - u^2 v^6 (12 + 15 v + 2 v^2)$$

$$\text{AU2} = \text{Simplify} \left[-v^{d+1} \left(Q /. \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) \right]$$

$$v \left(-6 u^5 + 20 u^4 v^2 + v^8 (3 + v) - 12 u^3 v^3 (1 + 2 v) + 3 u^2 v^5 (7 + 4 v) - 2 u v^6 (3 + 5 v + v^2) \right)$$

(* As expressões acima (AU1; AU2) correspondem ao campo vetorial(3.7).*)

(*Calculando a parte linear*)

$$\text{J}[\text{AU1}, \text{AU2}, 0, 0]$$

$$\{ \{ 0, 0 \}, \{ 0, 0 \} \}$$

(* A origem é uma singularidade linearmente nula.*)

(*Faremos blow up no campo vetorial (3.7) na direção x. *)

AU11 = Simplify[AU1 /. {u → u, v → u w}]

|simplifica

$$u^6 (-10 + u (32 - 21 w)) w^2 + u^4 (-2 + w) w^8 + u^2 w^4 (-36 + 35 w - 12 w^2) - u^3 w^6 (-16 + 15 w - 6 w^2 + w^3)$$

AU12 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((AU2 /. {u → u, v → u w}) - w (AU1 /. {u → u, v → u w}))]

|simplifica

$$u^5 w (4 + 3 u w^2 (-4 + 3 w)) + 2 u^2 w^4 (6 - 7 w + 3 w^2) + u^3 w^6 (-4 + 5 w - 3 w^2 + w^3)$$

(* Cancelando o termo u^5 *)

AU111 = Expand[AU11 / u^5]

|expande fatores

$$-10 u + 32 u^2 w^2 - 21 u^2 w^3 - 36 u^3 w^4 + 35 u^3 w^5 - 12 u^3 w^6 + 16 u^4 w^6 - 15 u^4 w^7 + 6 u^4 w^8 - 2 u^5 w^8 - u^4 w^9 + u^5 w^9$$

AU122 = Expand[AU12 / u^5]

|expande fatores

$$4 w - 12 u w^3 + 9 u w^4 + 12 u^2 w^5 - 14 u^2 w^6 + 6 u^2 w^7 - 4 u^3 w^7 + 5 u^3 w^8 - 3 u^3 w^9 + u^3 w^{10}$$

(*Pontos de equilíbrio*)

Solve[{AU111 == 0, AU122 == 0, u == 0}, Reals]

|resolve

|números

$$\{\{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}\}$$

(* Linearizando o ponto (0,0). *)

J[AU111, AU122, 0, 0]

$$\{\{-10, 0\}, \{0, 4\}\}$$

(*Assim, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela. *)

(*Agora, blow up do campo vetorial (3.7) na direção y*)

AU21 = Simplify[$\frac{1}{w}$ ((AU1 /. {u → u w, v → w}) - u (AU2 /. {u → u w, v → w}))]

|simplifica

$$w^5 (-4 u^6 + 12 u^5 w - w^3 + 3 u w^3 + 2 u^3 w^2 (7 + 2 w)) - 3 u^4 w (3 + 4 w) - u^2 w^2 (6 + 5 w)$$

AU22 = Simplify[AU2 /. {u → u w, v → w}]

|simplifica

$$w^6 (-6 u^5 + 20 u^4 w + w^3 (3 + w)) - 12 u^3 w (1 + 2 w) + 3 u^2 w^2 (7 + 4 w) - 2 u w^2 (3 + 5 w + w^2)$$

(* Cancelando o termo w^5 . *)

AU211 = Expand[AU21 / w^5]

|expande fatores

$$-4 u^6 - 9 u^4 w + 12 u^5 w - 6 u^2 w^2 + 14 u^3 w^2 - 12 u^4 w^2 - w^3 + 3 u w^3 - 5 u^2 w^3 + 4 u^3 w^3$$

$$\text{AU222} = \text{Expand}[\text{AU22}/w^5]$$

[expande fatores]

$$-6 u^5 w - 12 u^3 w^2 + 20 u^4 w^2 - 6 u w^3 + 21 u^2 w^3 - 24 u^3 w^3 + 3 w^4 - 10 u w^4 + 12 u^2 w^4 + w^5 - 2 u w^5$$

(* As expressões acima (AU211; AU222) correspondem ao campo vetorial (3.8).*)

$$\text{J}[\text{AU211}, \text{AU222}, \theta, \theta]$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, \theta\}\}$$

(*Outro blow up. Primeiro blow up do campo vetorial (3.8) na direção x *)

$$\text{AU31} = \text{Simplify}[\text{AU211} /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}]$$

[simplifica]

$$u^3 \left(4 u^3 (-1 + w)^3 + 3 u (-2 + w) w^2 - w^3 + u^2 w (-9 + 14 w - 5 w^2) \right)$$

$$\text{AU32} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{u} \left((\text{AU222} /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}) - w (\text{AU211} /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}) \right)\right]$$

[simplifica]

$$u^2 w \left(-2 u^3 (-1 + w)^4 + u^2 (-3 + w) (-1 + w)^2 w + w^3 \right)$$

(*cancelando o termo u^2 *)

$$\text{AU311} = \text{Expand}[\text{AU31}/u^2]$$

[expande fatores]

$$-4 u^4 - 9 u^3 w + 12 u^4 w - 6 u^2 w^2 + 14 u^3 w^2 - 12 u^4 w^2 - u w^3 + 3 u^2 w^3 - 5 u^3 w^3 + 4 u^4 w^3$$

$$\text{AU322} = \text{Expand}[\text{AU32}/u^2]$$

[expande fatores]

$$-2 u^3 w - 3 u^2 w^2 + 8 u^3 w^2 + 7 u^2 w^3 - 12 u^3 w^3 + w^4 - 5 u^2 w^4 + 8 u^3 w^4 + u^2 w^5 - 2 u^3 w^5$$

(*As expressões acima (AU311; AU322), correspondem ao campo vetorial (3.9).*)

$$\text{J}[\text{AU311}, \text{AU322}, \theta, \theta]$$

$$\{\{\theta, \theta\}, \{\theta, \theta\}\}$$

(*A origem é a única singularidade e possui parte linear identicamente nula. *)

(*Faremos primeiro blow up do campo vetorial(3.8) na direção y. *)

$$\text{AU31y} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{w} \left((\text{AU211} /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}) - u (\text{AU222} /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}) \right)\right]$$

[simplifica]

$$w^2 \left(-1 - u w^2 - 8 u^5 w^3 + 2 u^6 w^3 + u^2 w^2 (5 + 2 w) + 3 u^4 w^2 (1 + 4 w) - u^3 w^2 (7 + 8 w) \right)$$

$$\text{AU32y} = \text{Simplify}[\text{AU222} /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}]$$

[simplifica]

$$w^4 \left(3 + w + 20 u^4 w^2 - 6 u^5 w^2 - 12 u^3 w (1 + 2 w) + 3 u^2 w (7 + 4 w) - 2 u (3 + 5 w + w^2) \right)$$

(*cancelando o termo w^2 *)

$$\text{AU31y} = \text{Expand}[\text{AU31y}/w^2]$$

[expande fatores]

$$-1 - u w^2 + 5 u^2 w^2 - 7 u^3 w^2 + 3 u^4 w^2 + 2 u^2 w^3 - 8 u^3 w^3 + 12 u^4 w^3 - 8 u^5 w^3 + 2 u^6 w^3$$

```

AU32y = Expand[AU32y/w^2]
      [expande fatores]
3 w^2 - 6 u w^2 + w^3 - 10 u w^3 + 21 u^2 w^3 - 12 u^3 w^3 - 2 u w^4 + 12 u^2 w^4 - 24 u^3 w^4 + 20 u^4 w^4 - 6 u^5 w^4

Solve[{AU31y == 0, AU32y == 0, w == 0}, Reals]
      [resolve] [números]
{}

(* Não há singularidades. *)

(* Faremos o blow up do campo vetorial (3.9) na direção x. *)

AU41 = Simplify[AU311 /. {u -> u, w -> u w}]
      [simplifica]
u^4 (-4 + 3 (-3 + 4 u) w - 2 (3 - 7 u + 6 u^2) w^2 + (-1 + 3 u - 5 u^2 + 4 u^3) w^3)

AU42 = Simplify[1/u ((AU322 /. {u -> u, w -> u w}) - w (AU311 /. {u -> u, w -> u w}))]
      [simplifica]
-u^3 w (-2 + (-6 + 4 u) w + (-6 + 7 u) w^2 + (-2 + 3 u - 4 u^3) w^3 + u^3 (-1 + 2 u) w^4)

(* Cancelando o termo u^3 *)

AU411 = Expand[AU41/u^3]
      [expande fatores]
-4 u - 9 u w + 12 u^2 w - 6 u w^2 + 14 u^2 w^2 - 12 u^3 w^2 - u w^3 + 3 u^2 w^3 - 5 u^3 w^3 + 4 u^4 w^3

AU422 = Expand[AU42/u^3]
      [expande fatores]
2 w + 6 w^2 - 4 u w^2 + 6 w^3 - 7 u w^3 + 2 w^4 - 3 u w^4 + 4 u^3 w^4 + u^3 w^5 - 2 u^4 w^5

(* As expressões acima (AU411; AU422) correspondem ao campo vetorial (3.10). *)

(* Pontos singulares *)

Solve[{AU411 == 0, AU422 == 0, u == 0}, Reals]
      [resolve] [números]
{{u -> 0, w -> -1}, {u -> 0, w -> 0}}

(* Duas singulares: (0,0) e (0,-1). *)

J[AU411, AU422, 0, 0]
{{-4, 0}, {0, 2}}

Eigensystem[{{-4, 0}, {0, 2}}]
      [autovalores e autovetores]
{{-4, 2}, {{1, 0}, {0, 1}}}

J[AU411, AU422, 0, -1]
{{0, 0}, {0, 0}}

(* Faremos blow up do campo vetorial (3.9) na direção y *)

```

$$\text{AU41y} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{w} \left((\text{AU311} /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}) - u (\text{AU322} /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}) \right)\right]$$

$$u w^3 \left(-2 + 3u(-2+w) + 2u^3(-1+w)^3(1+w) - u^2(6-7w+w^3) \right)$$

$$\text{AU42y} = \text{Simplify}[\text{AU322} /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}]$$

$$(1 + u^2(-3+w)(-1+w)^2 - 2u^3(-1+w)^4) w^4$$

(*Cancelando o termo w^3 *)

$$\text{AU411y} = \text{Expand}[\text{AU41y} / w^3]$$

$$-2u - 6u^2 - 6u^3 - 2u^4 + 3u^2w + 7u^3w + 4u^4w - u^3w^3 - 4u^4w^3 + 2u^4w^4$$

$$\text{AU422y} = \text{Expand}[\text{AU42y} / w^3]$$

$$w - 3u^2w - 2u^3w + 7u^2w^2 + 8u^3w^2 - 5u^2w^3 - 12u^3w^3 + u^2w^4 + 8u^3w^4 - 2u^3w^5$$

(*Pontos singulares*)

$$\text{Solve}[\{\text{AU411y} == 0, \text{AU422y} == 0, w == 0\}, \text{Reals}]$$

$$\{\{u \rightarrow -1, w \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}\}$$

(* As singularidades serão analisadas na direção x *)

(*Analisando o campo vetorial (3.10),
obtemos que a singularidade no ponto $(0, -1)$ é linearmente nula.*)

(*Para estudar esta singularidade,
faremos uma translação do ponto $(0, -1)$ para a origem.*)

$$\text{AU51} = \text{Simplify}[\text{AU411} /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow v-1\}]$$

$$u \left(4u^3(-1+v)^3 - v^2(3+v) - u^2(-1+v)^2(7+5v) + u(-1-7v+5v^2+3v^3) \right)$$

$$\text{AU52} = \text{Simplify}[\text{AU422} /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow v-1\}]$$

$$(-1+v) \left(-2u^4(-1+v)^4 + 2v^3 + u^3(-1+v)^3(3+v) + u(v+2v^2-3v^3) \right)$$

$$\text{AU511} = \text{Expand}[\text{AU51}]$$

$$-u^2 - 7u^3 - 4u^4 - 7u^2v + 9u^3v + 12u^4v - 3uv^2 + 5u^2v^2 + 3u^3v^2 - 12u^4v^2 - uv^3 + 3u^2v^3 - 5u^3v^3 + 4u^4v^3$$

$$\text{AU522} = \text{Expand}[\text{AU52}]$$

$$3u^3 + 2u^4 - uv - 11u^3v - 10u^4v - uv^2 + 14u^3v^2 + 20u^4v^2 - 2v^3 + 5uv^3 - 6u^3v^3 - 20u^4v^3 + 2v^4 - 3uv^4 - u^3v^4 + 10u^4v^4 + u^3v^5 - 2u^4v^5$$

(*As expressões acima (AU511; AU522) correspondem ao campo vetorial (3.11). *)

J[AU511, AU522, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Outro blow up é necessario fazer. *)

(* Blow up no campo vetorial (3.11) na direção x. *)

AU61 = Simplify[AU511 /. {u → u, v → u w}]

[simplifica]

$$u^2 (-1 + 4 u^5 w^3 - u^4 w^2 (12 + 5 w) + 3 u^3 w (4 + w + w^2) - u (7 + 7 w + 3 w^2) - u^2 (4 - 9 w - 5 w^2 + w^3))$$

AU62 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((AU522 /. {u → u, v → u w}) - w (AU511 /. {u → u, v → u w}))]

[simplifica]

$$-u^2 (-3 - 7 w - 6 w^2 - w^3 + 2 u^6 w^5 + 5 u^4 w^3 (4 + w) - u^5 w^4 (10 + w) - u^3 w^2 (20 + 6 w + 5 w^2) + u^2 w (10 - 2 w + 3 w^2 + 6 w^3) + u (-2 + 7 w + 9 w^2 - 3 w^4))$$

(*Cancelando o termo u²*)

AU611 = Expand[AU61 / u²]

[expande fatores]

$$-1 - 7 u - 4 u^2 - 7 u w + 9 u^2 w + 12 u^3 w - 3 u w^2 + 5 u^2 w^2 + 3 u^3 w^2 - 12 u^4 w^2 - u^2 w^3 + 3 u^3 w^3 - 5 u^4 w^3 + 4 u^5 w^3$$

AU622 = Expand[AU62 / u²]

[expande fatores]

$$3 + 2 u + 7 w - 7 u w - 10 u^2 w + 6 w^2 - 9 u w^2 + 2 u^2 w^2 + 20 u^3 w^2 + w^3 - 3 u^2 w^3 + 6 u^3 w^3 - 20 u^4 w^3 + 3 u w^4 - 6 u^2 w^4 + 5 u^3 w^4 - 5 u^4 w^4 + 10 u^5 w^4 + u^5 w^5 - 2 u^6 w^5$$

Solve[{AU611 == 0, AU622 == 0, u == 0}, Reals]

[resolve]

[números]

{}

(*Não temos singularidades*)

(*Agora o blow up no campo vetorial (3.11) na direção y. *)

AU71 = Simplify[$\frac{1}{w}$ ((AU511 /. {u → u w, v → w}) - u (AU522 /. {u → u w, v → w}))]

[simplifica]

$$u w^2 (-1 - 3 w + 2 u^4 (-1 + w)^5 w - u^2 (-1 + w)^2 (7 + 5 w) + 6 u (-1 + w^2) - u^3 (-1 + w)^3 (-3 - 2 w + w^2))$$

AU72 = Simplify[AU522 /. {u → u w, v → w}]

[simplifica]

$$-(-1 + w) w^2 (-2 w + 2 u^4 (-1 + w)^4 w^2 - u^3 (-1 + w)^3 w (3 + w) + u (-1 - 2 w + 3 w^2))$$

(*Cancelando o termo w²*)

AU711 = Expand[AU71 / w²]

[expande fatores]

$$-u - 6 u^2 - 7 u^3 - 3 u^4 - 3 u w + 9 u^3 w + 7 u^4 w - 2 u^5 w + 6 u^2 w^2 + 3 u^3 w^2 - 2 u^4 w^2 + 10 u^5 w^2 - 5 u^3 w^3 - 6 u^4 w^3 - 20 u^5 w^3 + 5 u^4 w^4 + 20 u^5 w^4 - u^4 w^5 - 10 u^5 w^5 + 2 u^5 w^6$$

AU722 = Expand[AU72/w²]
expande fatores

$$-u - 2w - uw + 3u^3w + 2w^2 + 5uw^2 - 11u^3w^2 + 2u^4w^2 - 3uw^3 + 14u^3w^3 - 10u^4w^3 - 6u^3w^4 + 20u^4w^4 - u^3w^5 - 20u^4w^5 + u^3w^6 + 10u^4w^6 - 2u^4w^7$$

(*As expressões acima (AU711; AU722) correspondem ao campo vetorial (3.12).*)

(*Pontos singulares*)

Solve[{AU711 == 0, AU722 == 0, w == 0}, Reals]
resolve números

{{u → 0, w → 0}}

J[AU711, AU722, 0, 0]

{{-1, 0}, {-1, -2}}

Eigensystem[{{-1, 0}, {-1, 0}}]

autovalores e autovetores

{{-1, 0}, {{1, 1}, {0, 1}}}

(* Singularidade hiperbólica do tipo nó atrator. *)

Anexo II

Neste Anexo, apresentamos os cálculos feitos para obter os campos vetoriais, após os sucessivos *blow up's*, e construimos o retrato de fase local do campo vetorial Hamiltoniano H_q , sendo q de grau 25. Estes cálculos, foram feitos no *software Mathematica* [22].

Retrato de Fase Global do Campo H_q , sendo q de grau 25

```
(*Polionomios de maior grau*)  
PHM[f_, x_, y_] := Module[{j, d, h, t, s, r},  
  |módulo  
  s = Sort[Variables[f]][[1]];  
  |ord... |variáveis  
  r = Sort[Variables[f]][[2]];  
  |ord... |variáveis  
  d = Abs[Exponent[f /. {s → t, r → t}, t]];  
  |val... |expoente  
  j = (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, d}]] /. t → 1) -  
  |normal |série  
  (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, d - 1}]] /. t → 1);  
  |normal |série  
  h = j /. {s → x, r → y};  
  Return[h]  
  |retorna
```

```
(*Polionomios de menor grau*)  
PHm[f_, x_, y_] := Module[{j, d, h, t, s, r},  
  |módulo  
  s = Sort[Variables[f]][[1]];  
  |ord... |variáveis  
  r = Sort[Variables[f]][[2]];  
  |ord... |variáveis  
  d = Abs[Exponent[f /. {s → t, r → t}, t]];  
  |val... |expoente  
  For[i = 0, i ≤ d, i++, {  
  |para cada  
    j = (Normal[Series[f /. {s → t s, r → t r}, {t, 0, i}]] /. t → 1);  
    |normal |série  
    If[SameQ[j, 0] == False, Break[]]];  
  |se |idênticos? |falso |interrompe a execução  
  h = j /. {s → x, r → y};  
  Return[h]  
  |retorna
```

(Matriz Jacobiana)

```
J[f_, g_, x_, y_] := Module[{s, r, j, h},
  |módulo
  s = Sort[Variables[f]][[1]];
  |ord... |variáveis
  r = Sort[Variables[f]][[2]];
  |ord... |variáveis
  j = {{D[f, s], D[f, r]}, {D[g, s], D[g, r]}};
  |derivada |derivada |derivada |derivada
  h = j /. {s -> x, r -> y};
  Return[h]
|retorna
```

Polinômio de Pinchuk

```
(* Polinomio de Pinchuck*)
(*Definição de t*)
t = x y - 1;
(*Definição de h*)
h = t (x t + 1);
(*Definição de f*)
f = (x t + 1)^2 (t^2 + y);
(*Definição de u, que chamaremos aqui de a*)
a = 91 h^2 + 69 h^3 + 75  $\frac{h^4}{4}$  + 5 f h (34 + 3 h (13 + 5 h));
q[x_, y_] := Expand[-t^2 - 6 t h (h + 1) - a]
|expande fatores
```

Expand[q[x, y]][\[expande fatores](#)

$$\begin{aligned} & \frac{33}{4} - 61x + \frac{199x^2}{2} - 134x^3 + \frac{645x^4}{4} - 75x^5 + 50y - 164xy + 417x^2y - 946x^3y + 1629x^4y - \\ & 1740x^5y + 750x^6y - 5xy^2 + \frac{569x^2y^2}{2} - 1485x^3y^2 + \frac{8953x^4y^2}{2} - 8085x^5y^2 + 8115x^6y^2 - \\ & 3375x^7y^2 + 30x^2y^3 - 560x^3y^3 + 3688x^4y^3 - 11936x^5y^3 + 21805x^6y^3 - 21630x^7y^3 + 9000x^8y^3 - \\ & 75x^3y^4 + \frac{3525x^4y^4}{4} - 5409x^5y^4 + \frac{36833x^6y^4}{2} - 35385x^7y^4 + \frac{72975x^8y^4}{2} - 15750x^9y^4 - \\ & 450x^5y^5 + 3975x^6y^5 - 16298x^7y^5 + 35679x^8y^5 - 40530x^9y^5 + 18900x^{10}y^5 - 1125x^7y^6 + \\ & \frac{15375x^8y^6}{2} - 21959x^9y^6 + 29715x^{10}y^6 - 15750x^{11}y^6 - 1500x^9y^7 + 7575x^{10}y^7 - 13890x^{11}y^7 + \\ & 9000x^{12}y^7 - 1125x^{11}y^8 + \frac{15045x^{12}y^8}{4} - 3375x^{13}y^8 - 450x^{13}y^9 + 750x^{14}y^9 - 75x^{15}y^{10} \end{aligned}$$

(* Derivadas de q com respeito a x e y *)**Simplify[D[q[x, y], x]]**[\[simplifica](#) [|derivada](#)

$$\begin{aligned} & -61 - 164y - 5y^2 + 10500x^{13}y^9 - 1125x^{14}y^{10} - 2925x^{12}y^8(15 + 2y) + \\ & 45x^{11}y^7(2400 + 1003y) - 165x^{10}y^6(1050 + 926y + 75y^2) + 150x^9y^5(1260 + 1981y + 505y^2) + \\ & x(199 + 834y + 569y^2 + 60y^3) - 9x^8y^4(15750 + 40530y + 21959y^2 + 1500y^3) + \\ & 12x^7y^3(6000 + 24325y + 23786y^2 + 5125y^3) - 3x^2(134 + 946y + 1485y^2 + 560y^3 + 75y^4) - \\ & 7x^6y^2(3375 + 21630y + 35385y^2 + 16298y^3 + 1125y^4) + \\ & x^3(645 + 6516y + 17906y^2 + 14752y^3 + 3525y^4) + \\ & 3x^5y(1500 + 16230y + 43610y^2 + 36833y^3 + 7950y^4) - \\ & 5x^4(75 + 1740y + 8085y^2 + 11936y^3 + 5409y^4 + 450y^5) \end{aligned}$$

Simplify[D[q[x, y], y]][\[simplifica](#) [|derivada](#)

$$\begin{aligned} & 50 + 6750x^{14}y^8 - 750x^{15}y^9 - 1350x^{13}y^7(20 + 3y) - 2x(82 + 5y) + \\ & 30x^{12}y^6(2100 + 1003y) + x^2(417 + 569y + 90y^2) - 30x^{11}y^5(3150 + 3241y + 300y^2) + \\ & 105x^{10}y^4(900 + 1698y + 505y^2) - 2x^3(473 + 1485y + 840y^2 + 150y^3) - \\ & 42x^9y^3(1500 + 4825y + 3137y^2 + 250y^3) + 15x^8y^2(1800 + 9730y + 11893y^2 + 3075y^3) + \\ & x^4(1629 + 8953y + 11064y^2 + 3525y^3) - 6x^5(290 + 2695y + 5968y^2 + 3606y^3 + 375y^4) - \\ & 10x^7y(675 + 6489y + 14154y^2 + 8149y^3 + 675y^4) + \\ & x^6(750 + 16230y + 65415y^2 + 73666y^3 + 19875y^4) \end{aligned}$$

(* Polinômios P e Q *)**Pp[x_, y_] :=**

$$\begin{aligned} & - (50 + 6750x^{14}y^8 - 750x^{15}y^9 - 1350x^{13}y^7(20 + 3y) - 2x(82 + 5y) + 30x^{12}y^6(2100 + 1003y) + \\ & x^2(417 + 569y + 90y^2) - 30x^{11}y^5(3150 + 3241y + 300y^2) + \\ & 105x^{10}y^4(900 + 1698y + 505y^2) - 2x^3(473 + 1485y + 840y^2 + 150y^3) - \\ & 42x^9y^3(1500 + 4825y + 3137y^2 + 250y^3) + 15x^8y^2(1800 + 9730y + 11893y^2 + 3075y^3) + \\ & x^4(1629 + 8953y + 11064y^2 + 3525y^3) - 6x^5(290 + 2695y + 5968y^2 + 3606y^3 + 375y^4) - \\ & 10x^7y(675 + 6489y + 14154y^2 + 8149y^3 + 675y^4) + \\ & x^6(750 + 16230y + 65415y^2 + 73666y^3 + 19875y^4)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Qq}[x_ , y_] := & -61 - 164 y - 5 y^2 + 10500 x^{13} y^9 - 1125 x^{14} y^{10} - 2925 x^{12} y^8 (15 + 2 y) + \\ & 45 x^{11} y^7 (2400 + 1003 y) - 165 x^{10} y^6 (1050 + 926 y + 75 y^2) + 150 x^9 y^5 (1260 + 1981 y + 505 y^2) + \\ & x (199 + 834 y + 569 y^2 + 60 y^3) - 9 x^8 y^4 (15750 + 40530 y + 21959 y^2 + 1500 y^3) + \\ & 12 x^7 y^3 (6000 + 24325 y + 23786 y^2 + 5125 y^3) - 3 x^2 (134 + 946 y + 1485 y^2 + 560 y^3 + 75 y^4) - \\ & 7 x^6 y^2 (3375 + 21630 y + 35385 y^2 + 16298 y^3 + 1125 y^4) + \\ & x^3 (645 + 6516 y + 17906 y^2 + 14752 y^3 + 3525 y^4) + \\ & 3 x^5 y (1500 + 16230 y + 43610 y^2 + 36833 y^3 + 7950 y^4) - \\ & 5 x^4 (75 + 1740 y + 8085 y^2 + 11936 y^3 + 5409 y^4 + 450 y^5) \end{aligned}$$

(* Campo Hamiltoniano *)

$$\text{Hq}[x_ , y_] := \{\text{Pp}[x, y], \text{Qq}[x, y]\}$$

$$\begin{aligned} \text{P} = & - (50 + 6750 x^{14} y^8 - 750 x^{15} y^9 - 1350 x^{13} y^7 (20 + 3 y) - 2 x (82 + 5 y) + \\ & 30 x^{12} y^6 (2100 + 1003 y) + x^2 (417 + 569 y + 90 y^2) - 30 x^{11} y^5 (3150 + 3241 y + 300 y^2) + \\ & 105 x^{10} y^4 (900 + 1698 y + 505 y^2) - 2 x^3 (473 + 1485 y + 840 y^2 + 150 y^3) - \\ & 42 x^9 y^3 (1500 + 4825 y + 3137 y^2 + 250 y^3) + 15 x^8 y^2 (1800 + 9730 y + 11893 y^2 + 3075 y^3) + \\ & x^4 (1629 + 8953 y + 11064 y^2 + 3525 y^3) - 6 x^5 (290 + 2695 y + 5968 y^2 + 3606 y^3 + 375 y^4) - \\ & 10 x^7 y (675 + 6489 y + 14154 y^2 + 8149 y^3 + 675 y^4) + \\ & x^6 (750 + 16230 y + 65415 y^2 + 73666 y^3 + 19875 y^4)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Q} = & -61 - 164 y - 5 y^2 + 10500 x^{13} y^9 - 1125 x^{14} y^{10} - 2925 x^{12} y^8 (15 + 2 y) + \\ & 45 x^{11} y^7 (2400 + 1003 y) - 165 x^{10} y^6 (1050 + 926 y + 75 y^2) + 150 x^9 y^5 (1260 + 1981 y + 505 y^2) + \\ & x (199 + 834 y + 569 y^2 + 60 y^3) - 9 x^8 y^4 (15750 + 40530 y + 21959 y^2 + 1500 y^3) + \\ & 12 x^7 y^3 (6000 + 24325 y + 23786 y^2 + 5125 y^3) - 3 x^2 (134 + 946 y + 1485 y^2 + 560 y^3 + 75 y^4) - \\ & 7 x^6 y^2 (3375 + 21630 y + 35385 y^2 + 16298 y^3 + 1125 y^4) + \\ & x^3 (645 + 6516 y + 17906 y^2 + 14752 y^3 + 3525 y^4) + \\ & 3 x^5 y (1500 + 16230 y + 43610 y^2 + 36833 y^3 + 7950 y^4) - \\ & 5 x^4 (75 + 1740 y + 8085 y^2 + 11936 y^3 + 5409 y^4 + 450 y^5); \end{aligned}$$

(*grau de P e Q *)

$$\text{d} = \text{Exponent}[\text{Q} /. \{x \rightarrow t, y \rightarrow t\}, t]$$

[|](#)expoente

24

(*Polinômios Homogêneos de P e Q de maior grau*)

$$\text{PHM}[\text{P}, x, y]$$

$$750 x^{15} y^9$$

$$\text{PHM}[\text{Q}, x, y]$$

$$-1125 x^{14} y^{10}$$

(*Função F*)

$$\text{PHM}[\text{Q}, 1, u] - u \text{PHM}[\text{P}, 1, u]$$

$$-1875 u^{10}$$

(*Raízes da F*) (*Pontos singulares infinitos do campo na carta U1*)

$$\text{Solve}[\text{PHM}[\text{Q}, 1, u] - u \text{PHM}[\text{P}, 1, u] == 0, u]$$

[|](#)resolve

$$\{\{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}, \{u \rightarrow 0\}\}$$

(*Concluimos que a origem é o único ponto singular infinito do campo vetorial na carta U1*)

(*Estudaremos agora o comportamento dessa singularidade*)

(*Campo vetorial na carta U1*)

$$PU1 = \text{Simplify}\left[v^d \left(-u \left(P / . \left\{ x \rightarrow \frac{1}{v}, y \rightarrow \frac{u}{v} \right\} \right) + \left(Q / . \left\{ x \rightarrow \frac{1}{v}, y \rightarrow \frac{u}{v} \right\} \right) \right)\right]$$

$$\begin{aligned} & -1875 u^{10} - 150 u^9 v^2 (-115 + 66 v) - 75 u^8 v^4 (945 - 1003 v + 285 v^2) - \\ & 15 u^7 v^6 (-11400 + 16668 v - 8585 v^2 + 1600 v^3) + v^{20} (-375 + 645 v - 402 v^2 + 199 v^3 - 61 v^4) - \\ & 15 u^6 v^8 (17850 - 31696 v + 21959 v^2 - 7175 v^3 + 975 v^4) - \\ & 3 u^5 v^{10} (-94500 + 189140 v - 154609 v^2 + 65192 v^3 - 14575 v^4 + 1500 v^5) + \\ & u^4 v^{12} (-204750 + 437850 v - 389235 v^2 + 184165 v^3 - 48681 v^4 + 7050 v^5 - 525 v^6) + \\ & u^2 v^{16} (-30375 + 64920 v - 56595 v^2 + 26859 v^3 - 7425 v^4 + 1138 v^5 - 15 v^6) + \\ & u v^{18} (5250 - 10440 v + 8145 v^2 - 3784 v^3 + 1251 v^4 - 328 v^5 + 50 v^6) + \\ & u^3 v^{14} (99000 - 216300 v + 196245 v^2 - 95488 v^3 + 25816 v^4 - 3360 v^5 + 150 v^6) \end{aligned}$$

$$QU1 = \text{Simplify}\left[-v^{d+1} \left(P / . \left\{ x \rightarrow \frac{1}{v}, y \rightarrow \frac{u}{v} \right\} \right)\right]$$

$$\begin{aligned} & -v (750 u^9 + 1350 u^8 v^2 (-5 + 3 v) + \\ & 30 u^7 v^4 (900 - 1003 v + 300 v^2) + 105 u^6 v^6 (-600 + 926 v - 505 v^2 + 100 v^3) + \\ & 3 u^5 v^8 (31500 - 59430 v + 43918 v^2 - 15375 v^3 + 2250 v^4) + \\ & 5 u^4 v^{10} (-18900 + 40530 v - 35679 v^2 + 16298 v^3 - 3975 v^4 + 450 v^5) + \\ & v^{18} (-750 + 1740 v - 1629 v^2 + 946 v^3 - 417 v^4 + 164 v^5 - 50 v^6) + \\ & u v^{16} (6750 - 16230 v + 16170 v^2 - 8953 v^3 + 2970 v^4 - 569 v^5 + 10 v^6) - \\ & 3 u^2 v^{14} (9000 - 21630 v + 21805 v^2 - 11936 v^3 + 3688 v^4 - 560 v^5 + 30 v^6) + \\ & u^3 v^{12} (63000 - 145950 v + 141540 v^2 - 73666 v^3 + 21636 v^4 - 3525 v^5 + 300 v^6) \end{aligned}$$

PU11 = Expand [PU1]

$$\begin{aligned} & -1875 u^{10} + 17250 u^9 v^2 - 9900 u^9 v^3 - 70875 u^8 v^4 + 75225 u^8 v^5 + 171000 u^7 v^6 - 21375 u^8 v^6 - \\ & 250020 u^7 v^7 - 267750 u^6 v^8 + 128775 u^7 v^8 + 475440 u^6 v^9 - 24000 u^7 v^9 + 283500 u^5 v^{10} - \\ & 329385 u^6 v^{10} - 567420 u^5 v^{11} + 107625 u^6 v^{11} - 204750 u^4 v^{12} + 463827 u^5 v^{12} - 14625 u^6 v^{12} + \\ & 437850 u^4 v^{13} - 195576 u^5 v^{13} + 99000 u^3 v^{14} - 389235 u^4 v^{14} + 43725 u^5 v^{14} - 216300 u^3 v^{15} + \\ & 184165 u^4 v^{15} - 4500 u^5 v^{15} - 30375 u^2 v^{16} + 196245 u^3 v^{16} - 48681 u^4 v^{16} + 64920 u^2 v^{17} - \\ & 95488 u^3 v^{17} + 7050 u^4 v^{17} + 5250 u v^{18} - 56595 u^2 v^{18} + 25816 u^3 v^{18} - 525 u^4 v^{18} - 10440 u v^{19} + \\ & 26859 u^2 v^{19} - 3360 u^3 v^{19} - 375 v^{20} + 8145 u v^{20} - 7425 u^2 v^{20} + 150 u^3 v^{20} + 645 v^{21} - \\ & 3784 u v^{21} + 1138 u^2 v^{21} - 402 v^{22} + 1251 u v^{22} - 15 u^2 v^{22} + 199 v^{23} - 328 u v^{23} - 61 v^{24} + 50 u v^{24} \end{aligned}$$

QU11 = Expand [QU1]

$$\begin{aligned} & -750 u^9 v + 6750 u^8 v^3 - 4050 u^8 v^4 - 27000 u^7 v^5 + 30090 u^7 v^6 + 63000 u^6 v^7 - 9000 u^7 v^7 - \\ & 97230 u^6 v^8 - 94500 u^5 v^9 + 53025 u^6 v^9 + 178290 u^5 v^{10} - 10500 u^6 v^{10} + 94500 u^4 v^{11} - \\ & 131754 u^5 v^{11} - 202650 u^4 v^{12} + 46125 u^5 v^{12} - 63000 u^3 v^{13} + 178395 u^4 v^{13} - 6750 u^5 v^{13} + \\ & 145950 u^3 v^{14} - 81490 u^4 v^{14} + 27000 u^2 v^{15} - 141540 u^3 v^{15} + 19875 u^4 v^{15} - 64890 u^2 v^{16} + \\ & 73666 u^3 v^{16} - 2250 u^4 v^{16} - 6750 u v^{17} + 65415 u^2 v^{17} - 21636 u^3 v^{17} + 16230 u v^{18} - 35808 u^2 v^{18} + \\ & 3525 u^3 v^{18} + 750 v^{19} - 16170 u v^{19} + 11064 u^2 v^{19} - 300 u^3 v^{19} - 1740 v^{20} + 8953 u v^{20} - 1680 u^2 v^{20} + \\ & 1629 v^{21} - 2970 u v^{21} + 90 u^2 v^{21} - 946 v^{22} + 569 u v^{22} + 417 v^{23} - 10 u v^{23} - 164 v^{24} + 50 v^{25} \end{aligned}$$

(* As expressões acima (PU11,QU11) correspondem ao campo vetorial (4.1). *)

(* Calculando a parte linear do campo vetorial na origem *)

J[PU1, QU1, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Assim, a origem é uma singularidade linearmente zero. Logo é necessário fazermos um blow up*)

(* Primeiro blow up do campo vetorial (4.1) na direção x. *)

BU1 = Simplify[PU1 /. {u → u, v → u w}]

[simplifica]

$$u^{10} \left(-1875 + 17250 u w^2 + 50 u^{15} w^{24} - 225 u^2 w^3 (44 + 315 w) + 75 u^3 w^5 (1003 + 2280 w) - u^{14} w^{22} (15 + 328 w + 61 w^2) - 45 u^4 w^6 (475 + 5556 w + 5950 w^2) + 15 u^5 w^8 (8585 + 31696 w + 18900 w^2) + u^{13} w^{20} (150 + 1138 w + 1251 w^2 + 199 w^3) - 15 u^6 w^9 (1600 + 21959 w + 37828 w^2 + 13650 w^3) + 3 u^7 w^{11} (35875 + 154609 w + 145950 w^2 + 33000 w^3) - u^{12} w^{18} (525 + 3360 w + 7425 w^2 + 3784 w^3 + 402 w^4) + u^{11} w^{17} (7050 + 25816 w + 26859 w^2 + 8145 w^3 + 645 w^4) + 5 u^9 w^{14} (8745 + 36833 w + 39249 w^2 + 12984 w^3 + 1050 w^4) - 3 u^8 w^{12} (4875 + 65192 w + 129745 w^2 + 72100 w^3 + 10125 w^4) - u^{10} w^{15} (4500 + 48681 w + 95488 w^2 + 56595 w^3 + 10440 w^4 + 375 w^5) \right)$$

BU2 = Simplify[$\frac{1}{u} ((QU1 /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow u w\}) - w (PU1 /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow u w\}))$]

[simplifica]

$$u^9 w \left(1125 - 10500 u w^2 + 2925 u^2 w^3 (2 + 15 w) - 45 u^3 w^5 (1003 + 2400 w) + u^{14} w^{22} (5 + 164 w + 61 w^2) + 165 u^4 w^6 (75 + 926 w + 1050 w^2) - 150 u^5 w^8 (505 + 1981 w + 1260 w^2) - u^{13} w^{20} (60 + 569 w + 834 w^2 + 199 w^3) - 12 u^7 w^{11} (5125 + 23786 w + 24325 w^2 + 6000 w^3) + 9 u^6 w^9 (1500 + 21959 w + 40530 w^2 + 15750 w^3) + 3 u^{12} w^{18} (75 + 560 w + 1485 w^2 + 946 w^3 + 134 w^4) - u^{11} w^{17} (3525 + 14752 w + 17906 w^2 + 6516 w^3 + 645 w^4) - 3 u^9 w^{14} (7950 + 36833 w + 43610 w^2 + 16230 w^3 + 1500 w^4) + 7 u^8 w^{12} (1125 + 16298 w + 35385 w^2 + 21630 w^3 + 3375 w^4) + 5 u^{10} w^{15} (450 + 5409 w + 11936 w^2 + 8085 w^3 + 1740 w^4 + 75 w^5) \right)$$

(* Cancelando o termo u⁹ *)

BU11 = Expand[BU1 / u⁹]

[expande fatores]

$$-1875 u + 17250 u^2 w^2 - 9900 u^3 w^3 - 70875 u^3 w^4 + 75225 u^4 w^5 + 171000 u^4 w^6 - 21375 u^5 w^6 - 250020 u^5 w^7 - 267750 u^5 w^8 + 128775 u^6 w^8 + 475440 u^6 w^9 - 24000 u^7 w^9 + 283500 u^6 w^{10} - 329385 u^7 w^{10} - 567420 u^7 w^{11} + 107625 u^8 w^{11} - 204750 u^7 w^{12} + 463827 u^8 w^{12} - 14625 u^9 w^{12} + 437850 u^8 w^{13} - 195576 u^9 w^{13} + 99000 u^8 w^{14} - 389235 u^9 w^{14} + 43725 u^{10} w^{14} - 216300 u^9 w^{15} + 184165 u^{10} w^{15} - 4500 u^{11} w^{15} - 30375 u^9 w^{16} + 196245 u^{10} w^{16} - 48681 u^{11} w^{16} + 64920 u^{10} w^{17} - 95488 u^{11} w^{17} + 7050 u^{12} w^{17} + 5250 u^{10} w^{18} - 56595 u^{11} w^{18} + 25816 u^{12} w^{18} - 525 u^{13} w^{18} - 10440 u^{11} w^{19} + 26859 u^{12} w^{19} - 3360 u^{13} w^{19} - 375 u^{11} w^{20} + 8145 u^{12} w^{20} - 7425 u^{13} w^{20} + 150 u^{14} w^{20} + 645 u^{12} w^{21} - 3784 u^{13} w^{21} + 1138 u^{14} w^{21} - 402 u^{13} w^{22} + 1251 u^{14} w^{22} - 15 u^{15} w^{22} + 199 u^{14} w^{23} - 328 u^{15} w^{23} - 61 u^{15} w^{24} + 50 u^{16} w^{24}$$

BU22 = Expand [BU2 / u⁹]
[expande fatores]

$$\begin{aligned}
& 1125 w - 10500 u w^3 + 5850 u^2 w^4 + 43875 u^2 w^5 - 45135 u^3 w^6 - 108000 u^3 w^7 + 12375 u^4 w^7 + \\
& 152790 u^4 w^8 + 173250 u^4 w^9 - 75750 u^5 w^9 - 297150 u^5 w^{10} + 13500 u^6 w^{10} - 189000 u^5 w^{11} + \\
& 197631 u^6 w^{11} + 364770 u^6 w^{12} - 61500 u^7 w^{12} + 141750 u^6 w^{13} - 285432 u^7 w^{13} + 7875 u^8 w^{13} - \\
& 291900 u^7 w^{14} + 114086 u^8 w^{14} - 72000 u^7 w^{15} + 247695 u^8 w^{15} - 23850 u^9 w^{15} + 151410 u^8 w^{16} - \\
& 110499 u^9 w^{16} + 2250 u^{10} w^{16} + 23625 u^8 w^{17} - 130830 u^9 w^{17} + 27045 u^{10} w^{17} - 48690 u^9 w^{18} + \\
& 59680 u^{10} w^{18} - 3525 u^{11} w^{18} - 4500 u^9 w^{19} + 40425 u^{10} w^{19} - 14752 u^{11} w^{19} + 225 u^{12} w^{19} + 8700 u^{10} w^{20} - \\
& 17906 u^{11} w^{20} + 1680 u^{12} w^{20} + 375 u^{10} w^{21} - 6516 u^{11} w^{21} + 4455 u^{12} w^{21} - 60 u^{13} w^{21} - 645 u^{11} w^{22} + \\
& 2838 u^{12} w^{22} - 569 u^{13} w^{22} + 402 u^{12} w^{23} - 834 u^{13} w^{23} + 5 u^{14} w^{23} - 199 u^{13} w^{24} + 164 u^{14} w^{24} + 61 u^{14} w^{25}
\end{aligned}$$

(* A linearização do campo vetorial na origem. *)

J[BU11, BU22, 0, 0]

{{-1875, 0}, {0, 1125}}

(* A origem é uma sela. *)

(* Blow-up do campo vetorial (4.1) na direção y: u → uw, w → w *)

BU13 = Simplify [$\frac{1}{w}$ ((PU1 /. {u → uw, v → w}) - u (QU1 /. {u → uw, v → w}))]
[simplifica]

$$\begin{aligned}
& -w^9 (1125 u^{10} + 150 u^9 w (-70 + 39 w) + 45 u^8 w^2 (975 - 1003 w + 275 w^2) + \\
& 30 u^7 w^3 (-3600 + 5093 w - 2525 w^2 + 450 w^3) + w^{10} (375 - 645 w + 402 w^2 - 199 w^3 + 61 w^4) + \\
& 3 u^6 w^4 (57750 - 99050 w + 65877 w^2 - 20500 w^3 + 2625 w^4) + \\
& 2 u w^9 (-2250 + 4350 w - 3258 w^2 + 1419 w^3 - 417 w^4 + 82 w^5) + \\
& 2 u^5 w^5 (-94500 + 182385 w - 142716 w^2 + 57043 w^3 - 11925 w^4 + 1125 w^5) + \\
& u^2 w^8 (23625 - 48690 w + 40425 w^2 - 17906 w^3 + 4455 w^4 - 569 w^5 + 5 w^6) - \\
& 2 u^3 w^7 (36000 - 75705 w + 65415 w^2 - 29840 w^3 + 7376 w^4 - 840 w^5 + 30 w^6) + \\
& 3 u^4 w^6 (47250 - 97300 w + 82565 w^2 - 36833 w^3 + 9015 w^4 - 1175 w^5 + 75 w^6)
\end{aligned}$$

BU24 = Simplify [QU1 /. {u → uw, v → w}]
[simplifica]

$$\begin{aligned}
& -w^{10} (750 u^9 + 1350 u^8 w (-5 + 3 w) + \\
& 30 u^7 w^2 (900 - 1003 w + 300 w^2) + 105 u^6 w^3 (-600 + 926 w - 505 w^2 + 100 w^3) + \\
& 3 u^5 w^4 (31500 - 59430 w + 43918 w^2 - 15375 w^3 + 2250 w^4) + \\
& 5 u^4 w^5 (-18900 + 40530 w - 35679 w^2 + 16298 w^3 - 3975 w^4 + 450 w^5) + \\
& w^9 (-750 + 1740 w - 1629 w^2 + 946 w^3 - 417 w^4 + 164 w^5 - 50 w^6) + \\
& u w^8 (6750 - 16230 w + 16170 w^2 - 8953 w^3 + 2970 w^4 - 569 w^5 + 10 w^6) - \\
& 3 u^2 w^7 (9000 - 21630 w + 21805 w^2 - 11936 w^3 + 3688 w^4 - 560 w^5 + 30 w^6) + \\
& u^3 w^6 (63000 - 145950 w + 141540 w^2 - 73666 w^3 + 21636 w^4 - 3525 w^5 + 300 w^6)
\end{aligned}$$

(* Cancelando o termo w⁹ *)

BU131 = Expand [BU13 / w⁹]

[[expande fatores](#)]

$$\begin{aligned}
 & -1125 u^{10} + 10500 u^9 w - 43875 u^8 w^2 - 5850 u^9 w^2 + 108000 u^7 w^3 + 45135 u^8 w^3 - \\
 & 173250 u^6 w^4 - 152790 u^7 w^4 - 12375 u^8 w^4 + 189000 u^5 w^5 + 297150 u^6 w^5 + 75750 u^7 w^5 - \\
 & 141750 u^4 w^6 - 364770 u^5 w^6 - 197631 u^6 w^6 - 13500 u^7 w^6 + 72000 u^3 w^7 + 291900 u^4 w^7 + \\
 & 285432 u^5 w^7 + 61500 u^6 w^7 - 23625 u^2 w^8 - 151410 u^3 w^8 - 247695 u^4 w^8 - 114086 u^5 w^8 - \\
 & 7875 u^6 w^8 + 4500 u w^9 + 48690 u^2 w^9 + 130830 u^3 w^9 + 110499 u^4 w^9 + 23850 u^5 w^9 - 375 w^{10} - \\
 & 8700 u w^{10} - 40425 u^2 w^{10} - 59680 u^3 w^{10} - 27045 u^4 w^{10} - 2250 u^5 w^{10} + 645 w^{11} + 6516 u w^{11} + \\
 & 17906 u^2 w^{11} + 14752 u^3 w^{11} + 3525 u^4 w^{11} - 402 w^{12} - 2838 u w^{12} - 4455 u^2 w^{12} - 1680 u^3 w^{12} - \\
 & 225 u^4 w^{12} + 199 w^{13} + 834 u w^{13} + 569 u^2 w^{13} + 60 u^3 w^{13} - 61 w^{14} - 164 u w^{14} - 5 u^2 w^{14}
 \end{aligned}$$

BU241 = Expand [BU24 / w⁹]

[[expande fatores](#)]

$$\begin{aligned}
 & -750 u^9 w + 6750 u^8 w^2 - 27000 u^7 w^3 - 4050 u^8 w^3 + 63000 u^6 w^4 + 30090 u^7 w^4 - 94500 u^5 w^5 - \\
 & 97230 u^6 w^5 - 9000 u^7 w^5 + 94500 u^4 w^6 + 178290 u^5 w^6 + 53025 u^6 w^6 - 63000 u^3 w^7 - \\
 & 202650 u^4 w^7 - 131754 u^5 w^7 - 10500 u^6 w^7 + 27000 u^2 w^8 + 145950 u^3 w^8 + 178395 u^4 w^8 + \\
 & 46125 u^5 w^8 - 6750 u w^9 - 64890 u^2 w^9 - 141540 u^3 w^9 - 81490 u^4 w^9 - 6750 u^5 w^9 + 750 w^{10} + \\
 & 16230 u w^{10} + 65415 u^2 w^{10} + 73666 u^3 w^{10} + 19875 u^4 w^{10} - 1740 w^{11} - 16170 u w^{11} - 35808 u^2 w^{11} - \\
 & 21636 u^3 w^{11} - 2250 u^4 w^{11} + 1629 w^{12} + 8953 u w^{12} + 11064 u^2 w^{12} + 3525 u^3 w^{12} - 946 w^{13} - \\
 & 2970 u w^{13} - 1680 u^2 w^{13} - 300 u^3 w^{13} + 417 w^{14} + 569 u w^{14} + 90 u^2 w^{14} - 164 w^{15} - 10 u w^{15} + 50 w^{16}
 \end{aligned}$$

(* As expressões acima (BU131, BU241) correspondem ao campo vetorial (4.2). *)

(* A linearização do campo vetorial (4.2) na origem. *)

J[BU131, BU241, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Blow up de campo vetorial (4.2). Primeiro, na direção x. *)

BU31 = Simplify [BU131 /. {u → u, w → u w}]

[[simplifica](#)]

$$\begin{aligned}
 & -u^{10} (1125 - 10500 w + 2925 (15 + 2 u) w^2 - 45 (2400 + 1003 u) w^3 + \\
 & 165 (1050 + 926 u + 75 u^2) w^4 - 150 (1260 + 1981 u + 505 u^2) w^5 + \\
 & 9 (15750 + 40530 u + 21959 u^2 + 1500 u^3) w^6 - 12 (6000 + 24325 u + 23786 u^2 + 5125 u^3) w^7 + \\
 & 7 (3375 + 21630 u + 35385 u^2 + 16298 u^3 + 1125 u^4) w^8 - \\
 & 3 (1500 + 16230 u + 43610 u^2 + 36833 u^3 + 7950 u^4) w^9 + \\
 & 5 (75 + 1740 u + 8085 u^2 + 11936 u^3 + 5409 u^4 + 450 u^5) w^{10} - \\
 & u (645 + 6516 u + 17906 u^2 + 14752 u^3 + 3525 u^4) w^{11} + \\
 & 3 u^2 (134 + 946 u + 1485 u^2 + 560 u^3 + 75 u^4) w^{12} - \\
 & u^3 (199 + 834 u + 569 u^2 + 60 u^3) w^{13} + u^4 (61 + 164 u + 5 u^2) w^{14}
 \end{aligned}$$

BU32 = Simplify [1/u ((BU241 /. {u → u, w → u w}) - w (BU131 /. {u → u, w → u w}))]

[[simplifica](#)]

$$\begin{aligned}
 & u^9 (-1 + w) w \\
 & (-375 + 3375 w - 900 (15 + 2 u) w^2 + 15 (2100 + 883 u) w^3 - 15 (3150 + 2821 u + 225 u^2) w^4 + \\
 & 45 (1050 + 1701 u + 430 u^2) w^5 - 3 (10500 + 28525 u + 15509 u^2 + 1000 u^3) w^6 + \\
 & 15 (900 + 4025 u + 4034 u^2 + 825 u^3) w^7 - (3375 + 26145 u + 45645 u^2 + 20221 u^3 + 1125 u^4) w^8 + \\
 & (375 + 6315 u + 19770 u^2 + 16612 u^3 + 2850 u^4) w^9 - 3 u (215 + 1495 u + 2420 u^2 + 853 u^3) w^{10} + \\
 & u^2 (402 + 1693 u + 1129 u^2) w^{11} + u^3 (-199 - 356 u + 75 u^3) w^{12} + u^4 (61 + 45 u^2) w^{13} + 50 u^6 w^{14}
 \end{aligned}$$

BU311 = Expand[BU31/u⁹]

[expande fatores

$$\begin{aligned}
 & -1125 u + 10500 u w - 43875 u w^2 - 5850 u^2 w^2 + 108000 u w^3 + 45135 u^2 w^3 - 173250 u w^4 - \\
 & 152790 u^2 w^4 - 12375 u^3 w^4 + 189000 u w^5 + 297150 u^2 w^5 + 75750 u^3 w^5 - 141750 u w^6 - \\
 & 364770 u^2 w^6 - 197631 u^3 w^6 - 13500 u^4 w^6 + 72000 u w^7 + 291900 u^2 w^7 + 285432 u^3 w^7 + \\
 & 61500 u^4 w^7 - 23625 u w^8 - 151410 u^2 w^8 - 247695 u^3 w^8 - 114086 u^4 w^8 - 7875 u^5 w^8 + \\
 & 4500 u w^9 + 48690 u^2 w^9 + 130830 u^3 w^9 + 110499 u^4 w^9 + 23850 u^5 w^9 - 375 u w^{10} - 8700 u^2 w^{10} - \\
 & 40425 u^3 w^{10} - 59680 u^4 w^{10} - 27045 u^5 w^{10} - 2250 u^6 w^{10} + 645 u^2 w^{11} + 6516 u^3 w^{11} + \\
 & 17906 u^4 w^{11} + 14752 u^5 w^{11} + 3525 u^6 w^{11} - 402 u^3 w^{12} - 2838 u^4 w^{12} - 4455 u^5 w^{12} - 1680 u^6 w^{12} - \\
 & 225 u^7 w^{12} + 199 u^4 w^{13} + 834 u^5 w^{13} + 569 u^6 w^{13} + 60 u^7 w^{13} - 61 u^5 w^{14} - 164 u^6 w^{14} - 5 u^7 w^{14}
 \end{aligned}$$

BU322 = Expand[BU32/u⁹]

[expande fatores

$$\begin{aligned}
 & 375 w - 3750 w^2 + 16875 w^3 + 1800 u w^3 - 45000 w^4 - 15045 u w^4 + 78750 w^5 + 55560 u w^5 + \\
 & 3375 u^2 w^5 - 94500 w^6 - 118860 u w^6 - 22725 u^2 w^6 + 78750 w^7 + 162120 u w^7 + 65877 u^2 w^7 + \\
 & 3000 u^3 w^7 - 45000 w^8 - 145950 u w^8 - 107037 u^2 w^8 - 15375 u^3 w^8 + 16875 w^9 + 86520 u w^9 + \\
 & 106155 u^2 w^9 + 32596 u^3 w^9 + 1125 u^4 w^9 - 3750 w^{10} - 32460 u w^{10} - 65415 u^2 w^{10} - \\
 & 36833 u^3 w^{10} - 3975 u^4 w^{10} + 375 w^{11} + 6960 u w^{11} + 24255 u^2 w^{11} + 23872 u^3 w^{11} + \\
 & 5409 u^4 w^{11} - 645 u w^{12} - 4887 u^2 w^{12} - 8953 u^3 w^{12} - 3688 u^4 w^{12} + 402 u^2 w^{13} + 1892 u^3 w^{13} + \\
 & 1485 u^4 w^{13} - 75 u^6 w^{13} - 199 u^3 w^{14} - 417 u^4 w^{14} + 30 u^6 w^{14} + 61 u^4 w^{15} - 5 u^6 w^{15} + 50 u^6 w^{16}
 \end{aligned}$$

(* Pontos de equilíbrio *)

Solve[{BU311 == 0, BU322 == 0, u == 0}]

[resolve

{{u -> 0, w -> 0}, {u -> 0, w -> 1}}

(* Obtemos duas singularidades a primeira na origem e a segunda no ponto(0,1). *)

(* A linearização do campo nestas singularidades fornecem *)

J[BU311, BU322, 0, 0]

{{-1125, 0}, {0, 375}}

J[BU311, BU322, 0, 1]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Assim, no ponto (0,1) devemos fazer outro blow up para simplificar as contas, fazemos a translação (u,w)=(u, v+1) *)

BU3111 = Simplify[BU311 /. {u -> u, w -> v + 1}];

[simplifica

BU3222 = Simplify[BU322 /. {u -> u, w -> v + 1}];

[simplifica

BU31111 = Expand [BU3111]

Expande fatores

$$\begin{aligned}
 & -170 u^7 + 1216 u^6 v - 1990 u^7 v - 2094 u^5 v^2 + 11203 u^6 v^2 - 10625 u^7 v^2 + 1044 u^4 v^3 - \\
 & 12700 u^5 v^3 + 45063 u^6 v^3 - 34160 u^7 v^3 + 509 u^4 v^4 - 27416 u^5 v^4 + 101821 u^6 v^4 - \\
 & 73480 u^7 v^4 + 2604 u^3 v^5 - 13813 u^4 v^5 - 12940 u^5 v^5 + 134965 u^6 v^5 - 110990 u^7 v^5 + \\
 & 4347 u^3 v^6 - 36548 u^4 v^6 + 50415 u^5 v^6 + 87642 u^6 v^6 - 119955 u^7 v^6 + 2310 u^2 v^7 - 5352 u^3 v^7 - \\
 & 32056 u^4 v^7 + 111792 u^5 v^7 - 23754 u^6 v^7 - 92400 u^7 v^7 + 1725 u^2 v^8 - 13200 u^3 v^8 + \\
 & 598 u^4 v^8 + 108780 u^5 v^8 - 111414 u^6 v^8 - 49170 u^7 v^8 + 750 u v^9 - 2835 u^2 v^9 - 3480 u^3 v^9 + \\
 & 16454 u^4 v^9 + 58848 u^5 v^9 - 119718 u^6 v^9 - 16610 u^7 v^9 - 375 u v^{10} - 1605 u^2 v^{10} + 4719 u^3 v^{10} + \\
 & 6892 u^4 v^{10} + 18660 u^5 v^{10} - 75785 u^6 v^{10} - 2695 u^7 v^{10} + 645 u^2 v^{11} + 1692 u^3 v^{11} - 628 u^4 v^{11} + \\
 & 4140 u^5 v^{11} - 31949 u^6 v^{11} + 160 u^7 v^{11} - 402 u^3 v^{12} - 251 u^4 v^{12} + 836 u^5 v^{12} - 9207 u^6 v^{12} + \\
 & 100 u^7 v^{12} + 199 u^4 v^{13} - 20 u^5 v^{13} - 1727 u^6 v^{13} - 10 u^7 v^{13} - 61 u^5 v^{14} - 164 u^6 v^{14} - 5 u^7 v^{14}
 \end{aligned}$$

BU32222 = Expand [BU3222]

Expande fatores

$$\begin{aligned}
 & 170 u^6 v + 2355 u^6 v^2 - 698 u^4 v^3 + 15195 u^6 v^3 + 522 u^3 v^4 - 5967 u^4 v^4 + 60580 u^6 v^4 + \\
 & 1874 u^3 v^5 - 22344 u^4 v^5 + 166920 u^6 v^5 + 1302 u^2 v^6 - 999 u^3 v^6 - 47690 u^4 v^6 + 336765 u^6 v^6 + \\
 & 4839 u^2 v^7 - 15816 u^3 v^7 - 62775 u^4 v^7 + 514085 u^6 v^7 + 1155 u v^8 + 5067 u^2 v^8 - 34944 u^3 v^8 - \\
 & 50346 u^4 v^8 + 604890 u^6 v^8 + 2820 u v^9 - 1680 u^2 v^9 - 38052 u^3 v^9 - 20244 u^4 v^9 + \\
 & 553410 u^6 v^9 + 375 v^{10} + 1530 u v^{10} - 6180 u^2 v^{10} - 23226 u^3 v^{10} + 2592 u^4 v^{10} + 393965 u^6 v^{10} + \\
 & 375 v^{11} - 780 u v^{11} - 3033 u^2 v^{11} - 8424 u^3 v^{11} + 8460 u^4 v^{11} + 216645 u^6 v^{11} - 645 u v^{12} + \\
 & 339 u^2 v^{12} - 2466 u^3 v^{12} + 5425 u^4 v^{12} + 90480 u^6 v^{12} + 402 u^2 v^{13} - 894 u^3 v^{13} + 2052 u^4 v^{13} + \\
 & 27820 u^6 v^{13} - 199 u^3 v^{14} + 498 u^4 v^{14} + 5955 u^6 v^{14} + 61 u^4 v^{15} + 795 u^6 v^{15} + 50 u^6 v^{16}
 \end{aligned}$$

(* As expressões acima (BU31111, BU32222) correspondem ao campo vetorial (4.3). *)

(*Pontos de equilíbrio*)

J[BU31111, BU32222, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Blow up do campo vetorial (4.2) na direção y *)

BU41 = Simplify $\left[\frac{1}{w} \left((BU131 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) - u (BU241 /. \{u \rightarrow u w, v \rightarrow w\}) \right)\right]$

Simplifica

$$\begin{aligned}
 & -(-1 + u) w^9 (-375 + 375 u^9 + 645 w - 402 w^2 + 199 w^3 - 61 w^4 + 225 u^8 (-15 + 8 w) + \\
 & 15 u^7 (900 - 883 w + 225 w^2) + 15 u^6 (-2100 + 2821 w - 1290 w^2 + 200 w^3) + \\
 & u^4 (-47250 + 85575 w - 60510 w^2 + 20221 w^3 - 2850 w^4) + \\
 & 3 u^5 (15750 - 25515 w + 15509 w^2 - 4125 w^3 + 375 w^4) + \\
 & u^3 (31500 - 60375 w + 45645 w^2 - 16612 w^3 + 2559 w^4 - 75 w^6) + \\
 & u (3375 - 6315 w + 4485 w^2 - 1693 w^3 + 356 w^4 - 50 w^6) - \\
 & u^2 (13500 - 26145 w + 19770 w^2 - 7260 w^3 + 1129 w^4 + 45 w^6)
 \end{aligned}$$

BU42 = Simplify[BU241 /. {u → u w, v → w}]

Simplifica

$$\begin{aligned}
 & -w^{10} (-750 + 750 u^9 + 1740 w - 1629 w^2 + 946 w^3 - \\
 & 417 w^4 + 164 w^5 - 50 w^6 + 1350 u^8 (-5 + 3 w) + 30 u^7 (900 - 1003 w + 300 w^2) + \\
 & 105 u^6 (-600 + 926 w - 505 w^2 + 100 w^3) + 3 u^5 (31500 - 59430 w + 43918 w^2 - 15375 w^3 + 2250 w^4) + \\
 & 5 u^4 (-18900 + 40530 w - 35679 w^2 + 16298 w^3 - 3975 w^4 + 450 w^5) + \\
 & u (6750 - 16230 w + 16170 w^2 - 8953 w^3 + 2970 w^4 - 569 w^5 + 10 w^6) - \\
 & 3 u^2 (9000 - 21630 w + 21805 w^2 - 11936 w^3 + 3688 w^4 - 560 w^5 + 30 w^6) + \\
 & u^3 (63000 - 145950 w + 141540 w^2 - 73666 w^3 + 21636 w^4 - 3525 w^5 + 300 w^6)
 \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo w^9 *)

BU411 = Expand[BU41/w⁹]

expande fatores

$$\begin{aligned} & -375 + 3750 u - 16875 u^2 + 45000 u^3 - 78750 u^4 + 94500 u^5 - 78750 u^6 + 45000 u^7 - 16875 u^8 + \\ & 3750 u^9 - 375 u^{10} + 645 w - 6960 u w + 32460 u^2 w - 86520 u^3 w + 145950 u^4 w - 162120 u^5 w + \\ & 118860 u^6 w - 55560 u^7 w + 15045 u^8 w - 1800 u^9 w - 402 w^2 + 4887 u w^2 - 24255 u^2 w^2 + 65415 u^3 w^2 - \\ & 106155 u^4 w^2 + 107037 u^5 w^2 - 65877 u^6 w^2 + 22725 u^7 w^2 - 3375 u^8 w^2 + 199 w^3 - 1892 u w^3 + \\ & 8953 u^2 w^3 - 23872 u^3 w^3 + 36833 u^4 w^3 - 32596 u^5 w^3 + 15375 u^6 w^3 - 3000 u^7 w^3 - 61 w^4 + 417 u w^4 - \\ & 1485 u^2 w^4 + 3688 u^3 w^4 - 5409 u^4 w^4 + 3975 u^5 w^4 - 1125 u^6 w^4 - 50 u w^6 + 5 u^2 w^6 - 30 u^3 w^6 + 75 u^4 w^6 \end{aligned}$$

BU422 = Expand[BU42/w⁹]

expande fatores

$$\begin{aligned} & 750 w - 6750 u w + 27000 u^2 w - 63000 u^3 w + 94500 u^4 w - 94500 u^5 w + 63000 u^6 w - \\ & 27000 u^7 w + 6750 u^8 w - 750 u^9 w - 1740 w^2 + 16230 u w^2 - 64890 u^2 w^2 + 145950 u^3 w^2 - \\ & 202650 u^4 w^2 + 178290 u^5 w^2 - 97230 u^6 w^2 + 30090 u^7 w^2 - 4050 u^8 w^2 + 1629 w^3 - \\ & 16170 u w^3 + 65415 u^2 w^3 - 141540 u^3 w^3 + 178395 u^4 w^3 - 131754 u^5 w^3 + 53025 u^6 w^3 - \\ & 9000 u^7 w^3 - 946 w^4 + 8953 u w^4 - 35808 u^2 w^4 + 73666 u^3 w^4 - 81490 u^4 w^4 + 46125 u^5 w^4 - \\ & 10500 u^6 w^4 + 417 w^5 - 2970 u w^5 + 11064 u^2 w^5 - 21636 u^3 w^5 + 19875 u^4 w^5 - 6750 u^5 w^5 - \\ & 164 w^6 + 569 u w^6 - 1680 u^2 w^6 + 3525 u^3 w^6 - 2250 u^4 w^6 + 50 w^7 - 10 u w^7 + 90 u^2 w^7 - 300 u^3 w^7 \end{aligned}$$

(*Pontos de equilíbrio*)

Solve[{BU411 == 0, BU422 == 0, w == 0}]

resolve

{{u -> 1, w -> 0}, {u -> 1, w -> 0}}

(* O ponto (1,0) estudaremos na direção x.*)

notação O

J[BU3111, BU3222, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Assim, outro blow up é necessário.*)

(*Primeiro, o blow up no campo vetorial (4.3) na direção x*)

BU51 = Simplify[BU3111 /. {u -> u, v -> u w}]

simplifica

$$\begin{aligned} & u^7 \left(-375 u^3 w^9 (-2 + u w) - 5 (1 + u w)^{12} (34 - 10 u w + u^2 w^2) + \right. \\ & 15 u^2 w^7 (1 + u w)^2 (154 - 193 u w + 43 u^2 w^2) - 3 u w^5 (1 + u w)^4 \\ & \left. (-868 + 2023 u w - 1100 u^2 w^2 + 134 u^3 w^3) - w (1 + u w)^{10} (-1216 + 957 u w + 87 u^2 w^2 + 164 u^3 w^3) - \right. \\ & w^2 (1 + u w)^8 (2094 - 4052 u w + 1200 u^2 w^2 - 468 u^3 w^3 + 61 u^4 w^4) + \\ & \left. w^3 (1 + u w)^6 (1044 - 5755 u w + 5057 u^2 w^2 - 1445 u^3 w^3 + 199 u^4 w^4) \right) \end{aligned}$$

BU52 = Simplify $\left[\frac{1}{u} \left((\text{BU3222} /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow uw\}) - w (\text{BU3111} /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow uw\}) \right)\right]$
[simplifica]

$$u^6 w \left(375 u^3 w^9 (-2 + uw) + 5 (1 + uw)^{12} (34 - 10 uw + u^2 w^2) - 15 u^2 w^7 (1 + uw)^2 (154 - 193 uw + 43 u^2 w^2) + 3 u w^5 (1 + uw)^4 (-868 + 2023 uw - 1100 u^2 w^2 + 134 u^3 w^3) + w (1 + uw)^{10} (-1216 + 957 uw + 87 u^2 w^2 + 164 u^3 w^3) + w^2 (1 + uw)^8 (2094 - 4052 uw + 1200 u^2 w^2 - 468 u^3 w^3 + 61 u^4 w^4) - w^3 (1 + uw)^6 (1044 - 5755 uw + 5057 u^2 w^2 - 1445 u^3 w^3 + 199 u^4 w^4) + (1 + uw) \left(375 u^3 w^9 - 15 u^2 w^7 (1 + uw)^2 (-77 + 43 uw) + 5 (1 + uw)^{12} (34 + 29 uw + 10 u^2 w^2) + 3 u w^5 (1 + uw)^4 (434 - 557 uw + 134 u^2 w^2) + w^2 (1 + uw)^8 (-698 + 315 uw - 51 u^2 w^2 + 61 u^3 w^3) - w^3 (1 + uw)^6 (-522 + 1780 uw - 499 u^2 w^2 + 199 u^3 w^3) \right) \right)$$

(*Cancelando o termino u^6 *)

BU511 = Expand $[\text{BU51}/u^6]$
[expande fatores]

$$-170 u + 1216 uw - 1990 u^2 w - 2094 u w^2 + 11203 u^2 w^2 - 10625 u^3 w^2 + 1044 u w^3 - 12700 u^2 w^3 + 45063 u^3 w^3 - 34160 u^4 w^3 + 509 u^2 w^4 - 27416 u^3 w^4 + 101821 u^4 w^4 - 73480 u^5 w^4 + 2604 u^2 w^5 - 13813 u^3 w^5 - 12940 u^4 w^5 + 134965 u^5 w^5 - 110990 u^6 w^5 + 4347 u^3 w^6 - 36548 u^4 w^6 + 50415 u^5 w^6 + 87642 u^6 w^6 - 119955 u^7 w^6 + 2310 u^3 w^7 - 5352 u^4 w^7 - 32056 u^5 w^7 + 111792 u^6 w^7 - 23754 u^7 w^7 - 92400 u^8 w^7 + 1725 u^4 w^8 - 13200 u^5 w^8 + 598 u^6 w^8 + 108780 u^7 w^8 - 111414 u^8 w^8 - 49170 u^9 w^8 + 750 u^4 w^9 - 2835 u^5 w^9 - 3480 u^6 w^9 + 16454 u^7 w^9 + 58848 u^8 w^9 - 119718 u^9 w^9 - 16610 u^{10} w^9 - 375 u^5 w^{10} - 1605 u^6 w^{10} + 4719 u^7 w^{10} + 6892 u^8 w^{10} + 18660 u^9 w^{10} - 75785 u^{10} w^{10} - 2695 u^{11} w^{10} + 645 u^7 w^{11} + 1692 u^8 w^{11} - 628 u^9 w^{11} + 4140 u^{10} w^{11} - 31949 u^{11} w^{11} + 160 u^{12} w^{11} - 402 u^9 w^{12} - 251 u^{10} w^{12} + 836 u^{11} w^{12} - 9207 u^{12} w^{12} + 100 u^{13} w^{12} + 199 u^{11} w^{13} - 20 u^{12} w^{13} - 1727 u^{13} w^{13} - 10 u^{14} w^{13} - 61 u^{13} w^{14} - 164 u^{14} w^{14} - 5 u^{15} w^{14}$$

BU522 = Expand $[\text{BU52}/u^6]$
[expande fatores]

$$340 w - 1216 w^2 + 4345 u w^2 + 1396 w^3 - 11203 u w^3 + 25820 u^2 w^3 - 522 w^4 + 6733 u w^4 - 45063 u^2 w^4 + 94740 u^3 w^4 + 1365 u w^5 + 5072 u^2 w^5 - 101821 u^3 w^5 + 240400 u^4 w^5 - 1302 u w^6 + 12814 u^2 w^6 - 34750 u^3 w^6 - 134965 u^4 w^6 + 447755 u^5 w^6 + 492 u^2 w^7 + 20732 u^3 w^7 - 113190 u^4 w^7 - 87642 u^5 w^7 + 634040 u^6 w^7 - 1155 u^2 w^8 + 10419 u^3 w^8 - 2888 u^4 w^8 - 162138 u^5 w^8 + 23754 u^6 w^8 + 697290 u^7 w^8 + 1095 u^3 w^9 + 11520 u^4 w^9 - 38650 u^5 w^9 - 129024 u^6 w^9 + 111414 u^7 w^9 + 602580 u^8 w^9 - 375 u^3 w^{10} + 4365 u^4 w^{10} - 2700 u^5 w^{10} - 39680 u^6 w^{10} - 56256 u^7 w^{10} + 119718 u^8 w^{10} + 410575 u^9 w^{10} + 750 u^4 w^{11} + 825 u^5 w^{11} - 7752 u^6 w^{11} - 15316 u^7 w^{11} - 10200 u^8 w^{11} + 75785 u^9 w^{11} + 219340 u^{10} w^{11} - 1290 u^6 w^{12} - 1353 u^7 w^{12} - 1838 u^8 w^{12} + 1285 u^9 w^{12} + 31949 u^{10} w^{12} + 90320 u^{11} w^{12} + 804 u^8 w^{13} - 643 u^9 w^{13} + 1216 u^{10} w^{13} + 9207 u^{11} w^{13} + 27720 u^{12} w^{13} - 398 u^{10} w^{14} + 518 u^{11} w^{14} + 1727 u^{12} w^{14} + 5965 u^{13} w^{14} + 122 u^{12} w^{15} + 164 u^{13} w^{15} + 800 u^{14} w^{15} + 50 u^{15} w^{16}$$

(*Pontos de equilibrio*)

NSolve $[\{\text{BU511} == 0, \text{BU522} == 0, u == 0\}, \text{Reals}]$

[solução numérica] [números]

$\{\{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.602007\}, \{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.\}\}$

J $[\text{BU511}, \text{BU522}, 0, 0]$

$\{\{-170, 0\}, \{0, 340\}\}$

(*Blow up no campo vetorial (4.3) na direção y*)

$$\text{BU61} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{w} \left((\text{BU3111} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}) - u (\text{BU3222} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}) \right)\right]$$

$$\begin{aligned} & u w^6 \left(-375 (-2 + w) w^3 - 5 u^6 (1 + w)^{12} (34 - 10 w + w^2) + 15 u w^2 (1 + w)^2 (154 - 193 w + 43 w^2) - \right. \\ & 3 u^2 w (1 + w)^4 (-868 + 2023 w - 1100 w^2 + 134 w^3) - u^5 (1 + w)^{10} (-1216 + 957 w + 87 w^2 + 164 w^3) - \\ & u^4 (1 + w)^8 (2094 - 4052 w + 1200 w^2 - 468 w^3 + 61 w^4) + \\ & u^3 (1 + w)^6 (1044 - 5755 w + 5057 w^2 - 1445 w^3 + 199 w^4) - \\ & (1 + w) (375 w^3 - 15 u w^2 (1 + w)^2 (-77 + 43 w) + \\ & 5 u^6 (1 + w)^{12} (34 + 29 w + 10 w^2) + 3 u^2 w (1 + w)^4 (434 - 557 w + 134 w^2) + \\ & \left. u^4 (1 + w)^8 (-698 + 315 w - 51 w^2 + 61 w^3) - u^3 (1 + w)^6 (-522 + 1780 w - 499 w^2 + 199 w^3) \right) \end{aligned}$$

$$\text{BU62} = \text{Simplify}[\text{BU3222} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}]$$

$$\begin{aligned} & w^7 (1 + w) (375 w^3 - 15 u w^2 (1 + w)^2 (-77 + 43 w) + \\ & 5 u^6 (1 + w)^{12} (34 + 29 w + 10 w^2) + 3 u^2 w (1 + w)^4 (434 - 557 w + 134 w^2) + \\ & u^4 (1 + w)^8 (-698 + 315 w - 51 w^2 + 61 w^3) - u^3 (1 + w)^6 (-522 + 1780 w - 499 w^2 + 199 w^3) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo w^6)

$$\text{BU611} = \text{Expand}[\text{BU61} / w^6]$$

$$\begin{aligned} & 522 u^4 - 1396 u^5 + 1216 u^6 - 340 u^7 + 1302 u^3 w - 1365 u^4 w - 6733 u^5 w + 11203 u^6 w - 4345 u^7 w + \\ & 1155 u^2 w^2 - 492 u^3 w^2 - 12814 u^4 w^2 - 5072 u^5 w^2 + 45063 u^6 w^2 - 25820 u^7 w^2 + 375 u w^3 - \\ & 1095 u^2 w^3 - 10419 u^3 w^3 - 20732 u^4 w^3 + 34750 u^5 w^3 + 101821 u^6 w^3 - 94740 u^7 w^3 - 750 u w^4 - \\ & 4365 u^2 w^4 - 11520 u^3 w^4 + 2888 u^4 w^4 + 113190 u^5 w^4 + 134965 u^6 w^4 - 240400 u^7 w^4 - \\ & 825 u^2 w^5 + 2700 u^3 w^5 + 38650 u^4 w^5 + 162138 u^5 w^5 + 87642 u^6 w^5 - 447755 u^7 w^5 + 1290 u^2 w^6 + \\ & 7752 u^3 w^6 + 39680 u^4 w^6 + 129024 u^5 w^6 - 23754 u^6 w^6 - 634040 u^7 w^6 + 1353 u^3 w^7 + \\ & 15316 u^4 w^7 + 56256 u^5 w^7 - 111414 u^6 w^7 - 697290 u^7 w^7 - 804 u^3 w^8 + 1838 u^4 w^8 + 10200 u^5 w^8 - \\ & 119718 u^6 w^8 - 602580 u^7 w^8 + 643 u^4 w^9 - 1285 u^5 w^9 - 75785 u^6 w^9 - 410575 u^7 w^9 + 398 u^4 w^{10} - \\ & 1216 u^5 w^{10} - 31949 u^6 w^{10} - 219340 u^7 w^{10} - 518 u^5 w^{11} - 9207 u^6 w^{11} - 90320 u^7 w^{11} - \\ & 122 u^5 w^{12} - 1727 u^6 w^{12} - 27720 u^7 w^{12} - 164 u^6 w^{13} - 5965 u^7 w^{13} - 800 u^7 w^{14} - 50 u^7 w^{15} \end{aligned}$$

$$\text{BU622} = \text{Expand}[\text{BU62} / w^6]$$

$$\begin{aligned} & 522 u^3 w - 698 u^4 w + 170 u^6 w + 1302 u^2 w^2 + 1874 u^3 w^2 - 5967 u^4 w^2 + 2355 u^6 w^2 + 1155 u w^3 + \\ & 4839 u^2 w^3 - 999 u^3 w^3 - 22344 u^4 w^3 + 15195 u^6 w^3 + 375 w^4 + 2820 u w^4 + 5067 u^2 w^4 - \\ & 15816 u^3 w^4 - 47690 u^4 w^4 + 60580 u^6 w^4 + 375 w^5 + 1530 u w^5 - 1680 u^2 w^5 - 34944 u^3 w^5 - \\ & 62775 u^4 w^5 + 166920 u^6 w^5 - 780 u w^6 - 6180 u^2 w^6 - 38052 u^3 w^6 - 50346 u^4 w^6 + \\ & 336765 u^6 w^6 - 645 u w^7 - 3033 u^2 w^7 - 23226 u^3 w^7 - 20244 u^4 w^7 + 514085 u^6 w^7 + 339 u^2 w^8 - \\ & 8424 u^3 w^8 + 2592 u^4 w^8 + 604890 u^6 w^8 + 402 u^2 w^9 - 2466 u^3 w^9 + 8460 u^4 w^9 + 553410 u^6 w^9 - \\ & 894 u^3 w^{10} + 5425 u^4 w^{10} + 393965 u^6 w^{10} - 199 u^3 w^{11} + 2052 u^4 w^{11} + 216645 u^6 w^{11} + \\ & 498 u^4 w^{12} + 90480 u^6 w^{12} + 61 u^4 w^{13} + 27820 u^6 w^{13} + 5955 u^6 w^{14} + 795 u^6 w^{15} + 50 u^6 w^{16} \end{aligned}$$

(* As expressões acima (BU611, BU622) correspondem ao campo vetorial (4.4). *)

(* Pontos de equilíbrio *)

$$\text{NSolve}[\{\text{BU611} == 0, \text{BU622} == 0, w == 0\}, \text{Reals}]$$

$$\begin{aligned} & \{\{u \rightarrow 1.66111, w \rightarrow 0.\}, \{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.\}, \\ & \{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.\}, \{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.\}, \{u \rightarrow 0., w \rightarrow 0.\}\} \end{aligned}$$

(* O campo vetorial (4.4) possui duas singularidade, a origem e o ponto (1.66,0).*)
 [notação O]

J[BU611, BU622, 1.66111, 0]

{{-1299.29, -5850.09}, {0., 649.646}}

Eigensystem[{{-1299.29, -5850.09}, {0, 649.646}}]

[autovalores e autovetores]

{{-1299.29, 649.646}, {{1., 0.}, {-0.948737, 0.316068}}}

J[BU611, BU622, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Assim, outro blow up é necessário*)

(*Primeiro, o blow up no campo vetorial (4.4) na direção x*)

BU71 = Simplify[BU611 /. {u → u, w → u w}]

[simplifica]

$$\begin{aligned} & -u^4 (5965 u^{16} w^{13} + 800 u^{17} w^{14} + 50 u^{18} w^{15} + 4 u^{15} w^{12} (6930 + 41 w) + u^{14} w^{11} (90320 + 1727 w) + \\ & u^{13} w^{10} (219340 + 9207 w + 122 w^2) + u^{12} w^9 (410575 + 31949 w + 518 w^2) + \\ & u^{11} w^8 (602580 + 75785 w + 1216 w^2) + u^8 w^5 (447755 + 23754 w - 56256 w^2 - 1838 w^3) + \\ & u^9 w^6 (634040 + 111414 w - 10200 w^2 - 643 w^3) + u^{10} w^7 (697290 + 119718 w + 1285 w^2 - 398 w^3) - \\ & 3 (174 + 434 w + 385 w^2 + 125 w^3) + 2 u^7 w^4 (120200 - 43821 w - 64512 w^2 - 7658 w^3 + 402 w^4) + \\ & u (1396 + 1365 w + 492 w^2 + 1095 w^3 + 750 w^4) - \\ & u^6 w^3 (-94740 + 134965 w + 162138 w^2 + 39680 w^3 + 1353 w^4) + \\ & u^2 (-1216 + 6733 w + 12814 w^2 + 10419 w^3 + 4365 w^4) - \\ & u^5 w^2 (-25820 + 101821 w + 113190 w^2 + 38650 w^3 + 7752 w^4) + \\ & u^3 (340 - 11203 w + 5072 w^2 + 20732 w^3 + 11520 w^4 + 825 w^5) - \\ & u^4 w (-4345 + 45063 w + 34750 w^2 + 2888 w^3 + 2700 w^4 + 1290 w^5) \end{aligned}$$

BU72 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((BU622 /. {u → u, w → u w}) - w (BU611 /. {u → u, w → u w}))]

[simplifica]

$$\begin{aligned} & u^4 w (698 + 3239 w + 5331 w^2 + 3915 w^3 + 1125 w^4 + 11920 u^{15} w^{13} + \\ & 1595 u^{16} w^{14} + 100 u^{17} w^{15} + 4 u^{14} w^{12} (13885 + 41 w) + u^{13} w^{11} (180800 + 1727 w) + \\ & u^{12} w^{10} (435985 + 9207 w + 183 w^2) + u^{11} w^9 (804540 + 31949 w + 1016 w^2) + \\ & u^{10} w^8 (1155990 + 75785 w + 3268 w^2) + 2 u^7 w^5 (392260 + 11877 w - 26832 w^2 - 2152 w^3) + \\ & u^8 w^6 (1148125 + 111414 w - 1740 w^2 - 1537 w^3) + u^9 w^7 (1302180 + 119718 w + 6710 w^2 - 597 w^3) + \\ & 2 u^6 w^4 (203660 - 43821 w - 74634 w^2 - 11870 w^3 + 603 w^4) - \\ & u^5 w^3 (-155320 + 134965 w + 212484 w^2 + 62906 w^3 + 1014 w^4) + \\ & u (-1216 + 766 w + 11815 w^2 + 15486 w^3 + 5895 w^4) - \\ & u^4 w^2 (-41015 + 101821 w + 175965 w^2 + 76702 w^3 + 10785 w^4) + \\ & u^2 (510 - 11203 w - 17272 w^2 + 4916 w^3 + 9840 w^4 + 45 w^5) - \\ & u^3 w (-6700 + 45063 w + 82440 w^2 + 37832 w^3 + 8880 w^4 + 1935 w^5) \end{aligned}$$

(* Cancelando o termo u^4 *)

BU711 = Expand [BU71 / u⁴]
[\[expande fatores\]](#)

$$\begin{aligned}
 &522 - 1396 u + 1216 u^2 - 340 u^3 + 1302 w - 1365 u w - 6733 u^2 w + 11203 u^3 w - 4345 u^4 w + \\
 &1155 w^2 - 492 u w^2 - 12814 u^2 w^2 - 5072 u^3 w^2 + 45063 u^4 w^2 - 25820 u^5 w^2 + 375 w^3 - 1095 u w^3 - \\
 &10419 u^2 w^3 - 20732 u^3 w^3 + 34750 u^4 w^3 + 101821 u^5 w^3 - 94740 u^6 w^3 - 750 u w^4 - 4365 u^2 w^4 - \\
 &11520 u^3 w^4 + 2888 u^4 w^4 + 113190 u^5 w^4 + 134965 u^6 w^4 - 240400 u^7 w^4 - 825 u^3 w^5 + 2700 u^4 w^5 + \\
 &38650 u^5 w^5 + 162138 u^6 w^5 + 87642 u^7 w^5 - 447755 u^8 w^5 + 1290 u^4 w^6 + 7752 u^5 w^6 + 39680 u^6 w^6 + \\
 &129024 u^7 w^6 - 23754 u^8 w^6 - 634040 u^9 w^6 + 1353 u^6 w^7 + 15316 u^7 w^7 + 56256 u^8 w^7 - \\
 &111414 u^9 w^7 - 697290 u^{10} w^7 - 804 u^7 w^8 + 1838 u^8 w^8 + 10200 u^9 w^8 - 119718 u^{10} w^8 - \\
 &602580 u^{11} w^8 + 643 u^9 w^9 - 1285 u^{10} w^9 - 75785 u^{11} w^9 - 410575 u^{12} w^9 + 398 u^{10} w^{10} - \\
 &1216 u^{11} w^{10} - 31949 u^{12} w^{10} - 219340 u^{13} w^{10} - 518 u^{12} w^{11} - 9207 u^{13} w^{11} - 90320 u^{14} w^{11} - \\
 &122 u^{13} w^{12} - 1727 u^{14} w^{12} - 27720 u^{15} w^{12} - 164 u^{15} w^{13} - 5965 u^{16} w^{13} - 800 u^{17} w^{14} - 50 u^{18} w^{15}
 \end{aligned}$$

BU722 = Expand [BU72 / u⁴]
[\[expande fatores\]](#)

$$\begin{aligned}
 &698 w - 1216 u w + 510 u^2 w + 3239 w^2 + 766 u w^2 - 11203 u^2 w^2 + 6700 u^3 w^2 + 5331 w^3 + 11815 u w^3 - \\
 &17272 u^2 w^3 - 45063 u^3 w^3 + 41015 u^4 w^3 + 3915 w^4 + 15486 u w^4 + 4916 u^2 w^4 - 82440 u^3 w^4 - \\
 &101821 u^4 w^4 + 155320 u^5 w^4 + 1125 w^5 + 5895 u w^5 + 9840 u^2 w^5 - 37832 u^3 w^5 - 175965 u^4 w^5 - \\
 &134965 u^5 w^5 + 407320 u^6 w^5 + 45 u^2 w^6 - 8880 u^3 w^6 - 76702 u^4 w^6 - 212484 u^5 w^6 - \\
 &87642 u^6 w^6 + 784520 u^7 w^6 - 1935 u^3 w^7 - 10785 u^4 w^7 - 62906 u^5 w^7 - 149268 u^6 w^7 + \\
 &23754 u^7 w^7 + 1148125 u^8 w^7 - 1014 u^5 w^8 - 23740 u^6 w^8 - 53664 u^7 w^8 + 111414 u^8 w^8 + \\
 &1302180 u^9 w^8 + 1206 u^6 w^9 - 4304 u^7 w^9 - 1740 u^8 w^9 + 119718 u^9 w^9 + 1155990 u^{10} w^9 - \\
 &1537 u^8 w^{10} + 6710 u^9 w^{10} + 75785 u^{10} w^{10} + 804540 u^{11} w^{10} - 597 u^9 w^{11} + 3268 u^{10} w^{11} + \\
 &31949 u^{11} w^{11} + 435985 u^{12} w^{11} + 1016 u^{11} w^{12} + 9207 u^{12} w^{12} + 180800 u^{13} w^{12} + 183 u^{12} w^{13} + \\
 &1727 u^{13} w^{13} + 55540 u^{14} w^{13} + 164 u^{14} w^{14} + 11920 u^{15} w^{14} + 1595 u^{16} w^{15} + 100 u^{17} w^{16}
 \end{aligned}$$

(* As expressões acima (BU711, BU722) correspondem ao campo vetorial (4.5). *)

(*Calculando os pontos de equilíbrio*)

Solve[{BU711 == 0, BU722 == 0, u == 0}]

[\[resolve\]](#)

{{u → 0, w → -1}}

(* Uma singularidade no ponto (0, -1). *)

J[BU711, BU722, 0, -1]

{{{-178, 117}}, {{-242, 178}}}

N[Eigensystem[{{-178, 117}}, {-242, 178}]]

[\[autovalores e autovetores\]](#)

{{{-58.0517, 58.0517}}, {{0.97542, 1.}}, {{0.495654, 1.}}}

(* Singularidade hiperbólica do tipo sela. *)

(*Blow up no campo vetorial (4.4) na direção y*)

BU81 = Simplify[$\frac{1}{w} ((BU611 /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}) - u (BU622 /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}))$]
[\[simplifica\]](#)

$$\begin{aligned}
 &-u w^4 (1125 - 45 u (1 + w)^2 (-87 + 43 w) + \\
 &3 u^2 (1 + w)^4 (1777 - 1946 w + 402 w^2) + 5 u^6 w^2 (1 + w)^{12} (102 + 116 w + 79 w^2 + 20 w^3) + \\
 &u^5 w (1 + w)^{10} (-1216 + 957 w + 87 w^2 + 164 w^3) - u^3 (1 + w)^6 (-3239 + 7619 w - 2045 w^2 + 597 w^3) + \\
 &u^4 (1 + w)^8 (698 - 4818 w + 1728 w^2 - 448 w^3 + 183 w^4)
 \end{aligned}$$

(*Campo Vetorial (4.6) na carta U2*)

$$\text{AU1} = \text{Expand}\left[\text{v}^d \left(\left(\text{P} / . \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) - u \left(\text{Q} / . \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) \right) \right]$$

|expande fatores

$$\begin{aligned} &1875 u^{15} - 17250 u^{14} v^2 + 9900 u^{13} v^3 + 70875 u^{13} v^4 - 75225 u^{12} v^5 + 21375 u^{11} v^6 - 171000 u^{12} v^6 + \\ &250020 u^{11} v^7 - 128775 u^{10} v^8 + 267750 u^{11} v^8 + 24000 u^9 v^9 - 475440 u^{10} v^9 + 329385 u^9 v^{10} - \\ &283500 u^{10} v^{10} - 107625 u^8 v^{11} + 567420 u^9 v^{11} + 14625 u^7 v^{12} - 463827 u^8 v^{12} + 204750 u^9 v^{12} + \\ &195576 u^7 v^{13} - 437850 u^8 v^{13} - 43725 u^6 v^{14} + 389235 u^7 v^{14} - 99000 u^8 v^{14} + 4500 u^5 v^{15} - \\ &184165 u^6 v^{15} + 216300 u^7 v^{15} + 48681 u^5 v^{16} - 196245 u^6 v^{16} + 30375 u^7 v^{16} - 7050 u^4 v^{17} + \\ &95488 u^5 v^{17} - 64920 u^6 v^{17} + 525 u^3 v^{18} - 25816 u^4 v^{18} + 56595 u^5 v^{18} - 5250 u^6 v^{18} + 3360 u^3 v^{19} - \\ &26859 u^4 v^{19} + 10440 u^5 v^{19} - 150 u^2 v^{20} + 7425 u^3 v^{20} - 8145 u^4 v^{20} + 375 u^5 v^{20} - 1138 u^2 v^{21} + \\ &3784 u^3 v^{21} - 645 u^4 v^{21} + 15 u v^{22} - 1251 u^2 v^{22} + 402 u^3 v^{22} + 328 u v^{23} - 199 u^2 v^{23} - 50 v^{24} + 61 u v^{24} \end{aligned}$$

$$\text{AU2} = \text{Expand}\left[-v^{d+1} \left(\text{Q} / . \left\{ x \rightarrow \frac{u}{v}, y \rightarrow \frac{1}{v} \right\} \right) \right]$$

|expande fatores

$$\begin{aligned} &1125 u^{14} v - 10500 u^{13} v^3 + 5850 u^{12} v^4 + 43875 u^{12} v^5 - 45135 u^{11} v^6 + 12375 u^{10} v^7 - 108000 u^{11} v^7 + \\ &152790 u^{10} v^8 - 75750 u^9 v^9 + 173250 u^{10} v^9 + 13500 u^8 v^{10} - 297150 u^9 v^{10} + 197631 u^8 v^{11} - \\ &189000 u^9 v^{11} - 61500 u^7 v^{12} + 364770 u^8 v^{12} + 7875 u^6 v^{13} - 285432 u^7 v^{13} + 141750 u^8 v^{13} + \\ &114086 u^6 v^{14} - 291900 u^7 v^{14} - 23850 u^5 v^{15} + 247695 u^6 v^{15} - 72000 u^7 v^{15} + 2250 u^4 v^{16} - \\ &110499 u^5 v^{16} + 151410 u^6 v^{16} + 27045 u^4 v^{17} - 130830 u^5 v^{17} + 23625 u^6 v^{17} - 3525 u^3 v^{18} + \\ &59680 u^4 v^{18} - 48690 u^5 v^{18} + 225 u^2 v^{19} - 14752 u^3 v^{19} + 40425 u^4 v^{19} - 4500 u^5 v^{19} + \\ &1680 u^2 v^{20} - 17906 u^3 v^{20} + 8700 u^4 v^{20} - 60 u v^{21} + 4455 u^2 v^{21} - 6516 u^3 v^{21} + 375 u^4 v^{21} - \\ &569 u v^{22} + 2838 u^2 v^{22} - 645 u^3 v^{22} + 5 v^{23} - 834 u v^{23} + 402 u^2 v^{23} + 164 v^{24} - 199 u v^{24} + 61 v^{25} \end{aligned}$$

(* As expressões acima (AU1,AU2) correspondem ao campo vetorial (4.6). *)

J[AU1, AU2, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Blow up é necessário*)

(* Primeiro, o blow up no campo vetorial (4.6) na direção x. *)

$$\text{AU11} = \text{Simplify}\left[\text{AU1} / . \left\{ u \rightarrow u, v \rightarrow u w \right\} \right]$$

|simplifica

$$\begin{aligned} &u^{15} \left(1875 + 150 u w^2 (-115 + 66 w) + 75 u^2 w^4 (945 - 1003 w + 285 w^2) + \right. \\ &15 u^3 w^6 (-11400 + 16668 w - 8585 w^2 + 1600 w^3) + u^{10} w^{20} (375 - 645 w + 402 w^2 - 199 w^3 + 61 w^4) + \\ &15 u^4 w^8 (17850 - 31696 w + 21959 w^2 - 7175 w^3 + 975 w^4) + \\ &3 u^5 w^{10} (-94500 + 189140 w - 154609 w^2 + 65192 w^3 - 14575 w^4 + 1500 w^5) + \\ &u^7 w^{14} (-99000 + 216300 w - 196245 w^2 + 95488 w^3 - 25816 w^4 + 3360 w^5 - 150 w^6) + \\ &u^9 w^{18} (-5250 + 10440 w - 8145 w^2 + 3784 w^3 - 1251 w^4 + 328 w^5 - 50 w^6) + \\ &u^8 w^{16} (30375 - 64920 w + 56595 w^2 - 26859 w^3 + 7425 w^4 - 1138 w^5 + 15 w^6) + \\ &\left. u^6 w^{12} (204750 - 437850 w + 389235 w^2 - 184165 w^3 + 48681 w^4 - 7050 w^5 + 525 w^6) \right) \end{aligned}$$

$$\text{AU22} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{u} \left((\text{AU2} /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow uw\}) - w (\text{AU1} /. \{u \rightarrow u, v \rightarrow uw\}) \right)\right]$$

[simplifica]

$$\begin{aligned} & u^{14} w \left(-750 - 1350 u w^2 (-5 + 3 w) - \right. \\ & 30 u^2 w^4 (900 - 1003 w + 300 w^2) - 105 u^3 w^6 (-600 + 926 w - 505 w^2 + 100 w^3) - \\ & 3 u^4 w^8 (31500 - 59430 w + 43918 w^2 - 15375 w^3 + 2250 w^4) - \\ & 5 u^5 w^{10} (-18900 + 40530 w - 35679 w^2 + 16298 w^3 - 3975 w^4 + 450 w^5) + \\ & u^6 w^{12} (-63000 + 145950 w - 141540 w^2 + 73666 w^3 - 21636 w^4 + 3525 w^5 - 300 w^6) + \\ & u^8 w^{16} (-6750 + 16230 w - 16170 w^2 + 8953 w^3 - 2970 w^4 + 569 w^5 - 10 w^6) + \\ & \left. 3 u^7 w^{14} (9000 - 21630 w + 21805 w^2 - 11936 w^3 + 3688 w^4 - 560 w^5 + 30 w^6) + \right. \\ & \left. u^9 w^{18} (750 - 1740 w + 1629 w^2 - 946 w^3 + 417 w^4 - 164 w^5 + 50 w^6) \right) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo $u^{14}w$ *)

$$\text{AU111} = \text{Expand}\left[\text{AU11} / u^{14}\right]$$

[expande fatores]

$$\begin{aligned} & 1875 u - 17250 u^2 w^2 + 9900 u^2 w^3 + 70875 u^3 w^4 - 75225 u^3 w^5 + 21375 u^3 w^6 - 171000 u^4 w^6 + \\ & 250020 u^4 w^7 - 128775 u^4 w^8 + 267750 u^5 w^8 + 24000 u^4 w^9 - 475440 u^5 w^9 + 329385 u^5 w^{10} - \\ & 283500 u^6 w^{10} - 107625 u^5 w^{11} + 567420 u^6 w^{11} + 14625 u^5 w^{12} - 463827 u^6 w^{12} + \\ & 204750 u^7 w^{12} + 195576 u^6 w^{13} - 437850 u^7 w^{13} - 43725 u^6 w^{14} + 389235 u^7 w^{14} - \\ & 99000 u^8 w^{14} + 4500 u^6 w^{15} - 184165 u^7 w^{15} + 216300 u^8 w^{15} + 48681 u^7 w^{16} - 196245 u^8 w^{16} + \\ & 30375 u^9 w^{16} - 7050 u^7 w^{17} + 95488 u^8 w^{17} - 64920 u^9 w^{17} + 525 u^7 w^{18} - 25816 u^8 w^{18} + \\ & 56595 u^9 w^{18} - 5250 u^{10} w^{18} + 3360 u^8 w^{19} - 26859 u^9 w^{19} + 10440 u^{10} w^{19} - 150 u^8 w^{20} + \\ & 7425 u^9 w^{20} - 8145 u^{10} w^{20} + 375 u^{11} w^{20} - 1138 u^9 w^{21} + 3784 u^{10} w^{21} - 645 u^{11} w^{21} + \\ & 15 u^9 w^{22} - 1251 u^{10} w^{22} + 402 u^{11} w^{22} + 328 u^{10} w^{23} - 199 u^{11} w^{23} - 50 u^{10} w^{24} + 61 u^{11} w^{24} \end{aligned}$$

$$\text{AU222} = \text{Expand}\left[\text{AU22} / u^{14}\right]$$

[expande fatores]

$$\begin{aligned} & -750 w + 6750 u w^3 - 4050 u w^4 - 27000 u^2 w^5 + 30090 u^2 w^6 - 9000 u^2 w^7 + 63000 u^3 w^7 - \\ & 97230 u^3 w^8 + 53025 u^3 w^9 - 94500 u^4 w^9 - 10500 u^3 w^{10} + 178290 u^4 w^{10} - 131754 u^4 w^{11} + \\ & 94500 u^5 w^{11} + 46125 u^4 w^{12} - 202650 u^5 w^{12} - 6750 u^4 w^{13} + 178395 u^5 w^{13} - 63000 u^6 w^{13} - \\ & 81490 u^5 w^{14} + 145950 u^6 w^{14} + 19875 u^5 w^{15} - 141540 u^6 w^{15} + 27000 u^7 w^{15} - \\ & 2250 u^5 w^{16} + 73666 u^6 w^{16} - 64890 u^7 w^{16} - 21636 u^6 w^{17} + 65415 u^7 w^{17} - 6750 u^8 w^{17} + \\ & 3525 u^6 w^{18} - 35808 u^7 w^{18} + 16230 u^8 w^{18} - 300 u^6 w^{19} + 11064 u^7 w^{19} - 16170 u^8 w^{19} + \\ & 750 u^9 w^{19} - 1680 u^7 w^{20} + 8953 u^8 w^{20} - 1740 u^9 w^{20} + 90 u^7 w^{21} - 2970 u^8 w^{21} + \\ & 1629 u^9 w^{21} + 569 u^8 w^{22} - 946 u^9 w^{22} - 10 u^8 w^{23} + 417 u^9 w^{23} - 164 u^9 w^{24} + 50 u^9 w^{25} \end{aligned}$$

(*Pontos de equilibrio*)

$$\text{Solve}\left[\{\text{AU111} == 0, \text{AU222} == 0, u == 0\}\right]$$

[resolve]

$$\{\{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}\}$$

$$\text{J}\left[\text{AU111}, \text{AU222}, 0, 0\right]$$

$$\{\{1875, 0\}, \{0, -750\}\}$$

(*Blow up no campo vetorial (4.6) na direção y*)

$$\text{AU31} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{w} \left((\text{AU1} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}) - u (\text{AU2} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}) \right)\right]$$

$$\begin{aligned} & -w^{14} \left(-750 u^{15} + 6750 u^{14} w + 50 w^9 - 1350 u^{13} w (3 + 20 w) - 2 u w^8 (5 + 82 w) + \right. \\ & 30 u^{12} w^2 (1003 + 2100 w) + u^2 w^7 (90 + 569 w + 417 w^2) + 105 u^{10} w^3 (505 + 1698 w + 900 w^2) - \\ & 30 u^{11} w^2 (300 + 3241 w + 3150 w^2) - 2 u^3 w^6 (150 + 840 w + 1485 w^2 + 473 w^3) - \\ & 42 u^9 w^3 (250 + 3137 w + 4825 w^2 + 1500 w^3) + u^4 w^6 (3525 + 11064 w + 8953 w^2 + 1629 w^3) + \\ & 15 u^8 w^4 (3075 + 11893 w + 9730 w^2 + 1800 w^3) - 6 u^5 w^5 (375 + 3606 w + 5968 w^2 + 2695 w^3 + 290 w^4) - \\ & \left. 10 u^7 w^4 (675 + 8149 w + 14154 w^2 + 6489 w^3 + 675 w^4) + \right. \\ & \left. u^6 w^5 (19875 + 73666 w + 65415 w^2 + 16230 w^3 + 750 w^4) \right) \end{aligned}$$

$$\text{AU32} = \text{Simplify}[\text{AU2} /. \{u \rightarrow uw, v \rightarrow w\}]$$

$$\begin{aligned} & w^{15} \left(1125 u^{14} - 10500 u^{13} w + 2925 u^{12} w (2 + 15 w) - 45 u^{11} w^2 (1003 + 2400 w) + \right. \\ & w^8 (5 + 164 w + 61 w^2) + 165 u^{10} w^2 (75 + 926 w + 1050 w^2) - 150 u^9 w^3 (505 + 1981 w + 1260 w^2) - \\ & u w^7 (60 + 569 w + 834 w^2 + 199 w^3) - 12 u^2 w^4 (5125 + 23786 w + 24325 w^2 + 6000 w^3) + \\ & 9 u^8 w^3 (1500 + 21959 w + 40530 w^2 + 15750 w^3) + 3 u^2 w^6 (75 + 560 w + 1485 w^2 + 946 w^3 + 134 w^4) - \\ & u^3 w^6 (3525 + 14752 w + 17906 w^2 + 6516 w^3 + 645 w^4) - \\ & 3 u^5 w^5 (7950 + 36833 w + 43610 w^2 + 16230 w^3 + 1500 w^4) + \\ & 7 u^6 w^4 (1125 + 16298 w + 35385 w^2 + 21630 w^3 + 3375 w^4) + \\ & \left. 5 u^4 w^5 (450 + 5409 w + 11936 w^2 + 8085 w^3 + 1740 w^4 + 75 w^5) \right) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo w^{14} *)

$$\text{AU311} = \text{Expand}[\text{AU31} / w^{14}]$$

$$\begin{aligned} & 750 u^{15} + 4050 u^{13} w - 6750 u^{14} w + 9000 u^{11} w^2 - 30090 u^{12} w^2 + 27000 u^{13} w^2 + 10500 u^9 w^3 - \\ & 53025 u^{10} w^3 + 97230 u^{11} w^3 - 63000 u^{12} w^3 + 6750 u^7 w^4 - 46125 u^8 w^4 + 131754 u^9 w^4 - \\ & 178290 u^{10} w^4 + 94500 u^{11} w^4 + 2250 u^5 w^5 - 19875 u^6 w^5 + 81490 u^7 w^5 - 178395 u^8 w^5 + \\ & 202650 u^9 w^5 - 94500 u^{10} w^5 + 300 u^3 w^6 - 3525 u^4 w^6 + 21636 u^5 w^6 - 73666 u^6 w^6 + 141540 u^7 w^6 - \\ & 145950 u^8 w^6 + 63000 u^9 w^6 - 90 u^2 w^7 + 1680 u^3 w^7 - 11064 u^4 w^7 + 35808 u^5 w^7 - 65415 u^6 w^7 + \\ & 64890 u^7 w^7 - 27000 u^8 w^7 + 10 u w^8 - 569 u^2 w^8 + 2970 u^3 w^8 - 8953 u^4 w^8 + 16170 u^5 w^8 - \\ & 16230 u^6 w^8 + 6750 u^7 w^8 - 50 w^9 + 164 u w^9 - 417 u^2 w^9 + 946 u^3 w^9 - 1629 u^4 w^9 + 1740 u^5 w^9 - 750 u^6 w^9 \end{aligned}$$

$$\text{AU322} = \text{Expand}[\text{AU32} / w^{14}]$$

$$\begin{aligned} & 1125 u^{14} w + 5850 u^{12} w^2 - 10500 u^{13} w^2 + 12375 u^{10} w^3 - 45135 u^{11} w^3 + 43875 u^{12} w^3 + \\ & 13500 u^8 w^4 - 75750 u^9 w^4 + 152790 u^{10} w^4 - 108000 u^{11} w^4 + 7875 u^6 w^5 - 61500 u^7 w^5 + \\ & 197631 u^8 w^5 - 297150 u^9 w^5 + 173250 u^{10} w^5 + 2250 u^4 w^6 - 23850 u^5 w^6 + 114086 u^6 w^6 - \\ & 285432 u^7 w^6 + 364770 u^8 w^6 - 189000 u^9 w^6 + 225 u^2 w^7 - 3525 u^3 w^7 + 27045 u^4 w^7 - \\ & 110499 u^5 w^7 + 247695 u^6 w^7 - 291900 u^7 w^7 + 141750 u^8 w^7 - 60 u w^8 + 1680 u^2 w^8 - 14752 u^3 w^8 + \\ & 59680 u^4 w^8 - 130830 u^5 w^8 + 151410 u^6 w^8 - 72000 u^7 w^8 + 5 w^9 - 569 u w^9 + 4455 u^2 w^9 - \\ & 17906 u^3 w^9 + 40425 u^4 w^9 - 48690 u^5 w^9 + 23625 u^6 w^9 + 164 w^{10} - 834 u w^{10} + 2838 u^2 w^{10} - \\ & 6516 u^3 w^{10} + 8700 u^4 w^{10} - 4500 u^5 w^{10} + 61 w^{11} - 199 u w^{11} + 402 u^2 w^{11} - 645 u^3 w^{11} + 375 u^4 w^{11} \end{aligned}$$

(* As expressões acima (AU311,AU322) correspondem ao campo vetorial (4.7). *)

(*Pontos de equilíbrio*)

$$\text{Solve}[\{\text{AU311} == 0, \text{AU322} == 0, w == 0\}]$$

|resolve

$$\{\{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}\}$$

J[AU311, AU322, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Blow up do campo vetorial (4.7) na direção x *)

AU41 = Simplify[AU311 /. {u → u, w → u w}]

|simplifica

$$u^9 \left(-750 u^6 (-1+w)^9 + 30 u^5 (-1+w)^7 w (-135+58 w) - 3 u^4 (-1+w)^5 w^2 (3000 - 2675 w + 543 w^2) + 10 w^6 (30 - 9 w + w^2 - 5 w^3) - 3 u^2 (-1+w)^2 w^4 (-2250 + 2125 w - 712 w^2 + 139 w^3) + u^3 (-1+w)^3 w^3 (-10500 + 14625 w - 6115 w^2 + 946 w^3) + u w^5 (2250 - 3525 w + 1680 w^2 - 569 w^3 + 164 w^4) \right)$$

AU42 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((AU322 /. {u → u, w → u w}) - w (AU311 /. {u → u, w → u w}))]

|simplifica

$$u^8 (-1+w) w \left(375 u^6 (-1+w)^9 - 15 u^5 (-1+w)^7 w (-120 + 43 w) + 5 w^6 (15 + 9 w + 10 w^2) + 3 u^4 (-1+w)^5 w^2 (1125 - 825 w + 134 w^2) + u^2 (-1+w)^2 w^4 (-1125 + 600 w - 234 w^2 + 61 w^3) - u^3 (-1+w)^3 w^3 (-3000 + 3375 w - 1096 w^2 + 199 w^3) \right)$$

(*Cancelando o termo u⁸*)

AU411 = Expand[AU41 / u⁸]

|expande fatores

$$750 u^7 + 4050 u^6 w - 6750 u^7 w + 9000 u^5 w^2 - 30090 u^6 w^2 + 27000 u^7 w^2 + 10500 u^4 w^3 - 53025 u^5 w^3 + 97230 u^6 w^3 - 63000 u^7 w^3 + 6750 u^3 w^4 - 46125 u^4 w^4 + 131754 u^5 w^4 - 178290 u^6 w^4 + 94500 u^7 w^4 + 2250 u^2 w^5 - 19875 u^3 w^5 + 81490 u^4 w^5 - 178395 u^5 w^5 + 202650 u^6 w^5 - 94500 u^7 w^5 + 300 u w^6 - 3525 u^2 w^6 + 21636 u^3 w^6 - 73666 u^4 w^6 + 141540 u^5 w^6 - 145950 u^6 w^6 + 63000 u^7 w^6 - 90 u w^7 + 1680 u^2 w^7 - 11064 u^3 w^7 + 35808 u^4 w^7 - 65415 u^5 w^7 + 64890 u^6 w^7 - 27000 u^7 w^7 + 10 u w^8 - 569 u^2 w^8 + 2970 u^3 w^8 - 8953 u^4 w^8 + 16170 u^5 w^8 - 16230 u^6 w^8 + 6750 u^7 w^8 - 50 u w^9 + 164 u^2 w^9 - 417 u^3 w^9 + 946 u^4 w^9 - 1629 u^5 w^9 + 1740 u^6 w^9 - 750 u^7 w^9$$

AU422 = Expand[AU42 / u⁸]

|expande fatores

$$375 u^6 w + 1800 u^5 w^2 - 3750 u^6 w^2 + 3375 u^4 w^3 - 15045 u^5 w^3 + 16875 u^6 w^3 + 3000 u^3 w^4 - 22725 u^4 w^4 + 55560 u^5 w^4 - 45000 u^6 w^4 + 1125 u^2 w^5 - 15375 u^3 w^5 + 65877 u^4 w^5 - 118860 u^5 w^5 + 78750 u^6 w^5 - 3975 u^2 w^6 + 32596 u^3 w^6 - 107037 u^4 w^6 + 162120 u^5 w^6 - 94500 u^6 w^6 - 75 w^7 + 5409 u^2 w^7 - 36833 u^3 w^7 + 106155 u^4 w^7 - 145950 u^5 w^7 + 78750 u^6 w^7 + 30 w^8 - 3688 u^2 w^8 + 23872 u^3 w^8 - 65415 u^4 w^8 + 86520 u^5 w^8 - 45000 u^6 w^8 - 5 w^9 + 1485 u^2 w^9 - 8953 u^3 w^9 + 24255 u^4 w^9 - 32460 u^5 w^9 + 16875 u^6 w^9 + 50 w^{10} - 417 u^2 w^{10} + 1892 u^3 w^{10} - 4887 u^4 w^{10} + 6960 u^5 w^{10} - 3750 u^6 w^{10} + 61 u^2 w^{11} - 199 u^3 w^{11} + 402 u^4 w^{11} - 645 u^5 w^{11} + 375 u^6 w^{11}$$

(* As expressões acima (AU411,AU422) correspondem ao campo vetorial (4.8). *)

NSolve[{AU411 == 0, AU422 == 0, u == 0}, Reals]

|solução numérica

|números

{{u → 0., w → 1.}, {u → 0., w → 0.}, {u → 0., w → 0.}, {u → 0., w → 0.},
{u → 0., w → 0.}, {u → 0., w → 0.}, {u → 0., w → 0.}, {u → 0., w → 0.}}

(* Duas singularidades (0,0) e (0,1). *)

J[AU411, AU422, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

J[AU411, AU422, 0, 1]

{{170, 0}, {0, 170}}

(*Blow up do campo vetorial (4.7) na direção y*)

AU51 = Simplify[$\frac{1}{w}$ ((AU311 /. {u → u w, w → w}) - u (AU322 /. {u → u w, w → w}))]

$$\begin{aligned} & - (-1 + u) w^8 (-50 - 3375 u^{13} w^6 + 375 u^{14} w^6 + 900 u^{12} w^5 (2 + 15 w) - \\ & 15 u^{11} w^5 (883 + 2100 w) - u (45 + 61 w^2) - u^3 w^2 (1129 + 1693 w + 402 w^2) - \\ & 45 u^9 w^4 (430 + 1701 w + 1050 w^2) + 15 u^{10} w^4 (225 + 2821 w + 3150 w^2) + \\ & u^2 (-75 + 356 w^2 + 199 w^3) + 3 u^4 w^2 (853 + 2420 w + 1495 w^2 + 215 w^3) - \\ & 15 u^7 w^3 (825 + 4034 w + 4025 w^2 + 900 w^3) + 3 u^8 w^3 (1000 + 15 509 w + 28 525 w^2 + 10 500 w^3) - \\ & u^5 w^2 (2850 + 16 612 w + 19 770 w^2 + 6315 w^3 + 375 w^4) + \\ & u^6 w^2 (1125 + 20 221 w + 45 645 w^2 + 26 145 w^3 + 3375 w^4) \end{aligned}$$

AU52 = Simplify[AU322 /. {u → u w, w → w}]

$$\begin{aligned} & w^9 (5 + 164 w + 61 w^2 - 10 500 u^{13} w^6 + 1125 u^{14} w^6 + \\ & 2925 u^{12} w^5 (2 + 15 w) - 45 u^{11} w^5 (1003 + 2400 w) + 165 u^{10} w^4 (75 + 926 w + 1050 w^2) - \\ & 150 u^9 w^4 (505 + 1981 w + 1260 w^2) - u (60 + 569 w + 834 w^2 + 199 w^3) - \\ & 12 u^7 w^3 (5125 + 23 786 w + 24 325 w^2 + 6000 w^3) + 9 u^8 w^3 (1500 + 21 959 w + 40 530 w^2 + 15 750 w^3) + \\ & 3 u^2 (75 + 560 w + 1485 w^2 + 946 w^3 + 134 w^4) - u^3 w (3525 + 14 752 w + 17 906 w^2 + 6516 w^3 + 645 w^4) - \\ & 3 u^5 w^2 (7950 + 36 833 w + 43 610 w^2 + 16 230 w^3 + 1500 w^4) + \\ & 7 u^6 w^2 (1125 + 16 298 w + 35 385 w^2 + 21 630 w^3 + 3375 w^4) + \\ & 5 u^4 w (450 + 5409 w + 11 936 w^2 + 8085 w^3 + 1740 w^4 + 75 w^5) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo w⁸*)

AU511 = Expand[AU51 / w⁸]

$$\begin{aligned} & -50 + 5 u - 30 u^2 + 75 u^3 - 61 u w^2 + 417 u^2 w^2 - 1485 u^3 w^2 + 3688 u^4 w^2 - 5409 u^5 w^2 + \\ & 3975 u^6 w^2 - 1125 u^7 w^2 + 199 u^2 w^3 - 1892 u^3 w^3 + 8953 u^4 w^3 - 23 872 u^5 w^3 + 36 833 u^6 w^3 - \\ & 32 596 u^7 w^3 + 15 375 u^8 w^3 - 3000 u^9 w^3 - 402 u^3 w^4 + 4887 u^4 w^4 - 24 255 u^5 w^4 + 65 415 u^6 w^4 - \\ & 106 155 u^7 w^4 + 107 037 u^8 w^4 - 65 877 u^9 w^4 + 22 725 u^{10} w^4 - 3375 u^{11} w^4 + 645 u^4 w^5 - 6960 u^5 w^5 + \\ & 32 460 u^6 w^5 - 86 520 u^7 w^5 + 145 950 u^8 w^5 - 162 120 u^9 w^5 + 118 860 u^{10} w^5 - 55 560 u^{11} w^5 + \\ & 15 045 u^{12} w^5 - 1800 u^{13} w^5 - 375 u^5 w^6 + 3750 u^6 w^6 - 16 875 u^7 w^6 + 45 000 u^8 w^6 - 78 750 u^9 w^6 + \\ & 94 500 u^{10} w^6 - 78 750 u^{11} w^6 + 45 000 u^{12} w^6 - 16 875 u^{13} w^6 + 3750 u^{14} w^6 - 375 u^{15} w^6 \end{aligned}$$

AU522 = Expand[AU52 / w⁸]

$$\begin{aligned} & 5 w - 60 u w + 225 u^2 w + 164 w^2 - 569 u w^2 + 1680 u^2 w^2 - 3525 u^3 w^2 + 2250 u^4 w^2 + 61 w^3 - \\ & 834 u w^3 + 4455 u^2 w^3 - 14 752 u^3 w^3 + 27 045 u^4 w^3 - 23 850 u^5 w^3 + 7875 u^6 w^3 - 199 u w^4 + \\ & 2838 u^2 w^4 - 17 906 u^3 w^4 + 59 680 u^4 w^4 - 110 499 u^5 w^4 + 114 086 u^6 w^4 - 61 500 u^7 w^4 + \\ & 13 500 u^8 w^4 + 402 u^2 w^5 - 6516 u^3 w^5 + 40 425 u^4 w^5 - 130 830 u^5 w^5 + 247 695 u^6 w^5 - \\ & 285 432 u^7 w^5 + 197 631 u^8 w^5 - 75 750 u^9 w^5 + 12 375 u^{10} w^5 - 645 u^3 w^6 + 8700 u^4 w^6 - \\ & 48 690 u^5 w^6 + 151 410 u^6 w^6 - 291 900 u^7 w^6 + 364 770 u^8 w^6 - 297 150 u^9 w^6 + 152 790 u^{10} w^6 - \\ & 45 135 u^{11} w^6 + 5850 u^{12} w^6 + 375 u^4 w^7 - 4500 u^5 w^7 + 23 625 u^6 w^7 - 72 000 u^7 w^7 + 141 750 u^8 w^7 - \\ & 189 000 u^9 w^7 + 173 250 u^{10} w^7 - 108 000 u^{11} w^7 + 43 875 u^{12} w^7 - 10 500 u^{13} w^7 + 1125 u^{14} w^7 \end{aligned}$$

NSolve[{AU511 == 0, AU522 == 0, w == 0}, Reals]

[solução numérica] [números]

{{u → 1., w → 0.}}

(*Já foi estudado na direção x*)

(* Continuando com o Blow up no campo vetorial (4.8). Na direção x*)

AU61 = Simplify[AU411 /. {u → u, w → u w}]

|simplifica

$$\begin{aligned} & u^7 (750 - 1350 (-3 + 5 u) w + 30 (300 - 1003 u + 900 u^2) w^2 - \\ & 105 (-100 + 505 u - 926 u^2 + 600 u^3) w^3 + 3 (2250 - 15375 u + 43918 u^2 - 59430 u^3 + 31500 u^4) w^4 - \\ & 5 (-450 + 3975 u - 16298 u^2 + 35679 u^3 - 40530 u^4 + 18900 u^5) w^5 + \\ & (300 - 3525 u + 21636 u^2 - 73666 u^3 + 141540 u^4 - 145950 u^5 + 63000 u^6) w^6 - \\ & 3 u (30 - 560 u + 3688 u^2 - 11936 u^3 + 21805 u^4 - 21630 u^5 + 9000 u^6) w^7 + \\ & u^2 (10 - 569 u + 2970 u^2 - 8953 u^3 + 16170 u^4 - 16230 u^5 + 6750 u^6) w^8 + \\ & u^3 (-50 + 164 u - 417 u^2 + 946 u^3 - 1629 u^4 + 1740 u^5 - 750 u^6) w^9) \end{aligned}$$

AU62 = Simplify[$\frac{1}{u} ((AU422 /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}) - w (AU411 /. \{u \rightarrow u, w \rightarrow u w\}))$]

|simplifica

$$\begin{aligned} & u^6 w (-375 + 750 (-3 + 4 u) w - 15 (375 - 1003 u + 675 u^2) w^2 + \\ & 30 (-250 + 1010 u - 1389 u^2 + 600 u^3) w^3 - 3 (1875 - 10250 u + 21959 u^2 - 19810 u^3 + 5250 u^4) w^4 - \\ & 6 (375 - 2650 u + 8149 u^2 - 11893 u^3 + 6755 u^4) w^5 + \\ & (-375 + 3525 u - 16227 u^2 + 36833 u^3 - 35385 u^4 + 15750 u^6) w^6 - \\ & 2 u (-60 + 840 u - 3688 u^2 + 5968 u^3 - 10815 u^5 + 9000 u^6) w^7 + \\ & u^2 (-15 + 569 u - 1485 u^2 + 8085 u^4 - 16230 u^5 + 10125 u^6) w^8 - \\ & 2 u^3 (-50 + 82 u - 473 u^3 + 1629 u^4 - 2610 u^5 + 1500 u^6) w^9 + \\ & u^6 (61 - 199 u + 402 u^2 - 645 u^3 + 375 u^4) w^{10}) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo u^6 *)

AU611 = Expand[AU61 / u^6]

|expande fatores

$$\begin{aligned} & 750 u + 4050 u w - 6750 u^2 w + 9000 u w^2 - 30090 u^2 w^2 + 27000 u^3 w^2 + 10500 u w^3 - 53025 u^2 w^3 + \\ & 97230 u^3 w^3 - 63000 u^4 w^3 + 6750 u w^4 - 46125 u^2 w^4 + 131754 u^3 w^4 - 178290 u^4 w^4 + \\ & 94500 u^5 w^4 + 2250 u w^5 - 19875 u^2 w^5 + 81490 u^3 w^5 - 178395 u^4 w^5 + 202650 u^5 w^5 - \\ & 94500 u^6 w^5 + 300 u w^6 - 3525 u^2 w^6 + 21636 u^3 w^6 - 73666 u^4 w^6 + 141540 u^5 w^6 - 145950 u^6 w^6 + \\ & 63000 u^7 w^6 - 90 u^2 w^7 + 1680 u^3 w^7 - 11064 u^4 w^7 + 35808 u^5 w^7 - 65415 u^6 w^7 + 64890 u^7 w^7 - \\ & 27000 u^8 w^7 + 10 u^3 w^8 - 569 u^4 w^8 + 2970 u^5 w^8 - 8953 u^6 w^8 + 16170 u^7 w^8 - 16230 u^8 w^8 + \\ & 6750 u^9 w^8 - 50 u^4 w^9 + 164 u^5 w^9 - 417 u^6 w^9 + 946 u^7 w^9 - 1629 u^8 w^9 + 1740 u^9 w^9 - 750 u^{10} w^9 \end{aligned}$$

AU622 = Expand[AU62 / u^6]

|expande fatores

$$\begin{aligned} & -375 w - 2250 w^2 + 3000 u w^2 - 5625 w^3 + 15045 u w^3 - 10125 u^2 w^3 - 7500 w^4 + 30300 u w^4 - \\ & 41670 u^2 w^4 + 18000 u^3 w^4 - 5625 w^5 + 30750 u w^5 - 65877 u^2 w^5 + 59430 u^3 w^5 - \\ & 15750 u^4 w^5 - 2250 w^6 + 15900 u w^6 - 48894 u^2 w^6 + 71358 u^3 w^6 - 40530 u^4 w^6 - 375 w^7 + \\ & 3525 u w^7 - 16227 u^2 w^7 + 36833 u^3 w^7 - 35385 u^4 w^7 + 15750 u^6 w^7 + 120 u w^8 - 1680 u^2 w^8 + \\ & 7376 u^3 w^8 - 11936 u^4 w^8 + 21630 u^6 w^8 - 18000 u^7 w^8 - 15 u^2 w^9 + 569 u^3 w^9 - 1485 u^4 w^9 + \\ & 8085 u^6 w^9 - 16230 u^7 w^9 + 10125 u^8 w^9 + 100 u^3 w^{10} - 164 u^4 w^{10} + 946 u^6 w^{10} - 3258 u^7 w^{10} + \\ & 5220 u^8 w^{10} - 3000 u^9 w^{10} + 61 u^6 w^{11} - 199 u^7 w^{11} + 402 u^8 w^{11} - 645 u^9 w^{11} + 375 u^{10} w^{11} \end{aligned}$$

(*Pontos de equilíbrio*)

Solve[{AU611 == 0, AU622 == 0, u == 0}]

|resolve

$$\{\{u \rightarrow 0, w \rightarrow -1\}, \{u \rightarrow 0, w \rightarrow 0\}\}$$

J[AU611, AU622, 0, 0]

{{750, 0}, {0, -375}}

J[AU611, AU622, 0, -1]

{{0, 0}, {0, 0}}

(*Agora o blow up do campo vetorial (4.8) na direção y*)

AU71 = Simplify[$\frac{1}{w} \left((AU411 /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}) - u (AU422 /. \{u \rightarrow uw, w \rightarrow w\}) \right)$]

$$-u w^6 \left(375 u^6 (-1+w)^9 (1+w) - 15 u^5 (-1+w)^7 (-150 - 47 w + 43 w^2) + 5 (-75 + 24 w - 3 w^2 + 20 w^3) + 3 u^4 (-1+w)^5 (1875 - 725 w - 416 w^2 + 134 w^3) + u (-2250 + 3525 w - 1680 w^2 + 569 w^3 - 164 w^4) + u^2 (-1+w)^2 (-5625 + 4650 w - 1302 w^2 + 122 w^3 + 61 w^4) - u^3 (-1+w)^3 (-7500 + 8250 w - 1644 w^2 - 349 w^3 + 199 w^4) \right)$$

AU72 = Simplify[AU422 /. {u → uw, w → w}]

$$(-1+w) w^7 \left(75 + 375 u^6 (-1+w)^9 + 45 w + 50 w^2 - 15 u^5 (-1+w)^7 (-120 + 43 w) + 3 u^4 (-1+w)^5 (1125 - 825 w + 134 w^2) + u^2 (-1+w)^2 (-1125 + 600 w - 234 w^2 + 61 w^3) - u^3 (-1+w)^3 (-3000 + 3375 w - 1096 w^2 + 199 w^3) \right)$$

(*Cancelando o termo w^6 *)

AU711 = Expand[AU71/w⁶]

$$375 u + 2250 u^2 + 5625 u^3 + 7500 u^4 + 5625 u^5 + 2250 u^6 + 375 u^7 - 120 u w - 3525 u^2 w - 15900 u^3 w - 30750 u^4 w - 30300 u^5 w - 15045 u^6 w - 3000 u^7 w + 15 u w^2 + 1680 u^2 w^2 + 16227 u^3 w^2 + 48894 u^4 w^2 + 65877 u^5 w^2 + 41670 u^6 w^2 + 10125 u^7 w^2 - 100 u w^3 - 569 u^2 w^3 - 7376 u^3 w^3 - 36833 u^4 w^3 - 71358 u^5 w^3 - 59430 u^6 w^3 - 18000 u^7 w^3 + 164 u^2 w^4 + 1485 u^3 w^4 + 11936 u^4 w^4 + 35385 u^5 w^4 + 40530 u^6 w^4 + 15750 u^7 w^4 - 61 u^3 w^6 - 946 u^4 w^6 - 8085 u^5 w^6 - 21630 u^6 w^6 - 15750 u^7 w^6 + 199 u^4 w^7 + 3258 u^5 w^7 + 16230 u^6 w^7 + 18000 u^7 w^7 - 402 u^5 w^8 - 5220 u^6 w^8 - 10125 u^7 w^8 + 645 u^6 w^9 + 3000 u^7 w^9 - 375 u^7 w^{10}$$

AU722 = Expand[AU72/w⁶]

$$-75 w + 1125 u^2 w + 3000 u^3 w + 3375 u^4 w + 1800 u^5 w + 375 u^6 w + 30 w^2 - 3975 u^2 w^2 - 15375 u^3 w^2 - 22725 u^4 w^2 - 15045 u^5 w^2 - 3750 u^6 w^2 - 5 w^3 + 5409 u^2 w^3 + 32596 u^3 w^3 + 65877 u^4 w^3 + 55560 u^5 w^3 + 16875 u^6 w^3 + 50 w^4 - 3688 u^2 w^4 - 36833 u^3 w^4 - 107037 u^4 w^4 - 118860 u^5 w^4 - 45000 u^6 w^4 + 1485 u^2 w^5 + 23872 u^3 w^5 + 106155 u^4 w^5 + 162120 u^5 w^5 + 78750 u^6 w^5 - 417 u^2 w^6 - 8953 u^3 w^6 - 65415 u^4 w^6 - 145950 u^5 w^6 - 94500 u^6 w^6 + 61 u^2 w^7 + 1892 u^3 w^7 + 24255 u^4 w^7 + 86520 u^5 w^7 + 78750 u^6 w^7 - 199 u^3 w^8 - 4887 u^4 w^8 - 32460 u^5 w^8 - 45000 u^6 w^8 + 402 u^4 w^9 + 6960 u^5 w^9 + 16875 u^6 w^9 - 645 u^5 w^{10} - 3750 u^6 w^{10} + 375 u^6 w^{11}$$

(*Calculando os pontos de equilibrio*)

Solve[{AU711 == 0, AU722 == 0, w == 0}]

{{u → -1, w → 0}, {u → 0, w → 0}}

J[AU711, AU722, 0, 0]

{{375, 0}, {0, -75}}

(*Assim, continuando com a singularidade $(0,-1)$ faremos outro blow up. Para simplificar as contas, fazemos a translação $(u,w)=(u, v-1)$. *)

AU81 = Expand[AU611 /. {u → u, w → v - 1}]

[\[expande fatores](#)

$$\begin{aligned}
 & -16 u^4 + 388 u^5 + 5429 u^6 + 13334 u^7 + 12399 u^8 + 5010 u^9 + 750 u^{10} - 12 u^3 v + 835 u^4 v + 14382 u^5 v + \\
 & 13166 u^6 v - 44616 u^7 v - 73821 u^8 v - 38340 u^9 v - 6750 u^{10} v + 474 u^3 v^2 + 16432 u^4 v^2 - \\
 & 11112 u^5 v^2 - 106207 u^6 v^2 + 1014 u^7 v^2 + 171204 u^8 v^2 + 126360 u^9 v^2 + 27000 u^{10} v^2 + 75 u^2 v^3 + \\
 & 10634 u^3 v^3 - 20046 u^4 v^3 - 81564 u^5 v^3 + 150815 u^6 v^3 + 185094 u^7 v^3 - 172956 u^8 v^3 - \\
 & 231840 u^9 v^3 - 63000 u^{10} v^3 + 3525 u^2 v^4 - 9256 u^3 v^4 - 37595 u^4 v^4 + 138306 u^5 v^4 - \\
 & 1393 u^6 v^4 - 313446 u^7 v^4 + 14154 u^8 v^4 + 253260 u^9 v^4 + 94500 u^{10} v^4 + 450 u v^5 - 615 u^2 v^5 - \\
 & 13606 u^3 v^5 + 56821 u^4 v^5 - 40278 u^5 v^5 - 143689 u^6 v^5 + 198366 u^7 v^5 + 136626 u^8 v^5 - \\
 & 158760 u^9 v^5 - 94500 u^{10} v^5 + 300 u v^6 - 2895 u^2 v^6 + 10156 u^3 v^6 - 7950 u^4 v^6 - 39732 u^5 v^6 + \\
 & 96299 u^6 v^6 - 17934 u^7 v^6 - 128604 u^8 v^6 + 42840 u^9 v^6 + 63000 u^{10} v^6 - 90 u^2 v^7 + 1600 u^3 v^7 - \\
 & 8312 u^4 v^7 + 17952 u^5 v^7 - 8803 u^6 v^7 - 30414 u^7 v^7 + 44196 u^8 v^7 + 8640 u^9 v^7 - 27000 u^{10} v^7 + \\
 & 10 u^3 v^8 - 119 u^4 v^8 + 1494 u^5 v^8 - 5200 u^6 v^8 + 7656 u^7 v^8 - 1569 u^8 v^8 - 8910 u^9 v^8 + \\
 & 6750 u^{10} v^8 - 50 u^4 v^9 + 164 u^5 v^9 - 417 u^6 v^9 + 946 u^7 v^9 - 1629 u^8 v^9 + 1740 u^9 v^9 - 750 u^{10} v^9
 \end{aligned}$$

AU82 = Expand[AU622 /. {u → u, w → v - 1}]

[\[expande fatores](#)

$$\begin{aligned}
 & 2 u^3 - 10 u^4 - 1320 u^6 - 4829 u^7 - 5307 u^8 - 2355 u^9 - 375 u^{10} - 54 u^3 v + 498 u^4 v + 1186 u^6 v + \\
 & 28321 u^7 v + 43347 u^8 v + 22905 u^9 v + 4125 u^{10} v - 18 u^2 v^2 + 1121 u^3 v^2 + 4507 u^4 v^2 + \\
 & 23045 u^6 v^2 - 55385 u^7 v^2 - 151710 u^8 v^2 - 99525 u^9 v^2 - 20625 u^{10} v^2 + 540 u^2 v^3 + \\
 & 7035 u^3 v^3 - 22019 u^4 v^3 - 84345 u^6 v^3 + 2805 u^7 v^3 + 290430 u^8 v^3 + 253575 u^9 v^3 + \\
 & 61875 u^{10} v^3 + 75 u v^4 + 6540 u^2 v^4 - 32309 u^3 v^4 + 26425 u^4 v^4 + 122670 u^6 v^4 + 166470 u^7 v^4 - \\
 & 312210 u^8 v^4 - 417150 u^9 v^4 - 123750 u^{10} v^4 + 2655 u v^5 - 21090 u^2 v^5 + 38213 u^3 v^5 + \\
 & 6979 u^4 v^5 - 72030 u^6 v^5 - 307902 u^7 v^5 + 146034 u^8 v^5 + 458010 u^9 v^5 + 173250 u^{10} v^5 + \\
 & 375 v^6 - 5415 u v^6 + 18915 u^2 v^6 - 6741 u^3 v^6 - 36743 u^4 v^6 - 13272 u^6 v^6 + 267078 u^7 v^6 + \\
 & 59976 u^8 v^6 - 332010 u^9 v^6 - 173250 u^{10} v^6 - 375 v^7 + 2565 u v^7 - 3327 u^2 v^7 - 13691 u^3 v^7 + \\
 & 26323 u^4 v^7 + 40380 u^6 v^7 - 114990 u^7 v^7 - 129240 u^8 v^7 + 147150 u^9 v^7 + 123750 u^{10} v^7 + \\
 & 120 u v^8 - 1545 u^2 v^8 + 6755 u^3 v^8 - 5951 u^4 v^8 - 18630 u^6 v^8 + 14295 u^7 v^8 + 77445 u^8 v^8 - \\
 & 28575 u^9 v^8 - 61875 u^{10} v^8 - 15 u^2 v^9 - 431 u^3 v^9 + 155 u^4 v^9 + 1980 u^6 v^9 + 5405 u^7 v^9 - \\
 & 19965 u^8 v^9 - 5475 u^9 v^9 + 20625 u^{10} v^9 + 100 u^3 v^{10} - 164 u^4 v^{10} + 275 u^6 v^{10} - 1069 u^7 v^{10} + \\
 & 798 u^8 v^{10} + 4095 u^9 v^{10} - 4125 u^{10} v^{10} + 61 u^6 v^{11} - 199 u^7 v^{11} + 402 u^8 v^{11} - 645 u^9 v^{11} + 375 u^{10} v^{11}
 \end{aligned}$$

(* As expressões acima (AU81,AU82) correspondem ao campo vetorial (4.9). *)

J[AU81, AU82, 0, 0]

{{0, 0}, {0, 0}}

(* Faremos blow up do campo vetorial (4.9). Primeiro, na direção x. *)

AU91 = Simplify[AU81 /. {u → u, v → u w}]

[simplifica

$$\begin{aligned} & u^4 (-750 u^{15} w^9 - 4(4 + 3w) + 30 u^{14} w^8 (225 + 58w) - 9 u^{13} w^7 (3000 + 990w + 181 w^2) + \\ & u(388 + 835w + 474 w^2 + 75 w^3) + u^{12} w^6 (63000 + 8640w - 1569 w^2 + 946 w^3) + \\ & 3 u^{11} w^5 (-31500 + 14280w + 14732 w^2 + 2552 w^3 - 139 w^4) + \\ & 2 u^{10} w^4 (47250 - 79380w - 64302 w^2 - 15207 w^3 - 2600 w^4 + 82 w^5) + \\ & u^2 (5429 + 14382w + 16432 w^2 + 10634 w^3 + 3525 w^4 + 450 w^5) + \\ & u^8 w^2 (27000 - 231840w + 14154 w^2 + 198366 w^3 + 96299 w^4 + 17952 w^5 - 119 w^6) + \\ & u^9 w^3 (-63000 + 253260w + 136626 w^2 - 17934 w^3 - 8803 w^4 + 1494 w^5 - 50 w^6) + \\ & u^3 (13334 + 13166w - 11112 w^2 - 20046 w^3 - 9256 w^4 - 615 w^5 + 300 w^6) - \\ & u^4 (-12399 + 44616w + 106207 w^2 + 81564 w^3 + 37595 w^4 + 13606 w^5 + 2895 w^6) + \\ & u^5 (5010 - 73821w + 1014 w^2 + 150815 w^3 + 138306 w^4 + 56821 w^5 + 10156 w^6 - 90 w^7) + \\ & u^7 w (-6750 + 126360w - 172956 w^2 - 313446 w^3 - 143689 w^4 - 39732 w^5 - 8312 w^6 + 10 w^7) + \\ & u^6 (750 - 38340w + 171204 w^2 + 185094 w^3 - 1393 w^4 - 40278 w^5 - 7950 w^6 + 1600 w^7) \end{aligned}$$

AU92 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((AU82 /. {u → u, v → u w}) - w (AU81 /. {u → u, v → u w}))]

[simplifica

$$\begin{aligned} & u^2 (2 + 375 u^{18} w^{11} - 15 u^{17} w^{10} (275 + 43w) + \\ & 22 u^2 w (5 + 13w + 3 w^2) - 2 u (5 + 19w + 3 w^2) + 3 u^{16} w^9 (6875 + 1615w + 134 w^2) - \\ & u^{15} w^8 (61875 + 12225w + 942 w^2 + 199 w^3) - 11 u^{13} w^6 (15750 - 7650w - 6255 w^2 - 634 w^3 + 61 w^4) + \\ & u^{14} w^7 (123750 - 1575w - 11055 w^2 + 560 w^3 + 61 w^4) + \\ & 3 u^{12} w^5 (57750 - 79170w - 57360 w^2 - 9967 w^3 - 1892 w^4 + 139 w^5) + \\ & 2 u^{11} w^4 (-61875 + 181755w + 109368 w^2 + 6807 w^3 + 5892 w^4 + 2600 w^5 - 164 w^6) - \\ & u^3 (1320 + 5429w + 9875 w^2 + 9397 w^3 + 4094 w^4 + 870 w^5 + 75 w^6) + \\ & u^{10} w^3 (61875 - 354150w - 107226 w^2 + 130452 w^3 + 58314 w^4 + 8803 w^5 - 1339 w^6 + 150 w^7) - \\ & u^9 w^2 (20625 - 226575w + 80370 w^2 + 322056 w^3 + 211638 w^4 + 96299 w^5 + 23903 w^6 + 312 w^7) - \\ & u^4 (4829 + 12148w + 13166 w^2 + 10907 w^3 + 12263 w^4 + 11834 w^5 + 4800 w^6 + 675 w^7) + \\ & u^5 (-5307 + 15922w + 67661 w^2 + 106207 w^3 + 107989 w^4 + 75808 w^5 + 32521 w^6 + 5460 w^7) + \\ & u^8 w (4125 - 92775w + 164070 w^2 + 339426 w^3 + 241416 w^4 + 143689 w^5 + \\ & 66055 w^6 + 15067 w^7 - 25 w^8) + u^6 (-2355 + 38337w + 18436 w^2 - \\ & 85359 w^3 - 150815 w^4 - 131327 w^5 - 63562 w^6 - 13483 w^7 + 210 w^8) - \\ & u^7 (375 - 22155w + 113370 w^2 + 168399 w^3 + 62424 w^4 - 1393 w^5 - 3535 w^6 + 5741 w^7 + 3145 w^8) \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo u^2 *)

AU911 = Expand[AU91 / u^2]

[expande fatores

$$\begin{aligned} & -16 u^2 + 388 u^3 + 5429 u^4 + 13334 u^5 + 12399 u^6 + 5010 u^7 + 750 u^8 - 12 u^2 w + 835 u^3 w + 14382 u^4 w + \\ & 13166 u^5 w - 44616 u^6 w - 73821 u^7 w - 38340 u^8 w - 6750 u^9 w + 474 u^3 w^2 + 16432 u^4 w^2 - \\ & 11112 u^5 w^2 - 106207 u^6 w^2 + 1014 u^7 w^2 + 171204 u^8 w^2 + 126360 u^9 w^2 + 27000 u^{10} w^2 + 75 u^3 w^3 + \\ & 10634 u^4 w^3 - 20046 u^5 w^3 - 81564 u^6 w^3 + 150815 u^7 w^3 + 185094 u^8 w^3 - 172956 u^9 w^3 - \\ & 231840 u^{10} w^3 - 63000 u^{11} w^3 + 3525 u^4 w^4 - 9256 u^5 w^4 - 37595 u^6 w^4 + 138306 u^7 w^4 - 1393 u^8 w^4 - \\ & 313446 u^9 w^4 + 14154 u^{10} w^4 + 253260 u^{11} w^4 + 94500 u^{12} w^4 + 450 u^4 w^5 - 615 u^5 w^5 - 13606 u^6 w^5 + \\ & 56821 u^7 w^5 - 40278 u^8 w^5 - 143689 u^9 w^5 + 198366 u^{10} w^5 + 136626 u^{11} w^5 - 158760 u^{12} w^5 - \\ & 94500 u^{13} w^5 + 300 u^5 w^6 - 2895 u^6 w^6 + 10156 u^7 w^6 - 7950 u^8 w^6 - 39732 u^9 w^6 + 96299 u^{10} w^6 - \\ & 17934 u^{11} w^6 - 128604 u^{12} w^6 + 42840 u^{13} w^6 + 63000 u^{14} w^6 - 90 u^7 w^7 + 1600 u^8 w^7 - 8312 u^9 w^7 + \\ & 17952 u^{10} w^7 - 8803 u^{11} w^7 - 30414 u^{12} w^7 + 44196 u^{13} w^7 + 8640 u^{14} w^7 - 27000 u^{15} w^7 + \\ & 10 u^9 w^8 - 119 u^{10} w^8 + 1494 u^{11} w^8 - 5200 u^{12} w^8 + 7656 u^{13} w^8 - 1569 u^{14} w^8 - 8910 u^{15} w^8 + \\ & 6750 u^{16} w^8 - 50 u^{11} w^9 + 164 u^{12} w^9 - 417 u^{13} w^9 + 946 u^{14} w^9 - 1629 u^{15} w^9 + 1740 u^{16} w^9 - 750 u^{17} w^9 \end{aligned}$$

AU922 = Expand[AU92/u²]
 [expande fatores]

$$\begin{aligned}
 & 2 - 10 u - 1320 u^3 - 4829 u^4 - 5307 u^5 - 2355 u^6 - 375 u^7 - 38 u w + 110 u^2 w - 5429 u^3 w - 12148 u^4 w + \\
 & 15922 u^5 w + 38337 u^6 w + 22155 u^7 w + 4125 u^8 w - 6 u w^2 + 286 u^2 w^2 - 9875 u^3 w^2 - 13166 u^4 w^2 + \\
 & 67661 u^5 w^2 + 18436 u^6 w^2 - 113370 u^7 w^2 - 92775 u^8 w^2 - 20625 u^9 w^2 + 66 u^2 w^3 - 9397 u^3 w^3 - \\
 & 10907 u^4 w^3 + 106207 u^5 w^3 - 85359 u^6 w^3 - 168399 u^7 w^3 + 164070 u^8 w^3 + 226575 u^9 w^3 + \\
 & 61875 u^{10} w^3 - 4094 u^3 w^4 - 12263 u^4 w^4 + 107989 u^5 w^4 - 150815 u^6 w^4 - 62424 u^7 w^4 + \\
 & 339426 u^8 w^4 - 80370 u^9 w^4 - 354150 u^{10} w^4 - 123750 u^{11} w^4 - 870 u^3 w^5 - 11834 u^4 w^5 + 75808 u^5 w^5 - \\
 & 131327 u^6 w^5 + 1393 u^7 w^5 + 241416 u^8 w^5 - 322056 u^9 w^5 - 107226 u^{10} w^5 + 363510 u^{11} w^5 + \\
 & 173250 u^{12} w^5 - 75 u^3 w^6 - 4800 u^4 w^6 + 32521 u^5 w^6 - 63562 u^6 w^6 + 3535 u^7 w^6 + 143689 u^8 w^6 - \\
 & 211638 u^9 w^6 + 130452 u^{10} w^6 + 218736 u^{11} w^6 - 237510 u^{12} w^6 - 173250 u^{13} w^6 - 675 u^4 w^7 + \\
 & 5460 u^5 w^7 - 13483 u^6 w^7 - 5741 u^7 w^7 + 66055 u^8 w^7 - 96299 u^9 w^7 + 58314 u^{10} w^7 + 13614 u^{11} w^7 - \\
 & 172080 u^{12} w^7 + 84150 u^{13} w^7 + 123750 u^{14} w^7 + 210 u^6 w^8 - 3145 u^7 w^8 + 15067 u^8 w^8 - 23903 u^9 w^8 + \\
 & 8803 u^{10} w^8 + 11784 u^{11} w^8 - 29901 u^{12} w^8 + 68805 u^{13} w^8 - 1575 u^{14} w^8 - 61875 u^{15} w^8 - 25 u^8 w^9 - \\
 & 312 u^9 w^9 - 1339 u^{10} w^9 + 5200 u^{11} w^9 - 5676 u^{12} w^9 + 6974 u^{13} w^9 - 11055 u^{14} w^9 - 12225 u^{15} w^9 + \\
 & 20625 u^{16} w^9 + 150 u^{10} w^{10} - 328 u^{11} w^{10} + 417 u^{12} w^{10} - 671 u^{13} w^{10} + 560 u^{14} w^{10} - 942 u^{15} w^{10} + \\
 & 4845 u^{16} w^{10} - 4125 u^{17} w^{10} + 61 u^{14} w^{11} - 199 u^{15} w^{11} + 402 u^{16} w^{11} - 645 u^{17} w^{11} + 375 u^{18} w^{11}
 \end{aligned}$$

(*Não têm solução*)

(*Agora, o blow up do campo vetorial (4.9) na direção y*)

AU101 = Simplify[$\frac{1}{w}$ ((AU81 /. {u → u w, v → w}) - u (AU82 /. {u → u w, v → w}))]
 [simplifica]

$$\begin{aligned}
 & -u w^2 \left(375 u^{10} (-1+w)^{11} w^7 - 75 w^3 (1+9w) - 15 u^9 (-1+w)^9 w^6 (-157+64w+43w^2) + \right. \\
 & 30 u w^3 (-29-160w+182w^2+7w^3) + 3 u^8 (-1+w)^8 w^5 (-1769-1373w+758w^2+134w^3) - \\
 & u^7 (-1+w)^7 w^4 (-4829-17881w-5322w^2+833w^3+199w^4) + \\
 & u^5 (-1+w)^5 w^3 (5429+40311w+41058w^2+7285w^3+417w^4) - \\
 & u^2 (-1+w)^2 w (6-54w+3980w^2+19848w^3+3195w^4+25w^5) + \\
 & u^6 (-1+w)^6 w^3 (-1320-20068w-32947w^2-8421w^3-305w^4+61w^5) - \\
 & u^4 (-1+w)^4 w (10-70w+9535w^2+49507w^3+32539w^4+2651w^5+328w^6) + \\
 & \left. u^3 (-1+w)^3 (-2+32w-184w^2+8747w^3+39088w^4+15031w^5+138w^6+150w^7) \right)
 \end{aligned}$$

AU102 = Simplify[AU82 /. {u → u w, v → w}]
 [simplifica]

$$\begin{aligned}
 & (-1+w) w^3 \left(-375 w^3 + 375 u^{10} (-1+w)^{10} w^7 - \right. \\
 & 15 u^9 (-1+w)^9 w^6 (157+43w) + 3 u^8 (-1+w)^8 w^5 (1769+1472w+134w^2) + \\
 & 15 u w^2 (-5-182w+179w^2+8w^3) - u^7 (-1+w)^7 w^4 (4829+10311w+2661w^2+199w^3) - \\
 & 3 u^2 (-1+w)^2 w (-6+162w+2684w^2+530w^3+5w^4) + \\
 & u^6 (-1+w)^6 w^3 (1320+8054w+5613w^2+702w^3+61w^4) - \\
 & u^4 (-1+w)^4 w (-10+448w+6847w^2+7636w^3+665w^4+164w^5) + \\
 & \left. u^3 (-1+w)^3 (2-46w+925w^2+11019w^3+6031w^4-31w^5+100w^6) \right)
 \end{aligned}$$

(*Calculando o termo w² *)

AU1011 = Expand[AU101/w²]

[\[expande fatores\]](#)

$$\begin{aligned}
 & -2 u^4 + 6 u^3 w + 38 u^4 w + 10 u^5 w - 66 u^3 w^2 - 286 u^4 w^2 - 110 u^5 w^2 + 75 u w^3 + 870 u^2 w^3 + 4094 u^3 w^3 + \\
 & 9397 u^4 w^3 + 9875 u^5 w^3 + 5429 u^6 w^3 + 1320 u^7 w^3 + 675 u w^4 + 4800 u^2 w^4 + 11834 u^3 w^4 + \\
 & 12263 u^4 w^4 + 10907 u^5 w^4 + 13166 u^6 w^4 + 12148 u^7 w^4 + 4829 u^8 w^4 - 5460 u^2 w^5 - 32521 u^3 w^5 - \\
 & 75808 u^4 w^5 - 107989 u^5 w^5 - 106207 u^6 w^5 - 67661 u^7 w^5 - 15922 u^8 w^5 + 5307 u^9 w^5 - 210 u^2 w^6 + \\
 & 13483 u^3 w^6 + 63562 u^4 w^6 + 131327 u^5 w^6 + 150815 u^6 w^6 + 85359 u^7 w^6 - 18436 u^8 w^6 - \\
 & 38337 u^9 w^6 + 2355 u^{10} w^6 + 3145 u^3 w^7 + 5741 u^4 w^7 - 3535 u^5 w^7 - 1393 u^6 w^7 + 62424 u^7 w^7 + \\
 & 168399 u^8 w^7 + 113370 u^9 w^7 - 22155 u^{10} w^7 + 375 u^{11} w^7 + 25 u^3 w^8 - 15067 u^4 w^8 - 66055 u^5 w^8 - \\
 & 143689 u^6 w^8 - 241416 u^7 w^8 - 339426 u^8 w^8 - 164070 u^9 w^8 + 92775 u^{10} w^8 - 4125 u^{11} w^8 + \\
 & 312 u^4 w^9 + 23903 u^5 w^9 + 96299 u^6 w^9 + 211638 u^7 w^9 + 322056 u^8 w^9 + 80370 u^9 w^9 - \\
 & 226575 u^{10} w^9 + 20625 u^{11} w^9 - 150 u^4 w^{10} + 1339 u^5 w^{10} - 8803 u^6 w^{10} - 58314 u^7 w^{10} - \\
 & 130452 u^8 w^{10} + 107226 u^9 w^{10} + 354150 u^{10} w^{10} - 61875 u^{11} w^{10} + 328 u^5 w^{11} - 5200 u^6 w^{11} - \\
 & 11784 u^7 w^{11} - 13614 u^8 w^{11} - 218736 u^9 w^{11} - 363510 u^{10} w^{11} + 123750 u^{11} w^{11} - 417 u^6 w^{12} + \\
 & 5676 u^7 w^{12} + 29901 u^8 w^{12} + 172080 u^9 w^{12} + 237510 u^{10} w^{12} - 173250 u^{11} w^{12} + 671 u^7 w^{13} - \\
 & 6974 u^8 w^{13} - 68805 u^9 w^{13} - 84150 u^{10} w^{13} + 173250 u^{11} w^{13} - 61 u^7 w^{14} - 560 u^8 w^{14} + \\
 & 11055 u^9 w^{14} + 1575 u^{10} w^{14} - 123750 u^{11} w^{14} + 199 u^8 w^{15} + 942 u^9 w^{15} + 12225 u^{10} w^{15} + \\
 & 61875 u^{11} w^{15} - 402 u^9 w^{16} - 4845 u^{10} w^{16} - 20625 u^{11} w^{16} + 645 u^{10} w^{17} + 4125 u^{11} w^{17} - 375 u^{11} w^{18}
 \end{aligned}$$

AU1022 = Expand[AU102/w²]

[\[expande fatores\]](#)

$$\begin{aligned}
 & 2 u^3 w - 18 u^2 w^2 - 54 u^3 w^2 - 10 u^4 w^2 + 75 u w^3 + 540 u^2 w^3 + 1121 u^3 w^3 + 498 u^4 w^3 + 375 w^4 + 2655 u w^4 + \\
 & 6540 u^2 w^4 + 7035 u^3 w^4 + 4507 u^4 w^4 - 1320 u^6 w^4 - 375 w^5 - 5415 u w^5 - 21090 u^2 w^5 - 32309 u^3 w^5 - \\
 & 22019 u^4 w^5 + 1186 u^6 w^5 - 4829 u^7 w^5 + 2565 u w^6 + 18915 u^2 w^6 + 38213 u^3 w^6 + 26425 u^4 w^6 + \\
 & 23045 u^6 w^6 + 28321 u^7 w^6 - 5307 u^8 w^6 + 120 u w^7 - 3327 u^2 w^7 - 6741 u^3 w^7 + 6979 u^4 w^7 - \\
 & 84345 u^6 w^7 - 55385 u^7 w^7 + 43347 u^8 w^7 - 2355 u^9 w^7 - 1545 u^2 w^8 - 13691 u^3 w^8 - 36743 u^4 w^8 + \\
 & 122670 u^6 w^8 + 2805 u^7 w^8 - 151710 u^8 w^8 + 22905 u^9 w^8 - 375 u^{10} w^8 - 15 u^2 w^9 + 6755 u^3 w^9 + \\
 & 26323 u^4 w^9 - 72030 u^6 w^9 + 166470 u^7 w^9 + 290430 u^8 w^9 - 99525 u^9 w^9 + 4125 u^{10} w^9 - 431 u^3 w^{10} - \\
 & 5951 u^4 w^{10} - 13272 u^6 w^{10} - 307902 u^7 w^{10} - 312210 u^8 w^{10} + 253575 u^9 w^{10} - 20625 u^{10} w^{10} + \\
 & 100 u^3 w^{11} + 155 u^4 w^{11} + 40380 u^6 w^{11} + 267078 u^7 w^{11} + 146034 u^8 w^{11} - 417150 u^9 w^{11} + \\
 & 61875 u^{10} w^{11} - 164 u^4 w^{12} - 18630 u^6 w^{12} - 114990 u^7 w^{12} + 59976 u^8 w^{12} + 458010 u^9 w^{12} - \\
 & 123750 u^{10} w^{12} + 1980 u^6 w^{13} + 14295 u^7 w^{13} - 129240 u^8 w^{13} - 332010 u^9 w^{13} + 173250 u^{10} w^{13} + \\
 & 275 u^6 w^{14} + 5405 u^7 w^{14} + 77445 u^8 w^{14} + 147150 u^9 w^{14} - 173250 u^{10} w^{14} + 61 u^6 w^{15} - 1069 u^7 w^{15} - \\
 & 19965 u^8 w^{15} - 28575 u^9 w^{15} + 123750 u^{10} w^{15} - 199 u^7 w^{16} + 798 u^8 w^{16} - 5475 u^9 w^{16} - \\
 & 61875 u^{10} w^{16} + 402 u^8 w^{17} + 4095 u^9 w^{17} + 20625 u^{10} w^{17} - 645 u^9 w^{18} - 4125 u^{10} w^{18} + 375 u^{10} w^{19}
 \end{aligned}$$

(* As expressões acima (AU1011,AU1022) correspondem ao campo vetorial (4.10). *)

(* Pontos de equilíbrio. *)

Solve[{AU1011 == 0, AU1022 == 0, w == 0}]

[\[resolve\]](#)

{{u → 0, w → 0}}

J[AU1011, AU1022, 0, 0]

{{{0, 0}, {0, 0}}

(* A origem é uma singularidade linearmente nula. *)

(* Blow up no campo vetorial (4.10) na direção x*)

CU1 = Simplify[AU1011 /. {u → u, w → u w}]

[simplifica

$$\begin{aligned}
 & u^4 \left(-2 + 2 (3 + 19 u + 5 u^2) w - 22 u (3 + 13 u + 5 u^2) w^2 + \right. \\
 & \quad \left. (75 + 870 u + 4094 u^2 + 9397 u^3 + 9875 u^4 + 5429 u^5 + 1320 u^6) w^3 + \right. \\
 & \quad u (675 + 4800 u + 11834 u^2 + 12263 u^3 + 10907 u^4 + 13166 u^5 + 12148 u^6 + 4829 u^7) w^4 + \\
 & \quad u^3 (-5460 - 32521 u - 75808 u^2 - 107989 u^3 - 106207 u^4 - 67661 u^5 - 15922 u^6 + 5307 u^7) w^5 + \\
 & \quad u^4 (-210 + 13483 u + 63562 u^2 + 131327 u^3 + \\
 & \quad \quad 150815 u^4 + 85359 u^5 - 18436 u^6 - 38337 u^7 + 2355 u^8) w^6 + \\
 & \quad u^6 (3145 + 5741 u - 3535 u^2 - 1393 u^3 + 62424 u^4 + 168399 u^5 + 113370 u^6 - 22155 u^7 + 375 u^8) w^7 - \\
 & \quad u^7 (-25 + 15067 u + 66055 u^2 + 143689 u^3 + \\
 & \quad \quad 241416 u^4 + 339426 u^5 + 164070 u^6 - 92775 u^7 + 4125 u^8) w^8 + \\
 & \quad u^9 (312 + 23903 u + 96299 u^2 + 211638 u^3 + 322056 u^4 + 80370 u^5 - 226575 u^6 + 20625 u^7) w^9 - \\
 & \quad u^{10} (150 - 1339 u + 8803 u^2 + 58314 u^3 + 130452 u^4 - 107226 u^5 - 354150 u^6 + 61875 u^7) w^{10} + \\
 & \quad 2 u^{12} (164 - 2600 u - 5892 u^2 - 6807 u^3 - 109368 u^4 - 181755 u^5 + 61875 u^6) w^{11} - \\
 & \quad 3 u^{14} (139 - 1892 u - 9967 u^2 - 57360 u^3 - 79170 u^4 + 57750 u^5) w^{12} + \\
 & \quad 11 u^{16} (61 - 634 u - 6255 u^2 - 7650 u^3 + 15750 u^4) w^{13} + \\
 & \quad u^{17} (-61 - 560 u + 11055 u^2 + 1575 u^3 - 123750 u^4) w^{14} + \\
 & \quad u^{19} (199 + 942 u + 12225 u^2 + 61875 u^3) w^{15} - \\
 & \quad 3 u^{21} (134 + 1615 u + 6875 u^2) w^{16} + 15 u^{23} (43 + 275 u) w^{17} - 375 u^{25} w^{18}
 \end{aligned}$$

CU2 = Simplify[$\frac{1}{u}$ ((AU1022 /. {u → u, w → u w}) - w (AU1011 /. {u → u, w → u w}))]

[simplifica

$$\begin{aligned}
 & u^3 w (4 - 4 (6 + 23 u + 5 u^2) w + (75 + 606 u + 1407 u^2 + 608 u^3) w^2 + \\
 & \quad (300 + 1785 u + 2446 u^2 - 2362 u^3 - 5368 u^4 - 5429 u^5 - 2640 u^6) w^3 - \\
 & \quad u (1050 + 10215 u + 32924 u^2 + 44572 u^3 + 32926 u^4 + 13166 u^5 + 10962 u^6 + 9658 u^7) w^4 + \\
 & \quad u^3 (8025 + 51436 u + 114021 u^2 + 134414 u^3 + 106207 u^4 + 90706 u^5 + 44243 u^6 - 10614 u^7) w^5 - \\
 & \quad u^4 (-330 + 16810 u + 70303 u^2 + 124348 u^3 + \\
 & \quad \quad 150815 u^4 + 169704 u^5 + 36949 u^6 - 81684 u^7 + 4710 u^8) w^6 - \\
 & \quad u^6 (4690 + 19432 u + 33208 u^2 - 1393 u^3 - 60246 u^4 + 165594 u^5 + 265080 u^6 - 45060 u^7 + 750 u^8) \\
 & \quad w^7 + u^7 (-40 + 21822 u + 92378 u^2 + 143689 u^3 + \\
 & \quad \quad 169386 u^4 + 505896 u^5 + 454500 u^6 - 192300 u^7 + 8250 u^8) w^8 - \\
 & \quad u^9 (743 + 29854 u + 96299 u^2 + 224910 u^3 + 629958 u^4 + 392580 u^5 - 480150 u^6 + 41250 u^7) w^9 + \\
 & \quad u^{10} (250 - 1184 u + 8803 u^2 + 98694 u^3 + 397530 u^4 + 38808 u^5 - 771300 u^6 + 123750 u^7) w^{10} - \\
 & \quad 2 u^{12} (246 - 2600 u + 3423 u^2 + 50688 u^3 - 139356 u^4 - 410760 u^5 + 123750 u^6) w^{11} + \\
 & \quad 3 u^{14} (139 - 1232 u - 5202 u^2 - 100440 u^3 - 189840 u^4 + 115500 u^5) w^{12} + \\
 & \quad u^{16} (-396 + 12379 u + 146250 u^2 + 231300 u^3 - 346500 u^4) w^{13} + \\
 & \quad u^{17} (122 - 509 u - 31020 u^2 - 30150 u^3 + 247500 u^4) w^{14} - \\
 & \quad 2 u^{19} (199 + 72 u + 8850 u^2 + 61875 u^3) w^{15} + \\
 & \quad 6 u^{21} (134 + 1490 u + 6875 u^2) w^{16} - 30 u^{23} (43 + 275 u) w^{17} + 750 u^{25} w^{18}
 \end{aligned}$$

(*Cancelando o termo u^3 *)

CU11 = Expand [CU1 / u³]
expande fatores

$$\begin{aligned}
& -2 u + 6 u w + 38 u^2 w + 10 u^3 w - 66 u^2 w^2 - 286 u^3 w^2 - 110 u^4 w^2 + 75 u w^3 + 870 u^2 w^3 + 4094 u^3 w^3 + \\
& 9397 u^4 w^3 + 9875 u^5 w^3 + 5429 u^6 w^3 + 1320 u^7 w^3 + 675 u^2 w^4 + 4800 u^3 w^4 + 11834 u^4 w^4 + \\
& 12263 u^5 w^4 + 10907 u^6 w^4 + 13166 u^7 w^4 + 12148 u^8 w^4 + 4829 u^9 w^4 - 5460 u^4 w^5 - 32521 u^5 w^5 - \\
& 75808 u^6 w^5 - 107989 u^7 w^5 - 106207 u^8 w^5 - 67661 u^9 w^5 - 15922 u^{10} w^5 + 5307 u^{11} w^5 - 210 u^5 w^6 + \\
& 13483 u^6 w^6 + 63562 u^7 w^6 + 131327 u^8 w^6 + 150815 u^9 w^6 + 85359 u^{10} w^6 - 18436 u^{11} w^6 - \\
& 38337 u^{12} w^6 + 2355 u^{13} w^6 + 3145 u^7 w^7 + 5741 u^8 w^7 - 3535 u^9 w^7 - 1393 u^{10} w^7 + 62424 u^{11} w^7 + \\
& 168399 u^{12} w^7 + 113370 u^{13} w^7 - 22155 u^{14} w^7 + 375 u^{15} w^7 + 25 u^8 w^8 - 15067 u^9 w^8 - 66055 u^{10} w^8 - \\
& 143689 u^{11} w^8 - 241416 u^{12} w^8 - 339426 u^{13} w^8 - 164070 u^{14} w^8 + 92775 u^{15} w^8 - 4125 u^{16} w^8 + \\
& 312 u^{10} w^9 + 23903 u^{11} w^9 + 96299 u^{12} w^9 + 211638 u^{13} w^9 + 322056 u^{14} w^9 + 80370 u^{15} w^9 - \\
& 226575 u^{16} w^9 + 20625 u^{17} w^9 - 150 u^{11} w^{10} + 1339 u^{12} w^{10} - 8803 u^{13} w^{10} - 58314 u^{14} w^{10} - \\
& 130452 u^{15} w^{10} + 107226 u^{16} w^{10} + 354150 u^{17} w^{10} - 61875 u^{18} w^{10} + 328 u^{13} w^{11} - 5200 u^{14} w^{11} - \\
& 11784 u^{15} w^{11} - 13614 u^{16} w^{11} - 218736 u^{17} w^{11} - 363510 u^{18} w^{11} + 123750 u^{19} w^{11} - 417 u^{15} w^{12} + \\
& 5676 u^{16} w^{12} + 29901 u^{17} w^{12} + 172080 u^{18} w^{12} + 237510 u^{19} w^{12} - 173250 u^{20} w^{12} + 671 u^{17} w^{13} - \\
& 6974 u^{18} w^{13} - 68805 u^{19} w^{13} - 84150 u^{20} w^{13} + 173250 u^{21} w^{13} - 61 u^{18} w^{14} - 560 u^{19} w^{14} + \\
& 11055 u^{20} w^{14} + 1575 u^{21} w^{14} - 123750 u^{22} w^{14} + 199 u^{20} w^{15} + 942 u^{21} w^{15} + 12225 u^{22} w^{15} + \\
& 61875 u^{23} w^{15} - 402 u^{22} w^{16} - 4845 u^{23} w^{16} - 20625 u^{24} w^{16} + 645 u^{24} w^{17} + 4125 u^{25} w^{17} - 375 u^{26} w^{18}
\end{aligned}$$

CU22 = Expand [CU2 / u³]
expande fatores

$$\begin{aligned}
& 4 w - 24 w^2 - 92 u w^2 - 20 u^2 w^2 + 75 w^3 + 606 u w^3 + 1407 u^2 w^3 + 608 u^3 w^3 + 300 w^4 + 1785 u w^4 + \\
& 2446 u^2 w^4 - 2362 u^3 w^4 - 5368 u^4 w^4 - 5429 u^5 w^4 - 2640 u^6 w^4 - 1050 u w^5 - 10215 u^2 w^5 - 32924 u^3 w^5 - \\
& 44572 u^4 w^5 - 32926 u^5 w^5 - 13166 u^6 w^5 - 10962 u^7 w^5 - 9658 u^8 w^5 + 8025 u^3 w^6 + 51436 u^4 w^6 + \\
& 114021 u^5 w^6 + 134414 u^6 w^6 + 106207 u^7 w^6 + 90706 u^8 w^6 + 44243 u^9 w^6 - 10614 u^{10} w^6 + 330 u^4 w^7 - \\
& 16810 u^5 w^7 - 70303 u^6 w^7 - 124348 u^7 w^7 - 150815 u^8 w^7 - 169704 u^9 w^7 - 36949 u^{10} w^7 + \\
& 81684 u^{11} w^7 - 4710 u^{12} w^7 - 4690 u^6 w^8 - 19432 u^7 w^8 - 33208 u^8 w^8 + 1393 u^9 w^8 + 60246 u^{10} w^8 - \\
& 165594 u^{11} w^8 - 265080 u^{12} w^8 + 45060 u^{13} w^8 - 750 u^{14} w^8 - 40 u^7 w^9 + 21822 u^8 w^9 + 92378 u^9 w^9 + \\
& 143689 u^{10} w^9 + 169386 u^{11} w^9 + 505896 u^{12} w^9 + 454500 u^{13} w^9 - 192300 u^{14} w^9 + 8250 u^{15} w^9 - \\
& 743 u^9 w^{10} - 29854 u^{10} w^{10} - 96299 u^{11} w^{10} - 224910 u^{12} w^{10} - 629958 u^{13} w^{10} - 392580 u^{14} w^{10} + \\
& 480150 u^{15} w^{10} - 41250 u^{16} w^{10} + 250 u^{10} w^{11} - 1184 u^{11} w^{11} + 8803 u^{12} w^{11} + 98694 u^{13} w^{11} + \\
& 397530 u^{14} w^{11} + 38808 u^{15} w^{11} - 771300 u^{16} w^{11} + 123750 u^{17} w^{11} - 492 u^{12} w^{12} + 5200 u^{13} w^{12} - \\
& 6846 u^{14} w^{12} - 101376 u^{15} w^{12} + 278712 u^{16} w^{12} + 821520 u^{17} w^{12} - 247500 u^{18} w^{12} + 417 u^{14} w^{13} - \\
& 3696 u^{15} w^{13} - 15606 u^{16} w^{13} - 301320 u^{17} w^{13} - 569520 u^{18} w^{13} + 346500 u^{19} w^{13} - 396 u^{16} w^{14} + \\
& 12379 u^{17} w^{14} + 146250 u^{18} w^{14} + 231300 u^{19} w^{14} - 346500 u^{20} w^{14} + 122 u^{17} w^{15} - 509 u^{18} w^{15} - \\
& 31020 u^{19} w^{15} - 30150 u^{20} w^{15} + 247500 u^{21} w^{15} - 398 u^{19} w^{16} - 144 u^{20} w^{16} - 17700 u^{21} w^{16} - \\
& 123750 u^{22} w^{16} + 804 u^{21} w^{17} + 8940 u^{22} w^{17} + 41250 u^{23} w^{17} - 1290 u^{23} w^{18} - 8250 u^{24} w^{18} + 750 u^{25} w^{19}
\end{aligned}$$

(* As expressões acima (CU11, CU22) correspondem ao campo vetorial (4.11). *)

(* Pontos de equilíbrio. *)

NSolve[{CU11 == 0, CU22 == 0, u == 0}, Reals]

solução numérica

números

{ {u → 0., w → -0.476572}, {u → 0., w → 0.} }

(* Duas singularidades, uma na origem e a outra no ponto (0, -0.47). *)

(* Linearização do ponto (0, -0.47). *)

J[CU11, CU22, 0, -0.476572]

{ {-12.9774, 0.}, {31.4016, -51.9097} }

Eigensystem[{{-12.9774, 0}, {31.4016, -51.9097}}]

[\[autovalores e autovetores\]](#)

{{-51.9097, -12.9774}, {{0., 1.}, {0.778368, 0.627808}}}

(* Linearização do ponto (0,0). *)

J[CU11, CU22, 0, 0]

{{-2, 0}, {0, 4}}

(*Agora, blow up do campo vetorial (4.10) na direção y*)

CU31 = Simplify[$\frac{1}{w} \left((AU1011 /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}) - u (AU1022 /. \{u \rightarrow u w, w \rightarrow w\}) \right)$]

[\[simplifica\]](#)

$$\begin{aligned}
 & -u w^3 \left(150 (2 - 7w) + 750 u^{10} (-1 + w)^{11} w^{14} - 30 u^9 (-1 + w)^9 w^{12} (-157 + 89w + 43w^2) + \right. \\
 & \quad 6 u^8 (-1 + w)^8 w^{10} (-1769 - 538w + 1048w^2 + 134w^3) + 15 u (5 + 119w - 681w^2 + 535w^3 + 22w^4) - \\
 & \quad u^7 (-1 + w)^7 w^8 (-9658 - 23363w + 2328w^2 + 3295w^3 + 398w^4) + \\
 & \quad u^5 (-1 + w)^5 w^5 (5429 + 40311w + 41058w^2 + 7285w^3 + 417w^4) - \\
 & \quad 2 u^2 (-1 + w)^2 (12 - 279w - 1793w^2 + 13155w^3 + 2385w^4 + 20w^5) + \\
 & \quad 2 u^6 (-1 + w)^6 w^6 (-1320 - 13401w - 15253w^2 - 1755w^3 + 168w^4 + 61w^5) - \\
 & \quad \left. 2 u^4 (-1 + w)^4 w^2 (10 - 264w + 1568w^2 + 24359w^3 + 19755w^4 + 1576w^5 + 246w^6) + \right. \\
 & \quad \left. u^3 (-1 + w)^3 (-4 + 80w - 1155w^2 - 1347w^3 + 44076w^4 + 21093w^5 + 7w^6 + 250w^7) \right)
 \end{aligned}$$

CU32 = Simplify[AU1022 /. {u → u w, w → w}]

[\[simplifica\]](#)

$$\begin{aligned}
 & (-1 + w) w^4 \left(-375 + 375 u^{10} (-1 + w)^{10} w^{14} - \right. \\
 & \quad 15 u^9 (-1 + w)^9 w^{12} (157 + 43w) + 3 u^8 (-1 + w)^8 w^{10} (1769 + 1472w + 134w^2) + \\
 & \quad 15 u (-5 - 182w + 179w^2 + 8w^3) - u^7 (-1 + w)^7 w^8 (4829 + 10311w + 2661w^2 + 199w^3) - \\
 & \quad 3 u^2 (-1 + w)^2 (-6 + 162w + 2684w^2 + 530w^3 + 5w^4) + \\
 & \quad u^6 (-1 + w)^6 w^6 (1320 + 8054w + 5613w^2 + 702w^3 + 61w^4) - \\
 & \quad \left. u^4 (-1 + w)^4 w^2 (-10 + 448w + 6847w^2 + 7636w^3 + 665w^4 + 164w^5) + \right. \\
 & \quad \left. u^3 (-1 + w)^3 (2 - 46w + 925w^2 + 11019w^3 + 6031w^4 - 31w^5 + 100w^6) \right)
 \end{aligned}$$

CU311 = Expand[CU31/w³]

[\[expande fatores\]](#)

$$\begin{aligned}
 & -300 u - 75 u^2 + 24 u^3 - 4 u^4 + 1050 u w - 1785 u^2 w - 606 u^3 w + 92 u^4 w + 10215 u^2 w^2 - 2446 u^3 w^2 - \\
 & 1407 u^4 w^2 + 20 u^5 w^2 - 8025 u^2 w^3 + 32924 u^3 w^3 + 2362 u^4 w^3 - 608 u^5 w^3 - 330 u^2 w^4 - 51436 u^3 w^4 + \\
 & 44572 u^4 w^4 + 5368 u^5 w^4 + 16810 u^3 w^5 - 114021 u^4 w^5 + 32926 u^5 w^5 + 5429 u^6 w^5 + 4690 u^3 w^6 + \\
 & 70303 u^4 w^6 - 134414 u^5 w^6 + 13166 u^6 w^6 + 2640 u^7 w^6 + 40 u^3 w^7 + 19432 u^4 w^7 + 124348 u^5 w^7 - \\
 & 106207 u^6 w^7 + 10962 u^7 w^7 - 21822 u^4 w^8 + 33208 u^5 w^8 + 150815 u^6 w^8 - 90706 u^7 w^8 + 9658 u^8 w^8 + \\
 & 743 u^4 w^9 - 92378 u^5 w^9 - 1393 u^6 w^9 + 169704 u^7 w^9 - 44243 u^8 w^9 - 250 u^4 w^{10} + 29854 u^5 w^{10} - \\
 & 143689 u^6 w^{10} - 60246 u^7 w^{10} + 36949 u^8 w^{10} + 10614 u^9 w^{10} + 1184 u^5 w^{11} + 96299 u^6 w^{11} - \\
 & 169386 u^7 w^{11} + 165594 u^8 w^{11} - 81684 u^9 w^{11} + 492 u^5 w^{12} - 8803 u^6 w^{12} + 224910 u^7 w^{12} - \\
 & 505896 u^8 w^{12} + 265080 u^9 w^{12} + 4710 u^{10} w^{12} - 5200 u^6 w^{13} - 98694 u^7 w^{13} + 629958 u^8 w^{13} - \\
 & 454500 u^9 w^{13} - 45060 u^{10} w^{13} - 417 u^6 w^{14} + 6846 u^7 w^{14} - 397530 u^8 w^{14} + 392580 u^9 w^{14} + \\
 & 192300 u^{10} w^{14} + 750 u^{11} w^{14} + 3696 u^7 w^{15} + 101376 u^8 w^{15} - 38808 u^9 w^{15} - 480150 u^{10} w^{15} - \\
 & 8250 u^{11} w^{15} + 396 u^7 w^{16} + 15606 u^8 w^{16} - 278712 u^9 w^{16} + 771300 u^{10} w^{16} + 41250 u^{11} w^{16} - 122 u^7 w^{17} - \\
 & 12379 u^8 w^{17} + 301320 u^9 w^{17} - 821520 u^{10} w^{17} - 123750 u^{11} w^{17} + 509 u^8 w^{18} - 146250 u^9 w^{18} + \\
 & 569520 u^{10} w^{18} + 247500 u^{11} w^{18} + 398 u^8 w^{19} + 31020 u^9 w^{19} - 231300 u^{10} w^{19} - 346500 u^{11} w^{19} + \\
 & 144 u^9 w^{20} + 30150 u^{10} w^{20} + 346500 u^{11} w^{20} - 804 u^9 w^{21} + 17700 u^{10} w^{21} - 247500 u^{11} w^{21} - \\
 & 8940 u^{10} w^{22} + 123750 u^{11} w^{22} + 1290 u^{10} w^{23} - 41250 u^{11} w^{23} + 8250 u^{11} w^{24} - 750 u^{11} w^{25}
 \end{aligned}$$

CU322 = Expand[CU32/w³]
 [expande fatores]

$$\begin{aligned}
 & 375 w + 75 u w - 18 u^2 w + 2 u^3 w - 375 w^2 + 2655 u w^2 + 540 u^2 w^2 - 54 u^3 w^2 - 5415 u w^3 + 6540 u^2 w^3 + \\
 & 1121 u^3 w^3 - 10 u^4 w^3 + 2565 u w^4 - 21090 u^2 w^4 + 7035 u^3 w^4 + 498 u^4 w^4 + 120 u w^5 + 18915 u^2 w^5 - \\
 & 32309 u^3 w^5 + 4507 u^4 w^5 - 3327 u^2 w^6 + 38213 u^3 w^6 - 22019 u^4 w^6 - 1545 u^2 w^7 - 6741 u^3 w^7 + \\
 & 26425 u^4 w^7 - 1320 u^6 w^7 - 15 u^2 w^8 - 13691 u^3 w^8 + 6979 u^4 w^8 + 1186 u^6 w^8 + 6755 u^3 w^9 - \\
 & 36743 u^4 w^9 + 23045 u^6 w^9 - 4829 u^7 w^9 - 431 u^3 w^{10} + 26323 u^4 w^{10} - 84345 u^6 w^{10} + 28321 u^7 w^{10} + \\
 & 100 u^3 w^{11} - 5951 u^4 w^{11} + 122670 u^6 w^{11} - 55385 u^7 w^{11} - 5307 u^8 w^{11} + 155 u^4 w^{12} - 72030 u^6 w^{12} + \\
 & 2805 u^7 w^{12} + 43347 u^8 w^{12} - 164 u^4 w^{13} - 13272 u^6 w^{13} + 166470 u^7 w^{13} - 151710 u^8 w^{13} - 2355 u^9 w^{13} + \\
 & 40380 u^6 w^{14} - 307902 u^7 w^{14} + 290430 u^8 w^{14} + 22905 u^9 w^{14} - 18630 u^6 w^{15} + 267078 u^7 w^{15} - \\
 & 312210 u^8 w^{15} - 99525 u^9 w^{15} - 375 u^{10} w^{15} + 1980 u^6 w^{16} - 114990 u^7 w^{16} + 146034 u^8 w^{16} + \\
 & 253575 u^9 w^{16} + 4125 u^{10} w^{16} + 275 u^6 w^{17} + 14295 u^7 w^{17} + 59976 u^8 w^{17} - 417150 u^9 w^{17} - \\
 & 20625 u^{10} w^{17} + 61 u^6 w^{18} + 5405 u^7 w^{18} - 129240 u^8 w^{18} + 458010 u^9 w^{18} + 61875 u^{10} w^{18} - 1069 u^7 w^{19} + \\
 & 77445 u^8 w^{19} - 332010 u^9 w^{19} - 123750 u^{10} w^{19} - 199 u^7 w^{20} - 19965 u^8 w^{20} + 147150 u^9 w^{20} + \\
 & 173250 u^{10} w^{20} + 798 u^8 w^{21} - 28575 u^9 w^{21} - 173250 u^{10} w^{21} + 402 u^8 w^{22} - 5475 u^9 w^{22} + \\
 & 123750 u^{10} w^{22} + 4095 u^9 w^{23} - 61875 u^{10} w^{23} - 645 u^9 w^{24} + 20625 u^{10} w^{24} - 4125 u^{10} w^{25} + 375 u^{10} w^{26}
 \end{aligned}$$

NSolve[{CU311 == 0, CU322 == 0, w == 0}, Reals]
 [solução numérica] [números]

{{u → -2.09832, w → 0.}, {u → 0., w → 0.}}

J[CU311, CU322, 0, 0]

{{-300, 0}, {0, 375}}

(* Singularidades analisadas com o blow up do campo vetorial (4.10) na direção x. *)